ЦЕНА 20 ДИНАРА

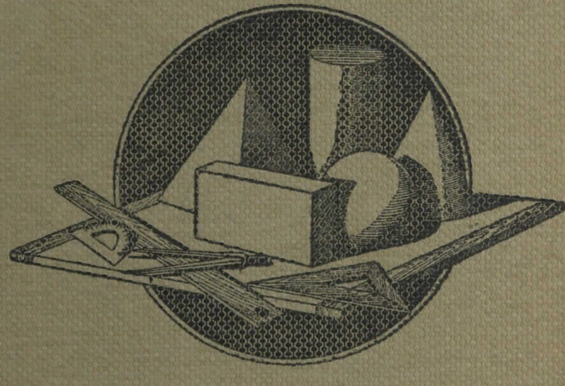
Р. Д. Обрадовић: ГЕОМЕТРИЈА за I

ОЈЕ Д. ОБРАДОВИЋ
професор

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА I РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ТРЕЋЕ НЕПРОМЕЊЕНО ИЗДАЊЕ



По препоруци Главног просв. савета, овај уџбеник одобрен је од г. Министра просвете. IV Бр. 9275 од 29-VI-1938 године.

1940
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА
ТОМЕ ЈОВАНОВИЋА И ВУЈИЋА, БЕОГРАД
„ЗЕЛЕНИ ВЕНАЦ“

БЕОГРАД
За штампарију „ЗОРА“, Космајска ул. 24 – Телефон 29-920
Јосип Климпл, Варшавска 36
1940

САДРЖАЈ

I ДЕО:
ГЕОМЕТРИСКИ ОБЛИЦИ

II ДЕО:
ПЛОЖАЈИ ГЕОМЕТРИСКИХ ОБЛИКА

I ДЕО

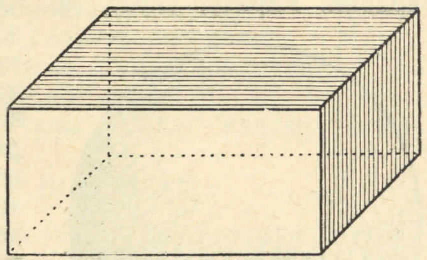
ГЕОМЕТРИСКИ ОБЛИЦИ

1. ТЕЛО — РАЗЛИКЕ МЕЂУ ТЕЛИМА

Све ствари и жива бића зваћемо телима. Тела имају једну заједничку особину, а то је да заузимају известан простор. Не може се замислити ни најмање тело да постоји у простору а да не заузима један његов део. Можемо, дакле, рећи: **тело је све што заузима неки простор.**

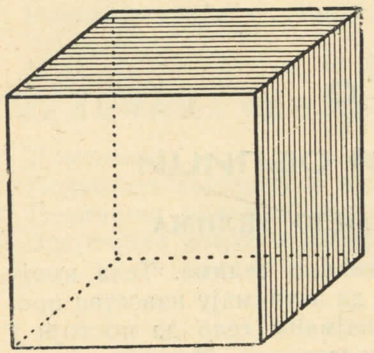
Ако посматрамо многобројна тела око нас, уочићемо лако да се она разликују **по величини.** На пример зрно песка, бубица, куглица, цигла и друга ситнија тела мала су према нама; већа од њих смо ми сами, још веће је дрво, кућа, а од ових је још већи брег, планина. А зар није и цела наша Земља као огромна лопта једно тело? И она се налази у простору као и друга небеска тела, месец, звезде, сунце. Ако овако посматрамо, морамо доћи до закључка да нема нити може бити тела које би испунило цео простор, јер простор је толико велики да нигде нема краја. Простор је, дакле, неограничен. Зато за свако тело кажемо да запрема **део простора. Тај део простора који запрема неко тело зовемо његовом запремином.**

Тела се могу разликовати не само по величини, него и по **облику.** Посматрајмо разне облике тела. Дрво, кућа, човек, брег... толико је различитих тела око нас да бисмо готово тврдили да их и нема сличних по облику. Но погледајмо боље: кутија за оловке, сандук, учионица, катедра, зар сва ова тела немају облик као што је на сл. 1? У геометрији ћемо свако тело које има такав облик звати **квадар.**



Сл. 1. — Квадар.

Многи знају шта су коцкице са сликама за ређање, или коцкице за играње. Такав облик имају и неки сандуци, кутије и друга нека тела. Такво једно тело нацртано је на сл. 2, а у геометрији ћемо га звати **коцка.**

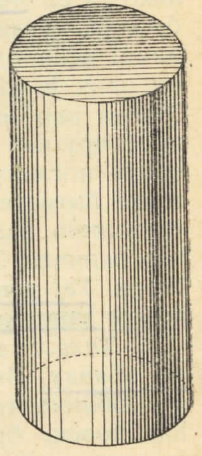


Сл. 2. — Коцка.

Поред тела у облику квадра и коцке има их као цев, телеграфски стуб, округла оловка и друга. Сва та тела имају сличан облик, онакав као што је показан на сл. 3. Тело оваквог облика зовемо у геометрији **ваљак,** јер личи на ваљак за набијање, или **облица,** јер је обло.

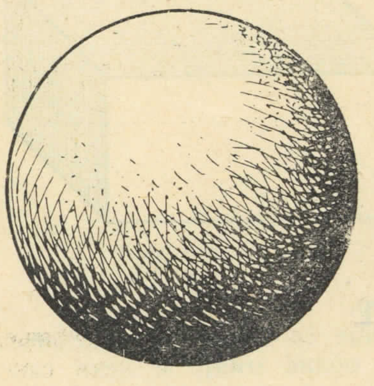
На сл. 4 показано је тело познато свима, које се у геометрији као и у обичном животу зове **лопта.** Таква је гумена лопта за играње, фудбал, глобус, наранџа и др.

Посматраћемо сада још једну разлику између тела, разлику коју сви знамо али нам не би одмах пала на памет. То је разлика у местима или положајима које тела заузимају. Могу ли два тела истовремено стајати на истом месту, заузимати исти простор, исти положај? Јасно је да морамо прво померити једно тело да бисмо на његово место ставили друго. Зато кажемо да се тела међу собом морају разликовати **по положају.**



Сл. 3 — Ваљак (облица).

Поред разлике у величини, облику и положају, тела се могу разликовати још по многим другим особинама. На пример по боји, тврдоћи, мирису, укусу, по томе да ли су жива бића или мртве ствари, итд. Али све ове многобројне разлике између тела геометрија не узима у обзир; она проучава само наведене три особине: **облик тела, величину и њихов положај.**



Сл. 4. — Лопта.

2. ГЕОМЕТРИСКО ТЕЛО

Облик тела, величина и положај зову се **геометриске особине тела,** а наука која их проучава зове се **геометрија**

(реч геометрија грчког је порекла а значила је раније земљомерство).

У геометрији проучавамо ове особине тела посматрајући их на самим телима. Међутим, знамо да тела која би имала само ове три особине и ниједну другу, не постоје. На пример, свако тело има своју тежину јер се састоји од извесног материјала, а геометрије се не тиче ни тежина ни материјал. Тела, дакле, која би имала само те три особине можемо само замислити. Тако замишљена тела зовемо **геометриским телима.** Најтачније ћемо описати геометриско тело ако кажемо да је то **потпуно ограничен део простора.**

Уместо геометриског тела ми узимамо стварно тело да на њему посматрамо геометриске особине његове. Ово тело онда зовемо **модел геометриског тела.** Модел може бити од кога било материјала. На пример, особине коцке можемо посматрати на једној коцки од камена, дрвета, картона итд.

Вежбања

1) Шта је запремина тела?

2) Да ли под запремином неког тела разумемо материју из које се оно састоји?

3) Наведи разлике које примећујеш између гуме и табле.

4) Нађи примере тела истог облика а различите величине.

5) Нађи примере тела једнаких запремина (једнаке величине) а различних по облику.

6) Која си тела видео у облику коцке, квадра, ваљка, лопте?

7) Дај геометриско име сваком од следећих тела: тегла, кутија за цигарете, лубеница, катедра, зрно грозда, оловка, стубови на фасади зграда.

8) Које особине тела проучава геометрија?

9) Опиши својим речима геометриско тело.

10) Која смо геометриска тела досада поменули?

11) Шта је модел геометриског тела?

12) Нацртај слободном руком коцку, квадар, ваљак, лопту.

3. ПОВРШИНА

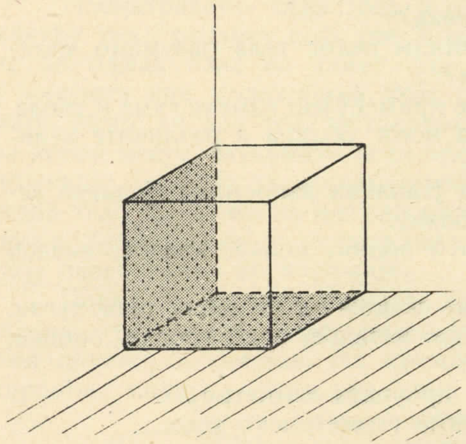
Површина стола је **равна.** Исто тако равна је и површина зида, плафона, површина воде кад је мирна. Ове ћемо површине нарочито запазити да их разликујемо од других као што су површина наборане завесе, јастука, лопте, облице и др., које ћемо звати **криве** или **обле површине.**

Посматрајмо лоптину површину. Она у ствари ограничава лопту, или можемо рећи да је она граница између лопте и осталог простора. На коцки видимо као границе само равне површине, исто тако на квадру, док је ваљак (облица) ограничен двема равним површинама и једном облом.

Према овим граничним површинама геометриска тела делимо у две групе. Она тела која су, као квадар и коцка, **ограничена само равним површинама** називамо **рогљастим телима,** а сва остала **облим телима.** На пример ваљак је обло тело, јер није ограничен само равним површинама: поред двеју равних има као границу и једну облу површину.

Ставимо коцку на сто. Њена гранична равна површина на столу мања је од равне површине стола. Ако сада сто изврнемо и ставимо на под, видећемо да је равна површина стола само део површине пода. Има ли можда и већих површина од оне на столу или поду? Сетимо се само тениског или футбалског игралишта, или мирног језера. Њихове равне површине несумњиво су веће од оних које смо посматрали у соби. Можемо замислити још веће равне површине и од ових; оне би опет биле делови још већих површина. Размишљајући на овај начин долазимо до закључка да равну површину замишљамо тако великом да нема крајева. Равна површина је неограничена. А граничне површине које видимо на коцки, у соби итд., јесу само **делови равних** површина.

Ово можемо претставити ако коцку ставимо у угао собе (сл. 5): тада се јасно види да су граничне површине коцке само делови већих површина.

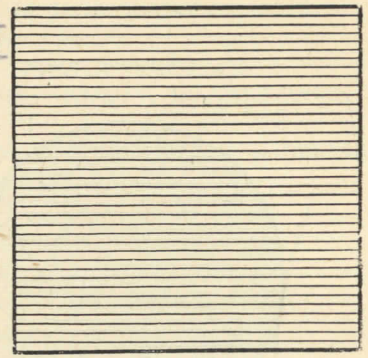


Сл. 5. — Коцкине стране су делови равних површина.

4. ГЕОМЕТРИСКА СЛИКА

Ако коцку ставимо на хартију и повлачимо писаљком око њене стране која лежи на хартији, видећемо кад дигнемо коцку, да смо ограничили један део равне површине. Тако ограничен део равне површине зовемо **квадрат** (сл. 6). Полажући и осталих пет коцкиних страна на тај квадрат, уверићемо се да га оне поклапају. После овога можемо

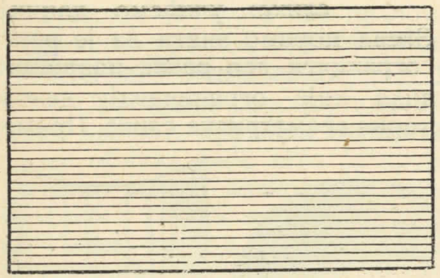
рећи да је коцка **рогљасто геометриско тело ограничено са шест квадрата.**



Сл. 6. — Квадрат.

Ако коцка лежи на равној подлози, онда ону њену страну на којој лежи и ону наспрам ње називамо **основама,** док су друге четири стране **бочне стране.** И основе и бочне стране заједно чине **површину коцке.**

Ставимо сада квадар на хартију и обележимо оловком границе његове стране прислоњене на хартију. Кад дигнемо квадар видећемо ограничен део равни као што је на сл. 7. Тако ограничен део равни зове се **правоугаоник.**

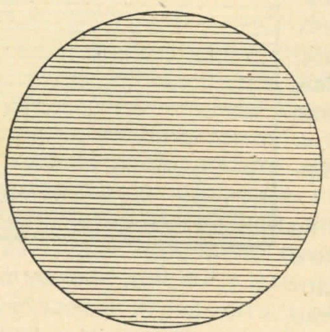


Сл. 7. — Правоугаоник.

Супротна страна квадра поклапа се тачно са тим правоугаоником, што значи да су једнаке; али се не поклапају са њим све стране као код коцке. Код квадра су сваке две супротне стране једнаки правоугаоници, о чему се уверавамо као и горе: цртањем и поклапањем. За квадар сад можемо рећи да је **рогљасто геометриско тело ограничено са шест правоугаоника од којих су по два супротна једнака.**

Као код коцке, и код квадра разликујемо две **основе,** а то су она страна на којој квадар лежи и страна супротна од ње, и **бочне стране,** остале четири стране. Обе основе и све бочне стране чине заједно **површину квадра.**

Цртајући на исти начин једну страну ваљка, и то ону на којој он може сигурно стајати, добијамо ограничен део равни као на сл. 8 који зовемо **круг.** И друга, супротна страна ваљка је исти такав круг. Ове стране су **основе ваљка.** Међутим, ону облу површину која ограничава ваљак са свију осталих страна, не можемо на исти начин нацртати. О њој ћемо говорити доцније. Засад треба да знамо да се она зове **омотач ваљка.** Обе основе и омотач чине заједно **површину ваљка.**



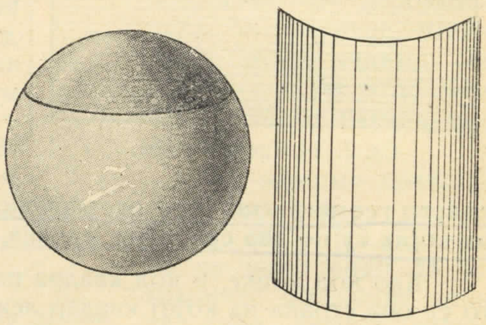
Сл. 8. — Круг.

После овога можемо рећи да је **ваљак обло геометриско тело ограничено са два једнака круга и једном облом, ваљкастом површином.**

Квадрат, правоугаоник и круг потпуно су ограничени делови равних површина. Ми их називамо **геометриским сликама,** и то да бисмо истакли да су то делови равних а не облих површина, кажемо да су то **равне геометриске слике.** Нису само квадрат, правоугаоник и круг равне геометриске слике: учићемо доцније и слике друкчијих облика. Засад морамо знати да је **равна геометриска слика потпуно ограничен део равне површине.**

Има геометриских слика које ограничавају делове облих површина: то су **просторне геометриске слике.** Пример такве слике можемо добити ако на лопти нацртамо кружну линију (сл. 9, I): део лоптине површине који ова линија ограничава чини једну просторну слику.

Модел просторне слике добијамо и кад лист хартије мало савијемо, као што је показано на сл. 9, II.



II

Сл. 9. — Модели просторних слика.

Вежбања

1) Каквих површина има?
2) Наброј неколико равних и облих површина које видиш у соби.
3) Како делимо тела према граничним површинама?
4) Шта су рогљаста а шта обла тела?

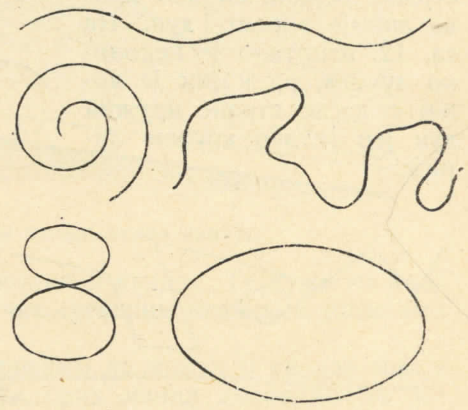
5) Која рогљаста а која обла тела знаш?
6) Шта је равна геометриска слика?
7) Које равне геометриске слике знаш?
8) Нацртај слободном руком квадрат, правоугаоник и круг.
9) Шта су основе а шта бочне стране коцке и квадра?
10) Шта су основе а шта омотач ваљка?
11) Шта је коцка?
12) Шта је квадар?
13) Шта је ваљак?
14) Шта је површина коцке, квадра, ваљка, лопте?

5. ЛИНИЈА

Кад смо цртали квадрат или круг, ми смо повлачили **линије.** Оне су нам ограничавале геометриске слике, или што је исто, раздвајале су један део површине од другог. Зато кажемо: **линија раздваја један део површине од другог.**

Ако посматрамо линију која ограничава круг и оне које су границе квадрата или правоугаоника, видећемо да је круг ограничен **кривом,** док су квадрат и правоугаоник ограничени **правим линијама.**

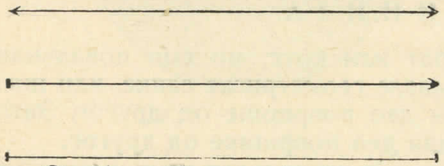
Ону криву линију, или краће **криву,** која ограничава круг, зваћемо **кружном линијом.** Има кривих линија и друкчијег облика него што је кружна линија. Свако је од нас нацртао много разноликих кривих. На сл. 10 показано је неколико таквих линија: неке су од њих правилнијег облика и лепше за око. Примећујемо и то да су неке од њих затворене, јер ограничавају део равни са свих страна. Међу њима добро је уочити доњу криву с десне стране (сл. 10) због њеног значаја у земљопису, јер Земља око сунца прави такву путању. Оваква затворена крива назива се **елипса.**



Сл. 10. — Криве линије.

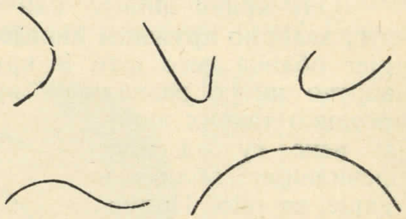
Као модел праве линије може нам послужити затегнут конац, канап, врло танка шипка и др. Ако рукама затегнемо конац ми његову дужину помицањем руку можемо повећати или смањити, а да конац увек буде затегнут. Колико можемо повећати дужину тако затегнутог конца? Својим рукама зацело не много. Али га у дворишту, као канап за рубље, можемо више продужити. На телефонским стубовима видимо жице, моделе правих линија, још много дуже. Продужавајући овако праву све више и више, видимо да она може бити продужена на обе стране колико нам је воља. Зато кажемо: праву линију замишљамо да је са обе стране неограничена. А границе квадрата и правоугаоника које смо цртали јесу само **делови правих линија.** Такав један **део праве линије ограничен са обе стране зове се дуж.**

Ако праву замислимо само са једне стране ограничену, док са друге нема краја, онда је називамо **зраком** (тако је зовемо зато што личи на сунчев зрак, који је с једне стране ограничен сунцем, а с друге се протеже у недоглед). Ми ћемо праву линију, или краће **праву,** зрак и дуж цртати као на сл. 11, тако да стрелица показује на којој се страни права замишља као неограничена.



