РАДОЈЕ Д. ОБРАДОВИЋ
професор

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА II РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ДРУГО НЕПРОМЕЊЕНО ИЗДАЊЕ

Овај уџбеник препоручен је од Главног просветног Савета С.бр. 266/39, и одобрен од Господина Министра просвете IV-Бр. 3727 од 22-IV-1939 год. Овај уџбеник важи до краја 1942/43 год.

1940
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА
ТОМЕ ЈОВАНОВИЋА И ВУЈИЋА, БЕОГРАД
„ЗЕЛЕНИ ВЕНАЦ“

БЕОГРАД
За штампарију „ЗОРА“ Космајска 24. — Телефон бр. 29-9-20
Јосип Климпл, штампар, Боже Јанковића улица број 18.
1940.

САДРЖАЈ

I део: СИМЕТРИЈА

Страна

II део: УГЛОВИ

III део: ПИРАМИДА — ТРОУГАО

IV део: ПРИЗМА — ЧЕТВОРОУГАО

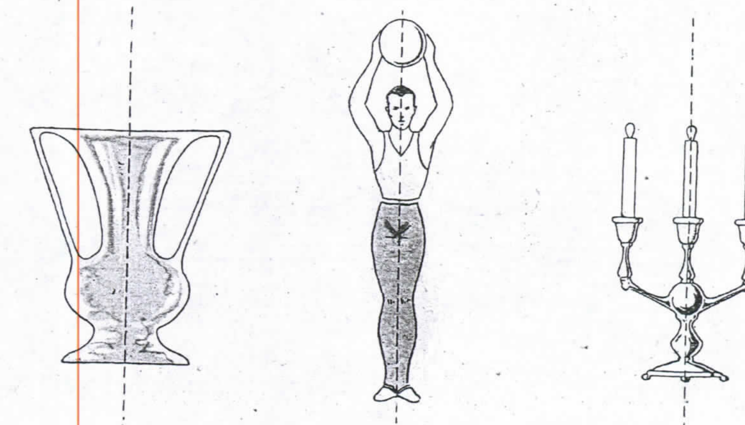
V део: МНОГОУГЛИ

I ДЕО

СИМЕТРИЈА

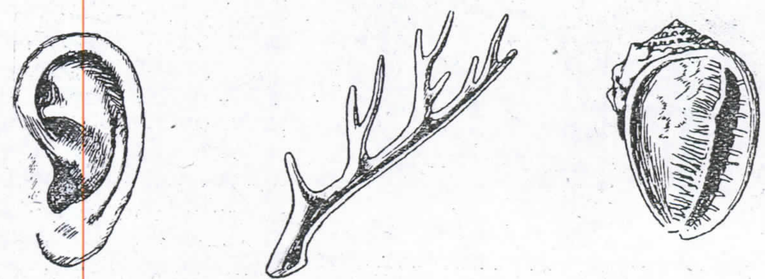
1. СИМЕТРИЈА ТЕЛА

Ако посматрамо тела на сл. 1, приметићемо да су она правилнија него тела на сл. 2.



Сл. 1. — Симетрична тела.

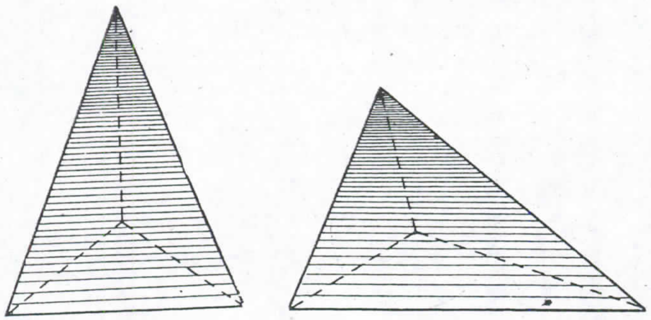
Свако од тела на сл. 1 можемо једном замишљеном равни пресећи преко средине, тако да су, са обе стране те равни, делови тела једнако распоређени (на слици је положај



Сл. 2. — Несиметрична тела.

равни означен цртицама). За таква тела кажемо да су **симетрична,** а замишљену раван којом се она могу симетрично поделити, називамо **симетриском равни.**

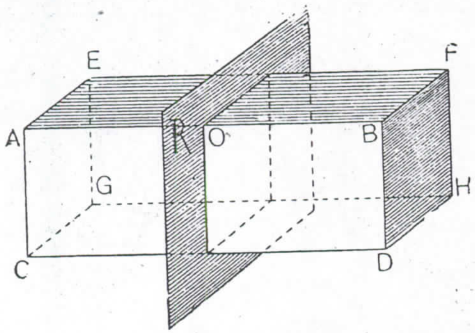
И међу геометриским телима има симетричних. У првом разреду упознали смо коцку, квадар и пирамиду од рогљастих, а ваљак и лопту од облих тела. Лако увиђамо да су коцка, квадар, ваљак и лопта симетрична тела, јер се могу једном равни поделити на два симетрична дела. Пирамида има симетричних, као што је на пример тетраедар, и несиметричних, као што је на пример тространа пирамида, чије су основине ивице неједнаке (сл. 3).



Сл. 3. — Симетрична и несиметрична пирамида.

Пошто у геометрији симетрија игра важну улогу, ми ћемо геометриским језиком изразити правилност коју има симетрично тело.

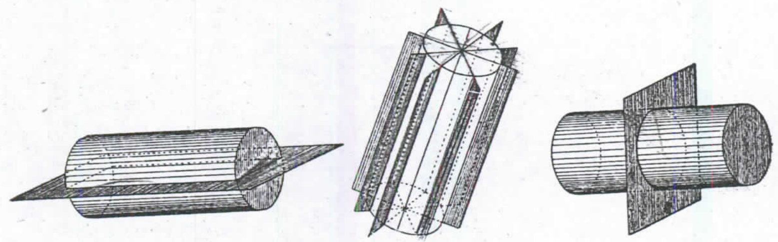
Зато посматрајмо квадар на сл. 4. Раван означена словом R пролази кроз средину ивице AB* квадра, тј. кроз тачку O, и стоји на тој ивици нормално. Та раван онда пролази и кроз средине осталих ивица паралелних са ивицом AB и стоји на њима нормално. На тај начин квадар је симетрично подељен том равни.



Сл. 4. — Квадар симетрично подељен једном равни.

Тачке A и B једнако су удаљене од те равни и леже на правој која је нормална на њој (део те праве је ивица AB). Исти је случај и са тачкама C и D, E и F, G и H. Ако две тачке леже на једнаким отстојањима од једне равни, али обе на правој која је на тој равни нормална, кажемо да су **симетричне према тој равни.** На горњем квадру, дакле, два и два темена (поменута горе) симетрична су. Но не треба разумети да само темена могу бити симетричне тачке тела: ма које две тачке на површини или у унутрашњости тела симетричне су у односу на неку раван, само ако су задовољени горе поменути услови.

Сада можемо симетрију тела овако описати: **Тело је симетрично према једној равни, ако се може том равни поделити на два дела, тако да свакој тачки једног дела одговара симетрична тачка другог дела.**



Сл. 5. — Симетричност ваљка.

Једно тело може имати и више од једне симетриске равни. На пример лопту можемо пресецати колико хоћемо пута равнима које пролазе кроз њено средиште: увек ће она бити њима симетрично подељена. Зато кажемо да лопта има безброј симетриских равни.

Ваљак се може симетрично поделити једном равни која је паралелна са његовим основама а полови га. Поред тога, ваљак се може са безброј много равни симетрично делити, ако те равни пролазе кроз средишта његових основа (сл. 5).

Квадар има три симетриске равни. Свака од њих полови паралелне ивице квадра и стоји на њима нормално. Колико симетриских равни има коцка? Које су?

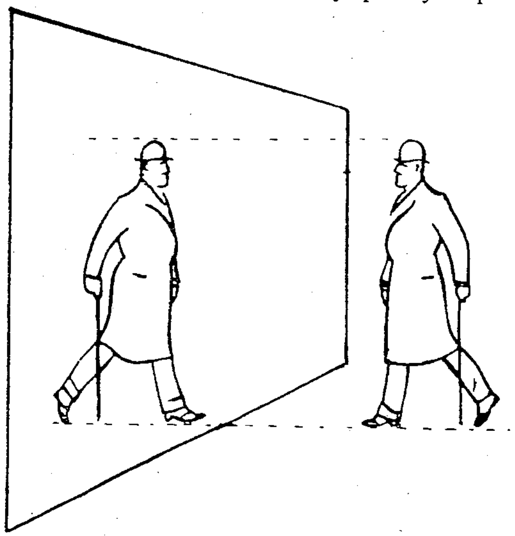
*

* *

Досад смо проучавали симетричност **једног** тела према равни. Могу, међутим, и два тела бити симетрична у односу на једну раван. Да бисмо то боље разумели, посматрајмо једно лице које се огледа у огледалу (сл. 6). Ако се оно креће ка огледалу, и његов ће се лик кретати с друге стране ка огледалу, тако да ће се састати на самој површини огле-

* Убудуће ћемо над ознаком дужи изостављати цртицу ($\overline{AB}$) кад год на истој слици нема и лукова.

дала. Ако се пак удаљује од огледала, и његов ће се лик удаљавати од њега на супротну страну. Ово нам показује да су то лице и његов лик у огледалу увек на истом отстојању од површине огледала, другим речима да је свака тачка лица симетрично положена према тачкама његовог лика у огледалу. Зато кажемо: **два су тела симетрична према једној равни, ако свакој тачки једног тела одговара симетрична тачка другог, у односу на исту раван.**



Сл. 6. — Лик у огледалу симетричан је лицу испред њега у односу на површину огледала.

Човек је такође симетрично тело. Он јасније види симетрију других тела ако се постави тако да се симетриска раван посматраних тела поклопи са његовом симетриском равни. Отуд оно наше нагињање и нарочито постављање кад хоћемо да утврдимо симетрију тела.

Вежбања

1) Кад кажемо да су две тачке симетричне према једној равни?

2) Кад кажемо за једно тело да је симетрично према једној равни?

3) Кад кажемо за два тела да су симетрична према једној равни?

4) Шта је то симетриска раван?

5) Међу предметима које видиш у соби (учионици), који су симетрични?

6) За следећа тела кажи јесу ли симетрична: оловка, гума, мастионица, књига, табла, часовник, ципела, дрво, кућа?

7) Да ли човек у сваком положају претставља симетрично тело?

8) Која су геометриска тела симетрична?

9) Ако коцку пресечемо једном равни која пролази кроз дијагонале супротних квадрата, је ли онда она симетрично подељена? Пробај помоћу коцке од кита.

10) Колико симетриских равни има коцка, квадар, ваљак, лопта?

11) Да ли је симетрична четворострана равноивична пирамида? Ако јесте, колико симетриских равни има?

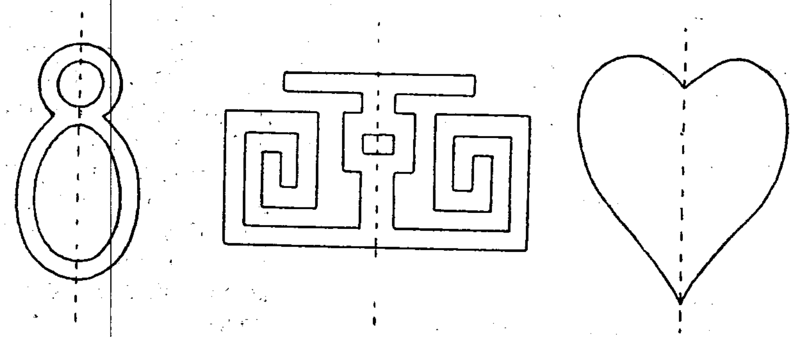
12) Како би најтачније показао симетрично тело према једном датом телу?

13) Међу разним чашама које си видео има ли несиметричних, симетричних са једном симетриском равни, са више симетриских равни?

14) Да ли је симетричан тетраедар? Ако јесте, колико симетриских равни има?

2. СИМЕТРИЈА СЛИКА

Равне слике могу такође бити симетричне и несиметричне, као што показују сл. 7 и 8. У чему је разлика? Разлика је и овде у распореду појединих делова слике према средини. Свака се симетрична слика може једном замишљеном правом (на сл. 7 означена цртицама) пресећи преко средине, тако да са обе њене стране видимо делове слике једнако поређане према тој правој. Ову праву онда називамо **осовином симетрије** или краће **симетралом.** Зато симетричне слике називамо још и **осовинско-симетричним.**



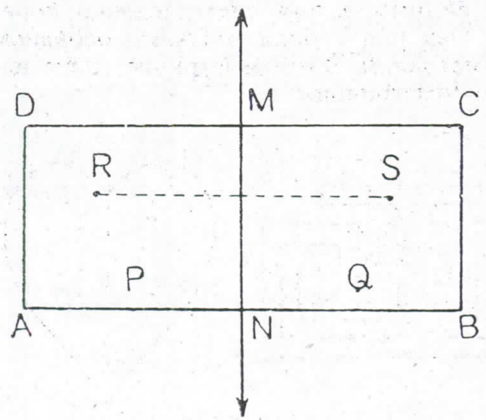
Сл. 7. — Симетричне слике.

И међу геометриским сликама има симетричних. У Геометрији за први разред упознали смо квадрат, правоугаоник и троугао од праволиниских слика, и круг као криволиниску. Лако је увидети да су квадрат, правоугаоник и круг симетричне слике, пошто се једном правом могу поделити на два симетрична дела. Међу троуглима, међутим, симетрични су само равнострани и равнокраки.

Слично као код тела, ми можемо и симетрију слике геометриски изразити. Зато посматрајмо правоугаоник на сл. 9.

Сл. 8. — Несиметричне слике.

Права MN дели симетрично правоугаоник ABCD. Тачке A и B (као и тачке C и D) једнако су удаљене од симетрале MN а леже на истој нормали те симетрале. За такве две тачке кажемо да су **симетричне према правој.** Нису само темена симетричне тачке овог правоугаоника. Ма којој тачки на његову обиму или у унутрашњости може се на другој страни наћи симетрична тачка (на пр. тачке P и Q, или R и S на сл. 9). Зато кажемо: **слика је симетрична према једној правој ако се том правом може поделити на два дела, тако да свакој тачки једног дела одговара симетрична тачка другог.**



Сл. 9. — Симетрала (MN) правоугаоника (ABCD).

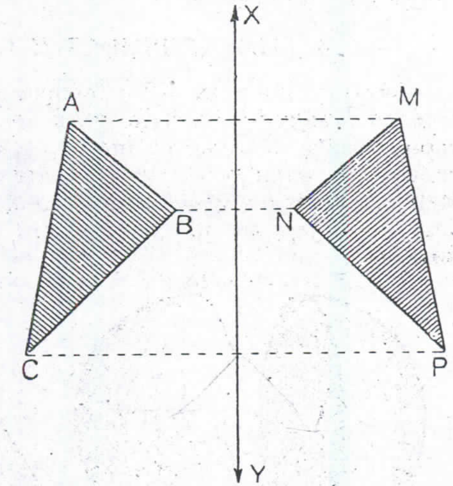
Има слика које могу имати и више од једне симетрале. Круг, на пример, можемо симетрично делити правама које пролазе кроз његов центар. Зато кажемо да круг има безбројно много симетрала. Правоугаоник има две симетрале: то су праве које полове његове паралелне стране и стоје на њима нормално. Равнострани троугао има три симетрале, равнокраки једну, а квадрат четири (које су то праве ?).

Симетрију равне слике можемо лако проверити овако. Исецимо по обиму једну симетричну слику коју смо претходно на хартији нацртали и означили јој симетралу. Ако тај модел слике пресавијемо по симетрали, симетрични делови ће се тачно поклопити.

*

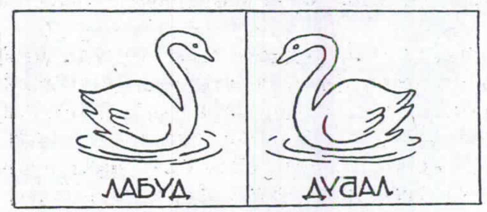
* *

Две слике могу такође бити симетричне према једној правој. То ће бити случај онда **кад свака тачка једне слике има, у односу на исту праву, симетричну тачку на другој слици.** На сл. 10 троугао ABC симетричан је троуглу MNP у односу на праву XY, зато што је свака тачка његова симетрична одговарајућој тачки троугла MNP у односу на исту праву.



Сл. 10. — Симетрични троугли према једној правој.

Две симетричне слике можемо лако и тачно нацртати на следећи начин. Ставимо на лист хартије индиго хартију, светлу страну окренуту листу, затим по једној правој пресавимо лист, тако да индиго хартија остане унутра. По хартији можемо сада цртати какве хоћемо фигуре, на пример лабуда као на слици 11. Кад расклопимо лист, добићемо две симетрично положене слике према правој, по којој је пресавијена хартија.



Сл. 11. — Две симетричне слике према правој.

Вежбања

1) Кад су две тачке симетричне према једној правој ?
2) За коју слику кажемо да је осовинско симетрична ?
3) Како називамо праву којом се једна слика може симетрично поделити ?

4) Како се може проверити симетрија једне слике ?

5) Које су геометриске слике осовинско-симетричне ?

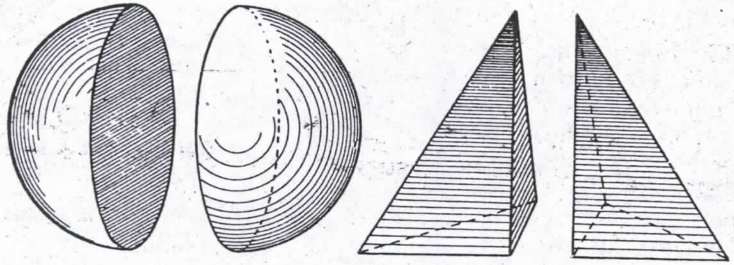
6) Колико симетрала има квадрат, правоугаоник, круг, равнострани и равнокраки троугао ? Нацртај сваку од ових слика на хартији и пресавијањем око симетрала провери симетричност. (Да би добио модел равностраног троугла, нацртај на једној дужи два угла по 60^0).

7) Кад су две слике симетричне према једној правој?

8) Како би брзо и тачно нацртао две симетричне слике према једној правој ?

3. СИМЕТРИЧНОСТ И ПОДУДАРНОСТ

Ако су два тела истог облика и једнаке величине, тј. ако се могу ставити у потпуно исти простор, кажемо да су **подударна.** Таква су тела, на пример, сва која се праве по истом калупу: метални новац, гуме за брисање, тањири, оловке итд. Међу геометриским телима подударне су све лопте једнаке величине (јер им је облик исти), све коцке једнаке величине итд.



Сл. 12. — Симетрични делови лопте су међу собом подударни, док симетрични делови тетраедра нису подударни.

Да ли су симетрични делови једног тела подударни? Да бисмо добили одговор, пресецимо лопту једном равни кроз њен центар: добијамо две полу-лопте истог облика и величине, дакле два подударна тела. Ове две полу-лопте могу једна другу потпуно заменити. Ако, међутим, пресечемо тетраедар једном равни на два симетрична дела, уверићемо се лако да једна од његових половина не може да замени другу. Симетрични делови тетраедра, дакле, нису подударна тела. Сл. 12 то боље показује, али ће бити јасније ако то пробамо помоћу модела од кита или какве материје коју можемо сећи.

Вршећи овакве огледе и са осталим симетричним телима доћи ћемо до закључка да **симетрични делови једног тела могу али не морају бити подударни.**

Слично посматрање важи и за два симетрична тела. Ако лопту ставимо пред огледало (симетриску раван), видећемо у огледалу лопту њој потпуно подударну. Али ако пред огледало ставимо своју леву шаку, у огледалу ћемо видети десну — а оне нису подударне. Вршећи овакав или сличан оглед и са другим симетричним телима, доћи ћемо и овде до закључка да **симетрична тела могу али не морају бити подударна.**

Ако две слике имају исти облик и једнаке величине, тј. ако једном можемо тачно поклопити другу, називамо их **подударним сликама.** Тако, сви једнаки кругови подударни су, исто тако квадрати једнаких страна, итд.

При проверавању симетричности једне слике ми смо већ видели да се симетрични делови, обртањем (ротацијом) око симетрале, морају тачно поклопити. А из самог начина цртања двеју симетричних слика излази да се и оне, ротацијом око симетрале, морају такође тачно поклопити. Из овога закључујемо :

Две слике симетричне према једној правој морају бити подударне. Исто тако морају бити подударни и симетрични делови једне слике.

Вежбања

1) Кад кажемо за два тела да су подударна ?

2) Наброј неколико примера подударних тела ?

3) Морају ли бити подударни симетрични делови једног тела ? А два симетрична тела према равни ?

4) Јесу ли подударна тела а) две једнаке леве ципеле, б) лева и десна ципела једнаке величине ?

5) Могу ли бити симетрична тела према једној равни примери из задатка 4 под а) и б) ?

6) Наћи примере за два симетрична тела а) да нису подударна, б) да су истовремено и подударна.

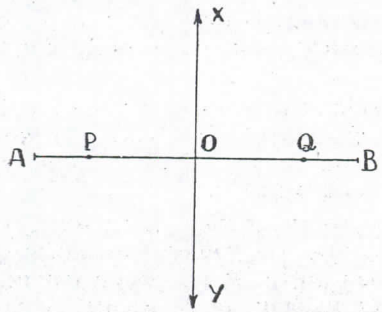
7) Кад кажемо за две слике да су подударне ?

8) Ако су две слике симетричне према правој, морају ли истовремено бити и подударне ? А симетрични делови једне слике ?

4. СИМЕТРИЈА ДУЖИ

Свакој датој дужи можемо нацртати праву која је полови и стоји на њој нормално. Таква је права XY за дуж AB на сл. 13, јер је AO = BO и XY $\perp$ AB. Према ономе што смо научили о симетричним тачкама, A и B су симетричне тачке према правој XY. Но нису само оне симетричне: свака тачка на једној половини има своју симетричну тачку на другој половини дужи, у односу на исту праву (такве су, на пр., тачке P и Q на сл. 13).

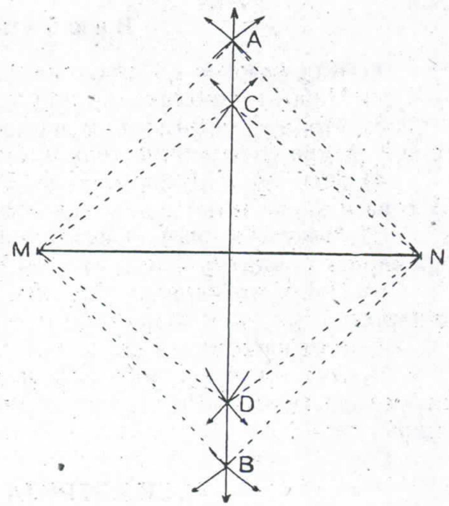
Дата дуж је, према томе, симетрично подељена том правом, коју називамо **симетралом дате дужи. Симетрала дужи је права која ту дуж полови и стоји на њој нормално.**



Сл. 13. — Симетрала (XY) дужи (AB).

