РАДОЈЕ Д. ОБРАДОВИЋ
професор

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА IV РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

СА ВЕЖБАЊИМА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ ЗА НИЖИ ТЕЧАЈНИ ИСПИТ

Овај уџбеник препоручен је од Главног просветног Савета С.Бр. 243 од 14 маја 1940 године, и одобрен од Господина Министра просвете IV-бр. 4541 од 27 маја 1940 год. Овај уџбеник важи до краја 1943/44 год.

1940
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА
ТОМЕ ЈОВАНОВИЋА И ВУЈИЋА, БЕОГРАД
„ЗЕЛЕНИ ВЕНАЦ"

1 9 4 0.
БЕОГРАД
За штампарију „ЗОРА", Космајска ул. 24. — Телефон 29-920.
Јосип Климпл, Боже Јанковића 18.

САДРЖАЈ

I ДЕО:

Питагорино правило и његова примена на равне слике

Страна

II ДЕО:

Положаји правих и равни у простору

III ДЕО:

Запремина тела и примена Питагориног правила на тела

ДОДАТАК

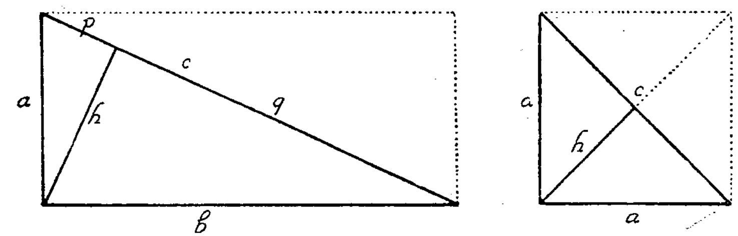
A B

I ДЕО

ПИТАГОРИНО ПРАВИЛО И ЊЕГОВА ПРИМЕНА НА РАВНЕ СЛИКЕ

1. О ПРАВОУГЛОМ ТРОУГЛУ

Правоугли троугао је, као што знамо, сваки онај троугао чији је један угао прави. Две његове стране које чине прави угао зову се катете, а трећа — најдужа — хипотенуза. Правоугли троугао, као и сваки други, има три висине. Код њега су катете, зато што су једна на другој нормалне, у исто време једна другој висина. Трећу висину називамо хипотенузином висином. Ова висина дели хипотенузу на два отсечка, p и q на сл. 1, I, од којих је већи онај који је ближи већој катети.



Сл. 1. — Правоугли (I) и равнокрако-правоугли троугао (II).

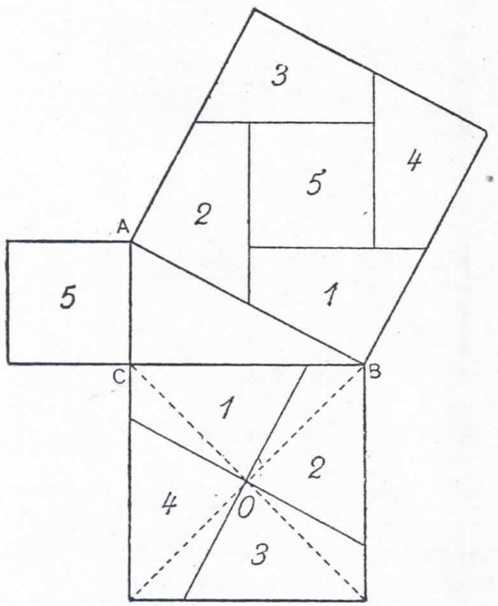
Ако су катете једнаке, троугао називамо равнокрако-правоуглим (сл. 1, II). Хипотенузина висина у овом троуглу симетрично дели и угао из чијег темена полази, и хипотенузу, и цели троугао. Два троугла која се добијају повлачењем ове висине, опет су равнокрако-правоугли. Према томе, хипотенузина висина равнокрако-правоуглог троугла једнака је половини хипотенузе, $h = \frac{c}{2}$ према слици 1,II.

Правоугли троугао може се иначе сматрати као половина правоугаоника, а равнокрако-правоугли као половина квадрата (види тачкице на сл. 1). Због тога је површина правоуглог троугла $P = \frac{1}{2}ab$ или $= \frac{1}{2}ch$, а површина равнокрако-правоуглог троугла $P = \frac{1}{2}a^2$ или $= \frac{1}{4}c^2$ (према елементима обележеним на сл. 1).

2. ПИТАГОРИНО ПРАВИЛО

Између страна правоуглог троугла постоји један у геометрији веома важан однос. Ако се, наиме, над сваком страном правоуглог троугла конструише квадрат (тако да страна троугла буде у исто време и страна квадрата), онда се може за сваки правоугли троугао доказати ово правило:

Квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама.



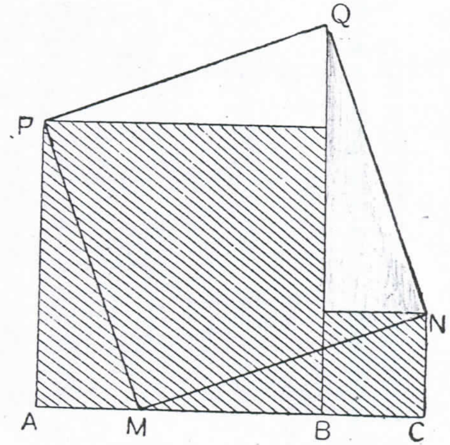
Сл. 2. — Један доказ Питагориног правила.

До овог закључка дошао је чувени грчки математичар **Питагора** (VI век пре Христа) по коме се и зове **Питагорино правило.**

Питагорино правило може се доказати на много интересантних начина, од којих ћемо један извести уз помоћ слике 2. Ту је над сваком страном правоуглог троугла ABC нацртан квадрат. Тачка O у квадрату над већом катетом BC претставља пресек дијагонала. Ако се кроз ту тачку повуче нормала на хипотенузу, затим и паралелна права с њом, поделићемо тај квадрат на четири дела, означена са 1, 2, 3, и 4. Та четири дела, заједно са мањим квадратом 5, могу тачно да покрију ква-

драт над хипотенузом, као што показује слика 2, а то значи да је заиста квадрат над хипотенузом једнак збиру квадрата над катетама.

У вези са сл. 3 научићемо још један начин да докажемо Питагорино правило. На тој слици нацртана су један поред другог два квадрата, и да би се боље уочили исцртана су паралелним цртама. На страни AB већег квадрата означимо тачку M тако, да буде дуж AM једнака страни мањег квадрата, па ту тачку спојимо с тачкама P и N. Сада два тако добијена троугла AMP и MCN исецимо и, пошто се поклапањем уверимо да су подударни, ставимо их на места троуглова који на слици нису исцртани. Тако добијамо четвороугао MNQP, за који се — ако смо тачно радили — брзо и лако уверавамо да је квадрат (стране једнаке, углови прави).



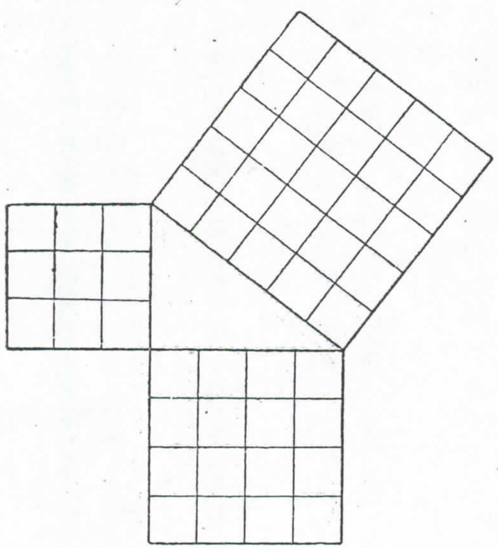
Сл. 3. — Један доказ Питагориног правила

На тај начин ми смо два квадрата, чије су стране у ствари катете правоуглог троугла (види слику) претворили у један, чија је страна хипотенуза тог истог троугла — и тиме смо још једном доказали Питагорино правило.

Ово се правило може проверити и обичним мерењем; али за то није погодан сваки правоугли троугао, јер код сваког не добијамо поменуте квадрате такве да се могу претставити целим бројевима истих квадратних јединица. Зато је на сл. 4 изабран троугао чије су катете 3 и 4, а хипотенуза 5 дужинских јединица. (Сваки троугао чије су стране 3, 4 и 5 дужинских јединица јесте правоугли, у шта се можемо уверити конструкцијом и мерењем. Како је ово било познато и старим Египћанима, овај троугао често називају „египатским“ троуглом). Ако се над странама овог троугла конструишу квадрати и ови поделе на једнаке квадратне јединице, добићемо да је 9+16=25, чиме је и на овај начин доказано Питагорино правило.

Пошто ово правило важи за све правоугле троугле, то ако хипотенузу означимо са c a катете са a и b, можемо написати

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Сл. 4. — Доказ Питагориног правила на „египатском троуглу".

што је у ствари Питагорино правило изражено алгебарским језиком. Из истог правила излази да се квадрат над једном катетом може добити, кад од квадрата над хипотенузом одузмемо квадрат над другом катетом. То се алгебарским језиком, са горњим ознакама, може овако изразити

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ и } b^2 = c^2 - a^2$$

Сетимо се сада из алгебре за III разред да један број, чији нам је квадрат познат, можемо добити ако из тог квадрата извучемо квадратни корен. За горње алгебарске једнакости то значи да је

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Ови обрасци показују јасно, да сваком правоуглом троуглу можемо израчунати једну страну, ако су нам познате остале две. На пример, ако је хипотенуза једног троугла $c = 25$ cm, а једна катета $b = 24$ cm, другу катету a израчунавамо овако:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7,$$

тј. $a = 7$ cm.

Примедба: Кад израчунавамо катету, поткорена количина је уствари разлика квадрата, коју можемо да раставимо на чинитеље овако:

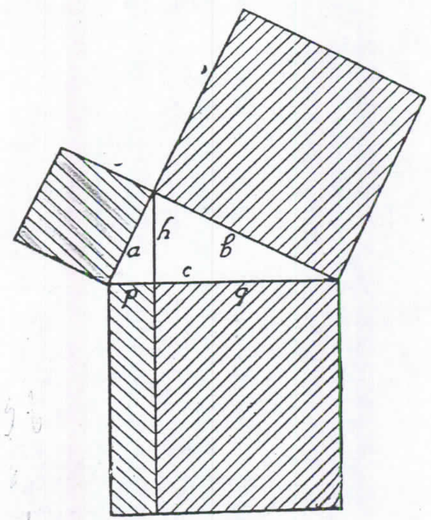
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)} \text{ и } b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$$

Слободно је, а често и простије, употребити у рачуну овако растављене изразе. За горе израђени пример имамо:

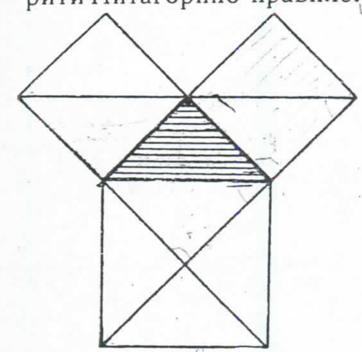
$$a = \sqrt{(c+b)(c-b)} = \sqrt{49.1} = \sqrt{49} = 7, \text{ тј. } a = 7 \text{ cm}.$$

Вежбања

1) На већем комаду хартије конструиши правоугли троугао чије су катете 6 cm и 8 cm, и над сваком страном његовом конструиши квадрат; затим повуци висину на хипотенузу и продужи је тако, да она дели квадрат над хипотенузом у два правоугаоника (сл. 4a.). Сада измери потребне елементе (c, p и q на слици 4a) и рачунским путем докажи да је мањи од тих правоугаоника једнак мањем квадрату, а већи већем. На тај начин може се проверити Питагорино правило.



Сл. 4a.



Сл. 4b.

2) Конструиши квадрате над сваком страном једног равнокрако-правоуглог троугла, и у њима повуци дијагонале — и то у већем квадрату обе, у мањим по једну (сл. 4b.) Помоћу подударности добијених троуглова покажи да Питагорино правило важи и за овакве (равнокрако-правоугле) троугле.

3) Израчунати хипотенузу (c) правоуглог троугла, чије су катете (a и b):

а) $a = 5$ cm
$b = 12$ cm
(Одг. $c = 13$ cm)

б) $a = 24$ cm
$b = 7$ cm
(Одг. $c = 25$ cm)

в) $a = 65$ mm
$b = 156$ mm
(Одг. $c = 169$ mm)

г) $a = 3,3$ cm
$b = 5,6$ cm
(Одг. $c = 6,5$ cm)

д) $a = 4$ m
$b = 7$ m
(Одг. $c = 8,06$ m приближно)

4) Израчунати једну катету правоуглог троугла (a или b), кад му је хипотенуза (c):

а) $c = 25$ cm
$b = 15$ cm
(Одг. $a = 20$ cm)

б) $c = 25$ cm
$a = 7$ cm
(Одг. $b = 24$ cm)

в) $c = 3,5$ m
$b = 2,1$ m
(Одг. $a = 2,8$ m)

г) $c = 9$ cm
$b = 5$ cm
(Одг. $a = 7,48$ cm приближно)

5) Израчунати обим (O) и површину (P) правоуглог троугла кад су познате катете (a и b)

а) $a = 30$ cm
$b = 40$ cm
(Одг. $O = 120$ cm, $P = 600$ cm^2)

б) $a = 14$ cm
$b = 48$ cm
(Одг. $O = 112$ cm, $P = 336$ cm^2)

в) $a = 10$ cm
$b = 7$ cm
(Одг. $O = 29,2$[illegible] cm, $P = 35$ cm^2)

6) Хипотенуза једног правоуглог троугла је $2\frac{1}{2}$ cm, а једна катета износи три петине хипотенузе. Израчунати другу катету. (Одг. 2 cm)

7) Код једног правоуглог троугла једна катета двапут је већа од друге. Израчунати његову хипотенузу, ако му је површина 16 cm^2. (Одг. $4\sqrt{5}$ cm)

8) Лестве дуге 25 m прислоњене су на кућу, тако да им врх на кући достиже висину од 24 m. Колико метара је удаљен доњи крај лестава од подножја куће? (Одг. 7 m)

3. КОНСТРУКТИВНЕ ПРИМЕНЕ ПИТАГОРИНОГ ПРАВИЛА

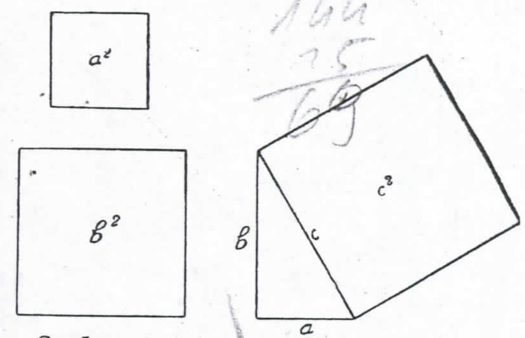
Из неколико следећих задатака видећемо како се Питагорино правило може искористити у конструкцијама.

1) **Задатак: Конструисати квадрат који ће бити једнак збиру два дата квадрата.**

12.12

Нека су два дата квадрата a^2 и b^2 на сл. 5. По Питагорином правилу, тражени квадрат имаће страну једнаку хипотенузи оног правоуглог троугла, чије су катете једнаке странама датих квадрата.

Зато треба конструисати такав правоугли троугао, као и квадрат над његовом *хипотенузом* (овај се може и засебно конструисати, а не мора као на слици 5). Овај квадрат је тражени квадрат, јер је $c^2 = a^2 + b^2$.

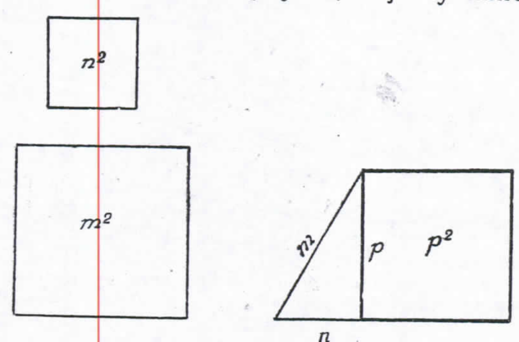


Сл. 5. — Конструкција квадрата једнаког збиру два дата квадрата, $c^2 = a^2 + b^2$.

2) **Задатак: Конструисати квадрат који ће бити једнак разлици два дата квадрата.**

На сл. 6 дати квадрати су m^2 и n^2. Тражени квадрат ће, по Питагорином правилу, имати страну једнаку катети оног правоуглог троугла, чије су хипотенуза и друга катета једнаке странама датих квадрата. Зато треба конструисати правоугли троугао са хипотенузом m и катетом n, па ће квадрат конструисан над другом катетом, p, бити тражени квадрат. Дакле

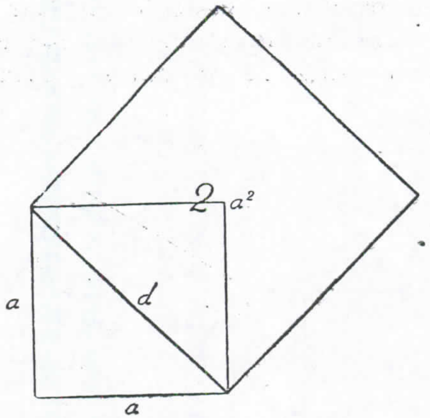
$$p^2 = m^2 - n^2.$$



Сл. 6. — Конструкција квадрата једнаког разлици два дата квадрата, $p^2 = m^2 - n^2$.

3) **Задатак: Конструисати квадрат двапут већи од једног датог квадрата.**

Ако датом квадрату, стране a на сл. 7, повучемо дија-



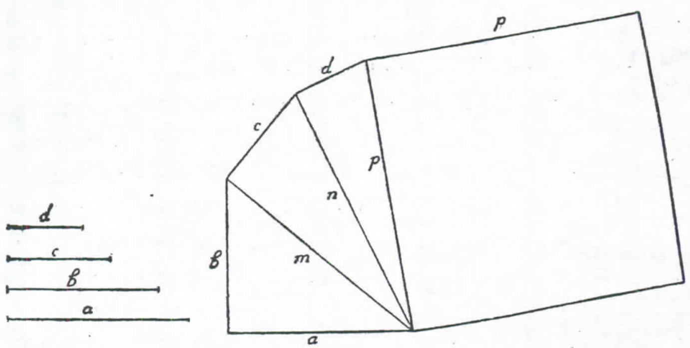
Сл. 7. — Конструкција квадрата двапут већег од датог квадрата.

гоналу, онда ће квадрат над том дијагоналом бити двапут већи од датог. Јер по Питагорином правилу је $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Имајући у виду решење овог задатка, није тешко решити и обрнут задатак, тј. **конструисати квадрат двапут мањи од датог квадрата.**

4) **Задатак: Конструисати квадрат једнак збиру више датих квадрата.**

На сл. 8 претстављене су стране датих квадрата (уместо самих квадрата, што је сасвим довољно). То су дужи a, b, c, и d. Да бисмо добили квадрат једнак збиру свих ових датих



Сл. 8. — Конструкција квадрата једнаког збиру четири дата квадрата, $p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

квадрата, треба прво конструисати страну m квадрата, који је једнак збиру два дата, $m^2 = a^2 + b^2$. Затим конструишемо страну n квадрата који је једнак збиру $m^2 + c^2$, или: $n^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Најзад конструишемо хипотенузу p за катете n и d, и добијамо да је квадрат над њом $p^2 = n^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, чиме је задатак решен.

Вежбања

1) Конструисати квадрат једнак збиру два дата квадрата.

2) Конструисати квадрат једнак разлици два дата квадрата.

3) Конструисати квадрат који је од једног датог квадрата већи а) два пута, б) три пута, в) четири пута, г) пет пута.

4) Конструисати квадрат једнак половини једног датог квадрата.

5) Конструисати квадрат једнак четвртини једног датог квадрата.

6) Колики је квадрат који је два пута већи од збира два дата квадрата.

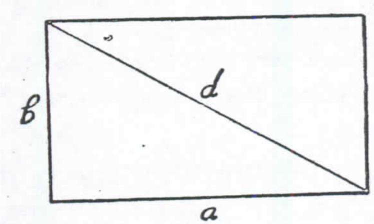
7) Конструисати квадрат једнак половини збира два дата квадрата.

8) Дата су два неједнака квадрата. Конструисати квадрат који ће бити три пута већи од њихове разлике.

4. ПРИМЕНА ПИТАГОРИНОГ ПРАВИЛА НА РАВНЕ СЛИКЕ

Питагорино правило може се применити на све равне слике у којима се, повлачењем помоћних дужи, може добити правоугли троугао. Из неколико следећих примера видећемо како то практично изгледа.

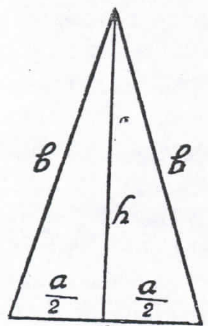
Како да израчунамо површину једног правоугаоника, кад нам је позната његова дужина и дијагонала? Пошто се површина налази као производ дужине и ширине, то ћемо помоћу Питагориног правила израчунати ширину, а затим површину. Нека је, на пример, дијагонала 17 cm а дужина 15 cm; биће (према ознакама на сл. 9) $b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64}$ тј. $b = 8$ cm, па је површина $P = ab = 15.8 = 120$, тј. $P = 120\ cm^2$.



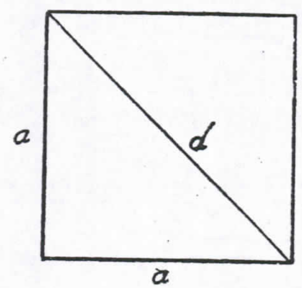
Сл. 9.

Ако једном равнокраком троуглу повучемо висину на основицу, она, као што смо видели, дели симетрично и угао при врху, и основицу, и цели троугао. Према сл. 10, два подударна правоугла троугла које тако добијамо, имају хипотезу b и катете $\frac{a}{2}$ и h. Ако знамо два од тих елемената, трећи можемо израчунати.

Узмимо да се тражи, на пример, обим равнокраког троугла, чија је основица 10 cm а висина 12 cm. Крак b добијамо овако: $b = \sqrt{h^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ тј. $b = 13$ cm. Сада је обим: $O = a + 2b = 10 + 2.13 = 36$, тј. $O = 36$ cm.



Сл. 10.



Сл. 11.

Посматрајмо квадрат на слици 11. Његову дијагоналу можемо израчунати, кад нам је позната страна, као хипотенузу равнокрако-правоуглог троугла. Према сл. 11 је

$$d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}.\ \sqrt{a^2} = \sqrt{2}\ a = a\sqrt{2},$$

тј. **дијагоналу квадрата израчунавамо, кад страну помножимо кореном из два.** Како се $\sqrt{2}$ може само приближно одредити (то је такозвани ирационални број), то треба да имамо на уму да се дијагонала квадрата помоћу стране може само приближно израчунати.