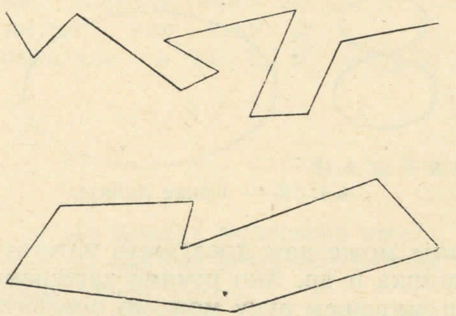
Сл. 11. — Права, зрак и дуж.

Док са обе стране ограничен део праве линије зовемо дуж, дотле са обе стране ограничен део криве линије зовемо **лук.** На сл. 12. нацртано је неколико лукова, од којих је доњи с десне стране **кружни лук** јер је део кружне линије.



Сл. 12. — Лукови кривих линија.

Поред правих и кривих има и **изломљених линија.** Оне се састоје из делова правих линија. На сл. 13 нацртана је једна **отворена изломљена линија** и једна **затворена изломљена линија.**



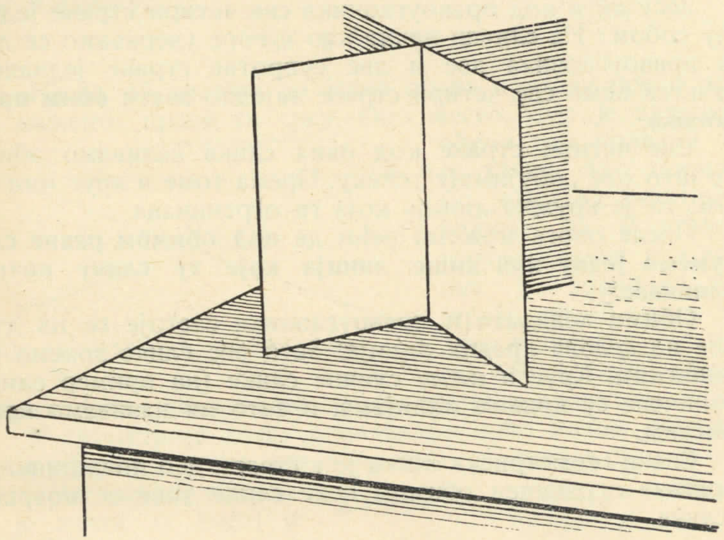
Сл. 13. — Изломљене линије.

Примећујемо још да затворена изломљена линија ограничава потпуно део површине, дакле ограничава једну геометриску слику.

6. ЛИНИЈА КАО ПРЕСЕК ПОВРШИНА

Праву линију можемо претставити још на један начин. Узмимо лист хартије, пресавимо га и посматрајмо га у положају као што је на сл. 14. Ми сада видимо две равни (управо њихове моделе) које се стичу у једној правој линији. Ова права заједничка је обема равнима. Ако замислимо да су ове равни продужене кроз њихову заједничку праву (на сл. 14 извучено цртама), разумећемо зашто се у геометрији каже да се те две равни тада „секу" (оне у ствари пролазе једна кроз другу, „секу" једна другу). Ту праву по којој се секу две равни зовемо краће **пресек равни.** Зато можемо рећи да **праву линију замишљамо као пресек двеју равни.**

Погледајмо два суседна зида у соби: равне површине тих зидова секу се по правој која се јасно види између њих.



Сл. 14. — Пресек равни: права линија.

Исто тако видимо то и на коцки и квадру. Те дужи на коцки и квадру које су заједничке суседним странама, називамо **ивицама.**

Бројањем се лако уверавамо да коцка и квадар имају по дванаест ивица. Мерењем ових ивица долазимо до закључка да су све ивице коцке једнаке, док код квадра нису. Има ли и квадар једнаких ивица? По колико?

Оне ивице коцке и квадра које ограничавају основе зовемо **основним ивицама,** а оне које стоје са стране **бочним ивицама.** Колико је основиних, а колико бочних **ивица** код коцке? А код квадра?

Кад се две равне површине секу, видели смо да је пресек права линија. Кад се пак две обле (криве) површине секу, или једна равна и једна обла, пресек је обично крива линија. На пример омотач облице и њена основа (обла и равна површина) имају у пресеку кружну, дакле криву линију.

7. ОБИМ РАВНЕ СЛИКЕ

Направимо модел једног квадрата од картона, ставимо га на хартију и тачно извуцимо оловком дуж једне његове стране. (Граничне дужи квадрата зваћемо његовим **странама).** Мерењем (поклапањем) се уверавамо да су и друге стране квадрата исте толике дужи. Све четири стране квадрата, дакле, једнаке су међу собом. Све стране квадрата заједно чине **обим квадрата.**

Јесу ли и код правоугаоника све четири стране једнаке међу собом? На сличан начин као и горе уверавамо се да су код правоугаоника две и две супротне стране једнаке. И код њега ћемо све четири стране заједно звати **обим правоугаоника.**

Све четири стране код ових слика називамо обимом зато што оне „обујимају" слику. Према томе и круг има свој обим: то је кружна линија која га ограничава.

После овога можемо рећи да **под обимом равне слике разумемо једну или више линија које ту слику потпуно ограничавају.**

Обими квадрата и правоугаоника састоје се из дужи, дакле из делова правих линија. Зато ове слике зовемо **праволиниским.** Круг и њему сличне слике (на пример елипса) ограничене су кривим линијама, и зато их називамо **криволиниским.**

Свака геометриска слика је у ствари део површине. Део површине ограничен обимом неке слике зове се **површина** те слике.

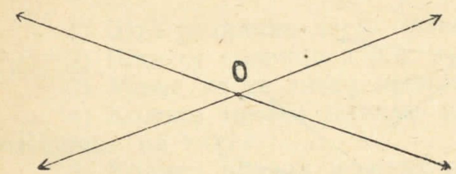
Вежбања

1) Каквих линија има?
2) Шта је пресек равних површина?
3) Покажи на неком предмету криву линију као пресек површина.
4) Нацртај неколико отворених и затворених кривих линија.
5) Шта је права, зрак, дуж?
6) Шта је лук? Шта је кружни лук?
7) Шта нам може послужити као модел праве линије?
8) Нацртај неколико изломљених линија.
9) Које дужи називамо ивицама?

10) Зашто ваљак и лопта немају ивица?
11) Шта су основине а шта бочне ивице код коцке и квадра?
12) Има ли више основиних или бочних ивица код коцке и квадра?
13) Спој две једнаке коцке тако да им се по једна страна тачно поклопи. Колико ивица видиш на тако добијеном телу?
14) Шта је обим слике?
15) Како делимо равне геометриске слике према обиму?
16) Које смо праволиниске а које криволиниске слике до сада поменули?
17) Шта је површина слике?
18) Нацртај слободном руком квадрат, правоугаоник, круг и елипсу.

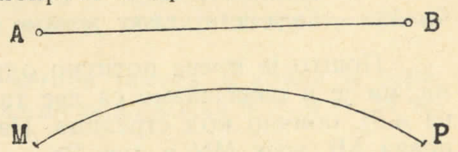
8. ТАЧКА

На сл. 15 видимо да једна права прелази преко друге. Ми кажемо: праве се секу. Оно место које је заједничко обема тим правама зове се **тачка.** Ако посматрамо једну од тих правих, видимо да је поменута тачка дели на два зрака: она је **гранична тачка** (крај) сваког зрака. Како дуж и лук (сл. 16) имају са обе стране границе, кажемо: **тачке замишљамо и као границе дужи или лука.**



Сл. 15. — Пресек правих: тачка.

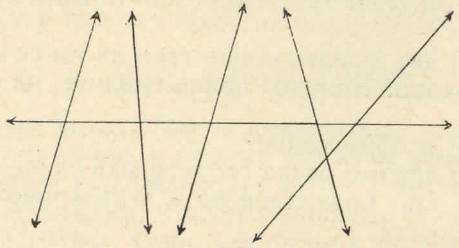
У геометрији тачку означавамо врло малим кружићем, јачим убодом оловке или попречном цртицом. Ако је више тачака на слици, потребно је знати о којој је реч. Зато поред сваке тачке стављамо велико слово, обично латиницом. На сл. 15 пресек правих је тачка О, а на сл. 16 границе дужи су тачке А и В, док су границе лука тачке М и Р.



Сл. 16. — Крајеви дужи и лука: тачке.

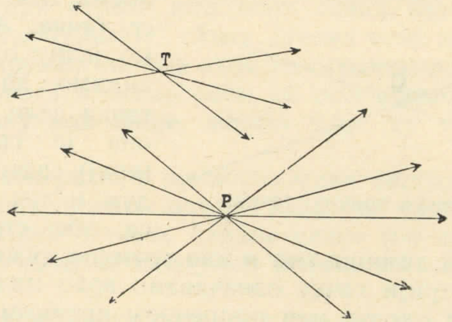
Пошто једну праву можемо другим правама пресећи на колико хоћемо места (сл. 17), кажемо да се на једној правој налази (замишља) безброј много тачака.

Видели смо да се две праве секу у једној тачки. То можемо и овако рећи: кроз једну тачку пролазе две праве. Може ли и више од две праве пролазити кроз једну тачку? На сл. 18 показано је да кроз тачку Т пролазе три, а кроз тачку Р пет правих; али нама је из тога јасно да кроз једну тачку можемо повући и више, колико год хоћемо правих. Зато кажемо: **кроз једну тачку може пролазити безбројно много правих.**



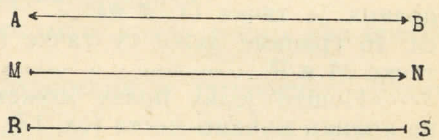
Сл. 17. — Праву можемо пресећи са колико хоћемо других правих. Према томе, на правој замишљамо безброј тачака.

Конац затегнут рукама може да послужи као модел праве линије. Ако места где конац држимо рукама узмемо као две тачке, видимо да се **кроз две тачке може повући (замислити) само једна права линија.**



Сл. 18. — Кроз једну тачку можемо повући колико хоћемо правих.

Пошто је права потпуно одређена двема својим тачкама, ми је и означавамо са две тачке које узимамо где било на њој, обично код стрелица. На сл. 19 тако су обележени права AB, зрак MN и дуж RS.



Сл. 19. — Права, зрак и дуж: обележавање.

Ако се по правој AB крећемо од тачке A ка тачки B, кажемо да се крећемо у једном **смеру** или **смислу.** Али се по тој правој можемо кретати и од тачке B ка тачки A. То је **супротан смер** првоме. Код сваке праве разликујемо, дакле, два смера или смисла. И зрак и дуж могу имати два смера, што зависи од тога како по зраку односно дужи замишљамо кретање.

Неке тачке на рогљастим телима имају нарочито име. То су оне тачке у којима се стичу по три ивице квадра или коцке. Њих зовемо **теменима.** Колико темена има коцка? А колико квадар? Исто тако теменима називамо и тачке у којима се стичу по две стране квадрата и правоугаоника.

9. ОСНОВНИ ГЕОМЕТРИСКИ ОБЛИЦИ

Из досадашњег излагања видели смо да се потпуно ограничен део простора назива геометриско тело; потпуно ограничен део површине геометриска слика; са обе стране ограничена линија назива се дуж односно лук; а сама граница дужи (лука) назива се тачка.

Геометриско тело, геометриска слика, дуж (односно лук) и тачка називају се основним геометриским облицима. И тело, и слика, и дуж (лук) имају своје величине, могу се мерити и делити. Само је тачка геометриски облик који нема своје величине, који, дакле, није ни дељив ни мерљив.

Вежбања

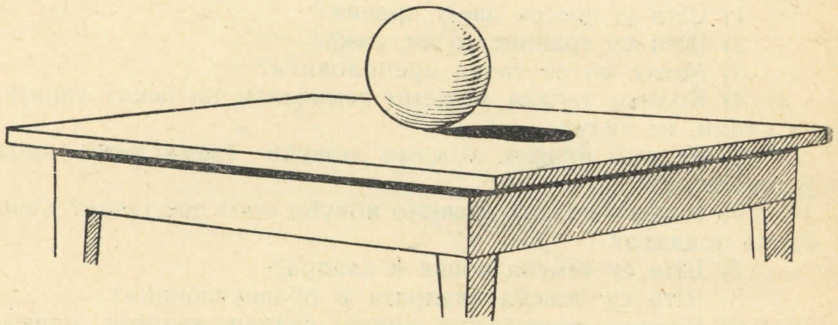
1) Шта је пресек двеју правих?
2) Шта су границе дужи, лука?
3) Може ли се тачка преполовити?
4) Колико тачака можемо замислити на некој линији, на слици, на телу?
5) Колико правих можемо повући (замислити) кроз једну тачку?
6) Колико правих можемо повући кроз две тачке? Како би то показао?
7) Шта су темена коцке и квадра?
8) Шта су темена квадрата и правоугаоника?
9) Колико темена има коцка, квадар, квадрат, правоугаоник?
10) Сваки квадрат има четири темена, а коцка је ограничена са шест квадрата. Има ли онда коцка $6 \times 4 = 24$ темена? Зашто?
11) Ако на кружној линији означиш две тачке, шта си учинио са њом?
12) Колико има основних геометриских облика и који су?
13) Кажи шта знаш о величини основних геометриских облика.

II ДЕО

ПОЛОЖАЈИ ГЕОМЕТРИСКИХ ОБЛИКА

1. ХОРИЗОНТАЛНА РАВАН

Равне површине пода, плафона, зида, стола, табле и друге које видимо око нас, разликују се по томе што заузимају различите положаје у простору. Врло много различитих положаја могу заузимати равне површине. Да бисмо то показали, узмимо један раван картон (модел равни) и мењајмо му положаје у простору: можемо га ставити у толико различитих положаја колико нам је воља. Но међу тим мно-



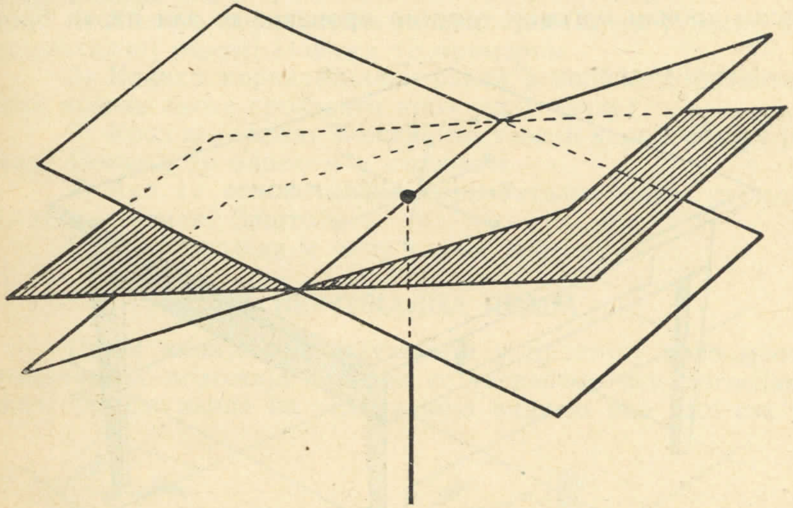
Сл. 20. — Лопта стављена на хоризонталну површину стола остаје у миру.

гобројним положајима ми ћемо посматрати неке важније. Узмимо онај положај равне површине у коме се налази површина пода или стола. Ако на такву раван ставимо лопту (сл. 20) ова се неће откотрљати. **Сваку равну површину која има такав положај да се лопта стављена на њу не би откотрљала, зовемо хоризонталном равни.**

Такав положај има и површина мирне воде, па се за раван у таквом положају каже још и да је **водоравна.**

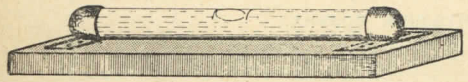
Прободимо један картон (модел равни) једном чиодом, тако да се глава чиоде (модел тачке) приљуби уз картон. Положај тог картона можемо мењати по вољи, тако да чи-

ода буде увек на њему (сл. 21). Из тога закључујемо да се **кроз једну тачку може поставити безбројно много равни.** Али међу свима тим положајима само је један хоризонталан (на сл. 21 означен цртама). Зато кажемо: **кроз једну тачку може се поставити само једна хоризонтална раван.**



Сл. 21. — Кроз једну тачку може пролазити само једна хоризонтална раван.

Да ли је нека раван хоризонтална или не, испитујемо једном нарочитом справом, која се зове **либела** (сл. 22). Она се састоји из једне стаклене цеви затворене са обе стране и испуњене водом, али не потпуно. Мехурић ваздуха који се лепо види и живо креће при покретању либеле, треба да дође тачно на средину кад се либела постави на хоризонталну раван.



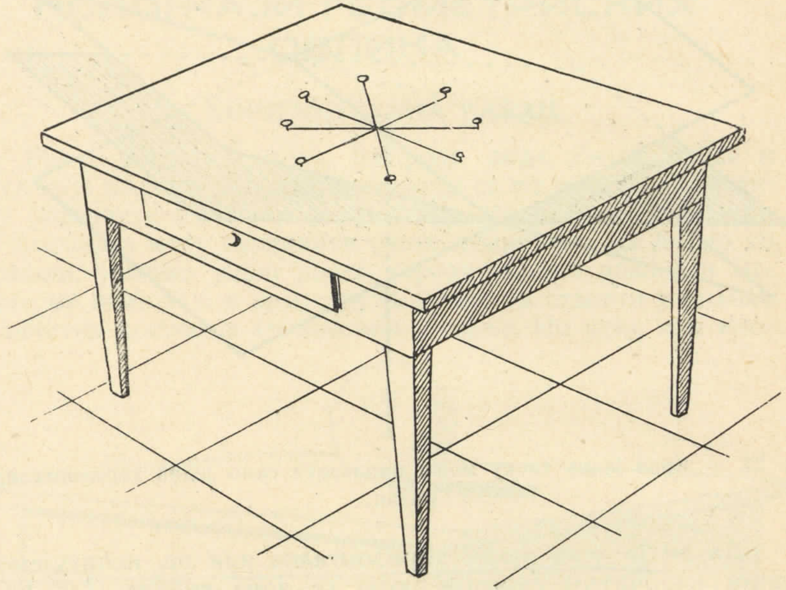
Сл. 22. — Либела.

2. ХОРИЗОНТАЛНА ПРАВА

Ставимо оловку на хоризонтално постављен сто, или штап на мирну воду. И оловка и штап могу бити у различитим положајима стављени на сто, односно на воду. Но сви ти положаји имају заједничко то што и оловка и штап леже тада потпуно у тим хоризонталним равнама. Оловка и штап модели су правих линија. Зато све **праве линије које леже у**

хоризонталним равнима зовемо хоризонталним правама или хоризонталама.

Кроз једну тачку, видели смо, можемо поставити (замислити) само једну хоризонталну раван; а колико хоризонталних правих можемо поставити кроз једну тачку? Да бисмо добили одговор, узмимо произвољан али паран број



Сл. 23. — Кроз једну тачку може пролазити безбројно много хоризонталних правих.