Да бисмо нацртали симетралу једне дужи, треба наћи тачку на средини те дужи и кроз ту тачку повући нормалу на дуж. У првом разреду учили смо да средину дужи налазимо мерењем, а нормале смо цртали помоћу троугаоника (правоуглог лењира). Видећемо сада да се одређивање средине дужи и повлачење нормала може извести употребом шестара и лењира (лењиром само повлачимо праве линије).

Геометриско цртање, при коме се држимо геометриских правила, а од справа употребљавамо само шестар и лењир, назваћемо **геометриском конструкцијом.** Геометриском конструкцијом добијамо већу тачност него цртањем помоћу троугаоника, угломера итд., јер ове справе често нису прецизно израђене, а и кваре се дугом употребом. Али то не значи да од сада нећемо употребљавати троугаоник и угломер: напротив, кад год нам није потребна велика тачност, већ нам треба груба и брзо нацртана слика да бисмо схватили задатак, ове ће нам справе добро доћи.



Сл. 14. — Свака тачка на симетрали једне дужи једнако је удаљена од њених крајњих тачака.

Конструишимо сада симетралу дате дужи MN (сл. 14). Треба узети отвор шестара већи од половине дужи, па из тачке M описати с једне и друге стране лукове. Затим из тач-

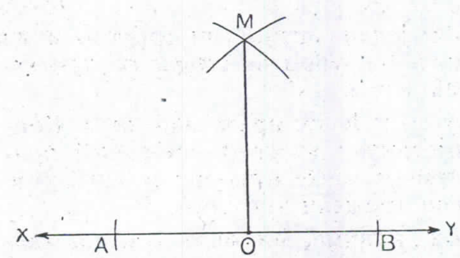
ке N треба те лукове пресећи истим отвором шестара. На тај начин добијамо тачке A и B. Права повучена кроз ове две тачке биће симетрала дужи MN (о чему се лако уверавамо поклапањем леве и десне стране дужи а после обртања око те праве).

Тачка A једнако је удаљена од крајњих тачака M и N дате дужи, јер смо је добили истим отвором шестара. Исто важи и за тачку B. Да смо, међутим, отвор шестара узели нешто мањи, добили бисмо тачке C и D, које су опет једнако удаљене од M и N. Узимајући различите отворе шестара увиђамо да ово важи за све тачке на симетрали дужи. Зато кажемо: **свака тачка на симетрали дужи једнако је удаљена од крајњих тачака те дужи.**

Помоћу конструкције симетрале решићемо сада неколико основних конструктивних геометриских задатака.

1) **Поделити дату дуж на 2, 4, 8, 16 итд. једнаких делова.** На два једнака дела ми смо већ поделили једну дуж конструкцијом њене симетрале. Ако свакој половини конструишемо опет симетралу, добијамо четвртине те дужи итд.

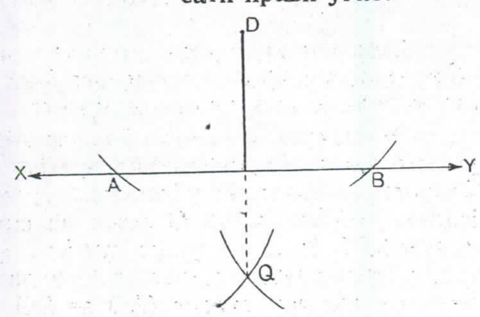
2) **У датој тачки на датој правој повући нормалу на ту праву.** Треба на датој правој XY (сл. 15), а од дате тачке 0, обележити шестаром на једној и другој страни једнаке дужи, OA и OB. Сада за дуж AB треба конструисати симетралу, али тражећи само једну тачку M, јер другу O већ имамо. Права MO је тражена нормала. Овим смо у исто време решили и задатак: **у датој тачки једне праве конструисати прави угао.**



Сл. 15. — Конструкција нормале у датој тачки (O) дате праве (XY).

3) **Из дате тачке ван једне праве повући нормалу на ту праву.**

Треба забости шестар у дату тачку P (сл. 16), затим довољним отвором шестара пресећи праву (XY) у двема тачкама, A и B. Затим за дуж AB треба конструисати симетралу, али тражећи само једну тачку Q, пошто другу (P) већ имамо. Права PQ је тражена нормала.



Сл. 16. — Конструкција нормале из тачке P ван праве на дату праву (XY).

4) **Датој тачки конструисати симетричну тачку према датој правој.**

Овај задатак решава се као и задатак 3, само треба пазити да отвор шестара којим из тачака A и B налазимо тачку Q буде исти онај којим смо из тачке P нашли тачке A и B. На тај начин добијамо тачку Q симетричну тачки P у односу на дату праву XУ. (Зашто су тачке P и Q симетричне ?)

Ове конструкције треба добро знати, јер се сложенији конструктивни задаци не могу решити без сигурног знања ових.

Вежбања

1) Коју праву називамо симетралом једне дужи ?

2) Шта знаш да кажеш за сваку тачку на симетрали дужи ?

3) Које геометриско цртање називамо конструкцијом ?

4) Које основне конструкције знаш ?

5) Нацртај неколико дужи и за сваку конструиши симетралу.

6) Нацртај произвољно један оштроугли троугао и из сваког темена повуци нормале на супротне стране (конструктивним путем). Шта примећујеш ?

7) Нацртај један троугао и једну праву ван њега. Конструкцијом нађи њему симетричан троугао према тој правој. (Треба да нађеш симетричне тачке његових темена, које кад спојиш дужима добијаш тражени троугао).

8) Изврши задатак под 7) узимајући место троугла квадрат.

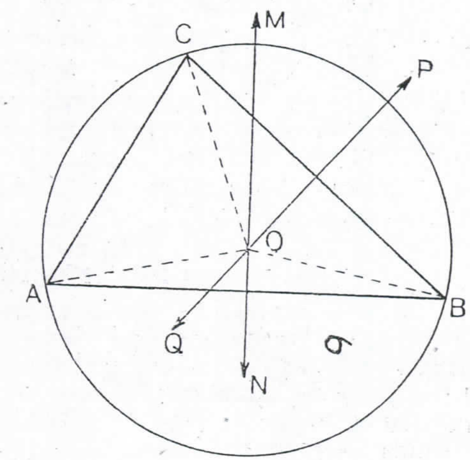
5. КРУГ ОПИСАН ОКО ТРОУГЛА

Описати круг око троугла значи нацртати круг чији обим пролази кроз сва три његова темена. Око сваког троугла могуће је конструктивним путем описати круг.

Посматрајмо сл. 17. Страни AB троугла ABC повучена је симетрала MN, исто тако и страни BC, а то је права PQ. Те симетрале секу се у тачки O. Дужи OA и OB морају бити једнаке, пошто тачка O лежи на симетрали стране AB. Али и дужи BO и CO једнаке су, јер тачка O лежи и на симетрали стране BC. Из тога излази да је тачка O једнако удаљена од сва три темена (AO = BO = CO), и она је центар круга описаног око троугла.

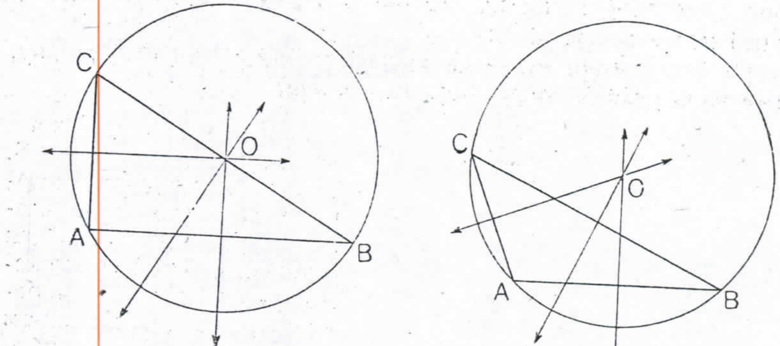
Из горњег излагања закључујемо и то да и симетрала треће стране троуглове (AC) мора пролазити кроз тачку O, јер су само тачке на симетрали једнако удаљене од крајњих тачака дужи (AO = CO).

Све три симетрале страна троугла секу се у једној тачки. Та тачка је центар описаног круга око троугла.



Сл. 17. — Круг описан око троугла.

Троугао на сл. 17 је оштроугли. Ако код тупоуглог троугла конструишемо симетрале страна, ове се неће сећи у унутрашњости троугла, већ **ван њега.** Ако то исто учинимо код правоуглог троугла, видећемо да ће центар описаног круга лежати тачно **на средини хипотенузе.** Слика 18 показује кругове описане око правоуглог и тупоуглог троугла.



Сл. 18. — Кругови описани око правоуглог и тупоуглог троугла.

Да бисмо нашли центар описаног круга, није потребно повлачити све три симетрале страна. За оштроугли и тупоугли троугао довољно је повући две, а за правоугли само једну симетралу. (Зашто ?)

Вежбања

1) Коју тачку називамо центром описаног круга око троугла ?

2) Где се налази центар описаног круга око оштроуглог, тупоуглог, правоуглог троугла ?

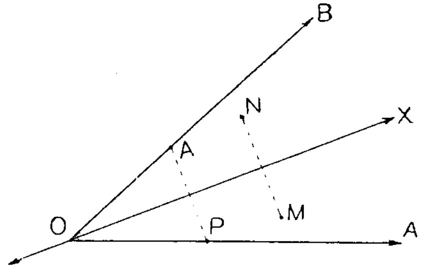
3) Код кога равнокраког троугла добијамо центар описаног круга ако повучемо симетралу само једне стране ?

4) Нацртај по један оштроугли, правоугли и тупоугли троугао и око њих опиши кругове.

5) Нацртај један квадрат и повуци једну дијагоналу. Око сваког од два добијена троугла опиши круг. Шта видиш?

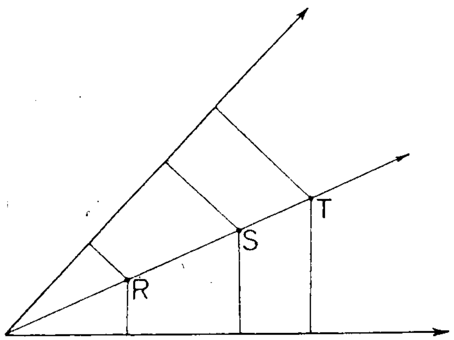
6. СИМЕТРИЈА УГЛА

Сваки се угао може једном правом поделити на два једнака дела. Та права пролази кроз теме угла. За угао на сл. 19 та је права OX. Да она полови угао, можемо се уверити обртањем једног дела угла око те праве: после обрта од 180° тај ће део тачно поклопити други. Према оном што смо рекли о проверавању симетрије, излази да је ова права **симетрала угла.** Доиста, свакој тачки на једној половини угла одговара симетрична тачка на другој, у односу на исту праву. **Симетрала угла је права која га полови.**



Сл. 19. — Симетрала (OX) угла (AOB).

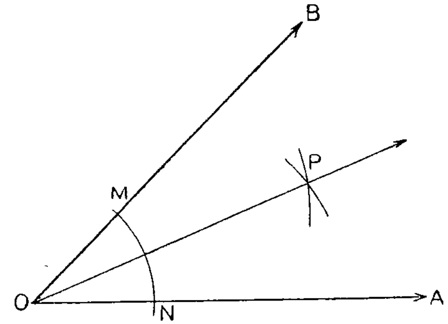
Ако из ма које тачке на симетрали угла (R, S, T, сл. 20) повучемо нормале до његових кракова, те ће нормале бити једнаке. О томе се можемо уверити било мерењем, било преклапањем половине угла око симетрале. Пошто те нормале претстављају удаљења тачака од кракова, кажемо: **свака тачка на симетрали угла једнако је удаљена од његових кракова.**



Сл. 20. — Свака тачка на симетрали угла једнако је удаљена од његових кракова.

При конструкцији симетрале угла треба да узмемо у обзир да једну њену тачку већ имамо у темену самог угла. Довољно је онда наћи још

само једну тачку, пошто је права одређена са две тачке. Ову другу тачку наћи ћемо овако. Из темена угла (тачка O, сл. 21) треба произвољним отвором шестара описати лук до пресека са крацима (MN). Затим из пресечних тачака M и N, отвором шестара истим или којим другим (али свакако већим од половине дужине MN) описати лукове који се секу у тачки P. То је друга тачка симетрале, коју сада кроз O и P лако повлачимо.



Сл. 21. — Конструкција симетрале угла.

Помоћу симетрале угла решавамо задатак: **поделити дати угао на 2, 4, 8, 16 . . . једнаких делова.** (Како?)

Вежбања

1) Коју праву називамо симетралом угла ?

2) Шта знаш да кажеш за сваку тачку на симетрали угла ?

3) Нацртај оштри, прави, тупи и испупчени угао и сваком конструиши симетралу.

4) Нацртај један троугао и сваком углу конструиши симетралу. Шта примећујеш ?

5) Конструиши угао од 45°.

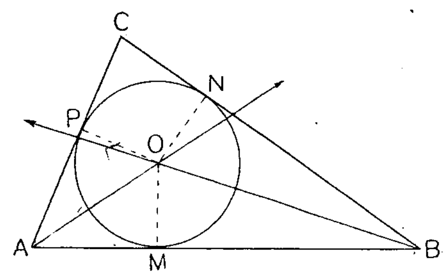
6) Конструиши угао од 22°30′.

7) Нацртај један тупи угао и подели га на осам једнаких делова. Да ли то можеш за сваки угао учинити и угломером ?

7. КРУГ УПИСАН У ТРОУГЛУ

Уписати круг у троугао значи нацртати круг тако да он додирује сваку страну троугла. У сваки троугао може да се упише круг конструктивним путем.

На сл. 22 код троугла ABC повучене су симетрале углова A и B Ове симетрале секу се у тачки O. Удаљења



Сл. 22. — Круг уписан у троуглу.

тачке О од кракова угла А једнака су, пошто је тачка О на симетрали тога угла. Дакле ОМ = ОР. Исто тако је и ОМ = ON, јер је тачка О и на симетрали угла В. Значи да су удаљења од страна, тј. нормале спуштене из тачке О на стране троугла, једнаке међу собом: ОМ = ON = ОР. Према томе тачка О је центар круга чији су полупречници ова удаљења, а тај круг додирује стране троугла у тачкама М, N, Р. То је тражени уписани круг.

Из горњег излагања изводимо и то да ће и симетрала трећег угла (угла С) морати да пролази кроз исту тачку О, пошто су само тачке на симетрали угла једнако удаљене од кракова угла (ОР = ON).

Све три симетрале угла у троуглу секу се у једној тачки. Та тачка је центар уписаног круга.

Да бисмо нашли центар уписаног круга у троуглу, није потребно повлачити све три симетрале угла, јер кроз пресек двеју мора пролазити и трећа. Кад је центар нађен у пресеку двеју симетрала, није добро отвореним шестаром нагађати величину полупречника: треба спустити нормалу из центра до једне стране, и та нормала је полупречник.

Вежбања

1) Коју тачку називамо центром уписаног круга у троуглу?

2) Шта радимо да бисмо нашли центар уписаног круга у троуглу?

3) Колика дуж је полупречник уписаног круга у троуглу?

4) Нацртај неколико троуглова и упиши у њих кругове.

5) Нацртај један квадрат и повуци једну његову дијагоналу. У сваки од два тако добијена троугла упиши круг.

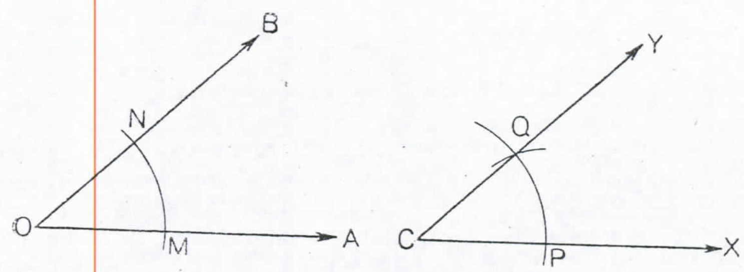
II ДЕО:

УГЛОВИ

1. ПРЕНОШЕЊЕ УГЛА

„Пренети" један угао значи нацртати на другом месту угао исте величине. То преношење можемо извршити простим копирањем датог угла, или помоћу угломера (мерењем и прецртавањем), или неким сличним начином. Но ниједан од ових начина не даје довољну тачност и није чисто геометриски. Ми ћемо преношење угла вршити помоћу шестара и лењира, дакле конструктивним путем.

Нека је задато да ∢ АОВ пренесемо на друго место (сл. 23.). Треба најпре на месту на које желимо да пренесемо дати угао, повући један зрак. Тај зрак биће један крак, а



Сл. 23. — Преношење угла.

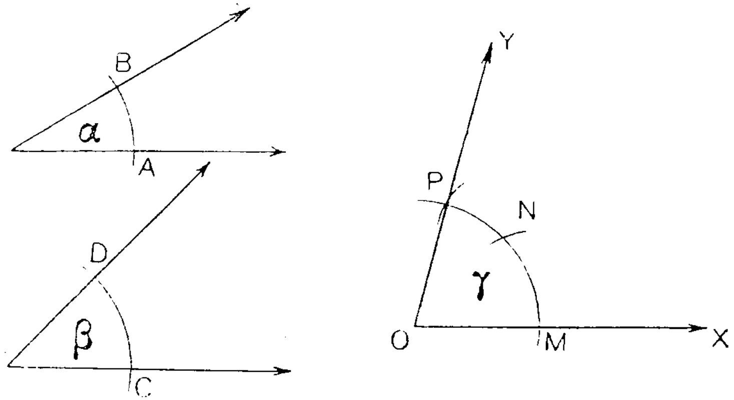
његова почетна тачка теме пренетог угла. На сл. 23 тај зрак је СХ. Опишимо сада произвољним отвором шестара око темена угла О лук да сече краке угла у тачкама М и N. Истим отвором шестара описаћемо лук и око крајње тачке С зрака СХ. Овај сече зрак у тачки Р. Сада треба шестар отворити од тачке М до тачке N (дужина тетиве), и тим отвором пресећи лук описан око тачке С, почевши од тачке Р. Тако добијамо пресек Q. Зрак који пролази из С кроз тачку Q (СУ) је други крак траженога угла. Ова два угла једнаке су величине (како се то може проверити?) и зато можемо написати: ∢ ХСУ = ∢ АОВ.

Лук око крајње тачке C зрака CX могли смо описати и с друге стране тог зрака, према томе и дати угао смо могли пренети на део равни с друге стране зрака.

2. КОНСТРУКТИВНЕ РАДЊЕ С УГЛОВИМА

Сабирање углова конструктивним путем (само шестаром и лењиром) вршићемо као на следећем примеру. На сл. 24 дати су углови α и β које треба сабрати.

Прво цртамо зрак OX. Сада једним произвољним отвором шестара треба око темена углова α и β описати лукове тако да секу краке у тачкама A и B и C и D. Истим отвором



Сл. 24. — Конструктивно сабирање углова.

шестара описаћемо повећи лук око тачке O, тако да сече зрак у тачки M. Затим треба шестаром отвореним за дужину тетиве CD, пресећи лук из тачке M. Тако добијамо тачку N. Из тачке N, идући истим кружним смером, сечемо даље исти лук отвором шестара AB, па добијамо тачку P. Зрак OY који пролази кроз тачку P, јесте други крак угла који је једнак збиру датих углова α и β.

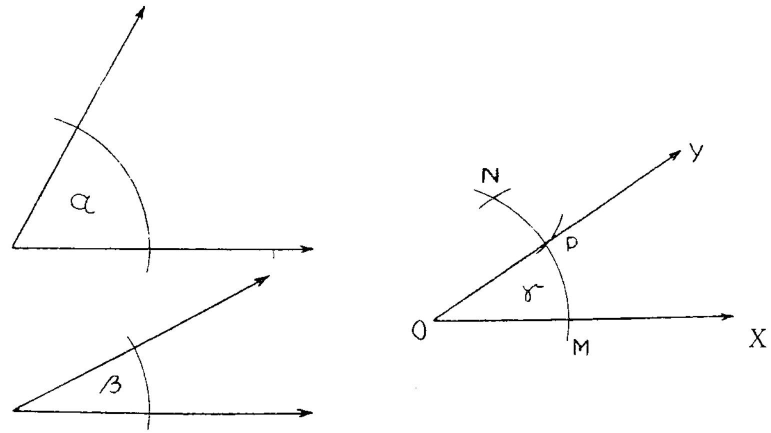
При цртању збира углова сасвим је свеједно који ћемо од датих углова прво пренети. Сетимо се само правила да збир не мења вредност ако сабирцима променимо места.

Ако добијени угао означимо углом γ, можемо написати: $\gamma = \alpha + \beta$.

Јасно је да и више од два угла сабирамо на исти начин. Трећи додајемо збиру прва два, четврти збиру прва три, итд.

Нека је сада задато да од већег угла α одузмемо мањи угао β (сл. 25).

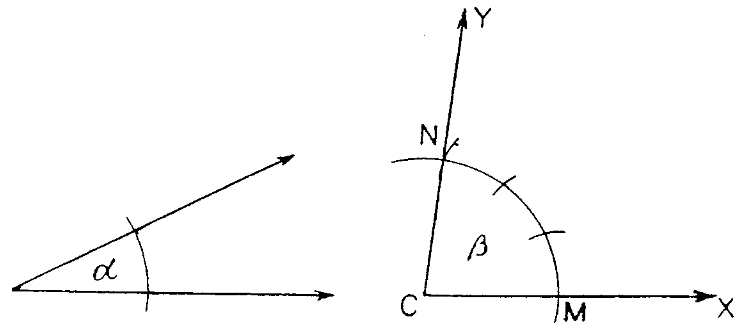
Прво преносимо на зрак OX угао α, чији је лук једнак луку MN. Затим из тачке N, али у супротном кружном смеру



Сл. 25. — Конструктивно одузимање углова.

(тј. ка тачки M), сечемо лук дужином тетиве лука мањег угла β. Тако добијамо тачку P. Зрак OY који пролази кроз тачку P јесте други крак угла који је једнак разлици датих углова α и β. Ако добијени угао означимо са γ, можемо написати: $\gamma = \alpha - \beta$.

Множење углова конструктивним путем вршимо на основу правила да множење није ништа друго него сабирање једнаких сабирака. Тако, ако треба угао α увећати рецимо 3 пута (сл. 26), радићемо овако:



Сл. 26. — Конструктивно множење углова.

Око темена угла α, као и око крајње тачке C зрака CX, описаћемо лукове истим отвором шестара. Затим треба лук угла α пренети трипут по луку описаном око тачке C.

Тако добијамо тачку N. Зрак СУ који пролази кроз тачку N јесте други крак угла који је три пута већи од датог угла α. Ако добијени угао означимо са β, можемо написати: $\beta = 3 \cdot \alpha$

Дељење угла конструктивним путем не може се вршити осим у изузетним случајевима. Ми већ знамо да поделимо угао на 2, 4, 8, 16 ... једнаких делова простим повлачењем симетрале угла. Засад ћемо на томе и остати.

Вежбања

1) Нацртај по један оштри, тупи и испупчени угао и пренеси их на друга места у равни.

