KRSTA T. SIMOVIĆ
profesor

TEORIJA ALGEBARSKIH I TRANSCENDENTNIH JEDNAČINA

NOVA ANALITIČKA METODA

IZDAVAČKA KNJIŽARA
„RAJKOVIĆ"
BEOGRAD – TERAZIJE 16
1937

Uspomeni svoje plemenite majke.

PREDGOVOR

U savremenim teorijama diferencijalnih i integralnih jednačina uvidela se potreba, da se dosadašnje klasične metode o razdvajanju i numeričkom izračunavanju korena algebarskih i transcendentnih jednačina zamene savršenijim i bržim, pa ma kolikog stepena bila zadata jednačina. U tome nizu ideja nedavno je poznati engleski matematičar Withacker uspeo da odredi vrednost jednog korena jednačine pomoću beskonačnog reda čiji su koeficienti određene determinante koeficienata zadate jednačine. I ako je time učinjen jedan korak u tome pravcu ipak je to pitanje i dalje ostalo aktuelno. Stoga sam došao na ideju, da bi jedino primenom analitičkog metoda na čisto funkcionalnoj osnovi ovo pitanje moglo biti definitivno rešeno.

Glavna karakteristika ovoga metoda sastoji se u tome, što su dosadašnje klasične teorije o razdvajanju korena i njihovom numeričkom izračunavanju zamenjene teorijom nizova i odgovarajučih kompinuiranih grupa jednačine.

Isti analitički metod primenjen je i na transcendentne jednačine kao i na određivanje nula jedne analitičke funkcije definisane odgovarajućim celim redom.

Predajući ovu knjigu javnosti, nadam se, da će ona biti od koristi ne samo teoretičarima već i svima onima koji žele da prodube ovaj deo matematičke analize.

Beograd, 2 oktobra 1937.

Krsta T. Simović

I

PRELIMINARNI OBRASCI

Neka je data funkcija $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ za koju pretpostavljamo da je analitička funkcija u domenu vrednosti $x = a$.

Pa ako tu funkciju razvijemo u Taylor-ov red imaćemo:

$$1) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = Z_0 + Z_1(x-a) + Z_2(x-a)^2 + \ldots + Z_n(x-a)^n + \ldots$$

pri tome pretpostavljamo da je $f(a) \neq 0$.

Koeficienti Z_i dati su obrascem:

$$2) \qquad Z_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]_{x=a} \qquad (i = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

Međutim za izračunavanje ovih koeficienata možemo lako izvesti jedan rekurentni obrazac.

Toga radi zamenimo u obrascu 1) $x = a + h$, pa imamo

$$3) \qquad \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = Z_0 + Z_1 h + Z_2 h^2 + \ldots + Z_n h^n + \ldots$$

Pretpostavimo li da smo date funkcije razvili u odgovarajuće cele redove, na ime:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \frac{h}{1!}\varphi'(a) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(a) + \ldots$$

Pa zamenom ovih vrednosti u obrascu 3) dobijamp posle kaće redukcije sledeći rekurentni obrazac za određivanje koeficienata Z_i

$$4) \quad Z_i = \frac{1}{\varphi(a)}\left\{\frac{f^{(i)}(a)}{i!} - \frac{\varphi'(a)}{1!}Z_{i-1} - \frac{\varphi''(a)}{2!}Z_{i-2} - \ldots - \frac{\varphi^{(i)}(a)}{i!}Z_0\right\}$$

$$(i = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

Uzmemo li specijalan slučaj, da je $f(x) = 1$ imaćemo sledeći rekurentni obrazac:

$$5)\quad Y_0 = \frac{1}{\varphi(a)},\quad Y_i = -\left\{\frac{\varphi'(a)}{1!}Y_{i-1} + \frac{\varphi''(a)}{2!}Y_{i-2} + \dots + \frac{\varphi^{(i)}(a)}{i!}Y_0\right\} Y_0$$

$$(i = 1, 2, 3 \dots)$$

Princip metoda

Neka je funkcija $y(x)$ definisana sledećom jednačinom:

$$6)\qquad F(x_1 y) = f(y) - \lambda x = 0,$$

gde nam λ označava jedan proizvoljan parametar. Mi ćemo dokazati da funkcija $y(x)$ definisana jednačinom (6) u blizini inicicijalnih vrednosti zadovoljava nelinearnu intergralnu jednačinu:

$$7)\qquad y(x) = \kappa + \lambda \int_\alpha^x \Psi[y(\xi)]\, d\xi;$$

gde smo stavili:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi(y) \text{ i } \Psi(y) = \frac{1}{\varphi(y)}$$

označivši sa α i κ jedan sistem inicijalnih vrednosti tako, da je za $x = \alpha$ $y = \kappa$. Za funkciju $\Psi(y)$ pretstavljamo: da je analitička funkcija u blizini datih inicijalnih vrednosti, tako da je $\varphi(\kappa) \neq 0$.

Toga radi, prethodno ćemo rešiti datu integralnu jednačinu 7). Za rešavanje ove jednačine upotrebiću Picard-ov motod sukcesivno konvergentnih aproksimacija.

Formalno rešenje integralne jndnačine 7) moći ćemo pretstaviti celim redom po parametru λ:

$$8)\quad y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \dots + \lambda^n y_n(x) + \dots$$

Na osnovu učinjenih pretpostavki, furkciju $\Psi(y)$ možemo razviti u sledeći red:

$$9)\quad \Psi(y) = Y_0 + Y_1(y-\kappa) + Y_2(y-\kappa)^2 + \dots + Y_n(y-\kappa)^n + \dots$$

gde su nam, kao što smo videli koeficijenti Y_i dati sledećim obrascem:

$$Y_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i\,\Psi(\kappa)}{d\kappa^i} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

ili rekurentnim obrascem:

$$Y_0 = \frac{1}{\varphi(\kappa)},\quad Y_i = -\left\{\frac{\varphi'(\kappa)}{1!}Y_{i-1} + \frac{\varphi'(\kappa)}{2!}Y_{i-2} + \dots + \frac{\varphi^{(i)}(\kappa)}{i!}\right\} Y_0$$

$$(i = 1, 2, 3 \,.\,.)$$

Stoga jednačinu 7) možemo napisati u sledećem obliku:

$$11)\quad y(x) = \kappa + \lambda \int_\alpha^x \{Y_0 + Y_1[y(\xi) - \kappa] + Y_2\, y(\xi) - \kappa]^2 + \\ + \dots + Y_n[y(\xi) - \kappa]^n + \dots\} d\xi.$$

Zamenimo li sada u ovoj infegralnoj jednačini 11) njeno formalno rešenje dato obrascem 8) dobićemo:

$$12)\quad \left\{\begin{aligned} & y_0 + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \dots + \lambda^n y_n(x) + \dots = \kappa + \\ & + \int_\alpha^x Y_0 d\xi + \lambda\{y_1(\xi) + \lambda\, y_2(\xi) + \dots + \lambda^{n-1} y_n(\xi)\} \,. \\ & \cdot\, Y_1\, d\xi + \lambda^2\{y_1(\xi) + \lambda\, y_2(\xi) + \dots + \lambda^{n-1} y_n(\xi) + \\ & + \dots\{Y_2\, d\xi + \dots + \lambda^n\{y_1(\xi) + \lambda\, y_2(\xi) + \dots + \\ & \qquad + \lambda^{n-1} y_n(\xi) + \dots\{Y_n\, d\xi + \dots \end{aligned}\right.$$

Da bismo odredili pojedine koeficiente $y_i(x)$ treba razviti desnu stranu integralne jednačine 12) po stepenima parametra λ. Ovo pak razvijanje možemo postići pomoću poznatih obrazaca za supstituciju jednog reda u drugi.

Jer akon nam je data funkcija:

$$Z = f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n + \dots;$$

pa ako je pri tome funkcija $y = \varphi(x)$ definisana redom:

$$y = \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots,$$

pa pretpostavljajući da su oba reda konvergentni u jednom određenom intervalu, dobićemo, zamenjujuću u datoj funkciju $f(y)$ pojedine stepene $y, y^2, y^3, \dots\dots,$ sledeći dvojni red:

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \dots a_n b_0^n + \dots \\ & + a_1 b_1 x + 2a_2 b_0 b_1 x + \dots + n a_n b_0^{n-1} b_1 x + \dots \\ & + a_1 b_2 x^2 + a_2 (b_1^2 + 2 b_0 b_2) x^2 + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

koji će biti apsolutno konvergentan u jednom određenom intervalu, pa ga stoga možemo prema poznatim osobinama dvojnih redova sumirati na razne načine,najprostije po kolonama ili po vrstama. Sumirajući ga po kolonama dobićemo:

$$a_0 + a_1\, \varphi(x) + a_2[\varphi(x)]^2 + \dots + a_n [\varphi(x)]^n + \dots$$

odnosno $f[\varphi(x)]$. Ako ga pak sumiramo po vrstama domićemo red uređen po rastućim stepenicama od x pa ga možemo napisati:

$$f[\varphi(x)] = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

gde su koeficienti c_i funkcije koeficienata oba data reda, prestavljeni sledećim obrascima koje je lako postaviti:

II

$$
16)\begin{cases} c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_0 b_0^2 + \cdots + a_n b_0^n + \cdots \\ c_1 = a_1 b_1 + 2 a_2 b_0 b_1 + \cdots + n\, a_n b_0^{n-1} b_1 + \cdots \\ c_2 = a_1 b_2 + a_2 (b_1^2 + 2 b_0 b_2) + \cdots \end{cases}
$$