чиода, и за сваке две вежимо парче конца; затим их пободимо по површини стола, тако да се затегнути конци секу сви у једној тачки (сл. 23). Ови затегнути конци претстављају делове хоризонталних правих, јер леже у хоризонталној равни, па како овај оглед можемо извршити са толико конаца колико нам је воља, закључујемо: **кроз једну тачку можемо замислити да пролази неограничен број хоризонталних правих линија.**

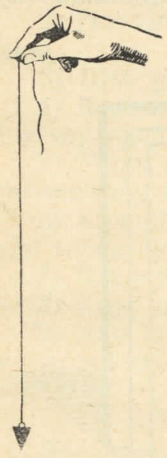
И хоризонталне равни и хоризонтале можемо посматрати на рогљастим телима, ако су у за то погодном положају. На пример, ако су коцка и квадар стављени на сто, онда су њихове основе делови хоризонталних равни, а основине ивице — хоризонталне дужи.

Вежбања

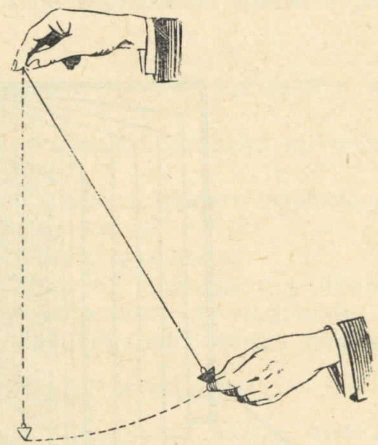
1) Кад кажемо за раван да је хоризонтална?
2) Шта је хоризонтална права?
3) Покажи у учионици хоризонталне равни и праве које видиш.
4) Колико хоризонтала можемо замислити у једној хоризонталној равни? Покажи то примером.
5) Колико хоризонталних равни а колико хоризонталних правих може пролазити кроз једну тачку?
6) Кроз коју праву можемо поставити хоризонталну раван? Покажи то оловком и картоном.
7) Ако су основе коцке хоризонталне, какве су њене основине ивице? Зашто?
8) Како изгледа и чему служи либела?

3. ВЕРТИКАЛНА ПРАВА

Праве линије могу заузимати у простору врло много различитих положаја. О томе се уверавамо ако погледамо многобројне ивице на телима која видимо око нас: све те



Сл. 24. — Висак.



Сл. 25. — Висак у вертикалном и косом положају.

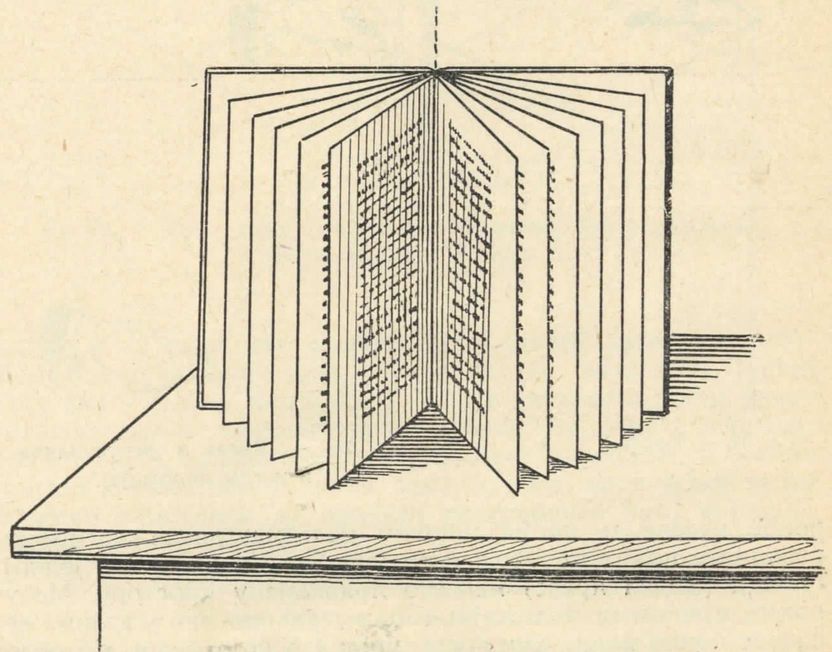
ивице налазе се на различитим местима, дакле заузимају различите положаје. Можда то још боље видимо ако једној оловци (модел праве) мењамо положаје у простору. Међу овим различитим положајима посматраћемо оне у којима се налазе бочне ивице учионице, шипка о којој виси лустер и њима сличне. Сваку праву која заузима такав положај зваћемо **вертикалном правом** или краће **вертикалом.**

На сл. 24 показана је справа која се зове **висак.** Њу употребљавају зидари при грађењу кућа, и она служи за одређивање да ли је нека раван или нека права вертикална. То је у ствари један тежи предмет (обично гвожђе) обешен о конац, тако да кад се конац умири ми видимо да заузима усправан положај као и боче ивице учионице, дакле вертикалан. Зато кажемо: **вертикална права је она која има положај као конац умиреног виска.**

Замислимо да је место где конац држимо руком једна тачка. Биће нам тада јасно да се не може замислити још која права да пролази кроз ту тачку, а да и она буде вертикална. Оглед на сл. 25 показује нам да висак изведен из првобитног усправног положаја није више вертикалан, већ **кос.** Из тога закључујемо: **кроз једну тачку може се поставити (замислити) само једна вертикала.**

4. ВЕРТИКАЛНА РАВАН

Међу многим различитим положајима равних површина ми смо истакли оне које имају хоризонталне равни. За геометрију су од нарочитог значаја још неки положаји: то су они које заузимају површине зидова учионица (куће,



Сл. 26. — Листови књиге у вертикалном положају показују да кроз једну праву може пролазити безбројно много вертикалних равни.

собе) и остале усправне површине. Такве равни зваћемо **вертикалним равнима.**

На слици 26 види се књига постављена у такав положај да њени листови (модели равних површина) стоје вертикално и пролазе кроз ивицу књиге, која је такође вертикална а претставља нам праву. Према томе можемо рећи: **свака раван која пролази кроз вертикалну праву зове се вертикална раван.**

Из слике 26 можемо закључити и то да **кроз једну вертикалну праву можемо поставити (замислити) безбројно много вертикалних равни,** јер поред листова на слици можемо замислити још толико других колико нам је воља, а да сви пролазе кроз исту вертикалну праву.

Кад је коцка (или квадар) стављена на хоризонтално постављен сто, видели смо да су тада њене основе и основине ивице хоризонталне. Сада то посматрање можемо допунити, јер видимо да су бочне њене стране као и бочне ивице вертикалне.

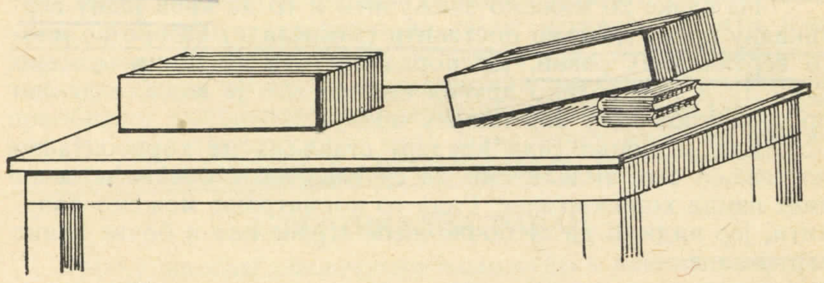
Вежбања

1) Шта је вертикала а шта вертикална раван?
2) Покажи у учионици које вертикалне праве и равни видиш.
3) Шта је висак?
4) Колико вертикалних равни може пролазити кроз једну вертикалну праву? Пример.
5) Може ли се вертикална раван поставити кроз сваку хоризонталну праву? Покажи!
6) Колико вертикалних правих а колико вертикалних равни може пролазити кроз једну тачку?
7) Како је постављена табла у учионици?
8) Који положај има шипка од лустера у учионици?
9) Ако коцку ставимо на хоризонталну површину, колико хоризонталних а колико вертикалних ивица она има?

5. НОРМАЛНЕ ПРАВЕ И РАВНИ

Досад смо испитивали за геометрију важне положаје које може заузети нека права или нека раван. Ти су положаји, као што смо видели, хоризонталан и вертикалан. Сада треба да видимо какав положај може имати **једна права према другој,** или **једна раван према другој равни,** или најзад **једна права према равни.** Посматраћемо, значи, њихове **међусобне положаје.**

Ставимо један квадар (или коцку) на хоризонтално постављен сто. У том положају предња његова основина ивица (као и све остале основине ивице) је хоризонтална, док је суседна (која полази из истог темена) бочна ивица вертикалнa. Искренимо сада квадар из тог положаја, на пример подметањем каквог предмета под његову основу (сл. 27). Нити је сада она основина ивица хоризонтална, нити је више посматрана бочна ивица вертикална. Ипак, има нешто што се код тих ивица није променило, јер је квадар остао истог облика и величине. То што се није променило, то је положај једне од тих ивица према другој, тј. њихов **међусобни положај.**



Сл. 27. — Нормалне ивице квадра остају нормалне, ма у ком положају квадар био.

Ово што смо приметили код ивица квадра важи несумњиво и за праве линије уопште, јер су ивице само делови правих. **Две праве које имају међусобни положај као две суседне ивице квадра, ма у ком положају овај био, зову се нормалне или управне праве.** Две посматране нормалне ивице леже у истој равни (стране квадра) и имају једну заједничку тачку (теме квадра). Из тога излази да се две нормалне праве морају сећи и лежати у истој равни.

Посматрајући на исти начин две суседне стране тога квадра (основу и једну бочну страну) долазимо до закључка да се ни њихов **међусобни положај** не мења при искретању квадра. Како су стране квадра делови равних површина, то кажемо: **две равни су нормалне или управне, ако међу собом заузимају положај као две суседне стране квадра, ма у ком положају овај био.**

Запазимо сада на нашем квадру основу и једну бочну ивицу. Кад је основа хоризонтална, бочна ивица је вертикална, а кад ова ивица заузме хоризонталан положај, основа ће доћи у вертикалан. У искренутом положају квадра то више није случај, али је њихов **међусобни положај** остао непромењен. Због тога кажемо да су **права и раван нормалне (управне) једна на другој ако је њихов међусобни положај као између бочне ивице и основе квадра, ма у ком положају овај био.**

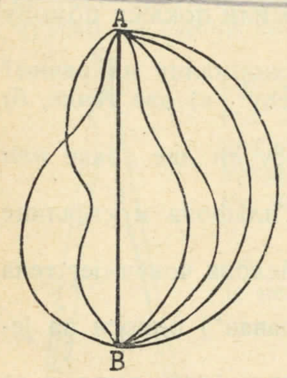
Лако ћемо наћи примере нормалних правих и равни. У учионици, на пример, површине два суседна зида јесу

нормалне једна на другој, исто тако површине пода и зида; једна бочна и једна суседна основина ивица јесу нормалне, итд. Може ли се у учионици наћи пример нормалних правих и равни, али да ниједна од њих није ни хоризонтална ни вертикална ?

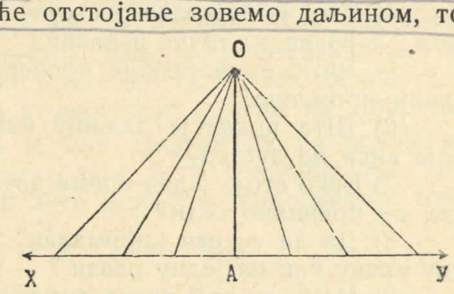
Пошто су квадрат и правоугаоник граничне слике коцке и квадра, то излази да су **код квадрата и правоугаоника сваке две суседне стране нормалне.**

6. ДАЉИНА ТАЧКЕ ОД ТАЧКЕ, ОД ПРАВЕ И ОД РАВНЕ

Две тачке можемо спојити помоћу безбројно много кривих линија, али само једном правом (односно једном дужи). Најкраће отстојање између двеју тачака несумњиво је дуж која их спаја (сл. 28). Како у геометрији најкраће отстојање зовемо даљином, то кажемо: **даљина између двеју тачака је дуж која их спаја.**

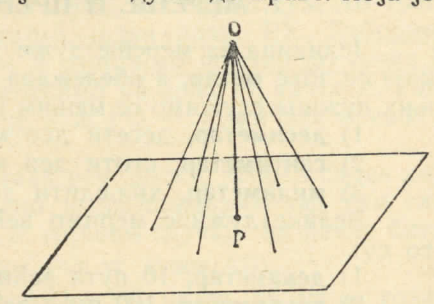


Сл. 28. — Најкраће отстојање тачке од тачке је дуж која их спаја.



Сл. 29. — Најкраће отстојање тачке од праве је нормала повучена из тачке на праву.

На сл. 29 нацртана је једна права (ХУ) и једна тачка (О) ван ње. Из те тачке повучено је више дужи до праве. Која је од њих најкраћа? На слици је најкраћа извучена дебље (ОА). Она је међутим нормална на правој, о чему се можемо уверити помоћу једног квадрата или коцке, за чије две суседне ивице већ знамо да су нормалне. (Како?). Ми зато кажемо: **даљина од једне тачке до праве јесте нормала повучена из те тачке на праву.**



Сл. 30. — Најкраће отстојање тачке од равни је нормала повучена из тачке на раван.

На исти начин посматраћемо најкраћу од свију дужи које се из једне тачке (О) могу повући на једну раван. На сл. 30 то је дуж ОР, и једина која је нормална на тој равни.

Зато кажемо: **даљина од тачке до равни јесте нормала повучена из те тачке на раван.**

Из ових огледа учимо још и то да се **из једне тачке на једну праву, или на једну раван може повући само једна нормала.**

Вежбања

1) Кад кажемо да су нормалне: а) две равни, б) две праве, в) права и раван?

2) Могу ли две нормалне праве бити: а) обе хоризонталне, б) обе вертикалне, в) једна хоризонтална а једна вертикална, г) ни хоризонталне ни вертикалне? За сваки од ових случајева нађи пример у учионици или покажи помоћу две оловке.

3) Где у учионици видиш праву нормалну на равни?

4) Шта је најкраће отстојање између: а) две тачке, б) тачке и праве, в) тачке и равни?

5) Чиме би најлакше проверио јесу ли две праве или равни нормалне?

6) Шта показује даљину између плафона и сијалице која виси на лустеру?

7) Како стоје један према другом делови човечијег тела кад он правилно седи?

8) Да ли се реч „нормалан" („управан") односи на једну праву или на једну раван?

9) Могу ли три праве пролазити кроз једну тачку а да свака од њих буде нормална на обема другим? Покажи такав пример на познатом телу.

10) Како стоје међу собом три стране коцке (квадра) које се стичу у једном њеном темену?

7. МЕРЕЊЕ И ПРЕНОШЕЊЕ ДУЖИ

Јединица за мерење дужи јесте једна одређена дужина која се зове **метар,** а обележава се словом m. За мерење мањих дужина служимо се мањим јединицама од метра, а то су:

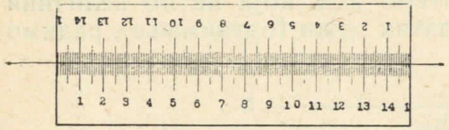
1) **десиметар,** десети део метра, ознака dm;
2) **сантиметар,** стоти део метра, ознака cm;
3) **милиметар,** хиљадити део метра, ознака mm.

Велике дужине меримо већим јединицама од метра, а то су:

1) **декаметар,** 10 пута већи од метра, ознака dkm;
2) **хектометар,** 100 пута већи од метра, ознака hm;
3) **километар,** 1000 пута већи од метра, ознака km.

Справа коју употребљавамо за цртање дужи зове се **лењир** (или **врстар).** Лењиром можемо и мерити дужи, јер је једна његова страна подељена у сантиметре и милиметре.

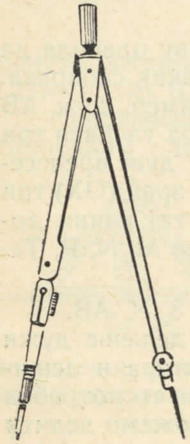
Потребно је некад проверити да ли је лењир добар за цртање, да ли је исправан. То се може и оком испитати, јер ако га гледамо дуж ивице по којој цртамо, неравнине и кривине можемо приметити. Али сигурније је да га испробамо на овај начин. Нацртајмо дуж његове ивице праву, затим га око те праве пребацимо тако да иста ивица буде окренута нацртаној правој (сл. 31). Ако сада дуж исте ивице повлачимо оловку, може се десити да се тако извучене праве не поклапају. У том случају закључујемо да лењир није исправан.



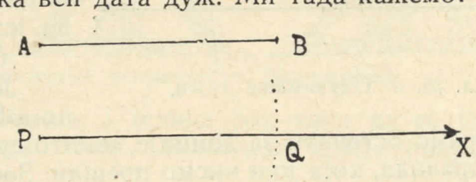
Сл. 31. — Испитивање исправности лењира.

Дужи можемо упоређивати и без мерења. То чинимо справом која се зове **шестар** (сл. 32). Шестар служи још и за описивање кружних линија. Шестар је исправан ако завртањ држи краке шестара тако, да ови остану чврсто у положају у који их доведемо.

Нека је дат задатак да на неком месту нацртамо дуж исте величине као што је нека већ дата дуж. Ми тада кажемо: треба дату дуж „пренети" на друго место. На сл. 33 дуж AB треба пренети. Зато прво нацртајмо један зрак, PX. Забодимо оштрицу шестара у тачку A и отворимо шестар до тачке B. Тај исти отвор шестара пренесимо на зрак од тачке P. Тако смо добили тачку Q. Тада је дуж PQ = дужи AB, и наш је задатак готов.



Сл. 32. — Шестар.



Сл. 33. — „Преношење" дужи.

Да не бисмо често писали реч „дуж", испред слова која ту дуж обележавају, усвојено је да стављамо над тим словима малу положену црту. У горњем случају ће дакле бити:

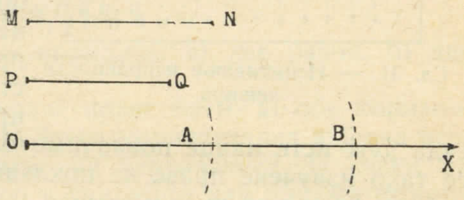
$\overline{PQ} = \overline{AB}$ (дуж PQ = дужи AB).

Ако су дате две дужи, $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ на сл. 34, па се тражи да нацртамо дуж која ће по величини бити једнака њиховом збиру, ми кажемо: треба те две дужи сабрати. Нацртајмо један зрак (OX на сл. 34) и пренесимо прво једну (коју било) дуж, рецимо $\overline{MN}$. Добили смо тачку A. Од тачке A у истом смеру пренесимо дуж PQ, па добијамо тачку B. Тада је сигурно

$$\overline{OB} = \overline{MN} + \overline{PQ}.$$

Ако се тражи да нацртамо дуж која ће по величини бити једнака разлици двеју датих дужи (одузимање), радимо овако. На зрак OX (сл. 35) пренесемо прво већу дуж AB, тако да је $\overline{OE} = \overline{AB}$. Затим из тачке E, али у супротном смеру (идући ка тачки O) пренесемо мању дуж CD. Тада је $\overline{OF}$ остатак, дакле:

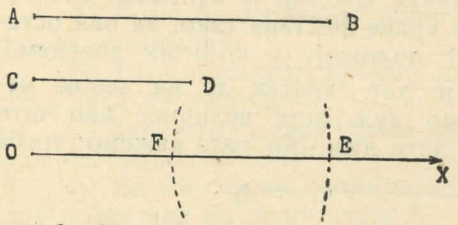
$$\overline{OF} = \overline{AB} - \overline{CD}.$$



Сл. 34. — Сабирање дужи.

