Primene teorije modela u poljima

Angelina Ilić Stepić

mentor dr.Žarko Mijajlović

◇ ◇ ◇

Matematički fakultet, Beograd
2008

Predgovor

Magistarski rad je iz oblasti teorije modela sa primenama na algebarska polja. Posebno se razmatraju algebarski zatvorena, formalno realna i realno zatvorena polja. Takodje se izučava status osnovnih teorema analize (Rolova, Langražova, Fermaova) u teoriji formalno realnih polja.

U prvom poglavlju daju se osnove teorije algebarskih polja kao što su pojam algebarskog raširenja, separabilnosti, osobine algebarski zatvorenih polja i transcedentnih raširenja.

U drugom poglavlju izlažu se osnovni pojmovi i metode teorije modela i to relevantnih za izučavanje algebarskih polja. Definišu se relacija zadovoljenja, teorije prvog reda i osnovne konstrukcije kao što su dijagrami modela i modelska potpunost. Ove metode se ilustruju na primeru algebarski zatvorenih polja. Izlaže se dokaz za modelsku potpunost algebarski zatvorenih polja. Takodje se izlaže pojam eliminacije kvantora i sa tim u vezi podmodelska potpunost i dokazuje se da teorija algebarski zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora.

Treće poglavlje odnosi se na pojam definabilnosti. Odgovarajuće konstrukcije uradjene su za algebarski zatvorena polja, opisani su Zariski zatvoreni i konstruktibilni skupovi. Dokazano je da su kod algebarski zatvorenih polja konstruktibilini skupovi tačno definabilni skupovi i da su oni održivi pri polinomijalnim preslikavanjima. Takodje su opisane definabilne relacije ekvivalencije. Iste konstrukcije i pojmovi razmatraju se i u teoriji formalno realnih i realno zatvorenih polja. Na primer, dokazano je da teorija realno zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora kao ida su semialgebarski skupovi zatvoreni za projekcije (Tarski - Zajdenberg). Takodje je prikazan dokaz o-minimalnosti teorije realno zatvorenih polja.

Poslednja, četvrta glava, odnosi se na zasićene modele i tipove. Opisana su zasićena algebarski zatvorena i zasićena realna polja (Erdešova teorema). Ilustrovana je primena Blumovog kriterijuma na dokaz modelske potpunosti i podmodelske potpunosti realno zatvorenih polja.

Originalni rezultati nalaze se na kraju treće glave i odnose se na status osnovnih teorema analize u teoriji formalno realnih polja. Sa obzirom da teorija realno zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora, to jest, podmodelski je potpuna, osnovne teoreme analize, uz izabrano uredjenje, važe za sve definabilne funkcije u svim realno zatvorenim poljima. Sa druge strane razmatran je obrnut problem, da li uslov da u formalno realnom polju važi neka osnovna teorema analize, povlači da je formalno realno polje u stvari realno zatvoreno. Ispostavilo se da je taj problem daleko teži i da može imati više formulacija. Ako se to pogleda na primeru Rolove teoreme, uslov da važi Rolova teorema može se formulisati za:

1. Polinome

2. Racionalne funkcije

U slučaju 1 dokazano je da postoji $\sqrt[n]{r}$, za $r \in \mathbf{Q}$, $n \leq 6$. Takodje je dokazano da takvo polje sadrži kompletno kvadratično polje (nad pozitivnim racionalnom brojevima). Rešive su pojedine instance kubne jednačine nad $\mathbf{Q}$.

U slučaju 2, ukoliko se pretpostavi da važi Rolova teorema za funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ i $f(x) = \frac{1}{x^2}$, dokazano je da postoji $\sqrt[n]{r}$ za $n = 3{\cdot}2^k$, $n = 5 \cdot 2^k$, gde $k \in \mathbf{N}$ i r je proizvoljan, (pozitivan), element datog polja. Takodje je rešiva kubna jednačina nad datim poljem.

Želela bih ovom prilikom da se naročito zahvalim svom mentoru, dr. Žarku Mijajloviću, koji me ju uveo u oblast teorije modela i njenih primena a posebno u problem statusa osnovnih teorema analize u formalno realnim poljima i dao doprinos pri njegovom rešavanju.

Takodje, zahvalila bih se članovima komisije, dr. Predragu Tanoviću i dr. Aleksandru Jovanoviću na pažlivom čitanju teksta teze i korisnim sugestijama koje su mi pomogle da uobličim završni tekst i ispravim uočene nedostatke.

Sadržaj

1 Algebarska teorija polja

1.1 Teorija polja

Definicija 1 *Algebarsko polje je svaka struktura tipa* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ *gde je* $(F, +, 0)$ *Abelova grupa,* $(F \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ *je takodje abelova grupa,* $\mathbf{F}$ *zadovoljava distributivni zakon i* $0 \neq 1$.

Dakle, polje $\mathbf{F}$ *zadovoljava sledeće aksiome:*

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. $x + 0 = x$
4. $\forall x \exists y (x + y = 0)$
5. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
6. $x \cdot y = y \cdot x$
7. $x \cdot 1 = x$
8. $\forall x (x \neq 0 \Rightarrow \exists y (x \cdot y = 1))$
9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
10. $0 \neq 1$

Primer 1

1. $\mathbf{Q} = (Q, +, \cdot, 0, 1)$ *- polje racionalnih brojeva.*
2. $\mathbf{R} = (R, +, \cdot, 0, 1)$ *- polje realnih brojeva.*
3. $\mathbf{C} = (C, +, \cdot, 0, 1)$ *- polje kompleksnih brojeva brojeva.*
4. $\mathbf{Z_p} = (Z_p, +_p, \cdot_p, 0, 1)$ *- polje ostataka po modulu prostog broja* p.

Polje $\mathbf{F}$ je *beskonačne karakteristike* akko za sve $n \in \mathbf{N}^+$ i sve $x \in F \setminus \{0\}$ važi $n \cdot x \neq 0$, gde je $n \cdot x = \underbrace{x + x \ldots + x}$ (n sabiraka). U mesto pojma beskonačne karakteristike koristi se i pojam *karakteristike nula*. Polje $\mathbf{F}$ je *konačne karakteristike* ako nije beskonačne karakteristike. Ako je polje $\mathbf{F}$ konačne karakteristike onda neprazan skup $S = \{n \in \mathbf{N}^+ | \text{postoji } x \in F \setminus \{0\}, n \cdot x = 0\}$ ima najmanji element n_0. Može se pokazati da je n_0 prost broj i da za sve $x \in F$ važi $n_0 \cdot x = 0$. Ovaj broj n_0 nazivamo karakteristikom polja $\mathbf{F}$ i obeležavamo sa char($\mathbf{F}$). S obzirom da je char$\mathbf{F}$ prost broj u tom slučaju kažemo da je polje $\mathbf{F}$ proste karakteristike.

Primer 2 *Polja* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *i* $\mathbf{C}$ *su polja beskonačne karakteristike, dok je polje* $\mathbf{Z_p}$ *karakteristike* p

Teorema 1

(a) Polje $\mathbf{F}$ *je beskonačne karakteristike akko sadrži izomorfnu kopiju poja raciomalnih brojeva.*

(b)Polje $\mathbf{F}$ *je konačne karakteristike akko sadrži izomorfnu kopiju polja* $\mathbf{Z_p}$.

Neka su $\mathbf{F}$ i $\mathbf{E}$ polja. Preslikavanje $h : F \to E$ je homomorfizam polja $\mathbf{F}$ u polje $\mathbf{E}$, u oznaci $h : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$, ako je $h(x +_{\mathbf{F}} y) = x +_{\mathbf{E}} y$, $h(x \cdot_{\mathbf{F}} y) = x \cdot_{\mathbf{E}} y$, $h(0_{\mathbf{F}}) = 0_{\mathbf{E}}$, $h(1_{\mathbf{F}}) = 1_{\mathbf{E}}$. Homomorfizam koji je "1-1" zovemo *monomorfizam* ili *utapanje*.

Lema 1 *Neka je* $h : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ *homomorfizam polja. Tada je* h *monomorfizam.*

Neka su $\mathbf{F}$ i $\mathbf{E}$ polja. $\mathbf{F}$ je *podpolje* polja $\mathbf{E}$, u oznaci $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$ ako važi: $F \subseteq E, x +_{\mathbf{F}} y = x +_{\mathbf{E}} y$, $x \cdot_{\mathbf{F}} y = x \cdot_{\mathbf{E}} y$, $0_{\mathbf{F}} = 0_{\mathbf{E}}$, $1_{\mathbf{F}} = 1_{\mathbf{E}}$. Ako je $\mathbf{F}$ *podpolje* ili *raširenje* polja $\mathbf{E}$ onda kažemo da je $\mathbf{E}$ *ekstenzija* polja $\mathbf{F}$. Primetimo da važi: ako je $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$ onda polja $\mathbf{F}$ i $\mathbf{E}$ imaju istu karakteristiku.

Svako podpolje polja kompleksnih brojeva nazivamo *brojevno polje.*

Kažemo da je polje $\mathbf{F}$ *prosto* ako je $\mathbf{F} \cong \mathbf{Q}$ ili $\mathbf{F} \cong \mathbf{Z}_p$, za neki prost broj p.

Primer 3

1. $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$.
2. $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ *gde je* $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in Q\}$

Svako polje $\mathbf{E}$ je vektorski prostor nad bilo kojim svojim podpoljem $\mathbf{F}$. Aditivna grupa tog prostora je upravo aditivna grupa polja $\mathbf{E}$, dok je njegovo množenje skalarima iz $\mathbf{F}$ indukovano množenjem u samom polju $\mathbf{E}$. Ako je $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$ odgovarajuci vektorski prostor obeležavamo sa $\mathbf{E_F}$. U tom slučaju dimenziju tog prostora označavamo sa $\mathbf{E_F} = [E : F]$ i nazivamo *stepen raširenja* polja $\mathbf{E}$ nad $\mathbf{F}$. Ako je $[\mathbf{E} : \mathbf{F}] < \infty$ kažemo da je $\mathbf{E}$ konačno raširenje polja $\mathbf{E}$.

Primer 4 $[\mathbf{C} : \mathbf{R}] = 2$, $[\mathbf{R} : \mathbf{Q}] = \infty$,

Teorema 2 *Neka su* $\mathbf{F}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$ *polja takva da je* $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{K}$. *Tada je* $[\mathbf{K} : \mathbf{F}] = [\mathbf{K} : \mathbf{E}] \cdot [\mathbf{E} : \mathbf{F}]$

Dokaz: Ako je $\langle a_i | i \in I\rangle$ baza prostora $\mathbf{E_F}$ i $\langle b_j | j \in J\rangle$ baza prostora $\mathbf{K_E}$ onda je $\langle a_i b_j | i \in I, j \in J\rangle$ baza prostora $\mathbf{K_F}$. $\diamond$

Prethodna teorema važi u opštem slučaju, naime ako je $\mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{E}_n$ lanac polja onda je $[\mathbf{E}_n : \mathbf{E}_1] = [\mathbf{E}_n : \mathbf{E}_{n-1}] \cdot [\mathbf{E}_{n-1} : \mathbf{E}_{n-2} t \ldots \cdot [\mathbf{E}_2 : \mathbf{E}_1]$.

Teorema 3

(a) Ako je polje $\mathbf{E}$ *beskonačne karakteristike, tada je* $\mathbf{E}$ *vektorski prostor nad* $\mathbf{Q}$.

(b) Ako je polje $\mathbf{E}$ *konačne karakteristike* p*, tada je* $\mathbf{E}$ *vektorski prostor nad* $\mathbf{Z_p}$.

1.2 Prsteni i ideali

Definicija 2 *Struktura* $\mathbf{P} = (P, +, \cdot, 0)$ *je prsten ukoliko važi:*

1. $(P, +, 0)$ *je Abelova grupa*
2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
3. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Prsten $\mathbf{P}$ je komutativan ukoliko važi $x \cdot y = y \cdot x$. $\mathbf{P} = (P, +, \cdot, 0, 1)$ je prsten sa jedinicom ako važi $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

Primer 5

1. $(Z, +, \cdot, 0, 1)$ *je komutativan prsten sa jedinicom.*
2. *Svako polje je prsten*
3. $(2Z, +, \cdot, 0)$ *je komutativan prsten bez jedinice.*
4. *Skup* $M_n(\mathbf{F})$ *kvadratnih matrica reda* n *nad poljem* $\mathbf{F}$ *je nekomutativan prsten sa jedinicom.*

Neka su $\mathbf{P}$ i $\mathbf{L}$ prsteni i $h : P \to L$ homomorfizan . Tada je Imh= $\{h(a)|a \in P\}$ podprsten od $\mathbf{L}$. Drugim rečima, klasa prstena zatvorena je za homomorfne slike.

Prsten $\mathbf{P}$ je bez delitelja nule ako za sve $x, y \in P$ vazi: Ako je $x \cdot y = 0$ onda je $x = 0$ ili $y = 0$. *Ideal* prstena $\mathbf{P}$ je svaki $I \subseteq P$ koji ima sledeće osobine:

1. $0 \in I$
2. $(I, +, 0)$ je grupa.
3. za sve $i \in I, x \in P$ važi: $i \cdot x \in I$.

Nula ideal je *trivijalan* ideal svakog prstena a ideal I je *pravi* ideal prstena $\mathbf{P}$ ako je $I \neq P$. Pravi ideal I prstena $\mathbf{P}$ je *maksimalan* ako za svaki ideal J prstena $\mathbf{P}$ važi: ako je $I \subsetneq J$ onda je $J = P$. Neka je P komutativan prsten i $x \in P$. Tada $\{px|p \in P\}$ nazivamo *glavni ideal* i označavamo sa (x). Primetimo da je $P = (1)$. Ideal I u prstenu P je *prost* ako je $I \neq (1)$ i pri tom važi: ako $xy \in I$ onda $x \in I$ ili $y \in I$. Skup svih prostih ideala prstena P obeležavamo sa Spec(P).

Primer 6

1. $n\mathbf{Z} = \{nx|x \in Z\}$ *su ideali prstena* $\mathbf{Z}$*, i to su jedini ideali prstena* $\mathbf{Z}$.
2. *Ako je* p *prost broj onda je* $p\mathbf{Z}$ *maksimalan ideal prstena* $\mathbf{Z}$.

Neka je I ideal prstena $\mathbf{P}$. Definišimo relaciju $\sim$ na sledeći način: $x \sim y$ akko $x - y \in I$. Jednostavno se može pokazati da je $\sim$ kongruencija, to jest, da je relacija ekvivalencije i da je saglasna sa operacijama $+$ i $\cdot$. Odgovarajući količnički prsten $\mathbf{P}/\sim = (P/\sim, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ obeležavaćemo sa $\mathbf{P}/I$.

Teorema 4 *Neka je I maksimalan ideal prstena $\mathbf{P}$. Tada je $\mathbf{P}/I$ polje.*

Posledica 1 *Ako je p prost broj onda je $\mathbf{Z}_p$ polje.*

Navedimo neka osnovna tvrdjenja za ideale prstena:

Teorema 5 *Neka je $\mathbf{P} = (P, +, \cdot)$ prsten i neka su $I, J \subseteq P$ ideali prstena $\mathbf{P}$. Tada sledeći skupovi predstavljaju ideale u prstenu $\mathbf{P}$:*

1. $I + J = \{r | r = x + y, x \in I, y \in J\}$
2. $I \cdot J = \{r | (\exists n \in \mathbf{N}) r = \sum_{i=1}^{n} x_i y_j, x_i \in I, y_i \in J\}$
3. $I \cap J = \{r | r \in I \ \text{i} \ r \in J\}$
4. $I : J = \{r | (\forall y \in J) r \cdot y, y \cdot r \in I\}$

Neka je I ideal prstena $\mathbf{P}$. Tada skup $r(I) = \{x \in P | x^n \in I \text{ za neko } n > 0\}$ zovemo *korenski ideal* ideala I.

Lema 2 *Neka su I i J ideali. Tada važi:*

1. $I \subseteq r(I)$
2. $r(r(I)) = r(I)$
3. $r(I \cdot J) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$
4. $r(I) = (1)$ *akko* $I = (1)$
5. $r(I + J) = r(r(I) + r(J))$
6. *Ako je I prost ideal, onda je $r(I^n) = I$ za svako $n > 0$*

Teorema 6 *Neka je $\mathbf{P} = (P, +, 0)$ prsten. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *Svaki ideal I prstena $\mathbf{P}$ je konačno generisan.*
2. *Svaki strogo rastući lanac ideala $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \ldots$ prstena $\mathbf{P}$ je stacionaran.*
3. *Svaki neprazan skup ideala u $\mathbf{P}$ ima maksimalan element.*

Prsten $\mathbf{P} = (P, +, 0)$ koji ispunjava bilo koji uslov prethodne teoreme naziva se *Neterin prsten.*

1.3 Polinomi

Neka je $\mathbf{F}$ prsten. Skup svih polinoma promenljive x sa koeficijentima iz F obeležavamo sa $F[x]$. Dakle, $F[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n | a_i \in F\}$. Nula polinom, polinom čiji su svi koeficijenti jednaki nulu, obeležavamo sa $\mathbf{0}$, dok sa $\mathbf{1}$ obeležavamo polinom kod koga je $a_1 = 1$, a ostali koefocijenti su nula. Stuktura $\mathbf{F}[x] = (F[x], +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ gde su $+$ i $\cdot$ uobičajene operacija sabiranja i množenja polinoma je komutativan prsten sa jedinicom bez delitelja nule. Skup polinoma više promenljivih definiše se induktivno. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ promenljive onda je $F[x_1, x_2, \ldots, x_n] = (F[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}])[x_n]$.

Lema 3 *Neka je polje $\mathbf{F}$ podpolje polja $\mathbf{K}$ i $I \subseteq F[x_1, \ldots, x_n]$ prost ideal. Tada postoji prost ideal $J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ takav da je $J \cap F[x_1, \ldots, x_n] = I$.*

Dokaz: Ako je $K[x_1, \ldots, x_n]I$ ideal u $K[x_1, \ldots, x_n]$ generisan sa I pokazaćemo da je $K[x_1, \ldots, x_n]I \cap F[x_1, \ldots, x_n] = I$. Neka je B baza za $\mathbf{K}$ posmatrano kao $\mathbf{F}$ vektorski prostor i $1 \in B$. Ako $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, onda je $f = \sum_{b \in B} f_b b$ gde svaki $f_b \in F[x_1, \ldots, x_n]$ i svi sem konačno mnogo f_b-ova su jednaki nuli. Ako $f \in K[x_1, \ldots, x_n]I$, onda svaki f_b pripada I. Ako $f \in K[x_1, \ldots, x_n]I \cap F[x_1, \ldots, x_n]$, onda je $f = f_1 \in I$. Neka je S multiplikativno zatvoren skup $F[x_1, \ldots, x_n] \setminus I$. Neka je $J \subsetneq K[x_1, \ldots, x_n]$ maksimalan medju idealima koji sadrže I i ne seku se sa S. Tada je J prost ideal i $J \cap F[x_1, \ldots, x_n] = I$. $\diamond$

Teorema 7 *(Hilbertova teorema) Ako je $\mathbf{K}$ polje onda je prsten $K[x_1, \ldots, x_n]$ Neterin.*

Racionalni izrazi promenljive x nad poljem $\mathbf{F}$ su izrazi oblika $f(x)/g(x)$, gde je $g \neq \mathbf{0}$. Skup svih racionalnih izraza obeležavamo sa $F(x)$. Operacije množenja i sabiranja u $F(x)$ uvodimo na uobičajeni način:
$f/g + f'/g' = (fg' + f'g)/gg'$; $(f/g) \cdot (f'/g') = (ff')/(gg')$, $g, g' \neq \mathbf{0}$

Teorema 8

1. *$\mathbf{F}(x) = (F(x), +, \cdot, \mathbf{0}/\mathbf{1}, \mathbf{1}/\mathbf{1})$ je polje*

2. *$\mathbf{F}[x]$ se utapa u $\mathbf{F}(x)$, utapanje je $i : f \mapsto f/\mathbf{1}$.*

Polinom $f \in F[x]$, $\deg(f) \geq 1$ je *rastavljiv* nad poljem $\mathbf{F}$ ako postoje $g, h \in F[x]$ takvi da je $f = g \cdot h$ i $\deg(g)$, $\deg(h) < \deg(f)$. Polinom $f \in F[x]$, $\deg(f) \geq 1$ je *nerastavljiv* nad poljem $\mathbf{F}$ ako nije rastavljiv nad $\mathbf{F}$.

Primer 7

1. *Polinom $x^2 - 2$ je nerastavljiv nad $\mathbf{Q}$.*

2. *Polinom $x^2 + 1$ je rastavljiv nad $\mathbf{Z}_2$ jer je $x^2 + 1 = (x+1)^2$ u $\mathbf{Z}_2$.*

Teorema 9 *Neka je $f \in F[x]$, $\deg(f) \geq 1$. Tada postoje nerastavljivi polinomi $g_1, g_2, \ldots, g_k$ takvi da je $f = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k$. Ovo razlaganje je jedinstveno do na redosled faktora i umnožak konstantama iz F članova razlaganja.*

Lema 4 *(Gaus)*
Neka je $f \in Z[x]$. Tada, f je nerastavljiv nad $\mathbf{Q}$ *akko je nerastavljiv nad* $\mathbf{Z}$.

Na osnovu prethodnog izlaganja o idealima možemo zaključiti sledeće: Ako je $f \in \mathbf{F}[x]$ onda je $(f) = \{f \cdot g | g \in \mathbf{F}[x]\}$ ideal prstena $\mathbf{F}[x]$. Takodje, ako je f nerastavljiv nad $\mathbf{F}$ onda je (f) maksimalan ideal pa je $\mathbf{F}[x]/(f)$ polje.

U jednom od prethonih primera videli smo da polinom $x^2 - 2$ nema koren u polju $\mathbf{Q}$. U polju $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, ovaj polinom ima koren jer je $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ u $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Sledeća teorema pokazuje da za bilo koji polinom $f \in \mathbf{F}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ gde je $\mathbf{F}$ proizvoljno polje, postoji polje u kome f ima koren.

Teorema 10 *(Kroneker) Neka je* $\mathbf{F}$ *polje i* $f \in \mathbf{F}[x]$, *deg*$(f) \geq 1$. *Tada postoji ekstenzija* $\mathbf{E} \supseteq \mathbf{F}$ *takva da f ima koren u* $\mathbf{E}$.

Dokaz: Neka je g nerastavljiv faktor od f. (ukoliko je f nerastavljiv onda $g = f$). Neka je $k : \mathbf{F}[x] \to \mathbf{F}[x]/(g)$ kanonski homomorfizam. Preslikavanje $k \mid_F$ je utapanje pa bez gubljenja opštosti možemo smatrati da je $\mathbf{F}$ podpolje polja $\mathbf{F}[x]/(g)$. Jednostavno se proverava da je $k(g(x)) = \mathbf{0}$ pa je $k(x)$ koren polinoma $g(x)$ u polju $\mathbf{F}[x]/(g)$. $\diamond$

Teorema 11 *Neka je* $f \in \mathbf{F}[x]$ *nerastavljiv polinom i deg*$(f) = n$. *Tada je* $[\mathbf{F}[x]/(f) : \mathbf{F}] = n$

Dokaz: Neka je $I = (f)$. Može se pokazati da je $a_0 = I + 1, a_1 = I + x, \ldots, a_{n-1} = I + x^{n-1}$ baza vektorskog prostora $((\mathbf{F}[x]/(f), +, \mathbf{0}), \mathbf{F}, \cdot)$. $\diamond$

1.4 Algebarska raširenja

Neka su $\mathbf{F}$ i $\mathbf{K}$ polja i $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{K}$. Element $a \in K$ je *algebarski element* nad $\mathbf{F}$ ako postoji $p \in \mathbf{F}[x]$ tako da je $p(a) = 0$. U suprotnom, element $a \in K$ naziva se *transcedentni element* nad poljem $\mathbf{F}$. Raširenje $\mathbf{K}$ je *algebarsko raširenje* polja $\mathbf{F}$ ako je svaki $a \in K$ algebarski nad $\mathbf{F}$, u suprotnom, raširenje $\mathbf{K}$ se naziva *transcedentno raširenje* polja $\mathbf{F}$.

Primer 8

1. *Neka je $z = a + bi$ proizvoljan kompleksan broj. Uočimo polinom $p(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$. Tada je $p(z) = 0$ i $p \in$* $\mathbf{R}[x]$. *Prema tome, polje* $\mathbf{C}$ *je algebarsko raširenje polja realnih brojeva* $\mathbf{R}$.

2. *Polje* $\mathbf{R}$ *je transcedentno raširenje polja* $\mathbf{Q}$ *jer broj π nije koren nijednog polinoma sa racionalnim koeficijentima.*

Teorema 12 *Ako je* $\mathbf{K}$ *konačno raširenje polja* $\mathbf{F}$, *onda je* $\mathbf{K}$ *algebarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$.

Neka je $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{K}$ i neka je $\alpha \in K$ algebarski element nad poljem $\mathbf{F}$. Tada postoji polinom $p \in \mathbf{F}[x]$, tako da je $p(\alpha) = 0$. Prema principu najmanjeg elementa, postoji polinom $m \in \mathbf{F}[x]$ najmanjeg stepena takav da je $m(\alpha) = 0$. Možemo pretpostaviti da je m moničan. Tako odredjen polinom nazivamo *minimalan polinom* za α i obeležavamo sa m_α ili samo m ako je jasno iz konteksta o kom elementu se radi. Ako $\alpha \in F$ onda je $m_\alpha = x - \alpha$; ako $\alpha \in K \setminus F$ onda je $\deg(m_\alpha) \geq 2$.

Teorema 13 *Neka je* $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{K}$, $\alpha \in K$ *algebarski nad* $\mathbf{F}$ *i* m *minimalan polinom za* α. *Tada važi:*

1. m *je nerastavljiv nad* $\mathbf{F}$.
2. *Ako* $p \in \mathbf{F}[x]$ *i* $p(\alpha) = 0$ *onda* $m(x)|p(x)$.
3. $F[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} | a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in F\}$,$n = deg(m)$, *je polje (podpolje polja* $\mathbf{K}$*).*
4. $[\mathbf{F}[\alpha] : \mathbf{F}] = deg(m)$.

Neka je $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$, $\alpha \in K$ i $F(\alpha) = \{\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} | p, q \in F[x], q(\alpha) \neq 0\}$. Tada je $\mathbf{F}(\alpha)$ najmanje podpolje polja $\mathbf{K}$ koje sadrži skup $F \cup \{\alpha\}$. Neka je $F[\alpha]$ kao u prethodnoj teoremi. Tada važi:

Teorema 14 *Neka je* $\mathbf{F}$ *podpolje polja* $\mathbf{K}$ *i* $\alpha \in K$ *algebarski nad* $\mathbf{F}$. *Tada je* $\mathbf{F}[\alpha] = \mathbf{F}(\alpha)$.

Sada ćemo navesti skicu izvornog Kronekerovog dokaza teoreme 10 koji se bazira na konkretnoj konstrukciji traženog raširenja.

Dokaz: Neka je $p \in F[x]$ nerastavljiv polinom. Treba konstruisati raširenje $\mathbf{K}$ polja $\mathbf{F}$ u kome p ima koren. Pretpostavimo da je p moničan polinom. Ako je $\deg(p) = 1$, onda je $p(x) = x - \alpha$ za neki $\alpha \in F$ pa je $\mathbf{K} = \mathbf{F}$. Neka je $n = \deg(p) \geq 2$ i neka je ξ novi simbol konstante. Formirajmo skup $K = \{a_0 + a_1\xi + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1} | a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in F\}$ formalnih polinoma nad ξ. U skupu $K[\xi]$ uvedimo operacije $+_p$ i $\cdot_p$ (sabiranje i množenje po modulu polinoma p), na sledeći način: $f +_p g = f + g$ ($\deg(f + g) < \deg(p)$, pa je $f + g$ ostatak pri deljenju sa p); $f \cdot_p g = \mathrm{rest}(f(x)g(x), p(x))(\xi)$. Neka je $\mathbf{K} = (K, +_p, \cdot_p, \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Može se pokazati da je ovako definisana struktura $\mathbf{K}$ polje i da je $p(\xi) = 0$ u $\mathbf{K}$.

Ovako konsrtuisano polje $\mathbf{K}$ obeležavaćemo sa $\mathbf{F}[\xi]$.

Teorema 15 *Neka je* $\mathbf{F}$ *polje,* $p \in \mathbf{F}[x]$ *nerastavljiv i* $deg(p) = n$. *Dalje, neka su* $\mathbf{K}^{'}$ *i* $\mathbf{K}^{''}$ *raširenja polja* $\mathbf{F}$ *i neka su* $\alpha \in K^{'}$ *i* $\beta \in K^{''}$ *takvi da je* $\mathbf{K}^{'} = \mathbf{F}(\alpha)$, $\mathbf{K}^{''} = \mathbf{F}(\beta)$, $p(\alpha) = 0$ *u* $\mathbf{K}^{'}$ *i* $p(\beta) = 0$ *u* $\mathbf{K}^{''}$. *Tada postoji izomorfizam* $\sigma : \mathbf{K}^{'} \to \mathbf{K}^{''}$ *takav da je* $\sigma|_F = i_F$.

Dokaz: Neka je $\mathbf{K} = \mathbf{F}[\xi]$ Kronekerovo polje za polinom p i neka je $\sigma : \mathbf{K}^{'} \to \mathbf{K}$ preslikavanje definisano sa $\sigma(f(\alpha)) = f(\xi)$ za $f \in \mathbf{F}[x]$. Može se pokazati da je σ izomorfizam. Prema tome, važiće $\mathbf{K}^{'} \cong \mathbf{K} \cong \mathbf{K}''$. $\diamond$

1.5 Korensko polje polinoma

Definicija 3 *Neka se* $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$ *polja i neka* $f \in \mathbf{F}[x]$*,* $deg(f) \geq 1$*.* $\mathbf{E}$ *je* korensko polje *polinoma* f *akko*

1. *Polinom* f *ima faktorizaciju na linearne faktore, tj. za neke* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E$ *i neko* $c \in F$ *važi:* $f(x) = c(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$*.*
2. *Ni u jednom medjupolju* $\mathbf{L}$ $(\mathbf{F} \subsetneq \mathbf{L} \subsetneq \mathbf{E})$*,* f *se ne može rastaviti na linearne faktore.*

Teorema 16 *Neka je* $\mathbf{F}$ *polje i* $f \in \mathbf{F}[x]$*,* $deg(f) \geq 1$*. Tada* f *ima korenskoo polje.*

Ako je $\mathbf{E}$ korensko polje polinoma $p(x)$ nad poljem $\mathbf{F}$ i $p(x) = c(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ faktorizacija polinoma p u polju $\mathbf{E}$, tada je $\mathbf{E} = \mathbf{F}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i svaki a_{i+1} je algebarski nad poljem $\mathbf{F}(a_1, a_2, \ldots, a_i)$ za $0 \leq i < n$. Prema tome, iz

$$[\mathbf{E} : \mathbf{F}] = [\mathbf{F}(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \mathbf{F}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})] \ldots [\mathbf{F}(a_1) : \mathbf{F}]$$

i teoreme 12 sledi:

Teorema 17 *Ako je* $\mathbf{E}$ *korensko polje polinoma* $p(x)$ *nad poljem* $\mathbf{F}$*, tada je* $\mathbf{E}$ *algebarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$*.*

Teorema 18 *(O jedinstvenosti korenskog polja) Neka su* $\mathbf{E}, \mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}$ *korenska polja polinoma* $f \in \mathbf{F}[x]$*. Tada postoji* $\theta : \mathbf{E} \cong \mathbf{K}$ *tako da je* $\theta|_F = i_F$*.*

1.6 Polje algebarskih brojeva

Element $a \in \mathbf{C}$ je *algebarski broj* ako je a koren nekog polinoma $f \in \mathbf{Q}[x]$, $f \neq \mathbf{0}$. Skup $A = \{a \in \mathbf{C}|$ a je algebarski broj $\}$ nazivamo *skup algebarskih brojeva.* Dokazaćemo da je $\mathbf{A} = (A, +, \cdot, 0, 1)$ polje, podpolje polja $\mathbf{C}$ kao i da svaki polinom $f \in \mathbf{A}[x]$ ima koren u A.

Lema 5 *Neka su* $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{K}$ *polja. Ako je* $\mathbf{E}$ *algebarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i* $\mathbf{K}$ *algebarsko raširenje polja* $\mathbf{E}$*, onda je* $\mathbf{K}$ *algebarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$*.*

Dokaz: Neka je $\beta \in \mathbf{K}$. Kako je $\mathbf{K}$ algebarsko raširenje polja $\mathbf{E}$, β je koren nekog polinoma $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ u K , $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$. Dakle, β je algebarski element nad $\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, pa prema teoremi 13

$[\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) : \mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n,)] =$

$[\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta) : \mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)] < \infty$

Kako su $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebarski nad $\mathbf{F}$, α_i je algebarski nad $\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ za $1 \leq i \leq n$ pa je

$[\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbf{F}] =$

$[\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})] \ldots [\mathbf{F}(\alpha_0) : \mathbf{F}] < \infty$

Dakle, kako je $[\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)]$ konačno raširenje polja $\mathbf{F}$, na osnovu teoreme 12, $\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$. Dalje,

$[\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) : \mathbf{F}] =$
$[\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) : \mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \cdot [\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbf{F}] < \infty$
pa je $\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$ algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$. S obzirom da $\beta \in \mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$, β je algebarski nad $\mathbf{F}$. $\diamond$

Na osnovu dokaza prethodne teoreme, vidimo da važi:

Lema 6 *Neka je* $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$ *i neka su* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *algebarski nad* $\mathbf{F}$. *Tada je* $\mathbf{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *algebarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$.

Teorema 19 $\mathbf{A} = (A, +, \cdot, 0, 1)$ *je podpolje polja* $\mathbf{C}$.

Dokaz: Neka su $\alpha, \beta \in A$. Tada $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta \in Q(\alpha, \beta)$ i $\alpha^{-1} \in Q(\alpha, \beta)$ akko $\alpha \neq 0$. Elementi α, β su algebarski nad $\mathbf{Q}$ pa je na osnovu prethodne leme $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ algebarsko raširenje polja $\mathbf{Q}$. Dakle, $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$ i α^{-1} (za $\alpha \neq 0$) su algebarski nad $\mathbf{Q}$, prema tome $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta \in A$ i $\alpha^{-1} \in A$ ako $\alpha \neq 0$. $\diamond$

1.7 Separabilnost

Polinom $f \in \mathbf{F}[x]$ je *separabilan* ako su svi njegovi koreni u odgovarajućem korenskom polju $\mathbf{E}$ medjusobno različiti.

Teorema 20 *Neka je* $f \in \mathbf{F}[x]$. *Tada je* f *separabilan akko je* $(f, f') = 1$, *gde je* f' *izvod polinoma* f.

Primetimo da u poljima proste karakteristike postoje polinomi f takvi da je $\deg(f) \geq 1$ i $f' = \mathbf{0}$. Na primer, ako je p prost broj i $f(x) = x^{p^2} + x^p$ onda je $f' = \mathbf{0}$ u svakom polju karakteristike p. Ako je $\mathbf{F}$ polje karakteristike 0 i $f \in \mathbf{F}[x]$, $\deg(f) > 0$ tada je $f' \neq \mathbf{0}$.

Lema 7 *Neka je* $f \in \mathbf{F}[x]$, *deg*$(f) \geq 1$ *nerastavljiv. Tada je* f *separabilan akko je* $f' \neq \mathbf{0}$.

Posledica 2 *Neka je* $\mathbf{F}$ *polje karakteristike* 0 *i neka je* $f \in \mathbf{F}[x]$ *nerastavljiv nad* $\mathbf{F}$. *Tada je* f *separabilan. Posebno, ako je* f *nerastavljiv nad brojevnim poljem onda je* f *separabilan.*

Neka su $\mathbf{F}$ i $\mathbf{E}$ polja i $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$. Element $\alpha \in E$ je *separabilan* nad $\mathbf{F}$ ako je α koren nekog separabilnog polinoma $f \in \mathbf{F}[x]$.

$\mathbf{E}$ *je separabino raširenje* polja $\mathbf{F}$ ako je svaki $\alpha \in E$ separabilan nad $\mathbf{F}$.

Primetimo da je separabilno raširenje polja $\mathbf{F}$ algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$. Neka je $\mathbf{F}$ polje karakteristike nula, $\mathbf{E}$ algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$ i $\alpha \in E$ proizvoljan element. Kako je α algebarski nad $\mathbf{F}$ postoji minimalan polinom m_α za α nad $\mathbf{F}$. S obzirom da je m_α nerastavljiv, α je separabilan nad $\mathbf{F}$. Prema tome, svako algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$ karakteristike nula je i separabilno.

Neka su $\mathbf{F}$ i $\mathbf{E}$ polja i $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$. Ako postoji $\alpha \in E$ tako da je $\mathbf{E} = \mathbf{F}(\alpha)$, tada kažemo da je $\mathbf{E}$ *prosto raširenje* polja $\mathbf{F}$. U tom slučaju kažemo da je α *primitivan element* polja $\mathbf{E}$.

Primer 9 *Polje* $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ *je prosto algebarsko raširenje polja* $\mathbf{Q}$ *dok je* $\mathbf{Q}(\pi)$ *prosto transcedentno raširenje polja* $\mathbf{Q}$.

Teorema 21 *(O primitivnom elementu) Neka je* $\mathbf{E}$ *konačno separabino raširenje polja* $\mathbf{F}$. *Tada je* $\mathbf{E}$ *prosto raširenje polja* $\mathbf{F}$.

Posledica 3 *Neka je* $\mathbf{F}$ *brojevno polje i* $\mathbf{E} = \mathbf{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *algebaarsko raširenje polja* $\mathbf{F}$. *Kako je u tom slučaju* E *separabilno raširenje polja* $\mathbf{F}$, *onda postoji* $\alpha \in C$ *takvo da je* $\mathbf{E} = \mathbf{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{F}(\alpha)$.

Primer 10 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. *Dakle,* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ *je prosto raširenje polja* $\mathbf{Q}$ *i* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *je primitivan element polja* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

1.8 Algebarsko zatvorenje polja

Polje $\mathbf{E}$ je *algebarski zatvoreno* ako svaki polinom $f \in \mathbf{E}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ ima koren u $\mathbf{E}$.

Ako je $\mathbf{E}$ algebarski zatvoreno polje i $f \in E[x]$, onda f ima linearnu faktorizaciju u $\mathbf{E}$ pa $\mathbf{E}$ sadrži korensko polje polinoma f.

Primer 11

1. *Polje* $\mathbf{Q}$ *nije algebarski zatvoreno jer npr. polinom* $x^2 - 3$ *nema koren u* $\mathbf{Q}$
2. *Polje* $\mathbf{R}$ *nije algebarski zatvoreno (polinom* $x^2 + 1$ *nema korem u* $\mathbf{R}$*).*

Sledeće tvrdjenje nazivamo *Osnovna teorema algebre*

Teorema 22 *Polje kompleksnih brojeva je algebarski zatvoreno polje.*

Kao što je napomenuto u prethodnom poglavlju važi sledeća teorema:

Teorema 23 *Polje algebarskih brojeva* $\mathbf{A}$ *je algebarski zatvoreno.*

Dokaz: Neka $f \in \mathbf{A}[x]$, $\deg(f) \geq 1$ i neka je $\alpha \in \mathbf{C}$ koren polinoma f u polju kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ pa kako su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ algebarski nad $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je algebarsko raširenje polja $\mathbf{Q}$. α je algebarski nad $\mathbf{Q}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ pa je $\mathbf{Q}(a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha)$ algebarsko raširenje polja $\mathbf{Q}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Na osnovu leme 5, $\mathbf{Q}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je algebarsko raširenje polja $\mathbf{Q}$, pa kako $\alpha \in \mathbf{Q}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, to je α algebarski nad $\mathbf{Q}$, to jest $\alpha \in A$. $\diamond$

Neka je $\mathbf{F}_0 \subseteq \mathbf{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{F}_n$ prebrojiv niz polja i neka je $E = \bigcup_n F_n$. Tada se nad domenom E može definisati struktura polja tako da je za svako $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{F}_n \subseteq \mathbf{E}$.

