DRA. FRANJE HOČEVARA

ARITMETIKA

ZA

VII. I VIII. RAZRED SREDNJIH ŠKOLA

PREVEO

DR. VLADIMIR VARIĆAK,
KR. SVEUČILIŠNI PROFESOR U ZAGREBU.

CIJENA 5 K.

U ZAGREBU
TROŠAK I NAKLADA KR. HRV.-SLAV. ZEMALJSKE VLADE
1919.

Ova se knjiga ne smije skuplje prodavati nego za cijenu naznačenu na prednjoj strani.

Kr. zemaljska tiskara u Zagrebu.

Sadržaj

Prvi odsječak

Drugi odsječak

Treći odsječak

Četvrti odsječak

Peti odsječak

*

Strana

Šesti odsječak

Sedmi odsječak

Osmi odsječak

I. Odsječak.

Pojam derivacije (diferencijalnog kvocijenta.)

§ 1. *a)* **O toku linearne funkcije.** Linearna funkcija $y = ax + b$ predočena je pravcem. Koeficijentom a određen je smjer pravca. Ako je a pozitivno, pravac se uspinje nad os X, kad ga promatramo s lijeva na desno. Zato se koeficijent smjera a zove i *uspon* pravca. Kad je a negativno, uspon je pravca negativan, t. j. ordinate bivaju manje, kad pravcem prolazimo tako, da apscise njegovih točaka rastu.

Linearna funkcija $y = ax + b$ naraste vazda za isti iznos Δy, kad varijabla x poraste za Δx. Dademo li varijabli x prirast Δx, funkcija y naraste za Δy. Kako dakle vrijednosti varijable $x + \Delta x$ odgovara vrijednost $y + \Delta y$ linearne funkcije, bit će

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b.$$

Oduzmemo li od toga $y = ax + b$,

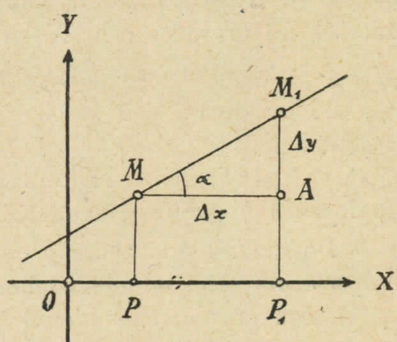
preostane $\Delta y = a \cdot \Delta x.$

Podijelivši sa Δx dobijemo odatle

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Omjer prirasta funkcije i varijable kod linearne je funkcije stalna veličina.

Označimo li na pravcu ma gdje dvije točke M i M_1, pa pustimo li prvu točku da prijeđe u drugu, njezina apscisa x poraste za Δx, a ordinata y za Δy. Omjer $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ostaje isti, pa ma gdje na pravcu uzeli te dvije točke. To svojstvo pripada samo pravcu.



Slika 1.

Zatvora li pravac s pozitivnom stranom osi X kut α, razbiramo iz slike, da je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{ili} \quad a = \operatorname{tg}\alpha.$$

Koeficijent smjera ili uspon pravca jednak je tangensu kuta, što ga pravac zatvara s pozitivnom stranom apscisne osi.

Kad se snima karta koga kraja ili crta plan polja, tad se svaka točka prikazuje svojom projekcijom na horizontalnu ravninu. Kadšto se kraj te projekcije pripiše visina točke nad horizontalnom ravninom. Uspon je pravca tad jednak kvocijentu diferencije visina dviju točaka pravca i razmaka njihovih projekcija.

Recimo da smo na karti za neku cestu našli, da je duga 3 *km*, da joj početak leži 250 *m*, a svršetak 310 *m* iznad nivoa mora. Uspon te ceste dan je kvocijentom

$$\frac{310 - 250}{3000} = \frac{60}{3000} = \frac{1}{50}.$$

Uspon iznosi $\frac{1}{50}$ ili $\frac{2}{100}$, dakle 2%.

Kod državnih cesta dopušten je uspon od $2{\cdot}5\%$, u brdovitu kraju do 4%, u gorama 5%, a samo izuzetno i na kraće razmake 6 procenata horizontalne projekcije ceste.

Uz željezničke pruge naznačeno je na tablicama, koliki je uspon pruge i dokle taj uspon ostaje isti. Već je vrlo velik uspon, ako iznosi $25‰$. Toliko iznosi uspon pruge od Rijeke do Liča, dok od Komorskih Moravica do Sušice iznosi $16‰$.

Primjer. 1. Jednadžba je pravca $y = \frac{1}{2}x + 3$. *a)* Koliku ordinatu imadu točke, kojima je apscisa $x = 0, 1, 2, 3, 4$? *b)* Ako je $\Delta x = 0{\cdot}1, 0{\cdot}01, 0{\cdot}001 \ldots$, koliko je Δy? *c)* Koji kut zatvora taj pravac s osju X? *d)* Nacrtaj taj pravac.

2. Ista pitanja za pravac $y = x$.

3. Izračunaj, pod kojim se kutom smiju uzdizati državne ceste?

4. Pod kojim se kutom diže željeznička pruga od Rijeke do Liča? Pod kojim pak od Komorskih Moravica do Sušice?

Dodatak. Jednadžbom $y = c$ predočen je pravac paralelan s apscisnom osi i od nje udaljen za c. Istaknemo li jednu točku (x, c) toga pravca, pa dademo li varijabli x prirast Δx, y se ne će promijeniti, jer sve točke toga pravca imadu istu ordinatu.

Zato je $\Delta y = \Delta c = 0$, stoga je uspon tog pravca $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, pa je tako i $\operatorname{tg} \alpha = 0$, dakle $\alpha = 0$.

*(b)**) **Diskusija jednadžbe** $a\,x + b = 0$. Ako je *a različito od nule*, linearna funkcija $y = a\,x + b$ poništava se samo za jednu jedinu vrijednost varijable; t. j. ima samo jedna vrijednost varijable x, uz koju je $y = 0$. Ta je vrijednost varijable korijen jednadžbe $a\,x + b = 0$, naime $x = -\frac{b}{a}$. Podjedno je to apscisa točke, u kojoj pravac $y = a\,x + b$ presijeca os X.

Pravac taj prolazi točkom $(0, b)$ na ordinatnoj osi, i s osju X zatvara kut, komu je tangens jednak a. Pustimo li uspon pravca t. j. koeficijent a da bude sve manji i manji, presjek onog pravca s apcisnom osju sve se više udaljuje od ishodišta. Uzmimo na pr.:

$$b = 1,\ a = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ \frac{1}{1000},\ \ldots,$$

onda je $x = -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \ldots -1000,\ \ldots.$

Postane li a vrlo maleno, x je po apsolutnoj vrijednosti vrlo veliko. Kad napokon bude a jednako nuli, x postane beskonačno veliko.

Ako dakle u jednadžbi $a\,x + b = 0$ pustimo da postane $a = 0$, jednadžba ima rješenje $x = \infty$. Pri tom valja dobro držati na umu, da je koeficijent a *promjenljiv* opći broj, koji dobiva sve manju i manju vrijednost, te da mi svraćamo naročitu pažnju na to, šta će biti s rješenjem x kad a mijenjajući se postane jednak nuli.

Kad bi se uzelo, da je a stalan broj, koji ima samo jednu vrijednost, naime nulu, onda u onoj jednadžbi ne bi x ni dolazilo, pa se prema tome ne bi x iz nje ni moglo odrediti.

(c) **O toku kvadratne funkcije.** Iz Aritmetike za VI. razred neka se ponovi odsječak o kvadratnoj funkciji naročito § 21. i 22. *a) — d)*.

(d) **Diskusija jednadžbe** $ax^2 + 2\,bx + c = 0$. Podijelivši s a dobijemo jednadžbu:

$$x^2 + \frac{2\,b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0, \qquad (1)$$

*) Zagrađeni paragrafi neka se uzmu samo u realnim gimnazijama.

kojoj su korijeni:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

Da razaberemo, što biva s tim korijenima, kad a stane težiti k nuli, uzet ćemo najprije da je a vrlo malen broj. Ogledat ćemo na pr. jednadžbu:

$$\frac{1}{1000} x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Prema prethodnoj formuli (2), njeni su korijeni:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 0{\cdot}003}}{0{\cdot}001}$$

A kako je $\sqrt{1{\cdot}003} = 1{\cdot}00149\ldots$, korijeni su

$$x_1 = \frac{-1 + 1{\cdot}00149}{0{\cdot}001} = 1{\cdot}49\ldots,$$

$$x_2 = \frac{-1 - 1{\cdot}00149}{0{\cdot}001} = -2001{\cdot}49\ldots$$

Prvi korijen malo se razlikuju od $\frac{3}{2}$, t. j. od rješenja linearne jednadžbe $2x - 3 = 0$, koja se dobije, kad se u danoj jednadžbi uzme koeficijent od x^2 da je nula. Drugi pak korijen po svojoj apsolutnoj vrijednosti vrlo je velik.

Uzmemo li pak jednadžbu:

$$\frac{1}{1\,000\,000} x^2 + 2x - 3 = 0,$$

tad je

$$x_1 = 1{\cdot}499\ldots$$

$$x_2 = -2\,000\,001{\cdot}49\ldots$$

Što manji biva a, to više se korijen x_1 približava vrijednosti $\frac{3}{2}$, dok apsolutna vrijednost drugog korijena biva sve veća i veća. I sad slutimo, da će uz $\lim a = 0$, korijen x_1 biti jednak rješenju linearne jednadžbe:

$$2bx + c = 0,$$

dok će drugi korijen x_2 postati beskonačno velik. Tu slutnju možemo lako i potvrditi.

Po onom, što se učilo u VI. razredu, znademo, da je zbroj korijena uređene kvadratne jednadžbe jednak koeficijentu drugoga člana s protivnim predznakom, a produkt korijena jednak je trećem članu.

Dakle je za jednadžbu (1)

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \qquad (3)$$

Kad a teži k nuli, zbroj korijena t. j. razlomak $-\frac{2b}{a}$ postaje neizmjerno velik. Stoga barem jedan od onih korijena mora biti neizmjerno velik. Recimo, da je to x_2. Da odredimo x_1, razdijelit ćemo jednadžbe (3) jednu s drugom, pa će izaći

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{2b}{c}.$$

Skratimo li s x_2 brojnik i nazivnik desne strane dobit ćemo

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} + 1}{x_1} = -\frac{2b}{c}.$$

Kako je $x_2 = \infty$, razlomak je $\frac{x_1}{x_2} = 0$, pa tako ostane

$$\frac{1}{x_1} = -\frac{2b}{c},$$

ili

$$x_1 = -\frac{c}{2b}.$$

§ 2. **Derivacija kvadratne funkcije.** *a)* Uzmimo najprije kvadratnu funkciju $y = x^2$. Dademo li varijabli x prirast Δx, porast će funkcija za Δy, pa je tako

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x . \Delta x + (\Delta x)^2$$

Odbivši od toga $y = x^2$, dobijemo

$$\Delta y = 2x . \Delta x + (\Delta x)^2,$$

ili

$$\Delta y = (2x + \Delta x) . \Delta x. \qquad (1)$$

Tim je izrazom dan prirast kvadratne funkcije $y = x^2$, kad varijabla x poraste za Δx. Što je manji prirast Δx, t. j. što se Δx manje razlikuje od nule, to manje se $2x + \Delta x$ razlikuje od $2x$, pa tako se i Δy to manje razlikuje od $2x . \Delta x$. No kako se produkt $2x . \Delta x$ od nule to manje razlikuje, što je manji faktor Δx, vidimo da će i prirast funkcije Δy biti to manji, što je manji prirast varijable Δx. Uzimajući Δx dosta maleno, možemo učiniti, da se prirast Δy od nule razlikuje za manje od ma kako malene dane veličine.

Postavimo na pr. $x = 5$ pa potražimo koliko mora biti Δx da se Δy od nule razlikuje za manje od 0·01.

Po formuli $\qquad \Delta y = 2\,x.\,\Delta x + (\Delta x)^2$

imamo $\qquad \Delta y = 10\,\Delta x + (\Delta x)^2.$

Uzmu li se za Δx vrijednosti 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001 . . . , dobit ćemo za Δy redom

1·01, 0·1001, 0·010001, 0·00100001, ...

Prve tri vrijednosti veće su, nego što ih dopuštamo za Δy, dok je četvrta manja. Po tom razbiramo, da će Δy bit manje od 0·01, čim Δx uzmemo manje od 0·0001. Podjedno razbiramo da Δy doista biva to manje, što manje uzmemo Δx. *Zajedno s prirastom varijable opada i prirast funkcije prema nuli.*

b) Podijelimo li jednadžbu (1) sa Δx izađe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,x + \Delta x. \qquad (2)$$

Kod linearne funkcije vidjeli smo, da je taj kvocijent konstantan. Kod kvadratne zavisi on o varijabli x i njenom prirastu Δx. No što manji uzmemo prirast Δx, tim će se manje razlikovati taj kvocijent od $2\,x$. Hoćemo li, da se taj kvocijent od $2\,x$ bude razlikovao za manje od jedne stotisućine ili jedne milijuntine i t. d., treba samo uzeti, da je Δx jednak jednoj stotisućini, jednoj milijuntini i t. d. Postaje li prirast Δx sve manji i manji, kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ približava se sve više i više vrijednosti $2\,x$, jer onaj drugi sumand na desnoj strani izraza (2) postaje sve manji. Na taj način možemo reći, da će kod prelaza na granicu kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ postati jednak $2\,x$. Formulom se to naznačuje ovako:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,x \text{ za } \lim \Delta x = 0.$$

Granica kvocijenta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za $\lim \Delta x = 0$ zove se *derivacija funkcije* i bilježi se s y'. Prema tome je

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \text{ za } \lim \Delta x = 0.$$

Ako je funkcija $y = x^2$, *njezina je derivacija* $y' = 2x$.

Napomena. U prethodnom smo paragrafu za linearnu funkciju $y = ax + b$ bili našli, da je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, t. j. stalna veličina. Tu će stalnu vrijednost zadržati taj kvocijent i ako se pusti da Δx biva sve manje i manje. Na taj je način

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \text{ za } \lim \Delta x = 0,$$

ili $y' = a$, i to je *derivacija linearne funkcije* $y = ax + b$.

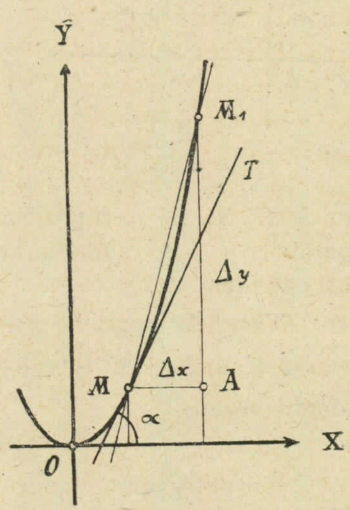
Uz $y = x$ bilo bi $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, pa je stoga $y' = 1$.

Za $y = c$ bili smo našli $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Stoga će biti i

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \text{ili} \quad y' = 0.$$

Derivacija konstante jednaka je nuli.

c) Kvocijentom $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kako je dan formulom (2) određen je uspon pravca, koji spaja točku $M(x, y)$ s točkom $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. A kako te točke leže na paraboli $y = x^2$, možemo reći, da je tim kvocijentom predočen uspon sekante MM_1 te parabole. Ostavimo li točku M na svom mjestu, pa pustimo li da se M_1 ostajući na paraboli sve više približava točki M, približavat će se sekanta MM_1 određenom graničnom položaju MT. Taj granični položaj zovemo *tangentom* parabole u točki M.



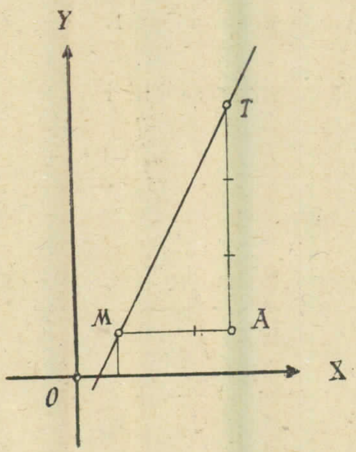
Slika 2.

Graničnom vrijednosti kvocijenta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, t. j. derivacijom y' određen je uspon tangente u točki (x, y) one parabole. Uspon pravca jednak je trigonometrijskoj tangenti kuta, što ga taj pravac zatvora s pozitivnom stranom osi apscisa. Zatvara li tangenta s osju X kud α, tad je

$$\operatorname{tg} \alpha = y'$$

t. j.
$$\operatorname{tg} \alpha = 2x. \qquad (3)$$

S pomoću tog izraza možemo lako konstruirati tangentu u svakoj točki parabole $y = x^2$. U točki (0, 0) t. j. u ishodištu koordinata uspon je tangente jednak nuli. U ishodištu je apscisna os tangenta parabole.



Slika 3a.

Uzmimo onda točku M (1, 1). U toj je točki prema formuli (3) uspon tangente, t. j. $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Kako se konstruira kut, kad je zadan njegov tangens, to znademo iz Trigonometrije. Nanesemo li od točke M (sl. 3*a*) na desno, u horizontalnom smjeru ma kakvu dužinu, recimo 1·5 *cm*, pa u njenoj krajnjoj točki uzdignemo dužinu dva puta toliku, dok ne dođemo do točke T; spojnica TM tražena je tangenta. Doista je TM pravac, koji prolazi točkom M i osju X zatvora kut α, kojega je tangens jednak 2. Na taj način vidimo da možemo u pojedinim točkama parabole $y = x^2$ konstruirati tangentu, a da same parabole i ne nacrtamo.

Tangente parabole $y = x^2$ (sl. 3*b*) u točkama

$$(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)$$

imadu uspon

$$-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6.$$

Da potegnemo tangentu u točki $(-2, 4)$, nacrtat ćemo pravac, komu je uspon $\frac{4}{-1}$. Iz točke $(-2, 4)$ odmjerit ćemo u horizontalnom smjeru na lijevo dužinu 1, pa u njenoj krajnjoj točki uzdići dužinu 4 puta toliku. Spojnica tako dobivene točke s točkom (— 2, 4) tražena je tangenta. Nacrtamo li na taj način tangente u onih šest točaka, vidjet ćemo, da je tim tangentama jasno određen oblik one parabole.

d) Sad ćemo odrediti derivaciju funkcije

$$y = a\,x^2.$$

Dademo li varijabli x prirast $\Delta\,x$, funkcija će y porasti za $\Delta\,y$, pa će biti

$y + \Delta\,y = a\,(x + \Delta\,x)^2 = a\,[x^2 + 2\,x.\,\Delta\,x + (\Delta\,x)^2]$.

Odbijemo li od toga danu funkciju $y = a\,x^2$, ostane

$\Delta\,y = 2\,a\,x.\,\Delta\,x + a\,(\Delta\,x)^2$.

Otud izlazi

$$\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = 2a\,x + a\cdot\Delta\,x.$$

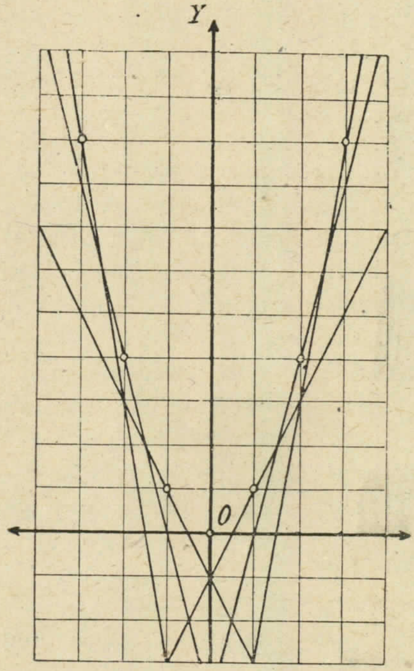
Pustimo li da $\Delta\,x$ bude sve manje i manje,

za $\lim \Delta\,x = 0$

dobit ćemo

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,a\,x,$$

ili $\quad y' = 2\,a\,x.$



Slika 3b.

Konstantni faktor. funkcije ulazi kao faktor i u derivaciju.

Na pr. $y = 3\,x^2$, $y' = 6\,x$.

Pokaži, da istu derivaciju ima i funkcija $y = 3\,x^2 + 10$.
Aditivna konstanta funkcije ne prelazi u derivaciju.

e) Uzmimo sad kvadratnu funkciju

$$y = 5\,x^2 + 2\,x + 7.$$

Poraste li x za $\Delta\,x$, porast će y za $\Delta\,y$. Među $x + \Delta\,x$ i $y + \Delta\,y$ postojat će ista relacija, koja po prethodnoj jednadžbi postoji među x i y. Stoga je

$$y + \Delta\,y = 5\,(x + \Delta\,x)^2 + 2\,(x + \Delta\,x) + 7.$$
$$= 5\,x^2 + 10\,x\cdot\Delta\,x + 5\,(\Delta\,x)^2 + 2\,x + 2\cdot\Delta\,x + 7.$$

Odbije li se od toga zadana jednadžba ostane

$$\Delta\,y = 10\,x\cdot\Delta\,x + 2\cdot\Delta\,x + 5\,(\Delta\,x)^2,$$

a otud izlazi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x + 2 + 5 \cdot \Delta x.$$

Što se Δx manje razlikuje od nule, to se više prethodni izraz na desnoj strani približava vrijednosti $10x + 2$, pa je stoga

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x + 2 \text{ za } \lim \Delta x = 0,$$

ili

$$y' = 10x + 2. \tag{5}$$

Zadana funkcija sastoji se od tri člana. Prvi je $5x^2$. Po točki *d)* njegova je derivacija $10x$. Drugi je član $2x$, a treći je konstanta 7. Po napomeni u točki *b)* njihove su derivacije 2 i 0. Po formuli (5) razbira se, da je derivacija funkcije (4) jednaka sumi derivacija njenih sastojina. A dade se pokazati, da općeno postoji poučak:

Derivacija sume jednaka je sumi derivacija pojedinih sumanda.

f) Uzmimo sad općenu kvadratnu funkciju

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{6}$$

Radeći kao i dosad, dobit ćemo po redu

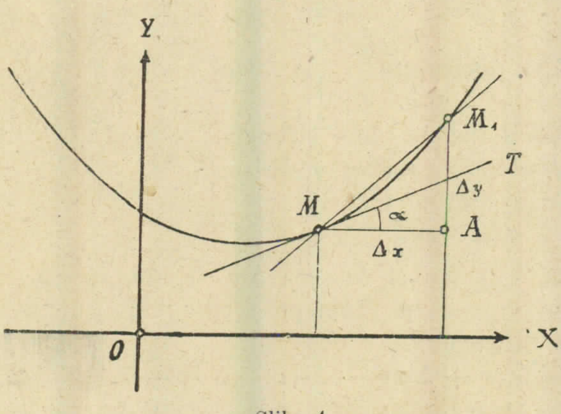
$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c,$$

$$\Delta y = 2ax \cdot \Delta x + b \cdot \Delta x + a(\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a \cdot \Delta x.$$

Prelazom na granicu izlazi otud

$$y' = 2ax + b. \tag{7}$$



Slika 4.

Jednadžbom (6) predočena je jedna parabola. Uočimo tu parabolu i istaknimo na njoj dvije točke $M(x, y)$ i $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Koeficijent smjera sekante MM_1 dan je izrazom $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Pustimo li, da Δx biva sve manje i manje, približavat će se točka M_1 točki M i na granici će sekanta prijeći u tangentu.

Poradi toga je koeficijent smjera za tangentu parabole (6) u točki $M(x, y)$ dan formulom (7).

Primjer. 1. Razmatranjem poput onoga u *a)* i *b)* pokaži, da je derivacija funkcije $y = x^3$ dana izrazom $y' = 3x^2$.

2. Uvjeri se, da je derivacija funkcije $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ jednaka $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

§ **3. Derivacija razlomka.** Idemo sad da odredimo koeficijent smjera za tangentu istostrane hiperbole

$$y = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Prijeđemo li od točke (x, y) te hiperbole na njezinu susjednu točku $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, bit će

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x},$$

pa je stoga, kad odbijemo (1)

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

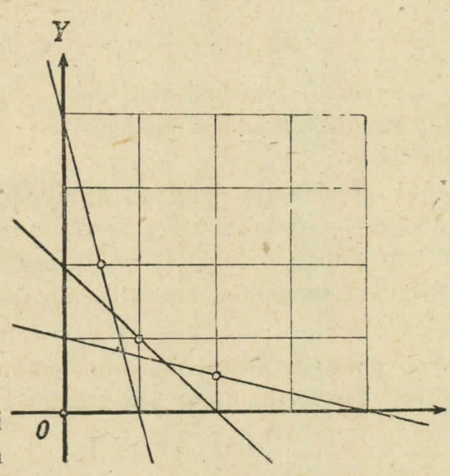
te

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

Bude li Δx sve manje i manje, zagrađeni faktor u nazivniku desne strane ima x za granicu, pa je tako

$$y' = -\frac{1}{x^2}. \tag{2}$$

Uzmimo za jedinicu dužine 1 *cm*. Točke $(\frac{1}{2}, 2)$, $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$ leže na onoj grani hiperbole (1), koja je u prvom kvadrantu. Koeficijent smjera tangenata u tim točkama redom je jednak -4, -1, $-\frac{1}{4}$. Nanesemo li u prvoj točki horizontalno u pozitivnom smjeru dužinu 1, a onda vertikalno u negativnom



Slika 5.

smjeru dužinu 4, pa spojimo dobivenu točku s točkom $(\frac{1}{2}, 2)$, dobit ćemo tangentu u toj točki. Konstruiraju li se tako tangente i u drugim dvjema točkama, vidjet ćemo, da već i te tri tangente približno određuju oblik krivulje.

Primjeri. 1. Udopuni tu konstrukciju tangenata u simetrično položenim točkama $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(-1, -1)$, $(-2, -\frac{1}{2})$.

2. Odredi derivaciju funkcije $y = \frac{1}{x^2}$.

2. Tako isto za funkciju $y = \frac{1}{1+x}$.

4. Nacrtaj krivulje predočene funkcijama $y = \frac{1}{1+x}$ i $y = \frac{1}{x^2}$. (Zakon gravitacije!).

Pokaži da su koordinatne osi asimptote za krivulju gravitacije. Zašto je os Y njezina os simetrije? Zašto leži krivulja samo u 1. i 2. kvadrantu?

Dodatak. Primjeri za recipročnu proporcionalnost:

1. Snošaj među tlakom p i volumenom v plina dan je u izvjesnim granicama *Mariotteovim* zakonom $pv = c$.

2. Potencijal točke u električnom polju, koja ima udaljenost r od čestice s nabojem e, dan je izrazom $V = \frac{e}{r}$.

3. Struji li tekućina kroz cijev, koja nije posvuda jednako široka, produkt brzine v tekućine i presjeka cijevi q konstantna je veličina.

§ 4. **Derivacija drugoga korijena:** *a)* Jednadžbom $y^2 = x$ predočena je parabola, kojoj je vrh u ishodištu, a os joj pada u os X. Hoćemo li u točki (x, y) te parabole da odredimo koeficijent smjera tangente, napisat ćemo jednadžbu u obliku

$$y = \sqrt{x}, \tag{1}$$

pa ćemo ponoviti postupak, kojim smo u prethodnim primjerima određivali derivaciju. Imat ćemo najprije

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x},$$

dakle

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x},$$

ili učinivši brojnik da je racionalan

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}},$$

a otuda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Za lim $\Delta x = 0$ prijeđe to u

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad (2)$$

Primjer 1. Odredi koeficijent smjera za tangentu parabole $y^2 = 2px$.

b) U Analitičkoj geometriji uči se, da je elipsa, kojoj je središte u ishodištu, a osi joj padaju u smjer koordinatnih osi, predočena jednadžbom

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (3)$$

a i b znače polovicu velike i male osi. Napišemo li tu jednadžbu u obliku

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad (4)$$

moći ćemo na posve isti način kao i kod parabole odrediti koeficijent smjera za tangentu. Poraste li x za Δx, porast će y za Δy, pa je tako

$$y + \Delta y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x + \Delta x)^2},$$

dakle

$$\Delta y = \frac{b}{a}[\sqrt{a^2 - (x + \Delta x)^2} - \sqrt{a^2 - x^2}],$$

ili

$$\Delta y = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2}{\sqrt{a^2 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{a^2 - x^2}},$$

a otuda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{a^2 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Uz lim $\Delta x = 0$ prijeđe to na granici u

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \qquad (5)$$

S obzirom na jednadžbu elipse (4) možemo to napisati i u obliku

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}. \tag{6}$$

Bude li $a = b = r$, prijeđe elipsa u krug s polumjerom r, a prethodni izraz prijeđe u

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{7}$$

Primjeri. 1. Odredi izraz (7) direktno iz jednadžbe kruga $x^2 + y^2 = r^2$. Što znači taj izraz geometrijski?

2. Pokaži, da je kod hiperbole $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ koeficijent smjera tangente u točki (x, y) dan izrazom

$$y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Dodatak. Granicu kvocijenta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, u kom držimo da je Δx promljenljiva veličina, koja biva sve manja i manja, nazvali smo derivacijom funkcije y i bilježili smo je s y'. No ta se granica običava zvati još i *diferencijalnim kvocijentom*, pa se tad bilježi simbolom $\frac{dy}{dx}$, tako da je

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \text{ za } \lim \Delta x = 0.$$

Da se sprijateljimo i s tom oznakom, ispisat ćemo sad funkcije, kojima smo dosad odredili derivacije, pa uz njih staviti njihove diferencijalne kvocijente.

$$y = x^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2x;$$

$$y = ax + b, \quad \frac{dy}{dx} = a;$$

$$y = ax^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2ax;$$

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \frac{dy}{dx} = 2ax + b;$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2};$$

$$y = \sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

§ 5. **Brzina točke.** Kad je dana jednadžba krivulje, može se s pomoću derivacije odrediti koeficijent smjera tangente u određenoj točki krivulje, a tim i sama tangenta. Pošavši od tog geometrijskog *problema tangente* došao je njemački filozof i matematik *G. Leibniz* (1646.—1715.) do diferencijalnoga računa. Velikog engleskog prirodnjaka i matematika *I. Newtona* (1643.—1727.) dovela su pak mehanička pitanja, naročito *određivanje brzine* na diferencijalni račun.

a) Neka je t vrijeme, a s put, što ga je za to vrijeme prevalila točka, koja se giba po ma kakvom zakonu. Put s funkcija je vremena t. Poraste li vrijeme za Δt, prevalit će točka još put Δs. Kvocijent $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ zove se brzina točke u tom vremenu Δt. Kad je gibanje jednoliko, ne zavisi taj kvocijent o porastu vremena Δt. No kad je gibanje nejednoliko, tad ćemo za svako Δt dobiti drugu vrijednost kvocijenta $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, i tu ćemo zvati *srednjom brzinom* u intervalu vremena od t do $t + \Delta t$. To je naime brzina onog jednolikog gibanja, kod koga bi točka put Δs prevalila u vremenu Δt. Taj ćemo pojam srednje brzine objasniti ovim primjerom o gibanju brzog vlaka iz Rijeke u Zagreb. Iz voznog reda na toj pruzi ispisat ćemo ove podatke:

Stanica	Udaljenost u *km* od stanice do stanice	Udaljenost u *km* od Rijeke	Vožnja u minutama od stanice do stanice	Dolazak sat	Dolazak čas	Odlazak sat	Odlazak čas
Rijeka . . .	—	—	—	—	—	8	00
Bakar . . .	11·8	11·8	29	8	29	8	29
Meja	7·9	19·7	19	8	48	8	50
Plase	7·4	27·1	19	9	09	9	14
Fužine . . .	16·3	43·4	33	9	47	9	48
K. Moravice	46·5	89·9	74	11	02	11	08
Ogulin . . .	29·6	119·5	40	11	48	11	49
Karlovac. .	56·4	175·9	69	12	58	12	59
Zagreb . . .	52·6	228·5	58	1	57	2	18

Rijeka je od Zagreba 228·5 *km* = 228.500 *m* daleko, i tu udaljenost prijeđe brzi voz za 341 minutu, giba se dakle srednjom brzinom od 670·09 *m* po minuti. No kako ta pruga ide gorovitim krajem, ne giba se voz istom brzinom na pojedinim odsječcima pruge. Zato ćemo dobiti točniji pregled o gibanju voza, ako potražimo, kojom se brzinom on giba od jedne stanice do druge. Dijeleći put izražen u metrima s vremenom danim u minutama naći ćemo da od Rijeke do Bakra, gdje je $\Delta s = 11800\,m$ i $\Delta t = 29$ minuta, ide voz brzinom od 406·9 *m* po minuti. Od Bakra do Meje brzina je 415·8 *m* u minuti, od Meje do Plasa 389·4 *m*. Od Plasa dalje brzina postepeno raste, tako da od Karlovca do Zagreba voz prevaljuje u minuti 906·9 *m*.

Primjeri. 1. Odredi srednju brzinu voza između stanica Plase—Fužine, Fužine—K. Moravice, K. Moravice—Ogulin, Ogulin—Karlovac.

2. Predočite grafički gibanje onog voza na pruzi Rijeka—Zagreb.

b) Srednja brzina, koju u prethodnom 1. primjeru nađemo na odsječku Fužine—K. Moravice nije nipošto prava brzina voza na tom odsječku. Voz se uopće i ne giba jednoliko, već mu se brzina mijenja. Na tom odsječku pruge istakli smo Fužine i K. Moravice, jer se na drugim stanicama brzi voz ne zaustavlja. Da saznamo nešto više o brzini voza na tom odsječku, ispisat ćemo stanice kraj kojih voz samo projuri, a ispod njih ćemo istaknuti međusobnu udaljenost stanica i vrijeme za koje voz dođe od jedne stanice do druge.

Fužine—Lokve—Delnice—Sušica—Skrad—Brod Moravice—K. Moravice.

8·8 *km*	8·5	5·9	6·9	9·2	7·2
18 min.	12	8	11	15	10

Odredimo li sad brzinu voza između tih stanica, saznat ćemo već nešto točnije, kako se voz giba na tom odsječku pruge. Nije li nam to još dosta, moramo uzimati sve manje i manje razmake i dijeliti ih s pripadnim vremenima. Tim ćemo se načinom sve više približavati brzini, kojom se voz u stanovito vrijeme giba.

Općeno možemo reći: Ako u kvocijentu $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, kojim smo definirali srednju brzinu točke, pustimo da Δt bude sve manje i manje, taj se kvocijent sve više približava određenoj vrijednosti, koju zovemo ***brzinom točke u vrijeme t.*** Označimo li tu ***momentanu brzinu*** sa v, tad je

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ za } \lim \Delta t = 0,$$

ili

$$v = \frac{ds}{dt},$$

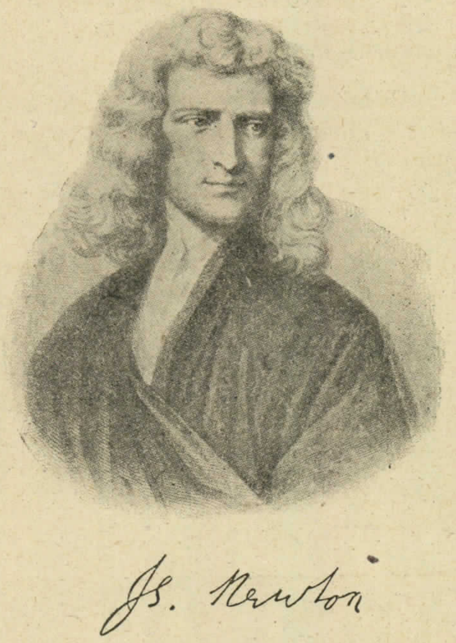
t. j. brzina je jednaka derivaciji puta po vremenu.

Prijelaz od srednje brzine na momentanu izveo je *Newton*. Derivacije bilježio je on s točkom povrh znaka funkcije, koja se derivuje. Prethodnu je formulu on pisao $v = \dot{s}$.

Primjer 1. Pustimo li neko tijelo prosto da pada, tad će ono za vrijeme t prevaliti put

$$s = 4{\cdot}905\, t^2.$$

Put s dan je u metrima, a vrijeme t u sekundama. Poraste li t za Δt, pa označimo li sa $s + \Delta s$ onaj put, što ga tijelo padajući prosto prevali za vrijeme $t + \Delta t$, tad je



Slika 6.

$$s + \Delta s = 4{\cdot}905\,(t + \Delta t)^2 = 4{\cdot}905\,[t^2 + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2].$$

Odbivši prethodnu jednadžbu, dobijemo

$$\Delta s = 4{\cdot}905\,[2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2].$$

S pomoću tog izraza može se odrediti, koliki je put Δs prevalilo ono tijelo za vrijeme Δt.

U tom intervalu vremena srednja je brzina

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9{\cdot}81\, t + 4{\cdot}905 \cdot \Delta t.$$

Biva li Δt sve manje i manje, kvocijent $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ sve se više približava vrijednosti $9{\cdot}81\,t$, jer onaj drugi sumand $4{\cdot}905 \cdot \Delta t$ biva sve manji i manji. Kod prijelaza na granicu uz $\Delta t = 0$ imamo

$$v = \frac{ds}{dt} = 9{\cdot}81\,t.$$

Kako znademo, faktor $9{\cdot}81$ akceleracija je teže i bilježi se slovom g.

Primjer 2. U prethodnom izrazu za srednju brzinu uzmi $t = 2$ sek. i $\Delta t = 0{\cdot}1$ sek. $0{\cdot}01$, $0{\cdot}001, \ldots$ pa odredi pripadne vrijednosti kvocijenta $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Primjer 3. Baci li se tijelo u vis s početnom brzinom c, tad se ono giba po zakonu

$$s = ct - \frac{g}{2}\,t^2.$$

Da odredimo brzinu tog tijela u izvjesnom momentu t, izračunat ćemo poznatim načinom derivaciju od s po t.

Imat ćemo

$$s = ct - \frac{g}{2}\,t^2,$$

$$s + \Delta s = c(t + \Delta t) - \frac{g}{2}\,(t + \Delta t)^2$$

$$\Delta s = c \cdot \Delta t - \frac{g}{2}\,[2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2],$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = c - \frac{g}{2}\,(2t + \Delta t) = c - gt - \frac{g}{2}\,\Delta t,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = c - gt.$$

§ **6. Akceleracija.** U prethodnim primjerima našli smo, da je brzina v funkcija vremena t. Jednom je bilo $v = 9{\cdot}81\,t$, a drugi put $v = c - gt$.

Prirast brzine u jedinici vremena zove se *akceleracija* materijalne točke, koja se giba. U ona oba slučaja akceleracija je $g = 9{\cdot}81$.

Kadgod je brzina linearna funkcija vremena, kao u ta dva slučaja, prirast brzine proporcionalan je s prirastom vremena, a kvocijent $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ stalna je veličina. No kad brzina v nije linearna, već ma kakva funkcija vremena t, a točka se giba u pravcu, tad ćemo *srednju akceleraciju* definirati izrazom $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, iz koga prijelazom na granicu dobijemo *momentanu akceleraciju*

$$a = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ za } \lim \Delta t = 0,$$

ili

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Akceleracija jednaka je derivaciji brzine po vremenu.

No kako je brzina određena kao derivacija puta po vremenu, razbiramo, da se akceleracija dobije derivujuć put dva puta po vremenu. Simbolički označuje se to ovako:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Akceleracija jednaka je drugoj derivaciji puta po vremenu.

Dodatak. 1. Dosad smo svaki put iznova izvodili cio proces derivovanja funkcije, koja je bila zadana. Odsad to ne ćemo više raditi, već ćemo se poslužit izvedenim formulama za derivacije ili diferencijalne kvocijente. Onim čestim ponavljanjem zacijelo smo ih i zapamtili.

2. Ako je y ma kakva funkcija od x, bilježi se to znakom

$$y = f(x).$$

Kako je ovdje

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

nalazimo da je derivacija u ovom općenom slučaju

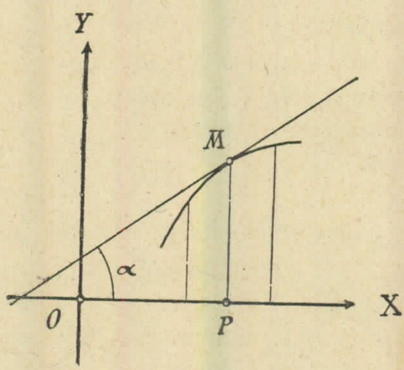
$$y' = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ za } \lim \Delta x = 0.$$

Tom je derivacijom određen tangens kuta, što ga tangenta krive linije predočene jednadžbom

$$y = f(x)$$

zatvara s osju X.