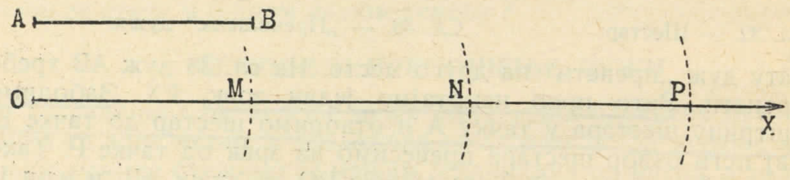
Увећавање дате дужи два или више пута (множење) вршимо на основу правила да множење није ништа друго него сабирање једнаких сабирака. Ако, на пример, дуж AB (сл. 36) треба увећати три пута, ми ту дуж пренесемо на један зрак (OX) три пута, и на тај начин добијамо тачке M, N, P. Тада је:

$$\overline{OP} = 3 \times \overline{AB}.$$



Сл. 35. — Одузимање дужи.

Једино дељење дужи помоћу шестара и лењира морамо оставити за доцније, пошто су нам за то потребна нека правила, која још нисмо прешли. Засада можемо делити



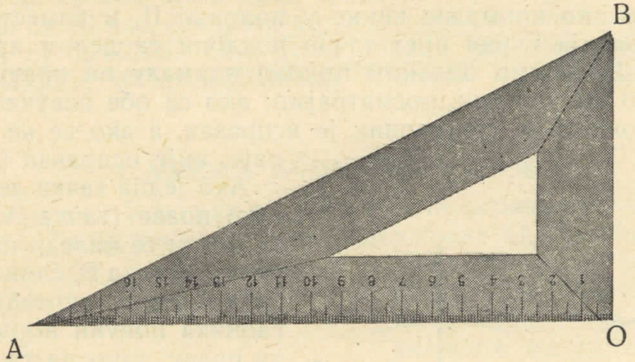
Сл. 36. — Множење дужи.

дату дуж рачунским путем. Прво дату дуж измеримо лењиром, и број сантиметара (или којих других дужинских јединица) поделимо на онолико делова, колико се тражи. Онда помоћу лењира означимо на тој дужи одговарајуће подеоне тачке.

8. ЦРТАЊЕ НОРМАЛА

Нормале (нормалне праве) цртамо справом која је показана на сл. 37 а зове се **троугаоник.** Две стране троугаоника нормалне су међу собом. Обично се троугаоник прави тако да му је краћа нормална ивица два пута дужа од веће

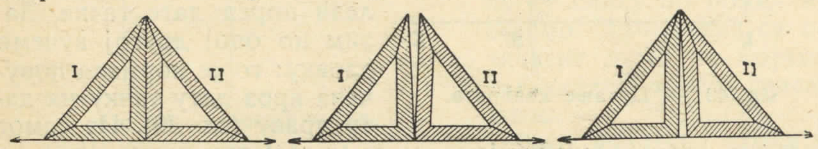
Да не бисмо често писали реч „нормалан", у геометрији имамо знак који нам ту реч замењује. Тај знак изгледа као



Сл. 37. — Троугаоник.

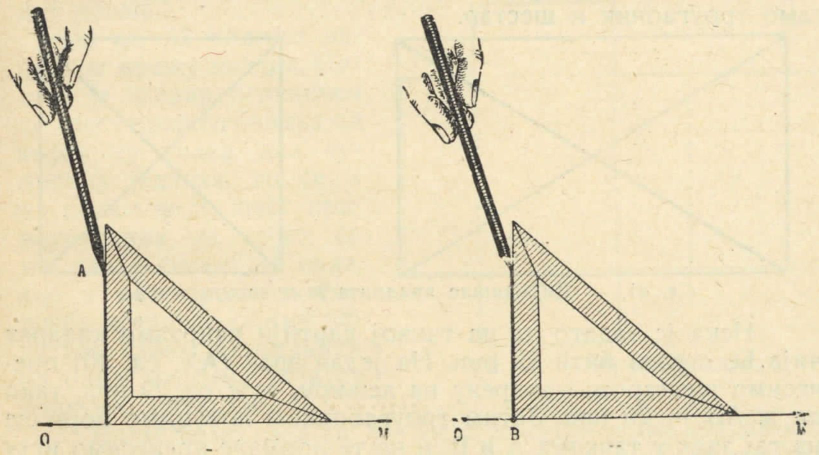
обрнуто штампано слово T: $\perp$. Код горњег троугаоника је $OA \perp OB$ (OA нормално је на OB).

Исправност троугаоника испитујемо овако. Једним испробаним лењиром нацртамо праву. Затим ставимо



Сл. 38. — Испитивање исправности троугаоника.

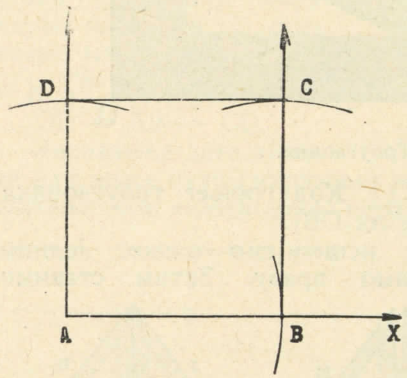
троугаоник прво у положај I (слика 38), тако да се једна његова нормална ивица тачно поклапа са делом нацртане



Сл. 39. — Из једне тачке на правој или ван ње може се повући само једна нормала на праву.

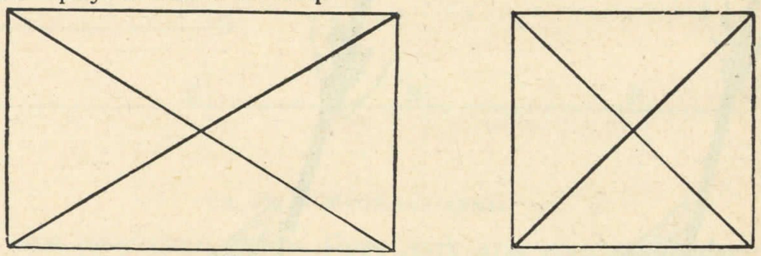
праве, док друга треба да буде нормална на њој. По тој нормалној ивици повуцимо дуж. Окренимо сада троугаоник око нормалне ивице у положај II, и наместимо га да се ранија ивица опет тачно поклопи са делом нацртане праве. Извуцимо оловком поново нормалу на праву. Када дигнемо троугаоник, посматрајмо: ако се обе извучене нормале поклапају, троугаоник је исправан, а ако се не поклапају, није исправан (сл. 38).

Ако једна тачка лежи ван неке праве (тачка A на сл. 39 I) или се налази на самој правој (тачка B, слика 39 II), онда можемо помоћу троугаоника повући нормалу на ту праву, тако да та нормала пролази кроз ту тачку. Троугаоник треба ставити тако да једна његова нормална ивица тачно поклопи део праве, а друга да пролази поред дате тачке. Затим по овој другој вучемо оловку: то је нормала повучена кроз дату тачку на дату праву (сл. 39). Из самог начина цртања закључујемо да се **кроз једну тачку може на једну праву повући само једна нормала.**



Сл. 40. — Цртање квадрата.

После овог можемо лако нацртати квадрат или правоугаоник и на хартији без икаквих линија, употребљавајући само троугаоник и шестар.



Сл. 41. — Дијагонале квадрата и правоугаоника.

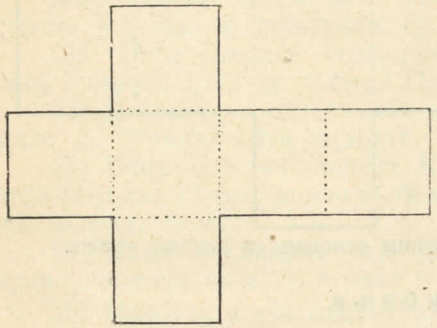
Нека је задато да на таквој хартији нацртамо квадрат чија ће страна бити 29 mm. На један зрак (AX, сл. 40) пренесимо шестаром, одмерену на лењиру, дуж од 29 mm, тако да је AB = 29 mm. Затим троугаоником повуцимо нормале на тај зрак у тачкама A и B, и на те нормале пренесимо исту дуж. Тако добијамо тачке C и D, које кад спојимо једном дужи добијамо тражени квадрат.

Слично овоме цртамо и правоугаоник, при чему водимо рачуна да су код њега само супротне стране једнаке.

На сл. 41 код квадрата и правоугаоника супротна темена спојена су дужима. Ове дужи зовемо **дијагоналама.** Свакомквадрату и правоугаонику можемо повући две дијагонале.

9. МРЕЖА КОЦКЕ И КВАДРА

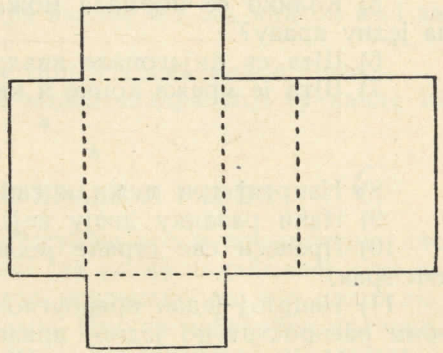
Знамо да је коцка рогљасто тело ограничено са шест квадрата. Да бисмо направили модел коцке од картона, треба направити шест једнаких квадрата и од њих склопити коцку. Но, ако те квадрате од картона направимо одвојено, тешко бисмо од њих могли склопити коцку. Зато их цртамо онако како су претстављени на сл. 42, па целу ту слику по обиму исечемо. Тачкицама су означене дужи по којима тај картон треба пресавити.



Сл. 42. — Мрежа коцке.

Тако нацртана слика у равни из које се може „склопити" коцка, зове се **мрежа коцке.** Мрежа коцке је у ствари целокупна површина коцке, само „распрострта" у једну раван.

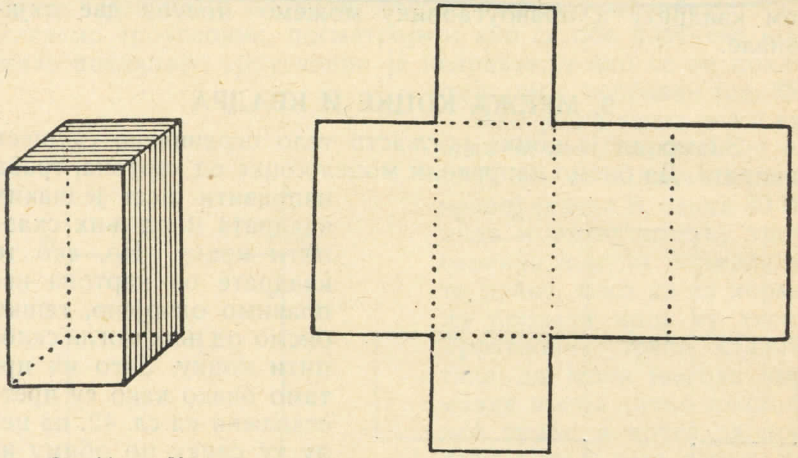
На **сл.** 43 видимо нацртану **мрежу квадра.** Пошто је квадар ограничен са шест правоугаоника од којих су свака два супротна једнака, то се и на слици виде шест правоугаоника од којих су по два једнака. И овде, као и код мреже коцке, треба исећи по обиму целу ову слику, а пресавити на оним местима која су означена цртицама.



Сл. 43. — Мрежа квадра.

Погледајмо сада сл. 44. Ту је нацртан један квадар који се од последњег разликује у томе што има за основе квадрате, а за бочне стране четири једнака правоугаоника. Поред њега нацртана је и његова мрежа. Види се да је овакав квадар нешто лакше направити него онај горе

После овога квадар можемо овако описати: квадар је рогљасто геометриско тело ограничено са шест правоугаоника од којих су свака два супротна једнака, или са два квадрата и четири једнака правоугаоника.



Сл. 44. — Квадар са квадратним основама и његова мрежа.

Вежбања

1) Шта је дужинска јединица а шта справа за мерење дужи?
2) Чему служи шестар?
3) Чиме цртамо нормалне праве ?
4) Како испитујемо исправност лењира и троугаоника?
5) Колико се нормала може повући кроз једну тачку на једну праву?
6) Шта су дијагонале квадрата и правоугаоника?
7) Шта је мрежа коцке и квадра ?

*

* *

8) Нацртај три дужи и сабери их.
9) Нађи разлику двеју неједнаких дужи.
10) Пренеси све стране једног квадрата (обим) на један зрак.
11) Нацртај један правоугаоник. Колики изгледа његов обим распрострт по једној правој ?
12) Нацртај две дужи и нађи њихов двоструки збир.
13) Нађи троструку разлику двеју неједнаких дужи.
14) Нацртај две неједнаке дужи. Колика се дуж добија ако се од збира ових дужи одузме њихова разлика?
15) Нацртај правоугаоник и једну његову дијагоналу. Кроз друга два темена повуци нормале на ту дијагоналу.

16) Један правоугаоник има стране: дужу 6,5 cm. а краћу 2,5 cm. Нацртај квадрат чија ће страна бити једнака дијагонали тога правоугаоника.
17) Један правоугаоник има стране: дужу 5 cm 8 mm и краћу 2 cm 6 mm, један квадрат има страну 5 cm 5 mm. Који од њих има већу дијагоналу и за колико?
18) Нацртај квадрат стране 45 mm и повуци обе дијагонале. Забоди шестар у пресек дијагонала, отвори га до једног темена и опиши круг. Куда пролази тај круг?
19) Исти задатак за правоугаоник, чије су стране 0,5 dm и 0,25 dm.
20) Нацртај једну дуж. Како изгледа квадрат чија је страна једнака: а) половини, б) трећини те дужи?
21) Нађи средине страна једног квадрата и узастопно спој дужима. Шта си добио? Провери.
22) Из пресека дијагонала једног квадрата повуци нормале до страна? Шта видиш?
23) Нацртај један квадрат. Колики изгледа правоугаоник чија је једна страна једнака обиму тог квадрата, а друга његовом полуобиму?
24) Нацртај квадрат чија је страна једнака дијагонали правоугаоника чије су стране 5 cm и 3,5 cm.
25) Нацртај један правоугаоник. Колики изгледа други правоугаоник, чија је једна страна једнака дијагонали првог, а друга једнака половини те дијагонале?
26) Једна коцка има ивицу 3,5 cm. Нацртај њену мрежу.
27) Различите ивице једног квадра су: 3 cm, 1 cm и 4 cm. Нацртај његову мрежу.
28) Нацртај мрежу квадра висине 4,5 cm, кад он има за основу квадрат стране 2 cm.
29) Направи од картона модел коцке ивице 6 cm.
30) Направи од картона модел квадра чије су ивице 10 cm, 5 cm и 3 cm.

10. ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ И РАВНИ

Ставимо квадар (или коцку) на сто и посматрајмо две ивице на истој његовој страни (на сл. 45 подебљане). Оне су обе хоризонталне. Ако квадар искренемо из тог положаја, ниједна више није хоризонтална. Њихов **међусобни положај,** међутим, није се променио, јер је квадар остао исте величине и облика.

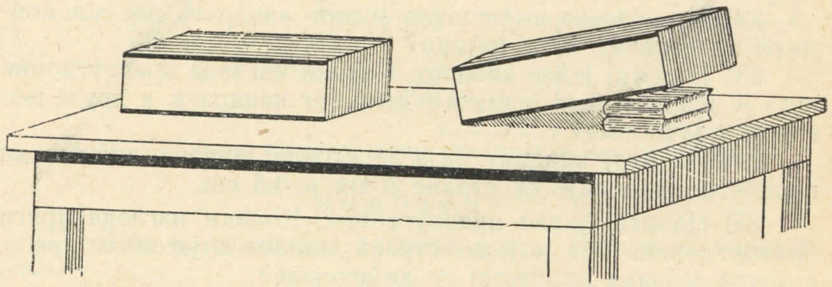
Ово посматрање можемо проширити и на ма које две праве линије у таквом положају, јер су ивице само делови правих. На основу овога казаћемо: **две праве које имају међусобни положај као две супротне ивице на истој страни ква-**

дра, ма у ком положају овај био, зову се паралелне или упоредне праве.

Ако из више (колико хоћемо) тачака на једној од паралелних правих спустимо нормале на другу паралелну праву, видећемо да ће све те нормале бити једнаке. Нормала тако повучена зове се **растојање** паралелних правих. На нашем квадру та растојања видимо као ивице које спајају посматране паралелне ивице. Зато кажемо: **између двеју паралелних правих растојање је свуда подједнако.**

Паралелне праве можемо видети на многобројним предметима око нас. На пример супротне ивице табле, прозора, врата итд. јесу паралелне.

Како су квадрат и правоугаоник граничне слике коцке и квадра, то излази: **код квадрата и правоугаоника супротне стране су паралелне.**



Сл. 45. — Паралелне ивице квадра остају паралелне, ма у ком положају квадар био.

Узмимо сада у посматрање две супротне стране квадра. Према томе какав положај има квадар, оне могу бити обе хоризонталне, обе вертикалне, или ни хоризонталне ни вертикалне. Но у сваком положају квадра њихов **међусобни положај** остаје непромењен, пошто квадар остаје исти по облику и по величини. Те су стране квадра делови равних површина, и зато место њих можемо замислити две равни у истом положају. После тога казаћемо: **две равни које имају међусобни положај као две супротне стране квадра, ма у коме положају овај био, зову се паралелне или упоредне равни.**

Ако из више (колико хоћемо) тачака на једној од паралелних равни повучемо нормале на другу, видећемо да ће све те нормале бити једнаке. Сваку тако повучену нормалу зовемо растојањем између двеју паралелних равни. На нашем квадру та су растојања ивице које спајају посматране паралелне стране. Зато кажемо: **између двеју паралелних равни растојање је свуда једнако.**

Пример паралелних равни можемо видети и у учионици: површине пода и плафона, или два супротна зида, итд. делови су паралелних равни.

Најзад, посматрајући на нашем квадру једну основину ивицу и супротну основу видимо да је њихов **међусобни положај** увек исти, ма како окретали квадар. И оне могу бити обе хоризонталне, или обе вертикалне, али не морају. **Права и раван које имају међусобни положај као основина ивица и супротна основа код квадра, ма у коме положају овај био, зову се паралелне или упоредне.**

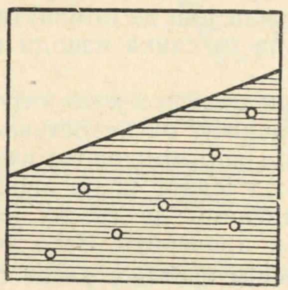
Ако из више (колико хоћемо) тачака на правој повучемо нормале на паралелну раван, видећемо да ће те нормале бити једнаке. Свака тако повучена нормала претставља нам растојање између паралене праве и равни. На нашем квадру та су растојања ивице које спајају посматрану ивицу и њој паралелну страну. Зато кажемо: **растојање између паралелне праве и равни свуда је једнако.**

Може ли се у учионици наћи пример праве и њој паралелне равни?