Neka su $\alpha, \beta \in E$. Tada za neke $m, n \in \mathbf{N}$, $\alpha \in F_m$ i $\beta \in F_n$. Neka je $m \geq n$. Sa obzirom da je tada $\mathbf{F}_n \subseteq \mathbf{F}_m$ operacije $+_E$ i $\cdot_E$ definišemo na sledeći način: $\alpha +_E \beta := \alpha +_{F_m} \beta$ i $\alpha \cdot_E \beta := \alpha \cdot_{F_m} \beta$. Neposredno se proverava da je $\mathbf{E} = (E, +_E, \cdot_E, 0, 1)$ polje. Ovo polje nazivamo unijom polja $\mathbf{F}_i$ i pišemo $\mathbf{E} = \bigcup_i \mathbf{F}_i$.

Teorema 24 *Svako polje* $\mathbf{F}$ *sadržano je u nekom algebarski zatvorenom polju.*

Dokaz: Neka je $k = max(\aleph_0, |F|)$ (za beskonačno polje uzimamo $k = |F|$ a za konačno $k = \aleph_0$). Tada sve polinome iz $F[x]$ stepena ≥ 1 možemo poredjati u niz:

$$f_0, f_1, \ldots, f_\alpha, \ldots, \alpha < k$$

Tada se konstruiše niz polja $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \subseteq \mathbf{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{F}_\alpha, \ldots \ \alpha < k$ na sledeći način:

Ako je α ordinal sledbenik, tj $\alpha = \beta + 1$, tada odredjujemo $\mathbf{F}_\alpha$ kao korensko polje polinoma p_β nad $\mathbf{F}_\beta$.

Ako je α granični ordinal , neka je $\mathbf{K} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{F}_\beta$. Tada je $\mathbf{F}_\alpha$ korensko polje polinoma f_α nad $\mathbf{K}$.

Neka je sada $\mathbf{E}_1 = \bigcup_{\alpha<k} \mathbf{F}_\alpha$. Dokažimo da svaki polinom $f \in F[x]$ ima koren u $\mathbf{E}_1$. Zaista, $f = f_i$ sa nekim indeksom i u ordinalnom nizu. Prema načinu definisanja polinom f_i ima koren u $\mathbf{F}_{i+1}$ a samim tim i u $\mathbf{E}_1$.

Formirajmo sada lanac polja $\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \subseteq \mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2 \subseteq \ldots$ na sledći način: Polje $\mathbf{E}_2$ je konstruisano nad poljem $\mathbf{E}_1$ na isti način na koji je polje $\mathbf{E}_1$ konstruisano nad poljem $\mathbf{E}_0$, i na isti način se konstruiše polje $\mathbf{E}_{n+1}$ nad poljem $\mathbf{E}_n$.

Neka je sada $\mathbf{E} = \bigcup_n \mathbf{E_n}$. Dokazujemo da je $\mathbf{E}$ traženo raširenje polja $\mathbf{F}$. Posmatrajmo polinom $p \in E[x]$ stepena $n = \deg(p) \geq 1$. Tada je $p(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n$ za neke elemente $p_i \in \mathbf{E}_{\mathbf{k_i}}$ $0 \leq i \leq n$. Uzimajući $m = \max\{k_0, k_1, \ldots, k_n\}$ dobijamo da $p \in E_m[x]$. Po prethodnoj konstrukciji polinom p ima koren u polji $\mathbf{E}_{m+1}$ pa i u polju $\mathbf{E}$. $\diamond$

Polje $\mathbf{E}$ je *algebarsko zatvorenje* polja $\mathbf{F}$ ako je

1. $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$
2. $\mathbf{E}$ je algebarsko raširenje polja $\mathbf{F}$
3. $\mathbf{E}$ je algebarski zatvoreno

Algebarsko zatvotenje polja $\mathbf{E}$ obeležavaćemo sa $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$.

Primer 12 *Polje kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$ *je algebarsko zatvorenje polja realnih realnih brojeva* $\mathbf{R}$*, dok je polje algebarskih brojeva* $\mathbf{A}$ *algebarsko zatvorenje polja racionalnih brojeva* $\mathbf{Q}$.

Teorema 25 *Svako polje ima algebarsko zatvorenje.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{F}$ proizvoljno polje. Na osnovu teoreme 19 postoji algebarski zatvoreno polje $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}$. Neka je $E = \{\alpha \in K | \alpha \text{je algebarski nad } \mathbf{F}\}$. Primetimo da je $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$ i da je $\mathbf{E}$ algebarsko raširenje polja. Može se dokazati da je polje $\mathbf{E}$ algebarski zatvoreno na sličan način kao što je pokazano da je polje algebarskih brojeva algebarski zatvoreno. $\diamond$

Algebarsko zatvorenje polja je jedinstveno do na izomorfizam, tačnije važi sledeće tvrdjenje:

Teorema 26 *Neka su* $\mathbf{F}$ *i* $\mathbf{F}^{'}$ *polja,* $\sigma : \mathbf{F} \cong \mathbf{F}^{'}$ *i neka su* $\mathbf{K}$ *i* $\mathbf{K}^{'}$ *algebarska zatvorenja polja* $\mathbf{F}$ *i* $\mathbf{F}^{'}$ *redom. Tada postoji* $\theta : \mathbf{K} \simeq \mathbf{K}^{'}$ *tako da je* $\theta|_F = \sigma$.

1.9 Transcedentna raširenja polja

Teorema 27 *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka je element* $b \in K$ *transcedentan nad poljem* $\mathbf{F}$*. Tada važi:*

1. *Prsten* $\mathbf{F}[b]$ *je izomorfan prstenu polinoma* $\mathbf{F}[x]$
2. *Polje* $\mathbf{F}(b)$ *je najmanje podpolje polja* $\mathbf{K}$*, koje sadrži* $F \cup \{b\}$

Razmotrimo složena raširenja polja. Neka je polje $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$. Elementi $a_1, \ldots, a_n \in K$ su *algebarski zavisni elementi* nad poljem $\mathbf{F}$ ako je $p(a_1, \ldots, a_n) = 0$ za neki nenula polinom $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$. U suprotnom, ele- menti $a_1, \ldots, a_n \in K$ nazivaju se *algebarski nezavisni elementi* nad poljem $\mathbf{F}$. Za neprazan podskup $S \subseteq K$ smatramo da je *algebarski nezavisan skup* ako je takav svaki konačan podskup skupa S. U suprotnom, S je *algebarski zavisan skup*. Smatramo da je prazan skup algebarski nezavisan.

Primer 13 *Posmatrajmo polje realnih brojeva* $\mathbf{R}$ *kao raširenje polja racionlnih brojeva* $\mathbf{Q}$*. Tada su elementi* $a_1 = \sqrt{2}$ *i* $a_2 = \sqrt{5}$ *algebarski zavisni nad* $\mathbf{Q}$ *jer je* $a_1^2 + a_2^2 - 5$*. Sa druge strane, elementi* $a_1 = 1$ *i* $a_2 = \pi$ *su algebarski nezavisni nad* $\mathbf{Q}$*, jer je* π *transcedentan.*

Teorema 28 *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka su elementi* $a_1, \ldots, a_n \in K$ *algebarski nezavisni elementi nad poljem* $\mathbf{F}$*. Tada važi* $F(x_1, \ldots, x_n) \cong F(a_1, \ldots, a_n)$*.*

Dokaz: Funkcija f definisana sa $f(p(x_1, \ldots, x_n)) = p(a_1, \ldots, a_n)$ predstavlja homomorfizam iz $F[x_1, \ldots, x_n]$ u $F[a_1, \ldots, a_n]$. Po definiciji, funkcija f je surjektivna. Na osnovu algebarske nezavisnosti elemenata $a_1, \ldots, a_n$ sledi da je f injektivna. Funkcija definisana sa $f_1(\frac{p(x_1,\ldots,x_n)}{q(x_1,\ldots,x_n)}) = \frac{p(a_1,\ldots,a_n)}{q(a_1,\ldots,a_n)}$ za $p, q \in F[x_1, \ldots, x_n]$ gde je $q(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ predstavlja homomorfizam iz $F(x_1, \ldots, x_n)$ u $F(a_1, \ldots, a_n)$ koji je raširenje homomorfizma f. Tako odredjen homomorfizam f_1 je takodje bijektivan pa je izomorfizam. $\diamond$

Lema 8 *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka je* $S \subsetneq K$ *algebarski nezavisan skup nad* $\mathbf{F}$*. Za element* $c \in K \setminus F(S)$*, skup* $S \cup \{c\}$ *je algebarski nezavisan nad* $\mathbf{F}$ *akko je* c *transcedentalan element nad* $\mathbf{F}(S)$*.*

Dokaz: Neka je skup $S \cup \{c\}$ algebarski nezavisan nad $\mathbf{F}$ i pretpostavimo da je c algebarski element nad $\mathbf{F}(S)$. Tada važi:

$$\frac{p_n(s)}{q_n(s)} c^n + \ldots + \frac{p_0(s)}{q_n(0)} = 0$$

za neko $s = (s_1, \ldots, s_m) \in S$ ($p_i, q_i \in F[S]$ i $q_i(s) \neq 0$ za $i = 0, \ldots, n$). Prethodna jednakost je u kontradikciji sa algebarskom nezavisnošću skupa $S \cup \{c\}$.

Obrnuto, neka je element c transcedentan nad poljem $\mathbf{F}(S)$ i pretpostavimo da je skup $S \cup \{c\}$ algebarski zavisan nad $\mathbf{F}$. Tada važi:

$$r_n(s)c^n + \ldots + r_0(s) = 0$$

za neko $s = (s_1, \ldots, s_m) \in S$ ($r_i \in F[S]$ za $i = 0, \ldots,$). Prethodna jednakost je u kontradikciji sa transcedentalnošću elementa c nad poljem $\mathbf{F}(S)$. $\diamond$

Neka je polje $\mathbf{K}$ raširenje polja $\mathbf{F}$. Podskup $B \subseteq K$ nazivamo *transcedentna baza* raširenja $\mathbf{K}$ nad $\mathbf{F}$ ako je B maksimalan algebarski nezavisan skup nad $\mathbf{F}$. Tada, za svako $c \in K \setminus B$ skup $B \cup \{c\}$ je algebarski zavisan skup.

Teorema 29 *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka je* $B \subseteq K$ *algebarski nezavisan skup. Skup* B *je transcedentna baza raširenja* $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}$ *akko je raširerenje* $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}(B)$ *algebarsko.*

Dokaz: Neka je B transcedentna baza raširenja $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}$. Posmatrajmo proizvoljni element $c \in K \setminus F(B)$. Tada $c \in K \setminus B$. Odatle, prema definiciji trancedentne baze, sledi da je $B \cup \{c\}$ algebarski zavisan skup. Koristeći kontrapoziciju prethodne leme, dobijamo da je element c algebarski nad $\mathbf{F}(B)$.

Obrnuto, neka je raširenje $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}(B)$ algebarsko, za neki algebarski nezavisan skup $B \subseteq K$. Svaki element $c \in K$ je algebarski nad $\mathbf{F}(B)$. Specijalno, svaki $c \in K \setminus B$ je algebarski nad $\mathbf{F}(B)$. Tada važi:

$$\frac{p_n(b)}{q_n(b)}c^n + \ldots + \frac{p_0(b)}{q_n(b)} = 0$$

za neko $b = (b_1, \ldots, b_m) \in B$ ($p_i, q_i \in F[B]$ i $q_i(b) \neq 0$ za $i = 0, \ldots, n$). Prethodna jednakost pokazuje da je $B \cup \{c\}$ algebarski zavisan skup. Odatle sledi da je B transcedentna baza raširenja $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}$.

Teorema 30 *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka je* $S \subseteq K$ *takav da je raširenje* $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}(S)$ *algebarsko. Tada skup* S *sadrži transcedentnu bazu* B *raširenja* $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}$.

Dokaz: Za $S \subseteq K$ posmatramo skup τ svih algebarski nezvisnih skupova $T \subseteq S$ nad poljem $\mathbf{F}$. Tada je τ neprazan jer $\emptyset \in \tau$. Prema Zornovoj lemi postoji, u odnosu na inkuziju, maksimalan algebarski nezavisan skup $B \subseteq S$. Dokazujemo da je $\mathbf{F}(S)$ algebarsko raširenje od $\mathbf{F}(B)$. Pretpostavimo suprotno, da postoji element $c \in (K \setminus F(B)) \cap F(S)$ koji je transcedentan nad $\mathbf{F}(B)$. Tada, prema prethodnoj lemi, skup $S_c = B \cup \{c\}$ je algebarski nezavisan skup nad $\mathbf{F}$. Samim tim, skup S_c je maksimalniji algebarski nezavisan skup od B, što je nemoguće. Konačno, po pretpostavci, $\mathbf{K}$ je algebarsko raširenje od $\mathbf{F}(S)$ i prethodno je dokazano da je $\mathbf{F}(S)$ algebarsko raširenje od $\mathbf{F}(B)$. Odatle sledi da je $\mathbf{K}$ algebarsko raširenje od $\mathbf{F}(B)$. Prema prethodnoj teoremi skup B je transcedentna baza raširenja $\mathbf{K}$ nad $\mathbf{F}$. $\diamond$

Posledica 4 *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$*. Tada postoji transcedentna baza* $\mathbf{B}$ *raširenja* $\mathbf{K}$ *nad* $\mathbf{F}$*.*

Ako je B transcedentna baza raširenja $\mathbf{K}$ nad $\mathbf{F}$ onda raširenje $\mathbf{F}(B)$ nazivamo *čisto transcedentno raširenje.*

Primer 14 *Za bilo koje polje* $\mathbf{K}$*, polje racionalnih funkcija* $\mathbf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ *je čisto transcedentno raširenje nad* $\mathbf{K}$ *(gde su* $x_1, \ldots, x_n$ *medjusobno nezavisne promenjljive). Za polje realnih brojeva* $\mathbf{R}$*, raširenje* $\mathbf{R}(x, \sin x, e^x)$ *je čisto transcedentno raširenje nad* $\mathbf{R}$*.*

Ako je B transcedentna baza raširenja $\mathbf{K}$ nad $\mathbf{F}$ onda kardinalni broj $|B|$ označavamo sa $\deg(\mathbf{K}/\mathbf{F})$ i nazivamo *stepenom transcedentnosti* raširenja $\mathbf{K}$ nad $\mathbf{F}$. Korektnost ove definicije sledi na osnovu naredna dva tvrdjenja.

Teorema 31 *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$*. Neka su* B *i* C *konačne transcedentne baze raširenja* $\mathbf{K}$ *nad* $\mathbf{F}$*. Tada je* $|B| = |C|$*.*

Teorema 32 *Neka je polje* $\mathbf{K}$ *raširenje polja* $\mathbf{F}$ *i neka su* B *i* C *transcedentne baze raširenja* $\mathbf{K}$ *nad* $\mathbf{F}$*. Ako je* B *beskonačna transcedentna baza, tada je i* C *beskonačna transcedentna baza i važi* $|B| = |C|$*.*

2 Teorija modela

2.1 Jezik prvog reda

Jezik prvog reda, u oznaci L je skup simbola. Ovi simboli podeljeni su u tri grupe, *relacijski simboli*, *funkcijski simboli* i *simboli konstanti* koje ćemo redom označavati sa Rel_L, Fun_L i Const_L.

Funkcija ar: $L \to \mathbf{N}$ svakom simbolu $s \in L$ pridružuje njegovu arnost. Za $s \in \mathrm{Const}_L$ $\mathrm{ar}(s) = 0$ dok je za $s \in \mathrm{Rel}_L \cup \mathrm{Fun}_L$ $\mathrm{ar}(s) \geq 1$.

Primer 15 *Jezik teorije polja je struktura* $L = (+, \cdot, 0, 1)$

Ako su L i L' jezici prvog reda i $L \subseteq L'$, tada L' nazivamo *ekpanzija* jezika L, dok L zovemo redukcija jezika L'. Ako se skup $L \setminus L'$ sastoji samo od simbola konstanti onda kažemo da je jezik L' prosta ekspanzija jezika L.

Logičke simbole jezika prvog reda čine :

1. logički veznici: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$
2. znak jednakosti $=$
3. kvantori: $\exists$ i $\forall$
4. beskonačan skup promenljivih: Var$= \{x_1, x_2, \ldots\}$.
5. skup pomoćnih simbola: ( ) , (otvorena i zatvorena zagrada i zarez).

Terme (izraze) jezika L rekurzivno definišemo na sledeći način:

1. Promenljive i konstante su termi.
2. Ako je F $\in\mathrm{Fun}_L$, $\mathrm{ar}(F) = n$ i $t_1, \ldots, t_n$ su termi jezika L, onda je i $F(t_1, \ldots, t_n)$ term jezika L.
3. Svaki term jezika L može se dobiti isključivo konačnom primenom pravila 1 i 2 .

Konstantan term je term koji ne sadrži nijednu promenljivu.

Složenost terma je broj (računajući i višestrukost) funkcijskih simbola koji se javljaju u njemu.

Formule jezika prvog reda definišu se na sličan način. Prvo definišemo *atomične* formule:

1. Ako su t_1 i t_2 termi onda je $t_1 = t_2$ atomična formula.
2. Ako je $R \in \mathrm{Rel}_L$, $\mathrm{ar}(R) = n$ i $t_1, \ldots, t_n$ termi onda je $R(t_1, \ldots, t_n)$ atomična formula.

Skup svih atomičnih formula jezika L označavamo sa At_L.

Formule jezika L uvodimo rekurzivno na sledeći način:

1. Atomične formule su formule L

2. Ako su φ i ψ formule jezika L i x promenljiva onda su $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$,$(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $\forall x \varphi$ i $\exists x \varphi$ takodje formule jezika L

3. Svaka formula jezika L može se dobiti isključivo konačnom primenom pravila 1 i 2.

Skup svih formula jezika L označavaémo sa For_L. Funkcija co:$\mathrm{For}_L \rightarrow N$ svakoj formuli pridružuje složenost na sledeći način:

1. Ako je φ atomična formula onda je $\mathrm{co}(\varphi) = 0$.

2. $\mathrm{co}(\neg\varphi) = 1+\mathrm{co}(\varphi)$.

3. $\mathrm{co}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{co}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{co}(\varphi \Rightarrow \psi) = \mathrm{co}(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1+\mathrm{co}(\varphi)+\mathrm{co}(\psi)$.

4. $\mathrm{co}(\forall x \varphi) = \mathrm{co}\ (\exists x \varphi) = 1+\ \mathrm{co}(\varphi)$.

Promenljive formule φ koje nisu u dosegu kvantora nazivamo *slobodne* promenljive. Skup slobodnih promenljih formule φ, u oznaci $\mathrm{Fr}(\varphi)$ možemo precizno definisati na sledeći način:

1. Ako je φ atomična formula onda je $\mathrm{Fr}(\varphi)$ skup svih promenljivih koje se pojavljuju u formuli φ.

2. $\mathrm{Fr}(\neg\varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi)$.

3. $\mathrm{Fr}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{Fr}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{Fr}(\varphi \Rightarrow \psi) = \mathrm{Fr}(\varphi \Leftrightarrow \psi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$.

4. $\mathrm{Fr}(\exists x \varphi) = \mathrm{Fr}(\forall x \varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\}$

Promenljive koje nisu slobodne nazivamo *vezane*. Ako je φ formula jezika L čije se slobodne promenljive nalaze medju promenljivama $x_1, \ldots, x_n$ onda ćemo pisati $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Umesto $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ koristićemo još i oznaku $\varphi(\overline{x})$. Formule koje ne sadrže slobodne promenljive nazivamo *rečenice*. Skup svih rečenica jezika L označavaćemo sa Sent_L.

Kardinalnost jezika skupa For_L označavamo sa $||L||$. Primetimo da važi $||L|| = max(\aleph_0, |L|)$, gde je $|L| = max(|\mathrm{Rel}_L|, |\mathrm{Fun}_L|, |\mathrm{Const}_L|)$.

2.2 Modeli, relacija zadovoljenja

Neka je A neprazan skup. Preslikavanje $\mathcal{I}$ sa domenom L je *interpretacija* jezika L u skup A ako važi:

1. Za svaki simbol konstante c imamo da $\mathcal{I}(c) \in A$.

2. Za svaki relacijski simbol R dužine n, $\mathcal{I}(R)$ je podskup skupa A^n.

3. Za svaki funkcijski simbol F dužine n, $\mathcal{I}(F)$ je funkcija sa domenom A^n i kodomenom A.

Model jezika L je par $\mathbf{A} = (A, \mathcal{I})$, pri čemu je A neprazan skup a $\mathcal{I}$ je interpretacija jezika L u skup A. Umesto oznake $\mathbf{A} = (A, \mathcal{I})$ možemo koristiti i $\mathbf{A} = (A, s^{\mathbf{A}})_{s \in L}$, gde je za $s \in L$, $s^{\mathbf{A}} = \mathcal{I}(s)$. Ako je jezik L konačan, onda eksplicitno navodimo interpretacije svih simbola.

Pod kardinalnošću modela $\mathbf{A} = (A, \mathcal{I})$ podrazumevamo kardinalnost njegovog univerzuma A.

Neka su L I L' jezici prvog reda takvi da je $L \subseteq L'$ i neka je A model jezika L'. Ako za svako $s \in L' \setminus L$, iz modela $\mathbf{A}$ izbacimo $s^{\mathbf{A}}$ dobijamo novi model $\mathbf{B}$ sa domenom $B = A$. U tom slučaju, kažemo da je $\mathbf{A}$ *ekspanzija* modela B i da je B redukcija modela A.

Definicija 4 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L. *Kažemo da je* $\mathbf{B}$ podmodel *modela* $\mathbf{A}$ *ako je* $B \subseteq A$ *i:*

1. *Za* $R \in \mathrm{Rel}_L$, $ar(R) = k$, $R^{\mathbf{B}} = R^{\mathbf{A}} \cap B^k$.

2. *Za* $F \in \mathrm{Fun}_L$, $ar(F) = k$, $F^{\mathbf{B}} = F^{\mathbf{A}}|_{B^k}$.

3. *Za* $c \in \mathrm{Const}_L$ $c^{\mathbf{B}} = c^{\mathbf{A}}$.

Primer 16 $(N, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ *je podmodel modela* $(R, +, \cdot, \leq, 0, 1)$.

Definicija 5 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L *i* $f : A \to B$. *Preslikavanje* f *je* homomorfizam *iz* $\mathbf{A}$ *u* $\mathbf{B}$, *u oznaci* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *ako je ispunjeno:*

1. *Za* $R \in \mathrm{Rel}_L$, $ar(R) = k$ *i za sve* $a_1, \ldots, a_k \in A$, $R^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ *povlači* $R^{\mathbf{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_k))$.

2. $F \in \mathrm{Fun}_L$, $ar(F) = k$ *i za sve* $a_1, \ldots, a_k \in A$,
   $F^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_k) = F^{\mathbf{B}}(f(a_1), \ldots, (a_k))$

3. *Za* $c \in \mathrm{Const}_L$, $f(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$.

Homomorfizme ćemo klasifikovati na sledeći način:

1. f je *utapanje* ako je $1 - 1$.

2. f je *epimorfizam* ako je *na*

3. f je *jaki homomorfizam* ako za $R \in Rel_L$, $\mathrm{ar}(R) = k$ i za sve $a_1, \ldots, a_k \in A$ $R^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ akko $R^{\mathbf{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_k))$.

4. f je *monomorfizam* ako je $1 - 1$ i jaki homomorfizam.

5. f je *izomorfizam* ako je $1 - 1$ i jaki epimorfizam.

Neka je $\mathbf{A} = (A, s^{\mathbf{A}})_{s \in L}$ proizvoljan model jezika L. Svako preslikavanje $\mu : Var \to A$ zovemo *valuacija*. Vrednost terma t jezika L pri valuaciji μ, u oznaci $t^{\mathbf{A}}[\mu]$ definišemo na sledeći način:

1. Ako je t simbol konstante c onda je $t^{\mathbf{A}}[\mu] = c^{\mathbf{A}}$.

2. Ako je t promenljiva x onda je $t^{\mathbf{A}}[\mu] = \mu(x)$.

3. Ako je $t = F(t_1, \ldots, t_n)$ onda je $t^{\mathbf{A}}[\mu] = F^{\mathbf{A}}(t_1[\mu], \ldots, t_n[\mu])$.

U vezi sa prethodnim, ako su $x_1, \ldots, x_n$ promenljive koje se javljaju u termu t i ako je μ valuacija takva da je $\mu(x_i) = a_i$, $i \in \mathbf{N}$ onda ćemo umesto $t^{\mathbf{A}}[\mu]$ pisati $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$.

Teorema 33 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* $\mathbf{L}$ *i* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *homomorfizam. Tada za svaki term* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *i sve* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *važi:*
$h(t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n])v = t^{\mathbf{B}}[h(a_1), \ldots, h(a_n)]$.

Dokaz se izvodi indukcijom po složenosti terma.

Posledica 5 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L*, pri čemu je* B *homomorfna slika od* A*. Tada, svaki identitet koji važi u* A *takodje važi i u* B*.*

Definicija 6 *(Relacija zadovoljenja) Neka je* $\mathbf{A}$ *model jezika* L*,* φ *proizvoljna formula jezika* L *,* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *i* μ *valuacija takva da je* $\mu(x_i) = a_i$*,* $i \in \mathbf{N}$*. Predikat*

" U modelu A *važi formula* φ *pri valuaciji* μ*" u oznaci*

$$\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$$

definišemo rekurzivno po složenosti na sledeći način:

1. *Ako je* $\varphi = (t_1 = t_2)$*,* $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}_L$*, tada* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko* $t_1^{\mathbf{A}}[\mu] = t_2^{\mathbf{A}}[\mu]$*.*

2. *Ako je* $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$*,* $R \in \mathrm{Rel}_L$*,* $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}_L$*, onda* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko važi* $R^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\mu], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\mu])$*.*

3. *Ako je* $\varphi = \neg\psi$ *onda* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko nije* $\mathbf{A} \models \psi[\mu]$*.*

4. *Ako je* $\varphi = (\psi \wedge \theta)$ *onda* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko* $\mathbf{A} \models \psi[\mu]$ *i* $\mathbf{A} \models \theta[\mu]$*.*

5. *Ako je* $\varphi = (\psi \vee \theta)$ *onda* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko* $\mathbf{A} \models \psi[\mu]$ *ili* $\mathbf{A} \models \theta[\mu]$*.*

6. *Ako je* $\varphi = (\psi \Rightarrow \theta)$ *onda* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko nije* $\mathbf{A} \models \psi[\mu]$ *ili* $\mathbf{A} \models \theta[\mu]$*.*

7. *Ako je* $\varphi = \psi \Leftrightarrow \theta$ *onda* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko* $\mathbf{A} \models \psi[\mu]$ *i* $\mathbf{A} \models \theta[\mu]$ *ili* $\mathbf{A} \models (\neg\psi)[\mu]$ *i* $\mathbf{A} \models (\neg\theta)[\mu]$*.*

8. *Ako je* $\varphi = \exists x_i \psi(x_1 \ldots x_n)$*,* $i \leq n$*, onda* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko postoji* $a \in A$ *tako da* $\mathbf{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n]$*.*

9. *Ako je* $\varphi = \forall x_i \psi(x_1 \ldots x_n)$*,* $i \leq n$*, onda* $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ *akko za svako* $a \in A$ $\mathbf{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n]$

Iz prethodne definicije vidimo da istinitosna vrednost formule φ u modelu $\mathbf{A}$ pri nekoj valuaciji zavisi samo od slobodnih promenljivih formule φ. Kako rečenice nemaju slobodne promenljive njihova vrednost ne zavisi od izbora valuacije tj. ako $\varphi \in \mathrm{Sent}_L$ i $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$, za neku valuaciju μ, onda $\mathbf{A} \models \varphi[\sigma]$ za svaku valuaciju σ. Otuda, za $\varphi \in \mathrm{Sent}_L$, pišemo $\mathbf{A} \models \varphi$ umesto $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$.

Definicija 7 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L. *Kažemo da su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *elementarno ekvivalentni, u oznaci* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ *ako za svaku rečenicu* φ *jezika* L *važi:*
$\mathbf{A} \models \varphi$ *akko* $\mathbf{B} \models \varphi$.

Primer 17 *Polje racionalnih brojeva* $\mathbf{Q} = (Q, +, \cdot, 0, 1)$ *nije elementarno ekvivalentno polju realnih brojeva* $\mathbf{R} = (R, +, \cdot, 0, 1)$ *jer je rečenica* $\exists x(x \cdot x = 1 + 1)$ *tačna u modelu* $\mathbf{R}$ *ali ne i u modelu* $\mathbf{Q}$.

Indukcijom po složenost formula, može se pokazati:

Teorema 34 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L *i* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *izomorfizam. Tada, za svaku formulu* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *jezika* L *i svaku valuaciju* $\mu(x_i) = a_i$, $i \in \mathbf{N}$ *važi:* $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ *akko* $\mathbf{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$

Posledica 6 *Ako su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *izomorfni modeli jezika* L *onda je* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Definicija 8 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli istog jezika* L.

1. *Elementarno utapanje modela* $\mathbf{A}$ *u model* $\mathbf{B}$ *je preslikavanje* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *takvo da za svaku formulu* φ *jezika* L *i svaku valuaciju* $\mu(x_i) = a_i$ *domena* A *važi:*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ *akko* $\mathbf{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.

2. *Model* $\mathbf{A}$ *je elementarni podmodel modela* $\mathbf{B}$, *u oznaci* $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$, *ukoliko je* $\mathbf{A}$ *podmodel modela* $\mathbf{B}$ *i inkluzija* $i : A \to B$ *je elementarno utapanje. Ako je* $\mathbf{A}$ *elementarni podmodel modela* $\mathbf{B}$, *rećićemo da je* $\mathbf{B}$ *elementarna ekstenzija modela* $\mathbf{A}$.

Primetimo da je elementarno utapanje modela $\mathbf{A}$ u model $\mathbf{B}$ isto što i izomorfizam modela $\mathbf{A}$ na elementarni podmodel modela $\mathbf{B}$. Takodje, iz definicije elementarnog podmodela, prelazeći na rečenice, vidimo da iz $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$ sledi $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Lema 9 *Neka su* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *i* $\mathbf{C}$ *modeli istog jezika* L *i neka* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $g : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *utapanja .*

1. *Ako su* f *i* g *elementarna utapanja, onda je i* gf *elementarno utapanje.*

2. *Ako su utapanja* g *i* gf *elementarna onda je i* f *elementarno.*

Dokažimo svojstvo 2:

Pretpostavimo da važi: $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ za neku formulu φ jezika L i $a_1, \ldots, a_n \in A$. Kako je gf elementarno važiće $\mathbf{C} \models \varphi[gf(a_1), \ldots, gf(a_n)]$. Sa obzirom da je i g elementarno biće $\mathbf{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.$\diamond$

Neka je $\mathbf{A}$ model jezika L. Jezik L možemo proširiti do jezika

$$L_A = L \cup \{c_a | a \in A\}$$

dodajući novi simbol konstante c_a za svaki element $a \in A$. Model $\mathbf{A}$ možemo proširiti do modela

$$\mathbf{A}_A = (\mathbf{A}, a)_{a \in A}$$

jezika L_A, interpretirajući svaki simbol konstante c_a elementom a. Ukoliko je $X \subseteq A$ sa L_X obeležavaćemo jezik $L \cup \{c_a | a \in X\}$. Odgovarajući model jezika L_X je $\mathbf{A}_x = (\mathbf{A}, a)_{a \in X}$.

Teorema 35 *Neka je* $\mathbf{A}$ *model jezika* L *i* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in For_L$. *Tada, za sve* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *važi:* $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ *akko* $(\mathbf{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Primetimo da je $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ rečenica jezika $L \cup \{c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}\}$.

Posledica 7 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L . *Utapajne* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *je elementarno utapanje akko* $(\mathbf{A}, a)_{a \in A} \equiv (\mathbf{B}, f(a))_{a \in A}$.

2.3 Teorije prvog reda

Neka je L jezik prvog reda. T je teorija jezika L ako je $T \subseteq \mathrm{Sent}_L$. Elemente teorije T nazivamo *aksiome* teorije T.

Aksiome i pravila izvodjenja za jezik prvog reda delimo u nekoliko grupa

1. *Iskazne aksiome*

   Ove aksiome dobijene su iz tautologija zamenom iskaznih slova formulama jezika L.

   Ako je $\varphi \in \mathrm{For}_L$, $t \in \mathrm{Term}_L$, $x \in \mathrm{Var}$, onda $\varphi(t/x)$ ili samo($\varphi(t)$) označava formulu dobijenu iz φ zamenom svakog slobodnog pojavljivanja promenljive x termom t.

2. *Aksiome jednakosti*

   $\forall x(x = x)$

   $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow (t(x_1, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_n)))$, $n \in \mathbf{N}$, $t \in \mathrm{Term}_L$.

   $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(y_1, \ldots, y_n)))$, $\varphi \in \mathrm{At}_L$.

3. Aksiome kvantora

   $\forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$, $\varphi \in \mathrm{For}_L$, $t \in \mathrm{Term}_L$, $x \in \mathrm{Var}$.

   $\varphi(t) = \exists x \varphi(x)$.

Pravila izvodjenja:
Neka su φ i ψ formule jezika L

1. *Modus ponens*

   $$\frac{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$$

2. *Pravila generalizacije*

(a) $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi}{\varphi \Rightarrow \forall x\psi}$

pod uslovom da x nema slobodna pojavljivanja u formuli φ.

(b) $\dfrac{\psi \Rightarrow \varphi}{\exists x\psi(x) \Rightarrow \varphi}$

pod uslovom da x nema slobodna pojavljivanja u formuli φ.

Neka je T teorija prvog reda jezika L i $\varphi \in \mathrm{Sent}_L$. *Dokaz* za φ u teoriji T je svaki konačan niz $\psi_1, \psi, \ldots, \psi_n$ formula jezika L takav da je $\varphi = \psi_n$ i svaka od formula ψ_i je logička aksioma, ili aksioma teorije T ili je dobijena od prethodnih članova niza koristeći neke od pravila izvodjenja.

Ako postoji dokaz za φ u teoriji T onda je φ *teorema teorije* T, ili *logička posledica* teorije T, u oznaci: $T \vdash \varphi$. Ako je $T = \emptyset$, onda pišemo $\vdash$ i kažemo da je φ teorema predikatskog računa prvog reda. Kako je dokaz za formulu φ u teoriji T konačan niz formula $\psi_1, \psi, \ldots, \psi_n$ koje ispunjavaju gore navedena svojstva, onda iz $T \vdash \varphi$ sledi da postoji konačan podskup S od T tako da $S \vdash \varphi$. Kažemo da $\vdash$ ima *konačan katakter*.

Neka su T_1 i T_2 dve teorije istog jezika L. $T_1 \subseteq T_2$ znači da je svaka teorema teorije T_1 takodje i teorema teorije T_2. $T_1 = T_2$ akko $T_1 \subseteq T_2$ i $T_2 \subseteq T_1$.

Formule oblika $\varphi \wedge \neg\varphi$ nazivamo *kontradikcije*. Teorija T je konzistentna ako ne postoji kontradikcija ψ tako da $T \vdash \psi$.

Teorija T jezika L je *kompletna* ako za svaku $\varphi \in Sent_L$ ili $T \vdash \varphi$ ili $T \vdash \neg\varphi$.

Teorema 36 *(Teorema dedukcije)*

Neka je T teorija jezika L, $\varphi \in For_L$ i $T \vdash \varphi$. Tada postoje rečenice $\theta_1, \ldots, \theta_n \in T$ tako da $\vdash (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \varphi$.

Lema 10 *Neka je T teorija jezika L i c simbol konstante koji ne pripada jeziku L. Tada za svaku formulu φ jezika L važi: ako $T \vdash \varphi(c)$ onda $T \vdash \forall x\varphi(x)$.*

Definicija 9 *Formula φ jezika prvog reda L je u preneks normalnoj formi, ako je φ oblika $Q_1y_1Q_2y_2 \ldots Q_ny_n\psi$, gde je formula ψ bez kvantora, a $Q_1, \ldots, Q_n$ su neki od kvantora $\forall, \exists$.*

Teorema 37 *Za svaku formulu φ jezika prvog reda L postoji formula ψ jezika L koja je u preneks normalnoj formi, tako da važi: $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$.*

Definicija 10 *Neka je L jezik prvog reda. Tada:*

1. $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \{\varphi \in For_L | \varphi \text{ ne sadrži kvanotre}\}$
2. $\Sigma^0_{n+1} = \{\exists x_1 \ldots \exists x_k\varphi | k \in \mathbf{N}, \varphi \in \Pi^0_n\}$
3. $\Pi^0_{n+1} = \{\forall x_1 \ldots \forall x_k\varphi | k \in \mathbf{N}, \varphi \in \Sigma^0_n\}$

Σ^0_1 formule zovemo još i *egzistencujalne formule.*

Sada ćemo navesti nekoliko primera teorija prvog reda:

1. *Teorija linearnih uredjenja*, u oznaci LO. Jezik ove teorije je $L_{LO} = \{\leq\}$, gde je $\leq$ binarni relacijski simbol. Aksiome ove teorije su:

   $\forall x(x = x)$

   $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

   $\forall x \forall y(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$

   $\forall x \forall y(x \leq y \vee y \leq x)$

2. *Teorija gustih uredjenja bez krajnjih tačaka* , u oznaci DLO.

   Jezik ove teorije je isti kao i jezik LO, i aksiome su aksiome LO plus sledeće rečenice:

   $\forall x \exists y(x < y)$

   $\forall x \exists y(y < x)$

   $\forall x \forall y \exists z(x < y \Rightarrow x < z \wedge z < y)$

   $\exists x \exists y \neg(x = y)$

   ($x < y$ je oznaka za $x \leq y \wedge \neg(x = y)$).

3. *Teorija Abelovih grupa*, u oznaci Ab

   Jezik ove teorije je $L_{Ab} = (+, -, 0)$, gde je $+$ binarni funkcijski simbol, $-$ unarni funkcijski simbol a 0 simbol konstante. Aksiome ove teorije su:

   $\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z)$

   $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

   $\forall x(x + 0 = x)$

   $\forall x(x + (-x) = 0))$

4. *Teorija polja*, u oznaci F.

   Jezik ove teorije je $L_F = L_{Ab} \cup \{\cdot, 1\}$, gde je $\cdot$ binarni funkcijski simbol a 1 je simbol konstante. Aksiome teorije polja su aksiome teorije Abelovih grupa plus sledeće rečenice:

   $\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

   $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

   $\forall x(x \cdot 1 = x)$

   $\forall x(\neg(x = 0) \Rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$

   $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

   $\neg(0 = 1)$

5. *Teorija uredjenih polja*, u oznaci FO.