Primenjujući obrasce 16) u našem slučaju imaćemo posle izvršene identifikacije koeficienata istih stepena parametra λ na obema stranama jednačine 15); postupno sledeće obrasce za koeficiente $y_i(x)$: $y_0 = \kappa$, $y_1(x) = \int_\alpha^x Y_0 d\xi = Y_0(x-\alpha)$; $y_2(x) =$

$$
= \int_\alpha^x Y_1 y_1(\xi) d\xi = Y_0 Y_1 \int_\alpha^x (\xi-\alpha) d\xi = Y_0 Y_1 \frac{(x-\alpha)^2}{2!}\,; \quad Y_3(x) =
$$

$$
= \int_\alpha^x \left\{ Y_1 y_2(\xi) + Y_2 [y_1(\xi)]^2 \right\} d\xi
$$

ili zamenom vrednosti za $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dobićemo:

$$
y_3(x) = \int_\alpha^x \left\{ Y_0 Y_1^2 \frac{(\xi-\alpha)^2}{2!} + Y_0^2 Y_2 (\xi-\alpha)^2 \right\} d\xi = Y_0 (Y_1^2 + 2 Y_0 Y_2) \frac{(x-\alpha)^3}{3!}
$$

ili zamenom nađenih vrednosti $y_1(x)$, $y_2(x)$ i $y_3(x)$ u izrazu za $y_4(x)$

$$
y_4(x) = \int_\alpha^x \left\{ Y_1 y_3(\xi) + 2 Y_2 y_1(\xi) y_1(\xi) + Y_3 [y_1(\xi)]^3 \right\} d\xi
$$

sleduje dalje:

$$
y_4(x) = \int_\alpha^x \left\{ Y_0 Y_1 (Y_1^2 + 2 Y_0 Y_2) \frac{(\xi-\alpha)^3}{3!} + 2 Y_0^2 Y_1 Y_2 \frac{(\xi-\alpha)^3}{2!} + Y_0^3 Y_3 (\xi-\alpha)^3 \right\} d\xi
$$

odakle nalazimo:

$$
y_4(x) = Y_0 (Y_1^3 + 8 Y_0 Y_1 Y_2 + 6 Y_0^2 Y_3) \frac{(x-\alpha)^4}{4!}
$$

Idući tako redom na isti način našli bismo:

$$
y_5(x) = Y_0 (Y_1^4 + 22\, Y^0 Y_1^2 Y_2 + 16\, Y_0^2 Y_2^2 + 42\, Y_0^2 Y_1 Y_3 + 24\, Y_0^3 Y_4) \frac{(x-\alpha)^5}{5!}
$$

$$
y_6(x) = Y_0 (Y_1^5 + 52\, Y_0 Y_1^3 Y_2 + 136\, Y_0^2 Y_1 Y_2^2 + 126\, Y_0^2 Y_1^2 Y_3 + 180\, Y_0^3 Y_2 Y_3 + 264\, Y_0^3 Y_1 Y_4 + 120\, Y_0^4 Y_5) \frac{(x-\alpha)^6}{6!}
$$

Obrasci bi bili očevidno sve komplikovaniji za pojedine koeficiente $y_i(x)$. Međutim, redukcijom ovih obrazaca kao što ćemo sad pokazati, možemo lako otkriti zakon njihove formacije.

Redukcija obrazaca za koeficiente $y_i(x)$ na kanoničan oblik

Uočimo li niz vrednosti koje nam prestavljaju koeficiente:

$$
Y_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i \Psi(\kappa)}{d\kappa^i} \quad (i = 1, 2, 3 \ldots)
$$

gde nam je

$$
Y_0 = \Psi(\kappa)
$$

pa stavljajući postupno za i vrednosti $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ imaćemo:

$$
17)\begin{cases} Y_1 = \dfrac{dY_0}{d\kappa}\,; \quad Y_2 = \dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2 Y_0}{d\kappa^2} = \dfrac{1}{2!}\dfrac{dY_1}{d\kappa}\,; \quad Y_3 = \dfrac{1}{3!}\dfrac{d^3 Y_0}{d\kappa^3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{dY_2}{d\kappa} \\ Y_p = \dfrac{d^p Y_0}{d\kappa^p} = \dfrac{1}{p}\dfrac{dY_{p-1}}{dk}. \end{cases}
$$

Vodeći računa o ovim odnosima i o vrednostima koeficienata $y_i(x)$ imaćemo postupno:

$$
y_2(x) = \int_\alpha^x Y_0 \frac{dy_1}{d\kappa} d\xi = Y_0 Y_1 \int_\alpha^x (\xi-\alpha) d\xi = Y_0 Y_1 \frac{(x-\alpha)^2}{2!}
$$

$$
y_3(x) = \int_\alpha^x \left\{ Y_2 [y_1(\xi)]^2 + Y_1 y_2(\xi) \right\} d\xi =
$$

$$
= \int_\alpha^x \left\{ Y_2 [y_1(\xi)]^2 + Y_0 Y_1^2 \frac{(\xi-\alpha)^2}{2!} \right\} d\xi.
$$

ili

$$
y_3(x) = \int_\alpha^x \left\{ \frac{1}{2!} \frac{dY_1}{d\kappa} \cdot [y_1(\xi)]^2 + \frac{1}{2!} Y_1 \frac{d}{d\kappa} [y_1(\xi)]^2 \right\} d\xi = \frac{1}{2!} \int_\alpha^x \frac{d}{d\kappa} \left\{ Y_1 y_1^2 \right\} d\xi.
$$

$$
y_4(x) = \int_\alpha^x \left\{ Y_1 y_3(\xi) + 2 Y_2 y_1(\xi) y_2(\xi) + Y_3 [y_1(\xi)]^3 \right\} d\xi =
$$

$$
\frac{1}{3!} \int_\alpha^x \left\{ [y_1(\xi)]^3 \cdot \frac{d^2 Y_1}{d\kappa^2} + 2 \frac{dY_1}{d\kappa} \cdot \frac{dy_1(\xi)}{d\kappa} + Y_1 \cdot \frac{d^2}{d\kappa^2} [y_1(\xi)]^3 \right\} d\xi.
$$

ili

$$
y_4(x) = \frac{1}{3!} \int_\delta^x \frac{d^2}{d\kappa^2} [Y_1 y_1^3]\, d\xi\,;
$$

I sad na osnovu ovih obrazaca mogli bismo uopšte staviti da je

$$18)\qquad y_p^{(x)} = \frac{1}{(p-1)!}\int_\alpha^x \frac{d^{p-2}}{d\kappa^{p-2}}\{Y_1[y_1(\xi)]^{p-1}\}d\xi.$$

Međutim vrednosti dobivenih integrala možemo redukovati primenjujući prednji postupak na pojedine obrasce za koeficiente. Tako imamo postupno:

$$y_2(x) = Y_0 Y_1 \frac{(y-\alpha)^2}{2!} = Y_0 \frac{dY_0}{d\kappa}\frac{(x-\alpha)^2}{2!}$$

$$y_3(x) = Y_0(Y_1^2 + 2Y_0Y_2)\frac{(x-\alpha)^3}{3!} = Y_0\frac{d}{d\kappa}[Y_0 Y_1]\frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$

$$y_4(x) = Y_0(Y_1^3 + 8Y_0Y_1Y_2 + 6Y_0^2Y_3)\frac{(x-\alpha)^4}{4!} =$$

$$= Y_0\frac{d}{d\kappa}\{Y_0\frac{d}{d\kappa}[Y_0Y_1]\}\frac{(x-\alpha)^4}{4!}$$

i tako redom umnožavali bi se izvodni simboli. Da bismo zakon formacije ovih koeficienata što bolje uočili i dokazali tačnost toga zakona stavimo: $y_1(x) = C_1(x-\alpha)$;
gde je

$$Y_0 = C_1;\quad y_2(x) = C_2\frac{(x-\alpha)^2}{2!}$$

$$19)\qquad y_3(x) = C_3\frac{(x-\alpha)^3}{3!}\quad\cdots\quad y_p(x) = C_p\frac{(x-\alpha)^p}{p!}$$

Sad prema gornjim obrascima za pojedine koeficiente imaćemo postupno:

$$20)\qquad \Big\{\; C_1 = Y_0,\ C_2 = C_1\frac{dC_1}{d\kappa},\ C_3 = C_1\frac{dC_2}{d\kappa}\ \cdots\ C_p = C_1\frac{dC_{p-1}}{d\kappa}.$$

U mesto da koeficiente C i izračunamo po ovim obrascima izvešćemo jedan rekurentni obrazac pomoću koga ćemo višom indukcijom od p na p + 1 moći dokazati tačnost opšteg zakona formacije pojedinih koefici6nata.

Toga radi integral zadate integralne jednačine možemo napisati:

$$22)\qquad y(x) = \kappa + C_1(x-\alpha) + C_2\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots +$$

$$+ C_n\frac{(x-\alpha)^n}{n!} + \cdots$$

Zamenom ove vrednosti u datoj integralnoj jednačini oslanjajući se pri tome na poznati polimomni obrazac nalazimo

istim postupkom indentifikacije kao što smo to ranije pokazali sledeći rekurentni obrazac za koeficiente posle izvršenih redukcija.

$$C_{p+1} = \varepsilon^{(1)}_{p,p} Y_1 C_p + \Big\{\binom{p}{2}\varepsilon^{(2)}_{2,p-2} C_2 C_{p-2} + \binom{p}{3}\varepsilon^{(2)}_{3,p-3} C_3 C_{p-3} +$$

$$22)\qquad + \cdots\Big\}Y_2 + \Big\{\frac{2!}{(1!)^2}\cdot\varepsilon^{(3)}_{1,p-2} C_1^2 C_{p-2} + \frac{4!}{(2!)^2}\binom{p}{4} C_2^2 C_{p-4} +$$

$$+ \cdots\Big\}Y_3 + \Big\{\frac{3!}{(1!)^3}\binom{p}{3}\varepsilon^{(4)}_{1,p-3} C_1^3 C_{p-3} +$$

$$+ \frac{6!}{(2!)^3}\binom{p}{6}\varepsilon^{(4)}_{2,p-6} C_2^3 C_{p-6} + \cdots\Big\}Y_4 + \cdots + p!\,\varepsilon^{(p)}_{1,1} C_1^p Y_p.$$

gde nam je opšte $\varepsilon^{(i)}_{m,n} = i$ za $m \neq n$, a $\varepsilon^{(i)}_{m,n} = 1$ za $m = n$. Na protiv je u oba slučaja $\varepsilon^{(i)}_{m,n} = 0$, ako se ispred njega nalazi već faktor $\varepsilon^{(i)}_{m,n}$.*)

Mi smo sada u stanju da primenom više indukcije od p na (p + 1) dokažemo, da je gornji zakon formacije koeficienata C_i uopšte tačan. Pretpostavljajući da je obrazac tačan za C_p vidimo ua osnovu rekurentnog obrasca 22) a u vezi sa poslednjim obrascem pod 20) da je tačan i za p + 1.