11. ТРАНСЛАЦИЈА

Паралелне праве можемо посматрати и код једне нарочите врсте кретања коју ћемо сада проучити.

Исецимо од картона један квадрат и на њему нацртајмо једну дуж ма у коме положају према странама. Та дуж дели квадрат на два дела (сл. 46). Направимо опет од картона

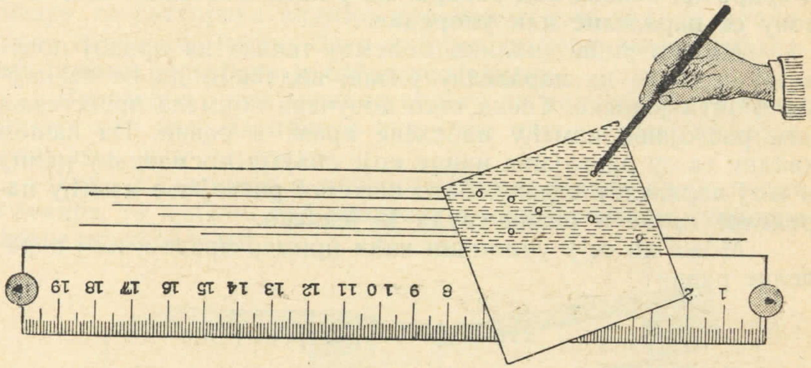


Сл. 46. — Модел квадрата од картона за извођење транслације.

исту слику као што је један део тог квадрата (на сл. 46 означен цртицама) и прилепимо је на квадрат тако да се поклопи са тим делом. Најзад избушимо на двоструком делу квадрата неколико рупица. Слика 47 показује оглед који треба с тим квадратом да извршимо.

Један лењир причвршћен је ексерчићима да би био непомичан. Модел квадрата који смо направили треба ставити на тај лењир тако, да картон прилепљен на квадрат буде окренут доле и да се ивица доњег картона приљуби уз ивицу лењира. Квадрат сада можемо кретати руком тако да му обележена дуж стално клизи по ивици лењира.

Место квадрата овај оглед смо могли извршити и са ма којом равном сликом. Ивицу лењира можемо замислити продужену на обе стране, тако да нам она претставља праву линију. Сада треба још запазити да и слика коју крећемо и права по којој једна њена дуж клизи леже у истој равни.



Сл. 47. — Праволиниско транслаторно кретање квадрата.

Кад се равна слика креће у равни тако да једна њена дуж стално клизи по једној правој, онда кажемо да се та слика креће транслаторно, или да изводи транслацију.

Да бисмо нагласили још да поменута дуж клизи по **правој** линији, кажемо да та слика изводи **праволиниску транслацију.**

Ако убодемо врх писаљке у ма коју рупицу на квадрату па вршимо транслацију, он ће остављати траг праве линије (односно дужи). Нацртајмо на тај начин неколико дужи, померајући квадрат од једног краја лењира до другог. Кад дигнемо квадрат видећемо да су то једнаке и паралелне дужи, што можемо и проверити. Зато кажемо:

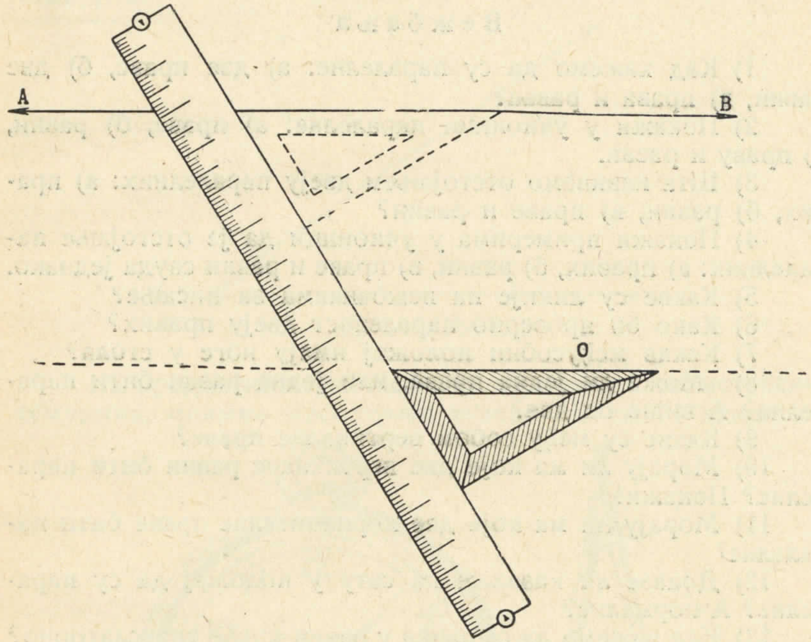
При транслаторном кретању равне слике све њене тачке изводе једнаке и паралелне дужи.

12. **ЦРТАЊЕ ПАРАЛЕЛНИХ ПРАВИХ**

Паралелне праве цртамо помоћу правог лењира и троугаоника, а на основу транслаторног кретања.

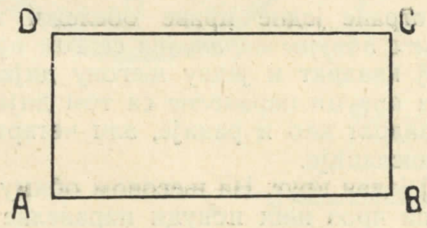
Нека нам је задато да повучемо праву која пролази кроз тачку О а да је паралелна са датом правом А В (сл. 48). Троугаоник намештамо тако да му једна (која било) ивица тачно поклапа део праве АВ. Уз другу његову ивицу приљубимо лењир и затим га чврсто држимо руком. Троугаоник сада крећемо тако да му његова ивица клизи по ивици лењира (транслација), све док не дође у положај поред тачке О.

Сада можемо вући оловком по ивици лењира кроз ту тачку: на тај начин цртамо паралелну праву датој правој, а да истовремено пролази кроз тачку О.



Сл. 48. — Кроз једну тачку може се повући само једна права паралелна некој датој правој.

Ми можемо на овај начин нацртати колико хоћемо правих које су паралелне са датом правом. Али, ниједна од њих



Сл. 49. — Правоугаоник.

не пролази истовремено и кроз тачку О. Зато кажемо: **кроз једну тачку можемо повући само једну праву паралелну са датом правом.**

За паралелност, као и за нормалност, имамо у геометрији нарочити знак: то су две мале и паралелне црте које се пишу усправно: ‖ . Тако за супротне стране правоугаоника на сл. 49, за које знамо да су паралелне, писаћемо: AB ‖ CD (страна AB паралелна је са страном CD); исто тако је и AD ‖ BC.

Вежбања

1) Кад кажемо да су паралелне: а) две праве, б) две равни, в) права и раван?

2) Покажи у учионици паралелне: а) праве, б) равни, в) праву и раван.

3) Шта називамо отстојањем двеју паралелних: а) правих, б) равни, в) праве и равни?

4) Покажи примерима у учионици да је отстојање паралелних: а) правих, б) равни, в) праве и равни свуда једнако.

5) Какве су линије на вежбанкама за писање?

6) Како би проверио параленост двеју правих?

7) Какав међусобни положај имају ноге у стола?

8) Може ли **једна** права, или **једна** раван бити паралелна? А више од две?

9) Какве су међу собом вертикалне праве?

10) Морају ли ма које две вертикалне равни бити паралелне? Покажи!

11) Морају ли ма које две хоризонталне праве бити паралелне?

12) Долазе ли казаљке на сату у положај да су паралелне? А нормалне?

13) Кад кажемо да се слика у равни креће транслаторно?

14) Шта чине тачке равне слике кад она изводи транслацију?

*

* *

15) Са обе стране једне праве обележи по неколико тачака и кроз њих повуци паралелне са том правом.

16) Нацртај квадрат и једну његову дијагоналу. Кроз друга два темена повуци паралелне са том дијагоналом.

17) Цртај квадрат као и раније, али четврту страну извуци помоћу транслације.

18) Нацртај један круг. На његовом обиму обележи неколико тачака, па кроз њих повуци паралелне дужи у том кругу.

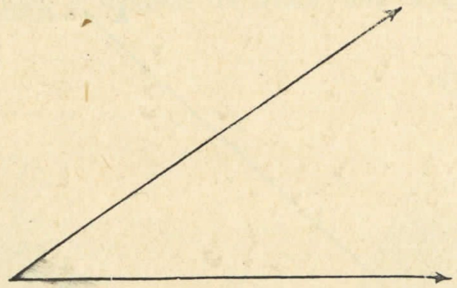
19) Кроз пресек дијагонала једног правоугаоника повуци паралелне праве са странама.

20) Нацртај две паралелне праве и њихово растојање.

21) Нацртај правоугаоник са странама 7 cm и 4 cm и једну његову дијагоналу подели на трећине. Кроз подеоне тачке повуци паралелне са другом дијагоналом.

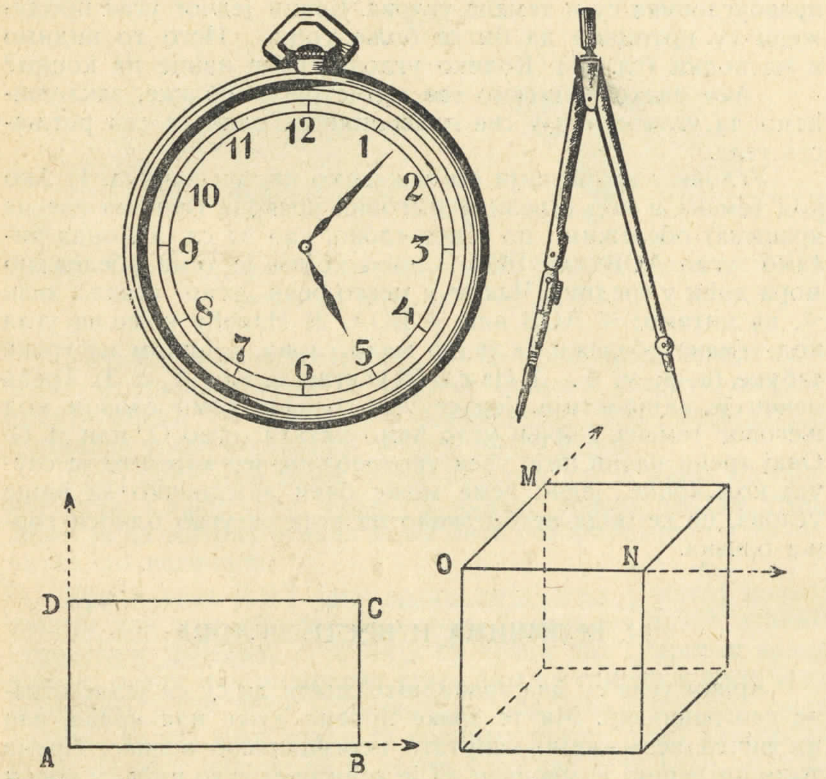
13. УГАО

Два зрака која полазе из једне тачке чине **угао** (сл. 50). Те зраке зовемо **крацима** угла, а њихову заједничку тачку **теме** угла.



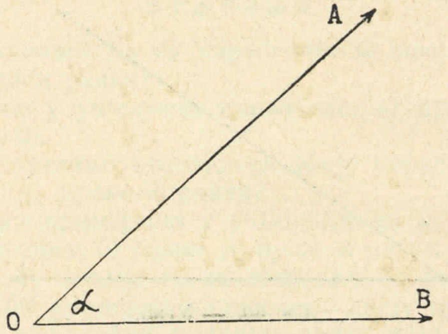
Сл. 50. — Угао.

На предметима око нас, као и на неким геометриским облицима, можемо посматрати углове. На сл. 51 краци ше-



Сл. 51. — Казаљке на часовнику и краци шестара чине углове. Суседне стране правоугаоника и суседне ивице коцке чине углове.

стара и казаљке на сату показују углове. Исто тако у правоугаонику ABCD код темена A, B, C и D налазе се углови. Стране правоугаоника су делови угловних кракова, а темена



Сл. 52. — Обележавање угла.

правоугаоника су и темена углова. Краци једног угла продужени су цртицама да би се боље уочио. Исто то видимо и на коцки (сл. 51). Колико углова граде ивице на коцки?

Ако овако испитамо све геометриске облике, закључићемо да углове имају све праволиниске слике и сва рогљаста тела.

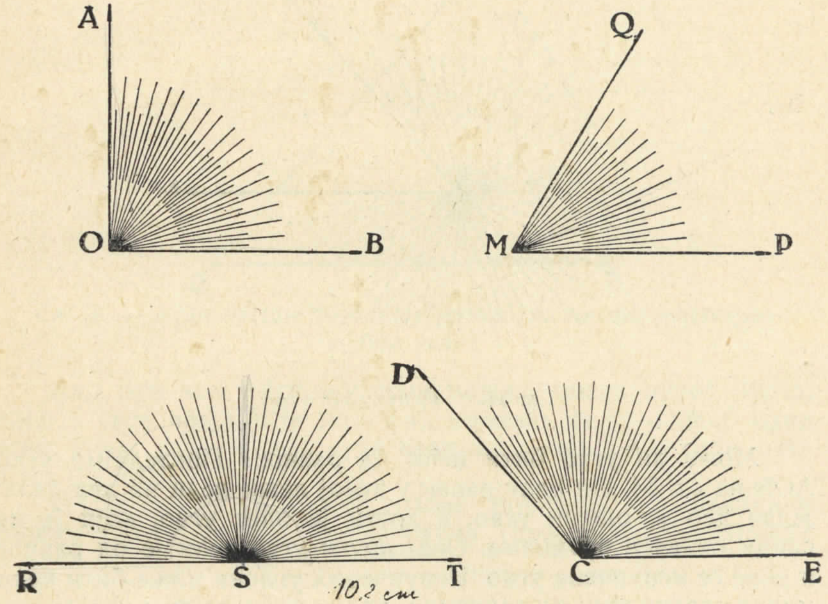
Углове у геометрији обележавамо на три начина. 1) Ако код темена и код стрелица његових кракова (или ма где на крацима) обележимо по једно слово, као на сл. 52, онда читамо: угао AOB или BOA. Слово којим је теме обележено мора доћи у средину. Чак се и место речи „угао" ставља знак ∢, па читамо: ∢ AOB или ∢ BOA. 2) Између кракова угла код темена обележи се једно мало слово, већином из грчке азбуке (α, β, γ, δ...). На сл. 52 је угао α, или ∢ α 3). Трећи начин је најпростији, јер се угао означи само словом код његовог темена. Горњи угао ћемо читати: угао O, или ∢ O. Овај трећи начин није увек употребљив, јер као што је случај код коцке, једно теме може бити заједничко за више углова, па се онда не би знало на који се угао односи горња ознака.

14. **ВЕЛИЧИНА И ВРСТЕ УГЛОВА**

Краци угла су два зрака, што значи да су са једне стране неограничени. Ми те зраке цртамо дуже или краће, али их никад не можемо нацртати неограничено велике. Према томе погрешно је мислити да је већи онај угао чији су краци

дуже нацртани. Морамо одмах у почетку научити, да величина угла не зависи од величине његових кракова.

Има, међутим, углова различитих по величини. Сл. 53 показује нам да та величина зависи од отвора или размакнутости кракова, а никако од дуже или краће нацртаних кракова.



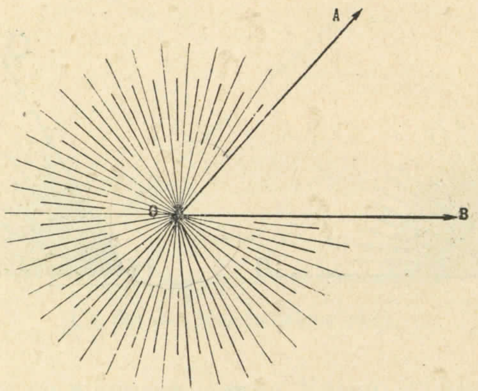
Сл. 53. — Врсте углова по величини: прави (∢ AOB), оштри (∢ PMQ), равни (∢ RST), тупи (∢ DCE).

Уочимо угао AOB на сл. 53. Његови краци стоје нормално један на другом (о чему се можемо уверити помоћу троугаоника), тј. OA ⊥ OB. Сваки угао чији краци стоје нормално један на другом зовемо **прави угао.**

Угао QMP има мањи отвор кракова, он је мањи од правог угла. Сваки угао мањи од правог зовемо **оштри угао.** Јасно је да оштрих углова може бити безбројно много различитих по величини.

Краци угла RST јесу зраци који леже у истој правој линији али иду обрнутим смером. Таква два зрака зовемо **супротним зрацима.** Угао чији су краци два супротна зрака зовемо **равни или положени угао.** Ако из темена S овог угла повучемо један зрак нормалан на оба крака његова, онда видимо да тај зрак гради са крацима равног угла два права угла. Из овог излази да је равни угао два пута већи од правог угла.

Угао DCE (сл. 53) има већи отвор кракова од правог а мањи од равног угла. Сваки угао који је већи од правог а мањи од равног зовемо **тупи угао.** Јасно је да и тупих углова, као и оштрих, може бити безбројно много различитих по величини.

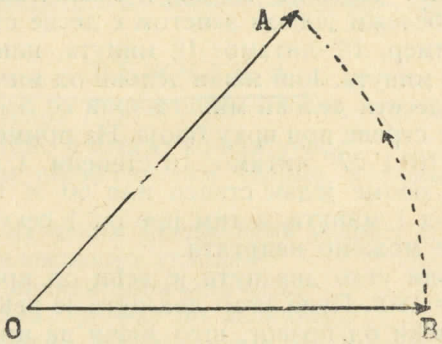


Сл. 54. — Испупчени угао.

Може ли угао бити већи од равног? Погледајмо угао AOB на сл. 54. Он целу раван у којој лежи дели на два дела: један део је оштри угао, а други је опет угао, који је на слици означен цртицама. Овај други угао већи је од равног и зове се **испупчени угао.** Испупчених углова може бити врло много различитих по величини, према томе да ли су им краци више или мање размакнути. За разлику од њих, све углове мање од равног зовемо једним именом **издубљеним угловима.** Тако у издубљене углове спадају оштри, прави и тупи углови. У ствари свака два зрака која полазе из једне тачке чине два угла. Ако су та два зрака супротна, онда они чине два равна угла; ако ти зраци нису супротни, један угао је издубљени (мањи), а други испупчени (већи). Ако се нарочито не нагласи, подразумева се у том случају увек издубљени угао.