   Jezik ove teorije je $L_{FO} = L_{LO} \cup L_F$, a aksiome su aksiome teorije polja, aksiome teorije linearnih uredjenja plus sledeće račenice:

   $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \Rightarrow (x + z \leq y + z))$

   $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$

6. *Teorija Bulovih algebri*, u oznaci BA.

   Jezik ove teorije je $L_{BA} = \{+, \cdot, ', \leq, 0, 1\}$, gde su $+$ i $\cdot$ binarni funkcijski simboli, $'$ je unarni funkcijski simbol, $\leq$ je binarni relacijski simbol a 0 i 1 su simboli konstanti. Aksiome teorije BA su:

   $\forall x \forall y \forall z((x+y)+z = x+(y+z)$

   $\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

   $\forall x \forall y(x+y = y+x)$

   $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

   $\forall x(x+0 = x)$

   $\forall x(x \cdot 1 = x)$

   $\forall x(x+x' = 1)$

   $\forall x(x \cdot x' = 0)$

   $\neg(0 = 1)$

   $\forall x \forall y(x \leq y \Leftrightarrow x = x \cdot y)$

Neka je A model jezika L. *Teorija modela* $\mathbf{A}$, u oznaci Th($\mathbf{A}$), je skup svih rečenica jezika L koje su tačne u modelu $\mathbf{A}$,tj. $\mathrm{Th}(\mathbf{A}) = \{\varphi \in \mathrm{Sent}_L | \mathbf{A} \models \varphi\}$. Za svaku $\varphi \in \mathrm{For}_L$ i svaku valuaciju μ ispunjeno je ili $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$ ili $\mathbf{A} \models (\neg\varphi)[\mu]$. Prema tome, teorija Th$\mathbf{A}$ je kompletna.

Neka je T teorija jezika L. Model $\mathbf{A}$ jezika L je *model teorije* T, u oznaci $\mathbf{A} \models T$ ako za svaku aksiomu φ teorije T važi $\mathbf{A} \models \varphi$, to jest ako je $T \subseteq \mathrm{Th}\mathbf{A}$.

2.4 Potpunost

Svaki model $\mathbf{A}$ jezika L zadovoljava sve aksiome predikatskog računa prvog reda. Takodje, ako je μ bilo koja valuacija domena A i $\mathbf{A} \models \varphi_1[\mu], \ldots, \mathbf{A} \models \varphi_n[\mu]$, gde $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{For}_L$ i ako je ψ formula dobijena iz $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ primenom pravila izvodjenja, onda $\mathbf{A} \models \psi[\mu]$. Otuda, važi sledeća teorema čiji precizan dokaz možemo izvesti indukcijom po dužini dokaza u T.

Teorema 38 *Neka je* $\mathbf{A}$ *model jezika* L *i* T *teorija jezika* L. *Ako* $\mathbf{A} \models T$ *i* $T \vdash \varphi$ *onda* $\mathbf{A} \models \varphi$.

Posledica 8 *Neka je* T *teorija jezika* L *i* $\mathbf{A}$ *model teorije* T. *Tada je* T *konzistentna teorija.*

Teorema 39 *(Gödel-Henkin) Neka je* T *konzistantna teorija. Tada* T *ima model kardinalnosti* $\leq max(\aleph_0, |T|)$.

Dokaz: Neka $k = max(\aleph_0, |T|)$ i $C = \{c_\delta | \delta < k\}$ skup konstanti koji se ne pojavljuju u teoriji T. Neka je L jezik koji se sastoji od funkcijskih simbola, relacijskih simbola, simbola konstanti koji se pojavljuju u teoriji T i skupa C. Pretpostavimo da je $\{\varphi_\delta | \delta < k\}$ skup svih formula jezika L čija je jedina slobodna promenljiva, promenljiva x. Izaberimo funkciju $h : k \to k$ tako da:

1. Ako je $\gamma < \delta$ onda je $h(\gamma) < h(\delta)$.
2. Ako je $\gamma \leq \delta$ onda se $c_{h(\delta)}$ ne pojavljuje u $\varphi_\gamma(x)$.

Neka je $S_\delta = S \cup \{\exists x \varphi_\gamma(x) \Rightarrow \varphi_\gamma(c_{h(\gamma)}) | \gamma < \delta\}$.

Primetimo da se $c_{h(\delta)}$ ne pojavljuje u S_δ. Indukcijom možemo pokazati da je S_δ konzistantan skup rečenica za svako $\delta < k$:

• S_0 je konzistentan jer je $S_0 = T$.

• Ako je λ granični ordinal i S_δ je konzistentan za svako $\delta < \lambda$ onda je $S_\lambda = \bigcup\{S_\delta | \delta < \lambda\}$ konzistentan zahvaljujući konačnom karakteru relacije $\vdash$

• Fiksirajmo δ i dokažimo kontrapozicijom da iz S_δ je konzistentan sledi $S_{\delta+1}$ je konzistentan. Dakle, pretpostavimo da $S_{\delta+1}$ nije konzistantan. Tada za neku formulu ψ važi:

$S_{\delta+1} \vdash \psi \wedge \neg\psi$

$S_\delta \vdash (\exists x \varphi_\delta(x) \Rightarrow \varphi_\delta(c_{h(\delta)})) \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$. tj.

$S_\delta \vdash (\exists x \varphi_\delta(x) \wedge \neg\varphi_\delta(c_{h(\delta)})) \vee (\psi \wedge \neg\psi)$

Ako $S_\delta \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ onda je S_δ nekonzistentan, inače

$S_\delta \vdash (\exists x \varphi_\delta(x) \wedge \neg\varphi_\delta(c_{h(\delta)}))$.

Kako se $c_{h(\delta)}$ ne pojavljuje u S_δ onda $c_{h(\delta)}$ može biti zamenjen bilo kojom promenljivom y koja se ne pojavljuje u φ_δ. Dakle

$S_\delta \vdash (\exists x \varphi_\delta(x) \wedge \neg\varphi_\delta(y))$.

Kako je S_δ skup rečenica, univerzalno zatvorenje bilo koje logičke posledice od S_δ je takodje logička posledica od S_δ. Dakle,

$S_\delta \vdash \forall y(\exists x \varphi_\delta(x) \wedge \neg\varphi_\delta(y))$

$S_\delta \vdash (\exists x \varphi_\delta(x) \wedge \forall y \neg\varphi_\delta(y))$ odnosno

$S_\delta \vdash (\exists x \varphi_\delta(x) \wedge \neg(\exists y \varphi_\delta(y)))$

Prema tome, S_δ je nekonzistentan.

Neka je $S_k = \bigcup\{S_\delta | \delta < k\}$. Kako je svaki S_δ konzistentan i S_k je konzistentan. Neka je $\overline{T}$ maksimalan konzistentan skup rečenica koji sadrži S_k. Egzistencija skupa $\overline{T}$ sledi na osnovu Zornove leme i konačnog karaktera relacije $\vdash$. Neka je φ proizvoljna rečenica jezika L. Kako je $\overline{T}$ konzistentan ili je $\overline{T} \cup \varphi$ konzistentan ili je $\overline{T} \cup \neg\varphi$ konzistentan. Kako je $\overline{T}$ maksimalan ili $\varphi \in \overline{T}$ ili $\neg\varphi \in \overline{T}$.

Model $\mathbf{A}$ teorije T konstruišemo direktno iz $\overline{T}$. Za svaku konstantu c jezika L neka je $[c] = \{d | c = d \in \overline{T}\}$. Univerzum modela $\mathbf{A}$ je $A = \{[c] | c \in \mathrm{Const}_L\}$. Relacije, funkcije i konstante definišemo na sledeći način:

1. $R^{\mathbf{A}}([c_1], \ldots, [c_n])$ akko $R(c_1, \ldots, c_n) \in \overline{T}$
2. $F^{\mathbf{A}}([c_1, \ldots, [c_n]]) = [c]$ akko $F(c_1, \ldots, c_n) = c \in \overline{T}$
3. $c^{\mathbf{A}} = [c]$

Da bismo pokazali da je $\mathbf{A}$ model za T indukcijom po složenosti formule φ dokazaćemo $\mathbf{A} \models \varphi$ akko $\varphi \in \overline{T}$ za $\varphi \in \mathrm{Sent}_L$.

Neka je t konstantan term jezika L. Za neko $\delta < k$, $F_\delta(x)$ je $t = x$ pa $t = c_{h(\delta)} \in \overline{T}$. Otuda, za svaki konstantan term t_i jezika L postoji konstanta c_i tako da je $[t_i] = [c_i]$.

Otuda,

1. Ako su t_1 i t_2 konstantni termi jezika L onda

   $\mathbf{A} \models (t_1 = t_2)$ akko $(t_1 = t_2) \in \overline{T}$.

2. Ako je $R(t_1, \ldots, t_n)$ atomična formula bez promenljivih onda

   $\mathbf{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ akko $R^{\mathbf{A}}([c_1], \ldots, [c_n])$ akko $R(t_1, \ldots, t_n) \in \overline{T}$.

3. $\mathbf{A} \models \neg\varphi$ akko $\varphi \notin \overline{T}$ akko $\neg\varphi \in \overline{T}$.

4. $\mathbf{A} \models \varphi \wedge \psi$ akko $(\mathbf{A} \models \varphi$ i $\mathbf{A} \models \psi)$ akko $\varphi \in \overline{T}$ i $\psi \in \overline{T}$ akko $\varphi \wedge \psi \in \overline{T}$.

5. Pretpostavimo da $\mathbf{A} \models \exists x \varphi_\delta(x)$. Tada $\mathbf{A} \models \varphi_\delta(c)$, $[c] \in A$. Otuda $\varphi_\delta(c) \in \overline{T}$ pa $\exists x \varphi_\delta(x) \in \overline{T}$.

   Pretpostavimo da $\exists x \varphi_\delta(x) \in \overline{T}$. Tada $\varphi_\delta(c_{h(\delta)}) \in \overline{T}$ pa $\mathbf{A} \models \varphi_\delta(c_{h(\delta)})$ i otuda $\mathbf{A} \models \exists x \varphi_\delta(x)$.

Neka je T teorija jezika L i $\varphi \in \mathrm{Sent}_L$. Ako je φ tačna u svim modelima teorije T onda kažemo da je φ *semantička posledica* teorije T i pišemo $T \models \varphi$.

Teorema 40 *Neka je T teorija jezika L i $\varphi \in Sent_L$. Tada $T \vdash \varphi$ akko $T \models \varphi$.*

Lema 11 *Teorija T je kompletna akko su svi njeni modeli elementarno ekvivalentni*

Dokaz: Neka je $T \subseteq Sent_L$ kompletna teorija, $\varphi \in Sent_L$ proizvoljna rečenica i $\mathbf{A}$ model teorije T. Pretpostavimo da važi: $\mathbf{A} \models \varphi$. Tada mora važiti i $T \vdash \varphi$ jer bi iz $T \vdash \neg\varphi$ sledilo $T \models \neg\varphi$ i otuda $\mathbf{A} \models \neg\varphi$. Dakle, $T \vdash \varphi$ pa $T \models \varphi$. Otuda, ako je $\mathbf{B}$ bilo model teorije T biće $\mathbf{B} \models \varphi$.

Pretpostavimo da su svi modeli teorije T elementarno ekvivalentni. Neka je $\varphi \in Sent_L$ proizvoljna. Ako je $\mathbf{A}$ bilo koji model teorije T onda $\mathbf{A} \models \varphi$ ili $\mathbf{A} \models \neg\varphi$. Pretpostavimo da $\mathbf{A} \models \varphi$. Tada je φ tačna u svakom modelu teorije T, tj. $T \models \varphi$ i otuda $T \vdash \varphi$.

Primer 18 *Neka je φ rečenica na jeziku polja. Pretpostavimo da je φ tačna u svakom polju karakteristike nula. Tada postoji $m \in N$ takvo da je φ tačna u svakom polju karakteristike veće od m.*

Neka je φ_n rečenica : $\neg(1 + \ldots + 1 = 0)$ (n sabiraka) i neka je $T' = T \cup \{\varphi_n | n \in \mathbf{N}\}$ Tada $T' \vdash \varphi$, pa postoji konačan deo od T' koji dokazuje φ, tj. postoji $m \in \mathbf{N}$ tako da $T \cup \{\varphi_n | n < m\} \vdash \varphi$. Svako polje $\mathbf{F}$ karakteristike veće od m je model teorije $T \cup \{\varphi_n | n < m\}$ pa $\mathbf{F} \models \varphi$.

Teorema 41 (*Teorema kompaktnosti*) *Neka je T teorija jezika L. Ako svaki konačan podskup od T ima model, onda T ima model.*

Dokaz: Prepostavimo da T nema model. Tada je na osnovu teoreme potpunosti T nekonzistentna teorija. Neka je $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ dokaz za kontradikciju u T i neka je $S = T \cap \varphi_0, \ldots, \varphi_n$. S je konačan nekonzistentan podskup od T pa S nema model, kontradikcija.

Posledica 9 *Neka je T teorija jezika L. Ako svaki konačan podskup od T ima beskonačan model, onda T ima model kardinalnosti k za svako $k \geq max(\aleph_0, |T|)$.*

Dokaz: Neka je $\{c_\delta | \delta < k\}$ skup konstanti koje se ne pojavljuju u T i neka je $W = T \cup \{c_\delta < c_\gamma | \delta < \gamma < k\}$. Ako je $V \subsetneq W$ konačan, tada je V konzistentan jer $V \cap T$ ima beskonačan model. Tada W ima model $\mathbf{A}$ kardinalnosti $\leq k$. Sa obzirom da interpretacije simbola c_δ moraju biti različiti elementi u A, $\mathbf{A}$ mora imati kardinalnost najmanje k. $\diamond$

Posledica 10 *Ako teorija T ima proizvoljno velike konačne modele, onda T ima beskonačan model.*

Dokaz: Neka je $S = T \cup \{\forall x_0 \dots \forall x_n \exists y (y \neq x_0, \dots, y \neq x_n) | n \in \mathbf{N}\}$. Na osnovu pretpostavke, svaki konačan $S_0 \subseteq S$ ima model $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}$ je konačan model teorije T, i $|A|$ je veća od bilo kog prirodnog broja n koji se pojavljuje u S_0. Otuda, S ima model $\mathbf{B}$, i B je beskonačan. $\diamond$

Teorema 42 *Neka je $\mathbf{A}$ beskonačan model jezika L. Tada $\mathbf{A}$ ima pravu elementarnu ekstenziju kardinalnosti k za svako $k \geq max(|A|, ||L||)$.*

Dokaz: Neka je $T = \text{Th}(\mathbf{A}, a)_{a \in A}$. Modeli teorije T se poklapaju sa elementarnim ekstenzijama od $\mathbf{A}$. Pretpostavimo da je b simbol konstante koji se ne pojavljuje u T. Neka je $S = T \cup \{b \neq a | a \in A\}$. Ako je $S_0 \subsetneq S$ konačan, onda $\mathbf{A}$ može biti model za S_0 tako što će b biti interpretiran nekim elementom iz A koji se ne pojavljuje u S_0. Na osnovu posledice 9, S ima model $\mathbf{B}$ kardinalnosti k. Neka je $m : A \to B$ preslikavanje definisano sa $m(a) = a^{\mathbf{B}}$. Tada je $m : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ elementarno i $b^{\mathbf{B}} \in B \setminus m[A]$.$\diamond$

2.5 Dijagrami modela

Definicija 11 *Neka je $\mathbf{A}$ model jezika L i $L_{\mathbf{A}} = L \cup \{c_a | a \in A\}$.*

Dijagram modela $\mathbf{A}$ je teorija $\Delta_{\mathbf{A}}$ jezika $L_{\mathbf{A}}$ čije su aksiome atomične rečenice i negacije atomičnih rečenica jezika $L_{\mathbf{A}}$ koje su tačne u $(\mathbf{A}, a)_{a \in A}$.

Elementarni dijagram modela $\mathbf{A}$ je teorija $Th(\mathbf{A}, a)_{a \in A}$.

Teorema 43 *Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ modeli jezika L. Tada:*

1. *Model $\mathbf{A}$ može biti utopljen u $\mathbf{B}$ akko postoji ekspanzija $(\mathbf{B}, b_a)_{a \in A}$ modela $\mathbf{B}$ koja je model za $\Delta_{\mathbf{A}}$.*

2. *Model $\mathbf{A}$ je elementarno utopljen u model $\mathbf{B}$ akko postoji ekspanzija $(\mathbf{B}, b_a)_{a \in A}$ koja je model elementarnog dijagrama $Th(\mathbf{A}, a)_{a \in A}$.*

Dokaz: Dokažimo svojstvo 1.

Neka je $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ utapanje. Tada je $(\mathbf{B}, f(a))_{a \in A}$ model teorije $\Delta_{\mathbf{A}}$. Neka je $R(a_1, \dots, a_n) \in \Delta_{\mathbf{A}}$. Tada $(\mathbf{A}, a_1, \dots, a_n) \models R(a_1, \dots, a_n)$ pa otuda $(\mathbf{B}, f(a_1), \dots, f(a_n)) \models R(a_1, \dots, a_n)$. Analogno se pokazuju i ostali slučajevi.

Neka je $(\mathbf{B}, b_a)_{a \in A} \models \Delta_{\mathbf{A}}$. Tada je preslikavanje $f : a \mapsto b_a$ utapanje modela $\mathbf{A}$ u model $\mathbf{B}$. Primera radi, pretpostavimo da je $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$, tada $\neg(a_1 = a_2) \in \Delta_{\mathbf{A}}$, pa $(\mathbf{B}, b_a)_{a\in A} \models \neg(a_1 = a_2)$, tj $b_{a_1} \neq b_{a_2}$ pa je $f(a_1) \neq f(a_2)$. Na sličan način se pokazuje da preslikavaje f ispunjava ostale osobine utapanja.

Teorema 44 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L *i* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$*. Tada postoji model* $\mathbf{C}$ *u koji se* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *elementarno utapaju.*

Dokaz: Neka je $T =$Th$(\mathbf{A}, a)_{a\in A}\cup$Th$(\mathbf{B}, b)_{b\in B}$. Dokažimo da je T konzistentna teorija. Pretpostavimo suprotno, postoji konačan $\Delta \subseteq T$ koji nema model. Neka su $c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}, c_{b_1}, \ldots, c_{b_n}$ simboli konstanti koji odgovaraju elementima iz $A \cup B$ koji se pojavljuju u Δ. Prepostavićemo da je $\{c_a|a \in A\} \cap \{c_b|b \in B\} = \emptyset$. Kako je Δ nekonzistentan onda $\Delta \vdash \forall x(x \neq x)$. Postoje rečenice $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}) \in Sent_{L_{\mathbf{A}}}$, $\psi(c_{b_1}, \ldots, c_{b_n}) \in Sent_{L_{\mathbf{B}}}$, $\theta \in Sent_L$ koje su konjukcije nekih rečenica iz Δ, tako da važi:

$\theta, \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}), \psi(c_{b_1}, \ldots, c_{b_n}) \vdash \forall x(x \neq x)$.

Na osnovu teoreme dedukcije imamo:

$\theta \vdash \neg\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}) \vee \neg\psi(c_{b_1}, \ldots, c_{b_n})$

Na osnovu leme 7 i činjenice da se c_{a_i} i c_{b_j} ne pojavljuju u θ sledi:

$\theta \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_m \forall y_1 \ldots \forall y_n(\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \neg\psi(y_1, \ldots, y_n))$

Kako je $\{x_1, \ldots, x_m\} \cap \{y_1, \ldots, y_n\} = \emptyset$ imamo

$\theta \vdash \neg(\exists x_1 \ldots x_m \varphi(x_1, \ldots, x_m)) \vee \neg(\exists y_1 \ldots y_n \psi(y_1, \ldots, y_n))$

Sa obzirom da je $\mathbf{A} \models \theta$ i $\mathbf{B} \models \theta$ imamo

$\mathbf{A} \models \neg(\exists x_1 \ldots x_m \varphi(x_1, \ldots, x_m)) \vee \neg(\exists y_1 \ldots y_n \psi(y_1, \ldots, y_n))$

Kako $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_m]$ onda $\mathbf{A} \models \neg(\exists y_1 \ldots y_n \psi(y_1, \ldots, y_n))$, pa ako iskoristimo činjenicu da je $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ dobijamo $\mathbf{B} \models \neg(\exists y_1 \ldots y_n \psi(y_1, \ldots, y_n))$, što je u kontradikciji sa $\mathbf{B} \models \psi[b_1, \ldots, b_n]$.

Dakle T je konzistentna teorija, pa postoji model $\mathbf{C}$ teorije T. Na osnovu prethodne teoreme modeli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ se elementarno utapaju u model $\mathbf{C}$. $\diamond$

Lema 12 *Neka je* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *egzistencijalna formula jezika* L*,* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L *i* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *homomorfizam. Ako* $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ *za neke* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *onda* $\mathbf{B} \models [f(a_1), \ldots, f(a_n)]$*.*

Dokaz: Neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula $\exists y_1 \ldots \exists y_m \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, gde ψ nema kvantora. Tada $\mathbf{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]$ za neke $b_1, \ldots, b_m \in A$. Kako je ψ bez kvantora, biće $\mathbf{B} \models \psi[f(a_1), \ldots, f(a_n), f(b_1), \ldots, f(b_m)]$ i otuda $\mathbf{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$. $\diamond$

Teorema 45 *Neka je* T *teorija prvog reda jezika* L *i* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli teorije* T*. Tada* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *mogu biti utopljeni u neki model* $\mathbf{C}$ *teorije* T *akko za sve* Σ^0_1 *rečenice* φ *i* ψ *jezika* L *takve da* $\mathbf{A} \models \varphi$ *i* $\mathbf{B} \models \psi$*, postoji model* $\mathbf{C}$ *teorije* T *takav da* $\mathbf{C} \models \varphi \wedge \psi$*.*

Dokaz:

$\Leftarrow$: Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi teoreme. Neka je $S = T \cup \Delta_{\mathbf{A}} \cup \Delta_{\mathbf{B}}$. Na sličan način kao i u prethodnoj teoremi može se pokazati da je S kozistentan. Na osnovu dela 1 teoreme 43 zaključujemo da se $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ mogu utopiti u model teorije T.

$\Rightarrow$: Neka su φ i ψ Σ_1^0 rečenice i $\mathbf{A} \models \varphi$ i $\mathbf{B} \models \psi$. Tada na osnovu pretpostavke postoji model $\mathbf{C}$ teorije T, tako da se $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ utapaju u $\mathbf{C}$, pa na osnovu leme 12 $\mathbf{C} \models \varphi \wedge \psi$. $\diamond$

2.6 Modelska kompletnost

Teorija T je *modelski kompletna* ako je svaki monomorfizam izmedju modela teorije T elementaran.

Teorema 46 *Neka je T teorija jezika L. Sledeći uslovi su ekvivalentni*

1. *T je modelski kompletna*
2. *$T \cup \Delta_{\mathbf{A}}$ je kompletna teorija za svaki model $\mathbf{A}$ teorije T*
3. *Za svaku formulu φ jezika L, postoji egzistencijalna formula ϕ jezika L tako da $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$.*

Dokaz: $(1 \Rightarrow 2)$:

Pretpostavimo da je T modelski kompletna i $\mathbf{A} \models T$. Neka su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ modeli teorije $T \cup \Delta_{\mathbf{A}}$. Kako je $\mathbf{B}_i$ $(i = 1, 2)$ model teorije $\Delta_{\mathbf{A}}$, postoji monomorfizam $f_i : \mathbf{A} \to \mathbf{B}_i$. Kako je po pretpostavci T modelski kompletna f_i je elementaran i otuda za $\varphi \in$For$_L$ i $a_1, \ldots, a_n \in A$ važi:

$\mathbf{B}_1 \models \varphi[f_1(a_1), \ldots, f_1(a_n)]$ akko $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$
akko $\mathbf{B}_2 \models \varphi[f_2(a_1), \ldots, f_2(a_n)]$.

Dakle, $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ su elementarno ekvivalentni pa je $T \cup \Delta_{\mathbf{A}}$ kompletna.

$(3 \Rightarrow 1)$:

Neka je $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ monomorfizam modela teorije T i $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in$For$_L$. Na osnovu pretpostavke postoji egzistencijalna formula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ jezika L tako da: $T \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Pretpostavimo da $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ za neke $a_1, \ldots, a_n \in A$. Tada $\mathbf{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$ pa na osnovu leme 12, $\mathbf{B} \models \psi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$ i otuda $\mathbf{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$. Dakle, T je modelski kompletna.

$(2 \Rightarrow 3)$:

Neka je S skup rečenica koji sarži teoriju T i sledeći skup rečenica:

1. $\varphi(c)$, gde je c simbol kontante koji se ne pojavljuje u T.
2. $\neg\psi(c)$, gde je ψ bilo koja egzistencijalna formula za koju važi: $T \vdash \psi(x) \Rightarrow \varphi(x)$.

   Pretpostavimo da je S konzistanatan . Tada S ima model $\mathbf{A}$ i

   $(\mathbf{A}, a)_{a \in A} \models \varphi(c)$, gde $c^{\mathbf{A}} \in A$. Kako je po pretpostavci $T \cup \Delta_{\mathbf{A}}$ modelski kompletna, biće $T \cup \Delta_{\mathbf{A}} \vdash \varphi(c)$. Sa obzirom na konačan karakter relacije $\vdash$ važiće $T \vdash \chi(c, a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow \varphi(c)$, gde je $\chi(c, a_1, \ldots, a_m)$ konjukcija konačno mnogo rečenica iz $\Delta_{\mathbf{A}}$. Kako su $c, a_1, \ldots, a_m$ kontante koje se ne pojvljuju u T možemo ih zameniti promenljivama, tj.

   $T \vdash \chi(x, x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow \varphi(x)$, gde je χ formula bez kvantora.

Otuda $T \vdash \psi(x) \Rightarrow \varphi(x)$, i $\mathbf{A} \models \psi[c^{\mathbf{A}}]$, gde je ψ egzistencijlna formula $\exists x_1 \dots \exists x_m \chi(x, x_1, \dots, x_m)$.

Medjutim, na osnovu definicije skupa S $\mathbf{A} \models \neg\psi[c^{\mathbf{A}}]$, kontradikcija.

Dakle, skup S je nekonzistentan, tj $S \vdash \forall x \neg(x = x)$. Tada

$\theta, \neg\psi_1(c) \wedge \dots \wedge \psi_n(c), \varphi(c) \vdash \forall x \neg(x = x)$, pri čemu $T \vdash \psi_i(x) \Rightarrow \varphi(x)$ i θ je konjukcija konačno mnogo rečenica iz T.

Nakon primene teoreme o Dedukciji, koristeće činjenicu da se c ne pojavljuje u teoriji T, dobijamo

$T \vdash \varphi(x) \Rightarrow \psi_1(x) \vee \dots \vee \psi_n(x)$.

Neka je ϕ formula $\psi_1(x) \vee \dots \vee \psi_n(x)$. Tada $T \vdash \varphi(x) \Leftrightarrow \phi(x)$ i $\phi(x)$ je logički ekvivalentna egzistencijalnoj formuli. $\diamond$.

Lema 13 *Neka je T modelski kompletna teorija. Pretpostavimo da T ima model koji se može utopiti u svaki model teorije T. Tada je T kompletna teorija.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{A} \models T$ i neka se $\mathbf{A}$ može utopiti u svaki model teorije T. Ako je $\mathbf{B}$ proizvoljan model za T, onda na osnovu Teoreme 43, postoji ekspanzija $(\mathbf{B}, b_a)_{a\in A}$ modela $\mathbf{B}$ koja je model za $T \cup \Delta_{\mathbf{A}}$. Kako je $(\mathbf{A}, a)_{a\in A}$ model teorije $T \cup \Delta_{\mathbf{A}}$, na osnovu prethodne teoreme sledi $(\mathbf{A}, a)_{a\in A} \equiv (\mathbf{B}, b_a)_{a\in A}$. Preslikavanje $a \mapsto b_a$ je utapanje modela $\mathbf{A}$ u model $\mathbf{B}$ a na osnovu Posledice 7 f je elementarno. Dakle, $\mathbf{A}$ je elementarni podmodel modela $\mathbf{B}$ i otuda $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. $\diamond$

2.7 Modelska kompletnost algebarski zatvorenih polja

Aksiome teorije algebarski zatvorenih polja (ACF) su aksiome teorije polja plus sledeće aksiome:

$\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x(x^n + y_1 x^{n-1} + \dots + y_{n-1}x + y_n = 0)$ za svako $n > 0$

Teorema 47 *Teorija algebarski zatvorenih polja je modelski kompletna.*

Dokaz:

Neka je $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ monomorfizam algebarski zatvorenih polja. Na osnovu Teoreme 42, postoje elementarni monomorfizmi $g : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_1$ i $h : \mathbf{B} \to \mathbf{B}_1$ tako da je $|\mathbf{A}_1| = |\mathbf{B}_1| > |\mathbf{B}|$. Ako postoji izomorfizam $k : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}_1$ takav da važi: $kg = hf : \mathbf{A} \to \mathbf{B}_1$ onda je na osnovu Leme 9, f elementaran. Možemo pretpostaviti da su f, g i h inkluzije. Neka su U i V redom transcedentne baze raširenja $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{B}_1$ nad $\mathbf{A}$. $\mathbf{B}$ je beskonačan, pa je $\mathbf{B}_1$ neprebrojiv i $|U| = |V|$. Neka je $k : U \to V$ „$1-1$" i „na". Proširimo k do $k_1 : \mathbf{A}(U) \to \mathbf{A}(V)$ tako da je k identiteta na $\mathbf{A}$. k_1 može biti prošireno do izomorfizma $k_2 : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}_1$ jer su $\mathbf{A}_1$, i $\mathbf{B}_1$ redom algebarska zatvorenja od $\mathbf{A}(U)$ i $\mathbf{A}(V)$. $\diamond$

Posledica 11 *Neka je S konačan skup polinomijalnih jednakosti i nejednakosti koje sadrže više promenljivih, sa koeficijentima u polju $\mathbf{A}$. Ako S ima rešenje u nekoj ektenziji polja $\mathbf{A}$, onda S ima rešenje u algebarskom zatvorenju $\overline{\mathbf{A}}$ polja $\mathbf{A}$.*

Dokaz:

Neka je φ rečenica na jeziku polja takva da za svako raširenje $\mathbf{B}$ polja $\mathbf{A}$ važi: S ima rešenje u $\mathbf{B}$ akko $\mathbf{B} \models \varphi$. Neka S ima rešenje u $\mathbf{B}$, tada S ima tešenje i u algebarskom zatvorenju $\overline{\mathbf{B}}$ polja $\mathbf{B}$, tj. $\overline{\mathbf{B}} \models \varphi$. Na osnovu prethodne teoreme, svaka algebarski zatvorena ekstenzija od $\mathbf{A}$ je elementarna ekstenzija od $\overline{\mathbf{A}}$, prema tome $\overline{\mathbf{A}} \models \varphi$. $\diamond$

Neka je za svako $n \in \mathbf{N}$, φ_n formula:

$\forall x(x + x + \ldots + x = 0)$ (n sabiraka)

Za prost broj p *Teorija algebarski zatvorenih polja karakteristike* p (ACF_p), je teorija čije su aksiome: Aksiome teorije ACF $\cup\{\varphi_p\}$

Aksiome teorije *Teorije algebarski zatvorenih polja karakteristike* 0 (ACF_0), su: Aksiome teorije ACF $\cup\{\neg\varphi_n | n \in \mathbf{N}\}$

Lema 14 *Teorija ACF_p, gde je p prost broj i Teorija ACF_0 su kompletne teorije.*

Dokaz: Na osnovu Teoreme 47 teorija ACF_0 je modelski kompletna. $\overline{\mathbf{Q}}$ je model teorije ACF_0 koji se utapa u svaki model te teorije. Na osnovu Leme 13, ACF_0 je kompletna teorija.

($\overline{Z_p}$ je model teorije ACF_p koji se utapa u svaki model te teorije).$\diamond$

Za formulu φ kažemo da je univerzalna ako $\varphi \in \Pi^0_1$, tj. ako je oblika $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$, gde je ψ formula bez kvantora. Za formulu φ kažemo da je *univerzalno egzistencijalna* ako $\varphi \in \Pi^0_2$, tj. ako je oblika $\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n \psi$, gde je ψ formula bez kvantora i $m, n \geq 0$.

Teorija T je univerzalna ako postoji teorija S takva da je $T = S$ i svi elementi teorije S su univerzalne rečenice.

Teorija T je univerzalno egzistencijalna ako postoji teorija S takva da je $T = S$ i svi elementi teorije S su univerzalno egzistencijalne rečenice.

Formula je u *preneks normalnoj formi* ako je oblika $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \varphi$, gde je φ formula bez kvantora, $n \geq 0$, i za svako $1 \leq i \leq n$, Q_i označava neki od kvantora $\exists$ ili $\forall$. Pod *rangom* formule koja je u preneks normalnoj formi podrazumevamo broj alternacija kvantora. Ilistrujmo uvedeni pojam jednim primerom. Neka je $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 \forall x_5 \exists x_6 \varphi$ formula u preneks normalnoj formi. Rang formule je 3.

Lema 15 *Ako je T modelski kompletna, onda je T univerzalno egzistencijalna.*

Dokaz: Neka je S skup svih univerzalno egzistencijalnih rečenica φ takvih da $T \vdash \varphi$. Kako je svaka formula logički ekvivalentna formuli koja je u preneks normalnoj formi dovoljno je da dokažemo sledeće: ako je φ u preneks normalnoj formi i $T \vdash \varphi$, onda $S \vdash \varphi$. Dokaz izvodimo indukcijom po rangu formule φ. Pretpostavimo $T \vdash \varphi$.

1. Neka je φ formula $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$, gde je rang formule ψ manji od ranga formule φ. Tada $T \vdash \psi$ pa po indukcijskoj pretpostavci $S \vdash \psi$ i otuda $S \vdash \varphi$.

2. Neka je φ formula $\exists x_1 \dots \exists x_n \psi$, gde ψ ima manji rang od φ. Na osnovu Teoreme 46, $T \vdash \psi \Leftrightarrow \phi$ za neku egzistencijalnu formulu ϕ. Formula $\psi \Leftrightarrow \phi$ je logički ekvivalentana konjukciji dve formule koje su u preneks normalnoj formi i svaka od njih ima isti rang kao i ψ, pa $S \vdash \psi \Leftrightarrow \phi$. Takodje, $T \vdash \exists x_1 \dots \exists x_n \phi$ pa $S \vdash \exists x_1 \dots \exists x_n \phi$ i otuda $S \vdash \varphi$.

3. Ako φ ima rang nula, onda je φ univerzalna ili egzistencijalna formula, pa je logička posledica neke univerzalno egzistencijalne formule iz S. $\diamond$

Lema 16 *Neka je T teorija jezika L. T je univerzalna teorija akko svaki podmodel svakog modela teorije T je takodje model teorije T.*

2.8 Usmereni sistemi modela

Usmeren skup,$(D, \leq)$ sastoji se iz skupa D sa parcijalnim uredjenjem $\leq$ tako da za sve $i, j \in D$, postoji $k \in D$ tako da je $i \leq k$ i $j \leq k$. *Usmeren sistem* $\{\mathbf{A}_i, m_{ij}\}$ modela i monomorfizama sastoji se od usmerenog skupa $(D, \leq)$, familije modela $\{\mathbf{A}_i | i \in D\}$, i familije monomorfizama $\{m_{ij} : \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_j | i \leq j \in D\}$ tako da

1. $m_{ii} : \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_i$ je identiteta

2. $m_{ik} = m_{jk} m_{ij}$, kad god je $i \leq j \leq k$.

Neka je $A = \bigcup \{A_i \times \{i\} | i \in D\}$. Za $(a, i), (b, j) \in A$ definišimo relaciju $\sim$ na sledeći način: $(a, i) \sim (b, j)$ akko $m_{ik}(a) = m_{jk}(b)$ za neko $k \in D$. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Dokažimo, na primer, da je $\sim$ tranzitivna. Neka je $(a, i) \sim (b, j)$ i $(b, j) \sim (c, l)$. Tada za neke k i $\overline{k}$ važi: $m_{ik}(a) = m_{jk}(b)$ i $m_{j\overline{k}}(b) = m_{l\overline{k}}(c)$. Otuda, $m_{i\overline{k}}(a) = m_{k\overline{k}} m_{ik}(a) = m_{k\overline{k}} m_{jk}(b) = m_{j\overline{k}}(b) = m_{l\overline{k}}(c)$. Neka je $[a, i]$ klasa ekvivalencije para (a, i) i $A_\infty = \{[a, i] | (a, i) \in A\}$.

Direktan limes sistema $\{\mathbf{A}_i, m_{ij}\}$, u oznaci $\lim \mathbf{A}_i$ ili $\mathbf{A}_\infty$ je struktura čiji je univerzum A_∞.

Relacija $R^{\mathbf{A}_\infty}([a_1, i_1], \dots, [a_n, i_n])$ važi akko $R^{\mathbf{A}_k}(m_{i_1 k}(a_1), \dots, m_{i_n k}(a_n))$ važi za neko k takvo da je $i_t \leq k$ kad je $1 \leq t \leq n$. Funkcije i konstante iz $\mathbf{A}_\infty$ definišemo na sličan način. Monomorfizam $m_{i\infty} : \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_\infty$ je definisan sa $m_{i\infty}(a) = [a, i]$. Primetimo da važi $m_{j\infty} m_{ij} = m_{i\infty}$ kad god je $i \leq j$.

Teorema 48 *Ako je $\{\mathbf{A}_i, m_{ij}\}$ usmeren sistem struktura i elementarnih monomorfizama, tada je $m_{i\infty} : \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_\infty$ elementarno za sve i.*

Dokaz: Idukcijom po složenost formule, može se pokazati da za svako i važi:
$\mathbf{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ akko $\mathbf{A}_\infty \models \varphi[m_{i\infty}(a_1), \dots, m_{i\infty}(a_n)]$.
Izvešćemo najbitniji korak u dokazu:
Pretpostavimo da $\mathbf{A}_\infty \models \exists x \psi(x, c_{m_{i\infty(a)}})$. Tada $\mathbf{A}_\infty \models \psi[m_{j\infty}(b), m_{i\infty}(a)]$ za neko $j \in D$, $b \in A_j$. Izaberimo $k \in D$ tako da je $i \leq k$, $j \leq k$. Tada $\mathbf{A}_\infty \models \psi[m_{k\infty} m_{jk}(b), m_{k\infty} m_{ik}(a)]$.
Na osnovu indukcijske hipoteze $\mathbf{A}_k \models \psi[m_{jk}(b), m_{ik}(a)]$, pa otuda
$\mathbf{A}_k \models \exists x \psi(x, c_{m_{ik(a)}})$. Kako je m_{ik} elementarno, biće $\mathbf{A}_i \models \exists x \psi(x, c_a)$. $\diamond$

Lema 17 *Neka je* $\{\mathbf{A}_i, m_{ij}\}$ *usmeren sistem modela i monomorfizama. Pretpostavimo da je* $\mathbf{B}$ *model i* $\{f_i : \mathbf{A}_i \to \mathbf{B} | i \in D\}$ *familija monomorfizama takvih da je* $f_j m_{ij} = f_i$ *kad god je* $i \leq j$*. Tada postoji jedinstven monomorfizam* $f : \mathbf{A}_\infty \to \mathbf{B}$ *takav da je* $f m_{i\infty} = f_i$ *za svako* $i \in D$*.*

Dokaz: Definišimo preslikavanje f na sledeći način $f([a,i]) = f_i(a)$. Pretpostavimo da je $g : \mathbf{A}_\infty \to \mathbf{B}$ takvo da je $g m_{i\infty} = f_i$ za sve $i \in D$. Tada je $g([a,i]) = g(m_{i\infty}) = f_i(a)$. $\diamond$

Neka je γ ordinal i $\{\mathbf{A}_\alpha | \alpha < \gamma\}$ familija modela takvih da je $\mathbf{A}_\alpha \subset \mathbf{A}_\beta$ kad god je $\alpha < \beta < \gamma$. Kažemo da je $\{\mathbf{A}_\alpha | \alpha < \gamma\}$ lanac dužine γ.