Ali mi smo već dokazali da je opšti obrazac za koeficiente C_p tačan za p = 1, 2,⋯ pa stoga zaključujemo da je on uopšte tačan.

Sad zamenjujući u gornjem obrascu p = 1, 2, 3 dobićemo postupno sledeće obrasce za izračunavanje pojedinih koeficienata:

$$23)\qquad C_2 = C_1Y_1;\ C_2 = C_2Y_1 + 2C_1^2Y_2;\ C_4 = C_3Y_1 + 6C_1C_2Y_2 +$$

$$+ 6C_1^3Y_3;\ C_5 = C_4Y_1 + (6C_1^2 + 8C_1C_3)Y_2 + 36C_1^2C_2Y_3 + 24C_1^4Y_4$$

. . . .

Međutim koeficiente C_p možemo izračunavati i pomoću obrazaca 20); što je često puta podesno za njihova numerička sračunavanja. Primenjujući dakle te obrasce postupno nalazimo:

$$24)\qquad \left\{\begin{aligned} & C_1 = \frac{1}{\varphi(\kappa)};\quad C_2 = -\frac{\varphi'(\kappa)}{[\varphi(\kappa)]^3};\quad C_3 = -\frac{\varphi(\kappa)\varphi''(\kappa) - 3[\varphi'(\kappa)]^2}{[\varphi(\kappa)]^5} \\ & C_4 = -\frac{[\varphi(\kappa)]^2\cdot\varphi^{(3)}_{(\kappa)} - 10\,\varphi(\kappa)\varphi'(\kappa)\varphi''(\kappa) - 15\,[\varphi'(\kappa)]^3}{[\varphi(\kappa)]^7},\ \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

*) Drugim rečima, ako se zamenjujući za p razne vrednosti desi, da se usled permutacije kazaljaka ponovi neki član, onda se taj ponovljeni član izostavlja bez obzira da li su mu kazaljke jednake ili nisu.

Obrasce 24) mogli bi izvesti iz obrazaca 22) odnosno iz obrazaca 23) zamenjujući vrednost koeficienata Y_i; pa tako nalazimmo postupno:

$$C_2 = \frac{1}{\varphi(\kappa)} \cdot \frac{d}{d\kappa}\left[\frac{1}{\varphi(\kappa)}\right] = -\frac{\varphi'(\kappa)}{[\varphi(\kappa)]^3};\ C_3 = C_2 Y_1 + 2C_1^2 Y_2 =$$

$$= -\frac{\varphi'(\kappa)}{[\varphi(\kappa)]^3} \cdot \frac{d}{d\kappa}\left[\frac{1}{\varphi(\kappa)}\right] - \frac{1}{[\varphi(\kappa)]^2} \cdot \frac{d}{d\kappa}\left\{\frac{\varphi'(\kappa)}{[\varphi(\kappa)]^2}\right\} = \frac{[\varphi'(\kappa)]^2}{[\varphi(\kappa)]^5} -$$

$$- \frac{\varphi(\kappa) \cdot \varphi''(\kappa) - 2[\varphi'(\kappa)]^2}{[\varphi(\kappa)]^5}$$

ili

$$C_3 = -\frac{\varphi(\kappa)\varphi''(\kappa) - 3[\varphi'(\kappa)]^2}{[\varphi(\kappa)]^5}, \ldots$$

i tako redom idući dobivali bi iste obrasce kao što vidimo za pojedine koeficiente C_i, kao što smo to ranije dokazali induktivnim putem.

Uniformna konvergencija rešenja

Da bi smo dokazali uniformnu konvergenciju rešenja date nelinarne integralne jednačine i na taj način dokazali u isto vreme da su izvršene analitićke operacije legitimne, primeniću poznati Cauchy-ev metod primenom majorantnih funkcija.

Neka su nam date dve funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ definisane sledećim redovima:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots$$

gde su koeficienti α_i svi pozitivni.

Za funkciju dakle $\varphi(x)$ kažemo da je majorantna funkcija za $f(x)$ ako njihovi koeficienti zadovoljavaju uslove:

$$|a_0| \leqq \alpha_0,\ |a_1| \leqq \alpha_1, \cdots |a_n| \leqq \alpha_n \cdots,$$

prema jednoj oznaci Poenkare-a obeležavamo to sa:

$$f(x) \ll \varphi(x).$$

Uzmimo dakle nađeni integral

25) $$y(x) = \kappa + C_1 \frac{x-\alpha}{1!} + C_2 \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} + \cdots$$

i potražimo majorantnu funkciju koja odgovara datoj funkciji.

Na osnovi pretpostavke o funkciji $\Psi(y)$ vidimo da je funkcija $\Psi(y)$ jedna analitička funkcija u domenu vrednosti pa na osnovi jedne poznate osobine tih funkcija možemo napisati

26) $$|\Psi_y^{(n)}| < \frac{M \cdot n!}{\varsigma^n}$$

za vrednosti od y u brojnom razmaku $(\kappa - \varsigma,\ \kappa + \varsigma)$ gde su M i ς dva nezavisna broja od y.

Prema uslovu 26) a s pogledom na opšti zakon formacije pojedinih koeficienata prema malopređašnjim obrascima imaćemo:

27) $$|C_1| < M,\ |C_2| < \frac{2!\,M^2}{\varsigma},\ |C_3| < \frac{3!\,M^3}{\varsigma^2}, \cdots |C_n| < \frac{n!\,M^n}{\varsigma^{n-1}}$$

Obrazujemo li dakle funkciju

28) $$Y_{(x)} = |\kappa| + |\lambda|\,M(x-\alpha) + |\lambda|^2\frac{M^2}{\varsigma}(x-\alpha)^2 +$$

$$+ |\lambda|^3\frac{M^3}{\varsigma^2}(x-\alpha)^3 + \cdots + |\lambda|^n\frac{M^n}{\varsigma^{n-1}}(x-\alpha)^n + \cdots$$

vidimo da je prema odnosima 27) funkcija $Y(y)$ majorantna funkcija za datu funkciju $y(x)$ pa je s toga $y(x) \ll Y(x)$.

Prema tome red 28) biće uniformno konvergentan ako je zadovoljen uslov

$$\frac{M}{\varsigma} \cdot |\lambda|\,|x-\alpha| < 1 \qquad \text{ili:}$$

29) $$|x-\alpha| < \frac{\varsigma}{M|\lambda|}$$

Na osnovu ovoga dokazali smo osnovnu teoremu koja glasi: *integral date nelinearne integralne jednačine 11) pretstavljen je jednim uniformno konvergantnim redom u intervalu čija amplituda zadovoljava uslov 29).*

Dobiveni rezultati su od kapitalnog značaja za rešavanje algebarske jednačine ma kog stepena kao i transcendentnih jednačina, što ćemo sad izložiti.

II

Primena na teoriju algebarskih i transcendentnih jednačina

A. Algebarske jednačine

Neka je data sad algebarska jednačina

30) $$\Phi(y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \cdots A_{m-1} y - \lambda a = 0,$$

gde smo y mesto apsolutnog člana zamennli: $A_m = -\lambda a$; pa posmatrajmo funkciju definlsanu algebarskom jednačinom:

31) $$F(x, y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \cdots + A^{m-1} y - \lambda x = 0$$

Na osnovu fundamentalne teoreme o algebarskim funkcijama a prema ranije učinjenoj pretpostavci o prvom izvodu F'_y svakoj vrednosti x odgovaraće iz jednačine 31) m različiti vrednosti za funkciju $\bar{y}$ (ako te vrednosti nisu koreni rezultante $R(x) = 0$ jednačina: $F(x, y) = 0$ i $F'_y = 0$, u slučaju da koeficienti jednačine 31) mogu biti funkcije od x). Te različite vrednosti biće analitičke funkcije od x. Uočimo za sad jednu od tih n različitih vrednosti funkcije y(x). Ako promenljivoj x dajemo niz vrednosti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ čija je granična vrednost a, tim vrednostima x odgovaraće niz vrednosti za funkciju $y_i(x)$ t. j.:

$$y_i(\alpha_1) = \kappa_1, y_i(\alpha_2) = \kappa_2, \ldots y_i(\alpha_n) = \kappa_n \ldots$$

Uzmemo li skup količina (α_i, κ_i) kao sistem inicijalnih vlednosti date integralne jednačine, onda možemo dokazati sledeću teoremu: Granična vrednost integrala date integralne jednačine kad promenljiva x teži vrednosti a jednak je po svojoj numeričkoj vrednosti odgovarajućem korenu algebarske jednačine 30) koji pretstavlja graničnu vrednost niza: $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n, \ldots$

Uočimo li dakle sistem inicijalnih vrednosti (α_i, κ_i) za odgovarajuću integralnu jednačinu;

$$y(x) = \kappa + \lambda \int_{\alpha}^{x} \Psi[y(\xi)]\, d\zeta$$

gde je:

$$\Phi'(y) = \varphi(y) = m\, A_0\, y^{m-1} + (m-1)\, A_1\, y^{m-2} + \cdots + A_{m-1}$$

vidimo da će amplituda intervala (α_n, a) bivati sve manja kad niz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ teži graničnoj vrednosti a. Pustimo li sad da promenljiva x dobija postupno vrednosti niza $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$ to s pogledom na rešenje date integralne jednačine, koje pretstavljeno jednim uniformno konvergentnim redom, pa dakle pretstavlja kontinuiranu funkciju u posmatranom intervalu konvergencije, vidimo, da pri tome granična vrednost integrala y(x) težiti graničnoj vrednosti K, pa sleduje: $y(x) = K$; gde nam K pletstavlja graničnu vrednost posmatranog niza.

Međutim na osnovu jednačina 30) i 31) imaćemo sad:

32) $$\Phi(\kappa_n) = \lambda(\alpha_n - a)$$

Uzmemo li najzad u obzir uslov 29) koga u našem slučaju možemo napisati

33) $$|\lambda(\alpha_n - a)| < \frac{\varsigma}{M}$$

to vidimo neposredno da je uslov 33) u isto vreme potreban i dovoljan pa da zaista granična vrednost K niza: $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n, \ldots$ bude jednaka odgovarajućem korenu algebarske jednačine 30).