15. ПОСТАНАК УГЛА РОТАЦИЈОМ

Замислимо да се један зрак окреће око своје крајње тачке, која за то време остаје у миру. То је његово **обртно** или **ротационо кретање.** Каже се још да зрак тада **врши ротацију** или да **ротира** око своје утврђене тачке. Ако при овом ротирању зрак стане у неки положај, OA на сл. 55, онда он са својим првим положајем (OB) гради један угао. Видимо, дакле, да **угао настаје ротацијом једног зрака око његове утврђене крајње тачке.** Ако при својој ротацији зрак стане у положај који је нормалан према почетном положају, онда он гради прави угао. Лако је увидети да оваквом ротацијом зрак може градити све могуће углове, дакле и оштри, тупи, равни и испупчени.



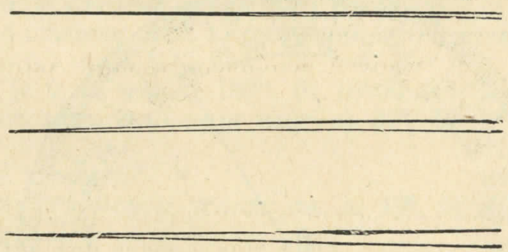
Сл. 55. — Угао настаје ротацијом зрака око његове непомичне крајње тачке.

Ако при том обртању зрак најзад, после пуног обрта, дође у свој првобитни положај, кажемо да је описао **пуни угао.** Пуни угао је два пута већи од равног а четири пута већи од правог.

После овога можемо углове поређати по величини овако: оштри, прави, тупи, равни (положени), испупчени и пуни угао.

16. МЕРЕЊЕ И ЦРТАЊЕ УГЛОВА

Као што дужине меримо једном одређеном дужином (метар), тежину једном одређеном тежином (килограм), време једним одређеним временом (час), тако и углове меримо



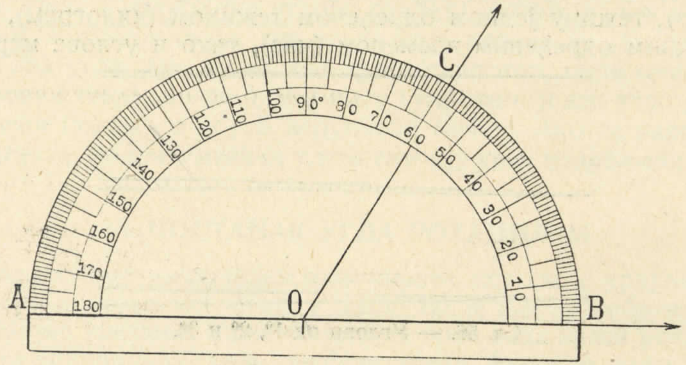
Сл. 56. — Углови од 1^0, 2^0 и 3^0.

једним одређеним углом. Тај угао је **деведесети део правог угла** и зове се **степен.** Степен се означава једном нулицом с десне стране броја при врху. На пример 15^0 читамо, петнаест степени. Степен је врло мали угао. На сл. 56 нацртани су углови од 1^0, 2^0 и 3^0. Код угла од 1^0 видимо да краке морамо доста продужити да би се приметио њихов размак. Ипак, потребне су још мање мере од степена, нарочито у науци о небеским телима (астрономија). Зато је један степен подељен на шездесет једнаких делова, и сваки такав део зове се **минут.** Он се бележи једном запетом с десне стране при врху броја. На пример, 18' читамо: 18 минута, или $4^025'$ читамо: 4 степена и 25 минута. Још мањи делови од минута јесу **секунди:** то су шездесети делови минута. Они се означавају са две запете с десне стране при врху броја. На пример 9'' читамо: 9 секунди, или $16^0\,1'\,27''$ читамо: 16 степени, 1 минут и 27 секунди. Према овоме један степен има $60 \times 60 = 3\,600$ секунди. Угао од 1 минута, а тим пре од 1 секунда, толико је мали да га не можемо нацртати.

Један равни угао два пута је већи од правог: он дакле има $2 \times 90^0 = 180^0$. Пуни угао два пута је већи од равног, а четири пута већи од правог, што значи да има $4 \times 90^0 = 360^0$. Ма који оштри угао има између 0^0 и 90^0, ма који тупи између 90^0 и 180^0, а испупчени угао мора имати више од 180^0 а мање од 360^0.

Справа у облику полукруга, као на сл. 57, служи за мерење углова и зове се **угломер.** Обично се прави од метала, целулоида или картона. На полукружном ободу виде се подеоци и бројеви: то је половина кружне линије подељена на 180 једнаких делова, и сваки део обележен је цртицом а сваки десети бројем.

Ако треба да измеримо један угао, поставимо угломер тако да му средиште (тачка O) падне у теме, а ивице OA (или OB) поклопи крак тога угла. Други крак тога угла (OC) показује на угломеру број његових степени.



Сл. 57. — Угломер.

Помоћу угломера можемо и нацртати угао од извесног броја степени. Нека нам је задато да нацртамо угао од 59^0.

Да бисмо то извели, поступамо овако: најпре нацртамо један зрак и на њега поставимо угломер као што је напред описано. Обележимо затим тачком место где угломер показује 59^0. Ако кроз ову тачку, а од крајње тачке зрака, повучемо нов зрак, он ће бити други крак траженог угла.

Како ћемо помоћу угломера нацртати један испупчени угао?

ВЕЖБАЊА

1) Шта је угао? два зрака која полазе из једне тачке
2) Шта је теме а шта су краци угла?
3) На којим геометриским телима и сликама видимо углове?
4) Покажи на неким предметима углове.
5) Како обележавамо углове?
6) Од чега зависи величина угла?
7) Како делимо углове по величини?
8) Шта је прави, равни, оштри, тупи угао?
9) Које углове зовемо издубљеним а које испупченим?
10) Које углове најчешће видимо на предметима око нас?
11) У колико сати казаљке на часовнику показују: а) прави угао, б) равни угао, в) оштри угао, г) тупи угао, д) пуни угао?
12) Какве углове чине казаљке на часовнику у: а) два сата, б) три сата, в) шест сати, г) осам сати, д) девет сати, ђ) дванаест сати?
13) Шта је ротација зрака?
14) Шта описује зрак при својој ротацији?
15) Шта је јединица за мерење угла? Степен
16) Који су мањи делови од степена?
17) Колико је секунди у: а) 19^0, б) $2^0\,35'$, в) $10^0\,17'\,20''$, г) $25'\,25''$, д) $12^0\,35''$?
18) Колико је минута у: а) 24^0, б) $11^0\,11'$, в) $2820''$?
19) Колико је степени у: а) $900'$, б) $46700''$?
20) Колико степени има: а) оштри, б) тупи, в) испупчени угао?
21) Какав је угао од: а) $180''$, б) $10800'$, в) $324000''$?
22) Како се зове угао који има: а) 32^0, б) 89^0, в) 120^0, г) 250^0?
23) Шта је угломер?
24) Нацртај угломером углове од: а) 49^0, б) 90^0, в) 120^0, г) 170^0.
25) Нацртај угломером углове од: а) 210^0, б) 250^0, в) 300^0, г) 351^0.
26) Нацртај неколико углова и измери их угломером.
27) Какви су углови код квадрата и правоугаоника?
28) Може ли се замислити угао мањи од једне секунде?

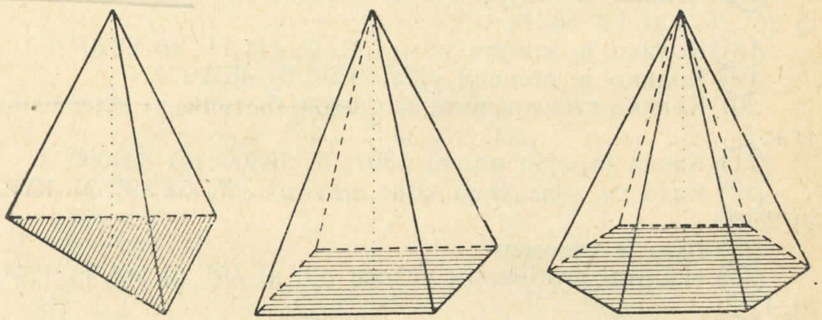
29) Колико пута је пуни угао већи од равног, а колико од правог угла?

17. КОСЕ ПРАВЕ И РАВНИ — ПИРАМИДА

Видели смо да равни и праве могу бити паралелне и нормалне. Ако две равни, или две праве, или права и раван

Сл. 58. — Кеопсова пирамида у Египту.

нису нормалне једна на другој, а ни паралелне, ми кажемо да једна према другој стоје **косо,** или да међусобно имају **кос положај.**

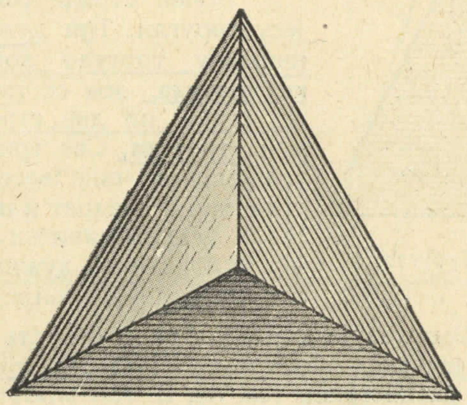


Сл. 59. — Шестострана, четворострана и шестострана пирамида.

Косе праве и равни посматраћемо на једном геометриском телу које зовемо **пирамида.** Слика 58 претставља једну египатску пирамиду. Такве пирамиде градили су Египћани

од камена, а служиле су као гробнице њихових владара. Геометриско тело које ћемо посматрати има такав облик и зато носи исто име.

Погледајмо пирамиде на слици 59. Све су оне ограничене равним површинама, и зато спадају у рогљаста геометриска тела. Она страна на којој лежи пирамида зове се **основа,** док се остале зову **бочне стране** пирамиде. Све бочне стране стичу се у једну тачку која се зове **теме** или **врх пирамиде.** На пирамиди као и на сваком рогљастом телу видимо ивице (заједничке дужи двеју суседних страна). Оне ивице које ограничавају основу зову се **основине,** док се остале зову **бочне.** Нормала спуштена из врха пирамиде на њену основу зове се **висина пирамиде.**



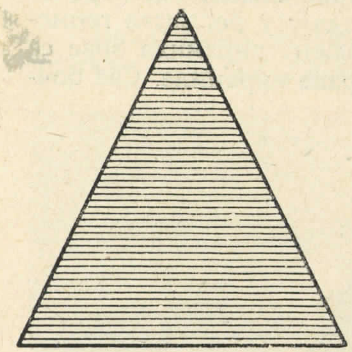
Сл. 60. — Тетраедар.

Из слике 59 видимо да је пирамидина основа праволиниска слика и да она може имати три, четири и више страна. Пирамиде делимо на **тростране, четворостране, петостране,** итд., према броју страна њене основе. Ако пирамида има све ивице (и бочне и основине) једнаке, назива се **равноивична.** Тространа равноивична пирамида назива се **тетраедар** (сл. 60.).

Посматрајмо сада једну бочну страну и основу код пирамида на сл. 59: оне нису ни нормалне, ни паралелне, већ **међусобно стоје у косом положају.** Једна од њих може бити хоризонтална или вертикална, али онда она друга није ни хоризонтална ни вертикална. Исто тако бочна ивица је коса према основи пирамиде, а коса је и према суседној основиној ивици (сл. 59). Могу ли се у учионици наћи примери правих и равни у косом положају?

18. ТРОУГАО

Ако једну бочну страну пирамиде ставимо на хартију и обележимо оловком њене границе, видећемо кад дигнемо пирамиду, да смо са три дужи ограничили део равни. Тако ограничен део равне површине називамо **троугао** (сл. 61).



Сл. 61. — Троугао.

Бочне стране свих пирамида јесу троугли. Три дужи које ограничавају троугао зову се **стране троугла,** док се тачке у којима се стичу по две стране зову **темена троугла.** Све три стране троугла заједно чине његов **обим.** Троугао, као и квадрат и правоугаоник, спада у праволиниске равне слике, јер је ограничен дужима, дакле деловима правих линија.

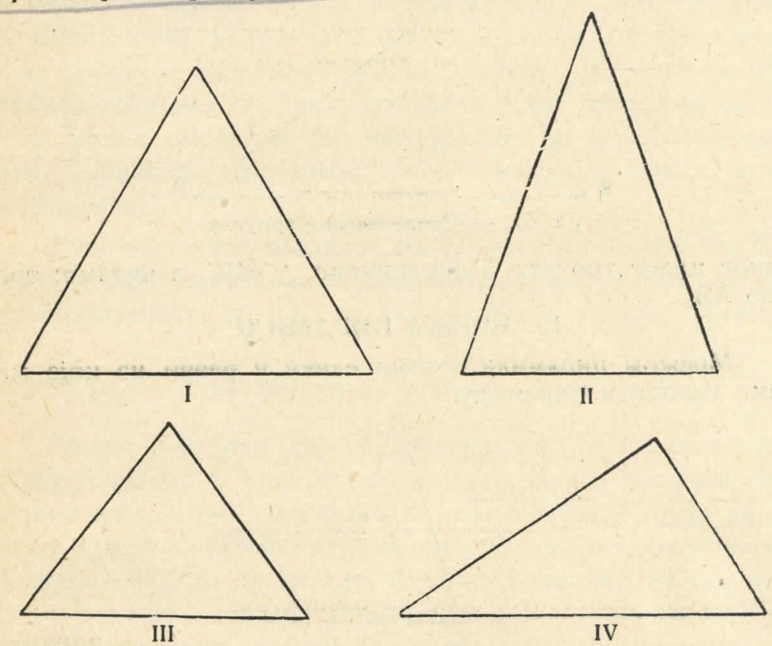
Слика 62 показује нам да стране троугла могу али не морају бити једнаке. Ако троугао има све три стране једнаке, зове се **равнострани** (сл. 62, I). Ако троугао има само две стране једнаке, док је трећа већа или мања, зове се **равнокраки** (сл. 62, II и III). Две једнаке стране код равнокраког троугла зовемо **крацима.** Ако пак троугао има све три стране различите, зове се **разнострани** (сл. 62, IV).

Видели смо да се тространа равноивична пирамида зове тетраедар. Знајући сада поделу троуглова према њиховим странама, можемо рећи: **тетраедар је геометриско тело ограничено са четири равнострана троугла.**

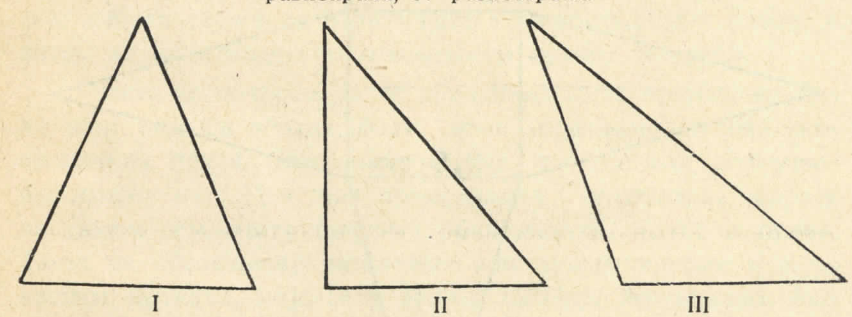
Сваки троугао има три угла. Темена тих углова јесу у исто време и темена троугла, а њихови су краци стране троугла. Троугао је и добио своје име по томе што има три угла.

Досад смо посматрали различите троугле према њиховим странама. Сад ћемо их поделити у групе према њиховим угловима. Слика 63 показује нам да троугли могу имати различите углове, али сва три морају бити издубљена. Троугао на сл. 63, I има сва три угла оштра. Сваки троугао код кога су сви углови оштри зове се **оштроугли троугао.** Троугао на сл. 63, II има један угао прави и два оштра. Сваки такав троугао називамо **правоугли троугао.** Троугао на сл. 63, III има један тупи и два оштра угла. Такав троугао називамо **тупоугли.**

Стране правоуглог троугла имају нарочите називе. Оне две стране које заклапају прави угао, или које стоје нормално, зову се **катете,** а трећа **хипотенуза.** Хипотенуза је увек већа од ма које катете. Ако су катете једнаке, троугао је **равнокрако правоугли.**



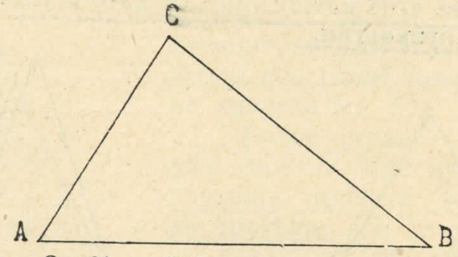
Сл. 62. — Врсте троуглова према странама: I равнострани, II и III равнокраки, IV разнострани.



Сл. 63. — Врсте троуглова према угловима: I оштроугли, II правоугли, III тупоугли.

Код свих троуглова две суседне стране стоје међусобно у косом положају; само код правоуглог троугла катете стоје нормално.

Троугао у геометрији обележавамо великим словима код његових темена. На сл. 64 нацртан је троугао ABC. Да не бисмо често писали реч „троугао”, ми стављамо слику

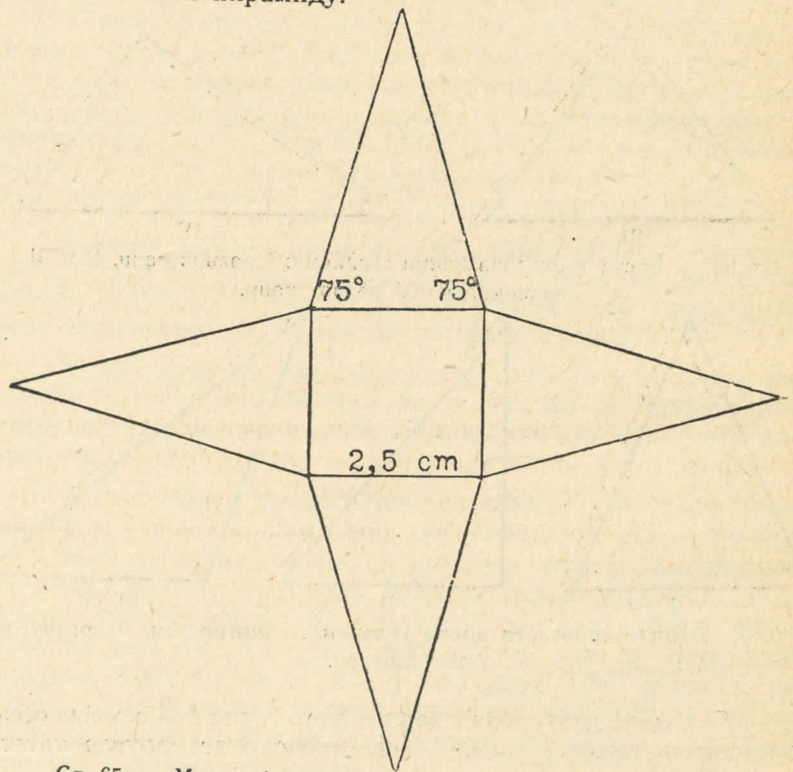


Сл. 64. — Обележавање троугла.

једног малог троугла. Тако пишемо Δ ABC, а читамо: троугао ABC.

19. МРЕЖА ПИРАМИДЕ

Мрежом пирамиде зовемо слику у равни из које можемо склопити пирамиду.



Сл. 65. — Мрежа једне пирамиде са квадратном основом.

