Господину Професору

Dr. Николи Салтикову

у знак дубоког поштовања

његов ученик

Ђорђе Карапанџић

10. маја 1949. год.
Београд.

UNIVERZITET U BEOGRADU

ĐORĐE KARAPANDŽIĆ
predavač
Šumarskog fakulteta

VIŠA MATEMATIKA

ZA
STUDENTE ŠUMARSTVA

II IZDANJE

Научна Књига

IZDAVAČKO PREDUZEĆE NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD, 1949

Štamparija „SLOBODAN JOVIĆ" II, Beograd, Takovska 32, Telefon 21-211

SADRŽAJ

osnovni kurs. Istorijske napomene, tako dragocene za upotpunjavanje nastave — sasvim su izostale. Odeljak o beskrajnim redovima je izostao, pa se moralo pribegavati tome da se uz same pojedine slučajeve daju odgovarajuća najnužnija objašnjena. Ovo je svakako nedostatak — ali trebalo je dati što pre osnovni kurs, i sve što nije naročito neophodno moralo je izostati.

U pogledu literature koristio sam kratki kurs više matematike S. P. Vinogradova, zatim Bermanta (I tom) i najzad Baule-a (I sv.) u prevodu M. Kiseljaka („Matematika prirodoslovacu i inžinjera") kao i Ebner — Roth („Technische Mathematik"). U svakome od ovih udžbenika, a najviše u udžbeniku S. P. Vinogradova, mogao se naći izvestan broj kraćih i jasnih dokaza. Priličan broj zadataka korišćen je iz zbirke zadataka Kuzmin — Gintera. Inače cela kompozicija morala je biti saobražena napred navedenim ciljevima — i kao što je rečeno, u tom pravcu moraju se izvesti dopune koje će tek tada pokazati primenu matematike u svetlosti ove struke.

Osoblje preduzeća „Slobodan Jović" II, koje je štampalo ovaj udžbenik, nastojalo je vrlo predano da udžbenik bude što brižljivije i što pre otštampan pri čemu su se naročito zalagali drugovi slagači Dušan Janković i Mileta D. Kompalić koji su nosili glavni deo posla — pa stoga i osoblju preduzeća „Slobodan Jović" II i pomenutim drugovima izražavam svoju zahvalnost

24 januara 1949
Beograd

Đorđe Karapandžić

UVOD

Pojam funkcije. — Ako jednoj promenljivoj odgovara jedna ili više vrednosti druge promenljive količine onda je ova druga količina funkcija prve. **Zavisnost među količinama se izražava znacima računskih radnji, a svaka od količina obeležena je opštim brojem — slovom (koje je za svaku količinu različito).** Pored promenjivih količina **ima i nepromenljivih koje se zovu konstante. Svi zakoni fizike i drugih prirodnih nauka, koje se služe matematikom, pretstavljaju u stvari *funkcije* — različite zavisnosti među promenljivim količinama (i konstantama).** Na pr.

$$s = \frac{at^2}{2}$$

(s put, a ubrzanje, t vreme), **izražava vezu između promenljivih t i s i konstante a, i pretstavlja zakon jednakog ubrzanog kretanja.** Ovaj zakon mogao je biti napisan i ovako

$$s - \frac{1}{2} at^2 = 0.$$

U prvom slučaju, kad je jedna veličina (s) izražena drugim (t) veza je *eksplicitna*, a u drugom slučaju kad nije ni jedna od veličina izražena drugima, veza je *implicitna*. Ima funkciia koje se jedino mogu izraziti implicitno Na pr.

$$y^5 - x^2 + \sin xy = 0;$$

ima ih koje se mogu izraziti i na jedan i na drugi način — kao što je napred navedeni primer. Prosto rečeno: ako je moguće rešiti jednačinu po onoj promenljivoj po kojoj se želi, onda je moguće izraziti je eksplicitno. Najčešće su u upotrebi funkcije kod kojih je jedna promenljiva izražena drugom; eksplicitno izražena, promenljiva na jednoj strani (ili izraz na drugoj) zove se funkcija. Na pr.

$$y = \sin x; \quad y = \frac{ax^2}{2}; \quad y = ax^2 \quad \text{itd.}$$

Po načinu postanka funkcije su *empiriske* ili *matematičke*. Empiriske funkcije se dobijaju iz posmatranja podataka dobijenih merenjem — pri čemu se želi da se među veličinama ustanovi matematički najpribližnija funkcionalna veza Takve su funkcije u stvari najveći broj fizičkih zakona i mnogi zakoni

---

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik namenjen je studentima šumarstva pa su i njegov obim kao i obrada saobraženi tome cilju.