Uslov 33) je potreban; jer prema jednačini 32) vidimo da utom slučaju desna strana jednačine 32) težii nuli, pa prema tome granična vrednost K niza $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n, \ldots$ doista je koren date algebarske jednačine.

Uslov 33) je dovoljan; jer ako niz $K_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n, \ldots$ teži graničnoj vrednosti K koja je koren date algebarske jednačine onda je $|\Phi(\kappa_n)| < \varepsilon$, pa prema jednačini 33) sleduje $|\lambda(\alpha_n - a| < \varepsilon$ što smo i hteli da dokažemo.

Na osnovu gornjih odnosa možemo dokazati sledeću teoremu: granična vrednost rešenja korespondirajuće integralne jednačine jednaka je odgovarajućem korenu date algebarske jednačine pretstavljenom konvergentnim redom

$$\dot{y} = \kappa + \frac{\lambda(a - \alpha)}{1!} C_1 + \frac{\lambda^2(a - \alpha)^2}{2!} C_2 + \cdots + \frac{\lambda(a - \alpha)^n}{n!} C_n \cdots$$

bez obzira na sistem inicijalnih vrednosti (α_i, κ_i), ako je pri tome zadovoljen uslov $\Phi'(\kappa_i) = \varphi(\kappa_i) \neq 0$.

Na osnovu već utvrđenih relacija:

$$\Phi(\kappa_1) = \lambda(\alpha_1 - a)$$
$$\Phi(\kappa_2) = \lambda(\alpha_2 - a)$$
$$\dot{\Phi}(\kappa^n) = \dot{\lambda}(\alpha_n - \dot{a})$$

možemo napisati

34) $$\Phi(\kappa_n) - \Phi(\kappa_1) = \lambda(\alpha_n - \alpha_1).$$

Kako je na osnovu ranije teoreme granična vrednost niza $\kappa_1, \kappa_2, \cdots \kappa_n, \cdots$ jednaka odgovarajlćem korenu date algebarske jednačine, možemo neposredno staviti:

35) $$\kappa_n = \kappa_1 + \chi(\kappa_1)$$

gde je:

36) $$\chi(\kappa_1) = c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots c_n\lambda^n + \cdots$$

Zamenimo li sad u obrascu 34) u mesto κ_n njegovu vrednost iz obrasca 35) pa funkciju $\Phi(\kappa_n)$ razvijemo u red po rastučim stepenima od χ dobijamo:

37) $$\frac{\chi(\kappa_1)}{1!}\Phi'(\kappa_1) + \frac{[\chi(\kappa_1)]^2}{2!}\Phi''(\kappa_1) + \cdots + \frac{[\chi(\kappa_1)]^n}{n!}\Phi^{(n)}(\kappa_1) = \lambda(\alpha_n - \alpha_1)$$

Ako sad pustimo da niz $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ teži graničnoj vrednosti a, to će niz $\kappa_1, \kappa_2, \cdots \kappa_n \cdots$ težiti graničnoj vrednosti K koja je koren dat jednačine pa je funkcija $\chi(\kappa_1)$ data uniformno konvergentnim redom 36). S toga možemo u jednačini 37) funkciju $\chi(\kappa_1)$ smeniti odgovarajućim redom 36), pa prema već pokazanom analitičkom postupku za supstituciju jednog reda u drugi, nalazimo sledeće vrednosti za koeficiente c_p posle izvršenih reoukcija:

$$38)\quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{a - \alpha_1}{\varphi(\kappa_1)} = (a - \alpha_1)C_1; \\ c_2 = -\dfrac{(a - \alpha_1)^2}{2!} \cdot \dfrac{\varphi'(\kappa_1)}{[\varphi(\kappa_1)]^3} = \dfrac{(a - \alpha_1)^2}{2!} C_2, \\ c_3 = -\dfrac{a - \alpha_1)^3}{3!} \cdot \dfrac{\varphi(\kappa_1)\varphi''(\kappa_1) - 3[\varphi'(\kappa_1)]^2}{[\varphi(\kappa_1)]^5} = \dfrac{(a - \alpha_1)^3}{3!} C_3 \end{cases}$$

i uopšte:

$$c_p = \frac{(a - \alpha_1)^p}{p!} C_p \qquad (p = 1, 2, 3, \cdots)$$

Tačnost opšteg obrasca za c_p možemo lako dokazati višom i ndukcijom od p na $(p+1)$ na sledeći način.

Na osnovu već dokazanih obrazaca 20) za koeficiente C_p, nalazimo posle kraće redukcije sledeći rekurentni obrazac za koeficiente c_p:

$$c_p = \frac{1}{p} \cdot \cancel{C}^{c_1} \cdot \frac{dc_{p-1}}{d\kappa} \qquad (p = 1, 2, 3, \cdots)$$

Kako je sad $c_{p+1} = \dfrac{1}{p+1} \cancel{C}^{c_1} \dfrac{d\cancel{C}_p^{c_p}}{d\kappa}$ to zamenom vrednosti za c_p iz obrasca 38) dobijamo

$$c_{p+1} = \frac{(a - \alpha_1)^{p+1}}{(p+1)!} C_1 \cdot \frac{dC_p}{d\kappa} \quad \text{ili:} \quad c_{p+1} = \frac{(a - \alpha_1)^{p+1}}{(p+1)!} \cdot C_{p+1}$$

Ako je dakle obrazac 38) tačan za p vidimo da će isto tako biti tačan i za c_{p+1}. Ali mi smo već dokazali: da je tačan za $p = 1, 2, 3, \cdots$, što znači da je obrazac 38) t̃ ı ma za kakvu vrednost od p.

Zamenjujući sad u obrascu 35) odgovarajuće vrednosti koeficienata Cp nalazimo s pogledom na graničnu vrednost K posmatranog niza sledeći obrazac kojim je pretstavljen odgovarajući koren date algebarske jednačine

$$40)\quad y_1 = K = \kappa_1 + \frac{\lambda(a - \alpha_1)}{1!} C_1 + \frac{\lambda^2 (a - \alpha_1)^2}{2!} C_2 + \ldots + \frac{\lambda^n (a - \alpha_1)^n}{n!} C_n + \ldots$$

Uzmemo li sad u obzir rešenje integralne jednačine imaćemo:

$$41)\quad y(x) = \kappa_1 + \frac{\lambda(x - \alpha_1)}{1!} C_1 + \frac{\lambda^2 (x - \alpha_1)^2}{2!} C_2 + \cdots + \frac{\lambda^n (x - \alpha_1)^n}{n!} C_n + \cdots$$

Odakle zaključujemo da je granična vrednost nađenog rešenja integralne jednačine 7) doista jednaka odgovarajućem korenu date algemarske jednačine $\phi(y) = 0$ čime je gornja teorema dokazana.

Sistemi približnih vrednosti

Razdvajanje korena

Dosadašnje klasične metode za razdvajanje korena često puta su veoma zametne, naročito ako je u pitanju algebarska jednačina višeg stepena počev od petog pa na više. Pri tome se javljaju komplikacije ako su koeficienti jednačine višecifreni brojevi, naročito kad treba istraživati uže granice traženog korena. Karakteristika ovog metoda sastoji se u tome, što su dva do sada potpuno različita analitička postupka, jedan preliminarni, koji se odnosi na razdvajanje korena i drugi kojim određujemo koren sa određenim stepenom aproksimacije, spojeni u jedan jedini analitički postupak, kojim se izoluje traženi koren i na taj način određujemo i njegovu prvu aproksimativnu vrednost.

Uzmimo sad opšti obrazac za izračunavanje korena date algebarske jednačine:

$$y = \kappa + \frac{\lambda(a - \alpha)}{1!} C_1 + \frac{\lambda^2 (a - \alpha)^2}{2!} C_2 + \cdots + \frac{\lambda^n (a - \alpha)^n}{n!} C_n + \cdots$$

pa sad primenom prethodne teoreme B) vidimo da će traženi koren kao granična vrednost niza: $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n, \ldots$ biti dat obrascem

$$42)\quad y = \kappa_i + \frac{\lambda(a - \alpha_i)}{1!} C_1 + \frac{\lambda^2 (a - \alpha)^2}{2!} C_2 + \cdots + \frac{\lambda_n (a - \alpha_i)^n}{n!} C_n + \cdots$$

pa ćemo s toga uzeti za članove posmatranoga niza; $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_n, \ldots$ sledeći sistem:

$$43)\quad \begin{array}{l} \kappa_1 = \kappa_0 + (A_m - \alpha_m^{(0)})\, C_1^{(0)} \\ \kappa_2 = \kappa_1 + (A_m - \alpha_m^{(1)})\, C_1^{(1)} \\ \text{— — — — — — — — —} \\ \text{— — — — — — — — —} \\ \kappa_n = \kappa_{n-1} + (A_m - \alpha_m^{(n-1)}) \cdot C_1^{(n-1)} \\ \text{— — — — — — — — —} \end{array}$$

gde je:

$$C_1^{(i)} = \frac{1}{\phi'(\kappa_i)} \quad \text{i} \quad \lambda\alpha_i = \alpha_m^{(i)} \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Takav jedan sistem nazvaćemo: sistem približnih vrednosti. Da bi smo mogli izolovati jedan određeni koren jednačine, nije potrebno da istražujemo pojedine stepene aproksimacije gornjeg sistema približnih vrednosti. Za to je dovoljno da odredimo specijalan inicijalni slstem (α_0, κ_0) tako da nam brojni niz definisan obrascima 43) bude konvergentan pa ćemo biti sigurni da će posmatrani niz morati konvergovati odgovarajućem korenu date j-dnačine, a čija je vrednost jednaka graničnoj vrednosti toga brojnog niza.

