MF 7011

РАДОЈЕ Д. ОБРАДОВИЋ
професор

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА III РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

На основу мишљења Главног просветног савета С. бр. 1489/39 од 16 марта 1940 год. одобрење Мин. просв. IV бр. 2802 од 27 маја 1940 год.

1940
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА
ТОМЕ ЈОВАНОВИЋА И ВУЈИЋА, БЕОГРАД
„ЗЕЛЕНИ ВЕНАЦ“

Б Е О Г Р А Д
За штампарију „ЗОРА“ Космајска 24. — Телефон бр. 29-9-20
Јосип Климпл, штампар, Боже Јанковића улица број 18.
1 9 4 0.

САДРЖАЈ

I ДЕО:

Облица и купа

II ДЕО:

Круг

III ДЕО:

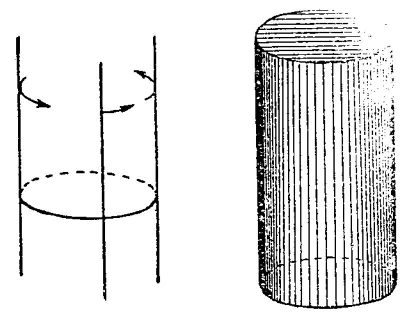
Једнакост и површине праволиниских слика

I ДЕО:

ОБЛИЦА И КУПА

1. ПОСТАНАК ОБЛИЦЕ

Ако замислимо да се једна права креће по обиму једног круга тако, да при том кретању остаје стално паралелна свом првобитном положају, она ће онда описати једну **облу** (или **ваљкасту, цилиндричну**) површину. Ту облу површину можемо пресећи двема паралелним равнима тако, да добијамо геометриско тело претстављено на сл. 1 или 2, које нам је познато под именом **облица (ваљак, цилиндар).**

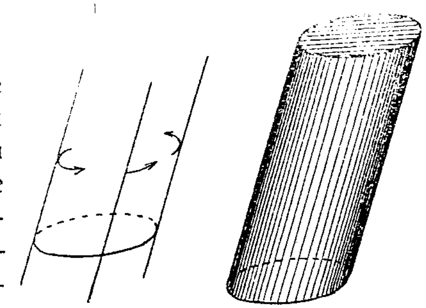


Сл. 1. — Постанак праве облице.

На сл. 1 покретна права нормална је на равни круга, око кога се креће, а на сл. 2 она је коса према том кругу. На први начин постаје **права** облица, на други-**коса**

Покретну праву називамо **изводницом**, јер она кретањем „изводи" поменуту површину, док кружну линију по којој се та права креће, називамо **водиљом.**

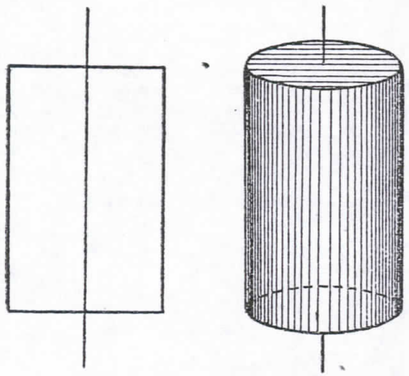
Облица је, дакле, геометриско тело ограничено са два паралелна круга (основе или базиси облице) и једном облом површином (омотач облице). Нормално отстојање равни основа претставља висину облице. Код праве облице висина је једнака изводници, код косе је она мања од изводнице.



Сл. 2. — Постанак косе облице.

Замишљена права која пролази кроз средишта основа назива се **осовином** облице. Осовина је увек паралелна изводници. Код праве облице осовина стоји нормално на основи.

Претпоставимо сада да се један правоугаоник обрће око једне своје симетрале. Тада ће обим правоугаоника описати целокупну површину праве облице, а симетрала правоугаоника биће осовина тако добијене облице (сл. 3).



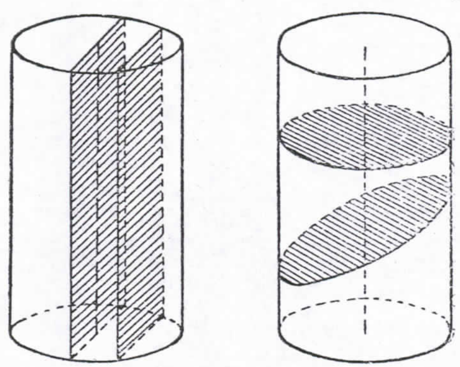
Сл. 3. — Права облица је обртно тело.

Тело које постаје обртањем неке слике око једне праве (осовине обртања) називамо **обртним телом**. Права облица је, према томе, обртно тело. Раније смо видели да лопта постаје обртањем круга око једног пречника, па је према томе и лопта обртно тело.

Облицу која постаје обртањем квадрата око симетрале страна називамо **равностраном**. Код равностране облице је, према томе, висина једнака пречнику основе.

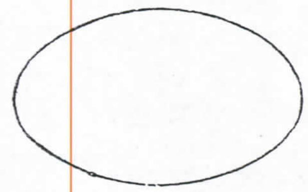
2. РАВНИ ПРЕСЕЦИ ОБЛИЦЕ

Пресецањем тела једном равни постаје слика, коју називамо **равним пресеком тела.** Тако, ако праву облицу сечемо једном равни која иде кроз осовину, добићемо као равни пресек правоугаоник. Овај пресек називамо **осовинским пресеком.** Код равностране облице осовински пресек је квадрат. И сваки други равни пресек праве облице, паралелан са осовином, јесте правоугаоник (или квадрат). (сл. 4, I).



Сл. 4. — Равни пресеци облице.

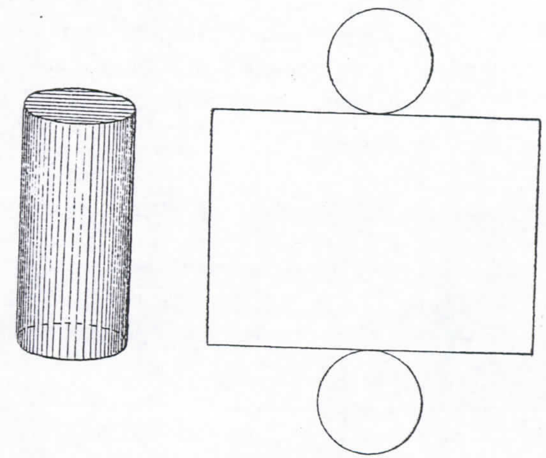
Ако праву облицу сечемо једном равни која је паралелна основи, добићемо као равни пресек круг, а ако је раван пресека коса према основи, равни пресек биће елипса (сл. 4, II). Елипсу смо поменули у геометрији за I разред међу затвореним кривим линијама (Земљина путања око Сунца), а претстављена је на сл. 5



Сл. 5. — Елипса.

3. МРЕЖА ПРАВЕ ОБЛИЦЕ

Видели смо раније да се мреже коцке и квадра могу добити кад се њихове граничне површине „распрostру“ у једну раван. На исти начин добијамо и мрежу облице. Кад обличин омотач (или боље његов модел) расечемо по једној изводници па га развијемо, добићемо правоугаоник. Тако сазнајемо да се мрежа облице састоји из једног правоугаоника и два једнака круга (сл. 6). Тај правоугаоник (развијен омотач) има за основицу обим круга, а за висину висину облице.



Сл. 6. — Права облица и њена мрежа.

Да бисмо направили модел облице, морамо знати да начинимо њ е н у мрежу. Треба од картона исећи два једнака круга, и концем измерити обим једнога од њих. Дужина тог обима биће основица правоугаоника, односно развијеног омотача. За висину тога правоугаоника узимамо дуж колику хоћемо. Савијањем тако добијеног правоугаоника и лепљењем кругова добијамо модел праве облице.

Вежбања

1) Како постаје облица?
2) Шта је „изводница“ а шта „водиља“ при постанку облице кретањем?
3) Коју праву називамо осовином облице?
4) Шта је права а шта коса облица?
5) Шта разумемо под висином облице?
6) Кад кажемо за неко тело да је обртно?
7) Је ли права облица обртно тело? А коса? Зашто?
8) Коју облицу називамо равностраном?
9) Који су равни пресеци облице?
10) Нацртај слободном руком све равне пресеке облице.
11) Код које облице је осовински пресек квадрат?
12) Ако је развијен омотач једне облице квадрат, је ли она равнострана?
13) Може ли бити равни пресек неке облице квадрат, иако она није равнострана?
14) Из чега се састоји мрежа праве облице?
15) Начини од картона модел праве облице, висине 5 cm, кад је полупречник основе 2 cm.
16) Направи од картона модел равностране облице, чија је висина 6 cm.

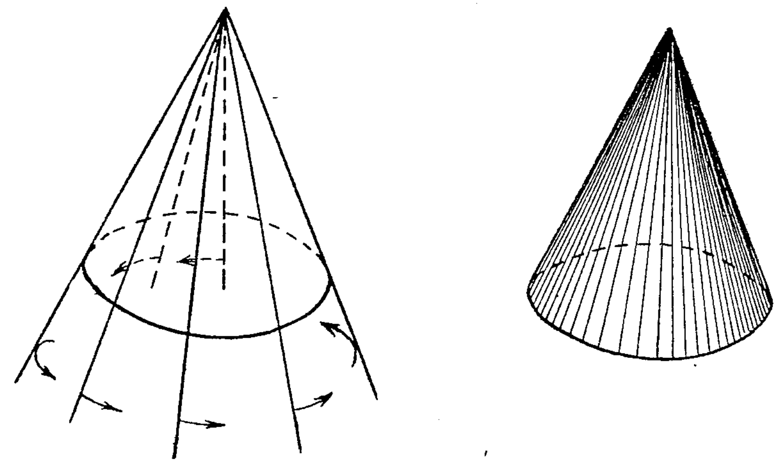
4. ПОСТАНАК КУПЕ

Ако замислимо да се један зрак креће по обиму једног круга, тако да његова почетна тачка и круг остају за све време кретања у миру, онда ћемо добити тело које се зове **купа (конус)**. Купа је дакле обло тело, ограничено једним кругом и једном облом површином која се зове **купаста (конусна)** површина. Тај круг је **основа** купе, а конусна површина **омотач** купе. Непомична тачка зрака је **врх** купе. **Висина** купе је раздаљина њеног врха од основе.

Зрак који својим кретањем изводи купасту површину зове се **изводница,** док је кружна линија — зато што га води — **водиља.**

Приметимо сада да је непомична тачка изводнице имала

такав положај да нормала, спуштена из ње на круг, пада тачно у центар круга. Тако добијена купа назива се **права купа** (сл. 7). Ако та непомична тачка изводнице има ма који

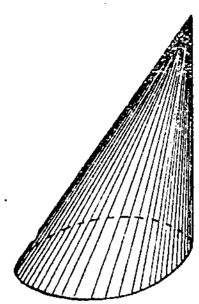


Сл. 7. — Постанак праве купе.

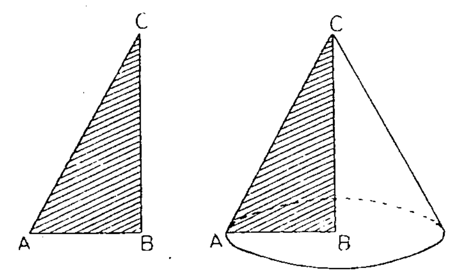
други положај, зрак не би описао праву већ **косу купу.** На слици 8 претстављена је једна коса купа. Косе купе нећемо узимати у проучавање, и под речју купа разумевађемо увек праву купу.

Права која пролази кроз врх купе и центар њене основе назива се **осовином** купе. Код праве купе висина има правац осовине.

И права купа је, као и права облица, обртно тело. Ми можемо, наиме, замислити да купа постаје обртањем правоуглог



Сл. 8. — Коса купа.



Сл. 9. — Права купа је обртно тело.

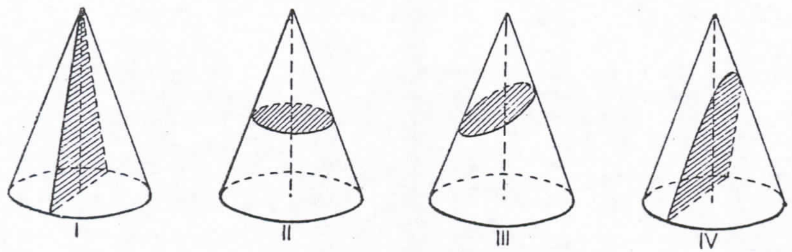
троугла (троугао ABC на слици 9) око једне катете (BC). Та катета — осовина обртања — је онда висина купе, док је друга катета полупречник основе, а хипотенуза је изводница конусне површине.

Ако је код обртног троугла хипотенуза AC два пута већа од катете AB, онда добијамо купу која се зове **равнострана.** Код равностране купе је, дакле, изводница једнака пречнику основе.

5. РАВНИ ПРЕСЕЦИ КУПЕ

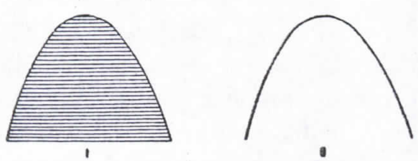
Ако једним жилетом (који нам претставља раван) сечемо модел купе (направљен од материјала који се може сећи, на пр. од кита), утврдићемо лако да равни пресеци купе могу бити:

1) **Равнокраки троугао**, који настаје кад раван пресека пролази кроз осовину (сл. 10, I). Тај пресек називамо **осовинским пресеком.** Код равностране купе осовински пресек је равнострани троугао. —2) **Круг,** кад раван сече



Сл. 10. — Равни пресеци купе: I осовински, II нормалан на осовини, III кос према осовини, IV паралелан са изводницом.

купу паралелно са основом (сл. 10, II) — 3) **Елипса,** која постаје кад раван сече све изводнице а стоји косо према основи (сл. 10, III). — 4) Ако купу сечемо једном равни тако да ова остаје паралелна изводници (сл. 10, IV), онда добијамо као пресек слику претстављену на сл. 11, I. Тај пресек ограничен је тетивом круга и једном отвореном кривом линијом, која се зове **парабола** (сл. 11, II). Ова крива има значаја у физици,



Сл. 11. — Параболични пресек купе (I) и парабола (II).

јер се тело бачено косо у безваздушном простору („коси хитац“) креће путањом која има облик параболе.

Вежбања

1) Како постаје купа?
2) Које линије називамо изводницом и водиљом при постанку купе кретањем?
3) Шта разумемо под висином купе?
4) Коју праву називамо осовином купе?
5) Шта је права а шта коса купа?
6) Која је купа обртно тело? Зашто?
7) Шта је равнострана купа?
8) Који су равни пресеци купе?
9) Нацртаі слободном руком све равне пресеке купе.
10) Шта је осовински пресек равностране купе?
11) Кад добијамо параболични пресек купе?
12) Зашто је парабола значајна линија?

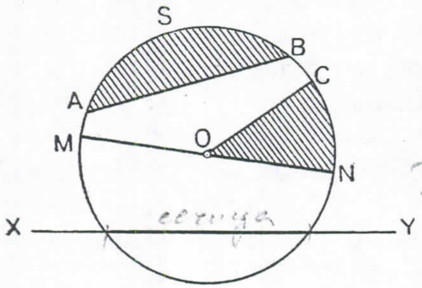
II ДЕО: КРУГ

- давао - Ђора -
7/VIII/1946

1. КРУГ И ЊЕГОВИ ДЕЛОВИ

Из ранијег градива знамо да је круг криволиниска равна геометриска слика, која има ту особину да је свака тачка на његовом обиму (периферији) једнако удаљена од једне његове тачке у унутрашњости (средиште, центар круга). Даље смо научили да се даљина ма које тачке на периферији од центра круга зове полупречник (на пр. $\overline{OC}$ на слици, 12), да се дуж која спаја две тачке на периферији зове тетива ($\overline{AB}$ на слици 12), и да је тетива која пролази кроз центар два пута већа од полупречника и зове се пречник ($\overline{MN}$ на слици 12). Опште познато име за полупречник је **радиус** (обично се обележава са r), а за пречник **дијаметар.** Познато нам је да се у кругу може повући (замислити) безбројно много полупречника, тетива и пречника.

Сада ћемо ово знање о кругу допунити. Права која сече круг, тј. која с његовом периферијом има две заједничке тачке (XY на слици 12) је **сечица** круга. У ствари тетива је део сечице. Део кружне површине који отсеца сечица, или који је ограничен тетивом и захваћеним луком, зове се **кружни отсечак** или **сегмент** (на слици 12 површина отсечка исцртана је изнад тетиве AB). Свака сечица дели круг на два сегмента, који могу бити и једнаки, у ком случају се зову **полукругови.** Кад ти сегменти нису једнаки, обично се подразумева мањи од њих.



Сл. 12. — Круг и његови делови.

Део кружне површине ограничен са два полупречника и захваћеним луком, као што је исцртани део CON на слици 12, зове се **кружни исечак** или **сектор.** Кружни сектор може бити једнак половини круга **полукруг,** четвртини круга—**квадрант,** шестини круга—**секстант,** осмини круга—**октант,** итд.