§ 7. Kriterij za rastenje i padanje funkcije. Pogledamo li sliku 3b, na kojoj je određeno nekoliko tangenata parabole $y = x^2$, vidimo da tangente u točkama na desno od ordinatne osi zatvoraju šiljate kutove s osju X. Tangensi tih kutova pozitivni su. Dakle je i derivacija funkcije $y = x^2$ u tim točkama pozitivna. Poraste li apscisa točke na tangenti, porast će i njena ordinata. Isto će tako porasti ordinata točke na paraboli u blizini dirališta. U točkama pak, koje su na lijevo od ordinatne osi, zatvoraju tangente tupe kutove s osju *X*. Tangensi tih kutova negativni su, pa je i derivacija one funkcije na tim mjestima negativna. Poraste li apscisa točke na takvoj jednoj tangenti, ordinata će se točke umanjiti, a to isto vrijedi i za točke na paraboli u blizini dirališta.

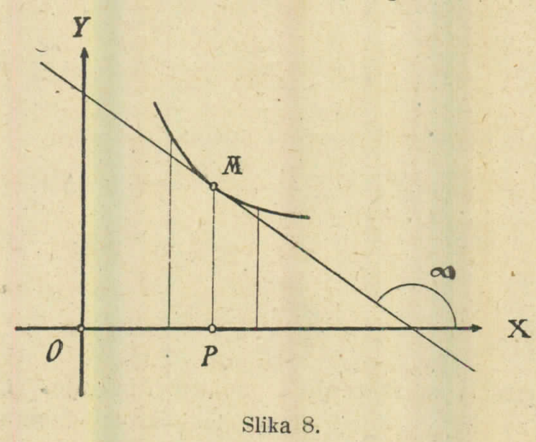


Slika 7.

Otud zaključujemo, da bismo obrnuto po predznaku derivacije za izvjesnu vrijednost varijable mogli zaključiti, da li funkcija u okolini tog mjesta zajedno s varijablom raste ili opada.

I doista možemo po slikama 7. i 8. razabrati, da postoji ovaj poučak:

Ako je derivacija funkcije za neku vrijednost varijable pozitivna, raste funkcija u okolini te vrijednosti zajedno s varijablom. Ako je derivacija negativna, funkcija opada, kad varijabla raste.



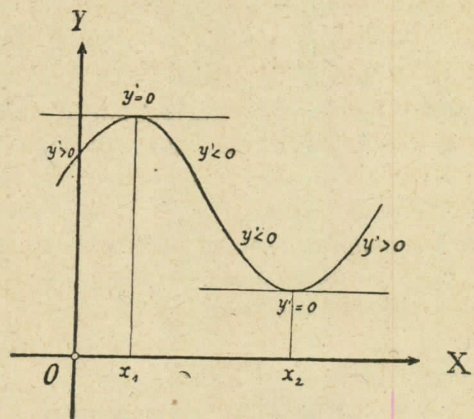
Slika 8.

Obrnuto možemo reći:

Mijenja li se funkcija na nekom mjestu u istom smislu kao i varijabla, derivacija je funkcije na tom mjestu pozitivna. Deriva-

cija je negativna, ako se funkcija mijenja u protivnom smislu nego li varijabla.

§ 8. Ekstremne vrijednosti funkcija. *a)* Uočimo sada funkciju, koja neka je grafički predočena krivuljom na slici 9. Zamislimo li u pojedinim točkama te krivulje povučene tangente, onda ćemo po tome, da li tangenta s osju X zatvora šiljat ili tupi kut, lako razabrati, da li je derivacija y' na određenom mjestu pozitivna ili negativna.



Slika 9.

Osobitu pažnju iziskuju ona mjesta, u kojima je tangenta paralelna s osju X. Kako je kut α, što ga tangenta zatvora s osju X, na takvu mjestu jednak nuli, pa dakle i $\operatorname{tg} \alpha = 0$, bit će na tom mjestu i derivacija $y' = 0$.

Po slici razbiramo, da na tim mjestima funkcija dobiva svoju najveću ili najmanju vrijednost. Inače se to kaže, da funkcija na takom mjestu poprima svoju *ekstremnu vrijednost*, koja može biti *maksimum* ili *minimum.*

Kad je funkcija grafički prikazana, očito je, da maksimumu odgovara ordinata, koja je veća od susjednih ordinata s obje strane.

Taka je na pr. na slici 9. ordinata, koja pripada apscisi x_1.

Minimumu pak odgovara ordinata, koja je manja od susjednih ordinata, kao što je na pr. ordinata, koja pripada apscisi x_2.

b) Zadatak. *Neka se odrede ekstremne vrijednosti dane funkcije.*

Rješenje. Zamislimo, da je ta funkcija grafički prikazana. Ima li koja ordinata njezinih točaka ekstremnu vrijednost, kao što su na gornjoj slici ordinate, koje odgovaraju apscisama x_1 i x_2, tangenta je u krajnjoj točki takve ordinate paralelna s osju X. No kako je kut priklona te tangente prema osi X jednak nuli, to je $\operatorname{tg} \alpha = 0$, dakle i $y' = 0$.

Vrijednosti varijable x, za koje funkcija y može poprimiti ekstremne vrijednosti, naći ćemo tako, da derivaciju te funkcije postavimo jednaku nuli, pa jednadžbu $y' = 0$ razriješimo po x.

Sad valja još ispitati, da li svakom korijenu jednadžbe $y' = 0$ uopće i pripada ekstremna vrijednost funkcije, pa ako pripada, da li je to maksimum ili minimum.

To se može raspoznati po tome, kako se derivacija y' vlada na mjestima, koja odgovaraju korijenima jednadžbe $y' = 0$. Pustimo li varijablu x da raste, funkcija će u okolini maksimuma najprije rasti, a onda opadati. (Gledaj mjesto x_1 na sl. 9.)

Kod maksimuma derivacija prelazi od pozitivnih vrijednosti kroz nulu na negativne vrijednosti.

Tako se isto s pomoću posljednjeg poučka u § 7. uvjeravamo da:

Kod minimuma derivacija od negativnih vrijednosti prelazi na pozitivne.

Uvjeri se o tome gledajući tangente krivulje u okolini ekstremnih vrijednosti.

Primjer 1. $y = x^2$, $y' = 2x$.

Derivacija je jednaka nuli za $x = 0$. Uz negativne vrijednosti od x, t. j. takve da je $x < 0$, derivacija je negativna, a za pozitivne, t. j. za $x > 0$, pozitivna je. Derivacija prelazi od negativnih vrijednosti kroz nulu na pozitivne. Imamo dakle minimum.

Objasni to i crtnjom.

Primjer 2. $y = x^2 + 4x + 3$, $y' = 2x + 4 = 2(x + 2)$.

Jednadžba $y' = 2(x + 2) = 0$ ima korijen $x = -2$. Za $x < -2$, derivacija je negativna, dok je uz $x > -2$ pozitivna. Na mjestu $x = -2$ ima funkcija najmanju vrijednost $y = -1$. Crtež!

Primjer 3. Broj 12 rastavi u takva dva sumanda, da njihov produkt bude maksimum.

Ako je x prvi sumand, drugi je $12 - x$. Njihov je produkt

$$y = x(12 - x) = -x^2 + 12x,$$

a njegova derivacija

$$y' = -2x + 12.$$

Derivacija se poništava za $x = 6$. Pokaži, da doista postoji maksimum.

Primjer 4. Kad je suma broja i njegove recipročne vrijednosti najmanja?

Označimo li broj sa x, tad se ima odrediti minimum funkcije

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Njena je derivacija

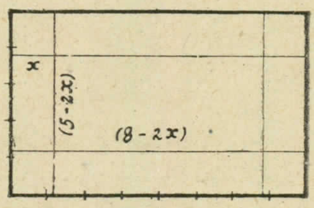
$$y' = 1 - \frac{1}{x^2},$$

a ta je jednaka nuli za $x = 1$.

Uvjeri se i crtnjom, da je najmanja vrijednost one funkcije $y = 2$.

Nacrtaj pripadnu krivulju zbrajajući ordinate pravca $y = x$ i hiperbole $y = \frac{1}{x}$.

Primjer 5. Iz pravokutna komada kartona, koji je 8 *cm* dug, a 5 širok, ima se načiniti otvorena kutija, sa što većim obujmom.



Slika 10.

Kutiju ćemo načiniti tako, da na uglovima odrežemo jednake kvadrate sa stranicom x, pa onda rubove previnemo. Baza je kutije pravokutnik sa stranicama $8 - 2x$, i $5 - 2x$, visina joj je x, pa je stoga obujam

$$y = (8 - 2x)(5 - 2x)x,$$

ili

$$y = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

Derivacija je

$$y' = 12x^2 - 52x + 40.$$

Imamo najprije razriješiti jednadžbu

$$12x^2 - 52x + 40 = 0.$$

Korijeni su $x_1 = 1$, $x_2 = 3\frac{1}{3}$, stoga možemo pisati

$$y' = 12(x - 1)\left(x - 3\frac{1}{3}\right).$$

Za vrijednosti $x < 1$ derivacija je y' pozitivna, jer su negativna oba ona linearna faktora, u koje smo je rastavili. Za

$x > 1$ derivacija je negativna, i to sve dok ne bude $x > 3\frac{1}{3}$. Za $x_1 = 1$ imamo dakle maksimum. Na uglovima kartona treba odrezati kvadrate sa stranicom od 1 *cm*. Dobivena je kutija 6 *cm* duga, 3 široka i 1 visoka, a obujam joj je 18 cm^3.

Druga vrijednost $x_2 = 3\frac{1}{3}$ ne odgovara zadatku, jer x i ne može biti veći od $2\frac{1}{2}$ *cm*, kad je karton širok 5 *cm*.

Primjer 6. Zatvorena cilindrična posuda treba da ima zadani volumen. Kako se moraju odrediti dimenzije posude, da njena površina bude što manja?

Neka je x radijus baze, a v visina valjka. Obujam je zadan, dakle $\pi x^2 v = c$. Označimo li oplošje s y, tad je $y = 2\pi x^2 + 2\pi x v$. Uzmemo li v iz prvog izraza, pa uvrstimo u drugi, izađe

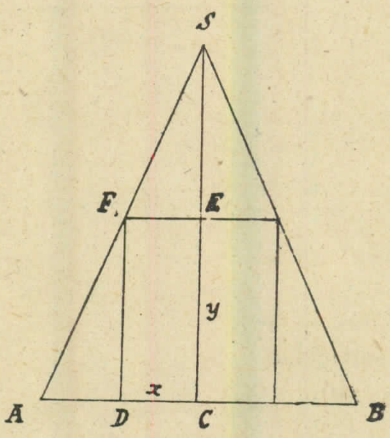
$$y = 2\pi x^2 + \frac{2c}{x},$$

a otud je

$$y' = 4\pi x - \frac{2c}{x^2} = 4\pi x - \frac{2\pi x^2 v}{x^2}.$$

Stavi li se to jednako nuli, dobije se $2x = v$.

Uz zadani volum cilindrične posude ispane površina najmanja, ako se visina uzme jednaka dijametru baze. (Limene posude za konzerve!)



Slika 11.

Primjer 7. Uspravnom kružnom stošcu neka se upiše valjak najvećeg volumena.

Presiječemo li stožac po osi, dobijemo sliku 11. Visina je stošcu $v = CS$, a radijus baze $r = AC$. Visina valjka neka je $CE = y$, a radijus baze $CD = x$. Najprije ćemo y izraziti s pomoću x.

Iz proporcije

$$AC : CS = AD : DF$$

ili

$$r : v = (r - x) : y$$

izlazi

$$y = \frac{v(r - x)}{r}.$$

Stoga je volumen valjka

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 \cdot \frac{v(r - x)}{r} = \frac{\pi v}{r}(rx^2 - x^3).$$

Kako su π, v i r konstantne veličine, poprimit će V maksimalnu vrijednost, kad funkcija $rx^2 - x^3$ bude maksimum.

Derivacija je te funkcije $2rx - 3x^2$. Iz jednadžbe $2rx - 3x^2 = 0$ izlazi $x = 0$ i $x = \frac{2}{3} r$. Samo se ova druga vrijednost može ovdje upotrijebiti. Uvrstimo li je u nađeni izraz za y, izađe $y = \frac{v}{3}$.

II. Odsječak.

Redovi ili progresije.

§ 9. **Objašnjenja.** Niz brojeva, koji postaju po određenome nekom zakonu, zove se *red* ili *progresija*. Pojedini brojevi toga niza zovu se *članovi* reda.

Ako je svaki potonji član veći od prethodnoga, kaže se, da red *raste*, a u protivnom slučaju, da *pada*. Red se zove *konačan*, ako ima određenu, ograničenu množinu članova, a *beskonačan*, kad ih ima neograničeno mnogo.

Kod općenih se istraživanja naznačuju članovi reda jednim istim slovom, kojemu se samo dometnu znamenke 1, 2, 3, . . . One naznačuju, koje mjesto zauzimaju ti članovi u redu; zato se i zovu *mjesne kazaljke*. Na pr. $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ Prvi član (a_1) zove se i *početni član*, a n-ti član (a_n), gdje n naznačuje kojigod prirodni broj, zove se i *posljednji član*.

A. Aritmetički redovi.

§ 10. **Objašnjenja.** Red, u kojemu je razlika dvaju članova, koji dolaze jedan za drugim, stalan broj, zove se *aritmetički red*. Ona se razlika zove *razlika aritmetičkoga reda* i svagda se izračunava tako, da se kojigod član odbije od člana, koji za njim dolazi.

Aritmetički red raste ili opada, prema tomu, da li je razlika pozitivna ili negativna. Na pr. 1, 2, 3 . . . i 10, 8, 6, . . .

§ 11. **Formula za opći član.** Ako su $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ članovi aritmetičkoga reda s razlikom d, onda je

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \ldots ,$$

dakle općeno

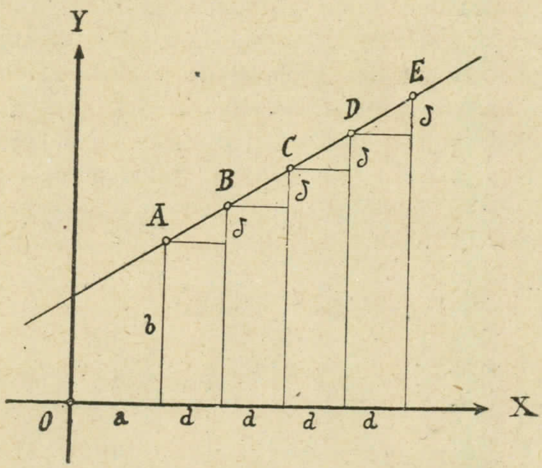
$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d.$$

U aritmetičkom je redu n-ti član jednak sumi prvoga člana i razlike pomnožene s $n - 1$. Na pr.

$1, 3, 5, \ldots a_1 = 1, \ d_1 = 2, \ a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1.$

n-ti lihi broj prema tomu jest $2n - 1$.

Dodatak. Ako su $A, B, C, D, E \ldots$ točke na pravcu, kojih apscise imadu vrijednosti $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$, pa prema tome čine jedan aritmetički red (sl. 12.), onda i ordinate



Slika 12.

čine aritmetički red $b, b + \delta, b + 2\delta, b + 3\delta, \ldots$ Ako je na pr. $y = 2x + 3$ jednadžba pravca, pa se u nju stavi $x = 4, 5, 6, 7 \ldots$ onda se za y dobiju vrijednost 11, 13, 15, 17 . . .

Obrnuto: Kad apscise i ordinate točaka čine aritmetičke redove, točke leže na pravcu.

§ **12. Formula za sumu.** *a)* Članovi prirodnoga niza brojeva sačinjavaju aritmetički red. Hoćemo li na pr. da zbrojimo prvih deset brojeva toga niza, označit ćemo tu sumu sa s_{10}, pa ćemo je napisati jednom u prirodnom redu, a drugi put obrnuto, i zbrojiti:

$$s_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$s_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$
$$2\,s_{10} = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$$
$$2\,s_{10} = 10 \cdot 11, \quad s_{10} = 55 \cdot$$

Ovdje vidimo, da stoje jedan pod drugim oni članovi, koji su od krajeva jednako udaljeni, i da je njihova suma vazda 11.

To ćemo uočenje primijeniti na to, da se odredi suma od n prirodnih brojeva. Imat ćemo:

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$s_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$$
$$\overline{2s_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}$$
$$2\,s_n = n\,(n+1), \quad s_n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

b) Da odredimo sumu aritmetičkoga reda, uzet ćemo na um, da svaka aritmetička progresija ima svojstvo, koje smo zapazili kod prirodnoga niza brojeva, da je *suma članova, koji su od krajeva jednako udaljeni, stalna veličina.* Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ aritmetički red, koji se sastoji od n članova i u kojega je razlika d; s_n neka je zbroj svih članova. Suma prvog i posljednjeg člana jest $a_1 + a_n$. Kako je drugi član $a_1 + d$, a pretposljednji se može pisati u obliku $a_n - d$, vidimo, da je i njihova suma $a_1 + a_n$ i t. d.

Stoga ćemo s_n moći pisati u obliku

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots$$
$$+ [a_1 + (n-2)\,d] + [a_1 + (n-1)\,d]$$

i ujedno

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2\,d) + \ldots$$
$$+ [a_n - (n-2)\,d] + [a_n - (n-1)\,d].$$

Kad se zbroje te dvije jednadžbe, dobije se

$$2\,s_n = n\,(a_1 + a_n),$$

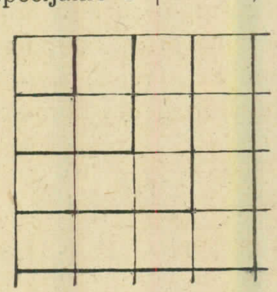
dakle

$$s_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}.$$

Primjeri. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)\cdot$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2,$

specijalno $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ it. d.



Slika 13.

Kako se to može riječima kazati? Objasnite to i geometrijski slažući $1 + 3$ jednaka kvadrata u kvadrat s dvostrukom stranicom i t. d. (Sl. 13.) Tim su načinom s pomoću *gnomona* već *Pitagorejci* izvodili kvadratne brojeve. Gnomon zvali su lik, što ostane od kvadrata, kad se u jednom uglu odreže manji kvadrat.

Dodatak. Ako je aritmetički red određen početnim članom a_1, diferencijom d i brojem članova n, onda se posljednji član a_n i suma s_n mogu izračunati s pomoću formula

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

S pomoću tih formula mogu se i u svakom drugom slučaju od brojeva a_1, a_n, d, n, s_n odrediti dva, kad su druga tri zadana.

Primjer. Koliko se članova aritmetičkoga reda 3, 7, 11 . . . ima zbrojiti, da se za sumu dobije 210.

Rješenje.

$$a_1 = 3, \quad d = 4, \quad s_n = 210.$$

$$a_n = 3 + (n - 1)4 = 4n - 1,$$

$$210 = \frac{n}{2}(4n + 2) = 2n^2 + n.$$

Iz jednadžbe $n^2 + \frac{n}{2} = 105$ dobije se $n = 10$. Drugi se korijen ne može upotrijebiti. Ima se dakle zbrojiti 10 članova; posljednji je član $a_{10} = 39$.

§ **13. Interpolacija.** Među dva člana a i b *interpolirati* aritmetički red od r članova, reći će odrediti r brojeva, koji zajedno s brojevima a i b čine aritmetički red, u kojemu je a prvi, a b posljednji član. Neka je d_1 tražena diferencija reda, koji treba interpolirati. Ako se a uzme za prvi član, onda je b član $(r + 2)$-gi, i tako je

$$b = a + (r + 1)d_1, \quad \text{dakle } d_1 = \frac{b - a}{r + 1}.$$

Stoga red glasi

$$a, \; a + \frac{b - a}{r + 1}, \; a + \frac{2(b - a)}{r + 1}, \; \ldots a + \frac{r(b - a)}{r + 1}, \; b.$$

Na pr. $a = 15$, $b = 42$, $r = 8$; $d_1 = 27 : 9 = 3$.

Dobije se dakle red 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42.

Dodaci. 1. S obzirom na dodatak u § 11. može se interpolacija aritmetičkoga reda geometrijskim putem ovako izvesti. U pravokutnom koordinatnom sustavu istaknimo na osi X dvije točke A_1 i B_1, kojih se razmak može uzeti po volji, te u njima uzdignimo ordinate $A_1A = a$ i $B_1B = b$. Razdijelimo li razmak A_1B_1 u $r + 1$ jednakih dijelova, pa konstruiramo li u djelištima ordinate pravca AB, mjerni brojevi tih ordinata traženi su članovi interpoliranoga reda.

2. Interpolacija logaritama, kako je objašnjena u § 6. Aritmetike za VI. razred, može se svesti na interpolaciju aritmetičkoga reda. Uzmimo na pr.

$$\log 5{\cdot}020 = 0{\cdot}70070$$
$$\log 5{\cdot}021 = 0{\cdot}70079$$
$$\log 5{\cdot}022 = 0{\cdot}70088$$

Ograničimo li se samo na 5 decimala, možemo uzeti, da ti logaritmi čine aritmetički red s diferencijom $d = 0{\cdot}00009$. Ako se između dva uzastopna člana interpolira 9 drugih, tad je $r = 9$, a $d_1 = 0{\cdot}00009 : 10 = 0{\cdot}000009$. Prema tome je na pr.

$$\log 5{\cdot}0207 = 0{\cdot}70070 + 7 \cdot 0{\cdot}000009 = 0{\cdot}70076_3.$$

B. Geometrijski redovi.

§ 14. **Objašnjenja.** Red, u kojem je kvocijent dvaju brojeva, što jedan za drugim dolaze, stalan broj, zove se *geometrijski red.* Stalni taj kvocijent zove se *kvocijent geometrijskoga reda* i svagda se izračunava tako, da se kojigod član podijeli prethodnim članom.

Geometrijski red sa samim pozitivnim članovima raste ili opada, prema tomu, da li je kvocijent veći ili manji od 1.

Na pr. $1, 2, 4, 8, \ldots$ i $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

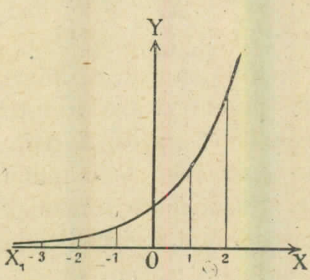
§ 15. **Formula za opći član.** Ako su $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ članovi geometrijskoga reda s kvocijentom q, onda je

$$a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_2 q = a_1 q^2, \quad a_4 = a_3 q = a_1 q^3, \ldots$$

dakle općeno

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Na pr. $1, 2, 4, 8, \ldots, \ a_1 = 1, \ q = 2, \ a_n = 2^{n-1}$, specijalno $a_{12} = 2^{11} = (2^3)^3 \cdot 2^2 = 512 \cdot 4 = 2048.$



Slika 14

Dodatak. Ako se u jednadžbi $y = 2^x$ (slika 14.) postavi redom $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$ za pripadne vrijednosti ordinata dobije se $y = 1, 2, 4, 8 \ldots$ Tačke, kojima su to koordinate, leže na specijalnoj eksponencijalnoj krivulji, kojoj je jednadžba $y = 2^x$. Pođemo li pak od općenije jednadžbe $y = a_1 q^x$, koja također prikazuje jednu eksponencijalnu krivulju, onda ćemo kao ordinate, koje pripadaju apscisama $x = 0, 1, 2, 3 \ldots$, moći grafički odrediti brojeve $a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3 \ldots$

§ 16. **Formula za sumu.** Ako je a_1 početni član, a q kvocijent geometrijskoga reda s n članova, suma s_n predočena je izrazom

$$s_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Da dobijemo jednostavniji izraz, pomnožit ćemo s_n sa q, pa od dobivenoga izraza odbiti prethodnu jednadžbu. Imamo dakle ovakav postupak:

$$\begin{array}{rl} q\, s_n = & a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \\ s_n = & a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \\ - & - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$q\, s_n - s_n = a_1 q^n - a_1,$$

ili

$$s_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1),$$

a odatle

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Na pr.

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^9 = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023.$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^9} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) = 2 - \frac{1}{2^9} = 1\frac{511}{512}.$$

Kako bi se mogao taj račun skratiti s pomoću rezultata u prethodnom primjeru?

Dodatak. Ako je geometrijski red određen početnim članom a_1, kvocijentom q i brojem članova n, onda se posljednji član a_n i suma s_n svih n članova mogu izračunati s pomoću formula

$$a_n = a_1 q^{n-1} \text{ i } s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

S pomoću tih formula mogu se i u svakom drugom slučaju od brojeva a_1, a_n, q, n, s_n odrediti dva, kad su druga tri zadana. Primijetit nam je, da se pri tom u nekim slučajevima mora rješavati ili algebarska jednadžba, kojoj je stepen viši od 2, ili pak transcendentna jednadžba.

Primjer. Poznat je početni član a_1, posljednji član a_n i kvocijent q geometrijskoga reda. Kolik je broj članova i kolika je suma reda?

Rješenje. U jednadžbi $a_n = a_1 q^{n-1}$ nepoznat je samo n. Logaritmirajući dobije se

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log q} + 1.$$

Nađena vrijednost mora biti pozitivan cio broj. Zašto? Dalje se nađe

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}.$$

§ **17. Beskonačni geometrijski redovi.** *a)* Prije svega ćemo na specijalnom geometrijskom redu od n članova

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

ispitati, kako se mijenja njegova suma s_n kad n neprestano raste. Kako je

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n},$$

vidimo, da suma s_n raste podjedno s n, no da vazda ostaje manja od 1. Diferencija

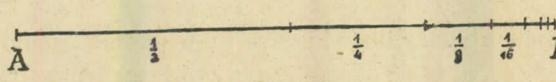
$$1 - s_n = \frac{1}{2^n}$$

može se učiniti malena, kako se hoće, treba samo n uzeti dosta veliko. Hoćemo li na pr. da ta diferencija bude manja od jedne tisućnine, treba uzeti $n = 10$; za $n = 20$ ona je manja od jedne milijuntine. Poradi toga je

$$\lim s_n = 1, \text{ za } n = \infty$$

t. j. za $n = \infty$ suma s_n ima granicu 1.

Jasno se to razbira i s pomoću slike, na kojoj su članovi prethodnoga niza zorno predočeni. Na odresku pravca AB, koji



Slika 15.

ima dužinu 1, nanijet ćemo od lijevoga kraja A najprije dužinu $\frac{1}{2}$, onda $\frac{1}{4}$, zatim $\frac{1}{8}$ i t. d. Svaki put nanesemo polovicu prethodne dužine. Krajnja točka dužine, što smo je posljednju nanijeli, ima od kraja B udaljenost jednaku upravo toj posljednjoj dužini. Što više ponavljamo taj postupak, to sve bliže dolazimo točki B, koje prekoračiti ne možemo.

b) Objašnjenje. Kad se pusti da u kom redu broj članova neograničeno poraste, beskonačni red, koji tako nastaje, zove se *konvergentan*, ako suma reda ima određenu konačnu granicu. U protivnom slučaju kaže se da je red *divergentan*. Prema rezultatu izvedenom u točki *a)* *konvergentan* je red

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

a broj 1, komu se suma s_n neograničeno približava, kad broj članova neprestano raste, zove se *suma beskonačnoga reda*. To pišemo ovako

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1.$$

Simbolom $+ \ldots$, koji dolazi iza posljednjega napisanoga člana, naznačeno je, da se red prema svom zakonu tvorenja ima zamišljati beskonačno produžen.

Red $$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$ divergentan je, a granica je sume $= \infty$. Divergentan je i red

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

jer mu se suma s_n, kad n beskonačno poraste, ne približava nikakvoj određenoj granici.

c) Poučak. *Beskonačni je geometrijski red konvergentan, ako je apsolutna vrijednost kvocijenta manja od* 1.

Dokaz. Svedemo li izraz s_n za sumu geometrijskoga reda na oblik

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} \cdot q^n$$

pa pustimo li n neprestano da raste, minuend $\frac{a_1}{1 - q}$ ostaje nepromijenjen. Suptrahend približava se granici 0, jer je u njem prvi faktor konstantan, dok drugi faktor t. j. q^n beskrajno opada prema nuli. U nauku o potencijama pokazano je naime, da eksponencijalna funkcija, u kojoj je baza manja od 1, ima za granicu nulu, kad eksponent beskrajno poraste. Ako se granica od s_n označi sa s, onda je

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Stoga je uz rečeni uvjet beskonačni geometrijski red

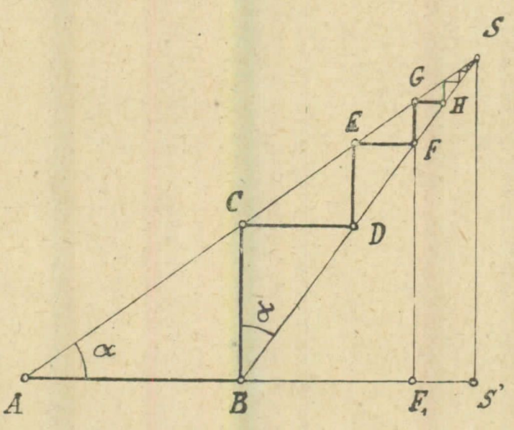
$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots$$

konvergentan, i njegova je suma dana onim izrazom za s.

Na pr. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Dodatak. Ako je apsolutna vrijednost kvocijenta veća od 1, red je divergentan. Tad naime i apsolutna vrijednost općega člana $s_n = a_1 q^{n-1}$ naraste preko svake granice, kad n beskrajno poraste.



Slika 16.

(d) Suma padajućeg geometrijskog reda može se lako i grafički predočiti. Nacrtajmo dužinu $AB = a_1$, pa točkom A povucimo zraku AS, koja s AB zatvora takav kut α, da je $\operatorname{tg}\alpha = q$. Uzdignimo onda u B okomicu, koja AS zgađa u C. Točkom B povucimo zraku BS, koja s okomicom BC zatvora kut α. Između te dvije zrake potegnimo poligonalnu liniju $ABCDEF\ldots$, kod koje svake dvije susjedne stranice stoje jedna na drugoj okomito. Pojedine stranice te slomljene crte predočuju članove našeg geometrijskog reda. I doista je

$$BC = AB \operatorname{tg}\alpha = a_1 q,$$
$$CD = BC \operatorname{tg}\alpha = a_1 q^2,$$
$$DE = CD \operatorname{tg}\alpha = a_1 q^3,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Zbroj prvih 5 članova toga reda dan je zbrojem dužina $AF_1 + F_1F$. Dužina pak cijele one slomljene linije predočuje sumu beskonačnog reda. Zbroj s beskonačnog padajućeg geometrijskog reda predočen je dužinom $AS' + S'S$.

Po slici razbiramo, da je

$$AS' = AS\cos\alpha, \quad S'S = AS\sin\alpha,$$

pa je stoga

$$AS' + S'S = AS\,(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Iz trokuta pak ABS izlazi

$$AS : AB = \sin(90^0 + \alpha) : \sin(90^0 - 2\alpha) = \cos\alpha : \cos 2\alpha,$$

stoga je

$$AS = \frac{a_1 \cos\alpha}{\cos 2\alpha},$$

dakle

$$AS' + S'S = \frac{a_1\cos\alpha\,(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{a_1\cos\alpha\,(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{a_1\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{a_1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Dodatak. Da je $\alpha > 45^0$, t. j. $q = \operatorname{tg}\alpha > 1$, zrake bi AS i BS divergirale i pojedine stranice one slomljene linije bivale bi sve veće. Izvedi crtež za taj slučaj, a i kad je $\alpha = 45^0$!

§ 18. Primjena na periodske decimalne razlomke.

a) Svaki periodski decimalni razlomak predočuje jedan beskonačni geometrijski red, koji je konvergentan, jer je njegov kvocijent manji od 1. Sumiranjem toga reda pretvara se periodski decimalni razlomak u običan razlomak. Na pr.

$$0{\cdot}\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots = \frac{3}{10} : \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$0{\cdot}4\dot{0}\dot{9} = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^5} + \ldots = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^3} : \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{9}{990} = \frac{9}{22}.$$

b) Općeno mogu se ti računi ovako izvesti. Ako se u *čisto periodskom decimalnom razlomku* s p označi period, u kom ima n znamenaka, onda je

$$\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \frac{p}{10^{3n}} + \ldots = \frac{p}{10^n} : \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{p}{10^n - 1},$$

t. j. čisto periodski decimalni razlomak pretvori se u običan razlomak tako, da se za brojnik uzme period, a za nazivnik cio broj napisan s toliko devetica, koliko znamenaka ima u periodu.

*

c) Ako ispred n-znamenkastoga perioda dolazi m decimala, pa ako se sa v označi broj načinjen iz tih decimala, koje se ne povraćaju, onda je

$$\frac{v}{10^m} + \frac{p}{10^{m+n}} + \frac{p}{10^{m+2n}} + \ldots = \frac{v}{10^m} + \frac{p}{10^{m+n}} : \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= \frac{v}{10^m} + \frac{p}{10^m(10^n - 1)} = \frac{(v \cdot 10^n + p) - v}{10^m(10^n - 1)}.$$

Da se *mješovito periodski decimalni razlomak* pretvori u običan razlomak, znamenkama ispred prvoga perioda pripišu se znamenke perioda i od tako dobivena cijelog broja odbiju se znamenke ispred prvog perioda. Ta je diferencija brojnik. Nazivnik se sastoji iz toliko devetica, koliko znamenaka ima u periodu, i onda toliko nula, koliko znamenaka ima ispred prvog perioda.

Na pr: $0{\cdot}47\dot{2} = \frac{472 - 47}{900} = \frac{425}{900} = \frac{17}{36}.$

§ **19. Interpolacija.** Među dva broja a i b interpolirati geometrijski red od r članova, reći će odrediti r brojeva, koji zajedno s brojevima a i b čine geometrijski red, u kojem je a prvi, a b posljednji član. Ako je dakle q_1 traženi količnik reda, koji se ima interpolirati, onda je

$$b = a q_1^{\,r+1}, \quad q_1 = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$$

Red glasi dakle

$$a,\ a\sqrt[r+1]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[r+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \ldots a\sqrt[r+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^r},\ b.$$

Primjer. Između brojeva n i $2n$ neka se interpolira geometrijski red od 11 članova.

Rješenje. Tu je $r = 11$, dakle $q_1 = \sqrt[12]{2}$. Interpolirani je red prema tome

$$n,\ n\sqrt[12]{2},\ n\sqrt[12]{2^2},\ n\sqrt[12]{2^3}, \ldots n\sqrt[12]{2^{11}},\ 2n.$$

Tim je riješena zadaća iz teorije muzike, da se interval od jedne oktave uvrštavanjem od 11 tonova rastavi na 12 jednakih intervala. (Jednolična temperatura.)

C. Druge vrste redova.

§ 20. Zbroj kvadratâ prirodnih brojeva. Ako se u jednadžbu

$$(a+1)^3 = a^3 + 3\,a^2 + 3\,a + 1$$

stavi po redu $a = 1, 2, \ldots n$, onda izađe

$$2^3 = 1^3 + 3\,.\,1^2 + 3\,.\,1 + 1,$$
$$3^3 = 2^3 + 3\,.\,2^2 + 3\,.\,2 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1.$$

Ako se zbroji ovih n jednadžbi i ako se odmah izostave članovi $2^3, 3^3, \ldots n^3$, koji dolaze s obje strane znaka jednakosti, dobije se

$$(n+1)^3 = 1 + 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3\,(1 + 2 + \ldots + n) + n$$

dakle

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - 3.\,\frac{n\,(n+1)}{2} - n\right]$$
$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n\,(n+1)\;(2\,n+1)}{6}.$$

Na pr. $\quad 1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = \frac{10\,.\,11\,.\,21}{6} = 385.$

(§ 21.) Zbroj kuba prirodnih brojeva. Ako se u jednadžbu

$$(a+1)^4 = (a^2 + 2\,a + 1)^2 = a^4 + 4\,a^3 + 6\,a^2 + 4\,a + 1$$

stavi po redu $a = 1, 2, \ldots n$, pa se tako dobivene jednadžbe zbroje, doći će se s pomoću formule izvedene u § 20. do ovoga izraza:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Na pr.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 = \left(\frac{10\,.\,11}{2}\right)^2 = 55^2 = 3025.$$

III. Odsječak.

Račun složenih kamata i račun rentâ.

§ 22. **Formula za složene kamate.** Kaže se da je glavnica uložena na *složene kamate,* ako se kamate krajem svake godine (ili uopće svaki put, kad prođe određeno vrijeme) *kapitaliziraju,* t. j. priklapaju glavnici, tako da i one nose kamate.

Primjer. Glavnica od 2000 K uložena je 4 godine uz 4% na složene kamate. Na koji iznos ona tim naraste, ako se kamate kapitaliziraju krajem svake godine.

Rješenje. Direktnim računom nađe se kao vrijednost glavnice na kraju

$$\begin{array}{lll} 1. \text{ godine} & 2000 + \dfrac{2000 \cdot 4}{100} = 2080\ K, \\ 2. \quad " & 2080 + \dfrac{2080 \cdot 4}{100} = 2163{\cdot}2\ K, \\ 3. \quad " & 2163{\cdot}2 + \dfrac{2163{\cdot}2 \cdot 4}{100} = 2249{\cdot}73\ K, \\ 4. \quad " & 2249{\cdot}73 + \dfrac{2249{\cdot}73 \cdot 4}{100} = 2339{\cdot}72\ K. \end{array}$$

Tražena je konačna vrijednost dakle 2339·72 K, dok bi se uz jednostavne kamate dobilo 2000 K + 4.80 K = 2320 K.

Takvi se računi mogu znatno prikratiti, ako se isti zadatak riješi u općim brojevima, pa se u rezultat općenoga računa uvrste posebne vrijednosti. U zamršenim slučajevima može se jedino na taj način i raditi. Općeni zadatak glasi ovako:

Glavnica c uložena je n godina uz p% na složene kamate, tako, da se kamate krajem svake godine kapitaliziraju. Na koji iznos narast će glavnica do kraja n-te godine?

Rješenje. Za godinu dana naraste glavnica na iznos

$$c + \frac{cp}{100} = c\left(1 + \frac{p}{100}\right) = cq,$$

gdje je zarad kratkoće postavljeno $1 + \frac{p}{100} = q$. Taj se broj zove *kamatni faktor*, te naznačuje vrijednost, na koju jedinica glavnice naraste uslijed jednogodišnjih kamata. Suma glavnice i jednogodišnjih kamata dobije se tako, da se glavnica pomnoži kamatnim faktorom.

Druge godine uložena je na složene kamate glavnica cq, koja do konca druge godine naraste na $cq \cdot q = cq^2$.

Treće godine uložena je glavnica cq^2, koja do kraja te godine postigne vrijednost $cq^2 . q = cq^3$ i t. d.

Označi li se sa c_n konačna vrijednost glavnice iza n godina, onda je

$$c_n = c q^n. \qquad \text{(I)}$$

Konačna vrijednost glavnice uložene n godina na složene kamate uz godišnje kapitaliziranje, jednaka je produktu početne vrijednosti glavnice s n-tom potencijom kamatnoga faktora.

Početna vrijednost glavnice i njezine konačne vrijednosti iza 1, 2, 3, . . . n godina, t. j. vrijednosti

$$c, \; cq, \; cq^2, \; cq^3, \; . \; . \; . \; cq^n$$

čine geometrijski red s početnim članom c i kvocijentom q. Konačna vrijednost iza n-te godine $(n + 1)$-vi je član toga reda.

1\. Primjer. $c = 2000$, $p = 4$, $n = 4$. (Vidi primjer u početku ovoga paragrafa.)