Osnovni inicialni sistemi

Da bi smo sad mogli odrediti takav jedan inicialni sistem izvršimo u datoj jednačini:

44) $$\phi(y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \dots + A_{m-1} y + A_m = 0$$

sledeću smenu: $y = 10^n \cdot Y$; gde je $n = p + 1$, i $A_m = a_m \cdot 10_p$. ($a_m \leq 9$) pa tako dobijamo jednačinu:

$$10^{mn} \cdot A_0 Y^m + 10^{n(m-1)} \cdot A_1 \cdot Y^{m-1} + \dots + 10^{p+1} \cdot A_{m-1} \cdot Y + A_m \cdot 10^p = 0$$

ili redukcijom

45) $$\phi_1(Y) = 10^{mn-p} \cdot A_0 Y^m + 10^{n(m-1)-p} \cdot Y^{m-1} + \dots + 10\, A_{m-1} \cdot Y + a_m = 0$$

Obeležimo sa A_{m-r} koeficient koji u zadatoj jednačini 44) ima najveću apsolutnu vrednost (izuzev nezavisnog člana) i neka je pri tom:

$$A_{m-r} = a_{m-r} \cdot 10^{S_{m-r}} \qquad (a_{m-r} \leq 9)$$

S toga ćemo sad preći na određivanje inicialnog sistema s pogledom na jedan određeni koren transformovane jednačine 45) odgovarajući brojni niz: $\kappa'_1, \kappa'_2, \dots \kappa'_n, \dots$ biće dakle definisan sledećim sistemom približnih vrednosti.

46) $$\begin{aligned} \kappa'_1 &= \kappa'_0 + (a_m - \alpha_m^{(o)})\, C_1^{(o)} \\ \kappa'_2 &= \kappa'_1 + (a_m - \alpha_m^{(1)})\, C_1^{(1)} \\ &- - - - - - - - - \\ &- - - - - - - - - \\ \kappa'_n &= \kappa'_{n-1} + (a_m - \alpha_m^{(n-1)}) \cdot C_1^{(n-1)} \\ &- - - - - - - - - \end{aligned}$$

gde je sad:

$$C_1^{(i)} = \frac{1}{\phi'_1(\kappa'_i)} \qquad (i = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

Da bi nam sad brojni niz: $\kappa_1', \kappa_1', \dots \kappa_n', \dots$ definisan obrascima 46) bio konvergentan dovoljno je da za inicialnu vrednost κ_0' uzmemo sledeću vrednost:

47) $$\kappa_0' = \frac{1}{10^l}$$

Mi ćemo sad dokazati da za eksponent l možemo uzeti izvesne specialne vrednosti tako, da nam brojni niz definisan obrascima 46) konverguje odgovarajrćem korenu transformovane jednačine 45). Toga radi primenom teoreme B) s pogledom na sistem 46) nalazimo da je dovoljan uslov, ako za eksponent l uzmemo niz celih brojeva koji pripadaju ansamblu: 1, 2, ... l_1, l_2, ... L čija je gornja granica definisana sledećim obrascem:

48) $$L' = \frac{S_{m-r} + (n+1)\, r - p}{r}.$$

(U slučaju da L′ nije ceo broj uzećemo za gornju granicu toga ansambla najbliži niži ceo broj).

Ako dakle za eksponent l uzmemo jednu određenu vrednost koja pripada gornjem ansamblu, dobićemo specialan inicialni sistem, koji pripada transformovanoj jednačini 45). Taj sistem biće definisan prvom približnom vrednošću κ_1' iz obrasca 46) u vezi sa vrednošću $\alpha_m^{(1)}$.

Sad s pogledom na izvršenu smenu: $y = 10^n Y$ lako nalazimo odgovarajući inicialni sistem: ($\alpha_o^{(l)}$, $\kappa_o^{(l)}$) za zadatu jednačinu 44). Ovakav sistem nazvaćemo *osnovni inicialni sistem.* Oslanjajući se na osnovni inicialni sistem, vidimo da ćemo moći prema obrascima 43) ili na osnovu opšteg obrasca 42) odrediti nepoznati koren sa onolikim stepenom aproksimacije koliki se hoće.

Prema tome uloga osnovnog inicialnog sistema je od presudnog značaja pri određivanju realnih korena zadate jednačine. Stoga, da bi smo mogli otkriti sve realne korene zadate jednačine, razlikovaćemo dva osnovna slučaja koji mogu nastupiti pri određivanju osnovnih inicijalnih sistema i to: prvi slučaj kad su svi dobiveni inicijalni sistemi međusobno različiti i drugi slučaj, kad neki od njih mogu biti ekvivalentni. Za dva osnovna inicialna sistema koji pripadaju dvema različitim vrednostima eksponenta l, kažemo da su međusobno različiti ako su različiti odgovarajući sistemi približnih vrednosti definisani brojnim nizovima:

$$\kappa_1^{(l_1)}, \kappa_2^{(l_1)}, \dots \kappa_n^{(l_1)}, \dots \text{ i}$$

$$\kappa_1^{(l_2)}, \kappa_2^{(l_2)}, \dots \kappa_n^{(l_2)}, \dots$$

u protivnom slučaju kažemo da su ekvivalentni.

Karakterne grupe jednačine

Uzmimo najpre slučaj kad su svi osnovni inicialni sistemi međusobno različiti. Ako dakle eksponentu dajemo različite vrednosti, koje pripadaju posmatranom brojnom ansamblu, menjaće se i sistem približnih vrednosti, pretstavljen brojnim nizom:

$$\kappa_1^{(l)},\ \kappa_2^{(l)}, \dots \kappa_n^{(l)} \dots ;$$

ali prema teoremi A) taj će niz konvergovati jednom od realnih korena zadate jepnačine i to onom, koji pretstavlja graničnu vrednost toga niza. Da ćemo morati otkriti sve realne korene zadate jednačine, možemo lako uvideti ako posmatramo kontinuiranu grupu koju obrazuju odgovarajući sistemi približnih vrednosti.

$$49)\quad \left\{\begin{array}{l} \kappa_1^{(1)},\ \kappa_2^{(1)}, \dots \kappa_n^{(1)}, \dots \\ \kappa_1^{(2)},\ \kappa_2^{(2)}, \dots \kappa_n^{(2)}, \dots \\ \kappa_1^{(3)},\ \kappa_2^{(3)}, \dots \kappa_n^{(3)}, \dots \\ - - - - - - \\ - - - - - - \\ \kappa_1^{(L)},\ \kappa_2^{(L)}, \dots \kappa_n^{(L)}, \dots \end{array}\right.$$

a koji rezultuju iz različitih osnovnih inicialnih sistema. Grupu 49) nazvaćemo karaktetnom grupom jednačine $\phi(y) = 0$. Na isti način kao što smo obrazovali karakternu grupu jednačine $\phi(y) = 0$ isto tako ćemo obrazovati karakternu grupu 50) jednačine $\phi(-y) = 0$.

$$50)\quad \left\{\begin{array}{l} \kappa_1'^{(1)},\ \kappa_2'^{(1)}, \dots \kappa_n'^{(1)}, \dots \\ \kappa_1'^{(2)},\ \kappa_2'^{(2)}, \dots \kappa_n'^{(2)}, \dots \\ \kappa_1'^{(3)},\ \kappa_2'^{(3)}, \dots \kappa_n'^{(3)}, \dots \\ - - - - - - \\ - - - - - - \\ \kappa_1'^{(L)},\ \kappa_2'^{(L)}, \dots \kappa_n'^{(L)}, \dots \end{array}\right.$$

Ako sad uočimo jedan određeni brojni niz koji pripada jednoj od karakternih grupa, taj niz mora kao što smo videli konvergovati jednom od realnih korena i to onom koji pretstavlja graničnu vrednost toga brojnoga niza — ako zadata jednačina na koju se odnosi posmatrana grupa dopušta realne korene. Svakoj vrednosti eksponenta l odgovara osnovni inicialni sistem $(\alpha_0^{(l)}, \kappa_0^{(l)})$ koji karakteriše odgovarajući brojni niz koji pripada jednoj od posmatranih grupa. Ako dakle eksponentu l dajemo redom vrednosti koje pripadaju ensamblu: $1, \dots\ l_1, \dots\ l_2, \dots\ L$, onda na osnovu osnovnog zakona formacije tih grupa možemo postaviti sledeću teoremu: broj različitih osnovnih inicialnih sistema, koji pripadaju posmatranim karakternim grupama jednačine ne može biti manji od broja realnih korena te jednačine.

Redukcija osnovnih inicialnih sistema

Kako broj članova prethodnog ansambla može biti i veći od broja realnih korena jedne zadate jednačine može se desiti da su izvesni osnovni inicijalni sistemi ekvivalentni. Pretpostavimo sad da su nam sledeća ova osnovna inicijalna sistema ekvivalentni i to:

$$(\alpha_0^{(l_1)},\ \kappa^{(l_1)})\ \text{i}\ (\alpha_0^{(l_2)},\ \kappa_0^{(l_2)}).$$

Odgovarajući sistemi približnih vrednosti biće prema tome definisani sledećim obrascima:

$$51)\quad \begin{array}{l} \kappa_1^{(l_1)} = \kappa_0^{(l_1)} + (A_m - \alpha_m^{(1,l_1)})\, C_1^{(1,l_1)} \\ \kappa_2^{(l_1)} = \kappa_1^{(l_1)} + (A_m - \alpha_m^{(2,l_1)})\, C_1^{(2,l_1)} \\ - - - - - - - - - - \\ \kappa_n^{(l_1)} = \kappa_{n-1}^{(l_1)} + (A_m - \alpha_m^{(n,l_1)})\, C_1^{(n,l_1)} \\ - - - - - - - - - - \\ \qquad\qquad \text{i} \\ \kappa_1^{(l_2)} = \kappa_0^{(l_2)} + (A_m - \alpha_m^{(1,l_2)})\, C_1^{(1,l_2)} \\ \kappa_2^{(l_2)} = \kappa_1^{(l_2)} + (A_m - \alpha_m^{(2,l_2)})\, C_1^{(2,l_2)} \\ - - - - - - - - - - \\ \kappa_n^{(l_2)} = \kappa_{n-1}^{(l_2)} + (A_m - \alpha_m^{(n,l_2)})\, C_1^{(n,l_2)} \end{array}$$

gde je:

$$C_1^{(i,l)} = \frac{1}{\phi'[\kappa_{i-1}^{(l)}]}\quad \text{i}\quad \alpha_m^{(i,l)} = \lambda\alpha_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \dots)$$

pa će stoga oni konvergovati jednoj istoj graničnoj vrednosti. Da bi smo sad mogli konstatovati da li su dva dobijena osnovna inicijalna sistema ekvivalentni primenićemo sledeći analitički postupak pomoću koga možemo izvršiti redukciju neđenih osnovnih inicijalnih sistema.