Из тачке A до тачке B (сл. 12) може се стићи по кружној линији идући у два смера: по једном смеру прелази се већи, а по другом мањи лук. Ако желимо да означимо рецимо мањи лук између тачака A и B, ми обележавамо негде на томе луку једну тачку, као што је тачка S на слици, па тај лук читамо овако: лук ASB или $\overset{\frown}{ASB}$ (лук ASB). Ако, пак, нема сумње који је то лук, можемо га читати овако: лук AB или $\overset{\frown}{AB}$, за разлику од тетиве AB или $\overline{AB}$.

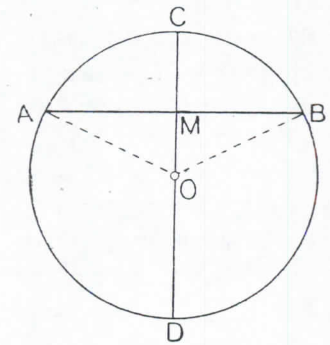
2. О ТЕТИВАМА КРУГА

Посматрајмо једну такву тетиву која стоји нормално на пречнику. На слици 13 је $AB \perp CD$. Мерењем можемо утврдити да је та тетива у исто време и преполовљена пречником, тј. да је пречник симетрала тетиве. Али уместо мерења, то се може показати и подударношћу троуглова OAM и OBM (на слици 13 види се како су они добијени). Доиста је:

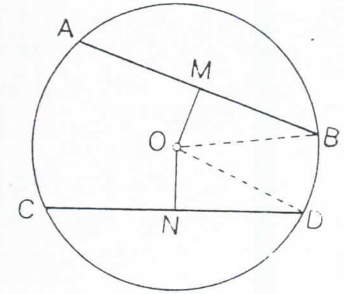
$$OA = OB \; (= r)$$
$$OM = OM \text{ и}$$
$$\underline{\sphericalangle OMA = \sphericalangle OMB \; (= 90^0)}$$
$$\triangle OMA \cong \triangle OMB$$

Пошто су код подударних троуглова одговарајући елементи једнаки, то је и AM = MB. Дакле **пречник је симетрала свакој тетиви коју сече нормално.**

Удаљење (отстојање) тетиве од центра круга добијамо ако из центра повучемо нормалу до тетиве. Посматрајмо сада две једнаке тетиве AB и CD на слици 14, и испитајмо каква су међу собом њихова централна отстојања, OM и ON на истој слици. Ако центар O спојимо с тачкама B и D, добијамо два подударна троугла, јер је:



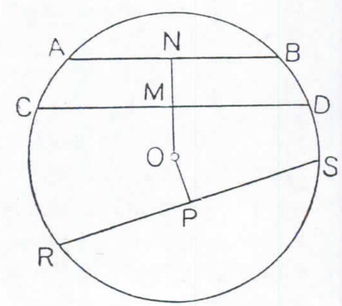
Сл. 13. — Пречник нормалан на тетиви симетрала је тој тетиви.



Сл. 14. — Једнаке тетиве (AB и CD) и њихова једнака централна отстојања (OM и ON).

$$OB = OD \text{ (као полупречници)}$$
$$MB = ND \text{ (половине једнаких тетива)}$$
$$\underline{\sphericalangle OMB = \sphericalangle OND} \text{ (прави углови)}$$

Дакле: $\triangle OMB \cong \triangle OND$. Из те подударности излази да је OM = ON. Како ово можемо показати за ма које две једнаке тетиве у кругу, то закључујемо уопште да **једнаке тетиве имају једнака централна отстојања.**



Сл. 15. — Неједнаке тетиве и њихова централна отстојања.

Испитајмо још каква централна отстојања имају неједнаке тетиве. На слици 15 нацртане су две неједнаке и паралелне тетиве, AB и CD, као и њихова централна удаљења, OM и ON.

Из слике је очигледно да већа тетива има мање, а мања тетива веће централно отстојање. Ако две неједнаке тетиве нису паралелне, као што су AB и RS на истој слици, ми се можемо мерењем уверити да је ON > OP. Можемо, дакле, уопште закључити да **већа тетива има мање, а мања тетива веће централно отстојање.**

Вежбања

1) Нацртај шестаром круг и у њему пречник, полупречник, тетиву, сечицу, кружни исечак и кружни отсечак, и сваки од ових делова опиши својим речима.

2) Нацртај шестаром круг и, помоћу пречника, подели га на осам једнаких делова.

3) Шта је квадрант, секстант, октант?

4) Шта подразумевамо под централним отстојањем тетиве?

5) Који односи постоје између тетива и њихових централних отстојања?

6) У једном кругу повучене су три тетиве, чије су дужине 4 cm, 5 cm и 8 cm. Која има највеће а која најмање централно отстојање?

7) Нацртај једну тетиву у кругу и конструкцијом нађи њено централно отстојање.

8) Нацртај две паралелне тетиве у кругу и нађи отстојање између њих.

9) Опиши круг и нацртај у њему једну тетиву. Нацртај, затим, тетиву која ће бити на два пута мањем (већем) отстојању од центра. Колико таквих тетива можеш повући?

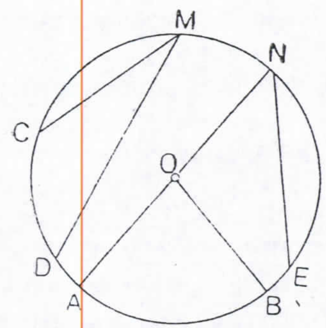
10) Кроз једну тачку у кругу повуци највећу и најмању тетиву.

11) У једном кругу чији је полупречник 4 cm, обележи једну тачку на растојању 3 cm од центра. Како ћеш повући тетиву која ће том тачком бити преполовљена?

3. ЦЕНТРАЛНИ И ПЕРИФЕРИСКИ УГЛОВИ У КРУГУ

Угао чије се теме налази у центру круга а краци су му полупречници (или боље: имају правце полупречника) назива се **централни** или **средишњи** угао. На слици 16

централни угао је ∢ AOB. Ако се пак теме угла налази на периферији круга, а краци су му тетиве (или боље: имају правце тетива), онда се назива **периферискн** или **уписани** угао. На слици је периферискн угао CMD. Како се и пречник може сматрати као тетива, то периферискн угао може имати као један крак и пречник. Такав је угао ANE.



Сл. 16 — Централни и периферискн углови.

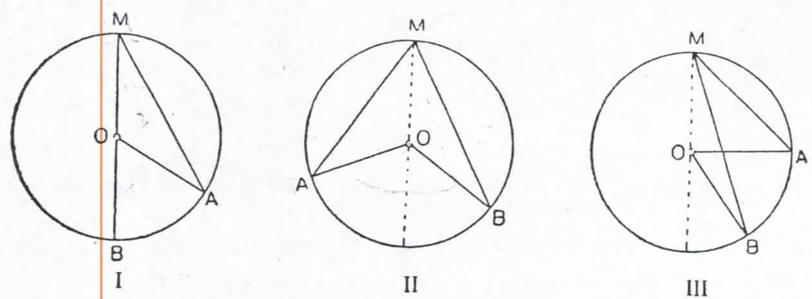
Сваком перифериском и централном углу припада (одговара) известан лук. На пример углу AOB припада лук AB ($\overset{\frown}{AB}$), углу CMD припада $\overset{\frown}{CD}$, итд. Ми кажемо још да углови „захватају" те лукове, односно да се они налазе „над" тим луковима.

Врло се лако увиђа да се над једним луком може нацртати безбројно много перифериских углова, а само један централни угао.

Лукове круга можемо упоређивати (мерити) шестаром. Ми их, уствари, меримо помоћу тетива, а на основу следећег правила које лако доказујемо поклапањем: **у једном кругу (или у подударним круговима) једнаким тетивама припадају и једнаки лукови.**

Мерењем лукова једнаких централних углова, односно једнаких перифериских углова, лако утврђујемо, да **у истом кругу (или у једнаким круговима) једнаки централни углови захватају једнаке лукове,** а исто тако и **једнаки периферискн углови захватају једнаке лукове.**

Посматрајмо сад један централни и један периферискн



Сл. 17. — Централни и периферискн углови над истим луком.

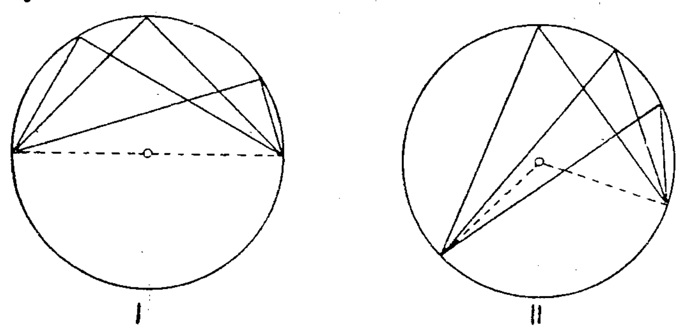
угао над истим луком. На сл. 17 у сва три случаја периферски је $\sphericalangle$ AMB, а централни над истим луком $\sphericalangle$ AOB. Ако ове углове меримо било којим од познатих начина, уверићемо се да је централни угао два пута већи од периферског, с којим захвата исти лук.

До овог закључка можемо доћи и оваквим расматрањем. На сл. 17, I централни угао AOB, као спољашњи угао при врху равнокраког троугла AOM, два пута је већи од угла AMB, пошто је овај на основици тога истог троугла. Дакле $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle AMB$.

На сл. 17, II треба прво повући пречник из тачке M. Тај пречник дели оба угла на делове који се међу собом односе као и углови у првом случају. Што важи за сабирке, важиће и за збир, па је и овде $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle AMB$.

Најзад, на сл. 17, III треба повући пречник из тачке M. Овај пречник тако допуњује дати периферски и централни угао да се они могу посматрати као у првом случају. Одузимањем се добија и овде да је $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle AMB$.

Ма који периферски и централни угао над истим луком могу се увек подвести под један од ова три случаја. Ако се сад сетимо да једнаким периферским угловима одговарају и једнаки лукови (а исто тако и централним), онда можемо овако закључити: **централни угао два пута је већи од периферског, с којим захвата исти или једнак лук.**



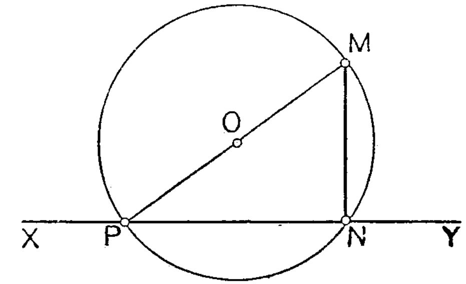
Сл. 18. — I, углови над полукругом су прави, II периферски углови над истим луком једнаки су.

Из овог правила следује као последица: 1) **да је сваки периферски угао над полукругом прави** (90^0) и 2) **да**

су периферски углови над истим луком једнаки. Објасни зашто! (Види сл. 18, I и II).

Треба добро запамтити, да је сваки периферски угао над полукругом прави, јер се то често примењује у задацима. Ми ћемо овде показати једну конструкцију где ће бити примењено то правило.

Задатак: Из тачке ван праве повући нормалу на праву. — Нека је на сл. 19 дата права XY и тачка ван ње M. Треба ма где на правој узети једну тачку, на пример тачку P, спојити је с тачком M, и над дужи MP, као над пречником описати круг. Тај круг ће сећи дату праву и у тачки N, па је MN тражена нормала. Зашто?



Сл. 19. — Конструкција нормале MN из дате тачке M на дату праву XY.

Вежбања

1) Који угао називамо централним, а који периферским углом круга?

2) Који однос постоји између централних и периферских углова и када?

3) Кад је периферски угао прави?

4) Може ли периферски угао бити тупи? Покажи то на слици.

5) Какви су међу собом периферски углови над истим луком? Зашто?

6) Колики је периферски угао над квадрантом, секстантом, октантом круга?

7) У кругу је уписан равнострани троугао, па су му темена спојена с центром круга. Колики су централни углови који на тај начин постају?

8) Исто питање као под 7) за уписани квадрат и правилни шестоугао у кругу.

9) Ако је један периферски угао а) 67^0, б) $49^0\ 28'$ в) $52^0, 38'\ 54''$, колики је централни угао над истим луком?

10) Ако је један централни угао а) 58^0, б) $39^0\ 25'$, в) $127^0\ 13'\ 20''$, колики је периферски над истим луком?

11) Један централни угао има 60^0. Колики је а) централни

над два пута већим луком, б) перифериски над два пута већим луком?

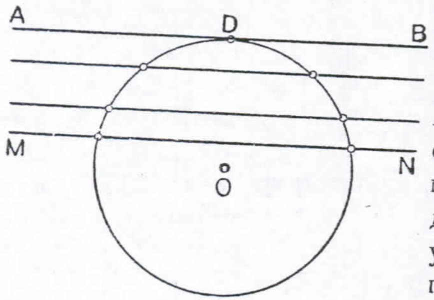
12) Нацртај неколико правоуглих троуглова над истом хипотенузом. Како ћеш то најлакше и најтачније учинити?

13) Нацртај праву и једну тачку ван ње. Из те тачке повуци нормалу на праву на два начина, оба конструктивна.

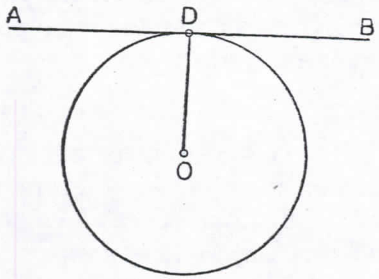
14) Три перифериска угла нацртана су над луком коме припада централни угао од $45^0\ 45'\ 46''$. Колики је збир та три перифериска угла?

4. ТАНГЕНТА КРУГА

Посматрајмо сечицу MN круга O на сл. 20. Ако ту сечицу померамо од центра, тако да она при том померању стално остаје паралелна своме првобитном положају, тачке пресека те сечице и кружног обима приближаваће се једна другој. Таквим померањем покретна сечица доћи ће најзад у положај у коме ће се ове тачке пресека поклопити. На сл. 20 то је положај AB, а поменута тачка D.



Сл. 20 — Паралелне сечице и тангента (AB) круга.



Сл. 21. — Тангента је нормална на додирном полупречнику.

Ова права има, дакле, с кругом само једну заједничку тачку (D), па кажемо да она додирује круг у тој тачки. Зато се та тачка зове **додирна тачка,** а поменута права — **дирка** или **тангента круга.**

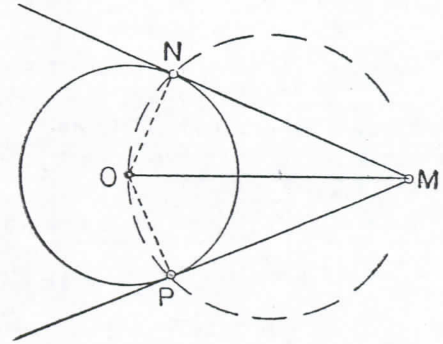
Полупречник који спаја центар круга с додирном тачком, назива се **додирни полупречник.** Мерењем се уверавамо да **додирни полупречник стоји на тангенти нормално.** Тако је на сл. 21: $OD \perp AB$.

5. КОНСТРУКЦИЈА ТАНГЕНАТА КРУГА

Ако је задано да се у одређеној тачки на кружној периферији конструише тангента, треба повући додирни полупречник, и кроз додирну тачку конструисати праву која ће бити нормална на том полупречнику. Та права је тангента круга.

Видећемо сада како се из тачке ван круга може повући тангента на круг. Нека је дата тачка M ван круга, чији је центар O (сл. 22).

Ту тачку треба спојити с центром, и око добијене дужи OM, као око пречника, описати помоћни круг (на слици извучен цртицама). Пресеци тога круга са датим јесу додирне тачке N и P, које још треба спојити са тачком M, па добијамо тангенте MN и MP.



Сл. 22. — Конструкција тангенте из тачке (M) ван круга.

Да су овом конструкцијом добијене праве заиста тангенте датог круга, довољно је показати да оне стоје нормално на додирним полупречницима. Зато повуцимо те полупречнике, ON и OP. Као што се из слике види, $\sphericalangle MNO = 90^0$, а исто тако и $\sphericalangle MPO = 90^0$, јер су то перифериски углови над полукругом помоћног круга.

Посматрајмо сада на истој слици троугле MNO и MPO. Код њих налазимо:

$$ON = OP\ (= r)$$
$$OM = OM \text{ и}$$
$$\underline{\sphericalangle ONM = \sphericalangle OPM\ (= 90^0)}$$
$$\text{па је } \triangle OMN \cong \triangle OMP$$

Како су код подударних троуглова одговарајући елементи једнаки, то је и

$$MN = MP$$

Зато кажемо: ако из једне тачке ван круга повучемо тангенте на круг, њихови делови до додирних тачака једнаки су.

Вежбања

1) Коју праву називамо дирком или тангентом круга?

2) Како замишљамо да постаје тангента кретањем сечице?

