KURS OPŠTE MATEMATIKE

ELEMENTI ANALIZE

po predavanjima g. prof. J. KARAMATE

Izdanje Stručnog udruženja studenata
Prirodnjačko-matematičkog i filozofskog fakulteta
Beograd 1947

Lit. i štamp. T. K. Bojković, Beograd, Dalmatinska 101

GLAVA I

FUNKCIJA

GLAVA I

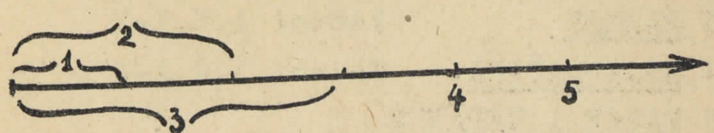
F U N K C I J A

1.1. B R O J

/I/ Niz celih brojeva

1,2,3..........m,.....n,......

zovemo prirodni niz ili niz prirodnih brojeva.



sl.1

Ako u nizu prirodnih brojeva broj m prethodi broju n, kažemo da je m manji od n i pišemo

$$m < n;$$

ako broj n sledi broj m kažemo da je n veći od m i pišemo

$$n > m.$$

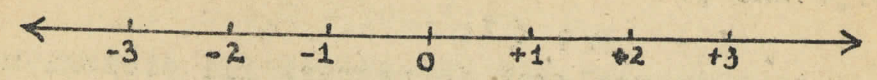
U nizu prirodnih brojeva nema najvećg broja, što kažemo drugim rečima da je prirodni niz neograničen.

Ako prirodnome nizu dodamo nulu i negativne cele brojeve dobijamo niz

........-n,.....-3,-2,-1,0,1,2,3......n.....

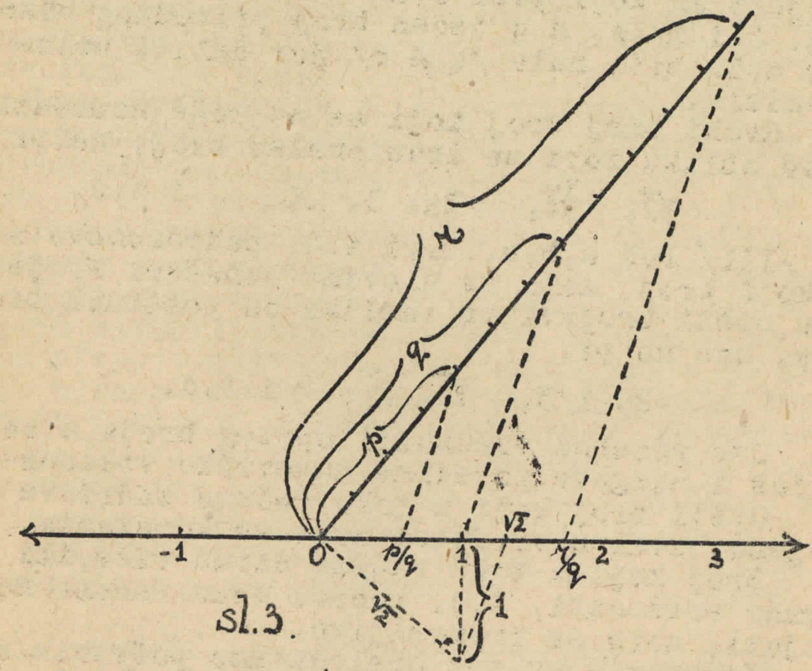
koji je neograničen sa obe strane.

Prenošenjem jedinične duži na pravu liniju i orijentisanjem ove prave znakom + na desno i znakom - na levo, dobijamo brojnu liniju /v.sl.2/



sl.2

/II/ Količnik iz dva cela broja p i q, tj. broj p/q zovemo razlomljen broj ili razlomak. Svakom pozitivnom i negativnom razlomku odgovara jedna tačka na brojnoj liniji /v.sl.3/



sl.3.

Za razlomak p/q kažemo da je manji od razlomka p'/q' i pišemo

$$p/q < p'/q'$$

ako se na brojnoj liniji odgovarajuća tačka razlomka p/q nalazi levo od odgovarajuće tačke razlomka p'/q'.

Kako je

$$p/q = pq'/qq' \quad i \quad p'/q' = p'q/qq',$$

to će p/q biti manje od p'/q' ako je $pq' < p'q$.

Za razlomak p/q kažemo da je pravi razlomak, ako je brojitelj p manji od imenitelja q, t.j. ako je

$$p/q < 1;$$

u suprotnom razlomak je nepravi ili složeni na pr. 7/5 $\frac{1}{5}$ 1 2/5.

Pozitivne i negativne cele brojeve, nulu, pozitivne i negativne razlomke nazivamo racionalnim brojevima.

Znači svaki racionalan broj ima oblik p/q, gde je p ma koji pozitivan ili negativan ceo broj, ili nula, a q jedan broj prirodnog niza. q ne može biti nula /$q \neq 0$/ jer deliti nulom nema smisla.

Svaki onaj broj koji se ne može napisati u ovome obliku zove se iracionalan broj; na.pr.

$$\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{4},\quad \lg 3,\quad \pi,\quad \text{i t.d.}$$

/III/ Pod a,b,c......i t.d. podrazumeva se ma koji broj, zato se slovima označeni brojevi zovu opšti brojevi, za razliku od posebnih brojeva, kao na pr.

$$-2,\ 1/3,\ \sqrt{5},\ \pi\ ,\ \text{i t.d.}$$

Ove posebne vrednosti opšteg broja „a" zovu se još i njegove pojedine numeričke vrednosti.

Opšti broj koji u toku računa zadržava odredjenu, stalnu vrednost zove se konstanta.

Broj koji u toku računa uzima više, ili sve moguće vrednosti, t.j. koji u toku računa može menjati, zove se promenljiva.

Konstante obične obeležavamo početnim /a, b,c,...../, a promenljive krajnjim /x,y,t,.../ slovima azbuke.

Zadaci.

1/ Napiši u obliku razlomka brojeve: 0,5; -0,25; 1,3; 0,012.

2/ Da li 0,333 i 1/3 prestavlja isti broj?

3/ Napiši u obliku decimalnih razlomaka brojeve: 1/5; 7/10; 10^{-2}; 10-3; 1/3; 1/6.

4/ Pokaži da je 1/ kvadrat celog broja ceo broj; 2/ kvadrat razlomka razlomak; 3/ otuda zaključi da kvadratni koreni brojeva

2,3,5,6,7,8,10,11........

ne mogu biti racionalni brojevi.

1.2. F U N K C I J A.

/I/ Dve promenljive zavise jedna od druge, kad su promenama jedne uslovljene promene druge, t.j. kad datim vrednostima jedne promenljive odgovaraju odredjene vrednosti druge promenljive; u tom slučaju kažemo da je jedna promenljiva funkcija druge.

Onu promenljivu y, čije su vrednosti odredjene vrednostima promenljive x, zovemo zavisna promenljiva, za razliku od nezavisne promenljive x, čije vrednosti po volji biramo.

Ovo u kratko izražavamo i na taj način što kažemo da je y funkcija od x, ili funkcija x-a.

Naprimer: Površina kvadrata je funkcija njegove strane; obratno, strana kvadrata je funkcija njegove površine. Zapremina lopte je funkcija njenog poluprečnika. Privlačna sila dvaju tela je funkcija njihova otstojanja. Zapremina gasa je funkcija pritiska i temperature. Kvadrat, kub, kvadratni koren, kubni koren, logaritam i t.d. nekog broja su funkcije toga broja.

/II/ Činjenicu da y zavisi od x, t.j. da je y funkcija x-a obeležavamo sa

y = f/x/ , /čitaj: y jednako f od x/

i kažemo ukratko: y je funkcija od x.

Umesto slova f može se upotrebiti i svako drugo slovo na pr.:

y = F/x/, y = g/x/, y = G/x/, y = φ/x/, y = Φ/x/

Neka je a dat broj; f/a/ označava vrednost funkcije koju ova uzima za x = a.

Pr./1/. Neka je f/x/ = x^2+3x+2, odrediti f/1/, f/o/, f/-1/ i f/1/2/. Urediti f/1+h/ po opadajućim stepenima od h.

$$f/1/ = 1^2+3.1+2 = 6;$$

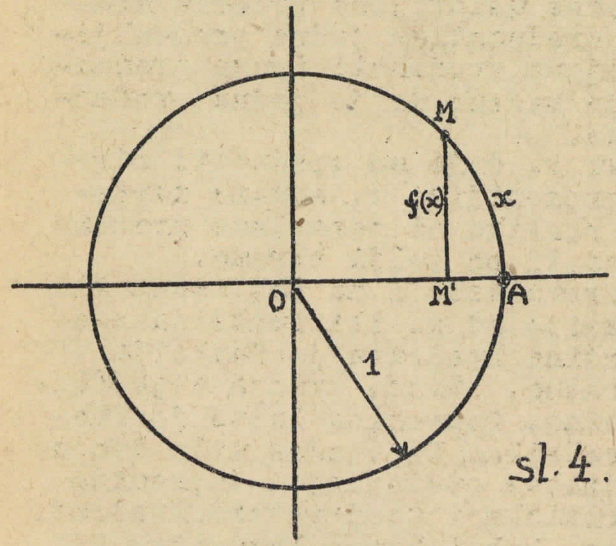
$$f/o/ = 0^2+3.0+2 = 2;$$

$$f/-1/= /-1/^2+ 3/-1/+2 = 0;$$

$$f[1/2] = [1/2]^2+3[1/2]+2=1/4+3/2+2 =15/4;$$

$$f/1+h/ = /1+h/^2+3/1+h/+2=/1+2h+h^2/+3+3h+2;$$

$$\therefore\ f/1+h/ = h^2+ 5h+6$$



sl. 4.

Napomena: Znak $\therefore$ kazuje da dobiveni obrazac ili rezultat s l e d u j e neposredno iz prethodnog.

Pr. /2/ Neka je $f/x/=\sin x$, t.j. $f/x/$ je funkcija luka $\widehat{AM} = x$ definisana dužinom $\overline{MM'} = f/x/$; poluprečnik kruga $\overline{OA} =1$ /v. sl. 4/.

Odrediti: $f/\frac{\pi}{2}/$, $f/\frac{\pi}{3}/$, $f/\frac{\pi}{4}/$, $f/\frac{\pi}{6}/$, $f/0/$ i $f/\pi/$.

$$f/\frac{\pi}{2}/ =\sin 90^\circ=1,\quad f/\frac{\pi}{3}/=\sin 60^\circ= 3/2,$$

$$f/\frac{\pi}{4}/ =\sin 45^\circ= 2/2,\quad f/\frac{\pi}{6}/=\sin 30^\circ=1/2,$$

$$f/o/ = \sin 0^\circ = 0,\quad f/\pi/ =\sin 180^\circ=0.$$

Zadaci 1.2. 1-3.

1/ Izračunati $f/3/, f/2/, f/-1/, f[1/2]$, $\{f/4/-f(o)\}/f(3)$ i $\sqrt{f^2(3/2)-f^2(1)}$, ako je

/I/ $f/x/ = 2x^2-3x +1$, /II/ $f/x/ = \sqrt{2x}$.

$f^2/a/$ je kvadrat broja $f/a/$ t.j. $[f/a/]^2$

2/ Za $f/x/ =2x^3+x^2-x+6$ imamo: $f/2/ = 3f/1/$, $f/-1/ = f/o/$, $2f/-2/= -f/1/$.

3/ Koliko je $f/o/$, $f/\frac{\pi}{6}/$, $f/\frac{\pi}{4}/$, $f/\frac{\pi}{3}/$, $f/\frac{\pi}{2}/$ i $f/\pi/$ kada je /I/ $f/x/ = \cos x$; /II/ $f/x/ = \sin^2 x$; /III/ $f/x/ = \sin 2x$.

1.3. J E D N A Č I N A.

Ako tražimo one vrednosti od x za koje funkcija $f/x/$ uzima datu vrednost a, stavljamo

$$f/x/ = a$$

Ovaj izraz nazivamo jednačina, a one vrednosti promenljive x za koje je ova jednačina zadovoljena [za koje $f/x/$ postaje jednako a] nazivamo rešenja ili koreni te jednačine. Rešiti jednačinu, znači odrediti t.j. izračunati njene korene.

Primer /1/. - Rešiti jednačinu $f/x/ = 3$ gde je $f/x/ = 2x-3$.

$$\text{Imamo } 2x-3 = 3,$$

$$\therefore\ 2x = 3+3 =6,$$

$$\therefore\ x = 6/2 = 3.$$

Primer /2/. - Rešiti jednačinu $f/x/ = 0$, gde je $f/x/ = x^2 - 3x+2$.

$$\text{Imamo } x^2-3x+2 = 0$$

$$\therefore\ x^2-2\tfrac{3}{2}x +/\tfrac{3}{2}/^2= /\tfrac{3}{2}/^2-2,$$

$$\therefore\ /x- \tfrac{3}{2}/^2 = 1/4,$$

$$\therefore\ x- \tfrac{3}{2} = \pm \tfrac{1}{4} = \pm \tfrac{1}{2},$$

$$\therefore\ x= \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\quad \tfrac{3\pm 1}{2};$$

koreni su $x = \frac{3+1}{2} = 2$ i $x = \frac{3-1}{2} = 1$.

Koreni jednačine $f/x/ = 0$ zovu se nule funkcije $f/x/$; tako su 1 i 2 nule funkcije $f/x/ = x^2 - 3x + 2$.

Primer /3/.- Rešiti jednačinu $f/x/ = f/3/$ kad je $f/x/ = x^3 - 7x$.

Primetimo da je $x=3$ jedan koren postavljene jednačine, jer je $f/3/ = f/3/$. Kako jednačina glasi

$$f/x/ = x^3 - 7x = 3^3 - 7.3 = 6 = f/3/;$$

t.j. $f/x/ - f/3/ = x^3 - 7x - 6 = 0$,

to će leva strana biti deljiva sa $x-3$:

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 7x - 6 : x - 3 = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{x^3 - 3x^2} \\
\quad 3x^2 - 7x - 6 \\
\quad \underline{3x^2 - 9x} \\
\qquad 2x - 6 \\
\qquad \underline{2x - 6} \\
\qquad -0-
\end{array}
$$

Data jednačina uzima oblik:

$$/x-3/\ /x^2 + 3x + 2/ = 0,$$

$$\therefore\ /x-3/\ /x+2/\ /x+1/ = 0,$$

$$\therefore\ x = 3, \quad x = 2, \quad x = 1.$$

Napomena /I/.- $x=a$ je uvek jedan koren jednačine $f/x/ = f/a/$, /II/ $f/x/ - f/a/$ je obično deljivo sa $x-a$; tada je $x-a$ obično faktor izraza $f/x/ - f/a/$.

Zadaci. 1-9.

Rešiti jednačine:

1/ $f/x/ = 1$, kad je $f/x/ = x^2 - x - 1/^2$.

2/ $f/x/ = f/1/$, kad je /I/ $f/x/ = 4x^3 - 7x$;

II/ $f/x/ = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + 1$.

3/ $xg/x/ - g^2/x/ = 0$, gde je $g/x/ = 3x^2 - 2$;

4/ $f/x/ = 5$ za $f/x/ = 4x^2 + 3x - 2$;

Odrediti nule funkcija:

5/ $F/x/ = x^3 - x$;

6/ $F/x/ = x^4 - 4x^2$;

7/ $F/x/ = /x^2 - 1/\ /x^2 + 1/$;

8/ $f/x/ = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$;

9/ Neka je $f/x/ = 1 + \sqrt{x-1}$, jednačina $f/x/ = f/1/$ ima koren $x = 1$, ali izraz $f/x/ - f/1/$ nije deljiv sa $x-1$.

1.4. T A B E L E.

Proučiti datu funkciju $f/x/$ znači: ispitati način na koji se ona menja kad se x menja t.j. ispitati njen tok.

Ovo se donekle postizava tako zvanim numeričkim tabelama. Jedna takva numerička tabela za funkciju

$$f/x/ = \frac{2-x}{1+x^2}$$

data je tablicom pod I.

Tabela I: x	f/x/	Tabela II: x	f/x/
-3	0.50	-1	1,50
-2	0,80	-0,9	1,60
-1	1,50	-0,8	1,71
0	2,00	-0,7	1,81
1	0,50	-0,6	1,91
2	0,00	-0,5	2,00
3	-0,10	-0,4	2.07
4	-0,12	-0,3	2,11
5	-0,12	-0,2	2,12
6	-0,11	-0,1	2,08
7	-0,10	0	2,00

Iz tabele I vidimo da $f/x/$ najpre raste do neke vrednosti izmedju $x = -1$ i $x = 0$; zatim opada do nule. Za $x = 2$ je $f/x/ = 0$. Zatim postaje negativna i produži da opada sve dok x ne dostigne neku vrednost izmedju $x=4$ i $x=5$; zatim ponovo raste ostajući negativna.

Precizniji tok dobivamo ako tabelu upotpunimo uzimajući gušće vrednosti za x; tako tabela II upotpunjuje tabelu I za vrednosti x izmedju -1 i 0.Iz nje vidimo na pr. da funkcija f/x/ raste do blizu vrednosti x =-o,2 a zatim opada.

Napomena.- Logaritmske tablice, tablice trigonometriskih funkcija, kvadrata, kubova, kvadratnih i kubnih korenova su primeri numeričkih tabela.

Zadatak 1.4. 1.

(x^2+1) 1/ Obrazovati tabelu funkcije $f/x/=/x^3+10x/$. za x= -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4;gde funkcija menja rašćenje;obrazovati deset puta gušću tabelu.

1.5. D I A G R A M .

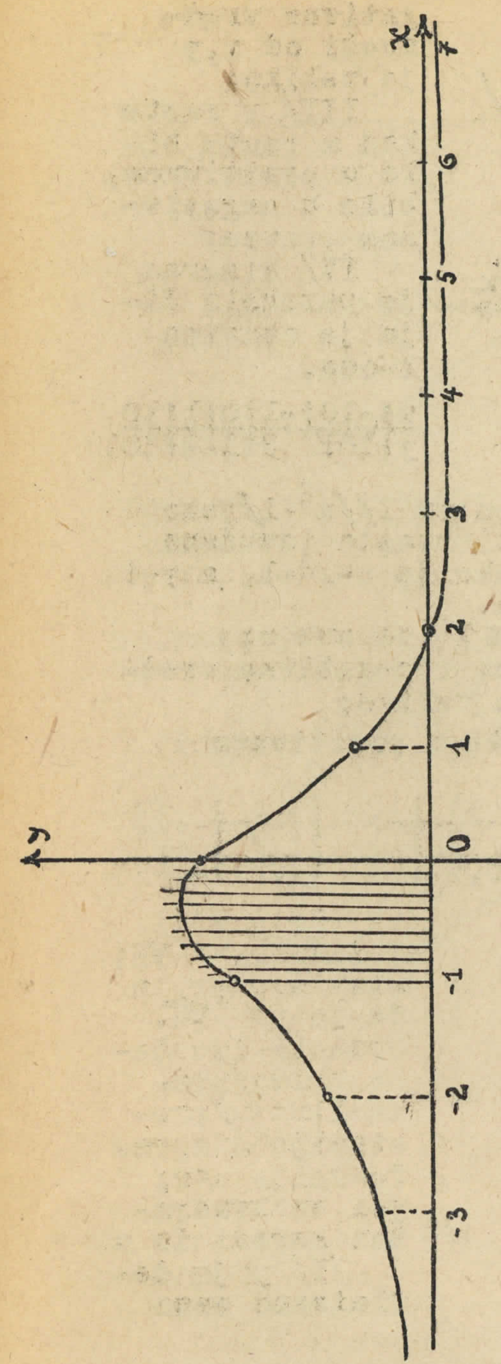
Pregledniji tok funkcije dobijamo ako tabele grafički pretstavimo.Uzmimo,primera radi, gornje tabele;prenesimo vrednosti x na X-osu a odgovarajuće vrednosti funkcije y= f/x/ na Y-osu. Time dobivamo niz tačaka koje,spajanjem, daju krivu liniju. Ova se kriva zove diagram funkcije y = f/x/.

Slika 2 pretstavlja diagram funkcije $f/x/=/2-x/\,/\,/1+x^2/$; obratno kažemo da je $y=/2-x/:/1+x^2/$ jednačina krive linije prikazane na slici 5.

Obično nije potrebna tako precizna slika diagrama; važnije je istaći markantne podatke o toku funkcije i to: kada je funkcija jednaka nuli, kada je ona pozitivna ili negativna,kada raste ili opada, i t.d. U tome slučaju,u koliko se prave numeričke table, u njih treba uneti pored markantnih vrednosti x-a i y-a,još samo one koje su potrebne da se diagram upotpuni.

Napomena.- /I/ Budući da svakom broju,kada ga prenesemo na brojnu liniju, odgovara jedna tačka,to često umesto b r o j kažemo t a č k a i obratno.

II/ Prilikom konstrukcije diagrama,jedinice u pravcu x-ose i y-ose ne moraju biti jednake, t.j. apscise i ordinate ne moraju imati



sl.5.

istu srazmeru.

Primera radi, konstruisaćemo diagrame sledećih funkcija:

1/ x/x-1/; 2/ x^2+1; 3/ $1/\!/x^2+1/$; 4/ $\pm\sqrt{x}$; 5/ $\pm\sqrt{x/2-x/}$.

Pr./1/.Vidi sliku 6.Pre nego što crtamo diagram funkcije y=x/x-1/ primetimo:

/I/ y = 0 kad je x=0 i x =1;

/II/ y>0 kad je x<o i x > 1;

/III/ y<o kad je 0<x < 1;

/IV/ y je veliko za velike pozitivne i negativne vrednosti x-a ;

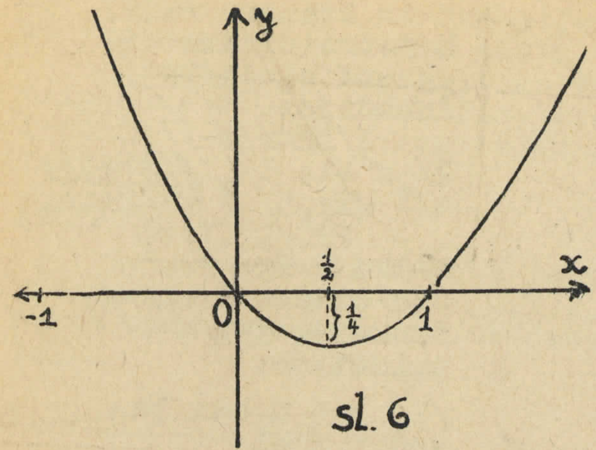
/V/ diagram je parabola čija je osovina paralelna Y-osi.

x	-10	-2	-1	0	1/2	1	2	10
y	110	6	2	0	1/4	0	2	90

Pr./2/.Vidi sl.7.Funkcija $y=x^2+1$ ima sledeće osobine:

I/ y je stalno pozitivno i ≥1;

II/ za velike pozitivne i ne-



sl. 6

gativne vrednosti od x,y je veliko;

III/ y raste kad x raste bilo u pozitivnom, bilo u negativnom pravcu;

IV/ diagram je parabola čija je osovina Y-osa.

x	-10	-1	0	1	10
y	101	2	1	2	101

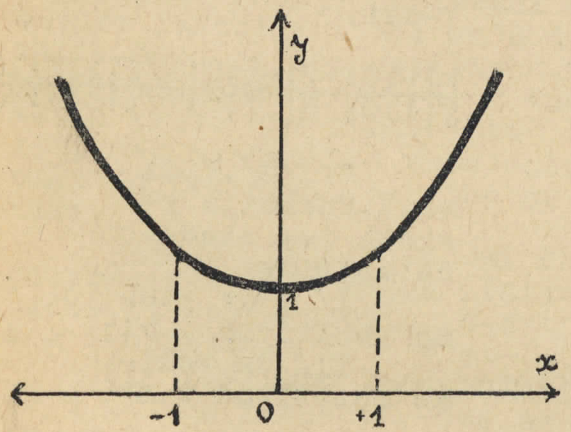
Pr./3/. Vidi sl.8. Imamo: $y = 1/(x^2+1)$; ako stavimo $u = x^2+1$, biće $y=1/u$. Crtasto izvučena kriva prestavlja diagram funkcije $u=x^2+1$, a y-i su recipročne vrednosti od u.

/I/ y je uvek > 0 i ≤ 1 za sve x;

/II/ za velike pozitivne i negativne vrednosti x-a, y je malo jer je u veliko;

/III/ y opada kad x raste u pozitivnom i negativnom pravcu.

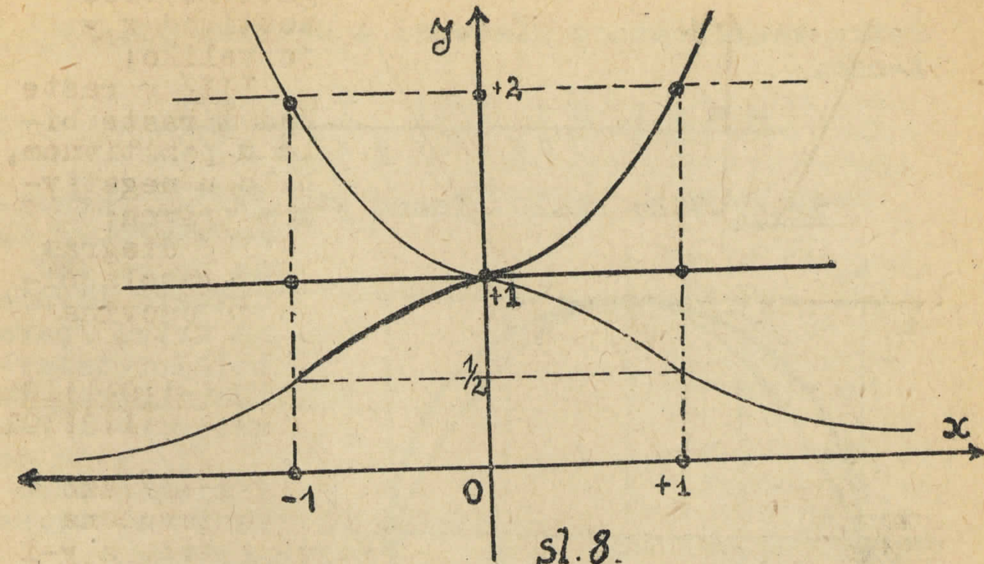
x	-10	-1	0	1	10
u	101	2	1	2	101
y	0,01	0,5	1	0,5	0,01



sl. 7.

Pr.4/Vidi [illegible].Imamo $y= \pm\sqrt{x}$; stavimo u=x, tada je $y= \pm\sqrt{u}$. Crtasto izvučena kriva/prava linija/prestavlja diagram funkcije u=x; y-i su kvadratni koreni iz u.

/I/ y je definisano samo



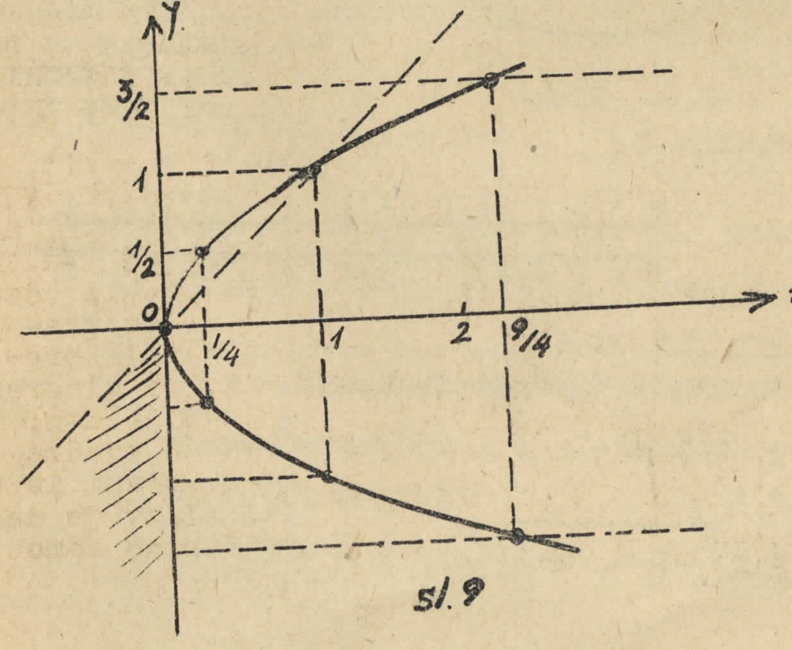
sl. 8.

za pozitivno x;

/II/ y=o za x=o; za x veliko, y je veliko;

/III/ y > u za o < x < 1; y < u za x > 1;

/IV/ diagram je parabola sa temenom u po-



sl. 9

četku koordinatnog sistema, a osovina joj je X-osa.

$u = x$	0	1/4	1	9/4
y	0	$\pm$ 1/2	$\pm$ 1	$\pm$3/2

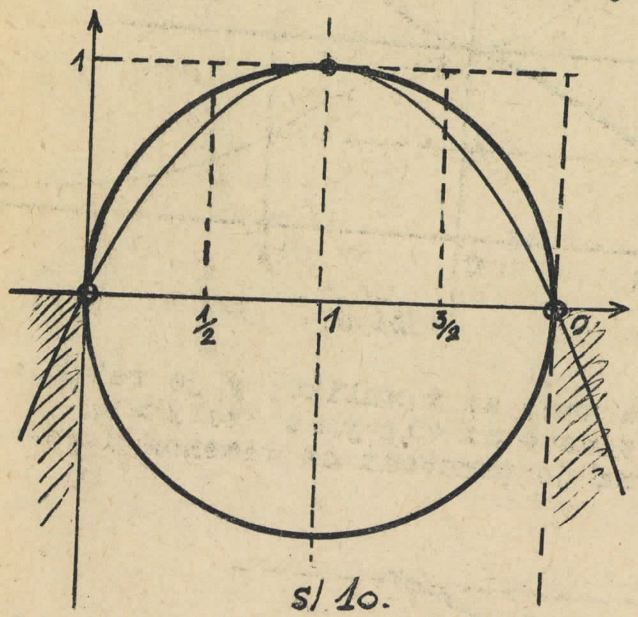
Pr.5/.Vidi sl.10. Imamo $y = \pm\sqrt{x/2-x/}$; stavimo $v = x/2-x/$, tada je $y = \pm\sqrt{v}$. Crtasto izvučena kriva /parabola/pretstavlja diagram funkcije $v = x/2-x/$.

/I/ y je definisamo samo za $v > o$, tj.za $o < x < 2$;

/II/ $y = o$ za $x=0$ i $x = 2$;

/III/ $y > v$ za $o < x < 2$, jer je $v < 1$ za $o < x < 2$;

/IV/ diagram je krug sa centrom u tački $x=1$, $y=o$ i po-



sl 10.

lupréčnikom 1.

x	0	1/2	1	3/2	2
v	0	3/4	1	3/4	0
y	0	$\pm\sqrt{3}/2$	±1	$\pm\sqrt{3}/2$	0

Zadaci.- 1.5. 1-6.

Nacrtati diagram funkcija:

1/ $y = /x-1//x-3/$; 2/ $y = x^2-2x+2$;

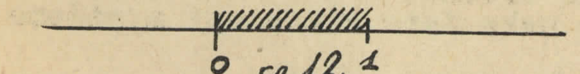
3/ $y = x^3$; 4/ $y = 4/[x^2+2]$;

5/ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}/x-1//2-x/}$; 6/ $y = \pm\sqrt{x^2-1}$.

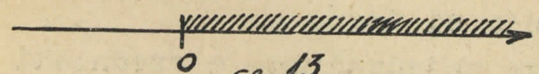
1 6. R A Z M A K .

/I/ Data su dva broja a i b, $b > a$.Sve brojeve koji se nalaze izmedju a i b ili sve tačke koje se na brojnoj liniji nalaze izmedju tačaka a i b nazivamo razmak /interval/ i označavamo ga sa /a,b/, vidi sl.11.

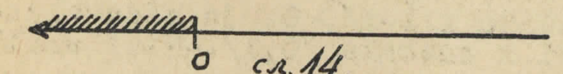
сл. 11.



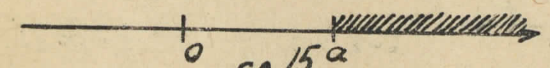
сл. 12.



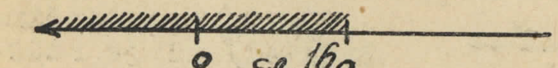
сл. 13.



сл. 14.



сл. 15.



сл. 16.

Pr.1/ Vidi sl. 12.Razmak /0,1/ pretstavlja sve pozitivne brojeve manje od 1.

Pr.2/ Vidi sl. 13. Razmak $/o,\infty/$ pretstavlja sve pozitivne brojeve.

Pr.3/.Vidi sl. 14.Razmak $/-\infty,o/$ pretstavlja sve negativne brojeve.

Pr.4/ Vidi sl.15. Razmak $/a,\infty/$pretstavlja sve brojeve koji su veći od a.

Pr.5/ Vidi sl.16. Razmak $/-\infty,a/$ pretstavlja sve brojeve koji su manje od a.

Pr.6/ Razmak $/-\infty,+\infty/$ pretstavlja sve brojeve.

/II/ Funkcija obično nije odredjena, definisana za sve vrednosti od x, tj. u celom razmaku $/-\infty,+\infty/$.

Pr.7/ Funkcije $\sqrt{x}$ i log x su definisane samo u razmaku $/o,\infty/$.

Pr.8/ Funkcije $\sqrt{x/3-x/}$ i log x/3-x/ su definisane u razmaku /0,3/.

Pr.9/ Funkcija $\sqrt{/x-a//b-x/}$ je definicana u razmaku /a,b/.

Pr.10/ Funkcija $\sqrt{/x-1//x-2/}$ je definisana u razmacima $/-\infty,1/$ i $(2,\infty/$.

Pr.11/ Funkcije x^3, $x/x-1//x-3/$ i $\sqrt{x^2+1}$ su definisane u celom razmaku $/-\infty,+\infty/$.

Zad. U kojim su razmacima definisane funkcije:

1/ $\sqrt{x/x-1//x-2/}$; 2/ $\sqrt{1-2x^2}//x^2+1/$; 3/ $\sqrt{1-x}//2+\sqrt{x}/$; 4/ $\sqrt{2-\sqrt{x}}$; 5/ $\sqrt{\sin x}$; 6/ $\sqrt{1-\sin x}$; 7/ $\sqrt{\sin x-1}$?

1.7. N E J E D N A Č I N A.

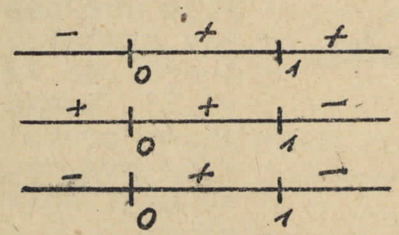
Kad tražimo one vrednosti x-a za koje je funkcija f/x/ veća od neke date vrednosti a, pišemo

$f/x/ > a$ /čitaj: f/x/ veća od a/ ili

$a < f/x/$ /čitaj a manje od f/x/.

Ovaj se izraz naziva nejednačina, a vrednosti od x, za koje je ona zadovoljena, rešenja.

Pr.1/ Nejednačina $x/1-x/ > 0$, je zadovoljena za sve vrednosti x razmaka /0,1/.-Vidi sl.17.



$x > 0$ u razm. $/0,\infty/$

$1-x > 0$ " " $/-\infty,1/$

$\therefore x/1-x/ > 0$ u razm. /0,1/

Pr.2/ Nejednačina $2x/(x^2+1/ < 1$ je zadovoljena za svako x.

Treba $2x < x^2+1$

$\therefore 0 < x^2+1-2x=/x-1/^2$

сл. 17.

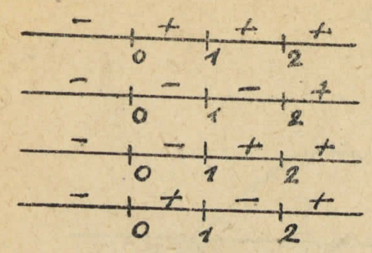
Pr.3/ Nejednačina $x - \frac{1}{x-1} > 1$ je zadovoljena kad se x nalazi u razmacima $/-\infty,1/$ i $/2,+\infty/$.

Data nejednačina se svodi na $x-1-1//x-1/ > 0$

$$\therefore \frac{/x-1/^2-1}{x-1} > 0,$$

$$\therefore \frac{x/x-2/}{x-1} > 0.$$

Dalje vidi sl. 18.



$x > 0$ u razmaku $/0,\infty/$

$x-2 > 0$ " " $/2,\infty/$

$x-1 > 0$ " " $/1,\infty/$

$\therefore \frac{x/x-2/}{x-1} > 0$ " "/0,1/i/2,∞/

sl. 18.

Zadaci.- 1-7. 1-5.

Rešiti nejednačine:

1/ $x/x-1//2-x/ > 0$; 2/ $x/x^2-1/ < 0$;
3/ $2x/(x^2+1/ < 3/5$; 4/ $[x+1]/[1-x] > 1$;
5/ $x/[x-1]+x//x-3/ < 0$.

1.8. PARNE I NEPARNE FUNKCIJE.

I/ Ako f/x/ ne menja svoju vrednost kad x-u promenimo znak, t.j. x zamenimo sa -x, dakle kad je

$$f/-x/ = f/x/$$

kažemo da je funkcija f/x/ parna.

Pr.1/ Funkcija x^4 je parna, jer je $/-x/^4 = x^4$.

Pr.2/ Funkcija cos x je parna, jer je cos /-x/ = cos x.

Funkcije čiji su diagrami prikazani na slikama 3,4 i 5 su parni.

Ako je f/x/ parna funkcija, Y-osa je osovina simetrije njenog diagrama. Vidi sl.19.

/II/. Ako f/x/ promene svoj znak, kad x promene znak, t.j. ako je

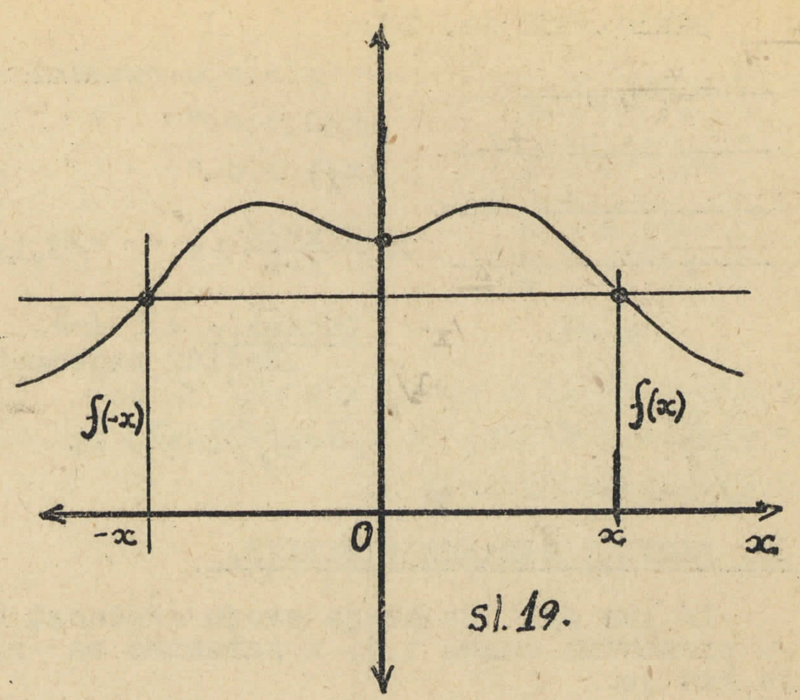
$$f/-x/ = -f/x/,$$

kažemo da je funkcija f/x/ neparna.

Neparne su funkcije:

Pr.3/ $f/x/ = x^3$, jer je $/-x/^3 = -x^3$

Pr.4/ $f/x/ = \sin x$, jer je $\sin/-x/ = -\sin x$.



sl. 19.

Pr.5/ Funkcija data u zadatku 1,4.1, jer je

$$\frac{/-x/^3+10/-x/}{/-x/^2+1} = -\ \frac{x^3+10x}{x^2+1}$$

Diagram neparne funkcije ima koordinatni početak kao središte /centar/ simetrije. Vidi sl. 20.

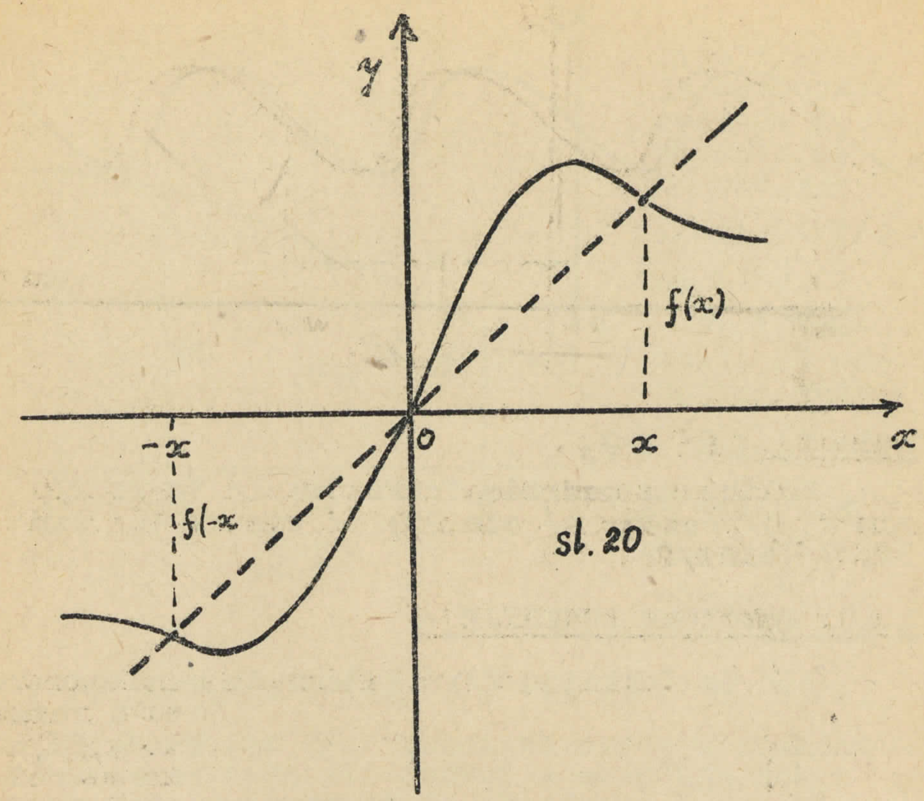
Zadaci.- 1.8. 1-7.

Ispitati da li su navedene funkcije parne ili neparne:

1/ $1//a+x^2/$; 2/ $x^3//a+x^2/$; 3/ x^{2k}, k=1,2,3...;

4/ x^{2k+1} , k= 0,1,2,.....; 5/ sin x/x;

6/ x cos x ; 7/ tg x?



sl. 20

1.9. PERIODIČNE FUNKCIJE.-

Ako se vrednosti funkcije ponavljaju pošto x predje neki odredjeni razmak dužine w, t.j. ako je

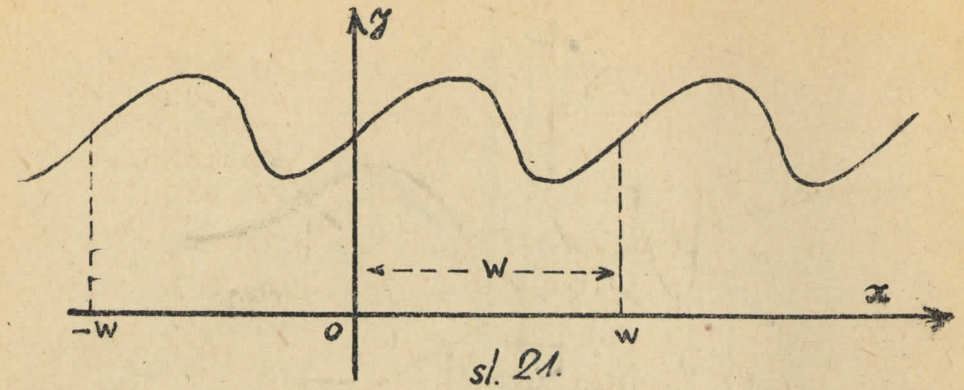
$$f/x+w/ = f/x/, \text{ i to za svako } x,$$

kažemo da je funkcija f/x/ periodična. Količina w zove se perioda funkcije f/x/.

Funkcije sin x i cos x su periodične sa periodom 2π, jer je

$$\sin/x+2\pi/ = \sin x \quad \text{i} \quad \cos/x+2\pi/ = \cos x.$$

Diagram jedne periodične funkcije prikazan je na slici 21.



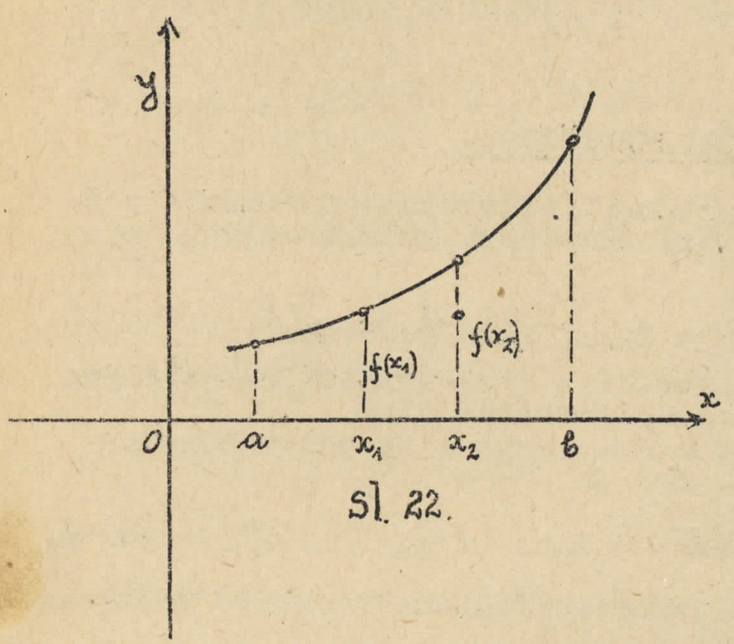
sl. 21.

Zadaci. 1.9. 1-7.

Kolike su periode funkcija: 1/ tg x; 2/ $\sin^2 x$; 3/ $\cos^2 x$; 4/ sin 2x; 5/ sin x/2; 6/ sin 3x; 7/ sin x/2 ?

1.10 MONOTONE FUNKCIJE

/I/ Za funkciju f/x/ kažemo da monotono raste u razmaku /a,b/, ako se vrednosti funkcije povećavaju dok x raste u tome razmaku, t.j. ako je



Sl. 22.