S pogledom na transformovanu jednačinu inicijalni elementi $\kappa_0^{(l_1)}$ i $\kappa_0^{(l_1)}$ koji pripadaju posmatranim ekvivalentnim osnovnim inicijalnim sistemima biće definisani sledećim obrascima:

$$\kappa_0^{(l_1)} = 10^n \left\{ \frac{1}{10^{l_1}} - (a_m - \alpha_m^{(0,l_1)})\, C_1^{(0,l_1)} \right\} \text{ i}$$

$$\kappa_0^{(l_2)} = 10^n \left\{ \frac{1}{10^{l_2}} - (a_m - \alpha_1^{(0,l_2)})\, C_1^{(0,l_2)} \right\}$$

Ako stavimo sad: $a_m - \alpha_m^{(0,li)} = \varsigma^{(li)})$ imaćemo:

$$\kappa_{0,\varsigma}^{(l_1)} = 10^n \cdot \varsigma^{(l_1)} \cdot C_1^{(0,l_1)} \cdot \left\{ \frac{1}{10^{l_1} \cdot \varsigma^{(l_1)} \cdot C_1^{(0,l_1)}} - 1 \right\};$$

$$\kappa_{0,\varsigma}^{(l_2)} = 10^n \cdot \varsigma^{(l_2)} \cdot C_1^{(0,l_2)} \cdot \left\{ \frac{1}{10^{l_2} \cdot \varsigma^{(l_2)} \cdot C_1^{(0,l_2)}} - 1 \right\}$$

pa s pogledom na posmatrane sisteme približnih vrednosti koji odgovaraju zadatoj jednačini $\phi(y) = 0$ možemo uzeti sledeće inicijalne elemente:

$$\kappa_{0,\varsigma}^{(l_1)} = \frac{1}{10^{l_1}\, \varsigma^{(l_1)}\, C_1^{(0,l_1)}} - 1 \text{ i } \kappa_{0,\varsigma}^{(l_2)} = \frac{1}{10^{l_2}\, \varsigma^{(l_2)}\, C_1^{(0,l_2)}} - 1;$$

Ako zadovoljavaju uslov:

$$10^l \cdot \varsigma^{(l)} \cdot C_1^{(0,l)} \angle 1. \ldots. \quad (52)$$

Obrazujemo li sada osnovne inicijalne sisteme koje odgovaraju ovim elementima dobićemo sledeće inicijalne sisteme:

$$(\alpha_{0\varsigma}^{(l_1)}, \kappa_{0,\varsigma}^{(l_1)}) \text{ i } (\alpha_{0\varsigma}^{(l_2)}, \kappa_{0,\varsigma}^{(l_2)})$$

Ovakav jedan osnovni inicijalni sistem $(\alpha_{0\varsigma}^{(l)}, \kappa_{0,\varsigma}^{(l)})$ koji odgovara jednoj određenoj vrednosti eksponenta l nasvaćemo redukovani sistem l-og reda.

Uzimajući u obzir uslove za konvergenciju rešenja i oslanjajući se pri tome na teoremu (A) vidimo da će rezultujući sistem približnih vrednosti definisan gornjim obrascima veoma brzo kvnvergovati određenoj graničnoj vrednosti, i to tako da ćemo neposredno dostići traženi stepen aproksimacije odgovarajućeg korena. Međutim osnovne inicijalne sisteme koji nezadovo(52) ljavaju uslov (59) ostavićemo nepromenjene, jer oni prema analitičkom postupku kojim su dobijeni u odnosu na određeni stepen aproksimacije zadovoljavaju predviđene uslove za konvergenciju rešenja pa ih možemo smatrati kao redukovane samim sebi.

Variacije redukovanih inicijalnih sistema

Granični inicijalni sistemi

Kako su redukovani inicijalni sistemi određene funkcije koeficienata jednačine to će variacijama koeficienata odgovarati izvesne variacije elemenata regukovanog inicijalnog sistema. Pomoću prethodnih teorema možemo proučiti te varijacije ako pretpostavimo da su koeficienti jednačine izvesne kontinuirane funkcije jednog ili više promenljivih parametara.

Usled toga vidimo da elementi izvesuih redukovanih inicijalnih sistema mogu varirati u određenim granicama a da pri tom prema teoremi (B) vrednost korena ostane ista.

Ali se pri tim varijacija redukovanih inicijalnih sistema moke desiti da se poklope varijacione granice elemenata dva obližnja redukovana inicijalna sistema čiji se odgovarajući redovi razlikuju za jedinicu. U tom graničnom slučaju može se dogoditi, da koren koji je vezan za taj redukovani inicijalni sistem ostane neotkriven primenom izloženog analitičkog postupka pri razdvajanju korena i određivanju njihove prve aproksimativne vrednosti. Da bi smo mogli otkriti dotični koren nije potrebno istisnuti iz date jednačine već nađene korene i obnoviti prethodni analitički postupak. To možemo postići direktno na taj način, što ćemo već nađeni redukovani inlcijalni sistem zameniti najbližim višim i najbližim nižim rebukovanim inicialnim sistemom i odrediti odgovarajuće približne vrednosti korena. Ako pri tome traženi koren opet ostane neotkriven, jasno je da će on morati biti otkriven, ako nađemo odgovarajuću variacionu granicu pri kojoj se poklapaju granične vrednosti dva uzastopna redukovana inicialna sistema. Ovo ćemo postići, ako odredimo najpre najbliži viši redukovani Inicijalni sistem koji odgovara neposredno redukovanom inicijalnom sistemu čiji je red za jedinicu veći. Nastavljajući taj postupak najzad ćemo morati doći do jednog takvog redukovanog sistema koji će pretstavljati zajedničku variacionu granicu oba posmatrana obližnja redukovana inicijalna sistema. Takav jedan redukovani inicialni sistem nazvaćemo granični inicijalni sistem. Pojavu jednog takvog graničnog inicijalnog sistema možemo otkriti naglom depresijom vrednosti prvog izvoda ϕ'_y pri variranju elemenata posmatranog redukovanog sistema. Tu okolnost u ostalom otkriva nam i Rol-ova teorema na osnovu koje između dve uzastopne nule jedne kontinuirane funkcije leži bar jedna nula njene prve izvodne funkcije, (pod pretpostavkom da funkcija dopušta prvi izvod koji je takođe kontinuirana funkcija). Polazeći sad od toga graničnog inicialnog sistema, vidimo da će traženi koren biti određen prema obrascima (46) ili prema obrascu (42) i to sa onolikim stepenom aproksimacije koji se hoće.

Redukovane grupe jednačine

Posmatrajmo sad slučaj kad su izvesni osnovni inicijalni sistemi ekvivalentni.

Kako broj članova posmatranog ansambla može biti veći od broja realnih korena zadate jednačine to će izvesni osnovni inicijalni sistemi koji pripadaju grupama (50) i (51) biti među sobom ekvavilentni, što ćemo moći uočiti pomoću odgovarajućih redukovanih inicijalnih sistema. Usled toga će se i odgovarajuće karakterene grupe jednačine reducirati na niže grupe kojima pripadaju redukovani inicijalni sistemi koji su međusobno različiti. Premenom dakle redukovanih inicijylnih sištema ovaj slučaj sveden je na prethodni.

Slučaj jednakih korena

Redukovane grupe se najčešće javljaju kad zadata jednačina ima jednakih korena sa određenim stepenom multipliciteta. Međutim ovde se javlja jedan osobit slučaj, pri kome odgovarajući brojni niz koji je vezan za jedan osnovni inicijalni sistem ne teži nikakvoj određenoj graničnoj vrednosti a taj se slučaj može takođe pojaviti kad su u pitanju imaginarni koreni.

Izgledalo bi, kao da ovaj osobit slučaj izmičem opštem analističkom postupku.

Mi ćemo sad dokazati da smo u slučaju jednakih realnih korena u stanju da ove izolujemo pomoću redukovanih inicijalnih sistema i da ih odredimo sa onolikim stepenom aproksimacije koliki se hoće. Ovo pak možemo lako postići ako dovedemo u vezu teoreme (A) i (B).

Toga radi pođimo od jednog redukovanog inicijalnog sistema koji pripada dotičnoj redukovanoj grupi a koji odgovara određenoj vrednosti eksponenta l. Prema izloženom analitičkom postupku za određivanje toga redukovanog inicijalnog sistema, jasno je da će prema teoremi (A) predviđeni uslovi morati biti zadovoljeni, ako jednačina dopušta realan koren, koji će prema tome biti vezan za taj redukovani inicijalni sistem prema obrascu (42). Primenimo li sad na ovaj slučaj teoremu (B) vidimo, da će taj red morati biti konvergentan, pa ćemo biti u stanju da odredimo traženi koren kao i stepen njegovog multipliciteta. Stepen multipliciteta izračunatog korena određen je redukovanim grupama kojima pripadaju dotični redukovani inicijalni sistemi. Što se tiče imaginiranih korena, ovaj bi se metod mogao takođe primeniti sa izvesnim modifikacijama, kako u pogledu razdvajanja tako i u pogledu njihovog direktnog izračunavanja iz zadate jednačine, ali mi u to u ovoj knjizi nećemo ulaziti.