2) Нацртај три оштра (два тупа) угла и сабери их конструктивним путем.

3) Конструкцијом нађи разлику два неједнака угла.

4) Нацртај један оштри угао и увећај га два (три, четири) пута.

5) Нацртај два неједнака оштра угла. Колики изгледа угао који је а) два пута већи од њихова збира, б) пет пута већи од њихове разлике?

6) Нацртај три оштра угла и нађи а) њихов двоструки збир, б) половину њиховог збира, в) четвртину збира.

7) Нацртај један тупи и један оштри угао, па конструиши половину њихове разлике.

3. РАЧУНСКЕ РАДЊЕ С УГЛОВИМА

Из геометрије за први разред знамо да је јединица за мерење углова степен, тј. деведесети део правог угла. Видели смо тада да су мање јединице од степена минути, којих има 60 у једном степену, и секунди, којих има 60 у једном минуту, или 3600 у једном степену. Величина једног угла може се, дакле, претставити као један именован или вишеимени број, а не само цртањем. Из тога излази да и четири основне радње с угловима које смо вршили конструктивним путем (мада дељење непотпуно), можемо вршити и **рачунским путем.**

Иако нам је сабирање, одузимање, множење и дељење вишеимених бројева већ познато из аритметике за I разред, ипак ћемо овде израдити по један пример да бисмо то обновили.

Нека је задато да сабирамо: $\alpha = 39^0 45' 36''$ и $\beta = 58^0 29' 42''$.

Радићемо овако:

$$\begin{array}{r} 39^0\ 45'\ 36'' \\ +\ 58^0\ 29'\ 42'' \\ \hline 97^0\ 74'\ 78'' \\ \hline 98^0\ 15'\ 18'' \end{array}$$

Испод прве црте дат је збир одговарајућих јединица, а испод друге црте је збир који смо добили пошто смо извршили претварање нижих јединица у више (на пр. у 78″ има 1′ и 18″). Тако је тражени збир $\alpha + \beta = 98^0\ 15'\ 18''$.

Горе дате углове-сабирке као и добијени угао-збир, не можемо добити ни конструкцијом, ни простим цртањем помоћу угломера, пошто угломер нема на својој скали поделу на минуте и секунде. Као што видимо, рачунање са угловима потребно је због тога, што је то у многим случајевима једини пут да се дође до тражених резултата.

Ако је дато више од два сабирка, сабирамо их на исти начин, потписујући одговарајуће јединице једне испод других.

Ако треба да одузмемо $\beta = 41^0 25' 54''$ од $\alpha = 100^0 15' 30''$ радићемо овако:

$$100^0\ 15'\ 30'' = 99^0\ 75'\ 30'' = 99^0\ 74'\ 90''$$

$$\begin{array}{r} 99^0\ 74'\ 90'' \\ -\ 41^0\ 25'\ 54'' \\ \hline 58^0\ 49'\ 36'' \end{array}$$

Пошто су у овом случају умањеникови минути и секунди претстављени мањим бројевима него минути и секунди код умалитеља, ми смо најпре извршили претварање једног степена у минуте и једног минута у секунде. Разлика датих углова је: $\alpha - \beta = 58^0 49' 36''$.

Помножимо $\alpha = 45^0 38' 25''$ четири пута.

$$45^0\ 38'\ 25'' \times 4 = 180^0\ 152'\ 100'' = 182^0\ 33'\ 40''.$$

И овде смо, као и код збира у прошлом примеру, извршили у производу претварање нижих јединица у више, и тако смо добили производ $4 \cdot \alpha = 182^0 33' 40''$.

Поделимо $\alpha = 41^0 16' 21''$ са 3.

$$41^0\ 16'\ 21'' : 3 = 13^0\ 45'\ 27''$$

$$\begin{array}{l} \underline{11} \\ \ \ 2^0 = 120' \\ \qquad\ \ \underline{136'} \\ \qquad\ \ \ \underline{16} \\ \qquad\quad 1' = 60'' \\ \qquad\qquad\ \ \underline{81''} \\ \qquad\qquad\ \ \underline{21} \end{array}$$

При овој деоби остатак степена (2^0) претворили смо у минуте, и те минуте сабрали са минутима у дељенику. Онда смо продужили дељење минута са 3. Остатак минута (1′) претворили смо у секунде, и те секунде додали секундима у дељенику. При дељењу ових секунада са 3 нисмо добили никакав остатак. Ако се деси да при дељењу неког угла добијемо остатак у секундима, можемо слободно тај остатак занемарити (као необично мали угао).

Сетимо се овде да конструктивним путем нисмо могли делити углове, изузев на 2, 4, 8, 16 итд. једнаких делова. Рачунским путем можемо ма који дати угао делити којим било бројем.

Вежбања

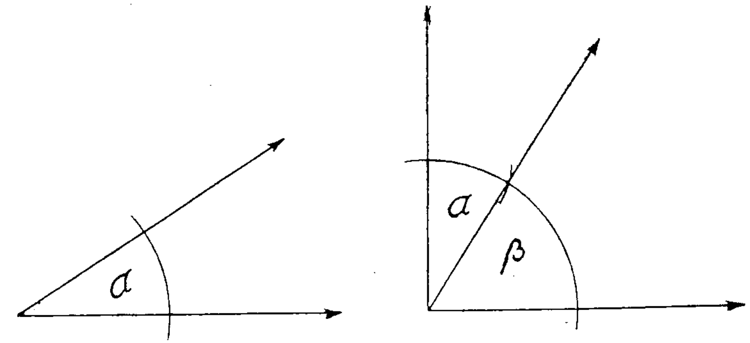
Извршити означене радње:

1) $25^\circ\ 36'\ 47'' + 35^\circ\ 46'\ 57''$.
2) $109^\circ\ 15'\ 50'' + 137^\circ\ 41'\ 42''$.
3) $73^\circ\ 45'' + 84^\circ\ 37''$.
4) $69^\circ\ 25' + 44^\circ\ 35'$.
5) $78^\circ\ 58'' + 89^\circ\ 58'$.
6) $1^\circ\ 45'\ 36'' + 49'\ 56''$.
7) $2546'' + 26^\circ\ 49''$.
8) $43^\circ\ 44'\ 45'' + 71^\circ\ 25'\ 37'' + 105^\circ\ 16'\ 38''$.
9) $56^\circ\ 46' + 92^\circ\ 38'' + 39^\circ\ 56'\ 56''$.
10) $15^\circ\ 28'' + 35^\circ\ 19' + 43^\circ\ 48'' + 7^\circ + 20^\circ\ 36'\ 45''$.
11) $58^\circ\ 35'\ 48'' - 49^\circ\ 29'\ 36''$.
12) $124^\circ\ 24'\ 39'' - 93^\circ\ 56'\ 42''$.
13) $45^\circ\ 27' - 30^\circ\ 36'\ 27''$.
14) $18^\circ\ 12'' - 1^\circ\ 25'$.
15) $6^\circ - 2^\circ\ 35'\ 42''$.
16) $6000'' - 1^\circ\ 25''$.
17) $3600'' - 7'\ 56''$.
18) $7^\circ\ 35'\ 24'' \times 3$.
19) $24^\circ\ 37'' \times 4$.
20) $17^\circ\ 56' \times 5$.
21) $12^\circ\ 36'\ 49'' \times 12$.
22) $9^\circ\ 31'\ 44'' \times 24$.
23) $57'\ 48'' \times 110$.
24) $37^\circ\ 37'\ 36'' : 3$.
25) $26^\circ\ 30'\ 16'' : 4$.
26) $13^\circ\ 13'\ 30'' : 6$.
27) $280^\circ\ 3'\ 10'' : 5$.
28) $246' : 10$.
29) $184^\circ\ 51'\ 12'' : 12$.
30) $(37^\circ\ 25'\ 42'' + 49^\circ\ 36'\ 18'') - (39^\circ\ 48'' + 28^\circ\ 54'')$.
31) $(2^\circ - 37'\ 49'') + (24^\circ\ 13'' - 19^\circ\ 25')$.
32) $(15^\circ\ 12' - 10^\circ\ 16'') \cdot 8$.
33) $(10^\circ - 3^\circ\ 56'') \cdot 3 - (12^\circ - 10^\circ\ 42'') \cdot 4$.
34) $56^\circ\ 38'\ 25'' - 24^\circ\ 44'\ 53'') : 2$.
35) Од збира углова $43^\circ\ 19'\ 56''$ и $25^\circ\ 29'\ 58''$ одузети њихову разлику.

36) Од збира углова $36^\circ\ 36'\ 36''$ и $29^\circ\ 29'\ 29''$ одузети троструку њихову разлику.
37) Половину збира углова $63^\circ\ 37'\ 25''$ и $56^\circ\ 28'\ 37''$ сабери са њиховом разликом.
38) Колика је шестина разлике углова $94^\circ\ 5'\ 16''$ и $26^\circ\ 45'\ 50''$?
39) За колико је три четвртине угла $33^\circ\ 9'\ 12''$ мање од 28° ?
40) Петоструки угао од $37^\circ\ 25'\ 16''$ поделити са 2.

4. КОМПЛЕМЕНТНИ И СУПЛЕМЕНТНИ УГЛОВИ

Комплементним угловима зваћемо она два угла чији збир износи 90°, тј. који заједно чине један прави угао. За



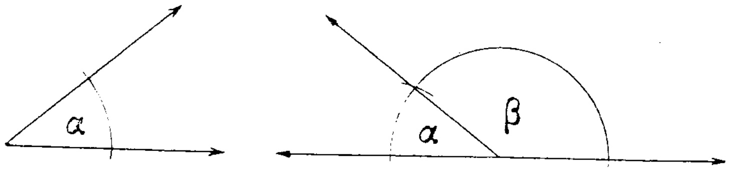
Сл. 27. — Конструкција комплементног угла датом углу α ($\sphericalangle$ β).

један од таква два угла кажемо да је **комплеменат другоме.** Тако, углу од 50° је комплеменат угао од 40°, јер га допуњује од 90°, а оба заједно су комплементни. Да бисмо неком датом углу нашли комплеменат. одузимамо тај угао од правог угла. Ако је дати угао претстављен угловним јединицама, тај задатак решавамо рачунским путем; а ако је дати угао нацртан, његов комплеменат треба да нађемо конструкцијом.

Нека је задато да углу α (сл. 27) конструкцијом одредимо комплеменат. Треба конструисати прави угао, и на већ показани начин одузети од њега дати угао α. Тако добијамо комплеменат β.

Суплементним угловима зваћемо она два угла чији збир износи 180°, тј. који заједно чине један равни угао. За један од та два угла кажемо да је **суплеменат** другоме. На пр., углу од 100° суплеменат је угао од 80°, јер га допуњује до 180°, а оба заједно су сумплементни.

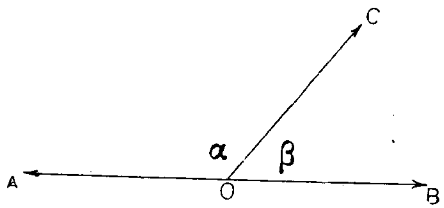
Једном углу налази се рачунским путем његов суплеменат, ако се мерни број тог угла одузме од 180°. И конструкцијом се лако налази суплеменат датом углу, ако се овај одузме од равног угла. На сл. 28 дат је угао α и, одузимањем од равног угла, нађен његов суплеменат, β.



Сл. 28. — Конструкција суплементног угла датом углу α ($\sphericalangle\ \beta$).

5. УПОРЕДНИ И УНАКРСНИ УГЛОВИ

На сл. 29 углови α и β имају заједничко теме (тачка O) и један крак (OC), док им други краци леже у истој правој линији и имају супротан смер (OA и OB). За два угла који имају такав међусобни положај кажемо да су **упоредни углови.**

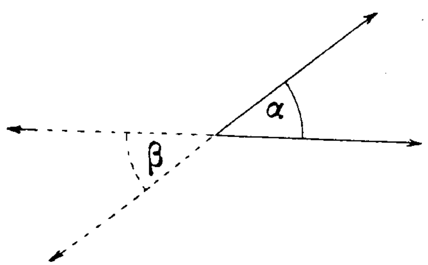


Сл. 29. — Упоредни углови.

Док код суплементних и комплементних углова нисмо обраћали пажњу на међусобни положај углова, већ само на однос њихових величина, овде је управо тај нарочити положај два угла оно што им даје назив упоредни.

Из слике је јасно да упоредни углови морају бити суплементни; суплементни углови, међутим, могу але не морају бити упоредни.

На сл. 30 углу α продужени су краци кроз теме (дакле у супротном смеру), и тако је добијен угао β. Углови α и β, као и свака два угла у таквом положају, зову се **унакрсни углови.** Унакрсни углови су једнаки, што се може проверити којим од познатих начина.



Сл. 30. — Унакрсни углови.

Најлакше добијамо унакрсне углове ако једну праву пресечемо другом. Но чим нацртамо два унакрсна угла, добијамо одмах још два око истог темена (нацртај и покажи).

Треба запамтити да су и унакрсни углови, као и упоредни, названи тако по нарочитом положају који међусобно заузимају, а не по њиховој величини.

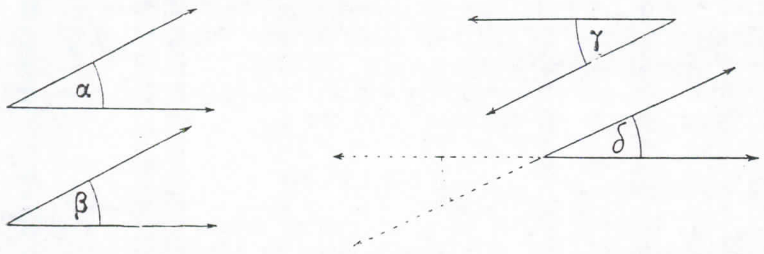
Вежбања

1) Колики је комплеменат углу од 47°, 59°, 83°, 1°, 70°?
2) Колики је суплеменат углу од 125°, 3°, 49°, 179°, 1°?
3) Израчунати комплеменат углу од $65^{\circ}\,27'\,35''$, $71^{\circ}\,12''$, $1^{\circ}\,59'\,59''$, $37'$, $45''$.
4) Израчунати суплеменат углу од $24^{\circ}\,36'\,42''$, $105^{\circ}\,12'$, $1^{\circ}\,59'\,59''$, $45'$, $30''$.
5) Нађи комплеменат троструком углу од $27^{\circ}\,33'\,26''$ и подели га са 2.
6) Нађи суплеменат углу од $56^{\circ}\,29''$ и од њега одузми комплеменат истог угла. Да ли за сваки угао добијаш исти резултат? Зашто?
7) Нацртај један оштри угао и конструиши му комплеменат и суплеменат.
8) Нацртај један тупи угао и нађи половину његовог суплементног угла.
9) Комплеменат једног оштрог угла повећај трипут.
10) Нацртај један тупи и један оштри угао. Конструиши суплеменат углу који је једнак њиховој разлици.
11) Ако је један угао $75^{\circ}\,28'\,34''$, колики је његов упоредни а колики његов унакрсни угао?
12) Нацртај четири праве да пролазе кроз једну тачку. Колико парова унакрсних углова видиш?
13) Могу ли два унакрсна угла бити комплементна? суплементна?
14) Могу ли два упоредна угла бити једнака? Кад?
15) Нацртај неколико штампаних слова азбуке и покажи на њима упоредне и унакрсне углове.
16) Једна права пресечена је другом тако, да је један од углова који тада настају $38^{\circ}\,49'\,56''$. Израчунај остале.

6. УГЛОВИ С ПАРАЛЕЛНИМ КРАЦИМА

На сл. 31-I нацртана су два угла (α и β) са паралелним крацима у истом смеру, а на сл. 31-II два угла (γ и δ) чији су краци паралелни у супротном смеру.

Транслаторним померањем може се угао α довести у положај да тачно поклопи угао β, а угао γ да дође у положај унакрсног угла према углу δ (на сл. 30-II нови положај угла γ означен цртицама).



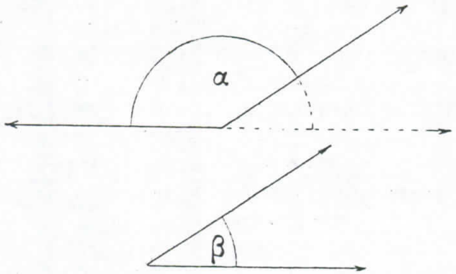
I II

Сл. 31. — Углови с паралелним крацима: I у истом, II у супротном смеру.

Из тога излази да су **два угла с паралелним крацима оба у истом или оба у супротном смеру једнака међу собом.**

Посматрајмо сада два угла код којих је по један крак паралелан у истом а по један паралелан у супротном смеру (α и β, сл. 32). Један од њих (угао β) можемо транслаторним померањем довести да дође у положај упоредног угла према другом (углу α). На слици је нови положај угла β означен цртицама.

За таква два угла знамо да су суплементни. Зато кажемо: **углови код којих је по један крак паралелан у истом а по један у супротном смеру — суплементни су.**



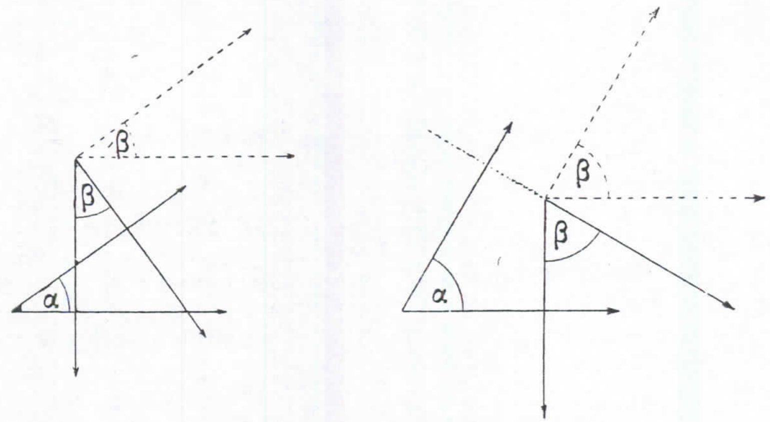
Сл. 32. — Углови који имају по један крак паралелан у истом а по један паралелан у супротном смеру.

7. УГЛОВИ С НОРМАЛНИМ КРАЦИМА

Посматраћемо сада два **оштра** угла код којих краци једнога стоје нормално на крацима другог. На сл. 33-I теме једног угла (β) лежи ван другог (α), а на сл. 33-II теме једног (β) налази се у другом углу (α).

И у овом другом случају кажемо да су краци нормални, пошто један крак можемо продужити кроз теме, тако да та нормалност буде очигледна (на сл. 33-II продужени крак означен тачкицама).

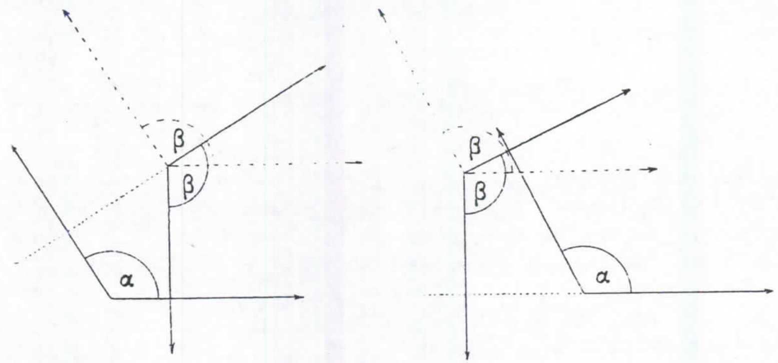
Какви су међу собом углови α и β по величини? Да бисмо добили одговор, обрнимо угао β у оба случаја за 90° око темена у обрнутом смислу казаљке на часовнику. Углови β остаће непромењене величине, али ће доћи у положај углова с паралелним крацима у истом смеру према угловима α (нови положаји углова β на слици 33 означени цртицама). За такве углове већ знамо да су једнаки.



I II

Сл. 33. — Оштри углови с нормалним крацима.

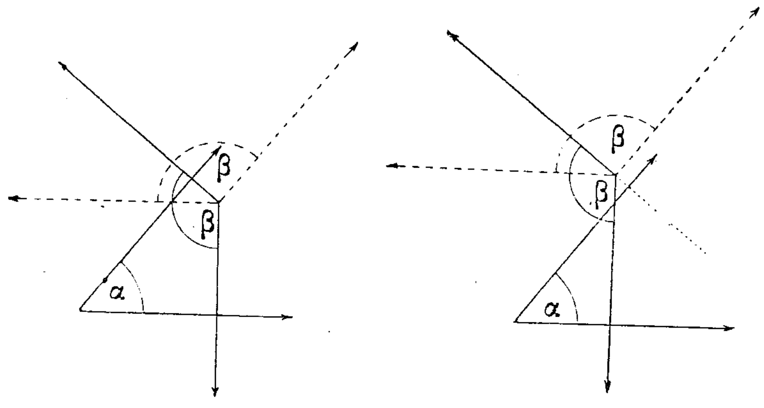
На сл. 34-I **тупи** углови α и β имају нормалне краке, и теме угла β је у углу α, а на сл. 34-II тупи углови α и β имају такође нормалне краке, али се теме угла β налази ван угла α. Ако и овде углове β обрнемо око темена за 90° у обрнутом смислу казаљке на часовнику, они ће остати исте величине, али долазе у положај углова са крацима паралелним у истом смеру према угловима α (на сл. 34-I и II нови положаји означени цртицама). Овакви углови су једнаки.



I II

Сл. 34. — Тупи углови с нормалним крацима.

Најзад, на сл. 35 посматраћемо један оштри и један тупи угао са нормалним крацима. На сл. 35-I теме једног



Сл. 35. — Оштри и тупи угао с нормалним крацима.

(β) је у другом углу (α), а на сл. 35-II теме једног (β) је ван другог угла (α).

Обрнимо и овде углове β око темена за 90°, у смислу казаљке на часовнику. Они ће доћи у положај да са углом α имају по један крак паралелан у истом а по један паралелан у супротном смеру. За таква два угла видели смо да су суплементна.

Укратко о угловима с нормалним крацима можемо закључити следеће:

Два угла с нормалним крацима, ако су оба оштра или оба тупа, једнака су; ако је један оштри а један тупи, суплементна су.

Вежбања

1) Кад су углови с паралелним крацима једнаки а кад су суплементни?

2) Кад су углови с нормалним крацима једнаки а кад су суплементни?

3) Какви су углови, у погледу кракова, код а) два супротна темена правоугаоника, б) два суседна темена правоугаоника?

4) Нацртај две паралелне праве и пресеци их косо трећом правом. Одговори на следећа питања: а) Колико углова видиш око два заједничка темена? б) Колико оштрих а колико тупих? в) Обележи све углове и кажи који су с паралелним крацима? г) Који су једнаки а који суплементни? д) Како би требало да пресечемо те две паралелне праве па да сви углови буду једнаки?

5) Нацртај један угао и једну тачку ван њега (у њему). Из те тачке повуци два зрака паралелна у истом смеру са крацима датог угла. Какав си угао добио?