Što se tiče obima on nije proizišao iz neke proizvoljno određene materije već iz konsultovanja sa svima nastavnicima predmeta ove struke u kojima se koristi matematika. Pri svem tom izvesne korekture u tom pravcu biće izvedene kad se pojave svi udžbenici ovih predmeta — što će biti svakako još tokom ove godine.

Obrada ovako odabrane materije morala je da zadovolji dva zahteva: prvo, da materija bude što sistematičnije izložena — sa direktnim povezivanjem odeljaka, a drugo, da izlaganja ne budu preopširna. Zbog ovog drugog zahteva prilikom izlaganja najvažnije dopune izložene su u vidu napomena i primedaba. Ovaj način je podesan zbog toga što skreće pažnju čitaocu na važnost dopune, što bi mu svakoko manje palo u oči da je sve u jedinstvenom tekstu. Sem ovog svakako je manji zamor prilikom čitanja. Inače, obraćena je pažnja da se kod vežbanja dosledno provlače tri važne krive a to su parabola, Neil-ova parabola i lančanica.

Ipak, za sad je morao izostati izvestan broj primera iz raznih predmeta struke čime bi se izložena materija još bolje predstavila u svetlosti struke. Ovo je moralo biti stoga što neki udžbenici još nisu izišli a neki su izišli posle završetka ovog udžbenika, pa je tako nemoguće uzeti one najkarakterističnije primere koji, s jedne strane ne zahtevaju dublje poznavanje materije koja će se tek izučavati, a s druge pokazuju baš direktno korišćenje matematike u struci. Koliki je značaj ove poslednje činjenice nije potrebno dokazivati. Sa druge strane nešto je ipak učinjeno i u tom pravcu: na kraju izloženog materijala date su najvažnije primene u mehanici i dendrometriji kao i još neki primeri iz struke. Radi eventualnog daljeg usavršavanja na kraju udžbenika stavljen je dodatak sa dopunama iz sistematike integrala izračunavanja površina, krivolinijskih integrala i najvažnijih običnih diferencijalnih jednačina. Naravno da je i u ovom slučaju vođeno računa o tome da izlaganje bude najneposrednije i da celina ne premaša izvesnu meru po obimu — što bi je učinilo nepristupačnom.

Ovu materiju trebalo je dopuniti izlaganjem o primeni diferencijalnog računa na funkcije bar sa dve promenljive kao i odeljkom o dvostrukim integralima — ali za sad je i to moralo biti odloženo jer je ipak najvažniji bio *osnovni kurs. Istorijske napomene, tako dragocene za upotpunjavanje nastave — sasvim su izostale. Odeljak o beskrajnim redovima je izostao, pa se moralo pribegavati tome da se uz same pojedine slučajeve daju odgovarajuća najnužnija objašnjena. Ovo je svakako nedostatak — ali trebalo je dati što pre osnovni kurs, i sve što nije naročito neophodno moralo je izostati.*

U pogledu literature koristio sam kratki kurs više matematike S. P. Vinogradova, zatim Bermanta (I tom) i najzad Baule-a (I sv.) u prevodu M. Kiseljaka („Matematika prirodoslovacu i inžinjera") kao i Ebner — Roth („Technische Mathematik"). U svakome od ovih udžbenika, a najviše u udžbeniku S. P. Vinogradova, mogao se naći izvestan broj kraćih i jasnih dokaza. Priličan broj zadataka korišćen je iz zbirke zadataka Kuzmin — Gintera. Inače cela kompozicija morala je biti saobražena napred navedenim ciljevima — i kao što je rečeno, u tom pravcu moraju se izvesti dopune koje će tek tada pokazati primenu matematike u svetlosti ove struke.

Osoblje preduzeća „Slobodan Jović" II, koje je štampalo ovaj udžbenik, nastojalo je vrlo predano da udžbenik bude što brižljivije i što pre otštampan pri čemu su se naročito zalagali drugovi slagači Dušan Janković i Mileta D. Kompalić koji su nosili glavni deo posla — pa stoga i osoblju preduzeća „Slobodan Jović" II i pomenutim drugovima izražavam svoju zahvalnost

24 januara 1949
Beograd

Đorđe Karapandžić

U V O D

Pojam funkcije. — Ako jednoj promenljivoj odgovara jedna ili više vrednosti druge promenljive količine onda je ova druga količina funkcija prve. Zavisnost među količinama se izražava znacima računskih radnji, a svaka od količina obeležena je opštim brojem — slovom (koje je za svaku količinu različito). Pored promenjivih količina ima i nepromenljivih koje se zovu konstante. Svi zakoni fizike i drugih prirodnih nauka, koje se služe matematikom, pretstavljaju u stvari *funkcije* — različite zavisnosti među promenljivim količinama (i konstantama). Na pr.

