УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Младен Зекић

БИПРОИЗВОДИ У МОНОИДАЛНИМ КАТЕГОРИЈАМА

докторска дисертација

Београд, 2021.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Mladen Zekić

BIPRODUCTS IN MONOIDAL CATEGORIES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2021.

Ментор:

др Зоран Петрић, научни саветник
Математички институт САНУ

Чланови комисије:

др Ђорђе Баралић, виши научни сарадник
Математичи институт САНУ

др Раде Живаљевић, научни саветник
Математички институт САНУ

др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Зоран Петрић, научни саветник
Математички институт САНУ

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

Датум одбране: ______________________

Захвалница

Захваљујем се ментору, професору Зорану Петрићу на предложеној теми, као и на константној помоћи и усмјеравању током писања ове тезе. Посебно му захваљујем на људскости, подршци и разумијевању. Јован Цвијић је сматрао да наставник, осим тога што ученицима преноси знање, треба и као човјек да им буде узор. Професор Петрић је управо такав ментор.

Такође, захваљујем се члановима комисије који су пажљиво прегледали овај текст и својим вриједним савјетима и коментарима допринијели да се он унаприједи и употпуни. Посебно се захваљујем Ђорђу Баралићу, на чији приједлог су на крају рада додати прилози који могу помоћи читаоцу да се лакше снађе међу многобројним класама категорија поменутих у тези.

Желим такође да се захвалим професору Сергеју Владимировичу Соловјову на брзим и детаљним одговорима на моја питања, који су ми помогли да боље разумијем одређене дијелове рада [30].

Посебно се захваљујем куму Велибору Бојковићу који је стрпљиво читао дијелове ове тезе, иако она не припада његовој области истраживања, и дао драгоцјене савјете и сугестије.

На крају, велику захвалност дугујем својој породици и пријатељима, који су својим стрпљењем, подршком и позитивном енергијом допринијели реализацији овог рада.

Наслов дисертације: Бипроизводи у моноидалним категоријама

Резиме: Централно мјесто у овој дисертацији заузимају резултати кохеренције за одређене типове затворених категорија. Резултати кохеренције у теорији категорија обично служе да обезбиједе једноставан поступак одлучивости за једнакост стрелица у некој категорији. Приступ кохеренцији кога ћемо се овдје придржавати подразумијева постојање вјерног функтора из слободно генерисане категорије $\mathcal{A}$ извјесног типа у категорију $\mathcal{B}$ која омогућава лакшу провјеру једнакости стрелица. Категорија $\mathcal{B}$, која је истог типа као и $\mathcal{A}$, обично представља формализацију одређеног графичког језика.

Поред кохеренције, други најважнији појам којим се бавимо у дисертацији је бипроизвод. Појам бипроизвода у категорији обједињује појмове копроизвода и производа. Главни резултати у овој тези су теореме кохеренције за три типа затворених категорија са бипроизводима – симетричне моноидално затворене катеогорије са бипроизводима, компактно затворене категорије са бипроизводима и компактно затворене категорије са инволуцијом и бипроизводима.

Осим тога, у тези је изложен нови доказ познате Кели-Меклејнове теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије. Методе које користимо у том доказу су у потпуности доказно-теоретске, а један од кључних елемената у њему је теорема о елиминацији сјечења. У свим наведеним резултатима кохеренције графички језик је заснован на категорији једнодимензионалних кобордизама.

Коначно, у тези дајемо одређене критеријуме за постајање бипроизвода у моноидалним категоријама. Притом се ослањамо на недавно истраживање које карактерише извјесни тип моноидалних категорија са коначним бипроизводима користећи постојање десних дуала одређених истакнутих објеката. Наши критеријуми представљају уопштење овог резултата.

Кључне речи: кохеренција, симетрична моноидално затворена категорија, компактно затворена категорија, категорија са инволуцијом, еквиваленција доказа, кобордизам

Научна област: Математика

Ужа научна област: Теорија категорија, Категоријална теорија доказа

Dissertation title: Biproducts in monoidal categories

Abstract: Central place in this thesis occupy the coherence results for certain types of closed categories. Coherence results in category theory usually serve to provide a simple decision procedure for equality of arrows in some category. The approach to coherence that we follow here implies the existence of a faithfull functor from a freely generated category $\mathcal{A}$ of certain type to the category $\mathcal{B}$ in which an equality of arrows can be easily checked. Category $\mathcal{B}$, which is of the same type as $\mathcal{A}$, usually represents formalisation of some graphical language.

Besides coherence, the second most important notion we consider in this thesis is the biproduct. The notion of biproduct in a category incorporates notions of coproduct and product. The main results in this thesis are coherence theorems for three types of closed categories with biproducts – symmetric monoidal closed categories with biproducts, compact closed categories with biproducts and dagger compact closed categories with dagger biproducts.

Further, we present a new proof of the well-known Kelly-Mac Lane coherence theorem for symmetric monoidal closed categories. The methods we use in that proof are completely proof-theoretical, and one of the key elements in it is the cut-elimination theorem. In all the above coherence results, the graphical language is based on the category of one-dimensional cobordisms.

Finaly, we give certain criteria for existence of biproducts in monoidal categories. In this regard, we rely on recent research that characterizes certain type of monoidal categories with finite biproducts by using the existence of right duals of some distinguished objects. Our criteria are a generalization of this result.

Keywords: coherence, symmetric monoidal closed category, compact closed category, dagger category, equivalence of proofs, cobordism

Research area: Mathematics

Research sub-area: Category theory, Categorial proof theory

Садржај

Увод

Мотивација за истраживање изложено у овој дисертацији долази из категоријалне теорије доказа. То је грана математике која се налази на граници између логике и теорије категорија. Зачетником категоријалне теорије доказа сматра се Јоаким Ламбек, који је први примијетио да се формални системи могу посматрати као категорије чији објекти су формуле, а стрелице докази (тачније, класе еквиваленције доказа), али и обрнуто – једнакосно дефинисане слободне категорије се могу посматрати као формални системи (в. [26]). Дакле, питање једнакости стрелица у категорији и питање еквиваленције доказа у одговарајућем формалном систему су два аспекта истог проблема. Ово нам омогућава да у теорији категорија користимо доказно-теоретске технике, и обрнуто.

Категоријална теорија доказа је блиско повезана са резултатима теорије категорија који се називају *теореме кохеренције*. У најширем смислу, резултати кохеренције се баве питањем комутирања дијаграма у одређеном типу категорија. Као појам теорије категорија, кохеренција се први пут помиње 1963. године у Меклејновом раду [29]. Резултат кохеренције у том раду каже да *сви* дијаграми састављени од канонских стрелица у моноидалној категорији комутирају. Међутим, ово није случај у категоријама са богатијом структуром, гдје резултати кохеренције обично служе да (ефикасно) опишу *који* дијаграми у тим категоријама комутирају. Резултати кохеренције (у одређеним типовима затворених категорија) заузумају централно мјесто у овој дисертацији.

Од појаве првобитног Меклејновог рада је доказано много резултата кохеренције, од којих су за потребе ове дисертације посебно значајна сљедећа два – кохеренција за симетричне моноидално затворене категорије (Кели-Меклејн, [21]) и кохеренција за компактно затворене категорије (Кели-Лаплаза, [22]). Такође, могуће примјене резултата кохеренције су пронађене у разним областима математике. Примјера ради, можемо их наћи у теорији категорија, [28, XI.3, Theorem 1], логици, [26, Proposition 4], теорији хомотопије, [3, Theorem 3.6], комбинаторици, [17, Theorem 2.5], [4, Theorem 5.2], нискодимензионалној топологији, [38, Theorem 2.5] и математичкој физици, [34].

Као што се може видјети из ових примјера, резултати кохеренције су формулисани на много различитих (често једва препознатљивих) начина. Ми ћемо се у овој дисертацији држати приступа кохеренцији који је установљен у [9]; наиме, кохеренција у теорији категорија одговара ономе што би се са логичке тачке гледишта назвало потпуношћу. Овај приступ потиче од Келијевог покушаја да појам кохеренције опише на универзални начин (в. [19, Одјељак 1.4]), што је даље развијено у [39], [36] и [37].

У складу са тим приступом, на страни синтаксе имамо слободно генерисану категорију $\mathcal{A}$, која је описана на одговарајућем језику и чији комутативни дијаграми су аксиоматски задати, док на страни семантике обично имамо неку врсту „графова" (графички језик), који могу бити формализовани као стрелице одређене категорије $\mathcal{B}$ која је „истог типа" као и $\mathcal{A}$. Тада, пратећи [9], кохеренција се може изједначити са вјерношћу функтора из $\mathcal{A}$ у $\mathcal{B}$, који постоји због тога што $\mathcal{B}$ припада класи у којој је категорија $\mathcal{A}$

слободна. Пошто се од таквог резултата очекује поступак одлучивости за проблем комутирања дијаграма, пожељно је да је тај проблем одлучив у $\mathcal{B}$, или бар да је комутативност дијаграма у $\mathcal{B}$ „лакша за разматрање” него у $\mathcal{A}$ (в. [9, Одјељак 1.1]). Примијетимо да је на овај начин остварена „природна или логична повезаност” између категорија $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, па се описани приступ појму кохеренције у потпуности слаже са значењем ријечи „кохеренција” у српском језику (в. [33]).

Дисертација је подијељена у четири главе. Прва глава служи да се уведу појмови теорије категорија неопходни за даље излагање. Посебна пажња је посвећена категорији 1-кобордизама који одговарају Кели-Меклејновим графовима коришћеним као графички језик за симетричне моноидално затворене категорије у поменутом раду [21]. У другој глави је изложен нови доказ теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије. Наш доказ је изведен по узору на доказе резултата кохеренције из [9]. Полази се од једнакосно дефинисане слободне симетричне моноидално затворене категорије, а затим се уводи њена *генценизација* – промјена језика која нам омогућава да докажемо теорему о елиминацији сјечења у тој категорији. Елиминација сјечења (која је присутна и у [21]), представља кључни елемент у нашем доказу.

За преостале двије главе кључан је појам бипроизвода. Бипроизвод у категорији обједињује својства копроизвода и производа. Основни примјери бипроизвода су дисјунктна унија скупова у категорији чији су објекти скупови, а стрелице релације, као и директна сума у категорији векторских простора над неким пољем, или општије, у категорији модула над неким прстеном. Са логичке тачке гледишта, бипроизводи представљају сажимање везника конјункције и дисјункције што има много нежељених посљедица ако се изучава само релација изводивости, али и даље категорије са бипроизводима могу бити веома интересантне приликом интерпретације извођења у конкретним математичким структурама.

Бипроизводи у категорији долазе у интеракцију са остатком структуре који она посједује. Најпростији случај је када се чиста моноидална структура комбинује са бипроизводима. На примјер, у хомолошкој алгебри, Абелове групе (посматране као модули над прстеном $\mathbb{Z}$) заједно са тензорским производом и директном сумом представљају једну моноидалну категорију са бипроизводима. Додатак симетрије, затворења, инволуције или компактне структуре отвара могућност истраживања различитих понашања бипроизвода у таквом амбијенту.

У трећој и четвртој глави разматра се управо интеракција бипроизвода са разним облицима моноидалних категорија. Главни резултат треће главе, која се заснива на раду [32], представљају теореме кохеренције за три типа затворених категорија са бипроизводима – симетричне моноидално затворене категорије са бипроизводима, компактно затворене категорије са бипроизводима и компактно затворене категорије са инволуцијом и бипроизводима. Ови резултати се природно ослањају на поменуте радове [21] и [22]. Затворене структуре са бипроизводима које разматрамо у овој глави су од посебног интереса за истраживаче који се баве квантним рачунарством (в. [1], [2], [35] и [14]). То отвара нове могућности примјене истраживања остварених у овој дисертацији.

Резултати неких скоријих истраживања дају одређене критеријуме постојања (коначних) бипроизвода у моноидалним категоријама (в. [15], [11]). Конкретно, аутори у [11] карактеришу извјесне моноидалне категорије са коначним бипроизводима као категорије у којима постоје десни дуали одређених истакнутих објеката. Четврта глава, која се заснива на раду [40], посвећена је давању нових, ослабљених критеријума. У једном од тих критеријума бавимо се постојањем произвољних (не нужно коначних) бипроизвода у моноидалним категоријама.

Глава 1

Основни појмови

У овој глави уводимо основне појмове теорије категорија који ће нам бити потребни у наставку. Категорији једнодимензионалних кобордизама као примјеру који ће бити од посебног значаја за остатак излагања посвећујемо посебан одјељак.

1.1 Категорије, функтори и природне трансформације

Дефиниција 1.1. *Кашегорија* $\mathcal{A}$ се састоји од *објекаша* (које означавамо са $A, B, C, \ldots$) и *сшрелица* (које означавамо са $f, g, h, \ldots$), при чему

- за сваку стрелицу f постоје објекти $\mathrm{dom}(f)$ и $\mathrm{cod}(f)$ које називамо *домен* и *кодомен* од f; запис $f : A \to B$ значи да је $A = \mathrm{dom}(f)$ и $B = \mathrm{cod}(f)$;
- за стрелице $f : A \to B$ и $g : B \to C$ ($\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$) постоји стрелица $g \circ f : A \to C$ коју називамо *комйозиција* стрелица f и g;
- за сваки објекат A постоји стрелица $\mathbb{1}_A : A \to A$ коју називамо *јединична сшрелица*;
- композиција је асоцијативна, то јест, важи $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ за све стрелице $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$;
- важи $f \circ \mathbb{1}_A = f = \mathbb{1}_B \circ f$ за сваку стрелцу $f : A \to B$.

Колекцију објеката категорије $\mathcal{A}$ означавамо са $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$, а колекцију стрелица са $\mathrm{arr}(\mathcal{A})$. За објекте A и B категорије $\mathcal{A}$, скуп свих стрелица из A у B означавамо са $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, или краће са $\mathcal{A}(A, B)$. Напоменимо да се стрелице често називају и *морфизми*.

Примјер 1.1. (1) **Set** је категорија чији су објекти скупови, а стрелице функције.

(2) **Set*** је категорија чији су објекти скупови са истакнутим елементом, а стрелице су функције које чувају истакнути елемент.

(3) **Rel** је категорија чији су објекти скупови, а стрелице бинарне релације. За релације $\rho \subseteq X \times Y$ и $\sigma \subseteq Y \times Z$ дефинишемо $\sigma \circ \rho \subseteq X \times Z$ као скуп свих уређених парова $(x, z) \in X \times Z$ за које постоји $y \in Y$ тако да важи $(x, y) \in \rho$ и $(y, z) \in \sigma$.

(4) **Cmd** је категорија чији објекти су комутативни моноиди, а стрелице хомоморфизми између њих.

(5) **Top** је категорија чији објекти су тополошки простори, а стрелице непрекидна пресликавања.

(6) $\mathbf{Vect}_K$ је категорија чији су објекти векторски простори над пољем K, а стрелице су линеарна пресликавања. Категорија $\mathbf{FinVect}_K$ је *пуна поткатегорија*[1] од $\mathbf{Vect}_K$, чији објекти су коначно-димензионални векторски простори над K.

(7) **Hilb** је категорија чији су објекти Хилбертови простори над пољем $\mathbb{C}$, а стрелице ограничена линеарна пресликавања. Категорија **FinHilb** је пуна поткатегорија од **Hilb**, чији објекти су коначно-димензионални Хилбертови простори над $\mathbb{C}$.

Дефиниција 1.2. *Функтор* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ између категорија $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ је пресликавање које слика објекте у објекте и стрелице у стрелице, при чему важи

- слика стрелице $f : A \to B$ је стрелица $F(f) : F(A) \to F(B)$;
- $F(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{F(A)}$;
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Производ категорија $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ је категорија $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, чији су објекти облика (A, B) за $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ и $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, а стрелице облика (f, g) за $f \in \mathrm{arr}(\mathcal{A})$ и $g \in \mathrm{arr}(\mathcal{B})$. Композиција је дефинисана по компонентама, а $\mathbb{1}_{(A,B)} = (\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$. Функтор чији је домен производ двије категорије називамо *бифунктор*. Кажемо да је функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *вјеран*, када за сваке двије стрелице $f, g : A \to B$ једнакост $F(f) = F(g)$ повлачи да је $f = g$. У наставку ћемо често изостављати заграде ако функтор има само један аргумент.

Дефиниција 1.3. Нека су $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ функтори. Природна трансформација $\varphi : F \stackrel{.}{\longrightarrow} G$ је фамилија стрелица $\{\varphi_A : FA \to GA \mid A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})\}$ таква да за сваку стрелицу $f : A \to B$ важи $\varphi_B \circ Ff = Gf \circ \varphi_A$, то јест, сљедећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\varphi_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

Стрелице φ_A за $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ називамо *компоненте* природне трансформације φ.

Дефиниција 1.4. *Адјункција* између категорија $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ је дата са два функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ и двије природне трансформације $\eta : \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \stackrel{.}{\longrightarrow} GF$ коју називамо *јединица* и $\varepsilon : FG \stackrel{.}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ коју називамо *којединица*, при чему за свако $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ и $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$ важи

$$G\varepsilon_B \circ \eta_{GB} = \mathbb{1}_{GB} \qquad \text{и} \qquad \varepsilon_{FA} \circ F\eta_A = \mathbb{1}_{FA}, \tag{1.1}$$

то јест, сљедећи дијаграми комутирају.

$$\begin{tikzcd} GB \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{GB}"'] & GFGB \arrow[d, "G\varepsilon_B"] \\ & GB \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{FA}"'] & FGFA \arrow[d, "\varepsilon_{FA}"] \\ & FA \end{tikzcd}$$

[1] Пуна поткатегорија категорије $\mathcal{A}$ се састоји од *неких* објеката категорије $\mathcal{A}$, али *свих* стрелица између тих објеката.

Једнакости (1.1) називамо *троугаоне једнакости*. Кажемо да је функтор F *лијеви адјункт* од G (функтор G је *десни адјункт* од F) и пишемо $F \dashv G$.

Дефиниција 1.5. Стрелицу $f : A \to B$ из $\mathcal{A}$ називамо *изоморфизам* ако постоји стрелица $g : B \to A$ из $\mathcal{A}$ таква да је

$$g \circ f = \mathbb{1}_A \quad \text{и} \quad f \circ g = \mathbb{1}_B.$$

Кажемо да су објекти A и B *изоморфни*, и пишемо $A \cong B$, ако постоји изоморфизам између њих.

1.2 Симетричне моноидално затворене категорије

1.2.1 Дефиниције и примјери

Дефиниција 1.6. *Моноидална категорија* је категорија $\mathcal{A}$ заједно са бифунктором $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ кога називамо *тензорски производ* и истакнутим објектом I кога називамо *јединични објекат*, таква да постоје природни изоморфизми са компонентама

$$\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C, \qquad \lambda_A : I \otimes A \to A, \qquad \rho_A : A \otimes I \to A,$$

при чему сљедећи дијаграми комутирају.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] \arrow[d, "\mathbb{1}_A \otimes \alpha_{B,C,D}"'] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha_{A,B,C} \otimes \mathbb{1}_D"']
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes B) \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A \otimes \lambda_B"'] & & (A \otimes I) \otimes B \arrow[dl, "\rho_A \otimes \mathbb{1}_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Кажемо да је моноидална категорија *стриктна* ако су све компоненте од α, λ и ρ јединичне стрелице. Експлицитно, у стриктној моноидалној категорији $\mathcal{A}$ важи

$$\begin{aligned} A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C, & \qquad A \otimes I &= A = I \otimes A, \\ f \otimes (g \otimes h) &= (f \otimes g) \otimes h, & f \otimes \mathbb{1}_I &= f = \mathbb{1}_I \otimes f, \end{aligned}$$

за све $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ и $f, g, h \in \mathrm{arr}(\mathcal{A})$.

Дефиниција 1.7. Уз нотацију као у дефиницији 1.6, кажемо да је моноидална категорија $\mathcal{A}$ *симетрична* ако додатно посједује природни изоморфизам са компонентама

$\sigma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ такав да је $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \mathbb{1}_{A \otimes B}$ и $\rho_A = \lambda_A \circ \sigma_{A,I}$, при чему сљедећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "\mathbb{1}_A \otimes \sigma_{B,C}"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\sigma_{A \otimes B,C}"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "\alpha_{C,A,B}"] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{A,C,B}"'] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "\sigma_{A,C} \otimes \mathbb{1}_B"'] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Претпоставке о комутативности дијаграма (1.2), (1.3) и (1.4) у симетричној моноидалној категорији називамо *кохеренцијски услови.*

Дефиниција 1.8. Нека је $\mathcal{A}$ симетрична моноидална категорија у којој за сваки објекат $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ функтор $A \otimes \_ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ има десни адјункт $A \multimap \_ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Тада кажемо да је $\mathcal{A}$ *симетрична моноидално затворена* категорија.

Примјер 1.2. (1) Категорија **Set** је симетрична моноидално затворена када узмемо да је $\otimes$ Декартов производ скупова, а $X \multimap Y$ скуп функција из X у Y. Такође, на **Set** можемо дефинисати симетричну моноидалну структуру и када узмемо да је $\otimes$ дисјунктна унија скупова, али у односу на овако дефинисан тензорски производ **Set** није затворена.

(2) Категорија $\mathbf{Set}^*$ је симетрична моноидално затворена када $\otimes$ дефинишемо као *редуковани производ*[2] (све парове чија је бар једна компонента истакнути елемент идентификујемо са истакнутим елементом производа), а $X \multimap Y$ као скуп свих функција из X у Y које чувају истакнути елемент, при чему је истакнути елемент у $X \multimap Y$ константна функција која слика сваки елемент из X у истакнути елемент из Y.

(3) Категорија **Rel** је симетрична моноидално затворена када и $\otimes$ и $\multimap$ дефинишемо као Декартов производ скупова. Јединични објекат у **Rel** је било који синглтон $\{*\}$.

(4) Кетегорија **Cmd** је симетрична моноидално затворена када узмемо да је $\otimes$ тензорски производ комутативних моноида, а $A \multimap B$ комутативни моноид кога чине сви хомоморфизми из A у B (за хомоморфизме f и g из $A \multimap B$ дефинишемо њихов збир $(f+g)(a)$ као $f(a)+g(a)$, за свако $a \in A$).

(5) Категорија **Top** је симетрична моноидална категорија ако узмемо да је $X \otimes Y$ Декартов производ тополошких простора X и Y са производ топологијом. Међутим, може се показати да категорија **Top** није затворена у односу на овако дефинисан тензорски производ (в. [6, Proposition 7.1.2]). Ипак, на **Top** се може дефинисати симетрична моноидално затворена структура на други начин (в. [6, Proposition 7.1.6]).

(6) Категорије $\mathbf{Vect}_K$ и $\mathbf{FinVect}_K$ су симетричне моноидално затворене, када узмемо да је $\otimes$ стандардни тензорски производ векторских простора, а $U \multimap V$ векторски простор који се састоји од линеарних пресликавања из U у V.

(7) Категорија **Hilb** је симетрична моноидална када је $\otimes$ тензорски производ Хилбертових простора, али није затворена, јер скуп свих ограничених линеарних пресликавања између два Хилбертова простора у општем случају није Хилбертов простор. Међутим, категорија **FinHilb** јесте симетрична моноидално затворена када узмемо да је

[2] енг. *smash product*

$H \multimap K$ Хилбертов простор који се састоји од ограничених линеарних пресликавања између коначно-димензионалних Хилбертових простора H и K.

Напомена 1.1. У наставку ћемо за стрелицу f често умјесто $f \otimes \mathbb{1}_A$ и $\mathbb{1}_A \otimes f$ писати $f \otimes A$ и $A \otimes f$, респективно. Слично, умјесто $f \multimap \mathbb{1}_A$ ћемо писати $f \multimap A$, а умјесто $\mathbb{1}_A \multimap f$ ћемо писати $A \multimap f$. Јединицу и којединицу адјункције $A \otimes \_ \dashv A \multimap \_$ означавамо са $\eta_{A,B} : B \to A \multimap (A \otimes B)$ и $\varepsilon_{A,B} : A \otimes (A \multimap B) \to B$. Троугаоне једнакости из дефиниције 1.4 добијају облик

$$(A \multimap \varepsilon_{A,B}) \circ \eta_{A,A \multimap B} = \mathbb{1}_{A \multimap B}, \qquad \varepsilon_{A,A \otimes B} \circ (A \otimes \eta_{A,B}) = \mathbb{1}_{A \otimes B}. \tag{1.5}$$

1.2.2 Основна својства

Лема 1.1 ([20, Theorem 7, Theorem 9]). *(1) Комутативност дијаграма* (1.2) *и* (1.3) *повлачи комутативност сљедећег дијаграма.*

$$\begin{tikzcd} I \otimes (A \otimes B) \arrow[rr, "\alpha_{I,A,B}"] \arrow[dr, "\lambda_{A \otimes B}"'] & & (I \otimes A) \otimes B \arrow[dl, "\lambda_A \otimes \mathbb{1}_B"] \\ & A \otimes B & \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

(2) Комутативност дијаграма (1.4) *и* (1.6), *уз присуство једнакости* $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \mathbb{1}_{A \otimes B}$ *и* $\rho_A = \lambda_A \circ \sigma_{A,I}$ *повлачи комутативност дијаграма* (1.3).

Доказ. (1) Из комутативности дијаграма (1.3) слиједи

$$\mathbb{1}_I \otimes \lambda_{A \otimes B} = (\rho_I \otimes \mathbb{1}_{A \otimes B}) \circ \alpha_{I,I,A \otimes B}. \tag{1.7}$$

Такође, из комутативности дијаграма (1.2) имамо

$$\alpha_{I,I,A \otimes B} = \alpha^{-1}_{I \otimes I,A,B} \circ (\alpha_{I,I,A} \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{I,I \otimes A,B} \circ (\mathbb{1}_I \otimes \alpha_{I,A,B}),$$

па када то убацимо у једнакост (1.7) добијамо да је

$$\mathbb{1}_I \otimes \lambda_{A \otimes B} = (\rho_I \otimes \mathbb{1}_{A \otimes B}) \circ \alpha^{-1}_{I \otimes I,A,B} \circ (\alpha_{I,I,A} \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{I,I \otimes A,B} \circ (\mathbb{1}_I \otimes \alpha_{I,A,B}).$$

Сада из природности од $\alpha^{-1}_{I \otimes I,A,B}$ слиједи

$$\mathbb{1}_I \otimes \lambda_{A \otimes B} = \alpha^{-1}_{I,A,B} \circ ((\rho_I \otimes \mathbb{1}_A) \otimes \mathbb{1}_B) \circ (\alpha_{I,I,A} \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{I,I \otimes A,B} \circ (\mathbb{1}_I \otimes \alpha_{I,A,B}).$$

Користећи још једном комутативност дијаграма (1.3) имамо да је $(\rho_I \otimes \mathbb{1}_A) \circ \alpha_{I,I,A} = \mathbb{1}_I \otimes \lambda_A$, одакле је

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_I \otimes \lambda_{A \otimes B} &= \alpha^{-1}_{I,A,B} \circ ((\mathbb{1}_I \otimes \lambda_A) \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{I,I \otimes A,B} \circ (\mathbb{1}_I \otimes \alpha_{I,A,B}) \\ &= \alpha^{-1}_{I,A,B} \circ \alpha_{I,A,B} \circ (\mathbb{1}_I \otimes (\lambda_A \otimes \mathbb{1}_B)) \circ (\mathbb{1}_I \otimes \alpha_{I,A,B}) \\ &= \mathbb{1}_I \otimes ((\lambda_A \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{I,A,B}). \end{aligned}$$

Посткомпоновањем лијеве и десне стране једнакости $\mathbb{1}_I \otimes \lambda_{A \otimes B} = \mathbb{1}_I \otimes ((\lambda_A \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{I,A,B})$ са $\lambda_{I \otimes (A \otimes B)}$ уз коришћење природности од $\lambda_{I \otimes (A \otimes B)}$ добијамо да је $\lambda_{A \otimes B} = (\lambda_A \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{I,A,B}$, то јест, дијаграм (1.6) комутира.

(2) Из комутативности дијаграма (1.4) имамо

$$\alpha_{A,I,B} \circ \sigma_{I\otimes B,A} \circ \alpha_{I,B,A} = (\sigma_{I,A} \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{I,A,B} \circ (\mathbb{1}_I \otimes \sigma_{B,A}), \tag{1.8}$$

а из комутативности дијаграма (1.6) имамо

$$\alpha_{I,B,A} = (\lambda_B^{-1} \otimes \mathbb{1}_A) \circ \lambda_{B\otimes A} \quad \text{и} \quad \alpha_{I,A,B} = (\lambda_A^{-1} \otimes \mathbb{1}_B) \circ \lambda_{A\otimes B}.$$

Када то убацимо у (1.8) добијамо

$$\alpha_{A,I,B} \circ \sigma_{I\otimes B,A} \circ (\lambda_B^{-1} \otimes \mathbb{1}_A) \circ \lambda_{B\otimes A} = (\sigma_{I,A} \otimes \mathbb{1}_B) \circ (\lambda_A^{-1} \otimes \mathbb{1}_B) \circ \lambda_{A\otimes B} \circ (\mathbb{1}_I \otimes \sigma_{B,A}).$$

Користећи да је $\sigma_{I,A} \circ \lambda_A^{-1} = \rho_A^{-1}$ и природност од $\sigma_{I\otimes B,A}$ и $\lambda_{A\otimes B}$, претходна једнакост постаје

$$\alpha_{A,I,B} \circ (\mathbb{1}_A \otimes \lambda_B^{-1}) \circ \sigma_{B,A} \circ \lambda_{B\otimes A} = (\rho_A^{-1} \otimes \mathbb{1}_B) \circ \sigma_{B,A} \circ \lambda_{B\otimes A}.$$

Дакле, $\alpha_{A,I,B} \circ (\mathbb{1}_A \otimes \lambda_B^{-1}) = \rho_A^{-1} \otimes \mathbb{1}_B$, одакле је $\mathbb{1}_A \otimes \lambda_B = (\rho_A \otimes \mathbb{1}_B) \circ \alpha_{A,I,B}$, то јест, дијаграм (1.3) комутира. □

Из претходне леме слиједи да можемо дати еквивалентну дефиницију симетричне моноидалне (симетричне моноидално затворене) категорије, у којој је кохеренцијски услов (1.3) замијењен са (1.6). У наставку ћемо користити управо ту алтернативну дефиницију.

Слично се доказује и сљедећа лема, коју наводимо без доказа.

Лема 1.2. *(1) Комутативност дијаграма* (1.2) *и* (1.3) *повлачи комутативност сљедећег дијаграма.*

(1.9)
$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes I) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,I}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A\otimes\rho_B"'] & & (A \otimes B) \otimes I \arrow[dl, "\rho_{A\otimes B}"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

(2) Комутативност дијаграма (1.4) *и* (1.9)*, уз присуство једнакости* $\sigma_{B,A}\circ\sigma_{A,B} = \mathbb{1}_{A\otimes B}$ *и* $\rho_A = \lambda_A \circ \sigma_{A,I}$ *повлачи комутативност дијаграма* (1.3).

Наредна лема ће нам такође бити потребна у наставку.

Лема 1.3 ([20, Theorem 6])**.** *У моноидалној категорији је* $\lambda_I = \rho_I$.

Доказ. Из природности од λ имамо $\lambda_I \circ (\mathbb{1}_I \otimes \lambda_I) = \lambda_I \circ \lambda_{I\otimes I}$, одакле је $\mathbb{1}_I \otimes \lambda_I = \lambda_{I\otimes I}$. Када ставимо $A = B = I$ у дијаграме (1.3) и (1.6) и искористимо $\mathbb{1}_I \otimes \lambda_I = \lambda_{I\otimes I}$, добијамо да је $\lambda_I \otimes \mathbb{1}_I = \rho_I \otimes \mathbb{1}_I$. Посткомпоновањем и лијеве и десне стране претходне једнакости са ρ_I, а затим коришћењем природности од ρ_I, као и чињенице да је ρ изоморфизам, добијамо да је $\lambda_I = \rho_I$. □

За произвољну категорију $\mathcal{A}$ можемо дефинисати њену *супротну категорију* $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, која има исте објекте као $\mathcal{A}$, а стрелице од $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ добијамо када обрнемо домен и кодомен стрелицама из $\mathcal{A}$. Формално, $\mathrm{ob}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathcal{A}(B, A)$.

Напомена 1.2. Нека је $\mathcal{A}$ симетрична моноидално затворена категорија. За објекат B и стрелицу $f : A \to A'$ из $\mathcal{A}$, можемо дефинисати $f \multimap B : A' \multimap B \to A \multimap B$ као

$$(A \multimap \varepsilon_{A',B}) \circ (A \multimap (f \otimes (A' \multimap B))) \circ \eta_{A,A'\multimap B}.$$

Тада није тешко видјети да за сваки објекат B имамо функтор $\_ \multimap B : \mathcal{A}^{\text{op}} \to \mathcal{A}$, који слика A у $A \multimap B$ и f у $f \multimap B$. Ако за $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ дефинишемо $f \multimap g$ као $(f \multimap B') \circ (A' \multimap g)$, имамо бифунктор $\multimap : \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Користећи напомену 1.2, можемо доказати *дифриродност* од η и ε.

Лема 1.4. *Нека је B објекат и $f : A \to A'$ стрелица у категорији $\mathcal{A}$. Тада важе сљедеће једнакости*

(1) $(A \multimap (f \otimes B)) \circ \eta_{A,B} = (f \multimap (A' \otimes B)) \circ \eta_{A',B}$;

(2) $\varepsilon_{A',B} \circ (f \otimes (A' \multimap B)) = \varepsilon_{A,B} \circ (A \otimes (f \multimap B))$.

Доказ. (1) Користећи напомену 1.2, природност од η и троугаону једнакост, имамо

$$\begin{aligned}
&(f \multimap (A' \otimes B)) \circ \eta_{A',B} = \\
&= (A \multimap \varepsilon_{A',A'\otimes B}) \circ (A \multimap (f \otimes (A' \multimap (A' \otimes B)))) \circ \eta_{A,A'\multimap(A'\otimes B)} \circ \eta_{A',B} \\
&= (A \multimap \varepsilon_{A',A'\otimes B}) \circ (A \multimap (f \otimes (A' \multimap (A' \otimes B)))) \circ (A \multimap (A \otimes \eta_{A',B})) \circ \eta_{A,B} \\
&= (A \multimap (\varepsilon_{A',A'\otimes B} \circ (f \otimes \eta_{A',B}))) \circ \eta_{A,B} \\
&= (A \multimap (\varepsilon_{A',A'\otimes B} \circ (A' \otimes \eta_{A',B}) \circ (f \otimes B))) \circ \eta_{A,B} \\
&= (A \multimap (f \otimes B)) \circ \eta_{A,B}.
\end{aligned}$$

(2) Користећи поново напомену 1.2, природност од ε и исту троугаону једнакост као у случају (1), добијамо

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{A,B} \circ (A \otimes (f \multimap B)) = \\
&= \varepsilon_{A,B} \circ (A \otimes (A \multimap \varepsilon_{A',B})) \circ (A \otimes (A \multimap (f \otimes (A' \multimap B)))) \circ (A \otimes \eta_{A,A'\multimap B}) \\
&= \varepsilon_{A',B} \circ \varepsilon_{A,A'\otimes(A'\multimap B)} \circ (A \otimes (A \multimap (f \otimes (A' \multimap B)))) \circ (A \otimes \eta_{A,A'\multimap B}) \\
&= \varepsilon_{A',B} \circ (f \otimes (A' \multimap B)) \circ \varepsilon_{A,A\otimes(A'\multimap B)} \circ (A \otimes \eta_{A,A'\multimap B}) \\
&= \varepsilon_{A',B} \circ (f \otimes (A' \multimap B)).
\end{aligned}$$

□

Сљедећом дефиницијом уводимо одређену нотацију која ће нам бити потребна у наставку.

Дефиниција 1.9. Нека је $\mathcal{A}$ симетрична моноидално затворена категорија. За стрелице $f : A \otimes B \to C$, $g : B \to A \multimap C$ и $h : A \to B$ из $\mathcal{A}$ дефинишемо $f^\bullet : B \to A \multimap C$, $g^\circ : A \otimes B \to C$ и $\langle h \rangle_C : A \otimes (B \multimap C) \to C$ на сљедећи начин:

- $f^\bullet = (A \multimap f) \circ \eta_{A,B}$,
- $g^\circ = \varepsilon_{A,C} \circ (A \otimes g)$,
- $\langle h \rangle_C = \varepsilon_{B,C} \circ (h \otimes (B \multimap C))$.

У ознаци $\langle h \rangle_C$ ћемо изостављати индекс када његово одсуство не изазива двосмисленост.

Лема 1.5. *Операција* $\_^{\bullet}$ *има сљедеће особине:*

(1) $f^{\bullet} \circ g = (f \circ (A \otimes g))^{\bullet}$, *за* $f : A \otimes B \to C$ *и* $g : D \to B$;

(2) $(A \multimap h) \circ f^{\bullet} = (h \circ f)^{\bullet}$ *за* $f : A \otimes B \to C$ *и* $h : C \to D$;

(3) $\varepsilon^{\bullet}_{A,B} = \mathbb{1}_{A \multimap B}$. $\square$

Доказ. (1) Користећи дефиницију 1.9 и природност од η имамо

$$\begin{aligned} f^{\bullet} \circ g &= (A \multimap f) \circ \eta_{A,B} \circ g = (A \multimap f) \circ (A \multimap (A \otimes g)) \circ \eta_{A,B} \\ &= (A \multimap (f \circ (A \otimes g))) \circ \eta_{A,B} = (f \circ (A \otimes f))^{\bullet}. \end{aligned}$$

(2) Поново из дефиниције 1.9 слиједи

$$(A \multimap h) \circ f^{\bullet} = (A \multimap h) \circ (A \multimap f) \circ \eta_{A,B} = (A \multimap (h \circ f)) \circ \eta_{A,B} = (h \circ f)^{\bullet}.$$

(3) Користећи троугаону једнакост имамо да је $\varepsilon^{\bullet}_{A,B} = (A \multimap \varepsilon_{A,B}) \circ \eta_{A,A \multimap B} = \mathbb{1}_{A \multimap B}$. $\square$

Лема 1.6. *Операција* $\_^{\circ}$ *има сљедеће особине:*

(1) $f \circ g^{\circ} = ((A \multimap f) \circ g)^{\circ}$, *за* $f : C \to D$ *и* $g : B \to A \multimap C$;

(2) $g^{\circ} \circ (A \otimes h) = (g \circ h)^{\circ}$, *за* $g : B \to A \multimap C$ *и* $h : D \to B$;

(3) $\eta^{\circ}_{A,B} = \mathbb{1}_{A \otimes B}$.

Доказ. (1) Користећи дефиницију 1.9 и природност од ε имамо

$$\begin{aligned} f \circ g^{\circ} &= f \circ \varepsilon_{A,C} \circ (A \otimes g) = \varepsilon_{A,D} \circ (A \otimes (A \multimap f)) \circ (A \otimes g) \\ &= \varepsilon_{A,D} \circ (A \otimes ((A \multimap f) \circ g)) = ((A \multimap f) \circ g)^{\circ}. \end{aligned}$$

(2) Поново из дефиниције 1.9 слиједи

$$g^{\circ} \circ (A \otimes h) = \varepsilon_{A,C} \circ (A \otimes g) \circ (A \otimes h) = \varepsilon_{A,C} \circ (A \otimes (g \circ h)) = (g \circ h)^{\circ}.$$

(3) Користећи троугаону једнакост имамо да је $\eta^{\circ}_{A,B} = \varepsilon_{A,A \otimes B} \circ (A \otimes \eta_{A,B}) = \mathbb{1}_{A \otimes B}$. $\square$

Лема 1.7. *За стрелице* $f : A \to B$ *и* $g : D \to A$ *важи* $\langle f \circ g \rangle_C = \langle f \rangle_C \circ (g \otimes (B \multimap C))$.

Доказ. Користећи бифункторијалност тензора имамо

$$\begin{aligned} \langle f \circ g \rangle_C &= \varepsilon_{B,C} \circ ((f \circ g) \otimes (B \multimap C)) = \varepsilon_{B,C} \circ ((f \otimes (B \multimap C)) \circ (g \otimes (B \multimap C)) \\ &= \langle f \rangle_C \circ (g \otimes (B \multimap C)). \end{aligned}$$ $\square$

1.3 Компактно затворене категорије са инволуцијом

1.3.1 Дефиниције и примјери

Дефиниција 1.10. Нека је $(\mathcal{A}, \otimes, I)$ симетрична моноидална категорија и нека је A неки објекат из $\mathcal{A}$. Кажемо да је A^* *дуал* објекта A ако постоје стрелице $\eta_A : I \to A^* \otimes A$ и $\varepsilon_A : A \otimes A^* \to I$ такве да важи

$$\rho_{A^*} \circ (A^* \otimes \varepsilon_A) \circ \alpha^{-1}_{A^*,A,A^*} \circ (\eta_A \otimes A^*) \circ \lambda^{-1}_{A^*} = \mathbb{1}_{A^*}, \tag{1.10}$$

$$\lambda_A \circ (\varepsilon_A \otimes A) \circ \alpha_{A,A^*,A} \circ (A \otimes \eta_A) \circ \rho^{-1}_A = \mathbb{1}_A. \tag{1.11}$$

Напомена 1.3. У случају када је моноидална категорија $\mathcal{A}$ из претходне дефиниције *стриктна*, једнакости (1.10) и (1.11) се своде на

$$(A^* \otimes \varepsilon_A) \circ (\eta_A \otimes A^*) = \mathbb{1}_{A^*} \quad \text{и} \quad (\varepsilon_A \otimes A) \circ (A \otimes \eta_A) = \mathbb{1}_A. \tag{1.12}$$

Дефиниција 1.11. Симетрична моноидално затворена категорија $\mathcal{A}$ је *компактно затворена* када сваки објекат $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$ има дуал.

Дефиниција 1.12. *Категорија са инволуцијом*[1] је категорија $\mathcal{A}$ заједно са инволутивним функтором $\dagger : \mathcal{A}^{\text{op}} \to \mathcal{A}$ који је идентитет на објектима из $\mathcal{A}$. Експлицитно, то значи да је $A^\dagger = A$ за сваки објекат A из $\mathcal{A}$ и да за сваку стрелицу $f : A \to B$ постоји стрелица $f^\dagger : B \to A$, при чему важи

- $\mathbb{1}_A^\dagger = \mathbb{1}_A$;
- $(g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger$, за произвољне стрелице $f : A \to B$ и $g : B \to C$;
- $f^{\dagger\dagger} = f$, за произвољну стрелицу $f : A \to B$.

Дефиниција 1.13. *Моноидална категорија са инволуцијом* је моноидална категорија $\mathcal{A}$ која има и структуру категорије са инволуцијом, при чему важи

- $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$, за произвољне стрелице $f : A \to B$ и $g : C \to D$;
- $\alpha^\dagger_{A,B,C} = \alpha^{-1}_{A,B,C}$, $\lambda^\dagger_A = \lambda^{-1}_A$ и $\rho^\dagger_A = \rho^{-1}_A$.

Ако је моноидална категорија $\mathcal{A}$ додатно и симетрична, при чему је $\sigma^\dagger_{A,B} = \sigma_{B,A}$, тада кажемо да је $\mathcal{A}$ *симетрична моноидална категорија са инволуцијом.*

Дефиниција 1.14. *Компактно затворена категорија са инволуцијом* је симетрична моноидална категорија са инволуцијом, која додатно има и структуру компактно затворене категорије, при чему важи једнакост $\sigma_{A,A^*} \circ \varepsilon^\dagger_A = \eta_A$.

Примјер 1.3. Из примјера 1.1, категорије $\mathbf{Rel}, \mathbf{FinVect}_K$ и $\mathbf{FinHilb}$ су компактно затворене, $\mathbf{Rel}, \mathbf{Hilb}$ и $\mathbf{FinHilb}$ су категорије са инволуцијом, а само су $\mathbf{Rel}$ и $\mathbf{FinHilb}$ компактно затворене категорије са инволуцијом. Размотримо поближе поменуте категорије.

(1) У категорији $\mathbf{Rel}$ је је сваки објекат само-дуалан, то јест $X^* = X$. За релацију $\rho \subseteq X \times Y$ дефинишемо $\rho^\dagger$ као инверзну релацију од ρ, то јест, $\rho^\dagger = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \rho\}$. Стрелица $\eta : \{*\} \to X \times X$ је релација $\{(*, (x, x)) \mid x \in X\}$, а $\varepsilon : X \times X \to \{*\}$ је њен инверз $\{((x, x), *) \mid x \in X\}$.

(2) На категорији $\mathbf{FinVect}_K$ дефинишемо компактно затворену структуру тако што узмемо да је дуал од V стандардни дулани простор V^* (скуп свих линеарних пресликавања из простора V у поље K). Ако је $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ база од V и $(e^i)_{1\leq i\leq n}$ дуална база од V^*, линеарна пресликавања $\eta : K \to V^* \otimes V$ и $\varepsilon : V \otimes V^* \to K$ су одређена са

$$\eta(1) = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e_i, \qquad \varepsilon(e_i \otimes e^j) = e^j(e_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

[1] У литератури је чешћи назив *бодеж категорија* (енг. *dagger category*), али сматрамо да је назив *категорија са инволуцијом* примјеренији српском језику.

(3) У категорији **Hilb**, за $f : H \to K$ дефинишемо $f^\dagger : K \to H$ користећи скаларни производ, наиме $f^\dagger$ је јединствено пресликавање за које важи $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^\dagger(y)\rangle$. У категорији **FinHilb** компактно затворену струкутуру дефинишемо исто као у $\mathbf{FinVect}_K$, а $f^\dagger$ дефинишемо исто као у **Hilb**.

1.3.2 Основна својства

Лема 1.8. *Свака компактно затворена категорија $\mathcal{A}$ је симетрична моноидално затворена.*

Доказ. Докажимо да је функтор $A^*\otimes\_$ десни адјункт функтора $A\otimes\_$ за свако $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. Дефинишимо $\eta_{A,B} : B \to A^* \otimes (A \otimes B)$ и $\varepsilon_{A,B} : A \otimes (A^* \otimes B) \to B$ на сљедећи начин

$$\eta_{A,B} \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha^{-1}_{A^*,A,B} \circ (\eta_A \otimes B) \circ \lambda^{-1}_B, \qquad \varepsilon_{A,B} \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda_B \circ (\varepsilon_A \otimes B) \circ \alpha_{A,A^*,B} \tag{1.13}$$

и докажимо да су $\eta_{A,B}$ и $\varepsilon_{A,B}$ јединица и којединица адјункције. Другим ријечима, треба доказати да су $\eta_{A,B}$ и $\varepsilon_{A,B}$ природне (по B) и да важе троугаоне једнакости. Докажимо природност од $\eta_{A,B}$, пошто се природност од $\varepsilon_{A,B}$ доказује слично. За $f : B \to B'$ имамо

$$\begin{aligned}
(A^* \otimes (A \otimes f)) \circ \eta_{A,B} &= (A^* \otimes (A \otimes f)) \circ \alpha^{-1}_{A^*,A,B} \circ (\eta_A \otimes B) \circ \lambda^{-1}_B \\
&= \alpha^{-1}_{A^*,A,B'} \circ ((A^* \otimes A) \otimes f)) \circ (\eta_A \otimes B) \circ \lambda^{-1}_B \\
&= \alpha^{-1}_{A^*,A,B'} \circ (\eta_A \otimes f) \circ \lambda^{-1}_B = \alpha^{-1}_{A^*,A,B'} \circ (\eta_A \otimes B') \circ (I \otimes f) \circ \lambda^{-1}_B \\
&= \alpha^{-1}_{A^*,A,B'} \circ (\eta_A \otimes B') \circ \lambda^{-1}_{B'} \circ f = \eta_{A,B'} \circ f,
\end{aligned}$$

при чему смо користили бифункторијалност тензора и природност од $\alpha^{-1}_{A^*,A,B}$ и λ^{-1}_B.