$\{\mathbf{A}_\alpha | \alpha < \gamma\}$ može biti konstuisan kao usmeren sistem $\{\mathbf{A}_\alpha, i_{\alpha\beta}\}$, u oznaci $\mathbf{A}_\infty$, gde je $A_\infty = \bigcup\{A_\alpha | \alpha < \gamma\}$ i $R^{\mathbf{A}_\infty} = \bigcup\{R^{\mathbf{A}_\alpha} | \alpha < \gamma\}$. Ovako definisanu strukturu $\mathbf{A}_\infty$ nazivamo unija lanca $\{\mathbf{A}_\alpha | \alpha < \gamma\}$, u oznaci $\mathbf{A}_\infty = \bigcup\{\mathbf{A}_\alpha | \alpha < \gamma\}$. Lanac $\{\mathbf{A}_\alpha | \alpha < \gamma\}$ je *elementaran* ako je $i_{\alpha\beta}$ elementarno kad god je $\alpha < \beta$.

Na osnovu Teoreme 48 zaključujemo da važi:

Lema 18 *Unija elementarnog lanca je elementarna ekstenzija svakog člana tog lanca.*

Teorema 49 *Teorija* T *je modelski kompletna akko za svaka dva modela* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *teorije* T *i svaki monomorfizam* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *postoji model* $\mathbf{C}$ *i monomorfizmi* $g : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *i* $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$*, pri čemu je* g *elementaran i* $g = hf$*.*

Drugim rečima T *je modelski kompletna akko sledeći dijagram može biti kompletiran.*

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & g \quad h & \\ A & & B \end{array}$$

pri čemu je $\mathbf{A} \models T$ *i* $\mathbf{B} \models T$ *i* g *elementarno.*

Dokaz: Ako je T modelski kompletna, onda je f elementaran i možemo staviti $g = h = f$.

Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi teoreme. Neka je $f_0 : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ monomorfizam izmedju modela teorije T. Na osnovu pretpostavke, postoji struktura $\mathbf{A}_1$, elementaran monomorfizam $g_{01} : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}_1$ i monomorfizam $h_0 : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{A}_1$. Ponavljajući ovaj postupak dobijamo sledeći beskonačan dijagram:

$$
\begin{array}{ccccccc}
B_0 & \overset{k_{01}}{\equiv} & B_1 & \overset{k_{12}}{\equiv} & B_2 & \overset{k_{32}}{\equiv} & \dots \\
 & & & & & & \\
f_0 & h_0 & f_1 & h_1 & f_2 & & \\
 & & & & & & \\
A_0 & \overset{g_{01}}{\equiv} & A_1 & \overset{g_{12}}{\equiv} & A_2 & \overset{g_{32}}{\equiv} & \dots
\end{array}
$$

Neka je $\mathbf{A}_\infty = \lim \mathbf{A}_i$ i $\mathbf{B}_\infty = \lim \mathbf{B}_i$. Na osnovu Teoreme 48 monomorfizmi $g_{i\infty} : \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_\infty$ i $k_{i\infty} : \mathbf{B}_i \to \mathbf{B}_\infty$ su elementarni. Konstruišimo izomorfizam $f_\infty : \mathbf{A}_\infty \to \mathbf{B}_\infty$ takav da je $f_\infty g_{0\infty} = k_{0\infty} f_0$. Tada, ćemo imati, na osnovu leme 9 da je f_0 elementarno.

Pretpostavimo da $a \in \mathbf{A}_\infty$. Izaberimo i tako da je $g_{i\infty}(a_i) = a$ za neko $a_i \in A_i$. Neka je $f_\infty(a) = k_{i\infty} f_i(a_i)$. Pokažimo da je f_∞ dobro definisano. Pretpostavimo da je $g_{i\infty} a_i = g_{j\infty} a_j = a$ i $i \leq j$. Tada je $g_{ij}(a_i) = a_j$ i

$k_{i\infty} f_i(a_i) = k_{j\infty} k_{ij} f_i(a_i) = k_{j\infty} f_j g_{ij}(a_i) = k_{j\infty} f_j(a_j)$

Na osnovu definicije, vidimo da je f_∞ monomorfizam. Da bismo pokazali da je f_∞ *na*, fiksirajmo $b \in B_\infty$. Izaberimo i tako da je $k_{i\infty}(b_i) = b$, za neko $b_i = B_i$. Neka je $a = g_{i+1,\infty} h_i(b_i)$. Tada

$f_\infty(a) = k_{i+1,\infty} f_{i+1} h_i(b_i) = k_{i+1,\infty} k_{i,i+1}(b_i) = b$ $\diamond$

2.9 Skolemove funkcije i neraspoznatljive

Neka je L jezik prvog reda. Proširimo L dodajući novi n-arni funkcijski simbol F_ψ za svaku formulu $\psi = \exists x \varphi$, gde φ ima n slobodnih promenljivih. Jezik $L^* = L \cup \{F_\psi | \psi = \exists x \varphi\}$ nazivamo *Skolemova ekspanzija* jezika L Skolemova teorija jezika L, u oznaci S_L sastoji se od sledećih rečenica jezika L^*:

$\forall y_1 \dots \forall y_n(\psi(y_1 \dots y_n) \Rightarrow \varphi(F_\psi(y_1 \dots y_n) y_1 \dots y_n))$

Neka je $\mathbf{A}$ model jezika L. Ekspanzija $\mathbf{A}^*$ modela $\mathbf{A}$ do jezika L^* je *Skolemova ekspanzija* modela $\mathbf{A}$ akko $\mathbf{A}^* \models S_L$ Neka je T teorija jezika L. *Skolemova ekspanzija* teorije T, u oznaci T^*, čiji je skup aksioma $T \cup S_L$.

Neka $\mathbf{A}^*$ Skolemova ekspanzija modela $\mathbf{A}$ i neka je $X \subseteq A$. *Skolemov omotač* skupa X u modelu $\mathbf{A}^*$, u oznaci $H(X)$, je najmanji skup Y takav da je $X \subseteq Y \subseteq A$, Y sadrži sve konstante iz $\mathbf{A}$ i zatvoren je za funkcije iz $\mathbf{A}^*$. Sa $\mathbf{A}(H(X))$ označavamo podmodel modela $\mathbf{A}$ čiji je univerzum $H(X)$.

Lema 19

1. *Svaki model* $\mathbf{A}$ *jezika* L *ima Skolemovu ekspanziju* $\mathbf{A}^*$.

2. *Ako je* T *konzistentna teorija jezika* L*, onda je njena Skolemova ekspanzija* T^* *konzistentna teorija jezika* L^*.

3. *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *modeli jezika* L, $\mathbf{B}^*$ *Skolemova ekspanzija modela* $\mathbf{B}$ *i* $\mathbf{A}^*$ *Skolemova ekspanzija modela* $\mathbf{A}$. *Ako je* $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{B}^*$ *onda je* $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$.

Dokaz:

1. Neka je $\mathbf{A}$ model jezika L i neka je $\psi = \exists x \varphi$ formula sa tačno n slobodnih promenljivih $x_1 \dots x_n$. $F_\psi^{\mathbf{A}}$ definišemo na sledeći način. Prvo dobro uredimo skup A. Za proizvoljne $a_1, \dots, a_n \in A$:

Ako $\mathbf{A} \models \psi[a_1 \dots a_n]$, neka je $F_\psi^{\mathbf{A}}(a_1 \dots a_n)$ prvi element skupa A za koji važi $\mathbf{A} \models \varphi[aa_1 \dots a_n]$.

Ako nije $\mathbf{A} \models \psi[a_1 \dots a_n]$, neka je $F_\psi^{\mathbf{A}}(a_1 \dots a_n)$ proizvoljan element skupa A.

Tada je $\mathbf{A}^* = \{\mathbf{A}, \{F_\psi^{\mathbf{A}} : \psi = \exists x \varphi\}\}$ Skolemova ekspanzija modela $\mathbf{A}$.

Lema 20 *Neka je* $\mathbf{A}^*$ *Skolemova ekspanzija modela* $\mathbf{A}$ *i* $X \subseteq A$. *Tada je* $\mathbf{A}(H(X))$ *elementarni podmodel modela* $\mathbf{A}$

Dokaz: Neka je $\mathbf{A}^*(H(X))$ odgovarajući model generisan sa $H(X)$ u modelu $\mathbf{A}^*$. Tada je $\mathbf{A}^*(H(X)) \subset \mathbf{A}^*$. Kako je $\mathbf{A}^*(H(X))$ ekspanzija modela $\mathbf{A}(H(X))$ do jezika L^*, tvrdjenje sledi na osnovu prethodne leme.

Kažemo da teorija T jezika L *ima ugradjene Skolemove funkcije* akko za svaku formulu $\psi = \exists x \varphi$ čije su slobodne promenljive $x_1, \dots, x_n$, postoji n-arni term t_ψ jezika L tako da važi:

$T \vdash \forall y_1 \dots \forall y_n (\psi(y_1 \dots y_n) \Rightarrow \varphi(t_\psi(y_1 \dots y_n) y_1 \dots y_n))$

Teorija T jezika L *dopušta eliminaciju kvantora* ako za svaku formulu φ jezika L postoji formula ψ bez kvantora tako da $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$.

Lema 21 *Neka je* T *teorija jezika* L. *Tada postoji ekspanzija* $\overline{L}$ *jezika* L *i ekspanzija* $\overline{T}$ *teorije* T *na jeziku* $\overline{L}$ *takva da* $\overline{T}$ *ima ugradjene Skolemove funkcije. Takodje, svaki model teorije* T *ima ekspanziju koja je model teorije* $\overline{T}$

Dokaz: Definišimo rastući niz jezika L_n na sledeći način: $L_0 = L$ i $L_{n+1} = (L_n)^*$. Neka je $\overline{L} = \bigcup_n L_n$ i neka je $T \cup \bigcup_n S_{L_n}$ skup aksioma teorije $\overline{T}$. Kako svaka formula jezika L ima konačno mnogo simbola, $\overline{T}$ ima ugradjene Skolemove funkcije. $\diamond$

Posledica 12 *Neka je $\overline{T}$ teorija definisana u dokazu prethodne leme. Tada $\overline{T}$ dopušta eliminaciju kvantora.*

Dokaz: (Indukcijom po složenosti formule)
Prepostavimo da je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula $\exists x_{n+1}\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Tada
$\overline{T} \vdash \exists x_{n+1}\psi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \Leftrightarrow \psi(F_\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$

Na osnovu indukcijske hipoteze, postoji formula bez kvantora $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ tako da
$\overline{T} \vdash \psi(F_\varphi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n)$
Tada
$\overline{T} \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n)$. $\diamond$

Teorema 50 *(Donja Skolem-Löwenheim)*

Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ modeli jezika L. Za svaki monomorfizam $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ postoji model $\mathbf{C}$ jezika L, $|\mathbf{C}| \leq max(||L||, |\mathbf{A}|)$ i monomorfizmi $g : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, $h : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$, pri čemu je h elementaran i $f = hg$.

Dokaz: Neka je $\mathbf{B}^*$ Skolemova ekspanzija modela $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ redukcija modela $\mathbf{B}^*(f[A])$ do jezika L. Kako je $\mathbf{B}^*(f[A]) \subset \mathbf{B}^*$, na osnovu leme 19 $\mathbf{C} \prec \mathbf{B}$. $\diamond$

Neka je $\mathbf{A}$ model jezika L, $X \subseteq A$ i $<$ linearno uredjenje na X. Kažemo da je X *skup neraspoznatvljivih* u $\mathbf{A}$, (u odnosu na realciju $<$) akko za svako $n \in \mathbf{N}$ i sve konačne nizove $x_1 < \ldots < x_n$, $y_1 < \ldots < y_n$ elemenata iz X važi: $(\mathbf{A}, x_1 < \ldots < x_n) \equiv (\mathbf{A}, y_1 < \ldots < y_n)$.

Drugim rečima, nizove $x_1 < \ldots < x_n$ i $y_1 < \ldots < y_n$ ne možemo razlikovati formulom prvog reda.

Lema 22 *Neka je $\mathbf{A}$ model jezika L i $(X, <)$ linearno uredjen podskup od A. Pretpostavimo da za svaka dva rastuća niza $x_1 < \ldots < x_n$ i $y_1 < \ldots < y_n$ elemenata iz X, postoji automorfizam f modela $\mathbf{A}$ takav da je $f(x_1) = y_1$, $\ldots f(x_n) = y_n$. Tada je X skup neraspoznatljivih u $\mathbf{A}$.*

Dokaz: Kako je f automorfizam modela $\mathbf{A}$ važi:
$f : (\mathbf{A}, x_1, \ldots, x_n) \cong (\mathbf{A}, y_1, \ldots, y_n)$ i otuda
$f : (\mathbf{A}, x_1, \ldots, x_n) \equiv (\mathbf{A}, y_1, \ldots, y_n)$ $\diamond$

Posledica 13 *Ako je F algebarski zatvoreno polje karakteristike nula, X skup algebarski nezavisnih elemenata, onda je za svako linearno uredjenje $<$ na X, X skup neraspoznatljivih.*

Teorema 51 *Neka je X skup neraspoznatljivih u modelu $\mathbf{A}$ teorije T koja ima ugradjene Skolemove funkcije. Tada:*

1. *Ako je $Y \subseteq X$, onda je Y skup neraspoznatljivih u $\mathbf{A}(H(Y))$ u odnosu na uredjenje nasledjeno iz X, i $\mathbf{A}(H(Y)) \prec \mathbf{A}(H(X))$*

2. *(Stretching) Neka su X i Y beskonačni linearno uredjeni skupovi. Tada postoji model $\mathbf{B}$ u kome je Y skup neraspoznatljivih i skupovi formula jezika L zadovoljenih u $\mathbf{A}$ rastućim nizovima elemenata iz X i onih koji su zadovoljeni u $\mathbf{B}$ rastućim nizovima elemenata iz Y su isti.*

3. *(Teorema o automorfizmu) Neka je f bilo koji automorfizam iz X u X. Tada f može biti na jedinstven način proširen do automorfizma iz $\mathbf{A}(H(X))$ u $\mathbf{A}(H(X))$.*

4. *(Teorema o elementarnom utapanju) Neka je Y skup neraspoznatljivih u modelu $\mathbf{B}$ takav da su skupovi formula jezika L zadovoljenih rastućim nizovima elemenata iz X i Y isti. Neka je f utapanje iz X u Y. Tada f može biti na jedinstven potpuno nači produženo do elementarnog utapanja iz $\mathbf{A}(H(X))$ u $\mathbf{A}(H(Y))$ $\diamond$*

2.10 Modelska kompletiranja

Definicija 12 *Neka su T i T_1 teorije istog jezika L. T_1 je modelsko kompletiranje teorije T, ako važi:*

1. *Ako $\mathbf{A} \models T_1$, onda $\mathbf{A} \models T$*

2. *Ako $\mathbf{A} \models T$, onda postoji $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ tako da je $\mathbf{B} \models T_1$*

3. *Ako $\mathbf{A} \models T$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \models T_1$ i $\mathbf{C} \models T_1$, onda*

   $(\mathbf{B}, a)_{a \in A} \equiv (\mathbf{C}, a)_{a \in A}$.

Primetimo da važi: ako teorija T_1 modelsko komletiranje teorije T onda je T_1 modelski kompletna.

Teorema 52 *Ako su teorije T_1 i T_2 modelska kompletiranja teorije T onda je $T_1 = T_2$.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{A}$ priozvoljan model teorije T_1. Dokažimo da je $\mathbf{A}$ model teorije T_2. Definišimo lanac modela, $\{\mathbf{A}_n | n < \omega\}$, na sledeći način:

1. $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$.

2. Pretpostavimo da $\mathbf{A}_{2n} \models T_1$. Tada $\mathbf{A}_{2n} \models T$ pa postoji $\mathbf{A}_{2n+1} \supset \mathbf{A}_{2n}$ tako da je $\mathbf{A}_{2n+1} \models T_2$.

3. Pretpostavimo da $\mathbf{A}_{2n+1} \models T_2$. Tada $\mathbf{A}_{2n+1} \models T$ pa postoji $\mathbf{A}_{2n+2} \supset \mathbf{A}_{2n+1}$ tako da je $\mathbf{A}_{2n+2} \models T_1$

Neka je $\mathbf{A}_\infty = \bigcup\{\mathbf{A}_{2n} | n < \omega\} = \bigcup\{\mathbf{A}_{2n+1} | n < \omega\}$. Kako je T_1 modelski kompletna, $\{\mathbf{A}_{2n} | n < \omega\}$ je elementaran lanac, pa na osnovu Leme 18 $\mathbf{A}_0 \prec \mathbf{A}_\infty$. Na isti način $\mathbf{A}_1 \prec \mathbf{A}_\infty$, pa na osnovu Leme 9, $\mathbf{A}_0 \prec \mathbf{A}_1$.

Dakle, svaki model teorije T_1 je model teorije T_2 i na osnovu simetrije svaki model teorije T_2 je model teorije T_1. Otuda, na osnovu Teoreme 39, $T_1 = T_2$. $\diamond$

Teorema 53 *Teorija algebarski zatvorenih polja je modelsko kompletiranje teorije polja.*

Dokaz: Uslovi 1 i 2 iz Definicije 12 su očigledno zadovoljeni. Dokažimo da je ispunjen i uslov 3. Prepostavimo da je $\mathbf{A}$ polje i $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ algebarski zatvorene ekstenzije od $\mathbf{A}$, i pokazimo da je $(\mathbf{B}, a)_{a\in A} \equiv (\mathbf{C}, a)_{a\in A}$.

Neka su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{C}_1$ redom algebarski zatvorene elementarne ekstenzije od $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$, takve da je $|\mathbf{B}_1| = |\mathbf{C}_1| > |\mathbf{A}|$. Egzistencija modela $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{C}_1$ sledi na osnovu Teoreme 42. Neka su U i V redom transcedentne baze za $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{C}_1$ nad $\mathbf{A}$. Tada je $|U| = |V| = |\mathbf{B}_1|$. Neka je $f : U \to V$, „$1-1$" i „na". Proširimo f do preslikavanja $f_1 : \mathbf{A}(U) \to \mathbf{A}(V)$, tako da je $f_1|_{\mathbf{A}}$ identiteta. Tada f_1 može biti proširen do izomorfizma $f_2 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{C}_1$, jer su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{C}_1$ redom algebarska zatvorenja od $\mathbf{A}(U)$ i $\mathbf{A}(V)$.

Tada je, na osnovu Leme 9, $(\mathbf{B}, a)_{a\in A} \equiv (C, a)_{a\in A}$. $\diamond$

Teorema 54 *Teorija DLO je modelsko kompletirenje teorije LO.*

Dokaz: Uslov 1 iz Definicije 12 je očigledno ispunjen. Svako linearno uredjenje $\mathbf{A}$ može se prošititi do gustog linearnog uredjenja bez krajnjih tačaka dodajući elemente u $\mathbf{A}$ dok god sve "rupe" ne budu popunjene. Prema tome, važi i svojstvo 2. Dokažimo da je isunjen i uslov 3. Pretpostavimo da je $\mathbf{A} \models LO$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \models DLO$ i $\mathbf{C} \models DLO$ ali $(\mathbf{B}, a)_{a\in A} \not\equiv (\mathbf{C}, a)_{a\in A}$. Neka je φ formula i $a_1, \ldots, a_n \in A$ takvi da $\mathbf{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_n]$ i $\mathbf{C} \models \neg\varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Neka je $\mathbf{A}_0$ konačan podmoel od $\mathbf{A}$ čiji je univerzum $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Na osnovu Teoreme 50 postoje prebrojive srtukture $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{C}_1$ takve da je $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{B}_1 \prec \mathbf{B}$ i $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{C}_1 \prec \mathbf{C}$. Tada očigledno $(\mathbf{B}_1, a_1, \ldots, a_n) \not\equiv (\mathbf{C}_1, a_1, \ldots, a_n)$. Medjutim, poslednje je nemoguće jer postoji izomorfiam $f : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{C}_1$ takav da je $f(a_i) = a_i$. Izomorfizam f možemo konstruisati na sledeći načn:

Neka je $B_1 = \{b_i | i < \omega\}$ i $C_1 = \{c_i | i < \omega\}$, pri čemu je $a_i = b_i = c_i$, $i \leq n$.

f konsrtuišemo indukcijom po i:

1. Ako je $i \leq n$ onda je $f(b_i) = c_i$

2. Neka je $i > n$, i je paran broj. f je već definisano na nekom konačnom podskupu B_0 od B_1. Neka je $b \in B_1 \setminus B_0$ element sa najmanjim indeksom. Tada postoje $b_k, b_{k+1} \in B_1$ takvi da je $b_k < b < b_{k+1}$. Kako je $f[B_0]$ već definisano postoji $c \in C_1$ takav da je $f(b_k) < c < f(b_{k+1})$. Neka je $f(b) = c$.

3. Ako je $i > n$, i neparan broj uradićemo isto što i u 2 s'tim da B_1 i C_1 zamene mesta.

Napomenimo da važi uopštenje dokaza prethodne teoreme. Preciznije, važi:

Teorema 55 *Svaka dva prebrojiva gusta linearna uredjenja bez krajnjih tačaka su izomorfna.*

2.11 Podmodelska kompletnost

Teorija T je *podmodelski kompletna* ako je $T \cup \Delta_{\mathbf{A}}$ kompletna za svaki podmodel $\mathbf{A}$ nekog modela teorije T.

Teorema 56 *Neka je T teorija jezika L. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *T je podmodelski kompletna.*
2. *T dopušta eliminaciju kvantora.*
3. *Za svaka dva modela $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ teorije T naredni dijagram može biti kompletiran .*

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{D} & & \\ & /// & & & \\ \mathbf{B} & & & & \mathbf{C} \\ & f & & g & \\ & & \mathbf{A} & & \end{array}$$

pri čemu je $\mathbf{B} \models T$ i $\mathbf{C} \models T$

Dokaz:

$(1 \Rightarrow 2)$: Dokaz ovog smera može se izvesti na sličan način kao u teoremi 46, (deo $(2 \Rightarrow 3)$).

$(2 \Rightarrow 3)$: Neka je $S = Th(\mathbf{B}, b)_{b \in B} \cup \Delta_{\mathbf{C}} \cup \{f(a) = g(a) | a \in A\}$. Pretpostavimo da je S nekonzistentna teorija. Tada postoje formule $\varphi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$ jezika L, zatim $a \in A$, $b \in B \setminus f[A]$ i $d \in C \setminus g[A]$ tako da:

1. $\mathbf{B} \models \varphi[b, f(a)]$

2. $\psi(x_1, x_2)$ je formula bez kvantora i $\mathbf{C} \models \psi[d, g(a)]$

3. $\{\varphi(c_b, c_{f(a)}), \psi(c_d, c_{g(a)})\ ,\ c_{f(a)} = c_{g(a)}\}$ je nekonzistentan skup.

Na osnovu pretpostavke, postoji formula bez kvantora $\phi(x_2)$ tako da
$T \vdash \exists x_1 \psi(x_1, x_2) \Leftrightarrow \phi(x_2)$
Otuda, $\mathbf{C} \models \phi(c_{g(a)})$, $\mathbf{A} \models \phi(c_a)$ i $\mathbf{B} \models \phi(c_{f(a)})$. Tada će važiti i
$\mathbf{B} \models \varphi(c_b, c_{f(a)}) \wedge \exists x_1 \psi(x_1, c_{f(a)})$
što je, sa obzirom na 3 nemoguće.
($3 \Rightarrow 1$): Slično kao i dokaz Teoreme 40. $\diamond$

Teorema 57 *Ako je T univerzalna teorija i T_1 modelsko kompletiranje teorije T, onda teorija T_1 dopušta eliminaciju kvantora.*

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme, dovoljno je pokazati da je T_1 podmodelski kompletna. Neka je $\mathbf{B} \models T_1$ i $\mathbf{A}$ podmodel modela $\mathbf{B}$. Tada je $\mathbf{B} \models T$, pa na osnovu leme 16, $\mathbf{A} \models T$. Neka su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ modeli teorije $T_1 \cup \Delta_{\mathbf{A}}$. Tada, na osnovu teoreme 43, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}_1$ i $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}_2$ pa je $\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{B}_2$. Dakle, $T_1 \cup \Delta_{\mathbf{A}}$ je kompletna teorija.

Posledica 14 *Teorija algebarki zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora.*

Dokaz: Sledi direktno na osnovu Teoreme 52 i prehodne teoreme. $\diamond$

Posledica 15 *Teorija gustih uredjenja bez krajnjih tačaka dopušta eliminaciju kvantora.*

Dokaz: Sledi na osnovu teoreme 53 i teoreme 56.$\diamond$

3 Definabilnost

Definicija 13 *Neka je* $\mathbf{A}$ *model jezika* L. $X \subseteq A^n$ *je* definabilan *akko postoji formula* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ *jezika* L *i* $(b_1, \ldots, b_m) \in A^m$ *tako da je* $X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n | \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]\}$. *U tom slučaju kažemo da* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{b_1}, \ldots, c_{b_n})$ *definiše* X.

X je B-definabilan ili definabilan nad B ako postoji formula

$\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_l)$ *i* $(b_1, \ldots, b_l) \in B^l$ *tako da* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{b_1}, \ldots, c_{b_l})$ *definiše* X.

Primer 19 *Neka je* $\mathcal{R} = (R, +, -, \cdot, 0, 1)$ *prsten i* $p(x) \in R[x]$. *Tada je skup* $X = \{x \in R | p(x) = 0\}$ *definabilan: Pretpostavimo da je*

$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0$

Neka je $\varphi(x, y_0, \ldots, y_n)$ *formula* $y_n \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x} + \ldots + y_1 x + y_0 = 0$

Tada $\varphi(x, a_0, \ldots, a_n)$ *definiše* X. *Primetimo da je* X *A-definabilan za svaki* $A \supset \{a_0, \ldots, a_n\}$.

Lema 23 *Neka je* $\mathbf{A}$ *model jezika* L. *Neka je za svako* $n \geq 1$ D_n *kolekcija podskupova skupa* A^n *i* $\mathcal{D} = \{D_n | n \geq 1\}$ *najmanja kolekcija takva da važi:*

1. $A^n \in D_n$
2. *Za svaki* $n-$*arni funkcijski simbol* F *jezika* L, *graf funkcije* $F^{\mathbf{A}}$ *pripada skupu* D_n
3. *Za svaki* $n-$*arni relacijaski simbol* R *jezika* L, $R^{\mathbf{A}} \in D_n$
4. *Za sve* $i, j \leq n$ $\{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n | x_i = x_j\} \in D_n$
5. *Ako* $X \in D_n$, *onda* $A \times X \in D_{n+1}$
6. *Svaki* D_n *je zatvoren za komplemente, unije i preseke.*
7. *Ako* $X \in D_{n+1}$ *i preslikavanje* $\pi : A^{n+1} \to A^n$ *je projekcija, onda* $\pi(X) \in D_n$
8. *Ako* $X \in D_{n+m}$ *i* $b \in A^m$, *onda* $\{a \in A^n | (a, b) \in X\} \in D_n$

Tada važi: $X \subseteq A^n$ *je definabilan akko* $X \in D_n$

Dokaz:

$\Leftarrow$:

1. A^n je definabilan sa $x = x$
2. Graf funkcije $F^{\mathbf{A}}$ je definabilan sa $F(x_1, \ldots, x_n) = y$
3. Relacija $R^{\mathbf{A}}$ definisana je sa R
4. Skup $\{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n | a_i = a_j\}$ definisan je sa $x_i = x_j$

5. Ako je $X \subseteq A^n$ definisan sa $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})$ tada je $A \times X$ definisan sa $\varphi(x_2, \ldots, x_{n+1}, c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})$

6. Ako je $X \subseteq A^n$ definisan sa $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})$ i $Y \subseteq A^n$ definisan sa $\psi(x_1, \ldots, x_n, c_{b_1}, \ldots, c_{b_l})$ tada važi:

   $A \setminus X$ je definisan sa $\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})$,

   $X \cap Y$ je definisan sa $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}) \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, c_{b_1}, \ldots, c_{b_l})$

   $X \cup Y$ je definisan sa $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}) \vee \psi(x_1, \ldots, x_n, c_{b_1}, \ldots, c_{b_l})$.

7. Ako je $X \subseteq A^{n+1}$ definisan sa $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}, c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})$ onda je $\pi(X)$ definisan sa $\exists x_{n+1}\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}, c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})$

8. Ako je $X \subseteq A^{n+m}$ definisan sa $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+m}, c_{d_1}, \ldots, c_{d_k})$ i $(b_1, \ldots, b_m) \in A^m$ onda je skup $\{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n | (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in X\}$ definisan sa $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{b_1}, \ldots, c_{b_m}, c_{d_1}, \ldots, c_{d_k})$.

Dakle, ako $X \in D_n$ onda je X definabilan.

$\Rightarrow$: Pokažimo da iz $X \subseteq A^n$ je definabilan, sledi $X \in D_n$. Indukcijom po složenosti pokazaćemo da ako je $t(x_1, \ldots, x_n)$ term onda

$\{(a_1, \ldots, a_n, b) \in A^{n+1} | t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b\} \in D_{n+1}$.

Neka je t konstantar term c. Pokazaćemo da tada

$\{(a_1, \ldots, a_n, c^{\mathbf{A}}) | a_1, \ldots, a_n \in A^n\} \in D_{n+1}$.

Na osnovu uslova (4), $\{(a_1, a_2) \in A^2 | a_1 = a_2\} \in D_2$. Neka je $X = \{(a_1, a_2) \in A^2 | a_1 = a_2\}$ i $c^{\mathbf{A}} \in A$. Tada će na osnovu uslova (8) važiti: $\{a \in A | (a, c^{\mathbf{A}}) \in X\} \in D_1$. tj $\{a \in A | a = c^{\mathbf{A}}\} \in D_1$, odnosno $\{c^{\mathbf{A}}\} \in D_1$. Otuda, primenom pravila (5), n, puta dobijamo

$\{(a_1, \ldots, a_n, c^{\mathbf{A}}) | (a_1, \ldots, a_n) \in A^n\} \in D_{n+1}$.

Ako je $t = x_i$ onda na osnovu (1) i (4) dobijamo

$\{(a_1, \ldots, a_n, a_i) | (a_1, \ldots, a_n) \in A^n\} \in D_{n+1}$.

Pretpostavimo da je $t = f(t_1, \ldots, t_m)$. Neka je G_i graf preslikavanja $t_i^{\mathbf{A}} : A^n \to A$. Na osnovu indukcijske hipoteze $G_i \in D_{n+1}$. Neka je G graf funkcije $f^{\mathbf{A}}$. Tada je graf preslikavanja $t^{\mathbf{A}}$:

$\{(a_1, \ldots, a_n, a) | \exists b_1 \ldots \exists b_n (\bigwedge_{i=1}^m (a_1, \ldots, a_n, b_i) \in G_i \wedge ((b_1, \ldots, b_m, a) \in G)\}$.

Na osnovu svojstava (6) i (7) prethodni skup pripada skupu D_{n+1}.

Sada ostaje da pokažemo, indukcijom po složenosti formula da svaki definabilan $X \subseteq A^n$ pripada skupu D_n.

Neka je φ formula $t_1 = t_2$. Tada

$\{((a_1, \ldots, a_n \in A^n) | t_1^{\mathbf{A}}((a_1, \ldots, a_n) = t_2^{\mathbf{A}}((a_1, \ldots, a_n)\} =$

$\{((a_1, \ldots, a_n \in A^n) | \exists b_1 \exists b_2 (t_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b_1 \wedge t_2^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b_2 \wedge b_1 = b_2)\} \in D_n$

Neka je $\varphi = R(t_1, \ldots, t_m)$. Tada

$\{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n | \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\} =$

$\{(a_1, \ldots, a_n) | \exists b_1 \ldots \exists b_m (\bigwedge_{i=1}^m t_i^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b_i \wedge (b_1, \ldots, b_m) \in R^{\mathbf{A}})\} \in D_n$.

Dakle, svi skupovi definisani pomoću atomičnih formula pripadaju $\mathcal{D}$. Kako je $\mathcal{D}$ zatvoren za bulovske kombinacije i projekcije, svi definabilni skupovi su u $\mathcal{D}$.

Lema 24 *Neka je* $\mathbf{A}$ *model jezika* L *i* $X \subseteq A^n$*,* B*-definabilan. Tada za svaki automorfizam* σ *modela* $\mathbf{A}$ *takav da je* $\sigma(b) = b$ *za svako* $b \in B$ *važi* $\sigma(X) = X$*.*

Dokaz: Neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n, c_{b_1}, \ldots, c_{b_n})$ formula koja definiše skup X, σ automorfizam modela $\mathbf{A}$ takav da je $\sigma(b) = b$ za svako $b \in B$ i $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Kako je σ automorfizam, na osnovu teoreme 34
$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n]$ akko
$\mathbf{A} \models \varphi[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n), \sigma(b_1), \ldots, \sigma(b_n)]$ akko
$\mathbf{A} \models \varphi[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n), b_1, \ldots, b_n]$.
Dakle $(a_1, \ldots, a_n) \in X$ akko $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in X$. $\diamond$

Posledica 16 *Skup realnih brojeva nije definabilan u skupu kompleksnih brojeva.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbf{R}$ definabilan. Tada postoji konačan $A \subsetneq \mathbf{C}$ takav da je $\mathbf{R}$, A definabilan. Neka su $r, s \in \mathbf{C}$ algebarski nezavisni nad A pri čemu $r \in \mathbf{R}$ i $s \notin \mathbf{R}$. Tada postoji automorfizam σ polja $\mathbf{C}$ takav da je $\sigma|_A$ identiteta i $\sigma(r) = s$. Otuda, $\sigma(\mathbf{R}) \neq \mathbf{R}$. $\diamond$

3.1 Algebarski zatvorena polja

Lema 25 *Neka je* φ *formula na jeziku teorije polja. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. $\mathbf{C} \models \varphi$
2. $ACF_0 \models \varphi$
3. $ACF_p \models \varphi$ *za dovoljno veliko* p.
4. $ACF_p \models \varphi$ *za proizvoljno veliko* p

Dokaz: (2) $\Rightarrow$ (1) je očigledno dok (1) $\Rightarrow$ (2) sledi na osnovu kompletnosti teorije ACF_0. Pretpostavima da $ACF_0 \models \varphi$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da $ACF \cup \{\neg\varphi_1, \ldots, \neg\varphi_n\} \models \varphi$. Otuda, ako je p prost broj i $p > n$, onda $ACF_p \models \varphi$ pa (2) $\Rightarrow$ (3). Očigledno (3) $\Rightarrow$ (4). Pretpostavimo da ne važi $ACF_0 \models \varphi$. Kako je ova teorija kompletna, imamo $ACF_0 \models \neg\varphi$ pa na osnovu dela (2) $\Rightarrow$ (3) sledi da za dovoljno veliko p $ACF_p \models \neg\varphi$. Prema tome, ne postoje proizvoljno veliki prosti brojevi p za koje $ACF_0 \models \varphi$. Otuda, (4) $\Rightarrow$ (2).

Teorema 58 *Neka je* $f : \mathbf{C^n} \to \mathbf{C^n}$ *polinomijalno preslikavanje. Ako je* f *injekcija onda je i surjekcija.*

Dokaz:
Možemo jednostavno napisati rečenicu Φ_d na jeziku polja tako da za svako polje $\mathbf{F}$ važi: $\mathbf{F} \models \Phi_d$ akko je za svako polinomijalno preslikavanje $f : \mathbf{F^n} \to \mathbf{F^n}$ gde je svaka koordinantna funkcija stepena najviše d, ispunjeno: ako je f injekcija onda je f i surjekcija. Na osnovu prethodne leme dovoljno je da pokažemo da za dovoljno velike proste brojeve p, $ACF_p \models \Phi_d$ za sve $d \in \mathbf{N}$. Kako je ACF_p

kompletna teorija dovoljno je pokazati da ako je $\mathbf{K}$ algebarsko zatvorenje polja od p elemenata, onda je svako „$1-1$" polinomojalno preslikavanja $f : \mathbf{K^n} \to \mathbf{K^n}$ „na". Neka je $f : \mathbf{K^n} \to \mathbf{K^n}$ polinomijalno preslikavnje koje je „$1-1$". Tada postoji konačno podpolje $\mathbf{K_0}$ polja $\mathbf{K}$ takvo da su svi koeficijenti od f u K_0. Neka $\overline{x} \in \mathbf{K}^n$. Tada postoji konačan $K_1 \subset K$ takav da je $K_0 \subseteq K_1$ i $\overline{x} \in K_1^n$. Kako je $f : \mathbf{K_1^n} \to \mathbf{K_1^n}$, „$1-1$" i $\mathbf{K_1}$ konačno, onda je $f|_{\mathbf{K_1^n}}$ „na". Otuda, $\overline{x} = f(\overline{y})$ za neko $\overline{y} \in K_1^n$ pa je f surjekcija. $\diamond$

Zariski zatvoreni i konstruktibilni skupovi

Neka je $\mathbf{K}$ polje. Za $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ neka je $V(S) = \{\overline{a} \in K^n | p(\overline{a}) = 0$ za sve $p \in S\}$. Za $Y \subseteq K^n$ neka je $I(Y) = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] | f(\overline{a}) = 0$ za sve $\overline{a} \in Y\}$. Primetimo da je $I(Y)$ ideal prstena $K[\overline{x}]$. Kažemo da je $X \subseteq K^n$ *Zariski zatvoren* ako je $X = V(S)$ za neko $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$. Podsetimo se da za dati ideal I prstena P skup $r(I) = \{x \in P | x^n \in I$ za neko $n > 0\}$ nazivamo korenski ideal ideala I.

Navešćemo neke osnovne osobine Zariski zatvorenih skupova.

Lema 26 *Neka je* $\mathbf{K}$ *polje.*

1. *Ako je* $X \subseteq K^n$ *tada je* $r(I(X)) = I(X)$
2. *Ako je* X *Zariski zatvoren, onda je* $X = V(I(X))$
3. *Ako su* X *i* Y *Zariski zatvoreni i* $X \subseteq Y \subseteq K^n$*, onda je* $I(Y) \subseteq I(X)$.
4. *Ako su* $X, Y \subseteq K^n$ *Zariski zatvoreni, tada je* $X \cup Y = V(I(X) \cap I(Y))$ *i* $X \cap Y = V(I(X) + I(Y))$.

Dokaz:

(a) Pretpostavimo da $p, q \in I(X)$ i $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Ako $\overline{a} \in X$, onda je $p(\overline{a}) + q(\overline{a}) = f(\overline{a})p(\overline{a}) = 0$. Otuda $p + q, fp \in I(X)$ pa je $I(X)$ ideal. Ako $f^n \in I(X)$ i $\overline{a} \in X$, onda je $f^n(\overline{a}) = 0$ pa je $f(\overline{a}) = 0$. Dakle, $r(I(X)) \subseteq I(X)$. Kako obrnuta inkluzija važi u opštem slučaju biće $r(I(X)) = I(X)$.