3) Шта је додирна тачка, додирни полупречник?

4) Како додирни полупречник стоји на тангенти?

5) Шта знаш да кажеш за тангенте повучене из тачке ван круга на круг?

6) Нацртај круг и у једној тачки на његовом обиму конструиши тангенту.

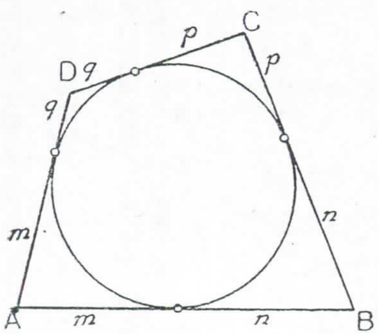
7) На обиму једног круга изабери три тачке и у свакој конструиши тангенту. Шта примећујеш (ако их довољно продужиш)?

8) Повуци једну праву и на њој обележи једну тачку. Опиши више кругова разних полупречника, који ће додиривати ту праву у обележеној тачци. Где леже центри тих кругова?

9) Из једне тачке ван круга повуци тангенте на круг.

6. ТАНГЕНТНИ И ТЕТИВНИ ЧЕТВОРОУГАО

Четвороугао у који се може уписати круг, тако да му стране постану тангенте тога круга, зове се **тангентни** или **додирни** четвороугао. Такав је четвороугао ABCD на слици 23. Ако темена тога четвороугла посматрамо као тачке из којих су повучене тангенте на круг, онда су, као што смо видели, делови тих тангената до додирних тачака једнаки међу собом. Зато су на слици једнаки делови означени истим словима. Саберимо сада две и две наспрамне стране тог четвороугла, па ће бити:



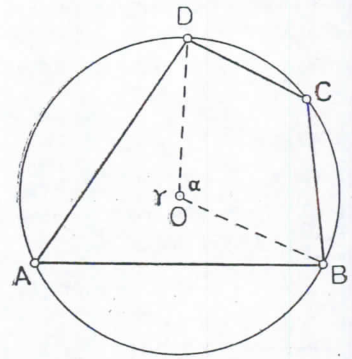
Сл. 23. — Тангентни четвороугао.

$$AB + CD = m + n + p + q$$
$$AD + BC = m + q + p + n$$

Ови су збирови једнаки, јер имају исте сабирке, (само што нису истим редом поређани), па закључујемо: **код тангентног чвтвороугла збирови супротних страна једнаки су.**

По овој особини можемо познати да ли је један четвороугао тангентан, тј. да ли се у њега може уписати круг. На пример, ромбоид није тангентни четвороугао, јер му збирови наспрамних страна нису једнаки. Трапез је тангентан, ако испуњава горњи услов, иначе није, итд.

Као што се у сваки четвороугао не може уписати круг, тако се ни око сваког четвороугла не може описати круг (упореди са троуглима). Сваки четвороугао око кога се може описати круг, тј. чије су стране тетиве једног круга, зове се **тетивни.** Такав је на пр. четвороугао ABCD на слици 24, чија сва темена леже на периферији једног круга. Да бисмо видели који услов мора испуњавати четвороугао да би био тетиван, посматрајмо периферијске углове A и C. Њима одговарају централни углови α и γ. Сабирањем добијамо



Сл. 24. — Тетивни четвороугао.

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{360^0}{2} = 180^0$$

Пошто се и за друга два угла то исто може доказати, закључујемо: **код тетивног четвороугла наспрамни углови су суплементни.**

Вежбања

1) Може ли се око сваког четвороугла описати и у сваки четвороугао уписати круг?

2) Који услов мора испуњавати четвороугао да би био а) тетиван, б) тангентан?

3) Око којих се паралелограма може описати круг? Зашто?

4) Који су паралелограми тангентни четвороуглови? Зашто?

5) Може ли трапез бити тангентни, односно тетивни четвороугао? Кад?

6) Може ли се око делтоида описати и у њега уписати круг? По чему се то закључује?

7) Именуј четвороугле који су у исто време и тетивни и тангентни.

8) Три угла једног четвороугла јесу редом: $\alpha = 106^0$, $\beta = 49^0$, $\gamma = 74^0$. Је ли то тетивни четвороугао? Зашто? Колики му је четврти угао?

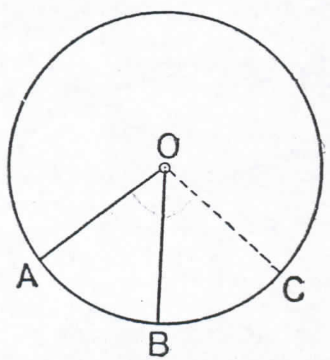
9) Код једног тангентног четвороугла једна страна је 9,5 cm, једна суседна страна је 12,8 cm, а друга суседна страна 7,8 cm. Колика је четврта страна?

10) Два угла на истој страни једног тетивног четвороугла су: $\alpha = 47^0\ 37'27''$ и $\beta = 100^0\ 56''$. Колика су друга два?

11) Нацртај круг, упиши један четвороугао и спој дужима његова темена с центром круга. Тако добијаш четири централна угла, од којих три нека су: 45^0, 85^0, 109^0. Израчунај углове тога тетивног четвороугла.

7. ОДНОС ИЗМЕЂУ ЦЕНТРАЛНОГ УГЛА И ОДГОВАРАЈУЋЕГ ЛУКА

Видели смо да једнаким централним угловима у једном кругу (или у подударним круговима) одговарају једнаки лукови. Ово правило објашњава нам „преношење“ углова и конструктивне радње с угловима, које смо проучавали у геометрији за други разред. Увећајмо сада централни угао AOB два пута (сл. 25), па ћемо добити $\measuredangle$ AOC. Мерењем (шестаром) налазимо да је и $\widehat{AC} = 2 \cdot \widehat{AB}$. Ако исти угао увећамо 3, 4, 5 итд. пута (или га толико пута смањимо), увидећемо на исти начин да се и одговарајући лук 3, 4, 5 итд. пута увећао (односно толико пута смањио.) За две врсте количина које на тај начин зависе једна од друге кажемо да су у **правом односу** (сетимо се правила тројног из другог разреда!). Морамо, дакле, запамтити да **централни углови и одговарајући лукови стоје у правом односу.**



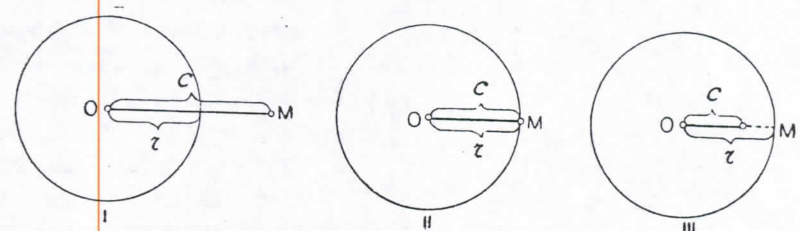
Сл. 25. — Централни углови и одговарајући лукови стоје у правом односу.

На основу овог правила, ако су нам позната два централна угла и један од припадајућих лукова, можемо помоћу простог правила тројног израчунати други. На пример, ако у једном кругу цунтралном углу од 60^0 одговара лук од 15 cm, колики ће лук припадати централном углу од 36^0? По правилу тројном биће:

Углу од 60^0 одговара лук од 15 cm,
„ „ 1^0 „ „ „ $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ cm,
„ „ 36^0 „ „ „ $\frac{1}{4} \cdot 36 = 9$ cm.

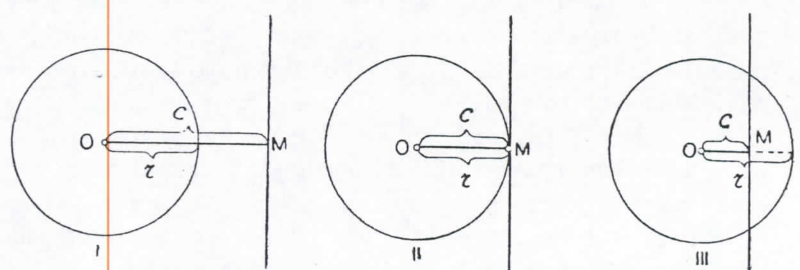
8. ПОЛОЖАЈИ ТАЧКЕ И ПРАВЕ ПРЕМА КРУГУ

Једна тачка према кругу може имати тројак положај: може се налазити ван круга, бити на његовој периферији или у кругу, што се види на слици 26.



Сл. 26. — Положаји тачке према кругу.

Ако у сва три случаја спојимо једном дужи ту тачку (M) са центром круга (O), и ако ту дуж (OM) назовемо централном раздаљином тачке, и обележимо је са c, биће: $c > r$ кад се тачка налази ван круга, слика 26, I; $c = r$ кад је тачка на периферији круга (сл. 26, II) и $c < r$ кад је тачка у кругу (сл. 26, III).

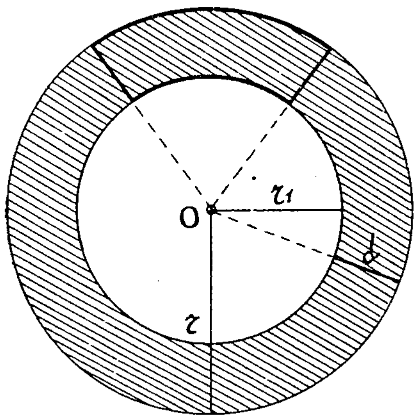


Сл. 27. — Положаји праве према кругу.

Слика 27 показује положаје које права може имати према кругу. Као што се види, права се може налазити и ван круга, додиривати га (тангента) и сећи га (сечица). Нормала спуштена из центра круга на ту праву је њено централно отстојање (ОМ на сл. 27), које ћемо и овде обележити са с. Из слике се види да је $c > r$, кад је права ван круга (сл. 27, I), $c = r$ кад права додирује круг (сл. 27, II) и $c < r$ кад га сече (сл. 27, III).

9. МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈИ ДВА КРУГА

Око једне тачке као око центра можемо описати колико хоћемо кругова различитих полупречника. Такви се кругови, зато што имају заједнички центар, зову **концентрични**. Два концентрична круга претстављена су на сл. 28, са заједничким центром у тачки О. Полупречник већег круга обележен је са r, полупречник мањег са r_1. Површина између два концентрична круга зове се **кружни прстен.** (на слици истакнут цртицама), а разлика полупречника $r - r_1$ је ширина кружног прстена d. Део кружног прстена између два полупречника назива се **исечак** кружног прстена.

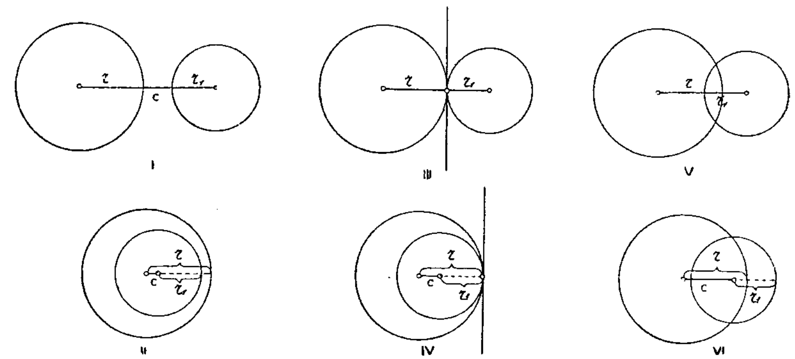


Сл. 28. — Концентрични кругови, кружни прстен.

Кругови који немају исти центар зову се **ексцентрични.** Два ексцентрична круга различитих величина могу заузимати више различитих међусобних положаја, које ћемо свести на ове три групе: 1) Кругови чије се периферије не додирују (сл. 29, I и II). Из слике се види да кругови могу бити један ван другог (I), или један у другом (II). Ако раздаљину између средишта кругова обележимо са с, а полупречнике са r и r_1, биће: $c > r + r_1$ кад се кругови налазе један ван другог, а $c < r - r_1$ кад је круг у кругу.

2 Кругови чије се периферије додирују (сл. 29, III и IV).

Ако се додирују споља (III) $c = r + r_1$, а ако се додирују изнутра (IV), $c = r - r_1$. Слика показује да у оба ова случаја кругови имају заједничку тангенту. 3) Кругови чије се пе-

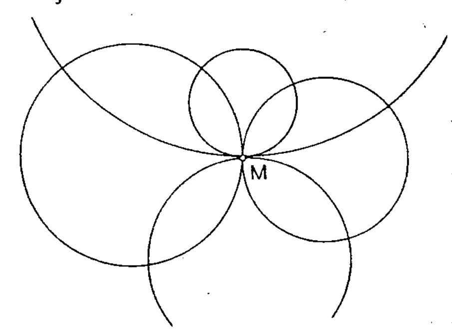


Сл. 29. — Положаји два ексцентрична круга.

риферије секу (сл. 29, V и VI). У том случају кругови имају заједнички део површине. Ако су оба центра ван те заједничке површине (V), онда је $c < r + r_1$, а ако је један центар (или оба) у заједничкој површини, $c > r - r_1$.

10. ОДРЕЂИВАЊЕ КРУГА ПОМОЋУ ТАЧАКА

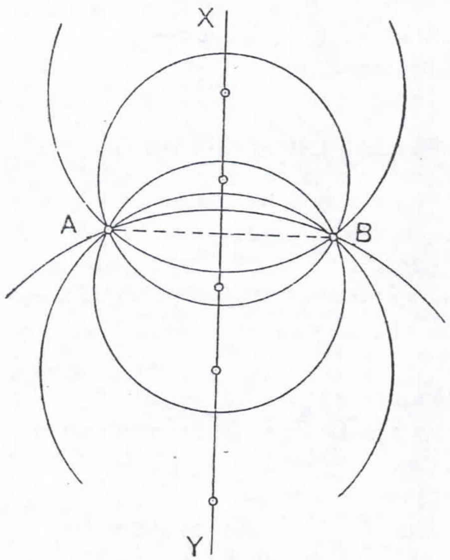
Кроз једну тачку може пролазити безброј кружних линија, што се може видети и из слике 30, где кроз тачку М пролази пет кружних линија. Ако би нам био дат задатак па опишемо круг чија ће периферија пролазити кроз једну дату тачку, ми кажемо да тај задатак има безбројно много решења, јер се може нацртати безброј таквих кругова. Другим речима, **круг није одређен једном тачком своје периферије.**



Сл. 30. — Кроз једну тачку можемо повући колико хоћемо круж. линија.

Да ли је круг одређен двема тачкама на његовој периферији? Из слике 31 закључујемо да кроз две тачке може пролазити опет безбројно много кружних линија. **Њихови**

центри налазе се сви на симетрали (XY) дужи (AB) која спаја те две тачке. Они морају лежати на симетрали дужи AB, зато што су само тачке на симетрали дужи једнако удаљене од крајњих тачака те дужи (Геометрија за II разр.) И овде, дакле, морамо закључити да **круг није одређен двема тачкама своје периферије.**



Сл. 31. — Кроз две тачке можемо нацртати колико хоћемо круж. линија.

Ако су дате три тачке, и то тако да не леже све у истој правој, онда се може описати само један круг чија периферија пролази кроз те три тачке. Те три тачке, наиме, можемо сматрати као темена једног троугла, а знамо да се око сваког троугла може описати круг (повлачењем симетрала његових страна добијамо у пресеку његов центар). Зато кажемо: **круг је потпуно одређен са три тачке своје периферије.**

Нема смисла постављати питање да ли је круг одређен са више од три тачке, јер, како је он одређен са ма које три од датих тачака које не леже у једној правој, остале тачке су сувишне. Сасвим је друго питање: да ли се може описати круг, чија ће периферија пролазити кроз, рецимо, четири тачке. У том случају те тачке треба спојити дужима, тако да начинимо четвороугао, и онда се проучава могућност описивања круга око добијеног четвороугла (тетивни четвороугао).

Вежбања

1) У једном кругу централном углу од 45^0 одговара лук од 25 cm. Колики лук у истом кругу припада централном углу од 18^0?

2) Ако у једном кругу луку од 75 cm припада угао од 60^0, колики угао припада луку од 120 cm у истом кругу?

3) Какав положај може заузети тачка према кругу? Колика је, у сваком случају, централна раздаљина тачке према полупречнику круга?

4) Пречник једног круга је а) 15 cm, б) 0,6 dm, в) $^3/_4$m. У ком положају је према том кругу тачка, која је (за сва три случаја) удаљена од центра за 30 cm?

5) Какав положај може права заузети према кругу? Колика је, у сваком случају, њена раздаљина од центра према полупречнику круга?

6) Раздаљина једне праве од центра круга је а) 7 cm, б) 0,2 dm, в) $^1/_2$m. У каквом је она положају према том кругу, кад је његов пречник 40 cm?

7) Једна права удаљена је 5 cm од центра једног круга чији је полупречник 3,5 cm. Нацртај слику.

8) Конструиши две паралелне праве које су од круга ($r = 3$ cm) удаљене по 1,5 cm.

9) У каквим се међусобним положајима могу налазити два круга?