Kako je $q = 1 + \frac{4}{100} = 1{\cdot}04$, to je $c_4 = 2000 \cdot 1{\cdot}04^4$.

$$\log c_4 = \log 2000 + 4 \log 1{\cdot}04$$
$$= 3{\cdot}30103 + 4 \cdot 0{\cdot}01703 = 3{\cdot}36915 \cdot$$
$$c_4 = 2339{\cdot}63.$$

Budući da se kod takvih računa logaritam kamatnoga faktora množi s eksponentom, množi se i pogrješka, koja potječe otuda, što je logaritam nepotpun broj, pa je stoga rezultat prilično netočan. Da se postigne veća točnost upotrebljava se tablica, u kojoj su logaritmi kamatnih faktora dani sa više od 5 decimala. Za vrijednosti od p, koje se najčešće upotrebljavaju evo ovdje takve tablice na 7 decimala:

p	q	$\log q$
2	1·02	0.0086002
2·5	1·025	0·0107239
3 ·	1·03	0·0128372
4	1·04	0·0170333
5	1·05	0·0211893
6	1·06	0·0253059

2. Primjer. Na koju svotu naraste 360 K uz 5% za 12 godina?*)

Rješenje. $c = 360,\ p = 5\ \ n = 12$ ·

$c_{12} = 360 \cdot 1{\cdot}05^{12} = 645{\cdot}50\ K.$

§ 23. **Dalji zadaci o računu složenih kamata.** *a)* Iz jednadžbe $c_n = c\,q^n$ može se osim c_n izračunati i svaka druga od tri veličine c, q (pa stoga i p, jer je $q = 1 + \frac{p}{100}$) i n, ako su ostale zadane. Veličina c zove se sadašnja vrijednost glavnice c_n. To je dakle iznos, koji uložen n godina na složene kamate, postigne iznos c_n. Vidimo da je

$$c = \frac{c_n}{q^n}.$$

Sadašnja vrijednost glavnice, koja dospijeva iza n godina nađe se, ako se glavnica razdijeli n-tom potencijom kamatnoga faktora.

1. Primjer. Koju sadašnju vrijednost ima glavnica od 1000 K, koja dospijeva iza 10 godina, ako se računa 4% složenih kamata.

Rješenje.

$$c = \frac{1000}{1{\cdot}04^{10}}.$$

$$\log c = 3 - 10 \cdot 0{\cdot}017033 = 2{\cdot}82967$$

$$c = 675{\cdot}57\ K.$$

*) Ako se izrijekom inače ne odredi, uzimat ćemo vazda godišnje kapitaliziranje kamata.

2. Primjer. Uz koliko postotaka bilo je 468 K uloženo 7 godina na složene kamate, ako su one postigle konačnu vrijednost 595·3 K?

Rješenje.

$$\log c_n = \log c + n \log q$$

$$\log q = \frac{\log c_n - \log c}{n}$$

$$\log q = \frac{2{\cdot}77483 - 2{\cdot}67025}{7} = \frac{0{\cdot}10458}{7} = 0{\cdot}01494$$

$$q = 1{\cdot}035, \quad p = 3\frac{1}{2}.$$

b) Kod izvođenja jednadžbe (I) uzimalo se n kao cio broj. No ako je $n = m + \alpha$, gdje m znači cio broj, a α pravi razlomak, onda se u praksi za m godina obično računaju složene kamate, a za vrijeme α jednostavne kamate. Tako je

$$c_n = c\,q^m + \frac{c\,q^m\,\alpha p}{100} = c q^m \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right). \qquad (\mathrm{I}')$$

Kad bi se i u ovom slučaju primijenila jednadžba (I), ili kad bi se upotrijebio — kako kažu — *konformni kamatnjak*, imali bismo

$$c_n = c\,q^{m+\alpha} = c\,q^m \cdot q^\alpha = c\,q^m \left(1 + \frac{p}{100}\right)^\alpha,$$

t. j. mjesto faktora $1 + \frac{\alpha p}{100}$ došao bi faktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^\alpha$, koji se od onoga uopće samo malo razlikuje. Tako na pr. imamo za $p = 4$:

$\alpha =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$1 + \frac{\alpha p}{100}$	1·01	1·02	1·03
$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^\alpha$	1·0099	1·0198	1·0298

Kad se izračunava p ili n, valja upotrijebiti konformni kamatnjak, da računanje bude jednostavnije. Da točnost bude veća, može se u posljednjem slučaju cio broj m računati po formuli (I), a razlomak α po formuli (I′).

Primjer. Za koliko će se vremena podvostručiti glavnica uložena uz $5^0/_0$ na složene kamate?

$$c_n = 2c, \quad 2c = c \cdot 1{\cdot}05^n, \quad 1{\cdot}05^n = 2,$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{\cdot}05} = \frac{0{\cdot}30103}{0{\cdot}021189} = 14{\cdot}206 \text{ godina.}$$

Da se dobije točniji rezultat, može se u tom slučaju primijeniti formula (I'). Iz prethodnoga računa izađe najprije $m = 14$. Zato je

$$2 = 1{\cdot}05^{14}\left(1 + \frac{\alpha}{20}\right),$$

$$\alpha = \frac{40}{1{\cdot}05^{14}} - 20 = 0{\cdot}203,$$

$$n = 14{\cdot}203 \text{ godina.}$$

Prema tome se ova dva rezultata razlikuju vrlo neznatno.

c) Ako se kamate priklapaju glavnici svakoga m-tog dijela godine, onda je konačna vrijednost glavnice iza prve m-tine

$$c + \frac{cp}{100m} = c\left(1 + \frac{p}{100m}\right) = cq_1,$$

iza druge m-tine cq_1^2, a iza n-te je $c_n = cq_1^n$. Stoga se formula (I) može primijeniti i u tom slučaju, samo treba pod n razumijevati broj kamatnih rokova, a pod p kamate, što ih od jednoga kamatnog roka do drugog donese 100 jedinica glavnice.

U štedionicama, u bankama i t. d. kapitaliziraju se kamate danas redovno svake po godine.

Primjer. Na koju će svotu narasti $480\,K$ uz $4^0/_0$ za 12 godina *a)* uz godišnje, *b)* uz polugodišnje kapitaliziranje kamata?

Rješenje.

a) $c_{12} = 480 \cdot 1{\cdot}04^{12}$

log 1·04	0·0170333
log 480	2·68124
12 log 1·04	0·20440
log c_{12}	2·88564

$c_{12} = 768{\cdot}50\,K.$

b) $c'_{24} = 480 \cdot 1{\cdot}02^{24}$

log 1·02	0·0086002
log 480	2·68124
24 log 1·02	0·20640
log c'_{24}	2·88764

$c'_{24} = 772{\cdot}04\,K.$

Dodatak. Formula (I) može se primijeniti i na prirast stanovnikâ kojega većeg grada ili koje zemlje, na prirast drvâ u šumi i t. d., ako se samo s pravom smije uzimati, da je godišnji prirast gotovo razmjeran s množinom, koju svaki put već imamo.

Dakako za rezultat se takvoga proračunavanja može uzeti da samo približno vrijedi.

(§ 24.) **Neprekidno ukamaćivanje.** Konačna vrijednost glavnice uložene na složene kamate zavisi o tom, u kojim se razmacima kamate pribijaju glavnici. Tako na pr. jedinica glavnice uložena uz $4^0/_0$ naraste za godinu dana uz kapitaliziranje

a) godišnje na $1 + \frac{4}{100} = 1{\cdot}04$,

b) polugodišnje na $\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{100}\right)^2 = 1{\cdot}0404$,

c) četvrtgodišnje na $\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{100}\right)^4 = 1{\cdot}0406$,

d) mjesečno na $\left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{100}\right)^{12} = 1{\cdot}0407$.

To nas vodi na pitanje, kako raste konačna vrijednost glavnice, kad broj rokova, u kojima se kamate pribijaju glavnici, neograničeno poraste, dok sve drugo ostane isto. U tom slučaju govori se o *neprekidnom ukamaćivanju.* Da taj problem riješimo, radit ćemo ovako:

Formula

$$c_n = c\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{m\,n}$$

daje konačnu vrijednost glavnice c iza n godina, kad se kamate glavnici pribijaju svakog m-tog dijela godine. U tu ćemo formulu staviti

$$\frac{100\,m}{p} = x, \text{ dakle } m = \frac{p\,x}{100}\cdot \quad \text{A tad je}$$

$$c_n = c \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{pn}{100}}. \qquad (1)$$

I sad valja odrediti granicu izraza $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, ako x zajedno s m neograničeno poraste.

Po samom se zadatku razbira, da taj izraz to više raste, što x biva veće, a razbira se to i direktnim izračunavanjem.

Postavi li se na pr.

$$x = 1, \text{ tad je } \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2,$$

$$x = 2 \quad „ \quad „ \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{\cdot}25.$$

$$x = 3 \quad „ \quad „ \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{\cdot}37 \ldots$$

. . . .

Što veće uzmemo x, to je veći izraz $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. No da taj izraz ne raste beskrajno, kad x biva sve veće i veće, nego da se približava određenoj granici uvjerit ćemo se evo ovako:

Izrazi $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ i $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$ teže istoj granici kad x neograničeno poraste. I doista je

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x-1}\right).$$

Poraste li x neograničeno, faktor $\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$ ima 1 za granicu i tako vidimo da je

$$\lim \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \text{ za } x = \infty.$$

Kako pak $x - 1$ raste neograničeno zajedno s x, svejedno je, da li na desnoj strani prethodne jednadžbe pišemo x ili $x - 1$, pa je tako

$$\lim \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ za } x = \infty. \quad (2)$$

Izraz $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$ opada, kad x raste. Stavimo na pr.

$$x = 2, \text{ tad je } \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4,$$

$$x = 3, \text{ tad je } \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3{\cdot}375,$$

. . . .

Desni pak izraz u formuli (2), t. j. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ vidjeli smo da raste zajedno sa x. Kako pak oni imadu istu granicu, približava joj se izraz $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ rastući, a $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$ opadajući. Zajednička njihova granica leži između 2 i 4. Prava joj je vrijednost 2·71828 . . . Tako smo našli relaciju

$$\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2{\cdot}71828\ldots \text{ za } x=\infty. \qquad (3)$$

Dobiveni broj od velike je važnosti u višoj matematici, i uzima se za bazu *prirodnih logaritama.* Zarad kratkoće bilježi se taj broj slovom e, pa je tako

$$\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ za } x=\infty. \qquad (4)$$

Formula (1) prijeđe tako u formulu

$$c_n = c\,e^{\frac{p\,n}{100}}. \qquad (5)$$

(§ 25.) **Prirodna eksponencijalna funkcija.** Kako svaka jedinica glavnice nosi kamate, razbiramo, da će glavnica tim više kamata donijeti, što je veća. Tako je isto i prirast stanovništva neke zemlje tim veći, što je broj stanovnika veći.

U dobro gojenoj šumi prirast drvne mase proporcionalan je s množinom drva u šumi.

Organsko biće, koje se sastoji iz pojedinih stanica raste tako, da svaka stanica sudjeluje kod stvaranja novih stanica. Stoga je brzina, kojom organizam raste proporcionalna s veličinom, koju je organizam već postigao.

Ugrije li se tijelo do različitih temperatura, množina topline, koju ono isijeva na okolinu, bit će to veća, što je veća njegova temperatura.

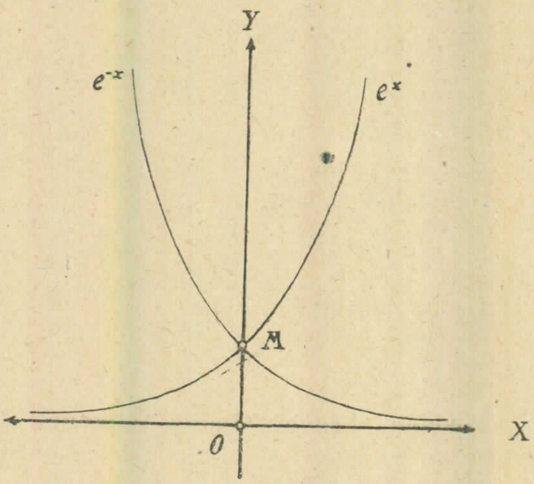
U svim tim primjerima imamo posla s veličinom y, koja je takva funkcija od x, da je brzina, kojom veličina y raste uz rastuće x, svagda proporcionalna s vrijednosti, koju je funkcija y već postigla. A kako je konačna vrijednost glavnice uz neprekidno ukamaćivanje određena jednom eksponencijalnom funkcijom, zaključujemo, da će i u onim ostalim slučajevima zakon pojava bit dan u obliku eksponencijalne funkcije s bazom e, na pr.

$$y = c e^{ax}.$$

Najjednostavniji je slučaj, kad je $a = 1$, $c = 1$ t. j.

$$y = e^x.$$

Ta se funkcija zove *prirodna eksponencijalna funkcija.* Grafički je predočena na slici 17. Eksponencijalna funkcija $y = e^{-x}$ predočena je također na toj slici.



Slika 17.

U prirodi ima dosta pojava, kojima je tok određen eksponencijalnim zakonom. Tako na pr.:

1. Apsorpcija svjetlosti u homogenom sredstvu.
2. Opadanje atmosferskog tlaka s visinom.
3. Ohlađivanje ugrijanog tijela.
4. Raspadanje radioaktivnih tvari.

U udžbeniku fizike potraži te zakone!

§ 26. Formula za rentu. Godišnje ulaže se r K na složene kamate uz $p^0/_0$, tako da od jedne uplate do druge vazda prođe godina dana. Iznos s_n, na koji narastu svi ti obroci do vremena posljednje isplate, dobije se, ako se zbroje konačne vrijednosti $r_1, r_2, \ldots r_n$ svih obroka.

Kako od prve uplate do n-te proteče $n - 1$ godina, konačna je vrijednost prvog obroka

$$r_1 = r q^{n-1}.$$

Konačna vrijednost drugog obroka jest

$$r_2 = r q^{n-2}$$

i t. d. Konačna vrijednost n-tog obroka sâm je taj obrok, dakle je

$$r_n = r.$$

Otud izlazi

$$s_n = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n$$
$$= r(q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + 1),$$

pa je tako

$$s_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad \text{(II)}$$

Ta se formula zove *formula za rentu.*

1. Primjer. Netko ulaže 16 godina na početku svake godine 537 K uz 4% na složene kamate. Koju vrijednost postignu ti iznosi u vrijeme posljednje uplate?

Rješenje. Ovdje je $r = 537\,K,\ \ p = 4,\ \ n = 16.$

$$s_{16} = 537 \cdot \frac{1{\cdot}04^{16} - 1}{0{\cdot}04} = 13425\,(1{\cdot}04^{16} - 1),$$

$$16 \log 1{\cdot}04 = 16 \cdot 0{\cdot}0170333 = 0{\cdot}27253 = \log 1{\cdot}87296,$$

$$s_{16} = 13425 \cdot 0{\cdot}87296 = 117195\,K.$$

2. Primjer. Koji se iznos mora 10 godina na početku svake godine ulagati na složene kamate uz 3·5%, da se na kraju 10-te godine dobije 2000 K?

Rješenje. Ako se 10 godina ulaže iznos r na složene kamate uz kamatnjak q, vrijednost je tih iznosa u vrijeme posljednje uplate (prema formuli II)

$$r \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1}.$$

Taj se iznos još ukamaćuje tijekom 10-godine i tim naraste na

$$r \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot q = 2000.$$

Otud izlazi

$$r = \frac{2000 \cdot 0{\cdot}035}{(1{\cdot}035^{10} - 1)\,1{\cdot}035},$$

$$10 \log 1{\cdot}035 = 10 \cdot 0{\cdot}014940 = 0{\cdot}14940 = \log 1{\cdot}4106,$$

$$r = \frac{70}{0{\cdot}4106\,.\,1{\cdot}035}.$$

Računajući s logaritmima dobije se $r = 164{\cdot}72\,K$.

3. Primjer. Koliko se puta mora 210 K na početku svake godine uložiti uz 4% na složene kamate, ako se u vrijeme posljednje uplate hoće da postigne 4000 K?

Rješenje. U ovom se slučaju formula (II) ima razriješiti po n. Kako je $r = 210$, $s_n = 4000$, $q = 1{\cdot}04$, to je

$$q^n = 1 + \frac{s_n (q - 1)}{r} = 1 + \frac{4000 \cdot 0{\cdot}04}{210} = 1{\cdot}7619,$$

$$n = \frac{\log 1{\cdot}7619}{\log 1{\cdot}04} = \frac{0{\cdot}24574}{0{\cdot}01703} = 14{\cdot}4 \ldots$$

Budući da n ovdje znači množinu, pa prema tome mora biti pozitivan cio broj, vidimo da se zadatak, kako je postavljen, ne da riješiti. Uzme li se $n = 14$, dobije se premalo, ako se pak uzme $n = 15$, onda se dobije previše. I doista je

$$s_{14} = 210 \cdot \frac{1{\cdot}04^{14} - 1}{0{\cdot}04} = 3840{\cdot}9\ K,$$

$$s_{15} = 210 \cdot \frac{1{\cdot}04^{15} - 1}{0{\cdot}04} = 4205{\cdot}0\ K.$$

Petnaesti obrok morao bi se sniziti na $210\ K - 205\ K = 5\ K$, pa bi se onda u vrijeme uplate tog obroka, t. j. na početku petnaeste godine, dobilo točno $4000\ K$.

§ 27. **Složeni zadaci.** *a)* Koju *sadašnju vrijednost* ima renta, koja počevši odsada kroz n godina dospijeva na kraju svake godine u iznosu od r novčanih jedinica?

Rješenje. Konačna vrijednost svih renta u vrijeme zadnje isplate, t. j. na kraju n-te godine jednaka je

$$r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Po formuli (I) dobit će se sadašnja vrijednost b te svote, ako se nađena konačna vrijednost podijeli s q^n. Po tome je dakle

$$b = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^n\,(q - 1)}.$$

Dodatak. Taj se izraz direktno dobije, ako se izračuna sadašnja vrijednost svake isplate, pa se sve dobivene sadašnje vrijednosti zbroje.

$$b = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots + \frac{r}{q^n} = \frac{r}{q^n}\,(1 + q + \ldots + q^{n-1})$$

$$= \frac{r\,(q^n - 1)}{q^n\,(q - 1)}.$$

Primjer. Neka se odredi sadašnja vrijednost rente od godišnjih 3000 *K*, koja kroz 20 godina dospijeva na kraju svake godine. $p = 4\%$.

Rješenje.

$$b = \frac{3000 \cdot (1{\cdot}04^{20} - 1)}{1{\cdot}04^{20} \cdot 0{\cdot}04} = \frac{75000 \cdot 1{\cdot}1911_5}{1{\cdot}04^{20}} = 40770\ K.$$

$$20 \log 1{\cdot}04 = 20 \,.\, 0{\cdot}0170334 = 0{\cdot}34067 = \log 2{\cdot}1911_5.$$

b) Netko uloži glavnicu c uz $p\%$ na složene kamate i počinjući godinu dana kasnije dodaje n godina svake godine svotu r. Neka se izračuna konačna vrijednost svih tih uplata u vrijeme posljednje uplate.

Rješenje. Na kraju n-te godine jest $c\,q^n$ konačna vrijednost glavnice c, a $r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ konačna je vrijednost ostalih uplata.

Prema tomu je konačna vrijednost svega, što je uplaćeno

$$S_n = c\,q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

c) Netko uloži glavnicu c uz $p\%$ na složene kamate i počinjući godinu dana kasnije izvadi svake godine svotu r. Koliko će ostati na kraju n-te godine?

Rješenje. Analogno kao u prethodnom zadatku dobije se

$$s_n = c\,q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Diskusija. Ako se posljednja jednadžba svede na oblik

$$s_n = q^n \left(c - \frac{r}{q - 1}\right) + \frac{r}{q - 1},$$

razabrat će se, da s_n ne ovisi o n, t. j. da je konstantno, ako je

$$c = \frac{r}{q - 1} \text{ ili } r = c\,(q - 1) = \frac{c\,p}{100}.$$

Glavnica se c dakle ne mijenja, ako se svake godine izvade godišnje kamate glavnice c. Prema tomu, da li je r manje ili veće od $\frac{c\,p}{100}$, t. j. od godišnjih kamata glavnice c, rast će glavnica ili će se umanjivati. U prvom se naime slučaju vadi samo jedan dio godišnjih kamata, a u drugom se slučaju uz kamate vadi vazda i jedan dio glavnice. U ovom posljednjem slučaju mora dakle naposljetku postati

$$s_n = 0 \text{ ili } s_n < r,$$

jer kad n bez prestanka raste, može q^n premašiti svaku kakogod veliku vrijednost.

Ako se na pr. dug c ima otplatiti ili *amortizirati* s n godišnjih obročnih otplata (anuiteta), koje se počinju godinu dana kasnije, onda mora biti

$$c\, q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0,$$

a odatle se može izračunati c, r ili n.

Do istoga se rezultata dođe, ako se uzme na um, da zbroj sadašnjih vrijednosti svih obročnih otplata mora biti jednak glavnici c.

Primjer. Neka općina uzme zajam od 250.000 *K*, pa ga hoće da otplati u 15 godina jednakim obrocima, koji dospijevaju na kraju svake godine. Kolik je anuitet? $p = 4\%$.

Rješenje.

$$r = \frac{c\, q^n (q - 1)}{q^n - 1} = \frac{250000 \cdot 1{\cdot}04^{15} \cdot 0{\cdot}04}{1{\cdot}04^{15} - 1}.$$

$$15 \log 1{\cdot}04 = 0{\cdot}25550 = \log 1{\cdot}80096.$$

$$r = \frac{10000 \cdot 1{\cdot}04^{15}}{0{\cdot}80096} = 22484{\cdot}7\ K.$$

U *otplatnoj osnovi* naznačeno je za prve četiri godine, koliko od anuiteta ide na kamate, a koliko na otplatu glavnice. U posljednjem stupcu unesen je ostatak duga na kraju svake godine.

Otplatna osnova.

Iza n godina $n =$	$r = 22484{\cdot}7$		ostatak duga
	kamate	otplata glavnice	
1	10000·0 *K*	12484·7 *K*	237515·3 *K*
2	9500·6 „	12984·1 „	224531·2 „
3	8981·2 „	13503·5 „	211027·7 „
4	8441·1 „	14043·6 „	196984·1 „

Pogrješka, što nastane poradi netočnosti posljednjih znamenaka u tim brojevima, može se izravnati tako, da se posljednji anuitet izmijeni kako treba.

d) Kolik bi iznos x morao tkogod kroz m godina ulagati na kraju svake godine na složene kamate uz $p\%$, da time osigura sebi rentu r, koja bi počela teći k godina iza posljednje uplate, a trajala bi n godina?

Rješenje. Konačna vrijednost svih uplata u vrijeme posljednje uplate t. j. na kraju m-te godine iznosi.

$$x \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1},$$

a ta kroz k slijedećih godina naraste na iznos

$$x \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} \cdot q^k.$$

U isto vrijeme stane teći renta. Njezina je sadašnja vrijednost izračunata za to vrijeme

$$r \cdot \frac{q^n - 1}{(q - 1) q^{n-1}}.$$

Zato mora biti

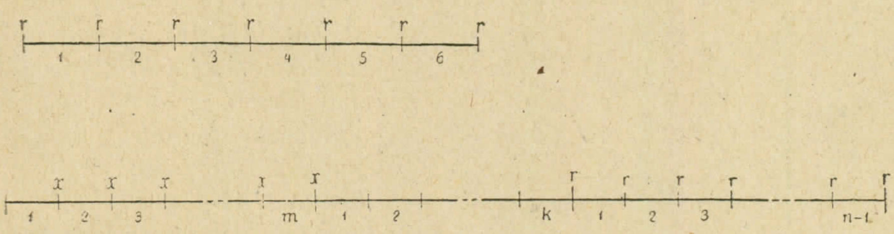
$$x \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} \cdot q^k = r \cdot \frac{q^n - 1}{(q - 1) q^{n-1}},$$

a odatle se dobije

$$x = \frac{r (q^n - 1)}{(q^m - 1) q^{k+n-1}}.$$

Dodaci. 1. Kadšto je dobro, da se kod takvih zadaća rokovi dospjetka predoče na brojnoj crti.

Po slici 18 razbiramo: ako 7 obroka dospije u razmacima od jedne godine, onda je od prvog dospjetka do posljednjeg



Slika 18. i 19.

proteklo 6 godina. Uopće ako u razmacima od jedne godine dospije n obroka, onda od prvog dospjetka do posljednjeg proteče $n - 1$ godina. Slika 19 odgovara pretpostavkama zadatka *d)*.

2. U takvim se slučajevima smije ono, što se dalo i što se primilo, izjednačivati samo onda, ako se oboje izračuna za *isti rok*. Kod toga je svejedno, koji se rok uzme, jer ako su neke vrijednosti u kojegod doba jednake, bit će one jednake i u svako drugo doba. Izuzetak nastaje samo tada, kad se uplate ukamaćuju uz druge postotke negoli isplate.

*

IV. Odsječak.

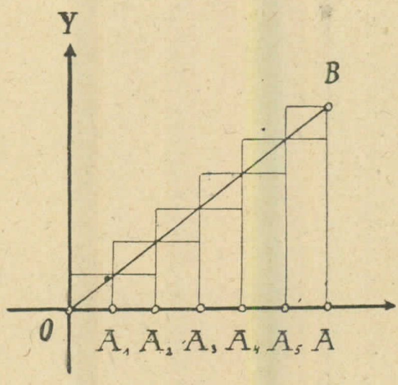
Pojam određenog integrala.

§ 45. **Površina pravokutnog trokuta.** *a)* Da objasnimo metodu, kojom se uopće mogu određivati površine omeđene krivim linijama, uzet ćemo najprije zadatak, kod koga rezultat već unaprijed znamo:

Nek se odredi površina pravokutnoga trokuta s katetama $x = OA$ i $y = AB$.

Dužinu OA, koju smo uzeli da pada u apscisnu os, razdijelit ćemo na n jednakih dijelova

$$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = \frac{x}{n}.$$



Slika 20.

Djelištima povući ćemo paralele s AB, dok ne presijeku hipotenuzu OB. Zatim ćemo načiniti pravokutnike, od kojih prvi jednim svojim uglom izlaze malko izvan trokuta OAB, dok drugi ostaju sasvim u trokutu. Prvih pravokutnika, za koje ćemo reći da su *opisani pravokutnici*, ima n na broju, dok *upisanih* ima $n - 1$. Na slici je prvih 6, a drugih 5.

Suma površina upisanih pravokutnika očito je manja od površine trokuta, a suma opisanih veća je. Diferencija tih suma jednaka je sumi onih n malenih pravokutnika, koji su nanizani po dijagonali OB. Kad bismo svaki taj maleni pravokutnik pomaknuli paralelno s osju X, dok ne dođe do stranice AB, svi bi oni zajedno upravo ispunili posljednji opisani pravokutnik.

Diferencija sume opisanih i sume upisanih pravokutnika jednaka je posljednjem opisanom pravokutniku. Ta se diferencija može učiniti malena kako hoćemo, ako se samo n uzme dosta veliko. Što je veće n, to su manje baze onih pravokutnika, pa dakle i baza posljednjeg opisanog pravokutnika. Ma koliko bilo n, površina trokuta leži vazda između sume opisanih i sume upisanih pravokutnika. Jedna i druga suma određuju približno površinu trokuta, i to tim točnije, što je veće n. Te sume imadu površinu trokuta za granicu.

Sve to zaključili smo gledajući sliku 20, a sad ćemo to sve formulama preciznije izraziti.

b) Baza svakoga pravokutnika ima dužinu $\frac{x}{n}$, visine su pak njihove

$$y_1 = \frac{y}{n},\ y_2 = \frac{2y}{n},\ y_3 = \frac{3y}{n},\ \dots\ y_n = \frac{ny}{n} = y.\ \text{Zašto?}$$

Prema tome je suma površina upisanih pravokutnika

$$s_n = \frac{xy}{n^2} + \frac{2xy}{n^2} + \frac{3xy}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)xy}{n^2},$$

dok je suma opisanih

$$S_n = \frac{xy}{n^2} + \frac{2xy}{n^2} + \frac{3xy}{n^2} + \dots + \frac{nxy}{n^2}.$$

Te se sume dadu pisati i ovako:

$$s_n = \frac{xy}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1),$$

$$S_n = \frac{xy}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

U okruglim zagradama imamo prirodne brojeve, koji čine aritmetičku progresiju, pa ih možemo lako zbrojiti. Tako nalazimo da je

$$s_n = \frac{n(n-1)xy}{2n^2},\quad S_n = \frac{n(n+1)xy}{2n^2},$$

ili

$$s_n = \frac{(n-1)xy}{2n} = \frac{xy}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

i

$$S_n = \frac{(n+1)xy}{2n} = \frac{xy}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

Uzme li se n vrlo veliko, $1 - \frac{1}{n}$ i $1 + \frac{1}{n}$ vrlo se malo razlikuju od 1. U tom se slučaju s_n i S_n vrlo malo razlikuju od $\frac{xy}{2}$. Poradi toga je

$$\lim s_n = \lim S_n = \frac{xy}{2}, \text{ za } n = \infty,$$

a to je, kako već znamo, površina pravokutnog trokuta OAB.

Lako se vidi, da je diferencija onih suma

$$S_n - s_n = \frac{xy}{n}.$$

Ta se diferencija može učiniti po volji malena; treba samo n uzeti dosta veliko. A to nam kaže, da je

$$\lim (S_n - s_n) = 0, \text{ za } n = \infty.$$

Kako je dakle svejedno, da li pođemo od s_n ili S_n, jer na granici dobijemo istu vrijednost, bit će dosta da se odredi samo jedna od tih suma, na pr. S_n. Za nju ćemo dati još jedan drugi oblik.

c) Označimo li n-ti dio od OA t. j. $\frac{x}{n}$ sa Δx, baza je svakog onog pravokutnika Δx, a visine su im ordinate, koje pripadaju pojedinim djelištima. Površina je ma kog opisanog pravokutnika jednaka produktu pripadne ordinate y i baze Δx. Za sumu svih tih pravokutnika dobijemo izraz

$$S_n = y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \ldots + y_n \cdot \Delta x,$$

koji možemo kraće pisati ovako

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \Delta x.$$

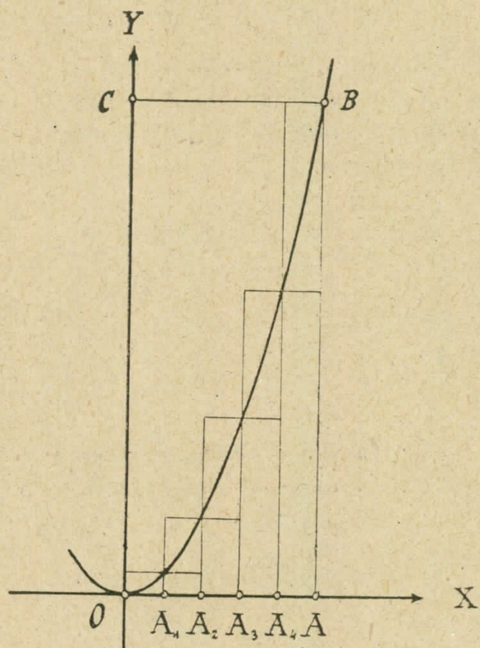
Metodu, koju smo ovdje objasnili, primijenit ćemo sad na jedan slučaj, gdje nam rezultat još nije poznat.

§ 46. Površina parabole. *a)* Uzmimo sad parabolu, kojoj je jednadžba

$$y = x^2,$$

pa pokušajmo odrediti površinu, koja je omeđena osju X, lukom parabole OB i ordinatom AB.

Dužinu $OA = x$ razdijelit ćemo opet u n jednakih dijelova. Luku parabole OB opisat ćemo i upisati pravokutnike, kao i prije. Sumu površina opisanih pravokutnika označit ćemo sa S_n, a upisanih sa s_n. Razlika je tih suma jednaka sumi onih pravokutnika, kojima kroz dva suprotna vrha prolazi luk parabole. Pomaknemo li te pravokutnike paralelno s osju X do ordinate AB, ispunit će oni onaj posljednji najveći opisani pravokutnik. Otud razbiramo, da je diferencija onih dviju suma jednaka površini posljednjega opisanog pravokutnika. Na slici je uzeto $n = 5$, no ako uzmemo n dosta veliko, možemo učiniti, da taj posljednji opisani pravokutnik bude po volji malen. Kad n raste, približavaju se sume S_n i s_n površini, koju tražimo.



Slika 21.

b) Apscise točaka A_1, A_2, A_3, . . . $A_n = A$ jesu

$$x_1 = \frac{x}{n},\ x_2 = \frac{2x}{n},\ x_3 = \frac{3x}{n},\ \ldots\ x_n = \frac{nx}{n} = x.$$

Prema jednadžbi parabole, bit će ordinate točaka $B_1, B_2, \ldots B$

$$y_1 = \frac{x^2}{n^2},\ y_2 = \frac{4x^2}{n^2},\ y_3 = \frac{9x^2}{n^2},\ \ldots\ y_n = \frac{n^2x^2}{n^2} = x^2.$$

Te ordinate visine su onih pravokutnika, koji svi imadu bazu $\Delta x = \frac{x}{n}$. Na slici su upisana 4 pravokutnika, a opisanih je 5. U općenom slučaju kad je n ma kolik, ima $n - 1$ upisan i n opisanih pravokutnika. Razlika među sumom opisanih i upisanih pravokutnika jednaka je površini posljednjega opisanog pravokutnika.

Kako je njegova baza $\frac{x}{n}$, a visina x^2, vidimo da je

$$S_n - s_n = \frac{x^3}{n}.$$

Kad se uzme n dosta veliko, može se ta diferencija učiniti po volji malena, pa stoga vidimo, da je tražena površina doista zajednička granica onih dviju suma. Stoga će biti dosta, da razmotrimo samo jednu od njih, recimo S_n.

Lako razbiramo, da je

$$S_n = \frac{x^3}{n^3} + \frac{4\,x^3}{n^3} + \frac{9\,x^3}{n^3} + \ldots + \frac{n^2\,x^3}{n^3} =$$

$$= \frac{x^3}{n^3}(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2) =$$

$$= \frac{x^3}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

U §-u 20. izvedena je formula za zbroj kvadrata prirodnih brojeva. Tamo je određen izraz

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Poradi toga može se pisati

$$S_n = \frac{x^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right),$$

ili

$$S_n = \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2\,n} + \frac{x^3}{6\,n^2}.$$

Što je veći n, to su manje vrijednosti drugoga i trećega razlomka, koji ima n u nazivniku. Po tom se vidi, da je

$$\lim S_n = \frac{x^3}{3} \text{ za } n = \infty,$$

a kako je prema jednadžbi parabole $x^2 = y$, može se to još pisati

$$\lim S_n = \frac{x\,y}{3} \text{ za } n = \infty.$$

Površina OAB jednaka je trećini pravokutnika $OABC$. Kako je površina toga pravokutnika $= x\,y$, izlazi da je *površina P, omeđena ordinatnom osi, lukom parabole i paralelom BC prema apscisnoj osi jednaka*

$$P = \frac{2}{3}\,x\,y.$$

c) Sumu opisanih pravokutnika možemo predočiti i u ovom obliku:

$$S_n = y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \ldots + y_n \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \Delta x,$$

jer svi članovi te sume imadu oblik $y \cdot \Delta x$, a to se s obzirom na jednadžbu parabole može pisati

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \Delta x.$$

§ 47. Određeni integral. Pustimo li u prethodnoj sumi da n bude sve veće i veće, tako da Δx biva sve manje i manje, granica, kojoj se S_n sve više približava, bilježi se simbolički *znakom određenoga integrala*

$$\int_0^x y\, d\,x \quad \text{ili} \quad \int_0^x x^2\, d\,x.$$

Taj integral određuje površinu omeđenu lukom parabole, osju X i ordinatom y, koja pripada apscisi x. Prema rezultatu, što smo ga za tu površinu prije našli, možemo pisati

$$\int_0^x x^2\, d\,x = \frac{x^3}{3}. \qquad (1)$$

Znak integrala $\int$ za lim S_n uveo je *Leibniz* godine 1675. Taj je znak rastegnuto slovo S. Naziv „Integral" uveo je *Jakov Bernoulli* god. 1690. Brojevi 0 i x, što su pripisani uz donji i gornji kraj toga znaka zovu se *granice integrala.* Napose se kaže, da je 0 *donja granica,* a x *gornja.*

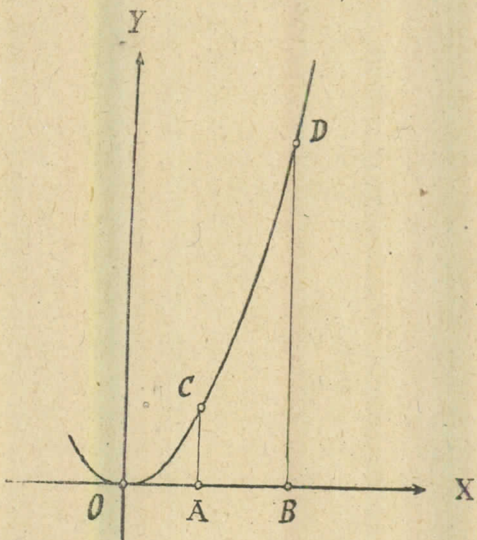
Ogledajmo sada površinu sadržanu među lukom parabole $y = x^2$, osju X i ordinatama AC i BD, koje pripadaju apscisama a i b. Kako je (Vidi sliku na str. 58.)

$$OBD = \int_0^b x^2\, d\,x = \frac{b^3}{3}, \quad OAC = \int_0^a x^2\, d\,x = \frac{a^3}{3},$$

vidimo, da je površina

$$ABDC = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

No kako tu površinu možemo odrediti kao granicu sume upisanih pravokutnika, koji leže između ordinate, koja pripada



Slika 22.

apscisi a i ordinate pridružene apscisi b, možemo za površinu $ABDC$ reći, da je određena integralom $\int_a^b x^2\,d\,x$, pa tako izlazi, da je

$$\int_a^b x^2\,d\,x = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

V. Odsječak.

Nauk o kombinacijama. Binomni poučak.

§ 28. **Objašnjenja.** *Kombinirati* (u širem značenju) reći će zadane stvari ili znakove ređati po nekom pravilu jedne uz druge ili ih spajati u grupe, koje imaju određen sastav. Stvari ili znaci, koji se kombiniraju, zovu se *elementi;* jedni se od drugih razlikuju samo mjestom, što ga zauzimaju u početnom rasporedu. Elementi se označuju ili slovima u azbučnom redu, ili jednim istim slovom, kojemu se dadu različite mjesne kazaljke, ili pak samim mjesnim kazaljkama, t. j. brojevima prirodnoga niza brojeva. Na pr. $a, b, c, \ldots$; $a_1, a_2, a_3, \ldots$; $1, 2, 3, \ldots$

Od dva elementa onaj se zove *viši (niži),* koji u početnom rasporedu dolazi kasnije (ranije). Ako je na pr. $a\,b\,c \ldots$ početni raspored, onda je element b viši od a, a niži od c. Ako se naprotiv dva elementa ne trebaju ničim razlikovati, onda su oni *jednaki,* pa se naznačuju istim slovom ili istom kazaljkom.

Svaka se grupa elemenata zove *kompleksija*, a u specijalnim slučajevima *permutacija, kombinacija* (u užem značenju) ili *varijacija.* Od dvije kompleksije ona se zove *viša,* koja na prvom mjestu ima viši element, ili ako su u obje kompleksije na prvih k mjesta elementi jednako poređani, onda je ona viša, koja na $(k+1)$-vom mjestu ima viši element. Tako je na pr. $b\,a\,c$ više od $a\,b\,c$, $a\,b\,d\,c$ više od $a\,b\,c\,d$ i t. d. Elementi u početnom rasporedu čine *najnižu* kompleksiju, u protivnom pak rasporedu *najvišu.* Zato je $a\,b\,c\,d$ najniža, a $d\,c\,b\,a$ najviša kompleksija elemenata a, b, c, d.