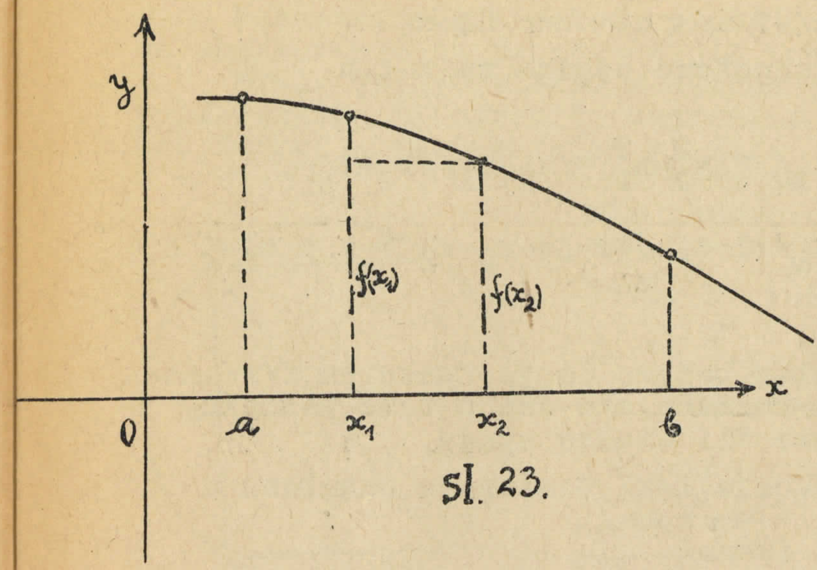
$f/x_2/ > f/x_1/$ za $x_2 > x_1$ /Vidi sl. 22/

Drugim rečima funkcija f/x/ je monotono rastuća u razmaku /a, b/ ako je

f/x+h/-f/x/ > o za h > o.

Pr.1/ Funkcija x^2 monotono raste za x > o. Imamo

$f/x+h/-f/x/ = /x+h/^2 - x^2 = 2hx+h^2$,



Sl. 23.

∴ f/x+h/-f/x/ = h/2x+h/ > o za x > o i h > o.

II/ Funkcija f/x/ monotono opada u razmaku /a,b/ ako se vrednosti funkcije smanjuju dok x raste u tome razmaku, t.j. ako je

$f/x_2/ < f/x_1/$ za $x_2 > x_1$ /vidi sl. 23/

Drugim rečima, funkcija f/x/ je monotono opadajuća u razmaku /a,b/ ako je

$$f/x+h/-f/x/ < o \quad \text{za} \quad h > o$$

Pr.2/ x^2 monotono opada za $x < o$

Imamo

$$f/x_2/-f/x_1/ = x_2^2-x_1^2 = /x_2-x_1//x_2+x_1/,$$

$$\therefore f/x_2/-f/x_1/ < o, \text{ jer je } x_2-x_1 > o \text{ a } x_2 < o$$

i $x_1 < o$

III/ Ukratko kažemo da je funkcija f/x/ monotona u nekom razmaku, ako ona u tome razmaku ili stalno raste ili stalno opada.

Pr.3/ Funkcija f/x/ = mx+p je monotona u celom razmaku $/-\infty, +\infty/$

Za h > o imamo

$$f/x+h/-f/x/ = m/x+h/+p - /mx+p/ = mh$$

$$\therefore f/x+h/-f/x/ \gtrless o \text{ ako je } m \gtrless o$$ (*)

Ako funkcija u/x/ monotono raste, tada:

1/ 1/u/x/ monotono opada;
2/ -u/x/ " " ;
3/ $\sqrt{u/x/}$ " raste;
4/ u^2 /x/ " "

Ako u/x/ i v/x/ monotono rastu, tada i u/x/.v/x/ monotono raste.

Zadaci: 1.10. 1-11.

Kako se u pogledu monotonije ponašaju funkcije:

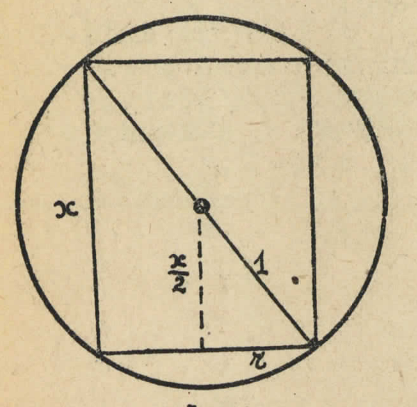
1/ x^3; 2/ x^4; 3/ $x+x^3$; 4/ $1/[x^2+1]$; 5/ x^2-2ax;
6/ $\sqrt{x}$; 7/ sin x; 8/ cos x; 9/ tg x; 10/ $\sqrt{x^2+1}$
11/ $x\sqrt{x}$.

(*) mx+p monotono raste ako je m > o, a monotono opada ako je m < o.

1.11. OBRAZOVANJE FUNKCIJA.

Geometrijski problemi pružaju mogućnost za obrazovanje najraznovrsnijih funkcija.

Pr.1/ Valjak visine x upisan je u loptu poluprečnika 1; odrediti zapreminu V valjka kao funkciju visine /vidi sl.24/



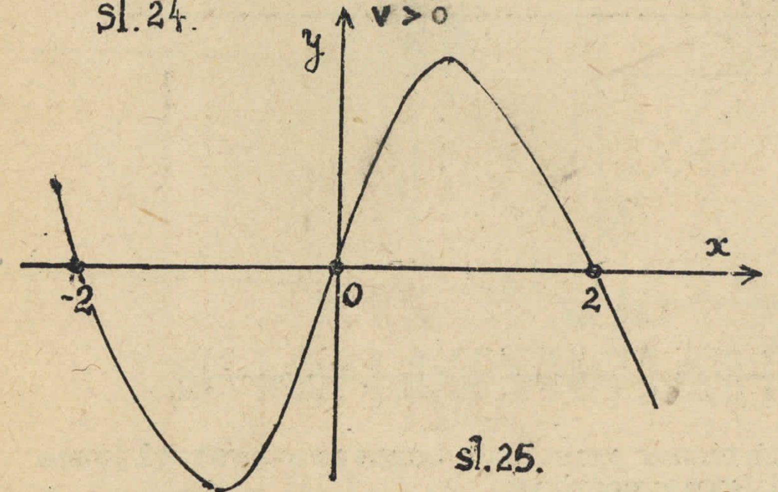
sl.24.

Neka je r poluprečnik osnove cilinda, tada je

$$V = \pi r^2 x \quad \text{i} \quad r^2 + [x/2]^2 = 1$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{4} \cdot x \cdot /4-x^2/.$$

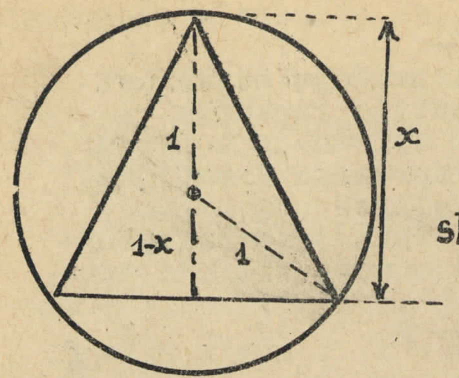
Diagram ove funkcije dat je na sl.25. Postavljenom geometrijskom zadatku odgovara deo diagrama koji se nalazi u razmaku /o,2/, jer su samo u tome razmaku i x i V > o



sl.25.

Pr.2/ U krugu poluprečnika 1, upisan je ravnokraki trougao visine x. Odrediti njegovu površinu P kao funkciju visine /vidi sl.26/.

Neka je a poluosnova trougla, tada je P= ax



sl.26

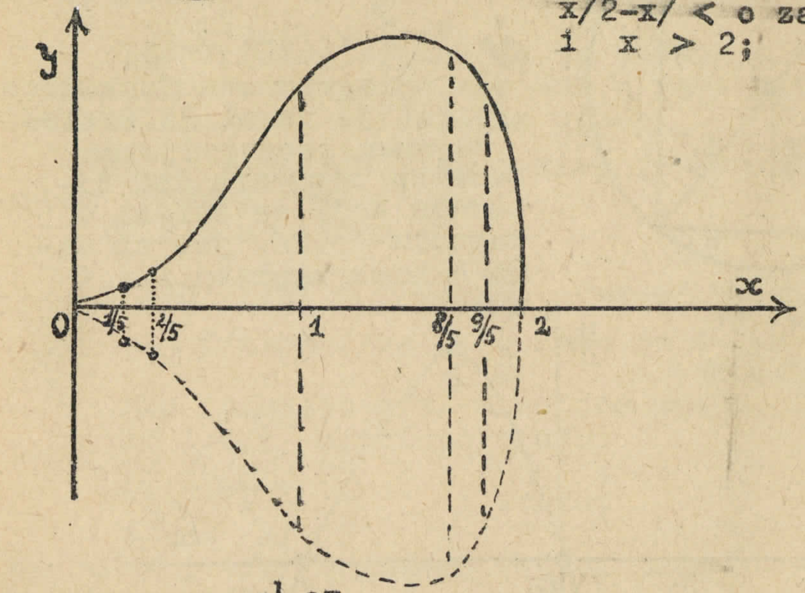
i $a^2+/x-1/^2=1$;

$\therefore\ a=\sqrt{x/2-x/}$ i

$P = x\sqrt{x/2-x/}$.

Diagram ove funkcije, prikazan na sl.27 dobiven je na osnovu sledećeg:

I/ P je definisano samo u razmaku /0,2/, jer je $x/2-x/ < 0$ za $x < 0$ i $x > 2$;

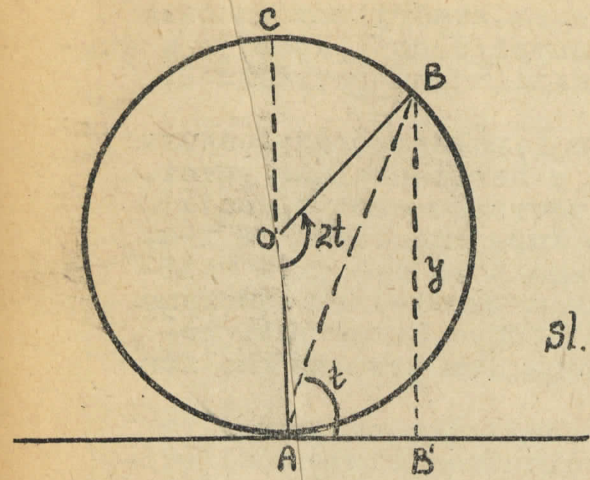


sl.27.

x	0	0,2	0,4	1	1,6	1,8	2
P	0	0,12	0,32	1	1,28	1,08	0

Negativna grana ne odgovara postavljenom geometrijskom zadatku.

Pr.3/ Neka je O središte kruga poluprečnika 1 i AOB sektor sa središnim uglom AOB= 2t u lučnoj meri. Odrediti otstojanje „y" tačke B od tangente na krug u tački A kao funkciju luka t. /vidi sl.28/.



sl. 28.

Neka je $y=\overline{BB'}$; tada je

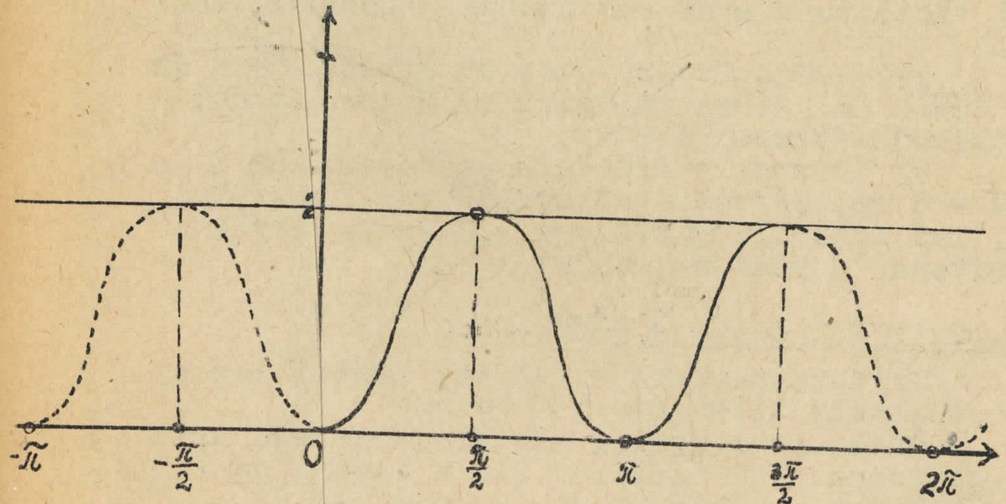
$\measuredangle BAB' = t$,

$\overline{AB} = 2 \sin t$

i $y = \overline{AB}.\sin t$

$\therefore\ y= 2.\sin^2 t$

Dok t varira od o do π tačka B polazi od tačke A, opisuje ceo krug i vraća se u tačku A; za to vreme y raste od o do 2 /kad je B u C, za $t = \pi/2$/ zatim opada do nule /za $t=\pi$/. Funkcija y ima periodu π; njen diagram je dat na sl. 29



sl. 29

Zadaci.- 1.11. 1-6.

1/ Zapremina kutije sa kvadratnom osnovom koja je gore otvorena iznosi 5 cm^3. Neka je x dužina ivice osnove, odrediti njenu površinu P, kao funkciju od x.

2/ Kupa visine 4 cm i poluprečnika osnove 2 cm presečena je na visini x horizontalnom ravni. Odrediti poluprečnik i površinu osnove kao i zapreminu novo dobivene kupe kao funkcije x-a.

3/ Trapez sa osnovama 5 cm i 3 cm i visine 2 cm presečen je pravom paralelnom osnovama na otstojanju x od veće osnove. Izračunati površine P i Q tako dobivena dva trapeza kao funkcije od x.

4/ Neka je M pokretna tačka na pravoj y= = x+2, a O početak koordinatnog sistema. Odrediti veličinu r = $\overline{OM}$ kao funkciju apscise tačke M.

5/ U trouglu ABC date su strane $\overline{AC}$= 6 cm i $\overline{BC}$= 8 cm. Odrediti površinu P trougla kao funkciju strane $\overline{AB}$ = 2x.

6/ U trouglu ABC date su strane $\overline{AB}$= 6 cm i $\overline{AC}$ = 8 cm. Odrediti stranu $\overline{BC}$ = y i površinu P, kao funkciju $\sphericalangle$BAC = θ. Kada je površina najveća, a kada najmanja?

1.12. V E Ž B E. 1-33.

1/ Neka je $f/x/ = x^3-3x+1$; uredti $f/x+h/$ po rastućim stepenima od h.

2/ Iz ravnokrakog trougla čiji ugao pri vrhu iznosi 36° odrediti sin x i cos x za x= = π/10.

3/ Neka je $F/x/ = x+1/x$; pokazti da je I/ $F/x/ = F[1/x]$; /II/ $F^2/x/ = 2+F/x^2/$; /III/ $F^3/x/ = 3F(x)+F(x^3)$

4/ Pokazati da je $g/1/x/ = g/1-x/$ kad je $g/x/ = [x^3-3x^2+1]/x[1-x]$.

5/ Neka je $f/x/ = [1+x]/[1-x]$; pokazati da je $f/-x/ = f/1/x/$.

6/ Neka je $f/x/$ =tg x; izraziti $f/x+y/$ pomoću $f/x/$ i $f/y/$.

7/ Neka je $f/x/$ =log x; izraziti $f/x^n/$ pomoću $f/x/$.

8/ Neka je $p/x/ = ax+bx^2+cx^3$, $p/1/=2$, $p/2/= 2$ i $p/3/ = -6$; odrediti a,b,c i $p/-2/$.

9/ Neka je $g/x/ = /ax+b//bx+d/$, $g/-1/=1/2$, $g[1/2]=4$ i $g/2/ = 5$; koliko je $g/4/$?

10/ Koje su nule funkcije $f/x/=/x^2-2ax+a^2-b^2///x-a//x-b/$?

11/ Neka je $f/x/ = /x^2+x+1///x-1/$ i $g/x/ = x-2$; kada će biti $f/x/ = g/x/$?

12/ Nacrtati diagrame sledećih funkcija: /I//x-a//x-b/; II/ $x^2-2ax+a^2+b^2$; III/ $1//x^2+a^2/$; IV/ $\sqrt{/x-a//x-b/}$; V/ $\sqrt{/b-x//x-a/}$.

13/ U kojim su razmacima zadovoljene nejednačine:

I/ $/x-2//x^4-2x^2+1///x-1//x^2+1/ > o$;

II/ $/x-1//x-2///x-3/\cdot x>1$;

III/ $x/[x-a]+x/[x-b] > o$

IV/ $[x-a]/[x-b]-[x-b]/[x-a] < o$

14/ Za koje vrednosti od a nejednačina $[x-2]/[x-1]^2 > 1/2a$ nema rešenja?

15/ Koje su od dole navedenih funkcija parne, a koje neparne:

I/ $a+bx^2+cx^4$; II/ $ax+bx^3+cx^5$; III/ $x^2\cdot x^{-2}$; IV/ $x^3\cdot x^{-3}$; V/ $a^x \pm a^{-x}$; VI/ sec x; VII/ $\sin^2 x$; VIII/ sin x$\cdot$sin 2x?

16/ Funkcija $f/x/ = h/x/+h/-x/$ je parna, a funkcija $g/x/ = h/x/-h/-x/$ neparna; proveriti na funkcijama: I/ $h/x/ = a+bx+cx^2$; II/ $h/x/ = 1/[a+x]$; III/ $h/x/ = \sin x/[1+x]$; IV/ $h/x/ = \log /1+x/$.

17/ Ako je $f/x/$ parna, a $g/x/$ neparna funkcija, koje su od dole navedenih funkcija parne, a koje neparne: I/ $xf/x/$; II/ $xg/x/$; III/ $f/x/\cdot g/x/$; IV/ $g^2/x/$; V/ $g^3/x/$?

18/ Ako je $f/1+x/ = f/1-x/$, ima li diagram funkcije $f/x/$ osovinu simetrije? Proveri na funkciji $f/x/ = 2x^2-4x+5$.

19/ Ako je $f/x/ = f[1/x]$ i ako se diagram funkcije $f/x/$ u razmaku /0,1/ poklapa sa diagramom funkcije $\sqrt{x/2-x/}$, nacrtati diagram funkcije $f/x/$ u razmaku $/1,\infty/$.

20/ Kolike su periode funkcija: I/ $\sin x$, $\cos^3 x$; II/ $tg 2x$?

21/ Pokazati da su sledeće funkcije monotone I/ $x+\sin x$; II/ $x-\sin x$; III/ $x+\cos x$; IV/ $x-2\sin\frac{x}{2}$; V/ 2^x.

22/ Neka je diagonala kvadra duga 3 cm; izraziti njegovu površinu kao funkciju zbira strana x.

23/ Neka je x visina kupe opisane oko lopte poluprečnika r; kako se menja njena zapremina?

24/ U trouglu ABC data je strana $\overline{AB} = 4$ cm i ugao ACB $=30^\circ$. Odrediti strane $\overline{AC}=x$, $\overline{BC}=y$ i površinu S kao funkciju ugla ABC $= \theta$

25/ U prethodnom zadatku stavi AC= 4 a AB= x.

26/ Neka je $f/x/ = x^n$; izraz $f/x/-f/a/$ je deljiv za x-a. Odredi količnik.

27/ Nejednačina $/1+h/^n \geq 1+nh$ važi za sve $h \geq -1$ i $n = 0,1,2\ldots$/Stavi u prethodnom zadatku $x=1+h$ i $a = 1$.

28/ Nejednačina $\sqrt[n]{1+h} \leq 1+h/n$ važi za sve $h \geq 0$ i $n=1,2,3\ldots$./Zameni u prethodnom zadatku h sa h/n.

29/ Kada je

$$f/x/ + f/o/ = 0 \quad za \quad f/x/=\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \ ?$$

30/ Kada je $f/x/ = f/1/$ za $f/x/= \frac{x}{a}+\frac{b}{x}+\frac{b^2}{x^2}$

31/ Kada je $f/x/ + f/2x/ = a$ za $f/x/=\sqrt{x+1}$?

32/ Ako je $F/x+a/$ parna funkcija, koja je prava osovina simetrije funkcije $F/x/$?

33/ Ako je $b+f/x+a/$ neparna funkcija, kada je tačka x= a, y= b središte simetrije diagrama funkcije f/x/.

G L A V A II

G R A N I C A

2.1.	GRANICA BESKONAČNO $x\to\infty$	Zadaci 2,1,1-9
2.2.	GRANICA $x\to a$	Zadaci 2.2.1-6
2.3.	MESTA GDE FUNKCIJA NIJE DEFINISINA	Zadaci 2.3.1-12
2.4.	NEODREDJENI IZRAZI	Zadaci 2.4.1-11
2.5.	ASIMPTOTSKA JEDNAKOST $\sim$	Zadaci 2.5.1-13
2.6.	PRIBLIŽNA VREDNOST $\approx$	Zadaci 2,6,1-6.
2.7.	APROKSIMACIJA	Zadaci 2.7.1-13
2.8.	NEPREKIDNOST	Zadaci 2.8.1-7
2.9.	GRANICA U GEOMETRIJI.	
2.10.	VEŽBE:1,10,1-40	

GLAVA II

G R A N I C A

2.1. GRANICA BESKONAČNO: $x \to \infty$

Kad x dobiva niz sve većih i većih vrednosti, tako da postaje veće od ma kako velikog, unapred datog broja, kažemo da x neograničeno raste ili da x teži beskonačnosti i pišemo:

$$x \to \infty \quad , \text{ ili } x \to +\infty$$

Ako medjutim x postaje manje od ma kako velikog negativnog broja, pišemo

$$x \to -\infty$$

I/Kad je x veliko x^2 je još veće, dakle x i x^2 teže beskonačnosti istovremeno. Ovo pišemo:

$$x^2 \to \infty \qquad \text{kad } x \to \infty$$

Isto tako

$$ax^2 \to \infty \qquad \text{kad } x \to \infty \text{, ako je } a>0,$$

a $$ax^2 \to -\infty \qquad \text{kad } x \to \infty \text{, ako je } a<0.$$

Pr.1/

$$\sqrt{x} \to \infty \qquad \text{kad} \quad x \to \infty$$

Pr.2/ $x^2-2x \to \infty$ kad $x \to \infty$

Jer je $x^2-2x = x/x-2/$, a x i $/x-2/$ su veliki, kad je x veliko.

Pr.3/

$$p/x/ = x^3-100x-10.000 \to \infty \text{ kad } \quad x \to \infty$$

Ako je $x > 100$ imamo

$$p/x/ = x^3-100x-10.000=x^2/x-100/-10.000 > x^2-10.000,$$

$$\therefore p/x/ > x-10.000,$$

prema tome, ma kako bio velik, unapred dati broj M, ako izaberemo x tako, da bude

$$x-10.000 > M \quad \text{tj. } x > M+10.000$$

biće $\quad p/x/ > M$

II/ Za x dovoljno veliko, $1/x$ možemo učiniti proizvoljno malo; dakle, kad x neograničeno raste $1/x$ opada i približava se nuli. U ovakvom slučaju kažemo da $1/x$ teži nuli, kad x teži beskonačnosti i pišemo

$$1/x \to 0 \qquad \text{kad} \to x$$

Pr.4/ $1/x^2 \to 0$ kad $\to x \to \infty$

Pr.5/ $\dfrac{2x}{x^2+1} \to 0$, kad $\cdot\ x \to \infty$

Imamo

$$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2}{x+1/x} < \frac{2}{x} \to 0 \text{ kad } \quad x \to \infty$$

Pr.6/ $1/\sqrt{x} \to 0$ kad $x \to \infty$

Budući da $\sqrt{x} \to \infty$, kad $x \to \infty \therefore 1/\sqrt{x} \to 0$

Pr.7/ $1/[x+\sqrt{x^2+1}] \to 0$ kad $\quad x \to \infty$

III/ Izraz $t = [x+1]/x = 1+1/x$ se u toliko manje razlikuje od jedinice u koliko x biva veće, i teži ka jedinici kad x teži beskonačnosti; ovo pišemo:

$$t=/x+1//x \to 1 \qquad \text{kad} \quad x \to \infty$$

Pr.8/ $t= x/[x+1] = 1-1/[x+1] \to 1$ kad $\quad x \to \infty$

Pr.9/ $/2x^2+3x+4//x^2 \to 2$ kad $\quad x \to \infty$

Pr.10/ $4+1/4 \quad 4 = 2$ kad x

Imamo $/2x^2+3x+4//x^2=2+3/x+4/x^2 \to 2$

kad $x \to \infty$

Zadaci: 2.1. 1-9.

Kad $x \to \infty$ čemu teže izrazi:

$1/ 2x^2 / /x^3+1/$; $2/ /1-x/ / /2+x^2/$; $3/ /x^2-1/ / /x^2+1/$;

$4/ x-3\sqrt{x}$?

Kad $x \to -\infty$ čemu teže izrazi:

$5/ x^3$; $6/ x^2+2x$; $7/ \sqrt{1+x^2}$; $8/ \sqrt{1-x}/x$; $9/ \sqrt{1+x^2}/x$?

2.2. GRANICA: $x \to a$

Nezavisna promenljiva x može uzeti neku vrednost a, tj. možemo staviti $x = a$; ali se tom broju a, ona može približavati i to preko većih ili manjih vrednosti od a t.j. sa desne ili sa leve strane. U oba ova slučaja kažemo, da x teži ka a i pišemo.

$$x \to a.$$

Stavimo $x = a+h$ i pustimo da $h \to o$, tada će $x \to a$, sa leve ili sa desne strane, prema tome da li je h pozitivno ili negativno. Ako je $h > o$, t.j. ako $h \to o$ preko pozitivnih vrednosti, pišemo

$$h \to +o;$$

ako je $h < o$, t.j. ako $h \to o$ preko negativnih vrednosti, stavljamo

$$h \to -o$$

Prema tome će $x = a+h$ težiti ka a, sa desne ili leve strane, prema tome da li $h \to +o$ ili $h \to -o$ /$h \to \pm o$/.

I/ Ako u izrazu kojim je definisana funkcija f/x/ pustimo da se x postepeno približava vrednosti a, taj se izraz može približavati nekoj vrednosti A; u tom slučaju kažemo: f/x/ teži ka A kad x teži ka a i pišemo:

$$f/x/ \to A \quad \text{kad} \quad x \to a$$

Pr.1/ Čemu teži $f/x/ = /x^2+1/ / /x+1/$ kad $x \to 1$?

Stavimo $x = 1 + h$, biće

$$f/1+h/ = \frac{/1+h/^2 + 1}{1 + h + 1} = \frac{2 + 2h + h^2}{2 + h} \longrightarrow \frac{2}{2} = 1$$

kad $h \pm o$,

$\therefore f/x/ \to 1$ kad $x \to 1$.

Primetimo da je i $f/1/ = 1$.

Pr. 2/. Čemu teži $f/x/ = \sqrt{x}-2$ kad $x \to 4$.

Stavimo $x = 4+h$; biće

$$f/4+h/ = \sqrt{4+h}-2 = \frac{/\sqrt{4+h} -2/./\sqrt{4+h} +2/}{\sqrt{4 +h}-2} = \frac{h}{2+ 4+h} \to o$$

kad $h \pm o$

$$f/x/ \to o \quad \text{kad} \quad x \to 4.$$

Primetimo da je i $f/4/ = o$.

Pr. 3/. $\sin x \to o = \sin o$ kad $x \to o$. Vidi sl.4

II/ Izraz $1/x$ je u toliko veći u koliko je x manje, i postaje proizvolno velik, kad je x dovoljno malo:

za $x=0,1$ biće $1/x=10$, za $x=0,01$ biće $1/x=100$,

za $x = 0,001$ biće $1/x = 1000$ i t.d.

$1/x$ teži bezkonačnosti kad x teži ka nuli i to:

$$1/x \to +\infty \quad \text{kad} \quad x \to +o$$

$$1/x \to -\infty \quad \text{kad} \quad x \to -o$$

Pr.4/. Čemu teži $f/x/ = \frac{1}{x-1}$ kad $x \to 1$?

Stavimo $x = 1+h$, biće

$$f/1+h/ = \frac{1}{1+h-1} = \frac{1}{h} \to \pm\infty, \text{ kad } h \to \pm o,$$

$\therefore f/x/ \to \pm\infty$ kad $x \to 1\pm 0$, t.j., sa desne ili leve strane.

Pr. 5/. Čemu teži $f/x/ = \frac{1}{4-x^2}$ kad $x \to 2$?
Stavimo $x = 2+h$ biće

$$f/2+h/ = \frac{1}{4-/2+h/^2} = \frac{1}{-4h-h^2} = -\frac{1}{h/4+h/}$$

$\to \pm\infty$ kad $h \to \pm 0$,

$\therefore\ f/x/ \to \pm\infty$ kad $x \to 2 \pm 0$.

Pr.6/. $f/x/ = \mathrm{tg}\, x \to \mp\infty$ kad $x \to \pi/2 \pm 0$.

Stavimo $x = \frac{\pi}{2} + h$ biće

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = \frac{\sin \pi/2+h}{\cos \pi/2+h} = \frac{\cos h}{-\sin h} =$$

$= -\cos h/\sin h \to \pm\infty$ kad $h \to \pm 0$.

III/. Činjenicu da $f/x/ \to A$ kad $x \to a$, pišemo i ovako

$$\lim_{x \to a} f/x/ = A,$$

čitaj: limes od $f/x/$ kad $x \to a$ jedank je A.

Naprimer: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$; $\lim\limits_{x\to4} \sqrt{x}-2=0$; $\lim\limits_{x\to1\pm0} \frac{1}{x-1} = \pm\infty$

ZADACI: 2.2.1.6.

I. Izračunati granične vrednoste:

1/ $\lim\limits_{x\to1}[f/x/-f/1/]$ kad je 1° $f/x/= \sqrt[3]{x}$;
3° $f/x/ = \frac{1}{x^2+x-1}$; 4° $f/x/=\sin \frac{\pi}{2} x$; $5^\circ f/x/=$
$= \cos/x-1/$.

2/. $\lim\limits_{x\to2} \frac{1}{x^2-3x+2}$. 3/ $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x}{x^2-1}$. 4/ $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{cotg}\, x$.

5/ $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{1-\cos x}$. 6/ $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2. 3.MESTO GDE FUNKCIJA NIJE ODREDJENA

I/ Neka je funkcija $f/x/$ data u obliku količnika

$$\frac{u/x/}{v/x/}$$

Kako se nulom ne može deliti, funkcija $f/x/$ nije definisana osim izrazom za sve one vrednosti od x, za koje imenitelj $v/x/$ postaje jednak nuli, t.j. za sve nule imenitelja $v/x/$.

Pr.1/ Funkcija $\frac{u/x/}{v/x/} = \frac{x}{x^2-3x+2}$ nije definisana za x=1 i x= 2, jer je $v/1/ = v/2/=0$

Pr.2/ Funkcija $\frac{u/x/}{v/x/} = \frac{x-2}{x^2-4}$ nije definisana za $x = \pm2$, jer je $x/\pm2/= 0$.

Pr.3/ $\frac{u/x/}{v/x/} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$ nije definisano za $x= 0$, jer je $v/o/ = 0$.

Pr.4/ $\frac{u/x/}{v/x/} = \mathrm{cotg}\, x$ nije definisano za $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi$ ....., jer je $v/o/ = v/\pm\pi/ = v/\pm2\pi/ = v/\pm3\pi/ = \ldots\ldots = 0$.

Pr.5/ Funkcija $f/x/ = \sin x/x$ nije definisana za $x = 0$.

II/. Obično je

$$\lim_{x \to a} f/x/ = \lim_{x \to a} \frac{u/x/}{v/x/} = \pm\infty \text{, ako je } v/a/ = 0,$$

kao što je to slučaj kod gore navedenih primera 1/, 2/ i 4/.

Pr.1/. $\lim_{x \to 1\pm 0} f/x/ = \mp\infty$ a $\lim_{x \to 2\pm 0} f/x/ = \pm\infty$

Pr.2. $\lim_{x \to -2\pm 0} f/x/ = \mp\infty$

Pr.4/ $\lim_{x \to \pm 0} f/x/ = \lim_{x \to \pi \pm 0} f/x/ = \lim_{x \to 2\pi \pm 0} f/x/ = \ldots = \mp\infty$

III/ Može se desiti da funkcija $f/x/$ ne bude definisana za $x=a$, a da ipak teži odredjenoj vrednosti kad $x \to a$, kao što je to slučaj u gore navedenim primerima 2/,3/ i 5/.

Pr.2/ $f/x/ = \dfrac{x-2}{x^2-4} \to \dfrac{1}{4}$ kad $x \to 2$.

Stavimo $x = 2+h$, biće

$$f/2+h/ = \frac{2+h-2}{/2+h/^2-4} = \frac{h}{4h+h^2} = \frac{1}{4+h} \to \frac{1}{4} \text{ kad}$$

$h \to \pm 0$,

$$\therefore \frac{x-2}{x^2-4} \to \frac{1}{4} \text{ kad } x \to 2.$$

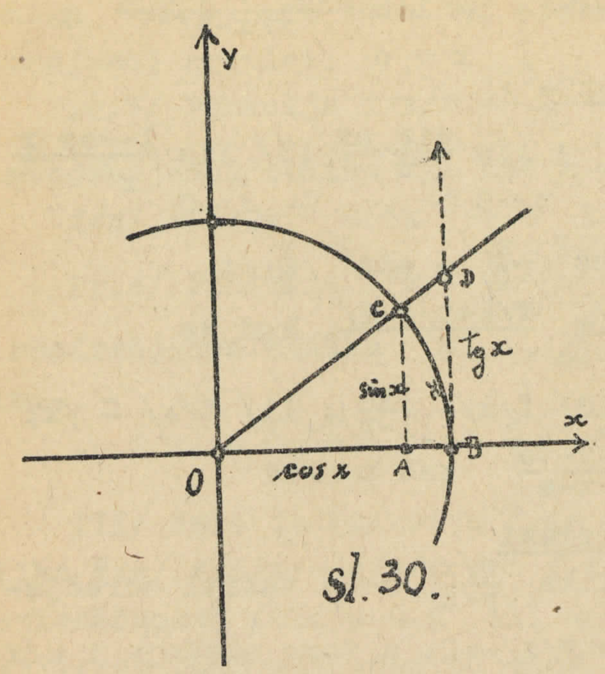
Pr. 3/ $f/x/ = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \to 2$ kad $x \to 0$.

Imamo

$$f/x/ = \frac{x^2/\sqrt{1+x^2}+1}{/\sqrt{1+x^2}-1/./\sqrt{1+x^2}+1/} = \frac{x^2/\sqrt{1+x^2}+1/}{1+x^2-1} =$$

$\sqrt{1+x^2}+1 \to 2$ kad $x \to \pm 0$.

Pr.5/ $\sin x/x \to 1$ kad $x \to 0$.



Sl. 30.

Na slici 30 je $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$, luk $\widehat{BC} = x$, $\overline{AC} = \sin x$, $\overline{OA} = \cos x$, $\overline{BD} = \operatorname{tg} x$. Uporedjujući površine trouglova OAC i OBD sa površinom sektora BOC vidimo da je $\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$; deobom sa $\frac{1}{2}\sin x$ /> o/ dobijamo

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$\therefore \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Kad je x malo, spoljne strane ove nejednačine se malo razlikuju od jedinice, prema tome se i izraz u sredini malo razlikuje od 1, t.j.

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ kad } x \to 0.$$

ZADACI 2.3. 1-12.

I/ Izračunati granične vrednosti:

1) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$; 2/ $\lim_{x \to 0} \dfrac{10x}{x^2+2x}$; 3/ $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$;

4/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{/x-1/^4-1+4x}{x^2}$; 5/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{/x+4/^3+/x-8/^2}{x/x-3/}$;

6/ $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+6x+9}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$; 8/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

/stavi $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ /;

Koliki je $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f/2+h/-f/2/}{h}$, kad je

9/ $f/x/ = 1/x$; 10/ $f/x/ = \frac{1+x}{1-x}$; 11/ $f/x/ = \sqrt{x}$;

12/ Čemu teži $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$ kad $x \to a$?

2.4 Neodredjeni izrazi

I/ Izraz oblika $\frac{u/x/}{v/x/}$ može težiti odredjenoj granici i ako $v/x/\to 0$; u tome slučaju i $u/x/$ mora da $\to 0$, zato kažemo da se taj izraz javlja u neodredjenom obliku o/o.

Pr.1/ Izraz $\frac{\sin x}{x}$ koji $\to 1$ kad $x \to 0$, se javlja u neodredjenom obliku o/o.

Pr.2/ Izraz $\dfrac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = f/x/$ se javlja u neodredjenom obliku o/o kad $x \to \infty$, a $f/x/ \to 2$.

Stavimo $t = \frac{x+1}{x-1}$, tada $t \to 1$ kad $x \to \infty$,

$$\therefore f/x/ = \frac{t-\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} = \frac{t^2-1}{t-1} = t+1 \to 2, \text{ kad } x\to\infty$$

II/ Ako u izrazu $\frac{u/x/}{v/x/}$ brojatelj i imenitelj $\to \infty$ kažemo da se izraz javlja u neodredjenom

obliku ∞/∞ ; pri tome taj izraz može težiti odredjenoj granici.

Pr.3/ Funkcija $f/x/= \frac{3x^3+2x+6}{x^3}$ se javlja u neodredjenom obliku ∞/∞ kad $x\to\infty$. Medjutim

$$f/x/ = 3+2x^{-2} + 6x^{-3} \to 3 \text{ kad } x \to \infty$$

Pr.4/ Funkcija $f/x/= \frac{1-2x^{-2}}{1+x^{-1}3x^{-2}}$ se javlja u neodredjenom obliku ∞/∞ , kad $x \to 0$. Medjutim:

$$f/x/ = \frac{x^2-2}{x^2+x+3} \to -\frac{2}{3} \text{ kad } x \to 0.$$

III/ Neka je funkcija $F/x/$ data izrazom oblika $F/x/ = f/x/- g/x/$; ako i $f/x/$ i $g/x/$ teže bezkonačnosti /kad $x \to a$ ili ∞ / kažemo da se taj izraz javlja u neodredjenom obliku $\infty - \infty$ I u ovom slučaju $F/x/$ može težiti odredjenoj granici.

Pr.5/ Izraz $F/x/ = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$ se javlja u neodredjenom obliku $\infty-\infty$ kad $x \to 1$. Medjutim:

$$F/x/ = \frac{2x-/1+x/}{x^2-1} = \frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2} \text{, kad } x \to 1.$$

Pr.6/ Izraz $F/x/ = \sqrt{1+x^2} - x$ se javlja u neodredjenom obliku $\infty - \infty$ kad $x \to \infty$. Medjutim

$$F/x/ = \frac{/\sqrt{1+x^2}-x/./\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \to 0, \text{ kad } x \to \infty$$

Zadaci 2.4. 1-11

Ispitati neodredjene izraze 1/ $\frac{1-x}{2-x}$, /$x \to \pm\infty$;

2/ $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, $/x\to\infty/$; 3/ $\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$, $/x\to\infty/$;

4/ $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; $/x\to 0/$; 5/ $\dfrac{/x+1/^4}{x^4+1}$, $/x\to\infty/$;

6/ $\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$, $/x\to 0/$; 7/ $\sqrt{x^2+x}-x$, $/x\to\infty/$;

8/ $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$, $/x\to\infty/$; 9/ $\dfrac{/1+\sqrt{x}/./2+\sqrt{x}/}{x}$, $/x\to\infty/$;

10/ $\dfrac{1+2x^{-1}+3x^{-2}}{3+x^{-2}}$, $/x\to 0/$; 11/ $\dfrac{\sqrt[3]{x}/1+\sqrt[3]{x}/./1+2\sqrt[3]{x}/}{x}$, $/x\to\infty/$.

2.5 ASIMPOTSKA JEDNAKOST: $\sim$.

Za dve funkcije $f/x/$ i $g/x/$ kažemo da su asimptotski jednake kad $x\to a$ /ili $\to\infty$/, ako

$$\frac{f/x/}{g/x/}\to 1 \quad \text{kad} \quad x\to a \quad /\text{ili} \to\infty/$$

Ovo kraće pišemo

$$f/x/\sim g/x/ \quad \text{kad} \quad x\to a \ /\text{ili}\to\infty/$$

i kažemo da je $f/x/$ asimptotski jednako $g/x/$ kad $x\to a$, ili da se funkcija $f/x/$ u blizini vrednosti $x=a$ ponaša kao funkcija $g/x/$

Pr.1/ Za male vrednosti x-a, $2x+3x^2$ se ponaša kao $2x$, t.j. $2x+3x^3\sim 2x$ kad $x\to 0$.

Imamo $\dfrac{2x+3x^2}{2x}=1+\dfrac{3}{2}x^2\to 1$ kad $x\to 0$.

Pr.2/ Za velike vrednosti x-a, $/x+1./x-2/$ se ponaša kao x^2, t.j.

$$/x+1/./x-2/\sim x^2 \text{ kad } x\to\infty$$

imamo: $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2}=1-3x^{-1}+2x^{-2}\to 1$ kad $x\to\infty$

Pr.3. $\dfrac{x^2+2x+3}{x}\sim\dfrac{3}{x}$ kad $x\to 0$

Imamo $\dfrac{x^2+2x+3}{x}$: $\dfrac{3}{x}=1+x+\dfrac{x^2}{3}\to 1$ kad $x\to 0$

I/ Napomena: U slučaju kad je $\lim f/x/=A$, $x\to a$ konačno i različito od nule, t.j. $A\neq 0$, možemo pisati $\dfrac{f/x/}{A}\to 1$, kad $x\to a$, t.j. $f/x/\sim A$ kad $x\to a$. Medjutim se u ovom slučaju upotrebljava znak lim ili $\to$, a znak $\sim$ se zadržava isključivo za slučaj kad se uporedjuju dve funkcije koje obe teže ili o ili ∞.

II/ Veze oblika $f/x/\to a$, ili $f/x/\sim g/x/$ nazivamo asimptotskim relacijama.

Zadaci 2.5. 1-13

1/ Proveri sledeće asimptotske relacije:

1/ $3x^2-4x^3+x^4\sim 3x^2$, $/x\to 0/$
$\sim x^4$, $(x\to\infty)$

2/ $x/x-1/./2x+3/ \sim \begin{cases}-3x, & /x\to 0/\\ 5/x-1/, & /x\to 1/\\ 2x^3, & /x\to\infty/\end{cases}$

3/ $/x-3/^2./x-5/ \sim \begin{cases}4/x-5/, & /x\to 5/\\ -2/x-3^2/, & /x\to 3/;\end{cases}$

4/ $\dfrac{x^3+2x+x}{2x^2+x}\sim\dfrac{3}{x}$ $/x\to 0/$

5/ $2x^4+x^3+5x\sim 2x^4$ $/x\to\infty/$;

6/ $\dfrac{x-1}{x-3} \sim \begin{cases}2:/x-3/, & /x\to 3/\\ \dfrac{/1-x/}{2}, & /x\to 1/\end{cases}$

7/ $x^2/1-2x/^3\sim -8x^5$ $/x\to\infty/$;

8/ $\dfrac{x+1}{x+1}-1\sim\dfrac{2}{x}$, $/x\to\infty/$;

9/ $\sqrt{x^2+1}\sim x$, $/x\to\infty/$;

10/ $\sqrt{x^3-3}\sim x\sqrt{x}$, $/x\to\infty/$

11/ $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$, $/x \to \infty 0/$;

12/ $\sin x \sim x$, $/x \to 0/$

13/ $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $/x \to 0/$

2.6 PRIBLIŽNA VREDNOST: $\approx$.

I/ Numerička vrednost je apsolutno tačna samo kad je data kao racionalan broj t.j. kao ceo broj, razlomak ili konačan decimalan razlomak, naprimer, 2, 2/3, 1,6.

U svakom drugom slučaju služimo se isključivo približnim vrednostima: na primer umesto

1/3 uzimamo	0,3 ili	0,33 ili	0,333 ili	0,3333	itd;
$\sqrt{2}$ "	1,4 "	1,41 "	1,414 "	1,4142	"
π "	3,1 "	3,14 "	3,142 "	3,1416	

Vrednosti 0,33, 1,41 odnos 3,14 su približne vrednosti brojeva 1/3, $\sqrt{2}$ odnosno π; ovo označavamo stavljajući

$$1/3 \approx 0,33, \quad \sqrt{2} \approx 1,41 \quad \text{odnosno } \pi \approx 3,14$$

i kažemo da je 1/3 približno jednaka broju 0,33 i t.d.

II/ Približnim vrednostima se može služiti ako znamo za koliko one otstupaju od tačne vrednosti, t.j. sa kolikom tačnošću one odredjuju posmatrani broj.

Razliku izmedju tačne vrednosti a i jedne njene približne vrednosti a' nazivamo otstupanje i obično ga obeležavamo sa Δa, t.j.

$$\Delta a = a - a'$$

Često se otstupanje naziva greška, naročito ako je približna vrednost dobivena iz posmatranja t.j. merenjem.

Kad je približna vrednost data decimalnim razlomkom, tačnost je data samim brojem decimala, zato kažemo da je, na primer 1/3 data brojem 0,333 sa tri tačne decimale.

Pr.1/ 3,14 odredjuje broj π sa otstupanjem koje je manje od 10^{-2}.

Imamo

$$\Delta\pi = \pi - 3,14 < 3,149 - 3,14 = 0,009 <$$
$$< 9/1000 < 1/100 = 10^{-2}$$

Pr.2/ Kad je broj a dat sa 4 tačne decimale, otstupanje je manje od 10^{-4}.

Neka je

$$a \approx a' = d, d_1, d_2, d_3 d_4$$

$$\therefore \Delta a = a - a' = a - d, d_1 d_2 d_3 d_4 < d, d_1 d_2 d_3 d_4 9 -$$
$$- d, d_1 d_2 d_3 d_4 = < 0,00009 = 9/10^5 < 1/10^4 = 10^{-4}$$

Pr.3/ Koliko je otstupanje ako broj a=317/633 zamenimo a' =1/2?

$$\Delta a = a - a' = \frac{317}{633} - \frac{1}{2} = \frac{634-633}{2.633} = 1/1266 <$$
$$< 1/1250 = 8 \cdot 10^4 < 10^{-3}$$

$$\therefore \frac{317}{633} \approx \frac{1}{2}$$

sa otstupanjem koje je manje od 10^{-3}

Napomena.- Netačno je pisati 317/633=1/2, a isto je tako netačno stavljati $\pi = 3,14$ ili $\sqrt{2} = 1,4142$. Medjutim možemo pisati

$$\pi = 3,14\ldots \text{ ili } \sqrt{2} = 1,41\ldots$$

gde tačkice kazuju da decimalni razlomak nije završen.

III/ Prilikom zanemarivanja decimala obično se poslednja decimala, koja se zadržava, povećava sa 1, ako je prva zanemarena cifra ≥ 5. U tome slučaju kažemo da je približna vrednost data na $\underline{n}$ decimala tačno, za razliku od slučaja kada je približna vrednost data sa $\underline{n}$ tačnih decimala, što znači da su kod približne vrednosti prvih $\underline{n}$ decimala tačne.