Из обрасца $d = a\sqrt{2}$ излази да је $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$, тј. **страну квадрата можемо израчунати кад дијагоналу поделимо кореном из два.**

Ако разломак $\frac{d}{\sqrt{2}}$ проширимо кореном из 2, добићемо да је

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

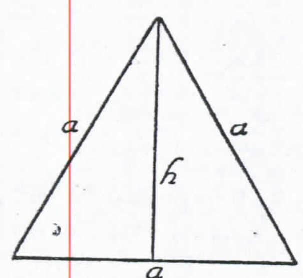
што је за израчунавање згодније, јер именилац постаје цео број.

Видели смо да се равнострани троугао може висином симетрично поделити на два правоугла троугла, као на сл. 12. Према ознакама на тој слици, хипотенуза таквог једног троугла је a, а катете су му h и $\frac{a}{2}$.

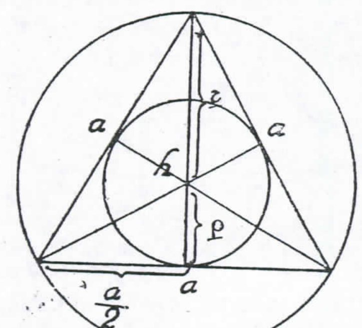
Ако помоћу Питагориног правила израчунамо висину (катету), добићемо

$$h = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}.\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

тј. висину равностраног троугла добијамо, кад половину стране помножимо кореном из 3. Узмимо да је $a = 8$ cm, па ће бити: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 1{,}73 \cdot 4 = 6{,}92$, тј. $h = 6{,}92$ cm (приближно, јер смо $\sqrt{3}$ могли одредити само приближно).



Сл. 12.



Сл. 13.

Из обрасца $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ добија се да је $2h = a\sqrt{3}$ а одатле је $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ или, кад проширимо тај разломак кореном из 3, биће $a = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$, што значи да страну равностраног троугла можемо израчунати помоћу висине. За $h = 6$ cm биће $a = \frac{2.6\sqrt{3}}{3} = 4\cdot1{,}73 = 6{,}92$, тј. $a = 6{,}92$ cm.

Површину сваког троугла можемо добити, као што смо видели, ако израчунамо половину производа основице и висине, тј. $P = \frac{1}{2}ah$. Али како код равностраног троугла можемо висину изразити помоћу стране и страну помоћу висине, то ће и његова површина моћи да буде изражена само једним од ових елемената. Тако добијамо:

$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ и}$$

$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}h \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h^2}{2\sqrt{3}} = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$

Видели смо раније (Геометрија за II разред), да се код равностраног троугла и симетрале страна, и симетрале углова, и висине, и тежишне линије секу у једној тачки. Та је тачка центар и описаног и уписаног круга, и ови су кругови, према томе, концентрични (сл. 13). Мерењем (шестаром) се лако показује, да је полупречник описаног круга (r) двапут већи од полупречника уписаног круга ρ (читај ро), дакле $r = 2\rho$. Према овоме, а узевши у обзир да смо већ израчунали висину помоћу стране, добијамо:

$$h = r + \rho = 2\rho + \rho = 3\rho,$$

$$r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ и}$$

$$\rho = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

(Све ове обрасце за равнострани троугао треба добро запамтити, али не учећи напамет, већ решавањем већег броја задатака о равностраном троуглу).

Из конструкције правилног шестоугла сазнали смо, да је код њега полупречник описаног круга једнак страни, $r = a$ према сл. 14. Другим речима, сваки се правилни шестоугао

може дијагоналама-симетралама поделити на шест равностраних троуглова.

Ако обрасце које смо добили помоћу Питагориног правила за равнострани троугао, применимо и код правилног шестоугла, биће:

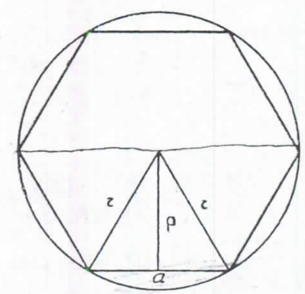
$$a = r = \frac{2\rho}{\sqrt{3}} = \frac{2\rho\sqrt{3}}{3} \text{ и } \rho = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Како се правилни шестоугао састоји из шест равностраних троуглова, то ће његова површина бити:

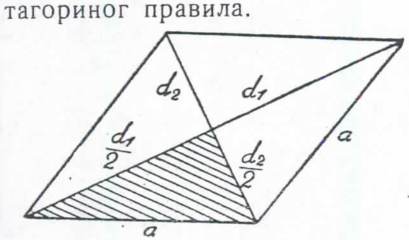
$$P = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \text{ или } P = \frac{6\rho^2}{\sqrt{3}} = \frac{6\rho^2\sqrt{3}}{3}$$

Видимо, дакле, да је за израчунавање површине правилног шестоугла довољно да знамо само један податак, и то било страну, било полупречник уписаног круга.

Пошто се код ромба дијагонале полове и секу нормално, то оне деле ромб на четири подударна правоугла троугла (сл. 15). У сваком од ових троуглова хипотенуза је страна ромба, а катете су половине дијагонала. Кад су, дакле, позната два од ових елемената, трећи можемо израчунати помоћу Питагориног правила.



Сл. 14.



Сл. 15.

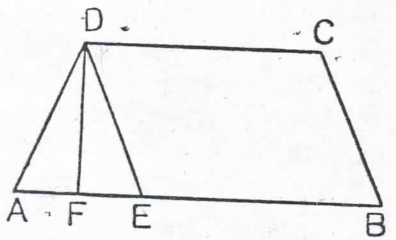
Нека је, на пример, страна једног ромба $a = 10$ cm, и једна дијагонала $d_1 = 16$ cm, па се тражи његова површина. Како нам је за површину ромба потребна и друга дијагонала, то њу прво и тражимо као катету правоуглог троугла овако:

$$\frac{d_2}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2} = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6, \text{ а } d_2 = 12 \text{ cm}.$$

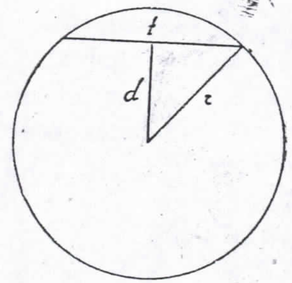
Површина је онда: $P = \frac{1}{2}d_1 d_2 = \frac{1}{2}\,16.12 = 96$, тј. $P = 96$ cm_2

На сл. 16 равнокраки трапез ABCD подељен је помоћу дужи DE ($DE \parallel BC$) на паралелограм BCDE и равнокраки троугао AED. На овај последњи можемо применити Питагорино правило.

Нека је задато да израчунамо висину $DF = h$ овог трапеза (која је у исто време и висина поменутог троугла), кад су познате стране, и то паралелне $AB = a = 28$ cm и $CD = b = 12$ cm, и крак $AD = BC = c = 17$ cm. Висину ћемо израчунати из правоуглог троугла AFD (или DFE), у коме је хипотенуза крак c, а позната катета AF (или EF) $= \frac{a-b}{2}$. Према томе је: $h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$, тј. $h = 15$ cm.



Сл. 16.



Сл. 17.

Ако из центра круга повучемо нормалу на тетиву, та нормала, као што смо видели, у исто време и полови тетиву, тј. она јој је симетрала. Ако повучемо и полупречник до крајње тачке тетиве, добићемо правоугли троугао (сл. 17). Питагорино правило, дакле, можемо применити и код круга.

Нека је задато да израчунамо дужину тетиве (t), кад се зна њено централно отстојање $d = 8$ cm и кад је полупречник круга $r = 17$ cm. Како отстојање полови тетиву, то је $\frac{t}{2} = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$, а $t = 30$ cm (дужина тражене тетиве).

Вежбања

1) Израчунати дијагоналу правоугаоника основице 44 cm и висине 33 cm. (Одг. 55 cm)

2) Обим једног правоугаоника је 46 cm, а дужина 15 cm. Колика му је дијагонала? (Одг. 17 cm)

3) Површина једног правоугаоника је 168 cm², а висина 7 cm. Израчунати му дијагоналу. (Одг. 25 cm)

4) Колика је површина правоугаоника чија је дужина 56mm а дијагонала 65 mm. (Одг. 1848 mm)

5) Димензије једног правоугаоника су 12 dm и 5 dm. Израчунати обим описаног круга. (Одг. 13 π dm)

6) Обим круга описаног око једног правоугаоника је 26 π cm. Колика је површина тог правоугаоника ако му је дужина 24 cm? (Одг. 240 cm²)

7) У кругу површине 100 π cm² уписан је правоугаоник чија је једна страна 12 cm. Колики је обим тог правоугаоника? (Одг. 56 cm)

8) Дужа страна једног правоугаоника је 30 cm, а дијагонала 34 cm. Колика је површина квадрата конструисаног над његовом краћом страном? (Одг. 256 cm²)

* * *

9) Израчунати висину равнокраког троугла ако му је основица 16 cm а крак 17 cm. (Одг. 15 cm)

10) Колики је обим равнокраког троугла чија је основица 30 mm а висина 36 mm? (Одг. 108 mm)

11) Основица једног равнокраког троугла је 14 cm а крак 25 cm. Израчунати му површину. (Одг. 168 cm²)

12) Обим равнокраког троугла, чија је основица 66 mm, је 196 mm. Колика му је површина? (Одг. 1848 mm²)

13) Колики је обим оног равнокраког троугла чија је површина 168 cm², а висина 24 cm. (Одг. 64 cm)

14) Један равнокраки троугао има основицу 32 cm, а обим му је 100 cm. Колика је површина квадрата конструисаног над његовом висином? (Одг. 900 cm²)

* * *

15) Израчунати дијагоналу квадрата чија је страна а) 100 mm, б) 12 cm, в) 4 $\sqrt{2}$ dm. (Одг. а) 100 $\sqrt{2}$ mm = 141 mm, б) 12 $\sqrt{2}$ cm, в) 8 dm)

16) Колика је страна квадрата чија је дијагонала а) 20 cm, б) 70 dm, в) 3 $\sqrt{2}$ m? (Одг. а) 14,1 cm, б) 49,35 dm, в) 3 m)

17) Ако је обим квадрата 412 mm, колика му је дијагонала? (Одг. 145,23 mm)

18) Површина једног квадрата је 784 cm^2 Израчунати му обим и дијагоналу. (Одг. $O = 112$ cm, $d = 39,48$ cm)

19) Израчунати обим и површину квадрата чија је дијагонала $5\sqrt{2}$ cm. (Одг. $O = 20$ cm, $P = 25$ cm^2)

20) Око квадрата стране $4\sqrt{2}$ cm описан је круг. Колики је обим тога круга? (Одг. 8π cm)

21) Ако је дијагонала једног квадрата $8\sqrt{2}$ m, колики је обим круга уписаног у том квадрату? (Одг. 8π m)

22) Обим круга описаног око једног квадрата је 12π m. Израчунати обим уписаног круга у истом квадрату. (Одг. $8,46\pi$ m)

23) Квадрату стране 10 cm описан је и уписан круг. Колика је површина добијеног кружног прстена? (Одг. 25π cm^2)

24) Површина једног квадрата је 576 cm^2. За колико је обим описаног круга већи од обима уписаног? (Одг. Ако се узме $\sqrt{2} = 1,4$, онда је $O_1 - O_2 = 9,6\pi$ cm)

25) У кругу обима 10π cm уписан је квадрат. Израчунати обим и површину тог квадрата. (Одг. $O = 28,20$ cm и $P = 50$ cm^2)

26) Око круга површине 64π cm^2 описан је квадрат. Израчунати обим и дијагоналу тог квадрата. (Одг. $O=64$ cm, $d=16\sqrt{2}$ cm)

27) Израчунати отсечак између периферије круга, полупречника 4 cm, и стране уписаног квадрата. (Одг. 4,56...cm^2)

28) Око квадрата описан је круг, и над једном његовом страном, као над пречником, описан је споља полукруг. Колика је површина тако добијеног „месеца“, ако је дијагонала квадрата $4\sqrt{2}$ cm? (Одг. 4 cm^2)

29) Средина једне стране квадрата, чији је обим 16 cm, спојена је дужима са два супротна темена квадрата. Израчунати обим тако добијеног равнокраког троугла (Одг. 12,94... cm)

30) Квадрат од картона, стране 4 cm, преполовљен је средњом линијом, и од његових делова начињен је правоугаоник. За колико је милиметара дијагонала овог правоугаоника већа од дијагонале квадрата? (Одг. за 26 mm)

* * *

31) Страна једног равностраног троугла је 20 cm. Израчунати висину и површину. (Одг. $h = 17,3$ cm и $P = 173$ cm^2)

32) Ако је висина равностраног троугла $\sqrt{3}$ cm, колика му је страна и површина? (Одг. $a = 2$ cm, $P = \sqrt{3}$ cm^2)

33) Обим једног равностраног троугла је 18 cm. Израчунати висину, полупречник описаног и полупречник уписаног круга и површину тог троугла. (Одг. $h = 5,19$ cm, $r = 3,46$ cm, $\rho = 1,73$ cm и $P = 15,57$ cm^2)

34) Колики је обим равностраног троугла чија је површина 10 cm^2? (Одг. 14,4 cm)

35) Ако је површина једног равностраног троугла $3\sqrt{3}$ cm^2, колика му је висина? (Одг. 3 cm.)

36) Висина једног равностраног троугла је 12 cm. Колики је обим описаног круга? (Одг. 16π cm)

37) Страна једног равностраног троугла је 6 m. Израчунати површину уписаног круга. (Одг. 3π cm^2)

38) У кругу обима 12π cm уписан је равнострани троугао. Израчунати његову висину и страну. (Одг. $h = 9$ cm, $a = 6\sqrt{3}$ cm)

39) Око круга обима 10π cm описан је равнострани троугао. Израчунати висину и страну тог троугла. (Одг. $h = 15$ cm, $a = 10\sqrt{3}$ cm)

40) Висина једног равностраног троугла је 18 cm. Израчунати површину кружног прстена између описаног и уписаног круга. (Одг. 108π cm^2)

41) Колика је површина кружног прстена између описаног и уписаног круга оног равностраног троугла, чија је страна $6\sqrt{3}$ dm? (Одг. 27π dm^2)

42) Израчунати површину отсечка између периферије круга, полупречника 6 cm, и стране уписаног равностраног троугла. (Одг. 22,11... cm^2)

43) Око равностраног троугла стране $4\sqrt{3}$ cm, описан је круг, и над једном његовом страном, као над пречником, описан је споља полукруг. Израчунати површину „месеца“ који се тако добија. (Одг. 9,01 cm^2)

44) Површина једног равностраног троугла је $3\sqrt{3}$ m^2. Колика је дијагонала квадрата чија је страна једнака висини тог троугла? (Одг. $3\sqrt{2}$ m^2)

45) Обим једног квадрата је 16 cm. Израчунати површину слике која се добија кад се над сваком страном тог квадрата конструише равнострани троугао. (Одг. 43,68 cm^2)

46) Израчунати висину равностраног троугла чија је страна једнака дијагонали правоугаоника дужине 30 cm и ширине 16 cm. (Одг. 29,41...cm)

47) Израчунати висину равностраног троугла чија је страна једнака дијагонали квадрата стране $2\sqrt{2}$ m. (Одг. 3,46 m)

48) У кругу полупречника 6 cm уписани су квадрат и равнострани троугао. Која од ове две слике има већи обим и за колико? (Одг: Обим квадрата већи је за 2,7...cm)

49) У квадрату површине 576 mm^2 уписан је круг, а у овом кругу равнострани троугао. Израчунати обим ових слика. (Одг: Обим квадрата 96 mm, круга 24π mm, а троугла $36\sqrt{3}$ mm)

* * *

50) Страна једног правилног шестоугла је 4 cm. Израчунати његову површину и полупречник уписаног круга. (Одг. $P = 24\sqrt{3}$ cm^2, $\rho = 2\sqrt{3}$ cm)

51) У кругу обима 12π cm уписан је правилни шестоугао. Колики му је обим и површина? (Одг. O=36 cm, $P = 54\sqrt{3}$ cm^2)

52) Израчунати обим круга уписаног у правилном шестоуглу стране $4\sqrt{3}$ dm. (Одг. 12π dm)

53) Израчунати површину круга описаног око правилног шестоугла чији је обим 48 cm. (Одг. 64π cm^2)

54) Правилном шестоуглу, стране $2\sqrt{3}$ cm, описан је и уписан круг. Израчунати површину кружног прстена између та два круга. (Одг. 3π cm)

55) Површина једног правилног шестоугла је 30 cm^2. Израчунати му страну и полупречник уписаног круга. (Одг. a = 3,4 cm, ρ = 2,9... cm)

56) Колика је страна правилног шестоугла чија је површина $6\sqrt{3}$ cm^2? (Одг. 2 cm)

57) Израчунати обим правилног шестоугла чија је површина $54\sqrt{3}$ cm^2 (Одг. 36 cm)

58) У кругу обима $4\pi\sqrt{3}$ cm уписан је правилни шестоугао и равнострани троугао. За колико је обим шестоугла већи од обима троугла? (Одг. за 2,76... cm)

59) За колико се разликују површине слика из прошлог (58) задатка? (Одг. за $9\sqrt{3}$ cm^2, тј. површина шестоугла два пута је већа)

60) Конструисати правилни шестоугао стране 2 cm, и над сваком његовом страном равнострани троугао. Израчунати површину тако добијене слике. (Одг. 20,76 cm^2)

61) Један равнокраки троугао има у обиму 32 cm, док му је основица 12 cm. Израчунати површину правилног шестоугла, чија је страна једнака висини тог троугла. (Одг. $96\sqrt{3}$ cm^2)

62) Израчунати обим правилног шестоугла, кад се зна да је полупречник круга уписаног у њему једнак дијагонали квадрата стране $3\sqrt{2}$ cm. (Одг. $24\sqrt{3}$ cm)

63) Конструиши правилни шестоугао чија је површина $6\sqrt{3}$ cm^2 (Најпре израчунај страну, a = 2 cm)

* * *

64) Израчунати обим ромба чије су дијагонале 16 cm и 30 cm. (Одг. 68 cm)

65) Страна једног ромба је 39 cm а једна дијагонала 72 cm. Израчунати његову површину. (Одг. 1080 cm^2)

66) Површина једног ромба је 24 cm^2, а једна дијагонала 8 cm. Колики је обим тога ромба? (Одг. 20 cm)

67) Израчунати висину ромба чије су дијагонале 14 cm и 48 cm. (Одг. 13,44 cm)

68) Обим једног ромба је 260 cm, а једна дијагонала 66 cm. Израчунати површину квадрата чија је страна једнака другој дијагонали ромба. (Одг. 12544 cm^2)

69) Један ромб има у обиму 18 cm, а један му је угао 60^0. Израчунати му површину. (Нацртај такав ромб и повуци му краћу дијагоналу. На какве троугле дели она ромб? — Одг. 17,25)

70) Један ромб, висине 4 cm, има обим као и један равнострани троугао: O = 24 cm. Која од тих двеју слика има већу површину и за колико? (Одг. Већа је површина троугла за 3,68 m^2)

71) Обим једног ромба је 80 cm, а једна дијагонала му је 24 mm. Конструиши правоугаоник чије су стране једнаке

дијагоналама тога ромба. (Одг: треба прво израчунати другу дијагоналу: $d_2 = 32$ mm)

* * *

72) Паралелне стране једног равнокраког трапеза су 16 cm и 10 cm, а висина 4 cm. Израчунати његов обим и површину. (Одг. O = 36 cm, P = 52 cm²)

73) Израчунати површину равнокраког трапеза чије су стране: паралелне 28 cm и 12 cm, а крак 17 cm. (Одг. 300 cm²)

74) Колика је дијагонала равнокраког трапеза чије су паралелне стране 21 cm и 11 cm а висина 12 cm? (Одг. 20 cm)

75) Обим једног равнокраког трапеза је 148 mm, а паралелне стране су му 50 mm и 20 mm. Израчунати му површину. (Одг. P = 1260 mm²)

76) Површина једног равнокраког трапеза је 168 cm², а паралелне стране су му 27 cm и 15 cm. Израчунати му обим. (Одг. 62 cm)

77) Код правоуглог трапеза паралелне стране су 35 cm и 20 cm, а висина је 8 cm. Израчунати му обим. (Одг. 80 cm)

78) Површина једног правоуглог трапеза је 306 cm², а паралелне стране су му 30 cm и 21 cm. Израчунати му обим (Одг. 78 cm)

* * *

79) Тетива дугачка 30 cm удаљена је од центра круга 8 cm. Израчунати обим тог круга. (Одг. 34 π cm).

80) У кругу обима 20 π cm једна тетива удаљена је од центра 6 cm. Колика је њена дужина? (Одг. 16 cm)

81) Колико је удаљена од центра тетива дуга 48 cm, у кругу обима 50 π cm? (Одг. 7 cm)

82) Израчунати површину круга код кога је тетива од 90 mm удаљена од центра 24 mm. (Одг. 2601 π mm²).

83) У кругу површине 625 π cm² две паралелне тетиве дугачке су 30 cm и 48 cm. Колико је растојање између њих? (Одг 27 cm или 13 cm)

84) У кругу обима 50 π cm две тетиве имају централна удаљења 20 cm и 7 cm. Колика је површина правоугаоника, чије су стране једнаке овим тетивама? (Орг. 1440 cm²)

85) Око једног делтоида чије су две стране 15 cm и 36 cm, описан је круг. Колики је обим круга? (Одг. 39 π cm).

86) Из једне тачке кружне периферије повучене су под правим углом две тетиве, чије су дужине 8 cm и 15 cm. Израчунати обим и површину тога круга. (Одг. O = 17 π cm, P = 72,25 π cm²)

87) На круг полупречника 33 mm повучена је из једне тачке тангента дужина 56 mm. Колико је удаљена та тачка од центра круга? (Одг. 65 mm)

---

5. ХЕРОНОВ ОБРАЗАЦ

Површину троугла добијамо, као што смо видели, кад израчунамо половину производа једне његове стране и одговарајуће висине, тј. $P = \frac{1}{2} a h_a$, или $= \frac{1}{2} b h_b$, или $= \frac{1}{2} c h_c$.