6) Нацртај један угао и једну тачку ван њега (у њему). Из те тачке повуци два зрака паралелна с крацима угла, али један у истом а други у супротном смеру. Какав си угао добио?

7) Нацртај један угао и из једне тачке у њему (или ван њега) повуци зраке нормалне на крацима тог угла, тако да нови угао буде а) једнак, б) суплементан датом углу.

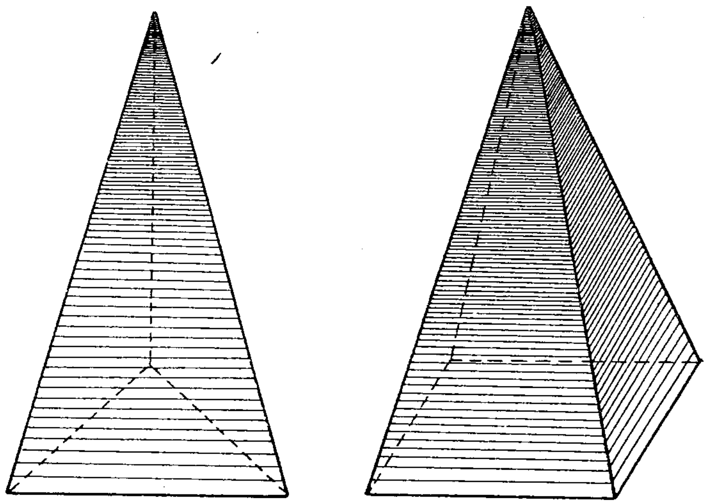
III ДЕО:

ПИРАМИДА—ТРОУГАО

1. ПИРАМИДА

У геометрији за први разред упознали смо геометриско тело које се зове пирамида. Видели смо тада да је пирамида рогљасто геометриско тело ограничено једном праволиниским геометриским сликом (основа пирамиде) и са онолико троуглова колико та слика има страна. Ови троугли (бочне стране пирамиде) стичу се све у једну тачку (врх пирамиде).

Ивице пирамиде су основине, које ограничавају основу,

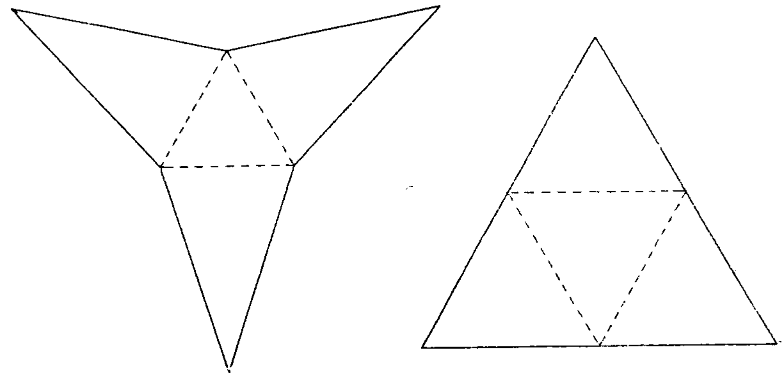


Сл. 36. — Правилна тространа и правилна четворострана пирамида.

и бочне, које се стичу у врху. Раздаљина врха од основе назива се висином пирамиде.

Према броју страна основе поделили смо тада пирамиде на тростране, четворостране, петостране итд. Сада ћемо међу пирамидама уочити оне код којих су све основине

ивице међу собом једнаке, а и све бочне ивице међу собом једнаке (што не значи да основине ивице морају бити једнаке са бочним). За такве пирамиде кажемо да су **правилне.** Правилне пирамиде имају за бочне стране подударне равнокраке троугле (који се могу тачно поклопити). На сл. 36 нацртана је правилна тространа и правилна четворострана пирамида. Прва има за основу равнострани троугао, а друга



Сл. 37. — Мрежа тростране правилне и тростране равноивичне пирамиде.

квадрат. Ако пирамида има све ивице (и основине и бочне) међу собом једнаке, онда се зове као што знамо, равноивична.

На сл. 37 нацртана је мрежа тростране правилне и тростране равноивичне пирамиде.

Вежбања

1) За које пирамиде кажемо да су правилне?

2) Шта има за основу а шта за бочне стране равноивична тространа, равноивична четворострана пирамида?

3) Колико темена, ивица, страна има тространа, четворострана, ма која пирамида?

4) Може ли висина правилне пирамиде бити већа од бочне ивице? Зашто? А од основине?

5) Да ли знаш пирамиду која има неке ивице паралелне, нормалне?

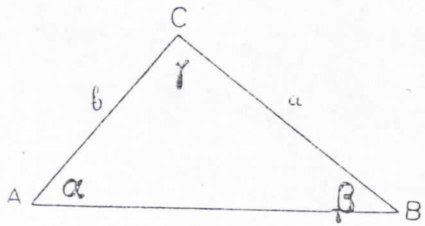
6) Од 6 шибица направи 4 равнострана троугла.

2. ТРОУГАО

Већ нам је познато да је троугао праволиниска геометриска слика ограничена са три стране. Према странама троугле смо поделили на равностране, равнокраке и разностране. Сваки троугао има три угла, и према тим угловима делимо троугле на оштроугле, правоугле и тупоугле. Оштроугле и тупоугле једним именом зовемо косоуглим троуглима.

Стране и углове троугла зваћемо **основним деловима** или **елементима** троугла. Сваки троугао има, дакле, шест елемената.

Посматрајмо троугао на сл. 38. Његова су темена тачке A, B, C, углови: A (α), B (β) и C (γ), а стране AB (c), BC (a) и AC (b). Као што видимо, стране троугла (или уопште дужи) можемо обележавати било помоћу крајњих тачака (AB) било малим словима азбуке (c).



Сл. 38. — Обележавање троугловних елемената.

Добро је запамтити ознаке елемената троугла ABC на сл. 38, јер се често у задацима о једном троуглу помињу елементи управо истим редом означени, те се тако избегава дуго објашњење или цртање троугла уз сваки задатак. Код горњег троугла пада у очи да је код темена A угао α, а наспрам њега страна a; код темена B угао β, а према њему страна b, и код темена C је угао γ, а према њему страна c.

Троугао на сл. 38 је разнострани. Један равнокраки или равнострани троугао не би се могао исто означити. Наиме, једанке стране троугла треба да су исто означене а исто тако и једнаки углови.

У троуглу ABC (сл. 38) страна AB (или c) већа је од стране AC (или b), а страна AC мања је од стране AB. Да не бисмо често писали „веће је од" и „мање је од", имамо у геометрији знаке који замењују те речи. На пр. за горе поменуте стране писаћемо $AB > AC$ или $c > b$ (страна c већа је од стране b), и $AC < AB$ или $b < c$ (страна b мања је од стране c). Шиљак овога знака окренут је мањој величини, а рачве већој. Из слике 38 види се и то да је $\alpha > \beta$, а $\beta < \gamma$, итд.

Вежбања

1) Шта су основни делови или елементи троугла?

2) Који су елементи једнаки код равнокраког, равностраног, равнокрако-правоуглог троугла?

3) Нацртај један троугао и обележи му елементе као на сл. 38. Поклопи руком слику и кажи: према којој страни лежи угао β, теме C, угао γ, теме A; према коме углу и темену лежи страна b, c, a?

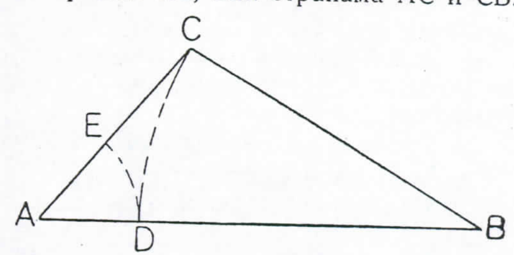
4) Нацртај један троугао и означи са A теме које је на сл. 38 обележено са B, а са B теме C. Обележи сада остале елементе тога троугла.

5) Нацртај троугао са различитим странама, означи му елементе, и помоћу знакова < и > напиши који су елементи већи а који мањи од других.

3. О СТРАНАМА ТРОУГЛА

Ако од три произвољно узете дужи покушамо да нацртамо троугао, нећемо увек успети. На пример, ако узмемо једну целу шибицу и другу исту толику шибицу поделимо на два дела, биће нам после пробања јасно да се од та три модела дужи не може начинити модел једног троугла. Између страна сваког троугла постоји известан однос, који ћемо сада испитати.

На сл. 39 нацртан је троугао ABC. Из темена A у теме B може се стићи идући страном AB, или странама AC и CB. Како је најкраћи пут између двеју тачака дуж која их спаја, то следује да је $AB < AC + BC$. Другим речима (јер је очигледно да и за друге стране важи што и за страну AB) свака страна у троуглу мора бити мања од збира других двеју.



Сл. 39. — Конструктивно проверавање правила о односу страна у троуглу.

Одузмимо сада једну (мању) страну троугла од друге (веће), и испитајмо да ли је трећа страна троугла мања или већа од добијене разлике. Ово одузимање може се извршити, као што смо радили раније, преносећи стране троугла на један зрак. Али на сл. 39 одузета је страна BC од стране AB на самом троуглу, тако да је остатак дуж AD. Тај остатак пренесен је шестаром на трећу страну AC, тако да је $AE = AD$. Трећа страна је, дакле, већа од разлике првих двеју, тј. $AC > AB - BC$. Ако исто испитивање извршимо за ма који троугао, добићемо исти резултат. Овај однос између страна троугла можемо укратко исказати овако:

Ма која страна у троуглу увек је мања од збира других двеју а већа од њихове разлике.

На пример, троугао не може имати за стране дужи од 3 cm, 4 cm и 8cm, јер је $8 > 3 + 4$, или зато што је $3 < 8 - 4$.

Вежбања

1) Који услов морају испуњавати три дужи да би могле бити стране једног троугла ?

2) Напиши три броја а) који би могли, б) који не би могли претстављати дужине страна једног троугла.

3) Која од следећих група садржи бројеве који могу претстављати стране неког троугла (мерене истим јединицама) :

а) 1, 2, 3. г) 1,2; 0,9; 2,3. е) $2\frac{7}{9}$, 1, $\frac{5}{6}$.

б) 10, 12, 21. д) 0,15; 0,29; 1. ж) 3,5; $2\frac{3}{5}$; 1.

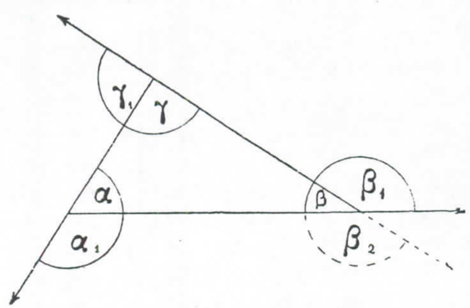
в) 97, 109, 205. ђ) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$. з) $2\frac{3}{4}$; 1,36; $4\frac{2}{5}$.

4) Посматрај свој модел коцке и на њему покажи: а) која су два темена најудаљенија? б) који ти изгледа најкраћи пут да се, идући по површини коцке, пређе из једног у друго? Расклопи сада модел коцке и на мрежи спој правом та два темена. Јеси ли погодио најкраћи пут ? Објасни.

5) Који је најкраћи пут којим би морала милити бубица по зиду собе, да би из једног „ћошка“ стигла у супротни (најдаљи) ?

4. О УГЛОВИМА ТРОУГЛА

Ако страну једног троугла продужимо кроз његово теме, та продужена страна градиће са суседном страном троугла један нов угао који се зове **спољашњи угао троугла** (на сл. 40 то је угао β_1). Код сваког темена троугла могуће је нацртати два спољашња угла, продужујући обе стране троугла кроз исто теме. (На пр. β_1 и β_2, сл. 40). Таква два спољашња угла су унакрсна, и као таква једнака су. Зато се каже да **сваки троугао има три спољашња угла,** при чему се код сваког темена замишља по један. Они се обично цртају као углови α_1, β_1 и γ_1 на сл. 40.



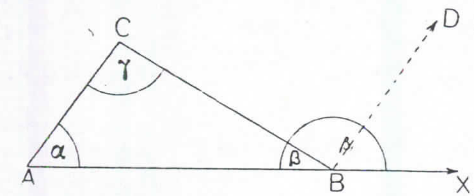
Сл. 40. — Спољашњи углови троугла (α_1, β_1, γ_1).

За разлику од спољашњих углова, углове α, β и γ називамо **унутрашњим угловима.**

Као што се из сл. 40 види, **сваки спољашњи угао упоредан је суседном унутрашњем углу,** што значи да њихов збир мора износити 180^0 (суплементни су). Тако је $\alpha + \alpha_1 = 180^0$ $\beta + \beta_1 = 180^0$ и $\gamma + \gamma_1 = 180^0$.

Између спољашњих и унутрашњих углова постоји известан одређен однос, који ћемо упознати из следећег излагања. За троугао ABC (сл. 41) нацртајмо један спољашњи угао (β_1), и из његовог темена B повуцимо зрак паралелан са супротном страном троугла, дакле BD ∥ AC. На тај начин угао β_1 подељен је на углове DBX и DBC. Први је једнак углу α, јер имају оба крака паралелна у истом смеру, а други је једнак углу γ, јер су им оба крака паралелна у супротном смеру, дакле:

$\sphericalangle DBX = \alpha$, $\sphericalangle DBC = \gamma$. Према томе закључујемо да је $\beta_1 = \alpha + \gamma$.

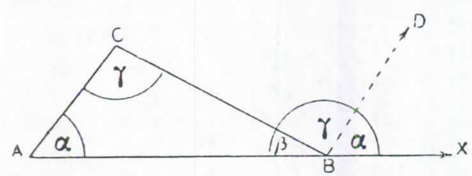


Сл. 41. — Однос између једног спољашњег угла (β_1) и унутрашњих углова троугла.

На исти се начин показује и да је $\alpha_1 = \beta + \gamma$ и $\gamma_1 = \alpha + \beta$. Овај однос могао би се речима казати овако:

Спољашњи угао једнак је збиру два унутрашња који са њим немају заједничко теме.

Ако погледамо сл. 42, биће нам јасно да **збир унутрашњих углова у троуглу мора износити 180^0** (равни угао). Јер, како је спољашњи угао CBX једнак збиру углова α и γ, а како је он истовремено суплементан суседном углу β, то онда мора бити: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ (види сл. 42). Из овога излази да ма која три угла не могу бити углови једног троугла, исто као што ни ма које три дужи не могу увек бити стране једног троугла. На пример, ако један угао у троуглу има 100^0 а други 50^0, трећи мора имати 30^0.



Сл. 42. — Збир унутрашњих углова у троуглу износи 180^0.

Ако саберемо сва три спољашња угла ма ког троугла, уверићемо се да им **збир износи 360^0** (пуни угао). Доиста, у њиховом збиру имамо као сабирке (с обзиром да је један спољашњи угао једнак збиру два унутрашња на супротним теменима) 2 пута $\measuredangle\ \alpha$, 2 пута $\measuredangle\ \beta$, 2 пута $\measuredangle\ \gamma$, што значи 2 пута збир унутрашњих углова, а то је 360^0.

Вежбања

1) Који угао називамо спољашњим углом троугла?

2) Чему је једнак спољашњи угао троугла?

3) Који услов морају испуњавати три угла да би могли бити а) унутрашњи, б) спољашњи углови једног троугла?

4) Израчунати трећи угао у троуглу ако су дата два:

а) $54^0\ 35'\ 27''$, $100^0\ 53'\ 42''$ б) $94^0\ 49''$, $75^0\ 57'$ в) $78^0\ 36''$, $27'\ 42''$

5) Израчунај спољашње углове троугла ако су два унутрашња:

а) $66^0\ 56'\ 46''$, $77^0\ 47'\ 37''$ б) $123^0\ 34''$, $19^0\ 34'$ в) $45^0\ 45'\ 45''$, $38^0 — 45''$

6) Израчунај други оштри угао правоуглог троугла, кад је један:

а) $68^0\ 29'\ 56''$ б) $37^0\ 39''$ в) $45'\ 45''$ г) $89^0\ 59'$

7) Дат је спољашњи угао (β_1) и један унутрашњи који са њим нема заједничко теме (α). Израчунај остале унутрашње и спољашње углове.

а) $\beta_1 = 95^0\ 26'\ 30''$, $\alpha = 47^0\ 27'\ 45''$ б) $\beta_1 = 135^0\ 12'$, $\alpha = 46^0\ 53''$

8) Један спољашњи угао правоуглог троугла је а) 133^0, б) $156^0\ 25'$, в) $111^0\ 34'\ 46''$; израчунај унутрашње и друге спољашње углове.

9) Колики су спољашњи углови правоуглог троугла, кад је један унутрашњи: а) $56^0\ 43'\ 26''$, б) $49^0\ 38'$, в) $22^0\ 56''$?

10) Може ли троугао имати два права или два тупа угла? Зашто? (Објасни помоћу правила које знаш и помоћу цртања).

11) Могу ли сва три спољашња угла троугла бити оштра? А два?

12) Код кога троугла један спољашњи угао мора бити прави, оштри, два спољашња угла тупа, сва три спољашња тупа?

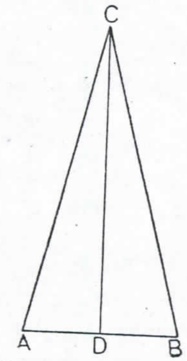
13) Нацртај произвољно два оштра угла па конструкцијом нађи трећи, тако да би сва три могла бити унутрашњи углови једног троугла.

14) Ако је један угао у троуглу два пута већи од другог, а трећи три пута већи од другог, израчунај колико степени износи сваки.

15) Један оштри угао у правоуглом троуглу 5 пута је већи од другог (оштрог). Колики су спољашњи углови тог троугла?

5. ОДНОС ИЗМЕЂУ СТРАНА И УГЛОВА КОД ТРОУГЛА

Посматрајмо равнокраки троугао на сл. 43. Нормала CD спуштена из темена C на страну AB је, као што знамо, симетрала целог троугла. Ако половину тог троугла ACD обрнемо око те симетрале за 180^0, она ће тачно поклопити другу половину BCD. При томе ће страна AC поклопити страну BC, а угао A поклопиће угао B. Углови A и B, дакле, који леже према једнаким странама, једнаки су. До истог ћемо закључка доћи ако ово испитивање извршимо са којим било равнокраким или равностраним троуглом. Према томе можемо рећи:

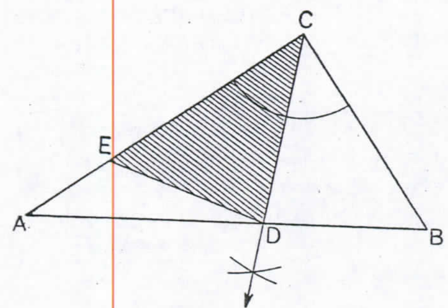


Сл. 43. — Равнокраки троугао са симетралом (CD).

Према једнаким странама у троуглу налазе се једнаки углови, и обрнуто: **према једнаким угловима у троуглу налазе се једнаке стране.**

Из овога следује да сваки угао у равностраном троуглу има 60^0, а оштри углови равнокрако - правоуглог троугла имају по 45^0.

Посматрање сл. 44 помоћи ће нам да изведемо још једно правило о односу страна и углова у троуглу. Из самог троугла ABC видимо да је AC > BC (страна AC већа од стране BC). Какви су углови који се налазе према тим странама (угао A и угао B)? Да бисмо добили одговор, повуцимо углу C симетралу CD. Троугао BCD који на тај начин добијамо, ваља обрнути за 180^0 око симетрале CD. Нови његов положај биће $\triangle$ CDE (на сл. 44 истакнут цртама). Угао B доведен је у положај угла CED. Сада ће нам бити јасно да је угао CED (тј. $\measuredangle$ B) већи од угла A, пошто је он спољашњи угао за троугао ADE, а угао A унутрашњи на другом темену. Дакле $\measuredangle B > \measuredangle A$.



Сл. 44. — Према већој страни у троуглу лежи већи угао и обрнуто. (Слика за доказ овог правила).

Вршећи овакав оглед са ма каквим троуглом долазимо до овог закључка:

Према већој страни троугла налази се већи угао, према мањој страни мањи угао, и обрнуто: **према већем углу у троуглу налази се већа страна, према мањем углу мања страна.**

Према овоме, у правоуглом троуглу најдужа страна је увек хипотенуза, а у тупоуглом она која се налази наспрам тупог угла.

Вежбања

1) Који односи постоје између страна и углова код троугла?

2) У једном троуглу два угла су: $\alpha = 57^0$ и $\beta = 88^0$. Која је страна најдужа а која најкраћа?

3) Стране једног троугла су: $a = 10$ cm, $b = 7$ cm и $c = 5$ cm. Који је угао највећи, који најмањи?

4) Један угао према краку равнокраког трогла је а) $56^0 56' 56''$, б) $73^0 12'$, в) $25^0 32''$, г) 45^0. Израчунај угао између кракова и спољашње углове. За сваки поједини случај кажи да ли је крак већа страна троугла?

5) Угао захваћен крацима једног равнокраког троугла је: а) 37^0, б) 45^0, в) $19^0 28' 35''$, г) $73^0 15'$, д) $50^0 20''$. Израчунај углове наспрам кракова и спољашње углове. За сваки поједини случај кажи да ли је крак већа страна троугла.

6) Спољашњи угао равнокраког троугла, упоредан једном унутрашњем према краку, јесте: а) 154^0, б) 135^0, в) $110' 26' 48''$, г) $99^0 36'$, д) $100^0 20''$. Израчунај унутрашње и остале спољашње углове. За сваки поједини случај кажи да ли је крак већа страна троугла.

7) Спољашњи угао равнокраког троугла, који лежи при врху, јесте: а) 120^0, б) 90^0, в) 74^0, г) $142^0 36' 58''$, д) $32^0 16''$. Израчунај унутрашње и остале спољашње углове. За сваки поједини случај кажи да ли је крак већа страна.

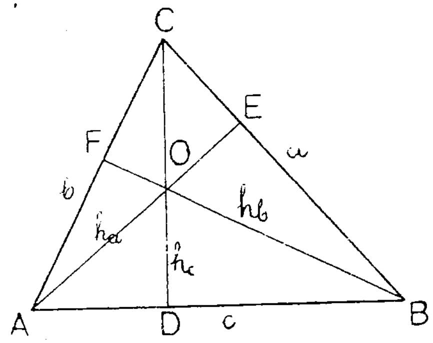
8) Израчунати унутрашње и спољашње углове равнокраког троугла, код кога је угао између кракова четири пута већи (мањи) од једног према краку.

---

6. ВИСИНЕ ТРОУГЛА — ОРТОЦЕНТАР

Ако из једног темена троугла спустимо нормалу на супротну страну, добијамо дуж која се зове **висина троугла.** Страну према којој је повучена висина зовемо тада **основицом троугла.** Како из сваког темена можемо повући нормале на супротне стране, јасно је да се **у сваком троуглу могу повући три висине,** и да се ма која страна троугла може сматрати као његова основица.

На сл. 45 повучене су све три висине у једном оштроуглом троуглу. Те висине су CD, BF и AE. Висину обично обележавамо словом h. Али да бисмо једну висину разликовали од других, означавамо их према странама на које су повучене, и то овако: висину CD са h_c, висину BF са h_b и висину AE са h_a (види сл. 45).