Докажимо сада троугаоне једнакости

$$(A^* \otimes \varepsilon_{A,B}) \circ \eta_{A,A^*\otimes B} = \mathbb{1}_{A^*\otimes B} \qquad \text{и} \qquad \varepsilon_{A,A\otimes B} \circ (A \otimes \eta_{A,B}) = \mathbb{1}_{A\otimes B}.$$

Доказаћемо само лијеву једнакост, пошто се десна доказује слично. Дакле, имајући у виду једнакости (1.13) треба доказати да је

$$(A^* \otimes (\lambda_B \circ (\varepsilon_A \otimes B) \circ \alpha_{A,A^*,B})) \circ \alpha^{-1}_{A^*,A,A^*\otimes B} \circ (\eta_A \otimes (A^* \otimes B)) \circ \lambda^{-1}_{A^*\otimes B} = \mathbb{1}_{A^*\otimes B}. \tag{1.14}$$

Означимо лијеву страну једнакости (1.14) са L. Користећи комутативност дијаграма (1.2) имамо да је

$$\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*\otimes B} = (A^* \otimes \alpha^{-1}_{A,A^*,B}) \circ \alpha^{-1}_{A^*,A\otimes A^*,B} \circ (\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*} \otimes B) \circ \alpha_{A^*\otimes A,A^*,B},$$

па када то убацимо у L добијамо да је

$$\begin{aligned}
L = (A^* \otimes \lambda_B) \circ (A^* \otimes (\varepsilon_A \otimes B)) \circ \alpha^{-1}_{A^*,A\otimes A^*,B} \circ (\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*} \otimes B) \\
\circ\, \alpha_{A^*\otimes A,A^*,B} \circ (\eta_A \otimes (A^* \otimes B)) \circ \lambda^{-1}_{A^*\otimes B}.
\end{aligned}$$

Користећи природност од $\alpha^{-1}_{A^*,A\otimes A^*,B}$ и $\alpha_{A^*\otimes A,A^*,B}$ имамо да је

$$\begin{aligned}
L = (A^* \otimes \lambda_B) \circ \alpha^{-1}_{A^*,I,B} \circ ((A^* \otimes \varepsilon_A) \otimes B) \circ (\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*} \otimes B) \\
\circ\, ((\eta_A \otimes A^*) \otimes B) \circ \alpha_{I,A^*,B} \circ \lambda^{-1}_{A^*\otimes B}.
\end{aligned}$$

Када напишемо L у облику

$$\begin{aligned}L = &(A^* \otimes \lambda_B) \circ \alpha^{-1}_{A^*,I,B} \circ (\rho^{-1}_{A^*} \otimes B) \circ (\rho_{A^*} \otimes B) \circ ((A^* \otimes \varepsilon_A) \otimes B) \circ (\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*} \otimes B)\\ &\circ ((\eta_A \otimes A^*) \otimes B) \circ (\lambda^{-1}_{A^*} \otimes B) \circ (\lambda_{A^*} \otimes B) \circ \alpha_{I,A^*,B} \circ \lambda^{-1}_{A^*\otimes B}\end{aligned}$$

и искористимо једнакост (1.10) добијамо да је

$$L = (A^* \otimes \lambda_B) \circ \alpha^{-1}_{A^*,I,B} \circ (\rho^{-1}_{A^*} \otimes B) \circ (\lambda_{A^*} \otimes B) \circ \alpha_{I,A^*,B} \circ \lambda^{-1}_{A^*\otimes B}. \tag{1.15}$$

Из комутативности дијаграма (1.3) имамо $\alpha^{-1}_{A^*,I,B} \circ (\rho^{-1}_{A^*} \otimes B) = A^* \otimes \lambda^{-1}_B$, а из комутативности дијаграма (1.6) имамо $\alpha_{I,A^*,B} \circ \lambda^{-1}_{A^*\otimes B} = \lambda^{-1}_{A^*} \otimes B$. Када то убацимо у (1.15), добијамо да је $L = \mathbb{1}_{A^*\otimes B}$. □

Дефиниција 1.15. За $f : A \to B$ дефинишемо $f^* : B^* \to A^*$ са

$$f^* = \rho_{A^*} \circ (A^* \otimes \varepsilon_B) \circ \alpha^{-1}_{A^*,B,B^*} \circ ((A^* \otimes f) \otimes B^*) \circ (\eta_A \otimes B^*) \circ \lambda^{-1}_{B^*}.$$

Користећи претходну дефиницију није тешко провјерити да у свакој компактно затвореној категорији $\mathcal{A}$ имамо функтор $\_^* : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$. Докажимо сада сљедећу лему која ће нам бити потребна у глави 3.

Лема 1.9. *Нека је $f : A \to B$ стрелица у компактно затвореној категорији $\mathcal{A}$. Тада је $(f^* \otimes B) \circ \eta_B = (A^* \otimes f) \circ \eta_A$.*

Доказ. Имамо

$$\begin{aligned}(f^* \otimes B) \circ \eta_B =&(\rho_{A^*} \otimes B) \circ ((A^* \otimes \varepsilon_B) \otimes B) \circ (\alpha^{-1}_{A^*,B,B^*} \otimes B)\\ &\circ (((A^* \otimes f) \otimes B^*) \otimes B) \circ ((\eta_A \otimes B^*) \otimes B) \circ (\lambda^{-1}_{B^*} \otimes B) \circ \eta_B.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Из комутативности дијаграма (1.2) имамо да је

$$\alpha^{-1}_{A^*,B,B^*} \otimes B = \alpha_{A^*,B\otimes B^*,B} \circ (A^* \otimes \alpha_{B,B^*,B}) \circ \alpha^{-1}_{A^*,B,B^*\otimes B} \circ \alpha^{-1}_{A^*\otimes B,B^*,B}$$

па када то убацимо у (1.16) и искористимо природност од $\alpha_{A^*,B\otimes B^*,B}$ и $\alpha^{-1}_{A^*\otimes B,B^*,B}$ добијамо

$$\begin{aligned}(f^* \otimes B) \circ \eta_B =&(\rho_{A^*} \otimes B) \circ \alpha_{A^*,I,B} \circ (A^* \otimes (\varepsilon_B \otimes B)) \circ (A^* \otimes \alpha_{B,B^*,B}) \circ \alpha^{-1}_{A^*,B,B^*\otimes B}\\ &\circ ((A^* \otimes f) \otimes (B^* \otimes B)) \circ (\eta_A \otimes (B^* \otimes B)) \circ \alpha^{-1}_{I,B^*,B} \circ (\lambda^{-1}_{B^*} \otimes B) \circ \eta_B.\end{aligned}$$

Користећи комутативност дијаграма (1.3) и (1.6), добијамо

$$\begin{aligned}(f^* \otimes B) \circ \eta_B =&(A^* \otimes \lambda_B) \circ (A^* \otimes (\varepsilon_B \otimes B)) \circ (A^* \otimes \alpha_{B,B^*,B}) \circ \alpha^{-1}_{A^*,B,B^*\otimes B}\\ &\circ ((A^* \otimes f) \otimes (B^* \otimes B)) \circ (\eta_A \otimes (B^* \otimes B)) \circ \lambda^{-1}_{B^*\otimes B} \circ \eta_B.\end{aligned}$$

Из природности $\lambda^{-1}_{B^*\otimes B}$ имамо да је $\lambda^{-1}_{B^*\otimes B} \circ \eta_B = (I \otimes \eta_B) \circ \lambda^{-1}_I$, одакле је

$$\begin{aligned}(f^* \otimes B) \circ \eta_B &= (A^* \otimes \lambda_B) \circ (A^* \otimes (\varepsilon_B \otimes B)) \circ (A^* \otimes \alpha_{B,B^*,B}) \circ \alpha^{-1}_{A^*,B,B^*\otimes B}\\ &\quad\circ ((A^* \otimes f) \otimes (B^* \otimes B)) \circ (\eta_A \otimes \eta_B) \circ \lambda^{-1}_I\\ &= (A^* \otimes \lambda_B) \circ (A^* \otimes (\varepsilon_B \otimes B)) \circ (A^* \otimes \alpha_{B,B^*,B}) \circ \alpha^{-1}_{A^*,B,B^*\otimes B}\\ &\quad\circ ((A^* \otimes f) \otimes \eta_B) \circ (\eta_A \otimes I) \circ \lambda^{-1}_I.\end{aligned}$$

Сада, користећи природност од $\alpha^{-1}_{A^*,B,B^*\otimes B}$ и функторијалност тензора имамо

$$\begin{aligned}(f^*\otimes B)\circ\eta_B &= (A^*\otimes\lambda_B)\circ(A^*\otimes(\varepsilon_B\otimes B))\circ(A^*\otimes\alpha_{B,B^*,B})\\ &\quad\circ(A^*\otimes(f\otimes\eta_B))\circ\alpha^{-1}_{A^*,A,I}\circ(\eta_A\otimes I)\circ\lambda_I^{-1}\\ &= (A^*\otimes\lambda_B)\circ(A^*\otimes(\varepsilon_B\otimes B))\circ(A^*\otimes\alpha_{B,B^*,B})\\ &\quad\circ(A^*\otimes(B\otimes\eta_B))\circ(A^*\otimes(f\otimes I))\circ\alpha^{-1}_{A^*,A,I}\circ(\eta_A\otimes I)\circ\lambda_I^{-1}.\end{aligned}$$

Коришћењем једнакости (1.11), а затим природности од $\alpha^{-1}_{A^*,A,I}$ добијамо

$$\begin{aligned}(f^*\otimes B)\circ\eta_B &= (A^*\otimes\rho_B)\circ(A^*\otimes(f\otimes I))\circ\alpha^{-1}_{A^*,A,I}\circ(\eta_A\otimes I)\circ\lambda_I^{-1}\\ &= (A^*\otimes\rho_B)\circ\alpha^{-1}_{A^*,B,I}\circ((A^*\otimes f)\otimes I)\circ(\eta_A\otimes I)\circ\lambda_I^{-1}\\ &= (A^*\otimes\rho_B)\circ\alpha^{-1}_{A^*,B,I}\circ(((A^*\otimes f)\circ\eta_A)\otimes I)\circ\lambda_I^{-1}.\end{aligned}$$

Из (1.9) слиједи $(A^*\otimes\rho_B)\circ\alpha^{-1}_{A^*,B,I}=\rho_{A^*\otimes B}$, па користећи природност од $\rho_{A^*\otimes B}$ имамо

$$(f^*\otimes B)\circ\eta_B=((A^*\otimes f)\circ\eta_A)\circ\rho_I\circ\lambda_I^{-1}.$$

Тврђење сада слиједи из леме 1.3. $\square$

1.4 Категорија 1Cob

Неформално, *кобордизам* између затворених[3] многострукости A и B је компактна многострукост M чија граница је дисјунктна унија многострукости A и B. Кобордизме димензије n краће називамо n-кобордизми. У овом одјељку ћемо се бавити искључиво 1-кобордизмима, па ћемо их често називати и само кобордизмима.

Циљ нам је да конструишемо категорију **1Cob** чији објекти ће бити затворене многострукости димензије 0, а стрелице 1-кобордизми. Да бисмо то урадили, биће нам потребно да можемо говорити о домену и кодомену кобордизма, као и да можемо дефинисати кобордизам из објекта у самог себе. Оба ова захтјева се постижу сљедећом формалном дефиницијом.

Дефиниција 1.16. Нека су A и B затворене оријентисане 0-димензионалне тополошке многострукости. *Оријентисани 1-кобордизам* од A до B је тројка (M, f_1, f_2), гдје је M компактна оријентисана 1-димензионална тополошка многострукост са границом $M_1\sqcup M_2$ (оријентација на граници је индукована оријентацијом на M), $f_1 : A\to M$ је утапање које чува оријентацију и чија је слика M_1, а $f_2 : B\to M$ је утапање које обрће оријенатацију и чија је слика M_2.

Напомена 1.4. У општем случају, n-кобордизми се дефинишу у категорији глатких многострукости. Међутим, у димензијама $0,1,2$ и 3 свака тополошка многострукост допушта глатку структуру, тако да се, неформално, појам глатке многострукости своди на појам тополошке многострукости. Због тога смо 1-кобордизме дефинисали у категорији тополошких многострукости. Примијетимо да смо проблем одређивања домена и кодомена кобордизма разријешили увођењем оријентације, а проблем постојања кобордизма из објекта у самог себе увођењем утапања f_1 и f_2. Такође, захтјев да f_1 чува оријентацију, а f_2 је обрће није од суштинског значаја; могли смо претпоставити и обрнуто. То нам служи само да бисмо одредили домен и кодомен кобордизма.

[3] компактних, без границе

Сљедећи корак у конструисању категорије **1Cob** је дефинисање композиције у тој категорији. У ту сврху ћемо искористити појам *лијепљења* кобордизама, али прије тога ћемо увести појам *амалгамиране суме*[4] у категорији. Наиме, амалгамирана сума дијаграма

$$A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$$

се састоји од објекта P и стрелица $i_1 : A \to P$, $i_2 : B \to P$, при чему за сваки објекат Q и стрелице $j_1 : A \to Q$ и $j_2 : B \to Q$ такве да је $j_1 \circ f = j_2 \circ g$, постоји јединствена стрелица $h : P \to Q$ таква да сљедећи дијаграм комутира. Уобичајена ознака за амалгамирану суму је $A \sqcup_C B$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "j_2"] & \\
A \arrow[r, "i_1"'] \arrow[drr, bend right, "j_1"'] & P \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & Q
\end{tikzcd}$$

Сада можемо дефинисати лијепљење кобордизама.

Дефиниција 1.17. Нека је (M, f_1, f_2) кобордизам од A до B и (N, g_1, g_2) кобордизам од B до C. Нека је $M \sqcup_B N$, заједно са непрекидним пресликавањима $h_1 : M \to M \sqcup_B N$ и $h_2 : N \to M \sqcup_B N$ амалгамирана сума (у категорији **Top**) дијаграма $M \xleftarrow{f_2} B \xrightarrow{g_1} N$. Тада кажемо да је кобордизам $(M \sqcup_B N, h_1 \circ f_1, h_2 \circ g_2)$ настао *лијепљењем* кобордизама (M, f_1, f_2) и (N, g_1, g_2) (в. сљедећи дијаграм).

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[d, "g_2"] \\
& B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_2"'] & N \arrow[d, dashed, "h_2"] \\
A \arrow[r, "f_1"'] & M \arrow[r, dashed, "h_1"'] & M \sqcup_B N
\end{tikzcd}$$

Напомена 1.5. У категорији **Top** постоји амалгамирана сума за сваки пар објеката (в. нпр. [28, V.9]), тако да знамо да сигурно постоји објекат $M \sqcup_B N$. Међутим, да би претходна дефиниција била коректна, треба доказати да је тополошки простор $M \sqcup_B N$ заиста (компактна) многострукост. Доказ те чињенице ћемо прескочити, а читаоца упућујемо на [23, Одјељак 1.3.2]. Такође, примијетимо да је операција лијепљења добро дефинисана само *до на хомеоморфизам*. Због тога, да бисмо имали добро дефинисану композицију у категорији **1Cob**, прелазимо на класе еквиваленције кобордизама.

Дефиниција 1.18. Кажемо да су оријентисани 1-кобордизми (M, f_1, f_2) и (N, g_1, g_2) од A до B *еквивалентни* ако постоји хомеоморфизам $F : M \to N$ који чува оријентацију,

[4]енг. *amalgamated sum*, или чешће *pushout*

при чему важи $F \circ f_1 = g_1$ и $F \circ f_2 = g_2$, то јест сљедећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dd, "F"] & \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Класу еквиваленције кобордизма (M, f_1, f_2) означавамо са $[M, f_1, f_2]$.

Сада коначно можемо дати прецизну дефиницију категорије **1Cob**.

Дефиниција 1.19. Категорија **1Cob** је категорија чији објекти су затворене оријентисане 0-димензионалне многострукости, а стрелице су класе еквиваленције 1-кобордизама. Уз нотацију као у дефиницији 1.17, композицију у **1Cob** дефинишемо као

$$[N, g_1, g_2] \circ [M, f_1, f_2] \overset{\text{def}}{=} [M \sqcup_B N, h_1 \circ f_1, h_2 \circ g_2].$$

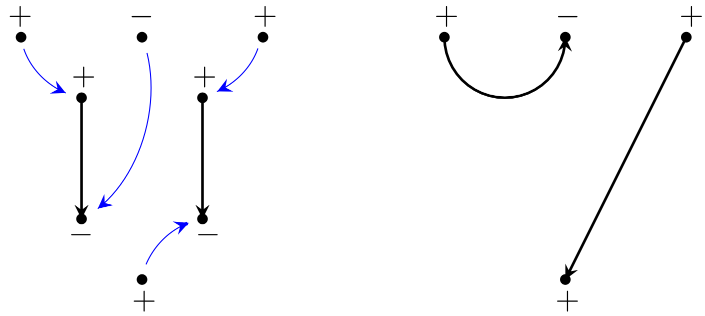
Такође, јединичну стрелицу $\mathbb{1}_A : A \to A$ дефинишемо као $[A \times [0,1], f_1, f_2]$, гдје је $f_1(x) = (x, 0)$, а $f_2(x) = (x, 1)$.

Напомена 1.6. Да би претходна дефиниција била коректна, потребно је доказати да је композиција добро дефинисана и асоцијативна, као и да за сваку стрелицу f из **1Cob** важи $f \circ \mathbb{1}_A = f = \mathbb{1}_A \circ f$. Међутим, то ћемо опет прескочити, а читаоца упућујемо на [23, Одјељци 1.3.15 и 1.3.16]. У наставку ћемо често класе еквиваленције кобордизама звати само кобордизми.

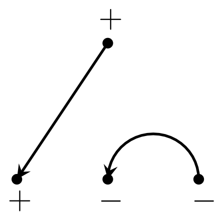
Затворене оријентисане 0-димензионалне многострукости су заправо коначни низови тачака заједно са њиховом оријентацијом ($+$ или $-$), тако да објекте категорије **1Cob** можемо представити као низове који се састоји од $+$ и $-$, на примјер $+ - + + -$. Са друге стране, компактне оријентисане 1-димензионалне многострукости са границом су хомеоморфне коначним колекцијама оријентисаних дужи и кругова. Оријентисану дуж можемо идентификовати са сегментом $[0, 1]$ на коме је задата стандардна оријентација (у смјеру од 0 до 1). Она индукује оријентацију на крајевима сегмента, и у наставку ћемо подразумијевати да је индукована оријентација у 0 позитивна, а у 1 негативна.[5] Стандардна оријентација круга је у смјеру супротном од кретања казаљке на сату.

Примјер 1.4. Нека је $A = +-+$ и $B = +$. Посматрајмо кобордизам (M, f_1, f_2) од A до B, при чему је многострукост M дисјунктна унија двије оријентисане дужи, а утапања f_1 и f_2 су илустрована на сљедећој слици лијево. Тада кобордизам (M, f_1, f_2) представљамо цртежом на слици десно. Домен кобордизма је на врху цртежа, а кодомен на дну, то јест кобордизме илуструјемо цртежима који су усмјерени одозго на доле, а не слијева на десно (као што је случај у [23]). Примијетимо да између два иста објекта може да постоји више различитих кобордизама.

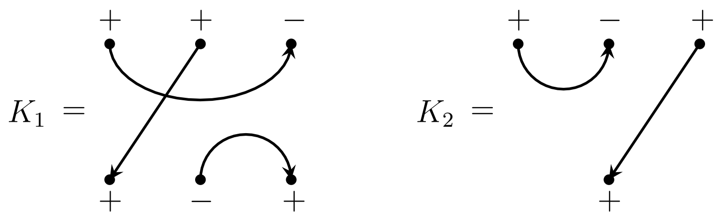
[5]Што се слаже са смјером кретања електричне струје од позитивног пола ка негативном. Наравно, наша оријентација је ствар договора и нема никакве везе са електричном струјом.



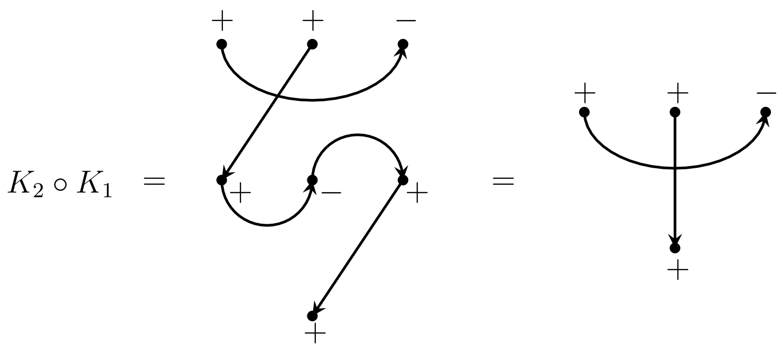
Примјер 1.5. Оријентисана 1-димензионална многострукост илустрована на сљедећој слици није 1-кобордизам. Да бисмо се увјерили у то, претпоставимо да дати цртеж представља неки 1-кобордизам (M, f_1, f_2) од $+$ до $+--$. Тада би многострукост M била унија двије дужи, при чему би утапање f_1 сликало $+$ из домена у $+$, а утапање f_2 би сликало $--$ из кодомена у $++$. Међутим, то је немогуће, јер граница двије оријентисане дужи не може да садржи три тачке чија је оријентација $+$.



Примјер 1.6. Посматрајмо кобордизме K_1 и K_2 илустроване сљедећим цртежима.

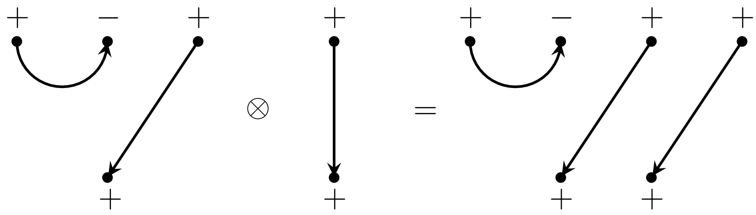


(Примијетимо да наше многострукости нису утопљене у раван, тако да кобордизам K_1 посматрамо као дисјунктну унију три дужи, без обзира што на цртежу имамо укрштање). Тада је композицији $K_2 \circ K_1$ представљена сљедећим цртежом.

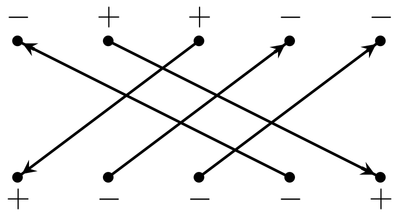


Лема 1.10. *Категорија* **1Cob** *је компактно затворена категорија са инволуцијом.*

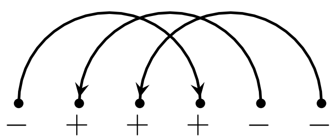
Доказ. Покажимо прво да је **1Cob** (стриктна) симетрична моноидална категорија. Тензорски производ $\otimes$ у **1Cob** дефинишемо као дисјунктну унију, то јест као стављање два кобордизма једног поред другог. На примјер,

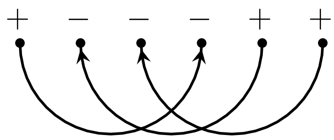


Јединични објекат за овако дефинисан тензорски производ је $\emptyset$ (празна многострукост). Такође, категорија **1Cob** је симетрична, при чему стрелици $\sigma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ одговара одређена пермутација скупа $A \otimes B$. На примјер, за $A = -+$ и $B = +--$, стрелица $\sigma_{A,B}$ је илустрована сљедећим цртежом.

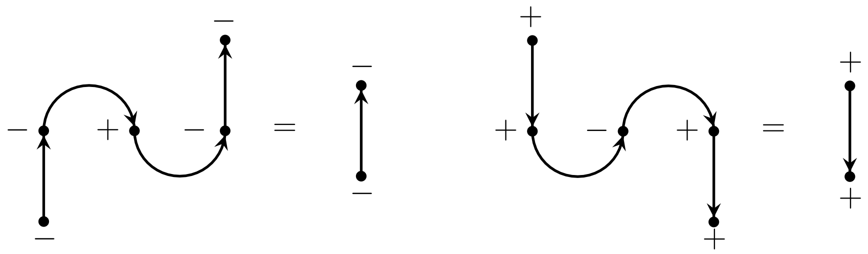


Покажимо сада да је **1Cob** компактно затворена. Дуал A^* неког објекта A је исти низ тачака са обрнутом оријентацијом. На примјер, ако је $A = +--$, тада је $A^* = -++$. За исто A, стрелице $\eta_A : \emptyset \to A^* \otimes A$ и $\varepsilon : A \otimes A^* \to \emptyset$ су кобордизми илустровани сљедећим цртежима.





Једнакости (1.12), у најједноставнијем облику (када је $A = +$) су илустроване као:



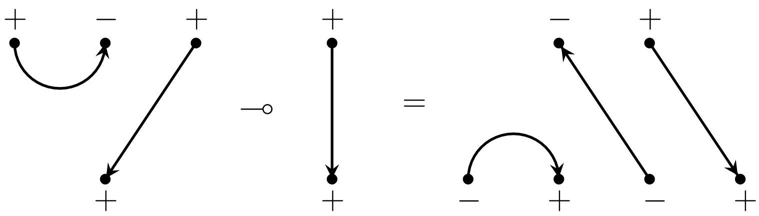
Коначно, докажимо да је **1Cob** категорија са инволуцијом. Кобордизам $f^\dagger : B \to A$ добијамо обртањем оријентације многострукости која представља кобордизам $f : A \to B$. Обртањем оријентације многострукости M, утапање $f_1 : A \to M$ постаје пресликавање које обрће оријентацију, па A постаје кодомен добијеног кобордизма. Слично, B постаје његов домен. На примјер, ако је стрелица f илустрована на сљедећој слици лијево, тада је $f^\dagger$ илустрована на слици десно.

Није тешко провјерити да важе једнакости из дефиниција 1.13 и 1.14. □

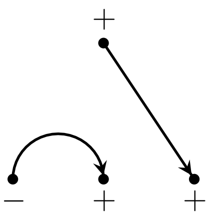
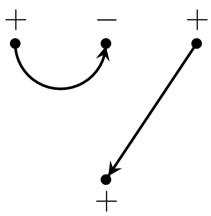
Посљедица 1.11. *Категорија* **1Cob** *је симетрична моноидално затворена категорија.*

Доказ. Слиједи директно из леме 1.8. □

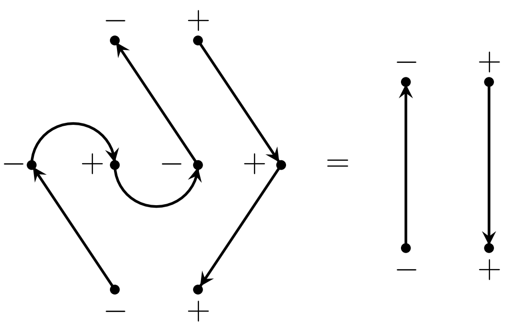
Напомена 1.7. Нека су $K_1 : A \to B$ и $K_2 : C \to D$ кобордизми. Имајући у виду напомену 1.2 и лему 1.8, добијамо да је кобордизам $K_1 \multimap K_2 : B \multimap C \to A \multimap D$ једнак $K_1^* \otimes K_2$, при чему кобордизам $K_1^* : B^* \to A^*$ добијамо од K_1 тако што му обрнемо домен и кодомен, а објектима A и B обрнемо оријентацију. На примјер,

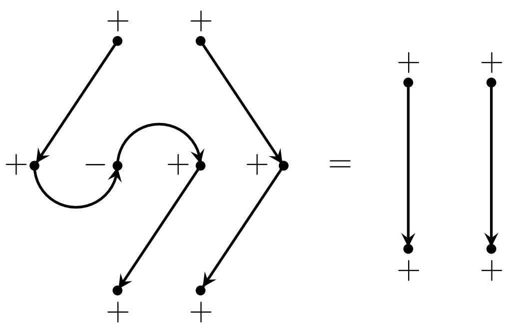


Јединица и којединица адјункције $A \otimes \_ \dashv A \multimap \_$ (за $A = B = +$) су илустроване сљедећим цртежима.

$\eta_{A,B} =$  $\varepsilon_{A,B} =$ 

Троугаоне једнакости (1.5) сада добијају сљедећи облик.





1.5 Семи-адитивне категорије

Да бисмо дошли до дефиниције семи-адитивне категорије, прво ћемо увести појам обогаћене категорије.

Дефиниција 1.20. *Обогаћена категорија* $\mathcal{A}$ над моноидалном категоријом $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, I)$ је задата скупом објеката $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$, при чему важи сљедеће:

- за свака два објекта A и B из $\mathcal{A}$, постоји $\mathcal{A}(A,B) \in \mathrm{ob}(\mathcal{V})$;
- за свака три објекта A, B и C из $\mathcal{A}$, постоји стрелица $\circ : \mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(B,C) \to \mathcal{A}(A,C)$ у $\mathcal{V}$;
- за сваки објекат A из $\mathcal{A}$ постоји стрелица $\mathrm{id}_A : I \to \mathcal{A}(A,A)$ у $\mathcal{V}$;
- сљедећи дијаграми комутирају:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B) \otimes (\mathcal{A}(B,C) \otimes \mathcal{A}(C,D)) \arrow[r, "\mathbb{1}_{\mathcal{A}(A,B)} \otimes \circ"] \arrow[dd, "\alpha"'] & \mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(B,D) \arrow[d, "\circ"] \\
 & \mathcal{A}(A,D) \\
(\mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(B,C)) \otimes \mathcal{A}(C,D) \arrow[r, "\circ \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}(C,D)}"'] & \mathcal{A}(A,C) \otimes \mathcal{A}(C,D) \arrow[u, "\circ"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[rr, "\mathrm{id}_A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{A}(A,B)}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & \mathcal{A}(A,A) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[dl, "\circ"] \\
 & \mathcal{A}(A,B) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B) \otimes I \arrow[rr, "\mathbb{1}_{\mathcal{A}(A,B)} \otimes \mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(B,B) \arrow[dl, "\circ"] \\
 & \mathcal{A}(A,B) &
\end{tikzcd}.$$

Дефиниција 1.21. Кажемо да је категорија *семи-адитивна* ако је обогаћена над моноидалном категоријом **Cmd**.

Нека су $(A, +, 0_A)$, $(B, +, 0_B)$ и $(C, +, 0_C)$ комутативни моноиди. Подсјетимо се да је $f : A \times B \to C$ *билинеарно* пресликавање између комутативних моноида када за свако a_1, a_2, a из A и b_1, b_2, b из B важи

- $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$;
- $f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$;
- $f(a, 0_B) = 0_C = f(0_A, b)$.

Другим ријечима, ако фиксирамо било који аргумент билинеарног пресликавања f, пресликавање које настаје је хомоморфизам комутативних моноида.

Напомена 1.8. Сваком хомоморфизму $f : A \otimes B \to C$ између комутативних моноида одговара билинеарно пресликавање $g : A \times B \to C$ дефинисано са $g(a, b) = f(a \otimes b)$. Дакле, ако је категорија $\mathcal{A}$ обогаћена над моноидалном категоријом **Cmd**, то значи да за свака два објекта A и B из $\mathcal{A}$ постоје бинарна операција $+ : \mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(A, B)$ и константа $0_{A,B} \in \mathcal{A}(A, B)$ такве да важи:

(1) $(\mathcal{A}(A, B), +, 0_{A,B})$ је комутативни моноид;

(2) $h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g)$, за $f, g \in \mathcal{A}(A, B)$ и $h \in \mathcal{A}(B, C)$;

(3) $(f + g) \circ u = (f \circ u) + (g \circ u)$ за $f, g \in \mathcal{A}(A, B)$ и $u \in \mathcal{A}(C, A)$;

(4) $h \circ 0_{A,B} = 0_{A,C}$ и $0_{A,B} \circ u = 0_{C,B}$, за $h \in \mathcal{A}(B, C)$ и $u \in \mathcal{A}(C, A)$.

Примјер 1.7. Није тешко видјети да су категорије $\mathbf{Rel}, \mathbf{Cmd}, \mathbf{Vect}_K, \mathbf{FinVect}_K, \mathbf{Hilb}$ и **FinHilb** из примјера 1.1 семи-адитивне.

1.6 Копроизводи, производи и бипроизводи

1.6.1 Дефиниције и примјери

Дефиниција 1.22. *Копроизвод* објеката A и B у категорији $\mathcal{A}$ се састоји од објекта $A \sqcup B$ и стрелица $\iota^1_{A,B} : A \to A \sqcup B$ и $\iota^2_{A,B} : B \to A \sqcup B$ које називамо *инјекције*, при чему за сваки објекат C и стрелице $f : A \to C$ и $g : B \to C$ постоји јединствена стрелица $h : A \sqcup B \to C$ таква да дијаграм

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota^1_{A,B}"] \arrow[dr, "f"'] & A \sqcup B \arrow[d, dashed, "h"] & B \arrow[l, "\iota^2_{A,B}"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

комутира. Стрелицу h обиљежавамо са $[f, g]$. Доње индексе у инјекцијама ћемо изостављати када њихово одсуство не изазива двосмисленост. Аналогно дефинишемо и копроизвод произвољне фамилије објеката.

Дефиниција 1.23. *Производ* објеката A и B у категорији $\mathcal{A}$ се састоји од објекта $A \times B$ и стрелица $\pi^1_{A,B} : A \times B \to A$ и $\pi^2_{A,B} : A \times B \to B$ које називамо *пројекције*, при чему за сваки објекат C и стрелице $f : C \to A$ и $g : C \to B$ постоји јединствена стрелица $h : C \to A \times B$ таква да дијаграм

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi^1_{A,B}"] \arrow[r, "\pi^2_{A,B}"'] & B \end{tikzcd}$$

комутира. Стрелицу h обиљежавамо са $\langle f, g \rangle$. Доње индексе у пројекцијама ћемо изостављати када њихово одсуство не изазива двосмисленост. Аналогно дефинишемо и производ произвољне фамилије објеката.

Дефиниција 1.24. *Иницијални објекат* категорије $\mathcal{A}$ је објекат $K \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ такав да за сваки објекат $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ постоји јединствена стрелица $K \to A$, коју обиљежавамо са κ_A. Дуално, *терминални објекат* категорије $\mathcal{A}$ је објекат $T \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ такав да за свако $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ постоји јединствена стрелица $A \to T$, коју обиљежавамо са τ_A. Објекат који је истовремено и иницијални и терминални називамо *нула објекат* и обиљежавамо са 0. За свака два објекта A и B категорије $\mathcal{A}$ која има нула објекат стрелицу $A \to 0 \to B$ називамо *нула стрелица* и обиљежавамо са $0_{A,B}$.

Напомена 1.9. Није тешко видјети да ако категорија $\mathcal{A}$ има иницијални објекат, он је јединствен до на изоморфизам. Слиједи да је и нула објекат јединствен до на изоморфизам. Исто важи и за терминални објекат. Такође, нула стрелица између свака два објекта A и B је јединствена. Заиста, нека су 0 и $0'$ нула објекти и претпоставимо да имамо нула стрелице $g \circ f$ и $v \circ u$ као на сљедећем дијаграму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u"'] & 0 \arrow[r, "g"] & B \\ & 0' \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd} .$$

Докажимо да је $v \circ u = g \circ f$. Нека је h јединствена стрелица између $0'$ и 0. Пошто је $0'$ иницијални објекат, имамо $v = g \circ h$. Слично, пошто је 0 терминални објекат, важи $f = h \circ u$. Дакле, $v \circ u = g \circ h \circ u = g \circ f$.

Дефиниција 1.25. Нека је $\mathcal{A}$ категорија са нула објектом. *Бипроизвод* објеката A и B у категорији $\mathcal{A}$ је објекат $A \oplus B$ који је истовремено и копроизвод са инјекцијама $\iota^1_{A,B} : A \to A \oplus B$, $\iota^2_{A,B} : B \to A \oplus B$ и производ са пројекцијама $\pi^1_{A,B} : A \oplus B \to A$, $\pi^2_{A,B} : A \oplus B \to B$, при чему важе једнакости

$$\begin{aligned} \pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} &= \mathbb{1}_A, & \pi^2_{A,B} \circ \iota^2_{A,B} &= \mathbb{1}_B, \\ \pi^2_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} &= 0_{A,B}, & \pi^1_{A,B} \circ \iota^2_{A,B} &= 0_{B,A}. \end{aligned}$$

Напомена 1.10. У стандардној дефиницији из [28, VIII.2], бипроизвод објеката A и B из $\mathcal{A}$ се дефинише као објекат $A \oplus B$ заједно са стрелицама $\iota^1_{A,B} : A \to A \oplus B$, $\iota^2_{A,B} : B \to A \oplus B$, $\pi^1_{A,B} : A \oplus B \to A$ и $\pi^2_{A,B} : A \oplus B \to B$, при чему важе једнакости

$$\pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} = \mathbb{1}_A, \quad \pi^2_{A,B} \circ \iota^2_{A,B} = \mathbb{1}_B, \quad \iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B} + \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B} = \mathbb{1}_{A \oplus B}.$$

Наравно, да би претходне једнакости уопште имале смисла, потребно је претпоставити да је категорија $\mathcal{A}$ семи-адитивна, то јест обогаћена над **Cmd**. Наша дефиниција 1.25 је мало општија, јер захтијевамо постојање само нула стрелица у $\mathcal{A}$ (што је еквивалентно томе да је $\mathcal{A}$ обогаћена над категоријом $\mathbf{Set}^*$), али не и постојање операције сабирања стрелица (то јест обогаћење над **Cmd**). У семи-адитивној категорији поменуте двије дефиниције су еквивалентне (в. [28, VIII.2, Theorem 2]).

Међутим, напоменимо да у недавно објављеном раду [18], аутор даје дефиницију бипроизвода у произвољној категорији, не претпостављајући никакво обогаћење (в. [18, Definition 3.1]).

У случају произвољне (могуће и бесконачне) фамилије објеката, имамо сљедећу дефиницију бипроизвода.

Дефиниција 1.26. Нека је $\mathcal{A}$ категорија са нула објектом. *Бипроизвод* фамилије објеката $\{A_j \mid j \in J\}$ у категорији $\mathcal{A}$ је објекат B који је истовремено и копроизвод са инјекцијама $\{\iota^j \colon A_j \to B \mid j \in J\}$ и производ са пројекцијама $\{\pi^j \colon B \to A_j \mid j \in J\}$, при чему за свако $i, j \in J$ важе једнакости

$$\pi^j \circ \iota^i = \begin{cases} \mathbb{1}_{A_i}, & i = j, \\ 0_{A_i, A_j}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Дефиниција 1.27. Кажемо да је $\mathcal{A}$ *категорија са бипроизводима* ако $\mathcal{A}$ има нула објекат, и ако за сваки пар објеката A и B из $\mathcal{A}$ постоји копроизвод $A \oplus B$.

Примијетимо да категорија са бипроизводима има све коначне, али не нужно и бесконачне бипроизводе.

Примјер 1.8. (1) Категорија **Set** има произвољне копроизводе дате дисјунктном унијом и произвољне производе дате Декартовим производом. Иницијални објекат у **Set** је празан скуп, а терминални је било који синглтон. Међутим, **Set** нема ни нула објекат ни бипроизводе.

(2) Категорија $\mathbf{Set}^*$ има произвољне копроизводе и производе. Копроизвод у $\mathbf{Set}^*$ је *клинаста сума*[6] (дисјунктна унија у којој су истакнтути елементи идентификовани и чине нови истакнути елемент), а производ је Декартов производ скупова са истакнутим елементом (истакнути елемент производа два скупа је уређени пар истакнутих елемената тих скупова). Сваки синглтон је нула објекат у $\mathbf{Set}^*$, али $\mathbf{Set}^*$ није категорија са бипроизводима.

(3) Категорија **Rel** има произвољне (укључујући и бесконачне) †-бипроизводе дате дисјунктном унијом и стандардно дефинисаним инјекцијама, а пројекције су дефинисане као инверзи одговарајућих инјекција.

(4) Категорија **Cmd** има произвољне копроизводе дате директном сумом и произвољне производе дате Декартовим производом. Они се поклапају на коначним фамилијама објеката, тако да **Cmd** има коначне бипроизводе.

(5) Категорија **Top** има произвољне копроизводе дате дисјунктном унијом и произвољне производе дате Декартовим производом тополошких простора са производ топологијом, али **Top** није категорија са бипроизводима.

(6) Слично као **Cmd**, и категорија $\mathbf{Vect}_K$ има произвољне копроизводе дате директном сумом и произвољне производе дате Декартовим производом, али има само коначне бипроизводе. Такође, категорија $\mathbf{FinVect}_K$ има само коначне бипроизводе.

(7) Категорија **Hilb** наслијеђује коначне бипроизводе из $\mathbf{Vect}_K$. Штавише, у **Hilb** имамо †-бипроизводе. Скаларни производ на $H \oplus K$ је дефинисан са

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_{H \oplus K} = \langle x_1, y_1 \rangle_H + \langle x_1, y_1 \rangle_K.$$

Међутим, **Hilb** нема бесконачне копроизводе, па самим тим нема ни бесконачне бипроизводе (в. [14, Lemma 2.3.13]). Такође, категорија **FinHilb** има само коначне †-бипроизводе.

[6] енг. *wedge sum*

1.6.2 Основна својства

Копроизвод и производ такође можемо дефинисати и на стрелицама.

Дефиниција 1.28. Ако категорија $\mathcal{A}$ има копроизводе $A \sqcup B$ и $C \sqcup D$, онда за стрелице $f : A \to C$ и $g : B \to D$ дефинишемо $f \sqcup g : A \sqcup B \to C \sqcup D$ као јединствену стрелицу за коју дијаграм

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota^1_{A,B}"] \arrow[d, "f"'] & A \sqcup B \arrow[d, dashed, "f \sqcup g"] & B \arrow[l, "\iota^2_{A,B}"'] \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "\iota^1_{C,D}"'] & C \sqcup D & D \arrow[l, "\iota^2_{C,D}"]
\end{tikzcd}$$

комутира. Другим ријечима, $f \sqcup g \stackrel{\text{def}}{=} [\iota^1_{C,D} \circ f, \iota^2_{C,D} \circ g]$. Стрелицу $f \sqcup g$ називамо *копроизвод стрелица* f и g.

Дефиниција 1.29. Ако категорија $\mathcal{A}$ има производе $A \times B$ и $C \times D$, онда за стрелице $f : A \to C$ и $g : B \to D$ дефинишемо $f \times g : A \times B \to C \times D$ као јединствену стрелицу за коју дијаграм

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi^1_{A,B}"'] \arrow[r, "\pi^2_{A,B}"] \arrow[d, dashed, "f \times g"] & B \arrow[d, "g"] \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi^1_{C,D}"] \arrow[r, "\pi^2_{C,D}"'] & D
\end{tikzcd}$$

комутира. Другим ријечима, $f \times g \stackrel{\text{def}}{=} \langle f \circ \pi^1_{A,B}, g \circ \pi^2_{A,B} \rangle$. Стрелицу $f \times g$ називамо *производ стрелица* f и g.

Лема 1.12. *(1) За $f, g : A \sqcup B \to C$, гдје је $A \sqcup B$ копроизвод, важи да је $f \circ \iota^1_{A,B} = g \circ \iota^1_{A,B}$ и $f \circ \iota^2_{A,B} = g \circ \iota^2_{A,B}$ ако и само ако је $f = g$.*

(2) За $f, g : C \to A \times B$, гдје је $A \times B$ производ, важи да је $\pi^1_{A,B} \circ f = \pi^1_{A,B} \circ g$ и $\pi^2_{A,B} \circ f = \pi^2_{A,B} \circ g$ ако и само ако је $f = g$.

Доказ. Доказаћемо само (1), пошто се (2) доказује аналогно. Нека је $u = f \circ \iota^1_{A,B} = g \circ \iota^1_{A,B}$ и $v = f \circ \iota^2_{A,B} = g \circ \iota^2_{A,B}$. Тада је u стрелица из A у C, а v стрелица из B у C. Знамо да је $A \sqcup B$ копроизвод, па постоји јединствена стрелица $h : A \sqcup B \to C$ за коју је $u = h \circ \iota^1_{A,B}$ и $v = h \circ \iota^2_{A,B}$. Пошто претходне једнакости важе када ставимо $h = f$ и $h = g$, закључујемо да је $h = f = g$. Други смјер слиједи директно. □

Лема 1.13. *(1) Нека је $A \sqcup B$ копроизвод и $f : A \to C$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$ стрелице. Тада је $h \circ [f, g] = [h \circ f, h \circ g]$.*

(2) Нека су $A_1 \sqcup B_1$, $A_2 \sqcup B_2$ копроизводи и $f_1 : A_1 \to A_2$, $f_2 : A_2 \to C$, $g_1 : B_1 \to B_2$, $g_2 : B_2 \to C$ стрелице. Тада је $[f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1] = [f_2, g_2] \circ (f_1 \sqcup g_1)$.

(3) Нека су $A_1 \sqcup B_1$, $A_2 \sqcup B_2$ копроизводи и $f_1 : A_1 \to A_2$, $f_2 : A_2 \to C$, $g_1 : B_1 \to B_2$, $g_2 : B_2 \to C$ стрелице. Тада је $(f_2 \sqcup g_2) \circ (f_1 \sqcup g_1) = (f_2 \circ f_1) \sqcup (g_2 \circ g_1)$.

Доказ. (1) Из дефиниције копроизвода слиједи да је $[h \circ f, h \circ g]$ јединствена стрелица за коју важи $[h \circ f, h \circ g] \circ \iota^1 = h \circ f$ и $[h \circ f, h \circ g] \circ \iota^2 = h \circ g$. Међутим, такође важи и $h \circ [f, g] \circ \iota^1 = h \circ f$, као и $h \circ [f, g] \circ \iota^2 = h \circ g$, па тражена једнакост слиједи из јединствености стрелице $[h \circ f, h \circ g]$.

(2) Користећи дефиницију стрелице $f_1 \sqcup g_1$ и особину (1), имамо

$$\begin{aligned}[f_2, g_2] \circ (f_1 \sqcup g_1) &= [f_2, g_2] \circ [\iota^1 \circ f_1, \iota^2 \circ g_1] \\ &= [[f_2, g_2] \circ \iota^1 \circ f_1, [f_2, g_2] \circ \iota^2 \circ g_1] \\ &= [f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1].\end{aligned}$$

(3) Користећи поново дефиницију копроизвода стрелица и особину (2), имамо

$$\begin{aligned}(f_2 \sqcup g_2) \circ (f_1 + g_1) &= [\iota^1 \circ f_2, \iota^2 \circ g_2] \circ (f_1 + g_1) \\ &= [\iota^1 \circ f_2 \circ f_1, \iota^2 \circ g_2 \circ g_1] \\ &= (f_2 \circ f_1) + (g_2 \circ g_1).\end{aligned}$$

□

Важи и дуална варијанта претходне леме, коју наводимо без доказа.

Лема 1.14. *(1) Нека је $A \times B$ производ и $f : C \to A$, $g : C \to B$, $h : D \to C$ стрелице. Тада је $\langle f, g \rangle \circ h = \langle f \circ h, g \circ h \rangle$.*

(2) Нека су $A_1 \times B_1$, $A_2 \times B_2$ производи и $f_1 : C \to A_1$, $f_2 : A_1 \to A_2$, $g_1 : C \to B_1$, $g_2 : B_1 \to B_2$ стрелице. Тада је $\langle f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1 \rangle = (f_2 \times g_2) \circ \langle f_1, g_1 \rangle$.

(3) Нека су $A_1 \times B_1$, $A_2 \times B_2$ производи и $f_1 : C \to A_1$, $f_2 : A_1 \to A_2$, $g_1 : C \to B_1$, $g_2 : B_1 \to B_2$ стрелице. Тада је $(f_2 \times g_2) \circ (f_1 \times g_1) = (f_2 \circ f_1) \times (g_2 \circ g_1)$.

Из леме 1.13 слиједи да ако је $\mathcal{A}$ категорија у којој за сваки пар објеката A и B постоји копроизвод $A \sqcup B$, тада је $\sqcup : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ бифунктор. Слично, ако је $\mathcal{A}$ категорија у којој за сваки пар објеката A и B постоји производ $A \times B$, из леме 1.14 слиједи да је $\times : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ бифунктор.

Дефиниција 1.30. Нека је A објекат категорије $\mathcal{A}$ у којој постоји копроизвод $A \sqcup A$. Тада стрелицу $[\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A] : A \sqcup A \to A$ називамо *кодијагонално пресликавање* и обиљежавамо са ∇_A. Слично, за објекат A категорије $\mathcal{A}$ у којој постоји производ $A \times A$, стрелицу $\langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A \rangle : A \to A \times A$ називамо *дијагонално пресликавање* и обиљежавамо са Δ_A.

Напомена 1.11. Нека је $\mathcal{A}$ категорија са бипроизводима и нека су $f, g : A \to B$ произвољне стрелице у $\mathcal{A}$. Тада можемо дефинисати $f + g$ као $\nabla_B \circ (f \oplus g) \circ \Delta_A$. Лако се провјери да је овако дефинисана операција $+$ на стрелицама од A до B комутативна и да је њен неутрал $0_{A,B}$. Такође, композиција је дистрибутивна у односу на $+$. Дакле, свака категорија са бипроизводима је семи-адитивна.