10) Шта су концентрични а шта ексцентрични кругови?

11) Два круга са пречницима 6 cm и 8 cm имају централну раздаљину 5,5 cm. У каквом се положају налазе један према другом? Нацртај слику!

12) Опиши два круга који се додирују споља.

13) Опиши два круга који се додирују изнутра.

14) Колико се кругова може описати кроз а) једну тачку, б) две тачке, в) три тачке које не леже све на правој линији?

15) Да ли је положај круга одређен са једном или две тачке на периферији?

16) Са колико је тачака на периферији круг потпуно одређен?

17) Обележи две тачке и опиши неколико кружних линија да пролазе кроз те тачке.

18) Две тачке удаљене су 5 cm. Опиши круг, полупречника 3 cm, тако да му периферија пролази кроз те две тачке.

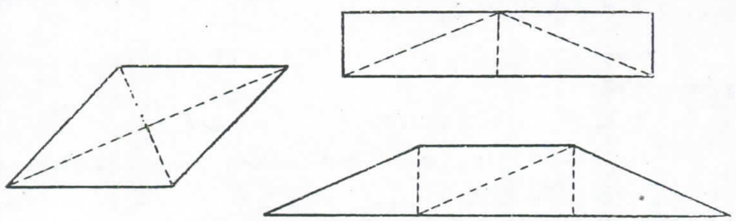
III ДЕО:

ЈЕДНАКОСТ И ПОВРШИНЕ ПРАВОЛИНИСКИХ СЛИКА

1) СЛИКЕ ЈЕДНАКИХ ПОВРШИНА

Видели смо да се површина слике као и гранична површина тела може мерити, односно израчунавати. У I разреду израчунавали смо површине квадрата, правоугаоника, коцке и квадра. Величина измерене површине претставља се извесним бројем квадратних јединица (m^2, dm^2...). Ако две слике имају једнаке површине, тј. ако им се површине могу претставити истим бројем истих квадратних јединица, кажемо кратко да су једнаке. На пример, подударне слике су очигледно једнаке, пошто имају и површине једнаке.

Али слике могу бити једнаке, иако нису подударне. У Геометрији за II разред имали смо такав пример: квадрат стране 2 cm и правоугаоник са димензијама 4 cm и 1 cm



Сл. 32. — Ромб, правоугаоник и трапез једнаких површина.

имају једнаке површине (4 cm^2), дакле једнаке су, а нису подударне. Посматрајмо сада ромб на слици 32. Ако направимо његов модел од картона, и поделимо га по дијагоналама на троугле, ми из тих троуглова можемо направити моделе правоугаоника или трапеза, претстављене на истој слици. Како су делови ових слика подударни, то је очигледно да су и слике једнаке — иако нису подударне.

Сл. 33. — Слике једнаких површина.

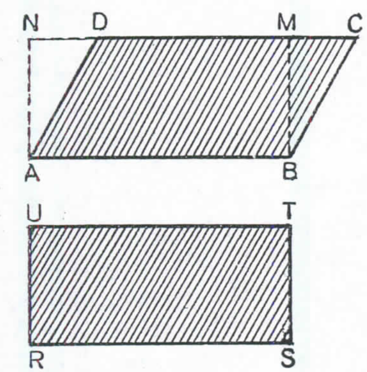
Као други пример исецимо од картона правоугли троугао као на сл. 33, и спустимо висину на хипотенузу. Ако исечемо троугле 1 и 2, које смо добили повлачењем висине, од њих можемо саставити модел четвороугла, претстављеног на истој слици. Делови обележени са 1 и 2 једне и друге слике подударни су, према томе и ове две слике су једнаке. На основу ових примера можемо рећи уопште, да **једнаке површине имају оне слике које су подударне, или које се састоје из подударних делова.**

2. ПОВРШИНА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Сетимо се да смо све паралелограме поделили на правоугле (квадрат и правоугаоник) и косоугле (ромб и ромбоид). Ако једну страну паралелограма (обично ону на којој он „лежи") назовемо основицом, онда је раздаљина између ње и њој паралелне стране висина паралелограма (Геометрија за II разред).

На сл. 34 претстављен је један косоугли (ABCD) и један правоугли паралелограм (RSTU). Ови паралелограми имају једнаке основице и једнаке висине, дакле AB = RS и BM = ST.

Ако од косоуглог паралелограма отсечемо троугао BMC и ставимо га у положај AND (сл. 34), добићемо правоугли паралелограм ABMN који је подударан правоугаонику RSTU. Смемо, дакле, закључити да је ABCD = RSTU или, пошто овај оглед можемо извршити са било којим косоуглим и правоуглим паралелограмом једнаких основица и висина, то можемо казати: **сваки косоугли паралелограм једнак је правоуглом, са којим има једнаку основицу и једнаку висину.**



Сл. 34. — Косоугли и правоугли паралелограм једнаких основица и висина.

Пошто су сви косоугли паралелограми једнаких основица и једнаких висина једнаки једном истом правоугаонику, онда су они и међу собом једнаки. Према томе: **паралелограми једнаких основица и једнаких висина једнаки су.**

Ово правило о једнакости паралелограма искористићемо за израчунавање њихових површина. Ако треба да израчунамо површину неког косоуглог паралелограма, ми ћемо израчунати површину њему једнаког правоугаоника, а ову последњу добијамо, као што знамо, као производ мерних бројева основице и висине.

Тако, ако један паралелограм има основицу 7 cm и висину 4 cm, његова ће површина бити 7.4=28, дакле 28 квадратних сантиметара. Претпоставимо да је основица ма ког паралелограма **a** дужинских јединица, а висина **h** истих дужинских јединица, онда ће површина, изражена одговарајућим квадратним јединицама и означена са **P** бити:

$$P=ah$$

или речима: **површина паралелограма једнака је производу његове основице и висине** (при чему разумемо **мерне бројеве** основице и висине).

На тај начин добили смо **општи образац** за израчунавање површине паралелограма, тј. алгебарским језиком исказано правило за израчунавање површине ма ког паралелограма.

Како је та површина уствари производ основице и висине, то су основица и висина чиниоци тог производа. Из аритметике нам је познато, да се један чинилац добија, кад производ поделимо другим. На пример, ако је 6=2.3, онда је $2=\frac{6}{3}$ и $3=\frac{6}{2}$. Из горњег обрасца за површину паралелограма следује да је

$$a=\frac{P}{h} \quad \text{и} \quad h=\frac{P}{a}$$

Кажи речима ове алгебарске обрасце!

Вежбања

1) Кад кажемо да су две геометриске слике једнаке?

2) Који су паралелограми једнаки?

3) Како израчунавамо површину паралелограма?

4) Један квадрат има страну 6 cm дугу. Колике су (у целим бројевима) димензије оних паралелограма, који су једнаки том квадрату?

5) Израчунати површину паралелограма чија је основица (a) и висина (h):

а)	б)	в)	г)
a = 12 cm	a = 45 cm	a = 5 dm	$a=\frac{3}{4}$ m
h = 7 cm	h = 10 cm	h = 0,32 m	$h=2\frac{1}{2}$ dm
(Одг. 84 cm²)	(Одг. 450 cm²)	(Одг. 16 dm²)	(Одг. $18\frac{3}{4}$dm²)

6) Основица једног паралелограма је 2,45 dm а висина 150 mm. Израчунати му површину а) у mm², б) у cm². (Одг. 36750 mm² или 367,5 cm²)

7) Обим једног правоугаоника је 80 cm а дужина 28 cm. Колика му је површина? (Одг. 336 cm²)

8) Израчунати висину оног паралелограма чија је површина 156 cm² а основица 13 cm. (Одг. 12 cm.)

9) Страна једног квадрата је 12 cm, а основица једног њему једнаког паралелограма је 16 cm. Колика је висина овог последњег? (Одг. 9 cm.)

10) Конструиши правоугаоник основице 5 cm, кад му је површина једнака квадрату стране 4 cm.

11) Једно имање облика ромбоида, дужине 45 m и ширине 11 m, стаје 4158 д. Колико се рачуна по квадратном метру? (Одг. 8,40 д)

12) Израчунати површину ромба чији је обим 96 cm и висина 16 cm. (Одг. 384 cm²)

13) Колика је висина ромба чија је површина 260 cm² а обим 80 cm? (Одг. 13 cm)

14) Зид дужине 8 m и висине 4 m има 3 прозора ширине 1 m и висине 2 m. Колика је површина зида? (Одг. 26 m²)

15) Учионица има 4 прозора, а на сваком прозору по 12 окана дужине 70 cm и ширине 50 cm. Колико је плаћено за стакло, кад сваки m² стаје 70 д? (Одг. 1176 д)

16) Оквир са огледалом широк је 60 cm а висок је 1 m. Ако је ширина оквира 5 cm, колика је површина самог огледала? (Одг. 45 dm.²)

17) Око једног имања облика правоугаоника, дужине 300 m и ширине 120 m, треба начинити стазу широку 0,50 m. Колика ће бити повшина те стазе? (Одг. 421 m²).

18) Један правоугаоник има дужину 8 dm и ширину 5 dm. За колико ће се његова површина повећати, ако се дужина смањи за 2 dm а ширина повећа за 2 dm? (Одг: за 2 dm²)

19) Како ћеш најлакше и најтачније поделити паралелограм на два једнака дела?

20) Два паралелограма имају једнаке основице, док је висина једног 2 пута већа од висине другог. Чија је површина већа? Колико пута?

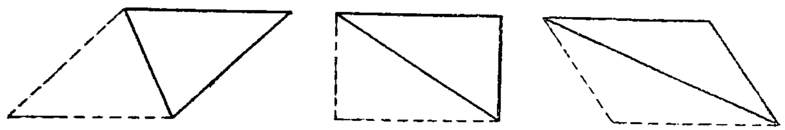
21) Страна једног квадрата је 10 cm, а основица паралелограма који има 2 пута већу површину, је 25 cm. Колика је висина овог последњег? (Одг. 8 cm).

22) Конструиши ромб чија је страна 4 cm и један угао 30⁰, па му израчунај површину.

23) Конструиши ромбоид чије су стране 6 cm и 4 cm и један угао 60⁰, па му израчунај површину.

3. ПОВРШИНА ТРОУГЛА

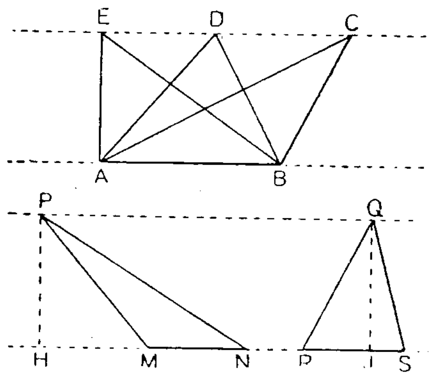
Видели смо (геометрија за II разред) да дијагонала дели сваки паралелограм на два подударна троугла. Другим речима, сваки троугао можемо „допунити" до паралелограма једним њему подударним троуглом. На слици 35 оштроугли, правоугли и тупоугли троугао допуњени су тако до паралелограма.



Сл. 35. — Троугли допуњени до паралелограма.

Сваки је троугао једнак половини оног паралелограма с којим има једнаку основицу и једнаку висину.

Ако троугли имају једнаке основице и једнаке висине, они имају и површине једнаке, пошто се могу сматрати као половине једнаких паралелограма. Такви су троугли ABC, ABD и ABE, који имају исту основицу AB и висину AE, или троугли MNP и RSQ, јер је MN=RS и PH=QJ (слика 36). Зато кажемо **троугли једнаких основица и једнаких висина једнаки су.**



Сл. 36. — Троугли једнаких основица и једнаких висина.

На основу овог и претходног правила површину ма ког троугла добијамо кад површину паралелограма једнаке основице и висине поделимо са 2. На пример, ако је основица троугла 5 cm и висина 6 cm, површина (P) биће $P=\frac{1}{2}.5.6=15$, тј. $P=15\,cm^2$. Или уопште, ако основица троугла има a дужинских јединица, а висина h истих јединица,

површина изражена у одговарајућим квадратним јединицама биће

$$P=\frac{1}{2}ah,$$

или речима: **површина троугла једнака је половини производа његове основице и висине.**

Но како се ма која страна троугла (a,b,c) може сматрати као основица, и како свакој основици одговара једна висина (h_a, h_b, h_c) то површину троугла можемо овако изразити:

$$P=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

или речима: **површина троугла једнака је половини производа једне стране и одговарајуће висине.**

Производ основице и висине неког троугла два пута је већи од његове површине, дакле ah=2P. Одавде чиниоце a и h добијамо (као и код правоугаоника) овако:

$$a=\frac{2P}{h},\ h=\frac{2P}{a}.$$

Искажи ове обрасце својим речима.

Вежбања

1) Колике треба да буду основица и висина једног троугла, који је једнак датом паралелограму?

2) Који су троугли једнаки?

3) Како израчунавамо површину троугла?

4) Израчунати површину троугла чија је основица (a) и висина (h):

а) a=15 cm, h=8 cm (Одг. 60cm²)
б) a=2dm, h=60mm (Одг. 60cm²)
в) a=0,5m, h=4,5dm (Одг. 11,25dm²)
г) $a=1\frac{1}{2}m$, $h=\frac{3}{4}m$ (Одг. $\frac{9}{16}m^2$)
д) a=1m 5cm, h=7dm 9cm (Одг. 41 dm² 47cm² 50 mm²)

5) Израчунати површину правоуглог троугла чије су катете:

а) a=15cm, b=13cm (Одг. 97,5cm²)
б) a=0,2m, b=56cm (Одг. 560 cm²)
в) a=1m 5dm 8cm, b=95,5 cm (Одг. 75dm² 44cm² 50mm²)

6) Колика је површина равнокрако - правоуглог троугла, кад му је катета: а) 16 cm, б 0,4 m, в) 1 m 2 dm 5 cm? (Одг. а) 128cm², б) 0,08m², в) 75dm² 64cm² 50mm²)

7) Површина једног троугла је 225cm², а основица 15cm. Колика му је висина? (Одг. 30cm)

8) Израчунати основицу троугла кад му је површина $270cm^2$ а висина 15cm. (Одг. 36cm)

9) Стране једног троугла су: $a=13cm$, $b=14cm$, $c=15cm$, а површина $84cm^2$. Колике су му висине? (Одг. $h_a=12,9cm$, $h_b=12cm$, $h_c=11,2cm$)

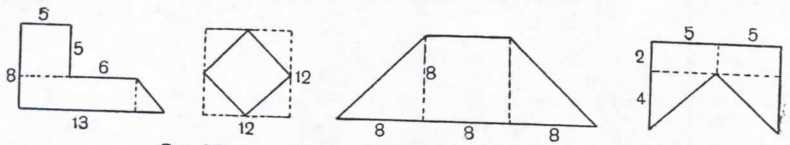
10) Површина једног правоуглог троугла је $98cm^2$, а једна катета 14cm. Колика му је друга катета? (Одг. 14cm)

11) Један троугао има основицу $a=6cm$ и висину $h=4cm$. Колика је површина паралелограма који са њим има а) једнаку основицу и висину, б) исту висину а двапут већу основицу, в) исту основицу а двапут мању висину? (Одг. а) $24cm^2$, б) $48cm^2$, в) $12cm^2$)

12) Конструиши равнострани троугао стране 4,5 cm, и израчунај му површину у mm^2? (Одг. висина мерењем 38 mm, површина 855 mm^2)

13) Конструиши равнокрако-правоугли троугао чија је хипотенуза 5,4 cm, и израчунај му површину (Одг: $7,29cm^2$)

14) Израчунати површине слика претстављених на слици 36а, према означеним подацима на њима:



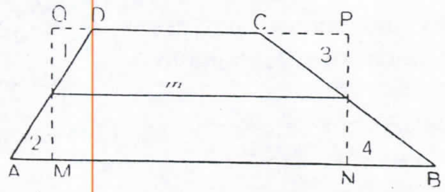
Сл. 36а. — Примери у вези са задатком 14.

4. ПОВРШИНА ТРАПЕЗА

На слици 37 трапезу ABCD повучена је средња линија (дуж која спаја средине непаралелних страна или кракова) и обележена са m. Кроз крајње тачке средње линије повучене су нормале на основицу AB, и продужењем мање паралелне стране до пресека са овим нормалама добијен је правоугаоник MNPQ.

Посматрајући слику може се лако утврдити да је $\triangle 1 \cong \triangle 2$ и $\triangle 3 \cong \triangle 4$ (покажи зашто). Ако од трапеза одузмемо троугле 2 и 4 па их ставимо у положаје 1 и 3, добијемо обележени правоугаоник. Значи да трапез и правоугаоник имају једнаке површине, тј. ABCD=MNPQ.

Према томе, да бисмо добили површину трапеза, ми израчунавамо површину њему једнаког правоугаоника, чија је дужина средња линија m, а висина једнака висини трапеза, h.



Сл. 37. — Трапез (ABCD) и правоугаоник (MNPQ) једнаких површина.