$$s = \frac{at^2}{2}$$

(s put, a ubrzanje, t vreme), izražava vezu između promenljivih t i s i konstante a, i pretstavlja zakon jednakog ubrzanog kretanja. Ovaj zakon mogao je biti napisan i ovako

$$s - \frac{1}{2} at^2 = 0.$$

U prvom slučaju, kad je jedna veličina (s) izražena drugim (t) veza je *eksplicitna*, a u drugom slučaju kad nije ni jedna od veličina izražena drugima, veza je *implicitna*. Ima funkciia koje se jedino mogu izraziti implicitno Na pr.

$$y^5 - x^2 + \sin xy = 0;$$

ima ih koje se mogu izraziti i na jedan i na drugi način — kao što je napred navedeni primer. Prosto rečeno: ako je moguće rešiti jednačinu po onoj promenljivoj po kojoj se želi, onda je moguće izraziti je eksplicitno. Najčešće su u upotrebi funkcije kod kojih je jedna promenljiva izražena drugom; eksplicitno izražena, promenljiva na jednoj strani (ili izraz na drugoj) zove se funkcija. Na pr.

$$y = \sin x; \quad y = \frac{ax^2}{2}; \quad y = ax^2 \quad \text{itd.}$$

Po načinu postanka funkcije su *empiriske* ili *matematičke*. Empiriske funkcije se dobijaju iz posmatranja podataka dobijenih merenjem — pri čemu se želi da se među veličinama ustanovi matematički najpribližnija funkcionalna veza Takve su funkcije u stvari najveći broj fizičkih zakona i mnogi zakoni ostalih prirodnih nauka. Matematičke funkcije su one do kojih dolazimo primenom matematičkih rasuđivanja — bez korišćenja podataka iz merenja. Sve geometriske teoreme koje se izražavaju algebarski toga su porekla. U prirodnim naukama najčešće je kombinovan i jedan i drugi način formiranja funkcija: koriste se i eksperimentalni podaci i matematičke funkcije koje u stvari izražavaju matematičke — najčešće geometriske teoreme.

Po vrsti računskih operacija koje se pojavljuju u njima, funkcije mogu biti: *algebarske i transcendentne.*

Algebarske funkcije su one kod kojih su promenljive vezane znacima algebarskih operacija u izvesnom ograničenom broju i to znacima: sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja, stepenovanja celim i razlomljenim izložiocima (koreni). Algebarske funkcije mogu biti *racionalne* (polinomi ili cele funkcije i njihovi količnici — racionalna razlomljena funkcija) i *iracionalne* (koreni). Navedimo neke primere algebarskih funkcija.

$y = 4x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ (racionalna cela funkcija)

$y = \dfrac{6x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$ (racionalna razlomljena funkcija)

$y = (3x^2 - 1)^3$ (racionalna cela, jer će po izvršenju stepenovanja biti polimon)

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{3x^2 - 1} \\ y &= \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \end{aligned}\right\}$$

(iracionalne algebarske funkcije)

$$y = \frac{\sqrt{x}\,(a+x)}{\sqrt{x+1}}; \qquad y = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \qquad \sqrt[3]{x}$$

Najprostija, ali za tehniku značajna funkcija je

$$y = cx^n \quad (c = \text{konstanta, } n \text{ konstanta}).$$

Transcendentne funkcije su one koje se izražavaju trigonometriskim ($\sin x$; $\operatorname{tg} x$ itd) logaritamskim ($\log x$) funkcijama, eksponencijalnim (a^x, e^x) i ciklometriskim funkcijama ($\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$ itd.)

Na pr. $y = \sin x, \quad y = x\,(\sin x + \cos x)$

$$y = \log x, \quad y = \frac{\log x}{x}, \quad y = a^x, \quad y = \frac{a^x}{x}, \quad y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$y = \operatorname{arc}\sin x, \quad y = \operatorname{arc}\cos x, \quad y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x.$$

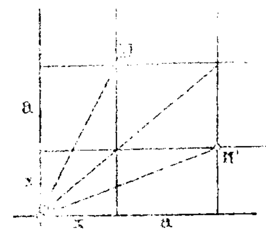
Prve dve funkcije su transcendentne *trigonometriske*, druge dve su transcendentne *logaritanmske* i pretposlednje tri transcendentne *eksponencijalne*, dok su poslednje tri *ciklometrijske* funkcije.