Лема 1.15. *Нека је $\mathcal{A}$ категорија у којој постоје бипроизводи $A \oplus B$ и $C \oplus D$. Тада за стрелице $f : A \to C$ и $g : B \to D$ важи $f \sqcup g = f \times g$.*

Доказ. Посматрајмо сљедећи дијаграм

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, leftarrow, shift left, "\pi^1_{A,B}"] \arrow[r, shift right, "\iota^1_{A,B}"'] \arrow[d, "f"'] & A \oplus B \arrow[r, shift left, "\pi^2_{A,B}"] \arrow[r, leftarrow, shift right, "\iota^2_{A,B}"'] \arrow[d, dashed, "f \sqcup g"] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, leftarrow, shift left, "\pi^1_{C,D}"] \arrow[r, shift right, "\iota^1_{C,D}"'] & C \oplus D \arrow[r, shift left, "\pi^2_{C,D}"] \arrow[r, leftarrow, shift right, "\iota^2_{C,D}"'] & D
\end{tikzcd}.$$

Из дефиниције стрелице $f \sqcup g$ слиједи да је

$$(f \sqcup g) \circ \iota^1_{A,B} = \iota^1_{C,D} \circ f \quad \text{и} \quad (f \sqcup g) \circ \iota^2_{A,B} = \iota^2_{C,D} \circ g \tag{1.17}$$

док из дефиниције стрелице $f \times g$ имамо

$$\pi^1_{C,D} \circ (f \times g) = f \circ \pi^1_{A,B} \quad \text{и} \quad \pi^2_{C,D} \circ (f \times g) = g \circ \pi^2_{A,B}.$$

Посткомпоновањем једнакости (1.17) са $\pi^1_{C,D}$ добијамо

$$\pi^1_{C,D} \circ (f \sqcup g) \circ \iota^1_{A,B} = f \quad \text{и} \quad \pi^1_{C,D} \circ (f \sqcup g) \circ \iota^2_{A,B} = 0_{B,C}. \tag{1.18}$$

Са друге стране, имамо да је

$$f = f \circ \pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} \quad \text{и} \quad 0_{B,C} = f \circ \pi^1_{A,B} \circ \iota^2_{A,B},$$

одакле у комбинацији са једнакостима (1.18) слиједи

$$\begin{aligned} \pi^1_{C,D} \circ (f \sqcup g) \circ \iota^1_{A,B} &= f \circ \pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} \\ \pi^1_{C,D} \circ (f \sqcup g) \circ \iota^2_{A,B} &= f \circ \pi^1_{A,B} \circ \iota^2_{A,B}. \end{aligned}$$

Претходне једнакости и лема 1.12 дају $\pi^1_{C,D} \circ (f \sqcup g) = f \circ \pi^1_{A,B}$.

Слично, посткомпоновањем једнакости (1.17) са $\pi^2_{C,D}$ и поновним коришћењем леме 1.12 добијамо $\pi^2_{C,D} \circ (f \sqcup g) = g \circ \pi^2_{A,B}$. Сада из дефиниције стрелице $f \times g$ слиједи $f \sqcup g = f \times g$. □

Напомена 1.12. Нека је $\mathcal{A}$ категорија са бипроизводима. Из претходне леме слиједи да за сваке двије стрелице f и g можемо дефинисати $f \oplus g$ као $f \sqcup g$ (или $f \times g$). Користећи лему 1.13 добијамо да је $\oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ бифунктор.

Дефиниција 1.31. Нека је $\mathcal{A}$ категорија са бипроизводима и инволуцијом. Кажемо да $\mathcal{A}$ *категорија са* $\dagger$*-бипроизводима* ако за свака два објекта A и B из $\mathcal{A}$ важи $\iota^1_{A,B} = (\pi^1_{A,B})^\dagger$ и $\iota^2_{A,B} = (\pi^2_{A,B})^\dagger$.

Докажимо сада сљедећу лему која ће нам бити потребна у глави 3.

Лема 1.16. *У категорији $\mathcal{A}$ са инволуцијом и $\dagger$-бипроизводима важи*

(1) $(f \oplus g)^\dagger = f^\dagger \oplus g^\dagger$ за $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$;

(2) $(f + g)^\dagger = f^\dagger + g^\dagger$ за $f, g : A \to B$ (+ је дефинисан као у напомени 1.11).

Доказ. (1) Лако се покаже да у категорији $\mathcal{A}$ важи $[u, v]^\dagger = \langle u^\dagger, v^\dagger \rangle$. Сада користећи дефиницију од $f \oplus g$ и особине функтора $\dagger$, имамо

$$\begin{aligned} (f \oplus g)^\dagger &= [\iota^1_{A',B'} \circ f, \iota^2_{A',B'} \circ g]^\dagger = \langle (\iota^1_{A',B'} \circ f)^\dagger, (\iota^2_{A',B'} \circ g)^\dagger \rangle \\ &= \langle f^\dagger \circ \pi^1_{A',B'}, g^\dagger \circ \pi^2_{A',B'} \rangle = f^\dagger \oplus g^\dagger. \end{aligned}$$

(2) Из $[u, v]^\dagger = \langle u^\dagger, v^\dagger \rangle$ имамо $\nabla^\dagger_B = \Delta_B$ и $\Delta^\dagger_A = \nabla_A$. Сада тврђење слиједи из првог дијела леме и једнакости $f + g = \nabla_B \circ (f \oplus g) \circ \Delta_A$. □

Сљедећа дефиниција ће нам бити потребна у глави 4.

Дефиниција 1.32. Нека је

$$A \xrightarrow{\iota^1_{A,B}} A \sqcup B \xleftarrow{\iota^2_{A,B}} B$$

копроизвод дијаграм у категорији $\mathcal{A}$. Кажемо да функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *чува копроизвод* $A \sqcup B$ ако је

$$FA \xrightarrow{F\iota^1_{A,B}} F(A \sqcup B) \xleftarrow{F\iota^2_{A,B}} FB$$

копроизвод дијаграм у категорији $\mathcal{B}$.

Аналогно се дефинише и функтор који *чува производ*.

Глава 2

Кохеренција за симетричне моноидално затворене категорије

Г.М. Кели и С. Меклејн су 1971. године доказали теорему кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије ([21, Theorem 2.4]). Њихов доказ је инспирисан радовима Ламбека [26] и [27], у којима се разматра сличан проблем за формалне системе блиско повезане са моноидално затвореним категоријама. Као што смо већ поменули у уводу, Ламбек у овим радовима повезује категорије и формалне системе, што му омогућава да у теорији категорија користи технике теорије доказа. Конкретно, омогућава се коришћење једног од најважнијих резултата теорије доказа, а то је Генценова теорема о елиминацији сјечења из [13] (за енглески превод в. [12]).

Из поменутих Ламбекових радова (тачније, из Ламбекових верзија теореме о елиминацији сјечења) Кели и Меклејн су преузели идеју о „елиминацији композиције", која представља један од кључних елемената у њиховом доказу. То је поступак у коме композицију стрелица у категорији замјењују другим операцијама које су сложеније, али погодније за индуктивне доказе (заправо, дозвољава се одређена „контролисана" употреба композиције, в. [21, Proposition 6.4]).

Напоменимо да Ламбекове верзије теореме о елиминацији сјечења из [26] и [27] представљају појачање Генценове теореме о елиминацији сјечења. Наиме, Генценова елиминација сјечења каже да за сваки доказ φ неког секвента постоји доказ ψ истог тог секвента у коме се не појављује сјечење, док Ламбекове верзије додатно тврде да су докази φ и ψ *еквивалентни* (за дефиницију еквиваленције доказа в. [26, Section 2]).

У овој глави представљамо нови доказ теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије, у коме користимо технике теорије доказа. Напоменимо да се и сама формулација теореме кохеренције коју дајемо у овој глави мало разликује од формулације из [21]. Наша теорема је формулисана у контексту стрелица слободне симетричне моноидално затворене категорије, а не у контексту природних трансформација, као што је случај у [21]. Осим тога, умјесто Кели-Меклејнових графова који служе као графички језик у [21], овдје користимо категорију 1-кобордизама.

Наш доказ је изведен је у духу доказа кохеренције из [9] и [7]. Наиме, полазимо од једнакосно дефинисане слободне симетричне моноидално затворене категорије $\mathcal{F}_P$, а затим дефинишемо нови језик који нам служи да означимо стрелице категорије $\mathcal{F}_P$. Овај поступак промјене језика називамо *генценизација* категорије $\mathcal{F}_P$ и он нам омогућава да докажемо теорему о елиминацији сјечења у категорији $\mathcal{F}_P$, слично као што је урађено у [9, Одјељци 7.7 и 11.2] и [7, Одјељак 7]. Елиминација сјечења у нашем доказу представља главни корак, јер нам омогућава да користимо индукцију.

Ова глава садржи двије верзије теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије. Прву верзију (теорема 2.18) формулишемо без коришћења графичког језика (категорије 1-кобордизама), а затим из ње изводимо „класичну” формулацију (теорема 2.20), која много више личи на оригинални Кели-Меклејнов резултат.

2.1 Категорија $\mathcal{F}_P$

У овом одјељку ћемо дефинисати симетричну моноидално затворену категорију $\mathcal{F}_P$ слободно генерисану скупом P исказних слова. Елементе скупа P ћемо у наставку називати просто *слова* и означавати са $p, q, r, \dots$ (могуће са индексима). Објекти категорије $\mathcal{F}_P$ су *формуле* изграђене од слова помоћу два бинарна везника $\otimes, \multimap$ и константе I. Формуле означавамо са $A, B, C, \dots$ (могуће са индексима). Везник $\otimes$ ћемо у наставку називати *тензорски производ*, а везник $\multimap$ ћемо називати *импликација*.

Да бисмо дошли до дефиниције стрелица категорије $\mathcal{F}_P$, треба прво да дефинишемо *терме*. Њих дефинишемо индуктивно на сљедећи начин. Ако су A, B и C формуле, тада имамо *примитивне* терме:

$$\mathbb{1}_A : A \to A, \qquad \sigma_{A,B} \colon A \otimes B \to B \otimes A,$$

$$\alpha_{A,B,C} \colon A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C, \qquad \alpha^{-1}_{A,B,C} \colon (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C),$$

$$\lambda_A \colon I \otimes A \to A, \qquad \lambda^{-1}_A \colon A \to I \otimes A,$$

$$\eta_{A,B} \colon B \to A \multimap (A \otimes B), \qquad \varepsilon_{A,B} \colon A \otimes (A \multimap B) \to B.$$

Остали терми су генерисани помоћу сљедећих операција на термима:

$$\frac{f : A \to B \quad g : B \to C}{g \circ f : A \to C}$$

$$\frac{f : A \to B \quad g : C \to D}{f \otimes g : A \otimes C \to B \otimes D}$$

$$\frac{f : A \to B \quad g : C \to D}{f \multimap g : B \multimap C \to A \multimap D}.$$

Примијетимо да за операције на термима користимо исту нотацију као за правила извођења у секвентним системима, при чему, на примјер, први од претходних записа читамо на сљедећи начин: „ако су $f : A \to B$ и $g : B \to C$ терми, тада је и $g \circ f : A \to C$ терм”. Ако су A и B формуле, израз облика $A \to B$ називамо *тип*. Кажемо да је $A \to B$ тип терма $f : A \to B$, као и да је A *домен* тог терма, а B његов *кодомен*. У наставку ћемо често изостављати тип када пишемо терме и под термом ћемо подразумијевати само израз испред симбола „:”. Терме обиљежавамо са $f, g, h, \dots$ (могуће са индексима).

Посматрајмо сада језик који се састоји од ријечи облика $f = g$, гдје су f и g терми истог типа. У наставку дефинишемо једнакосни систем $\mathcal{E}$ који (осим аксиоме $f = f$) садржи сљедеће аксиоме:

(E1) За $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$ важи

$$f \circ \mathbb{1}_A = f = \mathbb{1}_B \circ f, \qquad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

(E2) За $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $g_1 : A' \to B'$ и $g_2 : B' \to C'$ важи

$$\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\otimes B}, \qquad (f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) = (f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1),$$

(E3) За $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $g_1 : A' \to B'$ и $g_2 : B' \to C'$ важи

$$\mathbb{1}_A \multimap \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\multimap B}, \qquad (f_1 \multimap g_2) \circ (f_2 \multimap g_1) = (f_2 \circ f_1) \multimap (g_2 \circ g_1),$$

(E4) За $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ и $h : C \to C'$ важи

$$((f \otimes g) \otimes h) \circ \alpha_{A,B,C} = \alpha_{A',B',C'} \circ (f \otimes (g \otimes h)),$$

$$\alpha^{-1}_{A,B,C} \circ \alpha_{A,B,C} = \mathbb{1}_{A\otimes(B\otimes C)}, \qquad \alpha_{A,B,C} \circ \alpha^{-1}_{A,B,C} = \mathbb{1}_{(A\otimes B)\otimes C},$$

(E5) За $f : A \to A'$ важи

$$f \circ \lambda_A = \lambda_{A'} \circ (I \otimes f), \qquad \lambda^{-1}_A \circ \lambda_A = \mathbb{1}_{I\otimes A}, \qquad \lambda_A \circ \lambda^{-1}_A = \mathbb{1}_A,$$

(E6) За $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ важи

$$(g \otimes f) \circ \sigma_{A,B} = \sigma_{A',B'} \circ (f \otimes g), \qquad \sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \mathbb{1}_{A\otimes B},$$

(E7) За $g : B \to B'$ важи

$$(A \multimap (A \otimes g)) \circ \eta_{A,B} = \eta_{A,B'} \circ g, \qquad g \circ \varepsilon_{A,B} = \varepsilon_{A,B'} \circ (A \otimes (A \multimap g)),$$

(E8) За $f : A \to A'$ важи

$$(A \multimap (f \otimes B)) \circ \eta_{A,B} = (f \multimap (A' \otimes B)) \circ \eta_{A',B},$$

$$\varepsilon_{A,B} \circ (A \otimes (f \multimap B)) = \varepsilon_{A',B} \circ (f \otimes (A' \multimap B)),$$

(E9) $(A \multimap \varepsilon_{A,B}) \circ \eta_{A,A\multimap B} = \mathbb{1}_{A\multimap B}, \quad \varepsilon_{A,A\otimes B} \circ (A \otimes \eta_{A,B}) = \mathbb{1}_{A\otimes B}$,

(E10) $\alpha_{A\otimes B,C,D} \circ \alpha_{A,B,C\otimes D} = (\alpha_{A,B,C} \otimes D) \circ \alpha_{A,B\otimes C,D} \circ (A \otimes \alpha_{B,C,D})$,

(E11) $\lambda_{A\otimes B} = (\lambda_A \otimes B) \circ \alpha_{I,A,B}$,

(E12) $\alpha_{C,A,B} \circ \sigma_{A\otimes B,C} \circ \alpha_{A,B,C} = (\sigma_{A,C} \otimes B) \circ \alpha_{A,C,B} \circ (A \otimes \sigma_{B,C})$.

Једнакосни систем $\mathcal{E}$ има сљедећа правила извођења:

$$\frac{f = g}{g = f} \qquad \frac{f = g \qquad g = h}{f = h}$$

$$\frac{f_1 = f_2 \qquad g_1 = g_2}{g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2} \qquad \frac{f_1 = f_2 \qquad g_1 = g_2}{f_1 \otimes g_1 = f_2 \otimes g_2} \qquad \frac{f_1 = f_2 \qquad g_1 = g_2}{f_1 \multimap g_1 = f_2 \multimap g_2}$$

(У правилу извођења које се тиче композиције, претпостављамо да су терми f_1, f_2, g_1, g_2 одговарајућег типа). Посматрајмо сада релацију $\equiv$ на скупу терама дефинисану на сљедећи начин

$$f \equiv g \quad \text{када је} \quad f = g \text{ теорема у систему } \mathcal{E}.$$

Није тешко видјети да је $\equiv$ релација еквиваленције. Нека је $[f]$ класа еквиваленције терма f. Тада кажемо да је $[f]$ *стрелица* категорије $\mathcal{F}_P$. *Домен* од $[f]$ дефинишемо као домен од f, *кодомен* од $[f]$ дефинишемо као кодомен од g, а *јединичну стрелицу* на A дефинишемо као $[\mathbb{1}_A]$. За $f : A \to B$ и $g : B \to C$ дефинишемо *композицију* $[g] \circ [f]$ као $[g \circ f]$. Такође, за $f : A \to B$ и $g : C \to D$ дефинишемо $[f] \otimes [g]$ као $[f \otimes g]$ и $[f] \multimap [g]$ као $[f \multimap g]$. (Није тешко провјерити да су све претходне дефиниције коректне.)

Из претходних дефиниција и једнакости (E1) слиједи да $\mathcal{F}_P$ заиста јесте категорија. У наставку ћемо стрелицу $[f]$ означавати само са f, а у композицији стрелица ћемо изостављати заграде без експлицитног позивања на једнакост (E1). Стрелице $\mathbb{1}_A$, $\alpha_{A,B,C}$, $\alpha^{-1}_{A,B,C}$, λ_A, λ^{-1}_A, $\sigma_{A,B}$, $\eta_{A,B}$ и $\varepsilon_{A,B}$ називамо *примитивне стрелице*.

Из (E2)-(E3) слиједи да су $\otimes$ и $\multimap$ бифунктори. Из (E4)-(E6) слиједи да су α, λ и σ природни изоморфизми. Из (E7) слиједи да су η и ε природне трансформације, а из (E8) да су и диприродне, док из (E9) слиједи да важе троугаоне једнакости. Једнакости (E10)-(E12) обезбјеђују да у $\mathcal{F}_P$ важе кохеренцијски услови.

Из (E1)-(E2), (E4)-(E6), (E10)-(E12) слиједи да је $\mathcal{F}_P$ симетрична моноидална категорија. Из (E2), (E4), (E7) и (E9) уз помоћ [28, IV.1, Theorem 2(v)] слиједи да је за свако A функтор $A \multimap \_$ десни адјункт функтора $A \otimes \_$. Дакле, $\mathcal{F}_P$ је симетрична моноидално затворена категорија. Са друге стране, није тешко провјерити да у свакој симетричној моноидално затвореној категорији важе једнакости (E1)-(E12).

Штавише, $\mathcal{F}_P$ је *слободно генерисана* скупом P, у смислу да за сваку симетричну моноидално затворену категорију $\mathcal{C}$ и за сваку функцију $f : P \to \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ постоји јединствен стриктни симетрични моноидално затворени функтор (који стриктно чува симетричну моноидално затворену структуру) $F : \mathcal{F}_P \to \mathcal{C}$ такав да је $F(p) = f(p)$ за свако $p \in P$.

На крају овог одјељка докажимо двије леме које ћемо користити у наставку. За формулацију прве леме нам је потребан сљедећи појам.

Дефиниција 2.1. Кажемо да је објекат категорије $\mathcal{F}_P$ *константан* ако не садржи ниједно исказно слово (то јест, изграђен је само од константе I).

Лема 2.1. *Нека је A константан објекат категорије $\mathcal{F}_P$. Тада постоји изоморфизам $k : A \to I$.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по броју појављивања везника $\otimes$ и $\multimap$ у објекту A. Ако се у A не појављује $\otimes$ и $\multimap$, тада је $A = I$, па база индукције тривијално важи.

Претпоставимо да је $A = A_1 \otimes A_2$. Из индуктивне хипотезе слиједи да постоје изоморфизми $k_1 : A_1 \to I$ и $k_2 : A_2 \to I$. Нека је $k = \lambda_I \circ (k_1 \otimes k_2)$. Тада није тешко видјети да је k изоморфизам чији је инверз $k^{-1} = (k_1^{-1} \otimes k_2^{-1}) \circ \lambda_I^{-1}$.

Претпоставимо сада да је $A = A_1 \multimap A_2$. Поново из индуктивне хипотезе слиједи да постоје изоморфизми $k_1 : A_1 \to I$ и $k_2 : A_2 \to I$. Нека је $k = \varepsilon_{I,I} \circ \lambda^{-1}_{I \multimap I} \circ (k_1^{-1} \multimap k_2)$. Докажимо да је k изоморфизам чији је инверз $k^{-1} = (k_1 \multimap k_2^{-1}) \circ (I \multimap \lambda_I) \circ \eta_{I,I}$. Имамо да је

$$
\begin{aligned}
k \circ k^{-1} &= \varepsilon_{I,I} \circ \lambda^{-1}_{I \multimap I} \circ (k_1^{-1} \multimap k_2) \circ (k_1 \multimap k_2^{-1}) \circ (I \multimap \lambda_I) \circ \eta_{I,I} \\
&= \varepsilon_{I,I} \circ \lambda^{-1}_{I \multimap I} \circ (I \multimap \lambda_I) \circ \eta_{I,I} = \varepsilon_{I,I} \circ (I \otimes (I \multimap \lambda_I)) \circ \lambda^{-1}_{I \multimap (I \otimes I)} \circ \eta_{I,I} \qquad (2.1) \\
&= \lambda_I \circ \varepsilon_{I,I \otimes I} \circ (I \otimes \eta_{I,I}) \circ \lambda_I^{-1} = \lambda_I \circ \mathbb{1}_{I \otimes I} \circ \lambda_I^{-1} = \mathbb{1}_I, \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

при чему смо у (2.1) користили бифункторијалност импликације и природност од $\lambda^{-1}_{I \multimap I}$, а у (2.2) смо користили природност од $\varepsilon_{I,I}$, природност од $\lambda^{-1}_{I \multimap (I \otimes I)}$ и троугаону једнакост.

Са друге стране, да бисмо доказали да је $k^{-1} \circ k = \mathbb{1}_{I \multimap I}$, треба да докажемо једнакост

$$(2.3) \qquad (k_1 \multimap k_2^{-1}) \circ (I \multimap \lambda_I) \circ \eta_{I,I} \circ \varepsilon_{I,I} \circ \lambda_{I \multimap I}^{-1} \circ (k_1^{-1} \multimap k_2) = \mathbb{1}_{I \multimap I}.$$

Означимо $(I \multimap \lambda_I) \circ \eta_{I,I} \circ \varepsilon_{I,I} \circ \lambda_{I \multimap I}^{-1}$ са S. Да бисмо показали једнакост (2.3), треба да покажемо да је $S = \mathbb{1}_{I \multimap I}$. Имамо да је

$$\begin{aligned}
&(2.4) \quad & S &= (I \multimap \lambda_I) \circ \eta_{I,I} \circ \varepsilon_{I,I} \circ \lambda_{I \multimap I}^{-1} = (I \multimap \lambda_I) \circ (I \multimap (I \otimes \varepsilon_{I,I})) \circ \eta_{I,I} \circ \lambda_{I \multimap I}^{-1} \\
&(2.5) & &= (I \multimap (\lambda_I \circ (I \otimes \varepsilon_{I,I}))) \circ \eta_{I,I} \circ \lambda_{I \multimap I}^{-1} = (I \multimap (\varepsilon_{I,I} \circ \lambda_{I \otimes (I \multimap I)})) \circ \eta_{I,I} \circ \lambda_{I \multimap I}^{-1} \\
&(2.6) & &= (I \multimap \varepsilon_{I,I}) \circ (I \multimap \lambda_{I \otimes (I \multimap I)}) \circ (I \multimap (I \otimes \lambda_{I \multimap I}^{-1})) \circ \eta_{I, I \multimap I} \\
& & &= (I \multimap \varepsilon_{I,I}) \circ (I \multimap (\lambda_{I \otimes (I \multimap I)} \circ (I \otimes \lambda_{I \multimap I}^{-1}))) \circ \eta_{I, I \multimap I} \\
&(2.7) & &= (I \multimap \varepsilon_{I,I}) \circ (I \multimap (\lambda_{I \multimap I}^{-1} \circ \lambda_{I \multimap I})) \circ \eta_{I, I \multimap I} = \mathbb{1}_{I \multimap I},
\end{aligned}$$

при чему смо (осим бифункторијалности импликације) у (2.4) користили природност од $\eta_{I,I}$, у (2.5) природност од λ_I, у (2.6) поново природност од $\eta_{I,I}$, и у (2.7) природност од $\lambda_{I \otimes (I \multimap I)}$ и троугаону једнакост. $\square$

У доказу сљедеће леме биће нам потребан појам *сложеностӣи* стрелице. То је укупан број симбола $\circ$, $\otimes$ и $\multimap$ који учествују у њеном грађењу. Формална дефиниција је индуктивна.

Дефиниција 2.2. *Сложеностӣ* стрелице f, у ознаци $d(f)$, дефинишемо индуктивно на сљедећи начин:

(1) ако је f примитивна стрелица, тада је $d(f) = 0$;

(2) ако је f облика $f_2 \circ f_1$, $f_1 \otimes f_2$ или $f_1 \multimap f_2$, тада је $d(f) = d(f_1) + d(f_2) + 1$.

Лема 2.2. *Нека је $f : A \to B$ сӣрелица каӣеīорије $\mathcal{F}_P$. Тада се свако исказно слово у ӣиӣу $A \to B$ ӣојављује ӣаран број ӣуӣа.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по сложености стрелице f. Ако је f сложености 0, тада је f примитивна стрелица, па тврђење леме тривијално важи.

Претпоставимо сада да је $f = f_2 \circ f_1$ за $f_1 : A \to C$ и $f_2 : C \to B$. Нека је p произвољно слово које се појављује у типу $A \to B$. Претпоставимо да се p појављује a пута у A, b пута у B и c пута у C. Из индуктивне хипотезе слиједи да су бројеви $a + c$ и $b + c$ парни. Пошто је $a + b = (a + c) + (b + c) - 2c$, закључујемо да је и $a + b$ паран број. Међутим, $a + b$ је управо број појављивања слова p у типу $A \to B$, па тврђење леме важи. Слично разматрамо и случајеве када је f облика $f_1 \otimes f_2$ или $f_1 \multimap f_2$. $\square$

2.2 Генценизација категорије $\mathcal{F}_P$

Под *īенценизацијом* категорије $\mathcal{F}_P$ подразумијевамо промјену језика која ће нам омогућити да докажемо елиминацију сјечења у категорији $\mathcal{F}_P$ (резултат сличан Генценовој елиминацији сјечења у секвентним системима LJ и LK, в. [13, Hauptsatz]). Дефинишимо сада нови језик који ће нам служити да означимо стрелице категорије $\mathcal{F}_P$. Терме тог новог језика називамо *Генценови ӣерми* и дефинишемо их индуктивно на сљедећи начин. *Примиӣивни* Генценови терми су $\mathbb{1}_A : A \to A$, гдје је A исказно слово или константа I. Генценов терм $\mathbb{1}_A : A \to A$ означава стрелицу $\mathbb{1}_A : A \to A$.

Да бисмо дефинисали операције на Генценовим термима, треба прво да уведемо неке помоћне појмове.

Дефиниција 2.3. *Контекстуални функтор* $F : \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P$ дефинишемо индуктивно на сљедећи начин.

(1) Јединични функтор $\mathbb{1}_{\mathcal{F}_P} : \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P$ је контекстуални функтор.

(2) Нека је $F : \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P$ контекстуални функтор и A објекат категорије $\mathcal{F}_P$. Тада је $F \otimes A : \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P$ контекстуални функтор који слика објекат B у $F(B) \otimes A$, а стрелицу f у $F(f) \otimes \mathbb{1}_A$. Слично, $A \otimes F : \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P$ је контекстуални функтор који слика објекат B у $A \otimes F(B)$, а стрелицу f у $\mathbb{1}_A \otimes F(f)$.

Није тешко провјерити да је пресликавање дефинисано у претходној дефиницији заиста функтор. На примјер, $F = A \otimes ((B \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}_P}) \otimes C)$ је један контекстуални функтор, при чему за $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{F}_P)$ и $f \in \mathrm{arr}(\mathcal{F}_P)$ имамо да је $F(X) = A \otimes ((B \otimes X) \otimes C)$ и $F(f) = \mathbb{1}_A \otimes ((\mathbb{1}_B \otimes f) \otimes \mathbb{1}_C)$. У даљем тексту ћемо контекстуалне функторе називати краће *контексти* и означаваћемо их са F и G (могуће са индексима). Притом ћемо умјесто $\mathbb{1}_{\mathcal{F}_P}$ писати доњу црту која означава „празно мјесто” на које треба да убацимо аргумент. Тако, на примјер, умјесто $A \otimes ((B \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}_P}) \otimes C)$ пишемо $A \otimes ((B \otimes \_) \otimes C)$.

У наставку дефинишемо Генценове операције, при чему поново користимо нотацију за правила извођења. Генценове операције означавамо старим њемачким словима (од којих нека имају и индексе), а F означава произвољан контекст. Израз са лијеве стране знака $\stackrel{\mathrm{dn}}{=}$ је Генценов терм, док израз са десне стране тог знака одговара стрелици категорије $\mathcal{F}_P$ која је означена тим термом.

$$\frac{f : F((A \otimes B) \otimes C) \to D}{\mathfrak{a}_F f \stackrel{\mathrm{dn}}{=} f \circ F(\alpha_{A,B,C}) : F(A \otimes (B \otimes C)) \to D}$$

$$\frac{f : F(A \otimes (B \otimes C)) \to D}{\mathfrak{a}_F^{-1} f \stackrel{\mathrm{dn}}{=} f \circ F(\alpha^{-1}_{A,B,C}) : F((A \otimes B) \otimes C)) \to D}$$

$$\frac{f : F(A) \to B}{\mathfrak{l}_F f \stackrel{\mathrm{dn}}{=} f \circ F(\lambda_A) : F(I \otimes A) \to B}$$

$$\frac{f : F(I \otimes A) \to B}{\mathfrak{l}_F^{-1} f \stackrel{\mathrm{dn}}{=} f \circ F(\lambda_A^{-1}) : F(A) \to B}$$

$$\frac{f : F(A \otimes B) \to C}{\mathfrak{s}_F f \stackrel{\mathrm{dn}}{=} f \circ F(\sigma_{B,A}) : F(B \otimes A) \to C}$$

$$\frac{f : A \to B \qquad g : F(B) \to C}{\mathfrak{c}_F(f, g) \stackrel{\mathrm{dn}}{=} g \circ F(f) : F(A) \to C}$$

$$\frac{f : A \to B \qquad g : C \to D}{\mathfrak{t}(f, g) \stackrel{\mathrm{dn}}{=} f \otimes g : A \otimes C \to B \otimes D}$$

$$\frac{f : A \otimes B \to C}{\mathfrak{m} f \stackrel{\mathrm{dn}}{=} f^{\bullet} : B \to A \multimap C}$$

$$\frac{f : A \to B \qquad g : C \otimes D \to E}{\mathfrak{n}(f,g) \overset{\text{dn}}{=} g \circ (\langle f \rangle_C \otimes D) : (A \otimes (B \multimap C)) \otimes D \to E}$$

Подсјетимо се да су ознаке $f^\bullet$ и $\langle f \rangle_C$ дефинисане у глави 1 (в. дефиницију 1.9) и овдје их користимо као скраћенице.

Примијетимо да Генценови терми кодирају извођења у мултипликативном конјунктивно-импликативном фрагменту интуиционистичке линеарне логике. На примјер, Генценовој операцији $\mathfrak{t}$ одговарају правила за увођење мултипликативне конјункције $\otimes$, док Генценовим операцијама $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ одговарају правила за увођење линеарне импликације $\multimap$.

Генценове операције $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}^{-1}$ и $\mathfrak{s}$ називамо *структурне* Генценове операције, а Генценову операцију $\mathfrak{c}$ називамо *сјечење*. Генценове операције код којих се у индексу налази само контекст $\mathbb{1}_{\mathcal{F}_P}$ ћемо у наставку писати без доњег индекса (на примјер, умјесто $\mathfrak{a}_{\mathbb{1}_{\mathcal{F}_P}} f$ писаћемо само $\mathfrak{a}f$). Имамо сљедећу лему.

Лема 2.3 (Лема о генценизацији)**.** *Свака стрелица категорије $\mathcal{F}_P$ је означена неким Генценовим термом.*

Доказ. Да бисмо доказали да је стрелица $\mathbb{1}_A$ означена неким Генценовим термом користићемо индукцију по броју појављивања симбола $\otimes$ и $\multimap$ у формули A. Ако је A исказно слово или константа I, тврђење тривијално важи. Претпоставимо да је A облика $B \otimes C$. Тада је на основу индуктивне хипотезе стрелица $\mathbb{1}_B$ означена неким Генценовим термом f, а стрелица $\mathbb{1}_C$ означена неким Генценовим термом g. Користећи једнакости $\mathbb{1}_{B\otimes C} = \mathbb{1}_B \otimes \mathbb{1}_C$ и $f \otimes g = \mathfrak{t}(f,g)$, добијамо да је стрелица $\mathbb{1}_A$ означена Генценовим термом $\mathfrak{t}(f,g)$.

Прије него што размотримо случај када је A облика $B \multimap C$, докажимо да за Генценове терме $f : X \to Y$ и $g : U \to V$ важи сљедећа једнакост у $\mathcal{F}_P$:

$$f \multimap g = \mathfrak{m}\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{s}\mathfrak{n}(f, \mathfrak{s}\mathfrak{l}g). \tag{2.8}$$

Користећи дефиницију Генценових терама, претходна једнакост се своди на

$$f \multimap g = (g \circ \lambda_U \circ \sigma_{U,I} \circ (\langle f \rangle_U \otimes I) \circ \sigma_{I,X\otimes(Y\multimap U)} \circ \lambda^{-1}_{X\otimes(Y\multimap U)})^\bullet.$$

Означимо десну страну претходне једнакости са D. Користећи једнакости (E5) и (E6) имамо да је

$$\begin{aligned} D &= (g \circ \lambda_U \circ \sigma_{U,I} \circ \sigma_{I,U} \circ (I \otimes \langle f \rangle_U) \circ \lambda^{-1}_{X\otimes(Y\multimap U)})^\bullet \\ &= (g \circ \lambda_U \circ \lambda_U^{-1} \circ \langle f \rangle_U)^\bullet = (g \circ \langle f \rangle_U)^\bullet. \end{aligned}$$

Даље, користећи дефиниције операција $\_^\bullet$ и $\langle\ \rangle$, диприродност од ε, бифункторијалност од $\multimap$, природност од η и троугаону једнакост, имамо да је

$$\begin{aligned} D &= (X \multimap (g \circ \varepsilon_{Y,U} \circ (f \otimes (Y \multimap U)))) \circ \eta_{X,Y\multimap U} \\ &= (X \multimap (g \circ \varepsilon_{X,U} \circ (X \otimes (f \multimap U)))) \circ \eta_{X,Y\multimap U} \\ &= (X \multimap g) \circ (X \multimap \varepsilon_{X,U}) \circ (X \multimap (X \otimes (f \multimap U))) \circ \eta_{X,Y\multimap U} \\ &= (X \multimap g) \circ (X \multimap \varepsilon_{X,U}) \circ \eta_{X,X\multimap U} \circ (f \multimap U) \\ &= (X \multimap g) \circ \mathbb{1}_{X\multimap U} \circ (f \multimap U) = f \multimap g, \end{aligned}$$

одакле слиједи да једнакост (2.8) важи. Претпоставимо сада да је A облика $B \multimap C$. Користећи индуктивну хипотезу имамо да је стрелица $\mathbb{1}_B$ означена неким Генцеоновим термом f, а стрелица $\mathbb{1}_C$ означена неким Генценовим термом g. Користећи једнакости $\mathbb{1}_{B\multimap C} = \mathbb{1}_B \multimap \mathbb{1}_C$ и (2.8), добијамо да је стрелица $\mathbb{1}_A$ означена Генценовим термом $\mathfrak{ml}^{-1}\mathfrak{sn}(f, \mathfrak{sl}g)$. Генценов терм који означава $\mathbb{1}_A$ ћемо писати такође као $\mathbb{1}_A$. Даље имамо сљедећа очигледна означавања примитивних стрелица:

$$\mathfrak{a}\mathbb{1}_{(A\otimes B)\otimes C} \stackrel{\text{dn}}{=} \alpha_{A,B,C}, \qquad \mathfrak{a}^{-1}\mathbb{1}_{A\otimes(B\otimes C)} \stackrel{\text{dn}}{=} \alpha^{-1}_{A,B,C},$$

$$\mathfrak{l}\mathbb{1}_A \stackrel{\text{dn}}{=} \lambda_A, \qquad \mathfrak{l}^{-1}\mathbb{1}_{I\otimes A} \stackrel{\text{dn}}{=} \lambda^{-1}_A,$$

$$\mathfrak{s}\mathbb{1}_{B\otimes A} \stackrel{\text{dn}}{=} \sigma_{A,B}, \qquad \mathfrak{m}\mathbb{1}_{A\otimes B} \stackrel{\text{dn}}{=} \eta_{A,B}.$$

Докажимо сада да је стрелица $\varepsilon_{A,B}$ означена Генценовим термом $\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{sn}(\mathbb{1}_A, \mathfrak{sl}\mathbb{1}_B)$. Наиме, претходни Генценов терм по дефиницији означава стрелицу

$$\mathbb{1}_B \circ \lambda_B \circ \sigma_{B,I} \circ (\langle \mathbb{1}_A \rangle_B \otimes I) \circ \sigma_{I,A\otimes(A\multimap B)} \circ \lambda^{-1}_{A\otimes(A\multimap B)},$$

за коју се лако покаже да је једнака $\varepsilon_{A,B}$ користећи једнакости (E5) и (E6).

Имајући у виду једнакости $f \otimes g = \mathfrak{t}(f, g)$ и (2.8), остаје још да докажемо да ако су стрелице $f : A \to B$ и $g : B \to C$ означене Генценовим термима, тада је и стрелица $g \circ f : A \to C$ означена Генценовим термом. Ово слиједи из очигледне једнакости $g \circ f = \mathfrak{c}(f, g)$. □

На крају овог одјељка наводимо једну посљедицу леме о генценизацији.

Посљедица 2.4. *За свака два константна објекта A и B категорије $\mathcal{F}_P$ постоји Генценов терм $t : A \to B$.*

Доказ. Из леме 2.1 слиједи да постоје изоморфизми $k_A : A \to I$ и $k_B : B \to I$, па постоји и изоморфизам $k_B^{-1} \circ k_A : A \to B$. Пошто је свака стрелица категорије $\mathcal{F}_P$ означена неким Генценовим термом (лема о генценизацији), тврђење слиједи када узмемо да је $t : A \to B$ Генценов терм који означава стрелицу $k_B^{-1} \circ k_A : A \to B$. □

2.3 Централни изоморфизми

Стрелице категорије $\mathcal{F}_P$ добијене од примитивних стрелица $\mathbb{1}_A$, $\alpha_{A,B,C}$, $\alpha^{-1}_{A,B,C}$, λ_A, λ^{-1}_A и $\sigma_{A,B}$ уз помоћ $\otimes$ и $\circ$ називамо *централне стрелице.* Примијетимо да су централне стрелице заправо изоморфизми, па ћемо их у наставку називати *централни изоморфизми.* Напоменимо да у индексима централних изоморфизама може да се појављује везник $\multimap$ (на примјер, везник $\multimap$ се појављује у индексу централног изоморфизма $\sigma_{A,B\multimap C} : A \otimes (B \multimap C) \to (B \multimap C) \otimes A$).

Први корак у доказу теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије је резултат који ћемо називати „кохеренција за централне изоморфизме”. Да бисмо доказали тај резултат, биће нам потребне сљедеће дефиниције и леме.

Дефиниција 2.4. Нека је A објекат категорије $\mathcal{F}_P$. Тада *факторе* од A дефинишемо индуктивно на сљедећи начин:

(1) A је фактор од A;

(2) ако је A облика $A_1 \otimes A_2$, тада је сваки фактор од A_1 или A_2 уједно и фактор од A.

Дефиниција 2.5. Кажемо да је формула *проста* ако је она исказно слово или је облика $B \multimap C$. Факторе од A који су просте формуле називамо *прости фактори*.

Примјер 2.1. Фактори објекта $A = (p \otimes ((p \multimap q) \multimap r)) \otimes (p \otimes I)$ су p, $(p \multimap q) \multimap r$, $p \otimes ((p \multimap q) \multimap r)$, I, $p \otimes I$ и A, док су прости фактори од A само p и $(p \multimap q) \multimap r$.

Подсјетимо се да је *мултискуп* колекција објеката у којој је дозвољено понављање елемената. Формално, мултискуп је уређени пар (A, m), гдје је A скуп кога називамо *носач* мултискупа (A, m), а $m : A \to \mathbb{N}$ функција која за сваки елемент a из A дефинише његову *вишеструкост* $m(a)$. *Пресјек* два мултискупа (A, m_A) и (B, m_B), у ознаци $(A, m_A) \cap (B, m_B)$, је мултискуп (C, m_C), при чему је $C = A \cap B$, а $m_C(x) = \min(m_A(x), m_B(x))$. *Сума* мултискупова (A, m_A) и (B, m_B), у ознаци $(A, m_A) + (B, m_B)$, је мултискуп (C, m_C), гдје је $C = A \cup B$, а $m_C(x) = m_A(x) + m_B(x)$. Два мултискупа (A, m_A) и (B, m_B) су једнака када је $A = B$ и $m_A = m_B$. *Празан мултискуп* је мултискуп чији је носач празан скуп.

Мултискуп простих фактора објекта A, у ознаци $\mathscr{P}(A)$, се састоји од свих простих фактора објекта A рачунајући њихова вишеструка појављивања. На примјер, прости фактор p се појављује два пута у објекту A из примјера 2.1, па је

$$\mathscr{P}(A) = \{p, p, (p \multimap q) \multimap r\}.$$

Лема 2.5. *(1) Нека је $u : A \to B$ централни изоморфизам. Тада објекти A и B имају исте мултискупове простих фактора.*

(2) Претпоставимо да објекти A и B имају исте мултискупове простих фактора. Тада постоји централни изоморфизам $u : A \to B$.

Доказ. (1) Користимо индукцију по сложености централног изоморфизма u. Када је u сложености 0, тада је u примитивни централни изоморфизам, па тврђење леме очигледно важи.

Претпоставимо да је $u = u_1 \otimes u_2$ за $u_1 : A_1 \to B_1$ и $u_2 : A_2 \to B_2$. Тада из индуктивне хипотезе слиједи да је $\mathscr{P}(A_1) = \mathscr{P}(B_1)$ и $\mathscr{P}(A_2) = \mathscr{P}(B_2)$. Пошто је $A = A_1 \otimes A_2$ и $B = B_1 \otimes B_2$, слиједи да је $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(A_1) + \mathscr{P}(A_2) = \mathscr{P}(B_1) + \mathscr{P}(B_2) = \mathscr{P}(B)$.

Претпоставимо сада да је $u = u_2 \circ u_1$ за $u_1 : A \to C$ и $u_2 : C \to B$. Из индуктивне хипотезе слиједи да је $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(C)$ и $\mathscr{P}(C) = \mathscr{P}(B)$, одакле је и $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$.

(2) Да бисмо доказали тврђење (2) прво ћемо доказати сљедеће помоћно тврђење. Наиме, доказаћемо да за објекат A и његов фактор X постоје објекат A' и централни изоморфизам $v : A \to A' \otimes X$. Да бисмо доказали ово тврђење, користимо индукцију по броју фактора објекта A. Ако објекат A има само један фактор, тада је $X = A$, па можемо узети да је $A' = I$ и $u = \lambda_A^{-1}$.

Претпоставимо сада да је $A = A_1 \otimes A_2$ и да је X фактор од A_1 (слично резонујемо и у случају када је X фактор од A_2). Тада на основу индуктивне хипотезе закључујемо да постоји објекат A_1' и централни изоморфизам $v' : A_1 \to A_1' \otimes X$. Тврђење леме слиједи када узмемо да је $A' = A_2 \otimes A_1'$ и $v = \alpha_{A_2, A_1', X} \circ \sigma_{A_1' \otimes X, A_2} \circ (v' \otimes A_2)$.

Вратимо се сада доказу тврђења (2). Користићемо индукцију по броју простих фактора од A и B. Ако A и B немају простих фактора, тада су A и B изграђени само од константе I уз помоћ везника $\otimes$, па тврђење леме лако слиједи.

Претпоставимо сада да је X произвољан прост фактор од A и B. Тада на основу управо доказаног помоћног тврђења слиједи да постоје објекти A' и B' као и централни изоморфизми $u_1 : A \to A' \otimes X$ и $u_2 : B \to B' \otimes X$. Користећи тврђење (1) ове леме закључујемо да објекти A' и B' имају исте мултискупове простих фактора, па из индуктивне хипотезе слиједи да постоји централни изоморфизам $v : A' \to B'$. Тврђење (2) сада слиједи када узмемо да је $u = u_2^{-1} \circ (v \otimes X) \circ u_1$. □

Кључни елемент у доказу кохеренције за централне изоморфизме је теорема кохеренције за симетричне моноидалне категорије. Да бисмо формулисали ту теорему у облику који нам одговара, треба прво да уведемо одређене појмове.

Дефиниција 2.6. *Знак појављивања слова у формули* (+ или −) дефинишемо индуктивно на сљедећи начин:

(1) знак појављивања слова p у формули p је $+$;

(2) знак појављивања слова у формули $A \otimes B$ је исти као у A за појављивање које се налази у A, а исти као у B за појављивање које се налази у B;

(3) знак појављивања слова у формули $A \multimap B$ је исти као у B за појављивање које се налази у B, а појављивање које се налази у A мијења знак.

Знак појављивања слова у типу $A \to B$ дефинишемо као знак појављивања тог слова у формули $A \multimap B$.

Дефиниција 2.7. Кажемо да је тип *уравнотежен* ако се свако исказно слово у њему појављује тачно два пута са различитим знацима.

Дефиниција 2.8. Стрелице категорије $\mathcal{F}_P$ изражене на језику који не садржи везник $\multimap$ и примитивне терме $\eta_{A,B}$ и $\varepsilon_{A,B}$ називамо *SM-стрелице*.

Примијетимо да, за разлику од централних изоморфизама, везник $\multimap$ не може да се појављује ни у индексима SM-стрелица. Теорема кохеренције за симетричне моноидалне категорије се сада може исказати на сљедећи начин (в. [28, Одјељак 11.1] и [30, Одјељак 1.4]).

Теорема 2.6. *Нека су $f, g : A \to B$ двије SM-стрелице категорије $\mathcal{F}_P$, при чему је тип $A \to B$ уравнотежен. Тада је $f = g$.*

У наставку ћемо доказати лему која нам обезбјеђује *природност* централних изоморфизама. Почнимо са сљедећим помоћним појмовима.

Кажемо да је формула A *инстанца* формуле A' ако је A добијена симултаном супституцијом формула $B_1, \ldots, B_n$ на мјеста исказних слова $p_1, \ldots, p_n$ у формули A' и пишемо

$$A = A'[B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n],$$

при чему претпостављамо да су исказна слова $p_1, \ldots, p_n$ међусобно различита, док међу формулама $B_1, \ldots, B_n$ може бити и једнаких. Слично, кажемо да је стрелица f *инстанца* стрелице f' ако је f добијена симултаном супституцијом формула $B_1, \ldots, B_n$ на мјеста исказних слова $p_1, \ldots, p_n$ у индексима од f' и пишемо

$$f = f'[B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n].$$

Није тешко провјерити да ако је стрелица $f : A \to B$ инстанца стрелице $f' : A' \to B'$, тада је A инстанца од A' и B инстанца од B'. Такође, примијетимо да за стрелице f и g из $\mathcal{F}_P$ важи

$$f = g \Rightarrow f[A_1/p_1, \dots A_n/p_n] = g[A_1/p_1, \dots A_n/p_n]. \tag{2.9}$$

Нека су $p_1, \dots, p_n$ различита исказна слова и нека је $T(p_1, \dots, p_n)$ формула изграђена уз помоћ везника $\otimes$ од исказних слова $p_1, \dots, p_n$ и константе I у произвољном распореду и са произвољно распоређеним заградама, при чему се за свако $1 \leq i \leq n$ слово p_i појављује тачно једном у $T(p_1, \dots, p_n)$. Тада формулу $T(p_1, \dots, p_n)$ називамо *тензорски производ исказних слова* $p_1, \dots, p_n$.