Дакле: $P = mh$

или речима: **површина трапеза једнака је производу средње линије и висине.**

Сетимо се да смо раније утврдили (II разред), да је средња линија трапеза једнака половини збира паралелних страна. Ако паралелне стране означимо са a и b, средња линија је $m=\frac{1}{2}(a+b)$. Површину трапеза онда добијамо и на овај начин:

$$P=\frac{1}{2}(a+b).h$$

или речима: **површина трапеза једнака је половини производа висине и збира паралелних страна.**

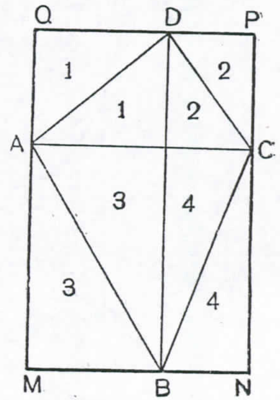
Покажи сам да се из горњих односа добијају ови:

$$m=\frac{P}{h},\qquad h=\frac{P}{m},\qquad a+b=\frac{2P}{h},\qquad h=\frac{2P}{a+b},$$

и искажи их својим речима.

5. ПОВРШИНА ЧЕТВОРОУГЛА С НОРМАЛНИМ ДИЈАГОНАЛАМА

Четвороугле чије су дијагонале нормалне ваља добро уочити, јер, као што ћемо видети, површину таквих четвороуглова израчунавамо по једном обрасцу. Из ранијег градива познато нам је да квадрат, ромб и делтоид имају дијагонале нормалне, док код правоугаоника и ромбоида оне нису нормалне; што се тиче трапеза и трапезоида, они могу али не морају имати дијагонале нормалне.



Сл. 38. — Правоугаоник (MNPQ) описан око четвороугла с нормалним дијагоналама (ABCD)

Такав један четвороугао (ABCD) је на слици 38, где је $AC \perp BD$. Ако кроз његова темена повучемо праве паралелне с дијагоналама, добићемо правоугаоник MNPQ. (Зашто је тај четвороугао правоугаоник?). На тај начин добијамо осам троуглова, од којих су свака два, на слици обележена истим бројем, подударна. (Покажи њихову подударност) Из тога излази да добијени правоугаоник има два пута већу површину од датог четвороугла ABCD. Површину овог последњег добићемо ако површину правоугаоника преполовимо. Како су димензије правоугаоника једнаке дијагоналама датог четвороугла, које можемо означити са d_1 и d_2, то имамо

$$P=\frac{1}{2}d_1\,d_2$$

тј. **површина четвороугла с нормалним дијагоналама једнака је половини производа његових дијагонала.**

Из овог абрасца за површину можемо добити следеће односе:

$$d_1=\frac{2P}{d_2} \quad \text{и} \quad d_2=\frac{2P}{d_1}$$

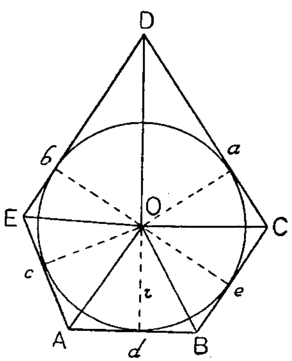
Како су дијагонале квадрата и нормалне и једнаке, то ако сваку дијагоналу обележимо са d, његова површина биће:

$$P=\frac{1}{2}d^2$$

тј. **површина квадрата једнака је половини квадрата његове дијагонале.**

Раније смо видели да површину квадрата можемо добити и кад његову страну (a) дигнемо на квадрат, дакле $P=a^2$. Ми ћемо употребљавати један или други образац, према томе да ли нам је позната страна или дијагонала квадрата.

6. ПОВРШИНА МНОГОУГЛА



Сл. 39. — Тангентни петоугао.

Многоугли у које може да се упише круг називамо тангентним. Тако су, на пример, сви правилни многоугли тангентни. И петоугао ABCDE на сл. 39 тангентан је (иако није правилан).

Ако из центра уписаног круга, тачке O, повучемо дужи до темена (OA, OB, OC, OD, OE), поделићемо многоугао на онолико троуглова колико има темена (у нашем случају на 5). Сви ти троугли имају

висине једнаке (полупречници уписаног круга r) а основице су им стране многоугла a, b, c, d и e. Сабирајући њихове површине добијамо површину многоугла. За наш случај петоугла имамо

$$P=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}dr+\frac{1}{2}er=\frac{1}{2}r\,(a+b+c+d+e)$$

Ако збир страна многоугла обележимо са O (обим), биће:

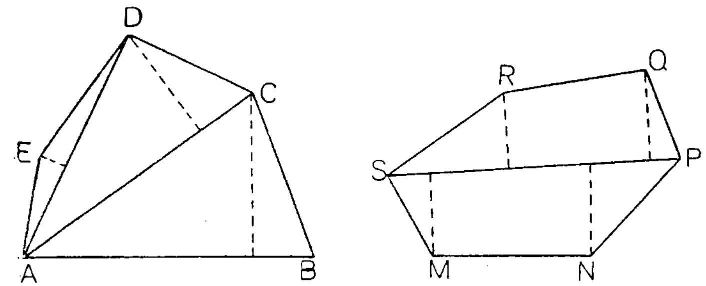
$$P=\frac{1}{2}Or$$

или речима: **површина тангентног многоугла једнака је половини производа његовог обима и полупречника уписаног круга.**

Како су код правилног многоугла све стране једнаке, рецимо нека је свака обележена са a, обим је онда na, п је површина

$$P=\frac{1}{2}nar$$

Ако многоугао није правилан, а ни тангентан уопште, површину му налазимо кад га претходно изделимо у троугле или трапезе, па површине ових саберемо. На пример, петоугао ABCDE на слици 40 подељен је дијагоналама из



Сл. 40. — Многоугли подељени на троугле и трапезе.

једног темена на троугле, па је његова површина

$$P=P_{ABC}+P_{ACD}+P_{ADE}$$

Шестоуглу MNPQRS на слици 40 повучена је једна дијагонала SP, па су на њу из осталих темена спуштене нормале. На тај начин шестоугао је подељен на два трапеза и четири троугла, чије површине треба израчунати и сабрати, па ће се добити тражена површина шестоугла.

Исто ово вреди и за четвороугао, ако му се површина не може израчунати на један од показаних начина.

Вежбања

1) Како израчунавамо површину трапеза?

2) Израчунати површину трапеза кад су дате паралелне стране (a и b) и висина (h):

а) $a=16cm$ $b=9cm$ $h=6cm$ (Одг. $75cm^2$)
б) $a=2dm$ $b=0{,}15m$ $h=9cm$ (Одг. $15750mm^2$)
в) $a=1m\ 8cm$ $b=5dm\ 4cm$ $h=240mm$ (Одг. $1944cm^2$)

3) Израчунати површину трапеза кад је позната средња линија (m) и висина (h):

а) $m=56mm$ $h=12mm$ (Одг. $672mm^2$)
б) $m=1{,}2m$ $h=9{,}4dm$ (Одг. $112{,}8dm^2$)
в) $m=1dm\ 5mm$ $h=4cm\ 8mm$ (Одг. $5040mm^2$)

4) Површина једног трапеза је 55cm, а паралелне стране су му 14cm и 8cm. Колика му је висина? (Одг. 5 cm)

5) Израчунати средњу линију оног трапеза чија је површина 728 cm^2 и висина $h=13$ cm. (Одг. 56 cm)

6) Који четвороуглови имају дијагонале нормалне?

7) Како израчунавамо површину четвороугла с нормалним дијагоналама?

8) Код којих четвороуглова можеш израчунати површину на два начина? Како?

9) Израчунати површину делтоида чије су дијагонале (d_1 и d_2):

а) $d_1=24cm$ $d_2=17cm$ (Одг. $204cm^2$)
б) $d_1=0{,}3m$ $d_2=2{,}4dm$ (Одг. $360cm^2$)
в) $d_1=1dm\ 5cm$ $d_2=0{,}2m$) (Одг. $150cm^2$)

10) Израчунај површину квадрата у квадратним сантиметрима, кад је његова дијагонала: а) 2,5 dm, б) 156 mm, в) 1dm 5mm. (Одг. а) 312,5 cm^2, б) 121,68 cm^2, в) 55,125 cm^2)

11) Површина једног ромба је 216 cm^2 а једна му је дијагонала 18 cm. Колика му је друга дијагднала? (Одг. 24 cm)

12) Код једног ромба дијагонале су $d_1=12$ cm и $d_2=16$ cm, а страна $a=10$ cm. Колика му је висина? (Одг. 9,6 cm)

13) Једна дијагонала ромба је $d_1=8$ cm, а површина му је једнака површини квадрата чија је дијагонала $d=16$ cm. Колика је друга дијагонала ромба? (Одг. 32 cm.

14) Један ромб има површину 12 cm^2 и једну дијагоналу 6 cm. Конструиши га.

15) Како израчунавамо површину многоугла а) правилног, б) неправилног?

16) Конструиши правилни шестоугао стране 4 cm, измери што је потребно и израчунај му површину (Одг. приближно 42 cm^2).

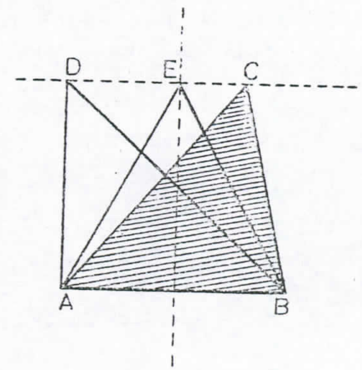
17) Нацртај ма какав многоугао, измери елементе и израчунај му површину.

7. ПРЕТВАРАЊЕ СЛИКА

„Претворити" једну слику у другу значи нацртати слику различитог облика али једнаке површине с датом. Говорећи о једнакости слика ми смо већ видели да слике различитог облика могу имати једнаке површине. Сада ћемо искористити правила о једнакости слика и у неколико примера видећемо како се врши то претварање слика.

1) **Дати троугао претворити у други једнаке основице и висине** (на пр. у правоугли, равнокраки, тупоугли и др.).

Кроз теме C троугла ABC на сл. 41 повуцимо праву паралелну са основицом. Ма која тачка на тој правој може бити треће теме траженог троугла. На пример, ако троугао ABC треба претворити у правоугли, у темену A (или B) дижемо нормалу, и пресек нормале с правом коју смо кроз теме C повукли паралелно основици, тачка D, је треће теме траженог троугла. Или ако се хоће да добије равнокраки троугао, треће теме добијамо у пресеку симетрале основице AB са поменутом правом, на слици тачка E.

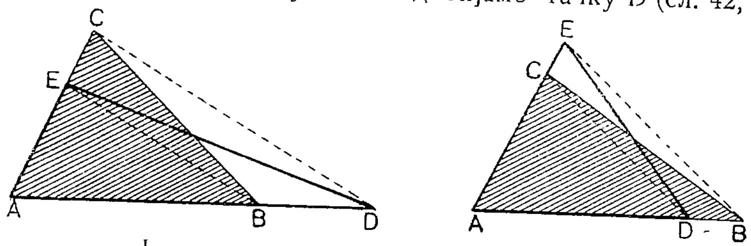


Сл. 41. — Претварање троуглова једнаких основица и висина.

2) **Претворити дати троугао у други чија ће основица бити дужа или краћа.**

Ако основица треба да буде дужа, продужимо основицу AB вроугла ABC (сл. 42 I) до тражене дужине, па добијамо тачку D. Сада тачку D спајамо с теменом C, из B повлачимо BE||DC, и најзад вучемо дуж DE. Добијени △ ADE једнак је с троуглом ABC, зато што је троугао BCE (који се сматра отсечен од датог △ ABC) једнак △ BDE (додатак остатку ABE). Ова два троугла једнака су, јер имају исту основицу BE и једнаке висине (покажи).

Ако основица треба да буде краћа, ми ту краћу основицу преносимо на дату AB па добијамо тачку D (сл. 42, II).



I II

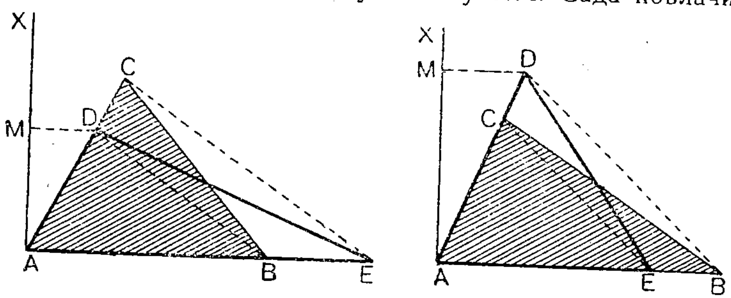
Сл. 42. — Претварање троугла ABC у други: I, с дужом основицом, II с краћом основицом.

Тачку D спајамо са C, повлачимо BE ‖ DC до пресека E са продуженом страном AC, па је △ ADE = △ ABC. И ова се једнакост доказује помоћу једнакости троуглова CDE и CDB (иста основица CD и једнаке висине).

Из ових примера видимо да се висина троугла смањује, кад основицу повећавамо, и да се висина повећава, кад основицу смањујемо.

3) **Претворити дати троугао у други мање или веће висине.**

Из темена A троугла ABC (сл. 43, I) дижемо нормалу AX и на њу преносимо мању висину AM. Сада повлачимо



I II

Сл. 43. — Претварање троугла ABC у други: I, с мањом висином, II, с већом висином.

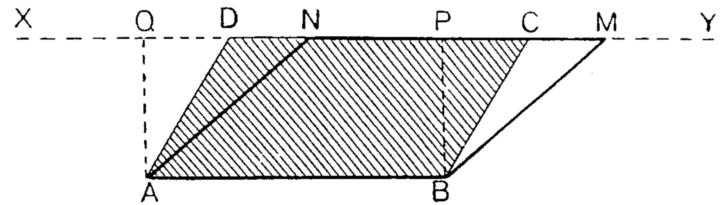
MD ‖ AB, добијену тачку D спајамо са B и из темена C повлачимо паралелну са BD до пресека са продуженом осно-

вицом. Тако добијамо тачку E, па је △ AED тражени троугао. Да је он једнак троуглу ABC доказује се једнакошћу троуглова BCD и BED (иста основица BD и једнаке висине).

На слици 43, II већа висина AM пренета је на нормалу AX. Из тачке M цртамо MD ‖ AB, до пресека са продуженом страном AC. Сада повлачимо DB, затим CE ‖ DB, па је тражени троугао AED. Он је једнак датом троуглу ABC зато што су троугли CEB и CED једнаки (зашто су они једнаки?)

4) **Претворити један паралелограм у други исте основице и висине.**

Треба датом паралелограму ABCD (сл. 44) продужити страну CD тако да добијамо праву XУ. Сада из темена A и B повлачимо две паралелне дужи до праве XУ, на пример

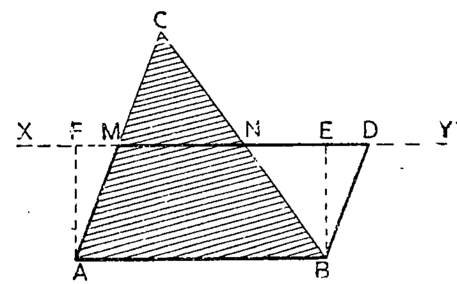


Сл. 44. — Претварање паралелограма у друге с истом основицом и висином.

AN и BM, или AQ и BP, према томе какав се паралелограм хоће да добије. Једнакост датог паралелограма са добијеним доказује се подударношћу насталих троуглова. На пример, паралелограм ABCD и ABMN једнаки су, јер се од првог може одузети △ ADN и додати остатку тако да стане у положај BCM.

5) **Претворити троугао у паралелограм.**

Кроз средине M и N страна AC и BC троугла ABC (сл. 45) треба повући праву XУ (пареленлну са основицом AB). Ако сад из темена B повучемо BD ‖ AC, добијамо паралелограм ABDM. Овде су троугли BDN и MNC подударни (како би то доказао?)



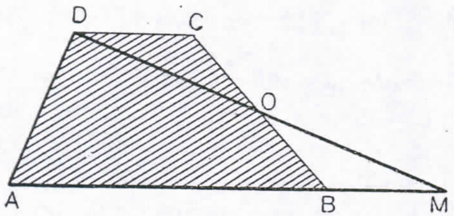
Сл. 45. — Претварање троугла у паралелограм.

па како су слике које се састоје из подударних делова једнаке, излази да је паралелограм ABDM = △ ABC.

Како сада добијени паралелограм можемо претворити у који било други исте основице и висине, на пример у правоугаоник ABEF (сл. 45), то закључујемо да троугао можемо претворити било у косоугли било у правоугли паралелограм.