Међутим, грчки математичар Херон пронашао је образац, помоћу кога се површина троугла може израчунати кад су познате све три његове стране. Ако ове означимо са a, b и c, а половину обима са s, тј. $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, онда се површина троугла израчунава помоћу **Хероновог обрасца** (извођење овог обрасца учиће се у V разреду):

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Израчунајмо помоћу Хероновог обрасца површину троугла чије су стране: a = 20 cm, b = 13 cm и c = 11 cm. Згодно је да радимо овако:

$$\begin{array}{rcl} a &=& 20 \\ b &=& 13 \\ c &=& 11 \\ \hline 2s &=& 44 \\ s &=& 22 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} s-a &=& 2 \\ s-b &=& 9 \\ s-c &=& 11 \end{array}$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{22 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 11} =$$
$$= \sqrt{11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 11} = \sqrt{11^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = 11 \cdot 2 \cdot 3 = 66,$$
тј. P = 66 cm².

Овај резултат можемо проверити, ако површину истог троугла израчунамо на раније показани начин. У ту сврху конструишимо троугао с горе означеним странама и измеримо му једну висину, рецимо одговарајућу страни a. Ако тачно измеримо, добићемо да је $h_a = 6$ cm. Сада је $P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 6{,}6 = 66$, тј. P = 66 cm². Дакле исти резултат који смо добили Хероновим обрасцем.

Вежбања

1) Израчунавањем површине на два начина, проверити Херонов образац а) код равностраног троугла стране 4 cm и б) код равнокрако-правоуглог троугла, катете 2 cm.

2) Израчунати површину троугла чије су стране:

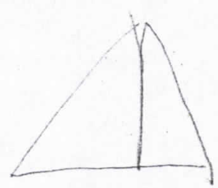
а)	б)	в)
$a = 4$ cm	$a = 13$ cm	$a = 16$ cm
$b = 13$ cm	$b = 14$ cm	$b = 25$ cm
$c = 15$ cm	$c = 15$ cm	$c = 39$ cm
(Одг. 24 cm²)	(Одг. ~~84 cm²~~)	(Одг. 120 cm²)

3) Дате су две стране троугла 30 cm и 25 cm, и висина која пада на трећу страну: 24 cm. Израчунати његову површину помоћу Хероновог обрасца. (Одг. 300 cm²)

4) Израчунати површину делтоида чије су неједнаке стране 17 cm и 25 cm, а дијагонала-симетрала 26 cm. (Одг. 408 cm²)

5) Израчунати површину трапеза чије су паралелне стране 35 cm и 15 cm, а краци 13 cm и 11 cm. (Одг. 165 cm²)

6) Израчунати површину трапезоида ABCD чије су стране AB = 20 cm, BC = 4 cm, CD = 15 cm и DA = 11 cm, а дијагонала BD = 13 cm. (Одг. 90 cm²)



II ДЕО

ПОЛОЖАЈИ ПРАВИХ И РАВНИ У ПРОСТОРУ

1. О ПРАВОЈ И О РАВНИ

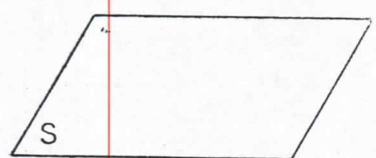
Оно што смо о правој досада научили може се укратко изложити овако:

Права линија је геометриски облик који настаје у пресеку двеју равних површина. Њу замишљамо са обе стране неограниченом. Ако је са једне стране ограничимо, добијамо зрак; ако је са обе стране ограничимо, добијамо дуж (део праве линије).

Знамо, даље, да се на свакој правој замишља безбројно много тачака. Јер, рекли смо, ако тачку замислимо као пресек правих, онда лако можемо једну праву сећи са онолико других колико нам је воља.

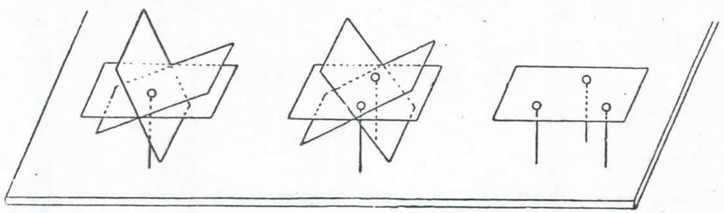
Ако кроз две тачке поставимо праву, она је онда њима потпуно одређена; јер се не може замислити да и нека друга права пролази кроз исте две тачке, а да не поклапа прву. Зато кажемо да једну праву, или боље њен положај познајемо, ако знамо две њене тачке.

Као што је права линија неограничена са обе стране, тако и равна површина у геометрији нема краја ни на једној страни, ма колико је замислили проширеном. Зато раван претстављамо једним њеним делом, тј. равном геометриском сликом, и то обично паралелограмом. Да бисмо још уочили о којој је равни реч, ми у један угао таквог паралелограма стављамо велико слово. Тако је на сл. 18 претстављена раван S. Сетимо се да смо и модел равни правили од картона у облику каквог паралелограма.



Сл. 18. — Обележавање равни.

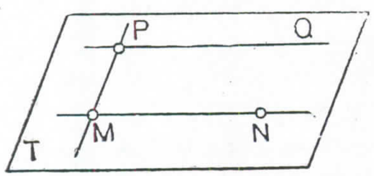
Кроз једну тачку, као што знамо, можемо замислити да пролази безбројно много равни. Кроз једну праву, исто тако, можемо поставити колико хоћемо равни. Зато и не можемо рећи да је раван одређена једном тачком или једном правом, односно двема тачкама. Али се кроз три тачке — ако не леже све у истој правој — може поставити само једна раван, и зато је раван са три такве тачке потпуно одређена. Да бисмо



Сл. 19. — Постављање равни кроз једну, две и три тачке.

ово боље разумели, узмимо три комада картона, па их чиодама — и то први једном, други двема а трећи трима — прободимо, а ове забодимо у какву даску. Главе чиода, модели тачака, при томе су приљубљене уз картоне, моделе равни. Сада се кретањем тих картона око глава чиода лако уверавамо да кроз једну или две тачке можемо заиста поставити колико хоћемо равни, а кроз три — ако не леже све у истој правој — само једну (сл. 19). Зато закључујемо: **раван је одређена са три тачке које не леже у истој правој.**

Узимајући у обзир да се кроз сваке две од ове три тачке може повући једна права, излази да је раван одређена и једном правом и тачком ван ње, затим двема правама које се секу, најзад двема паралелним правама (видели смо раније да две паралелне праве леже у једној равни).

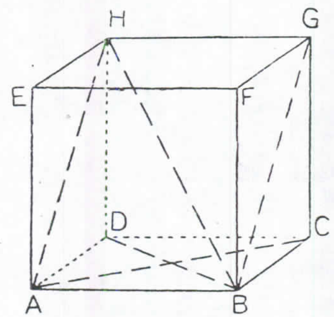


Сл. 20. — **Одређивање равни помоћу тачака.**

На сл. 20 то је и цртежом претстављено. У равни T посматрајмо три тачке: M, N и P. Према ономе што смо рекли, раван T одређена је: 1) тачкама M, N и P; 2) правом MN и тачком P; 3) правама MN и MP и 4) правама MN и PQ (MN ‖ PQ).

2. МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈИ ДВЕЈУ ПРАВИХ

На сл. 21 дуж BH је **дијагонала** коцке ABCDEFGH. Као што видимо, **дијагонала коцке је дуж која спаја два темена која не леже на истој страни коцке.** Свака коцка, као и квадар, има четири дијагонале. Треба разликовати дијагоналу коцке од дијагонале коцкиног квадрата, као што је на пример AH на сл. 21.



Сл. 21.

Посматраћемо сада ивице коцке, њене дијагонале и дијагонале њених квадрата — све као делове правих, да бисмо уочили различите положаје које може да заузме једна права према другој.

Дијагонале AC и BD секу се нормално, док се ивица AE и дијагонала AH секу косо (сл. 21). Али у оба случаја две пресечне праве налазе се у једној равни, тј. кроз њих се може поставити једна раван.

Ивице AB и EF (сл. 21) паралелне су и налазе се у једној равни (у равни коцкине стране). Исто тако паралелне су и дијагоналне AH и BG, а леже у равни правоугаоника ABHG.

Ако, најзад, посматрамо дијагоналу коцке BH и ивицу AD (сл. 21), видећемо да се оне не секу, нити ће се сећи ма колико их продужили. Оне нису ни паралелне, јер о једнаком растојању између њих не може бити ни говора. Кроз њих се, према томе, не може поставити једна раван За праве у таквом положају кажемо да се **мимоилазе,** па их зато зовемо **мимоилазним правама.**

Укратко, међусобни положај двеју правих у простору може бити тројак:

1) **секу се** (нормално или косо),

2) **паралелне су** и

3) **мимоилазе се.**

У прва два случаја обе праве леже у истој равни, у трећем не.

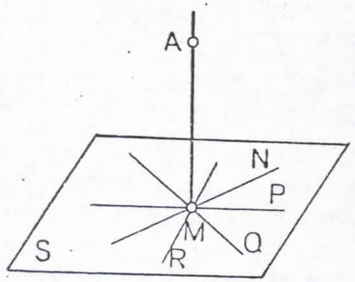
3. ПОЛОЖАЈИ ПРАВЕ ПРЕМА РАВНИ

Ако стране коцкине посматрамо као делове равних површина, као што смо дијагонале и ивице њене посматрали као делове правих, тада на коцки можемо видети различите положаје које може да заузме права према равни.

На сл. 21 дијагонала AC лежи у равни коцкине основе. Све тачке те дијагонале, не само тачке A и C, леже у тој равни. Зато кажемо: **права лежи у равни** кад све **њене тачке леже у равни.**

Ова особина равни искоришћује се да би се испитало да ли је нека површина равна. Какав исправан лењир стави се ивицом на ту површину, и, приљубљен уз њу, креће се по њој. Ако ни у једном положају нема шупљина између њега и површине, онда закључујемо да је та површина равна.

Ивица EA и дијагонала HB (сл. 21), замишљене као праве, **продиру** кроз раван основе, тј. раван основе њих **сече.** Заједничке тачке њихове са равни, тачке A и B, зову се **продори** правих у равни. Како је ивица EA нормална на основи, а дијагонала HB коса према њој, то кажемо да прва продире раван нормално, друга косо.



Сл. 22.— Права (AM нормална на равни (S).

Раније смо видели да је једна права нормална на равни, ако је њихов међусобни положај као између бочне ивице и основе коцке или квадра (Геометрија за I разред). Ту нормалност можемо и на други начин описати.

На сл. 22, кроз продор M праве AM повучено је више правих MN, MP, MQ, MR...... тако да све леже у равни S. Ако је права AM нормална на свакој од ових правих, нормална је и на тој равни. У ово се можемо уверити помоћу коцке, коју по тој равни крећемо тако да јој бочна ивица увек буде приљубљена уз праву AM. Зато кажемо: **права је нормална на равни, ако је нормална на свима правама које леже у тој равни а пролазе кроз продор.**

Ако на правој AM узмемо ма коју тачку, рецимо тачку A, онда је дуж AM њено отстојање од те равни. Дакле: **отстојање неке тачке од равни је нормала спуштена из те тачке на раван.**

Најзад, на истој коцки (сл. 21) видимо да је ивица EF паралелна са основом ABCD. У овом случају права и раван немају ниједне заједничке тачке.

Укратко, права и раван могу бити у овим међусобним положајима:

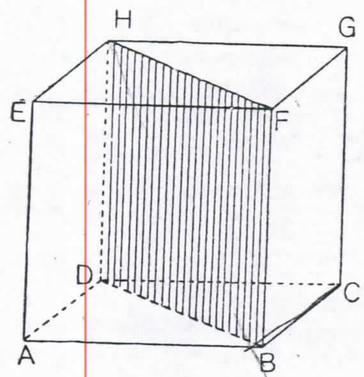
1) **права лежи у равни** (све тачке праве налазе се на равни,

2) **права продире раван** (једна тачка им је заједничка, и то је продор) и

3) **права паралелна са равни** (немају ниједне заједничке тачке).

4. МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈИ ДВЕЈУ РАВНИ.

Ако коцку симетрично сечемо једном равни, тако да та раван пролази кроз дијагонале два супротна квадрата, онда добијамо као пресек правоугаоник, који се зове **дијагонални пресек коцке.** На сл. 23 такав пресек је правоугаоник BFHD.

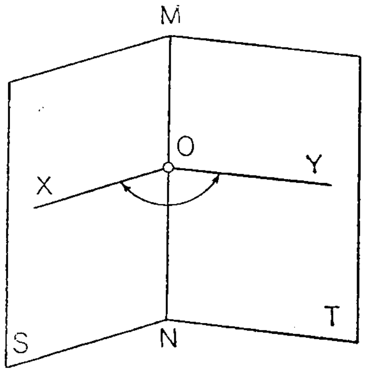


Сл. 23. — Дијагонални пресек (BFHD) коцке.

Из слике видимо да тај пресек стоји према бочној страни косо, док две суседне стране стоје једна према другој нормално. Али у оба случаја две посматране слике имају заједничку ивицу. Ако сад место страна и дијагоналног пресека узмемо у обзир равни у којима се они налазе, а место ивица праве њима одређене, можемо рећи: **две равни се секу кад имају заједничку једну праву линију.**

Две основе коцке, као и две ма које супротне стране, паралелне су, и немају ни једну заједничку праву (никад се не секу) ма колико их продужили. Зато кажемо: **две равни су паралелне, кад немају заједничку ниједну праву линију.**

На сл. 24 претстављене су две равни које се секу (равни S и T). Оне чине **угао између равни** или **диједар.** Да бисмо измерили величину тога угла, радимо овако: Узимамо где било у пресеку MN равни S и T једну тачку O. Из те тачке повлачимо зраке OX и OY, нормално на пресек MN, а да сваки од њих лежи у једној од тих равни. Тада угао између тих нормала показује величину диједра.



Сл. 24. — Угао између двеју равни или диједар.

Ако је тај угао коси (оштри или тупи) равни се секу косо, а ако је прави, оне се секу нормално.

Укратко, две равни могу бити у овим међусобним положајима:

1) **секу се** (имају заједничку праву) и
2) **паралелне су** (немају заједничку праву).

Вежбања

1) Како одређујемо положај једне праве?

2) Како претстављамо равну површину?

3) На колико начина можемо одредити положај једне равни у простору? Како?

4) Шта је дијагонала коцке?

5) Какав је међусобни положај дијагонале коцке и ивица које полазе из истог темена?

6) На једном моделу коцке показати мимоилазне ивице.

7) Који су међусобни положаји двеју правих у простору? Опиши сваки од њих и покажи помоћу две оловке.

8) Могу ли се три праве мимоилазити? А четири? Покажи помоћу оловки.

9) У каквом међусобном положају стоје праве кроз које се не може поставити једна раван?

10) Како се две праве могу сећи?

11) Могу ли се сећи праве које су а) обе хоризонталне, б) обе вертикалне?

12) Ако су две праве хоризонталне а) морају ли бити паралелне, б) морају ли се сећи, в) могу ли се мимоилазити? Показати оловкама!

13) Кад кажемо да права лежи у равни?

14) Како пробамо да ли је нека површина равна?

15) Кад права продире раван?

16) Шта је продор праве у равни?

17) Кад је једна права нормална на равни?

18) Шта називамо отстојањем неке тачке од равни?

19) Колико највише заједничких тачака могу имати права и раван, а колико најмање? Кад?

20) У каквом су међусобном положају коцкина дијагонала и која било коцкина страна?

21) Помажући се картоном и оловкама одговори: колико се паралелних правих а колико паралелних равни може поставити кроз једну тачку, а према једној датој правој?

22) Шта је дијагонални пресек коцке?

23) Колико дијагоналних пресека има коцка?

24) Јесу ли сви дијагонални пресеци коцке подударни? Зашто?

25) Са колико ивица на коцки је паралелан један дијагонални пресек коцке?

26) У којим равнима леже коцкине дијагонале?

27) Колико заједничких тачака могу имати права и раван ако су а) обе хоризонталне, б) обе вертикалне, в) права вертикална а раван хоризонтална?

28) Посматрај коцку и одговори: а) ако су две праве паралелне са једном равни, у каквом су међусобном положају? б) ако су две праве нормалне на једној равни, у каквом су међусобном положају?

29) Покажи помоћу оловке и картона различите међусобне положаје праве и равни, и објасни кад настају.

30) У којим међусобним положајима могу бити две равни?

31) Кад две равни чине диједар?

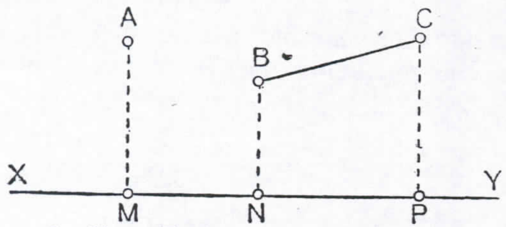
32) Како можемо мерити величину угла између равни (диједра)?

33) Могу ли две равни имати заједничку а) само једну тачку, б) само једну праву?

34) Кад две равни немају ниједну заједничку праву?

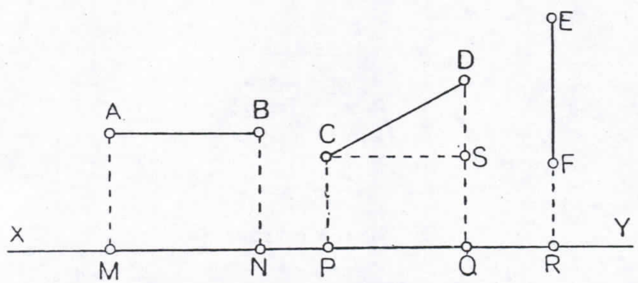
5. ПРОЈЕКТОВАЊЕ ТАЧКЕ И ДУЖИ НА ПРАВУ

Из тачке А, на сл. 25, спуштена је нормала на праву ХУ, па је АМ ⊥ ХУ. Пресек М ове нормале са правом ХУ називамо **пројекцијом тачке А на правој ХУ.** Ову праву на коју **пројектујемо** дату тачку, зовемо **осовином пројектовања.** Ако, дакле, хоћемо да нађемо за неку тачку њену пројекцију на правој, треба из ње да спустимо нормалу на ту праву: пресек те нормале са правом, или „подножна тачка" нормале, је тражена пројекција на правој.



Сл. 25. — Пројекције тачке и дужи на правој.

Ако крајње тачке В и С дужи ВС (сл. 25) пројектујемо на правуХУ, добићемо пројекције N и Р. Дуж NP је **пројекција дужи ВС на правој ХУ.**



Сл. 26. — Пројекције дужи на правој.

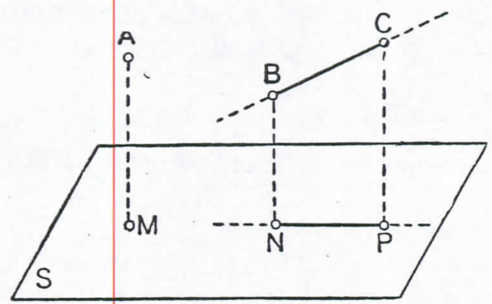
На сл. 26 види се да величина пројекције неке дужи зависи од положаја њеног према осовини пројектовања. Највећа је пројекција онда, кад је дуж паралелна са осовином, и тада је једнака самој дужи. Тако је MN = АВ (као супротне стране правоугаоника). Што је дуж стрмија према оси, тим је њена пројекција мања.

Ово се може јасно показати ако се кроз тачку С (сл. 26) повуче CS ∥ PQ. Тада је CS < CD, па је и PQ < CD, јер је PQ = CS.

Најзад, ако је дуж нормална на осовини пројектовања, њена пројекција је тачка. Тачка R је пројекција дужи EF, јер је EF ⊥ ХУ.

6. ПРОЈЕКТОВАЊЕ ТАЧКЕ, ДУЖИ И ПРАВЕ НА РАВАН

На сл. 27 из тачке А спуштена је нормала на раван S, па је AM ⊥ S. Продор (или „подножну тачку") М ове нормале називамо **пројекцијом тачке А у равни** S. Раван S на коју пројектујемо тачке зове се **раван пројектовања.**

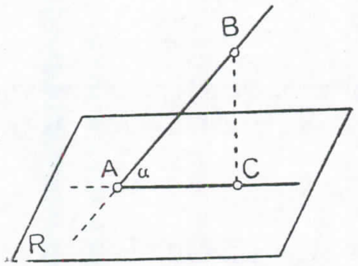


Сл. 27. — Пројекције тачке и дужи у равни.

Да бисмо за неку дуж нашли њену пројекцију у равни, треба да пројектујемо на раван крајње тачке дужи, па пројекције ових да спојимо. Тако је на сл. 27 дуж МР пројекција дужи ВС. И за пројекције дужи у равни важи исто што и за њихове пројекције на правој: њихова величина зависи од положаја дужи према равни. Ако је, наиме, дуж паралелна са равни, њена пројекција је највећа и једнака је њој самој. Што је дуж стрмија према равни, пројекција јој је мања, тако да је пројекција дужи нормалне на равни, тачка.

Како је права одређена са две тачке, то је за пројекцију праве у равни довољно пројектовати две њене тачке. Онда је права у равни, која пролази кроз пројекције тих двеју тачака, пројекција дате праве.

Ако права није паралелна са равни, онда продире раван у једној тачки (продор). На сл. 28 права АВ продире раван



Сл. 28. — Нагибни угао праве према равни (α).

R у тачки A. У оваквом случају за пројекцију праве у равни потребно је пројектовати само још једну тачку праве. Нека је то тачка B, чија је пројекција C. Сада је права AC пројекција дате праве AB у равни R. Угао између праве и њене пројекције у равни назива се **нагибни угао праве према равни** (на сл. 28 то је ∢α). Ако је права у равни или је паралелна с њом, тај је угао очигледно једнак нули. Ако је, пак, тај нагибни угао 90°, права је нормална на равни, иначе је коса према равни.

Вежбања

1) Шта називамо пројекцијом неке тачке на једној правој?

2) Шта је осовина пројектовања?

3) Како пројектујемо дуж на праву?

4) Од чега зависи величина пројекције једне дужи на правој? Како?

5) Нацртај једну праву и неколико тачака ван ње, па конструктивним путем одреди њихове пројекције на тој правој.

6) Крајње тачке дужи од 10 cm удаљене су од једне праве 9 cm и 15 cm. Колика је пројекција те дужи на тој правој? (Нацртај слику и одреди помоћни троугао из кога ћеш израчунати тражену пројекцију). (Одг. 8 cm.).

7) Из једне тачке на правој повучена је косо дуж од 17 cm. Ако је пројекција те дужи на истој правој 15 cm, колико је удаљен од праве други крај те дужи? (Одг. 8 cm)

8) Шта је пројекција неке тачке у једној равни?

9) Како пројектујемо дуж а како праву на неку раван?

10) Кад је пројекција дужи на правој или на равни једна тачка?

11) Где леже све тачке које као своју пројекцију на правој или равни имају исту тачку?