Ako je približna vrednost data sa $\underline{n}$ tačnih decimala, ona je uvek manja od tačne vrednosti, u kom slučaju kažemo da ona prestavlja jednu sniženu približnu vrednost. Ako je približna vrednost data na $\underline{n}$ decimala tačno, ona može biti manja ili veća od tačne vrednosti. Ako je veća, kažemo da pretstavlja jednu povišenu približnu vrednost.

Pr.4/ Neka je $a' = 0,d_1d_2d_3$ jedna približna vrednost broja a, na 3 decimale tačno; koliko je otstupanje?

Imamo

$$0,d_1d_2/d_3-1/5 \leq a < 0,d_1d_2d_34 ,$$

$$\therefore \Delta a < 0,d_1d_2/d_3-1/ \cdot 5-0,d_1d_2d_34=0,0009= 9/10^4 < 10^{-3}.$$

IV/ Tačnu vrednost iracionalnog broja ne možemo nikada dobiti. U koliko se on javlja, računamo isključivo njegovim približnim vrednostima.

Jedan broj, bio on racionalan ili iracionalan, smatramo da je potpuno odredjen, ako njegovu približnu vrednost možemo izračunati sa onolikom tačnošću koliko želimo.

Svaki iracionalan broj je definisan izvesnim postupkom i taj ga postupak potpuno odredjuje, ako njime možemo sa proizvoljnom tačnošću odrediti njegove približne vrednosti.

Tako se na primer $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ dobijaju poznatim postupkom korenovanja, koji omogućava postepeno izračunavanje onolikog broja decimala koliko želimo.

<u>Zadaci 2.6. 1-6.</u>

Neka je $\underline{a}$ tačna, a $\underline{a'}$ jedna približna vrednost; odrediti jednu gornju granicu otstupanja kad je: 1.) $a = 0,999$, $a' = 1$; 2.) $a = 1/\sqrt{2}$,
$1^o a' = 0,7$, $2^o a' = 0,71$, $3^o a' = 0,707$; $3^o a = \sqrt{102}$, $a' = 10,1$, /v.pr.2.7 /6/ i /7/; 4^o $a = \sin 0,02$, $a' = 0,02$ /v.pr.2.7/5/.;
5^o $a = \cos 0,01$, $a' = 1$ /v.pr.2.7/3/.
6^o Kako je

$$0 < 3-2\sqrt{2} = \frac{3-2\sqrt{2}/./3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{9-8}{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} < \frac{1}{5},$$

to je $0 < /3-2\sqrt{2}/^3 < \frac{1}{125}$

Kad se gornji kub razvije iz gornje nejednačine može se dobiti jedna približna vrednost za $\sqrt{2}$; koja je ta približna vrednost, i kolika je gornja granica otstupanja.

2.7 APROKSIMACIJA

I/ Asimptotska relacija

$$f/x \to A \quad \text{kad } x \to a,$$

kazuje da A proizvoljno malo otstupa od f/x/, ako je samo x dovoljno blisko vrednosti a. Znači, da je A jedna od približnih vrednosti funkcije f/x/ kad se x nalazi u blizini tačke a, i možemo pisati:

$$f/x/ \approx A \quad /x \to a/;$$

f/x/ je približno /aproksimativno/ jednaka A, kad se x nalazi u blizini vrednosti a,

Pr.1/ $f/x/ = \frac{2+x^3}{1-2x^2} \approx 2 \quad /x \to o/$

Budući da $f/x/ \to 2$ kad $x \to o$, to je za malo x izraz $f/x/ = \frac{2+x^3}{1-2x^2}$ približno jednak vrednosti 2; zaista, $f/0,1/ = \frac{2,001}{0,98} \approx 2,0481$ /na četiri decimale tačno/,

$$f/0,01/ = \frac{2,000001}{0,9998} \approx 2,0004o1 \text{ /na šest}$$

decimala tačno.

Pr.2/. $\sqrt{x} \approx 1 \quad /x \to 1/.$

Za vrednosti x-a blizu 1, $\sqrt{x}$ je približno jednak 1; zaista

$$\sqrt{1,0201} = 1,01, \quad \sqrt{1,002001} = 1,001.$$

Pr.3/ $\cos x \approx 1$, $x \to o$.

Za male lukove cosinus se malo razlikuje od 1. Iz tablica dobijamo da je

$$\cos 0,1 \approx 0,995003 \text{ /na šest decimala/.}$$

$$\cos 0.01 \approx 0,999950 \text{/na šest decimala/}$$
$$\cos 0,001 \approx 0,999999 \text{/" \quad " \quad " /.}$$

Napomenimo da lukovima veličine 0,1; 0,001 i 0,001 odgovaraju lukovi veličine $5^o43'46,6''$, $34'22,7''$ i $3'50,7''$.

II/ U slučaju kad f/x/ i g/x/ teže ka nuli, iz asimptotske relacije

$$f/x/ \sim g/x/ \quad \text{kad} \quad x \to a,$$

sleduje da g/x/ pretstavlja jednu približnu vrednost za funkciju f/x/ u blizini tačke x=a. Možemo, dakle, staviti

$$f/x/ \approx g/x/, \quad /x \to a/$$

i tada kažemo da g/x/ aproksimira funkciju f/x/ u blizini tačke x=a.

Pr.4/ $F/x/ = \frac{2+x^3}{1-2x^2} - 2 \approx 4x^2, \; /x \to o/.$

Imamo $\frac{F/x/}{4x^2} = \frac{2+x^3-2/1-2x^2/}{4x^2/1-2x^2/} = \frac{1+\frac{x}{4}}{1-2x^3} \to 1$ kad $x \to o$.

Pr.5/ $\sin x \approx x, \; /x \to o/.$

Za male lukove /uglove/ sinus možemo zameniti lukom, ukoliko je luk manji utoliko je otstupanje manje. Zaista, iz tablica dobijamo:

$\sin 0,1 \approx 0,09984$ /na 5 decimala/
$\sin 0,05 \approx 0,04998$ / " " " /,
$\sin 0,01 \approx 0,009999$/ " 6 " /,
$x - \sin x < 2.10^{-4}$, za x =0,1,
$< 2.10^{-5}$, " x=0,05
$< 10^{-6}$, " x=0,01.

III/ Neka je data funkcija f/x/ i jedna njena približna vrednost /aproksimacija/; često možemo ovu poboljšati, t.j. naći drugu bolju aproksimaciju. Tako smo u primeru 1/ videli da je

$$f/x/ = \frac{2+x^3}{1-2x^2} \approx 2, \quad /x \to o/,$$

a u primeru 4/ da je za tu istu funkciju f/x/

$$F/x/ = f/x/-2 \approx 4x^2, \quad /x \to o/.$$

Možemo, dakle, staviti da je

$$f/x/ = \frac{2+x^3}{1-2x^2} \approx 2+4x^2 = g/x/, \quad /x \to o/,$$

gde funkcija g/x/ pretstavlja bolju aproksimaciju za f/x/ nego sama vrednost 2:

g/0,1/ = 2,04 dok je f/0,1/ $\approx$ 2,0418 /na 4 decimale/
g/0,01/ = 2,0004 " " f/0,01/ $\approx$ 2,00040l/na 6 decimala.

Pr.6/ $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$, $/x \to o/$.

Imamo 1^o $\sqrt{1+x} \to 1$ kad $x \to o$;

2^o $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$ kad $x \to o$,

jer je $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{/\sqrt{1+x}-1/./\sqrt{1+x}+1/}{x\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \to \frac{1}{2}$

kad $x \to o$.

Za male vrednosti x-a, $\sqrt{1+x}$ možemo zameniti sa $1+\frac{x}{2}$.

Pr.7/ Naći jednu približnu vrednost za $\sqrt{101}$.

Imamo $\sqrt{101} = \sqrt{10^2+1} = 10\sqrt{1+10^{-2}} \approx 10/1+\frac{1}{2}10^{-2}/ =$
$= 10{,}05$;
dok je $\sqrt{101} \approx 10{,}0498$ za 4 tačne decimale, dakle je greška manja od $2 \cdot 10^{-4}$.

Zadaci 2.7 1-13

Pokazati da važe sledeće aproksimacije:

I/ u blizini tačke x=o 1/ $/1+x/^3 \approx 1+3x$;

2/ $\frac{1-x}{1+x^2} \approx 1-x$; 3/ $\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{x}{2}$; 4/ $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{x}{3}$;

5/ $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \approx 2+\frac{x^2}{8}$; 6/ $\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \approx 1+\sqrt{x}+2x$.

7/ $\sin x+\frac{\pi}{2} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}/1+x/$; 8/ $\cos(x+\frac{\pi}{2}) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)$

II/ u blizini tačke x= 1: 9/ $x^4 \approx -3+4x$;

10/ $\frac{1}{\sqrt{x}} \approx 1+\frac{1-x}{2}$; 11/ $a+bx+cx^2 \approx a-c+/b+2c/x$;

12/ $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x} \approx \frac{/x-1/}{6}$; 13/ $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x} \approx x-\frac{1}{6}$..

2.8. NEPREKIDNOST.

Za funkciju f/x/ kažemo da je neprekidna /kontinuirana/ za vrednost x= a ako f/x/ malo odstupa od f/a/ kad se x nalazi u blizini tačke /vrednosti/ a; preciznije, ako

$$f/x/ \to f/a/ \quad \text{kad } x \to a\pm o$$ t.j. i sa leve i sa desne strane/.

Ovo možemo još i ovako pisati:

$$f/a+h/-f/a/ \to o \quad \text{kad} \quad h \to \pm o.$$

Funkcija je neprekidna u nekom razmaku, ako je neprekidna u svim tačkama tog razmaka.

Pr.1/ $\sqrt{x}$ je neprekidan u tački x=1.

Stavimo x = 1+h, tada

$$\sqrt{1+h}-\sqrt{1} = \frac{/\sqrt{1+h}-1/./\sqrt{1+h}+1/}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{h}{\sqrt{1+h}+1} \to o$$

kad $h \to \pm o$.

Pr.2/ x^2 je neprekidno za sve x.

Imamo

$$/x+h/^2-x^2 = h/2x+h/ \to 0 \quad \text{kad} \quad h \to \pm 0 .$$

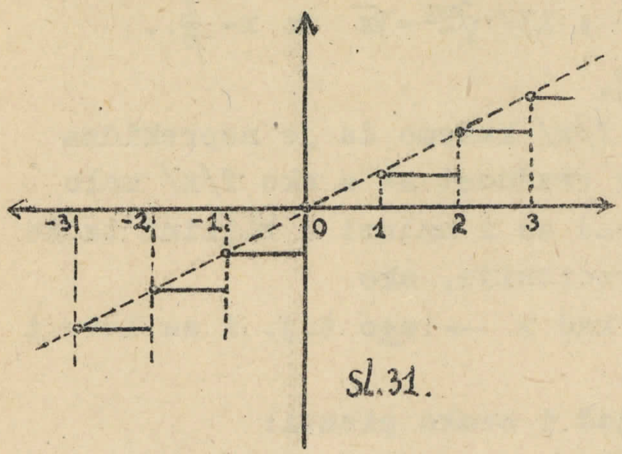
<u>Definicija.</u> Označimo sa $[a]$ najveći ceo broj koji je $\leq a$; tako je $[2] = 2$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $[\frac{1}{2}] = 0$.

$[2] = -3$, $/-\sqrt{2}/ = -2$, $[-\pi] = -4$, $[-\frac{1}{2}] = -1$.

Uopšte imamo:

$[x] = 0$ za $0 \leq x < 1$, $[x] = 1$ za $1 \leq x < 2$, i t.d.

Izraz $a-[a]$ pretstavlja razlomljeni, decimalni deo broja a.



Sl.31.

Pr.3/ Funkcija $f/x/ = [x]$ ima prekid kad je x ceo broj.

Neka je h malo i > 0;

za $x = 2$ imamo: $f/2+h/ = [2+h] = 2$

dok je $f/2-h/ = [2-h] = 1$

t.j. $\lim\limits_{h \to 0} f/2+h/ = f/2/ = 2$

a $\lim\limits_{h \to 0} f/2-h/ = 1$

Slika 31. daje diagram funkcije $y = [x]$.

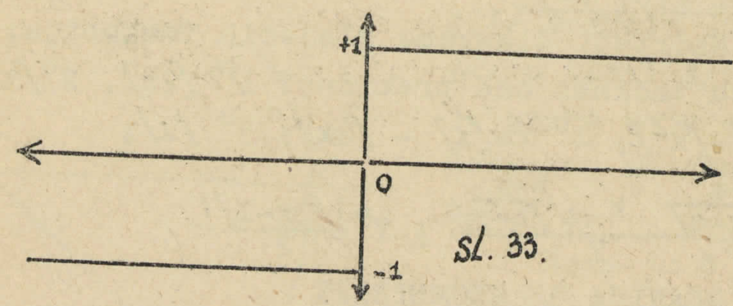
Pr.4/ Funkcija $g/x/ = x-[x]$ ima prekid kad je x ceo broj.

Neka je h malo i > 0, a n ceo broj, imamo

$$g/n+h/ = n+h-[n+h] = n+h-n = h \to 0 \quad \text{kad} \quad h \to 0$$

$g/n-h/ = n-h-[n-h] = n-h-/n-1/ = 1-h \to 1$ kad $h \to 0$,

$\lim\limits_{h \to 0} g/n+h/ = g/n/ = 0$, a $\lim\limits_{h \to 0} g/n-h/ = 1$

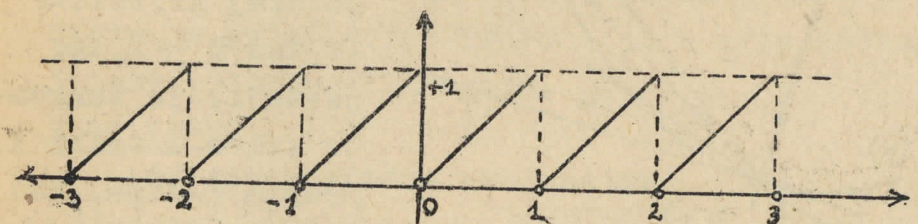


Sl. 33.

Slika 32 daje diagram funkcije $y = x-[x]$; ona je periodična sa periodom $w=1$.

<u>Definicija.</u>- Sa $/a/$ označavamo apsolutnu vrednost broja a, t.j.

$$/a/ = \begin{cases} a \text{ kad je } a > 0 \\ -a \text{ kad je } a < 0 \\ a \text{ kad je } a = 0 \end{cases}$$



Sl.32.

tako je na primer, $/4/ = 4$ $/-3/ = 3$, $/0/ = 0$, $|-1,5| = 1,5$.

<u>Pr.5. Funkcija/</u>

$$g/x/ = \begin{cases} \frac{x}{/x/} \text{ kad je } x \neq 0 \\ 0 \quad " \quad " \quad x = 0 \end{cases}$$

je prekidna u tački $x=0$. $\left(\frac{a}{/a/}\right.$ daje znak od $\left.a\right)$

Imamo $g/x/ = 1$ za $x > o$, $g/x/ = -1$ za $x < o$.

Diagram funkcije $y = \frac{x}{/x/}$ dat je na slici 33.

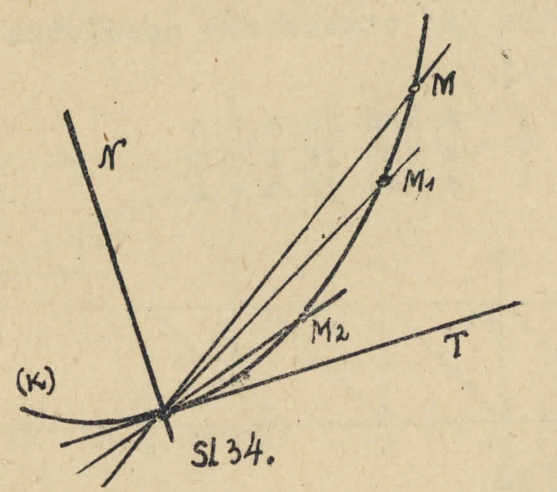
Zadaci 2.8. 1-7

Nacrtati diagrame sledećih funkacija; u kojim su tačkama one prekidne? 1^o $[2x]$, $2^o[x^2]$; 3^o $x^2-[x^2]$; 4^o $x+[x]-[2x]$; 5^o $/x/$;

$6^o \dfrac{\frac{x-a}{/x-a/}+\frac{b-x}{/b-x/}}{2}$; $7^o \dfrac{/[2x-1]/}{2}$

2.9. GRANICA U GEOMETRIJI

I/ Neka je A stalna tačka na krivoj /k/ a M pokretna. Svakom položaju $M, M_1, M_2 \ldots$ tačke M, odgovara po jedna tetiva AM, AM_1, AM_2. ...sem kad se tačka M poklopi sa tačkom A. Graničan položaj AT, tetive AM, kad $M \to A$, ako postoji, je tangenta krive u tački A. Drugim rečima, kad $M \to A$, tetiva AM se približava tangenti AT, i od nje otstupa koliko god želimo malo, ako je M dovoljno blisko tački A /vidi sl.34/.



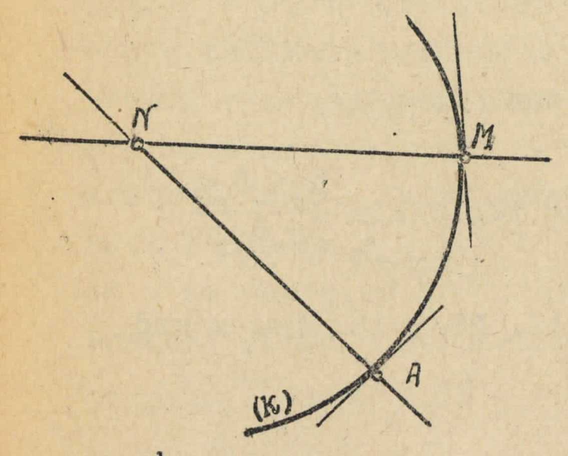
Sl.34.

II/ Neka je $\overline{AM}$ dužina tetive a, $\widehat{AM}$ dužina luka AM. Kad $M \to A$, $\overline{AM} \to o$ i $\widehat{AM} \to o$. Uopšte je $AM \sim \widehat{AM}$, t.j. $\widehat{AM}/\overline{AM} \to 1$ kad $M \to A$.

Pr.1/. Kod kruga se ova činjenica svodi na $\sin x \sim x$ kad $x \to o$, jer je $\sin x = \overline{AM}/2$ a $x = AM/2$.

III/ Normala AN krive /k/ u tački A/v.sl.34/ je prava koja stoji normalno na tangentu u tački A.

Neka je N tačka preseka normala AN i MN /v.sl.35/. Graničan položaj C, tačke N kad $M \to A$ naziva se centar krivine, a duž $\overline{AC}$ poluprečnik krivine krive/k/ u tački A.



Sl.35

Pr.2/. Kod kruga se sve normale seku u središtu, a poluprečnik krivine je u svim tačkama jednak poluprečniku kruga.

2.10 VEŽBE

Odredi granične vrednosti:

1/ $\sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x-1}} - x$, $x \to \infty$; 2/ $x\{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$, $/x \to \infty/$;

3/ $\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+8}-2}$, $/x \to o/$; 4/ $\frac{\sqrt{x^4+x^3-x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}}}{\sqrt{x^6+x^5-x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{9}}}$, $/x \to \infty/$;

5/ $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$, $/x \to o/$;

6/ $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$, $/x \to 1/$;

7/ $\dfrac{\sin ax}{\sin x}$, $/x \to 0/$; 8/ $\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$; $/x \to a/$;

9/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$; 10/ $/x - \frac{\pi}{2}/\operatorname{tg} x$, $/x \to \frac{\pi}{2}/$;

11/ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a}$ /v. vežbu 1,12,26/;

12/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^p - 1}{x^q - 1}$, /pod.i pomn. sa x-1/;

13/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt[n]{x}}{1-x}$ ./stavi $\sqrt[n]{x} = t$/;14/$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}$

15/ $\left.\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2}\right\}$, /v.vežbu 1,12, 28/; 16/ log x kad

$x \to \infty$ i $x \to 0$.

17/ Funkcija f/x/ je neprekidna u tački $x = -1$;

čemu teži $\dfrac{f/x/./x^3+1}{x^2 - 1}$ kad $x \to -1$?

18/ Proveri asimptotske relacije:

18/ $/x-1/^2/x+2/^3 \sim x^5$, $/x \to \infty/$;

19/ $x^2/+a^2/^n \sim x^{2n}$, $/x \to \infty/$;

20/ $/x-a/^p/x+x/^q \sim x^{p+q}$, $/x \to \infty/$;

21/ $\sqrt[p]{x^p + ax^{p-1} + bx^{p-2}} \sim x$, $/x \to \infty/$;

22/ $\sqrt[p]{x^q + ax^{q-1}} \sim \sqrt[p]{x^q}$, $/x \to \infty/$;

23/ $\sqrt[n]{\dfrac{/x^2-a^2/^p/x+b/^z}{(x+c)^r}} \sim \sqrt[n]{x^{2p+q-r}}$, $/x \to \infty/$;

24/$1/\sin x \sim 1/x$, $/x \to 0/$; 25/ $\operatorname{tg} x \sim \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$,

$/x \to \frac{\pi}{2}/$.

26/ Sa kolikom je tačnošću odredjen broj $2^{\sqrt{2}}$ približnim vrednostima 1° $\underline{2}$, 2° $2^{1,4}$, 3° $3^{1,42}$,?

27/ $\sqrt{2}$ možemo ovako izračunati /v.pr.2.7/6/ i /7/: 1° $\sqrt{2} = \sqrt{4-2} = 2\sqrt{1-1/2} \approx 1,5$, 2° $\sqrt{2} = \sqrt{2,05-0,05} = \sqrt{/1,5/^2 - 0,05}$=.....; sa kojom tačnošću je dat b' o približnom vrednošću koju dobijamo posle trećeg ovakvog postupka?

28/ Dati su brojevi a i b > a. Neka je $A = \dfrac{a+b}{2}$ aritmetička, a C= ab geometriska sredina; pokazati 1° da je $a < A < G < b$; 2° da A otstupa od G za manje od 10^{-1}, ako je $b-a = 1$ i $a \geqslant 1$.

Proveri sledeće aproksimacije:

29/$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \approx \sqrt{2} + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}x$, $/x \to 0/$; 30/ $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} \approx 2\cdot\sqrt{x} + \dfrac{/x-1/^2}{9}$, $/x \to 1/$; 31/ $\sqrt[4]{2x-x^2} \approx \dfrac{1-/1-x/^2}{4}$ $/x \to 1/$; 32/ $\dfrac{2/b+1/x+a-1}{x^2+2bx+a} \approx 2x - x^2$, $/x \to 1/$.

Odredi koeficiente a i b tako da u blizini tačke x= o funkcija g/x/ = a+bx aproksimira sledeće funkcije :

33/$\sqrt{3+\sqrt{1+x}}$; 34/ $\dfrac{1+x}{1-x}$: 35/ $\sin / x + \frac{\pi}{4}/$.

36/ Krug sa središtem u tački O, dodiruje duž $\overline{AB}$ = a u tački O; prava OA preseca krug u tački C, a tangenta na krug u toj tački preseca pravu AB u tački D. Kad poluprečnik kruga $\overline{OB} = x \to \infty$, čemu teže duži: 1° $y = \overline{AC}$, 2° $z = \overline{CD}$, 3° $t = \overline{AB}$ i 4° $x^2/t-z/$?

37/ Krug sa središtem u tački O i poluprečnikom r dodiruje pravu AT u tački A; neka je Q jedna tačka kruga a x dužina luka $\widehat{AQ}$. Ako razvijemo luk na tangentu AT od tačke A do tačke R. $\overline{AR}=x$, i prave QR i OA produžimo do preseka C, čemu će težiti duž $\overline{AC}$ kad $x \to 0$?

38/ Na prečnik $\overline{AB} = 2r$ datog kruga prenesimo duž $\overline{BC} = 2$, spojimo jednu tačku M kruga sa tačkom C i pravu CM produžimo do tačke preseka N sa tangentom na krug u tački A. Pokazati da je za male lukove, luk $\widehat{AM} \approx \overline{AN}$.

39/ Na simetrali duži $\overline{AB} = a$, data je tačka C na odstojanju h od duži, a u ravni pokretna tačka M. Neka je N tačka preseka simetrale ugla AMB sa simetralom duži; koji je granični položaj tačke N, kad tačka $M \to C$?

40/ Na dnu suda, koji je napunjen tečnošću do visine h, nalazi se predmet A, posmatran iz tačke O van tečnosti, taj se predmet vidi u položaju A'. Koji je graničan položaj slike A', kad se predmet A posmatra vertikalno?

GLAVA III

F U N K C I J A /nastavak/

GLAVA III

F U N K C I J A /nastavak/

3.1. PODELA FUNKCIJA

I/ Obično su funkcije definisane analatičkim izrazima, u kojima pored osnovnih računskih radnja /+, -, $\cdot$, :/ figurišu izvesni znakovi, čiji je smisao potpuno i jednoznačno definisan lg, sin, cos,/ /, [ ], i t.d./.

Klasifikaciju, t.j. podelu funkcija vršimo prema prirodi tih analitičkih izraza, t.j. prema operacijama koje se u ovim izrazima javljaju.

II/ Polinom.- Ako se javljaju samo operacije sabiranja, oduzimanja i množenja primenjene na nezavisnu promenljivu x, dobiveni analitički izraz nazivamo polinom; na pr.

$$1+x,\ x^3-2x,\ x^2-x\sqrt{2}+1,\ /x-1/./x-3/,$$
$$x^4+3x^3-x^2+5x-2,\ x^5-x+1, /x+1/./2x+3/./3x-2/$$

i t.d.

III/ Racionalna funkcija.- Ako se pored pomenutih operacija javlja i deljenje, t.j. ako se analitički izraz sastoji iz količnika od dva polinoma, ili iz zbira istih, tada on definiše jednu racionalnu funkciju; na pr.

$$\frac{x^2}{1+x},\ \frac{x^5-x^3}{/x-1/^2},\ \frac{x^2+1+1}{1+x^2},$$

$$\frac{2x^3}{x+2} + \frac{x^2+2x-1}{x^3-3x+1} \quad \text{i t.d.}$$

Napomena.- Polinom je specijalan slučaj racionalne funkcije, kad je imenitelj konstanta, zato se on često zove cela racionalna funkcija.

IV/ Algebarska funkcija.- Ako se u posmatranom analitičkom izrazu kavlja pored osnovne četiri računske radnje još i korenovanje, tada on definiše jednu algebarsku funkciju; na pr.

$$\sqrt{1+x^2},\ \sqrt{x}+\sqrt[3]{x+1},\ \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$
$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ x+\sqrt{1+\sqrt{x}} \quad \text{i t.d.}$$

V/ Sve ostale funkcije, dakle, sve one koje nisu ni racionalne ni algebarske nazivamo transcendentnim funkcijama. Dve glavne grupe transcendentnih funkcija su:

1/ Trigonometrijske funkcije i to

$$\sin x \text{ i } \cos x$$

kao i njihove kombinacije na pr.

$$\operatorname{tg} x,\ x \operatorname{tg} x,\ \sin^2 x,\ \sin x+2\sin 2x, \text{ i t.d.}$$

2/ Eksponencijalne i logaritamske funkcije i to:

$$10^x,\ 2^x \text{ i } \lg x,$$

kao i njihove kombinacije na pr.

$$2^x+2^{-x},\ x^{x^2} \text{ ili } \lg^2 x,\ \lg \lg x \text{ i t.d.}$$

Napomena.- Analitički izraz u kome se pored racionalnih i algebarskih funkcija javljaju i transcendentne funkcije, definiše funkciju koja pripada klasi transcendentnih funkcija:, na pr.

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{x+\sin x}{x-\sin x}, \quad x+\sqrt{\cos x},$$

$$\frac{\lg x}{1+x^2}, \quad x^{2^x}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{i t.d.}$$

3.2. POLINOM /cela racionalna funkcija/

I/ Stepen polinoma je najveći stepen x-a koji se u tom polinomu javlja.

Polinomi

$$3x+4 \quad \text{ili} \quad 2x+\sqrt{2}$$

ili uopšte

$$ax+b,$$

su polinomi prvog stepena, a zovu se još i linearne funkcije.

Polinomi

$$x^2+4, \quad x^2+x+1,$$

ili oni koji se dobijaju kao proizvod dva lineanrna faktora, na pr.

$$/3x+4/ \cdot /4x-1/ = 12x^2+13x-4,$$

$$/x\sqrt{2}-1/ \cdot /x\sqrt{2}+1/ = 2x^2-1,$$

$$/2x-1/^2 = 4x^2-4x+1,$$

su polinomi drugog stepena ili kvadratne funkcije.

Polinomi

$$x^3-2, \quad x^3-2x+3, \quad 2x^3+x^2-2x+1,$$

ili oni koji nastaju iz proizvoda jednog linearnog i jednog kvadratnog faktora, na pr.

$$/x+1/ \cdot /x^2+1/ = x^3+x^2+x-1,$$

$$/x-2/ \cdot /x^2+x+1/ = x^3-x^2-x-2,$$

ili naposletku oni koji se dobijaju kao proiz-

vod iz tri linearna faktora na pr.

$$/x-1/ \cdot /x+1/ \cdot /2x+1/ = 2x^3+x^2-2x-1$$

$$/x+1/ \cdot /x+2/ \cdot /x+3/ = x^3+6x^2+11x+6,$$

$$/x+1/ \cdot /x+2/^2 = x^3+5x^2+8x+4,$$

$$/2x-3/^3 = 8x^3-36x^2+54-27$$

su polinomi trećeg stepena i t.d.

II/ Neka je polinom $f/x/$ dat u obliku linearnih ili drugih faktora, na pr.

$$f/x/ = /2x-1/ \cdot /x+1/ \cdot /x^2+1/ = 2x^4+x^3+x^2+x+1$$

Svaka nula pojedinih faktora je istovremeno nula polinoma $f/x/$; tako je

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1 = 0,$$

$$f/-1/ = 2-1+1-1-1 = 0$$

jer je

$$2x-1 = 0 \quad \text{za } x = \frac{1}{2},$$

$$x+1 = 0 \quad \text{za } x = -1.$$

Obratno, ako je $x=a$ nula polinoma $f/x/$, taj polinom je deljiv linearnom faktorom $/x-a/$. Opštije, neka je a proizvolan broj i $f/x/$ polinom n-tog stepena, tada je

$$f/x/ - f/a/$$

deljivo linearnim faktorom $/x-a/$, a količnik $q/x/$ je polinom $/n-1/$-og stepena.

Dokaz. -Neka je, najpre

$$f/x/ = x^n$$

tada je

$$f/x/ - f/a/ = x^n - a^n$$

Deobom ovoh binoma sa $/x-a/$ dobijamo

$$x^n-a^n : x-a = x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\dots\dots+a^{n-2}x+a^{n-1},$$

$$\underline{x^n-ax^{n-1}}$$
$$ax^{n-1}-a^n$$
$$\underline{ax^{n-1}-a^2x^{n-2}}$$
$$a^2x^{n-2}-a^n$$
$$\underline{a^2x^{n-2}-a^3x^{n-3}}$$
$$a^3x^{n-3}-a^n$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a^{n-2}x^2-a^n$$
$$\underline{a^{n-2}x^2-a^{n-1}x}$$
$$a^{n-1}x-a^n$$
$$a^{n-1}x-a^n$$

t.j.

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots\dots+a^{n-2}x+a^{n-1}$$

Napomena.-

I/ Za n=2 i 3 dobijamo poznate obrasce i to

za n= 2: $/x^2-a^2/ = /x-a/./x+a/$

za n= 3 :

$$/x^3-a^3/ = /x-a/./x^2+ax+a^2/$$

II/ Ako u ovom obrascu stavimo a=1 dobijamo

$$1+x+x^2+\dots\dots\dots+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}$$

koji izraz porestavlja obrazce za zbir geometriske progresije.

Uočimo sad neki polinom f/x/, na pr.

$$f/x/ = 2x^3+3x^3-x+4\ ;$$

tada je

$$f/x/ - f/a/ = 2/x^3-a^3/+3/x^2-a^2/-/x-a/$$

Kako je svaki od izraza u zagradama, prema prethodnom, deljiv sa /x-a/, ma kakvi bili koeficienti 2,3 i -1 i ma koliko takvih članova bilo, to je ceo izraz f/x/-f/a/ deljiv sa /x-a/, a stepen količnika

$$q/x/ = 2/x^2+ax+a^2/+3/x+a/-1 =$$
$$= 2x^2+/2a^2+3a-1$$

je za jedinicu manji od stepena polinoma f/x/.

Dakle je uopšte

$$\frac{f/x/-f/a}{x-a} = q/x/,$$

ili

$$f/x/ = /x-a/\ q\ /\ x/+f/a/,$$

gde je stepen polinoma q/x/ za jedinicu manji od stepena polinoma f/x/.

Ako je a nula polinoma f/x/, t.j. ako je f/a/ = o , tada je

$$f/x/ = /x-a/\ q/x/\ ;$$

dakle je polinom f/x/ deljiv linearnim faktorima /x-a/. Taj linearni faktor zove se još i koreni činilac jednačine f/x/ = o.

Napomena.- Kako polinom n-tog stepena ne može imati više od n linearnih faktora, to jedan polinom n-tog stepena može imati najviše n nula.

Pr.1/. Rastaviti polinom

$$f/x/ = 3x^2-2x-1.$$

na linearne faktore.

Kako su nule datog polinoma koreni jednačine

$$3x^2-2x-1 = 0$$

dakle

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1\pm 2}{3} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

to su njeni koreni činioci

$$x+\frac{1}{3} \quad i \quad x-1,$$

pa je

$$f/x/= 3/x + \frac{1}{3}/./x-1/= /3x+1/./x-1/.$$

Pr.2. Polinomi

$$x^2+1 \quad i \quad x^2+x+1$$

se ne mogu rastaviti na linearne faktore jer je i

$$x^2+1 \neq 0 \; i \; x^2+x+ \neq 0 \text{ za svake } x,$$

a odgovarajuće jednačine

$$x^2+1 =0 \; i \; x^2+x+1 = 0$$

nemaju realnih korena.

Pr.3/. Rastaviti na faktore polinom

$$x^4-1$$

Nule datoga polinoma su $\pm$ 1, pa je

$$x^4-1 =/x+1/./x-1/./x^2-1/$$

Pr.4. Odrediti koeficiente A i B tako da polinom

$$Ax^4+Bx^3+1$$

bude deljiv sa $/x-1/^2$.

Ako dati polinom podelimo sa

$$/x-1/^2 = x^2+2x+1$$

biće

$$Ax^4+ Bx^3+1: x^2-2x+1 =Ax^2+/2A+B/x+3A+2B$$

$$\underline{Ax^4-2Ax^3+Ax^2}$$

$$/2A+B/ x^3-Ax^2+1$$

$$\underline{/2A+B/x^3-2/2A+B/x^2+/2A+B/x}$$

$$/3A+2B/x^2-/2A+B/x + 1$$

$$\underline{/3A+2B/x^2-2/3A+2B/ x +3A+2B}$$

Da bi deoba bila bez ostatka mora biti

$$2/3A+2B/ = 2A+B \quad i \quad 3A +2B =1,$$

$$A = 3, \quad B= -4.$$

Prema tome količnik iznosi

$$3x^2+2x+1,$$

tako da je

$$3x^4-4x^3+1 = /x-1/^2/3x^2+2x+1/$$

<u>Zadaci 3.2. 1-11</u>

Odrediti nule polinoma:

$$f/x/ = x^4-7x^2+10$$

stavljajući $x^2= z$

Rastaviti na faktore polinome

2^0 x^4-x^2-2 $\quad$ 3^0 $x^4-4x^2+4x -1$

Odrediti nule polinoma:

4^0 ax^3+bx^2+bx+a $\quad$ 5^0 ax^3+bx^2-bx-a

stavljajući

$$\frac{x+1}{x} = t \quad i \quad \frac{x^2+1}{x^2} = t^2-2$$

Odrediti nule polinoma:

6^0 $x^4-7x^3-10x^2-7x+1$ $\quad$ 7^0 x^4-10x^2+1

Zadatak 7^0 rešiti i stavljajući $x^2=z$ i uporediti rezultate.

Podeliti sledeće polinome sa x^2+x+1:

8^o x^4+x^2+1 9^o x^8+x^4+1

Za koje će vrednosti x-a biti

10^o $6x-5x^2-7 < 0$, 11^o $\frac{x^4-6x^2+8}{x^4-3x^2+1} > 0$?

3.3. RACIONALNA NULA POLINOMA

I/ Da bismo rastavili polinom f/x/ na linearne faktore, treba prethodno naći njegove nule, t.j. rešiti algebarsku jednačinu f/x/=o.

Ako su koeficienti polinoma f/x/ celi brojevi, njegove racionalne nule možemo uvek naći.

Neka je, na pr., dat polinom

$$f/x/ = 3x^4+5x^3-8x^2-10x+4$$

Ako ona ima racionalnih nula, t.j. nula oblika p/q, gde su p i q celi brojevi, tada mora

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 3/\frac{p}{q}/^4+5/\frac{p}{q}/^3-8/\frac{p}{q}/^2-10/\frac{p}{q}/+4=o$$

$$\therefore\ 3p^4+5p^3q-8p^2q^2-10pq^3+4q^3=o,$$

$$\therefore\ p/3p^3+5p^2q-8pq^2-10q^3/=-4q^4$$

Kako su leva i desna strana ove jednačine celi brojevi i kako broj na levoj strani sadrži faktor p, to mora i $4q^4$ biti deljiv sa p. Pošto q nije deljiv sa p, jer pretpostavljamo da smo u razlomku p/q skratili sve zajedničke faktore, to mora 4 biti deljivo sa p t.j. p može biti samo jedan od brojeva

$$-1,\ +1,\ -2,\ +2,\ -4 \text{ ili } +4$$

Na isti način vidimo, kad gornju jednačinu napišemo u obliku

$$-3p^4= q/\ 5p^3-8p^2q-10pq^2+4q^3/,$$

da q mora biti faktor broja 3, t.j. ili 1 ili 3.

Dakle jedine racionalne nule koje dati polinom može imati su

$$+1,\ -1,\ +2,\ -2,\ +4,\ -4,\ +1/3,\ -1/3,\ +2/3,\ -2/3 \text{ ili } -4/3.$$

Uvrštavanjem ovih brojeva u f/x/, neposredno proveravamo koji od njih zadovoljava jednačinu f/x/ = o.

Ovo uvrštavanje postizavamo najbrže tako što dati polinom

$$f/x/ = 3x^4+5x^3-8x^2-10x+4$$

napišemo u obliku

$$f/x/= \{[/3x+5/x-8]x-10\}x+4,$$

i pojedine računske radnje vršimo postepeno redom koji je ukazan zagradama. Tako je, na pr. za x= 2

$$3x+5 = 3\cdot2+5= 11.$$

$$11x-8 = 11\cdot2-8 =14,$$

$$14x-10 = 14\cdot2-10= 18$$

$$18x+4 = 18\cdot2+4 = 4o$$

$$\therefore\ f/x/ = 4o.$$

Za ostale vrednosti dobijamo, na sličan način:

$$f/1/=-6,\ f/-1/= 4,\ f/-2/=0,\ f\left(\frac{1}{3}\right)=o,$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)= \frac{18o}{27},\ f\left(\frac{2}{3}\right)= -\frac{112}{27},\ f\left(-\frac{2}{3}\right)= \frac{56}{9}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right)= -\frac{20}{9},\ f\left(-\frac{4}{3}\right)= \frac{20}{27}.$$

Znači, dati polinom ima samo dve racionalne nule i to

$$-2 \text{ i } 1/3;$$

prema tome je on deljiv faktorima

$$\left(x-\frac{1}{3}\right) \text{ i } /x+2/,$$

t.j. faktorom

$$/3x-1/./x+2/ = 3x^2+5x-2.$$

Posle izvršene deobe

$$3x^4+5x^3-8x^2-10x+4 \;:\; 3x^2+5x-2=x^2-2$$

dobijamo

$$3x^4+5x^3-8x^2-10+4 = /3x-1/./x+2/./x^2-2/$$

Otuda vidimo da su još i vrednosti $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$ nule datoga polinoma, tako da su njegove četiri nule

$$1/3, \quad -2, \quad \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}.$$

Pr.1/. Odrediti racionalne nule polinoma

$$f/x/= x^3-2x^2+12x-24$$

Kako je koeficient od x^3 datog polinoma jednak jedinici, to mora biti $q= 1$, t.j. racionalne nule datog polinoma mogu biti samo celi brojevi i to delitelj broja 24, dakle brojevi

$+1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, +6, -6, +8, -8, +12, -12, +24, -24.$

Uvrštavanjem ovih vrednosti u f/x/ vidimo da je samo

$$f/+2/ = o$$

i deobom korenim činiocem /x-2/ dobijamo

$$x^3-2x^3+12x-24 = /x-2/./x^2+12/.$$

Pr.2/ Odrediti racionalne nule polinoma

$$f/x/ = x^4-5x^2+6$$

Racionalne nule datoga polinoma mogu biti samo celi brojevi i to samo faktori broja 6, t.j.

brojevi

$$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$$

Kako je

$$f/\pm1/ = 2, \; f/\pm2/= 2, \; f/\pm3/= 42, \; f/\pm6/=1122,$$

znači da polinom

$$f/x/ = x^4-5x^2+6$$

nema racionalnih nula.

Ako stavimo

$$x^2= z$$

i rešimo kvadratnu jednačinu

$$z^2-5z+6= o,$$

vidimo da su nule datog polinoma

$$+\sqrt{2}, \; -\sqrt{2}, \; +\sqrt{3}, \text{ i } -\sqrt{3}$$

II/ Na osnovu gornjeg zaključujemo:

Racionalne nule polinoma f/x/ sa celim koeficientima, mogu biti samo oni pozitivni ili negativni razlomci p/q, čiji je imenitelj q faktor koeficienta uz najveći stepen x-a, a brojitelj p faktor stalnog člana.

Ako je koeficienat najvećg stepena x-a jednak jedinici, racionalne nule polinoma f/x/ mogu biti samo celi brojevi.

Ako ni jedan od navedenih brojeva ne zadovoljava jednačinu f/x/ = o, dati polinom nema racionalnih nula

<u>Zadaci 3.3. 1-4.</u>

Odrediti racionalne nule polinoma:

$1^o \; x^3+3x^2+3x+9 \qquad 2^o \; 6x^4-5x^3+7x^2-5x+1$

3° $2x^5-x^4-x^3-2x^2+x+1$ 4° $4x^4-9x^3-27x^2-27x+27$

3.4. POLINOM /nastavak/

Navedimo još sledeće osobine polinoma:

I/ Polinom je odredjen t.j. definisan za vrednosti x-a i prestavlja jednu neprekidnu funkciju x-a.

Neka je

$$f/x/ = x^n$$

Tada je

$$f/x+h/-f/x/ = /x+h/^n-x^n = h\{x^{n-1}+/x+h/x^{n-2}+\ldots\ldots + /x+h/^{n-1}$$

$$\therefore \quad /x+h/^n-x^n \to 0 \quad \text{kad} \quad h \to 0.$$

Prema tome je monom x^n neprekidno funkcija x-a, za svake $n=1,2,3\ldots\ldots$

Kako je polinom zbir članova oblika Ax^n, a zbir neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija, to je svaki polinom neprekidna funkcija.

II/ Za velike pozitivne ili negativne vrednosti x-a polinom se ponaša kao član sa najvećim stepenom x-a.

Pr.1/

$$f/x/ = 2x^3-30x^2+2x-40 \sim 2x^3, \quad x \to \pm\infty$$

Jer je

$$\frac{f/x/}{2x^3} = 1-15x^{-1}+x^{-2}-20x^{-3}-1 \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty$$

III// Za male vrednosti x-a polinom se, u koliko nema stalnog člana, ponaša kao član sa najmanjim stepenem x-a.

Pr.2/

$$f/x/ = x^5-10x^3+2x^2 \sim 2x^2, \qquad x \to \pm 0$$

Jer je

$$\frac{f/x/}{2x^2} = 1 - \frac{10}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \to 1 \quad \text{kad } x \to \pm 0$$

Zadaci 3.4. 1-6.

Kako se ponašaju sledeći polinomi kad $x \to \pm\infty$:

1° $3x^5-100x^3+1$; 2° $x^3/x^2-1/^2$;
3° $/x^3+1/./x^4-1/$; 4° $/x^3+3/^2/x-2/^3$?

Kako se ponašaju polinomi kad $x \to \pm 0$:

5° $/x^2+1/^3-1$; 6° $/3x+1/^5-/5x^2+5x+1/^3$?

3.5. RACIONALNA FUNKCIJA.

I/ Svaka racionalna funkcija može se uvek napisati u obliku količnika dva polinoma.

Pr.1/ Izraziti u obliku količnika funkciju

$$f/x/= x^2-x+1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

Svedenjem na zajednički imenitelj

$$/x-1/./x^2+1/= x^3-x^2+x-1$$

dobijamo

$$f/x/ = \frac{/x^2-x+1/./x^3-x^2+x-1/+/x^2+1/+/2x+1//x-1/}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^5-2x^4+3x^3+x-1}{x^3-x^2+x-1}$$

Ako je stepen brojitelja jedne racionalne funkcije veći od stepena imenitelja, možemo je uvek napisati u obliku zbira jednog polinoma i jedne racionalne funkcije čiji je stepen brojitelja manji od stepena imenitelja.

Pr.2/. Izraziti funkciju

$$f/x/ = \frac{x^6-2x^4}{x^3-2x+1}$$

u obliku zbira jednog polinoma i jedne racionalne funkcije čiji je stepen brojitelja manji od 3.

Podelimo brojitelj sa imeniteljem:

$$\begin{array}{l} x^6-2x^4 \quad : \quad x^3-2x+ = x^3-1 \\ \underline{x^6-2x^4+x^3} \\ o \quad o-x^3 \\ \quad \underline{-x^3+2x-1} \\ \quad o \; -2x+1 \end{array}$$

Količnik deobe je x^3-1 a ostatak $-/2x-1/$ prema tome je

$$f/x/ = x^3-1 - \frac{2x-1}{x^3-2x+1}$$

3.6. RASTAVLJANJE RACIONALNIH FUNKCIJA

Ako je imenitelj racionalne funkcije dat u obliku proizvoda, a stepen brojitelja manji od stepena imenitelja, datu racionalnu funkciju možemo uvek napisati u obliku zbira racionalnih funkcija čiji su imenitelji pojedini faktori imenitelja date racionalne funkcije.