A. Permutacije.

§ 29. **Objašnjenja.** *Permutirati* dva elementa ili njih više reći će zadane elemente u svakom rasporedu spajati u kompleksije tako, da svaka kompleksija sadržava sve zadane elemente. Pojedine kompleksije sviju elemenata zovu se *permutacije*, jer se one iz kojegod kompleksije elemenata, na pr. iz najniže, mogu izvesti uzastopnim premještanjem elemenata. Po svezi, u kojoj dolazi, može se vazda razabrati, da li se pod izrazom „permutacija" ima razumijevati sámo premještanje ili rezultat toga premještanja.

Broj svih permutacija od n različitih elemenata označuje se s $P\,(n)$. Ako između n elemenata imade r među sobom jednakih, dok su svi ostali različiti, onda se s $P_r\,(n)$ označuje taj broj. $P_{r,\,s}\,(n)$ neka znači, da se između n elemenata nalaze dvije grupe od r i od s jednakih elemenata, dok su ostali elementi različiti. I t. d.

§ 30. Permutacije nejednakih elemenata.

a) Jedan jedini element ne čini kompleksije, dakle ni permutacije. No da se raširi područje, u kojem imadu vrijediti formule, što ćemo ih poslije izvesti, govori se o permutaciji i kod *jednoga* elementa, pa se uzima, da je $P\,(1) = 1$.

b) Dva elementa a i b daju dvije permutacije, naime ab i ba.

Dakle je $\quad P\,(2) = 2 = 1 \cdot 2.$

c) Permutacije triju elemenata nađu se tako, da se elementu a pripoje permutacije elemenata b i c, elementu b permutacije od a i c i naposljetku elementu c permutacije od a i b.

$$a\,b\,c,\ a\,c\,b;\ b\,a\,c,\ b\,c\,a;\ c\,a\,b,\ c\,b\,a.$$

Dakle je $\ P\,(3) = 3 \cdot P\,(2) = 1 \cdot 2 \cdot 3.$

d) Uopće je

$$P\,(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \,.\,.\,.\,.\, n = n!,$$

ako se umnožak $1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n$ označi s $n!$ (čitaj: n *faktorijela*). Ako ta jednadžba postoji za kojugod vrijednost od n, mora ona postojati i za vrijednost, koja je za 1 veća. Ako se naime permutacije od $n + 1$ elemenata tako razdijele u $n + 1$ grupu, da u istu grupu dođu permutacije s istim elementom na prvom mjestu, onda će u svaku grupu doći toliko permutacijâ, koliko permutacijâ daje preostalih n elemenata.

Odatle izlazi

$$\begin{aligned} P(n+1) &= (n+1)\,.\,P(n) \\ &= 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n(n+1) = (n+1)! \end{aligned}$$

Vidjeli smo, da taj zakon vrijedi za $n = 4$, dakle će vrijediti i za $n = 5$ i t. d.

Broj permutacijâ od n nejednakih elemenata jednak je umnošku prirodnih brojeva od 1 do n.

Na pr. S istih pet znamenaka 1, 2, 3, 4, 5 može se napisati 120 različitih peteroznamenkastih dekadskih brojeva, jer je $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Zadatak. Od elemenatâ a, b, c, d, e nek se načine sve permutacije i to u *leksikografskom**) poretku, t. j. tako da iza svake permutacije dođu same više permutacije.

Rješenje. Najprije dođu permutacije s elementom a na prvom mjestu; zatim permutacije, koje imaju b na prvom mjestu i t. d. Svaki od tih pet razdjela sadržava 4! permutacijâ; toliko je naime permutacija, koje se mogu načiniti iz ona 4 elementa, što dolaze iza prvoga. U prvom razdjelu dođu najprije permutacije, koje imadu b na drugom mjestu, onda c i t. d. Svaki od tih podrazdjela sadržava 3! permutacija, jer iza prva dva elementa, moraju preostala tri doći u svim mogućim permutacijama i t. d.

Na taj se način dobiju slijedeće permutacije, od kojih ćemo samo neke ovdje ispisati, jer ih ima previše.

$a\ b\ c\ d\ e$	$b\ a\ c\ d\ e$
$a\ b\ c\ e\ d$	$b\ a\ c\ e\ d$
$a\ b\ d\ c\ e$	$b\ a\ d\ c\ e$
$a\ b\ d\ e\ c$	$b\ a\ d\ e\ c$
$a\ b\ e\ c\ d$	$b\ a\ e\ c\ d$
$a\ b\ e\ d\ c$	$b\ a\ e\ d\ c$
a	b . . . .
. . . . .	. . . . .

Ako se elementi označe mjesnim kazaljkama 1, 2, 3, . . . pa ako se permutacije shvate kao dekadski brojevi, leksikografski je poredak postignut onda, kad su brojevi poređani po veličini.

---

*) Taj naziv potječe otuda, što se takav poredak primjenjuje u rječnicima.

Primjer. Za 4 elementa 1, 2, 3, 4 dobijemo ove permutacije:

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1.

Primjer. U leksikografskom se poretku imade odrediti 54. permutacija elemenata a, b, c, d, e. S a se počinju $4! = 24$ permutacije, a isto toliko s b. Tražena permutacija ide dakle u onu grupu, koja ima c na prvom mjestu i u kojoj je $c\,a\,b\,d\,e$ prva permutacija. Prema tomu treba još odrediti 6. permutaciju elemenata a, b, d, e. Kako se $3! = 6$ ovih permutacija počinje s a i kako je $a\,e\,d\,b$ posljednja od njih, to je $c\,a\,e\,d\,b$ tražena permutacija.

B. Kombinacije.

§ 31. **Objašnjenja.** Kad se grade permutacije od n elemenata mora se vazda svih n elemenata skupiti u kompleksiju; pojedine permutacije razlikuju se između sebe samo poretkom elemenata. Sad ćemo uzeti, da se između n elemenata izluči njih manje, recimo r, pa da se skupe u kompleksiju. Taj se postupak zove *kombiniranje*, a dobiveni spojevi zovu se *kombinacije r-toga razreda od n elemenata*. U kombinacijama ne gleda se na poredak elemenata, pa se stoga elementi obično napišu u prirodnom poretku.

Kombinacije 1., 2., 3., 4. i 5. razreda zovu se također *unione, ambe, terne, kvaterne i kvinterne.*

§ 32. **Kombinacije nejednakih elemenata.** *a)* Kombinacijama prvoga razreda ili unionama imamo držati same elemente. Označimo li broj kombinacija r-toga razreda od n elemenata sa $K_r\,(n)$, onda je

$$K_1\,(n) = n.$$

b) Kombinacije drugoga razreda ili ambe dobiju se tako, da se svaki element spoji sa svakim elementom, koji je od njega viši. Na pr. Iz elemenata a, b, c, d, e dobije se ovih 10 amba:

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & ae, \\ & bc, & bd, & be, \\ & & cd, & ce, \\ & & & de. \end{array}$$

Da se odredi $K_2(n)$ t. j. broj amba od n elemenata, spojit ćemo svaki element sa svakim drugim, pa ćemo time dobiti $n(n-1)$ ambu. No pri tom se svaka amba dobije dva put; amba bd na pr. dobije se, ako se spoji b sa d i d sa b. Traženi je broj dakle polovina produkta $n(n-1)$, t. j.

$$K_2(n) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

O ispravnosti tog zaključka uvjeri se na ambama iz elemenata a, b, c, d, e.

c) Sve kombinacije trećega razreda ili terne dobiju se tako, da se najprije načine sve ambe, pa se onda svakoj ambi pripoji svaki element, koji je viši od onih, što se u njoj nalaze. Iz elemenata a, b, c, d, e dobije se prema tome ovih 10 terna:

$$\begin{array}{lll} abc,\ abd,\ abe; & acd,\ ace; & ade; \\ & bcd,\ bce; & bde; \\ & & cde. \end{array}$$

Da izračunamo $K_3(n)$ postupat ćemo nešto drukčije. Spojit ćemo naime svaku ambu sa svakim elementom, koji u ambi ne dolazi, pa tim dobijemo $K_2(n) \cdot (n-2)$ terne. No kod tog izađe svaka terna po tri puta · bde na pr. dobije se spojivši bd sa e, be sa d i de sa b. Stoga je

$$K_3(n) = \frac{K_2(n) \cdot (n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

d) Kombinacije r-toga razreda dobiju se tako, da se svakoj kombinaciji $(r-1)$-voga razreda pripoji svaki element, koji je viši od onih, što se nalaze u kombinaciji.

Da se izračuna $K_r(n)$ izmijenit ćemo to pravilo tako, da se svaka kombinacija $(r-1)$-voga razreda ima spojiti sa svakim elementom, koji u njoj ne dolazi. Tako se dobije $K_{r-1}(n) \cdot (n-r+1)$ kombinacija, i to svaka od njih r puta. Stoga je

$$K_r(n) = \frac{K_{r-1}(n) \cdot (n-r+1)}{r}.$$

Za $r = 4, 5, \ldots$ dobije se otud

$$K_4(n) = \frac{K_3(n) \cdot (n-3)}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

$$K_5(n) = \frac{K_4(n) \cdot (n-4)}{5} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5},$$

i uopće

$$K_r(n) = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)}{r!}.$$

Primjeri. Od 5 elemenata dobije se

$$K_3(5) = \frac{5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3} = 10 \text{ terna},$$

$$K_4(5) = \frac{5 . 4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3 . 4} = 5 \text{ kvaterna},$$

$$K_5(5) = \frac{5 . 4 . 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = 1 \text{ kvinterna}.$$

A više kombinacije ne mogu se graditi od 5 elemenata.

§ **33. Svojstva binomnih koeficijenata.** *a)* Izrazi što smo ih našli za $K_1(n)$, $K_2(n)$, $K_3(n) \ldots$ zovu se *binomni koeficijenti*,* jer dolaze kao koeficijenti, kad se razvija n-ta potencija koga binoma (kao što ćemo vidjeti u § 34). Redovno se ti izrazi označuju s $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3} \ldots$ (čitaj: n nad 1, n nad 2, n nad 3, ...). Općeno se $K_r(n)$ označuje s $\binom{n}{r}$. Prema tome je

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1) . (n-2) \ldots (n-r+1)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots r}.$$

Taj je izraz samo prividno razlomak, jer on naznačuje množinu, (naime broj kombinacija r-toga razreda od n elemenata), pa zato mora biti jednak nekome cijelom broju. Brojnik i nazivnik su umnošci od r faktora, koji se u brojniku počinju s n i postupno bivaju za 1 manji; u nazivniku pak počinju se s 1 i postupno za 1 rastu. Odatle izlazi, da je zbroj prvih faktora u brojniku i nazivniku isto tolik, kolik i zbroj drugih, trećih i t. d.

b) Lako se nađe da je

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15, \quad \binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15,$$

dakle je $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$.

Općeno: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Dokaz: Znamo, da je $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$.

Pomnoži li se brojnik i nazivnik tog razlomka s $(n-r)!$, pa skrati li se onda s $r!$, dobije se

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{(n-r)!} = \binom{n}{n-r}.$$

To nam kazuje, da se od n elemenata može načiniti isto toliko kombinacija prvog razreda, koliko i kombinacija $(n-1)$-vog razreda, pa onda kombinacija drugog razreda koliko i $(n-2)$-goga i t. d.

O ispravnosti tog stavka možemo se uvjeriti i ovim razmatranjem: Načinimo na pr. od elemenata *a, b, c, d, e, f,* sve kvaterne i pored svake kvaterne napišimo ona dva elementa, što u njoj ne dolaze. Na desnoj strani crte, koja dijeli ambe od kvaterna, imat ćemo tad sve ambe elemenata *a, b, c, d, e, f.* Tako će na pr. amba *ad* doći uz kvaternu *b c e f,* amba *be* uz kvaternu *a c d f* i t. d. Ima dakle isto toliko amba, koliko i kvaterna. Općeno može se reći, da od n elemenata ima toliko isto kombinacija r-toga, kao i $(n-r)$-toga razreda.

a b c d	*e f*
a b c e	*d f*
a b c f	*d e*
a b d e	*c f*
a b d f	*c e*
a b e f	*c d*
.	.
.	.
.	.

Primjer.

$\binom{8}{6}$ možemo najlakše ovako odrediti:

$$\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

c) Lako se razbira, da je

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 + \frac{6}{4}\right) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{10}{4}.$$

Općeno:

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} =$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(r-1)}\cdot\left[1+\frac{n-r+1}{r}\right] =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r} =$$

$$= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r},$$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}.$$

Do te formule možemo doći i ovim razmatranjem, kod koga ćemo za osnov uzeti specijalni slučaj, što je čas prije bio raspravljen: Od elemenata 1, 2, 3, . . . 9, 10 može se načiniti $\binom{10}{4}$ kvaterna. Među njima ih je $\binom{9}{4}$, koje u sebi ne sadržavaju element 10. Kvaterna pak s elementom 10 ima toliko, koliko se od elemenata 1, 2, 3, . . . 9 može načiniti terna, t. j. $\binom{9}{3}$.

Stoga je

$$\binom{10}{4} = \binom{9}{4} + \binom{9}{3}.$$

C. Binomni poučak za cijele pozitivne eksponente.

§ 34. **Objašnjenje i dokaz.** Pod *binomnim se poučkom* razumijeva jednadžba, kojom se n-ta potencija binoma izrazuje potencijama obaju članova. Time su dakle posveopćeni specijalni slučajevi:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3.$$

Da izvedemo traženu jednadžbu, izvest ćemo najprije produkt

$$(a+b_1)\,(a+b_2)\,(a+b_3)\ldots(a+b_n) \qquad (P)$$

pa u rezultatu postaviti $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$. Po pravilu o množenju dvaju polinoma izlazi, da se produkt od n polinoma može dobiti tako, da se jedan član prvoga faktora u svim mogućim spojevima pomnoži s jednim članom drugoga, trećega, . . . n-toga faktora, a dobiveni produkti zbroje.

Ako se u svakom faktoru produkta (P) uzme najprije prvi član, dobije se a^n. Kako tu ne dolazi b, razbiramo, da će a^n biti član i u razvidbi izraza $(a+b)^n$.

Pomnoži li se onda u svim mogućim spojevima drugi član jednoga faktora s prvim članom ostalih faktora, za sumu će se dobiti

$$a^{n-1}(b_1+b_2+\ldots+b_n);$$

ako su pak svi b između sebe jednaki, izađe

$$a^{n-1}\cdot nb=\binom{n}{1}a^{n-1}b.$$

Pomnože li se zatim u svim mogućim spojevima drugi članovi dvaju faktora s prvim članovima preostalih, za sumu će se dobiti

$$a^{n-2}(b_1b_2+b_1b_3+\ldots+b_{n-1}b_n).$$

U zagradi stoje ovdje sve ambe brojeva $b_1, b_2, \ldots b_n$. Stoga će ta suma, ako se uzme da su svi b jednaki, prijeći u

$$a^{n-2}\cdot\binom{n}{2}b^2=\binom{n}{2}a^{n-2}b^2.$$

Produžujući tako dobit će se napokon

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+b^n.$$

Ta se formula zove *binomni poučak* za pozitivne, cijele eksponente. Glasoviti matematik i prirodoslovac *Isak Néwton* pokazao je, da ta formula vrijedi i za razlomljene eksponente.

Primjeri.

$$(1+x)^5=1+\binom{5}{1}x+\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4+x^5=$$
$$=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5.$$

$$(a-b)^4=a^4-\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2-\binom{4}{3}ab^3+b^4=$$
$$=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4.$$

Peti član u razvidbi $\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)^9$ izgleda ovako:

$$\binom{9}{4}\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^4=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{a^5}{3^5}\cdot\frac{b^4}{2^4}=\frac{7\,a^5b^4}{216}.$$

§ **35. Diskusija.** Kad se n-ta potencija binoma $a+b$ razvije po binomnom poučku, dobije se $n+1$ član. Ti se članovi dadu poređati padajući po potencijama od a i ujedno rastući po potencijama od b. Zbroj eksponenata od a i b u svakom je članu $= n$. Koeficijenti članova zovu se kako smo već spomenuli u § 33. *a) binomni koeficijenti*; oni su oblika $\binom{n}{r}$, t. j. svi imaju za gornju kazaljku n, a za donju eksponent od b. To vrijedi i za prvi član, ako se samo odredi, da $\binom{n}{0}$ ima značiti jedinicu. Opći je dakle oblik svih članova

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

n-toj potenciji pripadaju binomni koeficijenti

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

Dva binomna koeficijenta, koji su od krajeva toga reda jednako daleko, među sobom su jednaki, jer je

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad (§ 33, b).$$

Na to treba paziti kod izračunavanja binomnih koeficijenata.

Dva binomna koeficijenta n-te potencije, koji dolaze jedan za drugim, daju za zbroj jedan binomni koeficijent $(n+1)$-ve potencije (§ 33, c). Na tome se osniva izračunavanje binomnih koeficijenata u „*Pascalovu trokutu*".

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}$$

Budući da je $(a+b)^0 = 1$ i $(a+b)^1 = a+b$, to nultoj i prvoj potenciji pripadaju koeficijenti 1, pa 1 i 1. Onda dolaze binomni koeficijenti 2., 3., 4., 5., . . . potencije. Izostavivši prvi i posljednji koeficijent, koji su jednaki 1, mogu se ti koeficijenti izračunati zbrajajući dva najbliža koeficijenta, koji stoje povrh njih. (*Pascal,* 1623.—1662.).

To određivanje binomnih koeficijenata nađeno je u ostalom i u jednom kineskom spisu iz godine 1303.

Čim se razlikuje razvidba izraza $(a+b)^n$ od $(a-b)^n$?

VI. Odsječak.

Račun vjerojatnosti.

A. Osnovni pojmovi računa vjerojatnosti.

§ **36. Matematička vjerojatnost događaja.** U računu vjerojatnosti radi se o *slučajnim* događajima, t. j. o takvima, kojima su uzroci nepoznati ili pak tako zamršeni, da se unaprijed ne da ništa reći. Neka se na pr. u žari nalazi više kuglica, koje su različito bojadisane, ali inače sasvim jednake. Ako ne gledamo u žaru, pa hoćemo izvući kuglicu izvjesne boje, recimo bijelu, po običnom mišljenju uspjeh stoji do slučaja. A uza zadani broj kuglicâ to je vjerojatniji, što više ima bijelih kuglica, uza zadan pak broj bijelih kuglica uspjeh je to vjerojatniji, što je manji broj svih kuglica. S time se podudara evo ova definicija, koja je temelj računu vjerojatnosti.

Ako ima m slučajeva, u kojima se neki događaj može zbiti i među njima p slučajeva, što su događaju povoljni, onda je matematička vjerojatnost v, da će se taj događaj zbiti, jednaka broju slučajeva povoljnih, razdijeljenom s brojem svih mogućih slučajeva, t. j.

$$v = \frac{p}{m}.$$

Kod toga se uzima, da su svi slučajevi, što mogu nastupiti, podjednako mogući. Značenje te pretpostavke razabrat ćemo iz ovih primjera.

1. Primjer. Kolika je vjerojatnost, da će se jednom kockom baciti broj 6?

Mogućih slučajeva ima šest, a postavljenom zahtjevu odgovara samo 1 slučaj. Stoga je tražena vjerojatnost $v = \frac{1}{6}$. To se ne ima tako shvatiti, kao da u šest hitaca mora jedamput pasti broj 6. No iskustvo pokazuje, da u vrlo velikom broju hitaca, na šest njih dolazi jedan s brojem 6. (Vidi dalje u 4. dodatku.)

Mogući su slučajevi tu podjednako mogući, ako je kocka pravilna oblika i ako joj je težište u sredini. Da je to tako, uzimat ćemo kod svakog zadatka o kockama. Nijesu li te pretpostavke ispunjene, onda se o prethodnom zadatku ne može dati račun.

2. Primjer. Ako su u žari 3 bijele, 9 crvenih i 12 crnih kuglica, onda je vjerojatnost, da će se izvući bijela kuglica, $= \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$, vjerojatnost, da će se izvući crvena kuglica, $= \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, a vjerojatnost, da će se izvući crna kuglica, $= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

3. Primjer. Kolika je vjerojatnost, da će se s dvije kocke baciti svota 6?

Svaki broj jedne kocke može pasti zajedno sa svakim brojem druge. Po tome je $m = 6^2 = 36$ t. j. s dvije kocke može se baciti 36 različitih hitaca. Povoljni su pak slučajevi: 1, 5; 2, 4; 3, 3; 4, 2; 5, 1. Prema tomu je $p = 5$ i $v = \frac{5}{36}$.

4. Primjer. Kolika je vjerojatnost, da se između 5 izvučenih brojeva male lutrije, koja se sastoji od 90 brojeva, nalazi neka izvjesna terna?

Mogući slučajevi sve su kvinterne od 90 elemenata.

Po tome je $m = \binom{90}{5}$. Povoljni su slučajevi one kvinterne, koje sadržavaju onu izvjesnu ternu. Budući da uza tu ternu može doći svaka amba preostalih 87 brojeva, to je $p = \binom{87}{2}$, dakle

$$v = \binom{87}{2} : \binom{90}{5} = \frac{87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2} \cdot \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86} = \frac{1}{11748}.$$

Dodaci. 1. Ako je $p = 0$, onda je i $v = 0$. Vjerojatnost *nemogućega* događaja jednaka je 0.

2. Ako je $p = m$, onda je $v = 1$. Ako je dakle događaj *siguran*, njegova je vjerojatnost jednaka 1.

3. U svim ostalim slučajevima vjerojatnost je neki pravi razlomak. Kaže se, da je događaj *nevjerojatan, dvojben* ili *vjerojatan*, kako je već $v < \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}$ ili $v > \frac{1}{2}$.

4. Po definiciji, što smo je gore dali, može se vjerojatnost kojega događaja izračunati samo onda, kad je poznat broj povóljnih kao i broj svih mogućih slučajeva, ili kad se bar može odrediti omjer tih dvaju brojeva. Takva se vjerojatnost zove *vjerojatnost a priori*. Ako se nasuprot načine mnogi pokusi, koji mogu dovesti do nekoga događaja, pa se broj slučajeva, u kojima je taj događaj nastao, podijeli brojem svih pokusa, onda se taj količnik zove *vjerojatnost a posteriori*. Kad se za koji događaj mogu odrediti obje te vrste vjerojatnosti, onda se razlika među njima može načiniti po volji malena, ako se samo broj pokusâ uzme dosta velik. Taj stavak, koji je dokazao *Jakov Bernoulli* (1654.—1705.) i koji je potvrđen mnogim iskustvom, zove se *zakon velikih brojeva*. Ako se pravilno izrađena kocka baci vrlo mnogo puta, pa ako se broj slučajeva, u kojima je bačen 1, podijeli brojem svih hitaca, onda je granica toga količnika $\frac{1}{6}$, kad broj pokusâ neprestano raste.

§ 37. **Protivna vjerojatnost.** Vjerojatnost, da se neki događaj ne će dogoditi, zove se također *protivna vjerojatnost* toga događaja.

Zbroj vjerojatnosti i protivne vjerojatnosti istoga događaja jednak je 1.

Dokaz. Ako nekome događaju pripada m mogućih i p povoljnih slučajeva, onda ima $m - p$ slučajeva, koji su povoljni tomu, da se događaj ne će zbiti. Prema tomu je protivna vjerojatnost

$$v' = \frac{m-p}{m} = 1 - \frac{p}{m} = 1 - v, \text{ dakle } v + v' = 1.$$

1. Primjer. Oklade se dva igrača. A dobija ako s jednom kockom baci broj 6, ako pak ne baci, onda dobija B. Vjerojatnost da će dobiti A jest $\frac{1}{6}$, a $\frac{5}{6}$ da će dobiti B. Stoga i njihovi ulošci treba jedan prema drugom da stoje kao 1 : 5, ako se hoće, da nijednom ne bude krivo. Kad bi se naime ta

oklada mnogo puta (recimo 10.000 puta) ponovila, po „zakonu velikih brojeva" smije se opravdano uzimati, da će B gotovo pet puta češće dobijati, negoli A.

2. Primjer. Izračunaj vjerojatnost da će se dvjema kockama baciti svota veća od 3.

Tu će bit dobro, da se najprije izračuna protivna vjerojatnost. Budući samo tri hica (1, 1; 1, 2; 2, 1) ne daju svotu veću od 3, a svih mogućih slučajeva ima 36, to je

$$v' = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \; v = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

§ 38. **Totalna vjerojatnost.** Uzmimo ovaj zadatak: U žari nalazi se 5 bijelih, 3 crvene, 4 plave i 8 zelenih kuglica. Kolika je vjerojatnost, da će se iz žare izvući jedna bojadisana kuglica?

Rješenje. U svem ima 20 kuglica; od tih je $3 + 4 + 8 = 15$ bojadisano. Stoga je tražena vjerojatnost $v = \frac{15}{20}$. Označi li se s v_1, v_2, v_3 vjerojatnost, da će se izvući crvena, bijela ili zelena kuglica, tad je

$$v_1 = \frac{3}{20}, \; v_2 = \frac{4}{20}, \; v_3 = \frac{8}{20}, \text{ dakle je } v = v_1 + v_2 + v_3.$$

Prema tome je vjerojatnost, da će se izvući bojadisana kuglica, jednaka sumi vjerojatnosti da će biti izvučena crvena, plava ili zelena kuglica.

Posveopćujući taj rezultat, reći ćemo ovako: Može li događaj D nastupiti samo tako, da se zbude koji od događaja D_1, $D_2, \ldots D_r$, koji isključuju jedan drugoga, i kojima pripadaju vjerojatnosti $v_1, v_2, \ldots v_r$, tad je vjerojatnost v događaja D dana formulom

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_r.$$

Označi li se naime s $p_1, p_2, \ldots p_r$ broj slučajeva, što su povoljni događaju $D_1, D_2, \ldots D_r$, a s m broj svih mogućih slučajeva, tad je $p_1 + p_2 + \ldots + p_r$ broj slučajeva, koji su povoljni tome da se zbude uopće ma koji od događaja D_1, $D_2, \ldots D_r$. Stoga je vjerojatnost događaja D dana izrazom

$$v = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_r}{m} = v_1 + v_2 + \ldots + v_r.$$

v se zove *totalna vjerojatnost* događaja D. Ona je jednaka sumi *parçijalnih* vjerojatnosti $v_1, v_2, \ldots v_r$ događaja $D_1, D_2 \ldots D_r$, pretpostavivši samo, da ti događaji isključuju jedan drugi i da oni obuhvaćaju sve slučajeve, u kojima D nastupiti može. Taj ćemo uvjet objasniti ovim primjerom:

Između brojeva 1, 2, . . . 90 izvuče se u lutriji jedan. Nek se odredi vjerojatnost, da izvučeni broj ne će biti djeljiv ni s 2 ni s 3.

Od brojeva 1 do 90 ima ih 45, koji su djeljivi s 2, i 45, koji nijesu djeljivi s 2. Dakle je $v_1 = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$. Među istim brojevima ima ih 30, koji su djeljivi s 3, a 60 koji nijesu. Da izvučeni broj nije djeljiv s 3 vjerojatnost je $v_2 = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$. Kad bi se vjerojatnost da izvučeni broj ne će biti djeljiv ni s 2 ni s 3, išla računati iz jednadžbe $v = v_1 + v_2$, izašlo bi $v > 1$, što je očito nemoguće. To potječe otuda, što događaji D_1 i D_2 (nedjeljivost s 2 i s 3) ne isključuju jedan drugi. Broj 5 na pr. nije djeljiv ni s 2, a ni s 3.

Ispravan postupak bio bi ovakav: Između brojeva 1 do 90 ima ih 45, koji su djeljivi s 2, i 30, koji su djeljivi s 3. U sumi $45 + 30$ dvostruko su računati oni brojevi, koji su djeljivi i s 2 i s 3 t. j., koji su djeljivi sa 6. Tih brojeva ima 15. Pa stoga je $45 + 30 - 15 = 60$ brojeva, koji su djeljivi ili s 2 ili s 3, ili pak i s 2 i s 3. Preostane dakle $90 - 60 = 30$ brojeva, koji nijesu djeljivi ni s 2 ni s 3. Zato je $v = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

§ **39. Složena vjerojatnost.** Iz igre karata s 32 karte i iz druge s 52 karte izvuče se po jedna karta. Kolika je vjerojatnost, da će to biti dva kralja?

Jednako mogućih slučajeva ima 32. 52, jer se svaka karta iz prve igre može sastati sa svakom kartom iz druge. Na isti se način može obrazložiti, da povoljnih slučajeva ima 4.4. Dakle je

$$v = \frac{4.4}{32.52} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{13} = v_1\ v_2,$$

ako je s v_1 i s v_2 označena vjerojatnost, da će iz prve, dotično iz druge igre bit izvučen jedan kralj.

Općeno: Uzmimo dva događaja D_1, i D_2, koji ne zavise jedan o drugome i kojima pripadaju vjerojatnosti

$$v_1 = \frac{p_1}{m_1} \text{ i } v_2 = \frac{p_2}{m_2}.$$

Da će se ta dva događaja zajedno ili pak jedan za drugim dogoditi, za to ima $m_1\ m_2$ mogućih i $p_1\ p_2$ povoljnih slučajeva. Svaki mogući slučaj jednoga događaja, može se naime sastati sa svakim mogućim slučajem drugoga događaja, a tako isto svaki povoljni slučaj jednoga sa svakim povoljnim slučajem drugoga. Po tome je složena vjerojatnost, da će se zajedno ili jedan za drugim zbiti oba ta događaja

$$v = \frac{p_1\ p_2}{m_1\ m_2} = v_1\ v_2.$$

Analogno se nađe vjerojatnost

$$v = v_1\ v_2\ .\ .\ .\ v_r,$$

da će se zajedno ili jedan za drugim dogoditi događaji D_1, D_2, . . . D_r, koji ne zavise jedni o drugima i kojima pripadaju vjerojatnosti v_1, v_2, . . , v_r.

Takva vjerojatnost zove se *složena vjerojatnost.*

Na pr. Vjerojatnost, da će se jednom kockom baciti broj 1 jednaka je $\frac{1}{6}$. Stoga je vjerojatnost, da će se jednom kockom baciti broj 1, dva puta za redom $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Isto je tolika vjerojatnost, da će se dvjema kockama baciti 1, 1.

Dodaci. 1. Vjerojatnost, da će se događaj, kojemu je vjerojatnost v, ponoviti r-puta, jednaka je v^r. Dakle je vjerojatnost da će se jednim novcem 5 puta za redom baciti „glava“ $= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

2. Formula $v = v_1\ v_2\ .\ .\ .\ v_r$ vrijedi i onda, kad se imaju ili zajedno dogoditi ili jedan za drugim doći događaji, koji jedan o drugom zavise, sâmo treba vjerojatnost drugoga i svakoga slijedećeg događaja uzeti onako, kakva je, kad su se već zbili prethodni događaji.

Na pr. Kolika je vjerojatnost, da će se iz žare, u kojoj su 3 bijele i 7 drukčije bojadisanih kuglica, tri puta redom izvući bijela kuglica, ako se izvučene kuglice ne bacaju natrag u žaru?

Vjerojatnost, da će se prvi put izvući bijela kuglica, jest $= \frac{3}{10}$. Ako se uzme, da je prvi pokušaj uspio, onda će u žari biti još 9 kuglica, i među njima dvije bijele. Vjerojatnost, da će se drugi put izvući bijela kuglica, jest dakle $= \frac{2}{9}$. Analogno će kod trećega pokušaja biti vjerojatnost $= \frac{1}{8}$. Odgovor dakle glasi

$$v = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}.$$

§ **40. Matematička nada.** Pod *matematičkom nadom* dobitka razumijeva se umnožak očekivana dobitka i vjerojatnosti, da će nam taj dobitak zapasti. Analogno se pod *matematičkim strahom* od gubitka razumijeva umnožak gubitka, kojega se bojimo, i vjerojatnosti, da će nas on zadesiti. Te nam definicije čine mogućim, da neke stavke računa vjerojatnosti svedemo na jednostavan oblik, kako se razbira iz slijedećih primjera.

1. Primjer. A proda n srećaka, od kojih samo jedna dobija. Ako je dobitak $= k$, a cijena srećke $= x$, kad proda sve srećke ne će A niti šta dobiti ni izgubiti, ako je $x = \frac{k}{n}$. Da će dobiti tko kupi jednu srećku, za to je vjerojatnost $v = \frac{1}{n}$, pa se stoga može pisati $x = k\,v$.

Uz učinjene pretpostavke mora cijena srećke biti jednaka matematičkoj nadi dobitka.

2. Primjer. A se kladi s B-om, da će nastupiti neki događaj, a B protivno tvrdi. U kojem odnošaju moraju biti ulošci x_1 i x_2 tih dvaju igrača?

Kako smo već prije rekli (§ 37.), pravedno je, da ulošci budu proporcionalni s vjerojatnosti dobitka. Imadu li A i B vjerojatnosti v_1 i v_2 da će dobiti, tad mora biti

$$x_1 : x_2 = v_1 : v_2.$$

A otud izlazi

$$x_1 v_2 = x_2 v_1.$$

Budući da A ima vjerojatnost v_1, da će dobiti B-ov uložak x_2, i budući da B ima vjerojatnost v_2, da će dobiti A-ov uložak x_1, posljednja se jednadžba može i ovako riječima kazati: Uloške treba tako odmjeriti, da matematičke nade obojice igrača budu jednake.

Okladi li se na pr. A s B-om, da će on dvjema kockama baciti dva jednaka broja, tad je $v_1 = \frac{1}{6}$, $v_2 = \frac{5}{6}$. Iznosi li uložak A-ov 12 K, uložak B-ov treba da je 60 K, jer onda matematička nada svakog igrača iznosi 10 K.

3. Primjer. Da će dobiti svotu c, imadu osobe A_1, A_2, . . . A_r redom vjerojatnosti v_1, v_2, . . . v_r. Kako se ima taj dobitak razdijeliti među njih, ako se ne će da čeka, kako će odlučiti ždrijeb ili kako će se svršiti igra?

Pravedno je da dijelovi x_1, x_2 . . . x_r budu proporcionalni s vjerojatnostima v_1, v_2, . . . v_r. Tad je

$$\frac{x_1}{v_1} = \frac{x_2}{v_2} = \ldots = \frac{x_r}{v_r} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_r}{v_1 + v_2 + \ldots + v_r}.$$

A kako možemo uzeti, da je suma brojeva povoljnih slučajeva jednaka broju svih mogućih slučajeva, mora biti

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = c$$

i

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_r = 1.$$

Stoga je

$$\frac{x_1}{v_1} = \frac{x_2}{v_2} = \ldots = \frac{x_r}{v_r} = c,$$

ili

$$x_1 = c v_1, \quad x_2 = c v_2, \ldots x_r = c v_r,$$

t. j. dio svake osobe mora biti jednak njezinoj matematičkoj nadi.

Napomena. U prethodnim smo zadacima po osjećaju pravednosti uzimali, da dijelovi ili ulošci moraju biti razmjerni s brojevima povoljnih slučajeva. Ta pretpostavka vodi u nekim ekstremnim slučajevima do rezultatâ, koji se ne mogu upotrijebiti, jer vrijednost, što je za kojega čovjeka ima izgled za kakvim dobitkom, stoji i do imovine, koju on već posjeduje.

B. Primjene na osiguravanje života.

(§ 41.) **Tablice o pomoru.** Svi zadaci o osiguravanju života i o doživotnim rentama osnivaju se na *tablicama o pomoru*, koje kazuju, koliko od 1000 ili 10000 . . . . . osoba, što su isto doba rođene, ima još na životu iza 1, 2, 3, . . . godina. Ako se broj onih, što su još iza n godina ostali na životu, označi s l_n, onda prvi stupac tablicâ o pomoru sadržava vrijednosti $n = 0, 1, 2, \ldots$, drugi pak vrijednosti l_0, l_1, l_2, . . . , koje im odgovaraju.

Vjerojatnost, što je ima n-godišnja osoba, da će doživjeti svršetak slijedeće godine, zove se *vjerojatnost života* za tu osobu, pa je $= \frac{l_{n+1}}{l_n}$. Od l_n osoba, kojima je sada n godina, l_{n+1} doživi naime $(n + 1)$-vu godinu, te tako na l_n mogućih slučajeva ima ih l_{n+1} povoljnih. Protivna vjerojatnost, t. j. da n-godišnja osoba ne će više doživjeti $(n + 1)$-vu godinu, zove se *vjerojatnost smrti*, pa je $= 1 - \frac{l_{n+1}}{l_n}$.

Ako se za što veći broj osoba od godine do godine izračuna vrijednost kvocijenta $\frac{l_{n+1}}{l_n}$, onda iskustvo pokazuje, da je taj kvocijent funkcija od n. To znači, da svakoj izvjesnoj dobi pripada izvjesna vjerojatnost života, koja se iz mnogobrojnih opažanja može odrediti znatnom točnosti. Kad su poznate vrijednosti količnika $\frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_1}, \frac{l_3}{l_2}, \ldots$, onda će se tablice o pomoru dobiti u običnom obliku, ako se najprije postavi na pr. $l_0 = 1000$, pa se onda vrijednosti $l_1, l_2, l_3, \ldots$ izračunaju iz jednadžbi

$$l_1 = \frac{l_1}{l_0} \cdot l_0,\ l_2 = \frac{l_2}{l_1} \cdot l_1,\ l_3 = \frac{l_3}{l_2} \cdot l_2, \ldots$$

Zato se i može obrnuto, kako smo gore kazali, iz vrijednosti $l_0, l_1, l_2, \ldots\ldots$, koje su dane u tablici o pomoru, izračunati vjerojatnost života za 1., 2., 3., . . . godinu, i ako su one vrijednosti od l_n prilično malene, naročito onda, kad je n nešto veće.

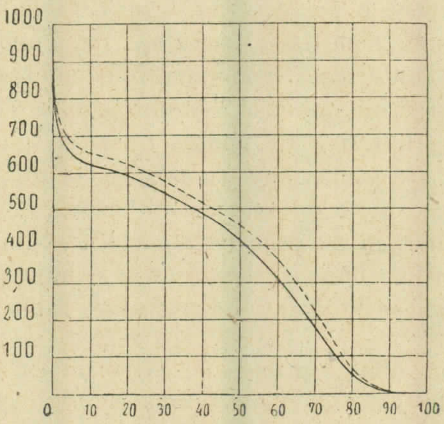
Ako se na pr. iz II. tablice o pomoru (na strani 79) izvade podaci $l_{60} = 559$ i $l_{61} = 539$, onda nam ti brojevi kazuju, da u onoj velikoj množini osoba, kojih je trajanje života upotrijebljeno kod izračunavanja tablice o pomoru, od svakih 559 šezdesetogodišnjih osoba osjekom umre 20 prije navršene 61. godine života. I sada se ti brojevi primjenjuju na sve osobe, koje su u sličnima prilikama života, t. j. očekuje se, da će od svakih 559 osoba, kojima je 60 godina, osjekom umrijeti 20 prije navršene 61. godine života. No ako su životne prilike bitno različite, onda se mijenja i vjerojatnost života, pa stoga se mijenja i odgovarajuća tablica o pomoru.

Ovdje su u skraćenom obliku priopćene dvije tablice o pomoru iz godine 1883., kako su sastavljene prema iskustvu od 23 njemačka zavoda za osiguravanje života.

U I. tablici i to u stupcu s natpisom n naznačene su godine života od 0 do 20, a onda još za svaku 5. godinu. U druga dva stupca zabilježeno je, koliko je od 1000 osoba, što su zajedno rođene, ostalo na životu muških, (l_n za M), a koliko ženskih (l'_n za W). Zarad boljeg pregleda podaci te tablice grafički su predočeni na slici 23. Potpuno izvučena krivulja odgovara vrijednostima l_n procrtkana pak vrijednostima l'_n. Na toj se krivulji jasno očituje veliki pomor u djetinjstvu, a razbira se i razlika u pomoru muških i ženskih.

I. Tablica o pomoru.

n	l_n za M	l'_n za W	n	l_n za M	l'_n za W	n	l_n za M	l'_n za W
0	1000	1000	12	615	646	40	488	516
1	747	783	13	613	644	45	453	485
2	699	733	14	611	641	50	412	452
3	676	709	15	609	639	55	365	413
4	660	693	16	607	636	60	311	363
5	649	681	17	604	633	65	248	297
6	640	672	18	601	630	70	178	219
7	634	666	19	597	627	75	107	137
8	628	660	20	593	623	80	50	66
9	624	656	25	569	602	85	16	22
10	621	652	30	545	576	90	3	5
11	618	649	35	518	547	95	0	1



Slika 23.