Нека је сада $T(p_1, \dots, p_n)$ тензорски производ исказних слова $p_1, \dots, p_n$ и нека су $A_1, \dots, A_n$ произвољне, не нужно различите формуле. Тада формулу која се добија симултаном супституцијом формула $A_1, \dots, A_n$ на мјеста исказних слова $p_1, \dots, p_n$ у формули $T(p_1, \dots, p_n)$ означавамо са $T(A_1, \dots, A_n)$, то јест важи

$$T(A_1, \dots, A_n) = T(p_1, \dots, p_n)[A_1/p_1, \dots, A_n/p_n].$$

Нека је поново $T(p_1, \dots, p_n)$ тензорски производ исказних слова $p_1, \dots, p_n$ и нека су за свако $1 \leq i \leq n$ дате стрелице $f_i : A_i \to B_i$. Тада симултаном супституцијом стрелица $f_1, \dots, f_n$ на мјеста исказних слова $p_1, \dots, p_n$ у $T(p_1, \dots, p_n)$ добијамо стрелицу типа $T(A_1, \dots, A_n) \to T(B_1, \dots, B_n)$, коју означавамо са $T(f_1, \dots, f_n)$.

Лема 2.7 (Природност централних изоморфизама)**.** *Нека су $p_1, \dots, p_n$ различита исказна слова и нека су $T_1(p_1, \dots, p_n)$ и $T_2(p_1, \dots, p_n)$ два тензорска производа слова $p_1, \dots, p_n$. Претпоставимо да је $v : T_1(p_1, \dots, p_n) \to T_2(p_1, \dots, p_n)$ централни изоморфизам и*

$$v_{A_1,\dots,A_n} = v[A_1/p_1, \dots, A_n/p_n], \qquad v_{B_1,\dots,B_n} = v[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]$$

двије инстанце изоморфизма v за неке формуле $A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_n$. Нека су $f_i : A_i \to B_i$, $1 \leq i \leq n$, произвољне стрелице из $\mathcal{F}_P$. Тада је

$$v_{B_1,\dots,B_n} \circ T_1(f_1, \dots, f_n) = T_2(f_1, \dots, f_n) \circ v_{A_1,\dots,A_n},$$

то јест, сљедећи дијаграм комутира.

$$\begin{array}{ccc} T_1(A_1, \dots, A_n) & \xrightarrow{v_{A_1,\dots,A_n}} & T_2(A_1, \dots, A_n) \\ {\scriptstyle T_1(f_1,\dots,f_n)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T_2(f_1,\dots,f_n)} \\ T_1(B_1, \dots, B_n) & \xrightarrow[v_{B_1,\dots,B_n}]{} & T_2(B_1, \dots, B_n) \end{array}$$

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по сложености централног изоморфизма v. Ако је v сложености 0, тада је v примитивни централни изоморфизам, па тврђење леме слиједи из једнакости (E4)-(E6).

Претпоставимо сада да је v облика $v'' \circ v'$ за $v' : T_1(p_1, \dots, p_n) \to X$ и $v'' : X \to T_2(p_1, \dots, p_n)$. Из леме 2.5 слиједи да објекти $T_1(p_1, \dots, p_n)$ и X имају исте мултискупове простих фактора, што значи да је $X = T_3(p_1, \dots, p_n)$ за неки тензорски производ исказних слова $T_3(p_1, \dots, p_n)$. Тада из индуктивне хипотезе имамо

$$v'_{B_1,\dots,B_n} \circ T_1(f_1, \dots, f_n) = T_3(f_1, \dots, f_n) \circ v'_{A_1,\dots,A_n}, \tag{2.10}$$

$$v''_{B_1,\dots,B_n} \circ T_3(f_1, \dots, f_n) = T_2(f_1, \dots, f_n) \circ v''_{A_1,\dots,A_n}. \tag{2.11}$$

Када прекомпонујемо једнакост (2.10) са $v''_{B_1,\dots,B_n}$, а затим искористимо (2.11) добијамо тражену једнакост. Тврђење леме лако слиједи и у случају када је v облика $v' \otimes v''$. $\square$

Лема 2.8. *Нека је $u : A \to B$ централни изоморфизам при чему је $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B) = \{X_1, \ldots, X_n\}$. Тада постоје тензорски производи слова $T(p_1, \ldots, p_n)$ и $S(p_1, \ldots, p_n)$, као и SM-стрелица $u' : T(p_1, \ldots, p_n) \to S(p_1, \ldots, p_n)$ таква да је $u = u'[X_1/p_1, \ldots, X_n/p_n]$.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по сложености централног изоморфизма u. Ако је u примитивни централни изоморфизам, тада u' добијамо када све просте факторе који се појављују у индексима од u замијенимо новим исказним словом из скупа $\{p_1, \ldots, p_n\}$. На примјер, нека је $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B) = \{X, Y, X, Y\}$ и

$$u = \sigma_{X \otimes Y, X \otimes Y} : (X \otimes Y) \otimes (X \otimes Y) \to (X \otimes Y) \otimes (X \otimes Y).$$

Тада је $u' = \sigma_{p_1 \otimes p_2, p_3 \otimes p_4} : (p_1 \otimes p_2) \otimes (p_3 \otimes p_4) \to (p_3 \otimes p_4) \otimes (p_1 \otimes p_2)$.

Претпоставимо сада да је u облика $u_1 \otimes u_2$ за $u_1 : A_1 \to B_1$ и $u_2 : A_2 \to B_2$, при чему је $A = A_1 \otimes A_2$ и $B = B_1 \otimes B_2$. Имајући у виду лему 2.5, нека је $\mathscr{P}(A_1) = \mathscr{P}(B_1) = \{X_1, \ldots, X_m\}$ за $m \leq n$ и $\mathscr{P}(A_2) = \mathscr{P}(B_2) = \{X_{m+1}, \ldots, X_n\}$. На основу индуктивне хипотезе слиједи да постоје тензорски производи $T_1(p_1, \ldots, p_m)$, $S_1(p_1, \ldots, p_m)$, $T_2(p_{m+1}, \ldots, p_n)$, $S_2(p_{m+1}, \ldots, p_n)$ и SM-стрелице $u'_1 : T_1(p_1, \ldots, p_m) \to S_1(p_1, \ldots, p_m)$, $u'_2 : T_2(p_{m+1}, \ldots, p_n) \to S_2(p_{m+1}, \ldots, p_n)$ такве да је

$$u_1 = u'_1[X_1/p_1, \ldots, X_n/p_n] \quad \text{и} \quad u_2 = u'_2[X_{m+1}/p_{m+1}, \ldots, X_n/p_n].$$

Тврђење леме слиједи када узмемо да је $T(p_1, \ldots, p_n) = T_1(p_1, \ldots, p_m) \otimes T_2(p_{m+1}, \ldots, p_n)$, $S(p_1, \ldots, p_n) = S_1(p_1, \ldots, p_m) \otimes S_2(p_{m+1}, \ldots, p_n)$ и $u' = u'_1 \otimes u'_2$. Случај када је u облика $u_2 \circ u_1$ такође слиједи директно. $\square$

Лема 2.9. *Нека су $T(p_1, \ldots, p_n)$ и $S(p_1, \ldots, p_n)$ два тензорска производа слова $p_1, \ldots, p_n$ и нека су $X_1, \ldots, X_n$ просте формуле такве да је $T(X_1, \ldots, X_n) = S(X_1, \ldots, X_n)$. Тада постоји пермутација π скупа $\{1, \ldots, n\}$ таква да је $S(p_1, \ldots, p_n) = T(p_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(n)})$, при чему за свако $1 \leq i \leq n$ важи $X_i = X_{\pi(i)}$.*

Доказ. Нека је $T_p(q)$ формула који настаје када свако исказно слово у $T(p_1, \ldots, p_n)$ замијенимо потпуно новим словом q. Слично дефинишемо и $S_p(q)$. Докажимо да је $T_p(q) = S_p(q)$, што управо значи да постоји тражена пермутација π.

Примијетимо да су $X_1, \ldots, X_n$ прости фактори од $T(X_1, \ldots, X_n)$. Њихове „позиције" у формули $T(X_1, \ldots, X_n)$ једнозначно одређују „позиције" слова q у формули $T_p(q)$. Другим ријечима, ако са $T_X(q)$ означимо формулу која се добија када све просте факторе $X_1, \ldots, X_n$ у формули $T(X_1, \ldots, X_n)$ замијенимо словом q, имамо да је $T_X(q) = T_p(q)$.

Слично, ако са $S_X(q)$ означимо формулу која се добија када све факторе $X_1, \ldots, X_n$ у формули $S(X_1, \ldots, X_n)$ замијенимо словом q, добијамо да је $S_X(q) = S_p(q)$. Пошто је $T(X_1, \ldots, X_n) = S(X_1, \ldots, X_n)$, имамо да је $T_X(q) = S_X(q)$, одакле је $T_p(q) = S_p(q)$. Дакле, постоји тражена пермутација π, одакле директно слиједи да за свако $1 \leq i \leq n$ важи $X_i = X_{\pi(i)}$. $\square$

Примијетимо да претходна лема не важи ако изоставимо услов да су $X_1, \ldots, X_n$ просте формуле. Узмимо, на примјер, да је $T(p_1, p_2, p_3) = p_1 \otimes (p_2 \otimes p_3)$ и $S(p_1, p_2, p_3) = (p_2 \otimes p_3) \otimes p_1$. Тада за $X_1 = q \otimes q$, $X_2 = q$ и $X_3 = q$ имамо да је

$$T(X_1, X_2, X_3) = S(X_1, X_2, X_3) = (q \otimes q) \otimes (q \otimes q).$$

Међутим, видимо да за сваку пермутацију π скупа $\{1, 2, 3\}$ важи да је $S(p_1, p_2, p_3) \neq T(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, p_{\pi(3)})$.

Сада коначно можемо доказати теорему кохеренције за централне изоморфизме.

Теорема 2.10 (Кохеренција за централне изоморфизме)**.** *Нека су $u, v : A \to B$ централни изоморфизми у категорији $\mathcal{F}_P$, при чему су сви неконстантни прости фактори од A различити. Тада је $u = v$.*

Доказ. Нека је $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B) = \{X_1, \ldots, X_n\}$. Из леме 2.8 слиједи да постоје тензорски производи исказних слова $T_1(p_1, \ldots, p_n)$, $T_2(p_1, \ldots, p_n)$, $S_1(p_1, \ldots, p_n)$, $S_2(p_1, \ldots, p_n)$ и SM-стрелице $u' : T_1(p_1, \ldots, p_n) \to T_2(p_1, \ldots, p_n)$, $v' : S_1(p_1, \ldots, p_n) \to S_2(p_1, \ldots, p_n)$ такве да је $u = u'[X_1/p_1, \ldots, X_n/p_n]$ и $v = v'[X_1/p_1, \ldots, X_n/p_n]$.

Претпоставимо прво да објекти A и B немају константних простих фактора. С обзиром да је $T_1(X_1, \ldots, X_n) = S_1(X_1, \ldots, X_n) = A$, из леме 2.9 слиједи да постоји пермутација π скупа $\{1, \ldots, n\}$ таква да је $S_1(p_1, \ldots, p_n) = T_1(p_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(n)})$, при чему за свако $1 \leq i \leq n$ важи $X_i = X_{\pi(i)}$. Пошто међу простим факторима $X_1, \ldots, X_n$ нема једнаких, закључујемо да π мора бити идентична пермутација. Дакле, $S_1(p_1, \ldots, p_n) = T_1(p_1, \ldots, p_n)$. На исти начин доказујемо да је и $S_2(p_1, \ldots, p_n) = T_2(p_1, \ldots, p_n)$. Дакле, SM-стрелице u' и v' су истог типа. Тај тип је очигледно уравнотежен, па на основу теореме 2.6 слиједи да је $u' = v'$. Користећи једнакост (2.9) имамо да је и $u = v$.

Претпоставимо сада да међу простим факторима $X_1, \ldots, X_n$ има константних, и нека су на примјер $X_1, \ldots, X_m$, $m \leq n$ константни. Посматрајмо централни изоморфизам $u'' : T_1(I, \ldots, I, X_{m+1}, \ldots, X_n) \to T_2(I, \ldots, I, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ дефинисан са

$$u'' = u'[I/p_1, \ldots, I/p_m, X_{m+1}/p_{m+1}, \ldots, X_n/p_n].$$

Из леме 2.1 слиједи да за свако $1 \leq i \leq m$ постоји изоморфизам $k_i : X_i \to I$ (ако за $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ важи $X_i = X_j$, узимамо да је $k_i = k_j$). Сада из леме 2.7 слиједи да сљедећи дијаграм комутира:

$$\begin{array}{ccc} T_1(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n) & \xrightarrow{u} & T_2(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n) \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle g} \\ T_1(I, \ldots I, X_{m+1}, \ldots, X_n) & \xrightarrow[u'']{} & T_2(I, \ldots I, X_{m+1}, \ldots, X_n) \end{array},$$

гдје је $f = T_1(k_1, \ldots, k_m, \mathbb{1}_{X_{m+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{X_n})$ и $g = T_2(k_1, \ldots, k_m, \mathbb{1}_{X_{m+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{X_n})$. Примијетимо да су f и g изоморфизми. Слиједи да важи једнакост $u'' = g \circ u \circ f^{-1}$.

Слично, нека је $v'' : S_1(I, \ldots, I, X_{m+1}, \ldots, X_n) \to S_2(I, \ldots, I, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ централни изоморфизам дефинисан са

$$v'' = v'[I/p_1, \ldots, I/p_m, X_{m+1}/p_{m+1}, \ldots, X_n/p_n].$$

Користећи поново лему 2.7 слиједи да сљедећи дијаграм комутира:

$$\begin{array}{ccc} S_1(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n) & \xrightarrow{v} & S_2(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n) \\ {\scriptstyle f'}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle g'} \\ S_1(I, \ldots I, X_{m+1}, \ldots, X_n) & \xrightarrow[v'']{} & S_2(I, \ldots I, X_{m+1}, \ldots, X_n) \end{array}, \tag{2.12}$$

гдје је $f' = S_1(k_1, \ldots, k_m, \mathbb{1}_{X_{m+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{X_n})$ и $g' = S_2(k_1, \ldots, k_m, \mathbb{1}_{X_{m+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{X_n})$. Из леме 2.9 слиједи да постоји пермутација π скупа $\{1, \ldots, n\}$ таква да је $S_1(p_1, \ldots, p_n) = T_1(p_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(n)})$, при чему за свако $1 \leq i \leq n$ важи да је $X_i = X_{\pi(i)}$. Последично, за

$1 \leq i \leq m$ важи $k_i = k_{\pi(i)}$. Пошто су прости фактори $X_{m+1}, \ldots, X_n$ различити, имамо да за свако $m+1 \leq i \leq n$ важи $\pi(i) = i$, па је

$$S_1(p_1, \ldots, p_n) = T_1(p_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(m)}, p_{m+1}, \ldots, p_n).$$

Слиједи да је $S_1(I, \ldots, I, X_{m+1}, \ldots, X_n) = T_1(I, \ldots, I, X_{m+1}, \ldots, X_n)$. Такође,

$$S_1(k_1, \ldots, k_m, \mathbb{1}_{X_{m+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{X_n}) = T_1(k_{\pi(1)}, \ldots, k_{\pi(m)}, \mathbb{1}_{X_{m+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{X_n}).$$

Пошто за $1 \leq i \leq m$ важи $k_i = k_{\pi(i)}$, имамо да је

$$S_1(k_1, \ldots, k_m, \mathbb{1}_{X_{m+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{X_n}) = T_1(k_1, \ldots, k_m, \mathbb{1}_{X_{m+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{X_n}),$$

то јест, $f = f'$. Слично добијамо $S_2(I, \ldots, I, X_{m+1}, \ldots, X_n) = T_2(I, \ldots, I, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ и $g = g'$. Сада из комутативности дијаграма 2.12 слиједи да је $v'' = g \circ v \circ f^{-1}$. Централни изоморфизми u'' и v'' су истог типа, при чему њихов домен и кодомен немају константних простих фактора, па из претходно доказаног дијела теореме слиједи да је $u'' = v''$. Дакле, $g \circ u \circ f^{-1} = g \circ v \circ f^{-1}$, одакле је $u = v$. □

На крају овог одјељка ћемо доказати још једну корисну лему. Прво имамо сљедећу дефиницију.

Дефиниција 2.9. *Главне централне изоморфизме* дефинишемо индуктивно на сљедећи начин:

(1) за све објекте A, B и C из $\mathcal{F}_P$, централни изоморфизми $\mathbb{1}_A, \lambda_A, \lambda_A^{-1}, \alpha_{A,B,C}, \alpha_{A,B,C}^{-1}$ и $\sigma_{A,B}$ су главни централни изоморфизми;

(2) ако је u главни централни изоморфизам, тада су $\mathbb{1}_A \otimes u$ и $u \otimes \mathbb{1}_A$ главни централни изморфизми за сваки објекат A из $\mathcal{F}_P$.

Лема 2.11. *(1) Нека је $f : A \to B$ стрелица категорије $\mathcal{F}_P$ означена Генценовим термом t и нека је $u : A' \to A$ централни изоморфизам. Тада постоји Генценов терм $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots \mathfrak{d}_n t : A' \to A$ који означава стрелицу $f \circ u$, при чему је $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots \mathfrak{d}_n$ низ структурних Генценових операција.*

(2) Нека је $f : A \to B$ стрелица категорије $\mathcal{F}_P$ означена Генценовим термом t и нека је $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots \mathfrak{d}_n t : A' \to B$ Генценов терм, при чему је $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots \mathfrak{d}_n$ низ структурних Генценових операција. Тада постоји централни изоморфизам $u : A' \to A$ такав да Генценов терм $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \ldots \mathfrak{d}_n t$ означава стрелицу $f \circ u$.

Доказ. (1) Нека је $v : A' \to A$ главни централни изоморфизам који није идентитет. Примијетимо да тада постоји структурна Генценова операција $\mathfrak{d}$ таква да Генценов терм $\mathfrak{d}t$ означава стрелицу $f \circ v$. На примјер, нека је $v = \mathbb{1}_X \otimes \sigma_{Y,Z}$, гдје је $A = X \otimes (Y \otimes Z)$ и $A' = X \otimes (Z \otimes Y)$. Тада видимо да Генценов терм $\mathfrak{s}_F t : X \otimes (Z \otimes Y) \to B$ означава стрелицу $f \circ (\mathbb{1}_X \otimes \sigma_{Y,Z})$, при чему је $F = X \otimes \_$. Ако је v идентитет, тада Генценов терм $\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{l}t$ означава стрелицу $f \circ v = f$. Тврђење сада слиједи из чињенице да се сваки централни изоморфизам u може представити као композиција главних (ово се лако доказује индукцијом по сложености централног изоморфизма u, уз коришћење бифункторијалности тензора).

(2) Слиједи директно из дефиниције структурних Генценових операција. □

Дефиниција 2.10. За низ структурних Генценових операција $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\cdots\mathfrak{d}_n$ из тврђења (1) претходне леме кажемо да је *индукован* централним изоморфизмом u. У наставку ћемо низ структурних Генценових операција индукован централним изоморфизмом u означавати са $\mathfrak{D}_u$. Слично, за централни изоморфизам u из тврђења (2) претходне леме кажемо да је *индукован* низом структурних Генценових операција $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\ldots\mathfrak{d}_n$.

У наставку текста ћемо често користити леме 2.5 и 2.11 без експлицитног позивања на њих.

2.4 Елиминација сјечења

У доказу теореме о елиминацији сјечења у категорији $\mathcal{F}_P$ ће нам бити потребан појам *сложености сјечења.* Да бисмо дефинисали тај појам, треба прво да уведемо сљедеће помоћне појмове.

Дефиниција 2.11. Нека је $t : X \to Y$ Генценов терм и нека је Z фактор од X или Y. *Наследника* фактора Z, у ознаци νZ, дефинишемо индуктивно на сљедећи начин.

(1) Нека је $t : X \to Y$ примитивни Генценов терм. Тада Z нема наследника (у том случају пишемо $\nu Z = \emptyset$).

(2) Нека је t облика $\mathfrak{a}_F f$:
$$\frac{f : F((A \otimes B) \otimes C) \to D}{\mathfrak{a}_F f : F(A \otimes (B \otimes C)) \to D}.$$
Ако је Z неки фактор од $F(A \otimes (B \otimes C))$ који има за фактор формулу $B \otimes C$, тада је $\nu Z = \emptyset$. Ако је Z било који од преосталих фактора од $F(A \otimes (B \otimes C))$ или фактор од D, тада је νZ копија тог фактора која се налази у типу терма f. Слично дефинишемо наследника и у случају када је t облика $\mathfrak{a}_F^{-1} f$, $\mathfrak{l}_F f$, $\mathfrak{l}_F^{-1} f$, $\mathfrak{s}_F f$ и $\mathfrak{c}_F(f, g)$.

(3) Нека је t облика $\mathfrak{t}(f, g)$:
$$\frac{f : A \to B \qquad g : C \to D}{\mathfrak{t}(f, g) : A \otimes C \to B \otimes D}.$$
Ако је $Z = A \otimes C$ или $Z = B \otimes D$, тада је $\nu Z = \emptyset$. Ако је Z неки фактор од A или B, тада је νZ копија тог фактора која се налази у типу терма f. Слично, ако је Z фактор од C или D, тада је νZ копија тог фактора која се налази у типу терма g.

(4) Нека је t облика $\mathfrak{m} f$:
$$\frac{f : A \otimes B \to C}{\mathfrak{m} f : B \to A \multimap C}.$$
Ако је $Z = A \multimap C$, тада је $\nu Z = \emptyset$. Ако је Z фактор од B, тада је νZ копија тог фактора која се налази у типу терма f.

(5) Нека је t облика $\mathfrak{n}(f, g)$:
$$\frac{f : A \to B \qquad g : C \otimes D \to E}{\mathfrak{n}(f, g) : (A \otimes (B \multimap C)) \otimes D \to E}.$$
Ако је Z нека од формула $B \multimap C$, $A \otimes (B \multimap C)$ или $(A \otimes (B \multimap C)) \otimes D$, тада је $\nu Z = \emptyset$. Ако је Z фактор од A, тада је νZ копија тог фактора која се налази у типу терма f. Ако је Z фактор од D или E, тада је νZ копија тог фактора која се налази у типу терма g.

Дефинишимо сада ранг (појављивања) фактора и ранг сјечења.

Дефиниција 2.12. Нека је $t : X \to Y$ Генценов терм и нека је Z фактор од X или Y. Најмањи природан број r такав да је

$$\underbrace{\nu\nu\cdots\nu}_{r} Z = \emptyset$$

називамо *ранг* фактора Z у терму t.

Дефиниција 2.13. Кажемо да се у Генценовом терму *не појављује сјечење* када он нема подтерм облика $\mathfrak{c}_F(f,g)$. Генценов терм облика $\mathfrak{c}_F(f,g)$ такав да се у термима f и g не појављује сјечење називамо *највише сјечење*.

Дефиниција 2.14. У Генценовом терму $\mathfrak{c}_F(f,g)$ два појављивања формуле сјечења B у кодомену од f и домену од g називамо респективно *лијева формула сјечења* и *десна формула сјечења*. Ранг лијеве формуле сјечења у терму $\mathfrak{c}_F(f,g)$ називамо *лијеви ранг сјечења*, а ранг десне формуле сјечења у терму $\mathfrak{c}_F(f,g)$ називамо *десни ранг сјечења*. Збир лијевог и десног ранга сјечења називамо *ранг сјечења*.

Примијетимо да је минимални ранг сјечења једнак 2.

Дефиниција 2.15. Број појављивања везника $\otimes$ и $\multimap$ у формули сјечења називамо *степен* сјечења. *Сложеност сјечења* је уређени пар (d,r) гдје је d степен сјечења, а r његов ранг.

На скупу парова (d,r) посматрамо лексикографски поредак. Дакле, важи $(d_1,r_1) < (d_2,r_2)$ ако и само ако је $d_1 < d_2$ или је $d_1 = d_2$ и $r_1 < r_2$.

У доказу теореме о елиминацији сјечења биће нам потребна сљедећа лема која је у суштини директна посљедица леме 2.7.

Лема 2.12. *Нека су F и G контексти и нека је q исказно слово које се не појављује у њима. Претпоставимо да је $u_q : F(q) \to G(q)$ централни изоморфизам. Нека је $f : A \to B$ произвољна стрелица категорије $\mathcal{F}_P$ и нека су $u_A : F(A) \to G(A)$ и $u_B : F(B) \to G(B)$ двије инстанце изоморфизма u_q које настају када се слово q у индексима централног изоморфизма u_q замијени формулама A и B, респективно, то јест,*

$$u_A = u_q[A/q] \qquad \text{и} \qquad u_B = u_q[B/q].$$

Тада је $u_B \circ F(f) = G(f) \circ u_A$, то јест, сљедећи дијаграм комутира.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{u_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[u_B]{} & G(B) \end{array}$$

Доказ. Нека је $\mathscr{P}(F(q)) = \mathscr{P}(G(q)) = \{X_1,\dots,X_n\}$. Из леме 2.8 слиједи да постоје тензорски производи исказних слова $T(p_1,\dots,p_n)$, $S(p_1,\dots,p_n)$ и SM-стрелица $u'_q : T(p_1,\dots,p_n) \to S(p_1,\dots,p_n)$ таква да је $u_q = u'_q[X_1/p_1,\dots,X_n/p_n]$. Пошто је q прост фактор од $F(q)$ и $G(q)$ имамо да је $q = X_k$ за неко $k \in \{1,\dots,n\}$. Дакле,

$$u_q = u'_q[X_1/p_1,\dots,q/p_k,\dots,X_n/p_n].$$

Слиједи да је $u_A = u'_q[X_1/p_1, \dots, A/p_k, \dots, X_n/p_n]$ и $u_B = u'_q[X_1/p_1, \dots, B/p_k, \dots, X_n/p_n]$. Такође, имамо да је

$$F(A) = T(X_1, \dots, X_{k-1}, A, X_{k+1}, \dots, X_n), \quad G(A) = S(X_1, \dots, X_{k-1}, A, X_{k+1}, \dots, X_n)$$
$$F(B) = T(X_1, \dots, X_{k-1}, B, X_{k+1}, \dots, X_n), \quad G(B) = S(X_1, \dots, X_{k-1}, B, X_{k+1}, \dots, X_n)$$
$$F(f) = T(\mathbb{1}_{X_1}, \dots, \mathbb{1}_{X_{k-1}}, f, \mathbb{1}_{X_{k+1}}, \dots, \mathbb{1}_{X_n}), \quad G(f) = S(\mathbb{1}_{X_1}, \dots, \mathbb{1}_{X_{k-1}}, f, \mathbb{1}_{X_{k+1}}, \dots, \mathbb{1}_{X_n}).$$

Тврђење сада слиједи из леме 2.7. □

Сада можемо доказати сљедећу теорему.

Теорема 2.13. *За сваки Генценов терм t постоји Генценов терм t' у коме се не појављује сјечење, при чему у $\mathcal{F}_P$ важи једнакост $t = t'$.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по сложености највишег сјечења $\mathfrak{c}_F(f, g)$. Показаћемо да је $\mathfrak{c}_F(f, g)$ једнак неком Генценовом терму у коме се не појављује сјечење, одакле слиједи тврђење теореме.

Ако је сложеност сјечења $\mathfrak{c}_F(f, g)$ једнака $(0, 2)$, тада је $\mathfrak{c}_F(f, g)$ облика $\mathfrak{c}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A)$, гдје је A исказно слово или I, што је једнако $\mathbb{1}_A$, па база индукције важи. Размотримо сада сљедеће случајеве. Формулу сјечења ћемо у наставку доказа означавати са B.

Случај 1. Нека је $d > 0$ и $r = 2$.

Случај 1.1. Терм f је облика $\mathfrak{t}(f_1, g_1)$. Тада Генценов терм $\mathfrak{c}_F(f, g)$ има сљедећи облик

$$\dfrac{\dfrac{f_1 : A_1 \to B_1 \qquad f_2 : A_2 \to B_2}{\mathfrak{t}(f_1, f_2) : A_1 \otimes A_2 \to B_1 \otimes B_2} \qquad g : F(B_1 \otimes B_2) \to C}{\mathfrak{c}_F(\mathfrak{t}(f_1, f_2), g) : F(A_1 \otimes A_2) \to C},$$

гдје је $B = B_1 \otimes B_2$. Посматрајмо сада Генценов терм

$$\dfrac{f_1 : A_1 \to B_1 \qquad \dfrac{f_2 : A_2 \to B_2 \qquad g : F(B_1 \otimes B_2) \to C}{\mathfrak{c}_{F_1}(f_2, g) : F(B_1 \otimes A_2) \to C}}{\mathfrak{c}_{F_2}(f_1, \mathfrak{c}_{F_1}(f_2, g)) : F(A_1 \otimes A_2) \to C}.$$

гдје је $F_1(\_) = F(B_1 \otimes \_)$ и $F_2(\_) = F(\_ \otimes A_2)$. Покажимо да је

$$\mathfrak{c}_F(\mathfrak{t}(f_1, f_2), g) = \mathfrak{c}_{F_2}(f_1, \mathfrak{c}_{F_1}(f_2, g)). \tag{2.13}$$

Примијетимо да је $\mathfrak{c}_{F_1}(f_2, g)$ највише сјечење у Генценовом терму на десној страни једнакости (2.13) и да је његова сложеност мања од сложености сјечења на лијевој страни те једнакости (степен сјечења се смањио за 1). Дакле, према индуктивној хипотези, $\mathfrak{c}_{F_1}(f_2, g)$ је једнак неком Генценовом терму h у коме се не појављује сјечење. Сада је $\mathfrak{c}_{F_2}(f_1, h)$ највише сјечење у Генценовом терму на десној страни једнакости (2.13) које је мање сложености од сјечења на лијевој страни, па поново можемо примијенити индуктивну хипотезу. Да бисмо показали једнакост (2.13), треба да покажемо да је

$$g \circ F(f_1 \otimes f_2) = g \circ F_1(f_2) \circ F_2(f_1). \tag{2.14}$$

С обзиром да је

$$\begin{aligned} F(f_1 \otimes f_2) &= F((\mathbb{1}_{B_1} \circ f_1) \otimes (f_2 \circ \mathbb{1}_{A_2})) = F((\mathbb{1}_{B_1} \otimes f_2) \circ (f_1 \otimes \mathbb{1}_{A_2})) \\ &= F(\mathbb{1}_{B_1} \otimes f_2) \circ F(f_1 \otimes \mathbb{1}_{A_2}) = F_1(f_2) \circ F_2(f_1), \end{aligned}$$

имамо да (2.14) важи, па важи и једнакост (2.13).

Случај 1.2. Терм f је облика $\mathfrak{m} f_1$. Тада Генценов терм $\mathfrak{c}_F(f, g)$ има сљедећи облик

$$\dfrac{\dfrac{f_1 : B_1 \otimes A \to B_2}{\mathfrak{m}f_1 : A \to B_1 \multimap B_2} \qquad \dfrac{g_1 : C \to B_1 \qquad g_2 : B_2 \otimes D \to E}{\mathfrak{n}(g_1, g_2) : (C \otimes (B_1 \multimap B_2)) \otimes D \to E}}{\mathfrak{c}_F(\mathfrak{m}f_1, \mathfrak{n}(g_1, g_2)) : (C \otimes A) \otimes D \to E},$$

гдје је $B = B_1 \multimap B_2$ и $F(\_) = (C \otimes \_) \otimes D$. Посматрајмо Генценов терм

$$\dfrac{g_1 : C \to B_1 \qquad \dfrac{f_1 : B_1 \otimes A \to B_2 \qquad g_2 : B_2 \otimes D \to E}{\mathfrak{c}_{F_1}(f_1, g_2) : (B_1 \otimes A) \otimes D \to E}}{\mathfrak{c}_{F_2}(g_1, \mathfrak{c}_{F_1}(f_1, g_2))(C \otimes A) \otimes D \to E},$$

гдје је $F_1(\_) = \_ \otimes D$ и $F_2(\_) = (\_ \otimes A) \otimes D$ и докажимо да је

$$\mathfrak{c}_F(\mathfrak{m}f_1, \mathfrak{n}(g_1, g_2)) = \mathfrak{c}_{F_2}(g_1, \mathfrak{c}_{F_1}(f_1, g_2)). \tag{2.15}$$

Слично као у случају 1.1, оба сјечења на десној страни претходне једнакости имају мањи степен од сјечења на лијевој страни те једнакости, па можемо примијенити индуктивну хипотезу. Да бимо доказали једнакост (2.15), треба да докажемо

$$g_2 \circ (\langle g_1 \rangle_{B_2} \otimes D) \circ F(f_1^{\bullet}) = g_2 \circ F_1(f_1) \circ F_2(g_1). \tag{2.16}$$

Означимо $(\langle g_1 \rangle_{B_2} \otimes D) \circ F(f_1^{\bullet})$ са L. Имамо да је

$$\begin{aligned}
L &= ((\varepsilon_{B_1,B_2} \circ (g_1 \otimes (B_1 \multimap B_2))) \otimes D) \circ F((B_1 \multimap f_1) \circ \eta_{B_1,A}) \\
&= ((\varepsilon_{B_1,B_2} \circ (g_1 \otimes (B_1 \multimap B_2))) \otimes D) \circ ((C \otimes ((B_1 \multimap f_1) \circ \eta_{B_1,A})) \otimes D) \\
&= (\varepsilon_{B_1,B_2} \circ (g_1 \otimes (B_1 \multimap B_2)) \circ (C \otimes ((B_1 \multimap f_1) \circ \eta_{B_1,A}))) \otimes D \\
&= (\varepsilon_{B_1,B_2} \circ (g_1 \otimes ((B_1 \multimap f_1) \circ \eta_{B_1,A}))) \otimes D \\
&= (\varepsilon_{B_1,B_2} \circ (B_1 \otimes (B_1 \multimap f_1)) \circ (g_1 \otimes \eta_{B_1,A})) \otimes D \\
&= (f_1 \circ \varepsilon_{B_1,B_1 \otimes A} \circ (B_1 \otimes \eta_{B_1,A}) \circ (g_1 \otimes A)) \otimes D \qquad (2.17) \\
&= (f_1 \circ (g_1 \otimes A)) \otimes D = (f_1 \otimes D) \circ ((g_1 \otimes A) \otimes D) = F_1(f_1) \circ F_2(g_1), \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

при чему смо, осим бифункторијалности тензора, у (2.17) користили природност од ε_{B_1,B_2}, а у (2.18) троугаону једнакост. Дакле, важи једнакост (2.16), одакле слиједи да важи и једнакост (2.15).

Случај 2. Десни ранг сјечења је већи од 1.

Случај 2.1. Терм g је облика $\mathfrak{d}g_1$ за неку структурну операцију $\mathfrak{d}$ и Генценов терм $g_1 : F_1(B) \to C$. Тада Генценов терм $\mathfrak{c}_F(f, g)$ има сљедећи облик

$$\dfrac{f : A \to B \qquad \dfrac{g_1 : F_1(B) \to C}{\mathfrak{d}g_1 : F(B) \to C}}{\mathfrak{c}_F(f, \mathfrak{d}g_1) : F(A) \to C}.$$

Нека је $u_B : F(B) \to F_1(B)$ главни централни изоморфизам индукован Генценовом операцијом $\mathfrak{d}$ (в. лему 2.11 и дефиницију 2.10). Претпоставимо да је q исказно слово које се не појављује у контекстима F и F_1 и нека је $u_q : F(q) \to F_1(q)$ централни изоморфизам такав да је $u_B = u_q[B/q]$. (Централни изоморфизам u_q добијамо тако што одговарајуће појављивање[1] формуле B у индексу од u_B замијенимо са q.)

Нека је $u_A : F(A) \to F_1(A)$ централни изоморфизам дефинисан са $u_A = u_q[A/q]$. Означимо са $\mathfrak{d}_1$ Генценову операцију индуковану са u_A и посматрајмо Генценов терм

[1] које идентификујемо на основу контекста F

$$\cfrac{\cfrac{f : A \to B \qquad g_1 : F_1(B) \to C}{\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1) : F_1(A) \to C}}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1) : F(A) \to C} .$$

Докажимо да је

$$\mathfrak{c}_F(f, \mathfrak{d}g_1) = \mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1). \tag{2.19}$$

Сјечење на десној страни претходне једнакости има мањи ранг од сјечења на лијевој страни те једнакости, па можемо примијенити индуктивну хипотезу. Да бисмо доказали (2.19), треба да докажемо једнакост

$$g_1 \circ u_B \circ F(f) = g_1 \circ F_1(f) \circ u_A,$$

која слиједи директно из природности централног изоморфизма u_B (лема 2.12).

Случај 2.2. Терм g је облика $\mathfrak{t}(g_1, g_2) : D_1 \otimes D_2 \to C_1 \otimes C_2$. Пошто је по претпоставци десни ранг сјечења већи од 1, мора бити $D_1 = F_1(B)$ или $D_2 = F_2(B)$ за неке контексте F_1 и F_2. Размотрићемо само прву опцију, пошто се друга разматра аналогно. У том случају Генценов терм $\mathfrak{c}_F(f, g)$ има облик

$$\cfrac{f : A \to B \qquad \cfrac{g_1 : F_1(B) \to C_1 \qquad g_2 : D_2 \to C_2}{\mathfrak{t}(g_1, g_2) : F_1(B) \otimes D_2 \to C_1 \otimes C_2}}{\mathfrak{c}_F(f, \mathfrak{t}(g_1, g_2)) : F_1(A) \otimes D_2 \to C_1 \otimes C_2} ,$$

гдје је $F(\_) = F_1(\_) \otimes D_2$. Посматрајмо сада Генценов терм

$$\cfrac{\cfrac{f : A \to B \qquad g_1 : F_1(B) \to C_1}{\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1) : F_1(A) \to C_1} \qquad g_2 : D_2 \to C_2}{\mathfrak{t}(\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1), g_2) : F_1(A) \otimes D_2 \to C_1 \otimes C_2}$$

и докажимо да је

$$\mathfrak{c}_F(f, \mathfrak{t}(g_1, g_2)) = \mathfrak{t}(\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1), g_2), \tag{2.20}$$

при чему сјечење на десној страни претходне једнакости има мањи ранг од сјечења на лијевој страни. Да бисмо показали (2.20), треба да покажемо једнакост

$$(g_1 \otimes g_2) \circ (F_1(f) \otimes D_2) = (g_1 \circ F_1(f)) \otimes g_2,$$

која слиједи из бифункторијалности тензора.

Случај 2.3. Терм g је облика $\mathfrak{m}g_1$. Тада Генценов терм $\mathfrak{c}_F(f, g)$ има облик

$$\cfrac{f : A \to B \qquad \cfrac{g_1 : C_1 \otimes F(B) \to C_2}{\mathfrak{m}g_1 : F(B) \to C_1 \multimap C_2}}{\mathfrak{c}_F(f, \mathfrak{m}g_1) : F(A) \to C_1 \multimap C_2} .$$

Посматрајмо сада Генценов терм

$$\cfrac{\cfrac{f : A \to B \qquad g_1 : C_1 \otimes F(B) \to C_2}{\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1) : C_1 \otimes F(A) \to C_2}}{\mathfrak{m}\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1) : F(A) \to C_1 \multimap C_2} ,$$

гдје је $F_1(\_) = C_1 \otimes F(\_)$. Покажимо да је

$$\mathfrak{c}_F(f, \mathfrak{m}g_1) = \mathfrak{m}\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1) \tag{2.21}$$

и примијетимо да сјечење на десној страни претходне једнакости има мањи ранг од сјечења на лијевој страни. Да бисмо показали (2.21), треба да покажемо једнакост

$$g_1^\bullet \circ F(f) = (g_1 \circ (C_1 \otimes F(f)))^\bullet,$$

која директно слиједи из леме 1.5.

Случај 2.4. Терм g је облика $\mathfrak{n}(g_1, g_2) : (D \otimes (E \multimap G)) \otimes H \to C$ за неке Генценове терме $g_1 : D \to E$ и $G \otimes E \to C$. Пошто је по претпоставци десни ранг сјечења већи од 1, мора бити $D = F_1(B)$ или $H = F_2(B)$ за неке контексте F_1 и F_2. Размотрићемо само случај када је $D = F_1(B)$ пошто се други случај разматра аналогно. Генценов терм $\mathfrak{c}_F(f, g)$ има облик

$$\dfrac{f : A \to B \qquad \dfrac{g_1 : F_1(B) \to E \qquad g_2 : G \otimes H \to C}{\mathfrak{n}(g_1, g_2) : (F_1(B) \otimes (E \multimap G)) \otimes H \to C}}{\mathfrak{c}_F(f, \mathfrak{n}(g_1, g_2)) : (F_1(A) \otimes (E \multimap G)) \otimes H \to C},$$

гдје је $F(\_) = (F_1(\_) \otimes (E \multimap G)) \otimes H$. Посматрајмо сада Генценов терм

$$\dfrac{\dfrac{f : A \to B \qquad g_1 : F_1(B) \to E}{\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1) : F_1(A) \to C} \qquad g_2 : G \otimes H \to C}{\mathfrak{n}(\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1), g_2) : (F_1(A) \otimes (E \multimap G)) \otimes H \to C}$$

и докажимо да је

$$\mathfrak{c}_F(f, \mathfrak{n}(g_1, g_2)) = \mathfrak{n}(\mathfrak{c}_{F_1}(f, g_1), g_2), \tag{2.22}$$

при чему сјечење на десној страни претходне једнакости има мањи ранг од сјечења на лијевој страни. Да бисмо доказали (2.22), треба да докажемо једнакост

$$g_2 \circ (\langle g_1 \rangle_G \otimes H) \circ F(f) = g_2 \circ (\langle g_1 \circ F_1(f) \rangle_G \otimes H),$$

која слиједи из леме 1.7 и бифункторијалности тензора.

Случај 3. Десни ранг сјечења је једнак 1, а лијеви ранг сјечења је већи од 1.

Случај 3.1. Терм f је облика $\mathfrak{d}f_1$ за неку структурну операцију $\mathfrak{d}$ и Генценов терм $f_1 : A_1 \to B$. Тада Генценов терм $\mathfrak{c}_F(f, g)$ има сљедећи облик

$$\dfrac{\dfrac{f_1 : A_1 \to B}{\mathfrak{d}f_1 : A \to B} \qquad g : F(B) \to C}{\mathfrak{c}_F(\mathfrak{d}f_1, g) : F(A) \to C}.$$

Нека је $u : A \to A_1$ главни централни изоморфизам индукован структурном операцијом $\mathfrak{d}$. Означимо са $\mathfrak{d}_1$ структурну Генценову операцију индуковану централним изоморфизмом $F(u) : F(A) \to F(A_1)$ и посматрајмо Генценов терм

$$\dfrac{\dfrac{f_1 : A_1 \to B \qquad g : F(B) \to C}{\mathfrak{c}_F(f_1, g) : F(A_1) \to C}}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_F(f_1, g) : F(A) \to C}.$$

Докажимо да је

$$\mathfrak{c}_F(\mathfrak{d}f_1, g) = \mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_F(f_1, g), \tag{2.23}$$

при чему сјечење на десној страни претходне једнакости има мањи ранг од сјечења на десној страни, па можемо примијенити индуктивну хипотезу. Да бисмо доказали (2.23), треба да докажемо једнакост

$$g \circ F(f_1 \circ u) = g \circ F(f_1) \circ F(u),$$

која слиједи директно из функоријалности контекста F.

Случај 3.2. Терм f је облика $\mathfrak{n}(f_1, f_2)$ за неке Генценове терме $f_1 : A_1 \to A_2$ и $f_2 : A_3 \otimes A_4 \to B$. Тада Генценов терм $\mathfrak{c}_F(f, g)$ има сљедећи облик

$$\dfrac{\dfrac{f_1 : A_1 \to A_2 \qquad f_2 : A_3 \otimes A_4 \to B}{\mathfrak{n}(f_1, f_2) : (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4 \to B} \qquad g : F(B) \to C}{\mathfrak{c}_F(\mathfrak{n}(f_1, f_2), f_2) : F((A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4) \to C}.$$

Нека је q исказно слово које се не појављује у контекстима $\_ \otimes D$ и $F(\_ \otimes A_4)$ и нека је $u_q : q \otimes D \to F(q \otimes A_4)$ произвољан централни изоморфизам. Нека су $u_{A_3} : A_3 \otimes D \to F(A_3 \otimes A_4)$ и $u^{-1}_{A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)} : F((A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4) \to (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes D$ централни изоморфизми дефинисани са

$$u_{A_3} = u_q[A_3/q], \qquad u^{-1}_{A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)} = u_q^{-1}[(A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3))/q].$$

Означимо са $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ низове структурних Генценових операција индуковане централним изоморфизмима u_{A_3} и $u^{-1}_{A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)}$, респективно. Посматрајмо Генценов терм

$$\dfrac{\dfrac{f_1 : A_1 \to A_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{f_2 : A_3 \otimes A_4 \to B \qquad g : F(B) \to C}{\mathfrak{c}_F(f_2, g) : F(A_3 \otimes A_4) \to C}}{\text{низ структурних операција}}}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{c}_F(f_2, g) : A_3 \otimes D \to C}}{\dfrac{\mathfrak{n}(f_1, \mathfrak{D}_1\mathfrak{c}_F(f_2, g)) : (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes D \to C}{\text{низ структурних операција}}}}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{n}(f_1, \mathfrak{D}_1\mathfrak{c}_F(f_2, g)) : F((A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4) \to C}$$

и докажимо да је

$$\mathfrak{c}_F(\mathfrak{n}(f_1, f_2), f_2) = \mathfrak{D}_2\mathfrak{n}(f_1, \mathfrak{D}_1\mathfrak{c}_F(f_2, g)). \tag{2.24}$$

Сјечење на десној страни претходне једнакости има мањи ранг од сјечења на лијевој страни те једнакости, па можемо примијенити индуктивну хипотезу. Да бисмо доказали једнакост (2.24), треба да докажемо да је

$$g \circ F(f_2 \circ (\langle f_1 \rangle_{A_3} \otimes A_4)) = g \circ F(f_2) \circ u_{A_3} \circ (\langle f_1 \rangle_{A_3} \otimes D) \circ u^{-1}_{A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)}. \tag{2.25}$$

Користећи природност од u_{A_3} (лема 2.12), имамо да сљедећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
(A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes D \arrow[r, "u_{A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)}"] \arrow[d, "\langle f_1 \rangle_{A_3} \otimes D"'] & F((A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4) \arrow[d, "F(\langle f_1 \rangle_{A_3} \otimes A_4)"] \\
A_3 \otimes D \arrow[r, "u_{A_3}"'] & F(A_3 \otimes A_4)
\end{tikzcd}$$

Дакле, имамо

$$\begin{aligned} u_{A_3} \circ (\langle f_1\rangle_{A_3} \otimes D) \circ u^{-1}_{A_1\otimes(A_2\multimap A_3)} &= F(\langle f_1\rangle_{A_3} \otimes A_4) \circ u_{A_1\otimes(A_2\multimap A_3)} \circ u^{-1}_{A_1\otimes(A_2\multimap A_3)} \\ &= F(\langle f_1\rangle_{A_3} \otimes A_4) \circ \mathbb{1}_{A_1\otimes(A_2\multimap A_3)} = F(\langle f_1\rangle_{A_3} \otimes A_4), \end{aligned}$$

одакле слиједи (2.24). Овим је завршен доказ теореме о елиминацији сјечења. □

На крају овог одјељка ћемо доказати једну лему у чијем доказу се користи теорема о елиминацији сјечења. За формулацију поменуте леме ће нам бити потребна сљедећа дефиниција.

Дефиниција 2.16. Кажемо да је објекат категорије $\mathcal{F}_P$ *правилан* ако не садржи потформулу облика $A \multimap B$, при чему је B константна формула, а A није константна.

Лема 2.14. *Нека је $t : A \to B$ Генценов терм, при чему је објекат A правилан, а објекат B константан. Тада је објекат A константан.*

Доказ. Довољно је доказати лему у случају када се у t не појављује сјечење. Користићемо индукцију по сложености Генценовог терма t, при чему *сложеност* Генценовог терма t дефинишемо као број појављивања Генценових операција у њему. Ако је t сложености 0, тада је $t = \mathbb{1}_I$ и $A = B = I$, па тврђење леме важи. У наставку разликујемо 4 случаја.

Случај 1. Генценов терм t је облика $\mathfrak{d}t'$ за неку структурну Генценову операцију $\mathfrak{d}$ и Генценов терм $t' : A' \to B$. Објекти A' и A имају исте мултискупове простих фактора што значи да је и објекат A' правилан, па можемо примијенити индуктивну хипотезу (Генценов терм t' је мање сложености од t). Дакле, A' је константан објекат, одакле слиједи да је и A константан.

Случај 2. Генценов терм t је облика $\mathfrak{t}(t_1, t_2)$ за Генценове терме $t_1 : A_1 \to B_1$ и $t_2 : A_2 \to B_2$, при чему је $A = A_1 \otimes A_2$ и $B = B_1 \otimes B_2$. Сви фактори од A_1 и A_2 су уједно и фактори од A, па слиједи да су A_1 и A_2 правилни објекти. Користећи индуктивну хипотезу, закључујемо да су A_1 и A_2 константни, па је и A константан.