6) **Претворити трапез у троугао.**

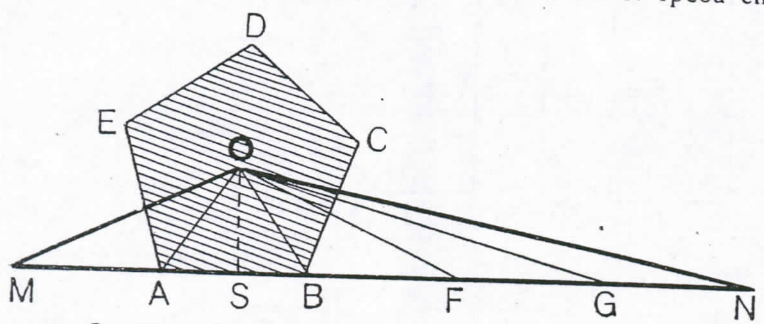
Да бисмо дати трапез ABCD (сл. 46) претворили у троугао, нађимо средину једне непаралелне стране (крака), на слици тачка O, и из темена D повуцимо кроз O дуж до пресека са продуженом основицом. Како су добијени троугли OCD и OBM подударни — како би то доказао? — то је и трапез ABCD = △ AMD.



Сл. 46. — Претварање трапеза у троугао.

7) **Претворити правилни многоугао у троугао.**

Датом петоуглу ABCDE (сл. 47) треба продужити једну страну (на сл. 47 страну AB) и на добијену праву пренети до стране AB све остале стране многоугла (било с које стране од AB). Тако добијамо да је обим многоугла „распрострт“ по тој правој, дуж MN. Тачке M и N треба спојити с центром O уписаног круга у петоуглу, па добијамо тражени △ MNO. Висина овог троугла је дуж OS, тј. полупречник тога уписаног круга.

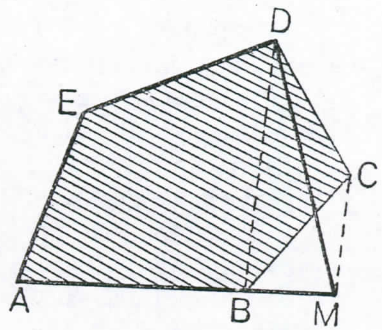


Сл. 47. — Претварање правилног петоугла у троугао.

Да је троугао MNO једнак петоуглу ABCDE види се по томе што се петоугао састоји из пет троуглова подударних с троуглом ABO, а и троугао MNO састављен је из пет троуглова који су сви једнаки троуглу ABO (једнаке основице, иста висина). Њихову једнакост, уосталом, показује и образац за површину, који је исти и за петоугао и за троугао: $\frac{5ar}{2}$ (зашто?). Можемо, дакле, рећи: **правилни многоугао једнак је троуглу чија је основица једнака обиму многоугла, а висина полупречнику уписаног круга.**

8) **Претворити ма какав многоугао у други са једном страном мање.**

Нека је дат петоугао ABCDE (сл. 48) који треба претворити у четвороугао. Повуцимо једну дијагоналу (BD), тако да с једне њене стране остане само једно теме петоугла (на слици теме C). Из тог темена повлачимо CM ∥ BD до пресека M са продуженом страном AB. Тражени четвороугао је AMDE. Како су троугли BCD и BMD једнаки (иста основица BD и једнаке висине), то можемо замислити да смо први од њих отсекли од многоугла и додали остатку други, онако као што је на слици. Према томе добијени четвороугао AMDE једнак је петоуглу ABCDE.



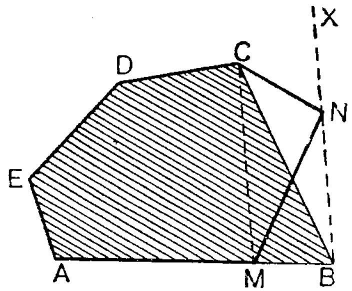
Сл. 48. — Претварање многоугла у други с једном страном мање.

На исти начин можемо овај четвороугао претворити у троугао. Из овог је јасно да оваквим поступком можемо ма који многоугао претворити у троугао, и на тај начин олакшати израчунавање његове површине.

9) **Претворити ма какав многоугао у други с једном страном више.**

Нека је дат петоугао ABCDE (сл. 49) који треба претворити у шестоугао. На једној страни, рецимо AB, треба произвољно изабрати једну тачку, као што је на слици тачка

M. Њу спојимо са теменом C и повлачимо BX ∥ MC. На зраку BX узимамо коју било тачку (само не ону у продужетку стране DC) на пример тачку N, и њу спајамо дужима са C и M. Тражени шестоугао је AMNCDE. Да је он једнак датом петоуглу, показује се опет одузимањем и додавањем једнаких троуглова CMB и CMN (ови су једнаки јер имају исту основицу CM и једнаке висине).



Сл. 49. — Претварање многоугла у други с једном страном више.

Вежбања

1) Нацртај један оштроугли троугао па га претвори а) у правоугли, б) у тупоугли с углом од 120^0.

2) Нацртај један троугао па га претвори у други чија ће основица бити а) два пута дужа, б) три пута краћа.

3) Нацртај један троугао па га претвори у други чија ће висина бити а) два пута мања, б) три пута већа.

4) Нацртај један равнокраки троугао, па га претвори у правоугли са два пута већом основицом. (Прво га претвори у ма какав са два пута већом основицом, па онда овај у правоугли).

5) Нацртај један ромбоид па га претвори у правоугаоник.

6) Ма какав троугао претвори у правоугаоник.

7) Један делтоид претвори у правоугаоник.

8) Нацртај ма какав трапез, па га претвори а) у троугао, б) у правоугаоник.

9) Ма какав четвороугао претвори у троугао.

10) Ма какав петоугао претвори у четвороугао.

11) Ма какав петоугао претвори у троугао.

12) Ма какав петоугао претвори у правоугаоник.

13) Правилни шестоугао претвори а) у троугао, б) у правоугаоник.

14) Ма какав петоугао претвори у шестоугао.

15) Ма какав троугао претвори у петоугао.

16) Ромб с дијагоналама 8 cm и 6 cm претвори у правоугли троугао.

IV ДЕО:

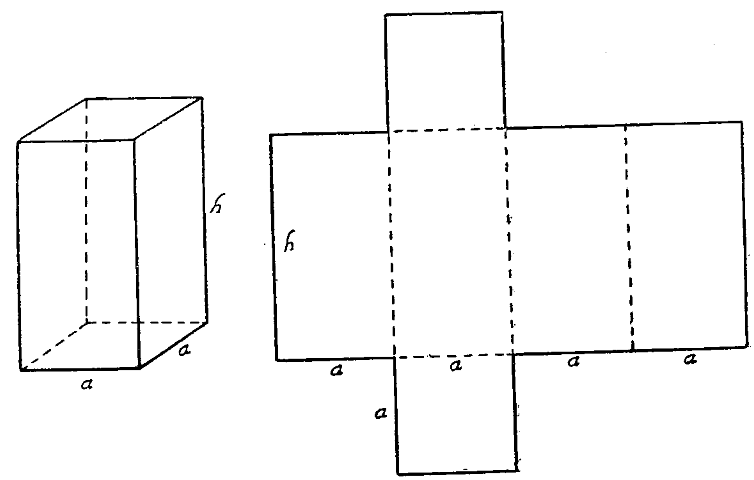
ПОВРШИНЕ РОГЉАСТИХ ТЕЛА

1. ПОВРШИНА ПРАВЕ ПРИЗМЕ

Израчунати површину неког рогљастог тела значи израчунати површине свих слика које то тело ограничавају, па их онда сабрати.

Свака права призма (косе нећемо узимати у обзир при израчунавању површина) ограничена је, као што знамо, двема основама и омотачем, који је у ствари збир бочних страна. Ако површину основе означимо са B (базис), површину омотача са M а целокупну површину призме са P, можемо алгебарским језиком изразити површину призме овако:

$$P = 2B + M$$

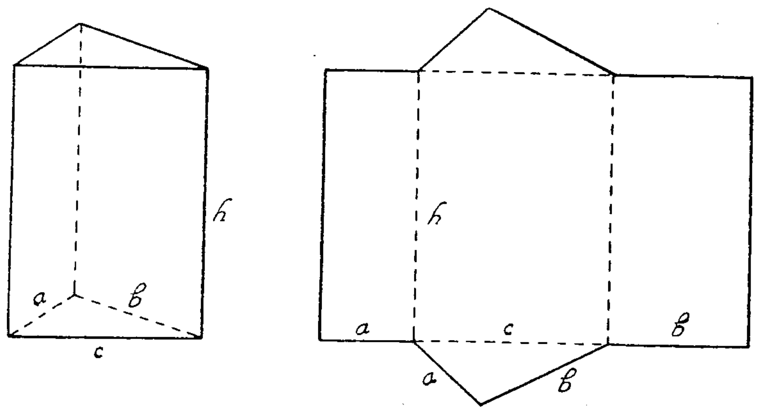


Сл. 50. — Правилна четворострана призма и њена мрежа.

Код правилних призама све су основине ивице једнаке, па су бочни правоугаоници такође међу собом једнаки. На слици 50 претстављена је правилна четворострана призма (или квадар с квадратном основом) и њена мрежа, која је у ствари површина призме „распрострта“ у раван. Како је основа квадрат стране рецимо a дужинских јединица, то је њена површина $B = a^2$. Омотач се састоји из четири подударна правоугаоника, основице a и висине h, па је $M = 4ah$. Површина ове призме је тада

$$P = 2a^2 + 4ah.$$

Ако су основина ивица a и висина h дате посебним бројевима, ове бројеве ваља сменити у добијеном обрасцу и извршити назначене рач. радње, па добијамо бројну вредност површине наше призме. На пример за $a = 4$ cm и $h = 6$ cm биће: $P = 2.16 + 4.4.6 = 32 + 96 = 128$, тј. $P = 128 \text{ cm}^2$.



Сл. 51. — Тространа права призма и њена мрежа.

Као други пример узећемо једну праву призму која није правилна. Таква је тространа призма на слици 51, поред које је нацртана и њена мрежа. Основа ове призме је правоугли троугао чије су катете a и b a хипотенуза c, док је висина призме h. Површина основе је $B = \frac{1}{2}ab$. Омотач се састоји из три неједнака правоугаоника чије су површине ah, bh и ch, па је

$$M = ah + bh + ch = h\,(a + b + c).$$

Површина целе те призме је

$$P = ab + h\,(a + b + c).$$

Заменом бројних вредности за основине ивице и висину добијамо, као и малопре, бројну вредност површине ове призме.

Примећујемо да смо омотач призме у оба ова случаја добили кад смо обим основе помножили висином призме [$4a.h$ и $h(a + b + c)$.] Како се на исти начин добија омотач код свих правих призама, што се лако може увидети и из

њихових мрежа, то можемо рећи: **омотач праве призме добијамо кад обим основе помножимо висином призме.**

У многим задацима нећемо добити све елементе потребне за израчунавање површине призме. У таквим случајевима ми ћемо до потребних података доћи мерењем.

Познато нам је да је и коцка призма, и то правилна и равноивична четворострана призма. Како су код коцке и основе и бочне стране подударни квадрати, то је површина коцке, ивице a:

$$P = 6a^2$$

Обрнуто, једна њена страна је шестина коцкице површине, тј.

$$a^2 = \frac{P}{6} \text{ и одатле } a = \sqrt{\frac{P}{6}}.$$

Можемо, дакле, израчунати ивицу коцке чија нам је површина позната.

Вежбања

1) Израчунај површину коцке чија је ивица а) 8 cm, б) 0,54 dm, в) 1 m 4 dm. (Одг. а) 384 cm^2, б) 1,7496 dm^2, в) 11 m^2 76 dm^2)

2) Колика је ивица коцке чија је површина а) 864 cm^2, б) 15000 dm^2, в) 10,14 m^2? (Одг. а) 12 cm б) 50 dm, в) 1,3 m)

3) Израчунај површину квадра чије су основине ивице a и b и висина c дате:

а) a = 10 cm	б) a = 2,5 dm	в) a = 1 m 5 dm
b = 8 cm	b = 0,6 m	b = 8 dm
c = 15 cm	c = 35 cm	c = 6 dm 4 cm
(Одг. 700 cm^2)	(Одг. 8950 cm^2)	(Одг. 5 m^2 34 dm 40 cm^2)

4) Правилна четворострана призма има висину 24 cm а основину ивицу 10 cm. Колика јој површина? (Одг. 1160 cm^2)

5) Омотач правилне четворостране призме је 720 cm^2, док је основина ивица 12 cm. Колико је висока та призма? (Одг. 15 cm)

6) Сандук у облику квадра чије су димензије a = 1,2 m, b = 0,9 m и c = 0,8 m, треба цео споља обојити. Колико ће то стајати, ако се по квадратном метру рачуна 5 дин.? (Одг. 27,60 д)

7) Права тространа призма, висина 20 cm, има за основу правоугли троугао с катетама 6 cm и 8 cm и хипотенузом 10 cm Колика јој је површина? (Одг. 528 cm^2)

8) Права призма, висине 30 cm, има за основу равнокраки трапез чије су паралелне стране 12 cm и 6 cm, крак 5 cm и висина 4 cm. Израчунај површину те призме. (Одг. 912 cm^2).

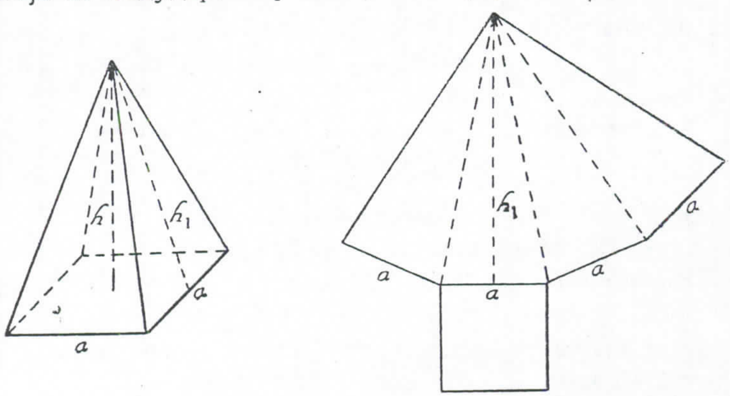
9) Конструиши мрежу једне правилне шестостране призме, основине ивице 10 mm и висине 40 mm, измери потребне елементе и израчунај површину.

2. ПОВРШИНА ПРАВЕ ПИРАМИДЕ

Површина праве пирамиде (косу ни овде нећемо узимати у обзир) састоји се из основе или базиса, који може бити ма каква равна праволиниска слика, и омотача или збира бочних страна, које су равнокраки троугли. Ако се и овде послужимо истим ознакама као и код призме, добићемо општи образац

$$P = B + M$$

Код правилних пирамида све су основине ивице једнаке, а тако исто и све бочне ивице међу собом, па се омотач састоји из подударних равнокраких троуглова.



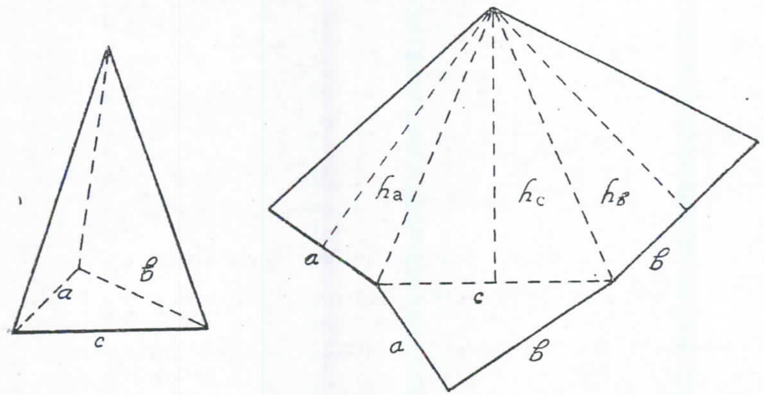
Сл. 52. — Четворострана правилна пирамида и њена мрежа.

Као пример, израчунајмо површину четворостране правилне пирамиде, која је заједно са својом мрежом претстављена на слици 52. Основа ове пирамиде је квадрат стране a, па је њена површина $B = a^2$. Омотач се састоји из четири једнака равнокрака троугла, основице **a** и висине $\mathbf{h_1}$. Ова

висина, као висина бочног троугла, назива се **бочна висина**, и она је код праве пирамиде увек већа од пирамидине висине (h на сл. 52).

Омотач је, дакле, $M = 4 . \frac{ah_1}{2} = 2\,a\,h_1$, а површина целе ове пирадиме је $P = a^2 + 2\,a\,h_1$. Заменом датих посебних вредности за a и h у овом обрасцу и израчунавањем добијамо бројну вредност површине. На пример, ако је $a = 5$ cm и $h_1 = 8$ cm, биће $P = 25 + 2 . 5 . 8 = 105$, тј. $P = 105\ cm^2$.

Образац за омотач $M = 4 . \frac{ah_1}{2}$ можемо и овако написати: $M = \frac{4a . h_1}{2}$ или $M = \frac{O . h_1}{2}$, где O значи обим основе. Како код сваке правилне пирамиде омотач добијамо по истом обрасцу, што се лако види из њихових мрежа, то кажемо: омотач правилне пирамиде добијамо, кад обим основе помножимо бочном висином и тај производ поделимо са 2.