(b) Ako $\overline{a} \in X$ i $p \in I(X)$, onda je $p(\overline{a}) = 0$. Otuda $X \subseteq V(I(X))$. Ako $\overline{a} \in V(I(X)) \setminus X$ tada postoji $p \in I(X)$ takav da je $p(\overline{a}) \neq 0$, kontradikcija.

(c) Ako $p \in I(Y)$ i $\overline{a} \in X$ onda je $p(\overline{a}) = 0$ jer $\overline{a} \in Y$. Otuda $I(Y) \subseteq I(X)$. Na osnovu dela (b) ako je $I(X) = I(Y)$ onda je $X = Y$.

(d) Ako $p \in I(X) \cap I(Y)$ onda je $p(\overline{a}) = 0$ za $\overline{a} \in X$ kao i za $\overline{a} \in Y$. Otuda $X \cup Y \subseteq V(I(X) \cap I(Y))$. Sa druge strane, ako $a \notin X \cup Y$, onda postoje $p \in I(X)$ i $q \in I(Y)$ takvi da je $p(\overline{a}) \neq 0$ i $q(\overline{a}) \neq 0$. Tada je $p(\overline{a}) \cdot q(\overline{a}) \neq 0$, pa kako $pq \in I(X) \cap I(Y)$ to $a \notin V(I(X) \cap I(Y))$. Ako $\overline{a} \in X \cup Y$, $p \in I(X)$ i $q \in I(Y)$, tada je $p(\overline{a}) + q(\overline{a}) = 0$, pa je $X \cup Y \subseteq V(I(X) + I(Y))$. Ako $a \notin X$, onda postoji $p \in I(X) \subseteq I(X) + I(Y)$ takav da je $p(\overline{a}) \neq 0$ pa $\overline{a} \notin V(I(X) + I(Y))$. Analogno, ako $\overline{a} \notin Y$ onda $\overline{a} \notin V(I(X) + I(Y))$.

Lema 27

1. *Ne postoji beskonačan opadajući niz Zariski zatvorenih skupova.*

2. *Ako je X_i Zariski zatvoren za $i \in I$, tada postoji konačan $I_0 \subseteq I$ takav da je $\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I_0} X_i$*

Dokaz:

1. Ako je $X_0 \supset X_1 \supset \ldots$ opadajuću Zariski zatvorenih skupova, onda je $I(X_0) \subsetneq I(X_1) \subsetneq \ldots$ rastući niz prostih ideala, što je u kontradikciji sa Hilbertvom teoremom.

2. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje Zariski zatvoreni skupovi $X_1, X_2 \ldots$ tako da je $\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i \subsetneq \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, što je u kontradikciji sa 1.

Naredna lema daje geometrijski opis definabilnih skupova.

Lema 28 *Neka je* $\mathbf{K}$ *polje. Podskupovi od K^n definisani atomičnim formulama su tačno skupovi oblika $V(p)$ za neki $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Podskup od K^n je definisan formulom bez kvantora akko je Bulovska kombinacija Zariski zatvorenih skupova.*

Dokaz: Ako je $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ atomična formula na jeziku polja, onda postoji $q(\overline{x}, \overline{y}) \in Z[\overline{x}, \overline{y}]$ takav da je $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ ekvivalenta sa $q(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. Ako je $X = \{\overline{x} | \varphi(\overline{x}, \overline{a})\}$, tada je $X = V(q(\overline{x}, \overline{a}))$ i $q(\overline{x}, \overline{a}) \in K[\overline{x}]$. Sa druge strane, ako $p \in K[\overline{x}]$, onda postoji $q \in \mathbf{Z}[\overline{x}, \overline{y}]$ i $\overline{a} \in K^m$ tako da je $p(\overline{x}) = q(\overline{x}, \overline{a})$. Tada je $V(p)$ definisano formulom bez kvantora $q(\overline{x}, \overline{a}) = 0$.

Ako je X Zariski zatvoren, na osnovu teoreme 7, postoje $p_1, \ldots, p_n$ takvi da je $X = V(p_1, \ldots, p_n) = V(p_l) \cap \ldots \cap V(p_n)$.

Kako su skupovi definisani formulama bez kvantora tačno konačna Bulovske kombinacije skupova definisanih atomičnim formulama, skup definisan formulom bez kvantora je Bulovska kombinacija Zariski zatvorenih skupova. $\diamond$

Definicija 14 *$X \subseteq K^n$ je konstruktibilan skup ako je konačna Bulovska kombinacija Zariski zatvorenih skupova.*

Lema 29 *Neka je* $\mathbf{K}$ *algebarski zatvoreno polje. Tada:*

1. *$X \subseteq K^n$ je konstruktibilan akko je definabilan.*

2. *Slika konstruktibilnog skupa pri polinomijalnom preslikavanju je konstruktibilan skup.*

Dokaz:

1. Na osnovu prethodne leme konstruktibilni skupovi su tačno skupovi definisani formulom bez kvantora. Kako teorija algebarski zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora, svaki definabilan skup je definabilan formulom bez kvantora.

2. Neka je $X \in K^n$ konstruktibilan skup i $p : K^n \to K^m$ polinomijalno preslikavanje. Tada je $p[X] = \{y \in K^m | (\exists \overline{x} \in K^n) p(\overline{x}) = y\}$. Ovaj skup je definabilan i otuda konstruktiblan. $\diamond$

Definicija 15 *Kažemo da je teorija T jako minimalna ako za svaki model* $\mathbf{M}$ *teorije T važi: svaki definabilan $X \subseteq M$ je konačan ili kokonačan.*

Lema 30 *Neka je* $\mathbf{K}$ *algebarski zatvoreno polje i $X \subseteq K$. Tada je ili X konačan ili $K \setminus X$ konačan. Otuda, teorija ACF je jako minimalna.*

Dokaz: Na osnovu eliminacije kvantora, svaki $X \subseteq K$ je Bulovska kombinacija skupova oblika $V(p)$, gde $p \in K[x]$. $V(p)$ je ili konačan ili je ceo K(u slučaju da je $p = 0$). $\diamond$

Definicija 16 *Neka je* $\mathbf{K}$ *polje i $X \subseteq K^n$. Kažemo da je funkcija $f : X \to K$ kvazi racionalna ako je ispunjen jedan od sledeća dva uslova:*

1. $\mathbf{K}$ *je karakteristike nula i za neku racionalnu funkciju $q(\overline{x}) \in K(x_1, \ldots, x_n)$ $f(\overline{x}) = q(\overline{x})$ na X.*

2. $\mathbf{K}$ *je karakteristike $p > 0$ i za neku racionalnu funkciju $q(\overline{x}) \in K(x_1, \ldots, x_n)$ $f(\overline{x}) = q(\overline{x})^{\frac{1}{p}}$.*

Racionalne funkcije su očigledno definabilne. U algebarski zatvorenom polju karakteristike p, formula $x = y^p$ definiše funkciju $x \to x^{\frac{1}{p}}$ (s obzirom da jednačina $x^p = a$ ima jedinstveno rešenje). Otuda je svaka kvazi-racionalna funkcija definabilna.

Lema 31 *Neka je $X \subseteq K^n$ konstruktibilan i $f : X \to K$ definabilna. Tada postoje konstruktibilni skupovi $X_1, \ldots, X_m$ i kvazi- racionalne funkcije $\rho_1, \ldots, \rho_m$ tako da je $X = \bigcup X_i$ i $f|_{X_i} = \rho_i|_{X_i}$.*

3.2 Definabilne relacije ekvivalencije u algebarski zatvorenim poljima

Neka je $\mathbf{K}$ algebarski zatvoreno polje i E definabilna relacija ekvivalencije na K^n. Pokazaćemo da tada postoji definabilna funkcija $f : K^n \to K^m$, za neko m, takva da $\overline{x} E \overline{y}$ akko $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$. U tom slučaju količnički skup K^n/E možemo identifikovati sa slikom preslikavanja f.

Posmatrajmo prvo specijalan slučaj: Neka je $\mathbf{K}$ proizvoljno polje. Element $\overline{x} \in K^{nm}$ možemo posmatrati kao niz $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$ gde $\overline{x_i} \in K^n$. Neka je E relacija definisana sa: $\overline{x} E \overline{y}$ akko je $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$ permutacija od $(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_m})$. Relacija E je očigledno definabilna i pri tom važi:

Lema 32 *Postoji definabilna funkcija $f : K^{nm} \to K^l$ za neko $l \in$* $\mathbf{N}$*, takva da $\overline{c} E \overline{d}$ akko $f(\overline{c}) = f(\overline{d})$.*

Dokaz: Neka je $\overline{c} = (\overline{c_1}, \ldots, \overline{c_m})$ gde je $\overline{c_i} = (c_{i,1}, \ldots, c_{i,n})$ i $q_i^{\overline{c}} \in K[x_1, \ldots, x_n, y]$ polinom $y - \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_j$. Neka je $p^{\overline{c}} = \prod q_i^{\overline{c}}$ i $f(\overline{c})$ niz koeficijenata polinoma $p^{\overline{c}}$. Kako je $K[x_1, \ldots, x_n, y]$ domen sa jednoznačnom faktorizacijom $p^{\overline{c}} = p^{\overline{d}}$ akko je $(q_1^{\overline{c}}, \ldots, q_m^{\overline{c}})$ permutacija od $(q_1^{\overline{d}}, \ldots, q_m^{\overline{d}})$. Otuda $\overline{c}E\overline{d}$ akko je $f(\overline{c}) = f(\overline{d})$. $\diamond$

Definicija 17 *Neka je* $\mathbf{M}$ *model jezika* L *i* E *definabilna relacija ekvivalencije na* M^n. *Za* $\overline{a} \in M^n$ *neka* $\overline{a}/E$ *označava* E *klasu ekvivalencije elementa* $\overline{a}$. *Za* $b_1, \ldots, b_m \in M$, $d \in M$, *kažemo da je* d *algebarski nad* $\overline{a}/E, b_1, \ldots, b_m$ *akko postoji formula* $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ *tako da:*

1. $\mathbf{M} \models \varphi[d, \overline{a}, \overline{b}]$
2. *Ako* $\overline{a}E\overline{a_1}$ *tada* $\mathbf{M} \models \varphi(x, c_{\overline{a}}, c_{\overline{b}}) \Leftrightarrow \varphi(x, c_{\overline{a_1}}, c_{\overline{b}})$

   gde je $c_{\overline{a}} = (c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, *odnosno* $c_{\overline{b}} = (c_{b_1}, \ldots, c_{b_m})$
3. $\{m \in M | \mathbf{M} \models \varphi[m, \overline{a}, \overline{b}]\}$ *je konačan.*

   Kažemo da je $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_l)$ *algebarski nad* $\overline{a}/E, b_1, \ldots, b_m$ *akko je svaki* d_i *algebarski nad* $\overline{a}/E, b_1, \ldots, b_m$.

Lema 33 *Pretpostavimo da je* $\overline{c}$ *algebarski nad* $\overline{a}/E, \overline{d}, \overline{b}$ *i* $\overline{b}$ *je algebarski nad* $\overline{a}/E, \overline{d}$, *onda je* $\overline{c}$ *algebarski nad* $\overline{a}/E, \overline{d}$.

Lema 34 *Pretpostavimo da je* $\mathbf{K}$ *algebarski zatvoreno polje i* E *definabilna relacija ekvivalencije na* K^n. *Neka formula* $\psi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{d})$ *definiše* E. *Ako* $\overline{a} \in K^n$ *onda postoji* $\overline{b} \in K^n$ *algebarski nad* $\overline{a}/E, \overline{d}$ *takav da* $\overline{b}E\overline{a}$.

Dokaz: Neka je $0 \leq m \leq n$ maksimalan broj takav da postoje $b_1, \ldots, b_m$ algebarski nad $\overline{a}/E$, $\overline{d}$ za koje $\mathbf{K} \models \exists v_{m+1} \ldots \exists v_n \psi(c_{\overline{b}}, \overline{v}, c_{\overline{a}}, c_{\overline{d}})$. Pretpostavimo da je $m < n$. Neka je $L = \{l \in K | \mathbf{K} \models \exists w_{m+2} \ldots \exists w_n \psi(c_{\overline{b}}, c_l, \overline{w}, c_{\overline{a}}, c_{\overline{d}}\}$.

Ako je L konačan onda možemo izabrati $b_{m+1} \in L$ koji je algebarski nad $\overline{a}/E$, $\overline{d}$,$b_1, \ldots, b_m$. Na osnovu prethodne leme b_{m+1} je algebarski nad $\overline{a}/E$, $\overline{d}$, što je u kontradikciji sa maksimalnošću m. Ako je L beskonačan onda je K/L konačan i možemo izabrati $b_{m+1} \in L$ koji je algebarski nad $\emptyset$, što je u kontradikciji sa maksimalnošću m. Prema tome, $m = n$ i $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ je traženi element. $\diamond$

Teorema 59 *Pretpostavimo da je* $\mathbf{K}$ *algebarski zatvoreno polje i* E *definabilna relacija ekvivalencije na* K^n. *Tada za neko* l *postoji definabilna funkcija* $f : K^n \to K^l$ *tako da* $\overline{x}E\overline{y}$ *akko* $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$.

Dokaz: Radi jednostvanosti pretpostavićemo da je E definabilan nad $\emptyset$. Za svaku formulu $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ i $k > 0$, neka $\theta_{\varphi,k}(\overline{y})$ bude konjukcija:

1. $\forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow \overline{x}E\overline{y})$
2. $\forall\overline{x}\forall\overline{z}(\overline{y}E\overline{z} \Rightarrow (\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}, \overline{z})))$

3. $|\{\overline{x} : \varphi(\overline{x}, \overline{y})\}| = k$

   Na osnovu prethodne leme, za sve $\overline{a} \in K^n$, postoje φ i k tako da $\theta_{\varphi,k}(c_{\overline{a}})$. Na osnovu 2, ako važi $\theta_{\varphi,k}(c_{\overline{a}})$ i $\overline{b}E\overline{a}$, onda važi i $\theta_{\varphi,k}(c_{\overline{b}})$.

   Neka je $X = \{\overline{a}|\theta_{\varphi,k}(c_{\overline{a}})\}$. Ako $\overline{a} \in X$, neka je $Y_{\overline{a}} = \{\overline{b}|\varphi(c_{\overline{b}}, c_{\overline{a}})\}$. Za $\overline{a}, \overline{b} \in X$ važi: $\overline{a}E\overline{b}$ akko je $Y_{\overline{a}} = Y_{\overline{b}}$. Otuda, na osnovu leme 29 postoji $\emptyset$ definabilna funkcija $f : X \to K^l$ za neko l, takva da $Y_{\overline{a}} = Y_{\overline{b}}$ akko $f(\overline{a}) = f(\overline{b})$.

   Na osnovu kompaktnosti, postoje $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ i $k_1, \ldots, k_m$ tako da za neko i, $\theta_{\varphi_i,k_i}(c_{\overline{m}})$ važi za svaki element iz K^n. Neka je $X_i = \{\overline{m}|\theta_{\varphi_i,k_i}(c_{\overline{m}})\}$. Tada postoji $f_i : X_i \to K^{l_i}$ takva da $\overline{a}E\overline{b}$ akko $f_i(\overline{a}) = f_i(\overline{b})$, za sve $\overline{a}, \overline{b} \in X_i$. Proširimo f_i do K^n stavljajući $f_i(\overline{x}) = 0$ za $\overline{x} \notin X_i$. Definišimo funkciju $f : K^n \to K^{\sum l_i}$ sa $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x})))$. Tada $\overline{a}E\overline{b}$ akko $f(\overline{a}) = f(\overline{b})$. $\diamond$

3.3 Realno zatvorena polja

Za razliku od algebarski zatvorenih polja, teorija realnih brojeva ne dopušta eliminaciju kvantora na jeziku $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$. U dokazu leme 30 videli smo da je svako polje sa eliminacijom kvantora jako minimalno, dok u $\mathbf{R}$ formula $\exists z(z^2 = x)$ definiše beskonačan skup čiji je komplement takodje beskonačan.

Uredjenje na $\mathbf{R}$ možemo definisati sa $x < y \Leftrightarrow \exists z(z^2 + x = y \wedge \neg(z = 0))$. Kako prethodna formula nije ekvivalentna formuli bez kvantora, vidimo da je uredjene "obstrukcija " eliminacije kvantora. Na osnovu ove formule, takodje, možemo uočiti da je svaki podskup skupa R^n koji je definabilan na jeziku uredjenih polja, $\{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$, takodje definabilan i na jeziku polja.

Definicija 18 *Kažemo da je polje* $\mathbf{F}$ *uredivo ako postoji linearno uredjenje* $<$ *na* F *tako da je* $(F, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ *uredjeno polje.*

Definicija 19 *Polje* $\mathbf{F}$ *je formalno realno ako u njemu* -1 *nije suma kvadrata.*

U svakom uredjenom polju svi kvadrati su nenegativni. Otuda je svako uredivo polje formalno realno. Sledeći rezultat pokazuje da važi i obrnuto.

Teorema 60 *Ako je polje* $\mathbf{F}$ *formalno realno onda je i uredivo. Posebno, ako* $a \in F$ *i* $-a$ *nije suma kvadrata, onda postoji uredjenje na* $\mathbf{R}$ *u kome je* a *pozitivno.*

Definicija 20 *Polje* $\mathbf{F}$ *je realno zatvoreno ako je formalno realno i nema pravu formalno realnu algebarsku ekstenziju.*

Primer 20 *Kako je polje kompleksnih brojeva jedina prava algebarska ekstenzija polja realnih brojeva, polje* $\mathbf{R}$ *je realno zatvoreno.*

Teorema 61 *Neka je* $\mathbf{F}$ *formalno realno polje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.*

1. **F** *je realno zatvoreno.*

2. **F**(i) *je algebarski zatvoreno.*

3. Za svako $a \in F$ ili je a kvadrat, ili je $-a$ kvadrat i svaki polinom neparnog stepena ima koren u F

Realno zatvorena polja možemo aksiomatizivati na sledeći način:

1. Aksiome polja.
2. Za svako $n \geq 1$ aksioma $\forall x_1 \dots \forall x_n (x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1 \neq 0)$
3. $\forall x \exists y (y^2 = x \vee y^2 + x = 0)$
4. Za svako $n \geq 0$ aksioma $\forall x_0 \dots \forall x_{2n} \exists y (y^{2n+1} + \sum_{i=0}^{2n} x_i y^i = 0)$

Realno zatvorena polja posmatraćemo na jeziku uredjenih polja $L_{FO} = \{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$. Ako je F realno zatvoreno polje i $a \neq 0$, $a \in F$, onda je tačno jedan od brojeva a i $-a$ kvadrat. To nam omogućava da uredimo F na sledeći način:
$x < y$ akko $y - x$ je nenula kvadrat.

Definicija 21 *Teorija realno zatvorenih polja, u oznaci RCF, je teorija na jeziku L_{FO} čije su aksiome gore navedene aksiome realno zatvorenih polja i aksiome uredjenih polja.*

Sa obzirom da uredjenje možemo definisati pomoću formule na jeziku L_F:
$\exists z (z \neq 0 \wedge x + z^2 = y)$, imamo sledeći rezultat:

Lema 35 *Ako je F realno zatvoreno polje i $X \subseteq F^n$ definabilan pomoću L_{FO} formule, onda je definabilan i pomoću L_F formule.*

Dokaz: Zamenimo sva pojavljivanja $t_1 < t_2$ sa $\exists x (x \neq 0 \wedge x^2 + t_i = t_j)$, gde su t_i i t_j termi koji se pojavljuju u definiciji X. $\diamond$

Sledeći rezultat daje drugu moguću aksiomatizaciju za RCF.

Teorema 62 *Uredjeno polje F je realno zatvoreno akko za svaki polinom $p(x) \in F[x]$, i elemente $a, b \in F$, takve da je $a < b$ i $p(a) \cdot p(b) < 0$, postoji $c \in F$ takvo da je $a < c < b$ i $p(c) = 0$.*

Definicija 22 *Ako je* **F** *formalno realno polje, realno zatvorenje polja* **F** *je realno zatvorena algebarska ekstenzija od* **F**.

Na osnovu Zornove leme svako formalno realno polje ima maksimalnu formalno realnu algebarsku ekstenziju. Pomenuta maksimalna ekstenzija je realno zatvorenje polja **F**.

Lema 36 *Ako je $(\mathbf{F}, <)$ uredjeno polje, $0 < x, x \in F$ i x nije kvadrat u F, onda uredjenje na F možemo produžiti do uredjenja na $F(\sqrt{x})$*

Dokaz: Uredjenje možemo produžiti na sledeći način: $0 < a + b\sqrt{x}$ akko je ispunjen jedan od sledećih uslova:

1. $b = 0$ i $a > 0$
2. $b > 0$ i ($a > 0$ ili $x > \frac{a^2}{b^2}$)
3. $b < 0$ i $a < 0$ i $x < \frac{a^2}{b^2}$. $\diamond$

Posledica 17 *Ako je* $(\mathbf{F}, <)$ *uredjeno polje, tada postoji realno zatvorenje* $\mathbf{R_F}$ *polja* $\mathbf{F}$ *tako da uredjenje na* $\mathbf{R_F}$ *produžuje uredjenje na* $\mathbf{F}$.

Dokaz: Uzastopnim primenama prethodne leme, možemo naći uredjeno polje $(\mathbf{L}, <)$ koje proširuje $(\mathbf{F}, <)$, tako da svaki pozitivan element iz F ima kvadratni koren u L. Primenom Zornove leme možemo naći maksimalnu formalno realnu algebarsku ekstenziju $\mathbf{R_F}$ polja $\mathbf{L}$. Kako svaki pozitivan element iz F ima koren u R_F, uredjenje na $\mathbf{R_F}$ produžuje uredjenje na $\mathbf{F}$. $\diamond$

Teorema 63 *Ako je* $(\mathbf{F}, <)$ *uredjeno polje i* $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ *realna zatvorenja polja* $\mathbf{F}$ *čija uredjenja produžuju uredjenje na* $\mathbf{F}$*, onda postoji jedinstveni izomorfizam* $\varphi : \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$ *koji je identiteta na* $\mathbf{F}$. $\diamond$

Teorema 64 *Teorija* RCF *dopušta eliminaciju kvantora na jeziku* L_{FO}.

Dokaz: Primenjujemo teoremu 56. Neka su $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ modeli teorije RCF i $(\mathbf{R}, <)$ njihova zajednička podstruktura. Tada je $(\mathbf{R}, <)$ uredjen domen. Neka je $\mathbf{L}$ realno zatvorenje polja razlomaka od $\mathbf{R}$. Na osnovu jedinstvenosti realnog zatvorenja, možemo pretpostaviti da je $(\mathbf{L}, <)$ podmodel od $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$. Pretpostavimo da je $\varphi(v, \overline{w})$ formula bez kvantora, $\overline{a} \in R$, $b \in F_1$ i $\mathbf{F}_1 \models \varphi[b, \overline{a}]$. Treba da pokažemo da $\mathbf{F}_2 \models \exists v \varphi(v, c_{\overline{a}})$. Dovoljno je pokazati da $\mathbf{L} \models \exists v \varphi(v, c_{\overline{a}})$. Formulu φ možemo napisati u disjunktivnoj normalnoj formi, tj. postoje polinomi $f_{i,j}$, $g_{i,j} \in \mathbf{R}[X]$ takvi da je $\varphi(v, c_{\overline{a}})$ ekvivalentna sa

$\bigvee_{i=1}^{l}(\bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(v) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{i,j}(v) > 0)$

Kako $\mathbf{F}_1 \models \varphi[b, \overline{a}]$, $\mathbf{F}_1 \models (\bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(b) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{i,j}(b) > 0)$ za neko i. Otuda, možemo pretpostaviti da je φ ekvivalentna konjukciji atomičnih formula i negacija atomičnih formula,tj. $\varphi(v, c_{\overline{a}})$ je evivalentna sa

$(\bigwedge_{i=1}^{n} f_i(v) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} g_i(v) > 0)$.

Ako je bilo koji od polinoma f_i različit od nula polinoma onda je b algebarski nad $\mathbf{R}$ pa otuda $b \in L$. Otuda, možemo pretpostaviti da je $\varphi(v, c_{\overline{a}})$ ekvivalentna sa $\bigwedge_{i=1}^{m} g_i(v) > 0$. Kako je $\mathbf{L}$ realno zatvoreno polje, na osnovu teoreme 60 , svaki g_i može se napisati kao proizvod faktora oblika $(x - c)$ i $x^2 + bx + c$ gde je $b^2 - 4c < 0$. Linearni faktori menjaju znak u c, dok kvadratni faktori ne menjaju znak. Otuda, postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ tako da je $\varphi(v, c_{\overline{a}})$ ekvivalentno sa $\bigvee_{i=1}^{l} c_{\alpha_i} < v < c_{\beta_i}$. Kako $\mathbf{F}_1 \models \varphi[b, \overline{a}]$, za neko i, $\alpha_i < b < \beta_i$. Tada $\mathbf{L} \models \varphi[\frac{\alpha_i + \beta_i}{2}, \overline{a}]$.$\diamond$

Posledica 18 *Teorija* RCF *je kompletna i modelski kompletna.*

Dokaz: Modelska kompletnost sledi iz eliminacije kvantora. Svako realno zatvoreno polje je karakteristike nula i otuda sadrži polje $(\mathbf{Q},<)$. Otuda je realno zatvorenje polja $(\mathbf{Q},<)$, elementarni podmodel svakog realno zatvorenog polja.

Definicija 23 *Uredjena struktura* $(M,<,\ldots)$*je o-minimalna ako za svaki definabilan* $X\subseteq M$ *postoji konačno mnnogo intervala* $I_1,\ldots,I_m$ *sa krajevima u* $M\cup\{\pm\infty\}$ *i konačan skup* X_0 *tako da je* $X=X_0\cup I_1\cup\ldots\cup I_m$

Teorija T je *o-minimalna* ako je svaki njen model o- minimalna struktura.

Definicija 24 *Neka je* $\mathbf{F}$ *uredjeno polje. Kažemo da je* $X\subseteq F^n$ *semialgebarski ako je* X *konačna Bulovska kombinacija skupova oblika* $\{\overline{x}|p(\overline{x})>0\}$ *ili* $\{\overline{x}|p(\overline{x})=0\}$*, gde* $p(\overline{x})\in F[x_1,\ldots,x_n]$.

Ako je $\mathbf{F}$ realno zatvoreno polje, onda, sa obzirom na eliminaciju kvantora semialgebarski skupovi su tačno definabilni skupovi. Eliminacija kvantora ima sledeću algebarsko-geometrijsku interpretaciju.

Lema 37 *Semialgebarski skupovi su zatvoreni za projekcije.*

Dokaz: Neka je X semialgebarski. Tada je, sa obzirom na eliminaciju kvantora X definabilan pa je na osnovu leme 20, $\pi(X)$ definabilan i otuda semialgebarski.

Lema 38 *Neka je* $\mathbf{F}\models RCF$ *i* $A\subseteq F^n$ *semialgebarski, onda je zatvorenje skupa* A *semialgebarski skup.*

Dokaz: Neka je d sledeća definabilna funkcija

$d(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=z$ akko $z\geq 0\wedge z^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$.

Zatvorenje skupa A je $\{\overline{x}|(\forall\epsilon>0)(\exists\overline{y}\in A)(d(\overline{x},\overline{y})<\epsilon)\}$.

Ovaj skup je definabilan pa otuda i semialgebarski. $\diamond$

Kažemo da je *funkcija semialgebarska* ako je njen graf semialgebarski skup. Sledeći rezultat pokazuje kako modelska kompletnost teorije RCF može poslužiti da se odredjeni rezultati koji važe u polju $\mathbf{R}$ prenesu i na druga realno zatvorena polja.

Lema 39 *Neka je* $\mathbf{F}$ *realno zatvoreno polje. Ako je* $X\subseteq F^n$ *zatvoren i ograničen i* f *neprekidna semialgebarska funkcija, tada je* $f(X)$ *zatvoren i ograničen.*

Dokaz: Ako je $\mathbf{F}=\mathbf{R}$, onda je X zatvoren i ograničen akko je kompaktan. Kako je neprekidna slika kompaktnog skupa kompaktan skup, neprekidna slika zatvorenog i ograničanog skupa je zatvoren i ograničen skup.

U opštem slučaju, postoje $\overline{a},\overline{b}\in F^n$ i formule φ i ψ tako da $\varphi(\overline{x},c_{\overline{a}})$ definiše X i $\psi(\overline{x},y,c_{\overline{b}})$ definiše $f(\overline{x})=y$. Tada postoji rečenica Φ koja tvrdi: $\forall\overline{u}\forall\overline{w}[$ ako $\psi(\overline{x},y,\overline{w})$ definiše nepekidnu funkciju sa domenom $\varphi(\overline{x},c_{\overline{a}})$ i $\varphi(\overline{x},\overline{u})$ je zatvoren i ograničen skup, tada je slika te funkcije zatvoren i ograničen skup $]$.

Kako je $\mathbf{R}\models\Phi$ i teorija RCF model kompletna, važiće $\mathbf{F}\models\Phi$. $\diamond$

Modelska kompletnost teorije RCF može se primeniti i na rešavanje sedamnaestog Hilbertovog problema.

Definicija 25 *Neka je* $\mathbf{F}$ *realno zatvoreno polje i* $f(\overline{x})\in F(x_1,\ldots,x_n)$ *racionalna funkcija. Kažemo da je pozitvino semi-definitna ako je* $f(\overline{a})\geq 0$ *za sve* $\overline{a}\in F^n$.

Teorema 65 *(17. Hilbertov problem) Ako je f pozitivno semi-definitna racionalna funkcija nad realno zatvorenim poljem $\mathbf{F}$, tada je f suma kvadrata racionalnih funkcija.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(x_1, \ldots, x_n)$ pozitivna semi-definitna racionalna funkcija nad $\mathbf{F}$ koja nije suma kvadrata. Tada, na osnovu teoreme 60, postoji uredjenje na $F(x_1, \ldots, x_n)$ takvo da je f negativna. Neka je R realno zatvorenje od $F(x_1, \ldots, x_n)$ čije uredjenje produžuje uredjenje na $F(x_1, \ldots, x_n)$. Tada $R \models \exists \overline{v}(f(\overline{v}) < 0)$. Otuda, na osnovu modelske kompletnosti, sledi $R \models \exists \overline{v}(f(\overline{v}) < 0)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je f pozitivno semi-definitna. $\diamond$

Posledica 19 *RCF je o-minimalna teorija.*

Dokaz: Neka je $R \models RCF$. Dokažimo da je svaki definabilan podskup od R konačna uniija tačaka i intervala sa krajnjim tačkama u $R \cup \{\pm\infty\}$. Na osnovu eliminacije kvantora, svaki definabilan podskup od R je konačna Bulovska kombinacija skupova oblika $\{x \in R | p(x) = 0\}$ i $\{x \in R | q(x) > 0\}$. Za dati polinom p skup $\{x \in R | p(x) = 0\}$ sastoji se od konačno mnogo tačaka dok su skupovi oblika $\{x \in R | q(x) > 0\}$ konača unija intervala. $\diamond$

Pokazaćemo da su definabilne funkcije jedne promenljive deo po deo neprekidne.

Lema 40 *Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ semialgebarska funkcija. Tada, za svaki otvoren interval $U \subseteq \mathbf{R}$ postoji tačka $x \in U$ takva da je f neprekidna u x.*

Dokaz: Pretpostavimo da postoji otvoren $V \subseteq U$ tako da je slika funkcije $f|_V$ konačna. Neka je b element slike od f takav da je $\{x \in V | f(x) = b\}$ beskonačan. Na osnovu o-minimalnosti, postoji otvoren $V_0 \subseteq V$ takav da je $f|_{V_0} = b$.

Pretpostavimo sada da ne postoji skup V sa takvom osobinom. Konstruišimo lanac $U = V_0 \supset V_1 \ldots$ otvorenih podskupova skupa U takav da je zatvorenje $\overline{V_{n+1}}$ skupa V_{n+1} sadržano u V_n. Za dato V_n neka je X slika skupa V_n pri funkciji f. Kako je X beskonačan, na osnovu o-minimalnosti, X sadrži interval (a, b) dužine najviše $\frac{1}{n}$. Skup $Y = \{x \in V_n | f(x) \in (a, b)\}$ sadrži otvoren inerval V_{n+1}. Kako je $\mathbf{R}$ lokalno kompaktan, $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V_i} \neq \emptyset$. Ako $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, onda je f neprekidna u x $\diamond$.

Na osnovu kompletnosti RCF prethodni rezultat važi za bilo koje realno zatvoreno polje.

Posledica 20 *Neka je $\mathbf{F}$ realno zatvoreno polje i $f : F \to F$ semialgebarska funkcija. Tada F možemo izdeliti na $I_1 \cup \ldots I_m \cup X$, gde je X konačan i I_j su medjusobno disjunktni otvoreni intervali sa krajnjim tačkama u $F \cup \{\pm\infty\}$, tako da je f neprekidna na svakom I_j.*

Dokaz: Neka je $D = \{x | \mathbf{F} \models \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists y [|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \epsilon]\}$ skup tačaka prekida funkcije f. Kako je D definabilan, na osnovu o-minimalnosti, D je ili konačan ili ima nepraznu unutrašnjost,tj. postoji neki otvoren inerval I_j u D, odakle bi na osnovu prethodne leme sledilo da postoji $x \in I_j$ u kojoj je f neprekidna, što je u kontradikciji sa definicijom skupa D. Dakle, D mora biti konačan. Otuda, F je unija konačno mnogo intervala na kojima je f neprekidna.

Lema 41 *Neka je* $\mathbf{F}$ *realno zatvoreno polje i* $X \subseteq F^{n+m}$ *semialgebarski skup. Tada postoji semialgebarska funkcija* $f : F^n \to F^m$ *takva da za sve* $\overline{x} \in F^n$ *važi: ako postoji* $\overline{y} \in F^m$ *takvo da* $(\overline{x}, \overline{y}) \in X$*, onda* $(\overline{x}, f(\overline{x})) \in X$*.*

Preciznije, f *možemo izabrati tako da ako je*
$\{\overline{y} \in F^m | (\overline{a}, \overline{y}) \in X\} = \{\overline{y} \in F^m | (\overline{b}, \overline{y}) \in X\}$
onda je $f(\overline{a}) = f(\overline{b})$*.*
Ovakvu funkciju f *zovemo Invarijantna Skolemova funkcija.*

Dokaz: Dokaz izvodimo indukcijom po m. Preciznije, dokazaćemo za za svako m tvrdjenje važi za sve n i sve definabilne $X \subseteq F^{n+m}$.

Neka je $m = 1$. Za $\overline{a} \in F^n$, neka je $X_{\overline{a}} = \{y | (\overline{a}, y) \in X\}$. Na osnovu o-minimalnosti, X je konačna unija tačaka i intervala. Ako je $X_{\overline{a}} = \emptyset$ neka je $f(\overline{a}) = 0$. Ako je skup $X_{\overline{a}}$ neprazan, definičimo $f(\overline{a})$ po slučajevima:

1. Ako je $X_{\overline{a}} = F$, neka je $f(\overline{a}) = 0$
2. Ako $X_{\overline{a}} = \{b\}$, neka je $f(\overline{a}) = b$
3. Ako je $X_{\overline{a}} = (c, d)$, neka je $f(\overline{a}) = \frac{d-c}{2}$
4. Ako je $X_{\overline{a}} = (-\infty, c)$, neka je $f(\overline{a}) = c - 1$
5. Ako je $X_{\overline{a}} = (c, \infty)$, neka je $f(\overline{a}) = c + 1$

Funkcija f je očigledno definabilna i ako je $X_{\overline{a}} \neq \emptyset$, onda je $(\overline{a}, f(\overline{a})) \in X$.

Pretpostavimo sada da tvrdjenje važi za m i da je $X \subseteq F^{n+m+1}$. Na osnovu indukcijske hipoteze, postoji $f : F^{n+1} \to F^m$ takva da ako $a_1, \ldots, a_n, b \in F$ i $\exists \overline{z} \in F^m$ takvo da $(\overline{a}, b, \overline{z}) \in X$, tada $(\overline{a}, b, f(\overline{a}, b)) \in X$. Takodje, postoji funkcija $g : F^n \to F$ takva da ako $\exists y \exists \overline{z} (\overline{x}, y, \overline{z}) \in X$ tada $\exists \overline{z} (\overline{x}, g(\overline{x}, \overline{z}) \in X)$. Definišimo funkciju $h : F^n \to F^{m+1}$ sa $h(\overline{x}) = (g(\overline{x}), f(\overline{x}, g(\overline{x})))$. Ako $\overline{a} \in F^n$ i $\exists y \exists \overline{z} (\overline{a}, y, \overline{z}) \in X$ onda $(\overline{a}, h(\overline{a})) \in X$. $\diamond$

Posledica 21 *Neka je* $\mathbf{F}$ *realno zatvoreno polje. Neka je* $X \subseteq F^n$ *semialgebarski skup i* $\overline{a}$ *tačka u zatvorenju skupa* X*. Tada postoji* $r > 0$ *i neprekidna semialgebarska funkcija* $f : (0, r) \to F^n$*, takva da za sve* $\epsilon \in (0, r)$ $f(\epsilon) \in X$ *i* $\lim_{\epsilon \to 0} f(\epsilon) = \overline{a}$*.*

Dokaz: Neka je $D = \{(\epsilon, \overline{y}) | \overline{y} \in X \text{ i } \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_i)^2 < \epsilon\}$. Za svako $\epsilon > 0$ postoji $\overline{y} \in F^n$ takvo da $(\epsilon, \overline{y}) \in D$. Otuda, na osnovu prethodne leme, postoji definabilna funkcija $f : (0, \infty) \to F^n$ takva da $(\epsilon, f(\epsilon)) \in D$ za svako $\epsilon > 0$. Na osnovu posledice 18, postoji $r > 0$ tako da je f neprekidna na $(0, r)$. Očigledno, $\lim_{\epsilon \to 0} f(\epsilon) = \overline{a}$ $\diamond$

Posledica 22 *Neka je* $\mathbf{F}$ *realno zatvoreno polje i* $E \subseteq F^n \times F^n$ *definabilna relacija ekvivalencije. Tada postoji definabilan* $X \subseteq F^n$ *takav da za sve* $a \in F^n$ *postoji jedinstveno* $b \in X$ *takvo da* aEb*. Skup* X *zovemo definabilna transverzala relacije* E*.*

Dokaz: Neka je $f : F^n \to F^n$ definabilna invarijantna Skolemova funkcija. Tada $aEf(a)$ za svako $a \in F^n$ i ako aEb onda je $f(a) = f(b)$. Neka je X slika funkcije f. $\diamond$

Ako je $\mathbf{F}$ realno zatvoreno polje, onda o-minimalnost daje opis definabilnih podskupova od F.