Случај 3. Генценов терм t је облика $\mathfrak{m}t'$ за Генценов терм $t' : B_1 \otimes A \to B_2$, при чему је $B = B_1 \multimap B_2$. Пошто је A правилан и B_1 константан, слиједи да је $B_1 \otimes A$ правилан, па је он према индуктивној хипотези и константан. Специјално, A је константан објекат.

Случај 4. Генценов терм t је облика $\mathfrak{n}(t_1, t_2)$ за Генценове терме $t_1 : A_1 \to A_2$ и $t_2 : A_3 \otimes A_4 \to B$, при чему је $A = (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4$. Из индуктивне хипотезе примијењене на терм t_2 слиједи да је $A_3 \otimes A_4$ константан објекат. Специјално, A_3 је константан па пошто је A правилан објекат закључујемо да је и A_2 константан. Сада можемо примијенити индуктивну хипотезу и на терм t_1, одакле добијамо да је и A_1 константан објекат. Дакле, A_1, A_2, A_3 и A_4 су константни, па је и A константан. □

Напомена 2.1. Услов правилности објекта A је суштински потребан само у случају 4. из доказа претходне леме. Међутим, није тешко видјети да лема не важи без тог услова. На примјер, $\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{sn}(\mathbb{1}_p, \mathfrak{l}\mathbb{1}_I) : p \otimes (p \multimap I) \to I$ је Генценов терм чији кодомен је константан објекат, а домен није константан.

2.5 Двије главне леме

У овом одјељку ћемо доказати двије леме које ће (поред теореме о елиминацији сјечења) имати кључну улогу у доказу теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије. Прво дефинишемо потребне појмове.

Дефиниција 2.17. *Сложеност формуле* A, у ознаци $d(A)$, дефинишемо индуктивно на сљедећи начин:

(1) ако је $A = I$, тада је $d(A) = 0$;

(2) ако је A исказно слово, тада је $d(A) = 1$;

(3) ако је $A = A_1 \otimes A_2$, тада је $d(A) = d(A_1) + d(A_2)$;

(4) ако је $A = A_1 \multimap A_2$, тада је $d(A) = d(A_1) + d(A_2) + 1$.

Сложеност типа $A \to B$ дефинишемо као збир $d(A) + d(B)$.

Примијетимо да је сложеност формуле A једнака 0 ако и само ако је A константна формула у којој се не појављује везник $\multimap$.

Дефиниција 2.18. Кажемо да су формуле A и B *узајамно просте* ако не постоји исказно слово које се истовремено појављује и у A и у B. Скупови формула су узајамно прости ако су сви елементи једног скупа узајамно прости са свим елементима другог скупа.

На примјер, скуп $\{p, p \otimes q, I\}$ је узајамно прост са $\{I, r \multimap I\}$, али није узајамно прост са $\{q \multimap r\}$. Нагласимо да формуле A и B могу бити узајамно просте иако се константа I истовремено појављује и у A и у B.

Дефиниција 2.19. Нека је $\mathscr{P}(A)$ мултискуп простих фактора формуле A и $\mathscr{P}(B)$ мултискуп простих фактора формуле B. Формулу чији је мултискуп простих фактора једнак $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ означавамо са $\mathscr{P}(A, B)$. У случају када је $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ празан мултискуп, узимамо да је $\mathscr{P}(A, B) = I$.

Лема 2.15. *Нека је* $f : A \otimes B \to C$ *Генценов терм при чему су скупови* $\{B\}$ *и* $\{A, C\}$ *узајамно прости. Тада постоје Генценови терми* $g : B \to I$ *и* $h : A \to C$.

Доказ. Довољно је доказати лему у случају када се у Генценовом терму f не појављује сјечење. Користићемо индукцију по сложености типа $A \otimes B \to C$. Ако је сложеност типа $A \otimes B \to C$ једнака 0, тада су A, B и C константни објекти, па тврђење леме слиједи из посљедице 2.4. У наставку ћемо разликовати сљедеће случајеве.

Случај 1. Терм f је облика $\mathfrak{t}(f_1, f_2)$ за Генценове терме $f_1 : A \to C_1$ и $f_2 : B \to C_2$

$$\frac{f_1 : A \to C_1 \qquad f_2 : B \to C_2}{\mathfrak{t}(f_1, f_2) : A \otimes B \to C_1 \otimes C_2},$$

гдје је $C = C_1 \otimes C_2$. Посматрајмо Генценов терм $\mathfrak{l} f_2 : I \otimes B \to C_2$. Из претпоставке да су B и C узајамно просте формуле слиједи да су B и C_2 такође узајамно просте. Тип $I \otimes B \to C_2$ је мање сложености од типа $A \otimes B \to C_1 \otimes C_2$, па из индуктивне хипотезе слиједи да постоје Генценови терми $g : B \to I$ и $h_1 : I \to C_2$. Сада лако добијамо да постоји и Генценов терм $h : A \to C$ када узмемо да је $h = \mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{s}\mathfrak{t}(f_1, h_1)$.

Случај 2. Терм f је облика $\mathfrak{m}f_1$ за Генценов терм $f_1 : C_1 \otimes (A \otimes B) \to C_2$

$$\frac{f_1 : C_1 \otimes (A \otimes B) \to C_2}{\mathfrak{m}f_1 : A \otimes B \to C_1 \multimap C_2},$$

гдје је $C = C_1 \multimap C_2$. Посматрајмо Генценов терм $\mathfrak{a}^{-1}f_1 : (C_1 \otimes A) \otimes B \to C_2$. Из индуктивне хипотезе слиједи да постоје Генценови терми $g : B \to I$ и $h_1 : C_1 \otimes A \to C_2$. Сада лако добијамо да постоји и Генценов терм $h : A \to C$ када узмемо да је $h = \mathfrak{m}h_1$.

Случај 3. Терм f је облика $\mathfrak{n}(f_1, f_2)$ за Генценове терме $f_1 : A_1 \to A_2$ и $f_2 : A_3 \otimes B \to C$

$$\frac{f_1 : A_1 \to A_2 \qquad f_2 : A_3 \otimes B \to C}{\mathfrak{n}(f_1, f_2) : (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes B \to C},$$

гдје је $A = A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)$. Из индуктивне хипотезе примијењене на терм f_2 слиједи да постоје Генценови терми $g : B \to I$ и $h_1 : A_3 \to C$. Генценов терм $h : A \to C$ добијамо када узмемо да је $h = \mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{s}\mathfrak{n}(f_1, \mathfrak{s}\mathfrak{l}h_1)$.

Случај 4. Терм $f : A \otimes B \to C$ је облика $\mathfrak{D}f'$, гдје је $\mathfrak{D}$ низ структурних Генценових операција, а Генценов терм $f' : D \to C$ је добијен неком Генценовом операцијом која није структурна. Разликујемо три подслучаја.

Случај 4.1. Терм $f' : D \to C$ је облика $\mathfrak{t}(f_1, f_2)$ за Генценове терме $f_1 : D_1 \to C_1$ и $f_2 : D_2 \to C_2$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{f_1 : D_1 \to C_1 \qquad f_2 : D_2 \to C_2}{\mathfrak{t}(f_1, f_2) : D_1 \otimes D_2 \to C_1 \otimes C_2}}{\text{низ структурних операција}}}{\mathfrak{D}\mathfrak{t}(f_1, f_2) : A \otimes B \to C_1 \otimes C_2},$$

гдје је $C = C_1 \otimes C_2$ и $D = D_1 \otimes D_2$. Формуле $A \otimes B$ и $D_1 \otimes D_2$ имају исте мултискупове простих фактора. Нека је $A_1 = \mathscr{P}(D_1, A)$, $B_1 = \mathscr{P}(D_1, B)$, $A_2 = \mathscr{P}(D_2, A)$ и $B_2 = \mathscr{P}(D_2, B)$. Тада постоје централни изоморфизми $u : A_1 \otimes B_1 \to D_1$, $v : A_2 \otimes B_2 \to D_2$, $w : A \to A_1 \otimes A_2$ и $s : B \to B_1 \otimes B_2$. Подсјетимо се да са $\mathfrak{D}_u$ означавамо низ структурних Генценових операција индукован централним изоморфизмом u (слично имамо ознаке $\mathfrak{D}_v$, $\mathfrak{D}_w$ и $\mathfrak{D}_s$). Посматрајмо Генценове терме $\mathfrak{D}_u f_1 : A_1 \otimes B_1 \to C_1$ и $\mathfrak{D}_v f_2 : A_2 \otimes B_2 \to C_2$. На основу индуктивне хипотезе слиједи да постоје Генценови терми $g_1 : B_1 \to I$, $h_1 : A_1 \to C_1$, $g_2 : B_2 \to I$ и $h_2 : A_2 \to C_2$. Тврђење леме сада слиједи када узмемо да је $g = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_s\mathfrak{t}(g_1, g_2), \mathfrak{l}\mathbb{1}_I)$ и $h = \mathfrak{D}_w\mathfrak{t}(h_1, h_2)$.

Случај 4.2. Терм $f' : D \to C$ је облика $\mathfrak{m}f_1$ за Генценов терм $f_1 : C_1 \otimes D \to C_2$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{f_1 : C_1 \otimes D \to C_2}{\mathfrak{m}f_1 : D \to C_1 \multimap C_2}}{\text{низ структурних операција}}}{\mathfrak{D}\mathfrak{m}f_1 : A \otimes B \to C_1 \multimap C_2},$$

гдје је $C = C_1 \multimap C_2$. Пошто $A \otimes B$ и D имају исте мултискупове простих фактора, постоји централни изоморфизам $u : (C_1 \otimes A) \otimes B \to C_1 \otimes D$. Посматрајмо сада Генценов терм $\mathfrak{D}_u f_1 : (C_1 \otimes A) \otimes B \to C_2$. Из индуктивне хипотезе слиједи да постоје Генценови терми $g : B \to I$ и $h_1 : C_1 \otimes A \to C_2$. Генценов терм h добијамо када узмемо да је $h = \mathfrak{m} h_1$.

Случај 4.3 Терм $f' : D \to C$ је облика $\mathfrak{m}(f_1, f_2)$ за Генценове терме $f_1 : D_1 \to E$ и $f_2 : H \otimes D_2 \to C$

$$\dfrac{\dfrac{f_1 : D_1 \to E \qquad f_2 : H \otimes D_2 \to C}{\mathfrak{n}(f_1, f_2) : (D_1 \otimes (E \multimap H)) \otimes D_2 \to C}}{\dfrac{\text{низ структурних операција}}{\mathfrak{D}\mathfrak{n}(f_1, f_2) : A \otimes B \to C}}\,,$$

гдје је $D = (D_1 \otimes (E \multimap H)) \otimes D_2$. Нека је $A_1 = \mathscr{P}(D_1, A)$, $B_1 = \mathscr{P}(D_1, B)$, $A_2 = \mathscr{P}(D_2, A)$ и $B_2 = \mathscr{P}(D_2, B)$. Тада постоје централни изоморфизми $u : A_1 \otimes B_1 \to D_1$ и $v : (H \otimes A_2) \otimes B_2 \to H \otimes D_2$, па постоје и Генценови терми $\mathfrak{D}_u f_1 : A_1 \otimes B_1 \to E$ и $\mathfrak{D}_v f_2 : (H \otimes A_2) \otimes B_2 \to C$.

Случај 4.3.1. Претпоставимо да је $E \multimap H$ фактор од A. Тада постоје централни изоморфизми $w : A \to (A_1 \otimes (E \multimap H)) \otimes A_2$ и $s : B \to B_1 \otimes B_2$. Примјеном индуктивне хипотезе на Генценове терме $\mathfrak{D}_u f_1$ и $\mathfrak{D}_v f_2$ добијамо да постоје Генценови терми $g_1 : B_1 \to I$, $h_1 : A_1 \to E$, $g_2 : B_2 \to I$ и $h_2 : H \otimes A_2 \to C$. Тврђење леме сада слиједи када узмемо да је $g = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_s \mathfrak{t}(g_1, g_2), \mathfrak{l}\mathbb{1}_I)$ и $h = \mathfrak{D}_w \mathfrak{n}(h_1, h_2)$.

Случај 4.3.2. Претпоставимо сада да је $E \multimap H$ фактор од B. Тада постоје централни изоморфизми $w' : A \to A_1 \otimes A_2$ и $s' : B \to (B_1 \otimes (E \multimap H)) \otimes B_2$. Примијетимо да сада из постојања Генценовог терма $\mathfrak{D}_u f_1 : A_1 \otimes B_1 \to E$ не можемо закључити да постоји Генценов терм типа $B_1 \to I$, јер формуле B_1 и E не морају бити узајамно просте. Међутим, пошто су A_1 и E узајамно просте, можемо посматрати Генценов терм $\mathfrak{s}\mathfrak{D}_u f_1 : B_1 \otimes A_1 \to E$, одакле користећи индуктивну хипотезу добијамо да постоје Генценови терми $g_1 : B_1 \to E$ и $h_1 : A_1 \to I$. Даље, из постојања Генценовог терма $\mathfrak{D}_v f_2$ закључујемо да постоји Генценов терм $\mathfrak{as}_F \mathfrak{D}_v f_2 : A_2 \otimes (H \otimes B_2) \to C$, гдје је $F = \_ \otimes B_2$. Примјеном индуктивне хипотезе на $\mathfrak{as}_F \mathfrak{D}_v f_2$, добијамо да постоје Генценови терми $g_2 : H \otimes B_2 \to I$ и $h_2 : A_2 \to C$. Генценове терме $g : B \to I$ и $h : A \to C$ добијамо када узмемо да је $g = \mathfrak{D}_{s'} \mathfrak{n}(g_1, g_2)$ и $h = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_{w'} \mathfrak{t}(A_1, A_2), \mathfrak{l}\mathbb{1}_C)$. □

Лема 2.15 је аналог тврђења 7.6 из [21] (в. такође и лему 2 из [26]). Примијетимо да се у формулацји и доказу тврђења 7.6 из [21] појављује услов правилности објеката, за кога се испоставља да је сувишан (в. [39, страна 2]). Наша лема 2.15 је формулисана и доказана без тог услова. Међутим, услов правилности је неопходан у сљедећој леми, која је аналог тврђења 7.8 из [21] (в. такође и лему 3 из [26]).

Лема 2.16. *Нека је $f : (A \otimes (B \multimap C)) \otimes D \to E$ Генценов терм при чему су скупови $\{A, B\}$ и $\{C, D, E\}$ узајамно прости. Претпоставимо да су објекти $(A \otimes (B \multimap C)) \otimes D$ и E правилни. Тада постоје Генценови терми $g : A \to B$ и $h : C \otimes D \to E$.*

Доказ. Слично као у доказу претходне леме претпоставићемо да се у Генценовом терму f не појављује сјечење и користићемо индукцију по сложености типа $(A \otimes (B \multimap C)) \otimes D \to E$. Ако је тип $(A \otimes (B \multimap C)) \otimes D \to E$ сложености 0, тада су A, B, C, D и E константни објекти, па тврђење леме слиједи из посљедице 2.4. Случајеви када је Генценов терм f облика $\mathfrak{t}(f_1, f_2)$, $\mathfrak{m} f_1$ или $\mathfrak{n}(f_1, f_2)$ се анализирају слично као у доказу претходне леме. У наставку ћемо размотрити само случај када је терм f облика $\mathfrak{D} f'$, гдје је $\mathfrak{D}$ низ структурних Генценових операција, а Генценов терм $f' : E' \to E$ је добијен неком Генценовом операцијом која није структурна. У наставку разликујемо сљедећа три случаја.

Случај 1. Терм f' је облика $\mathfrak{t}(f_1, f_2)$. Претпоставимо да се формула $B \multimap C$ налази у домену терма f_1 (случај када се $B \multimap C$ налази у домену од f_2 се разматра потпуно аналогно). Тада Генценов терм f има сљедећи облик

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f_1 : F(B \multimap C) \to E_1 \qquad f_2 : H \to E_2}{\mathfrak{t}(f_1, f_2) : F(B \multimap C) \otimes H \to E_1 \otimes E_2}}{\text{низ структурних операција}}}{\mathfrak{D}\mathfrak{t}(f_1, f_2) : (A \otimes (B \multimap C)) \otimes D \to E_1 \otimes E_2},$$

гдје је $E = E_1 \otimes E_2$. Нека је $M = \mathscr{P}(H, A)$, $N = \mathscr{P}(H, D)$, $P = \mathscr{P}(F(B \multimap C), A)$ и $Q = \mathscr{P}(F(B \multimap C), D)$. Формула $B \multimap C$ се не појављује у мултискупу простих фактора објекта A, јер су A и C узајамно просте формуле. Слично, $B \multimap C$ није прост фактор од D, јер су B и D узајамно просте формуле. То значи да је $\mathscr{P}(F(B \multimap C)) = \mathscr{P}(P) + \mathscr{P}(Q) + \{B \multimap C\}$.

Слиједи да постоје централни изоморфизми $u : (P \otimes (B \multimap C)) \otimes Q \to F(B \multimap C)$, $v : N \otimes M \to H$, $w : A \to M \otimes P$ и $s : C \otimes D \to (C \otimes Q) \otimes N$. Посматрајмо Генценове терме $\mathfrak{D}_u f_1 : (P \otimes (B \multimap C)) \otimes Q \to E_1$ и $\mathfrak{D}_v f_2 : N \otimes M \to E_2$. Из индуктивне хипотезе примијењене на $\mathfrak{D}_u f_1$ слиједи да постоје Генценови терми $g_1 : P \to B$ и $h_1 : C \otimes Q \to E_1$, а из леме 2.15 примијењене на $\mathfrak{D}_v f_2$ слиједи да постоје Генценови терми $g_2 : M \to I$ и $h_2 : N \to E_2$. Сада Генценове терме $g : A \to B$ и $h : C \otimes D \to E$ добијамо када узмемо да је $g = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_w \mathfrak{t}(g_2, g_1), \mathfrak{l}\mathbb{1}_B)$ и $h = \mathfrak{D}_s \mathfrak{t}(h_1, h_2)$.

Случај 2. Терм f' је облика $\mathfrak{m} f_1$. Тада Генценов терм f има сљедећи облик

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f_1 : E_1 \otimes F(B \multimap C) \to E_2}{\mathfrak{m} f_1 : F(B \multimap C) \to E_1 \multimap E_2}}{\text{низ структурних операција}}}{\mathfrak{D}\mathfrak{m} f_1 : (A \otimes (B \multimap C)) \otimes D \to E_1 \multimap E_2},$$

гдје је $E = E_1 \multimap E_2$. Формуле $(A \otimes (B \multimap C)) \otimes D$ и $F(B \multimap C)$ имају исте мултискупове простих фактора, па постоји централни изоморфизам $u : (A \otimes (B \multimap C)) \otimes (D \otimes E_1) \to E_1 \otimes F(B \multimap C)$. Посматрајмо Генценов терм $\mathfrak{D}_u f_1 : (A \otimes (B \multimap C)) \otimes (E_1 \otimes D) \to E_2$. Из индуктивне хипотезе слиједи да постоје Генценови терми $g : A \to B$ и $h_1 : C \otimes (E_1 \otimes D) \to E_2$. Генценов терм $h : C \otimes D \to E$ добијамо када узмемо да је $h = \mathfrak{m}\mathfrak{D}_v h_1$ за централни изоморфизам $v : E_1 \otimes (C \otimes D) \to C \otimes (E_1 \otimes D)$.

Случај 3. Терм f' је облика $\mathfrak{n}(f_1, f_2)$. Тада Генценов терм f има сљедећи облик

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f_1 : K \to L \qquad f_2 : M \otimes N \to E}{\mathfrak{n}(f_1, f_2) : (K \otimes (L \multimap M)) \otimes N \to E}}{\text{низ структурних операција}}}{\mathfrak{D}\mathfrak{n}(f_1, f_2) : (A \otimes (B \multimap C)) \otimes D \to E}$$

Нека је $A_1 = \mathscr{P}(A, K)$, $A_2 = \mathscr{P}(A, N)$, $D_1 = \mathscr{P}(D, K)$, $D_2 = \mathscr{P}(D, N)$. У наставку разликујемо 5 подслучајева.

Случај 3.1. Формула $B \multimap C$ је фактор од K, а $L \multimap M$ је фактор од A. Тада постоји централни изоморфизам $u : (A_1 \otimes (B \multimap C)) \otimes D_1 \to K$ и Генценов терм $\mathfrak{D}_u f_1 : (A_1 \otimes (B \multimap$

$C)) \otimes D_1 \to L$. Примијетимо да формула A_1 не мора бити узајамно проста са L, па не можемо директно примијенити индуктивну хипотезу на Генценов терм $\mathfrak{D}_u f_1$.

Даље, постоји централни изоморфизам $v : D_2 \otimes (M \otimes A_2) \to M \otimes N$ и Генценов терм $\mathfrak{D}_v f_2 : D_2 \otimes (M \otimes A_2) \to E$. Скупови $\{M \otimes A_2\}$ и $\{D_2, E\}$ су узајамно прости, па можемо примијенити лему 2.15. Слиједи да постоје Генценови терми $g_1 : M \otimes A_2 \to I$ и $h_1 : D_2 \to E$. Објекат $M \otimes A_2$ је правилан према услову леме, па из леме 2.14 слиједи да је $M \otimes A_2$ константан објекат. Специјално, M је константан објекат, па поново из услова правилности слиједи да је и L константан објекат. Користећи још једном лему 2.14 закључујемо да је $(A_1 \otimes (B \multimap C)) \otimes D_1$ константан објекат. Дакле, A и B су константни објекти, па из посљедице 2.4 слиједи да постоји Генценов терм $g : A \to B$.

Пошто су C и D_1 такође константни објекти, из посљедице 2.4 слиједи да постоји Генценов терм $h_2 : C \otimes D_1 \to I$. Генценов терм $h : C \otimes D \to E$ сада добијамо када узмемо да је $h = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_w \mathfrak{t}(h_2, h_1), \mathfrak{l}\mathbb{1}_E)$ за централни изоморфизам $w : C \otimes D \to (C \otimes D_1) \otimes D_2$.

Случај 3.2. Формула $B \multimap C$ је фактор од K, а $L \multimap M$ је фактор од D. Тада слично као у претходном случају постоји централни изоморфизам $u : (A_1 \otimes (B \multimap C)) \otimes D_1 \to K$ и Генценов терм $\mathfrak{D}_u f_1 : (A_1 \otimes (B \multimap C)) \otimes D_1 \to L$. Међутим, сада је A_1 узајамно просто са L (јер се L налази у D), па одмах можемо примијенити индуктивну хипотезу. Дакле, постоје Генценови терми $g_1 : A_1 \to B$ и $h_1 : C \otimes D_1 \to L$.

Такође, постоји централни изоморфизам $v : (M \otimes D_2) \otimes A_2 \to M \otimes N$ и Генценов терм $\mathfrak{D}_v : (M \otimes D_2) \otimes A_2 \to E$, при чему су сада скупови $\{A_2\}$ и $\{M \otimes D_2, E\}$ узајамно прости. Користећи лему 2.15 слиједи да постоје Генценови терми $g_2 : A_2 \to I$ и $h_2 : M \otimes D_2 \to E$. Генценове терме $g : A \to B$ и $h : C \otimes D \to E$ сада добијамо када узмемо да је $g = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_w \mathfrak{t}(g_2, g_1), \mathfrak{l}\mathbb{1}_B)$ и $h = \mathfrak{D}_s \mathfrak{n}(h_1, h_2)$ за централне изоморфизме $w : A \to A_2 \otimes A_1$ и $s : C \otimes D \to ((C \otimes D_1) \otimes (L \multimap M)) \otimes D_2$.

Случај 3.3. Формула $B \multimap C$ је фактор од N, а $L \multimap M$ је фактор од A. Тада постоје централни изоморфизми $u : A_1 \otimes D_1 \to K$ и $v : ((M \otimes A_2) \otimes (B \multimap C)) \otimes D_2 \to M \otimes N$, тако да имамо Генценове терме $\mathfrak{D}_u f_1 : A_1 \otimes D_1 \to L$ и $\mathfrak{D}_v f_2 : ((M \otimes A_2) \otimes (B \multimap C)) \otimes D_2 \to E$. Када примијенимо лему 2.15 на терм $\mathfrak{D}_u f_1$ добијамо да постоје Генценови терми $g_1 : A_1 \to L$ и $h_1 : D_1 \to I$, а из индуктивне хипотезе примијењене на терм $\mathfrak{D}_v f_2$ слиједи да постоје Генценови терми $g_2 : M \otimes A_2 \to B$ и $h_2 : C \otimes D_2 \to E$. Сада Генценове терме g и h добијамо када узмемо да је $g = \mathfrak{D}_w \mathfrak{n}(g_1, g_2)$ и $h = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_s \mathfrak{t}(h_1, h_2), \mathfrak{l}\mathbb{1}_E)$ за централне изоморфизме $w : A \to (A_1 \otimes (L \multimap M)) \otimes A_2$ и $s : C \otimes D \to D_1 \otimes (C \otimes D_2)$.

Случај 3.4. Формула $B \multimap C$ је фактор од N, а $L \multimap M$ је фактор од D. Тада постоје централни изоморфизми $u : D_1 \otimes A_1 \to K$ и $v : (A_2 \otimes (B \multimap C)) \otimes (M \otimes D_2) \to M \otimes N$, тако да имамо Генценове терме $\mathfrak{D}_u f_1 : D_1 \otimes A_1 \to L$ и $\mathfrak{D}_v f_2 : (A_2 \otimes (B \multimap C)) \otimes (M \otimes D_2) \to E$. Када примијенимо лему 2.15 на терм $\mathfrak{D}_u f_1$ добијамо Генценове терме $g_1 : A_1 \to I$ и $h_1 : D_1 \to L$, а из индуктивне хипотезе примијењене на терм $\mathfrak{D}_v f_2$ слиједи да постоје Генценови терми $g_2 : A_2 \to B$ и $h_2 : C \otimes (M \otimes D_2) \to E$. Генценове терме g и h добијамо када узмемо да је $g = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_w \mathfrak{t}(g_1, g_2), \mathfrak{l}\mathbb{1}_B)$ и $h = \mathfrak{D}_s \mathfrak{n}(h_1, \mathfrak{as} h_2)$ за централне изоморфизме $w : A \to A_1 \otimes A_2$ и $s : C \otimes D \to (D_1 \otimes (L \multimap M)) \otimes (D_2 \otimes C)$.

Случај 3.5. Формуле $B \multimap C$ и $L \multimap M$ су једнаке, то јест $L = B$ и $M = C$. Тада постоје централни изоморфизми $u : A_1 \otimes D_1 \to K$ и $v : (C \otimes D_2) \otimes A_2 \to C \otimes N$, па имамо Генценове терме $\mathfrak{D}_u f_1 : A_1 \otimes D_1 \to B$ и $\mathfrak{D}_v f_2 : (C \otimes D_2) \otimes A_2 \to E$. Када примијенимо лему 2.15 на терме $\mathfrak{D}_u f_1$ и $\mathfrak{D}_v f_2$, добијамо да постоје Генценови терми $g_1 : A_1 \to B$, $h_1 : D_1 \to I$, $g_2 : A_2 \to I$ и $h_2 : C \otimes D_2 \to E$. Генценове терме g и h добијамо када узмемо да је

$g = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_w\mathfrak{t}(g_2, g_1), \mathfrak{l}\mathbb{1}_B)$ и $h = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_s\mathfrak{t}(h_1, h_2), \mathfrak{l}\mathbb{1}_E)$ за централне изоморфизме $w : A \to A_2 \otimes A_1$ и $s : C \otimes D \to D_1 \otimes (C \otimes D_2)$. □

Напомена 2.2. Случај 3.1 у доказу претходне леме је једино мјесто гдје користимо услов правилности објеката. Међутим, тај услов не може бити изостављен. Да бисмо се у то увјерили, посматрајмо Генценов терм

$$\mathfrak{s}_F\mathfrak{n}(\mathfrak{m}\mathfrak{l}^{-1}\mathfrak{s}\mathfrak{n}(\mathbb{1}_p, \mathfrak{l}\mathbb{1}_I), \mathfrak{l}\mathbb{1}_q) : (((p \multimap I) \multimap I) \otimes (p \multimap I)) \otimes q \to q,$$

гдје је $F = \_ \otimes q$. Када узмемо да је $A = (p \multimap I) \multimap I$, $B = p$, $C = I$ и $D = E = q$, очигледно важи да је $\{A, B\}$ узајамно просто са $\{C, D, E\}$. Међутим, није тешко показати да не постоји Генценов терм типа $(p \multimap I) \multimap I \to p$.

2.6 Кохеренција

У овом одјељку представљамо главни резултат ове главе. Кохеренција за симетричне моноидално затворене категорије је директна посљедица сљедеће теореме.

Теорема 2.17. *Нека су $f, g : A \to B$ Генценови терми уравнотеженог типа, при чему су A и B правилни објекти. Тада је $f = g$.*

Доказ. Довољно је доказати теорему у случају када се у Генценовим термима f и g не појављује сјечење. Доказ изводимо индукцијом по сложености типа $A \to B$. Ако је његова сложеност 0, тада тврђење теореме тривијално важи, па имамо базу индукције. У зависности од облика Генценових терама f и g (имајући у виду симетрију) у наставку треба размотрити сљедеће случајеве:

1. f је облика $\mathfrak{t}(f_1, f_2)$, а g је облика $\mathfrak{t}(g_1, g_2)$;
2. f је облика $\mathfrak{t}(f_1, f_2)$, а g је облика $\mathfrak{m}g'$;
3. f је облика $\mathfrak{t}(f_1, f_2)$, а g је облика $\mathfrak{n}(g_1, g_2)$;
4. f је облика $\mathfrak{t}(f_1, f_2)$, а g је облика $\mathfrak{D}_u g'$, при чему је $\mathfrak{D}_u$ низ структурних Генценових операција, а Генценов терм g' је добијен неком Генценовом операцијом која није структурна. Овдје имамо три подслучаја:
   - 4.1. g' је облика $\mathfrak{t}(g_1, g_2)$;
   - 4.2. g' је облика $\mathfrak{m}g''$;
   - 4.3. g' је облика $\mathfrak{n}(g_1, g_2)$;
5. f је облика $\mathfrak{m}f'$, а g је облика $\mathfrak{m}g'$;
6. f је облика $\mathfrak{m}f'$, а g је облика $\mathfrak{n}(g_1, g_2)$;
7. f је облика $\mathfrak{m}f'$, а g је облика $\mathfrak{D}_u g'$ при чему је $\mathfrak{D}_u$ низ структурних Генценових операција, а Генценов терм g' је добијен неком Генценовом операцијом која није структурна. Имамо три подслучаја:
   - 7.1. g' је облика $\mathfrak{t}(g_1, g_2)$;
   - 7.2. g' је облика $\mathfrak{m}g''$;

7.3. g' је облика $\mathfrak{n}(g_1, g_2)$;

8. f је облика $\mathfrak{n}(f_1, f_2)$, а g је облика $\mathfrak{n}(g_1, g_2)$;

9. f је облика $\mathfrak{n}(f_1, f_2)$, а g је облика $\mathfrak{D}_u g'$ при чему је $\mathfrak{D}_u$ низ структурних Генценових операција, а Генценов терм g' је добијен неком Генценовом операцијом која није структурна. Имамо три подслучаја:

   9.1. g' је облика $\mathfrak{t}(g_1, g_2)$;

   9.2. g' је облика $\mathfrak{m}g''$;

   9.3. g' је облика $\mathfrak{n}(g_1, g_2)$;

10. f је облика $\mathfrak{D}_u f'$, а g је облика $\mathfrak{D}_v g'$, при чему су $\mathfrak{D}_u$ и $\mathfrak{D}_v$ низови структурних Генценових операција, а Генценови терми f' и g' су добијени неком Генценовом операцијом која није структурна.

Примијетимо да је случај 1 тривијалан. Наиме, из индуктивне хипотезе можемо закључити да је $f_1 = g_1$ и $f_2 = g_2$, одакле одмах слиједи $f = g$. На исти начин, тривијални су случајеви 5 и 8.

Такође, случај 2 не може да се деси, јер због облика терма f формула B мора бити облика $B_1 \otimes B_2$, а због облика терма g она мора бити облика $B_1 \multimap B_2$, што је контрадикција. На исти начин закључујемо да не могу да се десе случајеви 4.2 и 7.1.

Даље, примијетимо да се случај 10 своди на неки од претходних случајева. Наиме, посматрајмо Генценов терм $\mathfrak{D}_{u^{-1}}\mathfrak{D}_v g'$. Терми f' и $\mathfrak{D}_{u^{-1}}\mathfrak{D}_v g'$ су истог типа, при чему је f' добијен неком Генценовом операцијом која није структурна. Дакле, ако претпоставимо да су претходни случајеви доказани, имамо да је $f' = \mathfrak{D}_{u^{-1}}\mathfrak{D}_v g'$, одакле лако слиједи да је $f = g$. Слично добијамо да се случај 4.3 своди на 9.1, а случај 7.3 на 9.2.

Од преосталих седам случајева у наставку ћемо размотрити само случај 9.1; сви остали случајеви се разматрају аналогно. Нека је $f = \mathfrak{n}(f_1, f_2)$ за Генценове терме $f_1 : A_1 \to A_2$ и $f_2 : A_3 \otimes A_4 \to B_1 \otimes B_2$, при чему је $A = (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4$ и $B = B_1 \otimes B_2$. Дакле, Генценов терм f има сљедећи облик:

$$\frac{f_1 : A_1 \to A_2 \qquad f_2 : A_3 \otimes A_4 \to B_1 \otimes B_2}{\mathfrak{n}(f_1, f_2) : (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3) \otimes A_4 \to B_1 \otimes B_2}\,.$$

Даље, нека је $g = \mathfrak{D}_u g'$, при чему је $g' = \mathfrak{t}(g_1, g_2)$ за неке Генценове терме $g_1 : C_1 \to B_1$ и $g_2 : C_2 \to B_2$ и централни изоморфизам $u : (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4 \to C_1 \otimes C_2$. Тада Генценов терм g има сљедећи облик:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{g_1 : C_1 \to B_1 \qquad g_2 : C_2 \to B_2}{\mathfrak{t}(g_1, g_2) : C_1 \otimes C_2 \to B_1 \otimes B_2}}{\text{низ структурних операција}}}{\mathfrak{D}_u\mathfrak{t}(g_1, g_2) : (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4 \to B_1 \otimes B_2}\,.$$

Треба да докажемо једнакост

$$\mathfrak{n}(f_1, f_2) = \mathfrak{D}_u\mathfrak{t}(g_1, g_2). \tag{2.26}$$

Нека је $D_1 = \mathscr{P}(C_1, A_1)$, $D_2 = \mathscr{P}(C_2, A_1)$, $E_1 = \mathscr{P}(C_1, A_4)$ и $E_2 = \mathscr{P}(C_2, A_4)$. Претпоставимо да је $A_2 \multimap A_3$ фактор од C_1 (случај када је $A_2 \multimap A_3$ фактор од C_2 се разматра аналогно). Тада постоје централни изоморфизми $v : C_1 \to (D_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes E_1$, $w : C_2 \to D_2 \otimes E_2$, $r : A_1 \to D_2 \otimes D_1$ и $s : A_4 \to E_1 \otimes E_2$.

Посматрајмо Генценов терм $\mathfrak{D}_{v^{-1}}g_1 : (D_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes E_1 \to B_1$. Користећи уравнотеженост типа $A \to B$ није тешко доказати да су скупови $\{D_1, A_2\}$ и $\{A_3, E_1, B_1\}$ узајамно прости. Примјера ради, докажимо да су формуле D_1 и E_1 узајамно просте. Претпоставимо супротно: нека је p исказно слово које се појављује у D_1 и E_1. Из дефиниција скупова D_1 и E_1 слиједи да се p појављује у A_1 и A_4. Дакле, слово p се појављује и у типу Генценовог терма $f_2 : A_3 \otimes A_4 \to B_1 \otimes B_2$, па из леме 2.2 слиједи да се p појављује (бар) два пута у типу терма f_2. Међутим, то би значило да се p појављује више од два пута у типу терма f, што је у контрадикцији са претпоставком да је тип $A \to B$ уравнотежен. Слично доказујемо да су и остале формуле из скупова $\{D_1, A_2\}$ и $\{A_3, E_1, B_1\}$ узајамно просте.

Дакле, сада можемо примијенити лему 2.16, одакле слиједи да постоје Генценови терми $h_1 : D_1 \to A_2$ и $h_2 : A_3 \otimes E_1 \to B_1$. Слично, из постојања Генценовог терма $\mathfrak{s}\mathfrak{D}_{w^{-1}}g_2 : E_2 \otimes D_2 \to B_2$ уз коришћење леме 2.15 закључујемо да постоје Генценови терми $h_3 : D_2 \to I$ и $h_4 : E_2 \to B_2$.

Посматрајмо сада Генценов терм $\mathfrak{D}_v\mathfrak{n}(h_1, h_2) : C_1 \to B_1$. Пошто је тип $C_1 \to B_1$ мање сложености од $A \to B$, користећи индуктивну хипотезу добијамо да је $g_1 = \mathfrak{D}_v\mathfrak{n}(h_1, h_2)$. На исти начин, уз коришћење индуктивне хипотезе добијамо да је $g_2 = \mathfrak{D}_w\mathfrak{c}_F(h_3, \mathfrak{l}h_4)$, $f_1 = \mathfrak{D}_r\mathfrak{c}_G(h_3, \mathfrak{l}h_1)$ и $f_2 = \mathfrak{D}_{s'}\mathfrak{t}(h_2, h_4)$, гдје је $F = \_\otimes E_2$, $G = \_\otimes D_1$ и $s' = \alpha_{A_3,E_1,E_2} \circ (A_3 \otimes s)$. Дакле, да бисмо доказали једнакост (2.26), довољно је да докажемо

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{D}_r\mathfrak{c}_G(h_3, \mathfrak{l}h_1), \mathfrak{D}_{s'}\mathfrak{t}(h_2, h_4)) = \mathfrak{D}_u\mathfrak{t}(\mathfrak{D}_v\mathfrak{n}(h_1, h_2), \mathfrak{D}_w\mathfrak{c}_F(h_3, \mathfrak{l}h_4)). \tag{2.27}$$

Генценов терм на лијевој страни једнакости (2.27) означава стрелицу

$$l \stackrel{\text{def}}{=} (h_2 \otimes h_4) \circ \alpha_{A_3,E_1,E_2} \circ (A_3 \otimes s) \circ (\langle h_1 \circ \lambda_{D_1} \circ (h_3 \otimes D_1) \circ r \rangle \otimes A_4),$$

док Генценов терм на десној страни једнакости (2.27) означава стрелицу

$$d \stackrel{\text{def}}{=} ((h_2 \circ (\langle h_1 \rangle \otimes E_1) \circ v) \otimes (h_4 \circ \lambda_{E_2} \circ (h_3 \otimes E_2) \circ w)) \circ u.$$

Дакле, да бисмо доказали једнакост (2.27), треба да докажемо да у категорији $\mathcal{F}_P$ важи $l = d$. Означимо објекат $D_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)$ са H. Користећи бифункторијалност тензора и лему 1.7, добијамо да је

$$\begin{aligned}
l &= (h_2 \otimes h_4) \circ \alpha_{A_3,E_1,E_2} \circ (\langle h_1 \circ \lambda_{D_1} \circ (h_3 \otimes D_1) \circ r \rangle \otimes s) \\
&= (h_2 \otimes h_4) \circ \alpha_{A_3,E_1,E_2} \circ ((\langle h_1 \rangle \circ ((\lambda_{D_1} \circ (h_3 \otimes D_1) \circ r) \otimes (A_2 \multimap A_3))) \otimes s) \\
&= (h_2 \otimes h_4) \circ \alpha_{A_3,E_1,E_2} \circ (\langle h_1 \rangle \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ (((\lambda_{D_1} \circ (h_3 \otimes D_1) \circ r) \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s) \\
&= (h_2 \otimes h_4) \circ ((\langle h_1 \rangle \otimes E_1) \otimes E_2) \circ \alpha_{H,E_1,E_2} \circ (((\lambda_{D_1} \circ (h_3 \otimes D_1) \circ r) \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s).
\end{aligned}$$

Такође, опет из бифункторијалности тензора имамо да је

$$\begin{aligned}
d &= (h_2 \otimes h_4) \circ (((\langle h_1 \rangle \otimes E_1) \circ v) \otimes (\lambda_{E_2} \circ (h_3 \otimes E_2) \circ w)) \circ u \\
&= (h_2 \otimes h_4) \circ ((\langle h_1 \rangle \otimes E_1) \otimes (\lambda_{E_2} \circ (h_3 \otimes E_2))) \circ (v \otimes w) \circ u \\
&= (h_2 \otimes h_4) \circ ((\langle h_1 \rangle \otimes E_1) \otimes E_2) \circ ((H \otimes E_1) \otimes (\lambda_{E_2} \circ (h_3 \otimes E_2))) \circ (v \otimes w) \circ u.
\end{aligned}$$

Посматрајмо централни изоморфизам $u' : (A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3) \otimes A_4) \to C_1 \otimes C_2$ дефинисан на сљедећи начин:

$$u' \stackrel{\text{def}}{=} (v^{-1} \otimes w^{-1}) \circ \alpha^{-1}_{H \otimes E_1, D_2, E_2} \circ (\sigma_{D_2, H \otimes E_1} \otimes E_2) \circ (\alpha^{-1}_{D_2,H,E_1} \otimes E_2) \tag{2.28}$$

$$\circ\, \alpha_{D_2\otimes H,E_1,E_2} \circ (\alpha^{-1}_{D_2,D_1,A_2\multimap A_3} \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s).$$

Из уравнотежености типа $(A_1\otimes(A_2 \multimap A_3))\otimes A_4 \to B_1\otimes B_2$ слиједи да су сви неконстантни прости фактори од $(A_1 \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes A_4$ различити, па можемо примијенити теорему 2.10. Дакле, $u = u'$, одакле слиједи да је

$$d = (h_2 \otimes h_4) \circ ((\langle h_1\rangle \otimes E_1) \otimes E_2) \circ ((H \otimes E_1) \otimes (\lambda_{E_2} \circ (h_3 \otimes E_2))) \circ (v \otimes w) \circ u'.$$

Означимо композицију $((H \otimes E_1) \otimes (\lambda_{E_2} \circ (h_3 \otimes E_2))) \circ (v \otimes w) \circ u'$ са x. Користећи бифункторијалност тензора и природност од α, α^{-1} и σ имамо да је

$$\begin{aligned}
x &= ((H \otimes E_1) \otimes \lambda_{E_2}) \circ ((H \otimes E_1) \otimes (h_3 \otimes E_2)) \circ \alpha^{-1}_{H\otimes E_1,D_2,E_2} \circ (\sigma_{D_2,H\otimes E_1} \otimes E_2)\\
&\quad \circ (\alpha^{-1}_{D_2,H,E_1} \otimes E_2) \circ \alpha_{D_2\otimes H,E_1,E_2} \circ (\alpha^{-1}_{D_2,D_1,A_2\multimap A_3} \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s)\\
&= ((H \otimes E_1) \otimes \lambda_{E_2}) \circ \alpha^{-1}_{H\otimes E_1,I,E_2} \circ (((H \otimes E_1) \otimes h_3) \otimes E_2) \circ (\sigma_{D_2,H\otimes E_1} \otimes E_2)\\
&\quad \circ (\alpha^{-1}_{D_2,H,E_1} \otimes E_2) \circ \alpha_{D_2\otimes H,E_1,E_2} \circ (\alpha^{-1}_{D_2,D_1,A_2\multimap A_3} \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s)\\
&= ((H \otimes E_1) \otimes \lambda_{E_2}) \circ \alpha^{-1}_{H\otimes E_1,I,E_2} \circ (\sigma_{I,H\otimes E_1} \otimes E_2) \circ ((h_3 \otimes (H \otimes E_1)) \otimes E_2)\\
&\quad \circ (\alpha^{-1}_{D_2,H,E_1} \otimes E_2) \circ \alpha_{D_2\otimes H,E_1,E_2} \circ (\alpha^{-1}_{D_2,D_1,A_2\multimap A_3} \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s)\\
&= ((H \otimes E_1) \otimes \lambda_{E_2}) \circ \alpha^{-1}_{H\otimes E_1,I,E_2} \circ (\sigma_{I,H\otimes E_1} \otimes E_2) \circ (\alpha^{-1}_{I,H,E_1} \otimes E_2) \circ (((h_3 \otimes H) \otimes E_1) \otimes E_2)\\
&\quad \circ \alpha_{D_2\otimes H,E_1,E_2} \circ (\alpha^{-1}_{D_2,D_1,A_2\multimap A_3} \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s)\\
&= ((H \otimes E_1) \otimes \lambda_{E_2}) \circ \alpha^{-1}_{H\otimes E_1,I,E_2} \circ (\sigma_{I,H\otimes E_1} \otimes E_2) \circ (\alpha^{-1}_{I,H,E_1} \otimes E_2) \circ \alpha_{I\otimes H,E_1,E_2}\\
&\quad \circ ((h_3 \otimes H) \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ (\alpha^{-1}_{D_2,D_1,A_2\multimap A_3} \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s)\\
&= ((H \otimes E_1) \otimes \lambda_{E_2}) \circ \alpha^{-1}_{H\otimes E_1,I,E_2} \circ (\sigma_{I,H\otimes E_1} \otimes E_2) \circ (\alpha^{-1}_{I,H,E_1} \otimes E_2) \circ \alpha_{I\otimes H,E_1,E_2}\\
&\quad \circ (\alpha^{-1}_{I,D_1,A_2\multimap A_3} \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ (((h_3 \otimes D_1) \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes (E_1 \otimes E_2))\\
&\quad \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s).
\end{aligned}$$

Користећи још једном теорему 2.10 имамо да је композиција

$$\begin{aligned}
&((H \otimes E_1) \otimes \lambda_{E_2}) \circ \alpha^{-1}_{H\otimes E_1,I,E_2} \circ (\sigma_{I,H\otimes E_1} \otimes E_2) \circ (\alpha^{-1}_{I,H,E_1} \otimes E_2)\\
&\circ \alpha_{I\otimes H,E_1,E_2} \circ (\alpha^{-1}_{I,D_1,A_2\multimap A_3} \otimes (E_1 \otimes E_2))
\end{aligned}$$

једнака централном изоморфизму

$$\alpha_{H,E_1,E_2} \circ ((\lambda_{D_1} \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes (E_1 \otimes E_2)).$$

Сада из бифункторијалности тензора слиједи да је

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{H,E_1,E_2} \circ ((\lambda_{D_1} \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ (((h_3 \otimes D_1) \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes (E_1 \otimes E_2))\\
&\quad \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s)\\
&= \alpha_{H,E_1,E_2} \circ (((\lambda_{D_1} \circ (h_3 \otimes D_1)) \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes (E_1 \otimes E_2)) \circ ((r \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s)\\
&= \alpha_{H,E_1,E_2} \circ (((\lambda_{D_1} \circ (h_3 \otimes D_1) \circ r) \otimes (A_2 \multimap A_3)) \otimes s),
\end{aligned}$$

одакле добијамо да је $l = d$. □

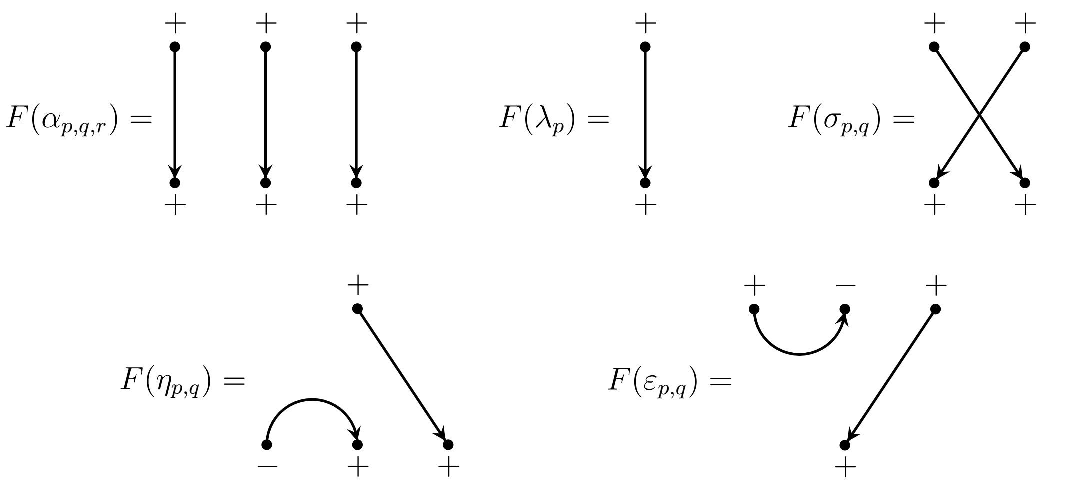
Сљедеће тврђење је прва верзија теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије.