II. Tablica sadržava za oba spola poprječne vrijednosti brojeva l_n, počevši od 20. godine života. Zato je i uzeto $l_{20} = 1000$. Što znači treći stupac, koji ima natpis S_n, to će se kasnije rastumačiti. Takve se tablice primijenjuju kod računâ o osiguravanju života.

Statistički atlas Hrvatske i Slavonije donosi na tabli 19. grafički prikazan pomor od godine 1901. do 1910.

II. Tablica o pomoru.

n	l_n	S_n	n	l_n	S_n	n	l_n	S_n
20	1000	10311	44	788	2663	68	385	285
21	991	9809	45	777	2489	69	361	248
22	982	9328	46	766	2324	70	331	214
23	973	8867	47	755	2167	71	312	184
24	964	8426	48	743	2017	72	288	157
25	956	8004	49	731	1875	73	264	133
26	948	7599	50	718	1739	74	240	111
27	940	7212	51	705	1611	75	216	93
28	932	6841	52	692	1489	76	193	76
29	924	6485	53	677	1373	77	171	62
30	916	6144	54	663	1263	78	150	50
31	908	5818	55	647	1160	79	130	40
32	900	5506	56	631	1063	80	112	31
33	891	5207	57	614	971	81	94	24
34	883	4920	58	596	884	82	78	18
35	874	4646	59	578	803	83	64	14
36	866	4384	60	559	727	84	51	10
37	857	4133	61	539	656	85	40	7
38	848	3893	62	519	590	86	31	5
39	838	3664	63	498	529	87	24	3
40	829	3447	64	477	472	88	19	2
41	819	3235	65	454	419	89	14	1
42	809	3035	66	432	371	90	11	—
43	799	2845	67	409	326			

1. Primjer. Koliku vjerojatnost ima osoba od 20 godina, da će još 40 godina živjeti?

Rješenje. S pomoću II. tablice nađe se

$$v = \frac{l_{60}}{l_{20}} = \frac{559}{1000} = 0{\cdot}559.$$

S pomoću pak I. tablice nađe se prema tome radi li se o muškom ili ženskom čeljadetu

$$v_1 = \frac{311}{593} = 0{\cdot}524,$$

ili

$$v_2 = \frac{363}{623} = 0{\cdot}583.$$

2. Primjer. Kolika je vjerojatnost, da će 40-godišnji čovjek i njegova 30-godišnja žena živjeti još 20 godina?

Rješenje. S pomoću I. tablice naći ćemo

$$v_1 = \frac{l_{60}}{l_{40}} = \frac{311}{488}, \; v_2 = \frac{l'_{50}}{l'_{30}} = \frac{452}{576},$$

pa je tako

$$V = v_1 \, v_2 = \frac{311 \, . \, 452}{488 \, . \, 576} = 0\cdot500 \ldots$$

3. Primjer. Uz pretpostavke prethodnoga primjera nek se odredi vjerojatnost, da iza 20 godina *a)* muž bude još na životu, a žena ne, *b)* žena bude na životu, a muž ne, *c)* više ne živi ni muž ni žena.

Rješenje.

a) $V_1 = v_1 \, (1 - v_2) = v_1 - v_1 \, v_2 = 0\cdot637 - 0\cdot500 = 0\cdot137.$

b) $V_2 = (1 - v_1) \, v_2 = v_2 - v_1 \, v_2 = 0\cdot785 - 0\cdot500 = 0\cdot285.$

c) $V_3 = (1 - v_1) \, (1 - v_2) = 0\cdot363 \times 0\cdot215 = 0\cdot078.$

Pokus. Treba da je $V + V_1 + V_2 + V_3 = 1$. Zašto to?

(§ 42.) **Srednje trajanje života.** Ako se zbroje godine, što ih neka velika množina n-godišnjih osoba imade još proživjeti, pa ako se taj zbroj podijeli brojem osoba, onda se dobije *srednje trajanje života* jedne n-godišnje osobe.

Zadatak. S pomoću tablice o pomoru neka se izračuna srednje trajanje života osobe, kojoj je sada n godina.

Rješenje. Neka je l_n broj osoba, koje imadu n godina i na koje se račun odnosi. Sve te osobe zajedno proživjet će u $(n + 1)$-voj godini manje od l_n godina, jer ih na koncu te godine ima na životu samo još l_{n+1}. Te će pak u $(n + 2)$-goj godini proživjeti zajedno manje od l_{n+1} godina i t. d. Ako je dakle M_n srednje trajanje života n-godišnje osobe, onda je

$$M_n < \frac{l_n + l_{n+1} + \ldots + l_z}{l_n},$$

gdje je l_z posljednja od nule različita vrijednost brojeva l_n.

S druge je strane broj godinâ, što se prožive u $(n + 1)$-voj godini, veći od l_{n+1}, u $(n + 2)$-goj veći od l_{n+2} i t. d. Prema tomu je

$$M_n > \frac{l_{n+1} + \ldots + l_z}{l_n}.$$

Ako se dakle postavi

$$M_n = \frac{1}{2} + \frac{l_{n+1} + \ldots + l_z}{l_n},$$

onda granica pogrješke iznosi manje od $\frac{1}{2}$ godine.

Dodatak. Vrijednost M_n zavisi o vrijednostima kvocijenatâ $\frac{l_{n+1}}{l_n}, \frac{l_{n+2}}{l_n}, \ldots \frac{l_z}{l_n}$. Ako te kvocijente izračunamo s pomoću tablicâ o pomoru, vrijedit će rezultat ne samo za l_n, nego, kao što i mora biti, za mnogo više n-godišnjih osoba.

Primjer. Neka se odredi srednje trajanje života *a)* novorođenčeta, *b)* desetgodišnje, *c)* dvadesetgodišnje osobe muškog spola.

Rješenje. S pomoću I. tablice izračunaju se najprije sume

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_{10} = 7578$$

i

$$l_{11} + l_{12} + \ldots + l_{20} = 6068.$$

Da se zbrajanje veličinâ l uzmogne produžiti, i ako tablica ne sadržava svih vrijednosti njihovih, pretpostavlja se, da pet veličina l, koje dolaze jedna za drugom, čine aritmetički red. To znači, da na pripadnoj krivulji (sl. 23) uzimamo, da je luk, čije krajnje točke imadu apscise 20 i 25, ili 25 i 30 i t. d., pravocrtan. S pomoću formule za sumu aritmetičkog reda nađe se tad

$$l_{20} + l_{21} + \ldots + l_{25} = 3(l_{20} + l_{25}),$$

stoga je $l_{21} + l_{22} + \ldots + l_{25} = 2\,l_{20} + 3\,l_{25},$

tako isto $l_{26} + l_{27} + \ldots + l_{30} = 2\,l_{25} + 3\,l_{30}.$

I tako je

$$l_{21} + l_{22} + \ldots + l_{90} = 2\,l_{20} + 5\,(l_{25} + l_{30} + \ldots + l_{90}) = 22501.$$

Od vrijednosti, kakva se nalazi u potpunim tablicama, razlikuje se taj broj samo za nekoliko jedinica. Poradi toga je

$$M_0 = \frac{1}{2} + \frac{36147}{1000} = 36{\cdot}6\ldots,$$

$$M_{10} = \frac{1}{2} + \frac{28569}{621} = 46{\cdot}5\ldots,$$

$$M_{20} = \frac{1}{2} + \frac{22501}{593} = 38{\cdot}4\ldots$$

(§ 43.) **Vjerojatno trajanje života.** Od 1000 osoba dvadesetgodišnjih prema II. tablici doživi 62. godinu osjekom 519 osoba, dok ih 498 doživi 63. godinu. Iz toga se može odrediti interpolacijom, da će od onih 1000 osoba osjekom 500 doživjeti dobu od 62·9 godina. Za 20-godišnju osobu ista je vjerojatnost, da će ona još poživjeti 42·9 godina, ili da ne će. Za svaki je taj događaj vjerojatnost $= \frac{1}{2}$. Zato se 42·9 godina zove vjerojatnim trajanjem života 20-godišnje osobe.

Općeno se pod vjerojatnim trajanjem života n-godišnje osobe zove ono vrijeme x, za koje postoji relacija

$$l_{n+x} = \frac{1}{2} l_n, \quad \text{ili} \quad \frac{l_{n+x}}{l_n} = \frac{1}{2}.$$

Razmak vremena, u kom vjerojatnost života neke osobe padne na $\frac{1}{2}$, zove se *vjerojatno trajanje života* te osobe.

Zadatak. S pomoću tablice o pomoru neka se izračuna vjerojatno trajanje života n-godišnje osobe.

Rješenje. Iz tablice o pomoru odredi se broj l_n i onda onaj broj l_{n+x}, koji je $= \frac{1}{2} l_n$. Tada je $\frac{l_{n+x}}{l_n} = \frac{1}{2}$, pa je zato x vjerojatno trajanje života izraženo u godinama.

Primjer. Po I. tablici može se vjerojatno trajanje života 16-godišnjega dječaka odrediti ovako. Najprije imamo

$$n = 16, \; l_{16} = 607, \; \frac{1}{2} l_{16} = 303·5.$$

Vidimo, da $\frac{1}{2} l_{16}$ leži između $l_{60} = 311$ i $l_{65} = 248$. Postavi li se $x = 44 + a$, interpolacijom će se dobiti

$$a : 5 = 7·5 : 63, \quad a = 0·6, \quad x = 44·6 \text{ godina.}$$

Dodatak. S pomoću slike 23. može se taj zadatak i grafički riješiti. Raspolovi se ordinata l_n, koja pripada apscisi n, pa se polovištem potegne paralela s apscisnom osi, dok ne presiječe krivulju pomora. Razlika među apscisom tog presjeka i apscisom n daje traženo vjerojatno trajanje života.

(§ 44.) **Zadaci o osiguravanju života.** Da se tablice o pomoru uzmognu primijeniti u zadacima o osiguravanju glavnica ili rentâ, uzima se, da je vrlo velik broj osoba, koje su u istoj dobi, s osiguravajućim zavodom sklopio jednake ugovore. Onda se pođe od načela, da sadašnja vrijednost svega, što osigurane osobe uplate, mora biti jednaka sadašnjoj vrijednosti svega onoga, što osiguravajući zavod isplati. Iz toga se onda može izračunati, koliko dolazi na pojedinca da pridonese. On to može učiniti ili plativši jednom za svagda neki iznos, *mizu*, ili pak plaćajući periodski neke iznose, tako zvane *premije*. Nasuprot se osiguravajući zavod obvezuje, da će isplatiti ili izvjesnu glavnicu ili rentu. Ako ta renta prestaje sa smrću osigurane osobe, onda se kaže, da je to *doživotna renta*.

a) Osiguravanje glavnice za slučaj doživljenja uplatom mize. Kolik iznos x ima n-godišnja osoba platiti osiguravajućemu zavodu, da iza m godina, ako toliko još poživi, dobije glavnicu c; a ako ranije umre, uplaćena svota pripada zavodu?

Rješenje. Ako l_n osoba, kojima je n-godina, sklope sa zavodom isti ugovor, uplatit će one u svemu $x\ l_n$. Nasuprot će iza m godina onima, što ostanu u životu, a tih je l_{n+m} na broju, zavod isplatiti iznos $c\ l_{n+m}$. Sadašnja je vrijednost toga iznosa $c\ l_{n+m} : q^m$. Dakle je

$$x l_n = \frac{c\ l_{n+m}}{q^m},\quad x = \frac{l_{n+m}}{l_n} \cdot \frac{c}{q^m}.$$

Na pr. $n = 30$, $m = 30$, $c = 10000\ K$, $p = 4\%$.

S pomoću II. tablice, koju ćemo primjenjivati i u drugim slučajevima, dobije se

$$x = \frac{559}{916} \cdot \frac{10000}{1{\cdot}04^{30}} = 1814{\cdot}2\ K.$$

U istinu će zavod tražiti za 15% do 20% veći iznos, da pokrije troškove uprave i da zajamči sebi neki dobitak. Ova napomena vrijedi i u svim ostalim slučajevima.

b) Osiguravanje glavnice za slučaj smrti uplatom mize. Kolik iznos x ima n-godišnja osoba platiti osiguravajućemu zavodu, da po svojoj smrti (na kraju godine, u kojoj umre) nasljednicima osigura glavnicu c?

Rješenje. Ako l_n osoba, kojima je n godina, sklope sa zavodom isti ugovor, uplatit će one u svemu $x\ l_n$. Nasuprot će na kraju prve godine nasljednicima onih $l_n - l_{n+1}$ osoba, koje su umrle u toj godini, zavod isplatiti $c\ (l_n - l_{n+1})$; na kraju druge godine nasljednicima onih $l_{n+1} - l_{n+2}$ osoba, što su umrle s tijekom druge godine, bit će isplaćen iznos $c\,(l_{n+1} - l_{n+2})$ i t. d. Sadašnja vrijednost svih tih isplata ima se izjednačiti s $x l_n$, pa se tako dobije

$$x l_n = c\left(\frac{l_n - l_{n+1}}{q} + \frac{l_{n+1} - l_{n+2}}{q^2} + \ldots + \frac{l_z}{q^{z-n+1}}\right) =$$

$$= c\left(\frac{l_n}{q} + \frac{l_{n+1}}{q^2} + \ldots + \frac{l_z}{q^{z-n+1}}\right) - c\left(\frac{l_{n+1}}{q} + \ldots + \frac{l_z}{q^{z-n}}\right).$$

Ako se zarad kratkoće postavi

$$\frac{l_n}{q^n} + \frac{l_{n+1}}{q^{n+1}} + \ldots + \frac{l_z}{q^z} = S_n,$$

onda je $x\,l_n = c\,q^{n-1}\,S_n - c\,q^n\,S_{n+1} = c\,q^{n-1}\,(S_n - q\,S_{n+1})$,

dakle $$x = \frac{c\,q^{n-1}\,(S_n - q\,S_{n+1})}{l_n}.$$

Vrijednosti svotâ S_0, S_1, S_2, . . . dane su za $p = 3{\cdot}5\%$ u trećem stupcu prethodne tablice o pomoru. Trajalo bi odviše dugo, kad bi se svaki put te svote išle direktno računati.

Na pr. $n = 40$, $c = 5000\,K$, $p = 3{\cdot}5\%$.

$$x = \frac{5000\,.\,1{\cdot}035^{39}\,(3447 - 1{\cdot}035\,.\,3235)}{829} = 2279\,K.$$

Dodatak. Izraz $\frac{l_n}{q^n}$ zove se „*diskontirani broj živih*“, jer ima isti oblik kao i izraz, kojim se izračunava sadašnja vrijednost glavnice l_n, koja dospijeva iza n godina. A stoga se S_n zove „*suma diskontiranih brojeva živih*“. Kod takvih su računa najobičnije kamate $p = 3{\cdot}5\%$, pa stoga ćemo ih primjenjivati u svim zadacima o osiguravanju života.

c) Osiguravanje glavnice za slučaj smrti plaćanjem premijâ. Koliku godišnju premiju x mora n-godišnja osoba plaćati dokle živi, da po njezinoj smrti (na kraju godine, u kojoj umre) nasljednicima zapane glavnica c?

Rješenje. Ako l_n osoba, kojima je n godina, sklope sa zavodom isti ugovor, zavod će odmah dobiti iznos $x\,l_n$, iza jedne godine dobit će $x\,l_{n+1}$, iza druge $x\,l_{n+2}$ i t. d. Dakle je sadašnja vrijednost svih uplaćenih premija

$$x\,l_n + \frac{x\,l_{n+1}}{q} + \frac{x\,l_{n+2}}{q^2} + \ldots + \frac{x\,l_z}{q^{z-n}} = x\,q^n\,S_n.$$

Za ono, što zavod ima isplatiti, dobije se jednako kao u *b)*

$$c\,q^{n-1}\,(S_n - q\,S_{n+1}).$$

Tako izađe $$x = \frac{c\,(S_n - q\,S_{n+1})}{q\,S_n}.$$

Na pr. $n = 30$, $c = 10.000\ K$, $p = 3{\cdot}5\%$.

$$x = \frac{10000\ (6144 - 1{\cdot}035\ .\ 5818)}{1{\cdot}035\ .\ 6144} = 192{\cdot}48\ K.$$

d) Sadašnja vrijednost doživotne rente. Kolika je sadašnja vrijednost doživotne rente od godišnjih r *K*, koja se osobi od n godina do smrti isplaćuje na kraju svake godine?

Rješenje. Po zadatku *a)* sadašnja je vrijednost prve rentovne isplate $\frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \frac{r}{q}$, a sadašnja vrijednost druge $\frac{l_{n+2}}{l_n} \cdot \frac{r}{q^2}$, i t. d. Prema tomu je sadašnja vrijednost cijele rente

$$x = \frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \frac{r}{q} + \frac{l_{n+2}}{l_n} \cdot \frac{r}{q^2} + \ldots + \frac{l_z}{l_n} \cdot \frac{r}{q^{z-n}}$$

ili

$$x = \frac{rq^n\ .\ S_{n+1}}{l_n}.$$

Na pr. $n = 30$, $r = 1000\ K$, $p = 3{\cdot}5\%$.

$$x = \frac{1000\ .\ 1{\cdot}035^{30}\ .\ 5818}{916} = 17827\ K.$$

Dodatak. Analogno se nađe sadašnja vrijednost temporarne doživotne rente. t. j. takve, koja traje samo k godina ili pak do smrti osigurane osobe, ako ona ranije umre.

$$x = \frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot \frac{r}{q} + \frac{l_{n+2}}{l_n} \cdot \frac{r}{q^2} + \ldots + \frac{l_{n+k}}{l_n} \cdot \frac{r}{q^k}$$

ili

$$x = \frac{rq^n\ (S_{n+1} - S_{n+k+1})}{l_n}.$$

Na pr. $n = 50$, $r = 500\ K$, $k = 20$, $p = 3{\cdot}5\%$.

$$x = \frac{500\ .\ 1{\cdot}035^{50}\ (1611 - 184)}{718} = 5550\ K.$$

Dodatak. Osiguravajuće društvo *Croatia* u Zagrebu, utemeljeno godine 1884. za osiguravanje od šteta, bavi se osiguravanjem života od godine 1905. Kod izračunavanja premija kod jednostavnih, kao i kod kombinovanih osiguravanja za slučaj smrti, uzimaju se za osnov tablice od njemačka 23 društva. Osiguravanja na doživljaj, kao i osiguravanja rentâ određuju se po tablicama 17 engleskih društava. Kamate se računaju uz $3\frac{1}{2}\%$.

VII. Odsječak.

Derivacije trigonometrijskih funkcija.

(§ 45.) Granična vrijednost izraza $\frac{\sin x}{x}$. Za jedinicu, kojom se u elementarnoj matematici i u njenim praktičnim primjenama mjere kutovi, uzima se kut od jednog stupnja. To je obično devedeseti dio pravoga kuta. Rekoh obično, jer se naročito u Francuskoj kod geodetskih operacija upotrebljava i *centezimalna razdioba.* Pravi kut dijeli se na 100 centezimalnih stupnjeva, 1 stupanj na 100 minuta, a 1 minuta na 100 sekunda. Ta je razdioba u skladu s našim dekadskim brojnim sustavom i ima mnogo prednosti. Kako se samo pomicanjem decimalne točke lako pretvaraju stupnjevi u minute i sekunde i obrnuto! A i trigonometrijski računi izvode se lakše.

U višoj matematici mjere se kutovi *lučnom mjerom.* Opiše li se oko vrha kuta krug, dužina luka, što ga kut zahvaća svojim kracima, proporcionalna je s radijusom. Stoga se kut može izraziti omjerom dužine tog luka, prema dužini radijusa. Kako je periferija kruga dana izrazom $2\,r\,\pi$, razbiramo, da lučna mjera punoga kuta iznosi $2\,\pi$, jer je to omjer periferije prema radijusu. Lučna je mjera pravoga kuta $\frac{\pi}{2}$.

Koji kut ima lučnu mjeru 1 možemo lako izračunati. Centričnom kutu od α stupnjeva pripada luk

$$l = \frac{r\,\pi\,\alpha}{180^0}.$$

Taj će luk biti jednak radijusu, ako je

$$\frac{\pi\,\alpha}{180^0} = 1, \text{ t. j. } \alpha = \frac{180^0}{\pi}.$$

Kako je $\pi = 3{\cdot}14\ldots$, nalazimo da jedinica kuta u lučnoj mjeri iznosi $57^0\ 17'\ 45''$.

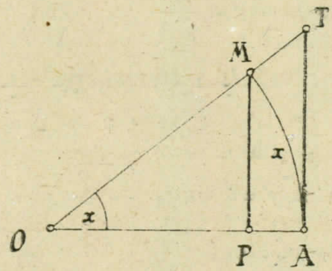
U logaritamskim tablicama nalazi se obično i tabela, u kojoj je za pojedine centrične kutove dana dužina pripadnoga luka uz $r = 1$. Iz te ćemo tabele ovdje ispisati nekoliko podataka i kraj njih pripisati sinuse onih kutova.

Kut	Luk	Sinus
5^0	0·08727	0·08716
4^0	0·06981	0·06976
3^0	0·05236	0·05234
2^0	0·03491	0·03490
1^0	0·01745	0·01745

Ako se kutovi izraze lučnom mjerom, tad se maleni kutovi gotovo podudaraju sa svojim sinusom. Za kut od 1^0 podudaraju se i pete decimale, a kod manjih kutova ide to još dalje. Otud vidimo, da će se kvocijent $\frac{\sin x}{x}$ to više približavati jedinici, što je x manje. To ćemo razabrati i ovim razmatranjem:

Na krugu sa središtem u O istaknimo luk AM. Uzmemo li radijus za jedinicu dužine, lučna mjera x kuta AOM jednaka je luku AM. Dalje se vidi, da je

$$MP = \sin x, \quad OP = \cos x,$$
$$AT = \operatorname{tg} x.$$



Slika 24.

Prema tomu je

$$\triangle\ OPM = \frac{1}{2} \cos x \sin x,$$

$$\text{sektor } AOM = \frac{1}{2}\, x, \quad \triangle\ OAT = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

A kako je

$$\triangle\ OAT > \text{sekt. } AOM > \triangle\ OPM,$$

izlazi

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} x > \frac{1}{2}\, x > \frac{1}{2} \cos x \sin x$$

ili

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x > \cos x \sin x$$

i konačno

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > \cos x.$$

Uzmemo li recipročne vrijednosti pojedinih članova, moramo obrnuti i znakove nejednakosti, pa je tako

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Ta relacija vrijedi općeno, pa ma koliko bilo x. Nas ovdje zanima, šta će biti s tom relacijom, kad x uzmemo sve manje i manje.

Kad koja veličina biva sve manja i manja, kažemo, da ona *teži prema nuli*. Teži li varijabla x prema nuli, teži $\cos x$ prema $\cos 0$, t. j. prema 1. To isto vrijedi i za $\frac{1}{\cos x}$. Poradi toga i srednji član prethodne nejednadžbe teži prema jedinici. Formulom se to piše

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ za } x = 0.$$

Teži li varijabla x prema nuli, teži prema nuli i njen sinus, no kvocijent $\frac{\sin x}{x}$ teži kod toga prema 1.

(§ **46.**) **Derivacija sinusa.** Ako je $y = \sin x$, tad je

$$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x),$$

dakle

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2},$$

pa je stoga

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Ogledat ćemo sad granicu svakog faktora za se.

Teži li Δx prema nuli, teži prema nuli i $\frac{\Delta x}{2}$, pa je stoga

$$\lim \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x, \text{ za } \Delta x = 0.$$

Prema rezultatu razmatranja u prethodnom paragrafu teži u isto doba onaj drugi faktor k 1. I tako možemo pisati, da je

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \cos x, \text{ ili } \frac{d \sin x}{d\,x} = \cos x.$$

Derivacija sinusa je kosinus.

Primjer. 1. Ako je $y = \sin 2x$, pokaži da je $\frac{d\,y}{d\,x} = 2 \cos 2x$.

2. Pod kojim kutom presijeca sinusoida os X?

(§ 47.) **Derivacija kosinusa.** Na isti način možemo izvesti derivaciju kosinusa. Ako je $y = \cos x$, pa varijabli x dademo prirast Δx, porast će funkcija za Δy, te će biti

$$y + \Delta y = \cos (x + \Delta x).$$

Dakle je

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x = - 2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2},$$

i

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - 2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Teži li Δx k nuli, drugi faktor teži k 1, a prvi prema $- \sin x$, pa je stoga

$$\frac{d\,y}{d\,x} = - \sin x, \quad \frac{d \cos x}{d\,x} = - \sin x.$$

Derivacija kosinusa negativan je sinus.

Primjer. 1. Ako je $y = \cos a x$, pokaži da je

$$\frac{d\,y}{d\,x} = - a \sin a x.$$

2. Predoči grafički funkciju $y = \cos x$ i pokaži, što znači negativni predznak derivacije?

3. Odredi derivaciju funkcije $y = \sin x + \cos x$.

(§ 48.) **Derivacija tangensa.** Ako je $y = \operatorname{tg} x$, tad je

$$y + \Delta y = \operatorname{tg} (x + \Delta x)$$

dakle

$$\Delta y = \operatorname{tg} (x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin (x + \Delta x)}{\cos (x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin (x + \Delta x) \cos x - \cos (x + \Delta x) \sin x}{\cos (x + \Delta x) \cos x}$$

$$= \frac{\sin [(x + \Delta x) - x]}{\cos (x + \Delta x) \cos x} = \frac{\sin \Delta x}{\cos (x + \Delta x) \cos x},$$

da stoga možemo pisati

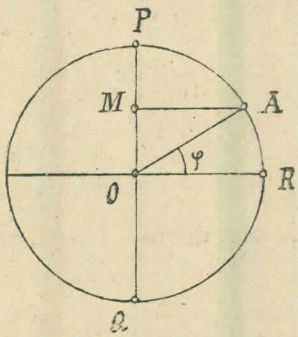
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(x + \Delta x)\cos x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Pusti li se Δx, da teži k nuli, drugi faktor teži k 1, a prvi se neograničeno približava vrijednosti $\frac{1}{\cos x \cdot \cos x}$, i tako je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Primjer. Predoči grafički funkciju $y = \operatorname{tg} x$ i objasni, što znači da derivacija ne može biti negativna za nijednu vrijednost varijable? Pod kojim kutem siječe ta linija os X?

(§ 49.) **Harmoničko gibanje.** Točka A neka se jednoliko giba po periferiji kruga, komu je radijus $OP = S$. Projicirajmo točku A na dijametar PQ, pa potražimo, po kom se zakonu giba projekcija M po PQ, dok točka A jednoliko obilazi po krugu.



Slika 25.

Gibanje te točke M bit će nam posve poznato, ako u svakom času t možemo kazati, gdje se ona nalazi.

Udaljenost točke M od središta O zove se elongacija; bilježit ćemo je sa s. Po slici vidimo, da je

$$OM = OA \sin \varphi \text{ ili } s = S \sin \varphi.$$

U času $t = 0$ neka se točka A nalazi u R, a u času t neka stigne u A. Vrijeme potrebno, da točka A obađe cijelu periferiju, a njena projekcija M da dvaput prijeđe preko dijametra PQ, zove se vrijeme titraja i bilježi se slovom T. Lako razbiramo da postoji proporcija

$$\varphi : 2\pi = t : T$$

Odredimo li odatle φ, možemo pisati

$$s = S \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Ovo je izraz za put, što ga je točka M pošavši iz O prevalila u vrijeme t. Vidimo, da je put dan po zakonu sinusa kao funkcija vremena t.

Da nađemo brzinu točke M, derivovat ćemo put s po vremenu t. Poraste li t za Δt, porast će s za Δs, pa je tako

$$s + \Delta s = S \sin \frac{2\pi}{T} (t + \Delta t)$$

i tako je

$$\Delta s = S \left[\sin \frac{2\pi}{T} (t + \Delta t) - \sin \frac{2\pi}{T} t \right] =$$

$$= 2 S \cos \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\Delta t}{2}.$$

Podijelivši sa Δt dobijemo

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} S \cos \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\Delta t}{2}}{\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\Delta t}{2}}.$$

Upotrijebimo li supstituciju $\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\Delta t}{2} = z$, drugi faktor na desnoj strani ove jednadžbe prijeđe u $\frac{\sin z}{z}$. Teži li Δt prema nuli, težit će k nuli i z, a $\frac{\sin z}{z}$ k 1, pa tako razbiramo, da ćemo na granici dobiti

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\pi}{T} S \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Kod harmoničkoga gibanja brzina nije stalna, već se mijenja s vremenom t po zakonu kosinusa.

Akceleraciju ćemo naći derivujući brzinu po vremenu. Lako razbiramo, da će zbog prirasta vremena Δt brzina porasti za

$$\Delta v = \frac{2\pi}{T} S \left[\cos \frac{2\pi}{T} (t + \Delta t) - \cos \frac{2\pi}{T} t \right] =$$

$$= - 2 \frac{2\pi}{T} S \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\Delta t}{2},$$

tako da možemo pisati

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = - \frac{2\pi}{T} S \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}}.$$

ili

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 S \sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\Delta t}{2}}{\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\Delta t}{2}}.$$

Teži li Δt prema nuli, drugi faktor na desnoj strani približava se sve više jedinici, pa stoga za lim $\Delta t = 0$ dobijemo za akceleraciju

$$a = \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 S \sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

S obzirom na izraz za put s možemo to predočiti u obliku

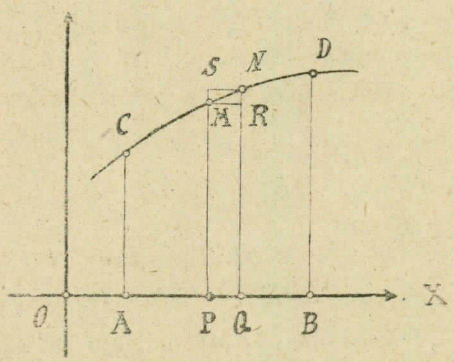
$$a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 s.$$

Akceleracija ima negativan predznak; gibanje je dakle usporeno. Dok A iz R dođe u P, brzina točke M od njene najveće vrijednosti (u točki O) opane do nule (u točki P).

VIII. Odsječak.

Primjene određenog integrala.

(§ 50.) **Izračunavanje određenog integrala.** *a)* Kako smo radili određujući površinu parabole $y = x^2$, tako bismo isto mogli odrediti površinu omeđenu lukom ma kakve krivulje $y = f(x)$, osju X i dvjema ordinatama, koje su pridružene apscisama a i b. Dužinu AB razdijelili bismo na n dijelova i luku CD te krivulje opisali bismo i upisali pravokutnike. Tražena površina P leži između sume upisanih i sume opisanih pravokutnika. Zajednička granica tih suma upravo je ona površina P. No izračunavanje te granice može se provesti zgodno samo u nekim jednostavnijim slučajevima. Zato moramo udariti drugim putem.



Slika 26.

Površinu smo odredili kao zajedničku granicu sume opisanih i sume upisanih pravokutnika, kad broj dijelova n pustimo da biva sve veći i veći. Tu ćemo granicu, kao i prije kod parabole, označiti određenim integralom

$$\int_a^b y\,dx \quad \text{ili} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Za površinu parabole našli smo, da je $\frac{x^3}{3}$. Derivacija je te funkcije x^2, a to je baš funkcija, koja dolazi pod znakom integrala

$$\int_0^x x^2 dx,$$

kojim smo predočili površinu parabole. Kako je jednadžba te parabole $y = x^2$, razbiramo, da je derivacija funkcije $\frac{x^3}{3}$, kojom je izražena površina, jednaka ordinati, koja tu površinu zatvora s desne strane.

Vidjet ćemo odmah da ta relacija među površinom i ordinatom postoji za svaku krivu liniju

$$y = f(x).$$

Po slici razbiramo, da je svaki elemenat tražene površine, kao što je na pr. $PQNM$, veći od upisanog, a manji od opisanog pravokutnika:

$$PQRM < PQNM < PQNS. \qquad (1)$$

Za članove tih nejednadžbi potražit ćemo sada zgodne matematičke izraze.

Rekli smo, da je jednadžba krivulje CD

$$y = f(x).$$

Dalje je

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OP = x, \quad PQ = \Delta x, \quad OQ = x + \Delta x,$$

pa je zato

$$PQRM = PM \cdot PQ = f(x) \cdot \Delta x,$$
$$PQNS = QN \cdot PQ = f(x + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Površina $APMC$ mijenja se, kad se pomakne ordinata PM, koja tu površinu zdesna zatvora. Svakom položaju ordinate PM odgovara posve određena vrijednost površine. A kako položaj ordinate zavisi o apscisi x, kojoj ta ordinata pripada, jasno je, da i površina $APMC$ zavisi o apscisi. Može se dakle uzeti, da je

$$APMC = F(x),$$

gdje je $F(x)$ neka još nepoznata funkcija od x. Prema tome je

$$AQNC = F(x + \Delta x),$$

pa je stoga

$$PQNM = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Nejednadžbe (1) mogu se sad pisati ovako:

$$f(x) \cdot \Delta x < F(x + \Delta x) - F(x) < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Uz pozitivno Δx izlazi otud

$$f(x) < \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} < f(x + \Delta x) \qquad (2)$$

Te nejednadžbe postoje za svako Δx. Pustimo li Δx da bude sve manje i manje, funkcija $f(x + \Delta x)$ sve se više približava vrijednosti $f(x)$ kao svojoj granici. Stoga i onaj srednji član, koji vazda leži između $f(x)$ i $f(x + \Delta x)$, mora imati $f(x)$ za granicu. No kad Δx bude sve manje i manje, onaj srednji član prijeđe u derivaciju od $F(x)$, pa tako dobijemo, da je

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \qquad (3)$$

Derivacija funkcije $F(x)$, kojom se izrazuje površina kao funkcija apscise one ordinate, koja površinu zdesna zatvora, jednaka je toj ordinati.

b) Funkcija $F(x)$, kojoj je derivacija $f(x)$, zove se *primitivna funkcija* funkcije $f(x)$.

Za površinu parabole našli smo, da je $\frac{x^3}{3}$, a derivacija je te funkcije x^2. Zato velimo, da je $\frac{x^3}{3}$ primitivna funkcija od x^2. Kako pak funkcija $\frac{x^3}{3} + C$, gdje je C ma kakva konstanta, ima istu derivaciju kao i $\frac{x^3}{3}$, možemo općeno reći, da je $\frac{x^3}{3} + C$ primitivna funkcija od x^2.

Kako je x derivacija od $\frac{x^2}{2} + C$, stoga je $\frac{x^2}{2} + C$ primitivna funkcija funkcije $y = x$.

Uopće: Ako je $F(x)$ jedna primitivna funkcija od $y = f(x)$, tad je i $F(x) + C$ primitivna funkcija od $f(x)$, pa ma kakva bila vrijednost konstante C.

Površinu *APMC* (sl. 26.) omeđenu krivuljom $y = f(x)$, pa ordinatama, koje pripadaju apscisama a i x, te osju X, predočujemo integralom

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Taj je integral primitivna funkcija od $y = f(x)$. Ako je $F(x) + C$ primitivna funkcija od $f(x)$, tad je

$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) + C. \tag{4}$$

Za $x = a$ taj je integral jednak nuli, jer se tad površina $APMC$ stegne na ordinatu AC. Za $x = a$ imamo dakle

$$0 = F(a) + C, \text{ t. j. } C = - F(a).$$

Tako smo odredili konstantu C, pa stoga prethodna formula (4) prijeđe u

$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a).$$

Zamijenimo li sad promjenljivu gornju granicu x stalnom vrijednosti b, dobijemo formulu

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{5}$$

Tako je nađena vrijednost određenog integrala, koji predočuje površinu $ABDC$.

Po formuli (5) vidimo, da se *vrijednost integrala*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

koji predočuje površinu omeđenu osju X, lukom krivulje $y = f(x)$ i dvjema ordinatama, koje pripadaju apscisama a i b izračunava ovako:

Odredi se primitivna funkcija $F(x)$ funkcije $f(x)$, pa se u nju uvrsti najprije $x = b$, a onda $x = a$, i druga se vrijednost oduzme od prve.

c) Za izračunavanje određenih integrala treba znati primitivnu funkciju one funkcije, koja dolazi pod znakom integrala. Primitivna funkcija od $f(x)$ označuje se *neodređenim integralom*

$$\int f(x)\, dx.$$

Određivanje primitivne funkcije od $f(x)$ zove se *integriranje* funkcije $f(x)$. Integriranje obrnuta je operacija od derivovanja.

Stoga nam svaka formula, što je znamo iz računa derivacijâ, daje jedan neodređeni integral. Tako nalazimo, da je

$$\int a\,dx = a\,x + C,$$

$$\int 2\,x\,dx = x^2 + C,$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 + C.$$

$$\int 2\,a\,x\,dx = a\,x^2 + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

U ovim formulama svaki put je derivacija desne strane jednaka funkciji ispod znaka integrala.

Primjer. Odredi vrijednosti integrala

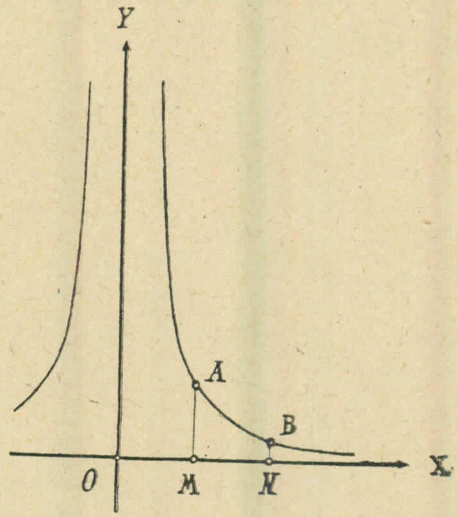
$$\int_0^2 x\,dx,\quad \int_2^4 x^2\,dx,\quad \int_1^8 x^3\,dx,\quad \int_1^8 (2\,x + 1)\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx,\quad \int_0^{\pi} \sin x\,dx,\quad \int_3^6 \left(\frac{1}{3}\,x^2 + 2\,x\right)dx.$$

Dodatak. Metodom, što smo je sad objasnili, određivanje površine svodi se na traženje primitivne funkcije. Određivanje pak tangente svodi se na izračunavanje derivacije. Računski uzeto ta su dva problema recipročna jedan prema drugome. Bio je to odlučan napredak u razvoju matematike, kad se razabrala tijesna sveza, koja postoji među ta dva problema. Već su Grci umjeli određivati tangente i površine; umjeli su dakle, pravo uzevši, određivati derivacije i primitivne funkcije. No sveza među tim problemima ostala je nepoznata sve do iznašašća diferencijalnog i integralnog računa.

Arhimed je odredio površinu segmenta parabole i površinu kruga. Za krug je pokazao, da mu je površina jednaka površini pravokutnog trokuta, komu je jedna kateta jednaka polumjeru, a druga opsegu kruga.

(§ 51.) **Površina krivulje** $y = \frac{1}{x^2}$. Nacrtavši tu krivulju razabrat ćemo, da leži simetrično prema osi Y, i da su joj koordinatne osi asimptote. (Isporedi § 3., zadatak 4.)



Slika 27.

Ako su x_0 i x_1 apscise točaka A i B, površina $MNBA$ predočena je integralom

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x^2}.$$

Kako je derivacija funkcije $\frac{1}{x}$ jednaka $-\frac{1}{x^2}$, vidimo da je $-\frac{1}{x}$ primitivna funkcija funkcije $\frac{1}{x^2}$, pa je stoga

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}.$$

Ostane li x_0 stalno, dok x_1 biva sve veće, ta se diferencija sve više približava vrijednosti $\frac{1}{x_0}$. Površina $MNBA$ ne raste neograničeno, već se približava posve određenoj granici $\frac{1}{x_0}$. Zato možemo reći, da je $\frac{1}{x_0}$ mjerni broj površine omeđene lukom krivulje, ordinatom AM i osju X.