Да бисмо нацртали мрежу једне пирамиде која има за основу квадрат, поступимо овако:

Нацртајмо најпре квадрат чија је страна рецимо 2,5 cm. На једној његовој страни цртамо два угла по 75°, тако да темена квадрата буду у исто време и темена тих углова. Краци ових углова заједно са страном квадрата чине један троугао. Ако исте овакве троугле нацртамо и над осталим странама квадрата, добићемо једну звездасту слику: то је мрежа пирамиде (сл. 65). Из ње би се могла склопити пирамида савијањем ових троуглова преко страна квадрата.

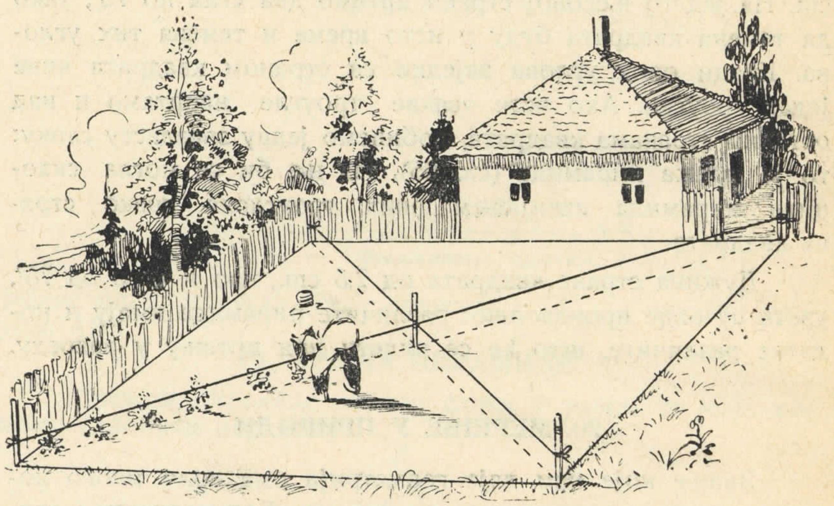
Дужина стране квадрата од 2,5 cm., као и угао од 75°, узети су овде произвољно: различите пирамиде имају и податке различите, што ће се видети при цртању у разреду.

20. МЕРЕЊЕ У ПРИРОДИ

Знање које нам даје геометрија има врло много корисних примена у практичном животу. Без познавања геометрије инжењери, предузимачи, земљорадници и др. не би могли градити објекте као што су зграде, мостови, путови, железнице, не би могли мерити величине имања итд. Има и занатлија којима геометрија корисно служи, као на пример столарима, лимарима, каменоресцима, зидарима и другим. Поменули смо већ практичну употребу либеле и виска: либела служи за испитивање хоризонталности равни, а висак за испитивање вертикалности правих и равни.

Честа је потреба да се неко земљиште премерава, било због зидања зграда, било због прављења путова, железничких пруга, било због поделе, продаје или ограђивања имања итд. При том премеравању стручњаци морају на самом земљишту (терену) обележавати тачке и праве. Тачке се обележавају кочићима или дужим правим и ваљкастим моткама, које се у земљу забијају вертикално. Ако између двеју таквих мотки затегнемо канап, онда нам он претставља део праве линије.

Узмимо један прост пример да на њему видимо како се то ради. Нека је једно земљиште у облику правоуганика, као на сл. 66, и на њему сопственик хоће да засади воћке тако да оне буду поређане по дијагоналама. Да би то извео, он забада мотке у сва четири темена, затеже из-



Сл. 66. — Обележавање тачака и правих у природи.

међу њих канап и везује га за мотке. Сад на једнаким размацима дуж канапа он сади воћке (сл. 66).

Вежбања

1) Која се геометриска тела зову пирамиде?

2) Шта има пирамида за основу а шта за бочне стране?

3) Према чему делимо пирамиде и како?

4) Може ли пирамида имати више основиних него бочних ивица?

5) Шта је основа, врх, висина пирамиде?

6) Како зовемо пирамиду чије су све ивице једнаке?

7) Шта је то тетраедар?

8) Шта је то троугао?

9) Зашто се троугао зове тако?

10) Како делимо троугле према странама, а како према угловима?

11) Како се зове троугао који има: а) све углове оштре, б) један угао прави, в) један угао тупи?

12) Може ли се нацртати троугао са два права или два тупа угла? Пробај.

13) Може ли правоугли троугао бити равнострани, равнокраки, разнострани?

14) Шта је равнокрако-правоугли троугао?

15) Како зовемо стране код правоуглог троугла?

16) Нацртај све различите врсте троуглова које знаш.

17) Нацртај помоћу троугаоника равнокрако-правоугли троугао.

18) Измери угломером оштре углове равнокрако-правоуглог троугла. Колики су?

19) Из темена правог угла код правоуглог троугла повући нормалу на хипотенузу, и кроз исто теме паралелну са хипотенузом.

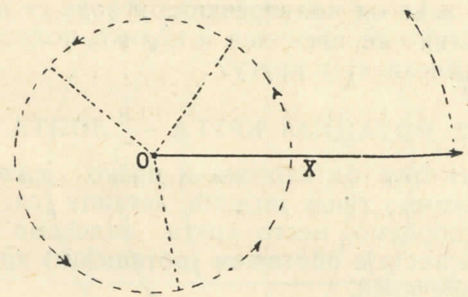
20) Нацртај мрежу пирамиде чија је основа квадрат стране 45 mm, а чије бочне ивице граде са основиним ивицама углове од 70°.

21) Обележи у дворишту кочићима један правоугаоник и измери му дијагоналу.

22) Обележи у дворишту две паралелне дужи, тако да свака буде дугачка 7 m.

21. ПОСТАНАК КРУГА РОТАЦИЈОМ

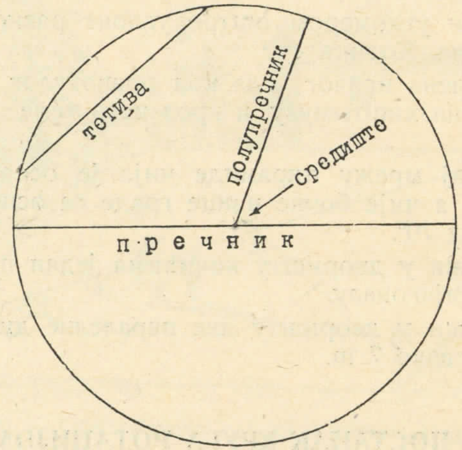
Запазимо једну (коју било) тачку на зраку који врши ротацију око своје крајње тачке (X на сл. 67). Кад зрак изврши пун обрт, тј. дође у свој првобитни положај, тачка је описала једну затворену криву, нама већ познату **кружну линију** (сл. 67). Део равни што га она ограничава знамо да се зове круг, а сама кружна линија је **обим** или **периферија** круга. При своме кретању тачка на зраку била је увек исто удаљена од крајње, непомичне тачке О. Ову непомичну тачку



Сл. 67. — Тачка на зраку који ротира описује кружну линију.

зваћемо **центар** или **средиште** круга, а удаљење ма које тачке на обиму круга од његовог средишта називамо **полупречником** круга.

После овог круг можемо описати овако: **круг је равна геометриска слика чије су све тачке на периферији једнако удаљене од једне тачке коју зовемо средиште или центар круга.**



Сл. 68.

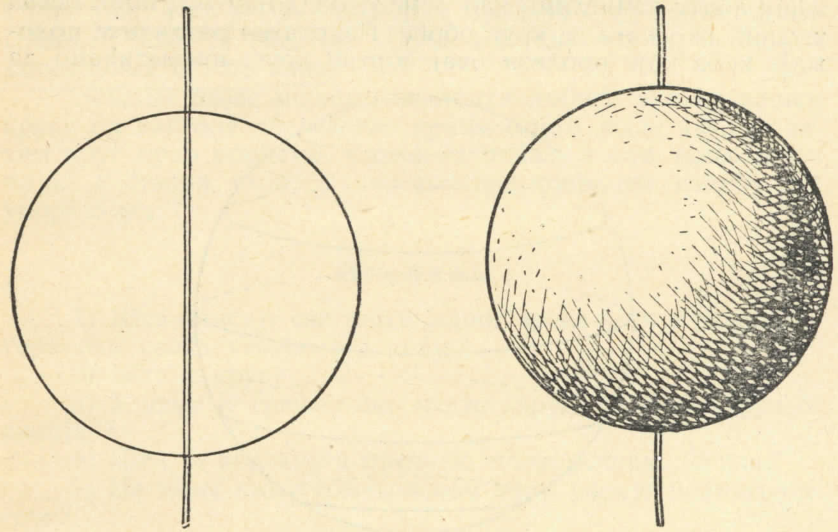
Ако две ма које тачке на обиму круга спојимо једном дужи, ову дуж онда зовемо **тетива** круга. На кругу се може повући (замислити) безбројно много тетива. Највеће су тетиве оне које пролазе кроз центар круга. Таква једна тетива два пута је већа од полупречника и зове се **пречник** круга (сл. 68). Колико се пречника а колико полупречника може повући (замислити) у кругу?

22. **РОТАЦИЈА КРУГА — ЛОПТА**

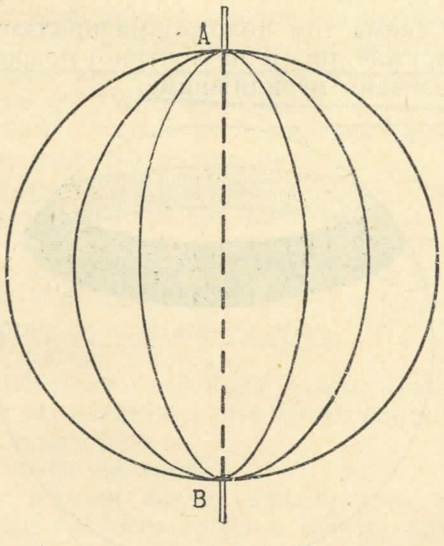
Изрежимо круг од картона и преко једног његовог пречника прилепимо танак штапић, летвицу (сл. 69). Ако тај штапић брзо обрћемо, место круга видећемо **лопту.** Зато кажемо: **лопта постаје обртањем (ротацијом) круга око једног његовог пречника.**

Обим круга при томе описује лоптину површину, која се зове још и **сферна површина.** Пошто је свака тачка на обиму круга једнако удаљена од његовог центра (полупречници), то и све тачке на лоптиној површини морају бити једнако удаљене од њега. Центар тога круга у исто време је и **центар лопте.** Даљина ма које тачке на лоптиној површини до центра зове се **полупречник лопте.** И лопта има своје пречнике: то су дужи које спајају две тачке на површини

а пролазе кроз центар. Лопту можемо, дакле, описати овако: **лопта је обло геометриско тело чије су све тачке на површини једнако удаљене од једне тачке коју зовемо центар лопте.**

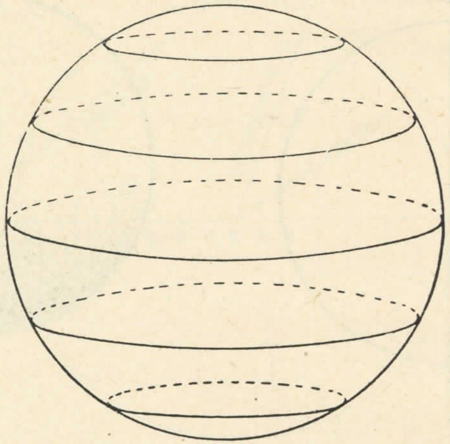


Сл. 69. — Обртањем круга око пречника постаје лопта.



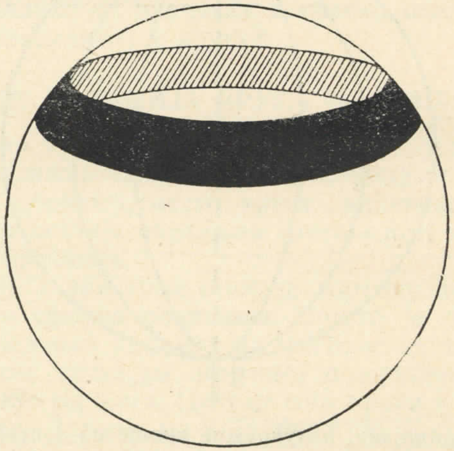
Сл. 70. — Меридијани: полукружне линије на лоптиној (Земљиној) површини које спајају полове.

Из географије знамо да је Земља приближно лоптастог облика и да се обрће око своје осе. Оса Земљина је права која пролази кроз центар Земље. Тачке где оса продире Земљину површину зову се **полови** (А и В на сл. 70). Ако нашу лопту замислимо као Земљу, онда нам осу претставља штапић око кога се круг обрће. Нацртајмо различите положаје кроз које пролази овај обртни круг: приметићемо да



Сл. 71. — Упоредници: кружне линије на лоптиноj (Земљиној) површини, чији центри леже сви на осовини.

његов обим у свима тим положајима пролази кроз полове (сл. 70). Полукружне линије на лоптиној површини које спајају полове називамо **меридијанима.**



Сл. 72. — Лоптин (Земљин) појас.

Ако на периферији нашег круга од картона обележимо неколико тачака црном бојом, видећемо да ће те тачке при обртању круга описивати кружне линије (сл. 71). Ове кружне линије зову се у географији **упоредници.** Највећи упоредник, а то је онај чији круг пролази кроз центар лопте (Земље), зове се **екватор.** Идући од екватора ка половима упоредници су све мањи.

Земљин **појас** можемо на лопти добити ако на нашем кругу од картона обележимо црном бојом један лук, па затим круг брзо обрћемо. Слика 72 показује нам такав један појас. У ствари, појас је део лоптине површине између два упоредника.

Вежбања

1) Шта описују све тачке једног зрака који у равни ротира око свога утврђенога краја?
2) Шта је круг?
3) У чему је грешка ако место „круг" кажемо „кружна линија"?
4) Шта је код круга пречник, полупречник, тетива?
5) На коме смо геометриском телу раније посматрали круг?
6) Колико се у кругу може повући (замислити) пречника, полупречника, тетива ?
7) Шта су највеће тетиве круга?
8) Опиши један круг и повуци два нормална пречника.
9) Нацртај круг и један његов пречник. На његовој периферији обележи неколико тачака и кроз те тачке повуци тетиве паралелне са датим пречником.
10) Из неколико тачака на периферији једног круга повуци нормале на један његов пречник.
11) Центри два круга удаљени су 5 cm. Један има полупречник 3,5 cm а други 2,5 cm. Како изгледа та слика?
12) Опиши око исте тачке три круга чији су полупречници 15 mm, 25 mm и 30 mm, па из заједничког центра повуци један зрак. У пресечним тачкама тог зрака са кружним периферијама повуци нормале на зрак.
13) Шта је лопта?
14) Како постаје лопта? Како зовемо њену површину?
15) Шта су меридијани а шта упоредници?
16) Шта је екватор?
17) Шта је појас на лопти?
18) Шта су полови лопте (Земље), шта је њена оса?
19) Припреми све што треба и изведи ротацију круга, тако да видиш лопту, упоредник и појас.

Дужину и ширину морамо мерити истим дужинским јединицама. Да тако не радимо, не бисмо добили мале квадрате, као на сл. 77, већ правоугаонике.

Све ово што смо нашли код горњег правоугаоника важи очигледно и за све друге. Отуд изводимо: **површину правоугаоника добијамо кад мерне бројеве дужине и ширине, изражене истим јединицама, помножимо међу собом.**

Сл. 77. — Правоугаоник дужине 5 cm и ширине 3 cm.

На исти начин налазимо и површину квадрата. Ако узмемо квадрат стране 5 cm, његова површина је $5 \times 5 = 25$ cm². Знамо, међутим, да помножити један број самим собом значи дићи га на квадрат. У нашем случају је $5 \times 5 = 5^2$. Зато за површину квадрата можемо рећи: **површину квадрата добијамо кад мерни број његове стране дигнемо на квадрат.**

Вежбања

1) Шта називамо димензијама?

2) Колико димензија има геометриско тело, равна слика, дуж, тачка?

3) Код којих геометриских тела и геометриских слика можемо мерити и величине тих димензија?

4) Како зовемо димензије: а) коцке и квадра, б) квадрата и правоугаоника?

5) Какве су међу собом димензије коцке, квадра, квадрата и правоугаоника?

6) Шта је јединица за мерење површине?

7) Које су мање и веће јединице од квадратног метра?

8) Која су друга имена за квадр. декаметар и квадр хектометар?

9) Како добијамо повишину квадрата и правоугаоника?

10) Колика је површина квадрата чија је страна 3,5 cm?

11) Обим једног квадрата је 52 cm. Колика је његова површина?

12) Страна једног квадрата је 5 dm. Израчунај његов обим у метрима, а његову површину у квадратним сантиметрима.

13) Нацртај један квадрат и једну његову дијагоналу. Колика је у квадратним милиметрима површина квадрата, чија је страна једнака дијагонали тога квадрата?

14) Један правоугаоник има димензије: дужину 58mm и ширину 29 mm. Израчунај његов обим и површину.

15) Обим једног правоугаоника је 60 cm, а његова дужина 19 cm. Колика му је површина?

16) Димензије једног правоугаоника су 2 m 4 dm и 1 m 8 cm. Колико квадратних десиметара износи његова површина?

17) Један правоугаоник има димензије 8,5 cm и 5,2 cm, а један квадрат има страну дугу 6,4 cm. За колико се разликују: а) њихови обими, б) њихове површине?

18) Израчунати површину квадрата чији је обим једнак обиму правоугаоника дужине 5 m 3 dm и ширине 342 cm.

19) Израчунати површину правоугаоника чија је дужина 7,5 dm а ширина му је трећина дужине.

20) Једно имање облика правоугаоника има дужину 25 m и ширину 16 m. Колико се за њега мора платити, ако се за један квадратни метар плаћа 10 дин.?

21) Под једне собе има дужину 5,5 m и ширину 4,2 m. Колико ће стајати паркетирање те собе, ако се за сваки квадратни десиметар мора платити 1,5 динара?

22) Површина једног правоугаоника је 405 m², а његова дужина 27 m. Колико метара износи његов обим? 54+30=84

23) Дужина једног правоугаоника је 5 dm 28 cm, а његова површина 21 dm² 12 cm². Колики је његов обим?

24) Површина једног правоугаоника је 144 cm², а дужина 16 cm. Колика је површина квадрата који има обим једнак обиму тога правоугаоника?

3. ПОВРШИНА КОЦКЕ И КВАДРА

Површину коцке и квадра можемо лако добити кад знамо како се израчунава површина квадрата и правоугаоника.

Коцка је ограничена са шест једнаких квадрата, па њену површину добијамо кад саберемо површине свих њених квадрата. Место да сабирамо, ми можемо површину једног њеног квадрата помножити са шест. Тако, ако је ивица једне коцке 5 cm (а то је у исто време и страна њеног квадрата), њена површина биће: $6 \times 5^2 = 6 \times 25 = 150$ cm².