Теорема 2.18. *Нека су $f, g : A \to B$ стрелице категорије $\mathcal{F}_P$, при чему је тип $A \to B$ уравнотежен, а објекти A и B правилни. Тада је $f = g$.*

Доказ. Слиједи директно из теореме 2.17 и леме о генценизацији (лема 2.3). □

2.7 Класична формулација теореме кохеренције

Посматрајмо функцију f из скупа исказних слова P (који генерише категорију $\mathcal{F}_P$) у скуп објеката категорије **1Cob** која свако исказно слово слика у $+$. Пошто је $\mathcal{F}_P$ симетрична моноидално затворена категорија слободно генерисана скупом P, а **1Cob** је симетрична моноидално затворена категорија, слиједи да постоји јединствени стриктни симетрични моноидално затворени функтор $F : \mathcal{F}_P \to \mathbf{1Cob}$ такав да је $F(p) = f(p)$ за свако $p \in P$. Дакле, важи $F(A \otimes B) = F(A) \otimes F(B)$, $F(A \multimap B) = F(A) \multimap F(B)$, као и једнакости илустроване сљедећим цртежима.



Доказ наредне леме је суштински исти као доказ леме 3.3 из [8].

Лема 2.19. *Нека су $f, g : A \to B$ стрелице категорије $\mathcal{F}_P$ такве да је $Ff = Fg$. Тада постоје стрелице $f', g' : A' \to B'$ такве да су f и g инстанце од f' и g', респективно, добијене истом супституцијом, при чему је тип $A' \to B'$ уравнотежен.*

Доказ. Нека је $f = f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$ за $f_i : C_i \to C_{i+1}$, при чему је $1 \leq i \leq n$, $C_1 = A$ и $C_{n+1} = B$. Слично, нека је $g = g_m \circ g_{m-1} \circ \ldots \circ g_1$ за $g_j : D_j \to D_{j+1}$, при чему је $1 \leq j \leq m$, $D_1 = A$ и $D_{m+1} = B$. Претпоставимо да за свако $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$ терми f_i и g_j не садрже знак $\circ$.

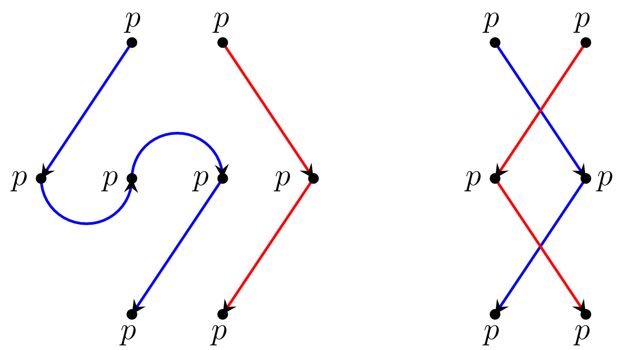
Посматрајмо декомпозицију кобордизма Ff на кобордизме $Ff_1, \ldots, Ff_n$. Скуп компоненти повезаности кобордизама $Ff_1, \ldots, Ff_n$ чијим лијепљењем се добија једна компонента повезаности кобордизма Ff називамо *ланац* од Ff. Слично, имамо декомпозицију кобордизма Fg на кобордизме $Fg_1, \ldots, Fg_m$ и аналогно дефинишемо ланац од Fg. Дакле, свакој компоненти повезаности кобордизма $Ff = Fg$ одговара један ланац од Ff и једнан ланац од Fg. Ланце који одговарају истој компоненти повезаности кобордизма $Ff = Fg$ ћемо називати *придружени*.

Изведимо сада сљедећи поступак. Сва слова чије слике припадају придруженим ланцима замијенимо потпуно новим, истим исказним словом. На тај начин за свако $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$ добијамо стрелице $f'_i : C'_i \to C'_{i+1}$ и $g'_j : D'_j \to D'_{j+1}$ такве да је стрелица f_i инстанца од f'_i, а стрелица g_j инстанца од g'_j. Дакле, за $f' = f'_n \circ f'_{n-1} \circ \ldots \circ f'_1$ и $g' = g'_m \circ g'_{m-1} \circ \ldots \circ g'_1$ слиједи да је f инстанца од f', а g инстанца од g'. Из услова $Ff = Fg$ добијамо да је $C'_1 = D'_1$ и $C'_{n+1} = D'_{m+1}$, тако да f' и g' имају исти домен и кодомен. Такође, ако означимо C'_1 са A' и C'_{n+1} са B', није тешко видјети да је секвент $A' \to B'$ уравнотежен. Из конструкције видимо да је стрелица g добијена од g' истом супституцијом којом је f добијена од f'. $\square$

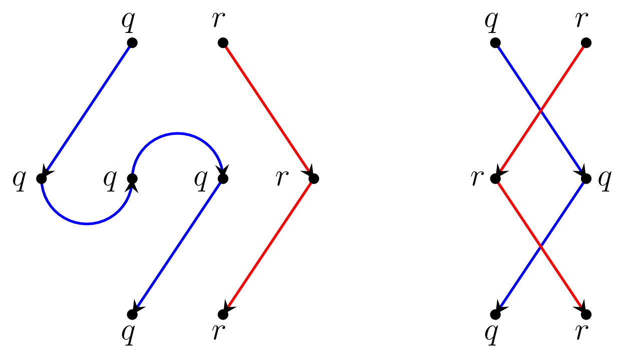
Примјер 2.2. Илуструјмо претходни доказ на сљедећем примјеру. Нека су стрелице $f, g : p \otimes p \to p \otimes p$ дате са $f = \varepsilon_{p,p\otimes p} \circ (\mathbb{1}_p \otimes \eta_{p,p})$ и $g = \sigma_{p,p} \circ \sigma_{p,p}$. Тада је

$$\begin{aligned} &A = C_1 = D_1 = p \otimes p, && f_1 = \mathbb{1}_p \otimes \eta_{p,p}, \\ &C_2 = p \otimes (p \multimap (p \otimes p)), && f_2 = \varepsilon_{p,p\otimes p}, \\ &D_2 = p \otimes p, && g_1 = \sigma_{p,p}, \\ &B = C_3 = D_3 = p \otimes p, && g_2 = \sigma_{p,p}. \end{aligned}$$

На сљедећој слици је приказана декомпозиција кобордизма Ff на кобордизме Ff_1 и Ff_2, као и декомпозиција кобордизма Fg на кобордизме Fg_1 и Ff_2. Због прегледности смо поред тачака у кобордизмима ставили слова која функтор F пресликава у те тачке, а оријентације тачака смо изоставили.



Видимо да кобордизми Ff и Fg имају по двије компоненте повезаности. Придружени ланци од Ff и Fg су означени истом бојом. Сада пратећи поступак описан у доказу леме 2.19 сва слова чије слике припадају придруженим ланцима означеним плавом бојом замијенимо са q, а сва слова чије слике припадају придруженим ланцима означеним црвеном бојом замијенимо са r, као што је илустровано на сљедећој слици.



Дакле, сада је

$$\begin{aligned} &A' = C_1' = D_1' = q \otimes r, && f_1' = \mathbb{1}_q \otimes \eta_{q,r}, \\ &C_2' = q \otimes (q \multimap (q \otimes r)), && f_2' = \varepsilon_{q,q\otimes r}, \\ &D_2' = r \otimes q, && g_1 = \sigma_{q,r}, \\ &B' = C_3' = D_3' = q \otimes r, && g_2 = \sigma_{r,q}. \end{aligned}$$

одакле је $f' = \varepsilon_{q,q\otimes r} \circ (\mathbb{1}_q \otimes \eta_{q,r})$ и $g' = \sigma_{r,q} \circ \sigma_{q,r}$. Очигледно важи да су f и g инстанце од f' и g', добијене истом супституцијом, као и да је тип $q \otimes r \to q \otimes r$ уравнотежен.

Сљедеће тврђење је „класична формулација” теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије.

Теорема 2.20. *Нека су A и B правилни објекти категорије $\mathcal{F}_P$ и нека за стрелице $f, g : A \to B$ важи да је $Ff = Fg$. Тада је $f = g$. Другим ријечима, рестрикција од F на пуну поткатегорију од $\mathcal{F}_P$ генерисану правилним објектима је вјеран функтор.*

Доказ. Из леме 2.19 слиједи да постоје стрелице $f', g' : A' \to B'$ такве да су f и g инстанце од f' и g', респективно, добијене истом супституцијом, при чему је тип $A' \to B'$ уравнотежен. Из услова да су A и B правилни објекти слиједи да су A' и B' такође правилни објекти, јер су A и B инстанце од A' и B' добијене супституцијом исказних слова исказним словима. Сада из теореме 2.18 слиједи да је $f' = g'$. Пошто су f и g инстанце од f' и g', добијене истом супституцијом, закључујемо да важи $f = g$. □

Глава 3

Кохеренција за затворене категорије са бипроизводима

У овој глави ће бити доказан сљедећи резултат:

> Категорија **1Cob**, слободно обогаћена над категоријом **Cmd** и комплетирана у односу на бипроизводе, представља погодан графички језик за затворене категорије са бипроизводима.

Наведени резултат кохеренције је формално исказан теоремама 3.19, 3.22 и 3.24 у наставку. Прва од ових теорема се бави симетричним моноидално затвореним категоријама са бипроизводима. Као и у случају симетричних моноидално затворених категорија, комутативни дијаграми су ограничени на оне у којима се појављују само правилни објекти (примијетимо да се појмови правилног објекта у симетричној моноидално затвореној категорији и симетричној моноидално затвореној категорији са бипроизводима разликују, уп. дефиниције 2.16 и 3.4).

Поменути резултат каже да су сваке двије стрелице између правилних објеката, које имају исти „граф", једнаке. Међутим, појам графа стрелице је у нашем случају мало другачији од појма Кели-Меклејновог графа – то је заправо матрица чији чланови одговарају формалним сумама Кели-Меклејнових графова. Друга и трећа теорема су аналогне. Оне се тичу случајева компактно затворених категорија са бипроизводима и компактно затворених категорија са инволуцијом и †-бипроизводима. Главна разлика је што ова два резултата нису ограничена на правилне објекте.

Традиционално, графови придружени стрелицама затворених категорија су засновани на 1-димензионалним многострукостима (в. [21], [22]), док графови погодни за стрелице категорија са производима, копроизводима и бипроизводима садрже гранања (сингуларитете) и стога нису многострукости (в. [34]). Ова два графичка језика немају добру интеракцију, као што је запажено у [35, Одјељак 3]. Са друге стране, посматрано из угла теорије категорија, затворена структура се одлично слаже са бипроизводима – прва структура се дистрибуира над другом. Такође, постоји много примјера који посједују обје структуре. Међутим, једини резултат кохеренције који нам је познат из литературе и који се тиче затворених категорија са бипроизводима је [2, Theorem 21].

Наше интересовање за затворене категорије са бипроизводима је мотивисано питањима која се појављују у категоријалној теорији доказа. У недавно објављеном раду [5] разматран је секвентни систем у коме се појављује везник који се истовремено понаша и као конјункција и као дисјункција. Са тачке гледишта категоријалне теорије доказа, поменути везник одговара бипроизводу.

Надамо се да наши резултати могу доћи у интеракцију са истраживањима која се тичу проблема пуне кохеренције у затвореним категоријама (в. [36], [37] и [30]), гдје је понекад (уп. [37, Lemma 2.7]) улога бипроизвода очигледна. Такође, наш приступ отвара могућност да се конструишу други графички језици за неке компликованије структуре, што би проширило веома систематичну листу графичких језика дату у [34].

3.1 SMCB категорије

Овај одјељак је посвећен једнакосном представљању симетричних моноидално затворених категорија са бипроизводима. Језик је изабран тако да омогућава погодан приступ проблему кохеренције.

SMCB категорија $\mathcal{A}$ се састоји од скупа објеката и скупа стрелица. Постоје двије функције (*домен* и *кодомен*) које сликају скуп стрелица у скуп објеката. За сваки објекат A од $\mathcal{A}$ постоји јединична стрелица $\mathbb{1}_A : A \to A$. У скупу објеката постоје два истакнута објекта I и 0. Стрелице $f : A \to B$ и $g : B \to C$ могу да се *компонују*, при чему дају стрелицу $g \circ f : A \to C$, а стрелице $f_1, f_2 : A \to B$ могу да се *сабирају*, при чему дају стрелицу $f_1 + f_2 : A \to B$. За свака два објекта A и B од $\mathcal{A}$ постоје објекти $A \otimes B, A \oplus B$ и $A \multimap B$. Такође, за сваке двије стрелице $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ постоје стрелице $f \otimes g\colon A \otimes B \to A' \otimes B'$, $f \oplus g\colon A \oplus B \to A' \oplus B'$ и $A \multimap g\colon A \multimap B \to A \multimap B'$. У $\mathcal{A}$ постоје сљедеће фамилије стрелица индексиране њеним објектима.

$$\alpha_{A,B,C}\colon A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C, \qquad \alpha^{-1}_{A,B,C}\colon (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C),$$

$$\lambda_A\colon I \otimes A \to A, \qquad \lambda^{-1}_A\colon A \to I \otimes A,$$

$$\sigma_{A,B}\colon A \otimes B \to B \otimes A,$$

$$\eta_{A,B}\colon B \to A \multimap (A \otimes B), \qquad \varepsilon_{A,B}\colon A \otimes (A \multimap B) \to B,$$

$$\iota^1_{A,B}\colon A \to A \oplus B, \qquad \iota^2_{A,B}\colon B \to A \oplus B,$$

$$\pi^1_{A,B}\colon A \oplus B \to A, \qquad \pi^2_{A,B}\colon A \oplus B \to B,$$

$$0_{A,B}\colon A \to B.$$

Стрелице од $\mathcal{A}$ задовољавају сљедеће једнакости, које ћемо називати *аксиоме.*

(A1) За $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$ важи

$$f \circ \mathbb{1}_A = f = \mathbb{1}_B \circ f, \qquad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

(A2) За $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $g_1 : A' \to B'$ и $g_2 : B' \to C'$ важи

$$\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \otimes B}, \qquad (f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) = (f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1),$$

(A3) За $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $g_1 : A' \to B'$ и $g_2 : B' \to C'$ важи

$$\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \oplus B}, \qquad (f_2 \oplus g_2) \circ (f_1 \oplus g_1) = (f_2 \circ f_1) \oplus (g_2 \circ g_1),$$

(A4) За $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $g_1 : A' \to B'$ и $g_2 : B' \to C'$ важи

$$A \multimap \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \multimap B}, \qquad (A \multimap g_2) \circ (A \multimap g_1) = A \multimap (g_2 \circ g_1),$$

(A5) За $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ и $h : C \to C'$ важи

$$((f \otimes g) \otimes h) \circ \alpha_{A,B,C} = \alpha_{A',B',C'} \circ (f \otimes (g \otimes h)),$$
$$\alpha^{-1}_{A,B,C} \circ \alpha_{A,B,C} = \mathbb{1}_{A\otimes(B\otimes C)}, \qquad \alpha_{A,B,C} \circ \alpha^{-1}_{A,B,C} = \mathbb{1}_{(A\otimes B)\otimes C},$$

(A6) За $f : A \to A'$ важи

$$f \circ \lambda_A = \lambda_{A'} \circ (I \otimes f), \qquad \lambda^{-1}_A \circ \lambda_A = \mathbb{1}_{I\otimes A}, \qquad \lambda_A \circ \lambda^{-1}_A = \mathbb{1}_A,$$

(A7) За $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ важи

$$(g \otimes f) \circ \sigma_{A,B} = \sigma_{A',B'} \circ (f \otimes g), \quad \sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \mathbb{1}_{A\otimes B},$$

(A8) За $g : B \to B'$ важи

$$(A \multimap (A \otimes g)) \circ \eta_{A,B} = \eta_{A,B'} \circ g,$$

(A9) За $g : B \to B'$ важи

$$g \circ \varepsilon_{A,B} = \varepsilon_{A,B'} \circ (A \otimes (A \multimap g)),$$

(A10) За $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ важи

$$(f \oplus g) \circ \iota^1_{A,B} = \iota^1_{A',B'} \circ f, \qquad (f \oplus g) \circ \iota^2_{A,B} = \iota^2_{A',B'} \circ g,$$

(A11) За $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ важи

$$f \circ \pi^1_{A,B} = \pi^1_{A',B'} \circ (f \oplus g), \qquad g \circ \pi^2_{A,B} = \pi^2_{A',B'} \circ (f \oplus g),$$

(A12) $(A \multimap \varepsilon_{A,B}) \circ \eta_{A,A\multimap B} = \mathbb{1}_{A\multimap B}, \qquad \varepsilon_{A,A\otimes B} \circ (A \otimes \eta_{A,B}) = \mathbb{1}_{A\otimes B},$

(A13) $\pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} = \mathbb{1}_A, \quad \pi^2_{A,B} \circ \iota^2_{A,B} = \mathbb{1}_B,$

(A14) $\pi^2_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} = 0_{A,B}, \quad \pi^1_{A,B} \circ \iota^2_{A,B} = 0_{B,A},$

(A15) $\iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B} + \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B} = \mathbb{1}_{A\oplus B},$

(A16) За $f_1, f_2, f_3, f : A \to B$ важи

$$f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3, \qquad f_1 + f_2 = f_2 + f_1, \qquad f + 0_{A,B} = f,$$

(A17) За $f_1, f_2 : A \to B$, $g : B \to C$, $g_1, g_2 : A' \to B'$ и $f : B' \to C'$ важи

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f, \qquad g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2,$$

(A18) За $f : A \to A'$ важи

$$0_{A',B} \circ f = 0_{A,B}, \qquad f \circ 0_{B,A} = 0_{B,A'},$$

(A19) $\alpha_{A\otimes B,C,D} \circ \alpha_{A,B,C\otimes D} = (\alpha_{A,B,C} \otimes D) \circ \alpha_{A,B\otimes C,D} \circ (A \otimes \alpha_{B,C,D}),$

(A20) $\lambda_{A\otimes B} = (\lambda_A \otimes B) \circ \alpha_{I,A,B},$

(A21) $\alpha_{C,A,B} \circ \sigma_{A\otimes B,C} \circ \alpha_{A,B,C} = (\sigma_{A,C} \otimes B) \circ \alpha_{A,C,B} \circ (A \otimes \sigma_{B,C})$,

(A22) $0_{0,0} = \mathbb{1}_0$.

Слично као у одјељку 2.1, једнакости (A1) кажу да је $\mathcal{A}$ категорија. Једнакости (A2)-(A4) кажу да су $\otimes$ и $\oplus$ бифунктори, док је $A \multimap \_$ функтор. Једнакости (A5)-(A7) кажу да су α, λ и σ природни изоморфизми. Једнакости (A8)-(A11) кажу да су $\eta_A, \varepsilon_A, \iota$ и π природне трансформације, док су (A12) троугаоне једнакости. Једнакости (A13)-(A15) су једнакости бипроизвода, а (A16)-(A18) кажу да је $\mathcal{A}$ обогаћена над категоријом комутативних моноида **Cmd**. Једнакости (A19)-(A22) су кохеренцијски услови.

На исти начин као у одјељку 2.1 закључујемо да је $\mathcal{A}$ симетрична моноидално затворена категорија. Сљедеће тврђење заједно са једнакостима (A13)-(A14) показује да је $\mathcal{A}$ категорија са бипроизводима.

Тврђење 3.1. *За свако A и B,*

$$A \xrightarrow{\iota^1_{A,B}} A \oplus B \xleftarrow{\iota^2_{A,B}} B, \qquad A \xleftarrow{\pi^1_{A,B}} A \oplus B \xrightarrow{\pi^2_{A,B}} B$$

су копроизвод и производ дијаграм у $\mathcal{A}$, респективно.

Доказ. За $f : A \to C$ и $g : B \to C$, дефинишимо $[f, g] : A \oplus B \to C$ са $[f, g] = f \circ \pi^1_{A,B} + g \circ \pi^2_{A,B}$. Тврдимо да је $[f, g]$ јединствена стрелица таква да сљедећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota^1_{A,B}"] \arrow[dr, "f"'] & A \oplus B \arrow[d, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, "\iota^2_{A,B}"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Заиста, користећи једнакости (A17), (A13) и (A14), имамо да је $[f, g] \circ \iota^1_{A,B} = f \circ \pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} + g \circ \pi^2_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} = f$, и слично $[f, g] \circ \iota^2_{A,B} = g$. Нека је $h : A \oplus B \to C$ нека стрелица таква да важи $h \circ \iota^1_{A,B} = f$ и $h \circ \iota^2_{A,B} = g$. Слиједи да је $h \circ \iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B} = f \circ \pi^1_{A,B}$ и $h \circ \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B} = g \circ \pi^2_{A,B}$. Користећи поново (A17), имамо $h \circ (\iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B} + \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B}) = [f, g]$. Сада једнакост (A15) даје $h = [f, g]$.

Слично, за $f : C \to A$ и $g : C \to B$, дефинишимо $\langle f, g\rangle : C \to A \oplus B$ са $\langle f, g\rangle = \iota^1_{A,B} \circ f + \iota^2_{A,B} \circ g$, и други дио тврђења слиједи на сличан начин. □

Дакле, свака SMCB категорија је симетрична моноидално затворена категорија са бипроизводима. Са друге стране, није тешко провјерити да свака симетрична моноидално затворена категорија са бипроизводима има SMCB структуру.

Напомена 3.1. Нека је, као и обично, $\nabla_B = [\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B]$ и $\Delta_A = \langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A\rangle$, при чему су $[\mathbb{1}_B, \mathbb{1}_B]$ и $\langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A\rangle$ дефинисани као у доказу тврђења 3.1, то јест,

$$\nabla_B = \pi^1_{B,B} + \pi^2_{B,B} \quad \text{и} \quad \Delta_A = \iota^1_{A,A} + \iota^2_{A,A}.$$

Користећи дистрибутивност композиције у односу на $+$ и природност од ι и π имамо

$$f + g = \nabla_B \circ (f \oplus g) \circ \Delta_A.$$

Дакле, семи-адитивна структура категорије $\mathcal{A}$ постулирана дефиницијом се поклапа са семи-адитивном структуром на $\mathcal{A}$ коју нам обезбјеђује постојање бипроизвода у $\mathcal{A}$.

3.2 Посљедице аксиома

У овом одјељку $\mathcal{A}$ ће увијек означавати SMCB категорију.

Лема 3.2. *Нека су A, B и C три објекта категорије $\mathcal{A}$. Тада је $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$.*

Доказ. Дефинишимо стрелице $\varphi_{A,B,C} : (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \to A \otimes (B \oplus C)$ и $\psi_{A,B,C} : A \otimes (B \oplus C) \to (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ са

$$\varphi_{A,B,C} = [A \otimes \iota^1_{B,C}, A \otimes \iota^2_{B,C}],$$

$$\psi_{A,B,C} = [(A \multimap \iota^1_{A\otimes B,A\otimes C}) \circ \eta_{A,B}, (A \multimap \iota^2_{A\otimes B,A\otimes C}) \circ \eta_{A,C}]^\circ.$$

У остатку доказа ћемо изостављати доње индексе. Користећи лему 1.6, лему 1.13 и природност од η, имамо

$$\begin{aligned}
&\varphi_{A,B,C} \circ \psi_{A,B,C} = \\
&= [A \otimes \iota^1, A \otimes \iota^2] \circ [(A \multimap \iota^1) \circ \eta, (A \multimap \iota^2) \circ \eta]^\circ \\
&= (A \multimap [A \otimes \iota^1, A \otimes \iota^2]) \circ [(A \multimap \iota^1) \circ \eta, (A \multimap \iota^2) \circ \eta])^\circ \\
&= [(A \multimap [A \otimes \iota^1, A \otimes \iota^2]) \circ (A \multimap \iota^1) \circ \eta, (A \multimap [A \otimes \iota^1, A \otimes \iota^2]) \circ (A \multimap \iota^2) \circ \eta]^\circ \\
&= [A \multimap (A \otimes \iota^1) \circ \eta, A \multimap (A \otimes \iota^2) \circ \eta]^\circ = [\eta \circ \iota^1, \eta \circ \iota^2]^\circ \\
&= (\eta \circ [\iota^1, \iota^2])^\circ = (\eta \circ \mathbb{1})^\circ = \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Са друге стране, користећи поново лему 1.6 и лему 1.13, имамо

$$\begin{aligned}
&\psi_{A,B,C} \circ \varphi_{A,B,C} = \\
&= [\psi_{A,B,C} \circ (A \otimes \iota^1), \psi_{A,B,C} \circ (A \otimes \iota^2)] \\
&= [([(A \multimap \iota^1) \circ \eta, (A \multimap \iota^2) \circ \eta] \circ \iota^1)^\circ, ([(A \multimap \iota^1) \circ \eta, (A \multimap \iota^2) \circ \eta] \circ \iota^2)^\circ] \\
&= [((A \multimap \iota^1) \circ \eta)^\circ, ((A \multimap \iota^2) \circ \eta)^\circ] \\
&= [\iota_1 \circ \eta^\circ, \iota^2 \circ \eta^\circ] = [\iota^1, \iota^2] = \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

□

Примијетимо да у доказу леме 3.2 нисмо користили чињеницу да категорија $\mathcal{A}$ има бипроизводе; само смо користили да је $\mathcal{A}$ моноидално затворена категорија у којој постоје копроизводи.

Лема 3.3. *Нека су стрелице $\varphi_{A,B,C}$ и $\psi_{A,B,C}$ као у доказу леме 3.2 и нека је $C \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. Тада важе сљедеће једнакости:*

(1) $(C \otimes (\pi^1_{B,B} + \pi^2_{B,B})) \circ \varphi_{C,B,B} = \pi^1_{C\otimes B,C\otimes B} + \pi^2_{C\otimes B,C\otimes B}$;

(2) $\psi_{A,B,C} = \langle A \otimes \pi^1_{B,C}, A \otimes \pi^2_{B,C}\rangle$;

(3) $\psi_{C,A,A} \circ (C \otimes (\iota^1_{A,A} + \iota^2_{A,A})) = \iota^1_{C\otimes A,C\otimes A} + \iota^2_{C\otimes A,C\otimes A}$;

(4) $\psi_{C,B,B} \circ (C \otimes (g + h)) = ((C \otimes g) \oplus (C \otimes h)) \circ \psi_{C,A,A}$, *за* $f, g : A \to B$.

Доказ. (1) Користећи дефиницију стрелице $\varphi_{C,B,B}$ и лему 1.13 имамо да је лијева страна једнакости (1) једнака

$$[(C \otimes (\pi^1_{B,B} + \pi^2_{B,B})) \circ (C \otimes \iota^1_{B,B}), (C \otimes (\pi^1_{B,B} + \pi^2_{B,B})) \circ (C \otimes \iota^2_{B,B})].$$

Претходни израз је даље једнак $[\mathbb{1}_{C\otimes B}, \mathbb{1}_{C\otimes B}]$, што је по дефиницији једнако $\pi^1_{C\otimes B, C\otimes B} + \pi^2_{C\otimes B, C\otimes B}$.

(2) Довољно је доказати да је $\langle A\otimes \pi^1_{B,C}, A\otimes \pi^2_{B,C}\rangle \circ \varphi_{A,B,C} = \mathbb{1}_{(A\otimes B)\oplus(A\otimes C)}$. Користећи лему 1.14 имамо

$$\begin{aligned}
\langle A\otimes \pi^1_{B,C}, A\otimes \pi^2_{B,C}\rangle \circ \varphi_{A,B,C} &= \langle (A\otimes \pi^1_{B,C})\circ \varphi_{A,B,C}, (A\otimes \pi^2_{B,C})\circ \varphi_{A,B,C}\rangle \\
&= \langle [\mathbb{1}_{A\otimes B}, 0_{A\otimes C, A\otimes B}], [0_{A\otimes B, A\otimes C}, \mathbb{1}_{A\otimes C}]\rangle \\
&= \langle \pi^1_{A\otimes B, A\otimes C}, \pi^1_{A\otimes B, A\otimes C}\rangle = \mathbb{1}_{(A\otimes B)\oplus(A\otimes C)}.
\end{aligned}$$

(3) Користећи једнакост (2) и лему 1.14, имамо да је лијева страна од (3) једнака

$$\langle C\otimes(\pi^1_{A,A}\circ(\iota^1_{A,A}+\iota^2_{A,A})), C\otimes(\pi^2_{A,A}\circ(\iota^1_{A,A}+\iota^2_{A,A}))\rangle,$$

што је једнако $\langle \mathbb{1}_{C\otimes A}, \mathbb{1}_{C\otimes A}\rangle$, а ово је по дефиницији $\iota^1_{C\otimes A, C\otimes A} + \iota^2_{C\otimes A, C\otimes A}$.

(4) Поново користећи лему 1.14 имамо

$$\begin{aligned}
\psi_{C,B,B}\circ(C\otimes(g+h)) &= \langle C\otimes \pi^1_{B,B}, C\otimes \pi^2_{B,B}\rangle \circ (C\otimes(g\oplus h)) \\
&= \langle C\otimes(\pi^1_{B,B}\circ(g\oplus h)), C\otimes(\pi^2_{B,B}\circ(g\oplus h))\rangle \\
&= \langle C\otimes(g\circ \pi^1_{A,A}), C\otimes(h\circ \pi^2_{A,A})\rangle \\
&= \langle (C\otimes g)\circ(C\otimes \pi^1_{A,A}), (C\otimes h)\circ(C\otimes \pi^2_{A,A})\rangle \\
&= ((C\otimes g)\oplus(C\otimes h))\circ \langle C\otimes \pi^1_{A,A}, C\otimes \pi^2_{A,A}\rangle,
\end{aligned}$$

а ово је једнако $((C\otimes g)\oplus(C\otimes h))\circ \psi_{C,A,A}$. □

Лема 3.4. *Нека су $g, h : A \to B$ и $f : C \to D$ стрелице у $\mathcal{A}$. Тада важи*

$$f\otimes(g+h) = (f\otimes g)+(f\otimes h) \quad \text{и} \quad (g+h)\otimes f = (g\otimes f)+(h\otimes f).$$

Доказ. Нека је $C\in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. Докажимо прво да је $C\otimes(g+h) = (C\otimes g)+(C\otimes h)$. Користећи напомену 3.1 и лему 3.3, имамо

$$\begin{aligned}
C\otimes(g+h) &= C\otimes(\pi^1_{B,B}+\pi^2_{B,B})\circ(g\oplus h)\circ(\iota^1_{B,B}+\iota^2_{B,B}) \\
&= (C\otimes(\pi^1_{B,B}+\pi^2_{B,B}))\circ \varphi_{C,B,B}\circ \psi_{C,B,B}\circ(C\otimes(g\oplus h))\circ(C\otimes(\iota^1_{B,B}+\iota^2_{B,B})) \\
&= (\pi^1_{C\otimes B,C\otimes B}+\pi^2_{C\otimes B,C\otimes B})\circ((C\otimes g)\oplus(C\otimes h))\circ \psi_{C,A,A}\circ(C\otimes(\iota^1_{A,A}+\iota^2_{A,A})) \\
&= (\pi^1_{C\otimes B,C\otimes B}+\pi^2_{C\otimes B,C\otimes B})\circ((C\otimes g)\oplus(C\otimes h))\circ(\iota^1_{C\otimes A,C\otimes A}+\iota^2_{C\otimes A,C\otimes A}) \\
&= (C\otimes g)+(C\otimes h).
\end{aligned}$$

Из $C\otimes(g+h) = (C\otimes g)+(C\otimes h)$, бифункторијалности од $\otimes$ и једнакости (A17) слиједи

$$\begin{aligned}
f\otimes(g+h) &= (f\circ \mathbb{1}_C)\otimes(\mathbb{1}_B\circ(g+h)) = (f\otimes B)\circ(C\otimes(g+h)) \\
&= (f\otimes B)\circ((C\otimes g)+(C\otimes h)) \\
&= ((f\otimes B)\circ(C\otimes g))+((f\otimes B)\circ(C\otimes h)) = (f\otimes g)+(f\otimes h).
\end{aligned}$$

Да бисмо доказали другу једнакост, користићемо дистрибутивност коју смо управо доказали и (A7). Имамо

$$\begin{aligned}
(g+h)\otimes f &= \sigma_{D,B}\circ(f\otimes(g+h))\circ\sigma_{A,C} = \sigma_{D,B}\circ((f\otimes g)+(f\otimes h))\circ\sigma_{A,C} \\
&= \sigma_{D,B}\circ(f\otimes g)\circ\sigma_{A,C}+\sigma_{D,B}\circ(f\otimes h)\circ\sigma_{A,C} = (g\otimes f)+(h\otimes f).
\end{aligned}$$ □

Лема 3.5. *Нека су $g, h : A \to B$ и $f : C \to D$ стрелице у $\mathcal{A}$. Тада важи*

$$f \multimap (g + h) = (f \multimap g) + (f \multimap h) \quad \text{и} \quad (g + h) \multimap f = (g \multimap f) + (h \multimap f).$$

Доказ. За прву једнакост довољно је доказати $(f \multimap (g+h))^\circ = ((f \multimap g) + (f \multimap h))^\circ$. Користећи природност од ε, имамо

$$\begin{aligned}(f \multimap (g+h))^\circ &= \varepsilon_{C,B} \circ (C \otimes (f \multimap (g+h)))\\ &= \varepsilon_{C,B} \circ (C \otimes (C \multimap (g+h))) \circ (C \otimes (f \multimap A))\\ &= (g+h) \circ \varepsilon_{C,A} \circ (C \otimes (f \multimap A)).\end{aligned}$$

Са друге стране, користећи лему 3.4 и природност од ε, слиједи

$$\begin{aligned}&((f \multimap g) + (f \multimap h))^\circ =\\ &= \varepsilon_{C,B} \circ ((C \otimes (f \multimap g)) + (C \otimes (f \multimap h)))\\ &= \varepsilon_{C,B} \circ (C \otimes (f \multimap g)) + \varepsilon_{C,B} \circ (C \otimes (f \multimap h))\\ &= ((\varepsilon_{C,B} \circ (C \otimes (C \multimap g)) + (\varepsilon_{C,B} \circ (C \otimes (C \multimap g))) \circ (C \otimes (f \multimap A))\\ &= (g+h) \circ \varepsilon_{C,A} \circ (C \otimes (f \multimap A)).\end{aligned}$$

Другу једнакост доказујемо на сличан начин. Користећи природност и диприродност од ε, добијамо

$$\begin{aligned}((g+h) \multimap f)^\circ &= \varepsilon_{A,D} \circ (A \otimes ((g+h) \multimap f))\\ &= \varepsilon_{A,D} \circ (A \otimes (A \multimap f)) \circ (A \otimes ((g+h) \multimap C))\\ &= f \circ \varepsilon_{A,C} \circ (A \otimes ((g+h) \multimap C))\\ &= f \circ \varepsilon_{B,C} \circ ((g+h) \otimes (B \multimap C)).\end{aligned}$$

Такође, користећи тврђење 3.4, природност и диприродност од ε, имамо

$$\begin{aligned}((g \multimap f) + (h \multimap f))^\circ &= \varepsilon_{A,D} \circ (A \otimes ((g \multimap f) + (h \multimap f)))\\ &= (\varepsilon_{A,D} \circ (A \otimes (g \multimap f))) + (\varepsilon_{A,D} \circ (A \otimes (h \multimap f)))\\ &= (f \circ \varepsilon_{A,C} \circ (A \otimes (g \multimap C))) + (f \circ \varepsilon_{A,C} \circ (A \otimes (h \multimap C)))\\ &= (f \circ \varepsilon_{B,C} \circ (g \otimes (B \multimap B))) + (f \circ \varepsilon_{B,C} \circ (h \otimes (B \multimap C)))\\ &= f \circ \varepsilon_{B,C} \circ ((g+h) \otimes (B \multimap C)).\end{aligned}$$

□

Лема 3.6. *У категорији $\mathcal{A}$ је 0 нула објекат. Такође, за сваки објекат A важи $A \otimes 0 \cong 0 \cong 0 \otimes A$ и $A \multimap 0 \cong 0 \cong 0 \multimap A$.*

Доказ. Нека је A произвољан објекат од $\mathcal{A}$. Докажимо да је $0_{0,A}$ јединствена стрелица из 0 у A, то јест 0 је иницијални објекат. За произвољну стрелицу $f : 0 \to A$, користећи једнакост (A18) имамо $f \circ 0_{A,0} = 0_{A,A}$. Прекомпоновањем ове једнакости са $0_{0,A}$ и коришћењем једнакости (A22) добијамо $f = 0_{0,A}$. Слично доказујемо да је $0_{A,0}$ јединствена стрелица из A у 0, па је 0 и терминални објекат.

Докажимо сада да је $A \otimes 0 \cong 0$. Из претходног је $0_{0,A\otimes 0}$ јединствена стрелица из 0 у $A \otimes 0$. Такође, имамо стрелицу $0^\circ_{0,A\multimap 0} : A \otimes 0 \to 0$. На основу једнакости (A18) и (A22) важи $0^\circ_{0,A\multimap 0} \circ 0_{0,A\otimes 0} = 0_{0,0} = \mathbb{1}_0$. Са друге стране, користећи лему 1.6 и јединственост стрелице у иницијални објекат 0, имамо

$$0_{0,A\otimes 0} \circ 0^\circ_{0,A\multimap 0} = ((A \multimap 0_{0,A\otimes 0}) \circ 0_{0,A\multimap 0})^\circ = 0^\circ_{0,A\multimap(A\otimes 0)} = \eta^\circ_{A,0} = \mathbb{1}_{A\otimes 0}.$$

Слично доказујемо и $0 \cong 0 \otimes A$. Да бисмо доказали да је $A \multimap 0 \cong 0$, посматрамо стрелице $0_{A\multimap 0,0} : A \multimap 0 \to 0$ и $0^{\bullet}_{A\otimes 0,0} : 0 \to A \multimap 0$ и користимо лему 1.5. Аналогно доказујемо и $0 \cong 0 \multimap A$. □

Напомена 3.2. Затвореност моноидалне структуре је неопходна да бисмо имали изоморфизам $A \otimes 0 \cong 0$. На примјер, ако посматрамо (моноидалну) категорију векторских простора у којој је тензорски производ директна сума, тада је јасно да $V \otimes 0 = V \oplus 0$ није изоморфно са 0.

Лема 3.7. *За стрелице $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ у категорији $\mathcal{A}$ важи:*

$$f \otimes 0_{B,B'} = 0_{A\otimes B,A'\otimes B'} = 0_{A,A'} \otimes g \quad \text{и} \quad f \multimap 0_{B,B'} = 0_{A'\multimap B,A\multimap B'} = 0_{A,A'} \multimap g.$$

Доказ. Доказаћемо само да је $f \otimes 0_{B,B'} = 0_{A\otimes B,A'\otimes B}$, остали случајеви се доказују аналогно. Важи да је $f \otimes 0_{B,B'} = (f \circ \mathbb{1}_A) \otimes (0_{0,B'} \circ 0_{B,0}) = (f \otimes 0_{0,B'}) \circ (\mathbb{1}_A \otimes 0_{B,0})$, то јест, стрелица f је дата композицијом

$$A \otimes B \xrightarrow{\mathbb{1}_A \otimes 0_{B,0}} A \otimes 0 \xrightarrow{f \otimes 0_{0,B'}} A' \otimes B'.$$

Из леме 3.6 је $A \otimes 0 \cong 0$, одакле слиједи да је $A \otimes 0$ нула објекат. Дакле, $f \otimes 0_{B,B'}$ је нула стрелица. Из јединствености нула стрелице слиједи $f \otimes 0_{B,B'} = 0_{A\otimes B,A'\otimes B}$. □

3.3 Слободна SMCB категорија

Једнакосно представљање SMCB категорија нам омогућава да конструишемо SMCB категорију $\mathcal{L}_P$ слободно генерисану (бесконачним) скупом P исказних слова. *Објекти* од $\mathcal{L}_P$ су формуле направљене од елемената скупа P и константи I и 0 помоћу три бинарне операције $\otimes, \oplus$ и $\multimap$. Да бисмо дефинисали стрелице од $\mathcal{L}_P$, прво уводимо *терме*, који су направљени од $\mathbb{1}_A$, $\alpha_{A,B,C}$, λ_A, $\sigma_{A,B}$, $\eta_{A,B}$, $\varepsilon_{A,B}$, $\iota^i_{A,B}$, $\pi^i_{A,B}$ и $0_{A,B}$ помоћу операцијских симбола $\otimes$, $\oplus$, $A \multimap$, $+$ и $\circ$. (Сваки овако дефинисан терм има свој домен и кодомен, који су објекти од $\mathcal{L}_P$, а конструкције терама помоћу симбола $+$ и $\circ$ су ограничене на одговарајући домен и кодомен.) *Стрелице* од $\mathcal{L}_P$ добијамо када скуп терама посијечемо по конгруенцији генерисаној једнакостима (A1)-(A22). Дакле, стрелица од $\mathcal{L}_P$ је класа еквиваленције терма.

Дефиниција 3.1. Нека је A произвољан објекат од $\mathcal{L}_P$. Индукцијом по сложености објекта A дефинишемо два коначна низа $\mathrm{I}_A = (\iota^0_A, \dots, \iota^{n-1}_A)$ и $\Pi_A = (\pi^0_A, \dots, \pi^{n-1}_A)$ стрелица од $\mathcal{L}_P$ на сљедећи начин. Ако је A елемент од P или је константа I или 0, тада је $n = 1$ и $\mathrm{I}_A = (\mathbb{1}_A) = \Pi_A$. Претпоставимо да су низови $\mathrm{I}_{A_1} = (\iota^0_1, \dots, \iota^{n_1-1}_1)$, $\Pi_{A_1} = (\pi^0_1, \dots, \pi^{n_1-1}_1)$ и $\mathrm{I}_{A_2} = (\iota^0_2, \dots, \iota^{n_2-1}_2)$, $\Pi_{A_2} = (\pi^0_2, \dots, \pi^{n_2-1}_2)$ већ дефинисани.

($\otimes$) Ако је $A = A_1 \otimes A_2$, тада је $n = n_1 \cdot n_2$, и за $0 \le i < n_1 \cdot n_2$,

$$\iota^i_A = \iota^{\lfloor i/n_2 \rfloor}_1 \otimes \iota^{i \bmod n_2}_2, \qquad \pi^i_A = \pi^{\lfloor i/n_2 \rfloor}_1 \otimes \pi^{i \bmod n_2}_2.$$

($\multimap$) Ако је $A = A_1 \multimap A_2$, тада је $n = n_1 \cdot n_2$, и за $0 \le i < n_1 \cdot n_2$,

$$\iota^i_A = \pi^{\lfloor i/n_2 \rfloor}_1 \multimap \iota^{i \bmod n_2}_2, \qquad \pi^i_A = \iota^{\lfloor i/n_2 \rfloor}_1 \multimap \pi^{i \bmod n_2}_2.$$

($\oplus$) Ако је $A = A_1 \oplus A_2$, тада је $n = n_1 + n_2$, и за $0 \leq i < n_1 + n_2$,

$$\iota_A^i = \begin{cases} \iota^1_{A_1,A_2} \circ \iota_1^i, & 0 \leq i < n_1, \\ \iota^2_{A_1,A_2} \circ \iota_2^{i-n_1}, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \pi_A^i = \begin{cases} \pi_1^i \circ \pi^1_{A_1,A_2}, & 0 \leq i < n_1, \\ \pi_2^{i-n_1} \circ \pi^2_{A_1,A_2}, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Напомена 3.3. Примијетимо да када је $A = A_1 \oplus A_2$ важи

$$\iota_A^i = \iota^{1+s_i}_{A_1,A_2} \circ \iota^{i-n_1\cdot s_i}_{1+s_i}, \qquad \pi_A^i = \pi^{i-n_1\cdot s_i}_{1+s_i} \circ \pi^{1+s_i}_{A_1,A_2}, \qquad \text{гдје је } s_i = \left\lfloor \frac{\min\{i, n_1\}}{n_1} \right\rfloor.$$

На примјер, када је $n_1 = 3$ и $n_2 = 2$, имамо

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{A_1\otimes A_2} &= (\iota_1^0 \otimes \iota_2^0, \iota_1^0 \otimes \iota_2^1, \iota_1^1 \otimes \iota_2^0, \iota_1^1 \otimes \iota_2^1, \iota_1^2 \otimes \iota_2^0, \iota_1^2 \otimes \iota_2^1), \\
\Pi_{A_1\otimes A_2} &= (\pi_1^0 \otimes \pi_2^0, \pi_1^0 \otimes \pi_2^1, \pi_1^1 \otimes \pi_2^0, \pi_1^1 \otimes \pi_2^1, \pi_1^2 \otimes \pi_2^0, \pi_1^2 \otimes \pi_2^1), \\
\mathrm{I}_{A_1\multimap A_2} &= (\pi_1^0 \multimap \iota_2^0, \pi_1^0 \multimap \iota_2^1, \pi_1^1 \multimap \iota_2^0, \pi_1^1 \multimap \iota_2^1, \pi_1^2 \multimap \iota_2^0, \pi_1^2 \multimap \iota_2^1), \\
\Pi_{A_1\multimap A_2} &= (\iota_1^0 \multimap \pi_2^0, \iota_1^0 \multimap \pi_2^1, \iota_1^1 \multimap \pi_2^0, \iota_1^1 \multimap \pi_2^1, \iota_1^2 \multimap \pi_2^0, \iota_1^2 \multimap \pi_2^1), \\
\mathrm{I}_{A_1\oplus A_2} &= (\iota^1_{A_1,A_2} \circ \iota_1^0, \iota^1_{A_1,A_2} \circ \iota_1^1, \iota^1_{A_1,A_2} \circ \iota_1^2, \iota^2_{A_1,A_2} \circ \iota_2^0, \iota^2_{A_1,A_2} \circ \iota_2^1), \\
\Pi_{A_1\oplus A_2} &= (\pi_1^0 \circ \pi^1_{A_1,A_2}, \pi_1^1 \circ \pi^1_{A_1,A_2}, \pi_1^2 \circ \pi^1_{A_1,A_2}, \pi_2^0 \circ \pi^2_{A_1,A_2}, \pi_2^1 \circ \pi^2_{A_1,A_2}).
\end{aligned}$$

Примјер 3.1. Нека је $A = (p \oplus q) \oplus r$ и $B = ((p \oplus q) \oplus r) \otimes (r \oplus s)$, гдје су p, q, r и s елементи од P. Тада су ι_A^i за $0 \leq i < 3$ и ι_B^j за $0 \leq j < 6$ дати у сљедећим табелама.

ι_A^0	$\iota^1_{p\oplus q,r} \circ \iota^1_{p,q}$
ι_A^1	$\iota^1_{p\oplus q,r} \circ \iota^2_{p,q}$
ι_A^2	$\iota^2_{p\oplus q,r}$

ι_B^0	$(\iota^1_{p\oplus q,r} \circ \iota^1_{p,q}) \otimes \iota^1_{r,s}$
ι_B^1	$(\iota^1_{p\oplus q,r} \circ \iota^1_{p,q}) \otimes \iota^2_{r,s}$
ι_B^2	$(\iota^1_{p\oplus q,r} \circ \iota^2_{p,q}) \otimes \iota^1_{r,s}$
ι_B^3	$(\iota^1_{p\oplus q,r} \circ \iota^2_{p,q}) \otimes \iota^2_{r,s}$
ι_B^4	$\iota^2_{p\oplus q,r} \otimes \iota^1_{r,s}$
ι_B^5	$\iota^2_{p\oplus q,r} \otimes \iota^2_{r,s}$

Напомена 3.4. Када је објекат A изграђен од елемената скупа P користећи само $\oplus$, тада се низ I_A (Π_A) састоји од свих инјекција (пројекција) исказних слова од којих је изграђен објекат A. Ово није тачно када A садржи $\oplus$ у оквиру $\otimes$ или $\multimap$ (као што је случај код објекта B у примјеру 3.1). За свако $0 \leq i < n$, кодомен од ι_A^i и домен од π_A^i су једнаки A, док је домен A^i од ι_A^i једнак кодомену од π_A^i, при чему се у A^i не појављује $\oplus$. Штавише, ако се у A не појављује $\oplus$, тада је $\mathrm{I}_A = (\mathbb{1}_A) = \Pi_A$.