1/ Neka su faktori imenitelja linearni

Pr.4/ Rastaviti racionalnu funkciju

$$f/x/ = \frac{5x^2-12x+7}{/x+1//x-2//x-3}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Stavimo

$$f/x/ = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

i pomnožimo obe strane ove jednačine sa $/x+1/./x-2/./x-3/$, biće

$$\begin{aligned} 5x^2-12x+7 &= A/x-2/./x-3/+B/x+1/./x-3/+C/x+1/./x-2/= \\ &= A/x^2-5x+6/+B/x^2-2x-3/+C/x^2-x-2/= \\ &= /A+B+C/\,x^2-/5A+2B+C/x+/6A-3B-2C/ \end{aligned}$$

Da bi obe strane bile jednake mora

$$A+B+C= 5.$$

$$5A+2B+C =12,$$

$$6A-3B-2C = 7.$$

Ako sve tri jednačine saberemo dobijamo

$$12A = 24, \quad \therefore \; A= 2;$$

prema tome je

$$\begin{array}{l} B+C =3 \\ 2B+C = 2 \end{array} \quad B= -1 \;\; i \;\; C= 4$$

Dakle je

$$f/x/ = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x-3}$$

Pr.2. Rastavite funkciju

$$f/x/ = \frac{2x^3-11x^2-10x-5}{/x-3//x-1//x+1//x+2}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcije

Stavimo

$$f/x/ = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}$$

Koeficinete A,B,C,i D možemo i ovako odrediti. Pomnožimo najpre obe strane sa $/x-3/$

$$\frac{2x^3-11x^2-10x-5}{/x-1//x+1//x+2/} = A+/x-3/\left\{\frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}\right\};$$

stavljajući x=3, poslednji izraz izčezava usled faktora /x-3/, što daje neposredno

$$A=\frac{2\,3^3-11\,3^2-10\,3-5}{2\;4\;5}=\frac{[/2\;3-11/\;3-10]\;3-5}{40}=$$

$$=\frac{-80}{40}=-2.$$

Na isti način, množenjem sa /x-1/, /x+1/ i /x+2/ i stavljajući uzastopce x= 1, x= -1 i x=2, dobijamo

$$B=2,\quad C=-1 \text{ i } D=3$$

Prema tome je

$$f/x/=\frac{-2}{x-3}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+2}$$

II/ Neka imenitelj sadrži pored linearnih faktora i faktore višeg stepena.

Pr.3/ Rastaviti funkciju

$$f/x/=\frac{2x^3+5x^2+1}{x^4-1}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Kako je

$$x^4-1=/x-1//x+1//x^2+1/$$

stavljamo

$$f/x/=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Koeficiente A i B možemo odrediti kao u prethodnom primeru, množenjem sa /x-1/ odnosno sa /x+1/ i stavljanjem x= 1, odnosno x= -1; tako dobijamo da je

$$A=2 \quad \text{i} \quad B=-1$$

Prema tome je

$$\frac{2x^3+5x^2+1}{x^4-1}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^3+1}$$

Iz ovog izraza koeficiente C i D možemo dobiti ovako

$$\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{2x^3+5x^2+1}{x^4-1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=$$

$$=\frac{x^3+2x^2-x-2}{/x^2-1//x^2+1/}=\frac{x+2}{x^2+1}$$

t.j.

$$C=1 \quad \text{i } D=2$$

pa je

$$f/x/=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{x+2}{x^2+1}$$

Ali u ovom slučaju koeficiente C i D možemo i ovako odrediti. Stavimo u izrazu /1/ x=o; tada dobijamo, neposredno,

$$-1=-2-1+D,\qquad \therefore\; D=2$$

pomnožimo zatim izraz /1/ sa x i pustimo da $x\to\infty$ tada dobijamo

$$2=2-1+C,\qquad \therefore\; C=1.$$

Pr.4/ Rastaviti funkciju

$$f/x/=\frac{x^3+x^2}{/x^2+1//x^3+x+1/}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Stavimo

$$f/x/=\frac{Ax^2+B+C}{x^3+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Množenjem obe strane sa

$$/x^2+1//x^3+x+1/$$

dobijamo

$$x^3+x^2=/A+D/x^4+/B+E/x^3+/A+X+D/x^2+/B+D+E/x+/X+E/$$

Prema tome će obe strane biti jednake, ako je

$$A+D = o$$
$$B+E = 1$$
$$A+C+D = 1$$
$$B+D+E = o$$
$$C+E = o$$

Iz prve i treće jednačine dobijamo $C=1$, iz pete $E=-1$, iz druge $B=2$, iz četvrte $D=-1$, i naposletku iz prve $A=1$.

Prema tome je

$$f/x/ = \frac{x^2+2x+1}{x^3+x+1} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

Pr.5/ Rastaviti funkciju

$$f/x/ = \frac{13x^2-16x}{/x^2+2//x-1/^3}$$

na jednostavne racionalne funkcije.

U ovom slučaju treba smatrati faktor $/x-1/^3$ kao polinom trećeg stepena i staviti

$$f/x/ = \frac{Ax^2+Bx+C}{/x-1/^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$$

Množenjem sa $/x-1/^3/x^2+2/$ i uporedjivanjem koeficienta leve i desne strane dobijamo

$$A+D = o,$$
$$B-3D+E = o,$$
$$2A+C+3D-3E = 13,$$
$$2B-D+3E = -16,$$
$$2C-E = o$$

Eliminisanjem D i E iz prve i poslednje jednačine i zamenom u preostale tri dobijamo

$$3A+B-2C = o$$
$$A+5C = -13$$
$$A+2B+6C = -16;$$

eliminisanjem A iz druge jednačine i zamenom u preostale dve, dobijamo

$$B-13C = 39$$
$$2B+C = 3$$
$$\therefore C=-3, \quad B=0;$$

prema tome je $A=2$, $D=-2$ i $E=-6$, pa je

$$f/x/ = \frac{2x^2-3}{/x-1/^3} - \frac{2x+6}{x^2+2}$$

III/ Neka je imenitelj racionalne funkcije neki stepen linearnog faktora, možemo je rastaviti na zbir racionalnih funkcija čiji su brojitelji konstante, a imenitelji stepeni tog linearnog faktora.

Pr.6/ Rastaviti funkciju

$$f/x/ = \frac{2x^2-3}{/x-1/^3}$$

na zbir jednostavnih racionalnih funkcija.

Stavimo

$$\frac{2x^2-3}{/x-1/^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{/x-1/^2} + \frac{C}{/x-1/^3}$$

Množenjem sa $/x-1/^3$ dobijamo

$$2x^2-3 = A/x-1/^2+B/x-1/+C$$

Zamenimo $/x-1/$ sa t, t.j. stavimo

$$/x-1/ = t \quad \text{ili} \quad x = 1+t;$$

i uredimo dobiveni polinom leve strane po stepenima od t; biće

$$2x^2-3 = 2/1+t/^2-3 = 2t^2+4t-1 =$$
$$= 2/x-1/^2+4/x-1/-1;$$

uporedjujući koeficientedobijamo

$A = 2, \quad B = 4$ i $C = -1$

pa je

$$f/x/ = \frac{2}{x-1} + \frac{4}{/x-1/^2} - \frac{1}{/x-1/^3}$$

<u>Zadaci 3.6. 1-9</u>

Rastaviti sledeće funkcije na jednostavne racionalne funkcije:

$1^o\ \frac{12x^2-70x+98}{/x-2//x-3//x-4/}$; $2^o\ \frac{x^2+2x-1}{/x-1/^2/x+3/}$; $3^o\ \frac{ax+b}{x^2-1}$;

$4^o\ \frac{x^2+1}{x^3-1}$; $5^o\ \frac{x^5-1}{/x-1/^5}$; $6^o\ /\frac{x^3}{x^3+1}/^3$; $7^o\ \frac{x^n}{x^4-1}$

za $n = 0,1,2,3,4,5$,

8^o Na osnovu zadatka 7, rastaviti sledeću racionalnu funkciju na zbir polinoma i jednostavnih racionalnih funkcija

$$\frac{ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f}{x^4-1}$$

9^o Neka je $f/x/ = x^4-2x^3+3x^2-4;$

pokazati da je

$$\frac{f/x/}{/x-1//x-4/} = q/x/ - \frac{f/1/}{3/x-1/} + \frac{f/4/}{3/x-4/}$$

gde je $q/x/$ polinom drugog stepena.

<u>3.6. RACIONALNA FUNKACIJA /nastavak/</u>

I/ Racionalna funkcija je definisana za sve vrednosti x-a, osim za nule imenitelja. Naime, ukazane računske radnje racionalnim izrazom mogu se izvesti za svake x, osim deobe sa nulom.

Kad x teži jednoj nuli imenitelja racionalna funkcija obično teži $\pm\infty$, a ponaša se kao u blizini te vrednosti odgovarajući faktor koji anulira imenitelj.

Pr.1/ Pokazati da je

$$f/x/ = \frac{x^2-x+4}{/x-2//x^2+1/} \sim \frac{6}{5/x-2/} \to \infty, \text{ kad } x \to 2\pm 0$$

Imamo

$$\frac{5}{6}/x-2/\ f/x/ = \frac{5/x^2-x+4/}{6/x^2+1/} \to 1 \text{ kad } x \to 2\pm 0$$

Pr.2. Pokazati da je

$$f/x/ = \frac{x^3-3}{/x-1/^2/x^2+x+1/} \sim -\frac{2}{3/x-1/^2} \to -\infty \text{ kad}$$

$x \to 1\pm 0.$

Imamo.

$$-\frac{3}{2}/x-1/^2 f/x/ = \frac{x^3-3}{x^2+x+1} \to 1 \quad \text{kad} \quad x \to 1\pm 0$$

II/ Racionalna funkcija je neprekidna za sve vrednosti x-a za koje je ona definisana, jer je količnik dve neprekidne funkcije, t.j. polinoma takodje neprekidna funkcija.

III/ Za velike vrednosti x-a racionalna funkcija se ponaša kao količnik članova najvećeg stepena brojitelja i imenitelja.

Pr.3/ Pokazati da je

$$f/x/ = \frac{3x^3-4x^2+7x-3}{4x^2-2x+5} \sim \frac{3x^3}{4x^2} = \frac{3}{4}x, \text{ kad } x \to \pm\infty$$

Imamo

$$\frac{4}{3x} f/x/ = \frac{\frac{3x^3-4x^2+7x-3}{3x^3}}{\frac{4x^2-2x+5}{4x^2}}$$

$$= \frac{1 - \frac{4}{3}x^{-1} + \frac{7}{5}x^{-2} - x^{-3}}{1 - \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{5}{4}x^{-2}} \to 1 \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty$$

Pr.4/ Pokazati da je

$$f/x/ = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 10}{3x^4 + 1} \sim \frac{x^3}{3x^4} = x \cdot \frac{1}{3x},$$

$$x \to \pm\infty$$

Imamo

$$3xf/x/ = \frac{\frac{/x^3 + 2x^2 + 3x + 10/ : x^3}{3x^4 + 1}}{3x^4} =$$

$$= \frac{1 + 2x^{-1} + 3x^{-2} + 10x^{-3}}{1 + \frac{1}{3}x^{-4}} \to 1 \quad \text{kad} \quad x \to \pm\infty$$

Pr.5. Pokazati da je

$$f/x/ = \frac{4x^2 + x - 2}{2x^2 - x + 1} \sim \frac{4x^2}{2x^2} = 2, \text{ kod } x \to \pm\infty,$$

t.j. da

$$f/x/ \to 2, \text{ kad } \quad x \to \pm\infty$$

Imamo

$$\frac{1}{2} f/x/ = \frac{\frac{4x^2 + x - 2}{4x^2}}{\frac{2x^2 - x + 2}{2x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{4}x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}}{1 - \frac{1}{2}x^{-1} + x^{-2}} \to 1$$

$$\text{kad} \quad x \to \pm\infty$$

Zadaci 3.7. 1-4.

Neka je

$$f/x/ = x^3 + x^2 + 1$$

i

$$g/x/ = \frac{f/x/}{/x-1/^2 /x-3/^3}$$

pokazati da je

$$1/ \ g/x/ \sim - \frac{f/1/}{8} \cdot \frac{1}{/x-1/^2}, / x \to 1/;$$

$$2/ \ g/x/ = \frac{f/3/}{4} \ \frac{3}{/x-3/^3}, \quad /x \to 3/;$$

$$3/ \ g/x/ \sim x^{-2}, \ /x \to \infty/; \quad 4/ g/x/ - x^{-2} \sim 12x^{-3} \ /x \to \infty/.$$

3.8. ALGEBARSKA FUNKCIJA.

I/ Algebarska funkcija nastaje ako se pored racionalnih operacija /+, -, ., :/ pojavljuje još i korenovanje.

Pr.1/ $y = \sqrt{x}$; 2/ $y = \frac{2}{1 + \sqrt{x/x-1/}}$;

3/ $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$; 4/ $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$

U ovim slučajevima kažemo da je algebarska funkcija data u eksplicitnom obliku.

II/ Podesnim stepenovanjem koren se može uvek ukloniti.

Pr.1/ $y = \sqrt{x}$

Kvadriranjem dobijamo

$$y^2 = x \quad \therefore \ y^2 - x = 0.$$

Pr.2/

$$y = \frac{2}{1 + \sqrt{x/x-1/}}$$

$$\therefore \ \frac{2}{y} = 1 + \sqrt{x/x-1/},$$

$$\therefore \ \frac{2-y}{y} = \sqrt{x/x-1/}$$

$$\therefore \ \frac{/2-y/^2}{y^2} = x/x-1/$$

$$\therefore \ /2-y/^2 = y^2/x^2-x/,$$

$\therefore\ /x^2-x-1/y^2+4y-4 = 0.$

Pr.3/ $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

Kvadriranjem dobijamo

$y^2 = 1+2\sqrt{x/1-x/},$

$\therefore\ y^2-1 = 2\sqrt{x/1-x/},$

$\therefore\ /y^2-1/^2 = 4x/1-x/,$

$\therefore\ y^4-2y^2+1+4x-4x^2 = 0.$

Pr.4/ $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}$

$\therefore\ y-\sqrt{x} = \sqrt[3]{x^2}$

Dizanjem na treći stepen dobijamo

$/y-\sqrt{x}/^3 = y^3-3y^2\sqrt{x}+3xy-x\sqrt{x} = x^2,$

$\therefore\ y^3+3xy-x^2 = /3y^2+x/\sqrt{x}$

$\therefore\ /y^3+3xy-x^2/^2 = /3y^2+x/^2x$

$\therefore\ y^6-3xy^4-2x^2y^3-6x^3y+x^4-x^3 = 0$

Za algebarsku funkciju izraženu u ovako transformisanom obliku kažemo da je data u <u>implicitnom obliku.</u>

III/ Algebarska funkcija može biti data u implicitnom obliku, a da se pri tome ne može eksplicitno izraziti, kao na pr.:

Pr.6/ $y^5-5y-4x = 0$; Pr.6/ $y^6+2xy^3+x^2y-x^2=0.$

U opšte, pod algebarskom funkcijom podrazumevamo svaku onu funkciju $y/x/$ gde su x i y dati vezom oblika

$$P/x,y/ = 0.$$

a gde je P polinom po x i po y, na pr.:

Pr.7/ $/x-1/y^4+/x^2+1/y^3+/x^2+2x-1/y^2+/x^4+x^2+x/y+$
$+/2x^3+x+3/ = 0.$

<u>Zadaci. 3,8. 1-7</u>

Izraziti implicitno sledeće algebarske funkcije:

1/ $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x+2}$; $y^4-2/x+1/^2y^2+/x+1/^2/x-3/^2=0$

2/ $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}$; $/x-1/^3y^6-2x/2x+1/y^3-x^2=0$

3/ $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}$; $y^4-4xy^2-4x^2y-x^3=0$

4/ $y=\sqrt{2x}+\sqrt{x\sqrt{2x}}$; $y^6-6xy^4-12xy-18x^3=0$

Izraziti eksplicitno sledeće algebarske funkcije:

5/ $y^2-2xy+/x-1/^2=0$ $y= x+\sqrt{2x-1}$

6/ $/x+1/y^2-2xy+/1-x/=0$; $y=\dfrac{x+\sqrt{2x^2-1}}{x+1}$

7/ $y^4-4y^2+4x^2=0$; $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$

<u>3.9. ALGEBARSKA FUNKCIJA /nastavak/</u>

1/ Polinom je definisan za sve x; racionalna funkcija za sve x izuzev za nulu imenitelja, dok kod algebarske funkcije mogu postojati celi razmaci u kojima ona nije definisana.

Pr.1/ Funkcija

$$y=\sqrt{x-1}$$

je definisana samo u razmaku $/1,\infty/$

Pr.2/ Funkcija

$$y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-1}$$

je definisana samo u razmacima $/-2,-1/$ i $/1,2/$.

Pr.3/ Funkcije.

$$y=\sqrt[3]{1+2x} \quad \text{ili} \quad \sqrt{1+x^2}$$

su definisane u celom razmaku $/-\infty+\infty/$.

II/ Polinom i racionalna funkcija uzimaju za svaku vrednost x-a samo jednu vrednost, dok

algebarska funkcija može uzeti i više vrednosti.
U prvom slučaju da je funkcija jednoznačna /uniformna/ u poslednjem da je višeznačna /multiformna/

Pr.4/ Funkcija

$$y=\sqrt{x-1}$$

uzima za sve x razmaka /1, ∞ /dve vrednosti i to $\pm\sqrt{\ }$.

Pr.5/ Funkcija

$$y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-1}$$

uzima za sve x razmaka /-2,-1/ i /1,2/ četiri vrednosti i to:

$$+\sqrt{\ }\ +\sqrt{\ },\ +\sqrt{\ }-\sqrt{\ },\ -\sqrt{\ }+\sqrt{\ },\ \text{i}\ -\sqrt{\ }-\sqrt{\ }.$$

Pr.6/ Funkcija

$$\sqrt[3]{1+2x}$$

uzima za sve x razmaka /$-\infty+\infty$/ samo jednu vrednost.

Pr.7/ Funkcija

$$y=x+\sqrt{5+2\sqrt{2+x}}$$

uzima četiri vrednosti za sve x razmaka /$-2,\frac{17}{4}$/, a dve vrednosti za sve x razmaka /$\frac{17}{4},\infty$/; jer je za $x>\frac{17}{4}$

$$5-2\sqrt{2+x}<0$$

Naprimer, za x= 2 imamo četiri vrednosti i to:

$$2\pm\sqrt{5\pm2\sqrt{4}},\quad \text{t.j.}\ -1,+1,\ +3,\ \text{i}\ +5$$

a za x = 7 imamo samo dve vrednosti i to:

$$7\pm\sqrt{5+2\sqrt{9}}=7\pm\sqrt{11}$$

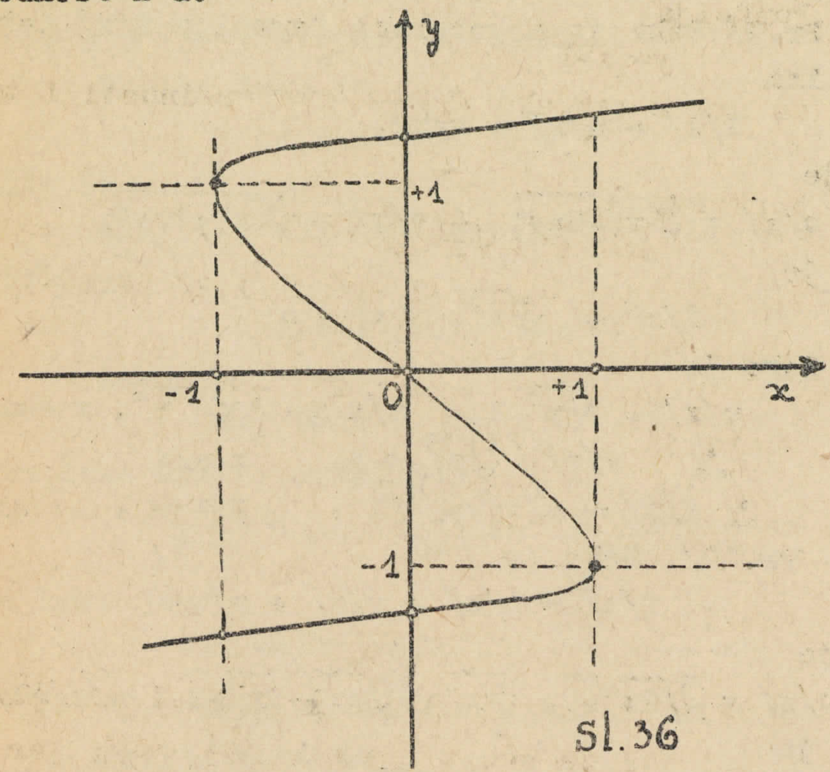
Pr.8./ Funkciju y/x/ definisanu jednačinom

$$y^5-5y-4x=0$$

ne možemo eksplicitno izraziti. Medjutim iz

$$x=\frac{y^5-5y}{4}=\frac{y/y^4-5/}{4}$$

svakoj vrednosti y-a možemo naći odgovarajuću vrednost x-a.



Sl.36

Na taj način dobijamo diagram funkcije y/x/ i on ima oblik slike 36. Iz njega vidimo da posmatrana funkcija uzima jednu vrednost u razmacima /$-\infty$,-1/ i /1, ∞/, a tri vrednosti u razmaku /-1,+1/.

IV/ U koliko je jedna algerbarska funkcija definisana za velike vrednosti x-a, ona se asimptotski ponaša kao izraz oblika $A\sqrt[q]{x^p}$, i to:

1^o Ako je algebarska funkcija data u obliku zbira od dva ili više korena, ona se za velike vrednosti x-a ponaša kao onaj član, čiji je eksponent p/q najveći; ili ako ih ima više jednakih, kao zbir članova.

Pr.9/ Neka je algebarska funkcija f/x/ data u obliku

$$f/x/ = u/x/ + v/x/,$$

gde je

$$u/x/ = \sqrt[4]{x^3+5x+1} \text{ i } v/x/ = \sqrt[3]{8x^2+2x+3};$$

tada je

$$f/x/ \sim \sqrt[4]{x^3}, \quad x \to \infty$$

Kako je

$$u/x/ \sim \sqrt[4]{x^3} \text{ i } v/x/ \sim 2\sqrt[3]{x^2}, \ x \to \infty$$

$$\therefore \quad v/x/ / \sqrt[4]{x^3} \to 0, \quad x \to \infty,$$

$$\therefore \ f/x/ \sim u/x/ \sim \sqrt[4]{x^3}, \quad x \to \infty,$$

Pr.10/. Neka je

$$f/x/ = u/x/ + v/x/ + w/x/$$

gde je

$$u/x/ = \sqrt[3]{2x^4+5}, \ v/x/ = \sqrt[6]{4x^8-2x^4+7} \text{ i } w/x/ = 9x+12;$$

tada je

$$f/x/ \sim 2\sqrt[3]{2x^4}, \quad x \to \infty$$

Kako je

$$u/x/ \sim \sqrt[3]{2x^4}, \ v/x/ \sim \sqrt[6]{4x^8} = \sqrt[3]{2x^4}$$

i

$$w/x/ \sim 9x, \quad x \to \infty$$

$$\therefore \ u/x/ \sim v/x/ \sim \sqrt[3]{2x^4},$$

a

$$\frac{w/x/}{\sqrt[3]{2x^4}} \to 0, \text{ kad } x \to \infty$$

$$\therefore \ f/x/ \sim 2u/x/ \sim 2\sqrt[3]{2x^4}, \quad x \to \infty$$

2^0 Ako je algebarska funkcija data u obliku razlike dva korena, koji se asimptotski ponašaju na isti način, tada se ona za velike vrednosti x-a javlja u neodredjenom obliku "$\infty - \infty$". U tom slučaju postupamo na sledeći način:

Pr.11/ Neka je

$$f/x/ = u/x/ - v/x/$$

gde je

$$u/x/ = \sqrt{x^2+3x\sqrt{x}} \quad \text{i } v/x/ = \sqrt{x^2+1};$$

tada je

$$f/x/ \sim \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad x \to \infty.$$

Kako je

$$u/x/ \sim v/x/ \sim x, \quad x \to \infty$$

to ćemo ovako postupiti:

$$f/x/ = u-v = \frac{u^2-v^2}{u+v} = \frac{3x\sqrt{x}-1}{u+v}$$

a kako je

$$u/x/+v/x/ \sim 2x, \quad x \to \infty$$

$$\therefore \ f/x/ \sim \frac{3x\sqrt{x}}{2x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad x \to \infty$$

Pr.12/ Neka je

$$f/x/ = u/x/ - v/x/,$$

gde je

$$u/x/ = \sqrt{4x^2+3x+2} \quad \text{i} \quad v/x/ = 2\sqrt{x^2+1},$$

tada

$$f/x/ \to 3/4, \quad x \to \infty$$

Kako je

$$u/x/ \sim v/x/ \sim 2\sqrt{x^2} = 2x, \quad x \to \infty$$

to je

$$f/x/ = u-v = \frac{u^2-v^2}{u+v} = \frac{3x+1}{u+v} \sim$$

$$\sim \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}, \quad x \to \infty$$

Pr.13/ Neka je

$$f/x/ = u/x/ - v/x/$$

sa

$$u/x/ = \sqrt[3]{x^2+x} \quad \text{i} \quad v/x/ = \sqrt[3]{x^2+1};$$

tada je

$$f/x/ \sim \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}, \quad x \to \infty$$

Kako je

$$u/x/ \sim v/x/ \sim \sqrt[3]{x^2}, \quad x \to \infty$$

stavimo

$$f/x/ = u-v = \frac{u^3-v^3}{u^2+uv+v^2} = \frac{x-1}{u^2+uv+v^2};$$

tada iz

$$u^2 \sim uv \sim v^2 \sim \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 = x\sqrt[3]{x}, \quad x \to \infty$$

$$\therefore f/x/ \sim \frac{x}{3x\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}, \quad x \to \infty$$

<u>Zadaci 3.9. 1-11</u>

U kojima su razmacima definisane, koliko imaju vrednosti i kako se ponašaju za velike vrednosti x-a sledeće algebarske funkcije:

1/ $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$; 2/ $y = \sqrt{x+\sqrt{1-x^2}}$; 3/ $y = \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$;
4/ $y = \sqrt{x/x^2-1/}$; 5/ $y = \sqrt{12x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; 6/ $y^3-3y-x=0$.

Kako se ponašaju sledeće algebarske funkcije za velike vrednosti x-a?

7/ $\sqrt{x+\sqrt[4]{x+1}} - \sqrt[4]{x}$ /stavi $\sqrt{x}=1/$;
8/ $\sqrt[3]{x^6+x^4} - \sqrt{x^4+1}$./najpre pomnoži i podeli sa $\sqrt[3]{\ } + \sqrt{\ }$;
9/ $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ /stavi $x=t^6$, dodaj i oduzmi t

i posmatraj zasebno izraz $\sqrt{1+t^2}-t$ i $\sqrt[3]{1+t^3}-t$/;
10/ $/\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}/^2 - \sqrt[3]{x^4+1}$; 11/ $\sqrt{x^2+6\sqrt[3]{x^2}} - /\sqrt[3]{x}+1/^2$.

<u>3.10.Vežba.1-27.</u>

1/ Odredi polinom drugog stepena tako da bude p/x/

I/ $p/-1/=a$, $p/o/ = b$ i $p/1/ = c$

II/ $p/1/ = a$, $p/2/ = b$ i $p/3/ = c$

2/ Odredi polinom trećeg stepena q/x/ tako da bude

$$q/-2/ = q/-1/ = a \quad \text{i} \quad q/1/ = q/2/ = b$$

i rastavi polinom q/x/-a na linearne faktore.

3/ Pokazati da je

$$x^3-/1+p^2/x+p = /x-p/\,/x^2+px+1/$$

4/ Odrediti nule polinoma

$$ax^4+2bx^2+c \text{ /staviti } x^2=z/.$$

5/ Odrediti nule polinoma

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$$

/Podeliti sa x^2 i staviti $x+1/x=z$ i $x^2-1/x^2=z^2-2$/.

6/ Izraziti x^n+x^{-n}, n=2,3,4,5, kao polinom od $z=x+1/x$.

7/ Neka je

$$f/x/ = a+bx+\ldots\ldots+x^n$$

polinom n-tog stepena sa celim koeficijentima. Ako su a i b deljivi brojem p, a <u>a</u> nije deljiv sa p^2, p ne može biti koren jednačine f/x/ =o. U primeru 3/1/ je a =-24, b= 12 prema tome ni jedan od brojeva 3,4,6,12 ne mogu biti nule toga polinoma, jer kvadrati gornjih brojeva nisu delitelji broja 24.

8/ Neka je f/x/ polinom sa celim koeficijentima; p/q može biti nula polinoma f/x sako ako je

$$f/1/ \text{ deljivo sa } p-q$$

ili ako je $f/-1/$ " " $p+q$.

Pr. $f/x/ = 2x^5-3x^4-6x^3+9x^2+12x+18$.

9/ Ostatak deobe poinoma f/x/ /I/ sa /x-a/ /x-b/ je

$$f/a/ \frac{b-x}{b-a} + f/b/ \frac{x-a}{b-a}$$

II/ a sa /x-a//x-b//x-c/ je

$$f/a/ \frac{/x-b//x-c/}{/a-b//a-c/} + f/b/ \frac{/x-c//x-a/}{/b-c//b-a/} + f/c/ \frac{/x-a//x-b/}{/c-a//c-b/}$$

10/ Pokazati da su polinomi

I/ $f/x/ = x^{3p}+x^{3q+1}+x^{3r+2}$, II/ $g/x/=x^{2m}+x^m+1$,

sa $m = 3k\pm 1$, deljivi sa x^2+x+1.

11/ Pokazati da je

$$/x+x+b/^{2k+1}-x^{2k+1}-a^{2k+1}-b^{2k+1}$$

deljivo sa /x+a//x+b//a+b/.

12/ Odrediti A i B tako da polinom

$$Ax^n+bx^{n-1}+1$$

bude deljiv sa $/x-1/^2$.

13/ Ako polinom f/x/ napišemo u obliku

$$f/x/ = p/x^2/+xq/x^2/$$

pokazati da je

$$p/-1/+xq\ /-1/$$

ostatak deobe toga polinoma sa x^2+1.

14/ Pokazati da polinom

$$/1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n/^2-x^n$$

ima kao faktore

$$/x^{n+2}-1/ \quad \text{i} \quad /x^n-1/.$$

15/ Pokazati da je polinom

$$/x-2/^{2n}+/x-1/^n-1$$

deljiv sa x^2-3x+2 i odrediti količnik.

16/ Ako jedan polinom sa racionalnim koeficijentima ima nulu oblika $3+\sqrt{2}$, pokazati da on tada mora imati i nulu oblika $3-\sqrt{2}$.

17/ Rastaviti polinom

$$a/x^4+a^4+b^4/-/x^2+a^2+b^2/^2$$

na linearne faktore./x-a-b, x+x+b, x-a+b, i x+a-b/

18/ Pokazati da je

$$x^3-3abx+a^3+b^3= \frac{1}{2}/x+a+b/ \left\{/x-a/^2+/x-b/^2+/a-b/^2\right\}$$

19/ Neka je

$$f/x/ =/x-a//x-b//x-c//x-d/;$$

ako je

$$x+y = a+b+c+d$$

i $\qquad x^3+y^3=a^3+b^3+c^3+d^3,$

pokazati da je

$$f/x/ = f/y/.$$

2o/ Pokazati da je

$$x^{2n}-n^2x^{n+1}+2/n^2-1/x^n-n^2x^{n-1}+1$$

deljivo sa $/x-1/^4$

21/ Za koje će vrednosti x-a biti

$$\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{5-8x^2} > \sqrt{4x^2+7}$$

22/ Pokazati da se polinom

$$f/x/ =x^4+px^2+q$$

može uvek rastaviti na proizvod od dva kvadratna faktora./Ako je $p^2-4q > 0$, rešavanjem jednačine $f/x/=0$, a ako je $p^2-4q < 0$, stavljajući $x^4+q= /x^2+\sqrt{q}/^2-2\sqrt{q}x/$.

Pr.1°. x^4+1; 2° x^4+x^2+1; 3° x^4-x^2+1; 4° x^4-x^2-6; 5°. x^4-6x^2+8; 6° x^4+4.

23/ **Rastaviti** sledeće racionalne funkcije na zbir od dve racionalne funkcije, čiji su imenitelji kvadratni polinomi:

1°. $\frac{x^n}{x^4+4}$; 2° $\frac{x^n}{x^4+1}$; 3° $\frac{x^n}{x^4+x^2+1}$

24/ Pokazati da se racionalna funkcija

$$f/x/ = \frac{p/x/}{/x^2+ax+b/^n}$$

može napisati u obliku

$$f/x/ = q/x/ + \frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{/x^2+ax+b/^2} + \ldots\ldots + \frac{A_nx+B_n}{/x^2+ax+b/^n}$$

gde su $p/x/$ i $q/x/$ polinomi.

Koeficijenti A_i i B_i i polinomi $q/x/$ mogu se odrediti ako se stavi $z=x^2+ax+b$ i u polinomu $p/x/$ se x^2 zameni sa $z-ax-b$ sve dogod se pojavljuje x^2, t.j. dok ne preostane samo x na prvom stepenu./Tako dobiveni izraz dobijamo i kao ostatak deobe polinoma $p/x/$ sa $x^2+ax-b-z/$.Traženi rezultat se dobija ako se tako dobiveni izraz uredi po stepenima od z, i podeli sa z^n.

Pr.1°. $\frac{x^7}{/x^2+x+1/^3}$; 2° $\frac{x^6+8x-8}{/x^2-2x+2/^2}$

zašto se u ovom poslednjem slučaju ne pojavljuje u rezultatu član $\frac{Ax+B}{/x^2-2x+2/^2}$?

25/ Izraziti implicitno sledeće algebarske

funkcije:

1° $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$; 2° $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x}}$.

26/ Izraziti eksplicitno sledeće algebarske funkcije, videti za koje vrednosti x-a su one definisane i kako se ponašaju za velike vrednosti x-a:

1° $y^4-2xy^2-x^2=0$; 2° $y^3-2xy^2-2xy+1=0$;

3° $y^4-4y^3+2/3-2x/y^2-4y+1=0$; 4° $y^4-2/x+a/y^2-/1-a/^2x=0$.

27/ Kako se ponašaju sledeće funkcije za velike vrednosti x-a?

1° $\sqrt[p]{x^{rp}+ax^{r/p-1/}}-\sqrt[q]{x^{rq}+bx^{r/q-1/}}$;

2° $\sqrt[p]{1+\sqrt[q]{x}}-\sqrt[q]{1+\sqrt[p]{x}}$;

3° $\sqrt[q]{x^q+pqx^q\sqrt[p]{x}}-/\sqrt[p]{x}+1/^q$

GLAVA IV.

KONSTRUKCIJA DIAGRAMA

GLAVA IV

D I A G R A M

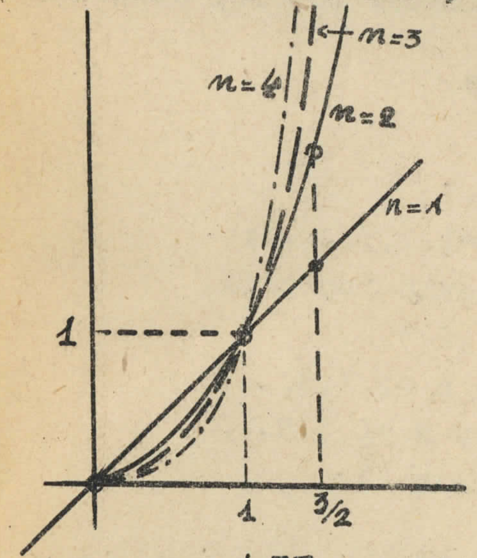
4.1. Diagrami. Funkcija x^n i $/x-a/^n$

I/ Prilikom konstrukcije diagrama treba pored istaknutih vrednosti, navedenih u tački 1,5, obratiti pažnju na ponašanje funkcije kad $x \to \pm\infty$, t.j. na tok njenog diagrama za velike vrednosti x-a.

Pr.1/ Kakav je medjusobni položaj diagrama funkcija $y/x/ = x^n$, za pozitivne vrednosti x-a, kad je n=1,2,3,...?

1^o $y = x$, je prava, simetrala I i III kvadranta.

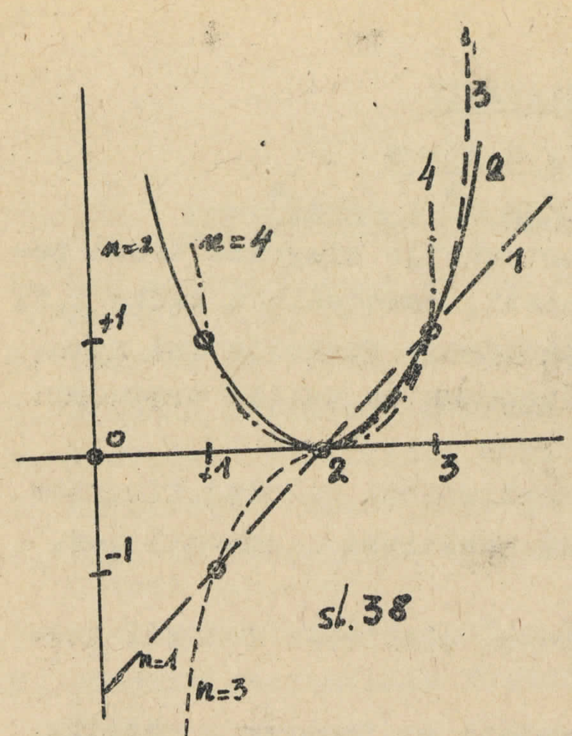
2^o $y = x^2$ je parabola sa temenom u početku i Y-osom kao osovinom; $x^2 < x$ za $o < 1$, a $x^2 > x$ za $x > 1$.



sl. 37

3^o $y = x^3$ je tako zvana kubna parabola; stalno raste, ali je $x^3 < x^2$ za $o < x < 1$ a $x^3 > x^2$ za $x > 1$

4^o $y/x/ = x^n$; stalno raste i u opšte je $x^n < x^{n-1}$ za $o < x < 1$ i $x^n > x^{n-1}$ za $x > 1$; Diagram funkcije x^n je za $x > 1$ utoliko strmiji ukoliko je $\underline{n}$ veće /v.sl. 37/



sl.38

5^o Za sve n=1,2,3,4... je y/o/= o i y/1/ = 1.

II/ Ako je $f/x/ \sim Ax^n$ kad $x \to \infty$ diagram funkcije f/x/ je je utoliko strimiji ukoliko je n veće.

III/ Ako je x=a nula funkcije f/x/, t.j.

f/a/ =o.

njen diagram seče X-osu u tački x=a; kakav on položaj zauzima prema X-osi u blizini te nule?

Pr.2/ Kakav je medjusobni položaj diagrama funkcija

$$f/x/ = /x-2/^n$$

u razmaku /1,3/ kad je

n= 1,2,3,....?

f/2/ = o za svako n=1,2,3,....;

tačka x= 2 je nula svih ovih funkcija.

f/3/=1 za svako n=1,2,3....

$$f/1/ = \begin{cases} +1 \text{ za } n = 2,4,6,\dots \\ -1 \text{ za } n = 1,3,5,\dots \end{cases}$$

1^o. n= 1. Diagram funkcije

y= x-2

je prava koja seče X-osu u tački x=2 pod uglom od 45^o.

<u>2^o n = 2.</u>- Diagram funkcije

$$y = /x-2/^2$$

je parabola sa temenom u tački y =o, x = 2 i osovinom x =2/paralelnom Y-osi/. On dodiruje X = osu u tački x = 2 i nalazi se stalno iznad nje, jer je

$$/x-2/^2 \geq o \quad \text{za svako } x.$$

<u>3^o. n = 3</u> - Diagram funkcije

$$y = /x-2/^3$$

je kubna parabola sa središtem simetrije u tački x = 2. On dodiruje i preseca X-osu u toj tački jer je

$$/x-2/^3 \begin{cases} \leq o & \text{za} \quad x \leq 2 \\ \geq o & \text{za} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

<u>4^o. n= 4.-</u> Diagram funkcije

$$y = /x-2/^4$$

dodiruje X-osu u tački x= 2, i nalazi se stalno iznad nje, jer je

$$/x-2/^4 \geq o \quad \text{za svako } x;$$

ali je u blizini nule x =2, više priljubljena uz X-osu od parabole, jer je

$$/x-2/^4 \leq /x-2/^2 \quad \text{za} \quad 1 \leq x \leq 3 .$$

<u>5^o.-</u> U opšte, diagram funkcije

$$y = /x-2/^n, \quad n= 1,2,3,4,\dots,$$

prolazeći kroz nulu x = 2, preseca X-osu kad je n =1, preseca je i dodiruje kad je n neparan broj a dodiruje je kad je <u>n</u> paran broj; pri tome je diagram utoliko više priljubljen uz X-osi u blizini nule, ukoliko je <u>n</u> veće.

IV/ Ako je

$$f/x/ \sim A/x-a/^n \quad \text{kad} \quad x \to a ,$$

tada je x= 2 nula funkcije f/x/ i diagram te funkcije preseca, preseca i dodiruje ili dodiruje X-osu, prema tome dali je n= 1, odnosno, dali je n neparan ili paran broj. Pri tome se ovaj diagram utoliko više priljubi X-osi u blizini te nule ukoliko je n veće.

Eksponent n činioca /x-a/ naziva se red nule x = a; kažemo da je u tom slučaju x =a nula n-tog reda.

Znači, ako je x = a nula parnog reda funkcije f/x/, njen diagram prolazeći kroz tu nulu, dodiruje X-osu, a ako je ta nula neparnog reda, diagram preseca X-osu ili je preseca i dodiruje, prema tome dali je n=1 ili je $n > 1$.

Zadaci.

Kakav je, za n= 1,2,3,....., medjusobni položaj diagrama funkcija:

1/ $/n-1/^n$:, 2/ x^n-1; 3/ $x^{n+1}-x^n$; 4/ $/x-1/^2x^n$?

Koliki je red nule x = 1 sledećih funkcija:

5/ $2x^2-4x+2$; 6/ $3x^3-9x^2+9x-3$; 7/ x^3-2x^2+x?

4.2. DIAGRAM POLINOMA

Za velike vrednosti x-a polinom se ponaša kao član sa najvećim stepenom od x/V.3.4/II/_/; znači ukoliko je stepen polinoma veći, utoliko je, za veliko x, njegov diagram strmiji.

Ako je x =a nula k-tog reda toga polinoma, on se u blizini te nule ponaša kao $A/x-a/^k$.

prema tome će se njegov diagram u blizini te nule u toliko više priljubiti uz X-osu ukoliko je k veće i preseca će je ili ne prema tome dali je red nule k neparan ili paran broj.

Pr.1.- Skiciraj diagram funkcije

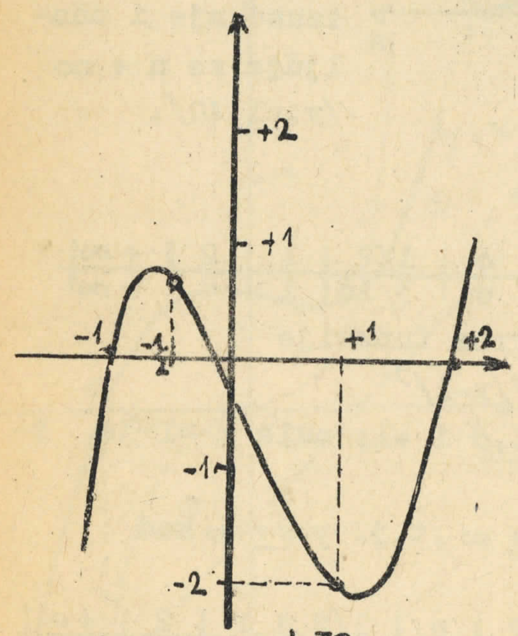
$$y = x/x+1/ /x-2/$$

1^o y = o za x = -1, x = o i x =2; sve su ove nule prvog reda, prema tome diagram preseca X-osu u ovim tačkama.

2^o. $y \sim x^3$ kad $x \to \pm\infty$;

znači za velike negativne vrednosti x-a y je veliko negativno, a za velike pozitivne vrednosti x-a y je veliko pozitivno.

3^o. Prema tome diagram posmatrane funkcije dolazi iz $-\infty$, preseca X-osu najpre u tački x=-1, zatim u tački x = o, naposletku je preseca u tački x =2 udaljujući se u $+\infty$ /v. sl. 39/.



sl. 39

x	$-\infty$	-2	-3/2	-1	-1/2	o	1	2	5/2	3	$+\infty$
y	$-\infty$	-8	-25/8	o	5/8	o	-2	o	35/8	12	$+\infty$

Pr.2/ Skiciraj

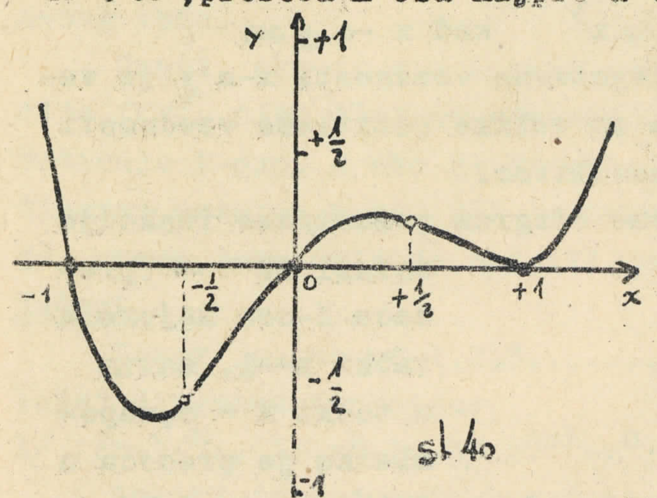
diagram funkcije

$$y = x/x+1//x-1/^2$$

1^0. $y = 0$ za $x = -1$, $x = 0$ i $x = 1$, pri tome su $x = -1$ i $x = 0$ nule prvog reda, a $x = 1$ nula drugog reda; znači, diagram preseca X-osu u tačkama $x = -1$ i $x = 0$, a dodiruje je u tački $x = 1$.

2^0 $y \sim x^4$ kad $x \to \pm\infty$; znači da je y veliko pozitivno, kad je x veliko pozitivno ili negativno.

3^0 Prema tome, diagram date funkcije dolazi iz $+\infty$, preseca X-osu najpre u tački $x = -1$, ponovo je preseca u tački $x = 0$, zatim je dodiruje u tački $x = +1$ ostajući iznad nje i udaljuje se u $+\infty$ /v.sl.40/.



sl 40

x	$-\infty$	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2	$+\infty$
y	$+\infty$	18	0	-9/16	0	3/16	1	6	$+\infty$

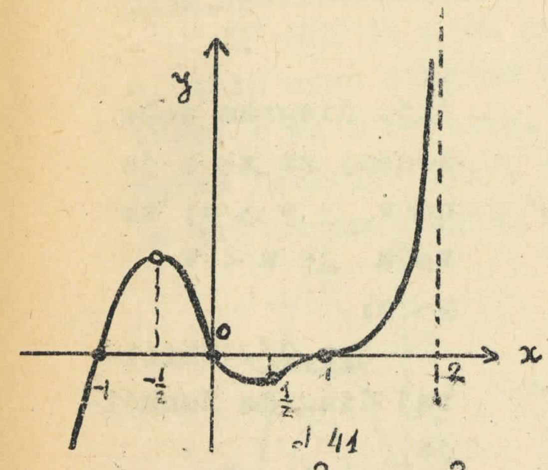
Pr.3/ Skiciraj diagram funkcije

$$y = x/x+1//x-1/^3$$

1^0 $y = 0$ za $x = -1, 0$ i $+1$; nula $x = 1$ je 3-eg reda.