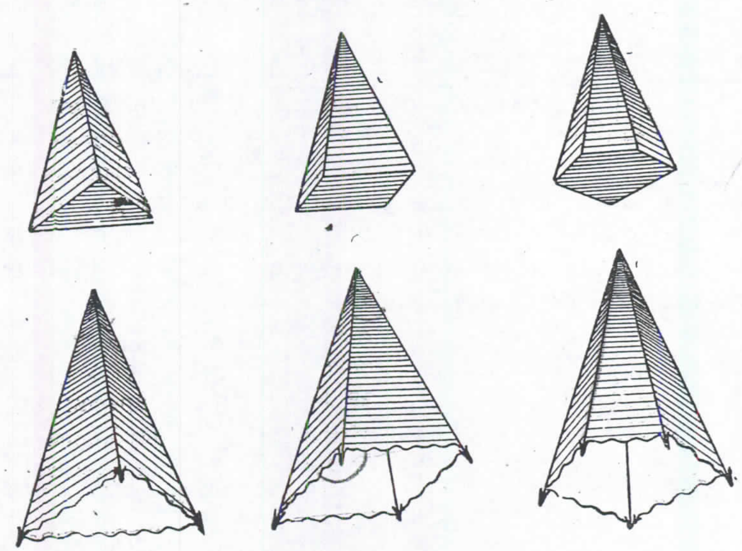
12) Шта називамо нагибним углом праве према равни?

13) Једна права продире раван. Једна тачка на тој правој удаљена је од продора праве 35 mm, а од равни 28 mm. Колика је пројекција дужи одређена продором и том тачком? (Одг. 21 mm.).

14) Пројекција једне дужи у равни је 24 cm, а крајње тачке њене удаљене су од равни 12 cm и 5 cm. Колика је та дуж? (Одг. 25 cm).

7. РОГАЉ

Ако замислимо пирамиде без основа, а да су им бочне стране и ивице продужене неограничено (као што је приказано на сл. 29), добићемо **рогљеве**. Да бисмо, дакле, добили рогаљ, морамо кроз једну тачку поставити три или више равни, тако да се две и две суседне секу. Заједничка тачка тих равни је **теме** рогља, а зраци по којима се те равни секу **ивице рогља.** Делови равни између рогљевих ивица зову се **стране** рогља, док су углови између тих страна (диједри)



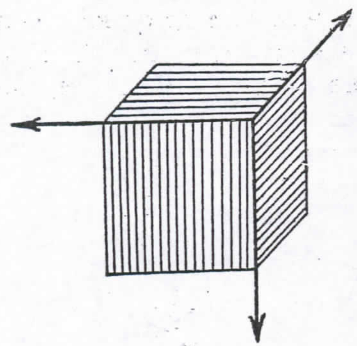
Сл. 29. — Пирамиде и рогљеви.

углови рогља. Осим углова рогља имамо код рогља још једну врсту углова: то су они које заклапају сваке две суседне ивице, а зову се **ивични** углови.

Као што знамо, ивице и стране код рогљастих тела јесу коначне величине, док су код рогљева оне неограничене.

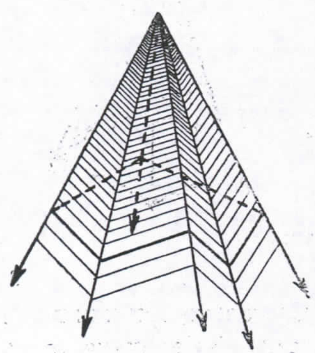
Према броју страна делимо рогљеве на тростране, четворостране, петостране и уопште вишестране. Из слике или модела рогља лако се увиђа, да рогаљ има исто онолико ивичних углова, колико и углова рогља, или ивица, или страна.

Тространи рогаљ чији су сви ивични углови прави, назива се **правоугли.** Код сваког темена коцке или квадра имамо правоугли рогаљ (Сл. 30).



Сл. 30 — Један од коцкиних рогљева (правоугли рогаљ).

Ако једном равни пресечемо рогаљ, тако да му та раван сече све ивице, добићемо као пресек — код рогљева које смо досад посматрали — испупчени многоугао (основе пирамиде на сл. 29). Али има и таквих рогљева, код којих тај пресек није испупчени, већ издубљени многоугао. Такав је и петострани рогаљ претстављен на сл. 31. Према томе да ли је овај равни пресек рогља испупчени или издубљени многоугао, делимо рогљеве на **испупчене** и **издубљене.**



Сл. 31. — Издубљени петострани рогаљ.

Ако од комада хартије покушамо пресавијањем да начинимо модел рогља, моћи ћемо да начинимо само издубљени рогаљ. За испупчени рогаљ морамо најпре од тачке, коју смо одредили за теме рогља,

исећи и одбацити један угао (чије је теме у темену рогља). То нам показује да збир ивичних углова код испупченог рогља **мора бити мањи од** 360^0.

Вежбања

1) Како замишљамо да постаје рогаљ?
2) Шта је теме, ивица, страна, ивични угао и угао рогља?
3) Јесу ли стране и ивице рогља исти појмови као и код рогљастих тела? У чему је разлика?
4) Која тела имају рогљеве?
5) Како делимо рогљеве?
6) Шта је правоугли рогаљ?
7) Наброј нека тела која имају правоугле рогљеве.
8) Шта је испупчени и шта издубљени рогаљ?
9) Колики мора бити збир ивичних углова сваког испупченог рогља?
10) Може ли тространи рогаљ бити издубљен? Зашто?
11) Начини од хартије моделе испупчених рогљева, и то: тространи, четвространи и петострани.

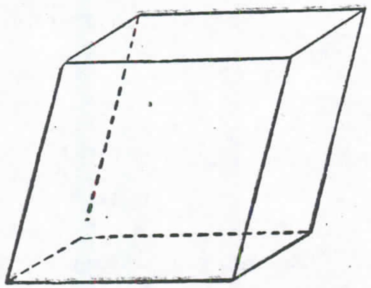
8. ПОДЕЛА ТЕЛА — ПРАВИЛНА РОГЉАСТА ТЕЛА

Геометриска тела, као што смо видели, делимо на **рогљаста** и **обла.** Рогљаста тела су она која су ограничена само равним површинама, док су обла она која су ограничена било само облим, било и облим и равним површинама.

Рогљаста тела добила су такав назив зато што њихове граничне површине чине рогљеве. Све призме и све пирамиде спадају у рогљаста тела.

Међу рогљастим телима треба уочити **правилна рогљаста тела, а то су она чије су стране правилне и подударне геометриске слике, које чине само испупчене рогљеве.**

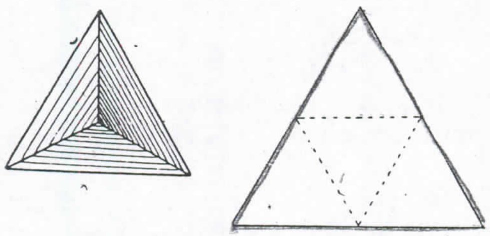
Није дакле довољно да стране тела буду подударне слике, да би оно било правилно, већ морају бити и правилне. На пример, тело претстављено на сл. 32 има за стране шест подударних ромбова, и познато је под именом **ромбоедар**, али не спада у групу правилних тела, зато што ромб није правилна геометриска слика.



Сл. 32 — Ромбоедар.

Има свега пет правилних тела, и то су: **тетраедар, октаедар, икосаедар, хексаедар** (или коцка) и **додекаедар.**

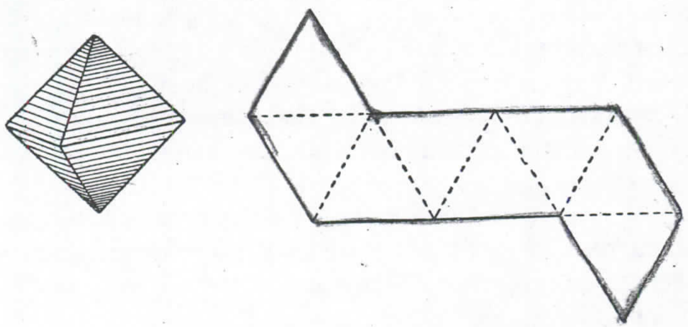
Тетраедар, нама већ познато тело, ограничен је са четири равнострана троугла (по три у сваком од четири рогља) На сл. 33 претстављен је тетраедар са својом мрежом.



Сл. 33. — Тетраедар и његова мрежа (умањена).

Октаедар је ограничен са осам равностраних троуглова (по четири у сваком о шест рогљева). На сл. 34 претстављен је октаедар и његова мрежа.

Икосаедар је ограничен са 20 равностраних троуглова (по пет у сваком од 12 рогљева). На сл. 35 претстављен је икосаедар са својом мрежом.

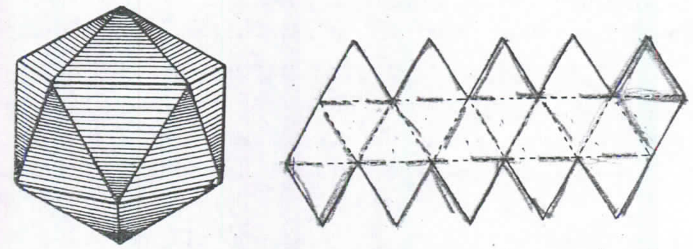


Сл. 34. — Октаедар и његова мрежа.

Само ове три врсте тела имају као стране равностране троугле.

Хексаедар или коцка је нама добро познато тело, ограничено са шест једаких квадрата (по три у сваком од осам рогљева).

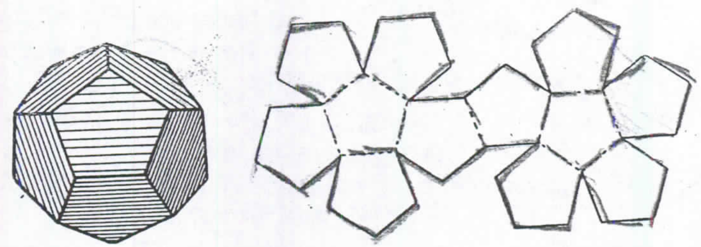
Најзад, додекаедар је правилно тело ограничено са 12 правилних петоуглова (по три у сваком од 20 рогљева).



Сл. 35. — Икосаедар и његова мрежа (умањена).

На сл. 36 претстављен је додекаедар и његова мрежа.

Зашто нема више од пет правилних тела? Следеће размишљање показаће нам то јасно.



Сл. 36. — Додекаедар и његова мрежа (умањена).

Пошто је сваки угао равностраног троугла 60^0, и како је збир ивичних углова испупченог рогља увек мањи од 360^0, то од равностраних троуглова можемо начинити само три рогља: тространи ($3 \cdot 60^0 = 180^0$), четворострани ($4 \cdot 60^0 = 240^0$) и петострани ($5 \cdot 60^0 = 300^0$).

Из истог разлога од квадрата, чији су сви углови по 90^0, може се начинити само тространи рогаљ ($3 \cdot 90^0 = 270^0$). Тело које има овакве рогљеве је хексаедар или коцка.

Најзад, пошто је сваки угао правилног петоугла 108^0, то се од правилних петоуглова може начинити само тространи рогаљ ($3 \cdot 108^0 = 324^0$). Такве рогљеве има додекаедар.

Вежбања

1) Како делимо тела?
2) Која тела називамо правилним?
3) Шта је ромбоедар?
4) Колико има правилних тела и која су?
5) Кажи за свако правилно тело колико има: рогљева, ивица, темена.
6) Начини мрежу и модел татраедра ивице 6 cm.
7) Начини мрежу и модел октаедра ивице 5 cm.
8) Начини мрежу и модел икосаедра ивице 4 cm.
9) Начини мрежу и модел додекаедра ивице 5 cm.
10) Објасни зашто не може бити више од пет познатих правилних тела.

III ДЕО

ЗАПРЕМИНА ТЕЛА И ПРИМЕНА ПИТАГОРИНОГ ПРАВИЛА НА ТЕЛА

1. О ЗАПРЕМИНИ ТЕЛА

Под запремином неког тела разумемо део простора који то тело запрема (Геометрија за I разред). Ову запремину можемо мерити, као што смо видели у случају коцке и квадра. Као јединица за мерење запремине узима се кубни метар ($1m^3$), тј. коцка ивице једног метра, или мање јединице од кубног метра ($1\ dm^3$, $1\ cm^3$ и $1\ mm^3$).

Запремину ћемо обележавати словом V (по речи volumen која значи запремину).

У овом делу геометрије научићемо како се израчунава запремина тела различитих облика, као што су призме, пирамиде, облице, купе, итд. Али ако је у питању какво **материјално тело** (управо модел геометриског тела), онда се са запремином може довести у везу и његова **тежина**, односно **специфична тежина** — што често бива у практичним задацима. Зато ћемо сада укратко поновити градиво о односу који постоји између тежине и запремине тела.

Јединица за мерење тежине је грам (1 g). То је, уствари, тежина једног кубног сантиметра чисте воде. Значи да је вода запремине $1\ dm^3$, или једног литра, тешка 1 kg (килограм).

Под специфичном тежином неког тела разумемо тежину једног кубног сантиметра тог тела. Према томе, специфична тежина тела различитог материјала различита је. Специфична тежина воде је 1 g, олова 11,35 g, плуте 0,24 g итд.

Између тежине неког тела, његове специфичне тежине и запремине постоје, дакле, ови односи:

1) Специфичну тежину (S) тела добијамо, кад целокупну његову тежину (Q) поделимо запремином (V), тј.

$$S = \frac{Q}{V}$$

2) Тежину тела добијамо, кад његову запремину помножимо специфичном тежином, тј.

$$Q = VS$$

3) Запремину тела добијамо кад његову тежину поделимо специфичном тежином, тј.

$$V = \frac{Q}{S}$$

У свима овим случајевима запремина се изражава у кубним сантиметрима, а тежина и специфична тежина у грамовима.

2. ЗАПРЕМИНА КОЦКЕ И КВАДРА

Запремину коцке добијамо кад њену ивицу дигнемо на куб (Геометрија за I разред). Ако ивицу означимо са a, биће

$$V = a^3$$

Из тог обрасца можемо израчунати ивицу, кад из запремине извучемо кубни корен. Тако је

$$a = \sqrt[3]{V}$$

Запремину квадра израчунавамо кад помножимо његову дужину са ширином и висином, или што је исто, кад помножимо међусобно три његове различите ивице (a, b и c), тј.

$$V = abc$$

Одатле имамо да је

$$a = \frac{V}{bc},\ b = \frac{V}{ac},\ c = \frac{V}{ab}$$

тј. једну ивицу квадра можемо израчунати, ако му запремину поделимо производом других двеју ивица.

Обрасце за запремину коцке и квадра можемо довести на исти облик помоћу следећег расматрања. Површина основе (B) коцке је a^2, а површина основе (B) квадра је ab; ако још ивицу која претставља висину и код једног и код другог тела означимо са h, можемо да напишемо:

$$\text{за коцку } V = a^3 = a^2 \cdot a = Bh$$
$$\text{и за квадар } V = abc = ab \cdot c = Bh$$

тј. запремина коцке или квадра једнака је производу основе и висине.

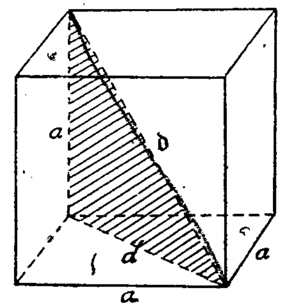
Примедба: Видели смо раније да је површина коцке $P=6a^2$, а површина квадра $P=2\ (ab+ac+bc)$.

3. ДИЈАГОНАЛЕ КОЦКЕ И КВАДРА

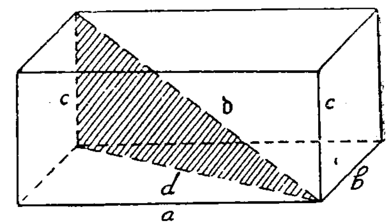
Дијагоналу коцке можемо, применом Питагориног правила, изразити помоћу ивице коцке. Као што показује сл. 37, дијагонала коцке ($\mathfrak{d}$) је хипотенуза правоуглог троугла чије су катете ивица коцке (a) и дијагонала коцкиног квадрата (d). Зато је:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \text{ и}$$
$$\mathfrak{d}^2 = a^2 + d^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2,\ \mathfrak{d} = \sqrt{3a^2},$$
$$\text{одакле је } \mathfrak{d} = a\sqrt{3}$$

тј. дијагоналу коцке добијамо кад ивицу помножимо кореном из 3.



Сл. 37. — Дијагонала коцке као хипотенуза правоуглог троугла.



Сл. 38. — Дијагонала квадра као хипотенуза правоуглог троугла.

Ако слично поступимо и код квадра, са ивицама a, b и c и дијагоналом ($\mathfrak{d}$) (сл. 38), добићемо да је:

$$d^2 = a^2 + b^2 \text{ и}$$
$$\mathfrak{d}^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ и}$$
$$\mathfrak{d}^2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

тј. дијагоналу квадра добијамо кад извучемо квадратни корен из збира квадрата трију његових ивица.

Вежбања

1) Шта разумемо под запремином тела?
2) Које су јединице за мерење запремине?

3) Шта је специфична тежина неког тела?

4) Који односи постоје између запремине (V), тежине (Q) и специфичне тежине (S) једног тела?

5) Како се израчунава запремина коцке?

6) Како се израчунава запремина квадра?

7) Кажи правило по коме се на исти начин израчунава и запремина коцке и запремина квадра.

8) Како израчунавамо дијагоналу коцке?

9) Изрази ивицу коцке помоћу њене а) дијагонале, б) површине, в) запремине.

10) Како добијамо дијагоналу квадрт?

11) Како израчунавамо површину коцке и квадра?

12) Израчунати површину, запремину и дијагоналу коцке чија је ивица а) 8 cm, б) 24 cm, в) 0,4 m, г) 1 m 8 dm. (Одг. а) $P = 384 cm^2$, $V = 512 cm^3$, $ð = 13,84$ cm, b) $P = 3456 cm^2$, $V = 13824 cm^3$, $ð = 41,52$ cm, в) $P = 0,96 m^2$, $V = 0,064 m^3$, $ð = 0,692$ m, г) $P = 19 m^2$ $44 dm^2$, $V = 5 m^3$ $832 dm^3$, $ð = 3$ m 1 dm 1 cm 4 mm)

13) Израчунати запремину и дијагоналу коцке чија је површина а) 150 cm^2, б) 864 mm^2, в) 13,5 dm^2. (Одг. а) $V = 125 cm^3$, $ð = 8,65$ cm, б) $V = 17\ 28 mm^3$, $ð = 20,76$ mm, в) $V = 3,375 dm^3$, $ð = 2,595$ dm)

14) Колика је површина и запремина коцке чија је дијагонала а) 6,92 dm, б) 17,3 cm, в) $\sqrt{3}$ m? (Одг. а) $P = 96 dm^2$, $V = 64 dm^3$ б) $P = 600 cm^2$, $V = 1000 cm^3$ в) $P = 6 m^2$, $V = 1 m^3$)

15) Запремина једне коцке је а) 8 cm^3, б) 125 cm^3, в) 1000 mm^3, г) 17 28 mm^3, д) 9,261 dm^3. Израчунати њену површину и дијагоналу. (Одг. а) $P = 24 cm^2$, $ð = 3,46$ cm, б) $P = 150 cm^2$, $ð = 8,65$ cm, в) $P = 600 mm^2$, $ð = 17,3$ mm, г) $P = 864 mm^2$, $ð = 20,76$ mm, д) $P = 26,46$ dm, $ð = 3,633$ dm)

16) Дијагонала квадрата једне коцке је а) 14,1 m, б) 21,15 cm. Израчунати површину, запремину и дијагоналу те коцке. (Одг. а) $P = 600 m^2$, $V = 1000 m^3$, $ð = 17,3$ m, б) $P = 1350 cm^2$, $V = 3375 cm^2$, $ð = 2595$ cm)

17) Како се мења површина коцке, ако јој се ивица а) удвостручи, б) утростручи?

18) Како се мења запремина коцке ако јој се ивица а) удвостручи, б) утростручи?

19) Ивица једне масивне коцке од сребра је 10 cm, а специфична тежина сребра је 10,5 g. Колико је kg тешка та коцка? (Одг. 10,5 kg)

20) Израчунати ивицу оне масивне коцке чија је тежина 499,2 g, а спец. тежина материјала је 7,8 g. (Одг. 4 cm)

21) Ивица једне масивне коцке, тешке 108 g., је 6 cm. Колика је специфична тежина материјала од кога је она начињена? (Од. 0,5 g)

22) Израчунати површину, запремину и дијагоналу квадра чије су ивице (a, b и c):

а) $a = 3$ dm, $b = 4$ dm, $c = 12$ dm

б) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm

а) (Одг. $P = 192 dm^2$, $V = 144 dm^3$, $ð = 13$ dm

б) (Одг. $P = 94 cm^2$, $V = 60 cm^3$, $ð = 5\sqrt{2}$ cm)

в) $a = 10$ cm, $b = 12$ cm, $c = 20$ cm

г) $a = 0,5$ m, $b = 0,4$ m, $c = 1,2$ m

в) (Одг. $P = 1120 cm^2$, $V = 2400 cm^3$, $ð = 25,38$ cm)

г) (Одг. $P = 2,56 m^2$, $V = 0,24 m^3$, $ð = 1,36$ cm)

23) Један квадар, висине 10 cm., има за основу квадрат стране 4 cm. Израчунати му површину, запремину и дијагоналу. (Одг. $P = 192 cm^2$, $V = 160 cm^3$, $ð = 11,5$ cm прибл.)

24) Квадар с квадратном основом има висину 9 cm а запремину 36 cm. Колика му је основина ивица, површина и дијагонала? (Одг. $a = 2$ cm, $P = 80 cm^2$, $ð = 9,43\ldots$ cm)

25) Основине ивице једног квадра су 7 cm и 8 cm а запремина му је 560 cm^3. Колики је збир његових ивица? (Одг. 100 cm)

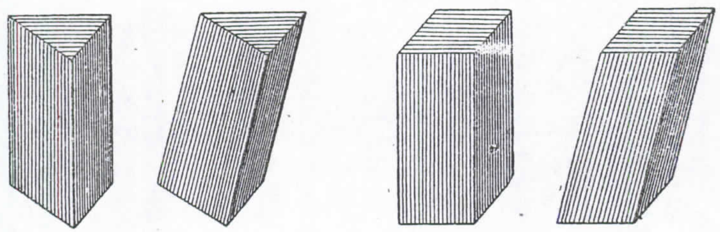
26) Ивице једног масивног квадра су 6 cm, 7 cm и 9 cm, а тежина му је 4,536 kg. Колика је специфична тежина његовог материјала? (Одг. 12 g)

4. ЈЕДНАКОСТ ПРИЗАМА

За два тела уопште кажемо да су **једнака** ако имају једнаке запремине. На пример, коцка ивице 4 cm једнака је квадру чије су димензије 2 cm, 4 cm и 8 cm, (јер оба ова тела имају једнаке запремине, $V = 64\ cm^3$).