Сл. 53. — Права тространа пирамида и њена мрежа.

Као други пример узећемо да израчунамо површину једне пирамиде која није правилна. На слици 53 претстављена је права тространа пирамида и њена мрежа. Ова пирамида има за основу правоугли троугао с катетама a и b и хипотенузом c, а бочне висине су јој h_a, h_b, h_c. Према томе површина основе је $B = \frac{1}{2}\,ab$, а омотач $M = \frac{1}{2}\,h_a + \frac{1}{2}\,h_b + \frac{1}{2}\,ch_c = \frac{1}{2}\,(ah_a + bh_b + ch_c)$, па је површина пирамиде $P =$

$= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}(ah_a + bh_b + ch_c)$. Бројну вредност ове површине лако добијамо, ако посебне вредности основиних ивица и бочних висина заменимо у добијеном обрасцу и извршимо назначене рач. радње.

И код пирамида, као и код призама, морамо мерењем доћи до потребних елемената за израчунавање површине, ако нису сви дати.

Вежбање

1) Израчунати површину правилне четворостране пирамиде, код које је основина ивица 8 cm и бочна висина 12 cm. (Одг. 256 cm²)

2) Једна права четворострана пирамида има за основу правоугаоник са димензијама a = 5,5 cm и b = 3,2 cm, а бочна јој је ивица 7 cm. Нацртај њену мрежу, измери потребне елементе и израчунај површину.

3) Права тространа пирамида има основине ивице a = 2,5 cm, b = 3,5 cm и c = 4,5 cm, а бочна јој је ивица s = 5 cm. Нацртај њену мрежу, измери потребне елементе и израчунај површину.

4) Једна права пирамида, чија је бочна ивица s = 5,5 cm, има за основу правоугли троугао с катетама од a = 3 cm и b = 4 cm. Конструиши њену мрежу, измери потребне елементе и израчунај површину.

5) Нацртај мрежу правилне шестостране пирамиде, основине ивице a = 3 cm, а бочне ивице s = 5 cm, измери потребне елементе и израчунај површину.

6) На једној коцки ивице a = 4 cm, постављена је права квадратна и равноивична пирамида, тако да им се основе поклапају. Израчунати површину тако добијеног тела (рачунај само спољну површину). (Одг. 107,68 cm²)

V ДЕО:

ОБИМ И ПОВРШИНА КРУГА И ЊЕГОВИХ ДЕЛОВА

1. БРОЈ П — ОБИМ КРУГА

Ако посматрамо кругове разних величина можемо лако утврдити, да је обим сваког круга већи од његовог пречника. Колико пута је обим круга већи од његовог пречника? И да ли се код сваког круга може на ово питање дати исти одговор?

Славни грчки математичар Архимед (живео је у III веку пре Христа) утврдио је, да је код сваког круга обим већи од пречника нешто више од 3 пута, тачније 3,14 пута, и тај број обележио је грчким словом π (читај **пи**).

Тај број π може се приближно одредити и обичним мерењем. Узмимо модел једног круга — рецимо какав точак, метални новац, или др. — и омотајмо једанпут по његовом обиму конац. Ако тај конац (дужину обима) исправимо и по њему преносимо пречник истога круга, видећемо да ће се тај пречник моћи пренети 3 пута и да ће при томе остати један врло мали део конца (обима.) Вршећи овај оглед с круговима разних величина доћи ћемо, при пажљивом раду, до тог истог закључка. Све тачнијим мерењима долазимо до ових вредности броја π: 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415 итд. Али се број π може много тачније одредити рачунским путем, него огледима. Тако је утврђено, да тај број има безбројно много децимала, који се не понављају по неком реду (тј. број π није периодичан.)

Запамтићемо, дакле, ово: **Број π показује колико је пута обим круга већи од његовог пречника. Тај број се не може сасвим тачно одредити, а његова приближна вредност са два децимала је 3,14 или у облику обичног разломка $\frac{22}{7}$.**

Значај броја π у томе је што помоћу њега лако израчунавамо обим круга чији нам је пречник познат. Ако обим круга обележимо са O, а полупречник са r, имамо: $O : 2r = \pi$, одакле је

$$O = 2r\pi$$

(јер је дељеник једнак производу делиоца и количника) или речима: **обим круга једнак је производу пречника и броја** π.

На пример, за круг полупречника $r = 2{,}5$ dm обим је $O = 2.2{,}5.3{,}14 = 5.3{,}14 = 15{,}7$ тј. $O = 15{,}7$ dm.

Број π показује нам и то **да се обим круга може само приближно израчунати.** То излази из тога што је број π, као што смо видели, несвршени децимални број,

Као што обим круга можемо израчунати ако нам је познат пречник круга, тако исто можемо и пречник, односно полупречник круга израчунати, ако нам је познат његов обим. Јер, како је $O = 2r\pi$, то је:

$$2r = \frac{O}{\pi} \quad \text{и} \quad r = \frac{O}{2\pi}$$

На пример, ако је обим круга $O = 18{,}84$ cm, биће: $2r = O : \pi = 18{,}84 : 3{,}14 = 6$ и $r = O : 2\pi = 18{,}84 : 6{,}28 = 3$ тј. $r = 3$ cm.

2. ДУЖИНА КРУЖНОГ ЛУКА

Кружни лук је део кружне линије, или део обима круга као што је на пример $\overset{\frown}{AB}$ (лук AB) на слици 54. Дужину кружног лука израчунаћемо овако:

Сваком централном углу (α на сл. 54) одговара одређен лук на кругу. Углу од 1^0 одговараће 360-ти део целог обима, тј. лук $l = \frac{2r\pi}{360}$ или, кад скратимо, $l = \frac{r\pi}{180}$. Углу од 2^0 одговараће лук од $\frac{r\pi}{180}.2$, од 3^0 лук $\frac{r\pi}{180}.3$, итд., тако да углу од α степени мора припадати лук

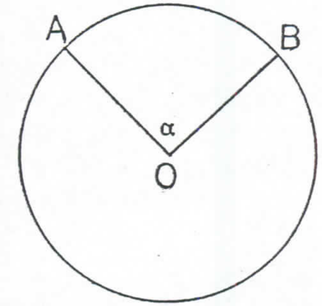
$$l = \frac{r\pi}{180}.\alpha \quad \text{или} \quad l = \frac{r\pi\alpha}{180}$$

тј. лук добијамо кад производ полупречника, броја π и центр. угла поделимо са 180. На пример, у кругу полупречника $r = 10$ cm централном углу $\alpha = 45^0$ одговара лук $l =$

$\frac{10.3{,}14}{180} \cdot 45 = 7{,}85$ тј. $l = 7{,}85$ cm.

Ако централни угао има, поред степена, и минуте и секунде, њега треба изразити у виду једноименог броја, пре смене у обрасцу за изналажење дужине лука. При томе ће се и именитељ тог обрасца морати да повећа исти број пута, као што показује следећи пример: $r = 15$ dm, $\alpha = 10^0\,40' = 640'$,

$l = \frac{15.3{,}14.640}{180 \cdot 60} = 2{,}79$ тј. $l = 2{,}79$ dm.



Сл. 54. — Кружни лук AB и одговарајући централни угао α.

Вежбања

1) Шта показује број π и колика му је приближна вредност са два децимала?

2) Израчунати обим круга чији је пречник а) 10 cm, б) 100 cm, в) 2,5 cm г) 1 dm, д) 1 m 8 cm 5 mm. (Одг. а) 31,4 cm, б) 314 cm, в) 7,85 cm, г) 3,14 dm, д) 3 m 4 dm 6,9 mm).

3) Израчунати обим круга чији је полупречник а) 5 cm, б) 2,5 dm, в) $\frac{3}{4}$ m, г) 2 m 5 dm. (Одг. а) 31,4 cm б) 15,7 dm, в) 4,71 m, г) 15 m 7 dm)

4) Колики је обим круга чији је полупречник једнак дијагонали квадрата чија је површина 50 cm^2? (Одг. 62,8 cm)

5) Израчунати полупречник круга чији је обим а) 6,28 cm, б) 3,14 cm, в) 15,7 m, г) 4 dm, д) $1\frac{1}{2}$ m, ђ) 1 m 8 dm. (Одг. а) 1 cm, б) 0,5 cm, в) 2,5 m, г) 0,63...dm, д) 0,238...m, ђ) 2 dm 8 cm 6...mm)

6) Полупречник једног круга је r cm. Израчунати полупречник круга чији је обим два пута већи. (Одг. $2r$ cm)

7) Два круга имају полупречнике $r_1 = 4$ cm и $r_2 = 6$ cm. Израчунај полупречник оног круга чији је обим једнак збиру обима ових кругова. Замену изврши тек на крају задатка. (Одг. $r_1 + r_2 = 10$ cm)

8) Колики је полупречник Земље, кад се зна да је метар (приближно) четрдесет милионити део меридијана? (Одг. 6369,426 km)

9) Колики пут на часовнику пређе врх минутне казаљке, дуге 2,5 cm, а) за један час, б) за један дан, в) за 30 минута? (Одг. а) 15,7 cm, б) 376,8 cm, в) 78,5 mm)

10) Један округао сто има у полупречнику 75 cm. Колико особа може сести за тај сто, ако се за сваку особу рачуна 78,5 cm? (Одг. 6 особа)

11) Један тркачки коњ, који у галопу прелази 157 m за минут, обиђе једну кружну тркачку стазу за 12 минута. Колики је полупречник те стазе? (Одг. 300 m)

12) Једна кружна тркачка стаза има полупречник од 250 m. Колико метара прелази у минуту тркачки коњ, који ту стазу обиђе три пута за пола сата? (Одг. 157 m)

13) Колики пут пређе велосипед док се његови точкови, полупречника 35 cm, обрну по правој стази 10 пута? (Одг. 21,98 m)

14) Точкови неких двоколица обрну се 100 пута на стази од 157 m. Колики су полупречници тих точкова? (Одг. 25 cm)

15) Колико ће се пута обрнути точак чији је пречник 80 cm, док пређе пут од 2512 m? (Одг. 1000 пута)

16) Два точка чији су пречници 50 cm и 12 cm, везани су бескрајним кајишем. Ако први точак направи 132 обрта у 1 минуту, колико ће се пута обрнути мањи точак за исто време? (Одг. 550 пута)

17) На кругу $r = 1$ cm израчунај дужину кружног лука коме припада централни угао од а) 60^0, б) 90^0, в) 150^0, г) $22^0\ 30'$, д) $10^0\ 20'\ 30''$. (Одг. а) 1,047 cm, б) 1,57 cm, в) 2,62 cm, г) 0,392 cm, д) 0,18 cm)

18) Колики лук припада централном углу од 75^0, у кругу чији је обим 31,4 cm? (Одг. 6,54 cm)

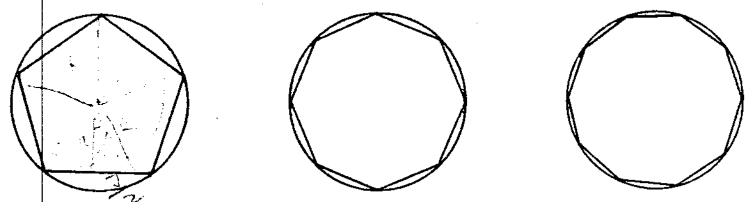
19) Израчунај дужине кружних лукова два концетрична круга $r_1 = 6$ cm и $r_2 = 4$ cm, којима припада исти централни угао од $22^0\ 30'$. (Одг. $l_1 = 2,35$ cm, $l_2 = 1,57$ cm)

20) У кругу полупречника $r = 6$ cm један периферискиугао износи 25^0. Колики лук он захвата? (Одг. 5,23 cm)

21) У кругу полупречника $r = 5$ cm уписан је равнострани троугао. Колики је лук круга над сваком страном тога троугла? (Одг. 10,47 cm)

3. ПОВРШИНА КРУГА

На слици 55 правилни петоугао, осмоугао и десетоугао уписани су у кругу. Из те слике увиђамо да се обим правилног многоугла у толико више приближује обиму круга, у колико му је број страна већи. Ако се број страна таквог



Сл. 55. — Правилни петоугао, осмоугао и десетоугао уписани у кругу.

многоугла стално повећава, његов ће се обим све мање разликовати од обима круга. Зато се каже да круг можемо замислити као правилни многоугао који има безбројно много страна.

По томе, површину круга тражићемо на исти начин као и површину правилног многоугла. Површину овог последњег, међутим, добили смо кад смо производ његовог обима и полупречника уписаног круга поделили са два. Како је обим круга $2r\pi$ а полупречник r, биће:

$$P = \frac{2r\pi . r}{2} = r^2\pi$$

или речима: **површина круга једнака је производу квадрата полупречника и броја π.**

На пример, површина круга чији је полупречник $r = 10$ cm, биће $P = r^2\pi = 10^2 . 3,14 = 314$, тј. $P = 314\ cm^2$.

Из обрасца за површину круга $P = r^2\pi$ добијамо да је

$$r^2 = \frac{P}{\pi} \text{ и } r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$$

тј. полупречник круга можемо израчунати, ако је позната његова површина, кад ову поделимо бројем π и из количника извучемо квадратни корен.

4. ПОВРШИНА КРУЖНОГ ИСЕЧКА, ОТСЕЧКА И КРУЖНОГ ПРСТЕНА

Видели смо да је кружни исечак део кружне површине ограничен са два полупречника и кружним луком (види слику 12). Његову површину добићемо оваквим размишљањем:

Кружни исечак коме припада централни угао од 1^0 има површину 360 пута мању од површине круга, дакле $P = \frac{r^2\pi}{360}$. Ако, пак, једном исечку одговара централни угао од α^0, његова ће површина бити α пута већа, тј.

$$P = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha,$$

или речима: **површину кружног исечка добијамо кад 36 -ти део кружне површине помножимо одговарајућим углом.**

На пример, ако је у кругу полупречника $r = 10$ cm, $\alpha = 18^0$, површина исечка коме тај угао припада биће $P = \frac{100.3,14}{360} \cdot 18 = 15,7$ тј. $P = 15,7 \text{ cm}^2$.

Као и код израчунавања дужине кружног лука, и овде се мора водити рачуна о томе у којим је јединицама дат централни угао. Ако је он дат у минутима или секундима, број 360 у имениоцу мора се помножити са 60, односно са 3600.

Према горњем обрасцу, за површину кружног исечка потребно је знати полупречник круга и одговарајући централни угао. Но ми можемо израчунати површину кружног исечка и помоћу полупречника и исечковог лука. Сетимо се да смо лук добили по обрасцу $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$. Ако одавде израчунамо α, имаћемо: $180 \cdot l = r\pi\alpha$, $\alpha = \frac{180\,l}{r\pi}$. Ако сада вредност угла α заменимо у обрасцу за површину исечка, биће:

$$P = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \frac{180\,l}{r\pi} = \frac{rl}{2}$$

Видимо, дакле, **да је површина кружног исечка једнака половини производа полупречника и исечковог лука.**

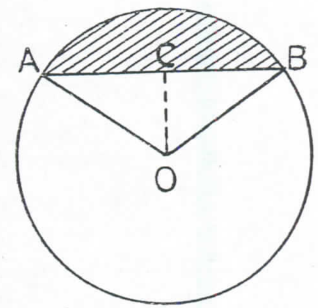
Ако је, на пример, полупречник круга $r = 8$ cm, а лук $l = 12$ cm, површина исечка биће $P = \frac{8.12}{2} = 48$, тј. $P = 48 \text{ cm}^2$.

Посматрајмо сада кружни отсечак на слици 56. Он је, као што знамо, ограничен тетивом и кружним луком.

Површину кружнога отсечка можемо израчунати, ако од површине кружног исечка одузмемо површину троугла AOB. Ако обележимо елементе овако: $\widehat{AB} = l$, $\overline{AB} = a$, $\overline{OC} = h$, $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, површина кружног отсечка биће:

$$P = \frac{1}{2}\,rl - \frac{1}{2}\,ah = \frac{1}{2}\,(rl - ah).$$

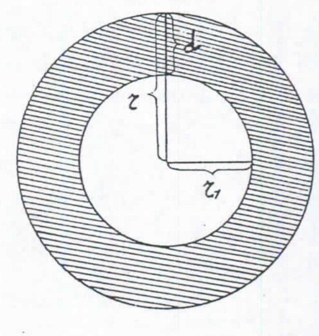
И овде, као и раније, сменом датих посебних бројева за r, l, a, h, добили бисмо бројну вредност површине.



Сл. 56. — Кружни отсечак.

Видели смо раније да под кружним прстеном разумемо површнну између два концентрична круга, као што је на слици 57. Његову површину добићемо, ако од површине већег круга одузмемо површину мањег. Дакле, ако са r и r_1 означимо њихове полупречнике, биће:

$$P = r^2\pi - r_1^2\pi = \pi\,(r^2 - r_1^2) = \pi\,(r + r_1)\,(r - r_1).$$



Сл. 57. — Кружни прстен.