III

C) TRANSCENDENTNE JEDNAČINE

Izloženu teoriju algebarskih jednačina možemo isto tako primeniti i na transcendentne jednačine pri čemu bi funkcija $\phi(y)$ definisana jednačinom $\phi(y) = f(y) - \lambda a = 0$ bila jedna transcendentna funkcija. Stoga ćemo sintetički izložiti glavne momente iz teorije transcendentnih jednačina. Ako sad funkcija $\Psi(y)$ koju smo ranije definisali zadovoljava u našem slučaju predviđene uslove, moćićemo s pogledom na korespondirajuću integralnu jednačinu 7) primeniti prethodne teoreme A) i B) kao što smo to uradili u slučaju algebarskih jednačina. Zato je dovoljno da posmatrana funkcija bude jedna kombinacija elementarnih transcendentnih funkcija kao što su: sinusna, kosinusna, eksponencijalna funkcija i druge funkcije koje u nizu kontinuiranih funkcija čine jednu specijalnu grupu. Kao što je poznato iz teorije analitičkih funkcija, datu funkciju $\phi(y)$ možemo razviti u ceo red po rastućim stepenima pnomenljive y, koji će biti konvergentan u jednom određeno intervalu konvergacije $(-R, +R)$, pa možemo stoga napisati:

$$\phi(y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots + A_m y^m + \cdots$$

Izvršimo li smenu: $y = 10^{p+1} Y$ dobićemo sledeću transformovanu jednačinu:

$$\phi_1(Y) = a_0 + 10 A_1 Y + 10^{p+2} \cdot A_2 Y^2 + \cdots + 10^{m(p+1)-p} \cdot Y^m + \cdots$$

Ako sa M označimo gornju granicu apsolutne vrednosti koeficienata A_i, to na osnovu poznatih osobina celih redova sleduje:

$$|A_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad (r < R)$$

Prema tome, možemo sad u teorijskom pogledu primeniti isti analitički postupak za određivanje osnovnih inicijaluih sistema kao i kod algebarskih jednačina. Na taj način gornja granica eksponenta biće data obrascem:

$$L' = \frac{\varsigma_{m-r} + (p+2)\, r - p}{r} \ldots$$

Ako sad eksponentu dajemo postupno vrednosti koje pripadaju ansamblu, $1, 2, \ldots l_1, \ldots l_2, \ldots$ L čija je gornja granica L' definisana obrascem dobićemo odgovarajuće osnovne inicijalne sisteme

$$(\alpha_0^{(0,1)}, \varkappa_0^{(1)});\ (\alpha_0^{(0,2)}, \varkappa_0^{(2)}), \ldots, (\alpha_0^{(0,l_1)}, \varkappa_0^{(l_1)}), \ldots$$

pa ćemo na ove osnovne sisteme moći primeniti isti redukcioni postupak kao što smo to učinili u slučaju algebarskih jednačina.

Osnovne teoreme koje se odnose na realne korene jednačine kako u pogledu odgovarajućih karakternih grupa te jednačine, tako i u pogledu redukovanih grupa pomoću ekvivalentnih sistema ostaju u svemu u važnosti.

Glavna karakteristika izložene teorije sastoji se u tome, što su i algebarske kao i transcendentne jednačine primenom osnovnih teorema iz teorije analitičkih funkcija postavljene na istu teorijsku osnovu pa je stoga i metođa njihovog rešavanja ista.

Izlož na metoda je dakle generalnog karaktera i može se isto tako primeniti i na rešavanje takvih jednačina, čiji su pojedini stepeni nepoznate iracionalni brojevi.

Da bi smo ilustrovali različite okolnosti koje mogu nastupiti u primeni ovog analitičkog metoda uzećemo nekoliko karakterističnih primera.

I. Rešiti algebarsku jednačinu četvrtog stepena:

$$\phi(y) = y^4 - 6y^3 + 2y^2 + 18y - 15 = 0$$

Analitički elementi ove jednačine su:

$$p = 1,\ n = 2,\ r = 1\ S_{m-r} = 1,\ L' = 3.$$

Ako izvršimo smenu $y = 10^2 \cdot Y$ dobićemo transformovanu sledeću jednačinu:

$$\phi_1(Y) = 10^7 \cdot Y^4 - 6 \cdot 10^5 \cdot Y^3 + 2 \cdot 10^3 \cdot Y^2 + 180Y - 1{,}5 = 0.$$

Prema tome:

1. Za $l = 1$ sleduje $\kappa_{0,\varsigma}^{(1)} = 4$. Ovde se pojavljuje inicialni granični sistem. Jer ako posmatramo sada redulovane Inicialne sisteme koji su najbliži tome sistemu vidimo da su inicialni elementi ovih sistema:

$$\kappa_{0,\varsigma'}^{(1)} = 5 \text{ i } \kappa_{0,\varsigma''}^{(1)} = 3.$$

Prema tome sleduje da redukovanom inicialnom sistemu $(\alpha_{0,\varsigma'}^{(0,1)}, \kappa_{0,\varsigma'}^{(1)})$ odgovara koren $y_1 = 5$ zadate jednačine, jer je:

$$A_m - \alpha_{m,\varsigma'}^{(0,1)} = 0.$$

Redukovanom inicialnom sistemu odgovara najbliži niži sistem čiji je inicialni element: $\kappa_{0,\varsigma}^{(1)} = 2$; jer za $l = 2$ dobijamo inicijalni element $\kappa_{0,\varsigma}^{(2)} = 1$ koji pripada inicialnom sistemu drugog reda pa je prema tome $\kappa_{0,\varsigma''}^{(2)} = 2$ što znači da tako dobijeni inicialni element: $\kappa_{0,\varsigma''}^{(2)}$ pripade graničnom inicialnom sistemu:

$$(\alpha_{0,\varsigma''}^{(0,1)},\ \kappa_{0,\varsigma''}^{(1)}).$$

Ako pođemo od ovog sistema dobijamo vrednost traženog korena koji odgovara tome graničnom sistemu: $y_2 = 1{,}73205\ldots$

2. Za $l = 2$ sleduje: $\kappa_0^{(2)} = 1$ i prema tome: $a_m - \alpha_m^{(0,2)} = 0$ odakle vidimo da je: $y_3 = 1$ koren date jednačine.

3. Za $l = 3$ nalazimo: $\kappa_0^{(3)} = 1$ pošto je u ovom slučaju:

$$a_m = \alpha_m'^{(0,3)} = 1{,}32059,\ \phi'_1\left(\frac{1}{10^3}\right) = 184{,}022.$$

Prema tome vidimo da su inicialni sistemi: $(\alpha_0^{(0,2)}, \kappa_0^{(2)})$ i $(\alpha_0^{(0,3)}, \kappa_0^{(3)})$ ekvivalentni.

Odgovarajuća grupa ove jednačine je:

$$\kappa_{1,\varsigma'}^{(1)},\ \kappa_{2,\varsigma'}^{(1)}, \ldots \kappa_{n,\varsigma'}^{(1)}, \ldots$$

$$\kappa_{1,\varsigma''}^{(1)},\ \kappa_{2,\varsigma''}^{(1)}, \ldots \kappa_{n,\varsigma''}^{(1)}, \ldots$$

$$\kappa_1^{(2)},\ \kappa_2^{(2)}, \ldots \kappa_n^{(2)}, \ldots$$

Usled toga smo otkrili tri realna korena zadate jednačine. Da bi smo izračunali četvrti koren potražimo inicialne sisteme koji pripadaju odgovarajućoj grupi jednačine:

$$\phi(-y) = y^4 + 6y^3 + 2y^2 - 18y - 15 = 0.$$

1. Za: $l = 1$ sleduje: $a'_m - \alpha_m'^{(0,1)} = -1600{,}5, \phi'_1\left(-\frac{1}{10}\right) =
= 58220$ pa je prema tome $\kappa_{0,\varsigma}'^{(1)} = 2{,}6\ (2)$

2. Za: $l = 2$ imamo: $a'_m - \alpha_m'^{(0,2)} = 2{,}4,\ \phi'_1\left(-\frac{1}{10^2}\right) = 80$ prema tome sleduje: $\kappa_0'^{(2)} = 4$.

3. Za $l = 3$ sleduje: $a'_m - \alpha_m'^{(0,3)} = 1{,}6786;\ \phi'_1\left(-\frac{1}{10^3}\right) =
= -177{,}76$ odakle nalazimo: $\kappa_0'^{(3)} = -0{,}9\ (-1)$.

Ako dakle apstrahujemo inicialne ekvivalentne sisteme vidimo da dotičnoj grupi jednačine pripada inicialni sistem:

$$(\alpha_{0,\varsigma}'^{(0,1)},\ \kappa_{0,\varsigma}'^{(1)})$$

kome odgovara koren: $y_4 = -1{,}73205$.

Izračunati realne korene jednačine šestog stepena:

$$\phi(y) = 16y^6 + 112y^5 - 463y^4 + 183y^3 + 131y^2 + 11y + 10 = 0.$$

Analitički elementi ove jednačine su:

$$p = 1,\ n = 2,\ r = 4,\ S_{m-r} = 2 \text{ i } L = 3.$$

Izvršimo li smenu: $y = 10^2 \cdot Y$ dobijamo sledeću transformovanu jednačinu:

$$\phi_1(Y) = 16 \cdot 10^{11} Y^6 + 112 \cdot 10^9 Y^5 - 463 \cdot 10^7 \cdot Y^4 + 183 \cdot 10^5 \cdot Y^3 + 131 \cdot 10^3 \cdot Y^2 + 110Y + 1 = 0.$$

Ovde imamo slučaj karakterne grupe Iednačine kojoj pripadaju tri inicialna sistema i prema tome dobijamo tri realna korena ove jednačine.

1. Za: $l = 1$ dobijamo: $a_m - \alpha'^{(0,1)}_m = 3276622$, $\phi'_1\left(\frac{1}{10}\right) =$
$= 134055310$ odakle sleduje: $\kappa^{(1)}_{0,\varsigma} = 5$. Prema tome dobijamo prvi realni koren koji rezultuje iz ovog inicijalnog sistema:

$$y_1 = 2{,}414214\ldots$$

2.) Za: $l = 2$ sleduje: $a_m - \alpha'^{(0,2)}_m = 0$, odakle nalazimo: $\kappa^{(2)}_0 = 1$. Traženi koren koji odgovara drugom inicijalnom sistemu je: $y_2 = 1$.

3.) Za: $l = 3$ nalazimo: $a'_m - \alpha^{(0,3)}_m = -1{,}2547836$, $\phi'_1\left(\frac{1}{10^3}\right) =$
$= 448{,}9496$, usled čega je: $\kappa^{(3)}_0 = -0{,}2$. Koren koji odgovara trećem inicijalnom sistemu je: $y_3 = -0{,}414214\ldots$

Da bi smo mogli izračunati ostale realne korene zadate jednačine potražimo inicijalne sisteme koji pripadaju odgovarajućoj grupi jedničine:

$$\phi(-y) = 16y^6 - 112y^5 - 463y^4 - 183y^3 + 131y^2 - 11y + 10 = 0.$$

Primenjujući isti analitički postupak na ovu jednačinu, vidimo s pogledom na dotičnu grupu jednačine da je sledeći koren: $y_4 = -10$ koji je četvrti traženi koren zadate jednačine.