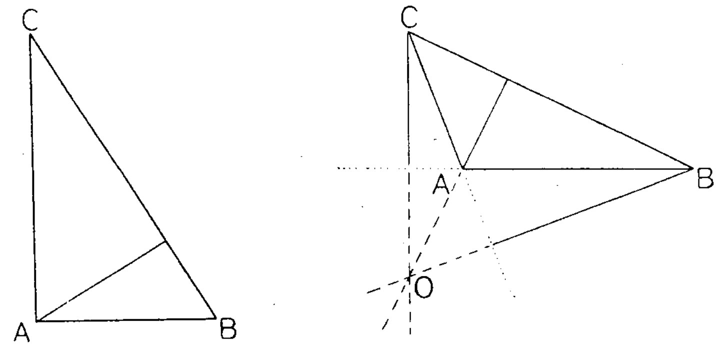


Сл. 45. — Висине у оштроуглом троуглу (ортоцентар O).

На сл. 45 пада у очи и то да све три висине пролазе кроз исту тачку, тј. да се секу у једној тачки (O). Ово је случај са висинама у сваком троуглу, у шта се можемо уверити тачним цртањем висина.

Тачка у којој се секу висине троугла зове се **ортоцентар.**

На сл. 46 нацртане су висине за један правоугли и тупоугли троугао. Код правоуглог троугла катете су истовремено и висине (зашто?), а ортоцентар се налази у темену правог угла. Код тупоуглог троугла примећујемо да две висине не падају на стране троугла већ на њихова продужења (продужења означена тачкицама, сл. 46). Ипак се оне у продужењу све секу у једној тачки, ортоцентру.



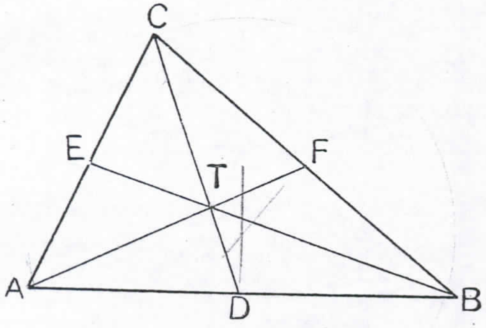
Сл. 46. — Висине и ортоцентри код правоуглог и тупоуглог троугла.

Као што смо из ових примера могли видети, ортоцентар се код различитих троуглова налази на разним местима, и то: код оштроуглих је у троуглу, код правоуглих у темену правог угла, а код тупоуглих је ван троугла.

---

7. ТЕЖИШНЕ ЛИНИЈЕ ТРОУГЛА — ТЕЖИШТЕ

Дуж која спаја једно теме троугла са средином супротне стране зове се **тежишна линија троугла.** Свакој троуглу можемо повући три тежишне линије. Ако тачно цртамо, увидећемо ово: **све три тежишне линије троугла секу се у једној тачки.** Ову тачку називамо **тежиштем** троугла. Слика 47 показује троугао ABC са тежишним линијама CD, BE и AF и тежиштем (тачка T). Шестаром се можемо лако уверити да **тежиште дели сваку тежишну линију на два дела тако, да је део до стране два пута мањи од дела до темена.**



Сл. 47. — Тежишне линије троугла и тежиште (T).

*
* *

Говорећи о симетрији слика видели смо да је центар описаног круга око троугла тачка у којој се секу симетрале страна, а центар уписаног круга у троуглу је тачка у којој се секу симетрале углова. Ове две тачке заједно са ортоцентром и тежиштем троугла, помињу се у геометрији под називом **четири значајне тачке троугла.**

Вежбања

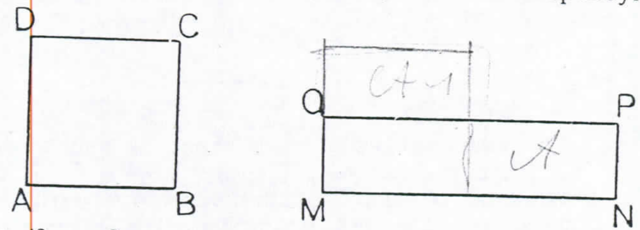
1) Шта називамо висином троугла?
2) Коју дуж у троуглу називамо тежишном линијом?
3) Шта је тежиште, ортоцентар, центар описаног круга и центар уписаног круга у троуглу? Како се у геометрији називају ове четири тачке?
4) Где се налази ортоцентар код оштроуглог, правоуглог и тупоуглог троугла?
5) Како тежиште троугла дели сваку тежишну линију?
6) Где се мора налазити тежиште ма ког троугла?
7) Нацртај један оштроугли троугао (тупоугли троугао) и конструиши ортоцентар (нормале помоћу шестара).
8) Нацртај један оштроугли (правоугли, тупоугли) троугао и конструиши му тежиште (средине страна нађи помоћу шестара).
9) Нацртај један оштроугли (правоугли, тупоугли) троугао и конструиши му све четири значајне тачке.
10) Нацртај произвољно један већи троугао и конструиши му све четири значајне тачке, употребљујући за сваку тачку оловку друге боје.
11) Из темена B оштроуглог троугла ABC спуштена је висина. Она дели ∢ β на два дела: 61^0 и 23^0. Колики су углови α и γ?
12) У тупоуглом троуглу ABC (∢ α туп) познат је угао $\gamma = 39^0$ и угао између висине h_c и стране b : 46^0. Израчунај углове α и β (нацртај слику и обележи елементе троугла).

---

8. ПОДУДАРНОСТ И КОНСТРУКЦИЈА ТРОУГЛОВА

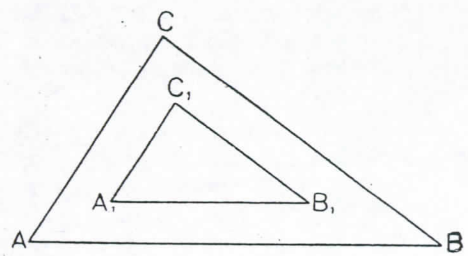
Две геометриске слике могу имати једнаке површине а различите облике. Тако, квадрат стране 2 cm и правоугаоник дужине 4 cm а ширине 1 cm на сл. 48, имају површине једнаке. Ту једнакост можемо написати овако:

$$ABCD = MNPQ.$$



Сл. 48. — Слике једнаких површина а различитог облика.

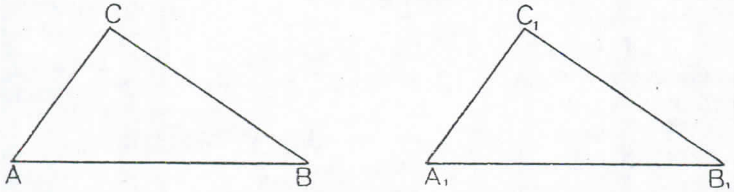
Обрнуто, две геометриске слике могу имати исти облик а различите површине. У том случају кажемо да су слике сличне. Такви су троугли ABC и $A_1B_1C_1$ на сл. 49. Сличност, као и једнакост, можемо у геометрији изразити једним знаком. Тај знак је у облику положеног и обрнутог слова S а изгледа овако: $\sim$. За случај сличности на сл. 49 писаћемо овако: $\triangle$ ABC



Сл. 49. — Слике истог облика (сличне) а неједнаке површине.

$\sim$ $\triangle A_1B_1C_1$ (читамо: троугао ABC сличан је троуглу $A_1B_1C_1$).

Најзад, може бити случај да две геометриске слике имају исти облик и једнаке површине. Такви су троугли ABC и $A_1B_1C_1$ на сл. 50. У том случају кажемо да су оне **подударне.**



Сл. 50. — Слике истог облика и једнаких површина (подударне).

Ако две подударне слике (управо њихове моделе) ставимо једну преко друге, оне ће се тачно поклапати.

Знак за подударност слика изгледа овако: $\cong$ Он, дакле, собом означава и једнакост и сличност слика. За горњи случај писаћемо: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ (тј. троугао ABC подударан је с троуглом $A_1B_1C_1$).

* * *

Сада треба да решимо задатак: како да нацртамо троугао који ће бити подударан са једним датим троуглом, тј. који ће имати исти облик и површину као тај дати троугао. Један прост начин је свима нама познат: треба дати троугао прекопирати на провидној хартији, и према тој копији нацртати на другом месту исти такав троугао. Али тај начин не спада у геометриско цртање, и ми га још можемо употребити једино за проверавање подударности, ако желимо.

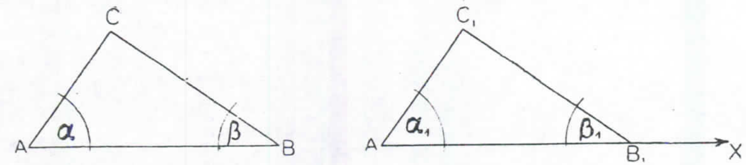
Геометриско решење тог задатка очигледно захтева конструктивно преношење елемената датог троугла на место где желимо да добијемо подударан троугао. Али при овом поступку долазимо до закључка да није потребно преносити све елементе датог троугла. Ово ћемо, уосталом, најбоље видети на следећим примерима.

* * *

1) На датом троуглу ABC (сл. 51) измеримо прво страну AB и пренесимо је на зрак A_1 X. Тако добијамо тачку B_1. Код A_1 и B_1 пренесимо углове α и β, па добијамо углове α_1 и β_1. Краци тих углова сећиће се у тачки C_1. Проверавањем лако утврђујемо да су троугли ABC и $A_1B_1C_1$ подударни. Једнакост мерених елемената и закључак да су ови троугли подударни можемо овако написти :

$$\begin{array}{c} A_1 B_1 = AB \\ \alpha_1 = \alpha \\ \beta_1 = \beta \\ \hline \triangle A_1 B_1 C_1 \cong \triangle ABC \end{array}$$

Ми смо, дакле, конструисали троугао узимајући од његових елемената само једну страну и два угла која леже на



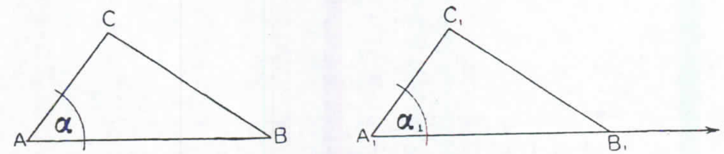
Сл. 51. — Конструкција троугла кад је позната једна страна и два налегла угла.

тој страни (и који се зато зову „налегли“ углови). Другим речима, подударност два троугла можемо утврдити мерећи им само поменута три елемента. После овога биће нам јасно следеће правило о подударности два троугла :

Два су троугла подударна, ако имају једнаку по једну страну и по два угла на њој.

* * *

2) Пренесимо сада са датог троугла ABC (сл. 52) прво страну AB на зрак A_1X. Добијамо тачку B_1. Код тачке A_1 пре-



Сл. 52. — Конструкција троугла кад су познате две стране и захваћен угао.

несимо угао α, тад добијамо α_1. На други крак угла α_1 пренесимо страну AC, па добијамо тачку C_1. Више елемената не треба да преносимо са троугла ABC, јер треба само спојити једном дужи тачке C_1 и B_1, па смо добили тражени троугао. Да је добијени троугао подударан са датим, можемо се којим било начином лако уверили. Дакле:

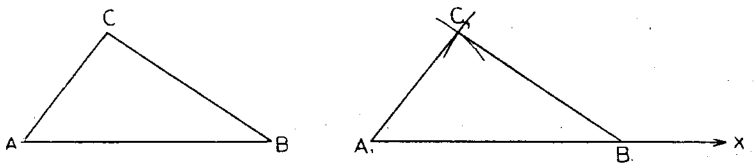
$$\begin{array}{c} A_1B_1 = AB \\ A_1C_1 = AC \\ \alpha_1 = \alpha \\ \hline \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC \end{array}$$

Овог пута конструисали смо троугао знајући опет само три његова елемента, и то: две стране и угао који оне чине (или како се каже „захваћен" угао). Подударност два троугла може се, дакле, утврдити мерењем само поменута три елемента.

Два троугла су подударна, ако имају једнаке по две стране и њима захваћен угао.

*
* *

3) Са троугла ABC (сл. 53) пренећемо на зрак A_1X прво страну AB (добијамо дуж A_1B_1). Из тачке A_1 треба отвором шестара за величину AC описати лук, а из тачке B_1 отвором шестара BC треба тај лук пресећи. Тако добијамо тачку C_1.



Сл. 53. — Конструкција троугла кад су познате све три стране.

Тачке A_1, B_1 и C_1 су темена траженог троугла. Да су ови троугли подударни, можемо се уверити као и горе. За овај случај имамо следеће једнакости :

$$\begin{array}{c} A_1B_1 = AB \\ A_1C_1 = AC \\ B_1C_1 = BC \\ \hline \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC \end{array}$$

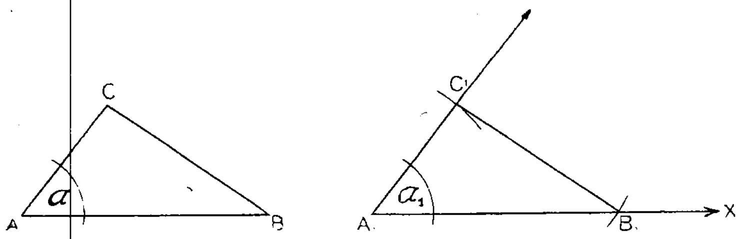
Из овог примера закључујемо да троугао можемо конструисати, ако су нам познате све три стране. Другим речима, подударност троугла може бити утврђена мерењем поменутих елемената. Дакле :

Два су троугла подударна ако су стране једног по реду једнаке са странама другог.

*
* *

4) Узећемо сада са датог троугла ABC (сл. 54) две стране AC и BC и угао који лежи према већој од њих, а то

је угао α. Код тачке A_1 зрака A_1X пренесимо угао α, па добијамо угао α_1. На други крак тога угла пренесимо мању страну AC, тако добијамо A_1C_1. Сада треба из тачке C_1 отво-



Сл. 54. — Конструкција троугла кад су познате две стране и угао према већој од њих.

ром шестара BC, пресећи зрак A_1X. На тај начин добијамо тачку B_1, треће теме траженог подударног троугла. У овом случају имамо :

$$\begin{array}{c} A_1C_1 = AC \\ B_1C_1 = BC \\ \alpha_1 = \alpha \\ \hline \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC \end{array}$$

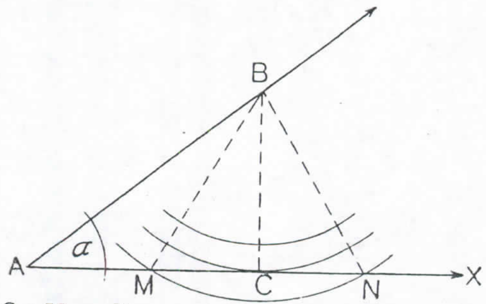
Конструкцију троугла извршили смо помоћу две стране и угла према већој страни. Мерећи код два троугла те елементе можемо утврдити њихову подударност. Зато кажемо:

Два троугла су подударна ако имају једнаке по две стране и угао према већој од њих.

*
* *

Конструкције ових троуглова могли смо извршити и да су нам горњи елементи дати одвојено, ван троугла. У последњем примеру за конструкцију троугла узели смо, поред две стране, и угао према већој од њих. Зашто нисмо узели угао према мањој од тих страна? Из следеће конструкције увидећемо да није увек могуће конструисати троугао кад су позната та три елемента.

Код темена A зрака AX (сл. 55) пренећемо угао према мањој страни, α, тако да му један крак буде зрак AX. На други крак пренесимо већу страну троугла, и то је дуж AB. Сада треба из темена B, отвором шестара мање дате стране, пресећи зрак AX, да бисмо добили треће теме траженог троугла. Овде, међутим, може наступити један од ова три случаја: 1) Ако је та мања страна већа од нормале BC, шестар ће пресећи зрак у две тачке, M и N на сл. 55, тако да се добијају два троугла AMB и ANB, који задовољавају задатак. 2) Ако је та страна једнака нормали BC, шестар ће додирнути зрак у једној тачки, а то је тачка C на сл. 55, и троугао ABC даје тражено решење задатка. 3) Може се најзад десити да шестар никако и не додирује зрак AX, што ће бити у случају кад дата мања страна буде мања од нормале BC. У том случају задатак уопште није могуће решити, пошто не добијамо никакав троугао.



Сл. 55. — Конструкција троугла кад су дате две стране и угао према мањој од њих.

Као што видимо, у случају кад су дате две стране и угао који лежи према мањој од тих страна, троугао није увек могуће конструисати.

*
* *

Из овог излагања можемо укратко извести следећи закључак:

За конструкцију једног троугла уопште потребна су три елемента, и то она три која су дата у једној од ове четири групе: 1) **Једна страна и два налегла угла;** 2) **две стране и њима захваћен угао;** 3) **све три стране;** 4) **две стране и угао према већој од тих страна.**

9. ПОДУДАРНОСТ И КОНСТРУКЦИЈА РАВНОКРАКОГ, ПРАВОУГЛОГ И РАВНОСТРАНОГ ТРОУГЛА

Правила о подударности односно о конструкцији троуглова која смо упознали важе несумњиво за све троугле. Али за конструкцију неких троуглова може нам изгледати сувишно да познајемо три од поменутих елемената. На пример, равнокраки троугао можемо конструисати ако су нам познате две неједнаке стране (тј. крак и основица); знајући наиме, један крак, знамо одмах и други, пошто су они једнаки. Стварно су нам дата три елемента, а само привидно два. Исти је случај са правоуглим и равностраним троуглом.

Ако код ових троуглова водимо рачуна о томе колико **различитих** елемената треба да познајемо да бисмо их могли конструисати, доћи ћемо до следећих закључака:

1) Равнокраки троугао можемо конструисати ако су нам позната ова два елемента: а) основица и крак, б) један (који било) угао и једна (која било) страна.

2) Првоугли троугао можемо конструисати ако су нам позната ова два елемента: а) две катете, б) једна катета и хипотенуза, в) један (оштри) угао и једна (која било) страна.

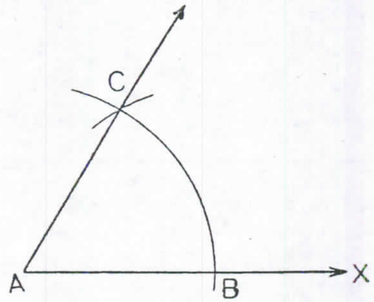
3) Равнострани троугао можемо конструисати ако нам је познат само један елеменат: његова страна.

4) Равнокрако-правоугли троугао можемо конструисати ако је позната: а) једна катета, б) хипотенуза.

10. КОНСТРУКЦИЈА УГЛА ОД 60° И ОД 90°

Познато нам је да један угао у равностраном троуглу износи 60°. Како знамо да конструишемо равнострани троугао, следећа конструкција угла од 60° биће нам потпуно јасна.

Произвољним отвором шестара из тачке A зрака AX (сл. 56) описујемо лук, који тај зрак сече у тачки B. Из тачке B, истим отвором шестара, ваља тај лук пресећи. Тако добијамо тачку C. Угао BAC (или CAB) има 60°. (Зашто? Какав би троугао био ABC?).

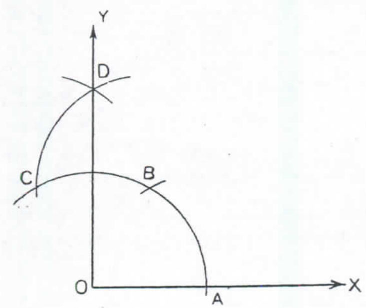


Сл. 56. — Конструкција угла од 60°.

Повлачењем симетрала лако добијамо углове од 30°, 15°, 7° 30′, итд., а множењем добијамо углове од 120°, 180°, 240° итд. Можемо лако добити и углове који од ових постају сабирањем или одузимањем.

Прави угао смо већ конструисали кад смо повлачили симетралу дужи. Сада ћемо га конструисати сабирајући углове од 60° и 30°.

Око тачке O зрака OX (сл. 57) произвољним отвором шестара описујемо већи лук, који сече зрак у тачки A. Из тачке A сечемо тај лук истим отвором шестара два пута, па добијамо тачке B и C. Сада тре-



Сл. 57. — Конструкција правог угла.

ба лук BC (тј. угао BOC који има 60^0) преполовити, па добијамо тачку D. Угао AOD (или XOY) јесте прави.

Сада лако можемо добити углове од 45^0, $22^0\,30'$, $11^0\,15'$, итд. или 135^0, 270^0 итд.

Вежбања

1) Помоћу углова од 45^0 и 30^0 конструиши углове од 75^0 и 150^0.

2) Помоћу угла од 30^0 конструиши угао од 150^0.

3) Помоћу угла од 15^0 конструиши угао од 45^0.

4) Угао од 300^0 конструиши на неколико различитих начина.

5) Конструиши углове од $22^0\,30'$, $52^0\,30'$, $37^0\,30'$.

6) Од угла од 120^0 одузми угао од 45^0, па остатак подели на четири једнака дела. (Ради све шестаром и лењиром).

7) Од угла од 270^0 одузми угао од 120^0 и остатак преполови (све конструктивно).

*

* *

8) Кад кажемо да су две геометриске слике а) једнаке, б) сличне, в) подударне?

9) Како гласе правила о подударности троуглова?

10) Које елементе морамо знати да бисмо могли конструисати косоугли разнострани троугао?

11) Који су нам елементи потребни за конструкцију равнокраког троугла?

12) Који су нам елементи потребни за конструкцију правоуглог троугла?

13) Који су нам елементи потребни за конструкцију равнокрако-правоуглог троугла?

14) Шта треба да знамо да бисмо могли конструисати равнострани троугао?

15) Објасни помоћу конструкције зашто није увек могуће конструисати троугао кад су му познате две стране и угао према мањој од њих.

16) Конструиши равнострани троугао чија је страна а) 56 mm, б) 6,3 cm, в) $4^2/_5$ cm, г) 0,055 m.

17) конструиши равнострани троугао стране 5 cm, и све четири значајне тачке. Шта видиш?

18) Конструиши равнокраки троугао чија је висина која пада на основицу 5 cm, а угао између кракова 30^0.

19) Конструиши равнокраки троугао кад је познато: а) основица 4,6 cm и крак 7 cm, б) основица 4 cm и њена висина 6 cm, в) висина која пада на основицу 5 cm и крак 6 cm.

20) Конструиши равнокраки троугао кад је дато: а) угао

на основици 75^0 и основица 5 cm, б) угао између кракова 120^0 и основица 6,2 cm, в) угао на основици 30^0 и крак 5,8 cm, г) угао између кракова 30^0 и крак 5 cm.

21) Основица једног равнокраког троугла је 4 cm и крак 6 cm. Конструиши му све четири значајне тачке и кажи где се оне налазе (ако си тачно цртао, оне леже на основичиној висини).

22) Конструиши правоугли троугао кад је дато: а) једна катета 3 cm и хипотенуза 5 cm, б) обе катете 6 cm и 4,5 cm, в) једна катета 7 cm и један угао 60^0, г) хипотенуза 58 mm и један угао 15^0.