Definicija 26 *Kolekciju ćelija induktivno definišemo na sledeći način:*

1. *$X \subseteq F^n$ je 0-ćelija ako se sastoji od jedne tačke.*
2. *$X \subseteq F$ je 1-ćelija ako je $X = (a, b)$ gde $a \in F \cup \{-\infty\}$, $b \in F \cup \{+\infty\}$ i $a < b$.*
3. *Ako je $X \subseteq F^n$ je n-ćelija i $f : X \to F$ neprekidna definabilna funkcija onda je $Y = \{(\overline{x}, f(\overline{x}))|\overline{x} \in X\}$ takodje n- ćelija.*
4. *Neka je $X \subseteq F^n$ n- ćelija. Pretpostavimo da je f ili neprekidna definabilna funkcija iz X u F ili identički jednaka $-\infty$ i g ili neprekidna definabilna funkcija iz X u F takva da je $f(\overline{x}) < g(\overline{x})$ za sve $\overline{x} \in X$ ili je identički jednaka $+\infty$. Tada je $Y = \{(\overline{x}, y)|\overline{x} \in X$ i $f(\overline{x}) < y < g(\overline{x})\}$ $n+1$- ćelija.*

U realno zatvorenom polju svaki neprazan definabilan skup je konačna disjunktna unija ćelija. Dokaz ove činjenice zasniva se na sledećoj lemi:

Lema 42 *Neka je $X \subseteq F^{n+1}$ semialgebarski skup. Tada postoji prirodan broj N takav da ako $\overline{a} \in F^n$ i $X_{\overline{a}} = \{y|(\overline{a}, y) \in X\}$ je konačan, onda je $|X_{\overline{a}}| < N$.*

Dokaz: Primetimo da je $X_{\overline{a}}$ konačan akko ne postoji interval (c, d) takav da je $(c, d) \subseteq X_{\overline{a}}$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je za sveko $\overline{a} \in F^n$, $X_{\overline{a}}$ konačan. Preciznije, pretpostavljamo da za svako $\overline{a} \in F^n$

$\mathbf{F} \models \forall\overline{x}\forall c\forall d\neg[c < d \wedge \forall y(c < y < d \Rightarrow y \in X_{\overline{a}})]$

Posmatrajmo sledeći skup rečenica na jeziku polja proširenom imenima za svaki element iz F i novim simbolima $c_1, \ldots, c_n$. Dakle, neka je

$\Gamma = RCF + \Delta_{\mathbf{F}} + \{\exists y_1 \ldots \exists y_m[\bigwedge_{i<j} y_i \neq y_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} y_i \in X_{\overline{c}}] : m \in \omega\}$

Pretpostavimo da je Γ zadovoljiv. Tada postoji realno zatvoreno polje $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{F}$ i element $\overline{c} \in K^n$ tako da je $X_{\overline{c}}$ beskonačan. Na osnovu model kompletnosti RCF, $\mathbf{F} \prec \mathbf{K}$ pa otuda

$\mathbf{K} \models \forall\overline{x}\forall c\forall d\neg[c < d \wedge \forall y(c < y < d \Rightarrow y \in X_{\overline{a}})]$.

Poslednji zaključak je u kontradikciji sa o-minimalnošću $\mathbf{K}$ pa zaključujemo da je Γ nezadovoljiv. Otuda, postoji N tako da

$\Gamma = RCF + \Delta_{\mathbf{F}} \models \forall\overline{x}(\exists y_1 \ldots \exists y_N[\bigwedge_{i<j} y_i \neq y_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{N} y_i \in X_{\overline{x}}])$

Prema tome, za svako $\overline{a} \in F^n$, $|X_{\overline{a}}| < N$. $\diamond$

Teorema 66 *(Dekompozicija na ćelije) Neka je $X \subseteq F^m$ semialgebarski. Tada postoji konačno mnogo medjusobno disjunktnih ćelija $C_1, \ldots, C_n$, tako da je $X = C_1 \cup \ldots \cup C_n$*

Dokaz: (za $m = 2$)

Za svako $a \in F$ neka je

$C_a = \{x | \forall \epsilon > 0 \exists y, z \in (x-\epsilon, x+\epsilon)[(a,y) \in X \wedge (a,z) \notin X]\}$

Na osnovu o-minimalnosti, svaki C_a je konačan, pa na osnovu prethodne leme postoji $N \in \mathbf{N}$ takav da je za svako $a \in F$, $|C_a| \leq N$. Izdelimo F na $A_0, A_1, \ldots, A_N$ gde je $A_n = \{a | |C_a| = n\}$.

Za svako $n \leq N$ neka je $f_n : A_1 \cup \ldots \cup A_n \to F$ funkcija definisana sa $f_n(a) ='' \; n - ti \; element \; u \; C_a''$. Funkcija f_n je definabilna.

Neka je $X_a = \{y | (a,y) \in X\}$. Za svako $n \leq N$ i $a \in A_n$ definišemo $P_a \in 2^{2n+1}$ na sledeći način:

Ako je $n = 0$ onda je $P_a(0) = 1$ akko je $X_a = F$.

Pretpostavimo da je $n > 0$. Tada:

$P_a(0) = 1$ akko $x \in X_a$ za sve $x < f_1(a)$.

$P_a(2i-1) = 1$ akko $f_i(a) \in X_a$

Za $i < n$, $P_a(2i) = 1$ akko $x \in X_a$ za sve $x \in (f_i(a), f_{i+1}(a))$.

$P(2n) = 1$ akko za svako $x > f_n(a)$, $x \in X_a$

Za svako $\sigma \in 2^{2n+1}$, neka je $A_{n,\sigma} = \{a \in A_n | P_a = \sigma\}$. Svaki $A_{n,\sigma}$ je semialgebarski. Za svako $A_{n,\sigma}$ napravićemo dekompoziciju skupa $\{(x,y) \in X | x \in A_{n,\sigma}\}$ na disjunktne ćelije. Sa obzirom da $A_{n,\sigma}$ čine jednu particiju od F, na ovaj način dobićemo željenu dekompoziciju skupa X.

Fiksirajmo jedan $A_{n,\sigma}$. Na osnovu posledice 18, postoji particija $A_{n,\sigma} = C_1 \cup \ldots \cup C_l$, gde je svaki C_i ili interval ili singlton i f_i je neprekidna na svakom C_j, za $i \leq n$, $j \leq l$. Sada možemo napraviti dekompoziciju skupa $\{(x,y) | x \in A_{n,\sigma}\}$ na disjunktne ćelije, takve da je svaka ćelija ili sadržana u X ili disjunktna sa X:

Za $j \leq l$ neka je $D_{j,0} = \{(x,y) | x \in C_j \text{ i } y < f_1(x)\}$

Za $j \leq l$ i $1 \leq i \leq n$ neka je $D_{j,2i-1} = \{(x, f_i(x)) | x \in C_j\}$

Za $j \leq l$ i $1 \leq i \leq n$ neka je $D_{j,2i} = \{(x,y) | x \in C_j, f_i(x) < y < f_{i+1(x)}\}$.

Za $j \leq l$ neka je $D_{j,2n} = \{(x,y) | x \in C_j \text{ i } y > f_n(x)\}$.

Svaki $D_{j,i}$ je ćelija, $\bigcup D_{j,i} = \{(x,y) | x \in A_{n,\sigma}\}$ i svaki $D_{j,i}$ je ili sadržan u X ili disjunktan sa X. Uzimajući one $D_{j,i}$ koji su sadržani u X dobijamo particiju skupa $\{(x,y) \in X | x \in A_{n,\sigma}\}$ na disjunktne ćelije. $\diamond$

3.4 Formalno realna polja i osnovne teoreme analize

Dokazaćemo da naredne, osnovne teoreme analize, uz izabrano uredjenje, važe za sve definabilne funkcije u svim realno zatvorenim poljima.

Teorema 67 *(Ferma) Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, diferencijabilna na (a,b) i neka u tački $c \in (a,b)$ f ima ekstremum (minimum ili maksimum). Tada je $f'(c) = 0$.*

Teorema 68 *(Rol) Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$, diferencijabilna na (a,b) i neka je $f(a) = f(b)$. Tada postoji $c \in (a,b)$ takvo da je $f'(c) = 0$.*

Teorema 69 *(Langranž) Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Tada postoji $c \in (a,b)$ takvo da je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.*

Teorema 70 *(Koši) Neka su funkcije f i g neprekidne na $[a, b]$, diferencijabilne i neka je $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Tada postoji $c \in (a, b)$ takvo da je $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Teorema 71 *(Darbu) Neka je funkcija f diferencujabilna na na $[a, b]$ i neka je $f'(a) < z < f'(b)$. Tada postoji $c \in (a, b)$ tako da je $z = f'(c)$.*

Teorema 72 *(Bolcano - Koši) Neka je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i neka je $min\{f(a), f(b)\} < z < max\{f(a), f(b)\}$. Tada postoji $c \in (a, b)$ takvo da je $z = f(c)$.*

Teorema 73 *Svaki neprazan, definabilan, odozgo ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum.*

Iskaz svake od navedenih teorema može biti predstavljen formulom prvog reda. Ilustrujmo ovo na primeru Rolove teoreme: Kako je f definabilna funkcija, postoji formula $\varphi(x, y, \overline{b})$ koja definiše "$f(x) = y$". Takodje, sa obzirom da je $|x| < a$ akko $-a < x < a$, "$|f(x) - f(s)| < \varepsilon$" može biti definisano nekom formulom $\psi(x, s, \varepsilon, \overline{c})$. Prema tome, sledeće rečenice mogu biti zapisane formulom prvog reda:

Neka $N(f, s)$ znači " f je neprekidna u tački s ". Tada $N(f, s)$ može biti zapisan u vidu formule:

$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x\ (\varepsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \wedge (|x - s| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(s)| < \varepsilon)))$.

Neka $N(f, a, b)$ znači:" f je neprekidna na inervalu $[a, b]$" Tada $N(f, a, b)$ može biti zapisan u vidu formule: $\forall s(a \leq s \leq b \Rightarrow N(f, s))$.

Neka $L(f, x, d)$ označava: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = d$. $L(f, x, d)$ može biti zapisan u vidu formule:

$\forall\varepsilon\exists\delta\forall h\ (\varepsilon > 0 \Rightarrow (\delta > 0 \wedge (0 < h < \delta \Rightarrow |\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - d| < \varepsilon)))$.

Neka $D(f, a, b)$ znači:" f je diferencijabilna na inervalu (a, b)". Tada $D(f, a, b)$ može biti zapisan u vidu formule: $\forall x(a \leq x \leq b \Rightarrow \exists d L(f, x, d))$.

Sada iskaz Rolove teoreme može biti zapisan u obliku:

$(N(f, a, b) \wedge D(f, a, b) \wedge f(a) = f(b)) \Rightarrow \exists c(a < c < b \wedge L(f, c, 0))$

Imajući u vidu modelsku kompletnost teorije RCF možemo zaključiti da navedene teoreme važe u svakom realno zatvorenom polju.

Razmotrimo sada obrnut problem, da li uslov da u formalno realnom polju važi neka osnovna teorema analize, povlači da je formalno realno polje u stvari realno zatvoreno. Ovaj problem može imati više formulacija. Ako se to pogleda na primeru Rolove teoreme, uslov da važi Rolova teorema može se formulisati za:

1. Polinome
2. Racionalne funkcije
3. Definabilne finkcije

3.4.1 Rolova teorema za polinome

Pretpostavimo nadalje da je $\mathbf{F}$ formalno realno polje u kome važi Rolova teorema za polinome.

Lema 43 *Za svako $n \in \mathbf{N}$, $\sqrt[n]{n+1} \in \mathbf{F}$.*

Dokaz: Poznato je da iz Rolove teoreme elementarnosledi Langražova teorema(Posmatrajući polinom $q(x) = p(x) - \frac{p(b)-p(a)}{b-a}(x-a)$).

Neka je $\alpha \in \mathbf{F}$ bilo koji pozitivan broj. Posmatrajmo polinom $p(x) = x^{n+1}$.
Tada za neko $\varepsilon \in (0, \alpha)$:
$\frac{\alpha^{n+1}-0^{n+1}}{\alpha-0} = (n+1)\varepsilon^n$
$\alpha^n = (n+1)\varepsilon^n$
$(\frac{\alpha}{\varepsilon})^n = n+1$
Dakle, $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \sqrt[n]{n+1}$. $\diamond$

Lema 44 *Za sve $n, k \in \mathbf{N}$, $\sqrt[n]{nk+1} \in \mathbf{F}$.*

Dokaz: Na osnovu prethodne leme, za sve $n \in \mathbf{N}$ postoji $\sqrt[n]{n+1}$. Otuda, za n i k prirodne, postoji $\sqrt[nk]{nk+1}$. Neka je c rešenje jednačine $x^{nk} = nk+1$. Tada je $(c^k)^n = nk+1$, pa je c^k rešenje jednačine $x^n = nk+1$, odnosno $c^k = \sqrt[n]{nk+1}$

Lema 45 *Neka je $n \in \mathbf{N}$ proizvoljan. Ako $\sqrt[n]{m} \in \mathbf{F}$ za svaki prirodan broj m onda $\sqrt[n]{r} \in \mathbf{F}$ za svaki racionalan broj r.*

Dokaz: Neka je $r \in \mathbf{Q}$, $r > 0$. Tada je $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{N}$. Otuda, $\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}$.

Neka je $r < 0$ i n neparan. Tada je $\sqrt[n]{r} = -\sqrt[n]{-r}$. $\diamond$

Lema 46 *Neka su $\alpha, n \in \mathbf{N}$ proizvoljni. Da bi jednačina $x^n = \alpha$ imala rešenje dovoljno je da postoje a i b takvi da važi:*
$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n = \alpha.$

Dokaz: Posmatrajmo polinom $p(x) = x^{n+1} - (n+1)\alpha x$. Na osnovu Rolove teoreme, ako postoje a i b takvi da je $p(a) = p(b)$ onda postoji $c \in (a, b)$ takvo da je $p'(c) = 0$, odnosno $(n+1)(c^n - \alpha) = 0$.
$p(a) = p(b)$ akko
$a^{n+1} - (n+1)\alpha a = b^{n+1} - (n+1)\alpha b$ akko
$a^{n+1} - b^{n+1} = (n+1)\alpha(a-b)$ akko
$(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n - (n+1)\alpha) = 0$ akko
$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n - (n+1)\alpha = 0$
Uvodjenjem smena: $a_1 = \frac{a}{\sqrt[n]{n+1}}$, $b_1 = \frac{b}{\sqrt[n]{n+1}}$ poslednja jednačina se svodi na $a_1^n + a_1^{n-1}b_1 + a_1^{n-2}b_1^2 + \ldots + a_1^2b_1^{n-2} + a_1b_1^{n-1} + b_1^n = \alpha$ $\diamond$

Lema 47 *($\sqrt{n}$) Za svako $\alpha \in \mathbf{N}$, $\sqrt{\alpha} \in \mathbf{F}$.*

Dokaz: Neka je α proizvoljan prirodan broj. Na osnovu prethodne leme dovoljno je naći a i b tako da važi $a^2 + ab + b^2 = \alpha$. Uvodjenjem odgovarajućih smena dobijamo sledeći niz ekvivalentnih jednakosti:

$a^2 + ab + b^2 = \alpha$
$a^2(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}) = \alpha$
$a^2(t^2 + t + 1) = \alpha$, gde je $t = \frac{b}{a}$
$a^2((t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}) = \alpha$
$(a(t + \frac{1}{2}))^2 + (a\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \alpha$

Uvodjenjem smena $z_1 = a(t + \frac{1}{2}) = b + \frac{a}{2}$, $z_2 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ zaključujemo da je dovoljno da jednačina $z_1^2 + z_2^2 = \alpha$ ima rešenje.

Neka je $\alpha = 2$. Tada su $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ rešenja jednačine $z_1^2 + z_2^2 = 2$.

Dakle, $\sqrt{2}$ postoji. Dokažimo indukcijom ostatak tvrdjenja. Pretpostavimo da postoji $\sqrt{n}$. Kako je $n+1 = (\sqrt{n})^2 + 1^2$, na osnovu prethodnog razmatranja postoji $\sqrt{n+1}$. $\diamond$

Lema 48 *($\sqrt[3]{n}$) Za svako $\alpha \in \mathbf{N}$, $\sqrt[3]{\alpha} \in \mathbf{F}$.*

Dokaz: Koristeći lemu 45 rešavamo jednačinu:
$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = \alpha$ odnosno
$(a + b)(a^2 + b^2) = \alpha$.
Tražićemo rešenja sistema:
$a + b = 1$
$a^2 + b^2 = \alpha$.

Ovaj sistem se svodi na rešavanje kvadratne jednačine $a^2 + (1 - a)^2 = \alpha$, odnosno $2a^2 - 2a + 1 = \alpha$. Rešenja ove jednačine su $a = \frac{1 \pm \sqrt{2\alpha - 1}}{2}$. Kako je α prirodan broj $\sqrt{2\alpha - 1}$ postoji. Birajući rešenje $a = \frac{1 + \sqrt{2\alpha - 1}}{2}$ dobijamo $b = \frac{1 - \sqrt{2\alpha - 1}}{2}$. $\diamond$

Lema 49 *($\sqrt[4]{n}$) Za svako $\alpha \in \mathbf{N}$, $\sqrt[4]{\alpha} \in \mathbf{F}$.*

Neka je n paran broj. Tada je za neke $k, l \in \mathbf{N}$, $n = 2^k(2l + 1)$. Otuda, ukoliko $\sqrt[4]{2} \in \mathbf{F}$ dovoljno je naći $\sqrt[4]{n}$ gde je n neparan.

Neka je n neparan. Tada je $n = 4k+1$ ili $4k+3$. Ako je oblika $4k+1$ onda na osnovu leme 43, $\sqrt[4]{n} \in \mathbf{F}$. Ako je $n = 4k+3$ onda je $3n = 12k+9 = 4(3k+2)+1$. Dakle, $\sqrt[4]{3n} \in \mathbf{F}$.

Prema tome, dovoljno je naći $\sqrt[4]{2}$ i $\sqrt[4]{3}$.

Koristeći lemu 45 rešavamo jednačinu: $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \alpha$.

Algebarskim transormacijama i uvodjenjem odgovarajućih smena dodijamo:
$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = \alpha$
$(a^2 + b^2 + \frac{ab}{2})^2 - (\frac{ab\sqrt{5}}{2})^2 = \alpha$
$(u^2 - v\frac{3-\sqrt{5}}{2})(u^2 - v\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = \alpha$, gde je $u = a + b$, $v = ab$.
Rešavanjem sistema
$u = a + b$
$v = ab$
dobijamo kvadratnu jednačinu $a^2 - ua + v = 0$ čija je diskriminanta $u^2 - 4v$. Otuda dobijamo uslov da za neko c mora važiti: $u^2 - 4v = c^2$.

Resavanjem se dobija sledeće:
$v = \frac{2}{3-\sqrt{5}}(u^2 - x)$

$u^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(\frac{(3+\sqrt{5})x}{3-\sqrt{5}} - \frac{\alpha}{x})$
$u^2 - 4v = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\frac{\alpha}{x} - \frac{(3+\sqrt{5})x}{3-\sqrt{5}}) + \frac{8x}{3-\sqrt{5}}$
Stavljajući $x = 3 - \sqrt{5}$ dobijaju se sledeći rezultati:
$u^2 = \frac{4-\alpha}{2\sqrt{5}}$ pa je $u = \frac{\sqrt{4-\alpha}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}$. Sa obzirom da $\sqrt[4]{5} \in \mathbf{F}$ i $\frac{\sqrt{4-\alpha}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{5}} \in \mathbf{F}$.
$u^2 - 4v = \frac{(\alpha-4)(2+\sqrt{5})+16}{2}$. Razlikujemo dva slučaja:

1. Za $\alpha = 3$

   $u^2 - 4v = \frac{14-\sqrt{5}}{2}$

   Sada je treba da $\sqrt{14-\sqrt{5}} \in \mathbf{F}$. Medjutim, $14-\sqrt{5} = \frac{191}{14+\sqrt{5}}$ a $14+\sqrt{5} = \sqrt{14}^2 + (\sqrt[4]{5})^2$. Otuda, na osnovu dokaza leme 47, $\sqrt{14+\sqrt{5}} \in \mathbf{F}$ pa i $\sqrt{14-\sqrt{5}} \in \mathbf{F}$

2. $\alpha = 2$,$u^2 - 4v = 6 - \sqrt{5}$.

   Analogno kao i u slučaju dobijamo da $\sqrt{6-\sqrt{5}} \in \mathbf{F}$. $\diamond$

Lema 50 *($\sqrt[5]{n}$) Za svako $\alpha \in \mathbf{N}$, $\sqrt[5]{\alpha} \in \mathbf{F}$.*

Dokaz: Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. $\alpha = 5k+1$. Tada na osnovu leme 44 postoji $\sqrt[5]{\alpha}$

2. $\alpha = 5k+2$. Tada je $3\alpha = 15k+6 = 5(3k+1)+1$. Prema tome, postoji $\sqrt[5]{3\alpha}$. Dakle, ukoliko postoji $\sqrt[5]{3}$ onda postoji $\sqrt[5]{5k+2}$ za svako k.

3. $\alpha = 5k+3$. Tada je $2\alpha = 10k+6 = 5(2k+1)+1$. Prema tome, postoji $\sqrt[5]{2\alpha}$. Dakle, ukoliko postoji $\sqrt[5]{2}$ onda postoji $\sqrt[5]{5k+3}$ za svako k.

4. $\alpha = 5k+4$. Tada je $4\alpha = 20k+16 = 5(4k+3)+1$. Prema tome, postoji $\sqrt[5]{4\alpha}$. Dakle, ukoliko postoji $\sqrt[5]{4}$ onda postoji $\sqrt[5]{5k+4}$ za svako k. Kako je $\sqrt[5]{4} = (\sqrt[5]{2})^2$ ovaj slučaj se svodi na postojanje $\sqrt[5]{2}$.

5. $\alpha = 5k$. Neka je $k = 5^m k_1$, gde k_1 nije deljivo sa 5. Tada je $\alpha = \alpha^{m+1}k_1$ pa je $\sqrt[5]{\alpha} = (\sqrt[5]{5})^{m_1}\sqrt[5]{k_1}$. Kako se postojanje $\sqrt[5]{k_1}$ svodi na jedan od gore navedenih slučajeva, dovoljno je naći $\sqrt[5]{5}$.

Sa obzirom da $\sqrt[5]{6}$ postoji, sumirajući gorenavedene slučajeve dovoljno je naći $\sqrt[5]{5}$ i ($\sqrt[5]{2}$ ili $\sqrt[5]{3}$). U tom cilju rešavamo sledeću jednačinu:
$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 = \alpha$.

Algebarskim trnsormacijama i uvodjenjem odgovarajućih smena dobijamo sledeći niz ekvivalentnih jednakosti:
$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 = \alpha$
$a^4(a+b) + b^4(a+b) + a^2b^2(a+b) = \alpha$
$(a+b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) = \alpha$
Neka je $a+b = x$, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = \frac{\alpha}{x}$
Tada imamo:

$a^4 + a^2(x-a)^2 + (x-a)^4 = \frac{\alpha}{x}$
$a^4 + a^2(x^2 - 2ax + a^2) + x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 = \frac{\alpha}{x}$
$a^4 + a^2x^2 - 2a^3x + a^4 + x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 = \frac{\alpha}{x}$
$3a^4 - 6a^3x + 7a^2x^2 - 4ax^3 + x^4 = \frac{\alpha}{x}$
$a^2(3a^2 - 6ax + 7x^2 - \frac{4x^3}{a} + \frac{x^4}{a^2}) = \frac{\alpha}{x}$
$a^2(3a^2 + \frac{x^4}{a^2} - (6ax + \frac{4x^3}{a}) + 7x^2) = \frac{\alpha}{x}$
$a^2(3a^2 + \frac{x^4}{a^2} - 2x\sqrt{3}(\sqrt{3}a + \frac{2x^2}{\sqrt{3}a}) + 7x^2) = \frac{\alpha}{x}$
$a^2(t^2 - \frac{x^4}{3a^2} - 4x^2 - 2x\sqrt{3}t + 7x^2) = \frac{\alpha}{x}$, gde je $t = \sqrt{3}a + \frac{2x^2}{\sqrt{3}a}$
$a^2(t^2 - 2x\sqrt{3}t + 3x^2 - \frac{x^4}{3a^2}) = \frac{\alpha}{x}$
$a^2((t - x\sqrt{3})^2 - \frac{x^4}{3a^2}) = \frac{\alpha}{x}$
$(a(t - x\sqrt{3}))^2 - \frac{x^4}{3} = \frac{\alpha}{x}$
$(a(t - x\sqrt{3}))^2 = \frac{\alpha}{x} + \frac{x^4}{3}$
$a(t - x\sqrt{3}) = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{x} + \frac{x^4}{3}}$
Neka je $a(t - x\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{\alpha}{x} + \frac{x^4}{3}}$
$a(\sqrt{3}a + \frac{2x^2}{\sqrt{3}a} - x\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{\alpha}{x} + \frac{x^4}{3}}$
$\sqrt{3}a^2 - a\sqrt{3}x + \frac{2x^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\alpha}{x} + \frac{x^4}{3}}$
$\sqrt{3}a^2 - a\sqrt{3}x + \frac{2x^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\alpha + x^5}{3x}}$
Množeći obe strane jednakosti sa $\sqrt{3}$ dobijamo:
$3a^2 - 3ax + 2x^2 = \sqrt{\frac{3\alpha + x^5}{x}}$

Otuda, rešavanjem kvadrane jednačine $3a^2 - 3ax + 2x^2 - \sqrt{\frac{3\alpha + x^5}{x}} = 0$ dobijamo: $a_{1/2} = \frac{3x \pm \sqrt{12\sqrt{\frac{3\alpha + x^2}{x}} - 15x^2}}{6}$ $\qquad (*)$

1. Neka je $x = 1$, $\alpha = 5$. Zamenjujući ove vrednosti u jednakost $(*)$ dobijamo $a = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6}$. Neka je $a = \frac{3 + \sqrt{33}}{6}$. Tada je $b = \frac{3 - \sqrt{33}}{6}$. Dakle, $\sqrt[5]{5} \in F$.

2. Neka je $x = 2$, $\alpha = 22$. Zamenjujući ove vrednosti u jednakost $(*)$ dobijamo $a = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{6}$. Neka je $a = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{6}$. Tada je $b = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{6}$. Dakle, $\sqrt[5]{22} \in F$. Takodje $\sqrt[5]{11} \in F$ jer $11 = 5 \cdot 2 + 1$ pa i $\sqrt[5]{2} \in F$. $\diamond$

Lema 51 *($\sqrt[6]{n}$)*
Za svako $\alpha \in \mathbf{N}$, $\sqrt[6]{\alpha} \in \mathbf{F}$.

Dovoljno je dokazati tvrdjenje za proste brojeve. Neka je p proizviljan prost broj. Tada razlukujemo sledeće slučajeve:

1. Za neko $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ $p = 6k + 1$.

   Tada tvrdjenje sledi na osnovu leme 44.

2. Za neko $k \in \mathbf{N}, k \geq 1$ $p = 6k+5$.

   Tada je $(6l-1)(6k+5) = 6(6kl+5l-k-1)+1$. Dakle dovoljno je naći $\sqrt[6]{6l-1}$ za bilo koje $l \geq 1$. Utom cilju, koristeći lemu 46, rešavamo sledeću jednačinu:

   $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6 = p$

   Algebarskim trnsformacijama i uvodjenjem odgovarajućih smena dobijamo sledeći niz ekvivalentnih jednakosti:

   $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6 = p$

   $a^3b^3(\frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3}) = p$

   $a^3b^3(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}) = p$, gde je $t = \frac{a}{b}$

   $a^3b^3(t^3 + \frac{1}{t^3} + t^2 + \frac{1}{t^2} + t + \frac{1}{t} + 1) = p$

   $a^3b^3(y^3 - 3y + y^2 - 2 + y + 1) = p$, gde je $y = t + \frac{1}{t} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

   $a^3b^3(y^3 + y^2 - 2y - 1) = p \qquad (**)$

   Neka je $y = 3$. Tada poslednja jednakost postaje: $a^3b^3 \cdot 29 = 29$. Ako postoji rešenje sistema $ab = 1$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ onda postoji $\sqrt[6]{29}$,što je dovoljno sa obzirom da je $29 = 6 \cdot 5 - 1$.

   Rešavanjem ovog sistema dobijamo:

   $b = \frac{1}{a}$, $a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

   Neka je $a^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Koristeći sledeće poznato tvrdjenje:

   Ako je $A^2 \geq B$, $A, B > 0$ onda je $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$

   dobijamo: $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

3. $p = 2$.

   Vratimo se na jednačinu $(**)$. Neka je $y = 3$. Tada poslednja jednakost postaje: $a^3b^3 \cdot 29 = 2$. Ako postoji rešenje sistema $ab = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{29}}$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ onda postoji $\sqrt[6]{2}$. Dakle,

   $b = \frac{\sqrt[3]{2}}{a\sqrt[3]{29}}$

   $\frac{\sqrt[3]{29}a^2}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{a^2\sqrt[3]{29}} = 3.$

   Množeći poslednju jednakost sa $a^2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{29}$ dobijamo kvadratnu jednačinu $\sqrt[3]{29^2}(a^2)^2 - 3a^2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{29} + \sqrt[3]{2^2} = 0$

   čija su rešenja: $a^2_{1/2} = \frac{\sqrt[3]{2}(3\pm\sqrt{5})}{2\sqrt[3]{29}}$. Neka je $a^2 = \frac{\sqrt[3]{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt[3]{29}}$. Tada:

   $a^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{29}}$. Koristeći tvrdjenje kao u lemi 51 dobijamo $a = \pm\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{29}}$.

   Neka je $a = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{29}}$. Tada je $b = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{29}}$.

4. $p = 3$.

   Nalaženje $\sqrt[6]{3}$ možemo svesti na nalaženje $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$. Koristimo se rezultatima iz leme 48. Problem se svodi na rešavanje sistema:

   $a + b = x$, $a^2 + b^2 = \frac{\sqrt{3}}{x}$. Neka je $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tada sistem postaje:

   $a + b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2 + b^2 = 2$. Dakle,

   $a + b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   $a^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - a)^2 = 2$

   $2a^2 - a\sqrt{3} - \frac{5}{4} = 0$

   Resenja poslednje kvadratne jednačine su $a_{1/2} = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{13}}{4}$.

   Neka je $a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{13}}{4}$. Tada je $b\frac{\sqrt{3}-\sqrt{13}}{4}$.

5. $p = 5$. Kako je $35 = 6 \cdot 5 + 5$ i $7 = 6 \cdot 1 + 1$ postoji $\sqrt[6]{35}$ i $\sqrt[6]{7}$ pa je $\sqrt[6]{5} = \frac{\sqrt[6]{35}}{\sqrt[6]{7}}$. $\diamond$

Sada ćemo pokazati da polje **F** sadrži kompletno kvadratično polje nad pozitivnim racionalnim brojevima.

Neka je $S = \{x \in \mathbf{F} |$ za neko $a \in F$, $x = a^2\}$.

Lema 52 *Skup S ima sledeće osobine:*

1. *Ako $x, y \in S$ onda $x + y \in S$.*
2. *Ako $x_1, \ldots, x_n \in S$ onda $x_1 + \ldots + x_n \in S$*
3. *$\mathbf{Q}^+ S \subseteq S$*

Dokaz:

1. Neka $x, y \in S$. Tada, za neke a, b, $x = a^2$, $y = b^2$. Otuda $x + y = a^2 + b^2$, pa na osnovu dokaza leme 47 sledi: za neko c, $x + y = c^2$.
2. Indukcijom po n koristeći 1.
3. Neka $x \in \mathbf{Q}^+ S$. Tada je $x = qs$, $q \in \mathbf{Q}^+$, $s \in S$. Na osnovu leme 47, postoji $\sqrt{q}$, pa kako je $s = a^2$ za neko a, $x = (\sqrt{q}a)^2$. $\diamond$

   Lema 53 *Neka su $x_1, x_2, g \geq 0$. Tada važi:*

   (a) Ako je $x_1 + x_2 > g$ onda postoje $q_1 > 0$ i $q_2 > 0$ takvi da je $q = q_1 + q_2$, $x_1 > q_1$ i $x_2 > q_2$.

   (b) Ako je $x_1 + x_2 < g$ onda postoje $q_1 > 0$ i $q_2 > 0$ takvi da je $q = q_1 + q_2$, $x_1 < q_1$ i $x_2 < q_2$.

Dokaz:

(a) Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. $x_1 = x_2$.

Tada je $2x_1 > q$, odnosno $x_1, x_2 > \frac{q}{2}$ pa možemo uzeti $q_1 = q_2 = \frac{q}{2}$

2. $x_1 \neq x_2$, $x_1 < q$ i $x_2 < q$.

Pretpostavimo da je $x_1 > x_2$. Tada, za neko $r > 0$, $x_1 = x_2 + r$. Dakle,važe sledeće nejednakosti:

$2x_2 + r > q$ odnosno $x_2 > \frac{q-r}{2}$ i

$x_1 = x_2 + r > \frac{q-r}{2} + r = \frac{q+r}{2}$

pa možemo uzeti $q_1 = \frac{q+r}{2}$ i $q_2 = \frac{q-r}{2}$

3. $x_1 \neq x_2$, $x_1 > q$ i $x_2 > q$.

Tada je $x_1 > \frac{q}{2}$, $x_2 > \frac{q}{2}$ pa možemo uzeti $q_1 = q_2 = \frac{q}{2}$.

4. $x_1 > q > x_2$.

Tada je važi: $x_1 > q > q - \frac{x_2}{2}$ i $x_2 > \frac{x_2}{2}$ pa možemo uzeti $q_1 = q - \frac{x_2}{2}$, $q_2 = \frac{x_2}{2}$.

(b) Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. $x_1 = x_2$.

Tada, kao u (a) možemo uzeti $q_1 = q_2 = \frac{q}{2}$

2. $x_1 \neq x_2$.

Prepostavimo da je $x_1 < x_2$.Tada, za neko $x_2 > r > 0$, $x_1 = x_2 - r$. Dakle, važe sledeće nejednakosti:

$q > 2x_2 - r$ odnosno $\frac{q+r}{2} > x_2$ i

$x_1 = x_2 - r < \frac{q+r}{2} - r = \frac{q-r}{2}$

pa možemo uzeti $q_1 = \frac{q+-r}{2}$ i $q_2 = \frac{q+r}{2}$. $\diamond$

Prethodna lema se može uopštiti:

Lema 54

1. *Ako je* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > g$ *onda postoje* $q_1, q_2, \ldots, q_n > 0$ *takvi da je* $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ *i* $x_1 > q_1$, $x_2 > q_2$,$\ldots x_n > q_n$.
2. *Ako je* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n < g$ *onda postoje* $q_1, q_2, \ldots, q_n > 0$ *takvi da je* $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ *i* $x_1 < q_1$, $x_2 < q_2$,$\ldots x_n < q_n$.

Dokaz se izvodi jednostavno, indukcijom po n koristeći prethodnu lemu.$\diamond$

Neka je $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3} \ldots]$.

Lema 55 $\mathbf{Q}_2 \subseteq S$

Dokaz: Neka $x \in \mathbf{Q}_2$. Tada je $x = \sum \alpha_i \sqrt{b_i}$, $\alpha_i, b_i \in Q$. Razdvajajući pozitivan i negativan deo dobijamo $x = \sum s_i \sqrt{b_i} - \sum t_i \sqrt{c_i}$, gde je $s_i, t_i > 0$. Neka je $s = \sum s_i \sqrt{b_i}$, $t = \sum t_i \sqrt{c_i}$, Kako je $s_i \sqrt{b_i} = (\sqrt{s_i} \sqrt[4]{b_i})^2$, $s_i \sqrt{b_i} \in S$, pa na osnovu leme 52, $s \in S$. Analogno, $t \in S$. Pokažimo da $s - t \in S$. U tom cilju, napišimo s i t u obliku $s = \sum s_i \sqrt{b_i} = \sum \sqrt{s_i^2 b_i} = \sum \sqrt{\beta_i}$, odnosno $t = \sum \sqrt{\gamma_i}$. Neka je $s - t = (s - q) + (q - t)$, gde je $s > q > t$ i neka je $s = \sqrt{\beta_1} + \ldots + \sqrt{\beta_n}$. Tada, na osnovu leme $54 - 1$, postoje $q_1, \ldots, q_n$ takvi da je $q = q_1 + \ldots + q_n$ i $\sqrt{\beta_1} > q_1, \ldots, \sqrt{\beta_n} > q_n$. Tada je $s - q = (\sqrt{\beta_1} - q_1) + \ldots + (\sqrt{\beta_n} - q_n)$. Dalje,

$\sqrt{\beta_i} - q_i = \sqrt{\beta_i} - \sqrt{q_i^2} = \frac{b_i - q_i^2}{\sqrt{\beta_i} + q_i}$.

$\beta_i - q_i^2 \in \mathbf{Q}$ pa je $\beta_i - q_i^2 = a^2$ za neko a.

$\sqrt{\beta_i} \in S$ i $q_i \in S$ pa na osnovu leme 52, $\sqrt{\beta_i} + q_i \in S$, odnosno $\sqrt{\beta_i} + q_i = b^2$ za neko b. Dakle, $\sqrt{\beta_i} - q_1 = \frac{a^2}{b^2} = (\frac{a}{b})^2 \in S$. Otuda, na osnovu leme 52, $s - q \in S$.

Analogno, koristeći lemu $54 - 2$, može se pokazati da $q - t \in S$, pa na osnovu zatvorenosti skupa S za sabiranje $s - t \in S$. $\diamond$

Lema 56 *Neka je $f = x^3 + f_2 x^2 + f_1 x + f_0 \in \mathbf{Q}[x]$. Tada postoji $a \in \mathbf{F}$ takvo da je $f(a) = 0$ kad god je ispunjen bilo koji od sledećih uslova:*

1. $f_0 \cdot f_2 < 0$
2. $f_1 < 0$

Dokaz: Posmatrajmo polinom $q(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{f_2 x^3}{3} + \frac{f_1 x^2}{2} + f_0 x$. Primenujemo Langražovu teoremu na ovaj polinom, to jest, za svako $a \in \mathbf{F}$ postoji $-a < \varepsilon < a$ takvo da je $\frac{q(a) - q(-a)}{2a} = q'(\varepsilon)$. Kako je $q' = f$, računajući levu stranu dobijamo:

$\frac{f_2 a^2}{3} + f_0 = \varepsilon^3 + f_2 \varepsilon^2 + f_1 \varepsilon + f_0$ odnosno

$\varepsilon^3 + f_2 \varepsilon^2 + f_1 \varepsilon - \frac{f_2 a^2}{3} = 0$

Dakle, stavljajući $a^2 = -\frac{3 f_0}{f_2}$ dobijamo da je ε rešenje početne kubne jednačine $x^3 + f_2 x^2 + f_1 x + f_0 = 0$. Sa obzirom da $f_0, f_2 \in \mathbf{Q}$, ovakvo a postoji kao god je $f_0 \cdot f_2 < 0$.