Као што видимо, једнака тела не морају бити и облика истог. Ако, пак, имају и облик исти, таква тела називамо **подударним** телима.

На сл. 39. претстављене су права и коса тространа и права и коса четворострана призма. Ове су призме изабране тако да су им и висине и основе једнаке. (Основе, као геометриске слике, могу бити једнаке, иако нису истог облика).



Сл. 39. — Праве и косе призме једнаких основа и висина

Замислимо да имамо моделе овавких призама од картона, па сваком од њих уклонимо по једну основу. У ове „празне" призме сада можемо сипати какву ситну материју, рецимо песак. Пресипајући песак из једне пуне призме у другу пашће нам у очи, да је иста количина песка довољна да тачно испуни сваку од ових призама, а то значи да су им запремине једнаке.

Како до истог закључка долазимо ако сличан оглед вршимо и са вишестраним призмама, без обзира на то да ли су праве или косе, то кажемо: **призме једнаких основа и једнаких висина имају и запремине једнаке.**

Задатак: Нацртај један петоугао, па га претвори у четвороугао, а овај у троугао. Сада начини моделе трију правих призама истих висина, чије ће основе бити тај петоугао, четвороугао и троугао. Помоћу ситног песка и ових модела изведи правило о једнакости призама, на начин како је горе речено

5. ЗАПРЕМИНА ПРИЗМЕ

На основу горњег правила о једнакости призама извешћемо образац за израчунавање запремине ма какве призме.

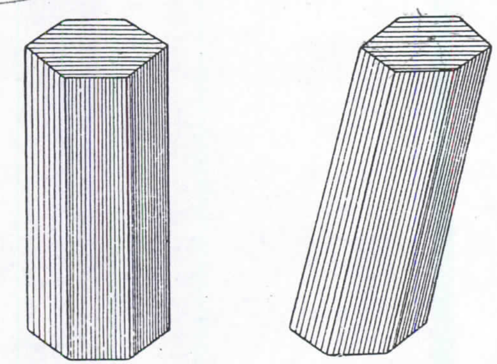
Ако, наиме, сваку призму чију запремину хоћемо да израчунамо, упоредимо са квадром једнаке основе и висине, долазимо до закључка да и њену запремину добијамо на исти начин као и код квадра. Другим речима, треба израчунати површину основе и ову помножити висином призме (Bh). Зато кажемо уопште: **запремина призме једнака је производу основе и висине, тј.**

$$V = Bh$$

Тако, ако је висина h и основина ивица a правилне шестостране призме, онда је

$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \text{ и } V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$$

Јасно је да ће се — по правилу о једнакости призама — по том истом обрасцу добити и запремина косе шестостране призме, једнаке основе (h, сл. 40). Ако су вредности за a и h дате у посебним бројевима, онда њиховом заменом у обрасцу добијамо бројну вредност запремине. Нека је на пример, $a = 4$ cm и $h = 10$ cm, па је



Сл. 40. — Правилна и коса шестострана призма, једнаких основа и висина.

$$V = Bh = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{3 \cdot 16 \cdot 1{,}73}{2} \cdot 10 = 17{,}3 \cdot 24 = 415{,}2\text{, тј.}$$

$$V = 415{,}2\ cm^3$$

Примедба: Уз образац за запремину треба поновити и образац за површину призме, који смо раније извели, дакле: $P = 2B + M$.

Вежбања

1) Које призме имају једнаке запремине ?
2) Како добијамо запремину призме ?

3) За коју призму кажемо да је права, коса, правилна, равноивична?

4) Мора ли равноивична призма бити права? А правилна? Наведи примере.

5) Израчунати површину и запремину правилне тростране призме, код које је основина ивица 4 cm а висина 10 cm. (Одг. P = 133,84 ... cm², V = 69,2 ... cm³)

6) Израчунати површину и запремину правилне шестостране призме, основине ивице 2 cm а висине 8 cm. (Одг. P = 116,76 ... cm², V = 83,04 cm³)

7) Колико литара хвата суд облика правилне четворостране призме, основине ивице 0,4 m и висине 0,6 m? (Одг. 96 l)

8) Израчунати површину и запремину правилне и равноивичне тростране призме чија је ивица 2 cm. (Одг. P = 15,46 ... cm², V = 3,46 ... cm³)

9) Израчунати површину и запремину правилне и равноивичне шестостране призме, ивице 1 dm. (Одг. P = 11,19... cm², V = 2,6 cm³)

10) Једна тространа правилна и равноивична призма има ивицу 2 cm, а направљена је од материјала чија је специфична тежина 10 g. Колико је тешка та призма? (Одг. 34,6 g)

11) Израчунати ивицу правилне тростране равноивичне призме чија је запремина $2\sqrt{3}$ cm³. (Одг. 2 cm)

12) Права призма, висине 20 cm, има за основу троугао са странама 9 cm, 10 cm и 17 cm. Израчунати јој површину и запремину. (Одг. P = 792 cm², V = 720 cm³)

13) Коса призма, висине 20 cm, има за основу квадрат дијагонале $4\sqrt{2}$ cm. Израчунати запремину те призме. (Одг. 320 cm³)

14) Призма висине 30 cm има за основу правоугли троугао чија је хипотенуза 13 cm а једна катета 12 cm. Израчунати јој површину и запремину. (Одг. P = 960 cm², V = 900 cm³)

15) Права призма, висине 10 cm, има за основу ромб чије су дијагонале 16 cm и 12 cm. Колика је површина и запремина те призме? (Одг. P = 592 cm², V = 960 cm³)

16) Колика је висина призме чија је запремина 240 cm³, ако јој је основа ромб с дијагоналама 8 cm и 6 cm? (Одг. 10 cm)

17) Једна права призма, висине 12 cm, има за основу равнокраки троугао обима 50 cm и основице 16 cm. Колика је површина и запремина те призме? (Одг. P = 840 cm², V = 1440 cm³)

18) Једна права призма има за основу правоугаоник, чија је дужина 24 cm а дијагонала 26 cm. Колика је површина и запремина те призме, ако јој је висина 50 cm? (Одг. P = 3880 cm², V = 12000 cm³)

19) Права призма висине 20 cm, има за основу делтоид чије су две стране 4 cm и 13 cm, а дијагонала - симетрала 15 cm. Колика је површина и запремина те призме? (Одг. P = 776 cm², V = 960 cm³)

20) Запремина једне правилне тростране призме је $12\sqrt{3}$ cm³, док је њена висина 3 cm. Колика је основина ивица те призме? (Одг. 4 cm)

21) Израчунати површину ромбоедра, чија страна има дијагонале 30 cm и 16 cm. (Одг. P = 1440 cm²)

22) Права призма висине 30 cm има за основу правоугли трапез, чије су паралелне стране 22 cm и 10 cm, а њихово растојање 9 cm. Израчунати површину и запремину те призме. (Одг. P = 1968 cm², V = 4320 cm³)

23) Израчунати површину и запремину праве призме, висине 30 mm, кад јој је основа равнокраки трапез, чији је обим 148 mm а паралелне стране 50 mm и 20 mm. (Одг. P = 69,60 cm², V = 37,8 cm³)

6. ЗАПРЕМИНА ОБЛИЦЕ

При извођењу обрасца за површину круга ($P = r^2\pi$), ми смо замислили да круг постаје као гранични случај правилног многоугла, коме број страна непрестано повећавамо.

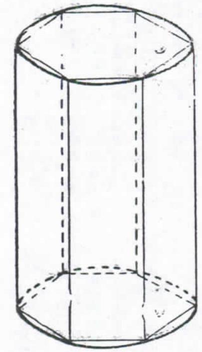
Слично томе можемо и облицу замислити као граничан случај правилне призме, чији се број страна непрестано повећава (сл. 41). Из овога следује да запремину облице добијамо на исти начин као и запремину призме, тј. по обрасцу

$$V = Bh$$

или, како је код сваке облице површина основе $B = r^2\pi$, биће

$$V = r^2\pi h$$

Одавде, на сличан начин као што смо и раније чинили, лако добијамо да је



Сл. 41. — Облица описана око правилне шестостране призме.

$$h = \frac{V}{r^2\pi} \quad \text{и} \quad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

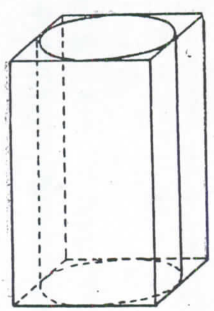
Како је код равностране облице $h = 2r$, то за њену запремину добијамо образац:

$$V = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$$

из чега се види да запремину равностране облице можемо израчунати ако нам је познат или полупречник основе, или висина, док је за исти циљ код осталих облица потребно знати оба ова податка.

Из обрасца за запремину равностране облице добијамо

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$



Сл. 42. — Облица уписана у правилној четвоространој призми.

На сл. 41 кругови облице (основе) описани су око основа призме. За такву облицу кажемо да је **описана око призме,** а за призму да је **уписана у облици.**

На сл. 42 кругови облице уписани су у основама призме. За такву облицу кажемо да је **уписана у призми,** док је призма **описана око облице.**

Примедба: Извели смо раније образац за површину праве облице: $P = 2r\pi\,(r + h)$, а за површину равностране: $P = 6r^2\pi$.

Вежбања

1) Израчунати површину и запремину праве облице чији је полупречник основе (r) и висина (h):

а) $r = 4$ dm, $h = 10$ dm (Одг. $P = 112\pi$ dm², $V = 160\pi$ dm³)

б) $r = 12$ cm, $h = 15$ cm (Одг. $P = 648\pi$ cm², $V = 2160\pi$ cm³)

в) $r = 0{,}5$ m, $h = 1{,}2$ m (Одг. $P = 1{,}7\pi$ m², $V = 0{,}3\pi$ m³)

г) $r = 1\frac{1}{2}$ m, $h = 4$ m (Одг. $P = 16\frac{1}{2}\pi$ m², $V = 9\pi$ m³)

2) Израчунати површину и запремину равностране облице чија основа има полупречник: а) 10 cm, б) 24 cm, в) 0,4 m. (Одг. а) $P = 1884$ cm², $V = 6280$ cm³, б) $P = 3456\pi$ cm² $V = 27648\pi$ cm³, в) $P = 0{,}96\pi$ m², $V = 0{,}128\pi$ cm³)

3) Израчунати површину и запремину равностране облице чија је висина: а) 8 cm, б) 30 cm, в) 1,2 m. (Одг. а) $P = 96\pi$ cm², $V = 128\pi$ cm³, б) $P = 1350\pi$ cm², $V = 6750\pi$ cm³, в) $P = 2{,}16\pi$ m², $V = 0{,}432\pi$ m³)

4) Обим основе једне праве облице је 8π cm а висина јој је 10 cm. Израчунати њену површину и запремину. (Одг. $P = 112\pi$ cm², $V = 160\pi$ cm³)

5) Омотач једне праве облице је 192π cm, а полупречник основе 8 cm. Колика је површина и запремина? (Одг. $P = 224\pi$ cm², $V = 384\pi$ cm³)

6) Полупречник основе једне праве облице је $2\frac{3}{4}$ dm, док је висина $\frac{4}{11}$ полупречника основе. Израчунати површину и запремину те облице. (Одг. $P = 20\frac{5}{8}\pi$ dm², $V = 7\frac{9}{16}\pi$ dm³)

7) Један цилиндричан суд има полупречник основе 10 cm а висину 0,5 m. Колико се литара течности може у њега усути? (Одг. 15,7 l)

8) Израчунати полупречник основе оне равностране облице чија је површина 150π cm² (Одг. 5 cm)

$M = 2\frac{3}{4}$

9) Колика је висина равностране облице чија је запремина 16 π cm^3.) Одг. 4 cm)

10) У суд облика равностране облице може се усути 7,85 l течности. Колика је висина? (Одг. 1 m)

11) Запремина једне праве облице је 200 π dm^3, док је висина 8 dm. Израчунати полупречник основе. (Одг. 5 dm)

12) Колика је површина праве облице, чија је запремина 192 π cm^3, а полупречник основе 4 cm (Одг. 128 π cm^2)

13) Израчунати запремину праве облице чија је површина 440 π cm^2, а полупречник основе 10 cm. (Одг. 1200 π cm^3)

14) Савијањем једног квадрата од картона, обима 8 π cm, добија се омотач праве облице. Колика је запремина те облице? (Одг. 2 π^2 cm^3)

15) Израчунати површину и запремину праве облице чији развијен омотач има дужину 25,12 dm а ширину 10 dm. (Одг. $P = 112\pi$ dm^2, $V = 160\pi$ dm^3. Има ли још једна облица исти омотач? Која?)

16) Колико је тешка масивна права облица, висине 10 cm а полупречника основе 2 cm, ако је специфична тежина материјала 10 g? (Одг. 1,256 kg)

17) У коцки, код које је збир свих ивица 144 cm, уписана је облица. Израчунати њену површину и запремину. (Одг. $P = 216\pi$ cm^2, $V = 432\pi$ cm^3)

18) Око коцке, површине 384 cm^2, описана је облица. Колика је њена запремина? (Одг. $V = 256\pi$ cm^3)

19) Коцки ивице 4 cm описана је и уписана облица. За колико се разликују њихове запремине? (Одг. за 16 π cm^3)

20) У правилној четвоространој призми, основине ивице 6 cm и висине 20 cm, уписана је облица. Израчунати површину и запремину те облице. (Одг. $P = 138\pi$ cm^2, $V = 180\pi$ cm^3)

21) У правој облици, чији је полупречник основе 1,41 cm и висина 10 cm, уписана је правилна четворострана призма. Колика је површина и запремина те призме? (Одг. $P = 88$ cm^2, $V = 40$ cm^3)

22) У тространој правилној призми, основине ивице

$6\sqrt{3}$ cm а висине 20 cm, уписана је облица. Колика је површина и запремина те облице? (Одг. $P = 138\pi$ cm^2, $V = 180\pi$ cm^3)

23) У правој облици ($r = 2$ cm, $h = 12$ cm) уписана је правилна шестострана призма. Колика је површина и запремина ове последње? (Одг. $P = 164{,}76$ cm^2, $V = 124{,}56$ cm^3)

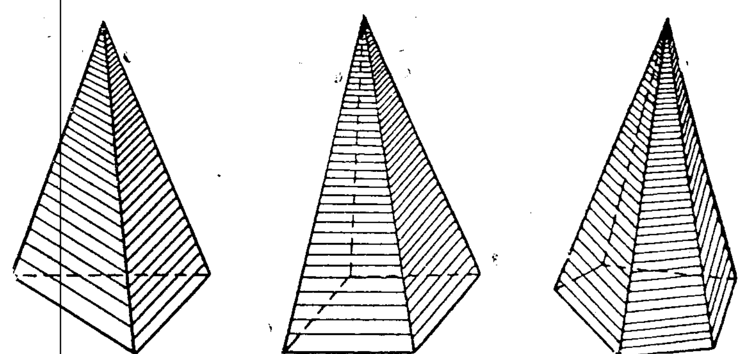
24) Правоугаоник ($a = 4$ cm и $b = 6$ cm), обрће се прво око једне, затим око друге стране. Израчунати површину и запремину тако добијених тела. (Одг. $P_1 = 120\pi$ cm^2, $V_1 = 96\pi$ cm^3 и $P_2 = 80\pi$ cm^2, $V_2 = 96\pi$ cm^3)

7. ЈЕДНАКОСТ ПИРАМИДА И ПРИЗАМА

Пирамиде делимо (Геометрија за II разред) на праве и косе. Под правим пирамидама разумемо оне код којих су све бочне ивице једнаке. Висина праве пирамиде пада у центар описаног круга око основе. То значи да основа сваке праве пирамиде мора бити тетивни многоугао (тј. такав, да се око њега може описати круг.) Ако бочне ивице пирамиде нису све једнаке, она није права, већ коса.

Међу правим пирамидама уочили смо правилне. То су оне пирамиде чије су основе правилне геометриске слике. Другим речима, код правилне пирамиде једнаке су 1) све основине ивице међу собом, 2) све бочне ивице међу собом.

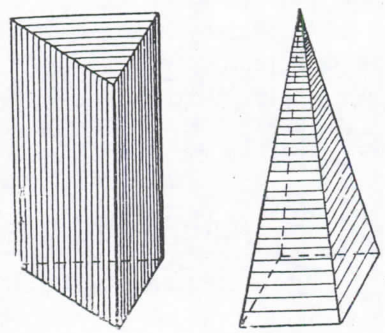
Најзад, равноивична пирамида је она чије су све ивице једнаке.



Сл. 43. — Пирамиде једнаких основа и јендаких висина.

Претпоставимо да пирамиде на сл. 43 имају једнаке основе и једнаке висине. Ако моделима оваквих пирамида од картона уклонимо основе, онда их можемо пунити, као и призме раније, ситним песком. Пресипањем таквог песка из једне пуне пирамиде у другу можемо се уверити, да иста количина песка испуњава тачно запремину сваке од њих. Зато кажемо: **пирамиде једнаких основа и једнаких висина имају и запремине једнаке.**

Посматрајмо сада призму и пирамиду једнаких основа (без обзира на њихов облик) и једнаких висина, као што су оне претстављене на сл. 44. Ако оваквој призми од картона уклонимо једну основу, а исто тако и пирамиди њену, онда се у њих може сипати песак. Лако се уверавамо да нам треба три овакве пирамиде песка да бисмо испунили ту призму. Зато кажемо уопште: **пирамида има три пута мању запремину од призме с којом има једнаку основу и једнаку висину.**



Сл. 44. — Призма и пирамида једнаких основа и једнаких висина.

Задатак: Начини следеће моделе тела и помоћу њих и ситног песка, на начин како је горе описано, изведи правила о једнакости пирамида једнаких основа и једнаких висина, и пирамида и призама једнаких основа и једнаких висина:

1) Праву пирамиду, висине 12 cm, која има за основу правоугли троугао с катетама 6 cm и 8 cm. (Остале елементе, потребне за конструкцију мреже, израчунај сам из слободно нацртане слике).

2) Праву пирамиду, висине 12 cm, која има за основу правоугаоник дужине 10 cm и ширине 2,4 cm. (Остале елементе, потребне за мрежу, као и горе, израчунај).

3) Правоугли паралелопипед с димензијама 4 cm, 6 cm и 12 cm.

8. ЗАПРЕМИНА ПИРАМИДЕ

Из горњих правила о једнакости пирамида излази да запремину ма које пирамиде можемо добити, ако запремину призме исте основе и висине поделимо са 3. Тако је

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

тј. **запремина пирамиде једнака је трећини производа њене основе и висине.**

На пример, правилна шестострана пирамида основине ивице a и висине h имаће запремину:

$$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{a^2 h \sqrt{3}}{2}$$

Ако су дате бројне вредности за основину ивицу и висину, на пример a = 4 cm и h = 10 cm, биће:

$$V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 1{,}73}{2} = 138,4$$

бројна вредност запремине такве пирамиде је: $V = 138{,}4\ cm^3$.

Примедба: За површину пирамиде добили смо раније образац:
$$P = B + M,$$
где B значи површину основе, а M омотач или збир бочних страна.

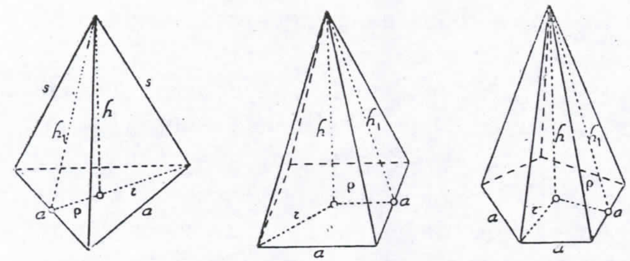
9. ПРИМЕНА ПИТАГОРИНОГ ПРАВИЛА НА ПИРАМИДУ

Питагорино правило применили смо (при израчунавању површине) на све оне равне слике где смо, повлачењем помоћних дужи, могли добити правоугле троугле. То исто важи и за тела, као што смо већ имали у случајевима коцке и квадра (дијагонале).

Проучићемо сада ову примену код правилних пирамида. Као што смо раније видели, правилне пирамиде имају све бочне ивице једнаке (јер оне спадају у праве пирамиде), а исто тако и све основине ивице једнаке, што значи да су основе у таквих пирамида правилне геометриске слике.

На сл. 45 претстављене су правилне пирамиде, и то тространа, четворострана и петострана. Висина је код свих обележена са h, а бочна висина— словом h_1. Даље је код свију ових пирамида основина ивица обележена са a, бочна са s, а полупречници описаног и уписаног круга основе обележени су са r и ρ.

Код ових пирамида треба уочити три правоугла троугла на које можемо применити Питагорино правило (овде основе нису ушле у обзир, јер смо на њих раније примењивали Пи-



Сл. 45. — Правоугли троугли у правилним пирамидама.

тагорино правило). Један од њих има хипотенузу h_1 а катете ρ и h; други има за хипотенузу s и катете r и h, док је хипотенуза трећег s а катете h_1 и $\frac{a}{2}$. Док су прва два од тих троуглова у пресецима пирамиде, дакле у њеној унутрашњости, дотле се трећи налази на бочној страни (1/2 бочне стране).

Ову примену видећемо јасније на једном примеру. Нека је код четворостране правилне пирамиде позната бочна ивица $s = 10$ cm и висина $h = 8$ cm, па се тражи да израчунамо њену површину и запремину. Како је

$$P = B + M = a^2 + 2ah_1$$

$$\text{и } V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} a^2 h,$$

то нам је потребно да израчунамо прво основину ивицу a и бочну висину h_1. Према подацима који су дати, израчунаћемо прво дијагоналу квадрата, па помоћу ње основину ивицу a, овако:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{s^2 - h^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6, \text{ тј. } d = 12.$$

Како је $d = a\sqrt{2}$, то је

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Затим бочну висину израчунавамо из бочног троугла овако:

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 18} = \sqrt{82} = 9,05$$

Сада је:

$$P = a^2 + 2ah_1 = 72 + 12 \cdot \sqrt{2} \cdot 9,05 = 225,126 \text{ тј.}$$

$$P = 225,126 \text{ cm}^2.$$

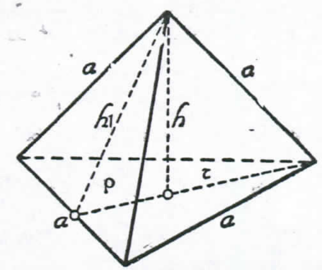
$$V = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 8 = 192, \text{ тј. } V = 192 \text{ cm}^3.$$

И код осталих пирамида може се применити Питагорина теорема, пошто се код свију њих могу образовати правоугли троугли.