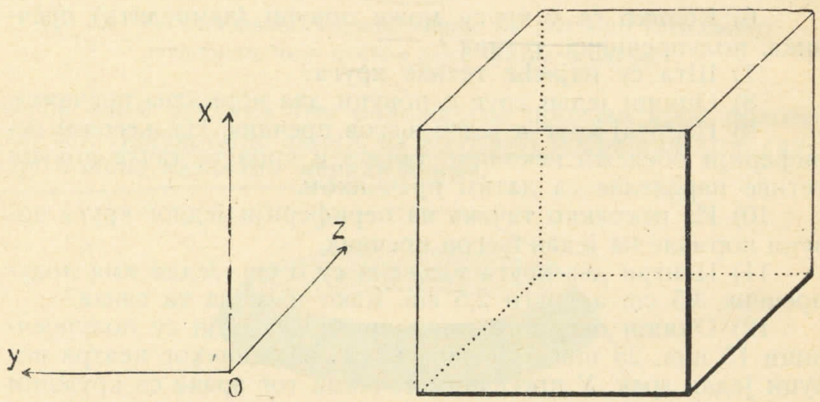
Површину квадра добијамо кад саберемо површине свих шест правоугаоника који га ограничавају. Знамо, међутим, да су свака два супротна од ових правоугаоника једнака. Треба, значи, сабрати површине три различита правоугаоника и тај збир помножити са два.

III ДЕО

ВЕЛИЧИНА ГЕОМЕТРИСКИХ ОБЛИКА

1. ДИМЕНЗИЈЕ

Из једне тачке можемо замислити да полази безбројно много зракова. Узмимо да из једне тачке полазе само три зрака, али тако да сваки од њих стоји нормално на осталим. На сл. 73 зраци ОХ, ОУ и OZ сви полазе из тачке О, а



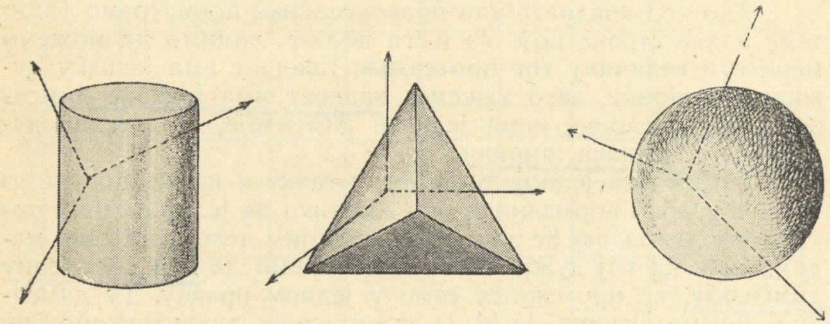
Сл. 73. — Три зрака који полазе из једне тачке а сваки је нормалан на оба друга. Такав међусобни положај имају и три суседне ивице на коцки.

сваки је од њих нормалан на оба друга. Да бисмо то лакше претставили, погледајмо коцку: из сваког њеног темена полазе три такве ивице.

Ако у ма ком геометриском телу замислимо једну тачку из које полазе три таква зрака, јасно је да ће сва три зрака једним својим делом, па ма како малим, лежати у телу (сл. 74). Зато кажемо: тело се „простире" или „протеже" у три међу-

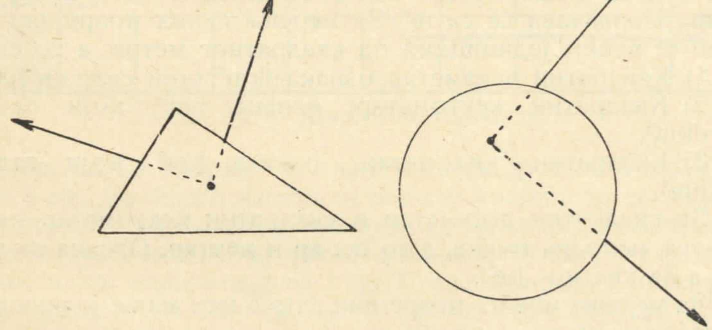
собно нормална правца који полазе из једне његове тачке. Ове правце у којима се протеже тело зовемо његовим **димензијама. Свако геометриско тело има три димензије.**

Ако код коцке и квадра посматрамо једно теме и три ивице које из њега полазе, видимо да **код тих тела можемо мерити и величину тог протезања.** Димензије код ових тела



Сл. 74. — Димензије геометриских тела.

зовемо као и у обичном животу: **дужина, ширина** и **висина** (место „висина", каже се и „дебљина" или „дубина"). Код коцке су дужина, ширина и висина међу собом једнаке, па кажемо: коцка има једнаке димензије. Квадар нема све три димензије једнаке. Може ли он имати две димензије једнаке? Које?



Сл. 75. — Димензије геометриских слика.

Ако у ма којој равној геометриској слици узмемо једну тачку и из ње повучемо, у равни те слике, два зрака нормална један на другом, видећемо да ће оба лежати једним својим делом, ма како малим, у тој слици (сл. 75). Трећи зрак, повучен из исте тачке а нормалан на оба ова, не би ни најмањим својим делом лежао у самој слици. О овоме се можемо уверити ако коцку или квадар ставимо на сто: тада од три ивице које полазе из једног темена, две леже у равни стола (у правоугаонику), а трећа никако. **Равна геометриска слика има две димензије,** тј. протеже се само у два нормална правца који полазе из једне тачке слике.

Ако код квадрата или правоугаоника посматрамо једно теме и две стране које из њега полазе, видимо да можемо мерити и **величину тог протезања.** Квадрат има једнаку дужину и ширину, зато кажемо: квадрат има једнаке димензије. Правоугаоник нема једнаке димензије, тј. његова дужина није једнака ширини.

Узмимо на једној дужи једну тачку и из ње повуцимо три међусобно нормална зрака, али тако да један од њих поклапа ту дуж. Овај ће зрак једним својим делом, ма како малим, бити на тој дужи. Због тога кажемо да **дуж има једну димензију,** тј. протеже се само у једном правцу. Ту димензију зовемо **дужина.** Јасно је да код сваке дужи можемо ову димензију и мерити.

Из овога видимо да међу геометриским облицима тело има три димензије, равна слика две, дуж једну. Тачка нема своје величине, она се не протеже ни у једном правцу. **Тачка је геометриски облик који нема димензија.**

2. ПОВРШИНА КВАДРАТА И ПРАВОУГАОНИКА

Јединица за мерење површине је квадрат чија је свака страна дуга један метар. Такав се квадрат зове **квадратни метар,** а означава се са m^2. За мерење већих површина служимо се већим јединицама од квадратног метра, а то су:

1) Квадратни декаметар, ознака dkm^2, који садржи 100 m^2.

2) Квадратни хектометар, ознака hm^2, који садржи 100 dkm^2.

3) Квадратни километар, ознака km^2, који садржи 100 hm^2.

За квадратни декаметар и квадратни хектометар имамо и друга, народна имена, а то су: **ар** и **хектар.** Ознака за ар је „a", а за хектар „ha".

За мерење мањих површина служе нам мање јединице од квадратног метра, а то су:

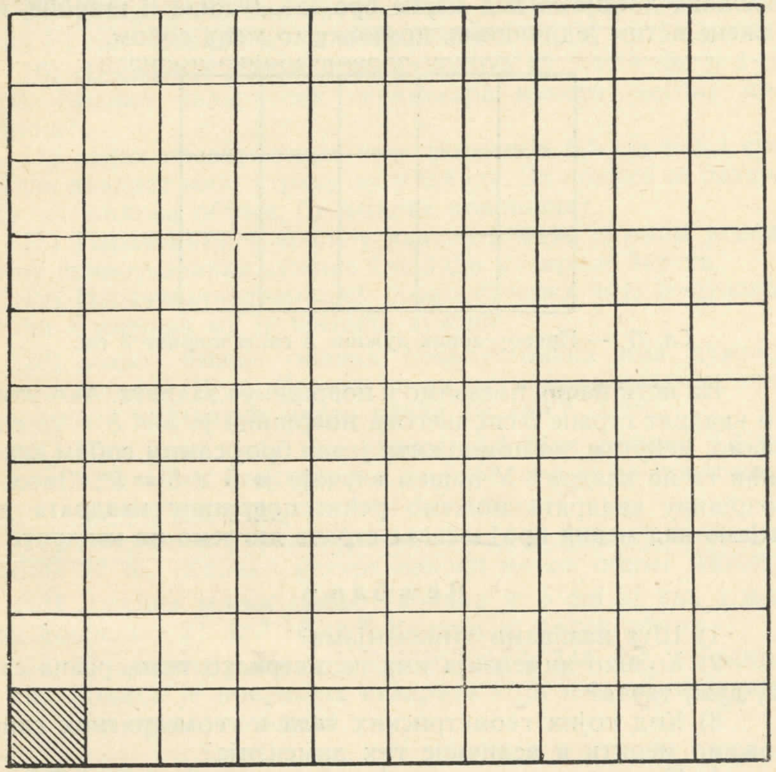
1) Квадратни десиметар, ознака dm^2, као стоти део квадратног метра.

2) Квадратни сантиметар, ознака cm^2, као стоти део квадратног десиметра.

3) Квадратни милиметар, ознака mm^2, као стоти део квадратног сантиметра.

На сл. 76 нацртан је квадратни десиметар подељен у квадратне сантиметре.

Код јединица за мерење површине треба запамтити да је свака од њих сто пута већа од претходне, а сто пута мања од следеће.



Сл. 76. — Квадратни десиметар.

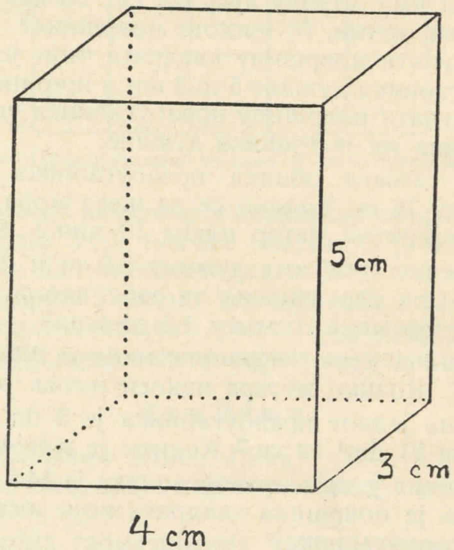
На сл. 77 нацртан је правоугаоник дужине 5 cm и ширине 3 cm. Да бисмо измерили његову површину, делимо његове стране у сантиметре, па подеоке на супротним странама спајамо дужима. На тај начин добијамо 15 cm^2, јер је свака страна малог квадрата дуга 1 cm. Површина нашег правоугаоника износи 15 cm^2. У исто време примећујемо да је $15 = 5 \times 3$. Значи да не морамо све стране делити у сантиметре и супротне подеоке спајати па онда тек бројати мале квадрате: довољно је помножити бројеве који показују дужину и ширину правоугаоника, па смо самим тим добили број који показује његову површину.

Бројеви које добијамо кад измеримо дужину и ширину правоугаоника зову се **мерни бројеви** дужине и ширине.

На пример на сл. 78 је квадар дужине 4 cm, ширине 3 cm и висине 5 cm. Радимо овако:

$$4 \times 3 = 12$$
$$4 \times 5 = 20$$
$$3 \times 5 = 15$$
$$47 \times 2 = 94 \text{ cm}^2.$$

И код израчунавања површине квадра морамо пазити да мерни бројеви његових димензија буду изражени истим дужинским јединицама.



Сл. 78. — Квадар дужине 4 cm, ширине 3 cm и висине 5 cm.

Вежбања

1) Како добијамо површину коцке?
2) Израчунај површину коцке чија је ивица 12 cm.
3) Израчунај површину коцке чија је ивица 1 m 5 cm.
4) Израчунај површину коцке чија је ивица 0,2 dm.
5) Израчунај у квадратним метрима површину коцке чија је ивица 15 dm.
6) Димензије једног квадра су: 10 cm, 6 cm, и 8 cm. Колика му је површина?
7) Квадар висине 15 cm има за основу квадрат стране 4 cm. Израчунати његову површину.
8) Квадар има димензије: 2,4 cm, 1,8 cm и 3 cm, а једна коцка има ивицу 2,3 cm. Које од та два тела има већу површину и за колико?

9) Једна масивна коцка ивице 4 cm 5 mm треба да се позлати. Колико ће то стајати, ако се за сваки квадратни сантиметар површине мора платити 10 динара?
10) Збир ивица једне коцке је 156 cm. Израчунати њену површину.
11) Колико се коцки са ивицом од 5 cm може направити од једног картона у облику квадрата стране 6 dm?
12) Збир ивица једног квадра је 136 dm. Израчунати његову површину, ако му је основа квадрат стране 12 dm.

4. ЗАПРЕМИНА КОЦКЕ И КВАДРА

Јединица за мерење запремине је коцка чија је ивица дуга 1 m. Таква се коцка зове **кубни метар** и означава се са m^3. За мерење већих запремина служимо се већим јединицама од кубног метра, а то су:

1) Кубни декаметар, ознака dkm^3, садржи 1000 m^3.
2) Кубни хектометар, ознака hm^3, садржи 1000 dkm^3.
3) Кубни километар, ознака km^3, садржи 1000 hm^3.

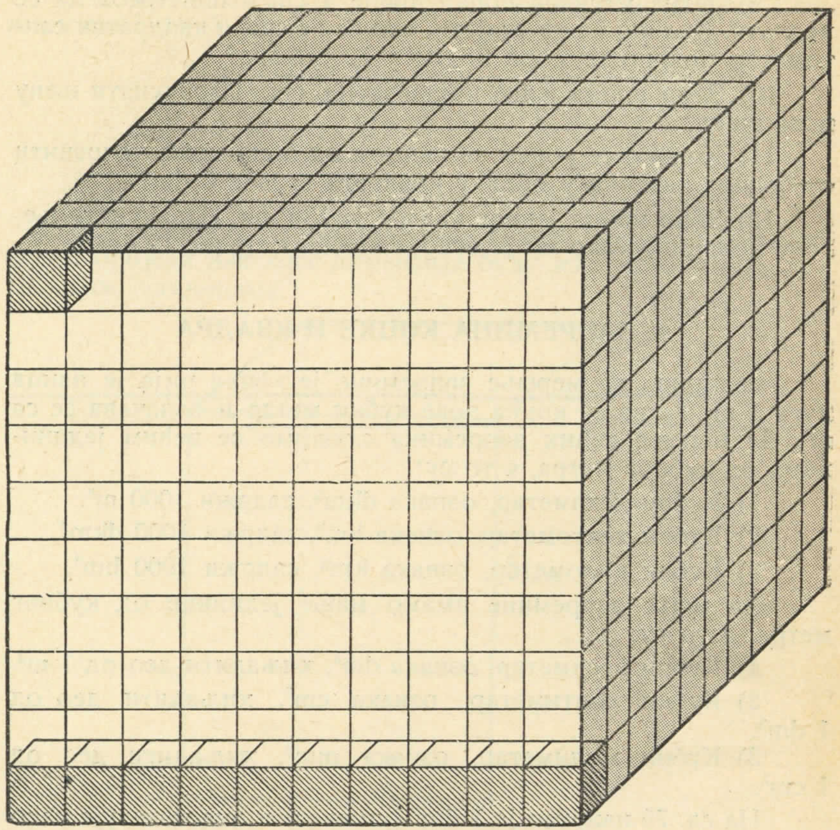
За мање запремине имамо мање јединице од кубног метра, а то су:

1) Кубни десиметар, ознака dm^3, хиљадити део од 1 m^3.
2) Кубни сантиметар, ознака cm^3, хиљадити део од 1 dm^3.
3) Кубни милиметар, ознака mm^3, хиљадити део од 1 cm^3.

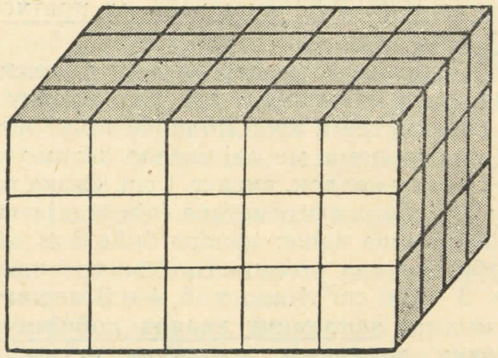
На сл. 79 нацртан је 1 dm^3 (умањен) и она показује како можемо претставити да се 1000 cm^3 садрже у једном кубном десиметру.

Код јединица за мерење запремине морамо запамтити да је ма која од њих 1000 пута већа од претходне, а 1000 пута мања од следеће.

На сл. 80 нацртан је квадар чије су димензије: дужина 5 cm, ширина 4 cm и висина 3 cm. Ако висину тог квадра поделимо на сантиметре и кроз подеоне тачке повучемо равни паралелне са основама, ми тај квадар делимо у три плоче. Те три плоче опет су квадри, висине 1 cm. Свака од тих плоча има по $4 \times 5 = 20$ кубних сантиметара (погледај горњу основу). Према томе запремина нашег квадра биће $3 \times 20 = 60$ cm^3. Исти број добијамо кад помножимо све три ивице међу собом: $5 \times 4 \times 3 = 60$ cm^3. Како су 5, 4 и 3 мерни бројеви димензија, то имамо: **запремину квадра добијамо кад мерне бројеве његових димензија, изражене истим јединицама, помножимо међу собом.**



Сл. 79. — Кубни десиметар (умањен).



Сл. 80. — Квадар чије су димензије: 5 cm, 4 cm и 3 cm.

Да бисмо израчунали запремину коцке, идемо истим путем. Само, пошто су димензије коцке једнаке, то мерни број њене ивице узимамо три пута као чинитељ. Али знамо да узети три пута један број као чинитељ значи дићи га на куб. Тако, ако је ивица једне коцке 4 cm, онда је $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ cm^3 њена запремина. Зато кажемо: **запремину коцке добијамо кад мерни број њене ивице дигнемо на куб.**

Вежбања

1) Шта је јединица за мерење запремине?
2) Које су мање и веће јединице од кубног метра?
3) Како добијамо запремину коцке?
4) Како добијамо запремину квадра?
5) Колика је запремина коцке ивице 7 cm?
6) Колика је запремина коцке ивице 1 m 4 dm?
7) Изрази у кубним метрима запремину коцке чија је ивица 11 dm?
8) Квадар има димензије: 8 cm, 7 cm и 9 cm. Израчунати његову запремину?
9) Квадар висине 10 mm има за основу квадрат стране 4 mm. Колика му је запремина, изражена у кубним сантиметрима?
10) Збир ивица једне коцке је 44 cm. Израчунати њену запремину.
11) Дрва за продају наслагана су у облику квадра дужине 12 m, ширине 8 m и висине 6 m. Колико је за њих трговац платио, ако је за сваки кубни метар морао дати 75 динара?
12) У једној учионици, чије су димензије 8 m, 5 m и 4 m, има 40 ученика. По колико кубних метара ваздуха пада на свакога ученика?
13) Колико је простора потребно да се наслажу 6 греда дужине 4 m 5 dm, ширине 1 dm 6 cm и дебљине 8 cm?
14) Квадар има димензије 3 m, 6 m и 9 m. Колико пута је он већи од коцке ивице 3 m?
15) Колико би се коцки запремине 1 dm^3 могло направити од картона у облику правоугаоника, дужине 4 dm и ширине 3 dm?
16) Колики је збир ивица коцке чија је запремина 1 dm^3?