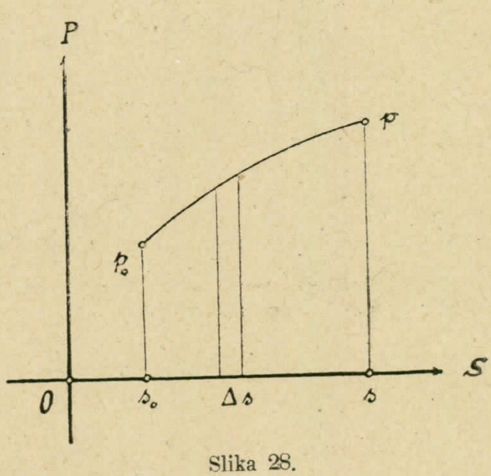
Ako pak x_1 ostane stalno, a x_0 neprestano opada prema nuli, recipročna njegova vrijednost $\frac{1}{x_0}$ raste neograničeno. Površina $MNBA$ raste tim više, što se više ordinata AM približava ordinatnoj osi. Mjerni broj te površine premaši dakle svaki, ma kako veliki broj, ako se samo AM dosta približi osi Y.

Kao što krivulja ne leži jednako prema obim asimptotama, tako se asimptote i s obzirom na površinu različito vladaju.

(§ 52.) **Dijagram radnje.** Nanesemo li puteve s kao apscise, a p t. j. komponente sile, koje padaju u smjer gibanja kao ordinate, tad dobijemo tako zvani *dijagram radnje*. Površina tog dijagrama određena je integralom

$$\int_{s_0}^{s} p\, d\, s$$

Ako se uzme, da se sila na putu Δs nije promijenila, tad je produkt $p.\ \Delta s$ *radnja* izvršena na tom putu. Na cijelom putu od s_0 do s izvršena je radnja jednaka sumi elemenata $p.\ \Delta s$. Pustimo li Δs da biva sve manje i manje, prijeđe ta suma u integral, pa je tako radnja na tom putu, naime



Slika 28.

$$R = \int_{s_0}^{s} p\, d\, s.$$

predočena površinom dijagrama radnje.

Kod elastičkih je sila $p = Cs$, gdje je C faktor proporcionalnosti. Ta jednadžba predočuje pravac, koji prolazi ishodištem, pa je stoga dijagram radnje trokut. Ako je $s_0 = 0$, radnja izvršena na putu s dana je izrazom

$$R = \int_0^s Cs\, ds = \frac{Cs^2}{2}.$$

Do tog izraza mogli smo i ovako doći: Ovdje je radnja jednaka površini trokuta, komu je baza s, a visina p. Dakle je $R = \frac{p\, s}{2}$, a kako je $p = Cs$, dobivamo odmah prethodni izraz.

Zadatak. Odredi radnju izvršenu kod harmoničkog gibanja.

(§ 53.) **Potencijal.** U ishodištu koordinata nek se nalazi električni naboj $+ e$, a na osi apscisa u udaljenosti x naboj $+ 1$. Naboj $+ e$ prema *Coulombovu zakonu* djeluje na naboj $+ 1$ silom

$$p = \frac{e}{x^2}.$$

Ta se dva naboja među sobom odbijaju. Želimo li naboj $+ 1$ primaknuti naboju $+ e$, moramo svladati odbojnu silu njihovu, t. j. moramo izvršiti neku radnju. Da naboj $+ 1$ pomaknemo za $- \Delta x$ prema naboju $+ e$, moramo izvršiti radnju $- \frac{e. \Delta x}{x^2}$.

Radnja izvršena kod prenošenja naboja $+ 1$ iz udaljenosti r_1 u udaljenost r bit će jednaka sumi takvih elementarnih radnja. Stoga je ona dana integralom

$$R = - e \int_{r_1}^{r} \frac{d\, x}{x^2}.$$

Primitivna je funkcija ovdje $\frac{1}{x}$, pa je tako radnja

$$R = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1}.$$

Uzme li se $r_1 = \infty$, drugi član iščezne, pa preostane

$$R = \frac{e}{r}.$$

Tim je izrazom predočena radnja, koju smo izvršili prenoseći naboj $+1$ iz neizmjernosti do udaljenosti r od naboja $+e$. Izraz $\frac{e}{r}$ obično se bilježi slovom V i zove se *potencijal* električnoga naboja $+e$ na naboj $+1$, koji se nalazi u udaljenosti r. Formula

$$R = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1}$$

kazuje nam, da je radnja izvršena kod prenošenja električnog naboja $+1$ s jedne točke električnog polja u drugu, jednaka diferenciji potencijala u tim točkama. Ta radnja ne zavisi o putu, kojim se kod toga išlo.

(§ 54.) **Pojam diferencijala.** Sa Δx označujemo prirast nezavisne varijable. Ako pak hoćemo naznačiti, da taj prirast ima biti sve manji i manji, t. j. da teži k nuli, onda ćemo ga bilježiti sa dx i zvati ga *diferencijalom od x.*

Diferencijal funkcije $y = F(x)$, koji bilježimo sa dy ili $dF(x)$, naznačuje produkt derivacije te funkcije s diferencijalom varijable. Ako je derivacija funkcije $y = F(x)$ jednaka $f(x)$, t. j. ako postoje jednadžbe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

tad je diferencijal te funkcije

$$dy = f(x)\,dx \text{ ili } dF(x) = f(x)\,dx.$$

Na pr. Derivacija funkcije $y = x^2$ dana je izrazom

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

pa je zato po definiciji diferencijal te funkcije

$$dy = dx^2 = 2x\,dx.$$

Funkcija $y = \sin x$, ima derivaciju

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

pa je stoga njezin diferencijal

$$dy = d\sin x = \cos x\ dx$$

Kad se uvede pojam diferencijala može se s diferencijalnim kvocijentom $\frac{dy}{dx}$ postupati kao s razlomkom.

Diferencijalni kvocijent definirali smo kao granicu kvocijenta diferencija Δy i Δx, a sad ga možemo držati i kvocijentom diferencijala dy i dx.

Integral $\int 2x\,dx$ znademo da ima vrijednost x^2, no kako je $2x\,dx$ jednako diferencijalu od x^2, t. j. $d\,x^2$, možemo taj integral pisati ovako $\int d\,x^2 = x^2$.

Tako je isto

$$\int \cos x\,dx = \int d\sin x = \sin x.$$

Znak diferenciranja d i znak integriranja $\int$ ukidaju se među sobom.

Ako je $dF(x) = f(x)dx$, tad je uopće

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C.$$

(§ 55.) **Ubrzano gibanje.** Točka se giba stalnom akceleracijom g i u vrijeme $t = 0$ ima brzinu c. Kolika je njezina brzina v u vrijeme t i koliki je put ona dotle prevalila?

Odgovor na to pitanje dobit ćemo s pomoću poznatih formula

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad \frac{ds}{dt} = v.$$

Iz prve izlazi $dv = gdt$, pa je stoga

$$v = \int gdt = gt + C.$$

Konstantu integracije C odredit ćemo iz uvjeta, da je $v = c$, kad je $t = 0$. Prethodna formula daje na $c = C$ i stoga je

$$v = c + gt.$$

Dalje je

$$\frac{ds}{dt} = c + gt, \quad ds = (c + gt)\,dt,$$

pa je tako

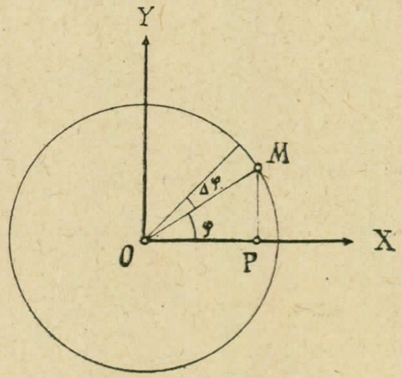
$$s = \int (c + gt)dt = ct + \frac{gt^2}{2} + C_1.$$

Za $t = 0$ ima biti $s = 0$, zato je konstanta integracije $C_1 = 0$. Prevaljeni je put

$$s = ct + \frac{gt^2}{2}.$$

(§ 56.) **Površina kruga.** *a)* Hoćemo li površinu kruga da izrazimo integralom, možemo ovako postupati. Maleni sektor s centričnim kutom $\Delta\varphi$ možemo držati trokutom, komu je površina

$$\Delta p = \frac{r\Delta\varphi \cdot r}{2} = \frac{r^2\Delta\varphi}{2}.$$



Slika 29.

Ta će jednadžba postojati tim točnije, što je manje $\Delta\varphi$. Pustimo li $\Delta\varphi$ da bude sve manje i manje, kvocijent diferencija

$$\frac{\Delta p}{\Delta\varphi} = \frac{r^2}{2}$$

prijeći će u diferencijalni kvocijent

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{r^2}{2}.$$

Ako diferencijal površine

$$dp = \frac{r^2}{2}\,d\varphi$$

integriramo u granicama $\varphi = 0$ i $\varphi = 2\pi$, dobit ćemo za površinu kruga

$$p = \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = r^2\pi.$$

b) Prema općenom postupku za određivanje površina krivih linija, kako je objašnjen u § 50., možemo površinu kruga i drukčije odrediti. Četvrti dio kruga

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

što leži u prvom kvadrantu, dan je formulom

$$\frac{p}{4} = \int_0^r y\,dx, \qquad (1)$$

u koju bi prema jednadžbi kruga trebalo postaviti $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Da taj integral lakše odredimo, izrazit ćemo x i y polarnim koordinatama r i φ.

Iz slike razbiramo, da je

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

A kako je

$$dx = -r\sin\varphi\, d\varphi,$$

prijeći će prethodni integral u

$$\frac{p}{4} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r^2 \sin^2\varphi\, d\varphi. \qquad (2)$$

U integralu (1) bile su granice 0 i r. Prvu vrijednost poprima x za $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a drugu za $\varphi = 0$. Stoga su u integralu (2) uzete granice ovako, kako je naznačeno.

Po poznatoj je formuli

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2},$$

pa stog se integral (2) cijepa u dva integrala:

$$\frac{p}{4} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{r^2}{2}(1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi = -\frac{r^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi + \frac{r^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2\varphi\, d\varphi.$$

Vrijednost je prvog integrala $-\frac{\pi}{2}$, dok je drugi integral jednak nuli. Tako dobijemo poznati rezultat

$$p = r^2\pi.$$

Da je drugi integral jednak nuli, uvjeravamo se ovako:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2\varphi\, d\, 2\varphi$$

jer je $d\, 2\varphi = 2\, d\varphi$. Primitivna je funkcija ovdje $\sin 2\varphi$, a ta je jednaka nuli i za $\varphi = 0$, kao i za $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(§ 57.) **Površina elipse.** Sjetit ćemo se konstrukcije elipse s pomoću dva koncentrična kruga, opisana oko ishodišta koordinata s polovinom male i s polovinom velike osi kao polumjerima. Ishodištem povuče se zraka, koja s osju X zatvora kut φ. Točkom A, u kojoj ta zraka zgađa nutarnji krug, potegne se paralela s osju X, a točkom B, u kojoj ta zraka zgađa vanjski krug, potegne se paralela prema Y. Te se dvije paralele sijeku u točki M, koja je točka elipse. Iz slike, koju je prema tom naputku lako nacrtati, vidi se, da su koordinate točke M

$$x = a \cos\varphi, \quad y = b \sin\varphi.$$

Četvrti dio površine elipse, koji leži u prvom kvadrantu, dan je izrazom

$$\frac{p}{4} = \int_0^a y\, d\, x.$$

Kad upotrijebimo prethodne izraze za x i y, dobit ćemo

$$\frac{p}{4} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\, b \sin^2\varphi\, d\, \varphi$$

ili

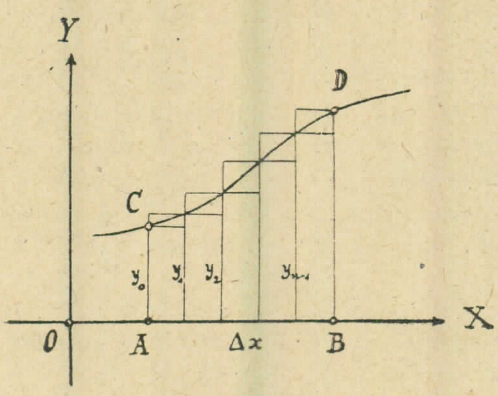
$$\frac{p}{4} = -\, a b \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = -\frac{a\, b}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi + \frac{a\, b}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2\, \varphi\, d\varphi.$$

Drugi je integral jednak nuli, kako smo vidjeli u prethodnom paragrafu, dok je vrijednost prvoga $-\frac{\pi}{2}$, pa je tako cijela površina elipse

$$p = a\, b\, \pi.$$

Elementarno određuje se površina elipse ovako. Elipsa je ortogonalna projekcija kruga. Površina elipse jednaka je površini kruga pomnoženoj s kosinusom kuta φ, što ga ravnina kruga zatvora s ravninom projekcije. Kako je $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ i površina kruga $a^2\pi$, dobijemo odmah prethodni izraz

(§ 58.) **Volumen tijela rotacije.** Rotira li površina $ABDC$ oko osi X, izvede se tijelo rotacije. Razmak AB razdijelit ćemo u n jednakih dijelova Δx. Ordinatu AC označit ćemo s y_0, a slijedeće s $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$. Tim ordinatama razdijeljena je površina $ABDC$ na uske pruge. Svaka pruga opiše jedan sloj tijela rotacije. Upisani pak pravokutnik izvede rotacijom valjak upisan tom elementarnom sloju. Suma obujmova tih valjaka dana je izrazom



Slika 30.

$$\pi y_0{}^2 \cdot \Delta x + \pi y_1{}^2 \cdot \Delta x + \ldots + \pi y^2{}_{n-1} \cdot \Delta x = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \pi y_\varkappa^2 \cdot \Delta x.$$

Ta će suma tim točnije predočivati volumen tijela rotacije, što je veće n. Kad n beskonačno poraste, prijeđe ta suma u određeni integral

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

U tom integralu treba y zamijeniti onom funkcijom od x, koja izlazi iz jednadžbe izvodne krivulje.

Primjer 1. Pravac $y = \frac{r}{v} x$ prolazi ishodištem koordinata i točkom (v, r). Rotacijom oko osi x izvede taj pravac stožac. Za volumen tog uspravnog kružnog stošca imamo izraz

$$V = \pi \int_0^v \frac{r^2 x^2}{v^2}\, dx = \frac{\pi\, r^2}{v^2} \int_0^v x^2\, dx.$$

Primitivna je funkcija tu $\frac{x^3}{3}$; kad u nju uvrstimo gornju granicu, dobijemo $\frac{v^3}{3}$, dok je rezultat supstitucije donje granice jednak nuli. I tako izađe

$$V = \frac{\pi r^2}{v^2} \cdot \frac{v^3}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3}.$$

Primjer 2. Ima se odrediti volumen kugle. Krug opisan oko ishodišta s polumjerom r ima jednadžbu $x^2 + y^2 = r^2$, dakle je $y^2 = r^2 - x^2$. Uzmemo li još granice $a = 0$, $b = r$, dobit ćemo volumen polovice kugle. Stoga je volumen cijele kugle

$$V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx.$$

No sad je

$$\int (r^2 - x^2)dx = \int r^2 dx - \int x^2 dx = r^2 x - \frac{x^3}{3}.$$

Uvrstimo li ovamo za x gornju granicu r, dobijemo $\frac{2\,r^3}{3}$; rezultat supstitucije donje granice je nula. I tako je

$$V = 2\pi \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Primjer 3. Nek se odredi volumen tijela, koje nastane rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko osi X.

$$V = 2\pi \cdot \int_0^a y^2 dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \cdot \int_0^a (a^2 - x^2)dx$$

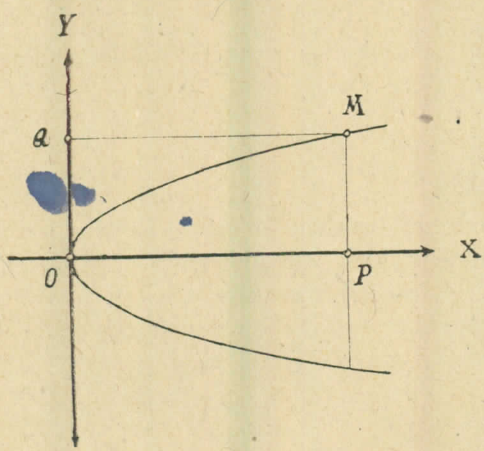
Lako se vidi, da je

$$\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \int_0^a a^2 dx - \int_0^a x^2 dx = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3},$$

pa je stoga

$$V = \frac{2\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

Primjer 4. Parabola $y^2 = 2px$ rotira oko osi X. Ima se izračunati volumen tijela, što ga opiše segment OPM, ako je dano



Slika 31.

$$OP = x_1.$$

$$V = \pi \int_0^{x_1} y^2 dx = \pi \int_0^{x_1} 2px\,dx = \pi p x_1{}^2.$$

To je tijelo rotacije jednako polovini opisanog valjka. Valjak naime ima volumen

$$V_1 = \pi \cdot PM^2 \cdot OP = \pi \cdot 2px_1 \cdot x_1 = 2\pi p x_1{}^2.$$

Zadatak 1. Polazeći od izraza za elemenat volumena $dV = \pi y^2 dx$ i od vršne jednadžbe kruga $x^2 + y^2 = 2rx$ neka se odredi volumen *a)* kugle, *b)* kuglina odreska, *c)* kuglina sloja.

Naputak. U prvom slučaju integrira se od $x = 0$ do $x = 2r$, u drugom od $x = 0$ do $x = v$, a u trećem od $x = x_1$ do $x = x_2$.

Zadatak 2. Grana krivulje $y = \frac{1}{x^2}$, koja leži u prvom kvadrantu rotira oko osi X. Kolik je volumen tijela rotacije među *a)* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; *b)* $x_1 = 1$, $x_2 = \infty$; *c)* $x_1 = 0{\cdot}01$, $x_2 = 1$; *d)* $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Zadatak 3. Krivulja $y^2 = x^3$ rotira oko osi X. Kolik je volumen tijela rotacije u granicama 0 i x?

Zadatak 4. Sinusoida $y = \sin x$ rotira oko osi X. Kolik je volumen tijela rotacije u granicama $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.

Zadaci za vježbanje.

Aritmetički redovi.

1. Dokaži formule za a_n i s_n zaključujući od n na $n+1$. §§10.

Izračunaj a_n i s_n za ove aritmetičke redove (2 do 4): do 12.

2. 1, 5, 9, . . . 3. — 10, — 7, — 4, . . .

4. 100, 94, 88, . . .

5. Koji je član u aritmetičkom redu 1, 4, 7, . . . jednak 298?

6.* Koliko se članova aritmetičkoga reda 3, $2\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, . . . mora zbrojiti, da se za zbroj dobije 0?

7. Zbroji sve godine od Hristova rođenja.

8.* Četvrti član aritmetičkoga reda jest 7, a dvanaesti 3. Izračunaj deveti član i zbroj prvih 100 članova.

9.	Zadano je	a_n (0), d (5), n (21).	Izračunaj	a_1 i s_n.
10.*	„	a_1 (4), a_n (31), d (1·5).	„	n „ s_n.
11.	„	a_1 (1), a_n (— 17), n (10).	„	d „ s_n.
12.	„	a_1 (1), a_n (3), s_n (12).	„	d „ n.
13.*	„	d (12), n (8), s_n (1136).	„	a_1 „ a_n.
14.	„	a_1 (15), s_n (— 105), d (— 2).	„	a_n „ n.
15.*	„	a_n (10), s_n (104·5), d (0·5).	„	a_1 „ n.
16.*	„	a_1 (0), n (16), s_n (144).	„	d „ a_n.
17.	„	a_n (18), n (16), s_n (144).	„	d „ a_1.

18. Između 0 i 1 interpoliraj aritmetički red s 19 članova. §13.

19. Koliko ima brojeva djeljivih s 11, koji su manji od 1000?

Rezultati: **6.** 10 članova. **8.** $a_1 = 8·5$, $d = — 0·5$ i t. d. **10.** $n = 19$. **13.** $a_1 = 100$. **15.** $n_1 = 19$, $n_2 = 22$. **16.** $d = 1·2$.

20.* Između a i b interpoliraj aritmetički red s r članova, pa izračunaj zbroj interpoliranih brojeva.

Izračunaj a_1 i d, kad je zadano (**21** do **26**):

21. $a_3 + a_7 = 46,\ a_2 : a_6 = 2 : 7.$

22.* $a_3 + a_7 = 18,\ a^2_6 = 121.$

23.* $s_8 = 76,\ s_5\,(a_6 + a_7 + a_8) = 660.$

24. $a_4 + a_6 = 28,\ a_3 \,.\, a_{10} = 232.$

25.* $a_1 \,.\, a_{14} = 276,\ a_7 \,.\, a_8 = 1326.$

26. $a_1 a_2 a_3 a_4 = 360,\ a_2 + a_3 = 9.$

Naputak. Izrazi a_2, a_3, a_4 s a_1 i d, pa eliminiraj a_1. Četiri rješenja.

27. Kakav se red dobije, kad se u aritmetičkom redu obrne poredak članova?

28. Dokaži da je svaki član a_n aritmetičkoga reda aritmetička sredina od a_{n-r} i a_{n+r}!

29. Aritmetička sredina od ma koliko uzastopnih članova aritmetičkoga reda jednaka je aritmetičkoj sredini prvoga i posljednjega od tih članova. Dokaz!

30. Tijelo padajući slobodno prevali u prvoj sekundi 4·9 m, a u svakoj potonjoj sekundi 9·8 m više negoli u prethodnoj. Izračunaj put prevaljen u t sekunda.

31.* Sluga dobije prve godine, kad se najmio 360 K, a svake slijedeće godine 24 K više negoli u prethodnoj godini. Za koliko će on godina uštedjeti 2376 K, ako svake godine zaštedi 30% svoje plaće?

32.* Netko stavi u lutriju 1 K i izgubi, drugi put stavi 2 K pa opet izgubi, treći put 3 K i t. d. Kad je naposljetku jednom

---

Rezultati: **20.** Suma $= \frac{a+b}{2} \cdot r.$ **22.** $a_1 = 1,\ d = 2;$ $a'_1 = 89,\ d' = -20.$ **23.** $a_1 = -8,\ d = 5;\ a'_1 = 18\,\frac{2}{15},$ $d' = -2\,\frac{7}{15}.$ **25.** Četiri rješenja. Za a_1 dobiju se vrijednosti 4, $-$ 4, 69, $-$ 69, a za d vrijednosti 5, $-$ 5, $-$ 5, 5. **31.** Za 15 godina. **32.** $n = 27.$

dobio i uložak mu 14-struko povraćen, bilo mu je vraćeno sve, što je dotad izgubio. Koliko je puta igrao?

33. Ako brojevi $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ čine aritmetički red, onda to vrijedi i za brojeve a^2, b^2, c^2. Dokaz!

34.* Zbroj od četiri broja, koji čine aritmetički red, iznosi a (30), a zbroj njihovih recipročnih vrijednosti iznosi b $\left(\frac{25}{36}\right)$. Koji su to brojevi?

35.* Tri broja čine aritmetički red s diferencijom d; zbroj njihovih recipročnih vrijednosti $= 0$. Koji su to brojevi?

36. Opažanjem je nađeno, da je temperatura zemlje u dubljini od $25\,m$ jednaka srednjoj godišnjoj temperaturi mjesta u kom se opaža, na pr. $8^0\,C$. Kad idemo dublje, onda za svaka $32\,m$ poraste temperatura za $1^0\,C$. Ako bi taj zakon i dalje postojao, u kojoj bi se dubljini namjerili na temperaturu, kod koje se tali *a)* zlato ($1054^0\,C$), *b)* platina ($1775^0\,C$)?

Geometrijski redovi.

1. Dokaži formule za a_n i s_n zaključujući od n na $n+1$.

Izračunaj a_8 i s_8 za ove geometrijske redove (2 do 4): §§ 14. do 16.

2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ **3.** $3, -6, 12, \ldots$

4. $-10, 5, -2{\cdot}5, \ldots$

Izračunaj a_n i s_n za ove geometrijske redove (5 do 6):

5. $a, b, \frac{b^2}{a}, \ldots$ **6.** $r, \frac{r}{q}, \frac{r}{q^2}, \ldots$

7.* Koliko se članova geometrijskoga reda $2, -1, \frac{1}{2}, \ldots$ mora zbrojiti, da se za zbroj dobije $\frac{85}{64}$?

8. Četvrti član geometrijskoga reda je 54, a šesti je 486. Izračunaj prvi član i količnik.

Rezultati: **34.** Četiri rješenja. Specijalnim vrijednostima odgovaraju diferencije $3, -3, \sqrt{145}, -\sqrt{145}$. **35.** $\frac{d}{\sqrt{3}} - d$, $\frac{d}{\sqrt{3}}$, $\frac{d}{\sqrt{3}} + d$. Kvadratni korijen može se uzeti pozitivan ili negativan. **7.** $n = 8$.

9.* Zadano je $a_n\left(\frac{1}{9}\right)$, $q\left(-\frac{1}{3}\right)$, n (5). Izračunaj a_1 i s_n.

10.* „ „ $q\left(-\frac{1}{2}\right)$, n (6), $s_n\left(5\frac{1}{4}\right)$. „ a_1 „ a_n.

11.* „ „ $a_1\left(\frac{2}{3}\right)$, $a_n\left(\frac{9}{32}\right)$, n (4). „ q „ s_n.

12.* „ „ a_1 (1), a_n (7·59375), q (1·5). „ n „ s_n.

13. „ „ a_1 (8), $a_n\left(\frac{1}{4}\right)$, $s_n\left(15\frac{3}{4}\right)$. „ n „ q.

14.* „ „ a_1 (1), q (— 3), s_n (4921). „ a_n „ n.

15.* „ „ $a_n\left(\frac{8}{27}\right)$, $q\left(\frac{2}{3}\right)$, $s_n\left(\frac{665}{108}\right)$. „ a_1 „ n.

§ 17. Izračunaj zbroj beskonačnih geometrijskih redova (**16** do **20**):

16. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$ **17.** $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \ldots$

18. $1 + x + x^2 + \ldots \; (x < 1)$.

19. $1 - x + x^2 - \ldots \; (x < 1)$.

20.* $\frac{a-1}{a} + \frac{a-1}{a^2} + \frac{a-1}{a^3} + \ldots \quad (a > 1)$.

Pretvori ove periodske decimalne razlomke u obične:

§ 18. **21.** $0{\cdot}\dot{7}$. **22.** $1{\cdot}\dot{4}\dot{3}$. **23.** $0{\cdot}1\dot{2}\dot{5}$. **24.** $0{\cdot}13\dot{8}$.

§ 19. **25.** Između 1 i 2 interpoliraj geometrijski red od 2 člana.

26. Između 1 i 16 interpoliraj geometrijski red od 7 članova.

27. Tako isto između a^5 i b^5 interpoliraj geometrijski red od 4 člana.

28.* Izračunaj sumu geometrijskoga reda od 9 članova, koji su interpolirani između a i b.

Rezultati: **9.** $a_1 = 9$. **10.** $a_1 = 8$. **11.** $q = \frac{3}{4}$. **12.** $n = 6$. **14.** $n = 9$. **15.** $n = 6$. **20.** $s = 1$. **28.** $s = \frac{b\sqrt[10]{a} - a\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{b} - \sqrt[10]{a}}$.

29.* Izračunaj zbroj beskonačnoga geometrijskoga reda, koji nastane iz beskonačnoga reda $a + aq + aq^2 + \ldots$ $(q < 1)$, kad se između svaka 2 člana interpolira jedan broj.

30. Dokaži, da logaritmi članova geometrijskoga reda čine aritmetički red? Kako glasi obrat?

31. Kakav se red dobije, kad se u geometrijskom redu obrne poredak članova?

32. Dokaži, da je svaki član a_n geometrijskoga reda srednja geometrijska proporcionala među a_{n-r} i a_{n+r}.

33. Ako se u geometrijskom redu zbroji po r članova, koji dolaze jedan za drugim, dobije se opet geometrijski red. Dokaz!

34.* Dokaži identitet:

$$(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}) : (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = (1 + x^n) : (1 + x).$$

35.* Dokaži identitet:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n})(1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n}) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{4n}.$$

36.* Tri broja, koja čine geometrijski red, imaju sumu 63. Prvi je broj za 45 manji od trećega. Koji su to brojevi?

37.* Tri broja, koja čine geometrijski red, imaju sumu 26, a suma je njihovih kvadrata 364. Koji su to brojevi?

Naputak. Uzmi u obzir, da je $1 + q^2 + q^4$ djeljivo s $1 + q + q^2$.

38. U geometrijskom redu od 6 članova suma je od prva 3 člana $= 3$, dok je suma od posljednja 3 člana $= -24$. Kako glasi taj red?

39. Tri broja čine geometrijski red. Ako se srednjemu pribroji 8, onda red prijeđe u aritmetički, a ako se na to trećem broju pribroji 64, postane opet geometrijski. Koji su to brojevi?

40. Netko uštedi 1. siječnja 1 *f*, 1. veljače 3 *f* i tako svakoga slijedećega mjeseca triput više negoli u pređašnjem mjesecu. Koliko će zaštedjeti u godini dana?

41.* Onaj, što je iznašao igru šah, tražio je za nagradu toliko pšeničnih zrna, koliko ih treba, da na prvo polje šaha

---

Rezultati: **29.** $s = \dfrac{a}{1 - \sqrt{q}}$. **36.** 3, 12, 48; 36, -54, 81. **37.** 2, 6, 18; 18, 6, 2. **39.** 4, 12, 36; $\frac{4}{9}$, $-\frac{20}{9}$, $\frac{100}{9}$. **41.** 12·298 . . . bilijuna hektolitara.

dođe 1 zrno, na drugo 2 zrna i tako na svako slijedeće polje dvaput toliko zrna, kao na pređašnje. Koliko bi hl pšenice morao on dobiti, ako u 1 hl ima prosjekom 1,500.000 pšeničnih zrna?

42. Metalno zrcalo apsorbira kod svake refleksije 10% svjetlosti, koja na nj padne. Kolik je intenzitet jedne zrake svjetlosti, koja se šest puta reflektirala, ako je njezin intenzitet bio u početku $= J$?

43.* Iz bureta, u kom je 40 l čistog alkohola, izvadi se 5 l i nalije toliko vode. Od te smjese izvadi se opet 5 l i opet se bure napuni vodom, i t. d. Koliko se puta mora to ponoviti, ako naposljetku ima u buretu da ostane *a)* 10 l, *b)* 1 l alkohola?

Naputak. Svaki put se izvadi iz bureta $\frac{1}{8}$ ukupne tekućine, dakle i $\frac{1}{8}$ alkohola, što ga ima u buretu, tako da od njeg preostane još $\frac{7}{8}$.

44*. Recipijent uzdušne sisaljke ima volumen $R = 3\,dm^3$, a njena sara volumen $S = 1{\cdot}2\,dm^3$. *a)* Na koliko se razrijedi uzduh, ako se čep potegne 20 puta? *b)* Koliko se puta mora čep potegnuti, da se napetost uzduha $b_0 = 730\,mm$ snizi na napetost $b_n = 4\,mm$?

45. Ahil hoće da uhvati kornjaču idući 12 put brže od nje. U početku nalazi se Ahil u A, a kornjača u K; udaljenost AK iznosi jedan stadij (stara grčka mjera). Dok Ahil dospije u točku K, kornjača se odmakla za dužinu KK_1. Kad Ahil dođe u K_1, kornjača se odmakla za dužinu K_1K_2 i t. d. Može li se otud zaključiti, da Ahil kornjače ne će nikad stići? (Sofizam *Zenonov*).

46.* S točke A, koja je na jednom kraku kuta α (60^0) spusti se normala na drugi krak; s podnožišta B te normale spusti se normala BC na prvi krak i t. d. Kolik je zbroj svih tih beskonačno mnogih normala, ako je zadano $AB = a$.

47.* Među kracima šiljatoga kuta α nalazi se beskonačno mnogo krugova s polumjerima $r, r_1, r_2, r_3 \ldots$, koji sve jedan drugoga izvana dodiruju, i koji krakove kuta imadu za zajedničke tangente. Kod toga je $r > r_1 > r_2 > r_3 \ldots$ Neka se izračuna suma površina tih krugova, ako je poznat r i α. Na pr. $\alpha = 60^0$.

Rezultati: **43.** *b)* $n = 27{\cdot}6$. Što znači, da je taj broj razlomak? **44.** *b)* $n = 15{\cdot}47$. **46.** $\frac{a}{1 - \cos\alpha}$. **47.** $s = \frac{(1 + \sin\frac{\alpha}{2})^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$.

C. Druge vrste redova.

1. Dokaži formulu za sumu kvadratâ brojeva 1, 2, 3 . . . n zaključujući od n na $n + 1$. § 20. i 21.

2. Tako isto formulu za sumu kubâ istih brojeva.

Odredi sumu ovih redova (3 do 6):

3. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$.

4.* $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2$.

Naputak. Suma se ta dobije s pomoću prethodne.

5. $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3$.

6.* $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3$.

Račun složenih kamata.*)

1. Na koji će iznos narasti 2500 K uz 4% za 25 godina? § 22. i 23.

2. Netko uloži 2135 K uz 3% na složene kamate. Koliko dobije nakon 18 godina?

3.* Pred 20 godina uloženo je 973 dinara uz $4\frac{1}{2}\%$ na složene kamate. Kolika je sadašnja vrijednost te glavnice?

4.* Netko je pred 12 $\frac{1}{2}$ godina uložio 5600 franaka uz 4 $\frac{1}{2}\%$. Koju svotu može on sada tražiti?

5. Cijeni se, da u šumi ima 16.000 m^3 drva i da godišnji prirast iznosi 1 $\frac{3}{4}\%$. Koliko će drva biti u toj šumi iza 12 godina?

6. U nekoj zemlji, koja ima 12,462.000 stanovnika, raste stanovništvo godišnje za $0{\cdot}75\%$. Koliko će ga biti za 20 godina?

7.* Da je u vrijeme Hristova rođenja 1 *f* uložen *a)* uz 1%, *b)* uz 4%, koliko bi se danas moglo tražiti?

Rezultati: **4.** $s_n = \frac{n}{3}(4n^2 - 1)$. **6.** $s_n = n^2(2n^2 - 1)$. **3.** 2346·59 *D.* **4.** 9710·5 *Fr.* (a po konformnom kamatnjaku 9708·25 *Fr.*) **7.** Krajem 1912. bilo bi *a)* 1,830.000 *K*, *b)* 3·6961 kvintilijuna *K*.

*) U svim potonjim zadacima iz računa o složenim kamatama i o rentama uzimat će se, ako se izrijekom drukčije ne odredi, da su glavnice uložene uz 4% na složene kamate i da se kamate pribijaju glavnici, kad prođe godina dana.

*

8.* Uzmimo, da se za svotu, koja je dobivena u pređašnjem zadatku, kupi čista zlata od specifične težine 19·25, a uz cijenu od 3280 *K* po kilogramu i da se od toga zlata načini kugla. Koliko bi puta premjer zemljin, koji iznosi 12756 *km*, bio sadržan u premjeru te kugle?

Naputak. Izračunaj logaritam množine zlata određene u dm^3 i logaritam volumena zemlje u dm^3, pa iz logaritma omjera tih volumena odredi omjer premjerâ.

9. Otac uloži za svoga sina na dan njegova rođenja 1000 *K* uz 4%. Koliko će sin dobiti kad navrši 24. godinu života, ako se kamate svake pô godine pribijaju glavnici?

10.* Izračunaj razliku iznosâ, na koje će narasti 1300 *K* uz $4\frac{1}{2}$% za $14\frac{1}{2}$ godina, ako se kamate jedamput priklapaju glavnici svake godine, a drugi put svake pô godine.

11. Koja se svota mora uložiti uz 4%, da se iza 20 godina dobije 5000 franaka?

12. Koja glavnica uz 3·6% za 18 godina naraste na 1500 *K*?

13.* Koliko se mora uložiti uz $4\frac{1}{2}$%, ako se iza 11 godina hoće da dobije 2823·76 *Fr*?

14.* Koja glavnica za 4 godine i 3 mjeseca uz 4% i četvrtgodišnje kapitaliziranje naraste na 1776·44 maraka.

15.* Netko ima iza $3\frac{1}{2}$ godine beskamatno platiti 2350 *K*, (t. j. bez kamata za to vrijeme). Kojom bi svotom mogao odmah izmiriti svoj dug, ako se uzme, da se kamate svake pô godine glavnici pribijaju?

16. Neka je glavnica bila 4 godine uložena uz 3%, onda $12\frac{1}{4}$ godine uz 4%, pa je narasla na 9100 *K*. Kolika je bila ta glavnica?

Naputak: Postavi se $c.\ 1{\cdot}03^4.\ 1{\cdot}04^{12}.\ 1{\cdot}01 = 9100$.

Rezultati: **8.** 3·4463 puta. **10.** 2461·6 *K* i 2478·5 *K*. **13.** 1740 *Fr*. **14.** 1500 *M*. **15.** 2045·8 *K*.

17.* Koja glavnica naraste uz 4% za 12 godina na istu vrijednost, kao 1000 K uz $4\frac{1}{2}\%$ za $11\frac{2}{3}$ godina?

18. Izračunaj uz $3\frac{1}{2}\%$ diskont od 3400 K, koje beskamatno dospijevaju iza 7 godina, ako se ima odmah sad platiti?

19.* Za koje vrijeme naraste glavnica od 2000 K uz $5\frac{1}{2}\%$ na 6000 K?

20.* Tako isto 1600 K uz $4^1/_2\%$ na 2484·75 K?

21. Koliko je vremena 100 K bilo uloženo uz 3%, ako je naraslo na 191·61 K?

22.* Koliko vremena treba da 2400 dinara uz $3\frac{1}{2}\%$ narastu na 4234·39 dinara?

23.* Za koliko je godina 5000 dinara uz 4% i polugodišnje kapitaliziranje kamatâ naraslo na 6689·31 dinara?

24. Za koje se vrijeme podvostruči glavnica uz *a)* 3%, *b)* 4%, *c)* 5%?

25.* A uloži 1200 K uz 5%, B pak 4 godine kasnije uloži 1800·33 K uz 4%. Za koje će vrijeme te glavnice narasti na jednake svote?

26.* Engleska je godine 1760. imala 6,479.730 stanovnika, godine 1800. pak 9,187.176, a 1830. godine 13.840.751. Koliki je bio postotak prirasta u to vrijeme?

27. Uz koliko se postotaka podvostruči glavnica za 12 godina?

1.2. 28.* Uz koliko postotaka naraste 465 K za 15 godina na 837·43 K?

Rezultati: **17.** 1044·04 K. **19.** Za 20·513 godine (po konformnom kamatnjaku dobije se 20·519 godina.) **20.** Za 10 godina. **22.** $16\frac{1}{2}$ godina. **23.** Za 7·35 godina. (Konformni kamatnjak.) **25.** Prva glavnica za 26 godina. **26.** Od godine 1760. do 1800. iznosio je prirast $0·88\%$, od godine 1800.—1830 pak $1·37\%$. **28.** Uz 4%.

1036

29. Tako isto 1426 *Fr.* za 11 godina na 2438·93 *Fr*?

30.* Uz koliko su postotaka bile 2000 *K* uložene na složene kamate, ako su one za 16 godina narasle na 3467·97 *K*?

31.* Uz koliko se postotaka potrostruči glavnica za 30 godina, ako se kamate priklapaju glavnici trećinom godine?

32. Za zajam od 1000 *K* dade lihvar sebi ispostaviti mjenicu na 1464 *K*, koja dospijeva iza 4 godine. Koliko je postotaka računao?

33.* Ako se kamate pribijaju glavnici svake godine, uz koliko će postotaka glavnica u godini dana porasti toliko, koliko poraste uz 4%, kad se kamate kapitaliziraju svake četvrt godine?

34.* Za 5 godina narasla je glavnica na 7402·4 *K*, a za 12 godina narasla je na 10415·9 *K*. Kolika je bila glavnica i uz koliko je postotaka bila uložena?