10. ЗАПРЕМИНА ТЕТРАЕДРА И ОКТАЕДРА

Применом Питагориног правила можемо обрасце за запремине тетраедра и октаедра изразити помоћу њихових ивица.

Пошто је тетраедар пирамида, његова запремина је $V = \frac{1}{3} Bh$ или, како је основа равнострани троугао $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$. Из правоуглог троугла чија је хипотенуза a и катете h и r (сл. 46) биће:



Сл. 46. — Правоугли троугли у тетраедру.

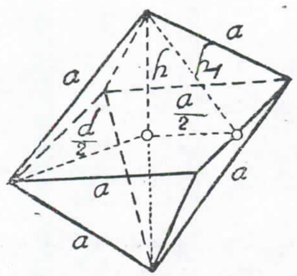
$$h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2 - a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Ако ту вредност заменимо у обрасцу за запремину, биће:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

и то је образац за запремину тетраедра.



Сл. 47. — Правоугли троугли у октаедру.

Слика 47 показује нам да октаедар можемо сматрати као две четворостране правилне и равноивичне пирамиде са заједничком основом. Његову запремину добићемо, дакле, кад удвостручимо запремину такве једне пирамиде.

Дакле :

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\, Bh = 2 \cdot \frac{1}{3}\, a^2h$$

Висину ћемо добити по Питагорином правилу овако (види сл. 47) : $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, или кад овај разломак проширимо кореном из 2:

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Сменом ове вредности за h у обрасцу за запремину, добијамо:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

и то је тражена запремина октаедра.

Примедба: Узимајући у обзир да су тетраедар и октаедар ограничени равностраним троуглима, њихове површине лако добијамо по следећим обрасцима :

За тестраедар: $P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

За октаедар: $P = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$

Вежбања

1) Које пирамиде имају једнаке запремине?

2) Какав однос постоји између призама и пирамида једнаких основа и висина?

3) Како добијамо запремину пирамиде?

4) Кад кажемо за пирамиду да је права, коса, правилна, равноивична?

5) Може ли правилна шестострана пирамида бити равноивична? Зашто? А правилна пирамида са више од шест страна?

6) Шта је тетраедар?

7) Шта је октаедар?

8) По којим обрасцима добијамо површину и запремину тетраедра?

9) По којим обрасцима добијамо површину и запремину октаедра?

10) Израчунати површину и запремину правилне четворостране пирамиде, чија је основина ивица 12 cm а бочна ивица 11 cm. (Одг. П = 364,8... cm², V = 336 cm³)

11) Колика је површина и запремина правилне четворостране пирамиде бочне ивице 19 cm и бочне висине $5\sqrt{13}$ cm? Одг. P = 576 cm², V = 816 cm³)

12) Позната је бочна ивица 27 cm и висина 23 cm једне правилне четворостране пирамиде. Израчунати јој површину и запремину. (Одг. P = 1402,8 cm², V = 3066,6 cm³)

13) Израчунати површину и запремину правилне тростране пирамиде, чија је висина 24 cm а бочна висина 25 cm. (Одг. P = $672\sqrt{3}$ cm², V = $1176\sqrt{3}$ cm³)

14) Код једне тростране правилне пирамиде бочна ивица је 17 cm и висина 15 cm Колика јој је површина и запремина? (Одг. P = $234\sqrt{3}$ cm², V = $240\sqrt{3}$ cm³)

15) Колика је површина и запремина једне правилне тростране пирамиде чија је основина ивица $6\sqrt{3}$ cm а висина 4? cm (Одг. P = $72\sqrt{3}$ cm², V = $36\sqrt{3}$ cm³)

16) Израчунати површину и запремину правилне шестостране пирамиде чија је основина ивица $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm а висина 12 cm. (Одг. P = $180\sqrt{3}$ cm², V = $200\sqrt{3}$ cm³)

17) Колика је површина и запремина правилне шестостране пирамиде, чија је основина ивица 7 cm, а бочна ивица 10 cm? (Одг. P = 324,555... cm², V= $174{,}93\sqrt{3}$ cm³)

18) Једна правилна четворострана пирамида има запремину 192 cm³ и висину 9 cm. Колика јој је основина ивица? (Одг. 8 cm)

19) Израчунати основину ивицу правилне шестостране пирамиде, чија је запремина $18\sqrt{3}$ cm³, а висина 4 cm. (Одг. 3 cm)

20) Колика је основина ивица једне правилне тростране пирамиде, висине 12 cm, кад јој је запремина $16\sqrt{3}$ cm³? (Одг. 4 cm)

21) Бочна ивица једне правилне шестостране пирамиде је 13 cm, а обим круга описаног око њене основе је 10π cm. Израчунати запремину те пирамиде. (Одг. $150\sqrt{3}$ cm³)

22) Колика је запремина четворостране правилне пирамиде, код које је бочна ивица 25 cm а обим круга описаног око њене основе је 14π cm? (Одг. 784 cm³)

23) Израчунати запремину правилне тростране пирамиде, висине 40 cm, ако је обим круга описаног око њене основе 18π cm. (Одг. 1401,3 cm³)

24) Конструисати мрежу четворостране правилне пирамиде, чија је основина ивица 4 cm а висина 1 cm. (Одг.: прво треба израчунати бочну ивицу $s = 3$ cm)

25) Конструисати мрежу правилне шестостране пирамиде код које је основина ивица 3 cm и висина 4 cm. (Одг. прво треба израчунати бочну ивицу $s = 5$ cm)

26) Израчунати површину и запремину четворостране равноивичне пирамиде чија је ивица 4 cm. (Одг. $P = 43{,}68\ldots$ cm², $V = 15{,}04$ cm³)

27) Колика је површина четворостране равноивичне пирамиде чија је запремина $36\sqrt{2}$ dm³? (Одг. 98,28... dm²)

28) Колика је површина и запремина октаедра, ивице 1 dm? (Одг. $P = 2\sqrt{3}$ dm², $V = \frac{\sqrt{2}}{3}$ dm³)

29) Ако је површина једног октаедра $32\sqrt{3}$ cm², колика му је запремина? (Одг. $64\sqrt{2}$ cm³)

30) Израчунати површину октаедра чија је запремина $9\sqrt{2}$ mm³. (Одг. $18\sqrt{3}$ mm²)

31) Колика је тежина масивног октаедра, ивице 4 cm, ако је специфична тежина материјала $\sqrt{2}$ g? (Одг. 42,7 g)

32) Израчунати површину и запремину тетраедра, ивице 2 cm. (Одг. $P = 4\sqrt{3}$ cm², $V = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ cm³)

33) Колика је запремина тетраедра чија је површина $144\sqrt{3}$ cm²? (Одг. $144\sqrt{2}$ cm³).

34) Колика је површина тетраедра чија је запремина $18\sqrt{2}$ cm³? (Одг. $36\sqrt{3}$ cm²)

35) Колика је тежина масивног театедра, ивице 6 cm, ако му је специфична тежина $\sqrt{2}$ g? (Одг. 36 g)

36) Израчунати запремину праве пирамиде чија је основа правоугаоник са странама 8 cm и 6 cm, а бочна ивица 13 cm. (Одг. 192 cm³)

37) Права пирамида висине 84 cm, има за основу правоугаоник са странама 24 cm и 10 cm. Израчунати бочну ивицу те пирамиде. (Одг. 85 cm)

38) Једна права пирамида има за основу правоугли троугао чије су катете 7 cm и 24 cm. Израчунати њену запремину, ако јој је висина једнака пречнику круга описаног око основе. (Одг. 700 cm³)

39) Ако повучемо све четири дијагонале коцке, онда оне са коцкиним ивицама одређују шест једнаких правилних пирамида. Израчунати површину и запремину једне од њих, кад је коцкина ивица 6 cm. (Одг. $P = 86{,}76$ cm², $V = 36$ cm³)

40) Један квадар има димензије 2 cm, 3 cm и 6 cm. Колика је површина тетраедра, чија је ивица једнака дијагонали тог квадра? (Одг. $49\sqrt{3}$ cm²)

11. ЗАПРЕМИНА КУПЕ

Купе делимо, као што нам је познато (III разред), на праве и косе. Код праве купе висина пада у центар основе, код косе то није случај.

Ми замишљамо да купу можемо добити, ако некој правилној пирамиди број страна бесконачно увећамо. Према томе, запремину купе израчунаћемо на исти начин као и запремину пирамиде, тј. по обрасцу $V = \frac{1}{3}Bh$, или, пошто је код купе $B = r^2\pi$, биће

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

Овај последњи образац показује **да је запремина купе једнака трећини запремине облице с којом има једнаку основу и једнаку висину.** У ово се, усталом, можемо уверити и огледом с песком, слично онима које смо чинили раније.

Из обрасца за запремину купе излази да је

$$h = \frac{3V}{r^2\pi} \text{ и } r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$$

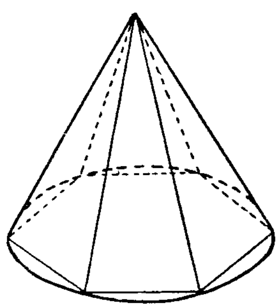
Како је код равностране купе висина $h = r\sqrt{3}$ (зашто?), то је запремина равностране купе

$$V = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot r\sqrt{3} = \frac{1}{3} r^3\pi \sqrt{3}$$

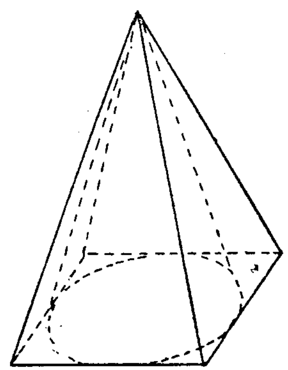
Одавде можемо израчунати r, па је

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{3}}}$$

На сл. 48 кург (основа) купе описан је око основе пирамиде, док је врх заједнички за оба та тела. За такву купу кажемо да је **описана око пирамиде**, док за пирамиду кажемо да је **уписана у купи.**



Сл. 48. — Купа описана око правилне пирамиде.



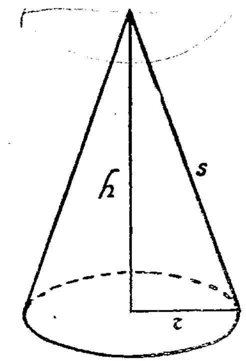
Сл. 49. — Купа уписана у правилној пирамиди.

На сл. 49, међутим, основа купе уписана је у основи пирамиде, док им је врх опет заједнички. За овакву купу кажемо да је **уписана у пирамиди**, а за пирамиду да је **описана око купе.**

Купа се може описати или уписати оној пирамиди, чијој се основи може описати или уписати круг.

Примедба: Образац за површину купе је $P = \pi r(r + s)$, а за површину равностране купе $P = 3r^2\pi$.

12. ПРИМЕНА ПИТАГОРИНОГ ПРАВИЛА НА КУПУ



Сл. 50. — Правоугли троугао у купи.

Слика 50 показује да висина купе h, изводница s и полупречник основе r чине правоугли троугао. Према томе, на купу се може применити Питагорино правило.

Нека је, на пример, код једне купе позната изводница $s = 13$ cm и висина $h = 12$ cm, па се тражи њена површина и запремина. Према обрасцима $P = r\pi(r + s)$ и $V = \frac{1}{3} r^2\pi h$ потребно је да нађемо полупречник основе r. Из поменутог троугла биће $r = \sqrt{s^2 - h^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$, тј. $r = 5$ cm, па је

$$P = 5\pi(5 + 13) = 5\pi \cdot 18 = 90\pi \text{ тј. } P = 90\pi \text{ cm}^2,$$

$$V = \frac{1}{3} 25\pi \cdot 12 = 25\pi \cdot 4 = 100\pi \text{ тј. } V = 100\pi \text{ cm}^3.$$

Код равностране купе поменути троугао (половина осовинског пресека) је, као што знамо, половина равностраног троугла, тј. $s = 2r$, па се једним од три елемента s, h или r могу израчунати остала два.

Вежбања

1) Коју купу називамо правом, а коју косом?
2) Како израчунавамо запремину купе?
3) Како израчунавамо површину и запремину равностране купе?
4) Шта је то осовински пресек купе?
5) Какав је осовински пресек код равностране купе?
6) Кад кажемо да је пирамида уписана у купи?
7) Кад кажемо да је пирамида описана око купе?
8) Шта је за купу бочна ивица а шта висина пирамиде која је у купи уписана?
9) Израчунати површину и запремину праве купе чији је полупречник основе (r) и висина (h):

а) $r = 4$ cm
$H = 3$ cm
(Одг. $P = 36\pi$ cm², $V = 16\pi$ cm³)

б) $r = 65$ cm
$H = 156$ cm
(Одг. $P = 15210\pi$ cm², $V = 219700\pi$ cm³)

в) $r = 3{,}3$ m
$H = 5{,}6$ m
(Одг. $P = 32{,}34\pi$ m², $V = 20{,}328\pi$ m³)

10) Колика је површина и запремина праве купе чији је полупречник основе (r) и изводница (s):

а) $r = 5$ cm
$s = 13$ cm
(Одг. $P = 90\pi$ cm², $V = 100\pi$ cm³)

б) $r = 36$ cm
$s = 37$ cm
(Одг. $P = 2520\pi$ cm², $V = 4900\pi$ cm³)

в) $r = 0{,}9$ m
$s = 4{,}1$ m
(Одг. $P = 4{,}5\pi$ m², ($V = 1{,}08\pi$ m³.)

11) Израчунати површину и запремину праве купе чија је висина (H) и изводница (s):

а) $H = 7$ cm
$s = 25$ cm
(Одг. $P = 1176\pi$ cm², $V = 1344\pi$ cm³)

б) $H = 63$ cm
$s = 65$ cm
(Одг. $P = 1296\pi$ cm², $V = 5376\pi$ cm³)

в) $H = 3{,}9$ m
$s = 8{,}9$ m
(Одг. $P = 135{,}2\pi$ m², $V = 83{,}2\pi$ m³)

12) Запремина једне праве купе је $320\,\pi$ cm³ а висина 15 cm. Колика је површина те купе? (Одг. $200\,\pi$ cm³)

13) Колика је површина праве купе, чија је запремина $392\,\pi$ mm³, а полупречник основе 7 mm? (Одг. 224π mm²)

14) Израчунати запремину праве купе, кад јој је површина 216π dm², а полупречник основе 9 dm. (Одг. $324\,\pi$ dm³)

15) Колика је запремина праве купе чија је површина $90\,\pi$ cm², а полупречник основе 5 cm. (Одг. $100\,\pi$ cm³)

16) Омотач іедне праве купе је $671\,\pi$ cm², а изводница 61 cm. Колика је површина и запремина те купе? (Одг. $P = 792\,\pi$ cm², $V = 2420\,\pi$ cm³)

17) Израчунати запремину праве купе чији је омотач $175\,\pi$ cm², а обим основе $14\,\pi$ cm. (Одг. $392\,\pi$ cm³)

18) Колика іе запремина праве купе, чији је омотач $240\,\pi$ cm², а површина основе $256\,\pi$ cm²? (Одг. $1024\,\pi$ cm³)

19) Површина осовинског пресека једне праве купе је 120 cm², док је висина 15 cm. Колика је површина те купе? (Одг. $200\,\pi$ cm²)

20) Код једне праве купе, чија је изводница 17 cm, обим осовинског пресека је 50 cm. Колика је запремина те купе? (Одг. $320\,\pi$ cm³)

21) Висина осовинског пресека једне праве купе је 12 cm, а његова основица 10 cm. Колика је површина те купе? (Одг. $90\,\pi$ cm²)

22) Израчунати површину и запремину равностране купе код које је полупречник основе а) 10 cm, б) 1 cm, в) $3\sqrt{3}$ cm. (Одг. а) $P = 942$ cm², $V = 1810{,}7$ cm³, б) $P = 9{,}42$ cm², $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³, в) $P = 81\,\pi$ cm², $V = 81\,\pi$ cm³)

23) Колика је површина и запремина равностране купе, висине а) 4 cm, б) 3,46 cm, в) $4\sqrt{3}$ cm. (Одг. а) $P = 16\,\pi$ cm², $V = \frac{64}{9}\pi$ cm³, б) $P = 12\,\pi$ cm², $V = \frac{8}{3}\pi\sqrt{3}$ cm, в) $P = 48\pi$ cm², $V = 21\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}$ cm³)

24) Колика је површина осовинског пресека равностране купе, код које је изводница 4 dm? (Одг. $4\sqrt{3}$ dm²)

25) Површина осовинског пресека једне равностране купе је $64\sqrt{3}$ cm. Израчунати обим њене основе. (Одг. 16π cm)

26) Колика је површина равностране купе, код које је запремина $9\,\pi\sqrt{3}$ cm³? (Одг. 27π cm²)

27) Колика је запремина равностране купе, код које је површина 27π m²? (Одг. $9\pi\sqrt{3}$ m³)

28) Масивна равнострана купа, специфичне тежине материјала 25 g, има полупречник основе 10 cm. Израчунати јој тежину. (Одг. 45,268 kg)

29) Колика је специфична тежина материјала једне праве купе, тежине 502,4 g, ако је полупречник основе 4 cm и изводница 5 cm? (Одг. 10 g)

30) Равнострана облица и равнострана купа имају једнаке површине. Ако је полупречник облице $\sqrt{2}$ cm, колики је полупречник купе? (Одг. 2 cm)

31) У првој купи ($r = 4\sqrt{2}$ cm. и $h = 7$ cm) уписана је правилна четворострана пирамида. Колика је бочна ивица ове пирамиде? (Одг. 9 cm)

32) Око праве купе ($r = 6$ cm и $h = 7$ cm) описана је правилна четворострана пирамида. Израчунати запремину те пирамиде. (Одг. 336 cm³)

33) Једна правилна шестострана пирамида од дрвета има основину ивицу 12 cm и бочну ивицу 15 cm. Од те пирамиде треба истесати што је могуће већу купу. Колика ће бити запремина те купе? (Одг. 324π cm³)

34) Основина ивица једне четворостране равноивичне пирамиде од дрвета је 12 cm. Од те пирамиде треба тесањем начинити што је могуће већу купу. Израчунати запремину те купе. (Одг. $36\pi\sqrt{2}$ cm³)

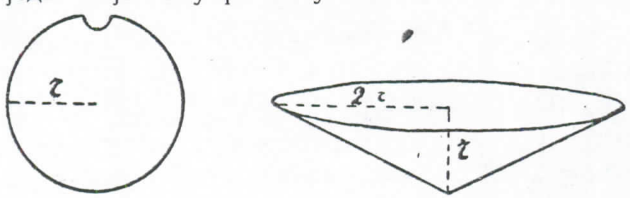
35) Једна тространа правилна пирамида има основину ивицу $6\sqrt{3}$ cm и висину 20 cm. Колика је запремина описане, а колика уписане купе? (Одг. V о. к. $= 240\pi$ cm³, V у. к. $=$ $= 60\pi$ cm³)

36) Круг од картона, полупречника 8 cm, подељен је у квадранте, и од једног од њих начињен омотач купе. Колика је површина такве купе? (Одг. 20π cm²)

37) Правоугли троугао, чије су катете 5 cm и 12 cm, обрће се прво око једне, затим око друге катете. Израчунати површине и запремине тако добијених тела. (Одг. $P_1 = 9\pi$ cm², $V_1 = 100\pi$ cm³, $P_2 = 300\pi$ cm², $V_2 = 240\pi$ cm³)

13. ЗАПРЕМИНА ЛОПТЕ

На сл. 51 претстављен је модел „шупље" лопте од неког метала, на чијој је површини начињена једна не сасвим мала рупа, а поред ње је модел једне купе без основе. Полупречник основе ове купе једнак је пречнику лопте, а њена висина једнака је полупречнику лопте.



Сл. 51 — Модели лопте и купе једнаких запремина.

Ако ову лопту напунимо ситним песком, и овај преручимо у купу, видећемо да ова два тела имају једнаке запремине. Запремину лопте, дакле, добићемо по обрасцу који важи за запремину овакве купе, а то је

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2\pi \cdot r = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Како r у нашем огледу може имати коју хоћемо вредност, то горњи образац важи за израчунавање запремине ма које лопте.

Из горњег обрасца лако израчунавамо

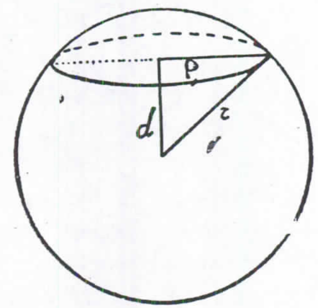
$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Обрасци за запремину лопте, као и за запремину облице и купе, **дају само приближне бројне вредности,** пошто у њима фигурише број π.

Примедба: Сетимо се, да смо за површину лопте имали раније образац $P = 4r^2\pi$.

14. ПРИМЕНА ПИТАГОРИНОГ ПРАВИЛА КОД ЛОПТЕ

Равни пресеци лопте увек су кругови. Те кругове називамо, као што смо рекли раније, лоптиним круговима. Оне лоптине кругове који пролазе кроз центар лопте, назвали смо великим или основним лоптиним круговима.



Сл. 52. — Правоугли троугао у лопти.

Ако из центра лопте спустимо нормалу (d) на један лоптин круг, ова ће нормала пасти у центар тог круга. Повучемо ли још полупречник лопте (r) као што је на сл. 52, добићемо правоугли троугао чија је хипотенуза r а катете d и ρ. Према томе и овде можемо применити Питагорино правило.

Нека је, на пример, познат полупречник једног лоптиног круга, $\rho = 16$ cm, и удаљење тог круга од центра лопте, $d = 22$ cm, па се тражи површина и запремина лопте.