Primedba. Ciklometrijske funkcije u stvari znače luk za koji imamo odgovarajuću trigonometrisku funkciju: $y = \operatorname{arc}\sin x$, znači „y je luk čiji je sin jednak x" — pa možemo i pisati $x = \sin y$. Tako isto i $y = \operatorname{arc}\cos x$ znači $x = \cos y$ i isto možemo pisati i ostale ciklometriske funkcije.

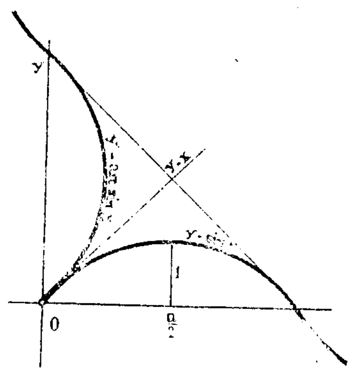
Trigometriske funkcije su periodične tj posle izvesne promene nezavisno promenljive dobivaju ranije vrednosti; za trigonometriske funkcije perioda je 2π (za $\sin x$ i $\cos x$) i π (za $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$).

Bavićemo se najviše funkcijama jedne promenljive jer one imaju najveći praktični interes.

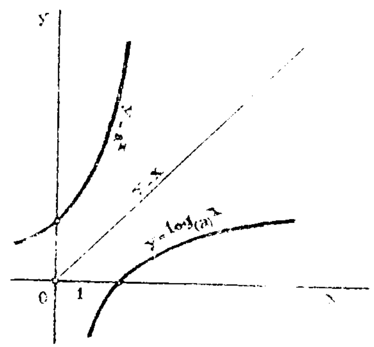
Napomena o inverznim funkcijama. Ako u jednoj funkciji $y = f(x)$ promenimo mesta x i y onda se dobijena funkcija $x = f(y)$ zove inverzna. Na pr. funkcija $y = x^2$ ima kao inverznu funkciju $x = y^2$. Da vidimo kako će grafički izgledati ova promena koordinata za jednu tačku. Da su koordinate tačke M jednake, promenom mesta koordinatama ne bi se izazvala nikakva promena: bilo bi mesto $y = x$ isto $x = y$ i sve bi to važilo i za ostale tačke pa bi se tačke nalazile na prvoj $y = x$ koja prolazi kroz početak. Međutim, ako se koordinate razlikuju za a vidimo iz slike da tačke M i M' stoje simetrično prema pravoj $y = x$. Što važi za ove dve tačke važiće i za koordinate svih ostalih tačaka inverznih krivih — dakle: *tačke dveju inverznih krivih simetrično su raspoređene prema pravoj $y = x$.* Ovo je od značaja za konstrukciju krivih, jer često krive koje se teško konstruišu mogu se na osnovu ovoga konstruisati kao simetrične krive svojim inverznim krivim.



Sl. 1.



Sl. 2.



Sl. 3.

Na pr. kriva $y = \operatorname{arc}\sin x$ ili $x = \sin y$

ima inverznu funkciju $y = \sin x$ koju relativno lako crtamo, a onda $x = \sin y$ crtaćemo kao simetričnu prema pravoj

$$y = x$$

Isto tako

$$y = \log_{(a)} x$$

napisaćemo $x = a^x$ zato ćemo nacrtati prvo

$$y = a^x \text{ (za } x = o \text{ je } y = 1)$$

pa onda kao njoj simetričnu

$$y = \log_{(a)} x.$$

OSNOVI INFINITEZIMALNOG RAČUNA

I Diferencijalni račun

1. Pojam granice. Posmatraćemo vrednost funkcije $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ za $x = a$. Ako se stavi $x = a$ u izraz kojim je data funkcija y dobiće se $y = = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{0}{0}$. Međutim iz algebre znamo da je

$$y = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x + a)\cdot(x - a)}{x - a} = x + a$$

pa će tražena vrednost y za $x = a$ biti

$$y = x + a = a + a = 2a.$$

Odavde vidimo da malopređašnji izraz $\frac{0}{0}$ ima sasvim određenu vrednost.