Тврђење 3.8. *За сваки објекат A од $\mathcal{L}_P$ важи*

$$\pi_A^j \circ \iota_A^i = \begin{cases} \mathbb{1}_{A^i}, & i = j, \\ 0_{A^i,A^j}, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \iota_A^i \circ \pi_A^i = \mathbb{1}_A.$$

Доказ. Доказујемо тврђење индукцијом по сложености од A. Када је A исказно слово или константа I или 0, све инјекције и пројекције су идентитети па тврђење важи. За индуктивни корак имамо сљедећа три случаја.

(1) Нека је $A = A_1 \otimes A_2$, гдје је $|\mathrm{I}_{A_1}| = |\Pi_{A_1}| = n_1$ и $|\mathrm{I}_{A_2}| = |\Pi_{A_2}| = n_2$. Тада имамо

$$\begin{aligned}\pi^l_A \circ \iota^k_A &= (\pi_1^{\lfloor \frac{l}{n_2} \rfloor} \otimes \pi_2^{l \bmod n_2}) \circ (\iota_1^{\lfloor \frac{k}{n_2} \rfloor} \otimes \iota_2^{k \bmod n_2}) \\ &= (\pi_1^{\lfloor \frac{l}{n_2} \rfloor} \circ \iota_1^{\lfloor \frac{k}{n_2} \rfloor}) \otimes (\pi_2^{l \bmod n_2} \circ \iota_2^{k \bmod n_2}),\end{aligned}$$

па тврђење слиједи на основу индуктивне хипотезе. Такође, користећи индуктивну хипотезу, имамо

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \iota^i_A \circ \pi^i_A &= \sum_{i=0}^{n-1} (\iota_1^{\lfloor \frac{i}{n_2} \rfloor} \otimes \iota_2^{i \bmod n_2}) \circ (\pi_1^{\lfloor \frac{i}{n_2} \rfloor} \otimes \pi_2^{i \bmod n_2}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\iota_1^{\lfloor \frac{i}{n_2} \rfloor} \circ \pi_1^{\lfloor \frac{i}{n_2} \rfloor}) \otimes (\iota_2^{i \bmod n_2} \circ \pi_2^{i \bmod n_2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n_1-1} \left[(\iota^k_1 \circ \pi^k_1) \otimes \sum_{l=0}^{n_2-1} (\iota^l_2 \circ \pi^l_2) \right] = \sum_{k=0}^{n_1-1} (\iota^k_1 \circ \pi^k_1) \otimes \mathbb{1}_{A_2} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n_1-1} (\iota^k_1 \circ \pi^k_1) \right] \otimes \mathbb{1}_{A_2} = \mathbb{1}_{A_1} \otimes \mathbb{1}_{A_2} = \mathbb{1}_{A_1 \otimes A_2}.\end{aligned}$$

(2) Када је $A = A_1 \multimap A_2$, доказ је сличан као у претходном случају.

(3) Нека је $A = A_1 \oplus A_2$, и поново $|\mathrm{I}_{A_1}| = |\Pi_{A_1}| = n_1$ и $|\mathrm{I}_{A_2}| = |\Pi_{A_2}| = n_2$. Користећи напомену 3.3 имамо

$$\pi^l_A \circ \iota^k_A = \pi^{l-n_1 \cdot s_l}_{1+s_l} \circ \pi^{1+s_l}_{A_1,A_2} \circ \iota^{1+s_k}_{A_1,A_2} \circ \iota^{k-n_1 \cdot s_k}_{1+s_k}.$$

Пошто $l \neq k$ повлачи $1 + s_l \neq 1 + s_k$ или $l - n_1 \cdot s_l \neq k - n_1 \cdot s_k$, први дио тврђења слиједи из индуктивне хипотезе. За други дио тврђења имамо

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \iota^i_A \circ \pi^i_A &= \sum_{i=0}^{n-1} \iota^{1+s_i}_{A_1,A_2} \circ \iota^{i-n_1 \cdot s_i}_{1+s_i} \circ \pi^{i-n_1 \cdot s_i}_{1+s_i} \circ \pi^{1+s_i}_{A_1,A_2} \\ &= \sum_{i=0}^{n_1-1} \iota^1_{A_1,A_2} \circ \iota^i_1 \circ \pi^i_1 \circ \pi^1_{A_1,A_2} + \sum_{j=0}^{n_2-1} \iota^2_{A_1,A_2} \circ \iota^j_2 \circ \pi^j_2 \circ \pi^2_{A_1,A_2} \\ &= \iota^1_{A_1,A_2} \circ \left[\sum_{i=0}^{n_1-1} \iota^i_1 \circ \pi^i_1 \right] \circ \pi^1_{A_1,A_2} + \iota^2_{A_1,A_2} \circ \left[\sum_{j=0}^{n_2-1} \iota^j_2 \circ \pi^j_2 \right] \circ \pi^2_{A_1,A_2} \\ &= \iota^1_{A_1,A_2} \circ \pi^1_{A_1,A_2} + \iota^2_{A_1,A_2} \circ \pi^2_{A_1,A_2} = \mathbb{1}_{A_1 \oplus A_2}.\end{aligned}$$

□

Посљедица 3.9. *Нека је A објекат од $\mathcal{L}_P$ и нека је $|\mathrm{I}_A| = |\Pi_A| = n$. Тада фамилија објеката $\{A^i \mid 0 \leq i < n\}$ заједно са стрелицама $\{\iota^i_A : A^i \to A \mid 0 \leq i < n\}$ и $\{\pi^i_A : A \to A^i \mid 0 \leq i < n\}$ чини бипроизвод.*

Доказ. Имајући у виду тврђење 3.8 довољно је доказати да је $\{A^i \mid 0 \leq i < n\}$ заједно са стрелицама $\{\iota^i_A : A^i \to A \mid 0 \leq i < n\}$ копроизвод, а $\{A^i \mid 0 \leq i < n\}$ заједно са стрелицама $\{\pi^i_A : A \to A^i \mid 0 \leq i < n\}$ производ.

Нека је B произвољан објекат од $\mathcal{L}_P$. Претпоставимо да за свако $0 \leq i < n$ имамо стрелице $f_i : A^i \to B$. Тада користећи тврђење 3.8 није тешко видјети да је $h : A \to B$ дефинисана са

$$h = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \circ \pi^i_A$$

јединствена стрелица таква да важи $h \circ \iota^i_A = f_i$ за свако $0 \leq i < n$. Слично доказујемо и да је $\{A^i \mid 0 \leq i < n\}$ заједно са стрелицама $\{\pi^i_A : A \to A^i \mid 0 \leq i < n\}$ производ. $\square$

3.4 Матрична нормализација

Сљедећи циљ је да елиминишемо $\oplus, \iota$ и π из сваке стрелице од $\mathcal{L}_P$ чији домен и кодомен не садрже $\oplus$. То ћемо постићи сљедећом *матричном нормализацијом* терама.

За сваку стрелицу $u\colon A \to B$ од $\mathcal{L}_P$, гдје је $\mathrm{I}_A = (\iota^0_A, \dots, \iota^{n-1}_A)$, $\Pi_B = (\pi^0_B, \dots, \iota^{m-1}_B)$, нека је M_u матрица формата $m \times n$ чији ij-ти члан $\pi^i_B \circ u \circ \iota^j_A$. Нека су $X_{m_1\times n_1}$ и $Y_{m_2\times n_2}$ двије матрице стрелица од $\mathcal{L}_P$. За $\diamond \in \{\otimes, \multimap\}$ нека је $K_\diamond(X, Y)$ *Кронекеров производ матрица*, то јест, матрица формата $m_1 \cdot m_2 \times n_1 \cdot n_2$ чији је ij-ти члан једнак

$$x_{\lfloor i/m_2\rfloor, \lfloor j/n_2\rfloor} \diamond y_{i \bmod m_2, j \bmod n_2}.$$

На примјер,

$$K_\diamond\left(\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{00} & y_{01} \\ y_{10} & y_{11}\end{pmatrix}\right)$$

је

$$\begin{pmatrix} x_{00}\diamond y_{00} & x_{00}\diamond y_{01} & x_{01}\diamond y_{00} & x_{01}\diamond y_{01} & x_{02}\diamond y_{00} & x_{02}\diamond y_{01} \\ x_{00}\diamond y_{10} & x_{00}\diamond y_{11} & x_{01}\diamond y_{10} & x_{01}\diamond y_{11} & x_{02}\diamond y_{10} & x_{02}\diamond y_{11} \\ x_{10}\diamond y_{00} & x_{10}\diamond y_{01} & x_{11}\diamond y_{00} & x_{11}\diamond y_{01} & x_{12}\diamond y_{00} & x_{12}\diamond y_{01} \\ x_{10}\diamond y_{10} & x_{10}\diamond y_{11} & x_{11}\diamond y_{10} & x_{11}\diamond y_{11} & x_{12}\diamond y_{10} & x_{12}\diamond y_{11}\end{pmatrix}.$$

За двије такве матрице X и Y, дефинишемо

$$X \otimes Y \stackrel{\text{def}}{=} K_\otimes(X, Y), \qquad X \multimap Y \stackrel{\text{def}}{=} K_\multimap(X^T, Y),$$

док је $X \oplus Y$ директна сума

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

матрица X и Y. Ако су X и Y матрице истог формата чији су одговарајући чланови истог типа, тада је $X + Y$ матрица истог формата чији је ij-ти члан једнак $x_{ij} + y_{ij}$. Нека су матрице X и Y формата $m \times p$ и $p \times n$, респективно, при чему су за свако $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$ и $0 \leq k < p$ дефинисане композиције $x_{ik} \circ y_{kj}$ које су истог типа. Тада дефинишемо $X \circ Y$ као $m \times n$ матрицу чији је ij-ти члан једнак $\sum_{k=0}^{p-1} x_{ik} \circ y_{kj}$. Другим ријечима, $X \circ Y$ је производ матрица X и Y.

Тврђење 3.10. *Нека је $\diamond \in \{\otimes, \multimap, \oplus, +, \circ\}$. Тада важи*

$$M_{u_1 \diamond u_2} = M_{u_1} \diamond M_{u_2}.$$

Доказ. У прва три случаја (када је $\diamond$ неки од симбола $\otimes, \multimap$ и $\oplus$), претпоставимо да је $u_i\colon A_i \to B_i$ и да је M_{u_i} матрица формата $m_i \times n_i$, за $i \in \{1, 2\}$.

(1) Када је $\diamond = \otimes$, имамо

$$\begin{aligned}(M_{u_1\otimes u_2})_{i,j} &= \pi^i_{B_1\otimes B_2} \circ (u_1 \otimes u_2) \circ \iota^j_{A_1\otimes A_2} \\ &= (\pi_1^{\lfloor \frac{i}{m_2} \rfloor} \otimes \pi_2^{i \bmod m_2}) \circ (u_1 \otimes u_2) \circ (\iota_1^{\lfloor \frac{j}{n_2} \rfloor} \otimes \iota_2^{j \bmod n_2}) \\ &= (\pi_1^{\lfloor \frac{i}{m_2} \rfloor} \circ u_1 \circ \iota_1^{\lfloor \frac{j}{n_2} \rfloor}) \otimes (\pi_2^{i \bmod m_2} \circ u_2 \circ \iota_2^{j \bmod n_2}) \\ &= (M_{u_1} \otimes M_{u_2})_{i,j}.\end{aligned}$$

(2) Аналогно доказујемо у случају када је $\diamond = \multimap$.

(3) За $\diamond = \oplus$ користећи напомену 3.3 имамо

$$\begin{aligned}(M_{u_1\oplus u_2})_{i,j} &= \pi^{i-m_1\cdot s_i}_{1+s_i} \circ \pi^{1+s_i}_{B_1,B_2} \circ (u_1 \oplus u_2) \circ \iota^{1+s_j}_{A_1,A_2} \circ \iota^{j-n_1\cdot s_j}_{1+s_j} \\ &= \pi^{i-m_1\cdot s_i}_{1+s_i} \circ u_{1+s_i} \circ \pi^{1+s_i}_{A_1,A_2} \circ \iota^{1+s_j}_{A_1,A_2} \circ \iota^{j-n_1\cdot s_j}_{1+s_j} \\ &= \begin{cases} \pi^i_1 \circ u_1 \circ \iota^j_1, & 0 \le i < m_1,\ 0 \le j < n_1, \\ \pi^{i-m_1}_2 \circ u_2 \circ \iota^{j-n_1}_2, & m_1 \le i < m_1 + m_2,\ n_1 \le j < n_1 + n_2, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \\ &= (M_{u_1} \oplus M_{u_2})_{i,j}.\end{aligned}$$

(4) За $\diamond = +$ и $u_1, u_2\colon a \to b$ имамо

$$\begin{aligned}(M_{u_1+u_2})_{i,j} &= \pi^i_B \circ (u_1 + u_2) \circ \iota^j_A \\ &= \pi^i_B \circ u_1 \circ \iota^j_A + \pi^i_B \circ u_2 \circ \iota^j_A \\ &= (M_{u_1} + M_{u_2})_{i,j}.\end{aligned}$$

(5) Нека је $\diamond = \circ$ и $u_1 : B \to C$, $u_2 : A \to B$, при чему је M_{u_1} матрица формата $k \times m$, а M_{u_2} матрица формата $m \times n$. Тада, уз помоћ тврђења 3.8 имамо

$$\begin{aligned}(M_{u_1} \circ M_{u_2})_{i,j} &= \sum_{l=0}^{m-1} \pi^i_C \circ u_1 \circ \iota^l_B \circ \pi^l_B \circ u_2 \circ \iota^j_A \\ &= \pi^i_C \circ u_1 \circ \left[\sum_{l=0}^{m-1} \iota^l_B \circ \pi^l_B\right] \circ u_2 \circ \iota^j_A \\ &= \pi^i_C \circ u_1 \circ u_2 \circ \iota^j_A = (M_{u_1\circ u_2})_{i,j}.\end{aligned}$$

□

Тврђење 3.11. *Нека је стрелица и облика $\mathbb{1}_A$, $\alpha_{A,B,C}$, λ_A, $\sigma_{A,B}$, $\eta_{A,B}$, $\varepsilon_{A,B}$, $\iota^i_{A,B}$, $\pi^i_{A,B}$ или $0_{A,B}$. Тада су сви чланови матрице M_u облика $\mathbb{1}_p$, $\alpha_{p,q,r}$, λ_p, $\sigma_{p,q}$, $\eta_{p,q}$, $\varepsilon_{p,q}$ или $0_{p,q}$, при чему p и q не садрже $\oplus$.*

Доказ. (1) Ако је $u = \mathbb{1}_A$, тада је ij-ти члан матрице M_u једнак

$$(M_u)_{i,j} = \pi^i_a \circ \mathbb{1}_a \circ \iota^j_a = \begin{cases} \mathbb{1}_{a^i}, & i = j, \\ 0_{a^j,a^i}, & \text{иначе}. \end{cases}$$

(2) Ако је $u = \alpha_{A,B,C}$, тада за неке i_1, i_2, i_3 и j_1, j_2, j_3 важи

$$\begin{aligned}(M_u)_{i,j} &= \pi^i_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \alpha_{A,B,C} \circ \iota^j_{A\otimes(B\otimes C)} \\ &= ((\pi^{i_1}_A \otimes \pi^{i_2}_B) \otimes \pi^{i_3}_A) \circ \alpha_{A,B,C} \circ (\iota^{j_1}_A \otimes (\iota^{j_2}_B \otimes \iota^{j_3}_C)) \\ &= \begin{cases} \alpha_{A^{i_1},B^{i_2},C^{i_3}}, & i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ i_3 = j_3, \\ 0_{A^{j_1}\otimes(B^{j_2}\otimes C^{j_3}),(A^{i_1}\otimes B^{i_2})\otimes C^{i_3}}, & \text{иначе.} \end{cases}\end{aligned}$$

(3) Доказ је аналоган претходном случају када је $u = \lambda_A$ или $u = \sigma_{A,B}$.

(4) Када је $u = \eta_{A,B}$, користећи једнакост (A8) и лему 1.4, за неке i_1, i_2, i_3, имамо

$$\begin{aligned}(M_u)_{i,j} &= \pi^i_{A\multimap(A\otimes B)} \circ \eta_{A,B} \circ \iota^j_B = (\iota^{i_1}_A \multimap (\pi^{i_2}_A \otimes \pi^{i_3}_B)) \circ \eta_{A,B} \circ \iota^j_B \\ &= ((\pi^{i_2}_A \circ \iota^{i_1}_A) \multimap (A^{i_2} \otimes (\pi^{i_3}_B \circ \iota^j_B))) \circ \eta_{A^{i_2},B^j} \\ &= \begin{cases} \eta_{A^{i_2},B^j}, & i_1 = i_2,\ i_3 = j, \\ 0_{B^j,A^{i_1}\multimap(A^{i_2}\otimes B^{i_3})}, & \text{иначе.} \end{cases}\end{aligned}$$

(5) Када је $u = \varepsilon_{A,B}$, доказ је аналоган претходном случају.

(6) Ако је $u = \iota^1_{A,B}$, онда је $(M_u)_{i,j} = \pi^i_{A\oplus B} \circ \iota^1_{A,B} \circ \iota^j_A$, што је једнако $\pi^{i_1}_A \circ \pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} \circ \iota^j_A$ за неко i_1, или је једнако $\pi^{i_2}_B \circ \pi^2_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} \circ \iota^j_A$, за неко i_2. Штавише,

$$\pi^{i_1}_A \circ \pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} \circ \iota^j_A = \begin{cases} \mathbb{1}_{A^j}, & j = i_1, \\ 0_{A^j,A^{i_1}}, & \text{иначе,} \end{cases} \qquad \pi^{i_2}_B \circ \pi^2_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} \circ \iota^j_A = 0_{A^j,B^{i_2}}.$$

(7) Доказ је аналоган претходном случају када је $u = \iota^2_{A,B}$, $u = \pi^1_{A,B}$ или $u = \pi^2_{A,B}$.

(8) Ако је $u = 0_{A,B}$, тада је $(M_u)_{i,j} = \pi^i_B \circ 0_{A,B} \circ \iota^j_A = 0_{A^j,B^i}$. □

Посљедица 3.12. *Сваки члан матице M_u се може изразити без $\oplus$, ι и π.*

Доказ. Пошто је стрелица u изграђена од израза облика $\mathbb{1}_A$, $\alpha_{A,B,C}$, λ_A, $\sigma_{A,B}$, $\eta_{A,B}$, $\varepsilon_{A,B}$, $\iota^i_{A,B}$, $\pi^i_{A,B}$ и $0_{A,B}$ помоћу $\otimes$, $A \multimap$, $\oplus$, $+$ и $\circ$, остаје само да примијенимо тврђења 3.10 и 3.11. □

Посљедица 3.13. *Свака стрелица из $\mathcal{L}_P$ у чијем домену и кодомену се не појављује $\oplus$ може да се изрази без $\oplus$, ι и π.*

Доказ. Ако се у домену и кодомену од u не појављује $\oplus$, тада из напомене 3.4 слиједи да је u једини члан матрице M_u. Сада тврђење слиједи из посљедице 3.12. □

3.5 Графички језик

У овом одјељку ћемо увести SMCB категорију која ће нам служити као модел (графички језик) за стрелице категорије $\mathcal{L}_P$. Главни састојак у конструисању те категорије ће бити категорија **1Cob**.

Нека је $\mathbf{1Cob}^+$ категорија која има исте објекте као и **1Cob**, док су стрелице категорије $\mathbf{1Cob}^+$ између A и B коначни (могуће празни) мултискупови стрелица из **1Cob** од A до B. (Напоменимо да ћемо у наставку користити скуповне заграде $\{,\}$ за мултискупове.) Јединична стрелица $\mathbb{1}_A : A \to A$ у $\mathbf{1Cob}^+$ је синглтон $\{\mathbb{1}_A : A \to A\}$, а композиција стрелица $\{f_j \colon a \to b \mid j \in J\}$ и $\{f_k \colon b \to c \mid k \in K\}$ је

$$\{f_k \circ f_j \colon a \to c \mid j \in J, k \in K\}.$$

Није тешко видјети да је $\mathbf{1Cob}^+$ семи-адитивна категорија, при чему је сабирање стрелица истог типа дефинисано као дисјунктна унија мултискупова, а неутрал је празан мултискуп.

Да бисмо дефинисали категорију $\mathbf{1Cob}^\oplus$ која ће бити поменути графички језик за стрелице категорије $\mathcal{L}_P$, биће нам потребна сљедећа дефиниција.

Дефиниција 3.2. Нека је $\mathcal{A}$ произвољна семи-адитивна категорија. *Комӣлеӣирање од $\mathcal{A}$ у односу на биӣроизводе* је категорија $\mathcal{A}^\oplus$ таква да важи сљедеће

- објекти од $\mathcal{A}^\oplus$ су коначни низови $(A_0, \dots, A_{n-1})$ објеката из $\mathcal{A}$;
- нула објекат у $\mathcal{A}^\oplus$ је празан низ $\emptyset$;
- стрелице између објеката $(A_0, \dots, A_{n-1})$ и $(B_0, \dots, B_{m-1})$ су $m \times n$ матрице чији ij-ти члан је стрелица између A_j и B_i, за $0 \leq i < m$ и $0 \leq j < n$;
- композиција стрелица у $\mathcal{A}^\oplus$ је множење матрица;
- јединична стрелица на $(A_0, \dots, A_{n-1})$ је $n \times n$ матрица чији ij-ти члан је једнак $\mathbb{1}_{A_i}$ за $i = j$, а $0_{A_j, A_i}$ за $i \neq j$.

Лема 3.14. *Нека је $\mathcal{A}$ ӣроизвољна семи-адиӣивна каӣеӣорија. Тада је $\mathcal{A}^\oplus$ каӣеӣорија са биӣроизводима.*

Доказ. Нека су $A = (A_0, \dots, A_{n-1})$ и $B = (B_0, \dots, B_{m-1})$ објекти категорије $\mathcal{A}^\oplus$. Тада $A \oplus B$ дефинишемо као низ $(A_0, \dots, A_{n-1}, B_0, \dots, B_{m-1})$, инјекције дефинишемо као

$$\iota^1_{A,B} = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}_{(n+m)\times n}, \qquad \iota^2_{A,B} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_m \end{pmatrix}_{(n+m)\times m},$$

гдје су E_n и E_m јединичне матрице, а пројекције дефинишемо са $\pi^1_{A,B} = (\iota^1_{A,B})^T$ и $\pi^2_{A,B} = (\iota^2_{A,B})^T$. Сада се лако провјери да важе једнакости бипроизвода. □

Сљедећа лема показује да се конструкција категорије $\mathcal{A}^\oplus$ проширује и на компактно затворене категорије са инволуцијом (в. [35, Proposition 5.1]).

Лема 3.15. *Нека је $\mathcal{A}$ комӣакӣно заӣворена семи-адиӣивна каӣеӣорија у којој за све сӣрелице $f, g : A \to B$ и $h : C \to D$ важи*

(1) $h \otimes (f + g) = h \otimes g + h \otimes g$;

(2) $(f + g)^\dagger = f^\dagger + g^\dagger$.

Тада је $\mathcal{A}^\oplus$ комӣакӣно заӣворена каӣеӣорија са инволуцијом и $\dagger$-биӣроизводима.

Доказ. Примијетимо прво да из услова (1) слиједи да имамо и $(f+g)\otimes h = f\otimes h+g\otimes h$ (в. доказ леме 3.4), као и да је $f\otimes 0 = 0$ и $0\otimes f = 0$ (в. лему 3.7). Такође, из дефиниције нула стрелице слиједи да важи $0^\dagger = 0$.

Нека су $A = (A_0,\dots,A_{n-1})$ и $B = (B_0,\dots,B_{m-1})$ објекти у $\mathcal{A}^\oplus$. Тензорски производ у $\mathcal{A}^\oplus$ дефинишемо на објектима као

$$A\otimes B = (A_0\otimes B_0,\dots,A_0\otimes B_{m-1},\dots,A_{n-1}\otimes B_0,\dots,A_{n-1}\otimes B_{m-1}),$$

а на стрелицама као Кронекеров производ матрица. Докажимо да је тако дефинисан $\otimes$ бифунктор. Једнакост $\mathbb{1}_A\otimes\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\otimes B}$ лако слиједи, па ћемо доказати да за $f : A\to B$, $g : B\to C$, $f' : A'\to B'$ и $g' : B'\to C'$ важи

$$(g\otimes g')\circ(f\otimes f') = (g\circ f)\otimes(g'\circ f'). \tag{3.1}$$

Означимо матрицу са лијеве стране једнакости (3.1) са L, а матрицу са десне стране те једнакости са D и претпоставимо да је $f = (f_{ij})_{m\times n}$, $g = (g_{ij})_{k\times m}$, $f' = (f'_{ij})_{m'\times n'}$ и $g' = (g'_{ij})_{k'\times m'}$. Тада је

$$\begin{aligned}
L_{ij} &= \sum_{l=0}^{mm'-1}(g\otimes g')_{il}\circ(f\otimes f')_{lj}\\
&= \sum_{l=0}^{mm'-1}(g_{\lfloor i/k'\rfloor,\lfloor l/m'\rfloor}\otimes g'_{i \bmod k', l \bmod m'})\circ(f_{\lfloor l/m'\rfloor,\lfloor j/n'\rfloor}\otimes f'_{l \bmod m', j \bmod n'})\\
&= \sum_{l=0}^{mm'-1}(g_{\lfloor i/k'\rfloor,\lfloor l/m'\rfloor}\circ f_{\lfloor l/m'\rfloor,\lfloor j/n'\rfloor})\otimes(g'_{i \bmod k', l \bmod m'}\circ f'_{l \bmod m', j \bmod n'})\\
&= \sum_{r=0}^{m-1}\left((g_{\lfloor i/k'\rfloor,r}\circ f_{r,\lfloor j/n'\rfloor})\otimes\sum_{s=0}^{m'-1}(g'_{i \bmod k',s}\circ f'_{s,j \bmod n'})\right) \qquad (3.2)\\
&= \left(\sum_{r=0}^{m-1}(g_{\lfloor i/k'\rfloor,r}\circ f_{r,\lfloor j/n'\rfloor})\right)\otimes\left(\sum_{s=0}^{m'-1}(g'_{i \bmod k',s}\circ f'_{s,j \bmod n'})\right) \qquad (3.3)\\
&= (g\circ f)_{\lfloor i/k'\rfloor,\lfloor j/n'\rfloor}\otimes(g'\circ f')_{i \bmod k', j \bmod n'} = D_{ij},
\end{aligned}$$

при чему смо у једнакости (3.2) користили услов (1) леме, а у једнакости (3.3) смо користили да је $(f+g)\otimes h = f\otimes h+g\otimes h$.

Дуал објекта $A = (A_0,\dots,A_{n-1})$ дефинишемо као $A^* = (A_0^*,\dots,A_{n-1}^*)$, а јединични објекат у $\mathcal{A}^\oplus$ је (I), при чему је I јединични објекат у $\mathcal{A}$. Стрелицу $\eta_A : (I)\to A^*\otimes A$ дефинишемо као колону са n^2 чланова, при чему су чланови индексирани са kn, $0\le k<n$ једнаки $\mathbb{1}$, а сви остали су 0. Стрелицу $\varepsilon_A : A\otimes A^*\to(I)$ дефинишемо као $(\eta_A)^T$. Резонујући на сличан начин дефинишемо стрелице $\alpha_{A,B,C}$, λ_A, ρ_A и $\sigma_{A,B}$, а затим се лако провјери да важе једнакости (1.10) и (1.11).

За стрелицу $f = (f_{ij})$ категорије $\mathcal{A}^\oplus$ дефинишемо $f^\dagger$ као $(f^\dagger_{ij})^T$. Докажимо, на примјер, да је $(f\circ g)^\dagger = g^\dagger\circ f^\dagger$, пошто се остале једнакости из дефиниције компактно затворене категорије са инволуцијом слично доказују. За $f = (f_{ij})_{m\times n}$ и $g = (g_{ij})_{n\times k}$ имамо

$$((f\circ g)^\dagger)_{ij} = \left(\sum_{k=0}^{n-1}(f_{jk}\circ g_{ki})\right)^\dagger \overset{(\star)}{=} \sum_{k=0}^{n-1}(f_{jk}\circ g_{ki})^\dagger = \sum_{k=0}^{n-1}(g^\dagger_{ki}\circ f^\dagger_{jk}) = (g^\dagger\circ f^\dagger)_{ij},$$

при чему смо у једнакости ($\star$) користили услов (2) леме.

Из леме 3.14 и дефиниција инјекција и пројекција слиједи да је $\mathcal{A}^{\oplus}$ категорија са $\dagger$-бипроизводима. $\square$

Сада дефинишемо категорију $\mathbf{1Cob}^{\oplus}$ као комплетирање категорије $\mathbf{1Cob}^{+}$ у односу на бипроизводе. Из леме 3.15 добијамо сљедеће тврђење и његову директну посљедицу.

Тврђење 3.16. *Категорија* $\mathbf{1Cob}^{\oplus}$ *је компактно затворена категорија са инволуцијом и* $\dagger$*-бипроизводима.*

Доказ. Докажимо да је $\mathbf{1Cob}^{+}$ компактно затворена категорија са инволуцијом. За стрелице f и g од $\mathbf{1Cob}^{+}$ које су дате мултускуповима $\{f_i : a \to b \mid i \in I\}$ и $\{g_j : c \to d \mid j \in J\}$ респективно, дефинишемо $f \otimes g$ као $\{f_i \otimes g_j \mid i \in I, j \in J\}$. Слично, $f^{\dagger}$ дефинишемо као $\{f_i^{\dagger} : b \to a \mid i \in I\}$. Лако видимо да у $\mathbf{1Cob}^{+}$ важи $h \otimes (f+g) = h \otimes f + h \otimes g$ и $(f+g)^{\dagger} = f^{\dagger} + g^{\dagger}$. Сада тврђење слиједи из леме 3.15. $\square$

Посљедица 3.17. *Категорија* $\mathbf{1Cob}^{\oplus}$ *је SMCB категорија.*

3.6 Кохеренција

Овај одјељак садржи главни резултат рада [32]. Дефинишимо прво неке помоћне појмове. Почећемо са индуктивном дефиницијом I-*константних* и 0-*константних* објеката категорије $\mathcal{L}_P$.

Дефиниција 3.3. (1) Објекат I је I-константан, а 0 је 0-константан.

(2) Објекат $A \oplus B$ је I-константан када је I-константан један од објеката A или B, а други је 0-константан. Објекат $A \oplus B$ је 0-константан када су 0-константни и A и B.

(3) Објекат $A \otimes B$ ($A \multimap B$) је I-константан када су I-константни објекти A и B, а $A \otimes B$ ($A \multimap B$) је 0-константан када је 0-константан бар један од објеката A и B.

Напомена 3.5. Ако се у објекту A не појављује $\oplus$ и A је I-константан, тада је A изграђен само од I, $\otimes$ и $\multimap$.

Дефиниција 3.4. Кажемо да је објекат A категорије $\mathcal{L}_P$ *правилан* када за сваку потформулу од A облика $B \multimap C$ имамо да ако за C важи да је I-константан, тада је B или I-константан или 0-константан. Објекат A је I-*правилан* када за сваку потформулу од A облика $B \multimap C$ имамо да ако за C важи да је I-константан тада је B такође I-константан.

Напомена 3.6. Из дефиниција ι_A^i и π_A^i, имамо да ако је A правилан, тада је домен од ι_A^i (кодомен од π_A^i) такође правилан.

Напомена 3.7. Ако је A правилан објекат у коме се не појављује $\oplus$, тада или је A нула објекат, или је он I-правилан објекат који не садржи 0.

Посматрајмо функцију g која слика скуп P генератора од $\mathcal{L}_P$ у скуп објеката категорије $\mathbf{1Cob}^{\oplus}$ тако што сваки елемент из P слика у низ $(+)$. Пошто је $\mathcal{L}_P$ слободно генерисана SMCB категорија, а $\mathbf{1Cob}^{\oplus}$ је SMCB категорија, слиједи да постоји јединствен SMCB функтор (који стриктно чува SMCB структуру) $G\colon \mathcal{L}_P \to \mathbf{1Cob}^{\oplus}$, такав да је $G(p) = g(p)$ за свако $p \in P$. Стрелице из $\mathcal{L}_P$ у којима се не појављују $\oplus$, $+$ и $0, \iota, \pi$-стрелице називамо SMC-*стрелице*.

У доказу теореме кохеренције за симетричне моноидално затворене категорије са бипроизводима, користићемо теорему 2.20 која сада добија сљедећи облик.

Теорема 3.18. *Нека су $f, g\colon A \to B$ произвољне SMC-стрелице категорије $\mathcal{L}_P$ такве да је $Gf = Gg$. Ако за објекте A и B важи да су I-правилни, тада је $f = g$.*

Сљедећа теорема је главни резултат рада [32].

Теорема 3.19. *Нека су $f, g : A \to B$ стрелице категорије $\mathcal{L}_P$ такве да је $Gf = Gg$. Ако су A и B правилни објекти, тада је $f = g$. Другим ријечима, рестрикција од G на пуну поткатегорију од $\mathcal{L}_P$ генерисану правилним објектима је вјеран функтор.*

Доказ. Покажимо да за свако $\iota_A^i \in \mathrm{I}_A$ и $\pi_B^j \in \Pi_B$, имамо $\pi_B^j \circ f \circ \iota_A^i = \pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i$. Из посљедице 3.13, уз помоћ једнакости (A17)-(A18) и лема 3.4, 3.5 и 3.7 слиједи да је $\pi_B^j \circ f \circ \iota_A^i$ једнако или $0_{A^i,B^j}$, или $\sum_{k=1}^n f_k$, $n \geq 1$, за неке SMC-стрелице f_k, $1 \leq k \leq n$. На исти начин слиједи да је $\pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i$ једнако или $0_{A^i,B^j}$, или $\sum_{k=1}^m g_k$, $m \geq 1$, за неке SMC-стрелице g_k, $1 \leq k \leq m$.

Ако је $\pi_B^j \circ f \circ \iota_A^i = 0_{A^i,B^j}$, тада је $G(\pi_B^j \circ f \circ \iota_A^i)$ празан мултискуп. Из $Gf = Gg$ закључујемо да $G(\pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i)$ мора такође бити празан мулитскуп, а пошто $G(\sum_{k=1}^m g_k)$, за $m \geq 1$, не може бити празан мултискуп, слиједи да је $\pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i = 0_{A^i,B^j}$. На сличан начин разматрамо и случај када је $\pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i = 0_{A^i,B^j}$.

Ако је $\pi_B^j \circ f \circ \iota_A^i = \sum_{k=1}^n f_k$ и $\pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i = \sum_{k=1}^m g_k$, за $n, m \geq 1$, гдје су f_k и g_k неке SMC-стрелице, тада из $Gf = Gg$, слиједи

$$\{Gf_k \mid 1 \leq k \leq n\} = G\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) = G\left(\sum_{k=1}^m g_k\right) = \{Gg_k \mid 1 \leq k \leq m\}.$$

Дакле, мултискупови $\{Gf_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ и $\{Gg_k \mid 1 \leq k \leq m\}$ имају исти број елемената, то јест $n = m$, и без губитка општости можемо претпоставити да за свако $1 \leq k \leq n$ важи $Gf_k = Gg_k$. Из напомене 3.6 имамо да су домен и кодомен од f_k и g_k правилни. Такође, f_k и g_k су SMC-стрелице, па из напомене 3.7 слиједи да су оне I-правилне. Сада из теореме 3.18 слиједи да за свако $1 \leq k \leq n$ имамо $f_k = g_k$, одакле је $\pi_B^j \circ f \circ \iota_A^i = \pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i$.

Пошто претходно важи за свако $\iota_A^i \in \mathrm{I}_A$ и $\pi_B^j \in \Pi_B$, из посљедице 3.9 закључујемо да је $f = g$. □

3.7 Компактно затворене категорије са бипроизводима

Пратећи доказ теореме 3.19 може се доказати аналогни резултат који се тиче компактно затворених категорија са бипроизводима (CCB категорија). Одговарајући CCB језик добијамо од SMCB језика на сљедећи начин. Бинарну операцију $\multimap$ на објектима замјењујемо унарном операцијом $*$, а унарну операцију $A \multimap \_$ на стрелицама изостављамо. Фамилије стрелица са компонентама $\eta_{A,B}$ и $\varepsilon_{A,B}$ замјењујемо фамилијама стрелица са компонентама $\eta_A : I \to A^* \otimes A$ и $\varepsilon_A : A \otimes A^* \to I$. Коначно, једнакости (A4), (A8), (A9) и (A12) замјењујемо једнакостима

$$(A^* \otimes \varepsilon) \circ \alpha^{-1}_{A^*,A,A^*} \circ (\eta \otimes A^*) = \sigma_{I,A^*}, \qquad (\varepsilon \otimes A) \circ \alpha_{A,A^*,A} \circ (A \otimes \eta) = \sigma_{A,I}.$$

(Лако се види да у свакој компактно затвореној категорији претходне једнакости важе ако и само ако важе једнакости 1.10 и 1.11.) Нека је $\mathcal{L}'_P$ слободна CCB категорија генерисана скупом P, конструисана у односу на претходни језик. За функцију g која слика P у скуп објеката категорије $\mathbf{1Cob}^{\oplus}$ дефинисану као у одјељку 3.6, постоји јединствен CCB функтор $G' : \mathcal{L}'_P \to \mathbf{1Cob}^{\oplus}$ такав да је $G'(p) = g(p)$ за свако $p \in P$. Стрелице из $\mathcal{L}'_P$ у којима се не појављују $\oplus, +$ и $0, \iota, \pi$-стрелице називамо CoC-*стрелице*. Примијетимо да ако је u нека CoC-стрелица, тада $G'u$ одговара Кели-Лаплазином графу од u (в. [22]).

Да бисмо доказали резултат кохеренције за CCB категорије, треба да модификујемо резултате дате у одјељцима 3.3 и 3.4. За сваки објекат A из $\mathcal{L}'_P$ дефинишемо низове I_A и Π_A тако што у дефиницији 3.1 замијенимо ставку $(\multimap)$ са

$(*)$ Ако је $A = A_1^*$, тада је $n = n_1$ и за $0 \le i < n_1$, $\iota_A^i = (\pi_1^i)^*$, $\pi_A^i = (\iota_1^i)^*$.

Није тешко провјерити да тврђење 3.8 и посљедица 3.9 у којима је $\mathcal{L}_P$ замијењено са $\mathcal{L}'_P$ остају на снази. Такође, изостављањем случаја (2) у доказу тврђења 3.10, добијамо аналогну формулацију тог тврђења у случају категорије $\mathcal{L}'_P$.

Тврђење 3.20. *Нека је* $\diamond \in \{\otimes, \oplus, +, \circ\}$. *Тада важи*

$$M_{u_1 \diamond u_2} = M_{u_1} \diamond M_{u_2}.$$

Сљедеће тврђење је аналогно тврђењу 3.11.

Тврђење 3.21. *Нека је стрелица* u *облика* $\mathbb{1}_A$, $\alpha_{A,B,C}$, λ_A, $\sigma_{A,B}$, η_A, ε_A, $\iota^i_{A,B}$, $\pi^i_{A,B}$ *или* $0_{A,B}$. *Тада су сви чланови матрице* M_u *облика* $\mathbb{1}_p$, $\alpha_{p,q,r}$, λ_p, $\sigma_{p,q}$, η_p, ε_p *или* $0_{p,q}$, *при чему* p *и* q *не садрже* $\oplus$.

Доказ. Тврђење слиједи када замијенимо случајеве (4) и (5) у доказу тврђења 3.11 случајевима (4′) и (5′) у наставку.

(4′) Ако је $u = \eta_A : I \to A^* \otimes A$, тада је M_u матрица формата $m \times 1$ за неко m, јер се низ I_I који одговара објекту I састоји од само једног члана $\iota_I^0 = \mathbb{1}_I$, то јест, $\mathrm{I}_I = (\mathbb{1}_I)$. Тада за неке i_1 и i_2 важи

$$\begin{aligned}(M_u)_{i,0} &= \pi^i_{A^*\otimes A} \circ \eta_A = ((\iota_A^{i_1})^* \otimes \pi_A^{i_2}) \circ \eta_A \overset{(\clubsuit)}{=} ((A^{i_1})^* \otimes (\pi_A^{i_2} \circ \iota_A^{i_1})) \circ \eta_{A^{i_1}} \\ &= \begin{cases} \eta_{A^{i_1}}, & i_1 = i_2, \\ 0_{I,(A^{i_1})^* \otimes A^{i_2}}, & \text{иначе,} \end{cases}\end{aligned}$$

при чему једнакост $(\clubsuit)$ слиједи из леме 1.9.

(5′) За $u = \varepsilon_A$ резонујемо слично као у претходном случају. □

Сљедећи резултат је сродан са [2, Theorem 21], али је другачије формулисан и доказан. Ипак, у одређеном смислу можемо сматрати да ова два резултата кохеренције имају исти „математички садржај”.

Теорема 3.22. *Нека су* $f, g : A \to B$ *стрелице категорије* $\mathcal{L}'_P$ *такве да је* $G'f = G'g$. *Тада је* $f = g$, *то јест, функтор* $G' : \mathcal{L}'_P \to \mathbf{Cob}^{\oplus}$ *је вјеран.*

Доказ. Слично као у доказу теореме 3.19 добијамо да је $\pi_B^j \circ f \circ \iota_A^i = \sum_{k=1}^n f_k$ и $\pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i = \sum_{k=1}^n g_k$, за $n \ge 1$ и CoC-стрелице f_k и g_k, при чему за свако $1 \le k \le n$ важи $G'f_k = G'g_k$. Из [22, Theorem 8.2] закључујемо да за свако $1 \le k \le n$ важи $f_k = g_k$, одакле је $\pi_B^j \circ f \circ \iota_A^i = \pi_B^j \circ g \circ \iota_A^i$. Тврђење сада слиједи из посљедице 3.9 у којој је $\mathcal{L}_P$ замијењено са $\mathcal{L}'_P$. □

У случају компактно затворених категорија са инволуцијом и †-бипроизводима (DCCB категорије), добијамо одговарајући језик од CCB језика сљедећим модификацијама. Додајемо унарну операцију †, а фамилије стрелица $\alpha^{-1}, \lambda^{-1}, \eta$ и ι изостављамо. Такође, додајемо једнакости

$$f^{\dagger\dagger} = f, \quad (f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger, \quad \sigma^\dagger_{A,B} = \sigma_{B,A} \quad \text{и} \quad \sigma_{A,A^*} \circ \varepsilon^\dagger_A = \eta_A,$$

а у једнакостима које претпостављамо за CCB категорије стрелице $\alpha^{-1}_{A,B,C}$, λ^{-1}_A, η_A и $\iota^i_{A,B}$ замјењујемо са $\alpha^\dagger_{A,B,C}$, $\lambda^\dagger_A$, $\sigma_{A,A^*} \circ \varepsilon^\dagger_A$ и $(\pi^i_{A,B})^\dagger$, респективно.

Нека је $\mathcal{L}''_P$ слободна DCCB категорија генерисана скупом P. Пошто је $\mathcal{L}''_P$ такође и CCB категорија, постоји јединствени CCB функтор $L : \mathcal{L}'_P \to \mathcal{L}''_P$ такав да је $L(p) = p$ за свако $p \in P$. То значи да је L идентитет на објектима од $\mathcal{L}'_P$. Имамо сљедећу лему.

Лема 3.23. *Функтор* $L : \mathcal{L}'_P \to \mathcal{L}''_P$ *је изоморфизам.*

Доказ. Посматрајмо CCB функтор $H : \mathcal{L}''_P \to \mathcal{L}'_P$, који је идентитет на објектима, док је на примитивним стрелицама дефинисан са

$$H(v) = \begin{cases} \alpha^{-1}_{A,B,C}, & v = \alpha^\dagger_{A,B,C}, \\ \lambda^{-1}_A, & v = \lambda^\dagger_A, \\ \sigma_{B,A}, & v = \sigma^\dagger_{A,B}, \\ \sigma_{A^*,A} \circ \eta_A, & v = \varepsilon^\dagger_A, \\ \iota^i_{A,B}, & v = (\pi^i_{A,B})^\dagger, \\ 0_{B,A}, & v = 0^\dagger_{A,B}, \\ v, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функтор H се може на јединствен начин проширити на све стрелице из $\mathcal{L}''_P$. Пошто је $\mathcal{L}''_P$ компактно затворена категорија са инволуцијом и †-бипроизводима, користећи лему 1.16 и напомену 3.1 имамо једнакости

$$(f \circ g)^\dagger = g^\dagger \circ f^\dagger, \quad (f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger, \quad (f \oplus g)^\dagger = f^\dagger \oplus g^\dagger, \quad (f + g)^\dagger = f^\dagger + g^\dagger,$$

одакле слиједи да је свака стрелица у $\mathcal{L}''_P$ једнака некој у којој се † појављује само у примитивним стрелицама. То нам омогућава да H проширимо на све стрелице из $\mathcal{L}''_P$ користећи једнакости $H(f \diamond g) = H(f) \diamond H(g)$, за $\diamond \in \{\circ, \otimes, \oplus, +\}$, које важе јер смо претпоставили да је H један CCB функтор.

Сада није тешко видјети да је $H \circ L : \mathcal{L}'_P \to \mathcal{L}'_P$ један CCB функтор који је идентитет на објектима, па пошто је $\mathcal{L}'_P$ слободна CCB категорија, слиједи да је $H \circ L = \mathbb{1}_{\mathcal{L}'_P}$. Слично, $L \circ H : \mathcal{L}''_P \to \mathcal{L}''_P$ је DCCB функтор који је идентитет на објектима, па пошто је $\mathcal{L}''_P$ слободна DCCB категорија, слиједи да је $L \circ H = \mathbb{1}_{\mathcal{L}''_P}$. □

Посматрајмо функцију g која слика скуп P у скуп објеката категорије $\mathbf{1Cob}^\oplus$ дефинисану као и раније. Тада постоји јединствени DCCB функтор $G'' : \mathcal{L}''_P \to \mathbf{1Cob}^\oplus$ који је проширење функције g. Сада имамо сљедећу теорему кохеренције за DCCB категорије.

Теорема 3.24. *Нека су* $f, g : A \to B$ *стрелице категорије* $\mathcal{L}''_P$ *такве да је* $G''f = G''g$. *Тада је* $f = g$, *што јест, функтор* $G'' : \mathcal{L}''_P \to \mathbf{Cob}^\oplus$ *је вјеран.*

Доказ. Имамо да је $G'' \circ L : \mathcal{L}'_P \to \mathbf{1Cob}^\oplus$ један CCB функтор, па пошто је $\mathcal{L}'_P$ слободна CCB категорија слиједи да је $G'' \circ L = G'$. Из теореме 3.22 имамо да је G' вјеран, а из леме 3.23 да је L изоморфизам, одакле слиједи да је G'' вјеран. □

Глава 4

Критеријуми постојања бипроизвода у моноидалним категоријама

Р. Хјустон је у [15] доказао да се у компактно затвореним категоријама коначни производи и копроизводи поклапају. Напоменимо да је Хјустон посматрао несиметричне компактно затворене категорије (познате и под називом *аутономне* или *ригидне* категорије), у којима сваки објекат има и лијеви и десни дуал.

Заправо, Хјустон је доказао општији резултат од горенаведеног. Прецизније, доказао је да ако је $\mathcal{A}$ моноидална категорија са коначним производима и копроизводима таква да за сваки објекат A од $\mathcal{A}$ функтор $A \otimes \_$ чува производе, а функтор $\_ \otimes A$ чува копроизводе, тада $\mathcal{A}$ има коначне бипроизводе. Из [10, Proposition 2.10.8] слиједи да постојање лијевог и десног дуала од A имплицира да функтори $A \otimes \_$ и $\_ \otimes A$ имају и лијеви и десни адјункт, одакле користећи [28, V.5] добијамо да функтори $A \otimes \_$ и $\_ \otimes A$ чувају производе и копроизводе. Из претходног директно слиједи да су коначни производи бипроизводи у компактно затвореним категоријама.

Р. Гарнер и Д. Шепи су у [11] уопштили овај резултат тако што су показали да моноидална категорија са коначним копроизводима (укључујући иницијални објекат 0), које чувају функтори $A \otimes \_$, има нула објекат и коначне бипроизводе ако и само ако иницијални објекат 0 и копроизвод $I \sqcup I$ имају десне дуале (важи такође и дуална верзија овог тврђења). У доказу су користили чињеницу да је категорија са бипроизводима нужно семи-адитивна, а један од основних корака у доказу је карактеризација семи-адитивних категорија преко постојања структуре комагме са којединицом на сваком објекту.