Према обрасцима $P = 4r^2\pi$ и $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, прво морамо израчунати r. Из поменутог троугла биће:

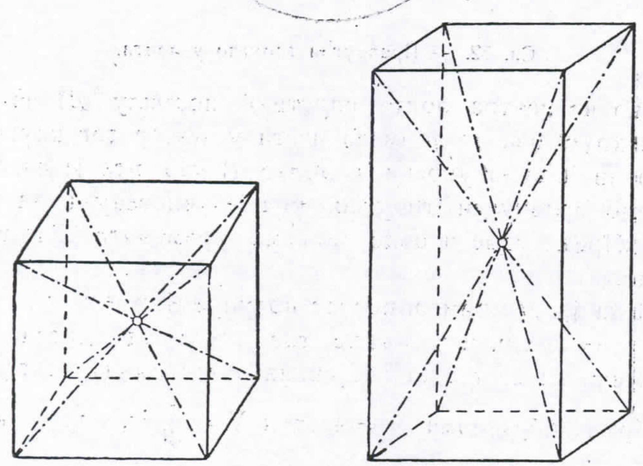
$r = \sqrt{d^2 + \rho^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$, тј. $r = 20$ cm. Сада је површина: $P = 4r^2\pi = 4.400\pi = 1600\pi$, тј. $P = 1600\pi$ cm^2, а запремина лопте:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 8000\pi = \frac{32000}{3}\pi, \text{ тј. } V = \frac{32000}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

За лопту кажемо да је **описана око неког тела,** ако се сва темена тог тела налазе на површини лопте, а **уписана у неком телу,** ако све стране тог тела додирују лоптину површину. Посматрајмо лопту у вези са коцком и квадром.

Код коцке, као што знамо, дијагонале су једнаке и полове се (сл. 53), што значи да је њихов пресек једнако удаљен од свих темена коцкиних. Овај пресек је онда и центар описане лопте. Ако узмемо у обзир да је та тачка удаљена од свију страна коцке за половину ивице $\frac{a}{2}$, онда је она и центар уписане лопте. Дакле: **коцки се може описати и уписати лопта.** Ове две лопте су **концентричне,** јер имају исти центар, а полупречници су им: половина коцкине дијагонале, $r = \frac{\mathfrak{d}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ за описану лопту, и половина ивице $r_1 = \frac{a}{2}$ за уписану лопту.

Дијагонале квадра такође су једнаке и полове се, што значи да су сва темена квадра једнако удаљена од пресека



Сл. 53. — [illegible] пресек код коцке и квадра.

тих дијагонала (сл. 53). Али тај пресек није једнако удаљен од квадрових страна, као што је био случај код коцке, већ су његова удаљења $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ и $\frac{c}{2}$, ако су a, b и c ивице квадра. Из овога следује: **око квадра се може описати лопта, али се она у њега не може уписати.** Центар описане лопте је пресек дијагонала, а полупречник јој је половина дијагонале, или:

$$r = \frac{1}{2}\mathfrak{d} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Вежбања

1) Израчунати површину и запремину лопте чији је полупречник а) 4 cm, б) 10 cm, в) 1,5 cm, г) 1½ cm, (Одг. а) $P = 64\pi$ cm^2, $V = 85{,}33\pi$ cm^3, б) $P = 400\pi$ cm^2, $V = 1333{,}33\pi$ cm^3, в) $P = 9\pi$ cm^2, $V = 4{,}5\pi$ cm^3)

2) Колики је полупречник лопте чија је површина 576π cm^2? (Одг. 12 cm)

3) Колики је полупречник лопте чија је запремина 4500π cm^3? (Одг. 15 cm)

4) Израчунати запремину лопте чија је површина 900π mm^2. (Одг. 4500π mm^3)

5) Израчунати површину лопте чија је запремина 972π cm^3. (Одг. 324π cm^2)

6) Две лопте имају полупречнике 3 cm и 4 cm. Израчунати полупречник треће лопте, чија је површина једнака збиру површина тих двеју лопти. (Одг. 5 cm)

7) Један лоптин круг, обима 16π dm, удаљен је од центра лопте 15 dm. Колика је запремина те лопте? (Одг. $6550{,}6\pi$ dm^3)

8) Колика је површина једног лоптиног круга, који је 9 cm удаљен од центра лопте, чија је запремина 4500π cm^3? (Одг. 144π cm^2)

9) У коцки ивице 6 cm, уписана је лопта. Израчунати површину и запремину те лопте. (Одг. $P = 36\pi$ cm^2, $V = 36\pi cm^3$)

10) Око коцке, ивице $4\sqrt{3}$ m, описана је лопта. Израчунати њену површину и запремину. (Одг. $P = 144\pi$ m^2, $\mathfrak{d} = 288\pi$ m^3)

11) Површина једне коцке је 72 cm^2. Израчунати запремину описане и уписане лопте. (Одг. V о. л. $= 36\pi$ cm^3, V у. л. $= 4\pi\sqrt{3}$ cm^3)

12) Око квадра чије су ивице 4 cm, 6 cm и 12 cm, описана је лопта. Колика је површина и запремина те лопте? (Одг. $P = 196\pi\ cm^2$, $V = 457{,}33\pi\ cm^3$)

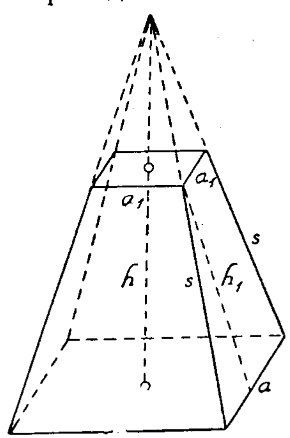
13) Једна равнострана облица и једна лопта имају једнаке површине. Ако је полупречник те облице $r = \sqrt{6}$ cm, колики је полупречник лопте? (Одг. 3 cm)

14) Од једне дрвене полукугле, полупречника 6 cm, треба добити што је могуће већу купу. Колика ће бити запремина те купе, а колика запремина отпадака? (Одг. $V_{к.} = 72\pi\ cm^3$, $V_{отп.} = 72\pi\ cm^3$)

15) Израчунати тежину шупље металне лопте, специфичне тежине материјала 10 g, кад је унутрашњи полупречник 6 cm а спољашњи 9 cm. (Одг. 21,478 kg)

15. ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ЗАРУБЉЕНЕ ПИРАМИДЕ

Ако пирамиду пресечемо једном равни, која је паралелна са основом, добићемо једну мању пирамиду и једно тело које се зове **зарубљена пирамида** (сл. 54). Ако смо пресекли правилну пирамиду, онда добијамо **правилну зарубљену пирамиду.** На сл. 54 претстављена је четворострана правилна зарубљена пирамида.



Сл. 54. — Зарубљена правилна четворострана пирамида.

Свака зарубљена пирамида има две неједнаке али сличне основе (на сл. 54 то су квадрати), а бочне стране су јој

трапези. Ови трапези су равнокраки, ако је зарубљена пирамида добијена од праве пирамиде; они су још и подударни, ако је то правилна зарубљена пирамида.

Према томе, површину пирамиде добијамо, кад саберемо површине њених основа, B и B_1, и омотач, M, који је у ствари збир бочних страна. Дакле

$$P = B + B_1 + M$$

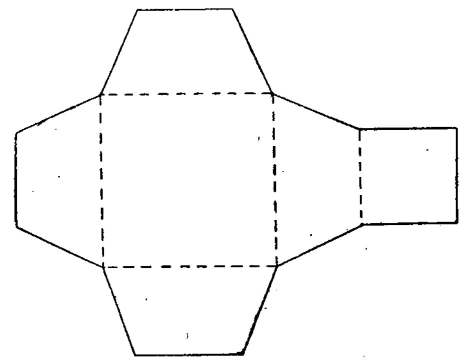
За наш пример четворостране и правилне пирамиде, код које су a и a_1 ивице доње и горње основе и h_1 висина бочне стране (трапеза), биће:

$$B = a^2,\ B_1 = a_1^2 \text{ и } M = 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} h_1 = 2\,(a + a_1)\,h_1,$$

па је:

$$P = a^2 + a_1^2 + 2\,(a + a_1)\,h_1$$

На сл. 55 нацртана је мрежа правилне четворостране зарубљене пирамиде.



Сл. 55. — Мрежа правилне четворостране зарубљене пирамиде.

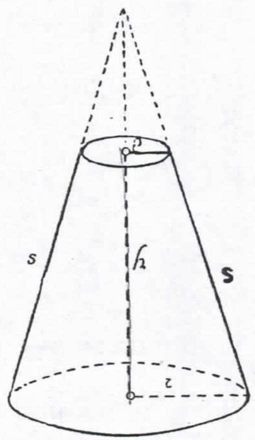
Запремину зарубљене пирамиде добијамо, кад од велике пирамиде одузмемо мању („допунску" пирамиду). Тај поступак захтева нека знања која ћемо ми тек касније стећи, па зато сада учимо готов образац за запремину, а то је:

$$V = \frac{h}{3}\,(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$$

где h означава висину зарубљене пирамиде, тј. раздаљину између њених основа (види сл. 54).

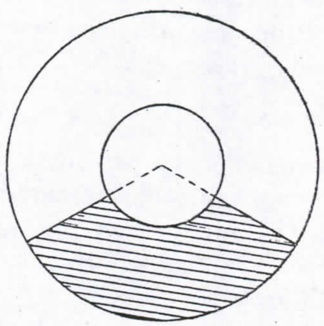
16. ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ЗАРУБЉЕНЕ КУПЕ

Слично као и зарубљену пирамиду, и **зарубљену купу** добијамо кад једну купу пресечемо равни паралелном са



Сл. 56. — Зарубљена купа.

основом (сл. 56). Она има две основе, а то су два круга (полупречника r и ρ). Раздаљина тих основа (h) је висина зарубљене купе. Зарубљена купа је **права,** ако је добијена од праве купе, а **коса,** ако је добијена од косе купе.



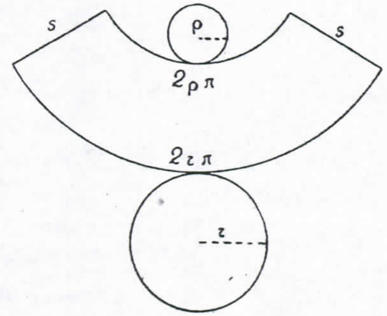
Сл. 57. — Развијен омотач зарубљ. купе је исечак кружног прстена.

Омотач зарубљене купе је део омотача купе од које је постала, а то је као што се види из сл. 57 — кад се разви је, исечак кружног прстена.

Мрежа зарубљене купе претстављена је на сл. 58. Као што показује та мрежа, површину зарубљене купе добићемо, ако површину обеју основа (B и B_1) саберемо с површином омотача (M), дакле

$$P = B + B_1 + M$$

Сматрајући да је зарубљена купа постала бесконачним повећавањем броја страна правилне зарубљене пирамиде, мо-



Сл. 58. — Мрежа зарубљене купе.

жемо омотач ове купе добити на исти начин као и омотач зарубљене пирамиде. Ми ћемо, дакле, сматрати овај развијени омотач као један трапез, чије су паралелне стране обими основа ($2r\pi$ и $2\rho\pi$) а висина — изводница s. Тада је

$$M = \frac{2r\pi + 2\rho\pi}{2} s = \pi s (r + \rho)$$

Према томе, површину зарубљене купе израчунаваћемо по обрасцу:

$$P = r^2\pi + \rho^2\pi + \pi s (r + \rho)$$

Запремину зарубљене купе, као и запремину зарубљене пирамиде, добијамо кад од целе купе одузмемо отсечену („допунску“ купу). Запамтићемо и овде само готов образац по коме ћемо ту запремину израчунавати, а то је:

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r\rho + \rho^2)$$

Вежбања

1) Израчунати површину и запремину правилне зарубљене четворостране пирамиде, чије су основине ивице $a = 12$ cm и $a_1 = 4$ cm, а висина $h = 3$ cm. (Одг. $P = 320$ cm² $V = 208$ cm³)

2) У правилне и зарубљене тростране пирамиде основине ивице су $a = 8$ cm и $a_1 = 4$ cm, а висина $h = 10$ cm. Израчунати њену површину и запремину. (Одг. $P = 115,5$ cm²

$V = \frac{280 \sqrt{3)}}{3}$ cm³)

3) Израчунати запремину правилне шестостране зарубљене пирамиде, код које су основине ивице: $a = 15$ cm и $a_1 = 10$ cm, и бочна ивица $s = 13$ cm. (Одг. $2850 \sqrt{3}$ cm³)

4) Колика је површина и запремина зарубљене купе, висине $h = 4$ cm, кад су јој полупречници основа $r = 6$ cm. и $\rho = 3$ cm? (Одг. $P = 90\pi$ cm², $V = 84\pi$ cm³)

5) Колико се литара воде може насути у кофу, висине 60 cm, ако су јој полупречници 24 cm и 16 cm? (Одг. 76,365 l)

6) Изводница једне зарубљене купе је 17 cm, а полупречник мање основе 8 cm. Израчунати површину и запремину те купе, кад се зна да јој је полупречник веће основе два пута већи од полупречника мање основе. (Одг. $P = 723\,\pi$ cm², $V = 2240\,\pi$ cm³)

7) Начини мрежу и модел четворостране правилне и зарубљене пирамиде, чије су основине ивице $a = 5$ cm и $a_1 = 3$ cm, а бочна ивица $s = 4$ cm.

8) Начини мрежу и модел шестостране правилне и зарубљене пирамиде, чије су основине ивице $a = 6$ cm и $a_1 = 4$ cm, а бочна ивица $s = 5$ cm.

ВЕЖБАЊА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ
за
НИЖИ ТЕЧАЈНИ ИСПИТ

I

Питања

1) Како делимо углове по величини, а како по њиховом међусобном положају?

2) Како делимо равне геометриске слике?

3) Које су врсте троуглова, према странама и према угловима? Опиши сваку од њих.

4) Какав однос постоји а) међу угловима троугла, б) међу странама троугла, в) између страна и углова код троугла?

5) Која тачка је центар описаног круга око троугла, и где се она налази код оштроуглог, правоуглог и тупоулог троугла, код равнокраког и равностраног троугла?

6) Шта све претставља пресек висина код равностраног троугла? Објасни зашто.

7) Претпостави да ти је дат троугао, па се тражи да начиниш његову верну копију. Опиши четири геометриска начина којима би могао то учинити, мерећи и преносећи по три елемента с датог троугла у сваком поједином случају.

8) Шта је средња линија троугла? (Величина, примена)

9) Како делимо четвороугле? — Наведи заједничке особине четвороуглова.

10) Шта су паралелограми, како их делимо и које су њихове заједничке особине?

11) Наведи особине појединих паралелограма (о странама, угловима и дијагоналима).

12) Каквих има трапеза? Које су њихове заједничке и појединачне особине?

13) Шта је и колика је средња линија трапеза?

14) Описати делтоид и навести његове особине.

15) Кажи све што знаш о четвороуглима с нормалним дијагоналама.

16) Ромб, његова симетричност, ромб и круг.

17) Шта је многоугао? Подела и опште особине.

18) Како се одређује број дијагонала код многоугла?

19) Како долазимо до обрасца за збир унутрашњих углова код многоугла?

20) Особине правилних многоуглова.

21) Како израчунавамо један унутрашњи и један спољашњи угао правилног многоугла?

22) О кругу и његовим деловима.

23) Какав положај може имати тачка и права према једном кругу?

24) Какав међусобни положај могу имати два круга? Изрази то помоћу полупречника.

25) Врсте углова у кругу и њихов међусобни однос.

26) Какав је средишњи а какав периферски угао круга који захвата а) пола кружне периферије, б) мање од пола периферије, в) више од пола периферије?

27) Тежишна линија која полази из темена правог угла правоуглог троугла једнака је половини хипотенузе. Како би то могао показати?

28) Кажи све што знаш о тетивама круга.

29) Кажи све што знаш о тангентама круга.

30) Кад кажемо да је круг описан око неке праволиниске слике, а кад је њој уписан?

31) Који услов мора задовољавати четвороугао да би био тетиван? Који су четвороугли увек тетивни?

32) Који су четвороугли тангентни? Који услов морају они испуњавати? Наведи примере таквих четвороуглова.

33) Кад кажемо за две геометриске слике да су а) једнаке, б) сличне, в) подударне? Наведи примере.

34) Који су паралелограми једнаки? Како израчунавамо површину паралелограма?

35) Како израчунавамо површину троугла? Зашто?

36) Извести образац за површину четвороугла с нормалним дијагоналама.

37) Како израчунавамо површину трапеза?

38) Како би се могла израчунати површина трапезоида?

39) Како долазимо до обрасца за површину тангентног многоугла?

40) О броју π (Значење, приближна вредност, примена.)

41) Како долазимо до обрасца за обим круга?

42) Која веза постоји између кружног лука, одговарајућег централног угла и полупречника круга?

43) Површина круга и његових делова.

44) Шта је кружни прстен и како се израчунава његова површина?

45) Како гласи Питагорино правило? Објаснити га на једном примеру.

46) Извести образац за површину равностраног троугла а) у функцији стране, б) у функцији висине.

47) Извести образац за дијагоналу квадрата у функцији стране.

48) Извести образац за површину правилног шестоугла а) у функцији стране, б) у функцији полупречника уписаног круга.

49) Како гласи и чему служи Херонов образац? Провери га на равностраном троуглу.

50) Показати моделима какав међусобни положај могу имати: а) две праве, б) две равни, в) права и раван?

51) Да ли су међусобно паралелне: а) све хоризонталне праве, б) све хоризонталне равни, в) све вертикалне праве, г) све вертикалне равни?

52) Какав положај може имати: а) хоризонтална права према вертикалној равни, б) вертикална права према хоризонталној равни?

53) Шта подразумевамо под пројекцијом тачке и дужи а) на правој, б) у равни?

54) Шта све може бити пројекција једне дужи на правој, или у равни?

55) Шта називамо нагибним углом а) праве према равни, б) равни према равни (диједар)?

56) Рогаљ — опис и подела.

57) Геометриска тела и њихова подела.

58) Правилна геометриска тела — опис и врсте.

59) Шта су призме и како их делимо?

60) Паралелопипеди и њихова подела.

61) Како се могу одредити дијагонале квадра и коцке помоћу ивица тих тела?

62) Пирамиде — опис и врсте.

63) Какав ћемо пресек добити ако правилну тространу пирамиду пресечемо једном равни: а) кроз бочну ивицу и висину пирамиде, б) кроз бочну висину и висину пирамиде, в) паралелно са основом? Какви су ти пресеци код тетраедра?

64) Какав ћемо пресек добити ако правилну четворострану пирамиду пресечемо једном равни: а) кроз бочну ивицу и висину пирамиде, б) кроз бочну висину и висину пирамиде, в) паралелно са основом?

65) Обла геометриска тела и њихова подела.

66) Који су равни пресеци облице, купе и лопте ?

67) Једнакост призама и обрасци за њихову површину и запремину.

68) Једнакост пирамида и обрасци за њихову површину и запремину.

69) Који су и како се могу извести обрасци за површину и запремину облице и купе ?

70) Извести обрасце за површину и запремину равностране облице и равностране купе.

71) Тетраедар — опис и обрасци за површину и запремину.

72) Који су обрасци за површину и запремину октаедра ? Изведи их.

73) Правилна зарубљена пирамида — опис и мрежа.

74) Зарубљена купа — опис и мрежа.

75) Извести образац за површину зарубљене купе.

76) Обрасци за запремину зарубљене пирамиде и зарубљене купе.

77) Који су обрасци за површину и запремину лопте ?

78) Кад кажемо да је лопта описана око неког рогљастог тела, а кад је у њему уписана?

79) У која позната рогљаста тела можемо лопту уписати, а око којих описати ?

II

Задаци из геометрије у равни

1) У круг чији је полупречник 5 cm упиши троугао који ће имати два угла по 45^0.

2) Колико се динара (r = 1 cm) може поређати један поред другога по једном правоугаонику, дужине 8 cm и дијагонале 10 cm? (Одг. 12 комада)

3) Претворити један тупоугли троугао у оштроугли са два пута већом висином.

4) Колики је број страна оног многоугла код кога је збир унутрашњих углова двапут већи од збира спољашњих?

5) Нацртај дуж AB = 3 cm, па опиши кружну линију полупречника 4 cm, тако да она пролази кроз тачке A и B.

6) Ако су стране троугла ABC : a = 3,6 cm b = 2,8 cm и c = 3,4 cm, који је угао највећи а који најмањи? Конструиши затим троугао и провери то мерењем.

√ 7) Две куле стоје на истој равни у раздаљини 15 m. Једна је висока 35 m а друга 43 m. Израчунај дужину жице која спаја (праволиниски) њихове врхове. (Одг. 17 m)

8) Нацртај једну већу дуж. Конструиши затим равнокрако-правоугли троугао, чија ће хипотенуза бити једнака петини те дужи. (Ради све шестаром и лењиром.)

9) Израчунати површину четвороугла ABCD, кад је AB = 20 cm, BC = 21 cm, CD = 6 cm, DA = 25 cm и AC = 29 cm. (Одг. 270 cm^2)

10) Нацртај два круга да се додирују а) споља, б) изнутра.

11) Конструиши паралелограм чија је једна страна 5,5 cm а дијагонале су му 8 cm и 6,4 cm.

12) Кроз једну тачку у унутрашњости круга повуци тетиву, која ће том тачком бити преполовљена.

13) Колике су дијагонале правилног шестоугла стране a? (Одг. $d_1 = d_2 = a\sqrt{3}$, $d_3 = 2a$)

14) Који део кружне периферије отсеца перифериски угао од 60^0?

15) Човек иде 33 m на север, затим 7 m на запад, онда 9 m на југ. Колико је тада удаљен од свог почетног положаја ? (Одг. 25 m)

16) У круг полупречника 5 cm упиши троугао чији су углови 45^0, 60^0 и 75^0. (Примени знање о централним и перифериским угловима)

17) Један четвороугао има обе дијагонале једнаке, $d_1 = d_2 = 6$ cm, и оне се полове и чине угао од 60^0. Какав је то четвороугао? Конструиши га.

18) Нацртај дуж $AB = 6$ cm. Тачком C поделити ту дуж на два дела тако, да је $AC = \frac{2}{3} CB$.

19) Круг полупречника 4,5cm поделити полупречницима на 6 једнаких делова. Затим понструисати тангенте у крајњим тачкама тих полупречника. Какву си слику добио? Покажи зашто.

20) Један петоугао претворити у правоугли троугао.

21) Колики је суплеменат периферискоr угла који захвата четвртину кружне периферије?

22) Конструисати троугао који има стране $a = 5{,}5$ cm, $b = 6{,}6$ cm и угао $\beta = 135^0$, па му уписати круг.

23) Дијагонала једног правоугаоника је 50 cm, а једна му је страна два пута већа од друге. Колике су му стране? (Одг. $10\sqrt{5}$ cm и $20\sqrt{5}$ cm)

24) Нацртај дуж AB и подели је на три једнака дела. Кроз једну подеону тачку повуци другу дуж нормалну и преполовљену са AB. Спој крајње тачке тих дужи. Какву си слику добио? Зашто? Измери што ти треба и израчунај површину те слике.

25) Конструисати троугао чије су стране 5 cm и 6 cm, а захваћени угао 75^0, па му одредити ортоцентар.