На пример, ако два концентрична круга имају полупречнике $r = 26$ cm и $r_1 = 24$ cm, површина кружног прстена биће: $P = \pi\,(r + r_1)\,(r - r_1) = 3,14.50.2 = 314$, тј. $P = 314 \text{ cm}^2$.

Примедба: Дужину кружног лука, површину круга и његових делова можемо само приближно израчунати, пошто се у обрасцима за израчунавање тих величина налази и број π.

Вежбања

1) Зашто се површина круга, као и кружног отсечка, исечка и прстена не може потпуно тачно израчунати?

2) Израчунати површину круга чији је полупречник

а) 15 cm б) 1,2 dm, в) $\frac{3}{4}$ m г) 1 m 3 dm. (Одг. а) 225 π cm²
б) 1,44 π dm², в) $\frac{9}{16}\pi$ m², г) 1,69 π m²)

3) Колика је површина круга чији је обим а) 314 cm, б) 1,256 m, г) 3 m 1 dm 4 cm ? (Одг. а) 7850 cm², б) 0,1256 cm², 78 dm² 50 cm²)

4) Израчунати полупречник круга чија је површина а) 12,56 cm², б) 0,2826 m², в) $3\frac{7}{50}$ dm², г) 31 cm² 40 mm² (Одг. а) 2 cm, б) 0,3 m, в) 2 dm, г) 3,16 cm)

5) Полупречник круга једнак је страни једног квадрата, површине 225 cm². Колика је површина тог круга.? (Одг. 225 π cm² = 706,5 cm²)

6) Површине два круга су 25,12 cm² и 56,52 cm². Колика је површина оног круга, чији је полупречник једнак збиру полупречника тих кругова? (Одг. $r_3 = 5$ cm, P = 25 π cm²)

7) Колика је површина круга уписаног у квадрату обима 10 cm ? (Одг. 1,5625 cm²)

8) Један круг има исти обим као и правоугаоник дужине 8,6 cm и ширине 5,4 cm. Колика је површина тог круга? (Одг. 62,42... cm²)

9) Обим једног круга је 37,68 cm. Колика је површина његовог квандранта, секстанта, октанта? (Одг. квадрант 28,26 cm², секстант 18,84 cm², октант 14,13 cm²)

10) Из сваког темена квадрата, обима 4,8 cm, описан је круг с полупречником једнаким половини стране квадрата. Колики део површине квадрата остаје између тих кругова? (Одг. прибл. 0,31 cm²)

11) У полукругу пречника 12 cm уписан је равнокрако-правоугли троугао. За колико је полукруг већи од тог троугла? (Нацртај слику) (Одг. 20,52 cm²)

12) Колика је површина кружног исечка, кад је полупречник круга (r) и централни угао који му одговара (α):

а)	б)	в)
r = 10 m	r = 2 dm	r = 20 m
$\alpha = 75^0$	$\alpha = 10^0\,20'$	$\alpha = 20^0 10' 50''$
(Одг. 65,4166... cm²)	(Одг. 0,3605 dm²)	(Одг. 70,41 m²)

13) Израчунати површину кружног исечка, кад је полупречник (r) и одговарајући лук (l):

а)	б)	в)
r = 24 cm	r = 0,5 m	r = $\frac{3}{4}$ лука
l = 45 cm	l = 7,5 dm	l = $1\frac{2}{3}$ dm
(Одг. 540 cm²)	(Одг. 18,75 dm²)	(Одг. $1\frac{1}{24}$ dm²)

14) Колики исечак одговара луку од 12 cm у кругу обима 62,8 cm ? (Одг. 60 cm²)

15) Нацртај круг и у њему једну тетиву. Измери потребне елементе и израчунај површину мањег отсечка.

16) Обими два концентрична круга су 31,4 cm и 62,8 cm. Колика је ширина и површина кружног прстена? (Одг. d = 5 cm, p = 235,5 cm²)

17) Код једног кружног прстена позната је ширина, 4 cm, и обим већег круга, 62,8 cm. Израчунај површину тог кружног прстена. (Одг. 200,96 cm²)

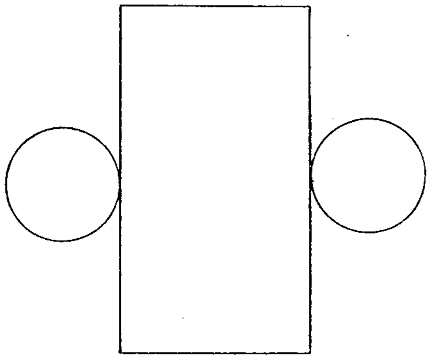
18) Око једног квадрата опиши и у њега упиши круг, измери потребне елементе и израчунај површину кружног прстена.

VI ДЕО:

ПОВРШИНЕ ОБЛИХ ТЕЛА

1. ПОВРШИНА ПРАВЕ ОБЛИЦЕ

Мрежа облице, претставље на наслици 58, показује нам да површину облице можемо добити кад површине двеју основа саберемо са површином омотача. Ако задржимо исте ознаке за основу и омотач као и код рогљастих тела, површина праве облице уопште биће



Сл. 58. — Мрежа праве облице.

$$P = 2B + M$$

Основе су кругови, чије површине умемо да израчунамо. Омотач облице је правоугаоник, чија је дужина једнака обиму основе, а ширина — висини облице. Ако, дакле, са r обележимо полупречник круга, а са h висину облице, њена ће површина бити

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi\,(r+h)$$

Код равностране облице висина је једнака пречнику основе, $h=2r$, па ће њена површина бити

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi.2r = 2r^2\pi + 4r^2\pi = 6r^2\pi$$

тј. **површина равностране облице шест пута је већа од површине њене основе.**

Из обрасца $P = 6\,r^2\pi$ добијамо: $r^2 = \dfrac{P}{6\pi}$ и $r = \sqrt{\dfrac{P}{6\pi}}$,

што значи да можемо израчунати полупречник оне равностране облице чију површину знамо.

2. ПОВРШИНА ПРАВЕ КУПЕ

Ако модел омотача купе расечемо по изводници па га онда развијемо у раван, добићемо кружни исечак. На слици 59 претстављена је мрежа праве купе, која се дакле састоји из једног кружног исечка—омотача, и једног круга—основе

купе. Површину такве купе добићемо, ако саберемо површине основе и омотача:

$$P = B + M$$

Полупречник исечка (развијеног омотача) једнак је изводници купе (s на сл. 60) а лук тога исечка једнак је обиму основе купе ($2r\pi$). Зато је омотач купе

$$M = \frac{1}{2}\,.\,2\,r\,\pi\,.\,s = r\,\pi\,s$$

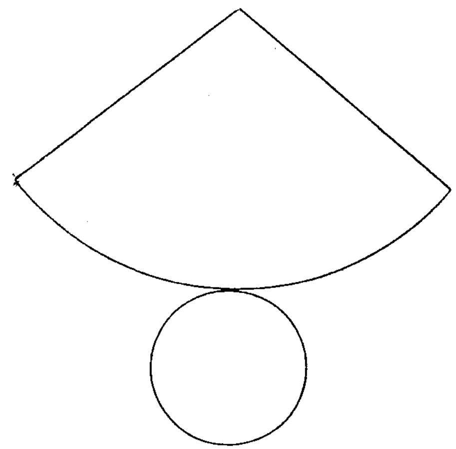
Како је површина основе $B = r^2\pi$, то за површину праве купе добијамо образац

$$P = r^2\pi + r\pi s = r\pi\,(r + s)$$

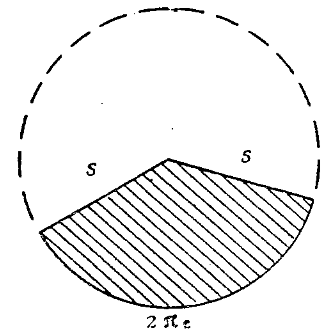
Ако је купа равнострана, изводница је једнака пречнику основе, $s = 2r$. Кад ту смену извршимо у горњем обрасцу, добићемо за површину равностране купе:

$$P = r^2\pi + r\pi \cdot 2r = r^2\pi + 2r^2\pi = 3r^2\pi$$

тј. **површина равностране купе три пута је већа од површине њене основе.**



Сл. 59. — Мрежа праве купе.



Сл. 60. — Развијен омотач праве купе је кружни исечак.

Из обрасца $P = 3r^2\pi$ добијамо:

$$r^2 = \frac{P}{3\pi} \quad \text{и} \quad r = \sqrt{\frac{P}{3\pi}}$$

што значи да можемо израчунати полупречник равностране купе, чија нам је површина позната.

3. ПОВРШИНА ЛОПТЕ

Површину лопте не можемо никако развити у раван, као што смо развили омотаче праве облице и купе. У вишим разредима гимназије видећемо како се доказује да је површина лопте, ако је њен полупречник r,

$$P = 4r^2\pi$$

Раније смо видели да је сваки раван пресек лопте круг. Ако лопту сечемо равнима кроз њен центар, добићемо највеће кругове. Ове кругове назвали смо **основним** или **главним** лоптиним круговима. Образац за површину лопте показује нам, да је **површина лопте четири пута већа од површине њеног основног круга.**

Ако нам је позната површина лопте, можемо израчунати њен полупречник r. Јер, из обрасца $P = 4r^2\pi$ добијамо да је

$$r^2 = \frac{P}{4\pi} \text{ и } r = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}.$$

Вежбања

1) Извести обрасце за површину праве и равностране облице.

2) Који су елементи потребни за израчунавање површине праве односно равностране облице?

3) Израчунати површину праве облице кад је познат полупречник основе (r) и висина (h):

а) $r = 10$ cm, $h = 10$ cm (Одг. $400\,\pi$ cm²)
б) $r = 2{,}5$ dm, $h = 0{,}4$ m (Одг. $32{,}5\,\pi$ dm²)
в) $r = 1$ m 5 dm, $h = 2$ m 4 dm (Одг. $1170\,\pi$ dm²)

г) $r = 1\frac{1}{4}$ m, $h = 0{,}8$ m (Одг. $5\frac{1}{8}\pi$ m²)
д) $r = \frac{3}{4}$ висине, $h = 1\frac{2}{3}$ dm (Одг. $7\frac{7}{24}\pi$ dm²)

4) Обим основе једне праве облице је 31,4 cm, док је висина 20 cm. Колики је омотач те облице? (Одг. 628 cm²)

5) Површина омотача једне праве облице је 1256 cm², док му је висина 20 cm. Колика је површина основе те облице? (Одг. $100\,\pi$ cm²)

6) 15 новоискованих динара наслагано је тако да чине праву облицу. Израчунај омотач те облице, ако је дебљина динара 2 mm а пречник 2 cm. (Одг. 18,84 cm²)

7) Колико динара из задатка шестог ваља наслагати, да се добије равнострана облица? (Одг. 10 комада)

8) Један електрични стуб треба обојити. Колико ће то стајати, ако је висина стуба 4,5 m, пречник основе 30 cm, и ако се за сваки квадратни метар бојења мора платити 10 динара? (Одг. 42,39 д.)

9) Осовински пресек једне праве облице има ове димензије: основицу 10 cm и висину 20 cm. Израчунати површину те праве облице. (Одг. 785 cm²)

10) Код једног правог ваљка је $h = 10$ cm и обим основе $O = 628$ cm. Израчунати површину осовинског пресека. (Одг. 20 dm²)

11) Израчунати површину равностране облице чији је полупречник основе:

а) 10 cm, б) 0,2 m, в) 1 m 5 cm, г) $\frac{2}{3}$ m. (Одг. а) 1884 cm², б) 7536 cm², в) 20 m² 77dm² 11 cm², г) $2\frac{2}{3}\pi$m²)

12) Површина једне равностране облице је 301,44 cm², Колика је њена основа, а колики омотач? (Одг. $B = 16\pi$cm². $M = 64\,\pi$ cm²)

13) Развијен омотач једног равностраног ваљка је правоугаоник висине 20 cm. Колика је површина целог ваљка, а колика површина осовинског пресека? (Одг. $P = 1884$ cm осовински пресек 400 cm²)

14) Осовински пресек једне равностране облице је 256 cm². Колика је површина те облице? (Одг. $384\,\pi$ cm²)

15) Обим основе једног равностраног ваљка је 628 cm. Колика му је површина, а колики осовински пресек? (Одг. $P = 1884$ dm², осовински пресек 4 m²)

16) Површина једне равностране облице је 1884 cm². Израчунати осовински пресек, основу, омотач. (Одг. осовински пресек 400 cm², $B = 314$ cm², $M = 1256$ cm²)

17) Развијен омотач једне праве облице је квадрат стране 31,4 cm. Израчунај површину те облице. (Одг. $364\,\pi$ cm²)

18) Од картона у облику правоугаонника, дужине 62,8 cm и ширине 31,4 cm, може се на два начина направити омотач праве облице. Израчунај у оба случаја површине тих облица. (Одг. $P_1 = 2599{,}92\ cm^2$, $P_2 = 2128{,}92\ cm^2$)

19) Треба начинити једнаке ваљкасте кутије, $r = 5$ cm и $h = 10$ cm. Ако не би ишло ништа на отпатке, колико би се таквих кутија могло начинити од 47 dm^2 10 cm^2 картона? (Одг. 10 комада)

20) Извести обрасце за површину праве и равностране купе.

21) Колико пута је површина равностране купе — односно равностране облице — већа од површине њене основе?

22) Израчунати површину праве купе кад је полупречник (r) и изводница (s)

а) $r = 10$ cm, $s = 30$ cm (Одг. 1256 cm^2)

б) $r = 0{,}5$ m, $s = 24$ dm (Одг. 145π или $455{,}3\ dm^2$)

в) $r = 1\frac{1}{2}$m, $s = \frac{11}{3}$ пречника. (Одг. $18\frac{3}{4}\pi\ m^2$)

23) Обим основе једне праве купе је 50,24 cm, док је изводница три пута већа од полупречника. Израчунати површину омотача. (Одг. $192\pi\ cm^2$ или 602,88 cm^2)

24) Израчунати површину равностране купе кад је полупречник основе а) 10 cm, б) 2,4 dm, в) 2 m 8 cm, г) $1\frac{1}{2}$ m. (Одг. а) 942 cm^2, б) $17{,}28\ \pi\ dm^2$, в) $129792\pi\ cm^2$, г) $6\frac{3}{4}\pi\ m^2$)

25) Колика је површина равностране купе чија је изводница а) 12 cm, б) 0,54 m, в) 1 m 4 dm, г) $\frac{3}{4}$ m. (Одг. а) $108\ \pi\ cm^2$, б) $2187\ \pi\ cm^2$, в) $147\ \pi\ dm^2$, г) $\frac{27\ \pi}{64} m^2$.)

26) Колики је полупречник основе равностране купе чија је површина а) 37,68 cm^2, б) 84,78 m^2, в) 1 m^2 50 dm^2 72 cm^2? (Одг. а) 2 cm, б) 3 m, в) 4 dm)

27) Ако се омотач равностране купе развије у раван, добија се полукруг. Покажи то огледом и рачунски!

28) Равнокраки троугао основице 12 cm и крака 15 cm, обрће се око своје симетрале. Израчунај површину обртнога тела. (Одг. $126\ \pi\ cm^2$)

29) Правоугли троугао с катетама 6 cm и 8 cm и хипотенузом 10, cm обрће се око једне, па затим око друге катете. Која од насталих купа има већу површину и за колико већу? (Одг: већу површину има купа чија је висина 6 cm и то за $48\ \pi\ cm^2$ већу)

30) Од кружног исечка ($r = 6$ cm и $\alpha = 75^0$) начињен је омотач једне купе. Израчунати целу површину те купе (Одг. $906{,}25\ \pi\ mm^2$)

31) Израчунати површину лопте полупречника а) 5 cm, б) 1,2 dm, в) 0,15 m, г) 1 m 8 dm, д) $1\frac{3}{4}$m (Одг. а) 314 cm^2, б) 1808,64 cm^2, в) 2826 cm^2, г) 4069,44 dm^2. д) $12\frac{1}{4}\pi\ m^2$)

32) Израчунати полупречник лопте чија је површина а) 5024 cm^2, б) 28,26 cm^2, в) 3 m^2 14 dm^2. (Одг. а) 20 cm, б) 1,5 cm, в) 5 dm)

33) Колика је површина Земље, кад јој је полупречник 6378 km? (Одг. 510926783 km^2 прибл.)

34) Нацртати круг чија ће површина бити једнака површини лопте, полупречника 2 cm. (Одг. полупр. траженог круга биће 4 cm)

35) Лопта има површину једнаку равностраној купи, чија је изводница 8 cm. Колики је полупречник лопте? (Одг. $\sqrt{12}$ cm или 3,46 cm)

36) Пречник једне лопте једнак је висини једног равностраног ваљка. Које од та два тела има већу површину? Колика је лоптина површина према омотачу тог ваљка?

37) Ако су полупречници лопте, равностраног ваљка и равностране купе једнаки, које од тих тела има највећу површину, а које најмању?