23) Конструиши равнокрако-правоугли троугао кад је познато: а) катета 49 mm, б) хипотенуза 62 mm.

24) Из темена правог угла једног правоуглог троугла спустити висину на хипотенузу. На какве троугле дели та висина дати троугао?

25) Конструиши равнокрако-правоугли троугао код кога је хипотенузина висина 4 cm, и конструиши му значајне тачке.

26) Повуци висину једном равностраном троуглу. На какве је троугле он тада подељен?

27) Конструиши равнострани троугао чија је висина а) 5 cm, б) 44 mm, в) 0,56 dm.

28) Конструиши троугао кад су познати следећи елементи:

а) $a = 6{,}5$ cm $b = 4$ cm $c = 5$ cm	б) $b = 6$ cm $\alpha = 65^0$ $\gamma = 30^0$	в) $a = 7$ cm $c = 6$ cm $\beta = 60^0$	г) $a = 64$ mm $b = 51$ mm $\alpha = 45^0$
д) $\alpha = 75^0$ $\gamma = 60^0$ $a = 49$ mm	ђ) $a = 4$ cm $b = 6$ cm $\beta = 105^0$	е) $b = 63$ mm $c = 69$ mm $\alpha = 15^0$	ж) $a = 0{,}5$ dm $b = 45$ mm $c = 6$ cm

29) Две стране једног троугла су 54 mm и 46 mm. Узми једну вредност за трећу страну и конструиши га.

30) Конструиши мрежу правилне тростране пирамиде, чија је основина ивица 4 cm (45 mm) а бочна ивица 5,5 cm (40 mm).

31) Начини модел правилне тростране пирамиде, основине ивице 55 mm и бочне 65 mm.

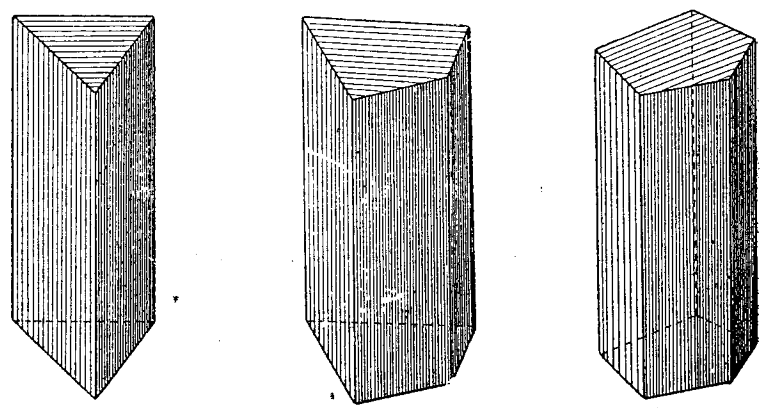
32) Начини мрежу и модел равноивичне тростране пирамиде, ивице 6 cm.

IV ДЕО:

ПРИЗМА - ЧЕТВОРОУГАО

1. ПРИЗМА

Тела претстављена на сл. 58 називамо **правим призмама.** Као што из слике видимо, то су рогљаста тела ограничена двема подударним праволиниским сликама које леже у пара-



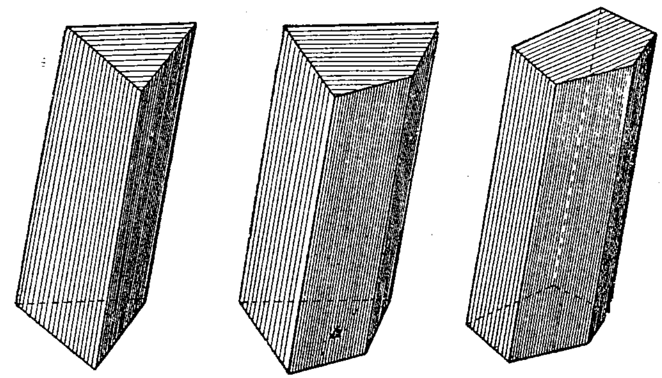
I II III

Сл. 58. — Праве призме: I тространа, II четворострана, III петострана.

лелним равнима, а са стране имају као границе правоугаонике. Ове две подударне слике зовемо **основама** а остале **бочним странама.** И код призме ивице делимо на **основине,** које ограничавају основе, и **бочне,** које раздвајају бочне стране. Код ових призама све су бочне ивице нормалне на основама, и због тога оне имају назив **праве.**

Под **висином** призме разумемо раздаљину њених основа. Код правих призама (сл. 58) висину претставља свака бочна ивица, пошто стоји нормално на основама. Код призама на сл. 59, међутим, бочне ивице не стоје нормално већ косо према основама (тј. праве са њима косе — оштре и тупе — углове). Зато се оне и зову **косе призме.** Висина косе призме мања је од бочне ивице.

На сл. 58 и 59 видимо призме чије су основе: I тространа праволиниска слика или троугао, II четворострана праволиниска слика или **четвороугао** и III петострана праволини-



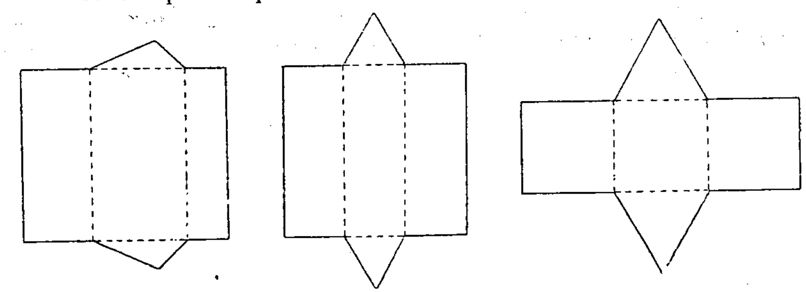
I II III

Сл. 59. — Косе призме: I тространа, II четворострана, III петострана.

ска слика или **петоугао.** Но призма може имати за основу и ма коју другу праволиниску слику, и према броју страна основе ми делимо призме (као и пирамиде) на тростране, четворостране, петостране и уопште вишестране.

Ако пажљиво посматрамо косе призме, пашће нам у очи то да код њих бочне стране нису правоугаоници, као код правих призама, већ неки други четвороугли. Овакве четвороугле посматраћемо ускоро. (Може ли код косе призме бити која бочна страна и правоугаоник ?).

Ако права призма има за основу слику са једнаким



I II III

Сл. 60. — Мрежа тростране призме: I праве, II правилне, III равноивичне.

странама и угловима, називамо је **правилном.** Тако права призма чија је основа равнострани троугао, има назив правилна тространа, а са основом квадратом правилна четворострана.

Ако су код призме све ивице (и бочне и основине) међу собом једнаке, називамо је **равноивичном.**

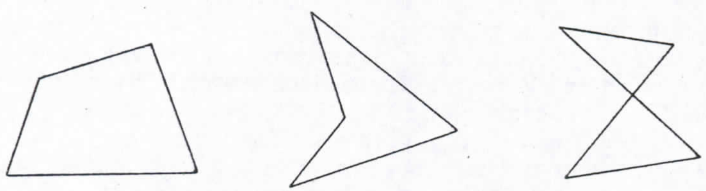
На сл. 60 нацртане су мреже тростране праве, тростране правилне и тростране равноивичне призме.

Вежбања

1) Која тела називамо призмама ?
2) Које призме називамо правим а које косим ?
3) Шта називамо висином призме, и колика је висина у поређењу с бочном ивицом ?
4) Које призме називамо правилним ?
5) Какве су бочне стране у правилне призме ?
6) Шта су равноивичне призме ?
7) Какве су призме коцка и квадар ?
8) Колико ивица има тространа, четворострана призма ? Колико темена ?
9) Конструиши мрежу четворостране правилне призме (основине ивице 4 cm, бочне 6 cm) и четворостране праве и равноивичне призме (ивице 5 cm).
10) Конструиши мрежу тростране правилне призме чија је основина ивица 5 cm, а висина 8 cm.
11) Конструиши мрежу праве тростране призме чије су основине ивице 3 cm, 4 cm и 5 cm, а бочне ивице по 10 cm.
12) Конструиши мрежу тростране праве и равноивичне призме ивице 6 cm.

2. ЧЕТВОРОУГАО

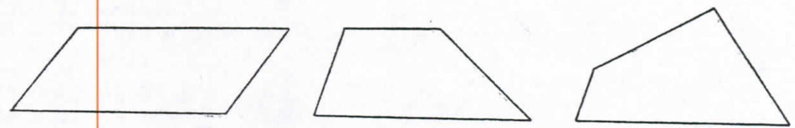
Посматрајући основе четворостране призме, видели смо да је четвороугао **праволиниска геометриска слика ограничена са четири стране.** Те четири стране граде четири угла, по којима је четвороугао и добио своје име. Има врло много четвороуглова који су различити по облику. Посматрајмо прво четвороугле на сл. 61. У првом је сваки угао мањи од 180^0. Због облика који има назива се **испупчени.** Други има и један угао преко 180^0, и због тога добија облик који му даје и име: **издубљени.** Код трећега једна страна прелази преко друге, и он се зове **звездасти.**



I II III

Сл. 61. — Четвороугли: I испупчени, II издубљени, III звездасти.

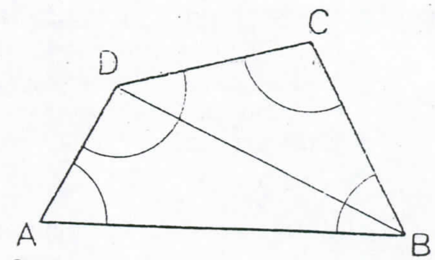
У даљем посматрању узимаћемо у обзир само испупчене четвороугле. Ако обратимо пажњу на паралелност њихових страна, све их можемо поделити у три групе, од којих је по један претстављен на сл. 62. Четвороугао на сл. 62-I има два пара паралелних страна и познат је под именом **паралелограм.** Сваки четвороугао који има само један пар паралелних страна, као на сл. 62-II, назива се **трапез;** ако нема ниједан пар паралелних страна, назива се **трапезоид** (сл. 62-III). Ако желимо да испитамо заједничке особине свих четвороуглова, онда треба да посматрамо најнеправилнији међу њима, а то је очигледно трапезоид. Јер, у колико је слика правилнија, у толико има више особина, а то значи да особине које има трапезоид морају имати и сви остали четвороугли (док обрнуто не важи).



I II III

Сл. 62. — Врсте четвороуглова: I паралелограм, II трапез, III трапезоид.

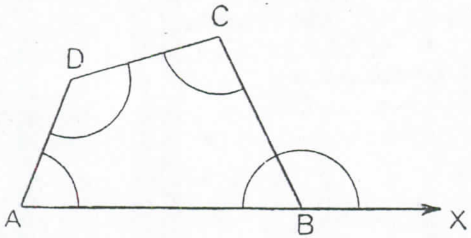
Стране и углове четвороугла зваћемо његовим **елементима.** Сваком четвороуглу можемо повући две дијагонале (за квадрат и правоугаоник то смо већ раније виделили). Дијагонала је, као што знамо, дуж која спаја два супротна темена четвороугла (на пример, BD на сл. 63).



Сл. 63. — Збир углова у четвороуглу износи 360^0.

Ако у једном четвороуглу повучемо једну дијагоналу, њоме га делимо на два троугла. На сл. 63 то су $\triangle$ ABD и $\triangle$ BCD. Како је збир углова у сваком троуглу 180^0, то излази да **у сваком четвороуглу збир унутрашњих углова износи 360^0.**

Спољашњи угао четвороугла добијамо као и код троугла; треба продужити једну страну, онда угао између те продужене и суседне стране јесте спољашњи угао. Такав је на пр. угао CBX на сл. 64. Код сваког темена могуће је начинити по два спољашња угла, али како су они као унакрсни једнаки, то се сматра да сваки четвороугао има четири спољашња угла.



Сл. 64. — Спољашњи угао четвороугла.

Из сл. 64 видимо и то да је спољашњи угао упоредан и, према томе, суплеменат суседном унутрашњем углу. Збир спољашњих углова четвороугла израчунаћемо овако: код сваког темена имамо по један спољашњи и један унутрашњи угао, што чини свега 4. $180^0 = 720^0$, од чега ако одузмемо 360^0 (збир унутрашњих углова) излази да **збир спољашњих углова четвороугла износи 360^0** (дакле исто као и збир спољашњих углова код троугла).

Вежбања

1) Шта је четвороугао ?

2) Какав може бити четвороугао ?

3) Како делимо испупчене четвороугле ?

4) Шта је паралелограм, трапез и трапезоид ?

5) У које четвороугле спадају квадрат и правоугаоник?

6) Може ли четвороугао (испупчени) имати: а) три права угла, б) два тупа, в) три тупа, г) сва четири оштра угла?

7) Шта називамо елементима четвороугла ?

8) Три угла у четвороуглу су: $35^0 35' 35''$, $73^0 47'$ и $134' 56''$. Израчунај четврти.

9) Унутрашњи углови четвороугла су: α, β, γ, δ, а спољашња α_1, β_1, γ_1, δ_1. Ако су углови: $\alpha = 100^0\ 39'\ 48''$, $\beta_1 = 124^0\ 57'\ 24''$ и $\gamma = 45^0\ 45'\ 45''$, израчунај све остале.

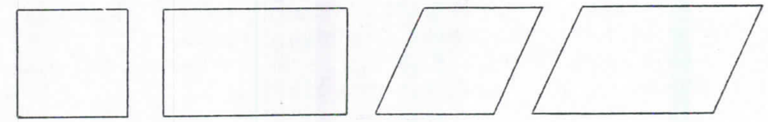
10) Два суседна унутрашња угла једног четвороугла су $73^0 55' 46''$ и $65^0 45' 36''$. Колики угао граде њихове симетрале?

---

3. ПАРАЛЕЛОГРАМИ
(Заједничке особине)

Као што је речено, паралелограми су они четвороугли који имају два пара паралелних страна. Из ранијег градива

ми већ знамо два паралелограма: квадрат и правоугаоник, на сл. 65 претстављени под I и II. Осим њих имамо још два паралелограма, а то су **ромб,** на сл. 65-III, и **ромбоид,** на сл. 65-IV.

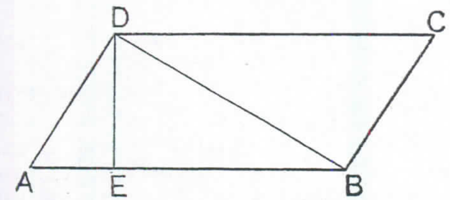


I II III IV

Сл. 65. — Паралелограми: I квадрат, II правоугаоник, III ромб, IV ромбоид.

Узмимо и овде најнеправилнији међу њима, а то је несумњиво ромбоид, и на њему испитајмо особине које су заједничке свима паралелограмима.

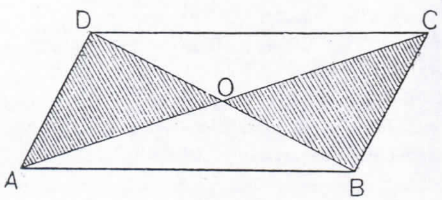
Страну паралелограма на којој он лежи називамо обично **основицом** (може ли то бити која било страна?), а раздаљину између ње и друге паралелне стране називамо **висином** паралелограма (на сл. 66 основица је AB а висина DE). Ако посматрамо углове паралелограма, доћи ћемо до закључка да су **супротни углови једнаки,** као углови чија су оба крака паралелна у супротном смеру, и да су **суседни углови суплементни,** пошто им је по један крак паралелан у истом, а по један у супротном смеру. Тако према сл. 66, $\sphericalangle$ BAD = $\sphericalangle$ BCD и $\sphericalangle$ ADC = $\sphericalangle$ ABC а $\sphericalangle$ BAD + $\sphericalangle$ ABC = 180^0, ит д.



Сл. 66. — Ромбоид са висином (DE) и дијагоналом (BD).

Супротне стране паралелограма су не само паралелне него и једнаке. Ово се може показати и обичним мерењем, али је јасан и следећи доказ. Ако повучемо једну дијагоналу, на пр. BD на сл. 66, па по њој исечемо паралелограм, добићемо два троугла ABD и BCD. Обрнимо један од њих и померајмо све дотле док се не поклопи са другим — што ће се при тачном раду десити. Из тога излази да су **два троугла на које дијагонала дели паралелограм, подударна међу собом, и да су супротне стране паралелограма једнаке.**

Повуци сада обе дијагонале паралелограма, AC и BD на сл. 67, које се секу у тачки O, и исецимо троугао BOC. Овај троугао можемо довести у положај да тачно поклопи троугао AOD. То значи да су они подударни и да је AO = CO и BO = DO, тј. **дијагонале паралелограма полове се.**



Сл. 67. — Дијагонале паралелограма полове се.

Укратко, заједничке особине свих паралелограма су следеће:

1) Супротне стране су паралелне и једнаке.

2) Супротни углови су једнаки, а суседни су суплементни.

3) Дијагонале се полове.

Ако утврдимо да неки четвороугао има макар и једну од ових особина, можемо сигурно тврдити да је то паралелограм.

Вежбања

1) Које четвороугле називамо паралелограмима?

2) Наброј све четири врсте паралелограма.

3) Које су заједничке особине свих паралелограма?

4) Нацртај произвољно један троугао па га „допуни" до паралелограма подударним троуглом.

5) Ако је један угао паралелограма а) оштри, б) прави, в) тупи, какви су остали?

6) Један угао паралелограма је а) 58^0, б) 130^0, в) $75^0\,34'\,56''$, г) $123^0\,42'\,34''$. Израчунај остале углове.

4. ПАРАЛЕЛОГРАМИ
(Појединачне особине)

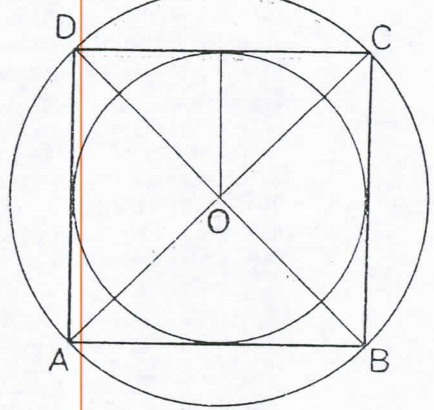
И летимичан поглед на врсте паралелограма показује нам да квадрат и правоугаоник имају праве углове, док су у ромба и ромбоида углови коси (оштри и тупи). Отуда имамо **правоугле** и **косоугле** паралелограме. Стране су једнаке код квадрата и ромба, код остала два нису.

Да бисмо упознали све особине паралелограма, морамо их посматрати појединачно.

1) **КВАДРАТ.** — Поред тога што су стране једнаке а углови прави, **у квадрата су дијагонале једнаке и стоје једна на другој нормално.** О овоме се можемо уверити мерењем, али ћемо се послужити и следећим доказом.

Конструишимо засебно троугао ABD квадрата ABCD на сл. 68, исецимо га и поклопимо њиме троугао ABC на истом квадрату. Ако тачно радимо, ови троугли ће се поклопити, што значи да су подударни. (Да ли смо њихову подударност

могли утврдити и помоћу којег правила о подударности троуглова? Како?). При овом поклапању поклопиће се и дијагонале AC и BD, што показује да су једнаке.

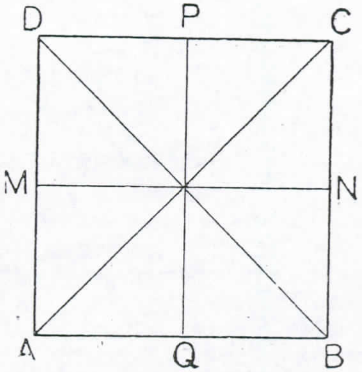


Сл. 68. — Квадрат са описаним и уписаним кругом.

Да су дијагонале једна на другој нормалне, тј. да су углови AOB и BOC једнаки међу собом (јер заједно имају 180^0), доказаћемо било мерењем, било подударношћу троуглова ABO и BCO. О овом последњем можемо се уверити на исти начин као и горе.

Пресек дијагонала, тачка O на сл. 68, једнако је удаљен прво од свих темена, друго од свих страна квадрата. Како описани круг око квадрата мора пролазити кроз темена, а уписани мора додиривати средине страна, то је **пресек дијагонала и центар описаног и центар уписаног круга.**

Ако дужима спојимо средине супротних страна квадрата, добијамо такозване **средње линије.** На сл. 69 средње линије су MN и PQ.



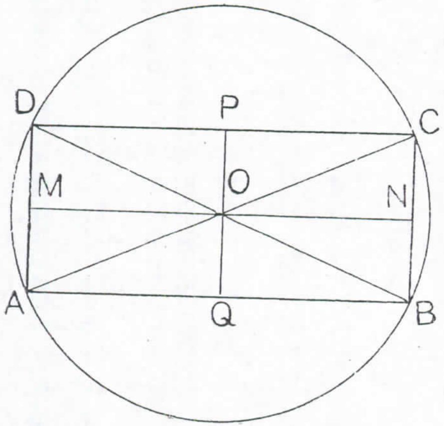
Сл. 69. — Квадрат има четири симетрале.

Ако модел квадрата пресавијемо било по средњој линији, било по дијагонали, утврдићемо из поклапања делова да је **квадрат осовинско симетрична слика и да има четири симетрале: две дијагонале и две средње линије.**

2) **ПРАВОУГАОНИК.** — На основу подударности троуглова ABD и ABC (сл. 70), или простим мерењем можемо утврдити да су **код правоугаоника дијагонале једнаке.** Али за разлику од дијагонала код квадрата, ове не стоје једна на другој нормално.

Пресек дијагонала једнако је удаљен од темена правоугаоника (зашто?), из чега закључујемо да се **око правоугаоника може описати круг.**

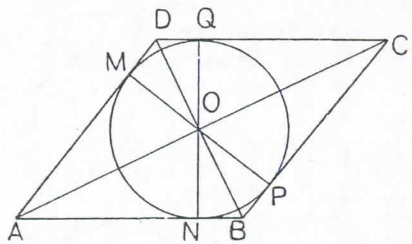
И правоугаонику можемо повући средње линије (тј. дужи које спадају средине супротних страна) као што су MN и PQ на сл. 70. Оне се секу у пресеку дијагонала. Ако модел правоугаоника пресавијемо по средњим линијама, уверићемо се да ће се половине тачно поклопити. То значи да је **правоугаоник осовинско симетрична слика и да има две симетрале: две средње линије.** Из тог поклапања излази да су средње линије у исто време и симетрале страна чије средине спадају.



Сл. 70. — Правоугаоник, средње линије, дијагонале и описани круг.

3) **РОМБ.** — Као и квадрат, ромб је паралелограм са једнаким странама, али су му углови коси.

Дијагонале ромба нису једнаке, а секу се нормално. Да бисмо ово доказали, довољно је измерити угао између дијагонала, али је исто тако довољно показати да је $\triangle ABO \cong \triangle BCO$. Јер, у том случају су и углови AOB и BOC једнаки, а како заједно износе 180^0, то је сваки од њих прави угао (сл. 71).



Сл. 71. — Ромб, дијагонале и уписани круг.