Stavljajući u jednačini $x^3 + f_2 x^2 + f_1 x + f_0 = 0$ smenu $x = -\frac{1}{y}$ dobijamo kubnu jednačinu $f_0 y^3 - f_1 y^2 + f_2 y - 1 = 0$. Neka je sada

$q(y) = \frac{f_0 y^4}{4} - \frac{f_1 y^3}{3} + \frac{f_2 y^2}{2} - y$. Analogno kao malopre imamo:

$\frac{q(a) - q(-a)}{2a} = f_0 \varepsilon^3 - f_1 \varepsilon^2 + f_2 \varepsilon - 1$ odnosno

$-\frac{f_1 a^2}{3} - 1 = f_0 \varepsilon^3 - f_1 \varepsilon^2 + f_2 \varepsilon - 1$

$f_0 \varepsilon^3 - f_1 \varepsilon^2 + f_2 \varepsilon + \frac{f_1 a^2}{3} = 0$

Otuda, za $a^2 = -\frac{3}{f_1}$, ε je rešenje. Ovakvo a postoji za $f_1 < 0$. $\diamond$

3.4.2 Rolova teorema za racionalne funkcije

Pretpostavimo nadalje da je $\mathbf{F}$ formalno realno polje u kome važi Rolova teorema za funkije $f(x) = \frac{1}{x}$ i $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Lema 57 *Neka je $a \in \mathbf{F}$, $a > 0$ proizvoljan element. Tada $\sqrt{a} \in \mathbf{F}$.*

Dokaz: Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$. Tada, na osnovu Langražove teoreme, postoji $1 < c < a$, ako je $1 < a$, odnosno $a < c < 1$, ako je $a < 1$ tako da važi:

$\frac{\frac{1}{a}-1}{a-1} = -\frac{1}{c^2}$

$\frac{1-a}{a(a-1)} = -\frac{1}{c^2}$

$-\frac{1}{a} = -\frac{1}{c^2}$

Odakle dobijamo $c^2 = a$, odnosno $c = \sqrt{a}$. $\diamond$

Posledica 23 *U polju* **F** *može se na jedinstven način definisati uredjenje sa: $x \leq y$ akko postoji z tako da je $y = x + z^2$.*

Dokaz: Neka je $x \leq y$ i $y \leq z$. Tada, za neke t_1, t_2 $y = x + t_1^2$ i $z = y + t_2^2$. Otuda $z = x + t_1^2 + t_2^2 = x + t^2$. $\diamond$

Lema 58 *Neka je $a \in \mathbf{F}$, proizvoljan element. Tada, $\sqrt[3]{a} \in \mathbf{F}$.*

Dokaz: Neka je $b \in \mathbf{F}$ proizvoljan element. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Tada, na osnovu Langražove teoreme, postoji $1 < c < b$, ako je $1 < b$, odnosno $b < c < 1$, ako je $b < 1$ tako da važi:

$\frac{\frac{1}{b^2}-1}{b-1} = -\frac{2}{c^3}$

$\frac{1-b^2}{b^2(b-1)} = -\frac{2}{c^3}$

$\frac{(1-b)(1+b)}{b^2(b-1)} = -\frac{2}{c^3}$

$-\frac{1+b}{b^2} = -\frac{2}{c^3}$

$\frac{c^3}{2} = \frac{b^2}{b+1}$

$c^3 = \frac{2b^2}{b+1}$.

Dakle, ukoliko je za neko x, $a = \frac{2x^2}{x+1}$ onda postoji $\sqrt[3]{a}$.

$a = \frac{2x^2}{x+1}$ akko

$a(x+1) - 2x^2 = 0$ akko

$2x^2 - ax - a = 0$

Resenja poslednje kvadratne jednačine su $x_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+8a}}{4}$.

$D = a^2 + 8a$, $a^2 + 8a \geq 0$ akko $a > 0$ ili $a < -8$.

Ovim je pokazano da za svako $a > 0$ postoji $\sqrt[3]{a}$. $\diamond$

Lema 59 *Neka je $\alpha \in \mathbf{F}$, proizvoljan element. Tada, $\sqrt[5]{\alpha} \in \mathbf{F}$.*

Dokaz:

Koristeći lemu 46 treba rešiti jednačinu $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 = \alpha$. Kao u lemi 50 to se svodi na rešavanje sistema: $a + b = x$, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = \frac{\alpha}{x}$ za pogodno izabrano x. Ovaj sistem svodi se na rešavanje kvadratne jednačine: $3a^2 - 3ax + 2x^2 - \sqrt{\frac{3\alpha+x^5}{x}} = 0$

čija su rešenja $a_{1/2} = \frac{3x \pm \sqrt{12\sqrt{\frac{3\alpha+x^2}{x}} - 15x^2}}{6}$

Sa obzirom na lemu 56 dovoljno je izabrati x tako da je $12\sqrt{\frac{3\alpha+x^2}{x}} - 15x^2 \geq 0$.

Neka je, na primer, $x = \frac{1}{2}$.

Tada je $12\sqrt{\frac{3\alpha+x^2}{x}}-15x^2=4\sqrt{\frac{12\alpha+}{2}}-\frac{5}{4}$.

$4\sqrt{\frac{12\alpha+}{2}}-\frac{5}{4}\geq 0$ akko $\alpha\geq-\frac{103}{12\cdot 256}$.

Odavde sledei da za svako $\alpha\geq 0$ postoji $\sqrt[5]{\alpha}$. Otuda, iz $\sqrt[5]{-\alpha}=-\sqrt[5]{\alpha}$ sledi tvrdjenje. $\diamond$

Posledica 24 *Neka je $a\in\mathbf{F}$, $a>0$ proizvoljan element. Tada za sve $n=3\cdot 2^k$ i $n=5\cdot 2^k$ $\sqrt[n]{a}\in\mathbf{F}$.*

Lema 60 *Neka je $f\in\mathbf{F}[x]$, $degf=3$. Tada postoji $c\in\mathbf{F}$ tako da je $f(c)=0$.*

Dokaz:

Neka je $x^3+f_2x^2+f_1x+f_0$ proizvoljan polinom trećeg stepena sa koeficijentima iz polja $\mathbf{F}$. Stavljajući smenu $x=y+\alpha$, jednačina $x^3+f_2x^2+f_1x+f_0=0$ postaje ekvivalentna sa $y^3+py+q=0$, gde je $p=3\alpha^2+2f_2\alpha+f_1$, $q=\alpha^3+f_2\alpha^2+f_1\alpha+f_0$.

Zbog toga ćemo posmatrati polinome oblika $f(y)=y^3+py+q$. Poznate su Kardanove formule za rešavanje kubne jednačine ovog oblika: $y=u+v$ gde je $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$, $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$.

Razmotrimo sledeća dva slučaja:

1. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geq 0$. Tada, sa obzirom na ekzistenciju $\sqrt{a}$ i $\sqrt[3]{a}$ za svako $a\in\mathbf{F}$ rešenje pronalazimo koristeći Kardanove formule.

2. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, odnosno $p<-3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}$.

   Posmatrajmo polinom $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{py^2}{2}+qy$. Kao i u lemi 46, koristeći Rolovu teoremu dovoljno je naći $a,b\in\mathbf{F}$ takve da je $F(a)=F(b)$. Dakle, imamo sledeći niz jednakosti:

   $\frac{a^4}{4}+\frac{pa^2}{2}+qa=\frac{b^4}{4}+\frac{pb^2}{2}+qb$

   $\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4}+\frac{p(a+b)}{2}+q=0$

   $(a+b)(a^2+b^2)+2p(a+b)=-4q$

   $(a+b)(a^2+b^2+2p)=-4q$

   Neka je $a+b=x$, $a^2+b^2+2p=-\frac{4q}{x}$

   Resavanje ovog sistema svodi se na rešavanje kvadratne jednačine

   $2a^2-2ax+x^2+2p+\frac{4q}{x}=0$ čija su rešenja $a_{1/2}=\frac{x\pm\sqrt{-x^2-4p-\frac{8q}{x}}}{2}$

   Kako je $D=-x^2-4p-\frac{8q}{x}$ dovoljno je izabrati x za koje je $x^2+4p+\frac{8q}{x}<0$ (imajući u vidu da je $p<-3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}<0$).

   Neka je $x=-2\sqrt[3]{q}$. Tada je $x^2+4p+\frac{8q}{x}=4p<0$. $\diamond$

4 Zasićeni modeli

4.1 Tipovi, realizacija, zasićeni, homogeni i univerzalni modeli

Neka je T kompletna teorija jezika L. Za svako $n \in \mathbf{N}$, sa F_nT označavamo skup svih formula jezika L čije se slobodne promenljive nalaze medju promenljivama $x_1, \ldots, x_n$. Na skupu F_nT definišemo relaciju $\sim$ na sledeći način:

$\varphi \sim \psi$ akko $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$

Jednostavno se proverava da je $\sim$ relacija ekvivalencije kao i da važi:

1. Ako je $\varphi \sim \psi$ onda je $\neg\varphi \sim \neg\psi$
2. Ako je $\varphi_1 \sim \psi_1$, $\varphi_2 \sim \psi_2$ onda je
   (a) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \sim \psi_1 \wedge \psi_2$
   (b) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \sim \psi_1 \vee \psi_2$
   (c) $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \sim \psi_1 \Rightarrow \psi_2$

Neka je $[\varphi]$ klasa ekvivalencije formule φ i $B_nT = \{[\varphi] | \varphi \in F_nT\}$. Sa obzirom da važe svojstva 1 i 2, na skupu B_nT možemo definisati sledeće operacije:

$[\varphi]' = [\neg\varphi]$, $[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi]$.

Ako je pri tom $0 = [\varphi \wedge \neg\varphi]$, $1 = [\varphi \vee \neg\varphi]$ i $[\varphi] \leq [\psi]$ akko $[\varphi \Rightarrow \psi] = 1$, onda je $\mathbf{B_n T} = (B_nT, +, \cdot, ', \leq, 0, 1)$ Bulova algebra.

Primetimo da u opštem slučaju važi: Ako je S konzistentna teorija jezika L takva da je $W \subseteq S$, onda je skup $F_S = \{[\varphi] | S \vdash \varphi\}$ filter u $\mathbf{B_n W}$. S je maksimalna konzistentna teorija akko je F_S ultrafilter.

Formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je *konzistentna sa teorijom T* ako $T \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Skup $S \subseteq F_nT$ je konzistentan sa teorijom T ako je konjukcija konačno mnogo bilo kojih članova iz S konzistentna sa T; *n-tip p* je maksimalan konzistentan podskup od F_nT. Ako se svaka forula φ iz p zameni sa $[\varphi]$, rezultujući podskup od B_nT je, kao što je napomenuto, ultrafilter. Primetimo da svaki konzistentan podskup od F_nT može biti proširen do n tipa.

Sa S_nT označavamo skup svih n tipova teorije T. Pretpostavimo da $\mathbf{A} \models T$ i $a_1, \ldots, a_n \in A$. Kažemo da n -torka $(a_1, \ldots, a_n)$ *realizuje $p \in S_nT$ u* $\mathbf{A}$ ako $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ za sve $\varphi \in p$.

Primer 21

Neka je $\mathbf{B} \models T$ i $b_1, \ldots, b_n \in B$. Tada je $\{\varphi(x_1, \ldots, x_n) | \mathbf{B} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]\}$ jedan n- tip realizovan sa $(b_1, \ldots, b_n)$ u $\mathbf{B}$.

Lema 61 *Neka je $\mathbf{A}$ model jezika L. Tada je $|S_nTh(\mathbf{A}, a)_{a \in A}| \leq 2^{|A| \cdot ||L|| \cdot w}$*

Dokaz: Neka je $\alpha = |A| \cdot ||L|| \cdot w$. Imamo najviše α formula sa parametrima iz A. Prema tome ima najviše 2^α podskupova skupa svih takvih formula, pa samim tim ima najviše 2^α odgovarajućih tipova. $\diamond$

Od sada pa nadalje predopstavićemo da je L prebrojiv jezik.

Lema 62 *Neka je* $\mathbf{A}$ *beskonačna struktura, i* $Y \subseteq A$.

1. *Ako* $p \in S_n Th(\mathbf{A}, y)_{y \in Y}$, *onda postoji* $\mathbf{B} \succ \mathbf{A}$ *takav da je* p *realizovan u* $(\mathbf{B}, y)_{y \in Y}$ *i* $|B| = |A|$.
2. *Postoji* $\mathbf{B} \succ \mathbf{A}$ *tako da je svaki* $p \in S_n Th(\mathbf{A}, y)_{y \in Y}$ *realizovan u* $\mathbf{B}$ *i* $|B| \leq |A| \times 2^{max(\omega, |Y|)}$.

Dokaz:

(1) Neka su $c_{d_1}, \ldots, c_{d_n}$ simboli konstanti koji se ne pojavljuju u teoriji $Th(\mathbf{A}, y)_{y \in Y}$ i neka je

$S = Th(\mathbf{A}, a)_{a \in A} \cup \{\varphi(c_{d_1}, \ldots, c_{d_n}) | \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in p\}$.

Skup S je konzistentan, pa ima model $\mathbf{B}$ takav da je $|B| = |A|$ i p je realizovan u $\mathbf{B}$. Kako je $\mathbf{B} \models Th(\mathbf{A}, a)_{a \in A}$, $\mathbf{B} \succ \mathbf{A}$.

(2) Neka je $k = |S_n Th(\mathbf{A}, y)_{y \in Y}|$. Na osnovu prethodne leme, $k \leq 2^{max(\omega, |Y|)}$. Neka je $S_n Th(\mathbf{A}, y)_{y \in Y} = \{p_\delta | \delta < k\}$. Definišimo elementaran lanac $\{\mathbf{A}_\delta | \delta \leq k\}$ na sledeći način:

1. $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$.
2. Pretpostavimo da je $\mathbf{A}_\delta$ definisan tako da je $\mathbf{A}_0 \prec \mathbf{A}_\delta$. Tada je $(\mathbf{A}_0, y)_{y \in Y} \equiv (\mathbf{A}_\delta, y)_{y \in Y}$. Otuda, za $p \in S_n Th(\mathbf{A}, y)_{y \in Y}$, možemo smatrati da $p \in S_n Th(\mathbf{A}_\delta, y)_{y \in Y}$. Na osnovu dela (1), postoji $\mathbf{A}_{\delta+1} \succ \mathbf{A}_\delta$ tako da je p_δ realizovan u $\mathbf{A}_{\delta+1}$ i $|\mathbf{A}_{\delta+1}| = |\mathbf{A}_\delta|$.
3. Pretpostavimo da je $\mathbf{A}_\delta$ definisano za sve δ manje od nekog graničnog ordinala λ i da je $\{\mathbf{A}_\delta | \delta < \lambda\}$ elementaran lanac. Neka je $\mathbf{A}_\lambda = \bigcup \{\mathbf{A}_\delta | \delta < \lambda\}$. Tada je $\mathbf{A}_\lambda \succ \mathbf{A}_\delta$ za sve $\delta < \lambda$

Neka je $\mathbf{B} = \mathbf{A}_k$. Tada je p realizovan u $\mathbf{B}$ jer je $\mathbf{B} \succ \mathbf{A}_{\delta+1}$ a p_δ je realizovan u $\mathbf{A}_{\delta+1}$.

Kako je za svako $\delta \leq k$, $|\mathbf{A}_\delta| \leq |\mathbf{A}| \times |\delta|$, važiće $|B| \leq |A| \times 2^{max(\omega, |Y|)}$. $\diamond$

Neka je $\mathbf{A}$ beskonačan model i $Y \subseteq A$. $\mathbf{A}$ je *zasićen nad* Y ako je svaki $p \in S_1 Th(\mathbf{A}, a)_{a \in A}$ realizovan u $(\mathbf{A}, a)_{a \in A}$. $\mathbf{A}$ je *zasićen* ako je zasićen nad svakim $Y \subseteq A$ takvim da je $|Y| < |A|$. Neka je k beskonačan kardinal. $\mathbf{A}$ je k *zasićen* ako je $\mathbf{A}$ zasićen nad svakim Y takvim da je $|Y| < |k|$.

Lema 63 *Ako je* $\mathbf{A}$ *konačan model onda je* $\mathbf{A}$ k*- zasićen za svaki kardinal* k.

Dokaz: Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $X \subseteq A$, $|X| < k$, $p \in S_1 Th(A, a)_{a \in X}$. Pretpostavimo da p nije realizovan u $(\mathbf{A}, a)_{a \in X}$. Tada, za svako $k \leq n$ postoji $\varphi_k \in p$ tako da $(A, a)_{a \in X} \models \neg \varphi_k[a_k]$. Medjutim, postoji konačan $\{\varphi_k | k \leq n\} \subseteq p$ koji nije realizovan u $(A, a)_{a \in X}$ pa p nije konzistentan sa $Th(A, a)_{a \in A}$. Kontradikcija. $\diamond$

Lema 64 *Ako je* $\mathbf{A}$ k*- zasićen model onda je* $\mathbf{A}$ *konačan ili je kardinalnosti* $\geq k$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ model kardinalnosti β, gde je $\aleph_0 \leq \beta < k$. Neka je $X \subseteq A$, $|X| < \beta$. Tada je $p = \{\neg(x = c_\gamma) | \gamma < \beta\}$ konzistentan sa $Th(A, a)_{a \in X}$ ali nije zadovoljen u $(A, a)_{a \in X}$ pa $\mathbf{A}$ nije k zasićen. $\diamond$

Teorema 74 *Ako su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *zasićene strukture iste kardinalnosti i* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$*, onda je* $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Dokaz: Neka je $k = |A|$. Neka je $A = \{a_\delta|\delta < k\}$ i $B = \{b_\delta|\delta < k\}$. Definišimo skup $\{(c_\gamma, d_\gamma)|\delta < k\}$ transfinitnom indukcijom. Fiksirajmo $\delta < k$ i pretpostavimo da je skup $\{(c_\gamma, d_\gamma)|\gamma < \delta\}$ definisan tako da važi: $(\mathbf{A}, c_\gamma)_{\gamma<\delta} \equiv (\mathbf{B}, d_\gamma)_{\gamma<\delta}$.

1. Neka je δ paran i c_δ element skupa $A \setminus \{c_\gamma|\gamma < \delta\}$ sa najmanjim indeksom. Neka je $p = \{\varphi(x)|(\mathbf{A}, c_\gamma)_{\gamma<\delta} \models \varphi[c_\delta]\}$. Tada $p \in S_1Th(\mathbf{A}, c_\gamma)_{\gamma<\delta}$. Neka je q rezultat zamene svakog pojavljivanja simbola c_{c_γ} u p sa c_{d_γ} za sve $\gamma < \delta$. Tada $q \in S_1Th(\mathbf{B}, d_\gamma)_{\gamma<\delta}$. Kako je $\mathbf{B}$ zasićen, q je realizovan u $\mathbf{B}$ sa nekim $b \in B$. Neka je $d_\delta = b$. Tada je $(\mathbf{A}, c_\gamma, c_\delta)_{\gamma<\delta} \equiv (\mathbf{B}, d_\gamma, d_\delta)_{\gamma<\delta}$.

2. Ako je δ neparan konstrukcija kao u (a), s'tim što $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ zamene mesta.

Neka je $h(c_\delta) = d_\delta$ za sve $\delta < k$. Jednostavno se proverava da je h izomorfizam.

Teorema 75 *Naka je* $\mathbf{A}$ *beskonačan model. Tada, za svaki beskonačan kardinal* k *postoji* k^+*- zasićen* $\mathbf{B} \succ A$ *takav da je* $|\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}|^k$.

Dokaz: Konstuišimo prvo elementarnu ekstenziju $\mathbf{A}^*$ modela $\mathbf{A}$ koja realizuje svaki $p \in S_1Th(\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$ za svaki $Y \subseteq A$ kardinalnosti najviše k. Neka su $\{Y_\delta|\delta < |A|^k\}$ svi podkupovi skupa A kardinalnosti najviše k. Definišimo elementarni lanac $\{\mathbf{A}_\delta|\delta < |A|^k\}$ na sledeći način:

1. $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}_\lambda = \bigcup\{A_\delta|\delta < \lambda\}$ ako je λ granični ordinal.
3. $\mathbf{A}_{\delta+1} \succ \mathbf{A}_\delta$, $\mathbf{A}_{\delta+1}$ realizuje svaki $p \in S_1Th(\mathbf{A}_\delta, y)_{y\in Y\delta}$ i
   $|\mathbf{A}_{\delta+1}| \leq |\mathbf{A}_\delta| \cdot 2^k$. Egzistencija modela $\mathbf{A}_{\delta+1}$ sledi na osnovu Leme 41.

Neka je $\mathbf{A}^* = \bigcup\{\mathbf{A}_\delta|\delta \leq |A|^k\}$. Može se pokazati indukcijom da je $|\mathbf{A}_\delta| \leq |\mathbf{A}|^k$ za sve $\delta < |\mathbf{A}|^k$, pa je $|\mathbf{A}^*| \leq |\mathbf{A}|^k$.
Neka je $\mathbf{B} = \bigcup\{\mathbf{B}_\delta|\delta < k^+\}$, gde je

1. $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}$
2. $\mathbf{B}_\lambda = \bigcup\{\mathbf{B}_\delta|\delta < \lambda\}$
3. $\mathbf{B}_{\delta+1} = \mathbf{B}^*_\delta$ i $|\mathbf{B}^*_\delta| \leq |\mathbf{A}|^k$.

Zasićenost modela $\mathbf{B}$ sledi na osnovu regularnostii kardinala k^+: Za proizvoljan $Y \subseteq B$, $|Y| \leq k$ imamo da je $Y \subseteq \mathbf{B}_\delta$ za neki $\delta < k^+$ pa je svaki $p \in S_1Th(\mathbf{B}, y)_{y\in Y}$ realizovan u $\mathbf{B}_{\delta+1}$ i otuda i u $\mathbf{B} \succ \mathbf{B}_{\delta+1}$ $\diamond$

Teorema 76 *Neka je* k *neprebrojiv kardinal i* $||L|| < k$*. Model* $\mathbf{A}$ *jezika* L *je* k *-zasićen akko naredni dijagram može biti kompletiran, tj. ako važi: za sva* *elementarna utapanja $g : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, gde su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ modeli jezika L kardinalnosti najviše k, postoji elementarno utapanje $h : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ tako da je $g = hf$.*

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{A} & & \\ & g & & h & \\ \mathbf{B} & & & & \mathbf{C} \\ & & f & & \end{array}$$

Dokaz: Pretpostavimo da $\mathbf{A}$ ispunjava uslove teoreme. Neka je $Y \subseteq A$ kardinalnosti manje od k. Tada na osnovu teoreme 50 postoji $\mathbf{B} \prec \mathbf{A}$ takav da je $Y \subseteq B$ i $|\mathbf{B}| < k$.

Neka $p \in S_1Th(\mathbf{A}, y)_{y\in Y} = p \in S_1Th(\mathbf{B}, y)_{y\in Y}$. Na osnovu leme 41 postoji $\mathbf{C} \succ \mathbf{B}$ takav da je $|\mathbf{C}| < k$ za neko $c \in C$ p je realizovan u $\mathbf{C}$. Tada $h(c)$ realizuje p u $\mathbf{A}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathbf{A}$ $k-$zasićen. Možemo pretpostaviti da su f i g inkluzije. Neka je $C \setminus B = \{c_\delta | \delta < k\}$. Restrikcija preslikavanja h na modelu $\mathbf{B}$ je g, dok $h(c_\delta)$ definišemo indukcijom na sledeći način: Fiksirajmo δ i pretpostavimo da je $(\mathbf{C}, b, c_\gamma)_{b\in B,\gamma<\delta} \equiv (\mathbf{A}, b, h(c_\gamma))_{b\in B,\gamma<\delta}$.

Neka je $p = \{\varphi(x) | (\mathbf{C}, b, c_\gamma)_{b\in B,\gamma\leq\delta} \models \varphi(c_{c_\delta})\}$ i q dobijen iz p zamenom c_{c_γ} sa $h(c_\gamma)$ za svako $\gamma < \delta$. Kako je $\mathbf{A}$ $k-$ zasićen, q je realizovan u $\mathbf{A}$ sa nekim a. Neka je $h(c_\delta) = a$. $\diamond$

Model $\mathbf{B}$ je *konačno generisan* ako postoji $Y \subseteq B$, $|Y| < \aleph_0$ takav da je $\mathbf{B}$ najmanja podstruktura od $\mathbf{B}$ koja sadrži Y. Tada, za ω zasićene modele važi:

Teorema 77 *Model $\mathbf{A}$ je $\omega-$ zasićen akko naredni dijagram može biti kompletiran.* $\diamond$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{A} & \\ g & & h \\ \mathbf{B} & & \mathbf{C} \\ & f & \end{array}$$

pri čemu su f, g i h elementarna utapanja, $\mathbf{B}$ konačno generisan i $|\mathbf{C}| \leq \omega$.

Neka je $\mathbf{A}$ beskonačan model jezika L, $X, Y \subseteq A$ i $f : X \to Y$ bijekcija. f je *elementaran parcijalan automorfizam* modela $\mathbf{A}$ ako je $(\mathbf{A}, x)_{x\in X} \equiv (\mathbf{A}, f(x))_{x\in X}$. Kardinalnost preslikavanja f je kardinalnost skupa X. f je *direktno proširiv* ako za svako $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da je $(\mathbf{A}, x, a)_{x\in X} \equiv (\mathbf{A}, f(x), b)_{x\in X}$.

Kažemo da je model $\mathbf{A}$ *homogen* ako je svaki elementaran parcijalan automorfizam modela $\mathbf{A}$, kardinalnosti manje od $|\mathbf{A}|$, direktno proširiv.

Lema 65 *Model $\mathbf{A}$ je homogen akko se svaki elementaran parcijalan automorfizam modela $\mathbf{A}$ kardinalnosti manje od $|\mathbf{A}|$ može produžiti do automorfizma modela $\mathbf{A}$.*

Dokaz:

$\Rightarrow$: Neka je $f : X \to Y$ parcijalan automorfizam modela $\mathbf{A}$ kardinalnosti manje od $|\mathbf{A}|$. Neka je $A \setminus X = \{x_\delta | \delta < |\mathbf{A}|\}$ i $A \setminus Y = \{y_\delta | \delta < |\mathbf{A}|\}$. Skup $\{(c_\delta, d_\delta) | \delta < |\mathbf{A}|\}$ definišemo indukcijom na sledeći način: Fiksirajmo δ i pretpostavimo da je $\{(c_\gamma, d_\gamma) | \gamma < \delta\}$ definisano tako da je $(\mathbf{A}, x, c_\gamma)_{x\in X, \gamma<\delta} \equiv (\mathbf{A}, f(x), d_\gamma)_{x\in X, \gamma<\delta}$.

1. Neka je δ paran i c_δ element skupa $(A \setminus X) \setminus \{c_\gamma | \gamma < \delta\}$ sa najmanjim indeksom. Kako je $\mathbf{A}$ homogen, postoji $y \in (A \setminus Y) \setminus \{d_\gamma | \gamma < \delta\}$ tako da je $(\mathbf{A}, x, c_\gamma, c_\delta)_{x\in X, \gamma<\delta} \equiv (\mathbf{A}, f(x), d_\gamma, y)_{x\in X, \gamma<\delta}$.

   Neka je $d_\delta = y$.

2. Ako je δ neparan, uradićemo isto što i u (a) s'tim da X i Y zamene mesta.

Proširimo preslikavanje $f : X \to Y$ stavljajući $f(c_\delta) = d_\delta$, za svako $\delta < |\mathbf{A}|$. Jednostavno se proverava da je f izomorfizam.

$\Leftarrow$: Neka je $f : X \to Y$ parcijalan automorfizam modela $\mathbf{A}$ kardinalnosti manje od $|\mathbf{A}|$ i neka $a \in A$. Dokazaćemo da postoji $b \in A$ takav da je $f \cup (a, b) : X \cup \{a\} \to Y \cup \{b\}$ parcijalni automorfizam. Na osnovu pretpostavke, f se može produžiti do automorfizma ϕ modela $\mathbf{A}$. Tada $\phi|_{X\cup\{a\}} : X \cup \{a\} \to Y \cup \{\phi(a)\}$ pa $b = \phi(a)$ zadovoljava traženi uslov. $\diamond$

Neka je $\mathbf{A}$ beskonačan model jezika L. $\mathbf{A}$ je *univerzalan* ako za svaki $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}$, $|\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}|$ postoji elementarno utapanje $f : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

Teorema 78 *Neka je* $\mathbf{A}$ *beskonačan model.* $\mathbf{A}$ *je zasićen akko je* $\mathbf{A}$ *homogen i univerzalan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ zasićen. Neka je $f : X \to Y$ takvo da je $(\mathbf{A}, x)_{x\in X} \equiv (\mathbf{A}, f(x))_{x\in X}$ i $|X| < |\mathbf{A}|$. Pretpostavimo da $a \in A$ i $p \in S_1Th(\mathbf{A}, x)_{x\in X}$ tip realizovan sa a u $(\mathbf{A}, \mathbf{x})_{x\in X}$. Tada $p \in S_1Th(\mathbf{A}, f(x))_{x\in X}$ pa je p realizovan $(\mathbf{A}, f(x))_{x\in X}$ sa nekim b. Tada važi: $(\mathbf{A}, x, a)_{x\in X} \equiv (\mathbf{A}, f(x), b)_{x\in X}$. Dakle, $\mathbf{A}$ je homogen. Dokažimo da je $\mathbf{A}$ univerzalan. Neka je $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}$ i $B = \{b_\gamma | \gamma \leq |\mathbf{A}|\}$. Indukcijom, kao u teoremi 67 možemo konstruisati niz $\{a_\gamma | \gamma \leq |\mathbf{A}|\}$ tako da je za svako $\delta \leq |\mathbf{A}|$, $(\mathbf{A}, a_1, \ldots, a_\delta) \equiv (\mathbf{B}, b_1, \ldots, b_\delta)$. Tada je $f : B \to A$ definisano sa $f(b_\gamma) = a_\gamma$ elementarno utapanje modela $\mathbf{B}$ u model $\mathbf{A}$.

Prepostavimo sada da je $\mathbf{A}$ univerzalan i homogen. Neka $p \in S_1Th(\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$ za neki $Y \subseteq A$ takav da je $|Y| < |A|$. Na osnovu leme 41, postoji $\mathbf{C} \succ \mathbf{A}$ takav da je $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|$ i p je realizovan u $(\mathbf{C}, y)_{y\in A}$ sa nekim c. Kako je $\mathbf{A}$ univerzalan, postoji elementarno utapanje $f : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ pa je $(\mathbf{A}, f(y))_{y\in Y} \equiv (\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$ i $f(c)$ realizuje p u $(\mathbf{A}, f(y))_{y\in Y}$. Kako je $\mathbf{A}$ homogen, postoji $b \in A$ tako da je $(\mathbf{A}, f(y), f(c))_{y\in Y} \equiv (\mathbf{A}, y, b)_{y\in Y}$ pa b realizuje p u $(\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$. $\diamond$

Lema 66 *Neka je* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$*,* $|\mathbf{A}| \leq |\mathbf{B}|$ *i* $\mathbf{B}$ *je homogen. Pretpostavimo da za svako* n *i svako* $p \in S_nTh\mathbf{A}$ *važi: ako je* p *realizovan u* $\mathbf{A}$ *onda je* p *realizovan u* $\mathbf{B}$*. Tada postoji elementarno utapanje* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*.*

Dokaz:

Neka je $X \subseteq A$. Indukcijom po $|X|$ dokazaćemo da za neko $f : X \to B$ važi $(\mathbf{A}, x)_{x\in X} \equiv (\mathbf{B}, f(x))_{x\in X}$. Neka je X konačan, $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $p = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n) | \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}$. Tada je p tip teorije $Th\mathbf{A}$ realizovan sa $a_1, \ldots, a_n$. Tada, je na osnovu pretpostavke p realizovan u $\mathbf{B}$ za neke $b_1, \ldots, b_n$ pa je $(\mathbf{A}, a_1, \ldots, a_n) \equiv (\mathbf{B}, b_1, \ldots, b_n)$. Pretpostavimo sada da je X beskonačan. Neka je $X = \{x_\delta | \delta < |X|\}$. Preslikavanje $f : X \to B$ definišemo indukcijom po δ. Fiksirajmo $\delta < |X|$ i prepostavimo da je $f : \{x_\gamma | \gamma < \delta\} \to B$ definisano tako da važi $(\mathbf{A}, x_\gamma)_{\gamma<\delta} \equiv (\mathbf{B}, f(x_\gamma))_{\gamma<\delta}$. Kako je $|\{x_\gamma|\gamma \leq \delta\}| < |X|$, na osnovu pretpostavke, postoji g tako da je $(\mathbf{A}, x_\gamma)_{\gamma\leq\delta} \equiv (\mathbf{B}, g(x_\gamma))_{\gamma\leq\delta}$. Kako je $\mathbf{B}$ homogen, postoji $b \in B$ tako da je $(\mathbf{B}, g(x_\gamma), g(x_\delta))_{\gamma<\delta} \equiv (\mathbf{B}, f(x_\gamma), b)_{\gamma<\delta}$. Neka je $f(x_\delta) = b$. $\diamond$

Neka je $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Kažemo da $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ *realizuju iste $n-$ tipove* ako za sve $p \in S_n Th\mathbf{A}$ važi: p je realizovan u $\mathbf{A}$ akko je p realizovan u $\mathbf{B}$.

Teorema 79 *Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ homogeni elementarno ekvivalentni modeli iste kardinalnosti i realizuju iste $n-$ tipove, onda je $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.*

Dokaz: Neka je $A = \{a_\delta|\delta < k\}$ i $B = \{b_\delta|\delta < k\}$. Skup $\{c_\delta, d_\delta|\delta < k\}$ definišemo indukcijom. Fiksirajmo δ i pretpostavimo da je $(\mathbf{A}, c_\gamma) \equiv (\mathbf{B}, d_\gamma)$.

1. Neka je δ paran i c_δ element skupa $A \setminus \{c_\gamma|\gamma < \delta\}$ sa najmanjim indeksom. Na osnovu predthodne teoreme postoji f tako da je $(\mathbf{A}, c_\gamma)_{\gamma\leq\delta} \equiv (\mathbf{B}, f(c_\gamma))_{\gamma\leq\delta}$. Kako je $\mathbf{B}$ homogen, postoji $d \in B$ tako da je $(\mathbf{B}, d_\gamma, d)_{\gamma<\delta} \equiv (\mathbf{B}, f(c_\gamma), f(c_\delta))_{\gamma<\delta}$. Neka je $d_\delta = d$.

2. Ako je δ neparan uradićemo isto što i u delu (a), s'tim da $\mathbf{A}$ i B zamene mesta. $\diamond$

Teorema 80 *Neka je $\mathbf{A}$ prebrojiv model. Tada postoji prebrojiv, homogen $\mathbf{B} \succ \mathbf{A}$.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{C}$ beskonačan model, i $f : X \to Y$ konačan, elementaran parcijalan automorfizam modela $\mathbf{C}$. Pretpostavimo da je $\mathbf{C} \prec \mathbf{D}$. Kažemo da je f direktno proširiv u $\mathbf{D}$ ako za svako $c \in C$, postoji $d \in D$ tako da je $(\mathbf{C}, x, c)_{x\in X} \equiv (\mathbf{D}, f(x), d)_{x\in X}$. Malom modifikacijom dokaza leme 18 može se pokazati da važi: Ako je $\mathbf{C}$ prebrojiv model, onda postoji prebrojiv $\mathbf{D} \succ \mathbf{C}$ tako da je svaki konačan, elementaran parcijalan automorfizam modela $\mathbf{C}$ direktno proširiv u $\mathbf{D}$. Definišimo elementaran lanac $\{\mathbf{A}_n|n < \omega\}$ tako da važi:

1. $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$;

2. $\mathbf{A}_{n+1}$ je prebrojiv i svaki konačan, elementaran automorfizam modela $\mathbf{A}$ je direktno proširiv u $\mathbf{A}_{n+1}$.

Tada je $\mathbf{B} = \bigcup\{\mathbf{A}_n|n < \omega\}$ prebrojiva homogena elementarna ekstenzija modela $\mathbf{A}$. $\diamond$

Kažemo da struktura $\mathbf{A}$ *ispušta* $n-$tip p ako ne postoji element iz A^n koji realizuje p u $\mathbf{A}$. Neka je T kompletna teorija i $p \in S_nT$. p je *glavni* tip ako postoji $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in p$ tako da za svako $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in p$ važi: $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$. U tom slučaju kažemo da $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ generiše p. Kažemo da je tip p *neglavni* ako nije glavni. Primetimo da svaki model kompletne teorije T realizuje svaki glavni tip $p \in S_nT$.

Teorema 81 *Ako je T prebrojiva teorija i $p \in S_nT$ neglavni tip. Tada postoji model teorije T koji ispušta tip p.* $\diamond$

Neka je $\mathbf{A}$ model jezika L i $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Uvedimo sledeću oznaku: $t_p^{\mathbf{a}}(\overline{a}) = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n) | \mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}$

Definicija 27 *Model* $\mathbf{A}$ *teorije* T *je atomičan ako je* $t_p^{\mathbf{A}}(\overline{a})$ *glavni tip za svako* $\overline{a} \in A^n$.

Lema 67 *Neka je* $\mathbf{A}$ *prebrojiv atomičan model. Tada je* $\mathbf{A}$ *homogen.*

Dokaz: Neka je $f : \overline{a} \mapsto \overline{b}$ elementaran parcijalan automorfizam modela $\mathbf{A}$ i neka $c \in A$. Pretpostavimo da formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ generiše tip $t_p^{\mathbf{A}}(\overline{a}, c)$. Kako je f elementarno i $\mathbf{A} \models \exists y \varphi(c_{\overline{a}}, y)$, $\mathbf{A} \models \exists y \varphi(c_{\overline{b}}, y)$. Pretpostavimo da $\mathbf{A} \models \exists y \varphi[\overline{b}, d]$. Kako formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ generiše tip $t_p^{\mathbf{A}}(\overline{a}, c)$, imamo da je $t_p^{\mathbf{A}}(\overline{a}, c) = t_p^{\mathbf{A}}(\overline{b}, d)$ pa je $f : \overline{a}, c \mapsto \overline{b}, d$ elementarno. $\diamond$

Definicija 28 *Neka je* $\mathbf{A} \models T$. *Kažemo da je* $\mathbf{A}$ *prost model teorije* T *ako se* $\mathbf{A}$ *može elementarno utopiti u svaki model teorije* T.

Primer 22 *Neka je* $\mathbf{F} \models ACF_0$. *Tada se* $\mathbf{F}$ *može utopiti u* $\overline{Q}$. *Kako je teorija* ACF_0 *modelski kompletna ovo utapanje je elementarno. Otuda,* $\overline{Q}$ *je prost model teorije* ACF_0.

Lema 68 *Svaki prost model je atomičan.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{M}$ prost model teorije T. Pretpostavimo da je $j : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ elementarno utapanje. Ako $\overline{a} \in M^n$ realizuje $p \in S_nT$ tada i $j(\overline{a})$ realizuje isti taj tip. Neka je $p \in S_nT$ neglavni tip. Tada, na osnovu teoreme 74 postoji model $\mathbf{N}$ teorije T koji ispušta tip p. Otuda i $\mathbf{M}$ ispušta tip p jer u suprotnom $\mathbf{M}$ ne bi mogao biti utopljen u $\mathbf{N}$. Prema tome, za svako $\overline{a} \in M^n$ $t_p^{\mathbf{M}}(\overline{a})$ mora biti glavni. $\diamond$

Posledica 25 $\overline{Q}$ *je homogen model teorije* ACF_0.

Teorija T je k- *kategorična* ako su svi modeli teorije T kardinalnosti k izomorfni.

Lema 69 *Neka je* T *prebrojiva kompletna teorija koja nema konačne modele. Tada su sledeći uslovi ekvavalentni:*

1. *T je ω- kategirična.*
2. *S_nT je konačan za svako n.*
3. *Svaki prebrojiv model teorije T je zasićen.*

Dokaz:

$(a) \Rightarrow (b)$: Pretpostavimo da je S_n beskonačan. Tada je B_nT beskonača Bulova algebra. Kako svaka beskonačna Bulova algebra ima neglavni ultrafilter, S_nT ima neglavni tip p. Na osnovu prethodne teoreme postoji prebrojiv model teorije T koji ispušta p. Na osnovu leme 41 postoji prebrojiv model teorije T koji realizuje p. Otuda, T nije ω- kategorična.

$(c) \Rightarrow (a)$: Ako je svako prebrojiv model teorije T zasićen, onda, sa obzirom da je T kompletna, na osnovu teoreme 67 sledi da je T ω kategorična.