26) Израчунати дужину тетиве у кругу површине 36π cm^2, ако је њена централна раздаљина трећина пречника. (Одг. $4\sqrt{5}$ cm)

27) Колико страна има правилни многоугао чији је један спољашњи угао 24^0? Колико се дијагонала може у њему повући? Колики му је збир унутрашњих углова? (Одг. страна 15, дијагонала 90, збир углова 2340^0)

28) Конструиши троугао ABC кад је основица $c = 3$ cm, угао $B = 60^0$ а површина 3,6 cm^2.

29) Како би правама из једног темена троугла поделио тај троугао на n једнаких делова? Нацртај један троугао и подели га на 2, 3, 4, ... једнака дела. (Примени знање о једнакости површина троуглова.)

30) Израчунај површину четвороугла ABCD, код кога је дијагонала $AC = 17$ cm, а темена B и D удаљена су од те дијагонале 9 cm и 11 cm. (Одг. 170 cm^2)

31) У кругу полупречника 4 cm повуци три полупречника тако, да они деле круг на три једнака дела. У периферискиm тачкама ових полупречника конструиши тангенте на круг и довољно их продужи. Какву си слику добио? Покажи зашто.

32) Колика је већа дијагонала ромба, ако је његова мања дијагонала једнака страни a? (Одг. $a\sqrt{3}$)

33) Конструиши равнокрако-правоугли троугао, па му одреди ортоцентар и тежиште.

34) Средишта два круга, чији су полупречници 13 cm и 14 cm, удаљена су 15 cm једно од другог. Колика је дужина њихове заједничке тетиве? (Нацртај приближну слику и посматрај. — Одг. 22,4 cm)

35) Ако једном правоугаонику три пута повећаш дужину, а исто толико пута и ширину, колико си му пута повећао површину? Објасни то рачунски и графички.

36) Код равнокрако-тупоуглог троугла један унутрашњи угао износи 30^0. Одредити углове што их свака висина тога троугла заклапа са његовим странама.

37) Стране једног правоугаоника су 9 cm и 6 cm. Конструисати паралелограм једнаке површине: а) са странама 9 cm и 7 cm, б) са странама 10 cm и 7 cm)

38) Поделити један трапез на четири једнака дела.

39) Троугао ABC уписан је у кругу с центром у тачки O. Ако је $\sphericalangle AOC = 130^0$ и $\sphericalangle BOC = 150^0$, колики је $\sphericalangle ACB$? (Одг. 40^0)

40) Исеци два једнака квадрата од хартије, па један од њих преполови секући га по дијагонали. Ове делове тако распореди, да са првим квадратом чине равнокраки трапез. Колика је дијагонала овог трапеза? (Одг. $a\sqrt{5}$)

41) Колика је површина највећег круга који се може изрезати из ромба чије су дијагонале 16 cm и 12 cm? (Одг. 23,04 π cm)

42) Поделити на три једнака дела трапез, код кога је једна паралелна страна два пута већа од друге а) повлачењем дијагонале, б) без повлачења дијагонале.

43) Конструисати четвороугао ABCD, код кога је AB = BC = 5,5 cm, CD = DA = 4,5 cm и ∢ A = 75⁰. Претвори затим тај четвороугао у троугао.

44) Над висином равностраног троугла обима 36 cm конструисан је нови равнострани троугао. За колико се разликују њихове површине? (Одг. $9\sqrt{3}$ cm)

45) Конструисати четвороугао ABCD, кад је AB = 5 cm, BC = 4 cm, CD = 7 cm, DA = 6 cm и ∢ ABC = 120⁰, па му измери ∢ ADC.

46) Из једног пристаништа крену две лађе, и то једна на север прелазећи 15 km на час, а друга на запад идући 20 km на час. Колико ће оне бити удаљене једна од друге после пута од 5 часова? (Одг. 125 km)

47) Одредити све четири значајне тачке равнокраког троугла, чији је обим 20 cm а основица му је 8 cm.

48) Пречник круга површине 81π cm² јесте висина равностраног троугла. Конструисати тај троугао и израчунати његову површину. (Одг. $108\sqrt{3}$ cm²)

49) Тачке A и B удаљене су једна од друге 5 cm. Тачка C удаљена је од једне од њих 4 cm а од друге 6 cm. Какви су положаји тачке C у односу на дуж AB, и коју слику добијамо њиховим узастопним спајањем?

50) Код једног равнокраког трапеза познато је: крак 34 cm, збир паралелних страна 88 cm и њихова разлика 32 cm. Израчунати му површину. (Одг. 1320 cm²)

51) Нацртај паралелограм ABCD са странама AB = 5 cm и BC = 4 cm и над његовом основицом AB нацртај ромб исте површине

52) Врхови казаљки на часовнику удаљени су један од другог у 6 часова изјутра 23 mm, а у подне 7 mm. Колико су били удаљени у 9 часова? (Одг. 17 mm)

53) Нацртај ма какав троугао ABC и једну тачку M ма где у равни. Треба нацртати троугао једнак датом, са врхом у тачки M, а да му основица буде на правој основице AB.

54) Око сваког темена квадрата обима 32 cm описани су само са спољне стране лукови, полупречником једнаким половини стране квадрата. Израчунати површину тако добијене слике. (Одг. 214,72 cm²)

55) Конструиши ромб стране 3 cm и површине 5,4 cm,² па му измери углове.

56) Једно имање у облику правоуглог троугла има површину 29 a 40 m², а једна му је катета 105 m. Колико ће стајати ограђивање тог имања, ако се за сваки метар ограде мора платити 10 дин? (Одг. 2 800 дин.)

57) Око темена равностраног троугла стране 10 cm описан је круг чији је полупречник једнак висини троугла. Колико од тог троугла лежи ван тога круга? (Одг. 4 cm²)

58) Ако спојиш узастопно средине страна ма ког четвороугла, добићеш опет четвороугао. Покажи помоћу средњих линија троугла, да је тај четвороугао паралелограм. (Повуци дијагоналу и посматрај.)

59) Коју слику добијамо ако спојимо узастопно средине страна: а) квадрата, б) правоугаоника, в) ромба, г) ромбоида?

60) Нацртај два концентрична круга, па повуци тетиву већег која ће додиривати мањи круг. Како би показао да је та тетива преполовљена тачком додира? (Осим мерењем може се то показати подударношћу троуглова.)

61) Лестве дуге 15 m наслоњене су тако да им врх стиже до прозора на висини 12 m од земље. Ако те лестве окренемо око подножне тачке на другу страну улице, оне достижу до једног прозора који је од земље удаљен 9 m. Колика је ширина улице? (Одг. 21 m)

62) Око правилног шестоугла површине $54\sqrt{3}$ cm² описан је круг, а у шестоуглу уписан је равнострани троугао чија се темена поклапају са три темена шестоугла. Нађи површину кружног прстена насталог уписивањем круга у тај равнострани троугао. (Одг. 27π cm²)

63) Од комада хартије у облику квадрата стране 20 cm треба исећи делове који дају два равнострана троугла, стране једнаке са страном квадрата. Како ћеш то учинити и колико парче хартије преостаје? (Одг. 54 cm²)

64) Краци једног равнокраког троугла су дуги по 6 cm, а површина му је 7,2 cm². Конструисати тај троугао. (Конструиши прво правоугаоник два пута веће површине, чија је основица једнака краку тога троугла. Затим шестаром лако добијеш треће теме траженог троугла)

65) Две стране једног троугла су 6,5 cm и 4 cm, а његова је површина 26 cm^2. Конструисати га. (Види упутство у задатку 64)

66) Нацртај троугао који ће бити једнак збиру два дата троугла. (Претвори један од датих троуглова у такав, да има основицу као и други, па конструиши троугао површине $P = \frac{a(h+h_1)}{2}$)

III

Задаци из геометрије у простору

1) Колико ће се пута повећати запремина коцке, ако јој се ивица а) удвостручи, б) утростручи ?

2) Колика је висина праве пирамиде запремине 240 cm^3, кад јој је основа троугао са странама 4 cm, 13 cm и 15 cm? (Одг. 30 cm)

3) Од $\frac{2}{3}$ круга полупречника 6 cm начињен је омотач купе. Израчунај површину те купе. (Одг. 40π cm^2)

4) Конструиши мрежу праве квадратне призме висине 7,5 cm, кад јој је дијагонала 7,5 cm. (Ради без израчунавања.)

5) Квадрат дијагонале $4\sqrt{2}$ cm обрће се око једне своје стране. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела. (Одг. $P = 64\pi$ cm^2, $V = 64\pi$ cm^3)

6) Котур бакарне жице тежак је 125,757 kg. Колико је метара жице у котуру, кад је пречник жице 6 mm, а специфична тежина бакра 8,9? (Одг. 500 m)

7) Конструисати мрежу тетраедра, ако је збир његових ивица 27 cm.

8) Површину и запремину равностране купе изразити њеном висином.

9) Од правилне равноивичне четворостране пирамиде, чији је омотач $25\sqrt{3}$ dm^2, истесана је највећа купа. Колики је обим њене основе? (Одг. 5π dm)

10) Димензије једног правоугаоника су 24 cm и 10 cm. Ако средине његових страна спојимо дужима, добијамо један четвороугао. Над овим четвороуглом треба подићи праву призму чији ће омотач бити 1040 cm^2. Израчунати висину те призме. (Одг. 20 cm)

11) У кругу обима 6π cm уписан је квадрат, а над њим дигнута права пирамида висине 4 cm. Конструисати мрежу те пирамиде. (Шта мораш претходно израчунати?)

12) У правој облици полупречника основе 2,5 cm и висине 12 cm, уписана је квадратна призма. Колика је дијагонала и запремина ове призме. (Одг. $D = 13$ cm, $V = 150$ cm^3)

13) Колика је висина кофе полупречника дна 10 cm и полупречника отвора 25 cm, кад у њу може да стане 40,82 L течности? (Одг. 4 dm)

14) Један квадар има димензије 4 cm, 6 cm и 12 cm. Одреди његову дијагоналу конструктивним путем, па резултат провери рачунски. (Одг. 14 cm)

15) Од оловне кугле полупречника 4 cm треба излити куглице полупречника 1 cm. Колико ће се добити таквих куглица? (Одг. 64 куглице)

16) Од квадрата стране $a = 25,12$ cm начињен је омотач једне облице. Колика је површина осовинског пресека те облице? (Одг. 200,96 cm^2)

17) Конструиши мрежу октаедра, кад је збир његових ивица 54 cm.

18) Омотач једне правилне четворостране призме је $96\sqrt{2}$ cm^2, а висина 8 cm. Израчунати јој дијагоналу. (Одг. 10 cm)

19) Како гласи образац за површину икосаедра, код кога нам је позната висина једне његове стране?

20) Права призма висине 7 cm има за основу квадрат стране 8 cm. Одредити раздаљину од пресека дијагонала једне основе до једног темена друге основе. (Одг. 9 cm)

21) Пирамида висине 7 cm има за основу равнокрако-правоугли троугао хипотенузе 5 cm. Конструисати њену мрежу. (Није потребно израчунавање ниједног елемента.)

22) Права купа уписана је у облици исте висине тако, да им се основе поклапају. За колико се разликују запремине та два тела, ако се зна да је површина облице 170π cm^2, а полупречник основе 5 cm? (Одг. 200π cm^3)

23) Правоугаоник стране 5 cm и дијагонале 13 cm обрће се око дуже своје стране. Израчунати површину и запремину обртног тела. (Одг. $P = 533,8$ cm^2, $V = 942$ cm^3)

24) Конструиши мрежу икосаедра, кад је збир његових ивица 120 cm.

25) Колика је запремина октаедра уписаног у лопти полупречника $r = \sqrt{2}$ cm? (Одг. $V = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm³)

26) Равнокраки троугао обима 50 cm и основице 16 cm обрће се око своје основице. Колика је запремина обртног тела? (Одг. 3768 cm³)

27) Центар основе једне равностране облице спојен је једном дужи са једном тачком на периферији друге основе. Нацртај мрежу те облице, кад се зна да је та дуж $3\sqrt{5}$ cm. (Прво израчунај r.)

28) Изразити површину коцке њеном дијагоналом. (Одг. $2 \mathfrak{d}^2$)

29) У лопти полупречника $18\sqrt{3}$ cm уписана је равнострана купа. Нађи површину и запремину те купе. (Нацртај прво осовински пресек купе. — Одг. $P = 2187\pi$ cm²; $V = 6561\pi\sqrt{3}$ cm³)

30) Колико ће се парче свиле употребити за шешир столне лампе, да би пречник доњег отвора био 60 cm, горњег 30 cm а висина шешира 20 cm? (Одговор: 35,235 dm²)

31) У кругу обима 8π cm уписан је равнокрако-правоугли троугао, а над овим подигнута је права призма, чија је висина три пута већа од катете тога троугла. Конструисати мрежу те призме. (Ништа није потребно израчунавати.)

32) У коцки је уписана правилна четворострана пирамида исте висине и заједнчке основе. За колико се разликују њихове површине, ако је дијагонала коцке 173 cm? (Одг. 2,76 m²)

33) У суду цилиндричног облика, $r = 6$ cm, има воде до извесне висине. За колико ће се сантиметара попети вода, ако се у њу убаци масивна коцка ивице 6 cm? (Одг. за 19 mm)

34) Један равнострани троугао висине $3\sqrt{3}$ cm мрежа је једног тетраедра. Колика је запремина тога тетраедра? (Одг. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ cm³)

35) У кругу полупречника 4 cm уписан је четвороугао чија је једна страна 6,5 cm а два угла на њој 90⁰ и 75⁰. Над тим четвороуглом подигнута је права пирамида бочне ивице 7 cm. Конструисати мрежу ове пирамиде.

36) Једна равнострана облица хвата 50,24 l. Колика је дијагонала њеног осовинског пресека? (Одг. $4\sqrt{2}$ dm)

37) Висина једне праве купе је 12 cm а изводница 15 cm. Колики је угао кружног исечка, који се добија кад се омотач те купе развије? (Одг. 216⁰)

38) Збир ивица једног октаедра износи 36 cm. Колика је његова запремина? (Одг. $9\sqrt{2}$ cm³)

39) Права облица и права купа подигнуте су над истим кругом и до исте висине. Ако је полупречник заједничке основе 8 cm а висина 15 cm, за колико се разликују њихове површине? (Одг. $P - P_1 = 168\pi$ cm²)

40) Конструиши мрежу праве пирамиде висине 12 cm, кад јој је основа правоугаоник са странама 6 cm и 8 cm.

41) Дијагонални пресек коцке ивице 2 cm је основа једне праве призме, чија је запремина $16\sqrt{2}$ cm³. Колика је висина те призме? (Одг. 4 cm)

42) Од праве дрвене купе, $r = 7$ cm и $s = 25$ cm, истесана је највећа правилна шестострана пирамида. Колика је запремина отпадака? (Одг. 213,64 cm³)

43) Равнокраки троугао висине 15 cm и површине 120 cm,² обрће се око своје симетрале. Израчунати површину и запремину обртног тела. (Одг. $P = 200\pi$ cm², $V = 320\pi$ cm³)

44) Колика је раздаљина између два најудаљенија темена октаедра ивице а? Шта примећујеш? (Одг. $a\sqrt{2}$)

45) Површина основе једне равностране купе износи 324π cm.² Колика је запремина тетраедра подигнутог над њеним осовинским пресеком? (Одг. $3888\sqrt{2}$ cm³)

46) Оловну лопту полупречника 6 cm треба претопити у облицу истог полупречника основе. Колика је висина те облице? (Одг. 8 cm)

47) Колики је збир свих ивица икосаедра, чија је површина $20\sqrt{3}$ cm²? (Одг. 60 cm)

48) Конструисати мрежу правилне тростране призме уписане у правој облици, код које је полупречник основе 3 cm а висина 7 cm.

49) Квадрат стране $2\sqrt{2}$ cm обрће се прво око симетрале стране, затим око симетрале угла. У ком случају добијамо обртно тело веће запремине и за колико веће? (Одг. Обртно тело око симетрале стране веће за 0,96 cm³).

50) Колика је површина и запремина праве пирамиде висине 15 cm, кад јој је основа правоугаоник са странама 40 cm и 16 cm? (Одг. $P = 1720$ cm², $V = 3200$ cm³)

51) Нацртај мрежу правилне шестостране пирамиде висине 6 cm и бочне ивице 7 cm. (Нацртај прво пирамиду, па види шта треба претходно да конструишеш.

52) Од једног круга од хартије полупречника 4 cm употребљена је половина за омотач купе, а од друге половине исечена је основа те купе. Колико је хартије преостало? (Одг. 12,56 cm²)

53) Од дрвене коцке ивице 4 cm истесана је највећа облица. Колики је њен омотач а колика запремина? (Одг. $M = 16\pi$ cm², $V = 16\pi$ cm)

54) Израчунати тежину кружне столне мермерне плоче дебљине 2 cm а обима 2,512 m, кад је 1 dm³ мермера тежак 2,7 kg. (Одг. 27,1296 kg)

55) Једна правилна шестострана призма, $a = 3$ cm и $h = 6$ cm, једнака је правој призми са правоугаоником као основом. Конструисати мрежу ове последње.

56) Једна правилна тространа и правилна шестострана призма имају једнаке омотаче у облику правоугаоника, дужине 18 cm и ширине 10 cm. Које од ових тела има већу запремину и за колико? (Одг. Шестострана, за $45\sqrt{3}$ mm.³ — Нађи и друго решење.

57) Ромб чије су дијагонале 14 cm и 48 cm ротира око мање дијагонале. Израчунати површину обртног тела. (Одг. 3768 cm²)

58) На коцку дијагонале $24\sqrt{3}$ dm стављена је равнострана купа тако, да јој је основа уписана у страни коцке. Колико ће стајати фарбање тога комбинованог тела, ако се за 1 m² плаћа 2 динара? (Одг. 78,16 динара)

59) Над ромбом чија је страна 4 cm и један угао 60^0 подигнута је права призма чији је омотач 96 cm². Конструисати мрежу те призме.

60) Од правилне четворостране пирамиде истесана је највећа купа. Колика је запремина отпадака, ако је основина ивица пирамиде 5 cm а висина 12 cm? (Одг. 21,5 cm³)

61) Октаедар и тетраедар имају једнаке површине. Колика је висина тетраедра, ако октаедар има ивицу $a = 6$ cm? (Одг. $4\sqrt{3}$ cm)

62) Од лопте треба изрезати две највеће купе које ће као заједничку основу имати један главни лоптин круг. Који део лопте при томе отпада? (Одг. ½ лопте)

63) Код једне тростране равноивичне призме ивица је 2 cm. Једно њено теме спојено је дужима са срединама страна на супротној основи. Колике су те дужи. (Одг. Две су једнаке по $\sqrt{5}$ cm, трећа је $\sqrt{7}$ cm)

64) На равностраној облици постављена је равнострана купа, тако да им се основе поклапају. Колики је осовински пресек и површина тако комбинованог тела, ако је обим обличине основе 80π cm? (Одг. Ос. пресек 9168 cm², $P =$ $= 11200\pi$ cm²)

65) Један квадрат има страну дугу 6 cm. Над једном његовом страном конструисан је равнострани троугао, а над супротном страном полукруг. Ако се добијена слика обрће око своје симетрале постаће једно обртно тело. Колика је површина тога тела? (Одг. 72π cm²)

66) Конструиши мрежу правилне шестостране пирамиде, кад јој је висина 6 cm, а обим круга описаног око основе 9π cm. (Који елеменат треба претходно израчунати?)

67) Пресек дијагонала једног коцкиног квадрата спојен је дужина са теменима супротне стране коцкине. На тај начин одређена је једна пирамида. Колика је површина те пирамиде, ако је запремина коцке 8 cm³? (Одг. 12,96 cm²)

68) На правој облици пречника 30 cm и осовинског пресека 120 cm², налази се тетраедар, чија је основа уписана основи облице. Израчунати површину тако комбинованог тела. (Одг. 2131,275 cm²)

69) Суд у облику зарубљене купе има пречник дна 2 dm, а пречник отвора 8 dm. Колико је он дубок, ако се зна да у њему стаје 87,92 l? Колика му је изводница? (Одг. $h = 4$ dm, $s = 5$ dm)

70) Колика је запремина отпадака коцке ивице a, од које је истесана права призма исте висине, а чија се основа добија ако се узастопно споје средине страна коцкине основе? (Одг. $\frac{a^3}{2}$)

71) Над истим кругом полупречника 4 cm подигнута је с једне стране полулопта, а с друге равнострана купа. Колика је запремина тако комбинованог тела? (Одг. 249,1904 cm³)

72) Конструисати мрежу једне четворостране а друге петостране праве призме, једнаких висина и једнаких запре-

73) Једна оловка зарезана је с једне стране тако, да изгледа као да је на једну облицу прилепљена купа исте основе. Ако је изводница те купе 12,5 mm, изводница облица 15 cm и полупречник основе 7,5 mm, израчунати дужину те оловке. (Одг. 16 cm)

74) У кругу полупречника 4 cm уписан је правилни осмоугао, а над њим је подигнута права пирамида бочне ивице 7 cm. Конструисати мрежу ове пирамиде.

75) Један базен у облику правоуглог паралелопипеда има димензије 40 m, 25 m и 2,5 m. За које ће се време тај базен напунити, кад за један час утече 250 000 l воде? (Одг. 10 часова)

76) У равностраној облици уписана је лопта, а у овој лопти уписана је равнострана купа. Израчунати површину купе ако је омотач облице 400 π cm.^{3} (Посматрај осовински пресек. — Одг. 225 π cm^2)

77) Око делтоида чије су две стране 21 cm и 28 cm, описан је круг, а над овим кругом, као над основом, подигнута је права купа висине 42 cm. Колика је зпремина те купе? (Одг. 4287,5 π cm^3)

78) Једна дрвена кућица за пса направљена је од сандука у облику коцке ивице 1 m, којој је једна страна скинута ради улаза, а друга ради постављања крова. Кров кућице је у виду половине равностране облице, чији је осовински пресек једнак страни коцке. Колико ће стајати фарбање спољне површине те кућице, ако се за 1 m^2 плаћа 2 динара? (Одг. 10,71 дин.)

79) Око равнокраког троугла обима 20 cm и основице 5 cm описан је круг. Овај круг је основа једне праве облице, чија је висина једнака висини поменутог троугла. Конструиши мрежу ове облице. (Ништа није потребно израчунавати.

80) Над једним квадратом подигнута је с једне стране коцка а с друге равноивична пирамида. Ако је збир свих ивица тога тела 64 cm, колико је удаљен врх пирамиде од једног темена на даљој основи коцке? (Одг. 7,39 cm)

81) Једна права тространа призма висине 7 cm има основине ивице 2,5 cm, 3,5 cm и 5 cm. Конструисати мрежу њој једнаке праве призме, која за основу има правоугаоник.