Пресек дијагонала није једнако удаљен од свих темена, јер дијагонале нису једнаке. Како се уопште не може наћи у ромбу тачка једнако удаљена од темена, закључујемо да се око ромба не може описати круг. Али, ако из пресека дијагонала, тачке O на сл. 71, спустимо нормале до страна, те нормале биће једнаке. Тако је OM = ON = OP = OQ. Из тога излази да се **у ромб може уписати круг и да је центар круга пресек дијагонала.**

Ако модел ромба пресавијемо по ма којој дијагонали, половине ће се поклопити. То значи да је **ромб осовинско симетрична слика и да су му симетрале обе дијагонале,** које су у исто време и симетрале супротних углова.

4) **РОМБОИД.** — Код ромбоида дијагонале нису једнаке и не секу се нормално, њему се не може ни описати ни уписати круг, нити је он осовинско симетрична слика. Његове смо особине показали говорећи о заједничким особинама свих паралелограма, а то су: супротне стране паралелне и једнаке, супротни углови једнаки и суседни суплементни и дијагонале се полове.

Вежбања

1) У којим су паралелограмима углови прави, у којима коси ?

2) Који паралелограми имају све стране једнаке ?

3) Код којих су паралелограма дијагонале једнаке, код којих нормалне ?

4) Око којих се паралелограма може описати круг, а у које се може уписати круг ?

5) Који су паралелограми осовинско симетрични ?

6) Колико симетрала имају поједини осовинско симетрични паралелограми и које су ?

7) Наброј све особине квадрата, правоугаоника, ромба и ромбоида.

8) На какве је троугле подељен квадрат, правоугаоник, ромб, ромбоид — једном дијагоналом, двема дијагоналама ?

9) Какви су углови код оних паралелограма који имају дијагонале једнаке ?

10) Какве су стране оних паралелограма чије су дијагонале нормалне ?

11) Ако је један угао ромба 40^0, колики су остали ?

12) Колики су углови оног ромба кога једна дијагонала дели на два равнострана троугла ?

13) Један угао ромбоида је 38^0. Колики угао заклапају симетрале два (било која) суседна угла ?

14) Повуци симетрале свих углова једног ромбоида. Какву слику добијамо ?

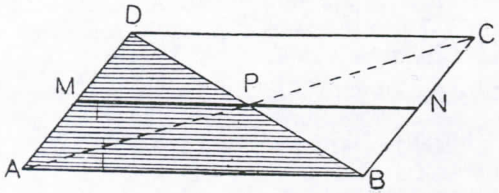
15) Спој дужима средине суседних страна квадрата, ромба, правоугаоника, ромбоида. Какве слике добијаш? (Да би лакше погодио, нацртај и дијагонале и посматрај).

16) Нацртај квадрат и ромб и, помоћу симетрале дужи, покажи да им се дијагонале секу нормално.

5. СРЕДЊЕ ЛИНИЈЕ ПАРАЛЕЛОГРАМА И ТРОУГЛА

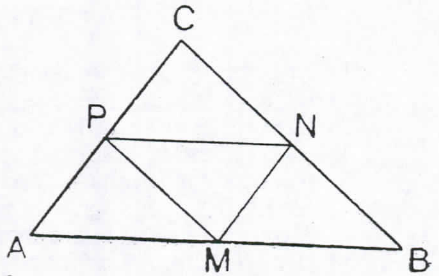
Посматрајмо паралелограм ABCD на сл. 72. Дуж MN је његова средња линија и, као што знамо, она пролази кроз пресек дијагонала P, тј. преполовљена је тачком P, тако да је $MP = PN$, или $MP = \frac{1}{2} MN$, или $MP = \frac{1}{2} AB$ (јер је $MN = AB$).

Ако сада обратимо пажњу на троугао ABD, видимо да су тачке M и P средине његових страна AD и BD, а MP спаја те тачке. Сваку дуж која спаја средине двеју страна троугла зовемо **средњом линијом** троугла. Из предњег посматрања излази да је **средња линија троугла паралелна са супротном страном и једнака њеној половини.**



Сл. 72. — Средња линија паралелограма и средња линија троугла, MN и MP.

Сваком троуглу можемо повући три средње линије. За троугао ABC на сл. 73 средње линије су MN, NP и PM, и за њих важи да је: $MN = \frac{1}{2}AC$, $NP = \frac{1}{2}AB$ и $PM = \frac{1}{2}$ BC. (Јесу ли троугли AMP, BMN, CNP, и MNP подударни? Како би то показао ?).



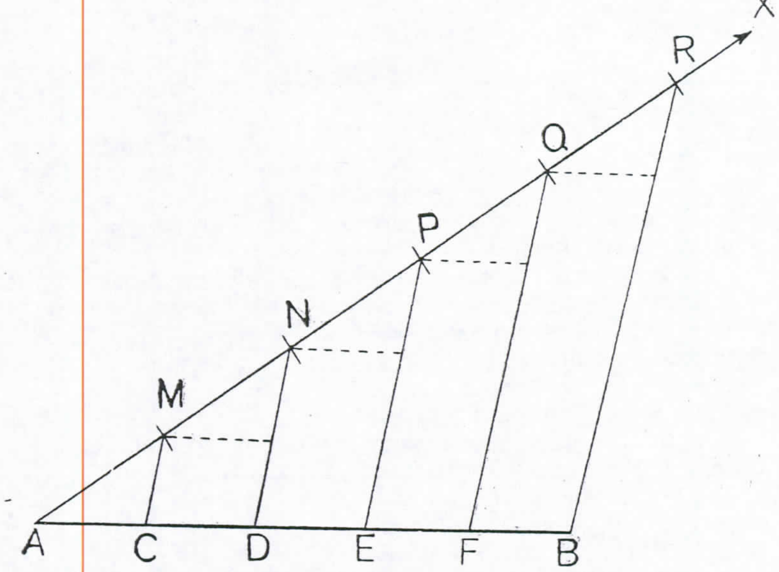
Сл. 73. — Троугао има три средње линије.

После овога можемо дату дуж поделити на више једнаких делова. Нека је дата дуж AB на сл. 74. Треба из крајње тачке дужи, рецимо тачке A, повући у произвољном правцу један зрак, AX на слици. Затим треба произвољним отвором шестара, почевши од тачке A, пресећи зрак AX онолико пута на колико делова желимо да поделимо дуж. Тако добијамо тачке M, N, P, Q и R (дакле пет делова). Крајњу тачку R треба спојити са тачком B, и из осталих тачака повући паралелне са RB. На тај начин дуж AB подељена је на пет делова, па је AC = CD = DE = EF = FB. (Објасни помоћу подударности троуглова једнакост ових делова, а провери и мерењем).

Вежбања

1) Шта називамо средњом линијом троугла ?
2) Чему је једнака средња линија троугла ?
3) Колико средњих линија има сваки троугао ?
4) Конструиши средње линије троугла чије су стране 6 cm, 5 cm, 4 cm.

5) Колике су средње линије троугла чије су стране 20 cm, 15 cm и 12 cm ?
6) Нацртај произвољно једну дуж и подели је на три (пет, шест, седам) једнака дела.

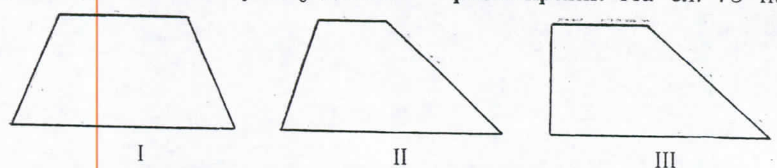


Сл. 74. — Подела дате дужи (AB) на пет једнаких делова.

7) Нацртај једну дуж и нађи $^4/_5$ ($^3/_7$, $^2/_9$) те дужи.
8) На два начина (оба конструктивна) нађи $^3/_4$ једне дужи.

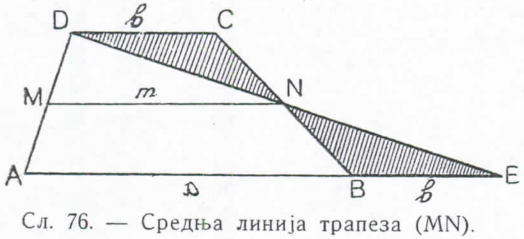
6. ТРАПЕЗИ

Четвороугле са једним паром паралелних страна називамо, као што смо рекли, трапезима. Непаралелне стране трапеза зваћемо **крацима.** Ако су краци једнаки, трапез је **равнокраки,** ако су неједнаки — **разнокраки.** На сл. 75 нацртани су под I равнокраки, а под II и III разнокраки трапези. Последњи од њих има један крак нормалан на паралелним странама, тј. има два права угла, и зове се **правоугли.**



Сл. 75. — Трапези: I равнокраки, II и III разнокраки, III правоугли.

Основица трапеза је страна на којој он лежи, а то је обично већа паралелна страна, а **висина** је раздаљина између паралелних страна. Код правоуглог трапеза висина је крак који стоји на основици нормално.



Сл. 76. — Средња линија трапеза (MN).

Углови који леже на једном истом краку јесу суплементни, пошто им је по један крак паралелан у истом, а по један у супротном смеру.

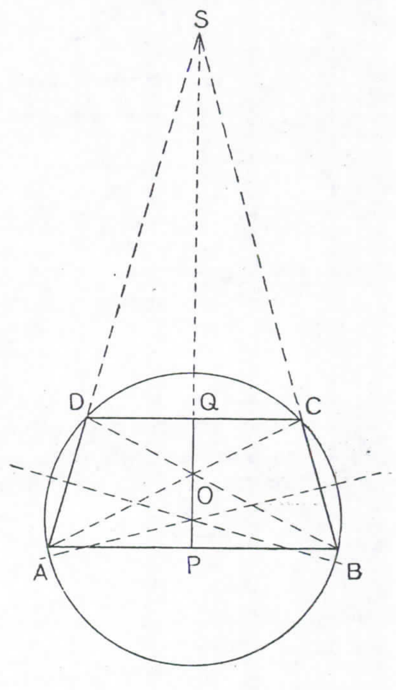
Трапезу као и сваком другом четвороуглу, можемо повући две дијагонале.

Ако једном дужи спојимо средине кракова трапеза, онда смо добили његову **средњу линију.** На сл. 76 то је дуж MN. Мерењем ове средње линије и паралелних страна трапеза можемо се уверити, да је **средња линија трапеза једнака половини збира паралелних страна и паралелна је са њима.**

Ову особину средње линије трапеза доказаћемо сада још на један начин. Из тачке D трапеза ABCD (сл. 76) повуцимо праву кроз тачку N (половина крака BC) до пресека E са продуженом основицом. Троугли CDN и BEN подударни су (како то можеш показати?), из чега излази да је BE једнако CD. Дуж MN је сада средња линија троугла AED, према чему је $MN = \frac{1}{2}\, AE$ и $MN \parallel AE$. Или ако паралелне стране трапеза обележимо са a иb, средњу линију са m, биће:

$$m = \frac{a+b}{2} \text{ и } a \parallel m \parallel b.$$

Равнокраки трапез. — Проучавањем сл. 77, у којој су краци равнокраког трапеза ABCD продужени до пресека S, тако да добијамо равнокраки троугао ABS (и CDS), долазимо до следећих особина равнокраког трапеза:



Сл. 77. — Равнокраки трапез је осовинско симетрична слика. Око њега се може описати круг.

1) Углови на (којој било) паралелној страни једнаки су, 2) дијагонале су једнаке, 3) равнокраки трапез је осовинско-симетричан и 4) око њега се може описати круг.

Углови ABC и BAD (односно ADC и BCD) једнаки су као углови наспрам једнаких страна равнокраког троугла ABS (односно као суплементи једнаких углова SDC и SCD троугла CDS). Једнакост дијагонала AC и BD може се доказати било мерењем, било подударношћу троуглова ABC и ABD (зашто су они подударни ?).

Симетрала трапеза је дуж PQ (као део симетрале SP троугла ABS). Ако желимо да опишемо круг око равнокраког трапеза, треба да повучемо симетрале његових кракова: њихов пресек (тачка O) је центар описаног круга, тј. тачка која је подједнако удаљена од свих темена трапеза. (Зашто? Која још права пролази кроз ту тачку ? Посматрај то на сл. 77).

Вежбања

1) Који четвороугао називамо трапезом ?
2) Шта су краци трапеза ?
3) Шта је основица а шта висина трапеза ?
4) Како делимо трапезе према крацима ?
5) Каква су два угла на краку сваког трапеза ?
6) Колико правих углова може имати трапез ?
7) Може ли правоугли трапез бити равнокраки ?
8) Шта је средња линија трапеза ?
9) Чему је једнака средња линија трапеза ? Како би то показао ?
10) Нацртај трапез чији ће један крак градити са основицом оштри, а други — тупи угао.
11) Наведи и покажи све особине равнокраког трапеза.
12) Ако је познат само један угао у равнокраком трапезу, можемо ли израчунати све остале ? Како ?
13) Колико углова треба да знаш у разнокраком трапезу да би израчунао све остале ?
14) Шта је симетрала равнокраког трапеза ?
15) Можеш ли трапез поделити у један троугао и један паралелограм ? А у два троугла и паралелограм ? Како ?
16) Нацртај један трапез и спој му дужима средине суседних страна. Шта си добио? (Да би тачније видео, повуци дијагонале).
17) Један угао равнокраког трапеза је $56^{0}\,56'\,56''$. Колики су остали ?

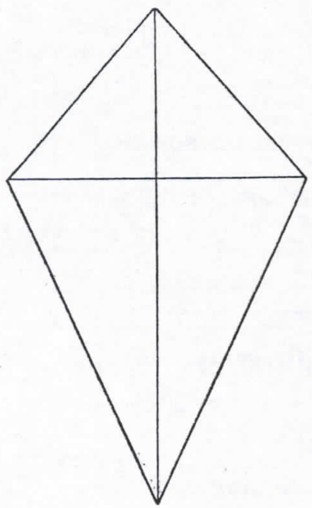
18) Углови на основици трапеза су $72^0\,38'\,47''$ и $60^0\,29'\,53''$. Израчунај остале.

19) Један угао правоуглог трапеза је $105^0\,36'\,29''$. Израчунај остале.

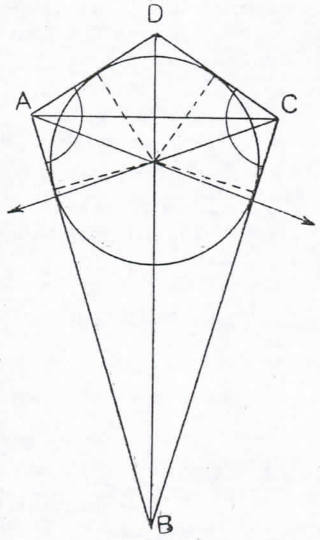
20) Углови на основици једног трапеза су 78^0 и 68^0. Колики угао граде њихове симетрале? Колики су спољашњи углови тог трапеза?

7. ТРАПЕЗОИДИ — ДЕЛТОИД

Заједничке особине свих четвороуглова посматрали смо на једном трапезоиду, тј. на четвороуглу који нема ниједан пар паралелних страна. Но међу овим многобројним различитим трапезоидима издвојићемо један који има **две и две суседне стране једнаке.** Такав се трапезоид зове **делтоид,** а претстављен је на сл. 78.



Сл. 78. — Делтоид.



Сл. 79. — Круг уписан у делтоиду.

Ако повучемо дијагоналу која спаја заједничка темена једнаких страна, пресавијањем модела делтоида око ње уверавамо се да је она симетрала угловима чија темена спаја, другој дијагонали и целом делтоиду. **Делтоид је,** дакле, **осовинско-симетрична слика и има једну симетралу: то је дијагонала која спаја темена заједничка једнаким странама.** Ту ћемо дијагоналу зато звати дијагонала-симетрала. Треба одмах да истакнемо да она не мора бити дужа од друге дијагонале, као

што је на сл. 78 и 79, већ може бити њој једнака или мања од ње (нацртај сам такве делтоиде !).

У делтоид се може уписати круг. Центар круга налази се у пресеку симетрала углова А и С, а та се тачка види на сл. 79. Та се тачка налази на дијагонали-симетрали, а једнако је удаљена од свих страна делтоида.

Углови које граде неједнаке стране делтоида једнаки су (што се лако утврђује испитујући симетричност делтоида).

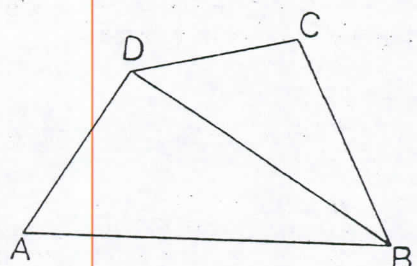
Вежбања

1) Који четвороугао називамо делтоидом?
2) Које су стране а који углови једнаки код делтоида?
3) Шта је симетрала делтоида?
4) Како добијамо центар уписаног круга код делтоида?
5) Поброј све особине делтоида.
6) Која дијагонала дели делтоид на подударне троугле? На какве га троугле дели она друга?
7) У делтоид (сл. 79) угао BAD $= 105^0\,35'$ а угао ADC $= 109^0\,30''$. Израчунај остале углове.
8) Може ли делтоид имати два права угла? А три?

8. КОНСТРУКЦИЈА ЧЕТВОРОУГЛОВА

Како ћемо конструисати четвороугао подударан једном датом четвороуглу? Колико нам је елемената за то потребно?

Посматрајмо прво трапезоид ABCD на сл. 80. Дијагонала BD дели га на два троугла. За конструкцију једног троугла потребна су нам, као што знамо, три елемента. За други троугао, међутим, треба нам још само два, јер је дијагонала заједничка страна за оба. Према томе **за конструкцију трапезоида потребно је да знамо пет елемената.**



Сл. 80. — Трапезоид.

Да бисмо конструисали делтоид, морамо узети у обзир да га дијагонала - симетрала дели на два подударна троугла. Према томе **довољно је три елемената за конструкцију делтоида.** На пример, јасно је да делтоид можемо конструисати ако су познате неједнаке стране и захваћен угао.

За конструкцију паралелограма уопште потребно је такође да знамо три елемента, пошто га дијагонала дели на два подударна троугла. Али ови троугли нису код свих паралелограма такви, да је за њихову конструкцију потребно три елемента. Ако пажљиво расмотримо поједине паралелограме, доћи ћемо до закључка да је довољно за конструкцију:

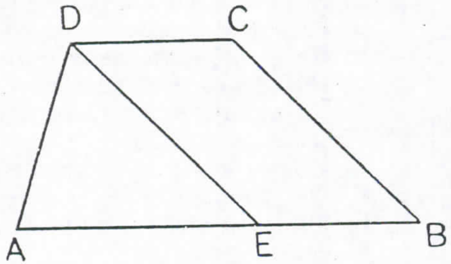
1) **квадрата, један елеменат** (на пр. страна или дијагонала);

2) **правоугаоника, два елемента** (на пр. неједнаке стране, страна и дијагонала, итд.);

3) **ромба, два елемента** (на пр. страна и дијагонала, страна и угао, итд.);

4) **ромбоида, три елемента** (на пр. две неједнаке стране и угао, две неједнаке стране и једна дијагонала, итд.).

Најзад, посматрајмо трапез ABCD на сл. 81. Из темена D повучена је дуж DE паралелно са краком BC. На тај начин трапез је подељен на један троугао (AED) и један паралелограм (BCDE). За троугао су нам потребна три елемента, за паралелограм такође три. Али како они имају страну DE заједничку, и како је паралелограмов угао BED познат чим је конструисан троугао AED, то је **за конструкцију трапеза потребно свега четири елемента.**



Сл. 81. — Трапез подељен на троугао и паралелограм.

После овог излагања јасно је да је **за конструкцију равнокраког трапеза потребно да знамо три елемента.**

Вежбања

1) Конструиши четвороугао кад су познати ови елементи:

а) $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 3$ cm, $DA = 4$ cm, $BD = 7$ cm

б) $AB = 47$ mm, $BC = 31$ mm, $CD = 25$ mm, $DA = 34$ mm, $\sphericalangle \alpha = 105^0$

в) $AB = 4{,}7$ cm, $BC = 3{,}5$ cm, $CD = 2{,}4$ cm, $\sphericalangle \beta = 75^0$, $\sphericalangle \gamma = 60^0$

г) $AB = 5$ cm, $AD = 4{,}5$ cm, $BC = 5{,}2$ cm, $AC = 5{,}6$ cm, $BD = 6$ cm

д) $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $\sphericalangle \alpha = 120^0$, $\sphericalangle \beta = 75^0$, $\sphericalangle \gamma = 60^0$

2) Конструиши делтоид чије су неједнаке стране 3 cm и 6 cm и дијагонала - симетрала 7 cm.

3) Како изгледа делтоид чије су неједнаке стране 2,9 cm и 5,3 cm и угао између њих 105^0?

4) Упиши круг у делтоид чије су неједнаке стране 43 mm и 62 mm и један угао који полови дијагонала-симетрала 150^0.

5) Конструиши ромбоид кад је дато:

а) $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 6$ cm

б) $AB = 4{,}8$ cm, $BC = 4{,}5$ cm, $\sphericalangle B = 150^0$

в) $AB = 52$ mm, $AC = 64$ mm, $BD = 48$ mm

6) Конструиши ромб и упиши му круг, кад је познато:

а) $AB = 45$ mm, $\sphericalangle A = 120^0$

б) $AB = 3{,}9$ cm, $AC = 6{,}2$ cm

в) $AC = 53$ mm, $BD = 41$ mm

7) Конструиши правоугаоник и опиши му круг кад је дато:

а) $AB = 53$ mm, $BC = 34$ mm

б) $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm

в) $AB = 5{,}6$ cm, $\sphericalangle BAC = 30^0$

8) Опиши и упиши круг квадрату а) чији је обим 1,72 dm, б) дијагонала 5,3 cm.

9) Конструиши трапез кад је дато:

а) $AB = 7{,}5$ cm, $BC = 3{,}6$ cm, $CD = 3{,}5$ cm, $AD = 2{,}9$ cm

б) $AB = 58$ mm, $BC = 23$ mm, $\sphericalangle \alpha = 75^0$, $\sphericalangle \beta = 60^0$

в) $AB = 7$ cm, $h = 3$ cm, $\sphericalangle \alpha = 45^0$, $\sphericalangle \beta = 75^0$

10) Конструиши правоугли трапез основице 6 cm, висине 3,5 cm и угла на основици од 75^0.

11) Конструиши равнокраки трапез кад је:

а) $AB = 5{,}2$ cm, $AD = 3{,}3$ cm, $CD = 2{,}5$ cm

б) $AB = 7$ cm, $AD = 3$ cm, $\sphericalangle A = 45^0$

в) $AD = 4$ cm, $\sphericalangle A = 75^0$ cm, $h = 3$ cm

9. ПАРАЛЕЛОПИПЕДИ

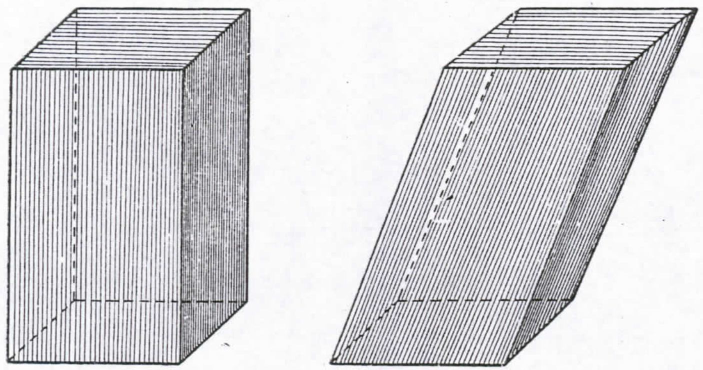
Све призме које имају за основе паралелограме, имају и заједнички назив **паралелопипеди.** У ствари то су призме које су са свих страна ограничене паралелограмима, од којих су свака два супротна паралелна и подударна.