Izračunati realne korene jednačine šesnaestog stepena:

$$\phi(y) = y^{16} + y^{15} - 10y^{14} + y^{13} + y^{12} + 100y^6 + 100y^5 - 999y^4 +$$
$$+ 101y^3 + 90y^2 + y + 1 = 0.$$

Analitički eleménti ove jednačine su:

$$p = 0,\quad n = 1,\quad r = 4,\quad S_{m-r} = 2 \text{ i } L = 2.$$

Primenimo li smenu: $y = 10Y$, dobijamo sledeću transformovanu jednačinu:

$$\phi_1(Y) = 10^{16}\cdot Y^{16} + 10^{15}\cdot Y^{15} - 10\cdot 10^{14}\cdot Y^{14} + 10^{13}\cdot Y^{13} +$$
$$+ 10^{12}\cdot Y^{12} + 100\cdot 10^6\cdot Y^6 + 100\cdot 10^5\cdot Y^5 - 999\cdot 10^4\cdot Y^4 +$$
$$+ 101\cdot 10^3\cdot Y^3 + 90\cdot 10^2\cdot Y^2 + 10Y + 1 = 0.$$

Odgovarajuća grupa ove jednačine je karakterna grupa kojoj pripadaju dva različita inicijalna sistema:

$$(\alpha^{(0,1)}_0,\ \kappa^{(1)}_0) \text{ i } (\alpha^{(0,2)}_0,\ \kappa^{(2)}_0)$$

1. Za: $l = 1$ dobijamo: $a_m - \alpha'^{(0,1)}_m = 612$, $\phi'_1\left(\frac{1}{10}\right) =$
$= -24960$ usled čega je: $\kappa^{(1)}_{0,\varsigma} = 3$

Prema tomé traženi koren koji rezultuje iz tog inicijalnog sistema je: $y_1 = 2{,}61803\ldots$

2. Za: $l = 2$ dobijamo $a_m - \alpha^{(0,2)}_m = -1{,}9021$, $\phi'_1\left(\frac{1}{10^2}\right) =$
$= 180{,}9$ usled čega je: $\kappa^{(2)}_0 = 0$. Traženi koren koji odgovara drugom inicijalnom sistemu je prema tome $y_2 = -0{,}26795\ldots$

Da bi smo mogli izračunati ostale realne korene potražićemo inicijalne sisteme koji pripadaju odgovarajućoj grupi jednačine:

$$\phi(-y) = y^{16} - y^{15} - 10y^{14} - y^{13} + y^{12} + 100y^6 - 100y^5 -$$
$$- 999y^4 - 101y^3 + 90y^2 - y + 1 = 0.$$

Primenjujući isti analitički postupak s pogledom na odgovarajuću grupu ove jednačine nalazimo druga dva realna korena koji su vezani za inicijalne sisteme:

$$(\alpha'^{(0,1)}_{0,\varsigma},\ \kappa'^{(1)}_{0\varsigma}) \text{ i } (\alpha'^{(0,2)}_0,\ \kappa'^{(2)}_0)$$

čiji su inicijalni elementi:

$$\kappa'^{(1)}_{0,\varsigma} = 3 \text{ i } \kappa'^{(2)}_0 = -0{,}1(0).$$

Prema tome nalazimo za ova dva korena sledeće vrednosti: $y_3 = -3{,}73205\ldots$ i $y_4 = 0{,}76393\ldots$ Prema tome jednačina dopušta četiri realna korena, svi ostali koreni su imaginarni.

IV.) Izračunati realne korene jednačine:

$$\phi(y) = y^\pi - y^{\pi-1} + 10y - 1 = 0; \quad (\pi = 3{,}14159\ldots)$$

Analitički elementi ove jednačine su: $p = 0$, $n = 1$, $L = 2$.

Primenimo li smenu: $y = 10\cdot Y$ dobijamo sledeću transformovanu jednačinu:

$$\phi(Y) = 10^\pi\cdot Y^\pi - 10^{\pi-1}\cdot Y^{\pi-1} + 100Y - 1 = 0,$$

Odgovarajuća grupa ove jednačine je redukovala grupa kojoj pripada jedan jedini inicijalan sistem, jer oba inicijalna sistema koji rezultuju za: $l = 1$ i $l = 2$ su dva ekvivalentna inicijalna sistema a inicijalni elemenat jednog od ovih sistema je: $\kappa^{(1)}_0 = 0{,}2$. Prema tome sleduje da zadata jednačina dopušta samo jedan jedini realan koren čija je vrednost: $y_1 = 0{,}1007\ldots$ (sa četiri tačna decimala).

Odrediti realne korene transcendentne jednačine:

$$\phi(y) = (e^y + e^{-y})\cos y - 2 = 0.$$

Primenjujući izloženi analitički postupak nalazimo s pogledom na smenu: $y = 10\cdot Y$ sledeću transformovanu jednačinu:

$$\phi_1(Y) = (e^{10Y} + e^{-10Y})\cos(10Y) - 2 = 0.$$

Odgovarajuća grupa jednačine je redukovana grupa kojoj pripada osnovni inicialni sistemi: $(\alpha_o^{(o,1)}, \kappa^{(1)})$ i $(\alpha_o^{(o,2)}, \kappa_o^{(2)})$. Prema tome nalazimo: $\kappa_{o\varsigma}^{(1)} = 2{,}4$ i $\kappa_o^{(2)} = 0$.

Traženi koreni koji odgovaraju ovim inicialnim sistemima su ~~je~~ prema tome: $y = 4{,}73004\ldots$ i $y_2 = 0$.

Primenjući sada isti analitički postupak na jednačinu

$$\phi(-y) = (e^y + e^{-y})\cos y - 2 = 0$$

vidimo da odgovarajućoj grupi jednačine pripada ekvivalentni inicialni sistem: $(\alpha'^{(o,1)}_o, \kappa'^{(1)}_o)$ prema tome jednačina zadata dopušta takođe realan koren: $y_2 = -4{,}73004\ldots$ (sa pet tačnih decimala).

Naći realne nule funkcije $\phi(y)$ definisane sledećim celim redom:

$$\phi(y) = 1 - \frac{1}{2!}y^2 - \frac{2}{3!}y^3 - \frac{3}{4!}y^4 - \cdots - \frac{m-1}{m!}y^m - \cdots = 0.$$

Transformovana jednačina s pogledom na smenu $y = 10 \cdot Y$ glasi prema tome:

$$\phi_1(Y) = 1 - \frac{10^2}{2!}Y^2 - \frac{2 \cdot 10^3}{3!}Y^3 - \frac{3 \cdot 10^4}{4!}Y^4 - \cdots -$$

$$- \frac{m-1}{m!} \cdot 10^m \cdot Y^m - \cdots = 0.$$

Grupa koja odgovara zadatoj jednačini je redukujuća grupa kojoj pripada osnovni inicialni sistem: $(\alpha_o^{(o,1)}, \kappa_o^{(1)})$.

Za: $l = 1$ sledoje: $a_m - \alpha'^{(o,1)}_m = -1$, $\phi'_1(\frac{1}{10}) = -27{,}1818$, usled čega je: $\kappa_o^{(1)} = 1{,}3\,(1)$. Prema tome traženi koren koji odgovara ovom inicialnom sistemu je: $y = 1$.

Primenjujući isti analitički postupak na jednačinu: $\phi(-y) = 0$ konstatujemo s pogledom na dotičnu grupu ove jednačine, da posmatrana funkcija dopušta jednu jedinu realnu nulu: $y = 1$.

GLAVNIJE ŠTAMPARSKE GREŠKE

U predgovoru stoji: kompinuiranih, u mesto: kontinuiranih

Na str. 5 stoji: kaće, u mesto: kraće.
„ „ 6 „ inicicijalnih, „ „ inicijalnih.
„ „ 6 „ motod „ „ metod.
„ „ 6 „ jndnačine, „ „ jednačine.
„ „ 6 „ furkciju, „ „ funkciju.
„ „ 7 „ zamenjujuću u datoj fonkciju, u mesto zamenujući u datoj funkciji.
„ „ 7 pri kraju stoji: domićemo, u mesto: bobićemo.
„ „ 8 stoji:

$$y_4(x) = \int_\alpha^x Y_0 Y_1 (Y_1^2 + 2Y_0 Y_2) \frac{(\xi - \alpha)^3}{3!} + 2Y_0^2 Y_1 Y_2 \frac{(\xi - \alpha)^3}{2!} + + Y_0^3 p_3 (\xi - \alpha)^3 \} d\xi$$

u mesto:

$$y_4(x) = \int_\alpha^x \{ Y_0 Y_1 (Y_1^2 + 2Y_0 Y_2) \frac{(\xi - \alpha)^3}{3!} + 2Y_0^2 Y_1 Y_2 \frac{(\xi - \alpha)^3}{2!} + + Y_0^3 Y_3 (\xi - \alpha)^3 \} d\xi$$

Na str. 13 stoji: konvergantnim u mesto: konvergentnim.

„ „ 16 „ $c_p = \frac{1}{p} \cdot C_1 \frac{dc_{p-1}}{d\kappa}$ u mesto: $c_p = \frac{1}{p} \cdot c_1 \cdot \frac{dc_{p-1}}{d\kappa}$

„ „ 16 „ $c_{p+1} = \frac{1}{p+1} C_1 \cdot \frac{dC_p}{d\kappa}$ u mesto: $c_{p+1} = = \frac{1}{p+1} \cdot c_1 \cdot \frac{dc_p}{d\kappa}$

„ „ 16 „ $c_{p+1} = \frac{(a - \alpha_1)^{p+1}}{(p+1)}$ u mesto: $c_{p+1} = = \frac{(a - \alpha_1)^{p+1}}{p+1} \cdot c_{p+1}$.

„ „ 22 „ $10^1 \cdot \varsigma^{(1)} \cdot C_1^{(0,1)} < 1$, u mesto: $10^1 \cdot \varsigma^{(1)} \cdot C_1^{(0,1)} < 1$ ...52)

„ „ 22 pri kraju stoji: uslov (59) u mesto: uslov (52).

„ „ 25 stoji: $|A_n| \leqq \frac{M}{r_n}$ u mesto: $|A_n| \leqq \frac{M}{r^n}$

„ „ 24 „ inicijylnih, u mesto: inicijalnih.

„ „ 30 „ je prema tome, u mesto: su prema tome.