35. Broj stanovnika Engleske bio je u godini 1891. 27,483.490, a u godini 1901. 30,805.466. *a)* Za koliko je postotaka porastao onaj broj svake godine? *b)* Koliki bi morao biti u godini 1919., ako postotak prirasta ostaje isti?

Račun renta.

§ 26. i 27. **36.*** Ako se 16 godina na početku svake godine ulaže 300 *K* uz 4%, koliko se dobije na koncu 16. godine?

37.* Netko ulaže 20 godina na početku svake godine 420 *K* uz 3·6%. Koliko će dobiti na kraju 20. godine, ako se kamate kapitaliziraju polugodišnje?

Naputak. Na kraju 20. godine pojedini obroci imadu vrijednost rq^{40}, rq^{38}, . . . rq^2, gdje je $q = 1{\cdot}018$. Još treba uzeti $\log 1{\cdot}018 = 0{\cdot}0077478$.

38.* Svaki put, kad minu dvije godine, uloži *A* 1200 *K* uz 4·5%. Koju će on svotu dobiti dvije godine iza desete uplate?

39.* *A* ulaže 30 godina na početku svake godine *n K*, *B* pak ulaže za to vrijeme na početku svake druge godine 2*n K*. Tko će na kraju 30. godine dobiti više i za koliko?

Rezultati: **30.** $3\frac{1}{2}$%. **31.** 3·69%. **33.** Uz 100 $(1{\cdot}01^4 - 1)$%. **34.** 5800 *K* uz 5%. **36.** 6809·09 *K*. **37.** 12478 *K*. **38.** 20102 *K*. **39.** *B* dobije više za $\frac{n(q^{30}-1)q}{q+1}$; $q = 1{\cdot}04$.

0·47

~~0·35526 2 0·55~~ = 1

898036 2 5·95

328
1
324

40.* N ulaže 30 godina svake godine r K. Iza 10. uloška iznosi njegovo potraživanje 1440·73 K, a iza 30. uloška 6730·17 K. Kolik je bio r i uz koliko se postotaka ukamaćivalo?

41.* Koju svotu treba 24 godine na početku svake godine ulagati *a)* uz 4%, *b)* uz 5%, da se na koncu 24. godine dobije 10.000 K?

42. Isti zadatak, ako se uplaćuje na kraju godine?

43.* Otac je za svoga sina od njegova rođenja uplaćivao svake po godine istu svotu u štedionicu, kod koje se kamate uz 4% kapitaliziraju polugodišnje. Iza 31. uplate umre otac, i otad se uložena svota povećava samo kamatama i kamatama od kamatâ. Kolika je bila polugodišnja uplata, ako je sin s navršenom 24. godinom dobio 3631·72 K?

44.* A uloži svake godine 160 K uz 5%, pa bi rado zato dobiti 2100 K. Koliko puta mora ulagati?

---

45. Netko uloži 1950 Fr. uz 4·5% i na koncu svake slijedeće godine dodaje još 250 Fr. Koliko je njegovo potraživanje iza 12. obročne uplate?

46.* Isti zadatak, ako se kamate kapitaliziraju polugodišnje.

47.* Za koji se iznos mora glavnica od 3600 K povećati svaki put, kad prođu dvije godine, da iza 5. obročne uplate potraživanje bude iznosilo 10.000 K?

48.* A ima 84.000 K, uložene uz 4%. *a)* Koju svotu ne smiju njegovi godišnji izdaci premašiti, ako hoće, da mu se imutak ne smanji? Koliko će on imati iza 20 godina, ako je u to vrijeme svake godine trošio *b)* 3000 K, *c)* 4000 K? (Neka se tako računa, kao da se izdaci čine vazda na kraju godine).

49.* Kolika je glavnica bila uložena uz $5\frac{1}{2}$%, ako se 15 godina, na koncu svake godine, od nje uzimalo 250 K i ako je na kraju 15. godine još preteklo 1300 K.

Rezultati: **40.** $r = 120$ K, $p = 4\%$. **41.** *a)* 246·03 K. **43.** $r = 60$ K. **44.** Uplatiti ima 10 puta i na to još 10 mjeseci jednostavnog ukamaćivanja. **46.** 7203·7 Fr. **47.** Za 793·68 K. **48.** *b)* 94720 K, *c)* 64942 K. **49.** 3091·6 K.

50. U šumi ima 135.000 m^3 drvâ, a godišnji prirast iznosi 1·8%. Koliko bismo drva smjeli svake godine izvesti, da iza 20 godina još ostane 100.000 m^3.

51. Netko uloži 12000 dinara uz 3·5% i podiže od toga 12 godina, na koncu svake godine, 1000 dinara. Koliko mu još ostane kad podigne zadnji obrok?

52.* Za koliko se godina otplati dug od 10000 funti šterlinga obročnim otplatama od 2373·93 funti šterlinga, koji se plaćaju na kraju svake godine, ako se računa 6%?

53.* Za koliko će se godina amortizirati zajam od 11 milijuna *K*, sklopljen uz 5%, ako se na koncu svake godine otplaćuje (anuitet) 715.566 *K*?

54.* Zajam od 2 milijuna kruna, sklopljen uz 4%, ima se amortizirati sa 40 anuiteta, koji dospijevaju na koncu svake godine. *a)* Kolik je anuitet? *b)* Za prvih 5 godina izračunaj koliko se plaćalo za kamate, a koliko se davalo na otplatu glavnice.

55.* Dug od 6400 *K* ima se otplatiti s 12 obroka, koji dospijevaju iza 2, 4, 6, . . . 24 godine. Kolik je jedan obrok?

56.* Dug od 10.000 *K* ima se otplatiti s 10 jednakih obroka, koji dospijevaju na koncu svake godine. Prvih 5 godina ukamaćuje se s 5%, a onda sa 4%. Kolik je jedan obrok?

Naputak. Postavi se

$$kq^5 - r \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = k_1, \; k_1 q_1{}^5 - r \, \frac{q_1{}^5 - 1}{q_1 - 1} = 0.$$

57. Koju sadašnju vrijednost ima renta od 1500 *K*, koja kroz 20 godina dospijeva na koncu svake godine.

58.* Kroz 30 godina, računajući odsad, ima *N* na kraju svake godine da dobije rentu od 2000 *K*. Ako bi se njegove tražbine imale podmiriti time, da mu se jednom za svagda isplati 60.000 *K*, kad bi se to imalo učiniti?

59.* Netko ima za 10 godina beskamatno dobiti 12.000 *K*; mjesto toga rado bi on primati rentu, koja bi tekla 15 godina i

---

Rezultati: **52.** Za 5 godina. **53.** Za 30 godina. **54.** *a)* 101047 *K*. *b)* Prvih pet godina išlo je na otplatu glavnice 21.047 *K*, 21.889 *K*, 22.765 *K*, 23.675 *K*, 24.622 *K*. **55.** $r = 856·3$ *K*. **56.** $r = 1279·2$ *K*. **58.** Po konformnom kamatnjaku dobije se $n = 14·046$ godina. **59.** $r = 729·13$ *K*.

koja bi prvi put imala dospjeti za godinu dana. Koliko mora renta iznositi?

60* Renta od r kruna dospijeva kroz 25 godina na koncu svake godine. Kad ima ona vrijednost $25\ r$?

61.* Netko uloži sad i iza 5 godina 4000 *K*, da sebi osigura rentu, koja bi trajala 20 godina i godišnje iznosila 763·23 *K*. Kad je može početi uživati?

62.* Netko ima iza 6 godina beskamatno da dobije 15.000 *K*; on bi to radije zamijenio za rentu, koja bi dospijevala 10 puta i to na koncu svake treće godine. Kolika je ta renta?

63.* Za 18.746·5 *K* kupi *A* rentu, koja godinu dana iza toga prvi put dospijeva i traje 25 godina. Kolika je renta?

64. Koliku bi svotu morao netko uložiti, da osigura sebi rentu od 1200 *K*, koja se počinje 5 godina kasnije i teče 30 godina?

Naputak. Do posljednjeg obroka rente proteku 34 godine.

65.* Renta od 1250 *Fr.*, koja je proračunata na 20 godina, ima se odgoditi 5 godina (t. j. ima početi 5 godina kasnije negoli je s početka bilo određeno) i onda isto tako teći 20 godina. Koliko iznosi odgođena renta?

66. Netko će za 10 godina početi uživati rentu od 1600 *K*, proračunatu na 16 godina, no rado bi je zamijeniti drugom, koja se odmah počinje, a teče tako isto 16 godina. Kolika je ta renta?

67.* Otac uloži za svoga sina najprije na njegov rođendan, pa onda iza 4, 8, 12, 16 i 20 godina svaki put po 800 *K*. Koliku godišnju rentu može zato sin uživati kroz 6 godina iza navršene 24. godine?

68.* Mjesto da se tijekom 30 godina na početku svake godine prima 1000 *K*, radije bi se šest puta i to na početku svakoga kvinkvenija primila svota, koja odgovara. Kolika je ta svota?

69.* *A* je 15 godina ulagao godišnje po 250 *K*. Koliko godina može on za to dobivati rentu od 400 *K*, koja prvi put dospijeva godinu dana iza posljednje uplate, ako se računa 5%?

Rezultati: **60.** Iza 13·011 godina. **61.** Za 10 godina. **62.** $r = 2140·07$ *K*. **63.** $r = 1200$ *K*. **65.** Općeno je $x = rq^5$. **67.** $r = 1579·9$ *K*. **68.** 4630·09 *K*. **69.** 23 godine. (Točniji račun daje 22·995 godina.)

Rente od 1600 K koja kroz 20 go dospijeva krajem svake god. ima se ova ko promijeniti 1.) povisi na 2500 K:

70.* Renta od 1500 *K*, koja 20 godina dospijeva na početku svake godine, ima se pretvoriti u drugu, koja se počinje 10 godina kasnije i teče samo 10 godina.

71.* Netko ima pravo na godišnju rentu od 2400 *K*, koja traje 18 godina, no prvih 5 godina on ne podigne rente, već ugovori sa bankom da mu zato povisi preostale obroke. Koliki su novi obroci?

72.* Renta od 1235 *K*, koja dospijeva na početku svake godine, ima se pretvoriti u drugu, koja ima teći isto toliko godina, ali dospijeva svake pô godine. U oba slučaja pretpostavlja se polugodišnje kapitaliziranje kamatâ.

73.* Renta teče 10 godina i u prvoj godini iznosi 500 *K*, u drugoj godini 5% manje, u trećoj godini 5% manje negoli u drugoj i t. d. Koju vrijednost ima renta godinu dana prije prvoga dospijetka? $p = 4\%$.

74. Renta teče n godina i u pojedinim godinama iznosi po redu r, re, re^2, . . . re^{n-1}. Koju vrijednost ima renta o onom roku, kad prvi put dospijeva?

75. Isti zadatak, ako je količnik $e =$ kamatnom faktoru q.

X **76.*** *A* ulaže 12 godina, na početku svake godine, izvjesnu svotu i to prve godine 200 *K*, druge godine za 5% više, treće godine za 5% više negoli u drugoj godini i t. d. Koju vrijednost imaju ove uplate na kraju 12. godine? $p = 4\%$.

Permutacije.

§ 30. Koliko se permutacija dobije iz ovih elemenata (**1** do **3**), i koje su to:

1. 1, 2, 3. **2.** 1, 2, 3, 4.

3. a, m, o, r.

Rezultati: **70.** $x = r(q^{10} + 1)$. **71.** Ispoređivanjem konačnih vrijednosti dobije se $R = \dfrac{2400\,(q^{18} - 1)}{q^{13} - 1}$.

72. Općeno rješenje: $x = \dfrac{rq}{q+1}$, $q = 1 + \dfrac{p}{200}$.

73. $S = \dfrac{r\,(q_1{}^{10} - q^{10})}{q_1{}^{10}\,(q_1 - q)}$, $q = 0{\cdot}95$, $q_1 = 1{\cdot}04$.

76. $S = r\,q_1 \cdot \dfrac{q^{12} - q_1{}^{12}}{q - q_1}$, $q = 1{\cdot}05$, $q_1 = 1{\cdot}04$.

3.) rente dospijeva toma 18 puta. Za koliko se sadanja vrijednost ove rente razlikuje od sadanje vrijednosti prve rente ~

Načini 10 slijedećih viših permutacija od (**4** do **6**):

4. 1 4 6 3 5 2. **5.** 2 5 3 6 4 1.

6. *a d b c e*.

7. Koje permutacije elemenata a, b, c, d, e imaju c na prvom i a na drugom mjestu?

8. Koje permutacije elemenata 1, 2, 3, 4, 5, 6 imaju 2 na prvom, 5 na trećem i 4 na posljednjem mjestu?

9. Od elemenata 1, 2, 3, 4, 5, koja je po redu permutacija *a)* 3 1 4 2 5, *b)* 4 5 2 1 3?

10. Od elemenata a, e, m, n, s, koja je po redu permutacija *a) amens*, *b) manes*, *c) mensa*, *d) samen*?

11. Kako glasi 40. permutacija elemenata 1, 2, 3, 4, 5?

Kombinacije.

1. Koliko se kombinacija bez ponavljanja dobije od elemenata a, b, c, d i koje su to? § **31.** do **33.**

2. Tako isto od elemenata 1, 2, 3, 4, 5?

3. Načini sve terne bez ponavljanja od elemenata a, b, c, α, β, γ.

4. Koliko ima kombinacija r-toga razreda od r elemenata? Koliko $(r+1)$-voga razreda?

5.* Iz elemenata 1, 2, 3, . . . načini sve kombinacije kod kojih je zbroj elemenata $= 10$.

Odredi ove binomne koeficijente:

6. $\binom{5}{4}$, **7.** $\binom{11}{9}$, **8.** $\binom{n}{n}$.

Rezultati: **5.** 19, 28, 37, 46; 127 i t. d. U svem 10 kombinacija.

Binomni poučak.

§ 34. i 35. Razvij ove potencije (1 do 16):

1. $(a+b)^4$. 2. $(a-b)^4$.

3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$. 4. $(a+b)^5$.

5. $(7x-3y)^5$. 6. $\left(2a-\frac{1}{3b}\right)^5$.

7. $(5a+2b)^6$. 8. $(a^2-1)^7$.

9. $(3a-1)^{10}$. 10. $(x+y)^6+(x-y)^6$.

11. $(x+y)^6-(x-y)^6$.

12.* $(2+\sqrt{2})^9-(2-\sqrt{2})^9$.

13. $(\sqrt{3}+1)^{10}+(\sqrt{3}-1)^{10}$.

14. $(1+i)^5$. 15.* $(1-i)^6$.

16. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.

17. Kako izgleda 5. član, kad se razvije $\left(\frac{2a^2}{3b}-\frac{5b^2}{4a}\right)^8$?

18. Kad se razvije $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x})^9$, koji član ima oblik ax^5?

Naputak. r-ti je član $\binom{9}{r-1}x^{\frac{2}{3}(10-r)}\cdot x^{\frac{1}{2}(r-1)}$. Koliko mora dakle biti r?

19. Kad se razvije $(\sqrt[3]{x^7}-\sqrt{x})^p$, onda 7. član ima oblik ax^{17}. Kolik je p?

20. $1{\cdot}02^6$ izračunaj s pomoću binomnog poučka na 6 decimala.

21.* Tako isto $0{\cdot}97^5$ na 5 decimala.

Dokaži jednadžbe (22 i 23)

22.* $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$,

23.* $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$.

24. Ako je $y=x^4$, pokaži da je derivacija $y'=4x^3$.

25. Ako je $y=x^n$, derivacija je $y'=nx^{n-1}$.

Rezultati: **12.** $44576\sqrt{2}$. **15.** $8i$. **21.** $0{\cdot}97^5=(1-0{\cdot}03)^5=\ldots$ Dobije se $0{\cdot}85873$. **22.** $2^n=(1+1)^n=\ldots$ **23.** $0=(1-1)^n\ldots$

Račun vjerojatnosti.

1.* Kolika je vjerojatnost, da ćemo bacajući dva novca *a)* na oba dobiti „krunu“, *b)* „krunu“ i „pismo“? **§ 36.**

2. Izračunaj vjerojatnost, da će se jednom kockom baciti *a)* tâk broj, *b)* više od 4!

3.* Kolika je vjerojatnost, da će se dvjema kockama baciti *a)* dva jednaka broja, *b)* 1 i 2. *c)* svota 8, *d)* više od 10?

4. Kolika je vjerojatnost, da ćemo bacajući tri novca dobiti *a)* na sva tri „krunu“, *b)* barem na dva „krunu“?

5. Kolika je vjerojatnost, da će se trima kockama baciti *a)* sami jednaki brojevi, *b)* svota 10, *c)* manje od 10?

Naputak. Broj je povoljnih slučajeva u *b)* 27, a u *c)* 81.

6. Kod izigrivanja jedne slike izdato je 160 srećaka, od kojih jedna dobija. Kolika je vjerojatnost, da ćemo dobiti, ako imamo 10 srećaka?

7.* U žari su 3 crvene kuglice i 5 bijelih. Kolika je vjerojatnost, da će se, ne gledajući u žaru, izvući *a)* dvije crvene, *b)* dvije bijele, *c)* dvije kuglice različite boje?

8. U žari su 3 crvene kuglice, 4 bijele i 5 zelenih. Kolika je vjerojatnost, da ćemo, vadeći tri kuglice, izvući *a)* tri crvene, *b)* tri bijele, *c)* tri zelene, *d)* dvije crvene i jednu zelenu, *e)* tri kuglice različite boje?

9. Kolika je vjerojatnost, da ćemo na običnoj lutriji, između 5 brojeva, što se vuku, pogoditi izvjesnu neku *a)* ambu *b)* kvaternu, *c)* kvinternu?

Naputak za *a)*. Broj kvinterna, koje sadržavaju izvjesnu ambu, jednak je broju svih terna od 88 elemenata.

10.* Na običnu lutriju stavi netko *a)* dva broja, *b)* tri broja. Kolika je vjerojatnost, da će između 5 brojeva, što se vuku, pogoditi barem jedan?

Rezultati: **1.** *b)* $\frac{1}{2}$. **3.** *a)* $\frac{1}{6}$. *d)* Ima 3 povoljna slučaja. **7.** *a)* $\frac{3}{28}$, *b)* $\frac{10}{28}$, *c)* izlazi iz *a)* i *b)*. **10.** *b)* $\frac{1871}{11748}$.

Naputak. Kao mogući slučajevi imaju se uzeti sve kvinterne brojeva 1 do 90, dok je broj nepovoljnih slučajeva jednak broju kvinterna od 88 ili 87 elemenata.

11.* Prema dogovoru dobiva *A*, ako iz igre od 32 karte izvuče keca, a gubi, ako izvuče figuru. Ništa se pak ne računa, ako izvuče koju drugu kartu. Kolika je vjerojatnost da će *A* dobiti?

12. U posudi se nalaze 3 bijele, 5 žutih, 8 zelenih i još nekolike kuglice druge boje. Dogovoreno je pak, da se dobiva ako se izvuku dvije bijele ili dvije žute kuglice, a da se gubi, ako se izvuku dvije zelene. Nijedan drugi slučaj ne računa ništa. Kolika je vjerojatnost, da će se kod vučenja dobiti?

Naputak. Broj svih mogućih slučajeva, koji se moraju u obzir uzeti iznosi

$\binom{3}{2}+\binom{5}{2}+\binom{8}{2}$. Od njih su $\binom{3}{2}+\binom{5}{2}$ povoljni.

§ 38. **13.*** Kolika je vjerojatnost, da će se dvjema kockama baciti svota *a)* 11, *b)* 12, *c)* 11 ili 12?

14. v_1 je vjerojatnost, da će netko na svoju srećku dobiti glavni zgoditak, a v_2 je vjerojatnost, da će dobiti kojigod od pet sporednih zgoditaka. Kolika je vjerojatnost, da će uopće dobiti?

§ 39. **15.*** Kolika je vjerojatnost, da će se jednom kockom baciti *a)* najprije 1, a onda 2, *b)* dva puta po redu 6, *c)* dva puta po redu isti broj?

16. Kolika je vjerojatnost, da ćemo dvjema kockama tri puta po redu baciti po dva jednaka broja?

17.* Kolika je vjerojatnost, da će se iz igre od 32 karte dva puta po redu izvući kec, *a)* ako se izvučena karta vraća u igru, *b)* ako se ne vraća?

18.* *N* baca dvije kocke dotle, dok ne baci dva jednaka broja. Kolika je vjerojatnost, da će mu to za rukom poći *a)* s drugim hicem, *b)* s trećim, *c)* s *n*-tim?

Naputak za *c)*. Nepovoljnima imamo držati one slučajeve, u kojima se u *n* hitaca ne bace dva jednaka broja. Stoga je

---

Rezultati: **11.** $v=\frac{1}{4}$. **13.** *a)* $v=\frac{1}{18}$, *c)* $v=\frac{1}{12}$. **15.** *c)* $v=\frac{1}{6}$. **17.** *a)* $\frac{1}{64}$, *b)* $\frac{3}{248}$. **18.** *c)* $V=1-(1-v)^n$.

tražena vjerojatnost protivna onoj, da se sa n hitaca ne će baciti dva jednaka broja.

19. Iz igre od 32 karte izvuče A jednu kartu i vrati je opet u igru. To ponavlja dotle, dok se ne izvuče jedan kec. Kolika je vjerojatnost, da će mu to za rukom poći *a)* u drugom, *b)* u trećem, *c)* u n-tom vučenju?

Vidi naputak za prethodni zadatak.

20.* Posuda je razdijeljena u dva odjela; u prvom je odjelu 10 kuglica, od kojih je jedna bijela, u drugom je 8 kuglica i od tih je bijelih 5. Kolika je vjerojatnost, da ćemo iz posude izvući jednu bijelu kuglicu? Kolika bi pak bila, da posuda nije razdijeljena.

Naputak. Vjerojatnost, da ćemo u prvome odjelu zahvatiti jednu bijelu kuglicu, složena je iz ove dvije vjerojatnosti *a)* da ćemo pogoditi prvi odjel, *b)* da ćemo u njem zahvatiti jednu bijelu kuglicu.

21. Vjerojatnosti, da će se zbiti dva događaja, koji su među sobom nezavisni, iznose v_1, odnosno v_2. Kolika je vjerojatnost, *a)* da će se zbiti oba događaja, *b)* da se ne će zbiti nijedan od ta dva događaja, *c)* da će se zbiti D_1, a D_2 ne, *d)* da će se zbiti D_2, a D_1 ne, *e)* da će se zbiti barem jedan od tih događaja, *f)* da se barem jedan od njih ne će zbiti?

Naputak za *e)* i *f)*. Ove su vjerojatnosti protivne od onih, što odgovaraju slučajevima *b)* i *a)*.

22. Ako A s dvije kocke baci dva jednaka broja, onda on od B-a dobije 1 K. A koliko mora on uložiti? § 40.

23.* Ako se u običnoj brojnoj lutriji izvuku tri stavljena broja, onda se za izvjesni neki uložak dobije 480 K; ako se pak izvuku samo dva od njih, dobije se 8 K. Kolika je u ovom slučaju matematička nada dobitka?

Naputak. Kod izračunavanja vjerojatnosti, da će od tri stavljena broja dva biti izvučena, treba paziti na to, da su od tri broja moguće tri ambe, od kojih svaka može dolaziti u $\binom{87}{3}$

Rezultati: **20.** $v_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{5}{8}\right) = \frac{29}{80}$, $v_2 = \frac{1+5}{10+8} = \frac{1}{3}$. **23.** 9·87 filira.

kvinterna. One kvinterne, u kojima dolazi i treći broj, nemaju se u ovome slučaju računati.

24. Neka lutrija sadržava N srećaka, između kojih se izvuče n_1 zgoditaka po a_1 K, n_2 zgoditaka po a_2 K, . . . n_r zgoditaka po a_r K. Koju matematičku nadu dobitka ima posjednik jedne srećke?

Primjene na osiguravanje života.

1. Kolika je vjerojatnost, da će 50-godišnja osoba poživjeti još 20 godina? (II. tablica.) § 41 do 4

2. Kolika je vjerojatnost, da će novorođeni dječak doživjeti *a)* petu, *b)* dvadesetu, *c)* šezdesetu godinu života? (I. tablica.)

3.* Vjerojatnost da će novorođeni dječak doživjeti sedmu godinu, koliko je veća ili manja od vjerojatnosti da će novorođena curica doživjeti sedamnaestu godinu? (I. tablica.)

4. Kako se iz toka „krivulje živih" na sl. 23. može razabrati, kad vjerojatnost smrti opada ili raste, kad je najveća, a kad najmanja?

5. S pomoću I. tablice o pomoru izračunaj interpolacijom vrijednosti od l_n i l'_n za $n = 21, 22, 23, 24$.

6. Isti zadatak za $n = 51, 52, 53, 54$.

7.* Kod izračunavanja tablice o pomoru najprije se mnogobrojnim opažanjima i računom izravnavanja odrede vjerojatnosti smrti $q_0, q_1, q_2, \ldots$ Kako se onda izračunavaju brojevi $l_1, l_2, l_3, \ldots$ ako se l_0 uzme po volji, recimo $= 1000$?

Naputak. Za sve vrijednosti od n postoji među l_n i q_n relacija

$$q_n = 1 - \frac{l_{n+1}}{l_n}.$$

8. S pomoću II. tablice izračunaj vjerojatnost, da 35-godišnja osoba ne će doživjeti šezdesetu godinu.

9.* Kolika je vjerojatnost, da će dvije 20-godišnje osobe iza 20 godina biti još na životu? (II. tablica.)

Rezultati: **3.** Vjerojatnosti, koje se ispoređuju jesu 0·634 i 0·633, dakle su gotovo jednake. **7.** $l_1 = l_0(1 - q_0)$, $l_2 = l_0(1 - q_0)(1 - q_1)$ i t. d. **9.** $V = 0{\cdot}718^2$.

10.* Čovjeku su 32 godine, a njegovoj ženi 23. Kolika je vjerojatnost, da će iza 24 godine *a)* oboje još živjeti, *b)* oboje biti već pokojni, *c)* čovjek ženu preživjeti, *d)* žena čovjeka preživjeti?

11.* U razredu ima 20 šesnaestgodišnjih učenika, 14 sedamnaestgodišnjih i 2 osamnaestgodišnja. Kolika je vjerojatnost, da tijekom godine dana nijedan od tih učenika ne će umrijeti? (I. tablica).

12.* Uz pretpostavke prethodnoga zadatka kolika je vjerojatnost, da će iza 10 godina svih 36 učenika biti još na životu?

Naputak. Iz I. tablice izračunaj najprije interpolacijom vrijednosti l_{26}, l_{27} i l_{28}. Kod izračunavanja zadrži još i prvo decimalno mjesto.

13.* S pomoću prve tablice izračunaj srednje trajanje života *a)* novorođene curice, *b)* desetgodišnje djevojčice, *c)* dvadesetgodišnje djevojke.

14. S pomoću I. tablice izračunaj za svaku godinu od prve do dvadesete vjerojatno trajanje života muškarca, i tok tih vrijednosti predoči krivuljom.

15. Isti zadatak za žensko lice.

16. S pomoću II. tablice riješi taj zadatak za osobe, kojima je više od 20 godina.

17.* Koju svotu mora 40-godišnja osoba N platiti osiguravajućem zavodu, hoteći zato iza 20 godina da dobije 6000 K? Uplaćena svota pripane zavodu, ako N umre prije navršene 60. godine. ($p = 4\%$.)

Naputak. U ovom i u slijedećem zadatku o osiguravanju života valja upotrijebiti II. tablicu, ako se I. tablica izrijekom ne spomene.

18.* Za 5-godišnjeg dječaka uloži se 800 K u osiguravajući zavod. Koju svotu dobije on za to, kad navrši 24. godinu života? Umre li ranije, taj iznos pripane zavodu. (I. tablica, $p = 4\%$.)

Rezultati: **10.** $v_1 = \frac{l_{56}}{l_{32}}$, $v_2 = \frac{l_{47}}{l_{23}}$. *a)* $v_1 v_2$, *b)* $1 - v_1 v_2$ i t. d. **11.** Računajući s pomoću logaritama nađe se $V = 0{\cdot}833$. **12.** $V = 0{\cdot}067$. **13.** $M'_0 = 38{\cdot}5$, $M'_{10} = 48{\cdot}2$, $M'_{20} = 41{\cdot}2$ godina. **17.** 1846·46 K. **18.** $c = 2400\,K$.

Naputak. Iz I. tablice nađe se interpolacijom $l_{24} = 573 \cdot 8$.

19.* Koju svotu mora čovjek od 45 godina platiti osiguravajućem zavodu, da nasljednici po njegovoj smrti dobiju 10.000 *K*?

Naputak. Kadgod se iz II. tablice upotrijebi stupac s natpisom S_n valja uzeti $p = 3 \cdot 5\%$.

20. Otac obitelji, komu je 36 godina, hoće svojim nasljednicima jednokratnom uplatom da osigura 6500 *K*, koji bi iznos dospio po njegovoj smrti. Koliko ima on da plati?

21.* Koju će glavnicu dobiti nasljednici iza smrti čovjeka, koji je u svojoj 32. godini u osiguravajući zavod uložio 4500 *K*?

22.* Koliku godišnju premiju ima počevši od svoje 24. godine plaćati čovjek, da po svojoj smrti nasljednicima osigura 15.000 *K*?

23.* Koliku svotu dobiju nasljednici po smrti čovjeka, koji je počevši od svoje 40. godine u osiguravajući zavod plaćao godišnje 1200 *K*?

24.* Koliku godišnju premiju x ima kroz m-godina ili pak do svoje smrti — ako ranije umre — plaćati n-godišnji čovjek, da iza m godina osigura sebi, ili ako ranije umre, da po svojoj smrti nasljednicima osigura glavnicu c? Na pr. $n = 42$, $m = 20$, $c = 15.000$ *K*.

Naputak. Ako se isporedi ono, što uplati l_n osoba, koje se osiguraju uz iste pogodbe, s onim, što osiguravajući zavod isplati, onda se dobije:

$$xq^n\ (S_n - S_{n+m}) = cq^{n-1}\ (S_n - S_{n+m}) - cq^n\ (S_{n+1} - S_{n+m+1}).$$

25.* Koju sadašnju vrijednost ima renta od 1820 *K*, što je 40-godišnji čovjek do svoje smrti diže na kraju svake godine?

26.* Za 16.000 *K* kupi sebi 48-godišnja osoba doživotnu rentu, koja u jednakim iznosima ima dospijevati na kraju svake slijedeće godine. Kolik je taj iznos?

27.* Koju vrijednost ima doživotna renta od godišnjih 3900 *K* za čovjeka od 36 godina, ako je on ima dizati kroz 30 godina, ili pak do smrti, ako ranije umre?

Rezultati: **19.** 4894·2 *K*. **21.** 11936 *K*. **22.** $x = 244 \cdot 24$ *K*. **23.** 43375 *K*. **24.** 685·22 *K*. **25.** 28119 *K*. **26.** 1216·14 *K*. **27.** 45502 *K*.

28.* Koju svotu x mora platiti n-godišnja osoba, da iza m godina, ako to doživi, stane uživati doživotnu rentu od r K? Na pr. $n = 24$, $m = 36$, $r = 2500\,K$.

29.* Od svoje uz 4% uložene glavnice povlači 50-godišnji čovjek na godinu $3600\,K$ kamata. Za koliko se povisi njegov godišnji dohodak, ako on tu glavnicu upotrijebi na to, da sebi kupi doživotnu rentu, koju bi počeo odmah uživati, i ako se kod određivanja rente uzme $p = 3{\cdot}5\%$?

Rezultati: **28.** Općeno se nađe $x = \frac{r\,q^n\,S_{n+m}}{l_n}$. **29.** Za $3582\,K$.

$(x+2)^{\frac{1}{2}} + (x-3)^{\frac{1}{2}} = (3x+4)^{\frac{1}{2}}$

$(2x-3)^{\frac{1}{2}}$

$\log\left(\frac{x+2}{2}\right)$

$x+2+x-3=3x+4$

$2x-1=3x+4$

$-x=5$

Zadaci iz različitih područja matematike i njenih primjena.

(Ponavljanja i nadopunjivanja)

1.* $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$.

2. Glavnica od 1000 K uložena je uz $p\%$ na složene kamate i za n godina postigne konačnu vrijednost od 2400 K. Na koliko će to narasti iza daljih n godina?

3. Dane su jednadžbe triju pravaca:

$$y = m_1 x + b_1, \quad y = m_2 x + b_2, \quad y = m_3 x + b_3.$$

a) Kojim uvjetima moraju zadovoljavati konstante m i b, ako sva tri pravca imadu ići istom točkom? *b)* Koje su koordinate te točke?

4.* S kojom se početnom brzinom mora baciti tijelo vertikalno gore, ako ono ima 1 km da se uspne? Otpor uzduha ne uzima se u račun. $g = 9{\cdot}8\,m$.

5.* $\dfrac{ax+b}{bx+n} + \dfrac{bx+a}{ax+b} = 2{\cdot}5.$

6.* Kolika je diferencija aritmetičkoga reda, u kom početni član a, pa treći član i deseti čine geometrijski red?

7.* U krug s polumjerom r upisan je istostrani trokut i pravilni sedmerokut. *a)* Za koliko se razlikuje polovica stranice trokuta od stranice sedmerokuta? *b)* Kako se može to primijeniti za približnu konstrukciju pravilnog sedmerokuta?

Rezultati: **1.** $x = 7$. **3.** *a)* $m_1(b_2 - b_3) + m_2(b_3 - b_1) + m_3(b_1 - b_2) = 0$. **4.** $c = 140\,m$. **5.** $x_1 = \dfrac{2a-b}{a-2b}$, $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$. **6.** $d = \dfrac{5a}{4}$. **7.** *a)* $s_7 = 0{\cdot}8678\,r$, $\dfrac{1}{2}\,s_3 = 0{\cdot}8660\,r$.

8.* Svakog dana o podne polazi parobrod iz Havrea u New-York, a u isto doba iz New-Yorka u Havre. Prevoz traje 7 dana. Koliko će drugih sresti na putu parobrod, koji danas o podne ostavi Havre?

Naputak. Puteve tih parobroda predoči grafički.

9. $x + y = a, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b}$.

10. U kvadrat, komu je stranica a, ima se upisati kvadrat sa stranicom b. Algebarska analiza! Među kojim granicama mora ležati b.

11.* Pravokutan kvadrat s katetama a i b rotira oko hipotenuze. Izračunaj oplošje i volumen rotacionog tijela.

12.* U ravnini djeluju tri sile P_1, P_2, P_3 na jednu točku i drže se u ravnotežju. Ako je $P_1 = 6\,kg$, $P_2 = 8\,kg$ i $\sphericalangle P_1 P_2 = 60^0$, nek se izračuna P_3 i $\sphericalangle P_2 P_3$.

13.* $\sin(x + 15^0) + \sin(x - 15^0) = 0{\cdot}6607$.

14. Opseg je pravokutnika $= o$, a površina je $= p$. Napiši kvadratnu jednadžbu, kojoj su korijeni baza i visina pravokutnika, pa izračunaj oba korijena.

15.* Rotacioni stožac s otvorom 2α, ima se dvjema paralelnim ravninama presjeći tako, da uspravni prikraćeni stožac, što je omeđen s te dvije ravnine, bude imao visinu v i plašt P. Neka se izračunaju udaljenosti x i y. onih dviju ravnina od vrha stošca. Na pr. $\alpha = 45^0$, $v = 1\,dm$, $P = 8\,dm^2$.

16. Izračunaj što kraćim putem

$$(1 + x^2)^6 - (1 + x)^6 (1 - x)^6.$$

Rezultati: **8.** 1 u luci pri polasku, 1 u luci pri dolasku i 13 na otvorenom moru. **11.** $O = \frac{\pi ab(a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $V = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$. **12.** $P_3 = \sqrt{148}\,kg$, $\sphericalangle P_2 P_3 = 154^0\ 42'\ 53''$. **13.** $x = 20^0$ i t. d. **15.** $x = 0{\cdot}4\,dm$, $y = 1{\cdot}4\,dm$.

17.* Ima neizmjerno mnogo aritmetičkih redova, u kojima kao članovi dolaze brojevi 3, 15 i 35. Neka se odrede diferencije nekih od tih redova.

Naputak. Zadatak vodi nå neodređenu jednadžbu, u kojoj su nepoznanice mjesne kazaljke članova 15 i 35.

18.* Oko pravokutnika s bazom a i s visinom b opisan je krug. Neka se izračuna segment, što ga omeđuju baza i krug. Na pr. $a = 8\,cm$, $b = 6\,cm$.

19. Stožac, koji ima visinu v, prerezima paralelnim s bazom razdijeljen je u tri jednaka dijela. Neka se izračunaju visine tih triju tijela.

20.* Pod kutom $\alpha = 30^0$ izbačena je kugla početnom brzinom $c = 520\,m$. *a)* U kojoj će se daljini ona vratiti u horizontalnu ravninu? *b)* Koju će najveću visinu postići? *c)* Gdje se ona nalazi iza 10 sekunda? $g = 9{\cdot}8\,m$.

21.* $2 \log (x + 1) - \log (2x - 1) = 1$.

22. Ako se u januaru zaštedi neka svota, a svakog slijedećeg mjeseca dvaput toliko, koliko u prethodnom mjesecu, na kraju godine imat će se zašteđenih 409·50 *K*. Koliko je ušteđeno u januaru?

23.* *a)* Od kružnih sektora, koji imadu isti opseg O, koji ima najveću površinu? *b)* Koliki je centrični kut toga sektora?

Naputak. Označi li se polumjer s r, luk je $= O - 2r$, a površina je $p = \frac{1}{2} r\,(O - 2r)$.

24.* Neka se izračuna površina, što je zatvoraju parabola $y^2 = 2px$ i pravac $y = mx$.

25.* $xy - x = 10$, $xy - y = 12$.

26.* U šumi ima drvâ 41000 m^3, a godišnji je prirast 1·6%. Koliko se drva može svake godine izvaditi, ako šuma za 15 godina ima biti sasvim isječena?

Rezultati: **17.** Diferencija može biti svaki od brojeva 4, 2, $\frac{4}{3}$, 1 . . . **18.** $P = 11{\cdot}18\,cm^2$. **20.** *c)* $x = 4503\,m$, $y = 2110\,m$. **21.** $x = 9 \pm \sqrt{70}$. **23.** *b)* $\alpha = 360^0 : \pi$. **24.** $P = \frac{2p^2}{3\,m^3}$. **25.** $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = -2$, $y_2 = -4$. **26.** $r = 3097\,m^3$.

27.* Neka se izračuna volumen kosoga stošca, ako su dane najkraća i najduža stranica (s i S) i $\sphericalangle\, s\,S = \alpha$.

Na pr. $s = 4\,cm$, $S = 5\,cm$, $\alpha = 60^0$.

28.* Kolik je prikloni kut kosine prema horizontalnoj ravnini, ako bi tijelo stavljeno na tu kosu ravninu, pod samim uplivom teže, u 1 sekundi prevalilo put od 1 m?

29.* $\sqrt{\dfrac{ax+b}{ax-b}} + 9\sqrt{\dfrac{ax-b}{ax+b}} = 6.$

30.* Površina trokuta iznosi $12\,m^2$, a njegove se stranice a, b, c odnose kao $6 : 9 : 10$. Neka se izračunaju stranice i kutevi.

31. Ako su vrsi četverokuta točke (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), njegova je površina P dana formulom

$$2\,P = (x_1 - x_3)\,(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)\,(y_1 - y_3).$$

Dokaz!

32.* Uzmu li se asimptote za koordinatne osi, istostrana hiperbola ima jednadžbu $y = \dfrac{c^2}{x}$. Neka se konstruiraju tangente u točkama, koje imadu apscise $x_1 = c$ i $x_2 = 2c$.

33. Ako kubna jednadžba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ima korijen $x = m$, dokaži da je cijela funkcija $x^3 + ax^2 + bx + c$ djeljiva korijenim faktorom $x - m$.