Ако паралелопипед има за основу квадрат или правоугаоник, кажемо да је **правоугли паралелопипед,** а ако му је основа ромб или ромбоид, тада је **косоугли паралелопипед.**

Као и остале призме, паралелопипеди могу бити прави и коси, према томе да ли су им бочне ивице нормалне на основи или не. На сл. 82 приказан је један прави и један коси паралелопипед.

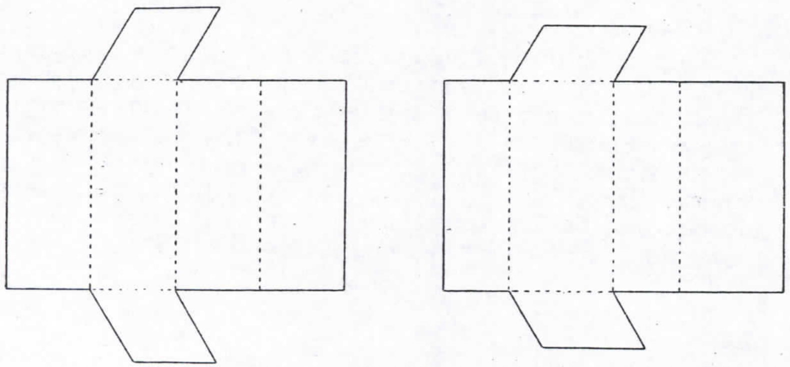
Сада ће нам бити јасно да смо у Геометрији за I разред, под именом **коцка** и **квадар,** посматрали у ствари праве и правоугле паралелопипеде. (За ова тела задржаћемо и даље називе коцка и квадар, као краћа).

Мреже коцке и квадра знамо из ранијег градива, а мреже правих а косоуглих паралелопипеда дате су на сл. 83. Да



Сл. 82. — Прави и коси паралелопипед.

би се из њих направио модел, ваља их савити по дужима означеним цртицама и крајеве залепити.



Сл. 83. — Мреже правих а косоуглих паралелопипеда.

Вежбања

1) Које призме називамо паралелопипедима?
2) Које врсте паралелопипеда знаш?
3) Може ли паралелопипед бити равноивичан? Који?
4) Како се друкчије зове прави и правоугли равноивични паралелопипед?
5) Начини мрежу и модел правог паралелопипеда висине 8 cm, са основом ромбом стране 4 cm и дијагонале 5,5 cm.

6) Начини мрежу и модел правог паралелопипеда, висине 10 cm, чија је основа ромбоид са странама 5 cm и 3 cm и захваћеним углом 60^0.

7) Конструиши мрежу и од ње начини модел праве четворостране призме, висине 9cm, чија је основа трапез са паралелним странама 6 cm и 3 cm, и крацима 4,5 cm и 3,5 cm.

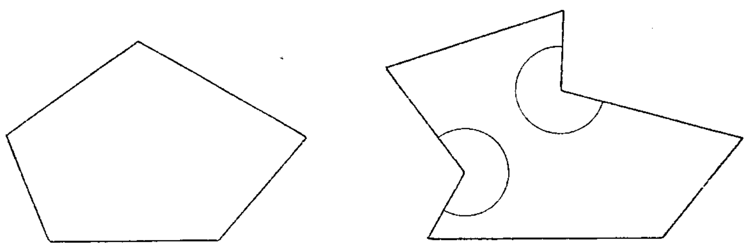
V ДЕО

МНОГОУГАО

1. ОПШТЕ ОСОБИНЕ

Праволиниску слику која је ограничена са више од четири стране називамо **многоуглом.** Тако, многоугли су: петоугао, шестоугао, десетоугао, итд.

На сл. 94 претстављена су два многоугла, од којих један има све углове мање од 180^0, и назива се **испупчени,** а други има и углова већих од 180^0, и назива се **издубљени.**



Сл. 84. — Испупчени и издубљени многоугао.

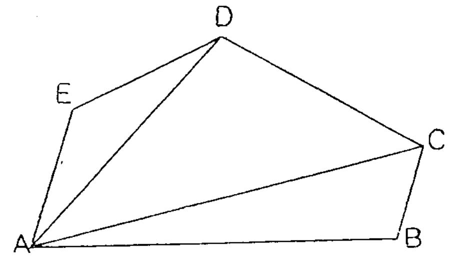
Називе испупчени и издубљени добили су због својих облика. У даљем посматрању многоуглова узимаћемо у обзир само испупчене и под речи **„многоугао"** подразумеваћемо само испупчени многоугао.

Ако нацртамо и посматрамо ма који многоугао, увериђемо се да сваки многоугао има исто онолико страна колико и углова, односно темена.

Дијагонала многоугла је дуж која спаја два темена која нису суседна. На сл. 85 дужи AC и AD су дијагонале петоугла ABCDE. **Број дијагонала које можемо повући из једног темена сваког многоугла, мањи је за 3 од броја његових темена.** Тако, у петоуглу можемо повући две дијагонале, у шестоуглу три, у десетоуглу седам, итд.

Према томе, број дијагонала које се могу повући из свих темена многоугла добили бисмо ако број дијагонала,

које се могу повући из једног темена, помножимо бројем темена. На пример: за петоугао број свих дијагонала био би 5 (5 — 3) = 10; за шестоугао 6 (6—3) = 18; итд. Међутим, ако пробамо цртањем, увидећемо да се на пример у петоуглу може повући само 5 дијагонала, а у шестоуглу 9. Дакле, упола мање од горњег рачуна. То је зато што смо у горњем рачуну сваку дијагоналу рачунали два пута; на пример, на сл. 85 узима се да је дијагонала AC једном повучена из темена A, а други пут из темена C. Зато кажемо: **из свих темена можемо у многоуглу повући онолико дијагонала колико износи половина производа из броја темена и истог броја умањеног за 3.**

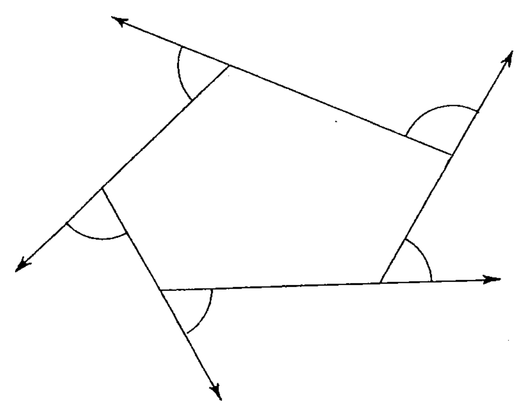


Сл. 85. — Дијагонале (AC и AD) петоугла.

Тако, у десетоуглу се може повући свега $\frac{10(10-3)}{2} = 35$ дијагонала.

Да видимо сада како се може добити збир унутрашњих углова у многоуглу. Поделимо најпре многоугао на троугле дијагоналама повученим из једног темена. Добићемо два троугла мање од броја темена (види сл. 85). Саберимо затим све углове у тим троуглима, па ћемо добити збир углова у многоуглу. Дакле, **збир углова у многоуглу добијамо када 180^0 помножимо бројем темена умањеним за 2.** Тако ће бити: за петоугао 180^0 (5—2) = 540^0; за шестоугао 180^0 (6—2) = 720^0; итд.

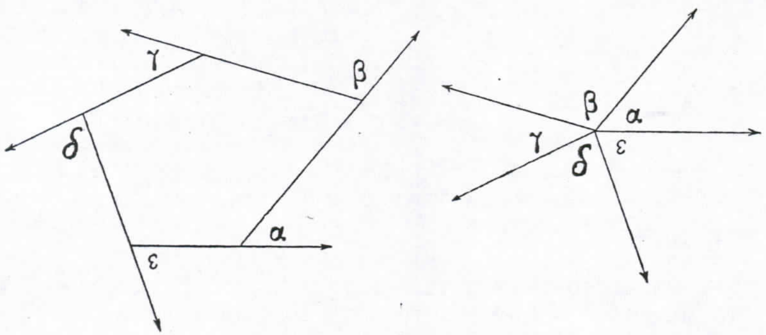
Спољашњи угао многоугла цртамо на исти начин као и код троугла и четвороугла (сл. 86). Да бисмо израчунали збир свих спољашњих углова, треба да уочимо да су спољашњи и унутрашњи угао код сваког темена упоредни, и као такви суплементни. Ако, дакле, бројем



Сл. 86. — Спољашњи углови многоугла.

темена помножимо 180⁰, добићемо збир свих спољашњих и свих унутрашњих углова заједно. Од овог збира треба сада одузети збир унутрашњих углова, па ћемо добити збир спољашњих. На пример, за петоугао имамо: $5 \cdot 180^0 - (5-2) \cdot 180 = 360^0$; за шестоугао: $6 \cdot 180^0 - (6-2) \cdot 180^0 = 360^0$; за седмоугао: $7 \cdot 180^0 - (7-2) \cdot 180^0 = 360^0$; итд. Ако ово израчунавање вршимо за ма који многоугао, доћи ћемо до закључка да је збир спољашњих углова многоугла 360⁰. (Ово, као што смо видели, важи и за троугао и четвороугао).

То исто можемо показати и на следећи начин. Из једне тачке ван многоугла треба повући зраке паралелно са његовим странама, као на сл. 87, чиме смо у исто време све спољашње углове многоугла пренели код те тачке. Ови, као што



Сл. 87. — Збир спољашњих углова многоугла износи 360⁰.

слика показује, заједно чине угао од 360⁰. (Угао „δ" читај „делта", а „ε" читај „епсилон". Види грчку азбуку на крају књиге!).

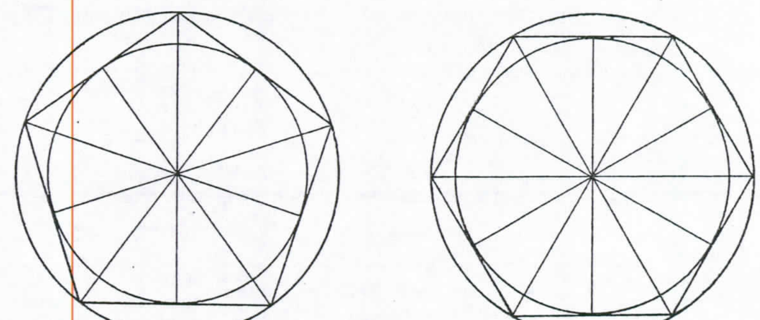
Вежбања

1) Коју праволиниску слику називамо многоуглом?
2) Шта су испупчени а шта издубљени многоугли?
3) Колико се дијагонала може повући у многоуглу из једног, а колико из свих темена?
4) Како се израчунава збир свих унутрашњих углова код многоугла?
5) Чему је једнак збир спољашњих углова код многоугла? Како се то може показати?
6) Колико се дијагонала може повући из једног а колико из свих темена у многоуглу, чији је број темена: 8, 9, 10, 12, 36, 45, 200?
7) Израчунати збир углова у многоуглу чији је број темена 7, 8, 12, 15, 30.

8) Колики је збир углова оног многоугла коме се из једног темена може повући 9 дијагонала?
9) Колико се свега дијагонала може повући у многоуглу, чији је збир углова 1080⁰?

2. ПРАВИЛНИ МНОГОУГЛИ

Ако многоугао има све стране и све углове једнаке, називамо га **правилним**, иначе је **неправилан**. На сл. 88 нацртани су правилни петоугао и правилни шестоугао.



Сл. 88. — Правилни петоугао и шестоугао, са симетралама, описаним и уписаним кругом.

Код сваког правилног многоугла можемо израчунати један угао, ако збир унутрашњих углова поделимо њиховим бројем. Тако, један угао правилног петоугла износи $540^0 : 5 = 108^0$, правилног шестоугла $720^0 : 6 = 120^0$, итд.

Сваки је правилни многоугао осовинско-симетрична слика. (Како би се могао у то уверити?). Код многоуглова с парним бројем страна, симетрала многоугла је у исто време и симетрала супротних страна или супротних углова. Код многоуглова, пак, који имају непаран број страна, симетрала многоугла је у исто време и симетрала једне стране и супротног угла (види сл. 88).

Посматрањем правилног многоугла лако нам је утврдити да **сваки правилни многоугао има онолико симетрала, колико и темена (односно страна, углова).**

Све се симетрале секу у једној тачки, коју називамо **средиштем** многоугла. Како је средиште једнако удаљено од свих темена као и од свих страна, закључујемо да се **сваком правилном многоуглу може описати и уписати круг.**

Вежбања

1) Које многоугле називамо правилним?

2) Који су многоугли осовинско-симетричне слике ?

3) Могу ли и неправилни многоугли бити осовинско-симетричне слике ? Пробај !

4) Колико симетрала има сваки правилни многоугао?

5) Шта је средиште правилног многоугла?

6) Шта знаш да кажеш о правилним многоуглима у вези са кругом?

7) Где се налазе средишта описаног и уписаног круга правилног многоугла?

8) Како се израчунава: а) један унутрашњи угао; б) један спољашњи угао правилног многоугла?

9) Израчунај један угао у правилном многоуглу чији је број страна: 9, 10, 16, 24.

10) Израчунај један спољашњи угао правилног многоугла чији је број страна: 8, 10, 15, 30.

11) Попуни следећу табелу за многоугле почев од троугла, закључно са десетоуглом.

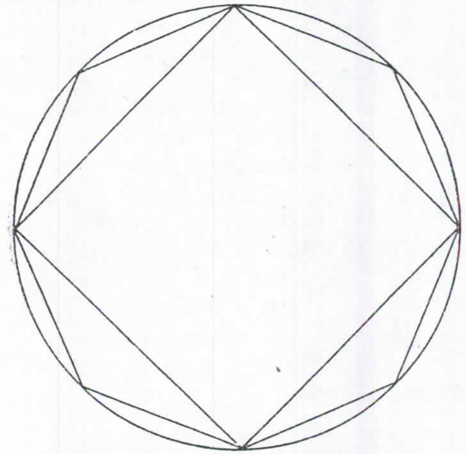
многоугао	број дијагонала		углови		
	из једног темена	из свих темена	збир свих	један унутрашњи у правилном	један спољашњи у правилном
троугао					
четвороугао					
петоугао					
итд.					

3. КОНСТРУКЦИЈА МНОГОУГЛА

Да бисмо конструисали неправилни многоугао, подударан неком датом многоуглу, треба овај дати прво изделити дијагоналама из једног темена у троугле, па ове троугле конструисати један по један истим редом.

За конструкцију правилног многоугла узећемо у обзир да се око њега може описати круг. Ако се тражи конструкција, на пример, правилног шестоугла, треба обим једног круга поделити на шест једнаких делова, па деоне тачке спојити дужима. Међутим, ми не умемо обим круга поделити на ма који број једнаких делова. Зато ћемо сада видети које правилне многоугле можемо на тај начин конструисати.

На четири једнака дела може се обим круга поделити повлачењем два нормална пречника. Конструишући симетрале правим угловима које граде ови пречници, делимо обим круга на осам једнаких делова. Лако увиђамо да кружну периферију можемо тако поделити на четири, осам, шеснаест, тридесет и два итд. једнаких делова, тј. да на овај начин можемо конструисати квадрат (правилни четвороугао), правилни осмоугао, шеснаестоугао итд. (види сл. 89).

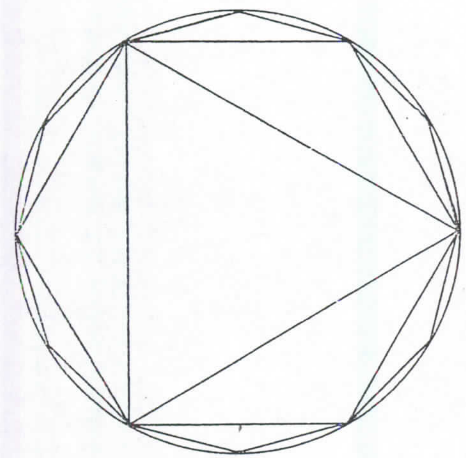


Сл. 89. — Правилни четвороугао и осмоугао уписани у кругу.

Ако полупречник једног круга преносимо као тетиву по периферији тог круга, моћи ћемо то да учинимо тачно шест пута. Тако, дакле, делимо обим на шест једнаких делова, тј. правилни шестоугао уписујемо у круг.

Равнострани троугао (правилни троугао) можемо конструисати, ако обим једног круга поделимо на шест једнаких делова, па дужима спојимо сваку другу подеону тачку. Да ли знамо другу конструкцију правилног троугла?

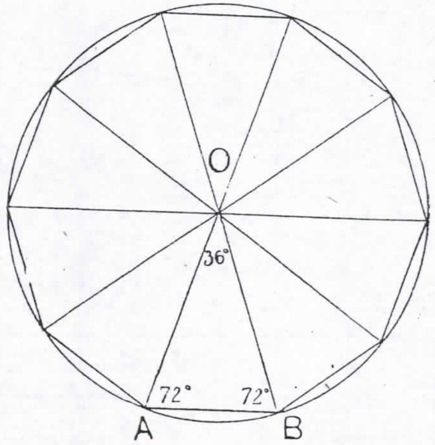
Кружну периферију поделићемо на дванаест једнаких делова (правилни дванаестоугао), ако повучемо симетрале странама правилног шестоугла. На сличан начин можемо конструисати правилне многоугле чији је број страна 24, 48, итд.



Сл. 90. — Правилни троугао, шестоугао и осмоугао уписани у кругу.

Остале правилне многоугле (петоугао, деветоугао . . .) цртаћемо помоћу угломера, и то на основу следећег посматрања.

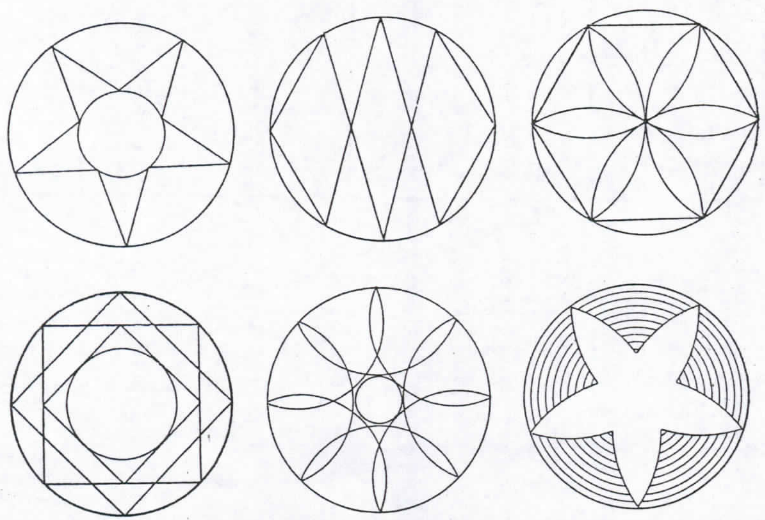
Ако средиште правилног многоугла спојимо дужима са теменима, делимо га на равнокраке и подударне троугле. Ових троуглова има онолико колико многоугао има страна (види десетоугао на сл. 91). Угао између кракова сваког овог троугла добијамо кад 360^0 поделимо са бројем тих троуглова (бројем страна многоугла). Тако, за десетоугао (на сл. 91) тај угао је $360^0:10=36^0$. На основици сваког таквог равнокраког троугла углови износе по 72^0 (зашто?). Као што се из слике види, оба угла на основици једнака су једном унутрашњем углу многоугла; на пример за десетоугао је тај угао 144^0.



Сл. 91. — Правилни десетоугао подељен на подударне и равнокраке троугле.

Ако правилни шестоугао изделимо на горе описани начин у троугле, добићемо равностране троугле. Покажи зашто!

Да бисмо, дакле, конструисали неки правилни многоугао, ми му прво конструишемо један равнокраки троугао



Сл. 92. — Фигуре добијене помоћу конструкције правилних многоуглова.

(за који нам је потребан још један елеменат), као △ ABO на сл. 91. Сада ваља забости шестар у врх O, отворити га до A или B, и описати круг. По том кругу преносимо сада страну AB као тетиву, и повлачењем тих тетива задатак је готов. На овај начин можемо нацртати који било правилни многоугао, ако нам је задата његова страна (AB) или полупречник описног круга (OA).

Слика 92 претставља извесне фигуре које смо добили уписујући разне правилне многоугле у кругове. Како су оне нацртане? Покушај и сам да нацрташ сличне шаре!

Вежбања

1) Нацртај један правилни петоугао и конструиши њему подударан петоугао.

2) Упиши у круг полупречника 5 cm правилни троугао, шестоугао и дванаестоугао.

3) У круг полупречника 45 mm упиши правилни четвороугао, осмоугао и шеснаестоугао.

4) Конструиши правилни петоугао: а) стране 48 mm, б) полупречника описаног круга 52 mm.

5) Конструиши правилни десетоугао: а) стране 4 cm, б) полупречника описаног круга 4 cm.

6) Конструиши правилни дванаестоугао: а) стране 4 cm 4 mm, б) полупречника описаног круга 5 cm 2 mm.

7) Конструиши правилни петнаестоугао: а) стране 4,5 cm, б) полупречника описаног круга 5,8 cm.

8) Конструиши правилни осмоугао и повуци: а) две паралелне дијагонале, б) три паралелне дијагонале. На какве си га слике на тај начин поделио?

9) Конструиши мрежу правилне петостране призме, висине 7 cm и основине ивице 4 cm.

10) Начини модел правилне шестостране призме висине 6 cm и основине ивице 4cm.

11) Начини модел праве и равноивичне: а) петостране, б) шестостране призме, ивице 5 cm.

12) Начини модел правилне пирамиде: а) петостране, б) шестостране, основине ивице 5 cm и бочне ивице 6,5 cm.

13) Начини модел петостране и четворостране равноивичне пирамиде, ивице 6 cm.

ГРЧКА АЗБУКА

Слово	Изговор	Слово	Изговор
Α α	алфа	*Ν ν*	ни
Β β	бета	*Ξ ξ*	кси
Γ γ	гама	*Ο ο*	омикрон
Δ δ	делта	*Π π*	пи
Ε ε	епсилон	*Ρ ϱ*	ро
Ζ ζ	зета	*Σ σ ς*	сигма
Η η	ета	*Τ τ*	тау
Θ ϑ	тета	*Υ υ*	ипсилон
Ι ι	јота	*Φ φ*	фи
Κ κ	капа	*Χ χ*	хи
Λ λ	ламбда	*Ψ ψ*	пси
Μ μ	ми	*Ω ω*	омега