2^0 $y \sim x^5$ kad $x \to \pm\infty$, t.j. $y \to \pm\infty$ kad $x \to \pm\infty$; v. sl. 41.

x	$-\infty$	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2	$+\infty$
y	$-\infty$	-27	0	27/32	0	-3/32	0	6	$+\infty$



sl 41

Zadaci.-

Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

1. $x/x-3/^2$; 2. $/x-1//x-2/^3$ 3. x^2-x^4; 4. $/x+1//x-1/^3$; 5. $x^3/x-1/$; 6. $x/x^2-1/$; 7. $x/x-1//x-2//x-3/$; 8. $x^3/x-2/^2$; 9. $/x^2-1/^3$; 10. $x/x-2//x+1/^3$; 11. $/2x-1/^2/x+1/^3$; 12. $/3x-2/^2/2x-3/^2$.

4.3. DIAGRAM POLINOMA /nastavak/.-

Ako je polinom dat u razvijenom obliku, a ne možemo ga napisati kao proizvod faktora nižeg stepena, postupamo kao u sledećim primerima.

Pr.1/.-Skiciraj diagram funkcije

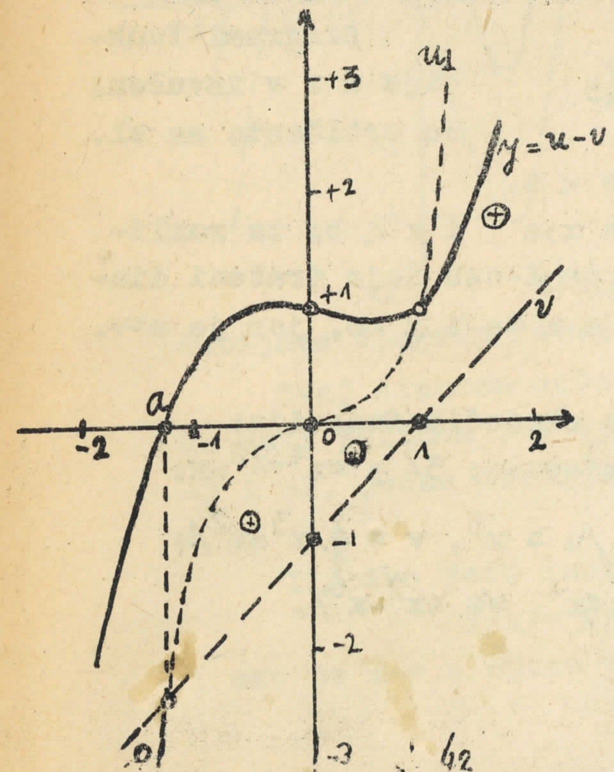
$$y = x^3-x+1$$

Stavimo

$$u = x^3 \text{ i } v = x-1,$$

$$\therefore y = u-v.$$

Diagrami funkcija $u/x/$ i $v/x/$ su na sl.42 izvučeni crtičasto. Razlika ordinata $u-v = y$, na slici šatirana, prenesena

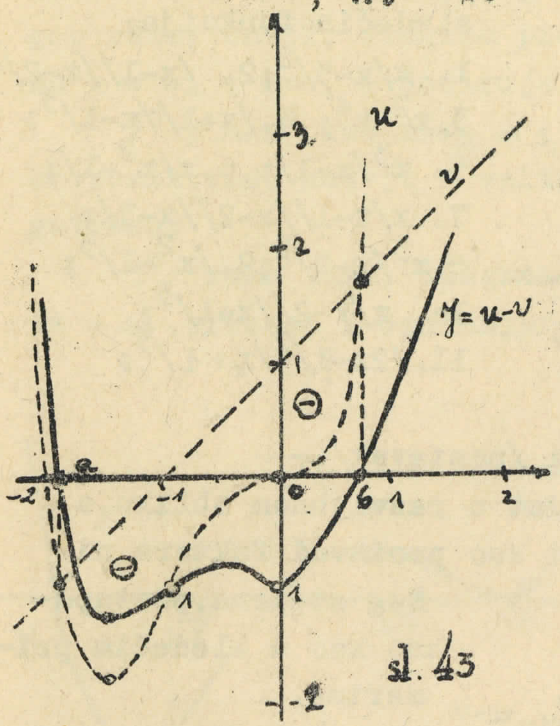


42

na X-osu daje diagram funkcije y.

Za $x = a$ je

$u = v;\ \therefore y = 0.$



sl. 43

t.j. diagram seče X-osu; za $x > a$ je $u > v$, $\therefore y > 0$; za $x < a$ je $u < v$ $y < 0$;

pr.2/.-Skiciraj diagram funkcije

$$y = x^4 + 2x^3 - x - 1$$

Stavimo

$u = x^4 + 2x^3 = x^3/x+2/$,

$v = x+1$.

Diagrami funkcija u i v izvučeni su crtičasto na sl. 43. Razlika $y = u-v$ je < 0. za $a < x < b$ i > 0 za $x > a$ i $x < b$; ta razlika $y = u-v$, prenesena na X-osu daje traženi diagram koji seče X-osu za $x = a$ i $x = b$, jer je $u = v$.

Zadaci. -

Skiciraj diagram sledećih funkcija:

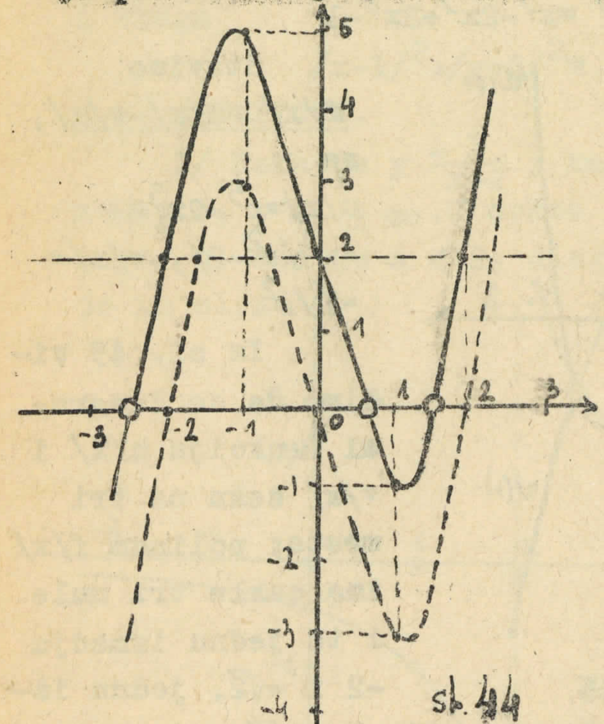
1/ $y = x^2 + ax + b$; 2/ $y = x^3 + px + q$; 3/ $y = x^4 - x^2 + x$;

4/ $y = x^5 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2$, /$u = x^5$, $v = \frac{1}{4}/x^3 + x^2/$;

5/ $y = x^6 + x^4 - 4x^2$, /$u = x^4$, $v = 4x^2 - x^6$/.

4.4. GRAFIČKO ISPITIVANJE nula.

I/ Ako je $x = a$ nula funkcije $f/x/$ t.j. $f/a/ = 0$, tada njen diagram seče ili dodiruje X-osu u tački $x = a$ i obratno. Prema tome, ako znamo diagram funkcije $f/x/$, tačke preseka sa X-osom daju približan položaj nula date funkcije.



sl. 44

Pr.1/ Odredi približan položaj nula polinoma

$f/x/ = x^3 - 4x + 2$

Diagram polinoma $p/x/ = x^3 - 4x = x/x^2 - 4/$ je na sl.44 izvučen crtičasto. Ako svakoj ordinati tog diagrama dodamo 2, t.j. ako ga translatorno pomerimo za dve jedinice u pozitivnom pravcu Y-ose, dobijamo diagram datog polinoma $f/x/ = p/x/ + 2$.

Ovaj diagram seče X-osu na tri mesta, znači da dati polinom ima tri nule i to jednu izmedju -3 i -2, jednu izmedju o i 1, a jednu izmedju 1 i 2.

II/ Ako datu funkciju $f/x/$ napišemo u obliku

$$f/x/ = u/x/ - v/x/$$

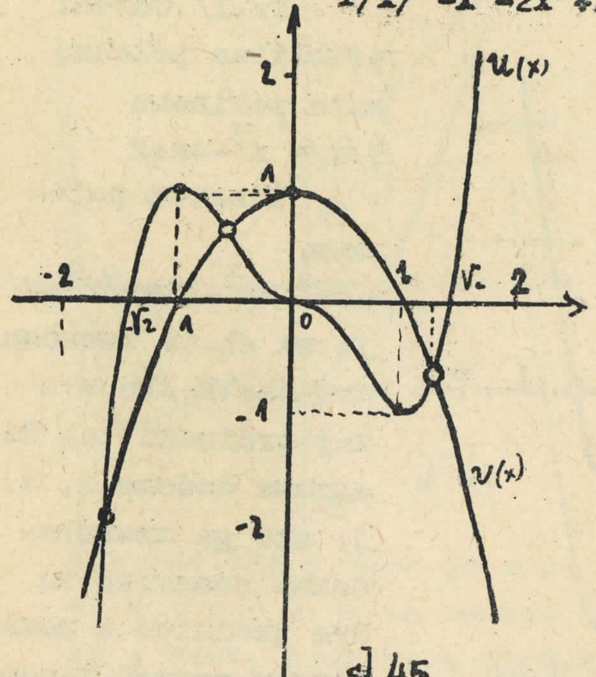
i ako je $x = a$ njena nula, tada je

$$u/a/-v/a/= f/a/=o$$
$$u/a/ = v/a/.$$

Dakle nule funkcije $f/x/ = u/x/-v/x/$ možemo dobiti i kao apscise tačaka preseka diagrama funkcija $u/x/$ i $v/x/$.

Pr.2/ Odredi približan položaj nula polinoma

$$f/x/ = x^5-2x^3+2x^2-1$$



sl.45.

Stavimo $f/x/ = u/x/-v/x/$, sa $u/x/=x^5-2x^3= x^3/x^2-2/$, $v/x/= -1-/x^2$.

Iz sl. 45 vidimo da se diagrami funkcija $u/x/$ i $v/x/$ seku na tri mesta; polinom $f/x/$ ima dakle tri nule i to jednu izmedju -2 i $-\sqrt{2}$, jednu izmedju -1 i o, i jednu izmedju 1 i $\sqrt{2}$.

Zadaci.-

Odredi grafički približan položaj nula polinoma navedenih u zadaci 4,3,1-5 i polinoma

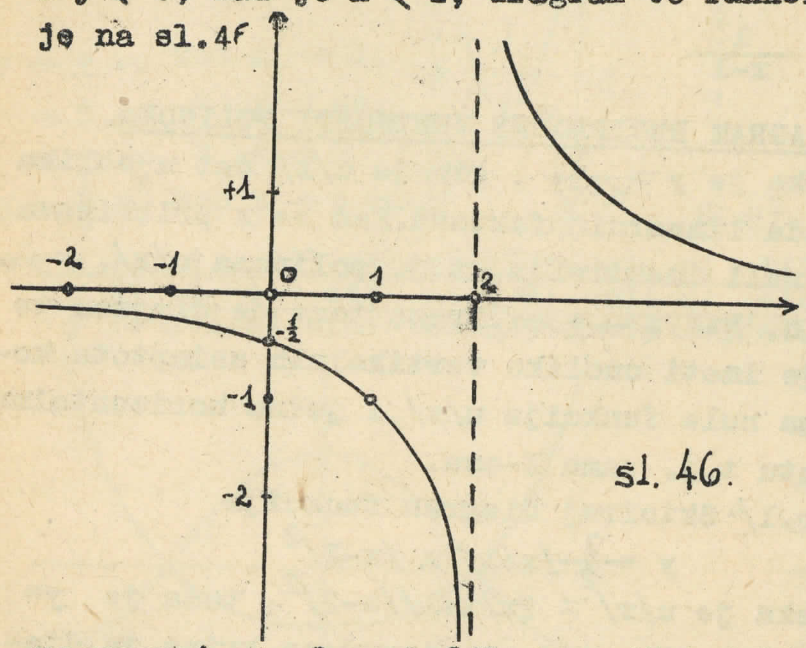
6.- $$f/x/ = x^4+x^2-2x-3$$

Pokazati da se u ovom poslednjem slučaju nule polinoma $f/x/$ mogu dobiti i kao apscise tačaka preseka parabole $y = x^2$ i kruga $y^2+/x-1/^2= 4$

7/ Pokazati da se nule polinoma
$$4x^6-32x^5+96x^4-124x^3+49x^2+14x-4$$
mogu dobiti kao apscise tačaka preseka diagrama funkcije
$$y = 2x/x-2/^2$$
i kruga
$$/x-1/^2+/y+2/^2= 9.$$

4.5. ASIMPTOTA.

I/ Neka je $y = \frac{1}{x-2}$; kad $x \to \pm\infty, y \to \pm o$, a kad $x \to 2\pm o$, $y \to \pm\infty$. U opšte je $y > o$ kad je $x > 2$, a $y < o$, kad je $x < 2$; diagram te funkcije dat je na sl.46



sl. 46.

Vidimo da sve grane diagrama približavaju X-osi u koliko je x veća, a druge dve grane pravoj $x = 2$, u koliko se više udaljujemo u pozitivnom ili negativnom pravcu X-ose.

II/ Za jednu pravu kažemo da je asimptota neke grane diagrama, ako joj se ova utoliko više približava ukoliko se po pravoj više udaljujemo, tako da rastojanje te grane diagrama od asimptote teži nuli kad se udaljimo u beskonačnost.

Diagram funkcije $\frac{1}{x-2}$ ima dve asimptote i to horizontalnu asimptotu $y = o$ i vertikalnu $x = 2$. On pretstavlja hiperbolu sa središtem u tački /0,2/.

Zadaci.-

Odredi asimptote diagrama funkcija:

1/ $\frac{x}{x-1}$; 2/ $\frac{x-1}{2x-1}$; 3/ $\frac{1}{x^2+1}$; 4/ $\frac{x}{x^2+1}$; 5/ $\frac{x^2}{x^2+1}$

6/ $\frac{1}{x^2-1}$; 7/ $\frac{x}{x^2-1}$; 8/ $\frac{x^2}{x^2-1}$; 9/ $\frac{1}{x/x-1/}$;

10/ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

4.6. DIAGRAM RECIPROČNE VREDNOSTI POLINOMA.

Neka je $y = \frac{1}{u/x/}$, gde je u/x/ dat u obliku proizvoda linearnih faktora. Kad se x približava jednoj nuli imenitelja, t.j. polinoma u/x/, $y \to \infty$ a $y \to \pm o$, kad $x \to \pm \infty$. Prema tome će diagram te funkcije imati onoliko vertikalnih asimptota koliko ima nula funkcija u/x/, i jednu horizontalnu asimptotu t.j. samu X-osu.

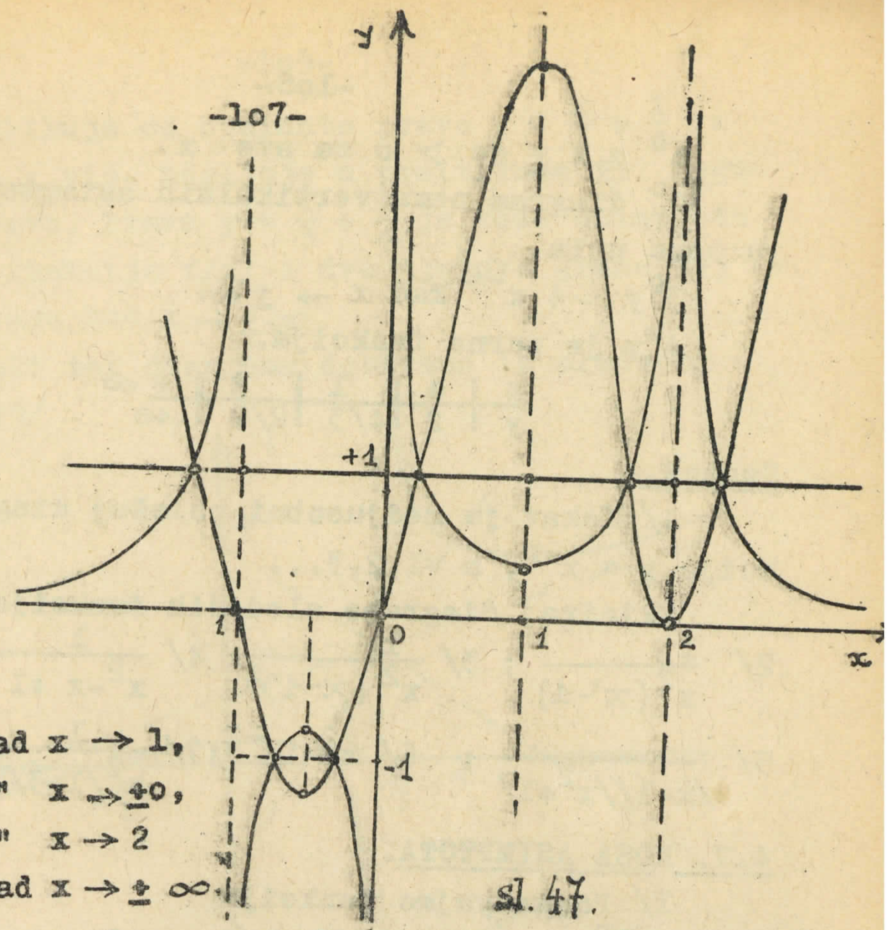
Pr.1/ Skiciraj diagram funkcije

$$y = \frac{1}{2}/x+1/\ x\ /x-2/^2$$

Neka je $u/x/ = 2x/x+1//x-2/^2$, tada je $y = \frac{1}{u}$. Na sl. 47 crtičasto izvučena kriva je diagram funkcije u/x/.

1^o y i u su $> o$ za $x < -1$ i $x > o$.

2^o y i u su $< o$ za $-1 < x < o$.



3^o $y \to \pm \infty$ kad $x \to 1$,

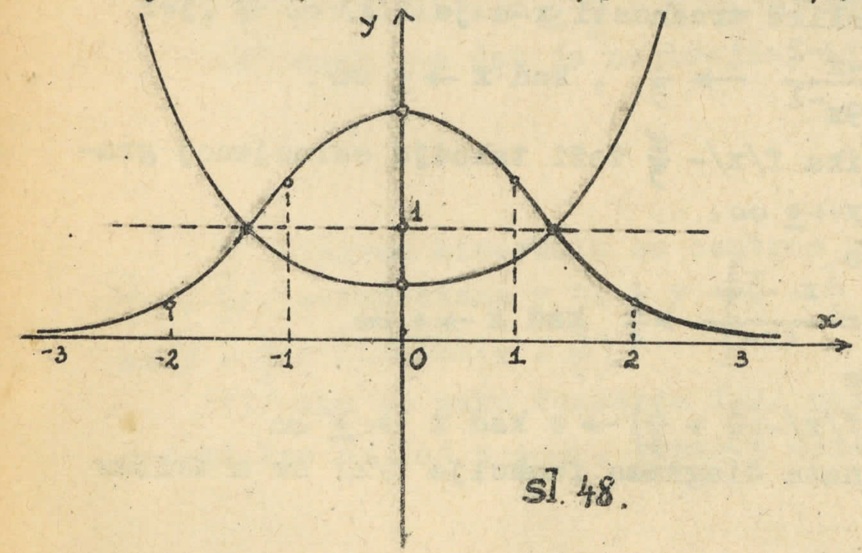
$\to \pm \infty$ " $x \to \pm o$,

$\to + \infty$ " $x \to 2$

4^o $y \sim \frac{1}{2} x^4$ kad $x \to \pm \infty$.

sl. 47.

x	$-\infty$	-2	$1-o$	$1+o$	$-1/2$	$-o$	$+o$	1	$2\pm o$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	64	$+o$	$-o$	$-9/8$	$-o$	$+o$	4	$+o$	24	$+\infty$
y	$+o$	$1/64$	$+\infty$	$-\infty$	$-8/9$	$-\infty$	$+\infty$	$1/4$	$+\infty$	$1/24$	$+o$



sl. 48.

Pr.2/ Skiciraj diagram funkcije

$$y = \frac{4}{x^4+2}$$

Stavimo

$$u = \frac{x^4+2}{4}$$

$y = \frac{1}{u}$; sl.48.

1° u i y su > o za sve x

2° diagram nema vertikalnih asimptota, jer u nema nula.

3° $y \sim 4x^{-4}$ kad $x \to \pm\infty$.

4° y je parna funkcija.

x	o	1	2	$\pm\infty$
y	2	4/3	2/9	+o

Zadaci.-

1/ Kakav je medjusobni položaj diagrama funkcija $y = x^{-n}$, n =1,2,3...

Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

2/ $\frac{1}{x^2(x^2-1)}$; 3/ $\frac{1}{x^2(x-1)^2}$, 4/ $\frac{1}{x^2-x+1}$;

5/ $\frac{\quad}{/x-1//x^2+1/}$; 6/ $x^2-1/^{-2}$; 7/ $\frac{1}{x^2/1-3/^3}$

4.7. KOSA ASIMPTOTA.

I/ Posmatrajmo funkciju

$$f/x/ = \frac{4x^2-1}{3/4x-3/} = \frac{/2x-1//2x+1/}{3/4x-3/} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{9/4x-3/}$$

Za velike vrednosti x-a je $f/x/ \sim \frac{x}{3}$, jer

$$\frac{f/x/}{x} = \frac{4-x^{-2}}{12-9x^{-1}} \to \frac{1}{3} \text{ , kad } x \to \pm\infty.$$

Razlika $f/x/ - \frac{x}{3}$ teži takodje odredjenoj granici kad $x \to \pm\infty$.

Imamo

$$f/x/ - \frac{x}{3} = \frac{x - \frac{1}{3}}{4x-3} \to \frac{1}{4} \quad \text{kad } x \to \pm\infty$$

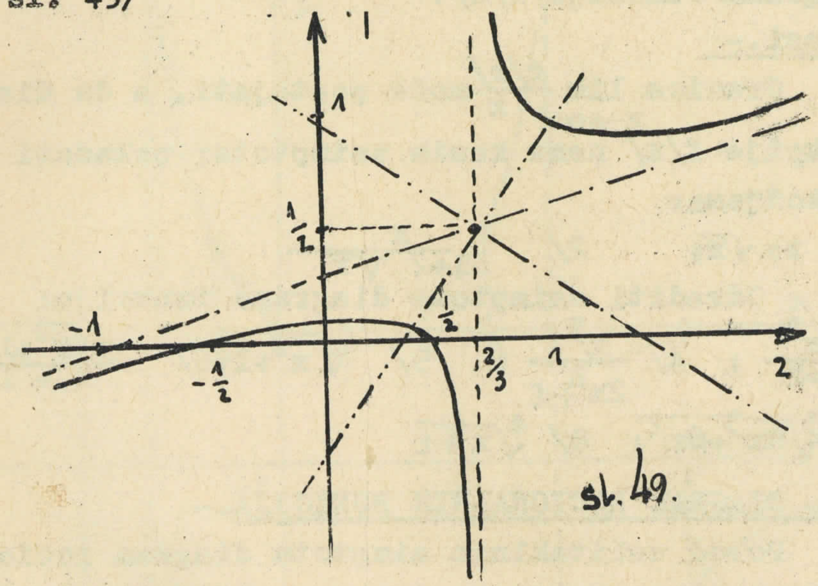
Prema tome

$$f/x/ - \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) \to o \text{ kad } x \to \pm\infty$$

t.j. ordinata diagrama funkcije f/x/ se u toliko

manje razlikuje od ordinate prave $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ u koliko se x više udaljuje u pozitivnom ili negativnom pravu. Prava $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ je kosa asimptota diagrama funkcije f/x/ i dve njegove grane joj se približavaju kad $x \to \pm\infty$.

Ostali tok diagrama dobivamo iz sledećeg /v. sl. 49/



sl. 49.

1° y = o za $x = \pm\frac{1}{2}$; y $\pm\infty$ kad $x \to 1$.

2° znak y-a dat je na brojnoj liniji sl.50

3° Diagram hiperbola sa centrom u tački $/\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}/$, asimptotama y =1 i $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ i osovinama $y - \frac{1}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)$.

II/ Ako se neka funkcija f/x/ ponaša asimptotski kao ax kad $x \to \infty$, prava y =ax+b će biti asimptota, ako pored toga još i

$$f/x/ -ax \to b \quad \text{kad} \quad x \to \infty,$$

Znači, ako postoje granične vrednosti

$$1^{o} \lim_{x \to \infty} \frac{f/x/}{x} = a, \qquad 2^{o} \lim_{x \to \infty} f/x/-ax = b,$$

prava $y = ax+b$ će biti kosa aimptota jedne grane diagrama funkcije $f/x/$.

Zadaci.-

Granica $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f/x/}{x}$ može postojati, a da diagram funkcije $f/x/$ nema kosih asimptota; pokazati na funkcijama:

1/ $x+\sqrt{x}$; 2/ $\frac{x}{1+2\sqrt{x}}$

Odrediti asimptote diagrama funkcija:

3/ $\frac{x^2}{1+x}$; 4/ $\frac{x^3}{2x^2+1}$; 5/ $\sqrt{x^2+1}$; 6/ $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

7/ $\sqrt[3]{8x^3+6x^2}$; 8/ $\sqrt[4]{x^4+1}$

4.8. DIAGRAM RACIONALNIH FUNKCIJA.-

Pored velitaklnih aimptota diagram racionalne funkcije može imati i horizontalnih ili kosih asimptota, ili se za velike vrednosti x-a ponašati kao neki stepen x-a.

Pr.1/ Skiciraj diagram funkcije

$$y/x/ = \frac{x/x-1/}{/x+1//2-x/} = \frac{2}{/x+1//2-x/} - 1.$$

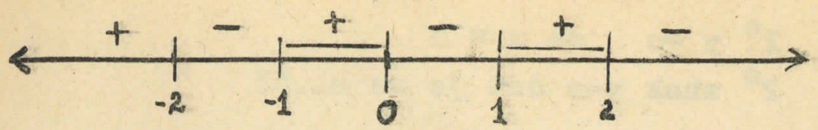
1^{o} $y = o$ za $x = o$ i 1

2^{o} znak y-a dat je na sl.51.

3^{o} $y \to \pm\infty$ kad $x \to -1 \pm o$;

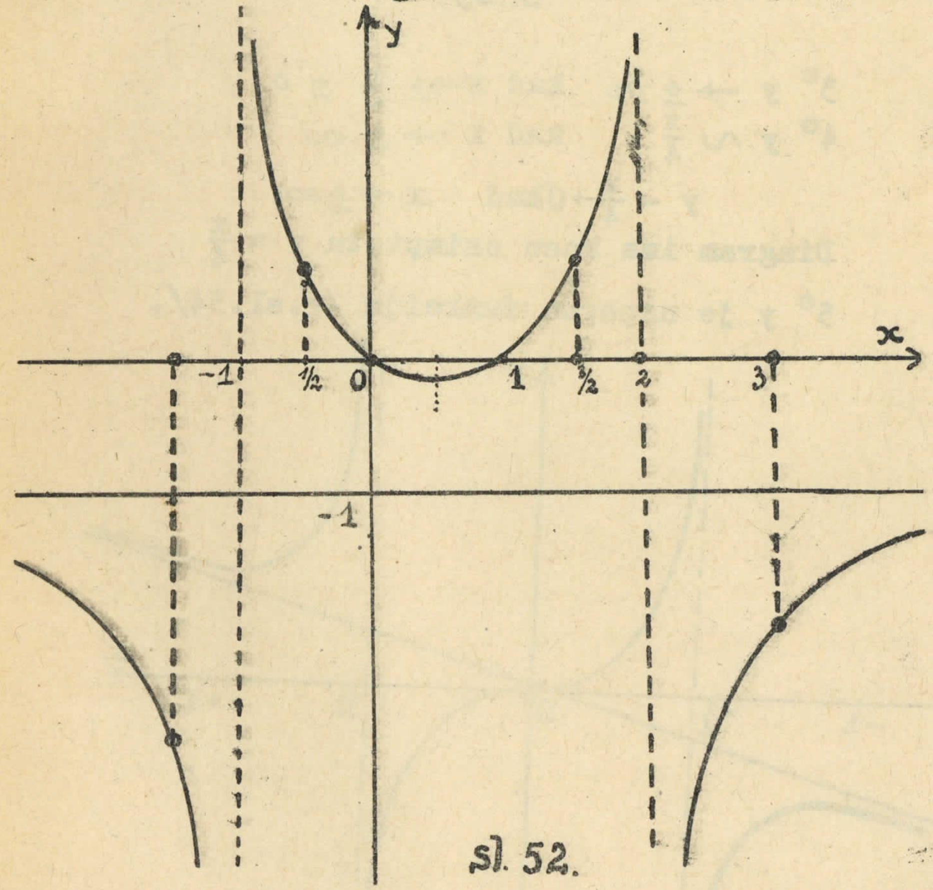
$y \to \mp\infty$ kad $x \to 2 \pm o$.

4^{o} $y \to -1$ kad $x \to \pm\infty$.



sl. 51.

5^{o} Prava $x = \frac{1}{2}$ je osovina simetrije diagrama, jer je $y/x+\frac{1}{2}/$ parna funkcija /v.sl.52/



sl. 52.

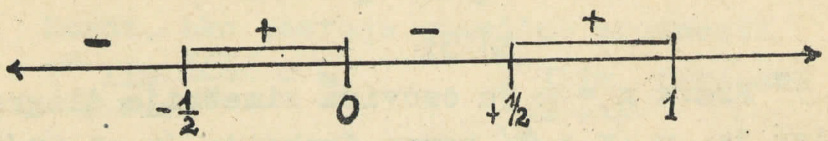
x	o	1/2	1	3/2	2-o	2+o	5/2	+∞
y	o	-1/9	o	3/5	+∞	- ∞	-15/7	-1-o

Pr.2/ Skiciraj diagram funkcije

$$y = \frac{x^3}{4x^2-1} = \frac{x^3}{/2x+1//2x-1/}$$

1^o $y = o$ za $x = o$

2^o znak y-a dat je na sl.53



sl.53.

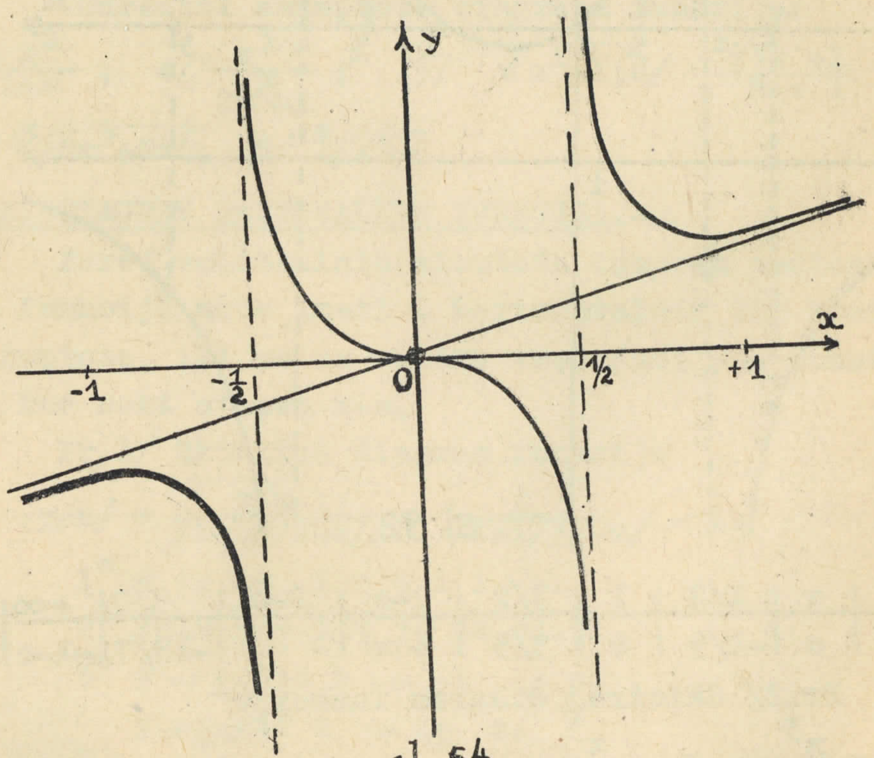
3^o $y \to \pm\infty$ kad $x \to \pm\frac{1}{2} \pm o$,

4^o $y \sim \frac{x}{4}$ kad $x \to \pm\infty$

$y - \frac{x}{4} \to 0$ kad $x \to \pm\infty$;

Diagram ima kosu osimptotu $y = \frac{x}{4}$

5^o y je neparna funkcija /v.sl.54/.



sl. 54.

x	o	1/4	1/2-o	1/2+o	3/4	1	+ ∞
y	o	-1/48	- ∞	+ ∞	27/80	1/3	+∞

Pr.3/ Skiciraj diagram funkcije

$$y/x/ = \frac{9x^3/x-2/}{/3x-1/^2} = x^2 - \frac{4}{3}x - 1 - \frac{14x-3}{3/3x-1/^2}$$

1^o $y = o$ za $x = o$ i $x = 2$

2^o $y < o$ za $o < x < 2$, a za ostale vrednosti x-a y je $> o$

3^o $y \to -\infty$ kad $x \to \frac{1}{3}$

4^o $y \sim x x^2$ kad $x \to \pm\infty$;

$y/x/ - x^2 \sim -\frac{4}{3}x$ kad $x \to \pm\infty$

$y/x/ - x^2 + \frac{4}{3}x \to -1$ kad $x \to \pm\infty$

t.j. ako stavimo $g/x/ = x^2 - x - 1$, razlika $y/x/ - g/x/ \to$ $\to \pm o$ kad $x \to \pm\infty$. Znači, dve grane diagrama se asimptotski približavaju parabeli $y = g/x/$ koja je na sl.55 izvučena -.-. , a koju nazivamo asimptotskom parabolom.

x	- ∞	-1	-1/2	o	1/3±o	2/3	1	2	+∞
g	+ ∞	4/3	-1/12	-1	-4/3	-13/9	-4/3	1/3	+∞
y	+ ∞	27/16	9/2o	o	-	-32/9	-9/4	o	+∞

Zadaci.-

Skiciraj diagrame funkcije i njihovih recipročnih vrednosti

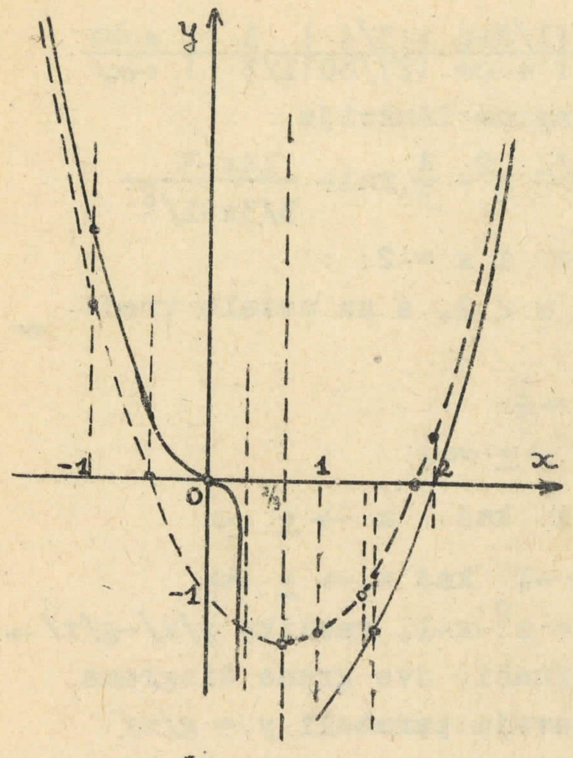
1/ $\frac{x^2+1}{x^2+2}$; 2/ $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3/ $\frac{/x-a//x-b/}{/x-c//x-d/}$; 4/ $\frac{4^2}{x-1}$;

5/ $\frac{x^3}{x^2+1}$; $x^3/x^2-1/$; 7/ $\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$;

8/ $\frac{x^4}{x^2+1}$; 9/ $\frac{x^3}{x-1}$; 10/ $\frac{x^4}{x^2-1}$

11/ Nacrtaj diagram funkcije $\frac{x^3/x-2/}{/x-a/^2}$ za razne vrednosti a.

Za slučaj a = $= \frac{1}{3}$ /vidi pr.4.8 /3/.



sl.55.

12/ Neka je $f/x/ = \frac{x^3 + x\sqrt{x}}{2x+1}$, pokazati da je f/x/ $\sim ax^2$ i $f/x/-ax^2$ $\sim bx$ kad $x \to \infty$, ali da diagram funkcije f/x/ nema paraboličkih asimptota.

4.9. DIAGRAM KVADRATNOG KORENA POLINOMA.-

Neka je dat polinom u/x/ i

$$y^2 = u/x/, \text{ t.h. } y = f/x/ = \pm\sqrt{u/x/}.$$

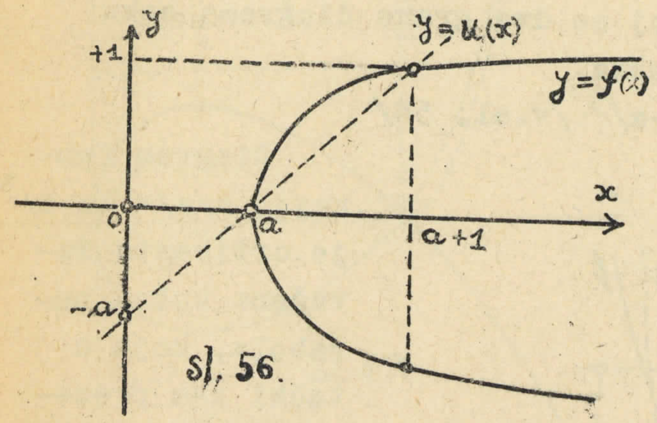
Diagram funkcije f/x/ dobijamo kad nacrtamo diagram polinoma u/x/ i zatim prenosimo kvadratni koren njegovih ordinata u pozitivnom i negativnom pravcu Y-ose. Otuda sledi:

1^o X-osa je osovina simetrije diagrama funkcije f/x/;

2^o nema diagrama funkcije f/x/ za sve vrednosti $\sqrt{x-a}$ za koje je u/x/ negativno, jer za te vrednosti funkcija f/x/ nije definisana

Posmatrajmo najpre sledeća tri specijalna slučaja.

1/ $y^2 = x-a$ /v.sl.56/

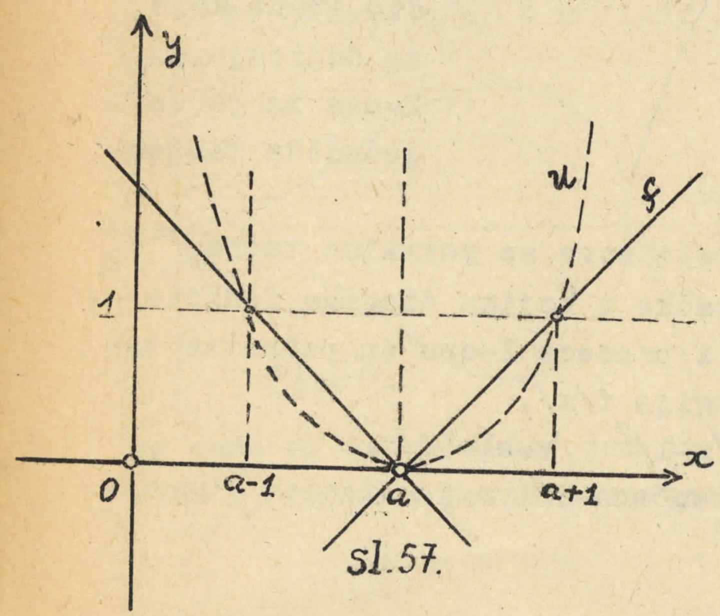


sl. 56.

Diagram funkcije u/x/=x-a je prava, na slici izvučena crtičasto, a diagram funkcije f/x/=$\pm\sqrt{x-a}$ je parabola sa temenom u tački /a,o/ i X-osom kao osovinom.

Primetimo: kad diagram funkcije u/x/ preseca X-osu, diagram funkcije f/x/ je seče pod pravim uglom.

II/ $y^2 = /x-a/^2$ /v.sl.57/.



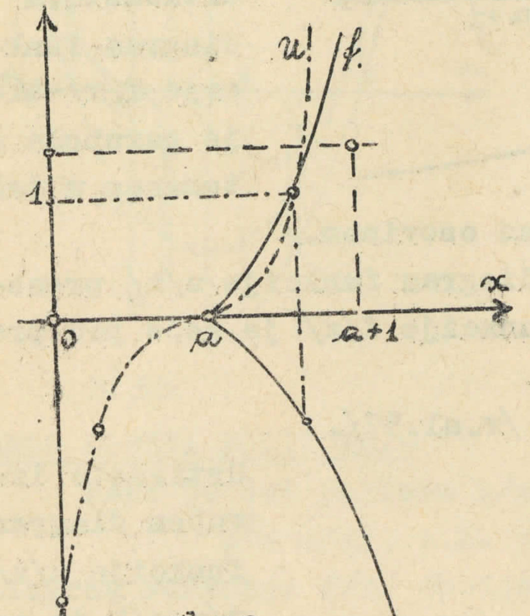
sl.57.

Crtičasto izvučen diagram funkcije u/x/ $=/x-a/^2$ je parabola sa temenom /a,0/ i osovinom x=a. Diagram funkcije f/x/ se sastoji iz dve prave $y = \pm /x-a/$.

Primetimo: u tački gde diagram funkcije $u/x/$ dodiruje X-osu, dve grane funkcije $f/x/$ je presecaju.

Tačka u kojoj se dve grane diagrama seku zove se dvojna tačka.

III/ $y^2 = /x-a/^3$ /v.sl. 58/



Sl.58.

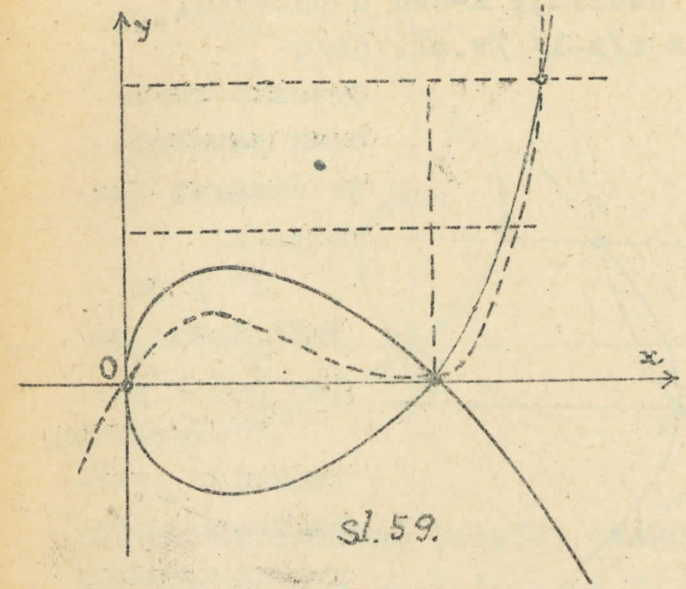
Diagram funkcije $u/x/ = /x-a/^3$ je crtičasto izvučena kubna parabola, koja u tački $x=a$ preseca i dodiruje X-osu. Diagram funkcije $f/x/ = \pm /x-a/\sqrt{/x-a/}$ ima u tački $x=a$ dve grane koje se dodiruju, a X-osa im je zajednička tangenta.

Tačka ove vrste zove se povratna tačka.

Primetimo: tačke u kojima diagram funkcije $u/x/$ dodiruje i preseca X-osu su povratne tačke diagrama funkcije $f/x/$.

Pr.1/ $y^2 = x/x-1/^2$ /v.sl.59/

Crtičasto izvučena kriva je diagram funkcije $u/x/ = x/x-1/^2$.



Sl.59.

1^o y je definisano samo za $x \geqslant 0$.

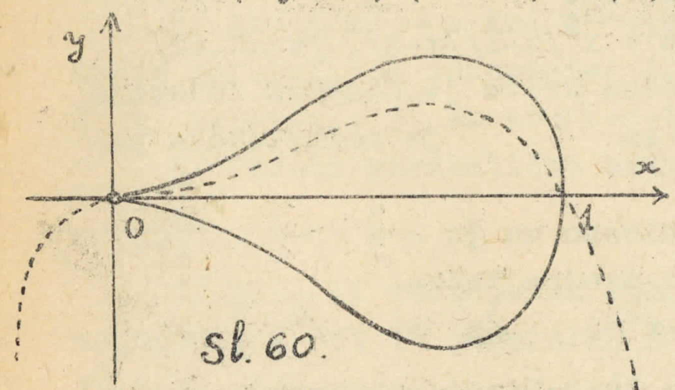
2^o Diagram funkcije $y/x/$ seče u početku X-osu pod pravim uglom, jer je diagram funkcije $u/x/$ preseca u toj tački.

3^o $x=1$ je dvojna tačka diagrama funkcije $y/x/$, jer diagram funkcije $u/x/$ dodiruje X-osu u toj tački.

4^o $y/x/ \sim x\sqrt{x}$ kad $x \to \infty$

Deo krive kao ovaj koji se nalazi u razmaku /o,1/ zvaćemo omča.

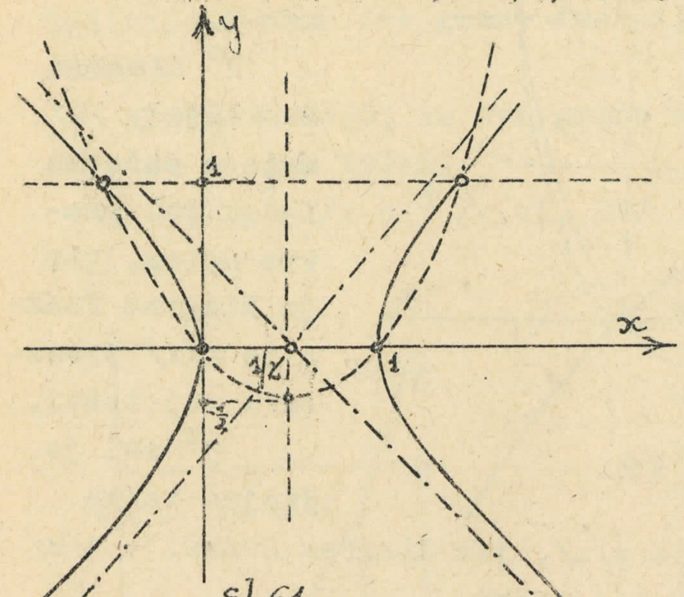
Pr.2/ $y^2 = u/x/ = x^3/1-x/$ /v.sl.60/ i uporedi sa primerom 1.11/2/.