Naputak. Po pretpostavci je $m^3 + am^2 + bm + c = 0$, dakle je $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c - (m^3 + am^2 + bm + c) = (x^3 - m^3) + a\,(x^2 - m^2) + b(x - m)$, i t. d.

Rezultati: **27.** U specijalnom slučaju dobije se bez logaritama $V = 2{\cdot}5\,\pi\sqrt{7}\,cm^3$. **28.** $\alpha = 11^0\,46'$. **29.** $x = \dfrac{5\,b}{4\,a}$. **30.** $a = 6\lambda$, $b = 9\lambda$, $c = 10\lambda$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt[4]{11375}}$, $\cos\alpha = \dfrac{145}{180}$, $\cos\beta = \dfrac{55}{120}$. **32.** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{c^2}{x^2} = -\dfrac{y}{x}$, stoga je α suplementan s kutom, što ga radij vektor zatvora s osju X.

34. Uvjeri se da jednadžba $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$ ima korijen $x = 2$. S pomoću prethodnoga stavka izračunaj druga dva korijena jednadžbe i učini pokus.

35.* Ako se plašt uspravnoga stošca razastre u ravninu, dobije se kružni sektor s centričnim kutem α i s polumjerom s. Neka se izračuna oplošje i volumen stošca $\alpha = 80^0$, $s = 9\,cm$.

36.* U kojoj točki i pod kojim kutem sijeku se linije

$$4x^2 - 3y^2 = 36 \text{ i } 2x - 3y = 12?$$

37. Mogu li zajedno postojati jednadžbe

$$6x + 7y = 79,$$
$$3x - 2y = 1,$$
$$12x + 5y = 95?$$

Neka se rezultat geometrijski objasni.

38.* Kroz n godina ulaže neko krajem prvoga polugodišta r *K*, a krajem drugoga s *K* na složene kamate uz $p^0/_0$. Koju konačnu vrijednost imadu sve te uplate na kraju n-te godine, ako je ukamaćivanje polugodišnje?

39.* Kolika je površina kružnog segmenta, ako je polumjer kruga $5\,cm$, a pripadni centrični kut 112^0.

40.* Za kuglasti balon od $12\,m$ promjera neka se izračuna uzgon u uzduhu od $15^0\,C$ i $730\,mm$ tlaka.

Naputak: Formula za težinu izvjesne množine uzduha glasi:

$$q = \frac{apv}{760\,(1 + \alpha t)}.$$

Tu je q težina u gramima, $a = 0{\cdot}001293\,g$, p je tlak (napetost) u mm, v volumen u cm^3, $\alpha = \frac{1}{273}$, a t temperatura u Celsijevim stupnjevima.

Rezultati: **35.** $O = 22\,\pi\,cm^2$, $V = \frac{4\pi}{3}\sqrt{77}\,cm^3$. **36.** $x_1 = \frac{15}{4}$, $y_1 = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{36}{11}$. **38.** $S = (rq + s)\,\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}$, gdje je $q = 1 + \frac{p}{200}$. **39.** $P = 11{\cdot}974\,cm^2$. **40.** Uzgon iznosi $1065\,kg$.

41. Dokaži ovaj stavak: Ako su u algebarskoj jednadžbi, na pr. u jednadžbi $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, koeficijenti (a, b, c, d) cijeli brojevi, onda je svaki cjelobrojni korijen jednadžbe djelilac poznatoga člana; a u ovom specijalnom slučaju djelilac od d.

Naputak. Označi li se korijen s m, tad je

$$(am^2 + bm + c)m = - d.$$

42.* Za jednadžbe

$a)$ $x^3 - 3x - 2 = 0$, X = -1

$b)$ $2x^3 + 4x^2 + x - 1 = 0$,

$c)$ $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$.

izračunaj s pomoću prethodnoga stavka najprije one korijene, koji su cijeli brojevi, a onda ostale.

Naputak. Djelioce poznatoga člana valja uzeti s pozitivnim i s negativnim znakom, pa istražiti, da li oni jednadžbu zadovoljavaju. Kad je nađen jedan korijen, treba jednadžbeni polinom podijeliti pripadnim korijenim faktorom i t. d.

43.* Kvadrat sa stranicom $a = 4\ cm$ baza je četverostrane piramide. Još su poznata tri pobočna brida $s_1 = 6\ cm$, $s_2 = 5\ cm$ i $s_3 = 4\ cm$. Neka se konstrukcijom i računom odredi visina piramide.

Naputak: Ako je $AS = s_1$, $BS = s_2$, $CS = s_3$, trokut ABS treba oko AB, a BCS oko BC preložiti u ravninu baze. Visine tih trokuta spuštene na AB i BC valja produžiti, dok se ne presijeku u točki P. Ta je točka projekcija vrha piramide u ravninu baze. Zašto?

44. U elipsu s poluosima a i b nek se upiše pravokutnik, komu je površina maksimum.

Naputak. Stranice pravokutnika imaju biti paralelne s osima. Ako su x i y koordinate vrha, koji leži u prvom kvadrantu, površina je pravokutnika

$$P = 4xy = \frac{4b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{4b}{a} \sqrt{a^2 x^2 - x^4}.$$

P ima maksimum za isto x kao i radikand $a^2x^2 - x^4$. Treba dakle odrediti maksimum izraza $u = a^2x^2 - x^4$.

Rezultati: **42.** $x_1 = x_2 = -1, x_3 = 2$. **43.** $h = \frac{1}{8} \sqrt{950}$.

45.* Nek se razriješe jednadžbe

$$x^2 + y^2 - 4\,x - 6\,y = 12,$$
$$x - 2\,y + 9 = 0.$$

Račun nek se objasni geometrijski i predoči crtežom.

46.* Nek se odrede ekstremne vrijednosti funkcije

$$y = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 12\,x + 6.$$

47. U trokutu ABC nek se odredi točka M iz koje se svaka stranica trokuta vidi pod kutom od 120^0.

Naputak: Nad svakom stranicom nacrta se istostrani trokut. Krugovi opisani oko tih trokuta sijeku se u točki M. Zadatak je moguć samo onda, kad je svaki kut trokuta manji od 120^0.

48. Neka se pokaže da su tangente, koje se iz ma koje točke direktrise mogu povući na parabolu, među sobom normalne.

49.* Izračunaj x i y iz jednadžbi

$$\sin x + \sin y = a,$$
$$\cos x + \cos y = b.$$

Na pr. $a = 1 \cdot 1428$, $b = 1 \cdot 6321$.

50.* Površina kružnog vijenca iznosi $100\,cm^2$, a širina $4\,cm$. Kolik je promjer vanjskog kruga?

51.* Šuplja kugla od željeza važe $14 \cdot 144\,kg$, a promjer je vanjske kugle $26\,cm$. Kolik je promjer nutarnje kugle? Za specifičnu težinu željeza neka se uzme $7\,2\,g$.

52.* U presjecima pravca $y = x + \frac{5}{2}$ i parabole $y^2 = 18\,x$ polože se tangente na parabolu. Neka se izračuna površina trokuta, što ga zatvoraju tangente i tetiva, što spaja dirališta.

---

53. Od glavnice c, koja je uložena uz $p^0/_0$ na složene kamate, vadi se kroz više godina, krajem svake godine, iznos r. Promjenu imovine predoči grafički.

Rezultati: **45.** $x_1 = -3$, $y_1 = 3$; $x_2 = 5$, $y_2 = 7$. **46.** Minimum za $x = 1$, maksimum za $x = -2$. **49.** Uz one specijalne vrijednosti dobije se $x = 40^0$, $y = 30^0$.

50. $2\,R = \frac{25}{\pi} + 4$. **51.** $2\,r = 24\,cm$. **52.** $P = 24$.

54. U ma kakvom četverokutu $ABCD$ povuci dijagonale i spoji raspolovišta suprotnih strana jedno s drugim, a tako isto i raspolovišta dijagonala. Dokaži analitički, da sve tri spojnice prolaze istom točkom S, te da se u njoj raspolovljuju. Što u mehanici znači točka S.

55. Iz točke O izlaze dužine OA i OB. Spusti li se iz A normala AB' na OB, a iz B normala BA' na OA, pravokutnik načinjen iz OA i OA' jednak je pravokutniku iz OB i OB'. Dokaz!

56.*
$$a\,(yz - zx - xy) = xyz,$$
$$b\,(zx - xy - yz) = xyz,$$
$$c\,(xy - yz - zx) = xyz.$$

57.* Dug od 12.000 K ima se platiti u dva jednaka obroka, od kojih prvi dospijeva iza 10 godina, a drugi 5 godina kasnije. Koliki je jedan obrok, ako se 5%-ne kamate na kraju godine pribijaju glavnici.

58.* U trokut s bazom $a = 10\,cm$ i visinom $v = 3\,cm$ ima se upisati pravokutnik, kojega površina iznosi $4{\cdot}8\,cm^2$. Uzima se da su kutovi uz bazu šiljati i da jedna strana pravokutnika pada u bazu trokuta.

59.* U trokut s bazom a i s visinom v ima se upisati pravokutnik, kojega je površina maksimum. Pretpostavke su iste kao u prethodnom zadatku.

60. Neko ima četiri različita odijela, koja se sastoje iz kaputa, prsluka i hlača. Na koliko se različitih načina može on obući?

61.* Jednadžbe $x^2\,(a^2 - e^2) + y^2\,a^2 = a^2\,(a^2 - e^2)$,
$$x^2\,(e^2 - a_1{}^2) - y^2\,a_1{}^2 = a^2\,(e^2 - a_1{}^2)$$

Rezultati: **56.** $x = -\dfrac{2\,b\,c}{b+c}$, $y = -\dfrac{2\,c\,a}{c+a}$, $z = -\dfrac{2\,a\,b}{a+b}$. **57.** $r = 10960\ K$. **58.** Baza pravokutnika iznosi 8 cm ili 2 cm. **59.** Traženi pravokutnik ima bazu $\dfrac{a}{2}$ i visinu $\dfrac{v}{2}$. **61.** Ako se postavi $a^2 - e^2 = b^2$ i $e^2 - a_1{}^2 = b_1{}^2$, onda je $x = \pm\dfrac{a\,a_1}{e}$, $y = \pm\dfrac{b\,b_1}{e}$. Četiri rješenja.

neka se razriješe po x i y. Kakvo se geometrijsko značenje može dati tome zadatku?

62.* U pravilnu četverostranu piramidu s osnovnim bridom $a = 10\,cm$ i pobočnim bridom $s = 13\,cm$ upisana je jedna kugla, a druga je oko nje opisana. Neka se izračunaju polumjeri r i R tih kugala.

63.* Staklenu ploču debelu 3 *mm* zgađa zraka svjetlosti pod kutem $\alpha = 50^0$. Ako je $n = 1{\cdot}6$ indeks loma za staklo, nek se izračuna paralelni pomak δ te zrake, kad prođe kroz staklo.

64.* Istostrani trokut ima vrhove $A\ (4a, -3a)$, $B\ (-4a, 3a)$ i $C\ (x, y)$. Izračunaj x i y.

65.* U aritmetičkom redu s početnim članom a prvi, četvrti i dvadeset i peti član čine geometrijski red. Kolika je diferencija onog aritmetičkoga reda?

66.* Pravilni deveterokut ima stranicu a. Kolike su mu dijagonale?

67.* Unutrašnji dio posude ima oblik prikraćenog stošca s visinom $H = 16\ cm$. Donja baza ima polumjer $r = 5\ cm$, a gornja $R = 9\ cm$. Posuda je do visine $h = 7\ cm$ napunjena vodom. Kad se u nju metne nekakvo tijelo nepravilna oblika, naraste voda do visine $h_1 = 11\ cm$ i sasvim pokrije to tijelo. Kolik je volumen tijela?

68.* Jednadžba krivulje glasi

$$y = x \pm \sqrt{2\,p\,x}.$$

a) Neka se konstruira nekoliko točaka te krivulje zbrajajući ili odbijajući ordinate linija $y_1 = x$ i $y_2 = \pm\sqrt{2\,p\,x}$, koje pri-

---

Rezultati: **62.** $r = \frac{5}{17}\sqrt{119}$, $R = \frac{169}{238}\sqrt{119}$. **63.** $\delta = 1{\cdot}25$ *mm* (skraćeno). **64.** Dva rješenja. **65.** $d = 2\,a$ ili $d = -\,\frac{19a}{8}$. **66.** $A_1 A_3 = 2\,r \sin 140^0$, $A_1 A_4 = 2\,r \sin 120^0$, $A_1 A_5 = 2r \sin 100^0$, $a = 2\,r \sin 20^0$, i t. d. **67.** $V = 661{\cdot}57\ cm^3$. **68.** *b)* Apscisi $x_1 = \frac{p}{2}$ pripadaju ordinate $y_1 = \frac{3\,p}{2}$ i $y_1' = -\,\frac{p}{2}$, i tangente $y = 2\,x + \frac{p}{2}$ i $y = -\,\frac{p}{2}$.

padaju istoj apscisi (na pr. $x = 0, \frac{p}{2}, p, 2p, 3p, \ldots$), i onda približno odredi tok te krivulje (parabola).

b) Kako glase jednadžbe tangenata, kojima dirališta imadu apscise $x_1 = \frac{p}{2}$ i $x_2 = 2p$? Tangente neka se konstruiraju.

69.* Glavnica od $1000\,K$ uložena je 5 godina na složene kamate uz 4%. Izračunaj konačnu vrijednost, ako se kamate pribijaju glavnici *a)* godišnje, *b)* polugodišnje, *c)* četvrtgodišnje, *d)* mjesečno.

70.* Neka se odredi konačna vrijednost glavnice u zadatku 69. uzimajući neprekidno ukamaćivanje.

71.* Oko kruga s polumjerom $r = 5\,cm$ opisan je istokračan trapez, komu je jedna baza $a = 12\ cm$. Nek se izračuna opseg i površina trapeza.

72.* Oko kugle s polumjerom $r = 5\ cm$ opisana je pravilna četverostrana prikraćena piramida, kod koje stranica jedne baze iznosi $a = 12\ cm$. Nek se izračuna oplošje i volumen prikraćene piramide.

73.
$$x : y : z = a : b : c,$$
$$m\,x + n\,y + p\,z = q.$$

Nek se izračuna x, y i z.

Naputak: Postavi se $x = \lambda\, a$, $y = \lambda\, b$ i t. d.

74.* U gramofonsku je ploču utisnuta neka pjesma na spirali sa 230 jednako razmaknutih zavoja. Kolika je dužina spirale, ako je dijametar najširega zavoja 240 *mm*, a najužega 121 *mm*?

Naputak: Kod računanja neka se spirala zamijeni s 230 koncentričnih krugova.

75.* Kup pijeska ima za bazu pravokutnik 4 *m* dug, a 1·5 *m* širok; uzdužne pobočke istokračni su trapezi, kojima je kraća

---

Rezultati: **69.** *a)* 1216·7 *K*, *b)* 1219·0 *K*, *c)* 1220·2 *K*, *d)* 1220·6 *K*. **70.** 1221·4 *K*. **71.** $o = 2\,a + \frac{8\,r^2}{a}$, $p = \frac{o}{2} . r$. **72.** $O = 2\,a^2 + 8\,r^2 + \frac{32\,r^4}{a^2}$, $V = O . \frac{r}{3}$. **74.** $x = 130\ m$. **75.** $V = 1{\cdot}19\ m^3$.

paralelna stranica duga 3 *m*, a svaki krak 1 *m*. Druge dvije pobočke istokračni su trokuti. Nek se nacrta tlocrt i nacrt toga kupa i odredi njegov volumen.

76. Iz formule za vrijeme njihaja matematičkog njihala i iz formule

$$g = 9{\cdot}78103\,(1 + 0{\cdot}0051178 \sin^2 \varphi),$$

kojom je akceleracija teže u nivou mora izražena kao funkcija geografske širine φ, neka se izračuna dužina sekundnog njihala za Zagreb ($\varphi = 45^0\ 48'\ 45''$).

77.* Među brojeve $\frac{3}{4}$ i $8\frac{1}{4}$ neka se interpolira aritmetički red, u kom kao član dolazi broj $4\frac{3}{4}$.

78.* Neko hoće da izmjeri visinu valjkastog tornja mjereći kutove iz točke A, koja s podnožjem tornja leži u istoj horizontalnoj ravnini. Udaljenost te točke od tornja nije poznata. S jednog prozora tornja spusti se mjeraća vrpca duga 4 *m*, pa se iz točke A izmjeri kut elevacije donjeg i gornjeg kraja vrpce ($\alpha = 18^0$, $\beta = 26^0\ 30'$), kao i kut elevacije najviše točke na tornju ($\gamma = 37^0\ 30'$), koja se s onom vrpcom nalazi u istoj vertikali. Kolika je visina tornja uzeta po toj vertikali?

79. Izvedi analitičkom geometrijom da se tri visine svakog trokuta sijeku u jednoj točki.

80.* 1 *kg* olova ugrijana na $100^0\ C$ uroni se u 5 *kg* vode, kojoj je temperatura 15^0. Koju će temperaturu poprimiti konačno oba tijela, ako se na okolinu ne izgubi ništa topline. Specifična toplina olova = 0·0314 kalorija.

81.* Zajam od 250.000 *K* ima se za 30 godina otplatiti obročnim otplatama, koje dospijevaju na kraju svake godine i od godine u godinu rastu za 2%. Kolik je prvi, a kolik je posljednji obrok? $p = 4\%$.

Rezultati: **77.** Diferencija interpoliranoga reda može biti koji od brojeva $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots$ **78.** $v = 17{\cdot}67\ m$. **80.** $15{\cdot}53^0\ C$. **81.** $r_1 = 11325\ K$, $r_{30} = 20111\ K$.

82.* Neka se razriješi deltoid, ako je dana jedna stranica i kutovi, koji leže na simetrali. Na pr. $a = 25\ cm$, $\beta = 89^0\ 29'\ 28''$, $\delta = 122^0\ 16'\ 12''$.

Naputak: Izračunaj najprije druga dva kuta.

83.* Zadan je radijus kugle r. Neka se izračuna visina kuglinog segmenta, čija se površina (uračunavši i osnovni krug) prema površini cijele kugle odnosi kao $m : n$.

84.* Pod kojim se kutem elevacije α mora iz točke A izbaciti projektil s početnom brzinom c, ako ima zgoditi točku B, koja od A u horizontalnom smjeru ima udaljenost x_1, i za y_1 više leži od A. Na pr. $c = \frac{1}{2}\ km$, $x_1 = 5\ km$, $y_1 = \frac{1}{4}\ km$, $g = 0{\cdot}0098\ km$.

Naputak. Izvedi jednadžbu trajektorije u zgodno odabranom koordinatnom sustavu, supstituiraj koordinate točke B (zašto?) i razriješi na to kvadratnu jednadžbu s obzirom na nepoznanicu tg α.

85.* Trapez sa stranicama a, b, c, d, od kojih je $a \parallel c$, ima se paralelom prema a rastaviti u dva trapeza, koji imadu *a)* isti opseg, *b)* istu površinu. U oba slučaja nek se izvede konstrukcija.

86. Oko kugle opisan je upravan prikraćen stožac. Dokaži da je njegov volumen jednak njegovoj površini pomnoženoj s trećinom polumjera kugle.

87. Nek se odredi geometrijsko mjesto svih točaka M, za koje je omjer udaljenosti od dvije čvrste točke A i B konstantan.

Naputak: Čvrste točke neka su $A\ (a, 0)$, $B\ (-a, 0)$, a omjer $AM : BM = k$.

88.* Jednadžba krivulje glasi $y = 4\,x^3 - x^2 - 4\,x + 1$. Nek se odrede *a)* presjeci s osima, *b)* ekstremne vrijednosti ordinate.

Rezultati: **82.** $b = a$, $c = d = 20{\cdot}095\ cm$. **83.** $v = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m}{n}}\right) 2\,r$. **84.** $\alpha_1 = 84^0\ 19'\ 11''$, $\alpha_2 = 8^0\ 32'\ 30''$. **85.** *a)* Ako se dio stranice b, koji leži uz a označi s x, onda je $x = \frac{(b + c + d - a)\,d}{2\,(b + d)}$. **88.** *b)* Maksimum kod $x = -\frac{1}{2}$, a minimum kod $x = \frac{2}{3}$.

Naputak za *a)*: Jednadžba se može svesti na oblik $y = (x^2 - 1)(4x - 1)$.

89. Koliko se vode od 90^0 *C* mora pomiješati sa 160 litara vode od 15^0 *C*, i 44 litre vode od 40^0 *C*, ako smjesa treba da dobije temperaturu od 30^0 *C*?

90.* U pravokutnom koordinatnom sustavu ima četverokut vrhove $A(-1, 2)$, $B(2, -1)$, $C(5, 3)$, $D(1, 6)$. Neka se odrede koordinate težišta toga četverokuta.

Naputak: Najprije se moraju odrediti koordinate težišta S_1 i S_2 trokutova ABC i ACD, koji imadu površine P_1 i P_2. Dužina $S_1 S_2$ razdijeli se na to u omjeru $P_2 : P_1$; djelište je traženo težište.

91.* Valjkasti trupac od 48 *cm* promjera, kad se po dužini položi u vodu od 4^0 *C*, potone 29 *cm* duboko. Kolika je specifična težina drveta?

92.* Pod kojim kutom upada α mora zraka svjetlosti prijeći iz zraka u staklo, *a)* ako kut upada ima biti dvaput tolik kao kut loma, *b)* ako uklon zrake uslijed loma ima iznositi $\delta = 10^0$? Indeks loma n neka je $= 1{\cdot}6$.

93. Jednadžba

$$x^4 + x^3 + x + 1 = 0$$

nek se razriješi, i to *a)* kao recipročna jednadžba, *b)* rastavljanjem jednadžbenog polinoma u faktore.

94.* Olovna kocka pretali se u oblik kugle. Kolik je promjer kugle, ako je kocka imala brid od 12 *cm*, a kod taljenja se izgubilo $1{\cdot}2\ {}^0/_0$ olova?

95.* Sila od 12 *kg* nek se rastavi na dvije jednake komponente q, kojih smjerovi zatvoraju kut $\alpha = 136^0$. Kolik je q?

96.* Tangenta parabole $y^2 = 2px$ ima jednadžbu $2x - 3y + 6 = 0$. Kolik je p i koliko je dirалište udaljeno od fokusa parabole.

97.* Koji brojevi imadu aritmetičku sredinu a i geometrijsku sredinu b? Na pr. $a = 13$, $b = 12$.

Rezultati: **90.** $x = \frac{236}{129}, y = \frac{326}{129}$ **91.** $s = 0{\cdot}63$. **92.** *b)* $\alpha = 25^0\ 45'\ 44''$. **94.** $d = 148$ *mm*. **95.** $q = 16{\cdot}017$ *kg*. **96.** $p = \frac{8}{3}$, $FM_1 = \frac{13}{3}$ **97.** 18 i 8.

98.* Komad od 20 K sastoji se iz slitine zlata sa bakrom. Čistina mu je 0·9, a težina 6·775 g. *a)* Kolika je specifična težina slitine? *b)* Koliko taj novac izgubi na težini u čistoj vodi od 4^0 C? Specifična je težina zlata 19·3 g, a bakra 7·8 g.

99.* *a)* Kod austrijske puške od god. 1895. projektil važe 15·8 g, a brzina kod izlaza iz cijevi iznosi 620 m. Kolika je živa sila projektila u tom času?

b) Isti zadatak za njemačku pušku od god. 1898., kod koje projektil važe 10 g, a brzina kod izlaza iz cijevi iznosi 900 m.

100.* U kojim točkama i pod kojim kutovima sijeku se linije

$$y = x^2 \text{ i } y = 3x - 2?$$

101. Neodređena jednadžba prvoga stepena ima rješenja

$$x_1 = 2,\ y_1 = 3 \text{ i } x_2 = 4,\ y_2 = 1.$$

a) Koja još druga rješenja u pozitivnim cijelim brojevima ima ta jednadžba? *b)* Kako se taj zadatak može geometrijski interpretirati?

102.* Kugla polumjera r pliva na čistoj vodi, koja ima temperaturu 4^0 C. Specifičnu težinu s kugle predoči kao funkciju dubljine h, do koje kugla roni u vodu i unesi u tablicu vrijednosti od s, koje pripadaju vrijednostima $h = 0·1\,r$, $0·2\,r, \ldots$ $1·9\,r$. Kako se može ta tablica primijeniti, da se približno odredi h, kad je s dano numerički.

103.* Trokut sa stranicama a, b, c pretvori se u istokračan trokut sa stranicama a, x, x. Odredi x konstrukcijom i računom. Na pr. $a = 7$ cm, $b = 9$ cm, $c = 4$ cm.

104.* U horizontalnoj ravnini povučen je pravokutan koordinatni sustav, a u točkama (0, 0) i (c, 0) postavljeni su vertikalni stupovi od visine a i b. Neka se odredi geometrijsko mjesto točaka u ravnini, iz kojih se vršci tih stupova vide pod istim

---

Rezultati: **98.** *a)* 16·82 g, *b)* 0·403 g. **99.** *a)* 310 mkg, *b)* 413 mkg. **100.** $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{13}$. **102.** Vrijednostima $h = 0·1\,r$, $h = 0·2\,r \ldots h = 1·9\,r$ odgovaraju vrijednosti $s = 0·007, 0·028, \ldots 0·993$. **103.** $x = 5·19$ cm. **104.** To je geometrijsko mjesto krug. Zarad kratkoće postavi

$$a - h = a_1,\quad b - h = b_1.$$

kutovima, ako se oko motrioca nalazi u visini h iznad ravnine. Na pr. $c = 20\,m$, $a = 13{\cdot}5\,m$, $b = 9{\cdot}5\,m$, $h = 1{\cdot}5\,m$.

105. Razriješi ove jednadžbe:

$$x^3 + y^3 = 1674,\ xy = 77.$$

106.* Oko kugle s polumjerom r ima se opisati upravan stožac, koga je volumen jednak trostrukom volumenu kugle. Neka se izračuna radijus x baze toga stošca i njegova visina y.

107.* Poznata je početna brzina projektila i najveća visina h nad horizontalnom ravninom, do koje projektil dopre. Neka se izračuna daljina w hica, ako se otpor uzduha ne uzme u obzir. Na pr. $h = 1{\cdot}75\,m$ i *a)* $c = 620\,m$ (austrijska puška), *b)* $c = 900\,m$ (njemačka puška).

108. Potraži geometrijsko mjesto točaka, za koje je produkt udaljenosti od pravaca

$$y = mx \text{ i } y = -mx$$

konstantan, na pr. $= a^2$.

109.* Neka se konstante a, b, c, d odrede tako da krivulja

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

prođe točkama $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 5)$.

110.* Poznate su paralelne stranice trapeza $a = 6$, $c = 4$ i visina $h = 3$. Paralelom prema bazi ima se taj trapez razdijeliti u dva trapeza iste površine. Kolike su visine tih trapeza?

Naputak. Označe li se s x i y visine dobivenih trapeza, a dužina one paralele s m, tad je

$$(a - m) : (m - c) = x : y,$$
$$(a + m)\,x = (m + c)\,y,$$

i otud treba najprije odrediti m.

111. Cilindrična posuda, koja je gore otvorena, treba da ima zadani volumen. Kako se mora odrediti radijus baze i visina, da površina posude bude što manja?

Rezultati: **106.** Dva rješenja. $x_{1,2} = r\sqrt{3 \pm \sqrt{3}}$, $y_{1,2} = 2r\,(3 \mp \sqrt{3})$. **107.** $w = 2\sqrt{\frac{2h}{g}\,(c^2 - 2gh)}$.
109. $y = \frac{13}{24}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{29}{12}x + 1$. **110.** $x = 1{\cdot}353$, $y = 1{\cdot}647$.

112. Iz uspravnog stošca s visinom v i s polumjerom baze r, neka se izreže valjak sa što većim obujmom.

Naputak. Obujam valjka izrazi kao funkciju polumjera x njegove baze. Izađe $x = \frac{2r}{3}$.

113.
$$x^2 + y^2 = 25,$$
$$x^2 + y^2 + x - 7y = 0.$$
Iz tih jednadžbi odredi x i y, pa odredi geometrijsko značenje toga rješenja. Nek se izvede i crtež.

114. Nek se dokaže stavak: Površine dvaju poligona opisanih oko istog kruga, odnose se kao njihovi opsezi. Kako glasi analogni poučak u stereometriji?

115.* Mjehur iz sapunice napunjen vodikom ima oblik kugle, te slobodno lebdi u uzduhu. Polumjer vanjske površine neka je r. Ima se izračunati debljina x tog mjehura, ako je dano s_0, s i σ t. j. specifična težina sapunice, uzduha i vodika. Na pr. $r = 6\,cm$, $s_0 = 1\,g$, $s = 0{\cdot}001293\,g$, $\sigma = 0{\cdot}0000896\,g$.

Naputak. Kako je x vanredno malen, da bude jednostavnije, mogu se više potencije od x zanemariti s obzirom na prvu, a x samo može se zanemariti prema jedinici. Tako se može uzeti, da sapunica zauzima prostor $= 4\,\pi\,r^2\,x$, dok je volumen vodika $= \frac{4\,\pi r^3}{3}$.

116.* Četverokut ima vrhove $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$. Povucimo $OM \parallel AC$ i učinimo podjedno $OM = AC$, a zatim $ON \parallel BD$ i podjedno $ON = BD$. *a)* Neka se izračunaju koordinate točaka M i N. *b)* Zašto je trokut OMN jednak četverokutu $ABCD$? *c)* Kako glasi formula za površinu trokuta OMN, dakle i četverokuta $ABCD$?

117.* Izračunaj x i y iz jednadžbi
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{c}{2}, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{2}{c}.$$

Rezultati: **115.** $x = 0{\cdot}024\ mm$. **116.** *a)* $M\,(x_3 - x_1,\ y_3 - y_1)$, $N\,(x_4 - x_2,\ y_4 - y_2)$. **117.** $x_1 = \frac{ac}{4}\,(1 + i\sqrt{3})$, $y_1 = \frac{bc}{4}\,(1 - i\sqrt{3})$; $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$.

118.* Nacrtaj krug s polumjerom od 4 *cm* i razdijeli ga s pomoću transporteura u 6 sektora, kojih se površine odnose kao površine pet dijelova svijeta, oceanskih otoka i polarnih krajeva. Izraze li se površine u milijunima kvadratnih kilometara, onda ima Europa površinu 9·73, Azija 44·14, Afrika 29·21, Amerika 38·33, Australija 7·70, a oceanski otoci i polarni krajevi 6·38.

a) Koliki su pripadni centrični kutovi izraženi u stupnjevima i u desetinama stupnjeva? *b)* Čemu služi takva slika?

119.* Pravilnom oktaedru upisana je kocka tako, da su njeni uglovi središta oktaedrovih pobočaka. Kako se odnose volumeni tih dvaju tijela?

120.* Upravan stožac određen je visinom v i stranicom s. Neka se odredi parametar one parabole, u kojoj stožac presijeca ona ravnina, koja je paralelna s jednom stranicom stošca, a njegovu visinu zgađa u udaljenosti d od vrha.

121.* Da se odredi početna brzina taneta, upotrebljava se *balističko njihalo.* To je kakva teška masa (na pr. sanduk napunjen pijeskom), koja je obješena poput njihala. Zarad određivanja brzine izmjeri se kut, za koji se njihalo ukloni iz položaja ravnotežja, kad se u nj zabuši tane opaljeno iz neposredne blizine. Označimo li s m_1 masu taneta, s v_1 njegovu početnu brzinu, s m_2 masu balističkog njihala, s v_2 njegovu početnu brzinu prouzročenu hicem, a s α uklon njihala, onda se ima izračunati v_1, ako je poznato m_1, m_2 i α.

122.* Površina je pravilnoga 54-kuta = 78·363 cm^2. Kolik je polumjer opisanog kruga?

123.* Zadane su točke A (2, 1), B (3, 4). Koje koordinate

Rezultati: **118.** *a)* Centrični su kutovi po redu: 25·9°, 117·3° i t. d. **119.** $V_8 : V_6 = 9 : 2$. **120.** $p = \frac{d}{vs}(s^2 - v^2)$. **121.** Po zakonu o uzdržavanju gibanja težišta dobije se $v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2$, a po principu o uzdržavanju radnje izlazi $v_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}$, gdje l znači reduciranu dužinu njihala. **122.** $r = 5$ *cm.* **123.** Dva rješenja. Jedno je C_1 (0, 5), D_1 (— 1, 2).

imadu točke C i D, ako je $ABCD$ kvadrat? Zarad kontrole izvedi crtež na milimetarskom papiru.

124.* Pod kojim kutom prema horizontalnoj ravnini ima se ispaliti granata s početnom brzinom $c = 500\ m$, ako ona ima da udari u mjesto, koje leži niže za 46 m, a u horizontalnom je pravcu udaljeno $6{\cdot}5\ km$? Otpor uzduha ne uzima se u račun.

125.* Nek se u metarkilogramima odredi živa sila reperkusije puške, ako je dana težina puške p_1, težina taneta p_2 i njegova početna brzina c_2. Na pr. $p_1 = 4{\cdot}49\ kg$, $p_2 = 15{\cdot}8\ g$, $c_2 = 620\ m$.

Naputak: Najprije se izračuna brzina c_1, što je puška dobije uslijed reperkusije, i to po principu o uzdržavanju gibanja težišta.

126.* Trokut sa stranicom $a = 5\ cm$ i prileglim kutovima $\beta = 70^0$ i $\gamma = 49^0$ ima se pretvoriti u istokračan trokut s bazom a.

Kolik je krak? Za kontrolu rezultata neka se izvede točan crtež.

127.* Dva jednaka kruga s polumjerom r postave se jedan na drugi tako, da središte jednoga pane na periferiju drugoga. *a)* Pod kojim kutovima sijeku se oni? *b)* Kolika je površina što je oba kruga prekrivaju?

128.* Koliko bi vremena morala biti uložena 1 K uz $5^1/_2\%$ i uz polugodišnje kapitaliziranje, da naraste na $13{\cdot}2$ milijarda K? (To je ukupni iznos od 3 austro-ugarska ratna zajma u godinama 1914 i 1915.)

129.* $x^{\log x} = 5.$

130.* Kružni segment određen je pripadnom tetivom $s = 8\ cm$ i strjelicom $h = 2\ cm$ (t. j. razmakom sredine luka od tetive). Neka se izračuna površina kružnog segmenta.

131.* Zbirna leća ima daljinu fokusa f. U kojoj udaljenosti

Rezultati: **124.** $\alpha_1 = 6^0\ 36'$, $\alpha_2 = 82^0\ 38'$. **125.** $1{\cdot}09\ mkg$. **126.** $4{\cdot}76\ cm$. **127.** *b)* $r^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **128.** $429\ \frac{1}{2}$ godina. **129.** $x_1 = 6{\cdot}856$, $x_2 = 0{\cdot}146$. **130.** $P = 11{\cdot}183\ cm^2$. **131.** $x = 2f$.

x od optičkog središta leće ima se postaviti predmet, ako udaljenost slike od predmeta ima biti što manja?

132.* U točki O kose ravnine ispali se tane s početnom brzinom c pod kutem α prema horizontalnoj ravnini. Ako prerez vertikalne ravnine, u kojoj se giba tane i one kose ravnine, zatvora kut β s horizontalnom ravninom, onda *a)* za točku A, u kojoj tane zgađa kosu ravninu, ima se izračunati udaljenost od O, *b)* ima se odrediti ona vrijednost od α, uz koju je OA maksimum. Neka se uzme $\beta > 0$.

133. Iz jednadžbi

$$x + y = u, \quad x^2 + y^2 = v, \quad x^3 + y^3 = w$$

imaju se eliminirati x i y.

134.* Segment kugle ima istu ukupnu površinu kao i najveći krug pripadne kugle. Volumen kuglinog segmenta neka se odredi kao funkcija polumjera kugle r.

135.* Dvije električne svjetiljke udaljene su jedna od druge $40\,m$, a njihove jakosti odnose se kao $1 : 2$. *a)* U kojoj točki spojnice obiju lampa (koje zamišljamo kao točke), osvjetljuju te dvije lampe neko tijelo podjednako? *b)* Na kom je mjestu zbroj jakosti svjetlosti tih dviju lampa minimum?

136. Dokaži stavak: Trokut omeđen asimptotama i ma kojom tangentom hiperbole ima stalnu površinu.

---

137. Izračunaj x iz jednadžbe

$$\sqrt{4x - 9} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 6},$$

pa učini pokus.

Rezultati: **132.** *a)* $OA = \frac{2c^2}{g} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)\cos\alpha}{\cos\beta}$. *b)* Svede li se $2\sin(\alpha - \beta)\cos\alpha$ na oblik $\sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta$, tad se bez daljeg računa razbira, da $\sin(2\alpha - \beta)$ mora bit što veći, dakle $= 1$. **134.** $V = \pi\left(\sqrt{3} - \frac{3}{5}\right) r^3$. **135.** Broje li se udaljenosti od slabije lampe i uzme li se smjer prema jačoj lampi kao pozitivan, onda je *a)* $x_1 = 16{\cdot}57\ m$, $x_2 = -96{\cdot}57\ m$; *b)* $x_m = 17{\cdot}70\ m$.

138.* Dva kruga s polumjerima R i r dotiču se izvana. Izračunaj površinu omeđenu tim krugovima i jednom njihovom zajedničkom vanjskom tangentom. Na pr. $R = 12\ cm$, $r = 4\ cm$.

139*. Šuplja kugla iz bakra važe na zraku $4{\cdot}661\ kg$, a pod vodom $4{\cdot}189\ kg$. Neka se izračuna vanjski polumjer i debljina stijena šuplje kugle. Specifična težina bakra $7{\cdot}8\ g$.

140.* Aeroplan A leti brzinom c u visini h iznad horizontalne ravnine. U času kad se on nalazi vertikalno iznad točke B te ravnine, pusti se iz njega bomba prosto da pada, i ona zgodi ravninu u točki C. *a)* Kolik je BC? *b)* Koji je smjer pravca BC? *c)* Kolik je kut BAC? (Računi neka se izvedu bez obzira na otpor uzduha).

Na pr. $h = 1000\ m$, $c) = 16\ m$ (u sekundi).

141. Troznamenkast broj ima sumu znamenaka 14 i naraste za 171 kad se znamenka jedinica stavi pred druge dvije. Koji je to broj?

142.* Kosa ravnina dužine l ima se tako namjestiti, da se kugla koju s gornjeg kraja pustimo da se kotrlja, što većom brzinom u horizontalnoj ravnini dalje giba. Koji se prikloni kut mora dati kosini? Otpori proti gibanju ne trebaju se uzeti u račun.

143.* Neka se odredi *a)* konstrukcijom, *b)* računom položaj točke, kojoj se udaljenosti od stranica danoga trokuta odnose kao $u : v : w$. U ovom drugom slučaju neka se radi s pomoću analitičke geometrije, pa neka se kod toga uzme, da su jednadžbe pravaca, na kojima leže stranice trokuta, dane u normalnom obliku.

Rezultati: **138.** $P = \left(64\sqrt{3} - \frac{88\pi}{3}\right) cm^2$. **139.** $2R = 20 cm$, $d = 5 mm$. **140.** *a)* $BC = c\sqrt{\frac{2h}{g}}$, *c)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{gh}}$. **142.** $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **143.** *b)* Ako se jednadžbe triju pravaca označe zarad kratkoće sa $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, onda se x i y imadu izračunati iz jednadžbi $\frac{p_1}{u} = \frac{p_2}{v} = \frac{p_3}{w}$.

144.* Iz točke A na nekoj uzvisini bačene su dvije mase u istoj vertikalnoj ravnini, na istu stranu i s istom početnom brzinom c, no pod različitim kutovima α i β prema horizontalnoj ravnini. Neka se odredi položaj točke B, u kojoj se te dvije trajektorije sijeku, i neka se nađe uvjet za to, da B leži u istoj visini kao i A, te niže ili više od njega.

Rezultati: **144.** Točka B ima koordinate

$$x_1 = \frac{2c^2 \cos\alpha \cos\beta}{g \sin(\alpha+\beta)}, \quad y_1 = -\frac{2c^2 \cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha+\beta)}{g \sin^2(\alpha+\beta)}.$$