$(b) \Rightarrow (c)$: Pretpostavimo da je S_n konačan za svako n. Kako je u konačnoj Bulovoj algebri svaki filter glavni, svaki $p \in S_nT$ je glavni tip za svako n. Neka je $\mathbf{A}$ prebrojiv model teorije T. Fiksirajmo $p \in S_1Th(\mathbf{A}, a_i)_{1\le i\le n}$ i dokažimo da je p realizovan u $\mathbf{A}$. Neka je $p^* = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n, x) | \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}, x) \in p\}$. Tada $p^* \in S_{n+1}T$, pa je glavni. Neka $\psi(x_1, \ldots, x_n, x) \in p^*$ generiše p^*. Tada $\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}, x) \in p$ generiše p. Dakle, p je glavni tip pa je realizovan u svakom modelu teorije $Th(\mathbf{A}, a_i)_{1\le i\le n}$.

Lema 70 *Neka je $\mathbf{A}$ zasićen model, $Y \subseteq A$, $|Y| < |A|$ i $p \in S_nTh(\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$. Tada je p realizovan u $\mathbf{A}$.*

Dokaz: Indukcijom po n. Pretpostavimo da je $n > 1$ i $p_n \in S_nTh(\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$. Neka je $p_{n-1} = \{\exists x\varphi(x_1, \ldots, x_n) | \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in p_n\}$. Tada $p_{n-1} \in S_{n-1}Th(\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$, pa je na osnovu indukcijske hipoteze p_{n-1} realizovan u $\mathbf{A}$ sa nekim $(a_1, \ldots, a_n)$. Neka je $p_1 = \{\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_{n-1}}, x) | \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in p_n\}$.

Tada $p_1 \in S_1Th(\mathbf{A}, y, a_1, \ldots, a_{n-1})_{y\in Y}$, pa je p_1 realizovan u $\mathbf{A}$ sa nekim a_n. Otuda $(a_1, \ldots, a_n)$ realizuje p_n. $\diamond$

Lema 71 *Neka je T prebrojiva kompletna teorija koja nema konačne modele. Tada T ima prebrojiv zasićen model akko je S_nT prebrojiv za svako n.*

Dokaz: Pretpostavimo da T ima prebrojiv zasićen model $\mathbf{A}$. Tada je, na osnovu prethodne leme, svaki $p \in S_nT$ realizovan u $\mathbf{A}$. Kako je $\mathbf{A}^n$ prebrojiv i S_nT je prebrojiv.

Pretpostavimo da je S_nT prebrojiv za svako n. Tada je i $S_nTh(\mathbf{B}, y)_{y\in Y}$ prebrojiv za svako n, svaki model $\mathbf{B}$ i svaki konačan $Y \subseteq B$. Neka je $\mathbf{B}$ prebrojiv model teorije T i $\{Y_i | i < \omega\}$ skup svih konačnih podskupova skupa B. Definišimo elementaran lanac $\{\mathbf{B}_i | i < \omega\}$ na sledeći način:

1. $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$

2. $\mathbf{B}_{i+1} \succ \mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_{i+1}$ je prebrojiv model koji realizuje svaki $p \in S_1Th(\mathbf{B}, y)_{y\in Y_1}$.

Neka je $\mathbf{C} = \bigcup\{\mathbf{B}_i | i < \omega\}$. Tada je $\mathbf{C} \succ \mathbf{B}$, svaki $p \in S_1Th(\mathbf{B}, y)_{y\in Y}$ je realizovan u $\mathbf{C}$ za svaki konačan $Y \subseteq B$. $\mathbf{C}$ je očigledno prebrojiv. Traženi zasićen model je limes elementarnog lanca $\{\mathbf{A}_i | i < \omega\}$ konstruisanog sa:

1. $\mathbf{A_0}$ je prebrojiv model teorije T.

2. $\mathbf{A}_{i+1} \succ \mathbf{A}_i$. Svaki $p \in S_1Th(\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$ je realizovan u $\mathbf{A}_{i+1}$ za svaki konačan $Y \subset A_i$. $\mathbf{A}_{i+1}$ je prebrojiv.$\diamond$

Neka je T prebrojiva teorija koja nema koja nema konačne modele. T je k-*stabilna* ako je $|S_1Th(\mathbf{A}, a)_{a\in A}| = k$ za svaki model $\mathbf{A}$ teorije T kardinalnosti k.

Lema 72 *Ako je T ω- stabilna onda je T k- stabilna za svako $k \ge \omega$.*

Teorema 82 *Pretpostavimo da je* $\mathbf{A}$ *beskonačan model i teorija* $Th\mathbf{A}$ ω *stabilna. Ako je* $\rho \leq |A|$ *regularan kardinal tada postoji* ρ*- zasićen* $\mathbf{B} \succ \mathbf{A}$ *iste kardinalnosti kao i* $\mathbf{A}$*.*

Dokaz: Definišimo elementaran lanac $\mathbf{B}_\delta | \delta \leq \rho$ na sledeći način:

1. $\mathbf{B_0} = \mathbf{A}$
2. $\mathbf{B}_{\delta+1}$ realizuje svaki $p \in Th\mathbf{B}_\delta$
3. $\mathbf{B}_\lambda = \bigcup\{\mathbf{B}_\delta | \delta < \lambda\}$ ako je λ granični ordinal.

Neka je $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\rho$. Na osnovu leme 41 i prethodne leme sledi da $\mathbf{B}_{\delta+1}$ može biti izabran tako da je $|\mathbf{B}_{\delta+1}| = |\mathbf{B}_\delta|$. Otuada je $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$. Kako je ρ regularan $\mathbf{B}$ je ρ- zasićen. $\diamond$

Posledica 26 *Ako je* T ω *-stabilna teorija i* k *regularan kardinal, onda* T *zasićen model kardinalnosti* k*.* $\diamond$

Teorema 83 *Neka je* $\mathbf{C}$ *zasićen model kardinalnosti* k*, gde je* k *regularan kardinal i* $|L_\mathbf{C}| \leq k$*. Tada za svaku konzistentnu teoriju* T*, takvu da je* $Th(\mathbf{C}) \subseteq T$*,* $||L_T|| \leq k$*, postoji ekspanzija* $\mathbf{C}^*$ *od* $\mathbf{C}$ *do jezika* L_T *koja je model teorije* T*.*

Dokaz: Pretpostavimo da je k regularan kardinal i $\mathbf{A}$ k^+-zasićen model teorije T i $\mathbf{B}$ redukcija modela $\mathbf{A}$ na jezik $L_\mathbf{C}$. Tada je i $\mathbf{B}$ k^+- zasićen jer je restrikcija k^+-zasićenog modela. Konstuisaćemo nizove modela:

$\mathbf{A}_0 \prec \mathbf{A}_1 \prec \ldots \mathbf{A}_s \prec \ldots \prec \mathbf{A}$

$\mathbf{B}_0 \prec \mathbf{B}_1 \prec \ldots \mathbf{B}_s \prec \ldots \prec \mathbf{B}$

takve da je $\mathbf{B}_s$ redukcija modela $\mathbf{A}_s$ na jezik $L_\mathbf{C}$, $|\mathbf{A}_s| = |\mathbf{B}_s| = k$, $\mathbf{B}_s \subseteq \mathbf{A}_{s+1}$ i za svako $s < k$ $\mathbf{B}_s$ je zasićen model.

Model $\mathbf{A}_0$ biramo tako da važi: $\mathbf{A}_0 \prec \mathbf{A}$ i $|\mathbf{A}_0| = k$. Ako je α granični ordinal, stavićemo $\mathbf{A}_\alpha = \bigcup_{s<\alpha} \mathbf{A}_s$ i $\mathbf{B}_\alpha = \bigcup_{s<\alpha} \mathbf{B}_s$.

Pretpostavimo da je model $\mathbf{A}_s$ konstuisan. Tada je redukcija $D_s = \mathbf{A}_s|_{L_\mathbf{C}}$ model teorije $Th(\mathbf{C})$ i otuda, sa obzirom da je $\mathbf{C}$ univerzalan, $\mathbf{A}_s|_{L_\mathbf{C}}$ možemo elementarno utopiti u $\mathbf{C}$. Tada, na osnovu teoreme 67, naredni dijagram može biti kompletiran.

B

f

Ds C

Neka je $\mathbf{B}_s = f(\mathbf{C})$. Tada je $\mathbf{B_s} \cong \mathbf{C}$, pa je $\mathbf{B_s}$ zasićen model.

Pretpostavimo sada da je $\mathbf{B_s}$ konstruisan. Neka je $\mathbf{A}_{s+1}$ takav da je $\mathbf{A}_s \prec \mathbf{A}_{s+1}$, $\mathbf{B}_{s+1} \subseteq \mathbf{A}_{s+1}$, i $|\mathbf{A}_{\sigma+1}| = k$. Ovakav model $\mathbf{A}_{\sigma+1}$ postoji na osnovu teoreme 50. Tada je $\mathbf{A}_{s+1}|_{L_\mathbf{C}} \prec \mathbf{B}$ pa je $\mathbf{B}_s \prec \mathbf{A}_{s+1}|_{L_\mathbf{C}}$ tj. $\mathbf{B}_s \prec \mathbf{A}_{s+1}$. Neka je $\mathbf{D} = \bigcup_{s<k} \mathbf{A}_s$. Tada važi:

1. $\mathbf{D}|_{L_\mathbf{C}}$ zasićen model teorije $Th(\mathbf{C})$,(jer je k regularan) pa je $\mathbf{D}|_{L_\mathbf{C}} \cong \mathbf{C}$.

2. $\mathbf{D}$ je model teorije T. $\diamond$

4.2 Zasićena polja bez uredjenja

Neka je $\mathbf{K} \models ACF$ i $\mathbf{F}$ podpolje polja K. Pokazaćemo da su n- tipovi nad sa paramertima iz F odredjeni prostim idealima u $F[x_1, \ldots, x_n]$. Za $p \in S_n Th(K,k)_{k\in F}$ neka je $I_p = \{f(\overline{x}) \in F[X_1, \ldots, X_n] | f(\overline{v}) = 0 \in p\}$.

Ako $f, g \in I_p$ onda $f + g \in I_p$. Takodje, za $f \in I_p$, $h \in F[\overline{X}]$, $fg \in I_p$. Otuda, I_p je ideal. Ako $f, g \in F[\overline{X}]$, onda

$\mathbf{K} \models \forall \overline{v} (f(\overline{v}) g(\overline{v}) = 0 \Rightarrow (f(\overline{v}) = 0 \vee g(\overline{v}) = 0))$

Otuda, ako $fg \in I_p$ onda $f \in I_p$ ili $g \in I_p$ pa je I_p prost ideal.

Pretpostavimo sada da je $J \subseteq F[\overline{X}]$ prost ideal . Tada na osnovu leme 3 postoji prost ideal $R \subseteq K[\overline{X}]$ takav da je $R \cap F[\overline{X}] = J$. Neka je $\mathbf{L}$ algebarsko zatvorenje polja $K[\overline{X}]/R$. Na osnovu modelske kompletnosti $\mathbf{L}$ je elementarna ekstenzija polja $\mathbf{K}$. Neka je $x_i = X_i/R$, za $i = 1, \ldots, n$. Za $f \in K[\overline{X}]$, $f(\overline{x}) = 0$ akko $f \in R$. Otuda, ako je $p = \{\varphi(v_1, \ldots, v_n) \in For_{L_F} | \mathbf{L} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n]\}$, onda je $I_p = J$. Dakle, $p \to I_p$ je surjektivno preslikavanje iz $S_n Th(K, k)_{k\in F}$ u $Spec(F[\overline{X}])$. Dokažimo da je ovo preslikavanje i injektivno. Pretpostavimo da $p, q \in S_n Th(K, k)_{k\in F}$ i $p \neq q$. Tada postoji formula $\varphi \in p$ takva da $\neg\varphi \in q$. Na osnovu eliminacije kvantora možemo pretpostaviti da je φ sledeća formula

$\bigvee_{i=1}^{m} [\bigwedge_{j=1}^{k} f_{i,j}(\overline{v}) = 0 \wedge \bigwedge_{l=1}^{s} g_{i,l}(\overline{v}) \neq 0]$

gde $f_{i,j}, g_{i,l} \in F[\overline{X}]$. Ako je $I_p = I_q$ onda

$f_{i,j}(\overline{v}) = 0 \in p$ akko $f_{i,j}(\overline{v}) = 0 \in q$ i

$g_{i,l}(\overline{v}) = 0 \in p$ akko $g_{i,l}(\overline{v}) = 0 \in q$

Dakle, $\varphi \in p$ akko $\varphi \in q$.

Lema 73 *Neka je* $\mathbf{K} \models ACF$ *i* $\mathbf{F}$ *podpolje polja* $\mathbf{K}$. *Tada je* $|S_n Th(K, k)_{k\in F}| = |F| + \aleph_0$.

Dokaz: Na osnovu prethodnog $|S_n Th(K, k)_{k\in F}| = |Spec(F)[\overline{X}]|$. Kako F polje, prsten $F[\overline{X}]$ je Neterin pa je svaki ideal konačno generisan. Otuda, postoji $|F| + \aleph_0$ prostih ideala. $\diamond$

Posledica 27 *Neka je p prost broj ili nula. Tada je* $|S_n(ACF_p)| = \aleph_0$, *pa na osnovu leme* 48 *postoji prebrojiv zasićen model teorije* ACF_p. $\diamond$

Posledica 28 *Na osnovu prethodne leme sledi da je teorija* ACF_p *gde je p prost broj ili nula,* ω*-stabilna, pa prema posledici* 21 *sledi da teorija* ACF_p *ima k-zasićen model za svaki regularan kardinal k.*

Teorema 84 *Neka je* $\mathbf{A}$ *algebarski zatvoreno polje.* $\mathbf{A}$ *je zasićen model akko ima beskonačan stepen transcedentnosti nad svojim osnovnim poljem.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{A}$ algebarski zatvoreno polje beskonačnog stepena transcedentnosti, i neka je $p \in S_1 Th(\mathbf{A}, y)_{y\in Y}$, gde je $|Y| < |A|$. Na osnovu leme 41, p je realizovan elementom b u modelu $\mathbf{B}$, gde je $\mathbf{B} \succ \mathbf{A}$. Ako je b algebarski nad Y onda $b \in A$. Pretpostavimo da je b transcedentan nad Y. Neka je $\mathbf{C}$ najmanje podpolje polja $\mathbf{A}$ koje sadrži Y. Izaberimo element $a \in A$ koji je transcedentan nad Y. Takav element postoji jer je $|Y| < |A|$ i $|A|$ je jednaka stepenu transcedentnosti polja $\mathbf{A}$. Neka je $\overline{\mathbf{C}}(a)$ algebarsko zatvorenje polja $\mathbf{C}(a)$. Neka je $h : \overline{C}(a) \to \mathbf{B}$ monomorfizam takav da je h identiteta na $\mathbf{C}$ i $h(a) = b$. Kako je teorija ACF modelski kompletna, h je elementaran pa a realizuje p u $\overline{C}(a)$. Kako je $\overline{C}(a) \prec \mathbf{A}$, a realizuje p u $\mathbf{A}$.

Posledica 29 *Svako neprebrojivo, algebarski zatvoreno polje je zasićeno.*

Primer 23 *Polje kompleksnih brojeva,* $\mathbf{C}$ *je zasićeno, dok polje* $\overline{Q}$ *nije zasićeno.*

Primer 24 *Neka je k neprebrojiv kardinal. Tada je na osnovu posledice* 24 *svako algebarski zatvoreno polje kardinalnosi k zasićeno. Ako je p prost broj ili nula onda je teorija* ACF_p *kompletna pa su svaka dva modela teorije* ACF_p *elemenratrno ekvivalentna. Otuda na osnovu teoreme* 67 *imamo da je teorija* ACF_p *k- kategorična.*

Lema 74 *Neka su* **A** *i* **B** *dva polja iste karakteristike. Tada postoji polje* **C** *tako da se* **A** *i* **B** *mogu utopiti u C.*

Dokaz: Neka su $\mathbf{A_1}$ i $\mathbf{B_1}$ algebarska zatvorenja polja **A** i **B** redom. Kako je teorija ACF kompletna $\mathbf{A_1} \equiv \mathbf{B_1}$. Na osnovu teoreme 44 postoji model polje **C** tako da se $\mathbf{A_1}$ i $\mathbf{B_1}$ elementarno utapaju u **C**.

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A_1 & & B_1 \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Lema 75 *(Amalgamacija polja) Neka su* **A**, **B**, *C polja iste karakteristike takva da se postoje utapanja $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ i $g : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$. Tada postoji polje D i utapanja $f_1 : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ i $g_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ tako da naredni dijagram komutira.*

$$
\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, "f_1"] & & C \arrow[ul, "g_1"'] \\
& A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Dokaz: Neka su $\overline{\mathbf{B}}$ i $\overline{\mathbf{C}}$ algebarska zatvorenja polja $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$. Tada su $i_{\mathbf{B}} \circ f : \mathbf{A} \to \overline{B}$ i $i_{\mathbf{C}} \circ g : \mathbf{A} \to \overline{C}$ utapanja polja $\mathbf{A}$ u $\overline{\mathbf{B}}$ i $\overline{\mathbf{C}}$ redom. Na osnovu teoreme 43 postoje ekspanzije $\mathbf{B}_1 = (\overline{\mathbf{B}}, b_a)_{a \in A}$ i $\mathbf{C}_1 = (\overline{\mathbf{C}}, c_a)_{a \in A}$ modela $\overline{\mathbf{B}}$ i $\overline{\mathbf{C}}$ takve da je $\mathbf{B}_1 \models \Delta_{\mathbf{A}}$ i $\mathbf{C}_1 \models \Delta_{\mathbf{A}}$. Kako je teorija algebarski zatvorenih polja podmodelski kompletna a pri tom važi $\mathbf{B}_1 \models ACF \cup \Delta_{\mathbf{A}}$ i $\mathbf{C}_1 \models ACF \cup \Delta_{\mathbf{A}}$ imamo da je $\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{C}_1$. Otuda, na osnovu teoreme 44 sledi pa postoji model $\mathbf{D}$ i utapanja $f_1 : \mathbf{B_1} \to \mathbf{D}$ i $g_1 : \mathbf{C_1} \to \mathbf{D}$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & D & & \\
 & f_1 & & g_1 & \\
B_1 & & & & C_1 \\
i_{\overline{\mathbf{B}}} & & & & i_{\overline{\mathbf{C}}} \\
\overline{B} & & & & \overline{C} \\
i_{\mathbf{B}} & & & & i_{\mathbf{C}} \\
B & & & & C \\
 & f & & g & \\
 & & A & &
\end{array}
$$

Primer 25 *Koristeći teoremu* 51 *možemo pokazati da je broj automorfizama iz* $\mathbf{C}$ *u* $\mathbf{C}$ *jednak* 2^c*.*

Dokaz: Neka je X transcedentna baza u $\mathbf{C}$. Na osnovu leme 20, $\mathbf{C}(H(X)) \prec \mathbf{C}$ pa je $\mathbf{C}(H(X))$ algebarski zatvoreno polje. Kako je $|\mathbf{C}(H(X))| = c$ na osnovu polsledice 25, sledi da je polje $|\mathbf{C}(H(X))|$ zasićeno. Dakle, $\mathbf{C}(H(X))$ i $\mathbf{C}$ su elementarno ekvivalentne, zasićene strukture iste kardinalnosti, pa na osnovu teoreme 67, $\mathbf{C}(H(X)) \cong \mathbf{C}$. Neka je $f : X \to X$ proizvoljan automorfizam. Na osnovu teoreme 51, f se može produžiti do nekog automorfizma iz $\mathbf{C}(H(X))$ u $\mathbf{C}(H(X))$. Sa obzirom da je broj automorfizama iz X u X jednak 2^c, $|\mathbf{C}(H(X))^{\mathbf{C}(H(X))}| = 2^c$, tj. $|\mathbf{C}^{\mathbf{C}}| = 2^c$. $\diamond$

4.3 Zasićena polja sa uredjenjem

Neka je $(A, \leq)$ gusto uredjene bez krajnjih tačaka. Ako su X, Y podskupovi skupa A kažemo da je $X < Y$ akko je $x < y$ za sve $x \in X$, $y \in Y$. Neka je α ordinal. Kažemo da je $(A, \leq)$ η_α *skup* akko je $(A, \leq)$ gusto uredjenje bez krajnjih tačaka i za sve $X < Y \subseteq A$ moći manje od ω_α važi: Ako je $X < Y$ onda postoji $z \in A$ takvo da je $X < z < Y$, pri čemu $z < X$ znači $\{z\} < X$.

Lema 76 *Neka je* $(A, \leq)$ *gusto uredjenje bez krajnjih tačaka i* α *ordinal. Tada je struktura* $(A, \leq)$ ω_α*- zasićena akko je* η_α*- skup.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbf{A} = (A, \leq)$ ω_α zasićen i da su X, Y podskupovi od A kardinalnosti manje od ω_α. Neka je $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}, x, y)_{x \in X, y \in Y}$ i c_x i c_y odgovarajući simboli konstanti. Tada $p = \{c_x < v | x \in X\} \cup \{v < c_y | y \in Y\} \in S_1 Th\mathbf{A}'$ i kako je $|X| < \omega_\alpha$ i $|Y| < \omega_\alpha$, p je zadovoljen u $\mathbf{A}'$nekim elementom $z \in A$. Tada je $X < z < Y$

Pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ η_α skup i A_0 podskup od A kardinalnosti manje od ω_α. Neka $p \in S_1 Th(A, a)_{a \in A_0}$. Ako formula $c_a = v$ pripada tipu p onda a zadovoljava p u $(A, a)_{a \in A_0}$. Pretpostavimo da za sve $a \in A_0$, $c_a \neq v$ pripada p. Tada postoje skupovi X i Y takvi da je $X \cup Y = A_0$ i sa obzirom na eliminaciju kvantora teorije DLO p je ekvivalentan sa $\{c_{a_1} < v | a_1 \in X\} \cup \{v < c_{a_2} | a_2 \in Y\}$. Kako je $\mathbf{A}$ η_α skup, postoji $a^* \in A$ tako da je $X < a^* < Y$. Tada a^* realizuje p.

Primer 26 *$(Q, \leq)$ je zasićen model teorije DLO.*

Lema 77 *Neka je $\mathbf{A} = (A, <)$ zasićen model teorije gustih uredjenja bez krajnjih tačaka regularne kardinalnosti. Tada postoji zasićen model $\mathbf{A}^*$ teorije RCF takav da je $\mathbf{A}^*$ ekspanzija modela $\mathbf{A}$.*

Dokaz: Na osnovu teoreme 70 postoji ekspanzija $\mathbf{A}^*$ od $\mathbf{A}$ koja je model teorije RCF. Treba još pokazati da je $\mathbf{A}^*$ zasićen model. Neka je YA proizvoljan skup i $p \in Th(\mathbf{A}^*, y)_{y \in Y}$. Tada, sa obzirom na eliminaciju kvantora u RCF razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Pretpostavimo da p sadrži formulu $f(x) = 0$. Tada, kako je $\mathbf{A}^*$ realno zatvoreno polje, f se može predtaviti kao proizvod linearnih faktora $(x - c_{a_i})$ i kvadratnih faktora čija je diskriminanta manja od nule. Tada je p realizovan sa nekim a_i.

2. Pretpostavimo da p ne sadrži formule oblika $f(x) = 0$. Tada možemo pretpostaviti da je svako formula iz p konjukcija atomočnih formula oblika $g(x) > 0$. Medjutim, polinom g možemo rastviti kao u 1, pa je $g(x) > 0$ ekvivalentno sa $\bigvee_{i=1}^m c_{a_i} < x < c_{b_i}$, za neke $a_i, b_i \in Y$. Kako je po pretpostavci $\mathbf{A} = (A, <)$ zasićena stuktura, svaki tip sa formulama na jeziku teorije gustih uredjenja sa parametrima iz Y je realizovan u $\mathbf{A}$ pa sasmim tim i u $\mathbf{A}*$.

Primer 27 *Polje realinih brojeva nije zasićeno.*

Dokaz: Neka je $X = \{\frac{1}{n} | n \in \omega\}$ i $p = \{v < \frac{1}{n} | n \in \omega\} \cup \{v > 0\}$. Tada $p \in S_1 Th(\mathbf{R}, x)_{x \in X}$ ali p nije realizovan u $\mathbf{R}$ jer bi svaka njegova realizacija bila infinitezimala.

4.4 Neke primene zasićenosti

Lema 78 *Neka je $\mathbf{M}$ zasićen model jezika L, $A \subset M$ i $|A| < |M|$. Pretpostavimo da je $X \subset M^n$ definabilan sa parametrima iz M. Tada je X definabilan sa parametrima iz A akko svaki automorfizam modela $\mathbf{M}$ koji fiksira A tačka po tačka fiksira skup X.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Neka je $\overline{a} \in A$, $X = \{\overline{b} \in M^n | \mathbf{M} \models \varphi[\overline{b}, \overline{a}]\}$ i σ automorfizam modela $\mathbf{M}$. Tada je

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \{\overline{c} \in M^n | \mathbf{M} \models \varphi[\sigma^{-1}(\overline{c}), \overline{a}]\} \\ &= \{\overline{c} \in M^n | \mathbf{M} \models \varphi[\overline{c}, \sigma(\overline{a})]\} \text{ jer je } \sigma \text{ automorfizam} \\ &= \{\overline{c} \in M^n | \mathbf{M} \models \varphi[\overline{c}, \overline{a}]\} \text{ jer je } \sigma(\overline{a}) = \overline{a} \\ &= X \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

Neka formula $\psi(\overline{v}, \overline{m})$ definiše X, gde $\overline{m} \in M^k$. Neka je

$\Gamma(\overline{v}, \overline{w}) = \{\psi(\overline{v}, \overline{m}), \psi(\overline{w}, \overline{m})\} \cup \{\varphi(\overline{v}) \Leftrightarrow \varphi(\overline{w}) | \varphi$ je formula na jeziku $L_{\mathbf{A}}\}$. Pretpostavimo da je $\Gamma \cup \{\varphi \in For_L | \mathbf{M} \models \varphi\}$ konzistentan. Kako je $Th(\mathbf{M}) \subset \{\varphi \in For_L | \mathbf{M} \models \varphi\}$, Γ je tip teorije $Th(\mathbf{M}$ pa kako je $\mathbf{M}$ zasićen, postoje postoji par $(\overline{a}, \overline{b})$ koji realizuje Γ u $\mathbf{M}$. Neka je f preslikavanje takvo da je $f(\overline{a}) = \overline{b}$ i $f|_A = id$. Tada je f, sa obzirom na izbor Γ elementarno. Kako je $\mathbf{M}$ zasićen model, $\mathbf{M}$ je i homogen pa se f može produžiti do automorfizma σ modela $\mathbf{M}$. Medjutim, $\mathbf{M} \models \psi(c_{\overline{a}}, \overline{m}) \wedge \neg\psi(c_{\overline{b}}, \overline{m})$, pa $\overline{a} \in X$ i $\sigma(\overline{a}) = \overline{b} \notin X$. Kontradikcija. Otuda, $\Gamma \cup \{\varphi \in For_L | \mathbf{M} \models \varphi\}$ je nekonzistentan, pa postoje formule $\varphi_1, \dots \varphi_m$ na jeziku $L_{\mathbf{A}}$, takve da

$\mathbf{M} \models \forall\overline{v}\forall\overline{w}(\bigwedge_{i=1}^{n}(\varphi_i(\overline{v}) \Leftrightarrow \varphi_i(\overline{w})) \Rightarrow (\psi(\overline{v}, \overline{m}) \Leftrightarrow \psi(\overline{w}, \overline{m})))$ (*)

Za $\tau : \{1, \dots, n\} \to 2$, neka je $\theta_\tau(\overline{v})$ sledeća formula

$\bigwedge_{\tau(i)=1} \varphi_i(\overline{v}) \wedge \bigwedge_{\tau(i)=0} \neg\varphi_i(\overline{v})$.

Ako važi $\theta_\tau(c_{\overline{a}})$ i $\theta_\tau(c_{\overline{b}})$, onda na osnovu (*), $\overline{a} \in X$ akko $\overline{b} \in X$. Neka je $S = \{\tau : \{1, \dots, m\} \to 2 | \mathbf{M} \models \theta_\tau(c_{\overline{a}})$ za neko $\overline{a} \in M^n\}$. Tada, $\overline{a} \in X$ akko $\mathbf{M} \models \bigvee_{\tau \in S} \theta_\tau[\overline{a}]$.

Otuda, X je definabilan sa parametrima iz A. $\diamond$

Kažemo da je $b \in M$ *definabilan iz* A ako je skup $\{b\}$ A-definabilan.

Posledica 30 *Neka je* $\mathbf{M}$ *zasićen model i* $A \subset M$ *takav da je* $|A| < |M|$. *Tada je* b *definabilan iz* A *akko za sve automorfizme* f *modela* $\mathbf{M}$ *takve da je* $f[A] = A$ *važi* $f(b) = b$.

Kažemo da je b *algebarski nad* A ako postoji konačan A- definabilan skup X takav da $b \in X$.

Ako je $\mathbf{M}$ model jezika L, $b \in M$ i $A \subset M$ neka je $tp^{\mathbf{M}}(b/A) = \{\varphi(x) \in For_{L_{\mathbf{A}}} | \mathbf{M} \models \varphi[b]\}$.

Lema 79 *Neka je* $\mathbf{M}$ *zasićen model,* $A \subset M$ *takav da je* $|A| < |M|$ *i* $b \in M$. *Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *b je algebarski nad A.*

2. *b ima konačno mnogo slika pri automorfizmima modela* $\mathbf{M}$ *koji fiksiraju A tačka po tačka.*

3. *$tp^{\mathbf{M}}(b/A)$ ima konačno mnogo realizacija.*

Dokaz: $1 \Rightarrow 2$: Neka je X konačan $A-$ definabilan skup takav da $b \in X$. Na osnovu prethodne leme svaki automorfizam modela $\mathbf{M}$ koji fiksira A tačka po tačka, permutuje elemente konačnog skupa X.

$2 \Rightarrow 3$: Ako c realizuje $tp^{\mathbf{M}}(b/A)$, tada, kako je $\mathbf{M}$ homogen, postoji automorfizam f modela $\mathbf{M}$ koji fiksira A tačka po tačka takav da je $f(b) = c$. Otuda, ako b ima konačno slika pri automorfizmima koji fiksiraju A, onda $tp^{\mathbf{M}}(b/A)$ ima konačno mnogo realizacija.

$3 \Rightarrow 1$: Pretpostavimo da $p = tp^{\mathbf{M}}(b/A)$ ima tačno n realizacija. Neka je

$\Gamma = Th(\mathbf{M}, a)_{a \in A} \cup \{\varphi(v_i) | \varphi \in p, i = 1 \ldots n\} \cup \{\bigwedge_{0 \leq i < j \leq n} v_i \neq v_j\}$

Kako p ima n realizacija i $\mathbf{M}$ je zasićen model, Γ nije zadovoljiv. Otuda postoje $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in p$ tako da

$\mathbf{M} \models (\bigwedge_{k=1}^{m} \bigwedge_{i=0}^{n} \varphi_k(v_i)) \Rightarrow \bigvee_{i \neq j} v_i = v_j$.

Skup $Y = \{c \in M | \mathbf{M} \models \bigwedge_{j=1}^{m} \varphi_j(c)\}$ je $A-$ definabilan kardinalnosti n i pri tom $b \in Y$. Otuda, je b algebarski nad A. $\diamond$

Pretpostavimo, do kraja da teorija T nema konačne modele.

Teorema 85 *Teorija T je modelski kompletna akko naredni dijagram može biti kompletiran.*

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{B}* & & \\ & g & & h & \\ \mathbf{B} & & & & \mathbf{C} \\ & & f & & \end{array}$$

pri čemu $\mathbf{B} \models T$, $\mathbf{B}* \models T$, $\mathbf{C} \models T$ i $\mathbf{B}^*$ je $|\mathbf{C}^+|-$ zasićen.

Dokaz: Pretpostavimo da je T model kompletna. Tada su f i g elementarna utapanja pa tvrdjenje sledi na osnovu Teoreme 69.

Pretpostavimo da dati dijagram možemo kompletirati. Tada i dijagram

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "///\ g"'] \arrow[dr, "h"] & \\
B \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}
$$

može biti kompletiran, jer na osnovu teoreme 68 postoji $|C|^+$ zasićena elementarna ektenzija modela **B**.

Otuda na osnovu teoreme 49 sledi da je T model kompletna. $\diamond$

Teorema 86 *Neka su T i T^* teorije istog jezika takve da je $T \subset T^*$, T je univerzalna i svaki model teorije T može biti proširen do modela T^*. Tada je T^* model kompletiranje teorije T akko sledeći dijagram može biti kompletiran.*

$\mathbf{B}*$

g

$\mathbf{B}$ $\mathbf{B}(\mathbf{c})$

pri čemu je $\mathbf{B}(c)$ prosta ekspanzija od $\mathbf{B}$, tj najmanja struktura čiji domen sadrži $B \cup \{c\}$, $\mathbf{B} \models T$ $\mathbf{B}* \models T*$ i $\mathbf{B}^*$ je $|B|^+$ zasićen.

Dokaz: Pretpostavimo da je T^* modelsko kompletiranje od T. Neka je $\mathbf{D}$ model teorije T^* koji proširuje $\mathbf{B}(c)$ i $p = \{\varphi(x) | (\mathbf{D}, b)_{b \in B} \models \varphi(\underline{c})\}$. Na osnovu teorema 55 i 56, teorija $T^* \cup \Delta_{\mathbf{B}}$ je kompletna i $p \in S_1(T^* \cup \Delta_{\mathbf{B}})$. Kako je $\mathbf{B}^*$ $|B|^+$-zasićen, p je realizovan u $\mathbf{B}^*$ sa nekim b^*. Neka je $g(c) = b^*$.

Pretpostavimo sada da dijagram možemo kompletirati na pokazan način. Pokazaćemo da tada možemo kompletirati i sledeći dijagram:

$$
\begin{tikzcd}
 & B* & \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & C \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

gde je: $\mathbf{B}, \mathbf{C} \models T$, $\mathbf{B}^* \models T^*$ i $\mathbf{B}^*$ je $|C|^+-$ zasićen.

Neka je $C \setminus f[B] = \{c_\delta | \delta < k\}$. Definišimo lanac $\{\mathbf{C}_\delta | \delta < k\}$ na sledeći način: $\mathbf{C}_0 = f[\mathbf{B}]$, $\mathbf{C}_{\delta+} = \mathbf{C}_\delta(c_\delta)$ i $\mathbf{C}_\lambda = \bigcup\{\mathbf{C}_\delta | \delta \ < \lambda\}$ kada je λ granični ordinal. Tada $h : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ definišemo primenjujući k puta svojstvo kompletiranja dijagrama.

Pokažimo sada da je T^* modelsko kompletiranje teorije T. Neka je $\mathbf{B}$ model za T, $\mathbf{C} \supset \mathbf{B}$ i $\mathbf{D} \supset \mathbf{B}$ modeli za T^*. Tada, na osnovu teoreme 68 postoji $|\mathbf{C}|^+$-zasićen $\mathbf{C}^* \succ \mathbf{C}$. Ako naredni dijagram (3) može biti kompletitan tada je na osnovu teoreme 55, $T^* \cup \Delta_{\mathbf{B}}$ kompletna teorija, pa je $(\mathbf{C}, b)_{b \in B} \equiv (\mathbf{D}, b)_{b \in B}$, odnosno T^* je model kompletiranje od T.

$C*$

$///$ $\qquad$ h

C $\qquad\qquad$ D $\qquad$ (3)

gde je h *elementarno*

B

Pokažimo da možemo kompletirati dijagram (3). Kako je $T \subset T^*$, $\mathbf{D}$ je model teorije T. Primenjujući kompletiranje dijagrama 2 na $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{C}^*$ dobijamo $h : \mathbf{D} \to \mathbf{C}^*$.

$$\begin{array}{ccc} & C* & \\ /// & & h \\ C & & D \\ & B & \end{array}$$

Na osnovu prethodne teoreme i dijagrama 2 sledi da je T^* model kompletna, pa je h elementarno. $\diamond$

Teorema 87 *Teorija realno zatvorenih polja je modelsko kompletiranje teorije uredjenih polja.*

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme, dovoljno je pokazati da naredni dijagram može biti kompletiran, pri čemu je $\mathbf{B}$ uredjeno polje, $\mathbf{B}(c)$ je prosta ekspanzija poja $\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}^*$ $|\mathbf{B}|^+$-zasićena , realno zatvorena ekspanzija od $\mathbf{B}$.

$B*$

B $B(c)$

Treba pronaći element $b^* \in B^*$ tako da je $\mathbf{B}(b^*)$ izomorfno sa $\mathbf{B}(c)$ nad $\mathbf{B}$. Ako je c algebarski nad $\mathbf{B}$, onda postoji takvo b^* jer je svaka uredjena algebarska ekstenzija sadržana u svakoj realno zatvorenoj ekstenziji od $\mathbf{B}$.

Pretpostavimo da je c transcedentan nad $\mathbf{B}$. Neka su B_1 i B_2 skupovi takvi da je $B = B_1 \cup B_2$ i $b_1 < c < b_2$ za sve $b_1 \in B_1$ i $b_2 \in B_2$. Neka se S sastoji iz sledeća dva skupa formula:

1. $c_{b_1} < x < c_{b_2}$ za sve $b_1 \in B_1$ i $b_2 \in B_2$
2. $f(x) \neq 0$ za svaki polinom $f(x)$ sa koeficijentima iz B različit od nula polinoma.

S je konzistentan sa teorijom $Th(\mathbf{B}^*, b)_{b \in B}$, jer svaki konačan podskup od S može biti zadovoljen u svakoj realno zatvorenoj ekstenziji od $\mathbf{B}$. Proširimo S do tipa $p \in S_1 Th(\mathbf{B}^*, b)_{b \in B}$. Kako je $\mathbf{B}^*$ $|\mathbf{B}|^+$- zasićen, p je realizovan u $\mathbf{B}^*$. Svaka realizacija tipa p može poslužiti kao b^*. $\diamond$

Posledica 31 *Teorija realno zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora.*

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme i teoreme 56. $\diamond$

Literatura

[1] David Marker. Model theory: An introduction

[2] D.Marker, M. Messmer, A.Pillary, Model Theory of Fields, Springer, 1996

[3] Gerald E. Saks, Saturated model theory, W.A.Benjamin,Inc, 1972

[4] Zarko Mijajlović, An introduction to model theory, Novi Sad, 1987

[5] C.C.Chang, H.J. Keisler, Model theory, Elsevier Science Publishers B.V

[6] Aleksandar Perović, Aleksandar Jovanović, Boban Veličković, Teorija Skupova, Matematički fakultet, Beograd

[7] Predrag Tanović, Teorija modela

Beleške sa kursa održanog u proleće 1995 godine na Matematičkom institutu

[8] Predrag Janičić, Matematička logika u računarstvu, Matematički fakultet, Beograd

[9] J.L.Bell, A.B.Slomson, Models and Ultraproducts, North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1971

[10] Greg Cherlin, Model Theoretic Algebra, Selected Topics, Springer, 1976

[11] M.D.Morley, Studies in model theory, The Matematical Association of America

[12] Serge Lang, Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, Inc

[13] Zarko Mijajlović, Predavanja iz algebre 2

[14] Gojko Kalajdžić, Algebra, Matematički fakultet

[15] M.F.Atiyan, I.G.Macdonald, Introduction to Commutative algebra, Addison-Wesley Publishing Company

[16] Lou van den Dries, Tame topology and O-minimal Structures, The Press Syndicate of the University of Cambrige

[17] Alan Baker, A concise introduction to the theory of numbers, Cambrige University Press

[18] Dirk van Dalen, Logic and Structure, Springer