Sl.60.

Crtičasto izvučena kriva je diagram funkcije $u/x/$, a diagram funkcije y sastoji se samo od jedne omče, jer je $u < 0$, za $x < 0$ i $x > 1$. Tačka $x = 0$ je povratna, jer diagram funkoje u preseca i dodiruje X-osu u početku.

Pr.3/ $y^2 = u = x/x-1/$ /v.sl. 61/.



Sl. 61.

Crtasto izvučena parabola je diagram funkcije u.

1^o y je definisano za $|x-\frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$.

2^o Diagram funkcije y seče X-osu pod pravim uglom u tačkama x= o i x = 1.

3^o $y \sim x$ i $y-x \to -\frac{1}{2}$ kad $x \to \infty$.

4^o Diagram funkcije y je hiperbola sa centrom u tački $x = \frac{1}{2}$, osovinama y = o i $x = \frac{1}{2}$ i asimptotama $y = \pm\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

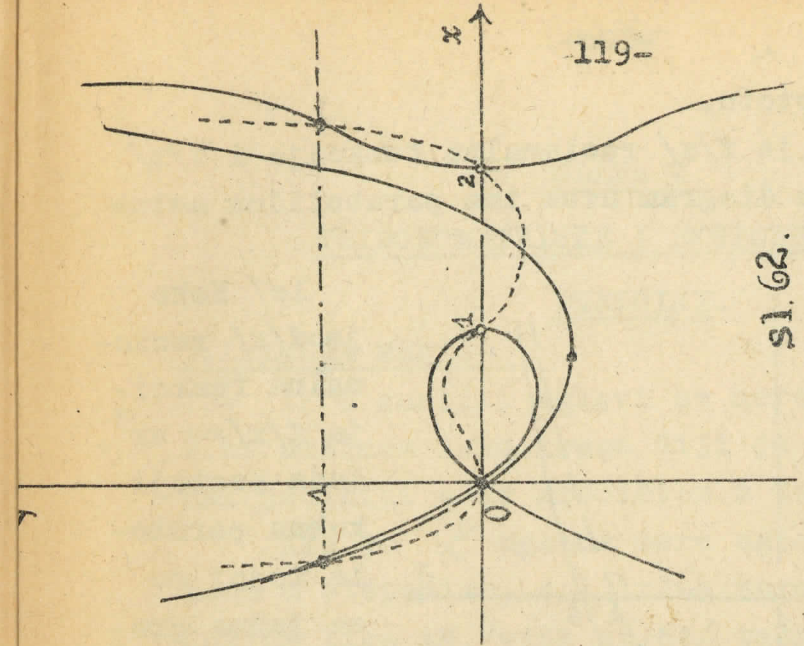
Pr.4/ $y^2 = u = x^2/x-1//x-2/$. /v.sl.62/

Crtasto izvučena kriva je diagram funkcije u, kriva izvučena sa je asimptotska parabola.

1^o y je definisano za $|x-\frac{3}{2}| > \frac{1}{2}$.

2^o Početak je dvojna tačka.

3^o $y \sim x^2$, $y-x^2 \sim -\frac{3}{2}x$ i $y-x^2+\frac{3}{2} \to -\frac{1}{8}$ kad $x \to \infty$; diagram ima asimptotsku parabolu, čija je jednačina $y = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$.



Sl. 62.

Zadaci.-

Nacrtaj diagrame funkcija:

1/ $y^2 = x^2 - x^{-2}$;
2/ $y^2 = x^{-2} - x^2$;
3/ $y^2 = x^2/1-x^2/$;
4/ $y^2 = /x^2-1/ \cdot /x^2-2/$; 5/ $y^2 = \frac{x^5}{x-1}$.

4.10. VEŽBE.-

Odredi medjusobni položaj diagrama funkcija
1/ $y = \sqrt[q]{x}$, q =1,2,3,....; 2/ $y = \frac{1}{x^2+n}$, n = =0,1,2,......3/ Ako je $f/x = ax+b+t/x/$ i $t/x/ \to o$ kad $x \to \infty$, prava y = ax+b je asimptota diagrama funkcije f/x/.

4/ Odredi asimptote diagrama funkcije $\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}$.

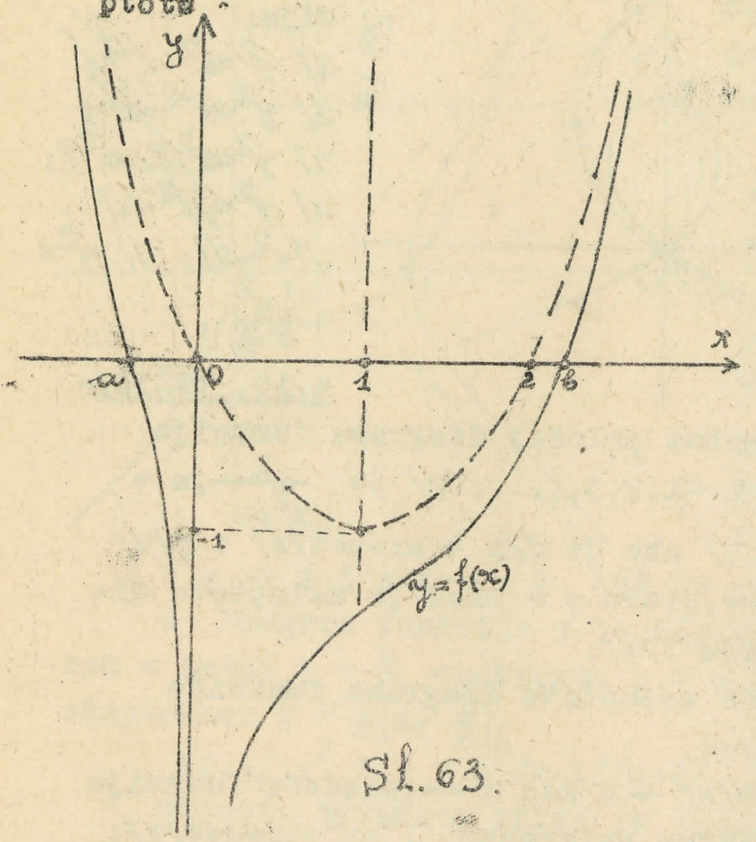
5/ Ako $t/x/ \to o$ kad $x \to \infty$, sledeće funkcije imaju parabolične asimptote: 1^o $ax^2+bx+x+t/x/$; 2^o a $x+b+t/x/$; 3^o ax $+b\sqrt{x}+c-t/x/$.

6/ Odredi paraboličnu asimptotu funkcije $\sqrt{\frac{x^5+ax^3}{x+b}}$

7/ Može li racionalna funkcija imati dve asimptote i to: 1^o paralelne X-osi; 2^o kose; 3^o koje nisu paralelne Y-osi?

8/ Neka je f/x/ racionalna funkcija i $f/x/ \sim ax$ kad $x \to \infty$, njen diagram uvek ima jednu kosu asimptotu.

9/ Neka je f/x/ racionalna funkcija i f/x/ $\sim ax^2$, njen diagram uvek ima paraboličnu asimptotu.



Sl. 63.

10/ Neka je f/x/ racionalna funkcija f/x/ $\sim ax^3$, tada postoji kubna parabola kojoj će se jedna grana njenog diagrama asimptotski približavati.

11/ Odredi što jednostavniju funkciju čiji će diagram imati od prilike oblik krive pretstavljene slikom 63. Crtasto izvučena kriva je asimptotska parabola a Y-osa asimptota.

12/ Ako u gornjem zadatku uzmemo za traženu funkciju racionalnu funkciju čiji je brojitelj polinom 4-og, a imenitelj polinom 2-og stepena, kakva veza mora postojati izmedju nula a i b te funkcije?

GLAVA V

TRIGONOMETRISKE I EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE.

5.1. LUČNA MERA.-

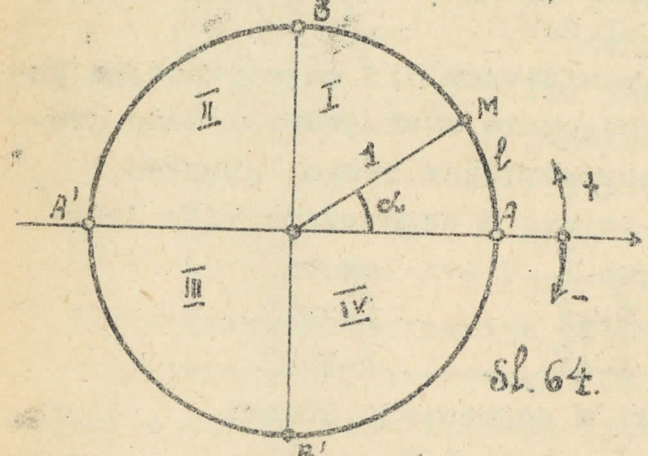
I/ U analizi uglovi se mere lučnom merom, t.h. dužinom luka kruga čiji je poluprečnik jednak jedinici a sa središtem u temenu ugla.

Ako je α^0 ugaona mera ugla AOM, t.j. izražena u stepenima, a l lučna mera istog ugla, t.j. dužina lika AM /vidi sl.64/ tada je

$$\frac{\alpha^0}{180^0} = \frac{l}{\pi}.$$

$$\therefore \quad \alpha^0 = \frac{l}{\pi} \cdot 180^0,$$

ili $l = \frac{\alpha}{180}\pi$



Sl. 64.

Jediničnom luku, t.j. luku koji je jednak poluprečniku, $l = 1$, odgovara ugao čija vrednost u stepenima iznosi

$$\frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' \; 8o''$$

Taj se ugao zove radian.

Tako na primer uglovima od

0^0, 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0

odgovaraju lukovi od

0, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{2}$, , $\frac{3\pi}{2}$, 2π

radiana.

II/ Da bi se uglovi precizno odredili potrebno je napred navedeni krug orientisati. Krug je orientisan, ako je kao i kod prave, na njemu odredjena početna tačka, početak pozitivan i negativan smer. Obično se za pozitivan smer uzima smer suprotan kretanju skazaljke na satu. /v.sl.64/.

Ovako orientisan krug zove se trigonometriski krug.

Naprimer, luku $\frac{\pi}{2}$ odgovara tačka B, a luku $-\frac{\pi}{2}$ tačka B'; ili, ako se tačka M kreće ka tački A, ona opisuje ugao $-\alpha^0$ čija je lučna mera $-\ell$ radiana /v.sl.64/.

Svakom luku, pozitivnom ili negativnom, ma kako velik on bio, odgovara uvek jedna i samo jedna tačka na trigonometriskom krugu; obratno, jednoj tački, na primer M odgovaraju više lukova, i to pored luka ℓ, i svi lukovi

$\ell+2\pi$, $\ell+4\pi$,.......$\ell+2k\pi$......

$\ell-2\pi$, $\ell-4\pi$,.......$\ell-2k\pi$......

t.j. u opšte tački M odgovaraju lukovi

$\ell \pm 2k\pi$, k =o,1,2......

Zadaci.-

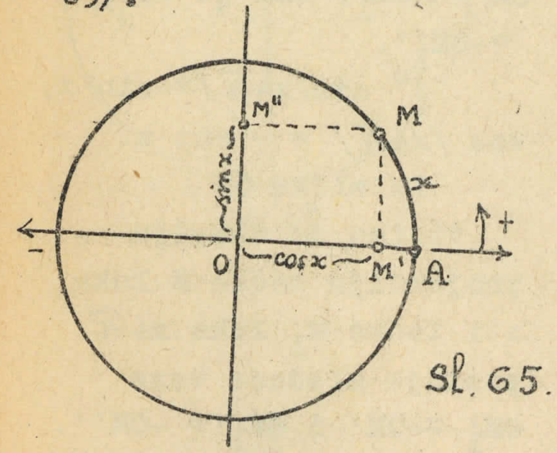
1/ Pored lučne i ugaone mere u stepenima, uglovi se mere i u gradima, Grad je 100-ti deo pravog ugla. Naći vezu izmedju stepena, radiana i grada.

2/ Koliko stepena, a koliko radiana iznose uglovi od 10, 25, 30 i 50 gradi?

3/ Ako tački M odgovaraju lukovi $\ell \pm 2k\pi$, k =o,1,2,.....,gde se nalaze tačke koje odgovaraju $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, i u opšte n-tom delu ovih lukova?

5.2. FUNKCIJE SINUS I COSINUS.-

I/ Cosinus luka x je algebarska vrednost duži OM', t.j. cos x =OM', pri čemu je M' projekcija tačke M na orijentisanu pravu OAC, a M ona tačka na trigonometrijskom krugu koja se nalazi na lučnom otstojanju x od početka A,/v.sl. 65/.



Sl. 65.

sinus luka x je algebarska vrednost duži OM", t.j.

sin x = OM".

Pri tome je M'' projekcija tačke M na orijentisanu pravu OBS koja stoji normalno na pravu OAC /v.sl.65/.

II/ Iz ovih definicija sledi:

1° Iz pravouglog trougla OM'M /v.sl.65/ dobijamo osnovnu vezu izmedju sinusa i cosinusa istoga luka x.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Otuda sledi da je, na primer,

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x},$$

t.j. cosinus svih lukova koji imaju isti sinus imaju svega dve različite vrednosti koje su suprotno označene.

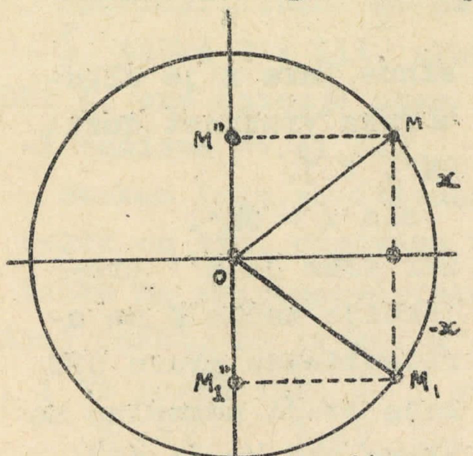
2^o Funkcija sin x i cos x su periodične funkcije /§ 1. / sa periodom 2π t.j.

sin/x+2π/ = sin x, cos /x+2π /= cos x,

jer lukovi x i x+2π sa istom početnom tačkom A imaju istu krajnu tačku M.

3^o cos x je parna, a sin x neparna funkcija.

Projekcija M' tačke M luka x poklapa se sa projekcijom M_1' tačke M_1 luka -x t.j./v.sl.66/ OM' = OM_1', dok je OM''= =-OM_1''.



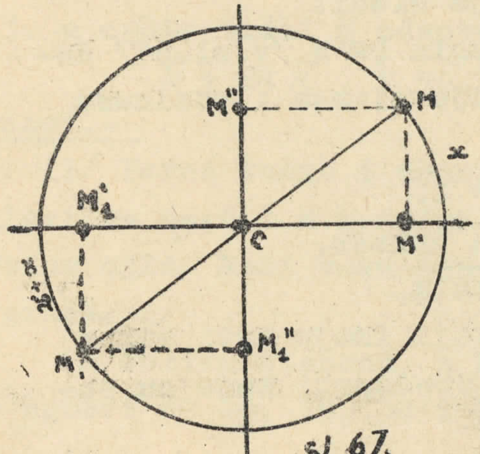
sl. 66

4^o sin/x+π/=-sin x, vos /x+π/ = - cos x.

Iz slike 67 vidimo da izmedju projekcija tačke M luka x i tačke M_1 luka x+π postoje sledeće veze

OM_1' =-OM' i OM_1''= -OM''.

5^o sin/π -x/=sin x, cos/π -x/ =- cos x.

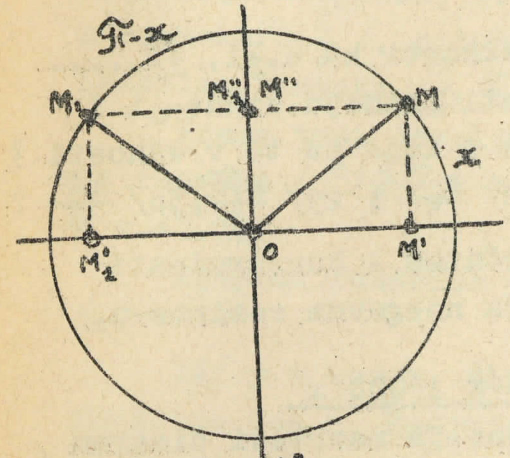


sl. 67.

Iz slike 68 vidimo da izmedju projekcija tačke M luka x i tačke M_1 luka π -x postoje sledeće veze

OM_1''=OM'' i OM_1'=-OM'.

6^o sin/x+ $\frac{\pi}{2}$ /=cos x, cos/x+ $\frac{\pi}{2}$/ = - sin x.



sl. 68

Iz slike 69 vidimo da izmedju projekcija tačke M luka x i tačke M_1 luka x+ $\frac{\pi}{2}$ postoje sledeće veze

OM_1''=OM' i OM_1'=-OM''

Zadaci.-

Odrediti sinus i cosinus od:

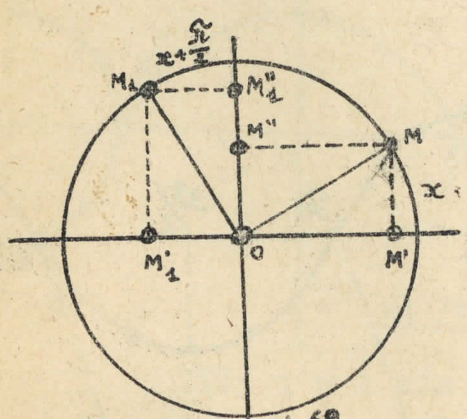
1/ $\frac{\pi}{4}$; 2/ $\frac{\pi}{3}$; 3/ $\frac{\pi}{6}$; 4/$\frac{\pi}{10}$; 5/ 1050^o; 6/2,1π 7/ -1782^o;

8/ Znajući da je cos a = = $\frac{2}{3}$ izračunati sin a na 2 decimale tačno.

9/ Ako je

$$\sin x = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

koliko je cos x?



sl. 69.

Ako je dat luk a naći sve lukove čiji je sinus jednak:

10/ sin a; 11/ - sin a; 12/ cos a;13/ -cos a; i sve lukove čiji je cosinus jednak 14/ cos a; 15/ -cos a; 16/ sin a ; 17/ -sin a.

Izraziti pomoću sin x i cos x sinus-e i cosinus-e sledećih lukova: 18/ $\frac{\pi}{2}-x$; 19/ $\frac{3\pi}{2}+x$; 20/ $\frac{3\pi}{2}-x$; 21/ $x+3\pi$; 22/ $x+\frac{5\pi}{2}$; 23/ $x-\frac{7\pi}{2}$; 24/ $-x+2\pi$; 25/ $-x-\frac{5\pi}{2}$.

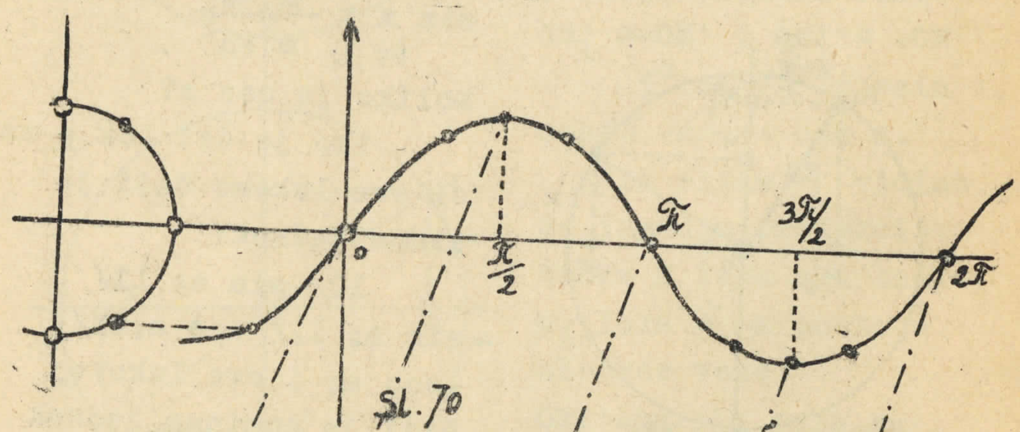
Ako broju k damo vrednosti $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ koliko različitih vrednosti uzimaju sinus-i i cosinus-i sledećih lukova i koje su to vrednosti ?

26/ $\frac{k\pi}{3}$; 27/ $\frac{k\pi}{4}$, 28/ $\frac{k\pi}{5}$; 29/ $\frac{k\pi}{6}$; 30/ $\frac{k\pi}{8}$?

31/ Na krugu poluprečnika 1 konstruisati luk čija je tetiva jednaka njegovom cosinus-u.

5.3. DIAGRAM FUNKCIJA SIN x i COS x

I/ $y = \sin x$. Dovoljno je nacrtati diagram funkcije sinx u razmaku $/0, 2\pi/$, ili ma kom razmaku dužine 2π, jer je ova funkcija periodična, tako da se njen diagram u ostalim razmacima dužine 2π kongruentno ponavlja.



sl.70

Prema osobinama 5,2 /II/ 3° i 4° tačke $0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots$..su središta simetrije diagrama ove funkcije, t.j. delovi luka ispod X-ose su

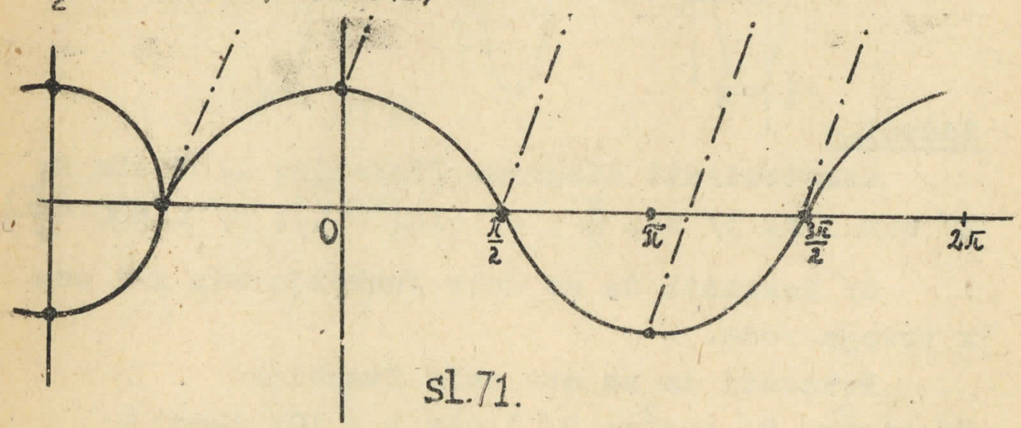
podudarni sa delovima luka diagrama iznad X-ose.

Prema osobini 5,2/II/ 5° vertikalne prave koje prolaze kroz tačke $\pm\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \ldots$su osovine simetrije diagrama, t.j. deo luka za vrednosti x razmaka $/0, \frac{\pi}{2}/$, podudaran je sa odgovarajućim lukovima razmaka $/\frac{\pi}{2}, \pi/$, $/\pi, \frac{3\pi}{2}/\ldots$

Prema tome dovoljno je nacrtati diagram samo razmaku $/0, \frac{\pi}{2}/$ i kongruentno ga prenositi /v.sl.70/

Diagram funkcije $y = \sin x$ zove se sinusoida.

II/ $y = \cos x$. Slično se dobija i diagram funkcije cos x. Medjutim, iz osobine 5.2/II/6° sledi da je diagram ove funkcije u stvari sinusoida translatorno pomerena za $\frac{\pi}{2}$ u levo, ili za $\frac{3\pi}{2}$ u desno /v.sl.71/



sl.71.

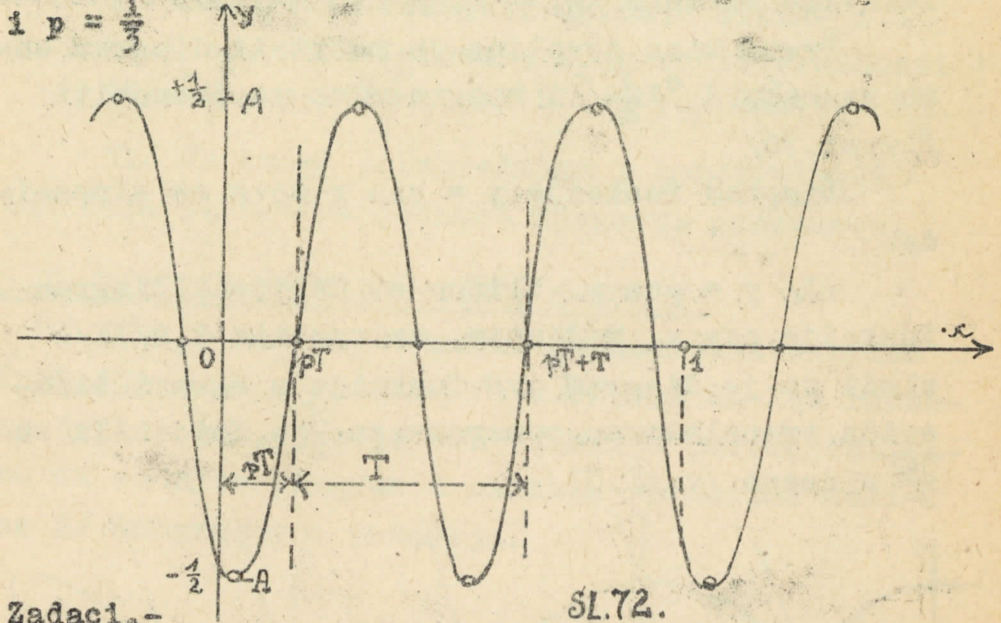
III/ $y = A \sin /ax+b/$. Stavimo

$$a = \frac{2\pi}{T} \text{ i } b = -2p\pi , \quad T > 0, \ 0 \leq p < 1.$$

Funkcija

$$A \sin/ax+b/ = A \sin 2\pi / \frac{x}{T} - p/$$

je periodična sa periodom T, t.j. dužine talasa T; $\frac{1}{T}$ daje broj talasa u jedinici dužine. Visina talasa iznosi A i zove se amplituda. Talas počinje od tačke x = pT i završava se u tački x = = pT+T; $\frac{x}{T}$ je faza, a p fazno pomeranje. Diagram ove funkcije dat je na sl.72 sa A = $\frac{1}{2}$, T = $\frac{1}{2}$ i p = $\frac{1}{3}$



Sl.72.

Zadaci.-

Konstruisati diagrame funkcija: 1/ 3 sin x; 2/ sin 2 x; 3/ sin $\frac{x}{2}$; 4/ sin$\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 5/ cos$\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

6/ Pokazati da su nule funkcija sin x i cos x prvoga reda.

Pokazati da su sve nule funkcija

7/ $\sin^2 x$; 8/ $\cos^2 x$; 9/ 1-sin x ; 10/ 1-cos x nule drugoga reda.

Vodeći računa o prethodnim zadacima konstruisati diagrame funkcija

11/$\sin^2 x$; 12/ $\cos^2 x$; 13/$\sqrt{\sin x}$; 14/ $\sqrt{\cos x}$;

Sabiranjem ordinata skicirati diagrame funkcija:

18/ sin 2x + sin $\frac{x}{2}$; 19/ sin 3x + cos $\frac{x}{3}$;

Rešiti grafički jednačine

20/ sin x = $\frac{1}{2}$; 21/ sin x = 2x; 22/ sin x = $\frac{x}{2}$;

23/ sin x = $\frac{x}{4}$; 24/ $\frac{1}{2}$ sin x = x-1;

25/ Konstruisati diagram finkcije koja nastaje kad se kroz svaku tačku M trigonometriskog kruga povuče paralela sa X-osom i od te tačke na desno prenese na nju dužina luka AM.

26/ Odrediti grafički one razmake x-a za koje je 5.4.

26/ 2 cos x+ 1 > o; 27/ 4 $\mathrm{vos}^2 x$ - 3 > o;

5.4. FUNKCIJE, tangens i contangens

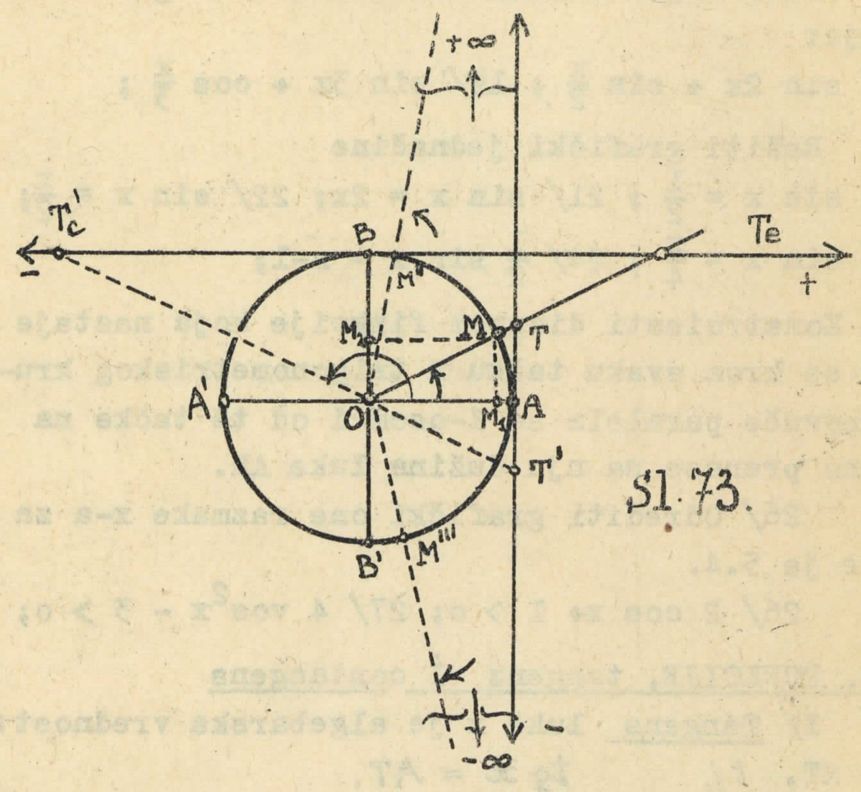
I/ Tangens luka x je algebarska vrednost duži x = AT, t.j. $tg\, x = AT$.

Pri tome je luk AM = x, a T je tačka preseka produženog poluprečnika OM sa orijentisanom pravom AT, koja dodiruje trigonometriski krug u početku A /vidi sl.73/.

Ako se tačka M nalazi u položaju M', poluprečnik OM' se produži u suprotnom pravcu do preseka T' sa pravom AT.

Contangens luka x je algebarska vrednost odsečka BT_c dobivenog presekom produženog poluprečnika OM i tangente u tački B: cotg x = BT_c.

II/ Iz ovih definicija sledi:



Sl.73.

1^0 Funkcija tg x nije definisana sa $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$,..., a funkcija cotg x za o, π, 2π,... Pri tome /v.sl.73/ gde se tačke M'' i M''' približavaju tačkama B odnosno B'/

$$\text{tg } x \to \pm\infty \quad \text{kad } x \to \frac{\pi}{2} \mp o \text{ ili } \frac{\pi}{2} \mp o,$$

a $\quad \text{cotg } x \ \pm\infty \quad \text{kad } x \to \pm o \text{ ili } \pi \pm o.$

2^0 Iz sličnosti trouglova OAT i OMM_1 kao i trouglova OBT_c i OMM_2 sledi

$$\text{tg } x = \sin x/\cos x, \quad \text{cotg } x = \cos x/\sin x,$$

a otuda $\quad \text{tg } x = \dfrac{1}{\text{cotg } x}$.

3^0 Funkcije tg x i cotg x su periodične sa periodom π:

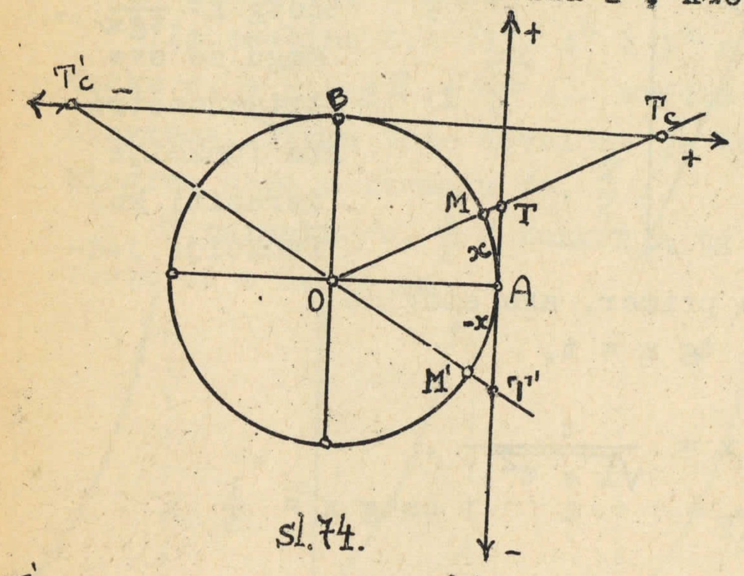
$$\text{tg}/x+\pi/ = \text{tg } x, \quad \text{cotg } /x+\pi/ = \text{cotg } x,$$

jer se tačke sa lučnim otstojanjem x i $x+\pi$ nalaze na istom prečniku trigonometriskog kruga.

4^0 Funkcije tg x i cotg x su neparne funkcije:

$$\text{tg}/-x/ = -\text{tg } x, \ \text{cotg } /-x/ = -\text{cotg } x.$$

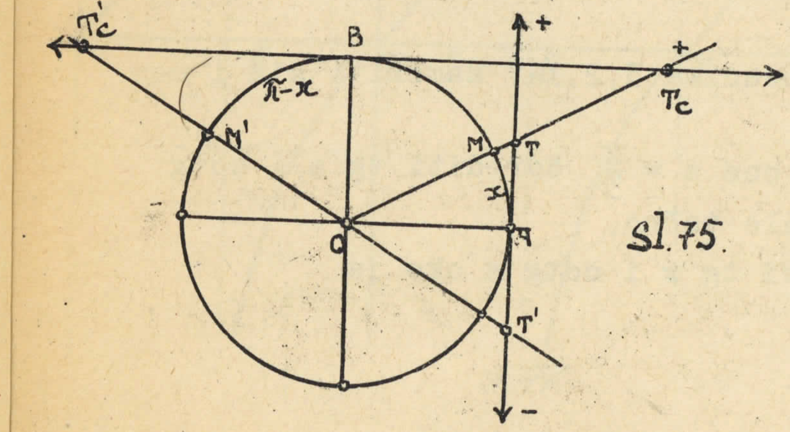
Ovo sledi iz osobina 2^0, kao i iz sl.74 jer je $AT = -AT'$ i $BT_c = BT_c'$.



sl.74.

5^0 $\text{tg}/\pi-x/ = -\text{tg } x$ i $\text{cotg } /\pi-x/ = -\text{cotg } x$.

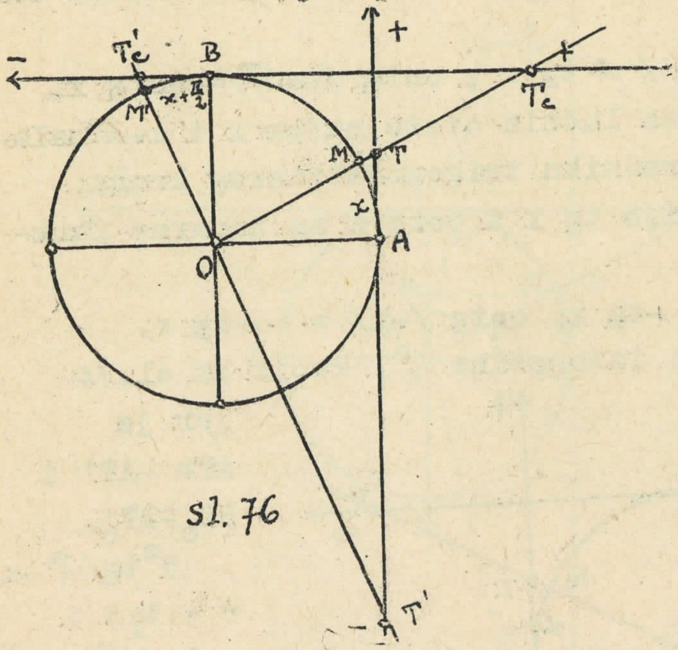
Ove veze slede iz osobina 2^0 i 5.2/II/ 5^0 kao i iz sl. 75, jer je $AT' = -AT$ i $BT_c' = -BT_c$.



sl.75.

6^0 $\text{tg}/x+\frac{\pi}{2}/ = -\text{cotg } x$, $\text{cotg}/x+\frac{\pi}{2}/ = \text{tg } x$.

Ove veze slede iz osobina 2^o i 5.2/II/6^o kao i iz slike 76, jer je



sl. 76

$AT' = -BT_c$ i $BT_c' = -AT$.

III/ Na osnovu veza $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, mogu se sve trigonometriske funkcije izraziti kao funkcije jedne od njih. Na primer, ako stavimo

$$\operatorname{tg} x = t,$$

dobijamo

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{i} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{t}$$

<u>Zadaci.</u>

1-7.- U zadacima 5,2,1-7 zameniti sin i cos sa tg i cotg.

8. Ako je $\cos a = \frac{2}{3}$ odrediti tg a i cotg a na dve decimale tačno.

9. Odrediti tg x i cotg x ako je

$$\sin x = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

10-30. -U zadacima 5,2,10-30 zameniti svagde sin sa tg i cos sa cotg.

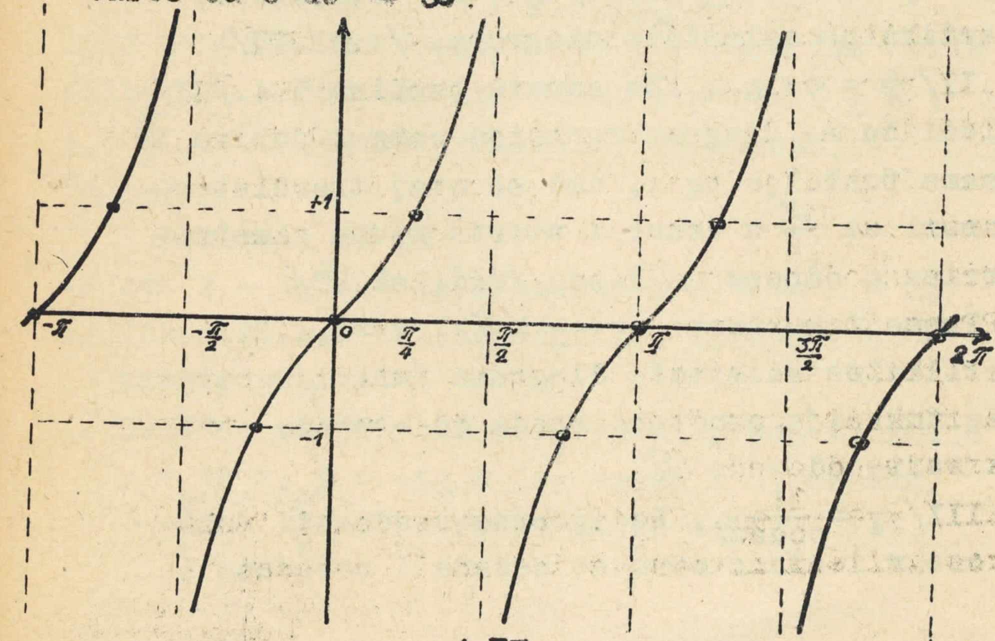
31. Na krugu poluprečnika 1 odrediti luk čija je tetiva jednaka njegovom cotangensu.

5.5. DIAGRAMI FUNKCIJA tg x i cotg x.

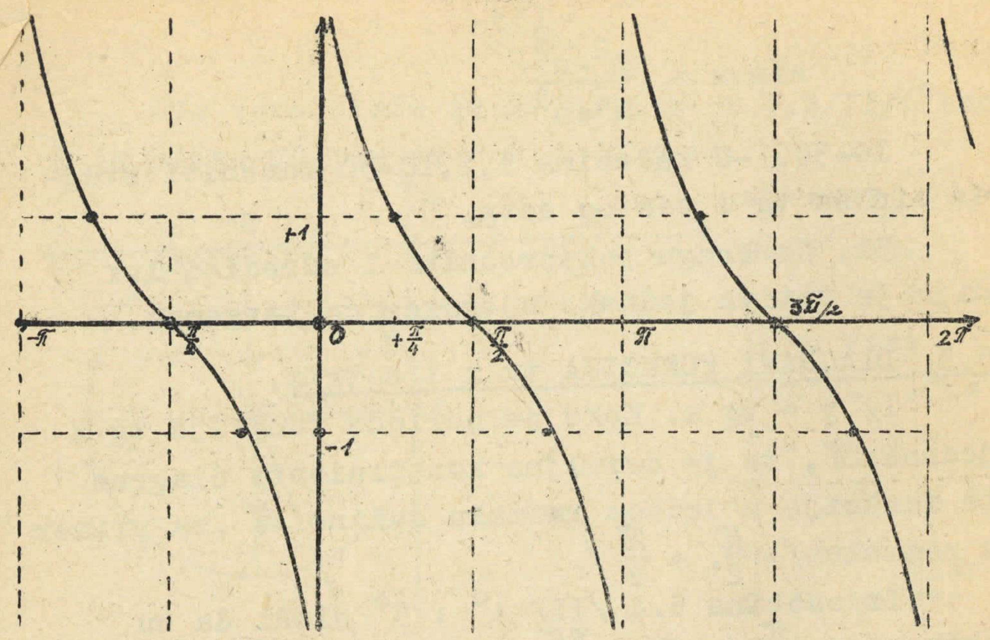
I/ $y = \operatorname{tg} x$. Kako je perioda funkcija tg x jednaka π, to je dovoljno konstruisati diagram te funkcije u jednom razmaku dužine π, na primer u razmaku $/-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}/$.

Iz osobina 5.4 /II/ 4^o i 5^o sledi da su tačke o, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$, $\pm\frac{3\pi}{2}$ ... središta simetrije diagrama. Prema tome dovoljno je konstruisati diagram samo u razmaku $/o, \frac{\pi}{2}/$.

U razmaku $/o, \frac{\pi}{2}/$ funkcija tg x monotono raste od o do $+\infty$.



sl. 77



sl. 78.

tg o = o, $tg\frac{\pi}{4}=1$, tg $x \to \infty$ kad $x \to \frac{\pi}{2} \mp 0$

U tačkama $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm 3\frac{\pi}{2}$,....ona nije definisana, a prave $x = \pm /2k+1/\frac{\pi}{2}$, k = o,1,2...., su vertikalne asimptote diagrama. /v.sl.77/

II/ y = cotg x. Na osnovu osobina 5.4./II/ 6° sledi da se diagram funkcije cotg x dobiva iz diagrama funkcije tg x, ako se ovaj translatorno pomeri za $\frac{\pi}{2}$ u desno i nacrta njemu simetrična kriva u odnosu na X-osu /vidi sl.78/

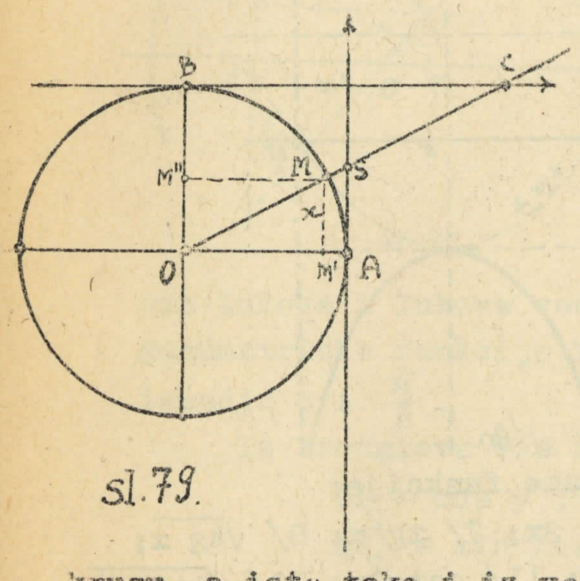
Prema tome prave $x = \pm k\pi$, k =o,1,2... su vertikalne asimptote diagrama funkcije cotg x, a sama funkcija monotono opada od $+\infty$ do $-\infty$ dok x raste od o do π,

III/ $y = \frac{1}{\cos x}$. Recipročne vrednosti funkcija cos x i sin x zovu se secans i cosecans i

označavaju sa

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

I za njih možemo na trigonometriskom krugu naći odgovarajuće duži. Tako je /v.sl.79/



sl.79.

OS = sec x i

OC = cosec x,

kao što to možemo lako uvideti iz sličnosti trouglova OMM' i OSA odnosno OMM'' i OCB, pri čemu je luk AM = x.

Na osnovu gornjeg, puštajući da se tačka M kreće po trigonometriskom krugu, a isto tako i iz veze

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

lako uvidjamo da diagram ove funkcije ima oblik slike 80, medju ostalim da su prave $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm 3\frac{\pi}{2}$,....njegove vertikalne asimptote.

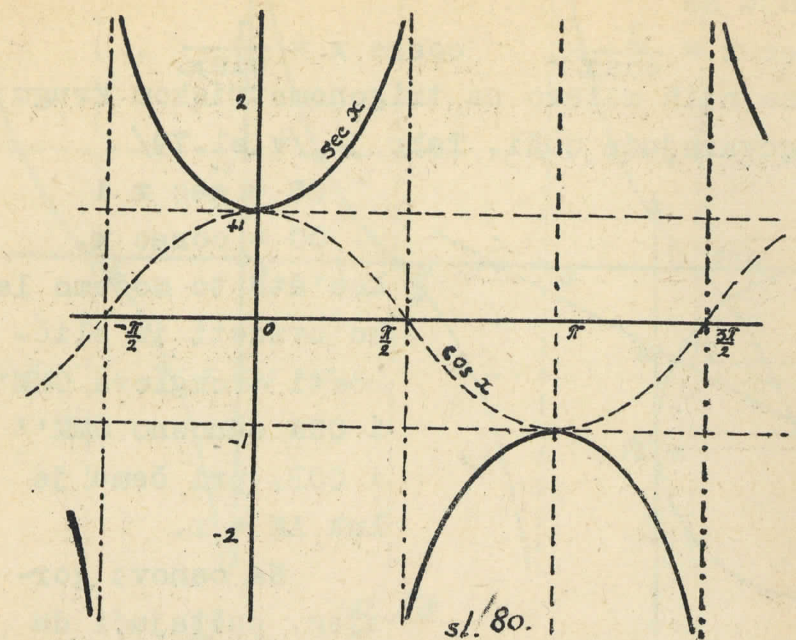
Zadaci.-

Pokazati da je

1/ $\sec^2 x - tg^2 x = 1$; 2/ $\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1$;

3/ Izraziti sec x i cosec x kao funkcije od t = tg x.

4/ Koji je medjusoban položaj diagrama funkcija y = tg x, y = -tg x i y = sec x u razmaku $/-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}/$? Nacrtati ih na istoj slici.



sl. 80.