У овој глави ће бити представљен елементаран доказ (благог уопштења) главног резултата из [11]. Наиме, показаћемо да претпоставка која се тиче десних дуала може бити ослабљена. Прецизније, за постојање коначних бипроизвода је довољно да 0 и $I \sqcup I$ имају само десне *семи-дуале* (в. дефиницију 4.1). Доказ који ћемо овдје представити не користи семи-адитивну структуру категорија са бипроизводима нити карактеризацију те структуре помоћу комагми са којединицама, и у том смислу је једноставнији него доказ из [11].

Такође, у овој глави ћемо размотрити аналогни резултат који се тиче произвољних (не само коначних) бипроизвода. Примијетимо да је један критеријум за постојање произвољних бипроизвода у семи-адитивним категоријама дат у [16, Theorem 1.4], као и да моноидалне категорије са бесконачним бипроизводима имају значајну улогу у *квантитативним моделима израчунавања* (в. [24, Одјељак 3] и [25, Одјељак III]). Ови модели се односе на семантику линеарне логике у којој се докази интрепретирају као линеарна пресликавања између векторских простора (или општије модула). Бесконачни бипроизводи у овим моделима су потребни за конструкцију линеарног експоненцијала $!A$. Пошто квантитативна семантика има примјену у квантном рачунарству, бесконачни бипроизводи налазе своју примјену и у овој области (в. [31, Одјељак 4])

4.1 Припремна тврђења

У наставку ће нам бити потребно да можемо говорити о дуалним објектима у (не нужно симетричним) стриктним моноидалним категоријама. Због одсуства симетрије, разликујемо појмове *десног* и *лијевог* дуала (уп. дефиницију 1.10). Такође, уводимо и појам *семи-дуала*.

Дефиниција 4.1. Нека је A објекат стриктне моноидалне категорије $(\mathcal{A}, \otimes, I)$. Кажемо да је B *десни дуал* од A (A је *лијеви дуал* од B) када постоје стрелице $\eta : I \to B \otimes A$ и $\varepsilon : A \otimes B \to I$ такве да важе једнакости

$$(\varepsilon \otimes A) \circ (A \otimes \eta) = \mathbb{1}_A \quad \text{и} \quad (B \otimes \varepsilon) \circ (\eta \otimes B) = \mathbb{1}_B. \tag{4.1}$$

Ако важи само прва једнакост у (4.1), кажемо да је B *десни семи-дуал* од A (A је *лијеви семи-дуал* од B).

Лема 4.1. *Нека је $(\mathcal{A}, \otimes, I)$ моноидална категорија са нула објектом 0 кога чувају функтори $A \otimes \_ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, за свако $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. Тада за стрелице $f : A \to B$ и $g : C \to D$ из $\mathcal{A}$ важи*

$$f \otimes 0_{C,D} = 0_{A\otimes C, B\otimes D} = 0_{A,B} \otimes g. \tag{4.2}$$

Доказ. Имамо да је $0_{C,D} = u \circ v$ за јединствене стрелице $u : 0 \to D$ и $v : C \to 0$. Тада је $f \otimes 0_{C,D} = (f \otimes u) \circ (A \otimes v)$ за $f \otimes u : A \otimes 0 \to B \otimes D$ и $A \otimes v : A \otimes C \to A \otimes 0$. Пошто $A \otimes \_$ чува 0, имамо да је $A \otimes 0$ нула објекат. Сада јединственост нула стрелице између два објекта имплицира да је $f \otimes 0_{C,D} = 0_{A\otimes C, B\otimes D}$. Други дио једнакости (4.2) слиједи на сличан начин. □

Напомена 4.1. Нека је $(\mathcal{A}, \otimes, I)$ стриктна моноидална категорија која посједује копроизвод $I \sqcup I$. (У наставку ћемо копроизвод $I \sqcup I$ означавати са 2.) Претпоставимо да функтори $A \otimes \_ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, за свако $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$, чувају копроизвод 2. Тада можемо дефинисати копроизвод $A \sqcup A$ као $A \otimes 2$, а за стрелице $f, g : A \to B$ можемо дефинисати $f \sqcup g : A \sqcup A \to B \sqcup B$ као јединствену стрелицу такву да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "A\otimes\iota^1_{I,I}"] \arrow[d, "f"'] & A \sqcup A \arrow[d, dashed, "f\sqcup g"] & A \arrow[l, "A\otimes\iota^2_{I,I}"'] \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "B\otimes\iota^1_{I,I}"'] & B \sqcup B & B \arrow[l, "B\otimes\iota^2_{I,I}"]
\end{tikzcd}$$

комутира. Специјално, $f \sqcup f$ се поклапа са $f \otimes 2$. Такође, директно се показује да за произвољан објекат C и стрелице $u, v : B \to C$ важи

$$[u, v] \circ (f \sqcup g) = [u \circ f, v \circ g],$$
$$(u \sqcup v) \circ (f \sqcup g) = (u \circ f) \sqcup (v \circ g),$$
$$C \otimes (f \sqcup g) = (C \otimes f) \sqcup (C \otimes g).$$

Напомена 4.2. Ако категорија $\mathcal{A}$ има иницијални објекат 0, тада можемо дефинисати копроизвод $A \sqcup 0$ као A, пошто је

$$A \xrightarrow{\mathbb{1}_A} A \xleftarrow{\kappa_A} 0$$

копроизвод дијаграм (κ_A је јединствена стрелица из иницијалног објекта 0). Слично, можемо дефинисати копроизвод $0 \sqcup A$ као A. Слиједи да за стрелицу $f : A \to B$ важи $[f, \kappa_B] = f = [\kappa_B, f]$. Такође, ако је 0 нула објекат и τ_A јединствена стрелица у 0, можемо дефинисати $\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A$ као $[\mathbb{1}_A, \kappa_A \circ \tau_A]$ и слично $\tau_A \sqcup \mathbb{1}_A$ као $[\kappa_A \circ \tau_A, \mathbb{1}_A]$.

Лема 4.2. *Нека је $(\mathcal{A}, \otimes, I)$ стриктна моноидална категорија са нула објектом 0 и копроизводом 2, које чувају функтори $A \otimes \_ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, за свако $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. Претпоставимо да 2 има десни семи-дуал. Тада постоји стрелица $\delta_A : A \to A \sqcup A$ таква да:*

(1) за јединствену стрелицу $\tau_A : A \to 0$ важи $(\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ \delta_A = (\tau_A \sqcup \mathbb{1}_A) \circ \delta_A$;

(2) за $f : A \to B$ важи $(f \sqcup f) \circ \delta_A = \delta_B \circ f$;

(3) за копроизвод $A \sqcup B$ важи $[\iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B}, \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B}] \circ \delta_{A \sqcup B} = \mathbb{1}_{A \sqcup B}$, гдје је $\pi^1_{A,B} = [\mathbb{1}_A, 0_{B,A}]$ и $\pi^2_{A,B} = [0_{A,B}, \mathbb{1}_B]$.

Доказ. Нека је D десни семи-дуал од 2, то јест, постоје стрелице $\eta : I \to D \otimes 2$ и $\varepsilon : 2 \otimes D \to I$ такве да је $(\varepsilon \otimes 2) \circ (2 \otimes \eta) = \mathbb{1}_2$. Дефинишимо прво стрелице $\chi_i : D \to I$ са $\varepsilon \circ (\iota^i_{I,I} \otimes D)$, за $i \in \{1, 2\}$, а затим дефинишимо δ_A као $A \otimes ((\chi_1 \sqcup \chi_2) \circ \eta)$. Прије него што докажемо тврђења (1)-(3), докажимо сљедећу помоћну једнакост

$$(\chi_i \sqcup \chi_i) \circ \eta = \iota^i_{I,I}, \quad \text{за } i \in \{1, 2\}. \tag{4.3}$$

Користећи напомену 4.1, имамо

$$\begin{aligned}(\chi_i \sqcup \chi_i) \circ \eta &= (\chi_i \otimes 2) \circ \eta = (\varepsilon \otimes 2) \circ (\iota^i_{I,I} \otimes d \otimes 2) \circ (I \otimes \eta) \\ &= (\varepsilon \otimes 2) \circ (\iota^i_{I,I} \otimes \eta) = (\varepsilon \otimes 2) \circ ((2 \circ \iota^i_{I,I}) \otimes (\eta \circ I)) \\ &= (\varepsilon \otimes 2) \circ (2 \otimes \eta) \circ \iota^i_{I,I} = \iota^i_{I,I}.\end{aligned}$$

Вратимо се сада тврђењима леме.

(1) Користећи напомену 4.1, имамо

$$\begin{aligned}(\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ \delta_A &= (\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ (A \otimes (\chi_1 \sqcup \chi_2)) \circ (A \otimes \eta) \\ &= (\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ ((A \otimes \chi_1) \sqcup (A \otimes \chi_2)) \circ (A \otimes \eta) \\ &= ((A \otimes \chi_1) \sqcup (\tau_A \circ (A \otimes \chi_2))) \circ (A \otimes \eta) \\ &= ((A \otimes \chi_1) \sqcup (\tau_A \circ (A \otimes \chi_1))) \circ (A \otimes \eta),\end{aligned}$$

гдје посљедња једнакост важи јер је 0 терминални објекат. Сада, користећи поново напомену 4.1 и једнакост (4.3), имамо

$$\begin{aligned}(\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ \delta_A &= (\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ ((A \otimes \chi_1) \sqcup (A \otimes \chi_1)) \circ (A \otimes \eta) \\ &= (\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ (A \otimes ((\chi_1 \sqcup \chi_1) \circ \eta)) = (\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ (A \otimes \iota^1_{I,I}) = \mathbb{1}_A.\end{aligned}$$

Други дио тврђења (1) слиједи на сличан начин.

(2) Из бифункторијалности тензора имамо

$$\begin{aligned}(f \sqcup f) \circ \delta_A &= (f \otimes 2) \circ (A \otimes ((\chi_1 \sqcup \chi_2) \circ \eta)) \\ &= (B \otimes ((\chi_1 \sqcup \chi_2) \circ \eta)) \circ (f \otimes I) = \delta_B \circ f.\end{aligned}$$

(3) Користећи претходна тврђења ове леме, имамо

$$\begin{aligned}[\iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B}, \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B}] \circ \delta_{A \sqcup B} \circ \iota^1_{A,B} &= [\iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B}, \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B}] \circ (\iota^1_{A,B} \sqcup \iota^1_{A,B}) \circ \delta_A \\ &= [\iota^1_{A,B}, 0_{A,A \sqcup B}] \circ \delta_A \\ &= [\iota^1_{A,B}, \kappa_{A \sqcup B}] \circ (\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A) \circ \delta_A = \iota^1_{A,B}.\end{aligned}$$

Слично, $[\iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B}, \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B}] \circ \delta_{A \sqcup B} \circ \iota^2_{A,B} = \iota^2_{A,B}$, одакле слиједи тврђење. □

4.2 Главна теорема

Сљедећа теорема је главни резултат рада [40].

Теорема 4.3. *Нека је $(\mathcal{A}, \otimes, I)$ стриктна моноидална категорија са иницијалним објектом 0 и копроизводом 2, које чувају функтори $A \otimes \_ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, за свако $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. Тада су сљедећа тврђења еквивалентна:*

(1) 0 је нула објекат и сваки коначни копроизвод који постоји у $\mathcal{A}$ је бипроизвод;

(2) 0 је нула објекат и $2 \otimes 2$ је бипроизвод;

(3) објекти 0 и 2 су само-дуални;

(4) постоји стрелица из I у 0 и 2 има десни семи-дуал.

Доказ. Пошто (1) ⇒ (2) очигледно важи, покажимо (2) ⇒ (3). Докажимо прво да је 0 само-дуалан. Функтор $A \otimes \_$ чува иницијални објекат 0, па је $0 \otimes 0$ иницијални објекат и стога изоморфан са 0. Дакле, $0 \otimes 0$ је такође и терминални објекат. Дефинишимо $\eta : I \to 0 \otimes 0$ као јединствену стрелицу у терминални објекат $0 \otimes 0$, а $\varepsilon : 0 \otimes 0 \to I$ као јединствену стрелицу из иницијалног објекта $0 \otimes 0$. Тада једнакости $(0 \otimes \varepsilon) \circ (\eta \otimes 0) = \mathbb{1}_0$ и $(\varepsilon \otimes 0) \circ (0 \otimes \eta) = \mathbb{1}_0$ важе јер је $\mathbb{1}_0$ једина стрелица из 0 у 0.

Докажимо да је 2 само-дуалан. Пошто $2 \otimes \_$ чува копроизводе, имамо да је

$$2 \xrightarrow{2 \otimes \iota^1_{I,I}} 2 \otimes 2 \xleftarrow{2 \otimes \iota^2_{I,I}} 2 \tag{4.4}$$

копроизвод дијаграм. Такође, тврдимо да је

$$2 \xleftarrow{2 \otimes \pi^1_{I,I}} 2 \otimes 2 \xrightarrow{2 \otimes \pi^2_{I,I}} 2 \tag{4.5}$$

производ дијаграм, гдје је $\pi^1_{I,I} = [\mathbb{1}_I, 0_{I,I}]$ и $\pi^2_{I,I} = [0_{I,I}, \mathbb{1}_I]$. Пошто је $2 \otimes 2$ бипроизвод, довољно је доказати

$$\begin{aligned}&(2 \otimes \pi^1_{I,I}) \circ (2 \otimes \iota^1_{I,I}) = \mathbb{1}_2, \qquad &&(2 \otimes \pi^2_{I,I}) \circ (2 \otimes \iota^2_{I,I}) = \mathbb{1}_2, \\ &(2 \otimes \pi^1_{I,I}) \circ (2 \otimes \iota^2_{I,I}) = 0_{2,2}, \qquad &&(2 \otimes \pi^2_{I,I}) \circ (2 \otimes \iota^1_{I,I}) = 0_{2,2}.\end{aligned}$$

Ове једнакости слиједе из бифункторијалности тензора, дефиниције бипроизвода и леме 4.1, тако да је (4.5) заиста производ дијаграм.

Сада можемо дефинисати $\eta : I \to 2\otimes 2$ као $\langle \iota^1_{I,I}, \iota^2_{I,I}\rangle$ (пошто је (4.5) производ дијаграм) и $\varepsilon : 2\otimes 2 \to I$ као $[\pi^1_{I,I}, \pi^2_{I,I}]$ (пошто је (4.4) копроизвод дијаграм). Провјеримо једнакости (4.1). Из напомене 4.1 имамо

$$\begin{aligned}(2\otimes\varepsilon)\circ(\eta\otimes 2) &= (2\otimes[\pi^1_{I,I},\pi^2_{I,I}])\circ(\eta\sqcup\eta) = [2\otimes\pi^1_{I,I}, 2\otimes\pi^2_{I,I}]\circ(\eta\sqcup\eta)\\ &= [(2\otimes\pi^1_{I,I})\circ\eta, (2\otimes\pi^2_{I,I})\circ\eta] = [\iota^1_{I,I},\iota^2_{I,I}] = \mathbb{1}_2.\end{aligned}$$

Другу једнакост у (4.1) доказујемо на сличан начин.

Пошто импликација (3) $\Rightarrow$ (4) слиједи директно, остаје још да покажемо (4) $\Rightarrow$ (1). Докажимо прво да је 0 нула објекат. Нека је φ стрелица из I у 0. За $A\in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ имамо стрелицу $A\otimes\varphi : A \to A\otimes 0$, а пошто је $A\otimes 0$ изоморфно са 0, имамо и стрелицу f из A у 0. Докажимо да је f јединствена. Из бифункторијалности тензора важи $(0\otimes\varphi)\circ f = (f\otimes 0)\circ(A\otimes\varphi)$. Пошто је $A\otimes 0$ иницијални објекат, стрелица $f\otimes 0$ је једнака јединственој стрелици $\kappa : A\otimes 0\to 0\otimes 0$. Такође, стрелица $0\otimes\varphi$ је инвертибилна, пошто су 0 и $0\otimes 0$ иницијални објекти. Ако означимо инверз од $0\otimes\varphi$ са ψ, имамо да је $f = \psi\circ\kappa\circ(A\otimes\varphi)$, одакле очигледно слиједи да је f јединствена.

Да бисмо доказали да су сви коначни копроизводи бипроизводи, довољно је доказати да су сви копроизводи парова објеката заправо бипроизводи. Претпоставимо да је $A\sqcup B$ копроизвод и покажимо да је он такође и производ. Пројекције $\pi^1_{A,B}$ и $\pi^2_{A,B}$ дефинишемо као у леми 4.2. За произвољан објекат C и стрелице $f : C\to A$ и $g : C\to B$, дефинишимо $h : C\to A\sqcup B$ са

$$h = [\iota^1_{A,B}\circ f, \iota^2_{A,B}\circ g]\circ\delta_C,$$

гдје је δ_C стрелица из леме 4.2. Да бисмо доказали комутативност производ дијаграма, користићемо напомене 4.1 и 4.2, као и лему 4.2, одакле слиједи

$$\begin{aligned}\pi^1_{A,B}\circ h &= \pi^1_{A,B}\circ[\iota^1_{A,B}\circ f, \iota^2_{A,B}\circ g]\circ\delta_C = [f, 0_{C,A}]\circ\delta_C\\ &= [f,\kappa_A]\circ(\mathbb{1}_C\sqcup\tau_C)\circ\delta_C = [f,\kappa_A] = f.\end{aligned}$$

Једнакост $\pi^2_{A,B}\circ h = g$ добијамо на сличан начин. Да бисмо доказали јединственост од h, претпоставимо да је $h' : C\to A\sqcup B$ нека стрелица таква да је $\pi^1_{A,B}\circ h' = f$ и $\pi^2_{A,B}\circ h' = g$. Дакле, имамо $\iota^1_{A,B}\circ\pi^1_{A,B}\circ h' = \iota^1_{A,B}\circ f$ и $\iota^2_{A,B}\circ\pi^2_{A,B}\circ h' = \iota^2_{A,B}\circ g$, што имплицира $[\iota^1_{A,B}\circ\pi^1_{A,B}\circ h', \iota^2_{A,B}\circ\pi^2_{A,B}\circ h']\circ\delta_C = h$. Из напомене 4.1 и леме 4.2 имамо

$$\begin{aligned}[\iota^1_{A,B}\circ\pi^1_{A,B}\circ h', \iota^2_{A,B}\circ\pi^2_{A,B}\circ h']\circ\delta_C &= [\iota^1_{A,B}\circ\pi^1_{A,B}, \iota^2_{A,B}\circ\pi^2_{A,B}]\circ(h'\sqcup h')\circ\delta_C\\ &= [\iota^1_{A,B}\circ\pi^1_{A,B}, \iota^2_{A,B}\circ\pi^2_{A,B}]\circ\delta_{A\sqcup B}\circ h' = h',\end{aligned}$$

одакле слиједи $h' = h$. □

4.3 Случај произвољних бипроизвода

У овом одјељку ћемо размотрити верзију теореме 4.3 која се тиче произвољних (не нужно коначних) бипроизвода. Прво ћемо прилагодити нотацију том случају, а затим модификовати резултате добијене у одјељку 4.1. Нека је $A = \coprod_{j\in J} A_j$ копроизвод са инјекцијама $\iota^j_A : A_j\to A$ за $j\in J$. За стрелице $f_j : A_j\to B$ означавамо са $[f_j]_{j\in J}$ јединствену стрелицу такву да је $[f_j]_{j\in J}\circ\iota^k_A = f_k$ за свако $k\in J$. Дуално, нека је $A = \prod_{j\in J} A_j$ производ са пројекцијама $\pi_A^j : A \to A_j$ за $j \in J$. Тада за стрелице $f_j : B \to A_j$ означавамо са $\langle f_j \rangle_{j\in J}$ јединствену стрелицу такву да је $\pi_A^k \circ \langle f_j \rangle_{j\in J} = f_k$ за свако $k \in J$. За стрелице u и v одговарајућег типа имамо $u \circ [f_j]_{j\in J} = [u \circ f_j]_{j\in J}$ и $\langle f_j \rangle_{j\in J} \circ v = \langle f_j \circ v \rangle_{j\in J}$.

За произвољан скуп J, *костепен* $J \cdot A$ је копроизвод $|J|$ копија од A, то јест, $J \cdot A = \coprod_{j\in J} A$. У стриктној моноидалној категорији $(\mathcal{A}, \otimes, I)$ са костепеном $J \cdot I$ кога чувају функтори $A \otimes \_$, можемо дефинисати костепен $J \cdot A$ као $A \otimes (J \cdot I)$. За стрелице $f_j : A \to B$, $j \in J$, можемо дефинисати $\coprod_{j\in J} f_j : J \cdot A \to J \cdot B$ као јединствену стрелицу такву да за свако $k \in J$ важи

$$\Big(\coprod_{j\in J} f_j\Big) \circ (A \otimes \iota^k_{J\cdot I}) = (B \otimes \iota^k_{J\cdot I}) \circ f_k.$$

Ако за свако $j, k \in J$ важи $f_j = f_k = f$, стрелицу $\coprod_{j\in J} f_j$ означавамо са $J \cdot f$ и важи да се $J \cdot f$ поклапа са $f \otimes (J \cdot I)$. За објекат C и стрелице $g_j : B \to C$ важи

$$[g_j]_{j\in J} \circ \coprod_{j\in J} f_j = [g_j \circ f_j]_{j\in J},$$
$$\Big(\coprod_{j\in J} g_j\Big) \circ \Big(\coprod_{j\in J} f_j\Big) = \coprod_{j\in J} g_j \circ f_j,$$
$$C \otimes \coprod_{j\in J} f_j = \coprod_{j\in J} C \otimes f_j.$$

Нека је $\mathcal{A}$ категорија са иницијалним објектом 0 и нека је $k \in J$ фиксирани индекс. Тада можемо дефинисати копроизвод

$$\coprod_{j\in J} A_j, \quad \text{гдје је} \quad A_j = \begin{cases} A, & j = k, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

као A. За $f : A \to B$, стрелицу

$$[f_j]_{j\in J} : A \to B, \quad \text{гдје је} \quad f_j = \begin{cases} f, & j = k, \\ \kappa_B, & \text{иначе}, \end{cases}$$

означавамо са $[f, \kappa_B]_k$ и имамо да је $[f, \kappa_B]_k = f$ за свако $k \in J$. Такође, ако је 0 нула објекат и $\tau_A : A \to 0$, тада стрелицу

$$\coprod_{j\in J} f_j : J \cdot A \to A, \quad \text{гдје је} \quad f_j = \begin{cases} \mathbb{1}_A, & j = k, \\ \tau_A, & \text{иначе}, \end{cases}$$

означавамо са $(\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A)_k$. Сада на исти начин на који смо доказали лему 4.2 добијамо и доказ сљедеће аналогне верзије те леме.

Лема 4.4. *Нека је $(\mathcal{A}, \otimes, I)$ стриктна моноидална категорија са нула објектом 0 и костепеном $J \cdot I$, које чувају функтори $A \otimes \_ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, за свако $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. Претпоставимо да објекат $J \cdot I$ има десни семи-дуал. Тада постоји стрелица $\delta_A : A \to J \cdot A$ таква да:*

(1) за $\tau_A : A \to 0$ и за свако $k \in J$ важи $(\mathbb{1}_A \sqcup \tau_A)_k \circ \delta_A = \mathbb{1}_A$;

(2) за $f : A \to B$ важи $(J \cdot f) \circ \delta_A = \delta_B \circ f$;

(3) *за копроизвод* A *важи* $[\iota_A^j \circ \pi_A^j]_{j\in J} \circ \delta_A = \mathbb{1}_A$, *гдје су пројекције* π_A^j *за* $j \in J$ *дефинисане аналогно као у леми 4.2.*

Коначно, користећи леме 4.1 и 4.4 и изводећи исте кораке као у доказу теореме 4.3, добијамо и доказ сљедећег аналогног резултата који се тиче произвољних бипроизвода.

Теорема 4.5. *Нека је* $(\mathcal{A}, \otimes, I)$ *стриктна моноидална категорија која посједује иницијални објекат* 0 *и произвољне костепене јединичног објекта* I, *које чувају функтори* $A \otimes \_ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, *за свако* $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$. *Тада су сљедећа тврђења еквивалентна:*

(1) 0 *је нула објекат и произвољни копроизводи који постоје у* $\mathcal{A}$ *су бипроизводи;*

(2) 0 *је нула објекат и за произвољан костепен* $J \cdot I$ *имамо да је* $(J \cdot I) \otimes (J \cdot I)$ *бипроизвод;*

(3) *објекат* 0 *и сви костепени од* I *су само-дуални;*

(4) *постоји стрелица из* I *у* 0 *и сви костепени од* I *имају десне семи-дуале.*

На крају овог одјељка дајемо неколико примјера.

Примјер 4.1. Посматрајмо категорију $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ векторских простора над пољем $\mathbb{R}$. Она је моноидална када узмемо да је $\otimes$ стандардни тензорски производ векторских простора (в. примјер 1.2). Иницијални објекат у $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ је тривијални векторски простор $\{0\}$, јединични објекат је $\mathbb{R}$, а копроизвод је директна сума $\oplus$. Из $V \otimes \{0\} \cong \{0\}$ и $V \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \cong (V \otimes \mathbb{R}) \oplus (V \otimes \mathbb{R})$ слиједи да функтор $V \otimes \_$ чува иницијални објекат $\{0\}$ и копроизвод $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Нека је $\{e_1, e_2\}$ база од $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Тада, ако дефинишемо $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ са

$$\eta(1) = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2,$$

и $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ са

$$\varepsilon(e_i \otimes e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

није тешко видјети да је објекат $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ само-дуалан. Такође, лако видимо да је и објекат $\{0\}$ само-дуалан. Сада из теореме 4.3 слиједи да је $\{0\}$ нула објекат и да је $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ категорија са коначним бипроизводима.

Ако је J бесконачан скуп, тада је костепен $V = \bigoplus_{j\in J} \mathbb{R}$ бесконачно-димензионални векторски простор. Покажимо да V нема десни семи-дуал. Заиста, ако претпоставимо да је W десни семи-дуал од V, тада постоје линеарна пресликавања $\eta : \mathbb{R} \to W \otimes V$ и $\varepsilon : V \otimes W \to \mathbb{R}$, таква да је композиција

$$V \xrightarrow{\mathbb{1}_V \otimes \eta} V \otimes W \otimes V \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathbb{1}_V} V \tag{4.6}$$

једнака $\mathbb{1}_V$. Претпоставимо да је $\{w_i \mid i \in A\}$ база од W и $\{v_j \mid j \in B\}$ база од V. Тада постоје коначни скупови $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ и реални бројеви $c_{i,j}$ такви да је

$$\eta(1) = \sum_{\substack{i\in A_0 \\ j\in B_0}} c_{i,j}(w_i \otimes v_j).$$

Нека је V' потпростор од V генерисан са $\{v_j \mid j \in B_0\}$. Тада је слика композиције (4.6) садржана у V'. Пошто је V' коначно-димензионалан, слиједи да је и слика композиције

(4.6) коначно-димезионална (уп. [10, Example 2.10.12]). Међутим, ово је у контрадикцији са претпоставком да је композиција (4.6) једнака $\mathbb{1}_V$. Дакле, V нема десни семи-дуал, па на основу теореме 4.5 закључујемо да категорија $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ нема бесконачне бипроизводе.

Примјер 4.2. Моноидална структура на категорији **Rel** скупова и бинарних релација је дефинисана Декартовим производом скупова (в. примјер 1.2). Иницијални објекат у **Rel** је празан скуп $\emptyset$, јединични објекат је било који синглтон $\{*\}$, а копроизвод је дисјунктна унија $\sqcup$. Из $X \times \emptyset \cong \emptyset$ и $X \times (Y \sqcup Z) \cong (X \times Y) \sqcup (X \times Z)$ слиједи да функтор $X \times \_$ чува иницијални објекат $\emptyset$ и све костепене јединичног објекта $\{*\}$. Из примјера 1.3 имамо да су сви објекти категорије **Rel** само-дуални. Специјално, објекат $\emptyset$ и сви костепени од $\{*\}$ су само-дуални. Сада из теореме 4.5 слиједи да је $\emptyset$ нула објекат и да категорија **Rel** има произвољне (коначне и бесконачне) бипроизводе.

Напомена 4.3. Из Меклејнове теореме о стриктификацији слиједи да је свака моноидална категорија еквивалентна стриктној моноидалној категорији (в. [28, XI.3, Theorem 1]). Примијетимо да смо у претходним примјерима заправо посматрали стриктификације уобичајених моноидалних категорија $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ и **Rel**.

Списак једнакости

Овдје наводимо најважније једнакости које се појављују у претходном тексту. Помоћу њих се могу дефинисати све класе категорија поменуте у овој тези.

(J1) За $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$ важи

$$f \circ \mathbb{1}_A = f = \mathbb{1}_B \circ f, \qquad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

(J2) За $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $g_1 : A' \to B'$ и $g_2 : B' \to C'$ важи

$$\mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \otimes B}, \qquad (f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) = (f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1),$$

(J3) За $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $g_1 : A' \to B'$ и $g_2 : B' \to C'$ важи

$$\mathbb{1}_A \oplus \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \oplus B}, \qquad (f_2 \oplus g_2) \circ (f_1 \oplus g_1) = (f_2 \circ f_1) \oplus (g_2 \circ g_1),$$

(J4) За $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $g_1 : A' \to B'$ и $g_2 : B' \to C'$ важи

$$A \multimap \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \multimap B}, \qquad (A \multimap g_2) \circ (A \multimap g_1) = A \multimap (g_2 \circ g_1),$$

(J5) За $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ и $h : C \to C'$ важи

$$((f \otimes g) \otimes h) \circ \alpha_{A,B,C} = \alpha_{A',B',C'} \circ (f \otimes (g \otimes h)),$$

(J6) $\alpha^{-1}_{A,B,C} \circ \alpha_{A,B,C} = \mathbb{1}_{A \otimes (B \otimes C)}, \quad \alpha_{A,B,C} \circ \alpha^{-1}_{A,B,C} = \mathbb{1}_{(A \otimes B) \otimes C}$,

(J7) За $f : A \to A'$ важи $f \circ \lambda_A = \lambda_{A'} \circ (I \otimes f)$,

(J8) $\lambda^{-1}_A \circ \lambda_A = \mathbb{1}_{I \otimes A}, \quad \lambda_A \circ \lambda^{-1}_A = \mathbb{1}_A$,

(J9) За $f : A \to A'$ важи $f \circ \rho_A = \rho_{A'} \circ (f \otimes I)$,

(J10) $\rho^{-1}_A \circ \rho_A = \mathbb{1}_{A \otimes I}, \quad \rho_A \circ \rho^{-1}_A = \mathbb{1}_A$,

(J11) За $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ важи $(g \otimes f) \circ \sigma_{A,B} = \sigma_{A',B'} \circ (f \otimes g)$,

(J12) $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \mathbb{1}_{A \otimes B}$,

(J13) За $g : B \to B'$ важи

$$(A \multimap (A \otimes g)) \circ \eta_{A,B} = \eta_{A,B'} \circ g,$$

(J14) За $g : B \to B'$ важи

$$g \circ \varepsilon_{A,B} = \varepsilon_{A,B'} \circ (A \otimes (A \multimap g)),$$

(J15) За $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ важи

$$(f \oplus g) \circ \iota^1_{A,B} = \iota^1_{A',B'} \circ f, \qquad (f \oplus g) \circ \iota^2_{A,B} = \iota^2_{A',B'} \circ g,$$

(J16) За $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$ важи

$$f \circ \pi^1_{A,B} = \pi^1_{A',B'} \circ (f \oplus g), \qquad g \circ \pi^2_{A,B} = \pi^2_{A',B'} \circ (f \oplus g),$$

(J17) $(A \multimap \varepsilon_{A,B}) \circ \eta_{A,A\multimap B} = \mathbb{1}_{A\multimap B}, \qquad \varepsilon_{A,A\otimes B} \circ (A \otimes \eta_{A,B}) = \mathbb{1}_{A\otimes B},$

(J18) $\pi^1_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} = \mathbb{1}_A, \quad \pi^2_{A,B} \circ \iota^2_{A,B} = \mathbb{1}_B,$

(J19) $\pi^2_{A,B} \circ \iota^1_{A,B} = 0_{A,B}, \quad \pi^1_{A,B} \circ \iota^2_{A,B} = 0_{B,A},$

(J20) $\iota^1_{A,B} \circ \pi^1_{A,B} + \iota^2_{A,B} \circ \pi^2_{A,B} = \mathbb{1}_{A\oplus B},$

(J21) За $f_1, f_2, f_3, f : A \to B$ важи

$$f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3, \qquad f_1 + f_2 = f_2 + f_1, \qquad f + 0_{A,B} = f,$$

(J22) За $f_1, f_2 : A \to B$, $g : B \to C$, $g_1, g_2 : A' \to B'$ и $f : B' \to C'$ важи

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f, \qquad g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2,$$

(J23) За $f : A \to A'$ важи

$$0_{A',B} \circ f = 0_{A,B}, \qquad f \circ 0_{B,A} = 0_{B,A'},$$

(J24) $\alpha_{A\otimes B,C,D} \circ \alpha_{A,B,C\otimes D} = (\alpha_{A,B,C} \otimes D) \circ \alpha_{A,B\otimes C,D} \circ (A \otimes \alpha_{B,C,D}),$

(J25) $A \otimes \lambda_B = (\rho_A \otimes B) \circ \alpha_{A,I,B},$

(J26) $\rho_A = \lambda_A \circ \sigma_{A,I},$

(J27) $\alpha_{C,A,B} \circ \sigma_{A\otimes B,C} \circ \alpha_{A,B,C} = (\sigma_{A,C} \otimes B) \circ \alpha_{A,C,B} \circ (A \otimes \sigma_{B,C}),$

(J28) $0_{0,0} = \mathbb{1}_0,$

(J29) $\rho_{A^*} \circ (A^* \otimes \varepsilon_A) \circ \alpha^{-1}_{A^*,A,A^*} \circ (\eta_A \otimes A^*) \circ \lambda^{-1}_{A^*} = \mathbb{1}_{A^*},$

(J30) $\lambda_A \circ (\varepsilon_A \otimes A) \circ \alpha_{A,A^*,A} \circ (A \otimes \eta_A) \circ \rho^{-1}_A = \mathbb{1}_A,$

(J31) $\mathbb{1}^\dagger_A = \mathbb{1}_A, \quad (g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger, \quad f^{\dagger\dagger} = f,$

(J32) $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger, \quad \alpha^\dagger_{A,B,C} = \alpha^{-1}_{A,B,C}, \quad \lambda^\dagger_A = \lambda^{-1}_A, \quad \rho^\dagger_A = \rho^{-1}_A,$

(J33) $\sigma^\dagger_{A,B} = \sigma_{B,A},$

(J34) $\sigma_{A,A^*} \circ \varepsilon^\dagger_A = \eta_A,$

(J35) $\iota^1_{A,B} = (\pi^1_{A,B})^\dagger, \quad \iota^2_{A,B} = (\pi^2_{A,B})^\dagger.$

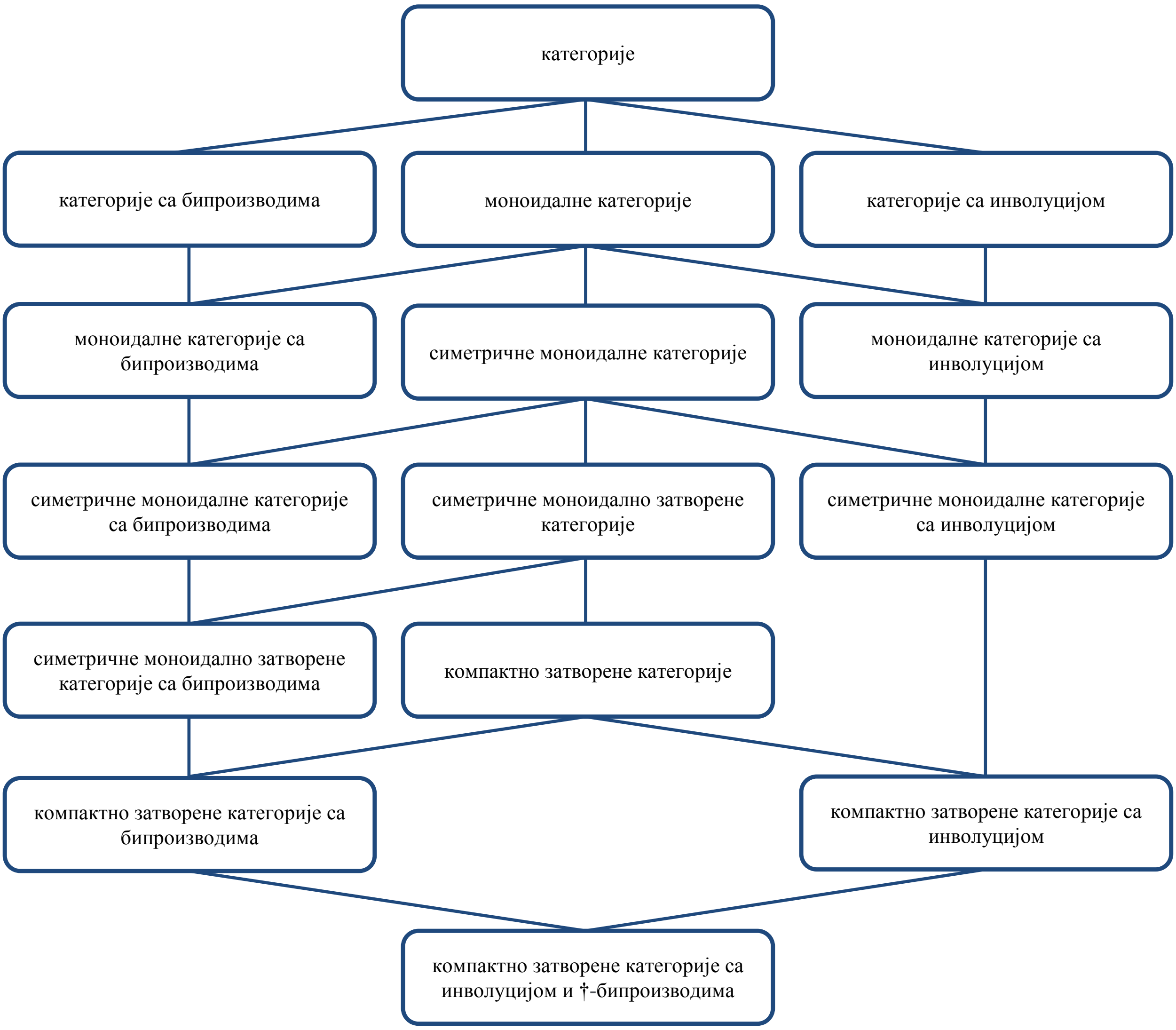
Списак категорија

Наредна табела садржи све класе категорија које се помињу у овој тези. За сваку од њих наводимо карактеристичне једнакости са претходног списка које важе у тој класи, као и типичне примјере.

класа	једнакости	примјери
категорије	(J1)	**Set**, **Top**
моноидалне категорије	(J1)-(J2), (J5)-(J10), (J24)-(J25)	**Set**, **Top**
симетричне моноидалне категорије	(J1)-(J2), (J5)-(J12), (J24)-(J27)	**Set**, **Top**
симетричне моноидално затворене категорије	(J1)-(J2), (J4)-(J14), (J17), (J24)-(J27)	**Set**, $\mathbf{Vect}_K$
компактно затворене категорије	(J1)-(J2), (J5)-(J12), (J24)-(J27), (J29)-(J30)	$\mathbf{FinVect}_K$, **Rel**
категорије са бипроизводима	(J1), (J3), (J15)-(J16), (J18)-(J23), (J28)	$\mathbf{Vect}_K$, **Cmd**
моноидалне категорије са бипроизводима	(J1)-(J3), (J5)-(J10), (J15)-(J16), (J18)-(J25), (J28)	$\mathbf{Vect}_K$, **Cmd**
симетричне моноидалне категорије са бипроизводима	(J1)-(J3), (J5)-(J12), (J15)-(J16), (J18)-(J28)	$\mathbf{Vect}_K$, **Cmd**
симетричне моноидално затворене категорије са бипроизводима	(J1)-(J28)	$\mathbf{Vect}_K$, **Cmd**
компактно затворене категорије са бипроизводима	(J1)-(J3), (J5)-(J12), (J15)-(J16), (J18)-(J30)	$\mathbf{FinVect}_K$, **Rel**
категорије са инволуцијом	(J1), (J31)	**Hilb**, **1Cob**
моноидалне категорије са инволуцијом	(J1)-(J2), (J5)-(J10), (J24)-(J25), (J31)-(J32)	**Hilb**, **1Cob**
симетричне моноидалне категорије са инволуцијом	(J1)-(J2), (J5)-(J12), (J24)-(J27), (J31)-(J33)	**Hilb**, **1Cob**
компактно затворене категорије са инволуцијом	(J1)-(J2), (J5)-(J12), (J24)-(J27), (J29)-(J34)	**FinHilb**, **1Cob**
компактно затворене категорије са инволуцијом и †-бипроизводима	(J1)-(J3), (J5)-(J12), (J15)-(J16), (J18)-(J35)	**FinHilb**, **Rel**

Хијерархија категорија које се помињу у тези

На сљедећем дијаграму је представљена хијерархија (класа) категорија које се помињу у тези. Дијаграм читамо на сљедећи начин: ако је класа X спојена узлазном линијом са класом Y, то значи да је X поткласа од Y.



Литература

[1] S. Abramsky and B. Coecke. “A categorical semantics of quantum protocols”. In: *Proceedings of the 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. Washington: IEEE Computer Society, 2004, pp. 415–425.

[2] S. Abramsky and R. Duncan. “A categorical quantum logic”. In: *Mathematical Structures in Computer Science* 16 (2006), pp. 469–489.

[3] C. Balteanu et al. “Iterated monoidal categories”. In: *Advances in Mathematics* 176 (2003), pp. 277–349.

[4] Dj. Baralić, J. Ivanović, and Z. Petrić. “A simple permutoassociahedron”. In: *Discrete Mathematics* 342 (2019).

[5] Dj. Baralić et al. “Proofs and surfaces”. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 171 (2020), pp. 1–42.

[6] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[7] K. Došen and Z. Petrić. “Coherence for star-autonomous categories”. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 141 (2006), pp. 225–242.

[8] K. Došen and Z. Petrić. “Isomorphic objects in symmetric monoidal closed categories”. In: *Mathematical Structures in Computer Science* 7 (1997), pp. 639–662.

[9] K. Došen and Z. Petrić. *Proof-Theoretical Coherence*. London: King’s College London Publications, 2004.

[10] P. Etingof et al. *Tensor Categories*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2015.

[11] R. Garner and D. Schäppi. “When coproducts are biproducts”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 161 (2016), pp. 47–51.

[12] G. Gentzen. “Investigations into logical deduction”. In: *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Ed. by M.E. Szabo. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969, pp. 68–131.

[13] G. Gentzen. “Untersuchungen über das logische Schließen”. In: *Mathematische Zeitschrift* 39 (1935), pp. 176–210, 405–431.

[14] C. Heunen. “Categorical quantum models and logics”. PhD thesis. Amsterdam University Press: Radboud University Nijmegen, 2009.

[15] R. Houston. “Finite products are biproducts in a compact closed category”. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 212 (2008), pp. 394–400.

[16] M.C. Iovanov. “When Π is isomorphic to $\oplus$”. In: *Communications in Algebra* 34 (2006), pp. 4551–4562.

[17] M. Kapranov. "The permutoassociahedron, Mac Lane's coherence theorem and asymptotic zones for the KZ equation". In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 85 (1993), pp. 119–142.

[18] M. Karvonen. "Biproducts without pointedness". In: *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques* 61 (2020), pp. 229–238.

[19] G.M. Kelly. "An abstract approach to coherence". In: *Coherence in Categories*. Berlin: Springer, 1972, pp. 106–147.

[20] G.M. Kelly. "On MacLane's Conditions for Coherence of Natural Associativities, Commutativities, etc." In: *Journal of Algebra* 1 (1964), pp. 397–402.

[21] G.M. Kelly and S. Mac Lane. "Coherence in closed categories". In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 1 (1971), pp. 97–140.

[22] G.M. Kelly and M.L. Laplaza. "Coherence for compact closed categories". In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 19 (1980), pp. 193–213.

[23] J. Kock. *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[24] J. Laird. "Fixed Points In Quantitative Semantics". In: *Proceedings of the 31st Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. New York: Association for Computing Machinery, 2016, pp. 347–356.

[25] J. Laird et al. "Weighted relational models of typed lambda-calculi". In: *Proceedings of the 28th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. Washington: IEEE Computer Society, 2013, pp. 301–310.

[26] J. Lambek. "Deductive Systems and Categories I: Syntactic Calculus and Residuated Categories". In: *Mathematical Systems Theory* 2 (1968), pp. 237–318.

[27] J. Lambek. "Deductive systems and categories II: Standard constructions and closed categories". In: *Category Theory, Homology Theory and their Applications I*. Berlin: Springer, 1969, pp. 76–122.

[28] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998.

[29] S. Mac Lane. "Natural associativity and commutativity". In: *Rice University Studies* 49 (1963), pp. 28–46.

[30] L. Méhats and S. Soloviev. "Coherence in SMCCs and equivalences on derivations in IMLL with unit". In: *Annals of Pure and Applied Logic* 147 (2007), pp. 127–179.

[31] M. Pagani, P. Selinger, and B. Valiron. "Applying Quantitative Semantics to Higher-Order Quantum Computing". In: *Proceedings of the 41st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*. New York: Association for Computing Machinery, 2014, pp. 647–658.

[32] Z. Petrić and M. Zekić. "Coherence for closed categories with biproducts". In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 225 (2021), pp. 1–17.

[33] *Речник срйскоīа језика*. Измењено и поправљено издање. Нови Сад: Матица српска, 2011.

[34] P. Selinger. "A survey of graphical languages for monoidal categories". In: *New Structures for Physics*. Berlin: Springer, 2009, pp. 289–355.

[35] P. Selinger. "Dagger Compact Closed Categories and Completely Positive Maps". In: *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 170 (2007), pp. 139–163.

[36] S. Soloviev. "On the conditions of full coherence in closed categories". In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 69 (1990), pp. 301–329.

[37] S. Soloviev. "Proof of a conjecture of S. Mac Lane". In: *Annals of Pure and Applied Logic* 90 (1997), pp. 101–162.

[38] V.G. Turaev. *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds.* 2nd ed. Berlin/New York: De Gruyter, 2010.

[39] R. Voreadou. *Coherence and non-commutative diagrams in closed categories.* Providence: American Mathematical Society, 1977.

[40] M. Zekić. "Biproducts in monoidal categories". In: *Publications de l'Institut Mathématique* 110 (124) (2021), pp. 1–9.

Биографија аутора

Младен Зекић је рођен 5. новембра 1987. године у Власеници (СФР Југославија). Основну школу „Јован Дучић” је завршио у Шековићима, а Гимназију „Милорад Влачић” у Власеници. Као средњошколац је посјећивао семинаре математике у Истраживачкој станици Петница код Ваљева, што је имало доста утицаја на његово образовање. Математички факултет Универзитета у Београду је завршио 2011. године, са просјечном оцјеном 8.78. Мастер рад под насловом *Риманова хипотеза за елиптичке криве над коначним пољима* одбранио је 2014. године на истом факултету.

Радио је као наставник у Гимназији и средњим стручним школама у Власеници, затим као наставник у Основној школи „Никола Тесла” у Скели код Обреновца и као сарадник у настави на Математичком факултету у Београду. Тренутно је запослен на Математичком институту САНУ.

До сада је објавио сљедеће радове:

- Š. Dautović and M. Zekić, *Intuitionistic unprovability*, Matematički Vesnik 71 (2019), 180-189.
- Dj. Baralić, P-L. Curien, M. Milićević, J. Obradović, Z. Petrić, M. Zekić and R.T. Živaljević, *Proofs and surfaces*, Annals of Pure and Applied Logic 171 (2020), 1-42.
- Z. Petrić and M. Zekić, *Coherence for closed categories with biproducts*, Journal of Pure and Applied Algebra 225 (2021), 1-17.
- Š. Dautović and M. Zekić, *Fuzzy logic and enriched categories*, Iranian Journal of Fuzzy Systems 18 (2021), 1-11.
- M. Zekić, *Biproducts in monoidal categories*, Publications de l'Institut Mathématique 110 (124) (2021), 1-9.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ____

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, ___________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ______________________________

Број индекса ______________________________

Студијски програм ______________________________

Наслов рада ______________________________

Ментор ______________________________

Потписани/а ______________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе свиi који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____