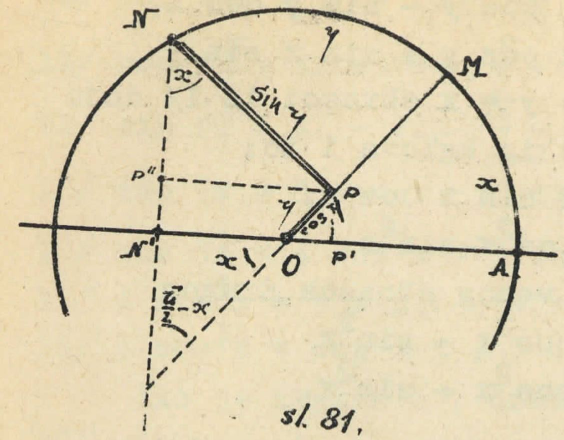
Konstruisati diagrame funkcija:

5/ $y = \text{tg}\,\frac{x}{2}$; 6/ $y = \text{tg}\,2x$; 7/ tg^2x; 8/ $\sqrt{\text{tg}\,x}$;
9/ $\text{cotg}\,\frac{x}{2}$; 10/ $\text{cotg}\,2x$; 11/ cotg^2x; 12/ $\sqrt{\text{cotg}\,x}$;
13/ $\sec\frac{x}{2}$; 14/ $\sec 2x$; 15/ $\sec^2x$; 16/ $\sqrt{\sec x}$;
17/ $\text{cosec}\,\frac{x}{2}$; 18/ $\text{cosec}\,2x$; 19/ cosec^2x;
20/ $\sqrt{\text{cosec}\,x}$; 21/ $\frac{1}{1-\cos x}$; 22/ $\frac{1}{1-\sin x}$;
23/ $\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$; 24/ $\frac{1}{2-\sin x}$.
25/ Ispitati grafički rešenja jednačina $\text{tg}\,x = x$.

5.6. ADICIONE TEOREME sin x i cos x .

I/ Obrazci koji izražavaju sinus i cosinus zbira lukova /x+y/ pomoću sinus-a i cosinus-a lukova x i y zovu se adicione teoreme funkcija sin x i cos x.

Označimo sa x luk AM a sa y luk MN/vidi sl.81/



sl. 81.

Bez ograničenja možemo pretpostaviti da se ovi lukovi nalaze izmedju o i $\frac{\pi}{2}$,jer na osnovu osobina funkcija sin i cos navedenih u 5.2, možemo uvek trigonometriske funkcije negativnih lukova i lukova većih od $\frac{\pi}{2}$ svesti na trigonometriske funkcije lukova koji se nalaze izmedju o i $\frac{\pi}{2}$.

Iz trouglova OPN i ONN' /v.sl. 81/ sledi:

$$OP = \cos y\ ,\quad NP = \sin y,$$
$$NN' = \sin /x+y/ \quad \text{i} \quad ON' = \cos /x+y/.$$

Kako je

$$NN' = NP'' + P''N' = NP \cos x + OP \sin x = \sin y \cos x + \cos y \sin x,$$
$$ON' = OP' - P'N' = OP \cos x - PN \sin x = \cos y \cos x - \sin y \sin x,$$

to odavde dobijamo adicione teoreme funkcija sinx i cos x:

$$\sin /x+x/ = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\cos /x+y/ = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

II/ Ako u gore dobivenim vezama zamenemo y, sa - y, na osnovu osobina

$$\cos/-y/ = \cos y \ \text{i}\ \sin/-y/ = -\sin y,$$

dobijamo obrasce za razliku lukova,koji glase:

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x,$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

III/ Ako stavimo $y = x$ obrasci iz I/ daju funkcije tzv. dvostrukig uglova i to:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

IV/ Iz gore dobivenog obrasca drugog

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

i

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

sledi

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Ako u ovim obrascima zamenimo x sa $\frac{x}{2}$ dobivamo tzv. funkcije poluuglova i to:

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Zadaci.

Znajući sin i cos od 30° i 45° izračunati:

1/ $\sin 15^\circ$; 2/ $\cos 15^\circ$; 3/ $\sin 75^\circ$; 4/ $\cos 75^\circ$;

Dokazati sledeće obrasce:

5/ $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

6/ $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

7/ $1 + \sin x = \sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$;

8/ $1 - \sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$;

9/ $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos x$;

10/ $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin x$;

11/ $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos x$;

12/ $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin x$;

13/ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$;

14/ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$;

15/ $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$;

16/ $4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$.

Ako je $x+y+z=\pi$, dokazati da je:

17/ $\sin x + \sin y + \sin z = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$

18/ $\cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$;

19/ $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 2 + 2\cos x\cos y\cos z$;

20/ $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 - 2\cos x\cos y\cos z$;

21/ $\sin x + \sin y - \sin z = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$;

22/ $\cos x + \cos y - \cos z = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} - 1$.

5.7. ADICIONE TEOREME tg x i cotg x

I/ Iz veza 5.4/I/ 2° za tg x i cotg x t.j.

$$\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x \quad \text{i} \quad \operatorname{cotg} x = \cos x/\sin x$$

i na osnovu adicionih teorema 5,6/I/ sin x i cos x sledi

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y}$$

$$\operatorname{cotg}(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x\cos y - \sin x\sin y}{\sin x\cos y + \sin y\cos x}$$

deobom brojitelja i imenitelja sa cos x cos y odnosno sa sin x sin y dobija se

$tg/x+y/ = \frac{tg\ x + tg\ y}{1-tg\ x\ tg\ y}$ i $cotg/x+y/=\frac{cotg\ x\ cotg\ y-1}{cotg\ x + cotg\ y}$

II/ Ako u gornjim obrascima zamenimo y sa -y dobijamo obrasce za razliku lukova.

$tg/x-y/= \frac{tg\ x - tg\ y}{1+tg\ x\ tg\ y}$ i $cotg/x-y/= \frac{cotg\ x\ cotg\ y+1}{cot\ y - cotg\ x}$

III/ Ako u obrascima dobivenim u I/ stavimo y = x, dobijamo obrasce za dvostruke lukove

$tg\ 2x = \frac{2\ tg\ x}{1-\ tg^2x}$ i $cotg\ 2x = \frac{cotg^2x - 1}{2\ cotg\ x}$

Zadaci

Znajući tg od 30^o, 45^o i 60^o izračunati:

1/ tg 15^o; 2/ cotg 15^o; 3/ tg 75^o; 4/ cotg 75^o

5/ Pokazati da se sin x , cos x, tg x, cotg x, sec x i cosec x mogu racionalno izraziti pomoću $t = tg\ \frac{x}{2}$.

Dokazati da je:

6/ $tg\ x \sim \begin{cases} x & \text{kad} \quad x \to \pm 0, \\ \frac{1}{-x+\frac{\pi}{2}} & " \quad x \to \frac{\pi}{2} \pm 0; \end{cases}$

7/ $cotg\ x \sim \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{kad} \quad x \to \pi \pm 0, \\ \frac{1}{x-\pi} & " \quad x \to \pi \pm 0. \end{cases}$

Izvesti sledeće obrasce:

8/ tg x + cotg x = 2 cosec 2x; 9/ tg x-cotg x= = 2 cotg 2x;

10/ $\frac{1+ \sin x}{1 - \sin x} = tg^2\ /\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}/;$

11/ $\frac{1+ \sin x}{\cos x} = tg\ /\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}/;$

12/ $\frac{1 + tg\ x}{1 - tg\ x} = tg\ /\frac{\pi}{4} + x/ = cotg\ /\frac{\pi}{4} - x/;$

13/ $\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{tg/\frac{x+y}{2}/}{tg/\frac{x-y}{2}/}$

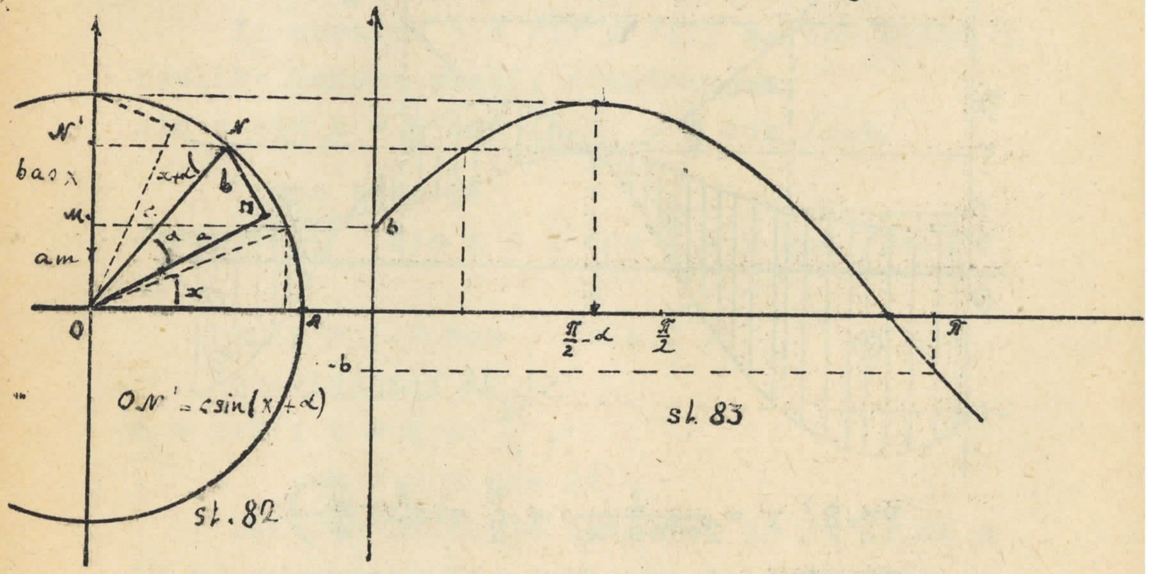
Ako je $x+y+z = \pi$, pokazati da je:

14/ tg x + tg y + tg z = tg x tg y tg z;

15/ cotg x + cotg y + cotg z =cotg x cotg y cotg z

5.8. DIAGRAMI SLOŽENIH TRIGONOMETRISKIH FUNKCIJA

I/ Ako je funkcija data u obliku zbira ili proizvoda dveju periodičkih funkcija sa istom periodom, dovoljno je konstruisati njen diagram za jednu periodu. Pri tome treba najpre ispitati da li se izraz kojim je funkcija



sl.82 sl.83

data može uprostiti, u suprotnom slučaju se diagram date funkcije konstruiše iz diagrama njenih sabiraka ili faktora.

Pr.1/ $y = a \sin x + b \cos x$.

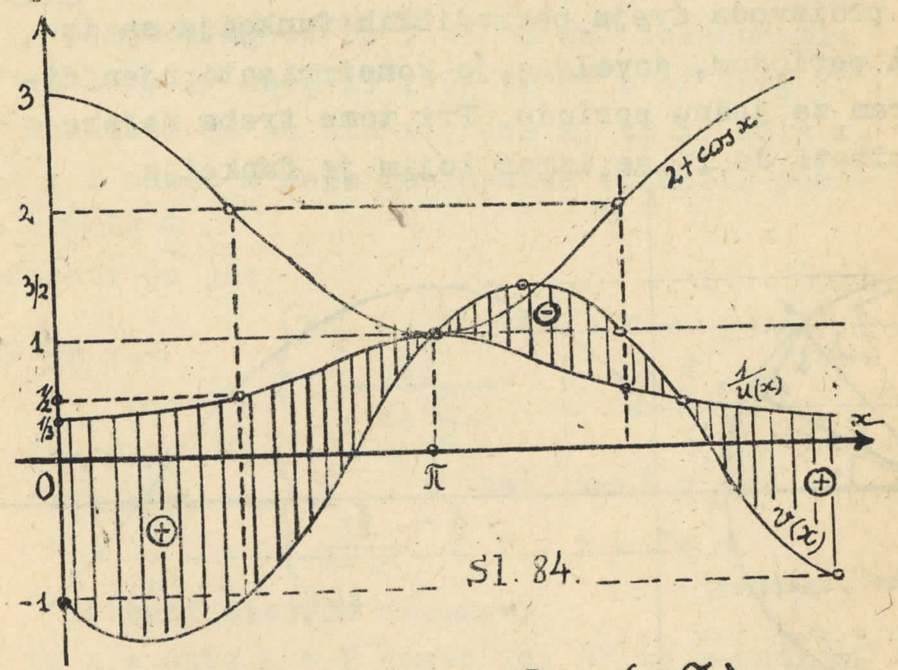
Iz sl.82 gde je $OM = a$, $MN = b$, $\sphericalangle AOM = x$ i $MN \perp OM$ sledi da je

$c \sin /x+\alpha/ = ON' = OM' + M'N' = a \sin x + b \cos x$.

Kako je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ i } \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a},$$

to znači da je diagram date funkcije takodje sinusoida sa amplitudom $\sqrt{a^2+b^2}$ i faznom razlikom $-\frac{\alpha}{2\pi}$. Njen tok dobijamo /v.sl.83/ ako pustimo da se trougao OMN obrće oko tačke O.



Sl. 84.

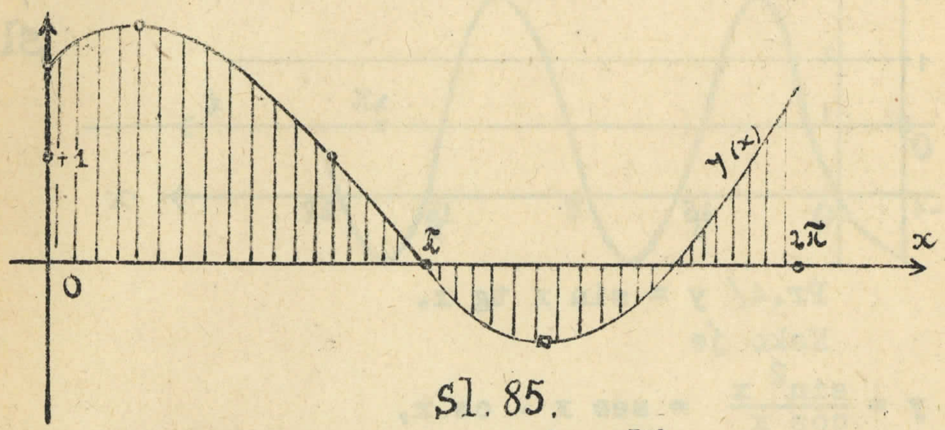
Pr.2/ $y = \frac{1}{2+\cos x} + \frac{3}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Stavimo

$$u = 2 + \cos x \text{ i } v = -\frac{3}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{1}{u} - v$$

Na sl. 84 dati su diagrami funkcija $u/x/$, $\frac{1}{u/x/}$ i $v/x/$. Šatirani deo izmedju diagrama funkcija $\frac{1}{u/x/}$ sveden je na sl 85 na X-osu, što daje diagram date funkcije $y/x/$.



Sl. 85.

Pr.3/ $y = 4 \sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

Iz obrasca 5.6 /I/ i /II/ za cos zbira i razlike lukova sledi, oduzimanjem

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos /a-b/ - \frac{1}{2}\cos /a+b/$

Prema tome je

$4 \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \sin x = 2\cos\frac{\pi}{3} - 2\cos /2x+\frac{\pi}{3}/$,

t.j.

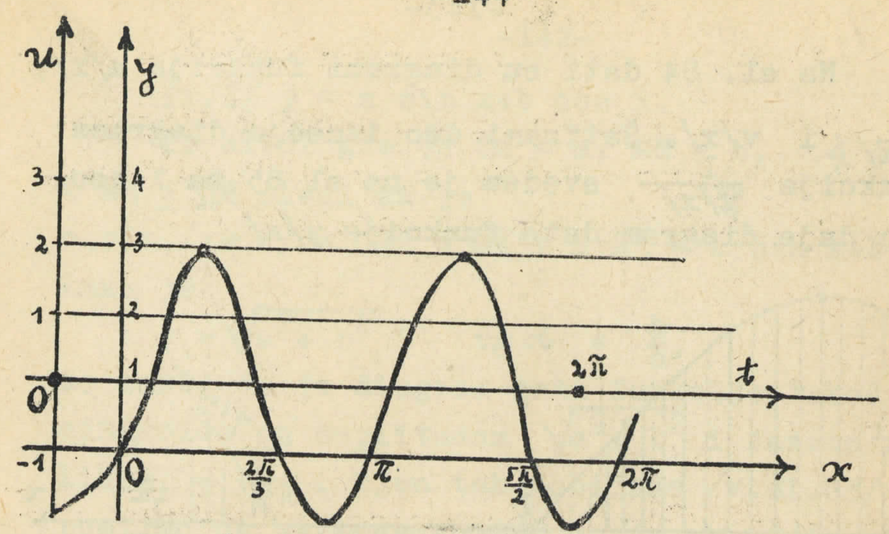
$$y = 1 - 2\cos / 2x + \frac{\pi}{3} /.$$

Stavljajući

$u = y-1$ i $t = x + \frac{\pi}{6}$,

$$u = -2\cos 2t$$

Diagram funkcije $u/t/$ dat je na sl.86 a iz njega neposredno dobijamo diagram funkcije $y/x/$ translacijom koordinatnog sistema sa $\frac{\pi}{6}$ na desno i 1 na dole.



Sl. 86

Pr.4/ $y = \sin x \operatorname{tg} x$.

Kako je

$$y = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \sec x - \cos x,$$

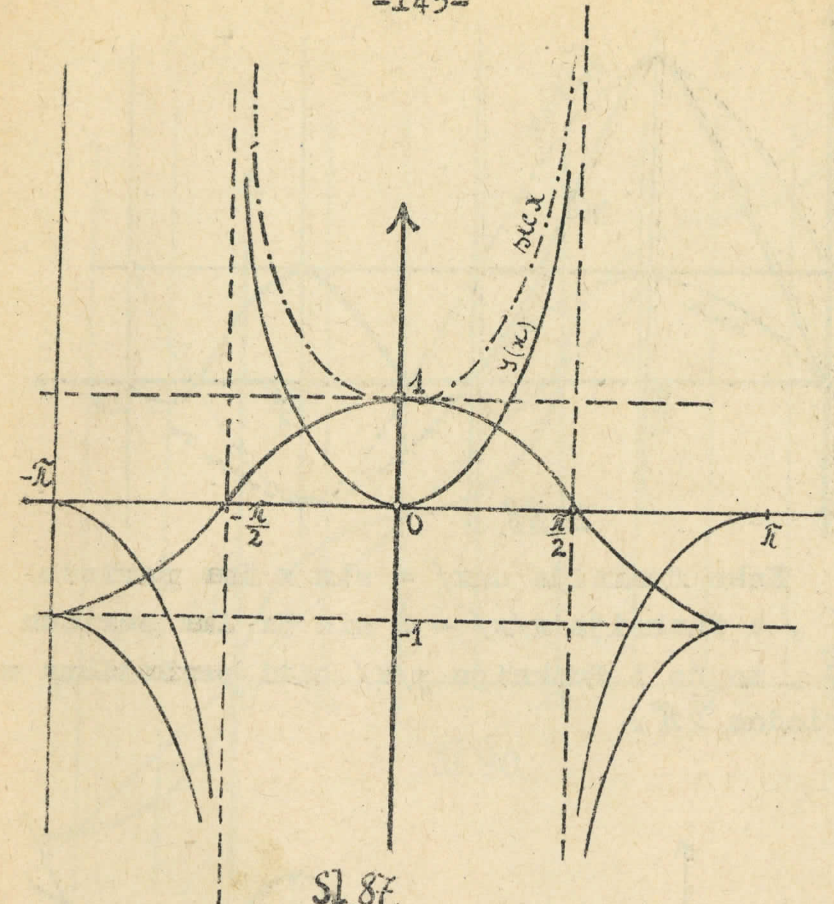
tako da se njen diagram dobiva kao što je to prikazano na sl.87 i to u razmaku $/-\pi, +\pi/$. Primetimo da je $y/x/$ parna funkcija, t.j. njen diagram ima Y-osu za osovinu simetrije, a da je $y/x-\frac{\pi}{2}/$ neparna funkcija, t.j. da je tačka $x = \frac{\pi}{2}$ središte simetrije njenog diagrama.

Pr 2/ $y = \sin x/1+2\sin x/$.

Na sl. 88 izvučeni su crtičasto diagrami funkcija $\sin x$ i $1+2 \sin x$, iz kojih neposredno sledi diagram njihova proizvoda.

II/ $y = f/x/ + \sin x$.

Ako je data funkcija u obliku zbira jedne periodične i jedne neperiodične funkcije, ili dve periodične funkcije sa raznim periodama,



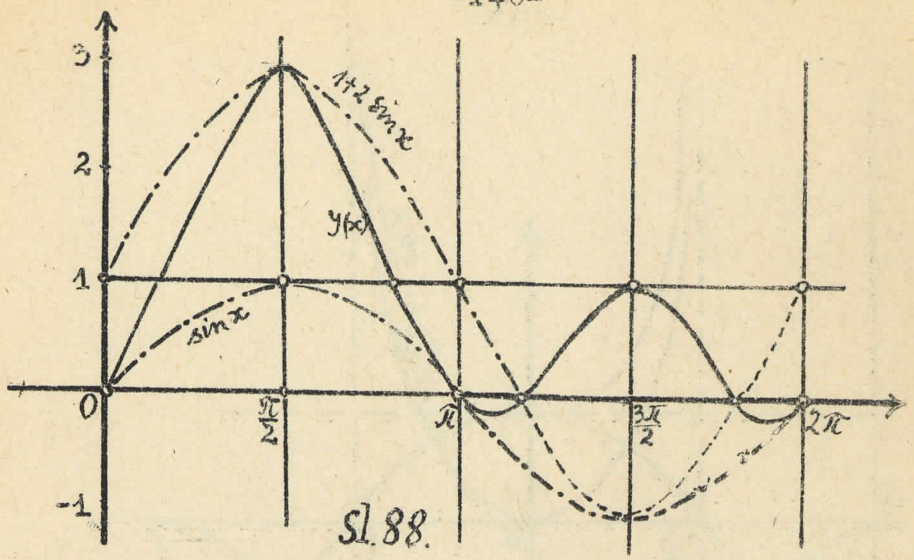
Sl. 87

treba najpre konstruisati diagram neperiodične funkcije, odnosno one periodične funkcije čija je perioda veća i njene ordinate periodično povećavati, odnosno smanjivati za ordinate druge funkcije /v.sl.89/

Pr.6/ $y = x + \sin x$.

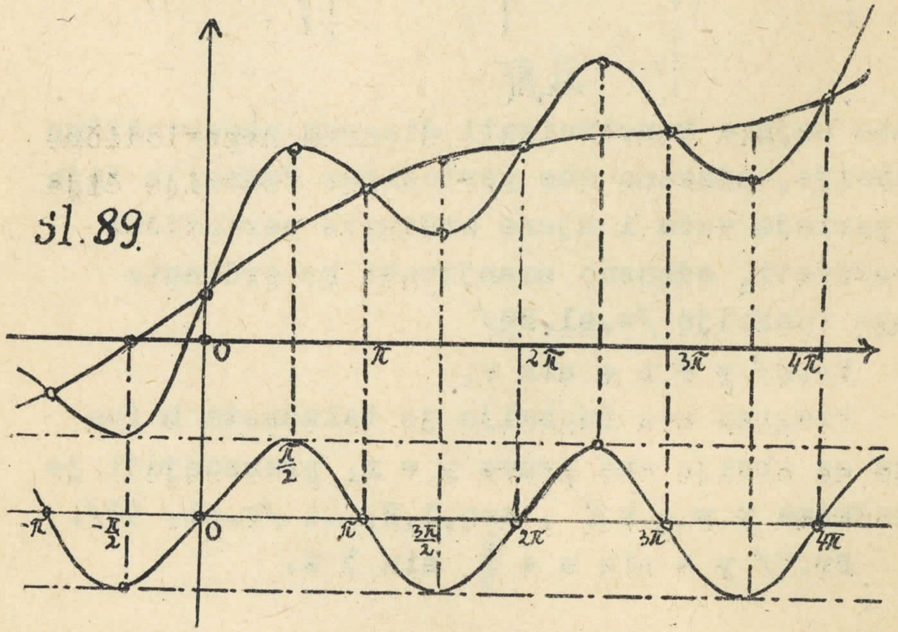
Diagram ove funkcije je talasasta kriva koja se obvija oko prave $y = x$, presecajući je u tačkama $x = \pm k\pi$, $k=0,1,2,\ldots$ /v.sl. 90/.

Pr.7/ $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$.

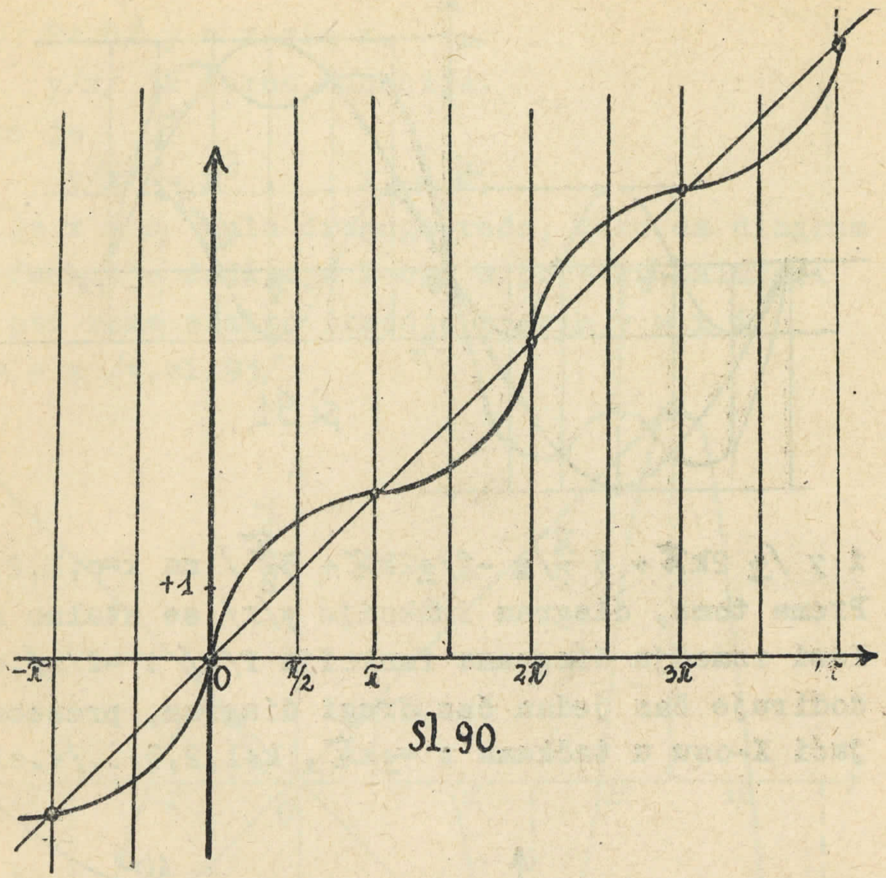


Sl.88.

Kako funkcija $u/x/ = \sin x$ ima periodu 2π, a funkcija $v/x/ = \frac{1}{3} \sin 3x$ ima periodu $2\frac{\pi}{3}$, to će i funkcija $y/x/$ biti periodična sa periodom 2π.



Sl.89.



Sl.90.

Ona je neparna, jer su $u/x/$ i v/x neparne funkcije i njen diagram u razmaku $/-\pi, +\pi/$ dobijamo ako ordinatama diagrama funkcije $u/x/$ dodamo ordinate diagrama funkcije $v/x/$ /vl.sl.91/

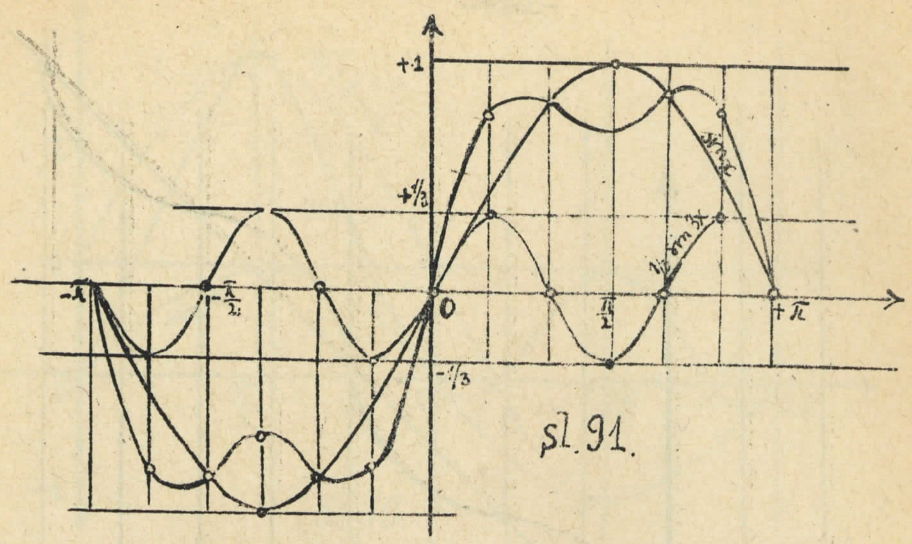
III/ $y = f/x/ \sin x$. Kako je $|\sin x| \leq 1$, $\sin /\pm k\pi/ = 0$, $\sin/\pm 2k\pi + \frac{\pi}{2}/ = 1$ i

$\sin /\pm 2k\pi + 3\frac{\pi}{2}/ = -1$ za svako $k=0,1,2...$

to je

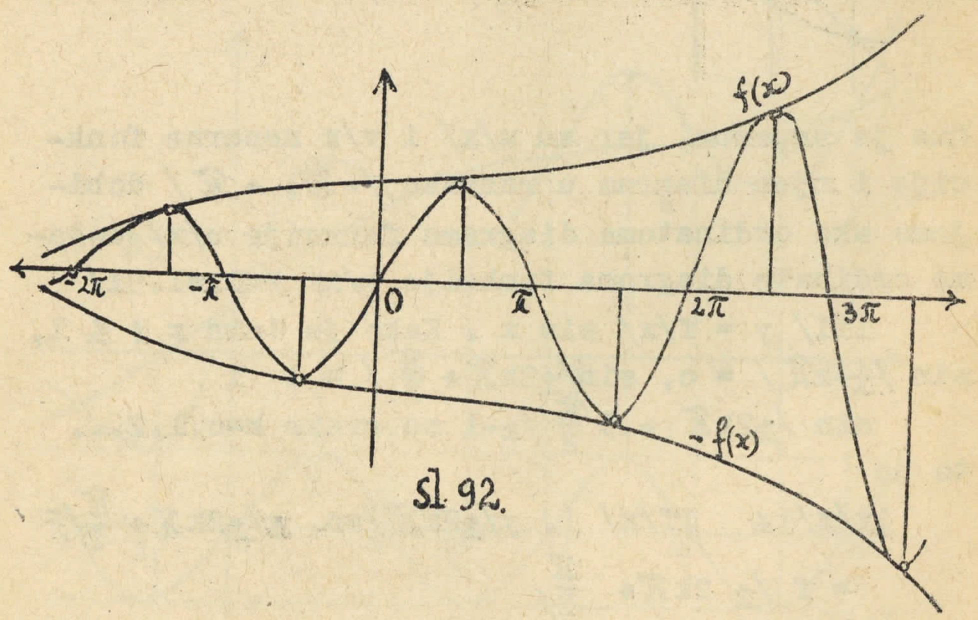
$|y/x/| \leq |f/x/|$, $y/\pm 2k\pi/ = 0$, $y/\pm 2k\pi + \frac{\pi}{2}/ =$

$= f/\pm 2k\pi + \frac{\pi}{2}/$



sl. 91.

i y /$\pm$ 2kπ + 3 $\frac{\pi}{2}$/= -f/$\pm$2kπ + 3$\frac{\pi}{2}$/ za k=o,1,2,...
Prema tome, diagram funkcije y/x/ se stalno nalazi izmedju diagrama funkcija f/x/ i -f/x/,on dodiruje čas jedan čas drugi diagram, presecajući X-osu u tačkama x =$\pm$kπ , k=1,2,3.../v.sl.92/



sl. 92.

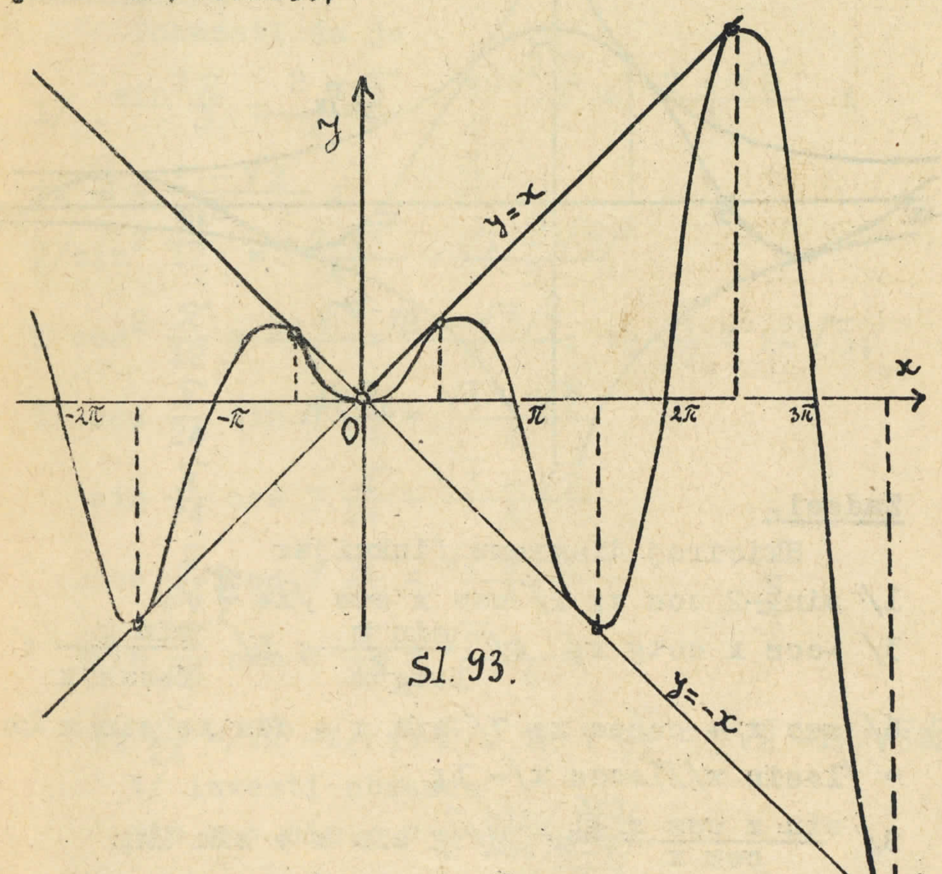
Pr.8/ y = x sin x.

y/x/ je parna funkcija.

Kako je

$$y/x/ \sim x^2 , \quad x \to o,$$

to je x = o nula drugoga reda, tako da diagram te funkcije dodiruje X-osu u početku,nalazeći se pti rome stalno izmedju pravih y = x i y = - x /v.sl.93/



sl. 93.

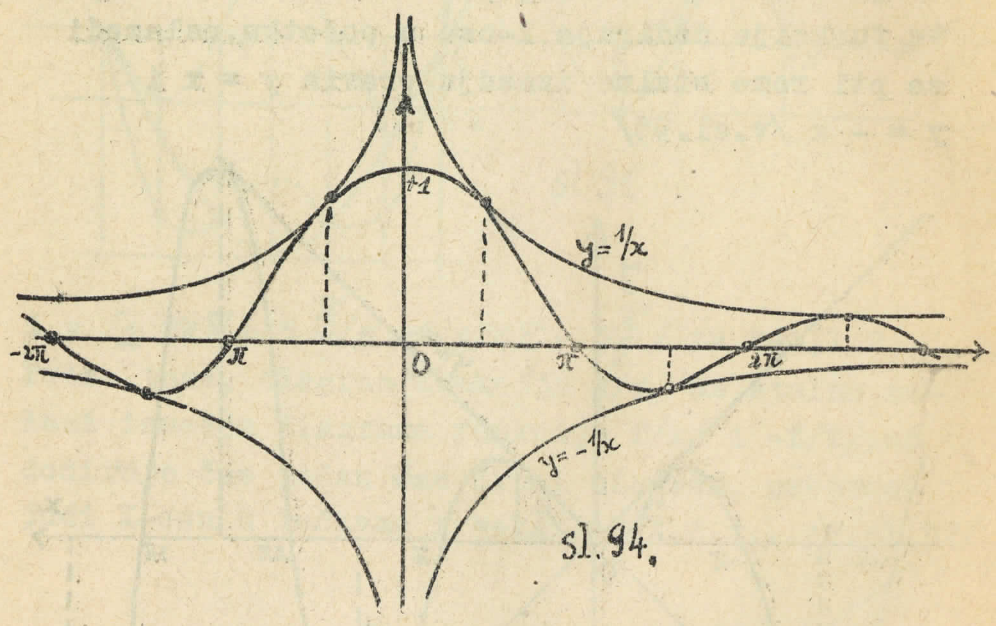
Pr.9/ y = $\cancel{\sin\frac{x}{x}}$

y/x/ je parna funkcija.

Kako

$$y/x/ \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0,$$

to njen diagram preseca X-osu za $y = 1$, nalazeći se za ostalo x izmedju hiperbola $y = \frac{1}{x}$ i $y = -\frac{1}{x}$ /v.sl. 94/



sl. 94.

Zadaci.

Skiciraj diagrame finkcija:

1/ $\sin\frac{2}{x} - 2\cos x$; 2/ $\cos x \cos /x + \frac{\pi}{3}/$;
3/ $-\cos x \cot g\, x$; 4/ $\frac{\sin x}{1+tg^2 x}$; 5/ $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;
6/ $\sec x + \operatorname{cosec} x$; 7/ $\sin x + \cos x + \sin x \cos x =$ $= /1+\sin x//1+\cos x/ - 1$;
8/ $\frac{\sin x \cos x + 1}{\cos x}$; 9/ $2\sin x + \sin 2x$;
10/ $2\sin x + \cos 2x$; 11/ $x + \cos x$; 12/ $x - tg\, x$.
13/ $\frac{\sin x}{1+x^2}$; 14/ $x\cos x - \sin x$;

15/ $\sin^2 x\, /1+\cos^2 x/$.

16/ Iz tačke O povučena je duž OA = a koja zaklapa ugao x sa orientisanom pravom OX. Iz tačke A povučena je duž AN = b, koja zaklapa ugao x sa produženjem duži OA. Ispitati kako se menja projekcija $y/x/$ = OB' duži CB, na orientisanu pravu OX , dok x varira od o do 2π

5.9. VEŽBE

Pokazati da je

1/ $\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ i
$tg\frac{\pi}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{\frac{\pi}{2}^2}$;
2/ $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{/1-\sqrt{3}/^2}{3}$
i $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{/1-\sqrt{3}/^2}{8}$; $tg\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$;
3/ $\cos\frac{\pi}{24}\sin 7\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$
$\sin\frac{\pi}{24}\cos 7\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$
$\cos\frac{\pi}{24}\cos 7\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$
$\sin\frac{\pi}{24}\sin 7\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$
i $tg\frac{\pi}{24} = /\sqrt{2}-1//\sqrt{3}-\sqrt{2}/$, $tg\, 7\frac{\pi}{24} = /\sqrt{2}-1//\sqrt{3}+\sqrt{2}/$.

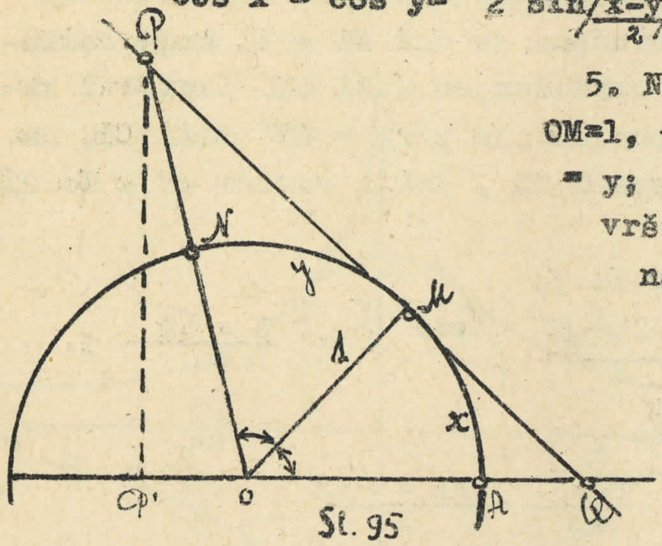
4/ Izvesti obrasce

$$\sin x + \sin y = \frac{2\sin/\frac{x+y}{2}/}{2\cos/\frac{x-y}{2}/}$$

$$\sin x - \sin y = \frac{2\cos/\frac{x+y}{2}/}{2\sin/\frac{x-y}{2}/}$$

$$\cos x + \cos y = \frac{2\cos/\frac{x+y}{2}/}{2\cos/\frac{x-y}{2}/}$$

$$\cos x - \cos y = -\frac{2\sin/\frac{x+y}{2}/}{2\sin/\frac{x-y}{2}/}$$



Sl. 95

5. Na slici 95 je OM=1, ∢AOM=x i ∢MON= = y; izražavajući površinu trougla OPQ na dva načina pokazati da je

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin/x+y/}{\cos x \cos y}.$$

Na sličan način izvesti analogne obrasce za zbir i razliku tangensa i cotangensa lukova x i y.

6/ Pokazati da je tg/a+b/ = k/tg a + tg b/ gde je

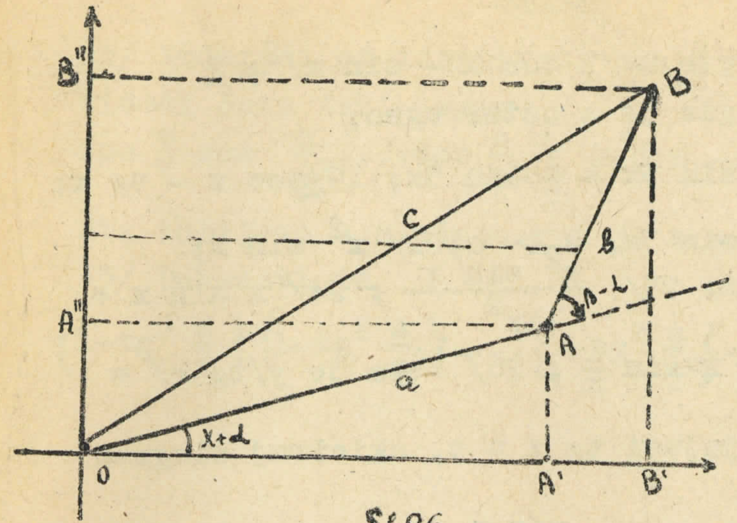
$$2k = \frac{1+\cos/a-b/}{\cos/a+b/}$$

7/ Ako su strane trougla ABC date izrazima AB= 1+2x,

$$BC = 1+x+x^2 \text{ i } CA = x^2-1$$

pokazati da za svako $x > 1$ ugao BAC iznosi 120°.

8/ Duž OA = a zaklapa ugao x +α sa orientisanom pravom OA', a duž AB= b zaklapa ugao β-α sa produženjem prave OA /vidi sl.96/.



Sl.96

Projektujući najpre duž OC =c a zatim duži OA i AB na orientisane prave OA' i OA'' pretvoriti izraze a cos/x+α/+ +b cos/x+β/ i a sin /x+α/ + b sin/x+β/.

Puštajući da x varira od o do 2π, nacrtati diagram funkcija.

9/ Stavljajući x = sin t i $y = \sin\frac{t}{2}$, pokazati da iz

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \quad \text{i} \quad 1 = \sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}$$

$$2y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}.$$

Na osnovu ovih veza i upotrebom trigonometriskog kruga, konstruisati tačku po tačku diagram funkcije y/x/.

Skiciraj diagrame sledećih funkcija:

10/ sin x sin 3x; 11/ sin x sin nx; 12/ $\frac{\sin 3x}{\sin x}$

13/ $\frac{\sin nx}{\sin x}$; 14/ cos x cos /x-a/, gde je a oštar ugao;

15/ $\sin^2 x + \sin^2/x-a/$, gde je a oštar ugao;

16/ $6\cos^2 x - 4\sin x\cos x + \sin^2 x$, ovaj izraz pretvoriti najpre u $/2 \cos x - \sin x/^2 + 2$

17/ $\frac{tg\, x}{tg/x+a/}$, gde je a oštar ugao;

18/ $\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x$; 19/ $2\sec x - tg\, x$;

20/ $a \sin x + \sin 3x,\ a_2 > 0$; 21/ $x^2 \sin x$;

22/ $x^2 - 2 \sin x$; 23/ $\frac{x^2 \sin x}{1+x^2}$; 24/ $x \sin x + 4 \cos x$; 25/ $x \sin \frac{1}{x}$; 26/ Neka je $y/tg\, x/ = \frac{tg\, 3x}{tg\, 2x}$; stavljajući $tg\, x = t$, skiciraj diagram funkcije $y/t/$.

27/ Pokazati da iz $a = \frac{\sin x}{\sin y}$ i $x+y=\alpha$,sledi

$$tg/\frac{x-y}{2}/ = \frac{a-1}{a+1}\, tg \frac{\alpha}{2}$$

Na osnovu ovog izračunati x i y kad je

$$\sin x = 2 \sin y \text{ i } x+y = 120^\circ$$

28/ Pokazati da je za $0 \leq x \leq \pi$

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x \geq 0$$

29/ Čemu teži $tg\, x\, tg\, 2x$ kad $x \to \frac{\pi}{2} \pm 0$?

30/ Pokazati da je za male lukove x

$$tg\, 2x \approx 2\, tg\, x : 2tg^3 x \text{ i } tg \frac{x}{2} \approx \frac{1}{2}\, tg\, x - \frac{1}{8}\, tg^3 x$$

Šta se dobije ako se u drugom obrascu zamene x sa 2x, a zatim $tg\, 2x$ i $tg^3\, 2x$ zameni sa približnim vrednostima koje dobijamo iz prvog obrasca?

31/ Ako je $\sin x > 0$ i ako se stavi

$\sin_1 x = \sin x$, $\sin_2 x = \sin/\sin x//$,

$\sin_3 x = \sin_2/\sin x/$ i uopšte $\sin_n x = \sin_{n-1}/\sin x/$, $n = 2,3.....$, pokazati da

$$\sin_n x \to 0 \text{ kad } n \to \infty$$

32/ Polazeći od identiteta $\cos \frac{a}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2}$ videti čemu teži izraz

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cdots \cos \frac{a}{2^n} \quad \text{kad } n \to \infty$$

Šta dobijamo u slučaju kad je $a = \frac{\pi}{2}$?

33/ Pokazati da

$$\left\{1-tg^2 \frac{a}{2}\right\}\left\{1-tg^2 \frac{a}{2^2}\right\}\cdots\left\{1-tg^2 \frac{a}{2^n}\right\} \to \frac{a}{tg\, \alpha},\ n \to \infty$$

NAPOMENA ZA I i II GLAVU

Skreće se pažnja studentima da je usled tehničkih nedostataka, uslovljenih nepoznavanjem matematičkih oznaka pri prepisivanju, došlo do izvesnih nepravilnosti.

Tako su, nedostatkom okruglih malih zagrada ( ) , upotrebljene oznake / /. Razlomci, pisani položeno /na pr. 1/1x2+/ u sedmom redu odozgo na str.11/ nisu bili dovoljno jasni /slučaj /x-2///x-1/ te je oznaka razlomljene linije podebljana ili pisana ovako:

[x-a]/ [x-1].

Ukoliko se bude potkrala koja greška nastala iz pomenutih razloga, uočiće se lako radi jednostavnih matematičkih operacija .

/M. Steković/

Algebarske jednačine 3-ćeg i višeg stepena:

I. Jednačine trećeg stepena

1. Rešavanje jednačina 3-ćeg stepena.

1.1. Različiti oblici jednačine trećeg stepena.

Opšti oblik jednačine trećeg stepena je

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o, \quad (A \neq o) \qquad (1)$$

Deobom sa A, ona prelazi u jednačinu

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = o, \qquad (2)$$

gde $a = \frac{B}{A}$, $b = \frac{C}{A}$, $c = \frac{D}{A}$ mogu biti realni ili kompleksni brojevi.

Jednačinu (2) možemo transformisati tako da se ukloni član sa x^2. Stavimo zato

$$x = y + \lambda,$$

gde je λ proizvoljna konstanta, biće

$$\left.\begin{array}{l} y^3 + 3y^2\lambda + 3y\lambda^2 + \lambda^3 + \\ \quad + ay^2 + 2ay\lambda + a\lambda^2 + \\ \qquad + by + b\lambda + \\ \qquad\quad + c \end{array}\right\} = o$$

$$\therefore \quad y^3 + (3\lambda + a)\,y^2 + py + q = o$$

gde je $p = 3\lambda^2 + 2a\lambda + b = P'(\lambda)$

$$q = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = P(\lambda)$$

Ova se jednačina može svesti na jednačinu

$$y^3 + py + q = o,$$

ako λ izaberemo tako da bude

$$3\lambda + a = 0,$$

tj. $\lambda = -\frac{a}{3}$.

Prema tome, ako se u jednačini (2) izvrši smena

$$x = y - \frac{a}{3},$$

dobija se jednačina (3), koja se naziva redukovani oblik jednačine trećeg stepena, i čiji koeficienti p i q tada imaju vrednost

$$p = b - \frac{a^3}{3},$$

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{a.b}{3} + c = P\left(-\frac{a}{3}\right)$$

Specijalni oblici:

1^o Ako je u jednačini (2) $a = 0$ i $b = 0$, ona se svodi na binomnu jednačinu oblika

$$x^3 + C = 0, \quad \text{ili} \quad x^3 = -c, \qquad (4)$$

čiji su koreni:

$x_1 = \sqrt[3]{-c}$, $x_2 = \sqrt[3]{-c}\cdot\varepsilon$ i $x_3 = \sqrt[3]{-C}.\bar{\varepsilon} = \sqrt[3]{-C}.\varepsilon^2$,

gde je $\varepsilon = e\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2^o Ako je u jednačini (2) $a = 0$ i $c = 0$, ona se svodi na jednačinu

$$x^3 + bx = 0,$$

$\therefore x_1 = 0$, $x^2 = -b$, tj. $x_{2,3} = \pm\sqrt{-b}$

3^o Ako je u jednačini (2) $b = 0$, ona se svodi na jednačinu

$$x^3 + ax^2 + \ + C = 0$$

koja se smenom $x = \frac{1}{y}$ svodi na jednačinu oblika (3), tj. na

$$Cy^3 + ay + 1 = 0.$$

(1.2) Rešavanje jednačina 3-ćeg stepena.

Preostaje dakle da se nadje metod za rešavanje jednačine 3-ćeg stepena redukovanog oblika

$$y^3 + py + q = 0$$

U tu svrhu stavimo $y = u + v$

gde su u i v nove nepoznate; tada je

$$(u+v)^3 + p\,(u+v) + q = 0,$$

ili $(u^3+v^3+q) + (3uv+p)\cdot(u+v) = 0$ (5)

Ako u i v odredimo tako da bude

$$u^3 + v^3 + q = 0,$$

i $3u\cdot v + p = 0$,

tj. $\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q, \\ uv &= -\frac{p}{3}, \end{aligned}\right\}$ (6)

umesto jednačine (5) dobijamo sistem (6). Ako drugu jednačinu ovog sistema dignemo na 3-ći stepen,

$$u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

dobijamo sistem

$\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q, \\ u^3.v^3 &= \left(-\frac{p}{3}\right) \end{aligned}\right\}$ (6')

Iz (6') vidimo da su u^3 i v^3 koreni kvadratne jednačine

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0, \qquad (7)$$

takozvane rezolvente jednačine (3), a gde su $u^3 = z_1$ a $v^3 = z_2$ koreni jednačine (7). Kako su

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

to je
$$\left.\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ v &= \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Otuda vidimo da su koreni jednačine (3) dati izrazom

$$y = u+v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

koji pretstavlja takozvani Cardano-ov obrazac.

Binomne jednačine (8) imaju po tri korena, i to prva:

$$u_1, \; u_2 = u_1\varepsilon \quad u_3 = u_1\varepsilon^2 \text{ gde je } u_1 = \sqrt[3]{z_1}, \quad (9)$$

a druga:

$$v_1, \; v_2 = v_1\varepsilon \quad v_3 = v_1\varepsilon^2, \text{ gde je } v_1 = \sqrt[3]{z_2}, \quad (10)$$

Svaki par u, v u kome je u jedan od brojeva (9) a v jedan od brojeva (10), zadovoljava sistem (6') i prvu jednačinu sistema (6), ali ne zadovoljava drugu jednačinu tog sistema. Zato je potrebno kombinovati parove brojeva u, v, iz (9) i (10) tako, da zadovoljavaju drugu jednačinu sistema (6). Samo ovi parovi odredjuju zbirove $y = u + v$, koji su koreni jednačine (4).

Neka je u_1, v_1 par brojeva koji zadovoljavaju drugu jednačinu sistema (6), tj.

$$u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3}; \quad (11)$$

tada je
$$\begin{cases} u_1 \cdot v_2 = u_1 \cdot v_1\varepsilon = -\frac{p}{3}\varepsilon, \\ u_1 \cdot v_3 = u_1 \cdot v_1\varepsilon^2 = -\frac{p}{3}\varepsilon^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 \cdot v_1 = u_1 v_1 \varepsilon = -\frac{p}{3}\varepsilon, \\ u_2 \cdot v_2 = u_1 v_1 \varepsilon^2 = -\frac{p}{3}\varepsilon^2, \\ u_2 \cdot v_3 = u_1 v_1 \varepsilon^3 = -\frac{p}{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 \cdot v_1 = u_1 v_1 \varepsilon^2 = -\frac{p}{3}\varepsilon^2, \\ u_3 \cdot v_2 = u_1 v_1 \varepsilon^3 = -\frac{p}{3}, \\ u_3 \cdot v_3 = u_1 v_1 \varepsilon^4 = -\frac{p}{3}\varepsilon. \end{cases}$$

Prema tome, samo parovi

$$\left.\begin{aligned} & u_1, \; v_1 \\ & u_2 = u_1\varepsilon, \quad v_3 = v_1\varepsilon^2, \\ \text{i} \quad & u_3 = u_1\varepsilon^2, \quad v_2 = v_1\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

zadovoljavaju drugu jednačinu sistema (6) tj. i sam sistem (6)

Otuda vidimo da jednačina (3) ima tri korena koji su dati izrazima:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1, \\ y_2 &= u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2, \\ y_3 &= u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Kako je $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, a $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, to možemo ove vrednosti napisati i u obliku

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(u_1+v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1), \\ y_3 &= -\frac{1}{2}(u_1+v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Primer. Rešiti jednačinu

$$y^3 + 12\,y + 63 = 0$$

U ovom slučaju je $p = 12$, a $q = 63$. Kako je

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \text{to je} \quad u_1 = \sqrt[3]{-\frac{63}{2} + \sqrt{\frac{3964}{4} + 64}} = 1$$

$$\text{i} \quad v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -4$$

Prema obrascima (14) koreni date jednačine su:

$$y_1 = -3$$

$$y_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\,i\sqrt{3},$$

$$y_3 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\,i\sqrt{3}.$$

Zadaci

Odrediti korene sledećih jednačina:

1) $x^3 + 3x - 14 = 0$, R. : $(2,\ -1 \pm i\sqrt{6})$

2) $x^3 - 6x + 6 = 0$, R. : $(x \approx -2{,}84,$
$x_{2,3} \approx 1{,}42 \pm 0{,}33i)$

3) Jednačinu
$x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$, R. : $(x_1 = 5,\ x_{2,3} = \pm i)$

rešiti a) pomoću Kardanovog obrasca
b) ne primenjujući Kardanov obrazac

1.3 Diskusija. Dobivena rešenja jednačine

$$y^3 + py + q = 0$$

važe u opštem slučaju kada su p i q realni ili kompleksni brojevi.

Analizirajmo jednačinu (3) u slučaju kada su p i q realni.

Diskriminantu $D = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$ rezolvente jednačine (3) nazivamo **diskriminantom** jednačine (3) i prema njenom znaku razlikujemo tri slučaja:

1.° ..... $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$,

2.° ..... $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$

3.° ..... $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$

1.° Ako je $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, izrazi

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{i} \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

su realni i različiti pa je i

$$y_1 = u_1 + v_1$$

realan koren jednačine (3). Ostala dva korena

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = \bar{y}_2$$

su konjugovano kompleksni.

Prema tome, ako je $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, jednačina (3) ima jedan realan i dva konjugovano kompleksna korena.

2.° Ako je $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, tada je

$$u_1 = v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

tj. u_1 i v_1 su jednaki pa je prema (14)

$$y_1 = 2u_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$y_2 = y_3 = -u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Dakle, ako je $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ sva tri korena jednačine (3) su realna, a dva od njih su jednaka

U ovom slučaju koreni jednačine (3) se mogu izraziti i na sledeći način.

Ako u jednačini (3) y zamenimo korenom $y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, biće

$$\frac{q}{2} + p\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + q = 0, \quad \therefore \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -\frac{3q}{2p},$$

te je $y_1 = \frac{3q}{p}$ i $y_2 = y_3 = -\frac{3q}{2p}$

3° Ako je $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, tj. $D = -d^2$, izrazi

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + id} \quad \text{i} \quad v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - id}$$

su konjugovano kompleksni brojevi.

Zaista, stavimo $u_1 = a + bi$,

tada je $|u_1|^2 = a^2 + b^2 =$

$$= \left|\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right|^2 = \sqrt[3]{\left|-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right|^2} = -\frac{p}{3}$$

gde je p, zbog uslova $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, negativan broj. Kako je

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{p \cdot \bar{u}_1}{3u_1 \cdot \bar{u}_1} = -\frac{p \cdot \bar{u}_1}{3\left(-\frac{p}{3}\right)} = \bar{u}_1$$

to je $v_1 = \bar{u}_1 = a - bi$

Stavljajući u izraze (14) $u_1 = a+bi$ i $v_1 = a-bi$, koreni jednačine (3) postaju

$$y_1 = 2a, \quad y_{2,3} = -a \mp b\sqrt{3}$$

Dakle, u slučaju $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ sva tri rešenja jednačine (3) su realna.

1.4. <u>Nesvodljiv slučaj</u>. Cardano i njegovi savremenici nisu shvatili kako se mogu dobiti realni koreni kad je $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, jer se u to vreme izvlačenja kvadratnog korena iz negativnog broja odbacivala kao nemoguća a pojam kompleksnog broja još nije bio poznat. Matematičari XVI stoleća nastojali su da izbegnu imaginarnost u Kardanovom obrascu, ali u tome nisu uspeli, jer kao što se docnije i pokazalo, ovo nije ni moguće; zato se slučaj kad je $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ zove <u>nesvodljiv</u>. (casus irreducibilis).

Nesvodljiv slučaj je u vezi sa problemom trisekcije ugla a obrasci (15) se mogu primenom trigonometriskih funkcija transformisati u realne izraze, koji su podesni i za logaritmovanje.

Stavimo zato $u_1^3 = r \cdot e(\varphi)$

tj. $-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

ili $r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$, $\cos\varphi = -\frac{q}{2r}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}{r}$;

biće $u_1 = a + bi = \sqrt[3]{r} \cdot e\left(\frac{\varphi}{3}\right)$

$\therefore \quad a + bi = \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$

$\therefore \quad a = \sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad b = \sqrt[3]{r}\sin\frac{\varphi}{3}$

Zamenom ovih vrednosti u jednačine (15) dobijamo $y_1 = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi}{3}$,

$$y_2 = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right).$$

i $y_3 = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right)$.

__Primer.__ Rešiti jednačinu

$$7x^3 - 6x^2 - 8x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Smenom $x = y + \frac{2}{7}$, $\qquad (2)$

$$\therefore \quad y^3 - \frac{68}{49}y - \frac{177}{343} = 0.$$

Kako je $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, data jednačina ima tri različita realna korena. U ovom primeru je:

$$r = \frac{136}{1029}\sqrt{\frac{17}{3}};$$

$$\cos\varphi = \frac{531}{272}\sqrt{\frac{3}{17}}, \qquad \sin\varphi = \frac{287}{272}\sqrt{\frac{5}{17}}$$

$$\therefore \quad 0 < \varphi < 90^\circ.$$

Iz $\cos\varphi = \frac{531}{272}\sqrt{\frac{3}{17}}$

$$\therefore \quad \lg\cos\varphi = \bar{1},91386,$$

$$\therefore \quad \doteq 34^\circ 54' 20''.$$

Stoga su koreni jednačine (3):

$$y_1 = \frac{4}{7}\sqrt{\frac{17}{3}} \cos 11^\circ 38' 7'',$$

$$y_2 = -\frac{4}{7}\sqrt{\frac{17}{3}} \cos 48^\circ 21' 53'',$$

$$y_3 = -\frac{4}{7}\sqrt{\frac{17}{3}} \cos 71^\circ 38' 7''.$$

$$\therefore \quad y_1 \approx 1{,}33232,$$

$$y_2 \approx -0{,}90374,$$

$$y_3 \approx -0{,}14857,$$

a uzimajući u obzir (2), koreni jednačine (1) su:

$$x_1 \approx 1{,}61803,$$

$$x_2 \approx -0{,}61803,$$

$$x_3 \approx -0{,}14286.$$

Datu jednačinu možemo napisati

$$7x^3 + x^2 - 7x^2 - x - 7x - 1 = 0,$$

tj. $(7x + 1)\cdot(x^2 - x - 1) = 0.$

Odatle se vidi da su koreni:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180340,$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0{,}6180340,$$

$$x_3 = -\frac{1}{7} = -0{,}1428571.$$

__Zadaci__

Rešiti jednačine:

1) $x^3 + 12x^2 + 24x - 64 = 0;$

2) $x^3 - 7x + 7 = 0.$

__Zadaci__

1) Rešiti jednačine: a) $x^3 - 9x + 8 = 0$,

b) $x^3 - 7x + 6 = 0.$

2) Koliko tone u vodu jedna drvena kugla specifične težine $\Delta = 0,6$ i poluprečnika $r = 12$ cm ?

3) Jedna metalna šipka izdužuje se po obrascu

$$y = x^3 - 15x^2 + 74x + 22$$

Pri koliko stepeni njena dužina iznosi $y_1 = 25$ cm?

4) Kad elipsa $x^2 + 4y^2 = 4$ rotira oko glavne ose nastaje elipsoid. U ovom elipsoidu treba upisati valjak čija se zapremina odnosi prema zapremini elipsoida kao 3 : 4. Kolika je njegova visina ($h = 2x$)? (Zapremina elipsoida

je $\frac{4}{3}\pi ab^2$).

5) U pravilnoj četvorostranoj piramidi sa osnovnom ivicom $a = 6$ cm i visinom $h = 8$ cm, treba postaviti pravilnu četvorostranu prizmu čija je zapremina jednaka polovini zapremine piramide. Kolika je visina prizme?

6) Rešiti jednačine

a) $2 \sin x \cos 2x = 1$,

b) $\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x = 6$.

7) Oko jedne kugle opisati prav konus čija bi zapremina bila n puta veća od zapremine date kugle. Naći visinu x kupe i radius y njene osnove.

8) Prava kupa ima zapreminu V i omotač M. Odrediti visinu, poluprečnik osnove i stranu.

2. Grafičko rešavanje jednačine trećeg stepena

Različiti oblici celih racionalnih funkcija, tj. polinoma trećeg stepena koji odgovaraju jednačinama trećeg stepena (1), (2), (3),(4) izgledaju ovako:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \,, \qquad (1')$$
$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \,, \qquad (2')$$
$$y = x^3 + px + q \,, \qquad (3')$$
$$y = x^3 + c \qquad (4')$$

2.1. Grafičko pretstavljanje funkcije oblika (2')

Uzmimo funkciju oblika (2')

$$u = v^3 + av^2 + bv + c \quad (1)$$

Smenom $v = x - \frac{a}{3}$ dobijamo:

$$u = x^3 + px + q \quad (2)$$

gde je $p = b - \frac{a^2}{3}$, $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{a \cdot b}{3} + c = u(-\frac{a}{3})$

Stavimo $u = y + u(-\frac{a}{3}) = y + q$ biće

$$y = x^3 + px = x(x^2 + p) \quad (3)$$

Jednačina (1) je transformisana u jednačinu (3) relacijama

$$\left.\begin{aligned} v &= x - \frac{a}{3} \\ \text{i} \quad u &= y + q \,. \end{aligned}\right\} (4)$$

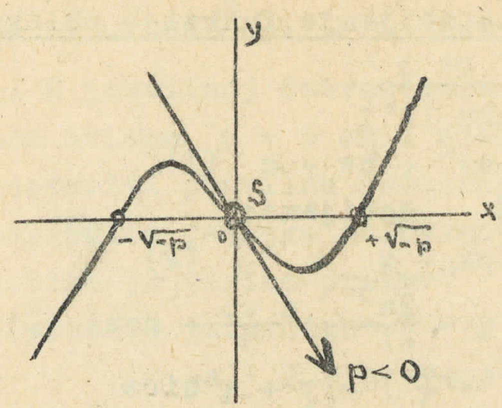
Funkcija (3) je neparna funkcija. Tačka O ($x = 0$, $y = 0$) je centar simetrije kubne parabole čija je jednačina (3), odnosno jednačina (1).

Prema vrednostima od p diagram funkcije (3) može imati sledeće oblike:

Ako je $p < 0$ (sl.1) $\therefore$ $y = x(x - \sqrt{-p}) \cdot (x + \sqrt{-p})$

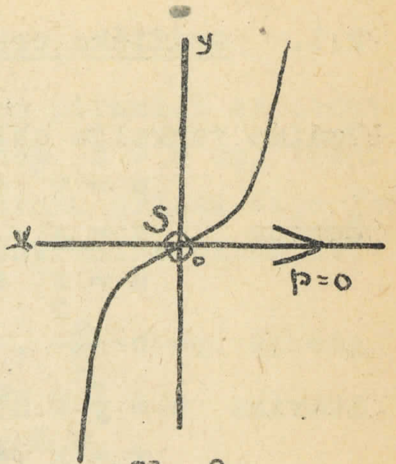
$p = 0$ (sl.2) $\therefore$ $y = x^3$ $\quad p = b - \frac{a^2}{3}$,

$p > 0$ (sl.3) $\therefore$ $y = x(x^2 + p)$



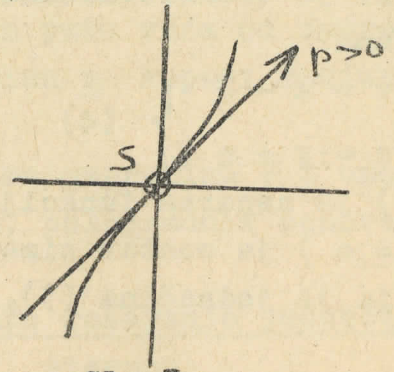
Sl. 1

$y'(o) = p < 0$



Sl. 2

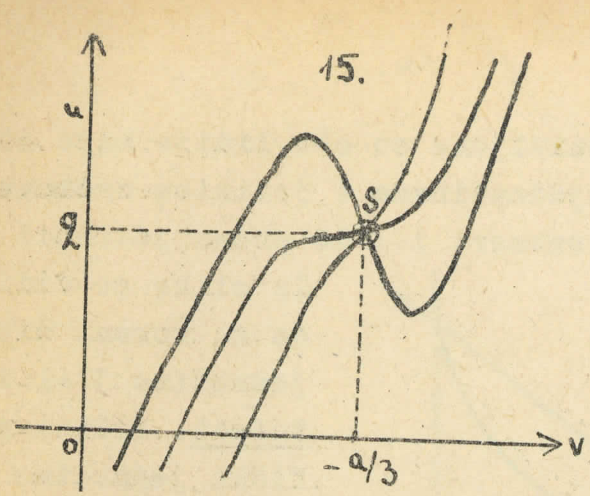
$y'(o) = 0$



Sl. 3

$y'(o) = p > 0$

Kako veze (4) pretstavljaju u stvari translaciju koordinatnog početka u središte simetrije S kubne parabole, to će dakle opšti oblik kubne parabole (1) biti jedna od tri krive sl. 4, a koji zavisi samo od znaka od p .



Sl.4.

2.2 Razlaganja jednačine trećeg stepena.

Neka je data jednačina trećeg stepena u redukovanom obliku

$$x^3 + px + q = o, \qquad (1)$$

$$\therefore \quad x^3 = - px - q , \qquad (1')$$

Stavljajući da je leva i desna strana jednaka y, dobijamo sistem

$$\left.\begin{aligned} y &= x^3 , \\ y &= - px - q \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Prva jednačina sistema (2) grafički pretstavlja kubnu parabolu, a druga pravu liniju. Te dve linije imaju jednake ordinate, samo u presečnim tačkama. Apscise tih tačaka su dakle koreni date jednačine.

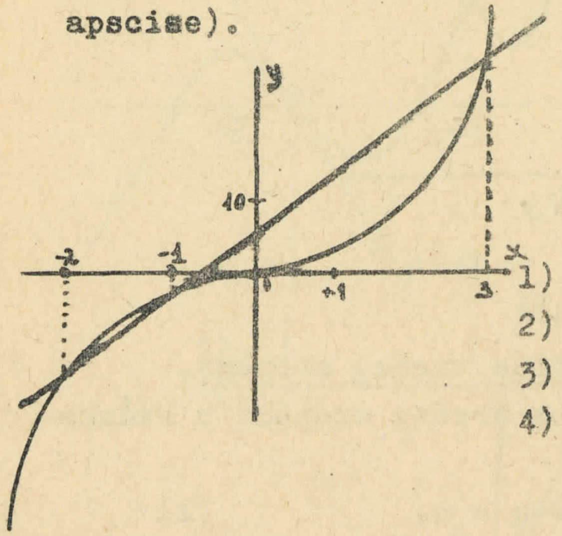
Primer. Rešiti grafički jednačinu

$$x^3 - 7x - 6 = o.$$

Stavimo $\quad x^3 = 7x + 6 .$

i $\quad y = x^3 , \quad y = 7x + 6 .$

Na sl. 6 pretstavljene su obe linije koje odgovaraju ovim jednačinama (jedinica ordinate umanjena je u razmeri 1 : 10 prema jedinici apscise).



Iz slike se vidi da su koreni date jednačine 3, -1 i -2.

Zadaci. Rešiti grafički jednačine

1) $x^3 - 19x + 30 = 0$;
2) $x^3 - 3x - 2 = 0$;
3) $x^3 - 2x + 4 = 0$;
4) $x^3 - 12x + 16 = 0$.

Sl. 6

2.3 Razlaganja jednačine trećeg stepena na sistem kvadratnih jednačina.

Neka je data jednačina

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 , \qquad (1)$$

$$x \left(\frac{x^2}{c} + \frac{ax}{c} + \frac{b}{c} \right) = -1,$$

prema tome je možemo razložiti u sistem jednačina

$$xy = -1 , \qquad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{c} + \frac{ax}{c} + \frac{b}{c} . \qquad (3)$$

Apscise presečnih tačaka ravnostrane hiperbole (2) i parabole (3) su koreni jednačine (1).

Primer. Rešiti grafički presekom ravnostrane hiperbole i parabole, jednačinu

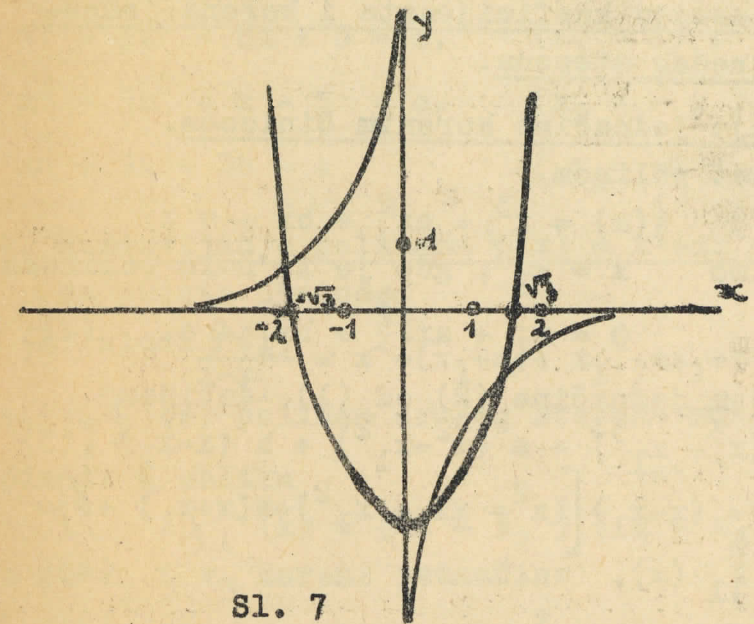
$$x^3 - 3x + 1 = 0 \qquad (1)$$

Datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$x (x^2 - 3) = -1 ;$$

stavljajući $y = x^2 - 3 \qquad (2)$

$$\therefore xy = -1 \qquad (3)$$



Sl. 7

Iz sl. 7 vidimo da data jednačina ima 3 realna korena od kojih je jedan negativan i nalazi se izmedju -2 i $-\sqrt{3}$, i dva pozitivna koji se nalaze u razmacima (0,1/2) i (1, $\sqrt{3}$). Preciznijim crtanjem dobijamo šta više $x_1 \approx -1,9$, $x_2 \approx 0,3$, $x_3 \approx 1,5$. Korist ove metode je u tome što upotrebljavamo jednu istu hiperbolu pri rešavanju ma kojeg primera.

Zadaci. Rešiti grafički po prethodnoj metodi jednačine:

1) $x^3 - 27x - 54 = o$;
2) $x^3 + 9x - 26 = o$;
3) $x^3 - x - 1 = o$.

3. Veze izmedju koeficijenata i korena jednačine trećeg stepena.

3.1 Delenje jednačine korenim činiocem.

Neka je dat polinom

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \, ;$$

Ako stavimo $x = x_1$, gde je x_1 nula polinoma (1) biće

$$0 = x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c. \qquad (2)$$

Oduzimanjem jednačine (2) od (1), dobijamo

$$f(x) = (x^3 - x_1^3) + a\,(x^2 - x_1^2) + b\,(x - x_1)\,, (3)$$

$$\therefore\ f(x) = (x - x_1)\left[(x^2 + xx_1 + x_1^2) + a(x + x_1) + b\right] =$$

$$= (x - x_1)\, f_1(x), \qquad (4)$$

gde je $f_1(x)$ polinom drugog stepena. Odatle sledi:

Ako je x_1 nula polinoma trećeg stepena on je deljiv linearnim činiocem $x - x_1$.

Primer. Jednačina $x^3 - 6x^2 - x + 30 = o$ ima koren $x_1 = 5$. Odrediti ostale korene. Kako je $x_1 = 5$ koren date jednačine, to je njena leva strana deljiva sa $x - 5$, pri čemu dobijamo $x^3 - 6x^2 - x + 30 : x - 5 = x^2 - x - 6$.

Rešenjem jednačine $x^2 - x - 6 = o$ dobijamo ostala dva korena date jednačine:

$$x_2 = 3\,, \quad x_3 = -2\,.$$

Zadaci za vežbu.

Naći ostale korene jednačine, ako im je poznat po jedan koren:

1) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = o$, $\quad (x_1 = 1)$;
2) $x^3 - 5x^2 + x - 5 = o$, $\quad (x_2 = -i)$
3) $x^3 + 9x - 26 = o$ $\quad (x_1 = -1 + 2i\sqrt{3})$

3.2. Rastavljanje polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ na proste činioce.

Iz (4) sledi

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = x^2 + (x_1 + a) + x_1^2 + ax_1 + b = f_1(x) \qquad (5)$$

Kako je $f_1(x)$ polinom drugog stepena možemo ga napisati u obliku

$$f_1(x) = (x - x_2)\cdot(x - x_3)$$

gde su x_2 i x_3 koreni jednačine

$$f_1(x) = x^2 + (x_1 + a)\,x + (x_1^2 + ax_1 + b) = o$$

Zamenjujući ovaj izraz y (4) dobijamo

$$f(x) = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)\,.$$

Ako su x_1, x_2, i x_3 nule polinoma trećeg stepena možemo ga prestavit kao proizvod činilaca $(x - x_1)$, $(x - x_2)$ i $(x - x_3)$.

Primer. Sastaviti jednačinu čiji su koreni

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2\,, \quad x_3 = 3.$$

Pošto se tražena jednačina može napisati u obliku proizvoda $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, to se, množenjem sva tri linearna činioca, dobija

$$(x - 1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Zadaci za vežbu.

1) Sastaviti jednačine čiji su koreni:

a) $(1, i, -i)$; b) $(3, 4, 5)$;

c) $(2, 2, 3)$

3.3. Vietova pravila za jednačinu trećeg stepena.

Ako su x_1, x_2 i x_3 nule polinoma 3-ćeg stepena $f(x)$.

Iz $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x-x_1)(x-x_2)\cdot(x-x_3)$, množenjem ova tri linearna činioca,

$$\therefore x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3.$$

Otuda dobijamo da je $x_1 + x_2 + x_3 = -a$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \quad x_1x_2x_3 = -c$$

Ovo su veze izmedju koeficijenata i korena jednačine trećeg stepena koje se po imenu François Viète-a, koji ih je otkrio često pozivaju Vietova pravila.

Primer. Sastaviti jednačinu ako ona ima korene

1, i n - i.

Napišimo jednačinu u obliku

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Po Vietovim pravilima je

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3) = -(1+i-i) = -1$$

$$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = i - i - i^2 = 1$$

$$c = -x_1x_2x_3 = +i^2 = -1$$

Stoga, tražena jednačina glasi

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$$

Zadaci za vežbu.

1) Napisati jednačine čiji su koreni:

a) $(1, 1 \pm i)$, b) $(5, 5, -1)$

c) $(3, -3, -1)$

II. Jednačine četvrtog stepena

1. Algebarsko rešavanje.

1.1. Različiti oblici jednačine četvrtog stepena.

Jednačina četvrtog stepena ima opšti oblik

$$A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0, \qquad (1)$$

gde su A,B,C,D,E realni ili kompleksni brojevi. Ako ovu jednačinu podelimo sa A, ona prelazi u jednačinu

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (2)$$

gde je $a = \frac{B}{A}$, $b = \frac{C}{A}$, $c = \frac{D}{A}$, $d = \frac{E}{A}$.

Levu stranu jednačine (2) možemo svesti na polinom koji ne sadrži član sa trećim stepenom x_{-a}

Stavimo y (2) $\quad x = y + \lambda$

(gde je λ parametar) i zatim uzmimo $\lambda = -\frac{a}{4}$,

tj. $\quad x = y - \frac{a}{4} \qquad (3)$

tada dobijamo jednačinu

$$y^4 + px^2 + qy + r = o, \qquad (4)$$

u kojoj su p, q, r dati izrazima

$$p = b - \frac{3}{8}a^2$$

$$q = c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3$$

$$r = d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2 b - \frac{3}{256}a^4$$

Iz (3) sledi da se koreni jednačine (2) dobijaju oduzimanjem $\frac{a}{4}$ od korena jednačine (4)

Specijalni oblici jednačine četvrtog stepena mogu biti:

1° Binomna jednačina četvrtog stepena

$$x^4 + d = o,$$

čiji su koreni $x_j = \sqrt[4]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{K\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{K\pi}{2}\right)\right]$, $(j = 1,2,3,4 \; ; K = 0,1,2,3)$, a gde je $-d = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

2° Ako je u jednačini (3) $q = o$, imamo jednačinu $\quad y^4 + py^2 + r = o, \qquad (5)$

koja se smenom $y^2 = z$ svodi na kvadratnu jednačinu;

3° Ako je u jednačini (2) $b=o$ i $c=o$, dobijamo jednačinu

$$x^4 + ax^3 + d = o \,;$$

4° Ako je u jednačini (2) $a=o$ i $b=o$, imamo jednačinu $\quad x^4 + cx + d = o$.

Jednačina $x^4 + ax^3 + d = o$ se svodi na jednačinu prethodnog oblika, tj. na

$$dy^4 + ay + 1 = o, \text{ ili } \quad y^4 + \frac{a}{d}y + \frac{1}{d} = o$$

ako izvršimo smenu $x = \frac{1}{y}$.

1.2 Rešavanje jednačine 4-og stepena.

Jednačinu četvrtog stepena prvi je rešio Kardanov učenik Ferari (Ferrari) na sledeći način:

Neka je data jednačina u obliku

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = o, \qquad (2)$$

obrazujmo identičnu jednačinu

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + K\right)^2 - \frac{a^2x^2}{4} - 2kx^2 - akx - k^2 + bx^2 + cx + d = o,$$

gde je k jedan parametar. Odatle je

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + k\right)^2 - \left[x^2\left(\frac{a^2}{4} + 2k - b\right) + x(ak-c) + (k^2-d)\right] = o. \qquad (3)$$

Ako je diskriminanta drugog člana ove jednačine jednaka nuli, tj. ako je

$$(ak-c)^2 - 4(k^2-d)\left(\frac{a^2}{4} + 2k - b\right) = o, \text{ ili}$$

$$(ak-c)^2 = (k^2-d)(a^2 + 8k - 4b); \qquad (4)$$

on postaje potpun kvadrat. Jednačina (4) je kubna jednačina po k.

Ako jedan koren te jednačine zamenimo u jednačini (3), imamo

$$(x^2 - \frac{a}{2} x + k)^2 - (m x + n)^2 = o$$

tj. dobili smo razliku dvaju kvadrata, te jednačinu (2) možemo napisati kao proizvod dvaju činilaca.

Na taj se način rešavanje jednačine (2) svodi na rešavanje jedne jednačine 3-ćeg stepena i dveju kvadratnih jednačina.

__Primer.__ Rešiti jednačinu

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = o \qquad (A)$$

Obrazujmo odgovarajuću jednačinu oblika (3)

$$(x^2 - 2x + k)^2 - \left[x^2 (2k + 11) - 2x (2k + 17) + (k^2 + 24) \right] = o \; ; \qquad (B)$$

Da bi drugi član jednačine (B) bio potpun kvadrat, njegova diskriminanta treba da je jednaka nuli:

$$(- 4k - 34)^2 = (k + 24)\cdot(44 + 8k) \quad \text{ili}$$

$$(- 2k - 17)^2 = (k^2 + 24)\cdot(11 + 2k), \text{ odakle je}$$

$$2k^3 + 7k^2 - 20 k - 25 = o .$$

Jedan koren ove jednačine je $k_1 = - 1$, te jednačina (B) za $k_1 = - 1$ dobija oblik

$$(x^2 - 2x - 1)^2 - (3x - 5)^2 = o ,$$

$$\therefore \; (x^2 - 5x + 4)\cdot(x^2 + 4x - 6) = o ,$$

$$\therefore \; x^2 - 5x + 4 = o$$

$$\text{i} \quad x^2 + 4x - 6 = o ,$$

$$\therefore \; x_1 = 4 \; , \; x_2 = 1, \; x_{3,4} = - 2 \pm \sqrt{10} .$$

__Zadaci za vežbu.__

1) $x^4-10x^3+35x^2 - 50x+24=o$, R.: (1,4,2,3) ;
2) $x^4-18x^2+32x-15 = o$, R.: (1,1,3,5) ;
3) $x^4-8x^3+18x - 27 = o$, R.: (3,3, - 1,3).

2. Grafičko rešavanje jednačina četvrtog stepena.

2.1 Konstruisanjem diagrama funkcije

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

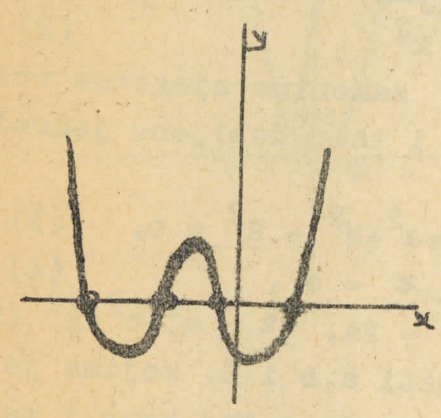
(gde su a,b,c,d realni brojevi), koreni jednačine $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = o$ neposredno se nalaze kao nule funkcije $f(x)$.

Jednačine četvrtog stepena mogu imati:

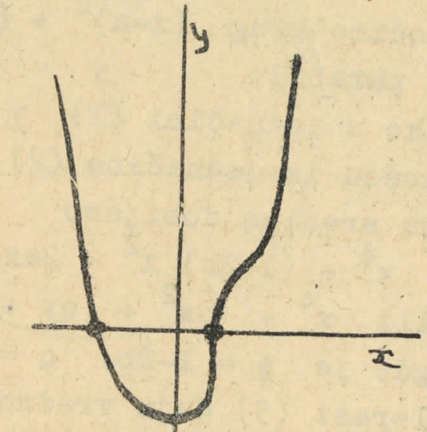
α) sva četiri korena realna (sl.10) ;

β) dva korena realna, a dva konj. kompleksna (sl.11)

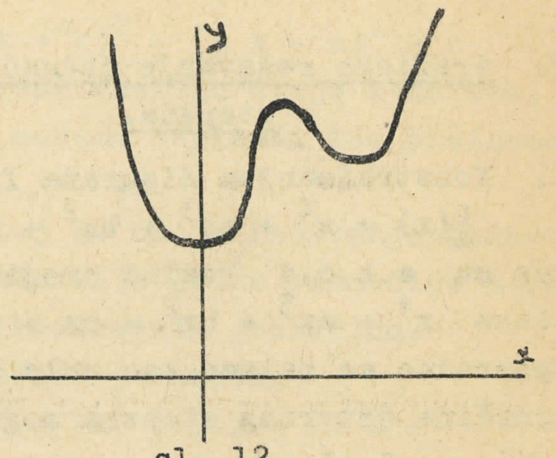
γ) sva četiri korena kompleksna.



sl. 10



sl. 11



sl. 12

2.2 Dekartova grafička metoda za rešavanje jednačina četvrtog stepena.

Uočimo krug $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (1)

i parabolu $y = x^2$ (2)

Ako u jednačini (1) y zamenimo njegovom vrednošću iz jednačine (2) i tako dobijenu jednačinu sredimo dobijamo

$$x^4 + (1-2b)\,x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - R^2 = 0, \quad (3)$$

ili $$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \quad (4)$$

gde je $p = 1-2b$, $q = -2a$, $r = a^2+b^2-R^2$ (5)

Izrazi (5) daju vrednosti a,b i R, kojima je dat krug (1). Ako konstruišemo taj krug i parabolu (2), apscise presečnih tačaka biće koreni jednačine (4).

Primer. Rešiti pomoću kruga i parabole jednačinu $x^4 - 8x^2 - 24x + 7 = 0$.

Za konstrukciju kruga potrebne su koordinate

središta a i b i poluprečnik R. Na osnovu izraza (5) imamo

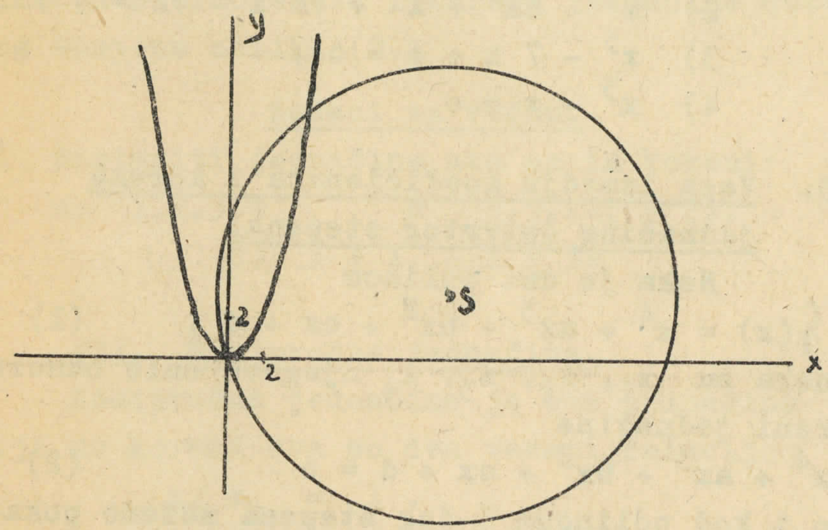
$$-8 = 1 - 2b, \quad -24 = -2a, \quad 7 = a^2+b^2-R^2,$$

odakle je

$$b = 4{,}5, \quad a = 12, \quad R \approx 12{,}53$$

Konstruišimo sada parabolu $y = x^2$. Apscise presečnih tačaka kruga i parabole su realni koreni jednačine: $x_1 \approx 0{,}27$, $x_2 \approx 3{,}73$.

Ostala dva korena su konjugovano kompleksni.



Primer. Rešiti grafički (pomoću kruga i parabole) jednačinu $x^3 - 19x - 30 = 0$.

Pomnožimo ovu jednačinu sa

$$x^4 - 19x^2 - 30x = 0.$$

Ovu jednačinu možemo grafički rešiti kao prethodni primer. Krug će seći parabolu u koordinantnom početku. Ovaj koren ne uzimamo u obzir, pošto on ne pripada datoj jednačini trećeg stepena. Ostale apscise presečnih tačaka su realni koreni date jednačine.

Zadaci za vežbu.

Naći grafički (pomoću kruga i parabole) realne korene jednačina:

1) $x^4 - 3x^2 - 2x - 4 = 0$;
2) $x^4 - 8x^3 + x^2 + 78x - 72 = 0$;
3) $x^3 - 7x + 6 = 0$;
4) $x^3 - x = 0$

3. Veza izmedju koeficienata i korena jednačine četvrtog stepena.

Neka je dat polinom

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \, , \qquad (1)$$

i neka su x_1, x_2, x_3, x_4 njegove nule odnosno koreni jednačine

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (2)$$

kao i kod polinoma 3-ćeg stepena možemo pokazati da je $f(x)$ deljivo sa $(x-x_1)$, tj. da je

$$f(x) = (x-x_1) \cdot f_1(x) \, , \qquad (3)$$

gde je $f_1(x)$ polinom 3-ćeg stepena. Kako su x_2, x_3 i x_4 nule tog polinoma to je,

$$f_1(x) = (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

stoga je, prema (3),

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \qquad (4)$$

Ako izmnožimo ove linearne činioce na desnoj strani identiteta (4) i dobijene koeficiente uporedimo sa koeficientima polinoma (1), imamo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a \, ,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b \, ,$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 = -c \, ,$$
$$x_1 x_2 x_3 x_4 = d \, .$$

Ove jednačine izražavaju Viëtov stav ili vezu izmedju koeficienata i korena jednačine četvrtog stepena oblika (2).

Zadaci za vežbu.

1) Sastaviti jednačine ako su im koreni:
a) 1,2,3,4 b) 3,5,2i, - 2i,
c) $3 \pm i$, $-1 \pm 3i$

III. Recipročne jednačine.

Recipročna jednačina je ona jednačina čiji su koreni dva po dva vezani relacijom

$$x_i \, x_k = 1 \, .$$

Dakle, svakom korenu x recipročne jednačine odgovara koren $\frac{1}{x}$ (zato se i zove "recipročna").

Ako je jednačina

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots +$$
$$+ a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

takva da ima gore pomenutu osobinu, to ako ona ima koren x mora i $\frac{1}{x}$ biti njen koren, tj.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = o$$

kako su ove dve jednačine identične, to mora biti $a_o = ka_n$, $a_1 = k\,a_{n-1}$, ..., $a_n = k.a_o$, odakle sledi da je $k^2 = 1$, tj. $k = \pm 1$

Prema tome je ili

$$a_o = a_n\,,\quad a_1 = a_{n-1},\quad a_2 = a_{n-2}\,,\ \ldots \quad \text{ili}$$

$$a_o = -a_n,\ a_1 = -a_{n-1},\ a_2 = -a_{n-2}\,,\ \ldots$$

Dakle, pomenuta opšta recipročna jednačina ima oblik $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o = o$ (1)

ili $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots - a_2 x^2 - a_1 x - a_o = o$ (2)

Očigledno je da jednačina (1) i (2) imaju sledeće osobine:

One mogu imati korene + 1 i -1, jer je $x_i\, x_k = 1$.

Ako je $\underline{n}$ neparno, jednačina (1) ima uvek koren -1, a jednačina (2) koren +1.

Ako u recipročnoj jednačini neparnog stepena uklonimo činilac koji sadrži jedinične korene dobivenu jednačinu možemo napisati u obliku

$$a_o x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + a_2 x^{2m-2} + \ldots + a_1 x + a_o = o \quad (3)$$

Deljenjem sa x^m dobijamo

$$a_o \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1 \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + a_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m = o\,.$$

Stavimo $z = x + \frac{1}{x}$; (5)

Svi binomi u jednačini (4) mogu se racionalno izraziti pomoću z i ona se može svesti na jednačinu m-tog stepena $\overline{\text{no}}$ z.

Imajući u vidu smenu (5), uvek možemo napisati

$$x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} = z\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right) - \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right), \quad (6)$$

gde je $\underline{p}$ ceo pozitivan broj. Pošto je $x^o + \frac{1}{x^o} = 2$, to imamo, prema (6), za $p = 3, 4$,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z\,,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 2\,,$$

pri čemu je

$$x + \frac{1}{x} = z\,,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2\,.$$

Iz prethodnog sledi da se jednačina (1), ako je devetog, osmog, sedmog, šestog ili petog stepena, može svesti na jednačinu četvrtog, trećeg ili drugog stepena.

<u>Zadaci za vežbu.</u>

1) $x^7 - 2x^6 - x^4 - x^3 - 2x + 1 = o$;

2) $x^8 + 5x^7 + 6x^6 + 7x^5 + 8x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = o$;

3) $3x^6 + 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0;$

4) $x^9 + x^8 - 9x^7 + 3x^6 - 8x^5 - 8x^4 + 3x^3 - 9x^2 + x + 1 = 0.$