Vratimo se na malopređašnji količnik. Izraz $\frac{0}{0}$ nema nikakvog smisla, ako nula označava odsustvo količine. Izraz $\frac{a^2 - a^2}{a - a}$ ima smisla — on ima vrednost 2a, znači da se mora pretpostaviti da i u imenitelju i brojitelju postoje nekakve — makar i vrlo male količine. Postojanje takvih količina moguće je ako je x vrlo blizu a — ali ipak nije jednako a tj. da je

$$x = a + \delta, \quad x = a - \delta$$

što znači da je x ili veće od a ili manje od njega za jednu malu, koliko god bilo malu količinu δ: glavno je da ta mala količina δ postoji. Izračunajmo sad vrednost ovog količnika kad uzmemo da je $x = a + \delta$ biće

$$y = \frac{(a + \delta)^2 - a^2}{a + \delta - a} = \frac{a^2 + 2a\delta + \delta^2 - a^2}{\delta} = \frac{2a\delta + \delta^2}{\delta} = \frac{2a\delta}{\delta} + \frac{\delta^2}{\delta} = 2a + \delta.$$

Vidimo da se sad nije pojavio količnik $\frac{0}{0}$ nego da postoji količnik $\frac{2a\delta + \delta^2}{\delta} = 2a + \delta$ što daje, kad je δ vrlo malo, ranije nađenu vrednost 2a.

Isto tako dobićemo ako za x uzmemo vrednost $x = a - \delta$

$$y = \frac{(a - \delta)^2 - a^2}{a - \delta - a} = \frac{a^2 - 2a\delta + \delta^2 - a^2}{-\delta} = \frac{-2a\delta + \delta^2}{-\delta} = \frac{-2a\delta}{-\delta} +$$

$$+ \frac{\delta^2}{-\delta} = 2a - \delta$$

što opet, za vrlo malo δ, daje poznati rezultat 2a.

Iz ovog se primera vidi: da ima slučajeva kad se traži vrednost funkcije (y) za izvesnu određenu vrednost promenljive (x), da se dobijaju izrazi kao $\frac{0}{0}$ koji nemaju smisla — ako se pretpostavi apsolutan indentitet x sa a.

Ti izrazi samo tada imaju smisla ako se pretpostavi da se promenljiva razlikuje za izvesnu makar i vrlo malu količinu od određene vrednosti (a). Ta određena vrednost (a) zove se *granica* i između nje i stvarne vrednosti promenljive (x) postoji uvek razlika — dakle

$$|x - a| < \varepsilon$$

gde je ε („epsilon") neka vrlo mala količina (pozitivna).

Napisano je $|x - a| < \varepsilon$ i znači da uzimamo apsolutnu vrednost razlike $x - a$ (čita se „moduo $x - a$"); ovo uzimamo zato što *x* može biti veće od a ili a veće od x — u prvom slučaju je razlika pozitivna a u drugom negativna. Znak razlike nije važan — važno je da razlika postoji — i zato uzimamo apsolutnu vrednost razlike koja pretstavlja u stvari kvantitet — količinu.

Dakle za jednu promenljivu x granica je ona količina a za koju uvek postoji moduo razlike.

$$|x - a| < \varepsilon$$

gde je ε koliko god se hoće mala količina.

Granicom jedne funkcije y naziva se ona količina koju dobija funkcija kad promenljiva teži svojoj granici.

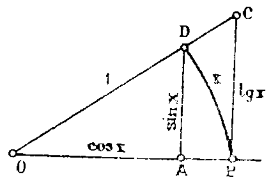
Beleženje se vrši ovako:

$$\lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$

i znači: granica (limes latinski „granica") y kad x teži a jeste granica izraza $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ a to je $2a$.

Navešćemo tri važna primera granica koji pretstavljaju temelje više analize.

1.) Neka je na trigonometriskom krugu dat luk x, sinus koji odgovara tom luku kao i njemu odgovarajući tangens; sa slike se vidi da površine $0AD$, $0BD$, $0CB$ stoje u ovom odnosu



Sl. 4.

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{1 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot tg\, x}{2}$$

ili množeći nejednačinu sa 2 imamo

$$\sin x \cdot \cos x < x < tg\, x$$

odakle je deleći sa $\sin x$ (vodeći računa da je $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

$$\text{a.)} \quad \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

kada x teži nuli imamo

$$\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

što daje ($\cos 0 = 1$)

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} < 1$$

Pošto je nemoguće da jedan izraz bude i manji i veći od jedinice za isto x — to može biti jedino.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

pa se onda i recipročna vrednost može dobiti iz a)

$$\text{I.} \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Napomena. Ovakve beskonačno male količine (količine koje teže nuli ili imaju za granicu 0) kad daju količnik čija je granična vrednost 1 (kao što je $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$) zovu se *ekvivalentne*. Beleži se često $\sin x \approx x$ kao što se beleže i približno jednake veličine. Sem ovog treba napomenuti da na pr.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{4}\alpha^3}{\alpha} = \frac{1}{4}\alpha^2 = 0, \qquad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{4}\alpha^3}{\alpha^2} = \frac{1}{4}\alpha = 0,$$

pa je tek

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{4}\alpha^3}{\alpha^3} = \frac{1}{4}.$$

Dakle ima beskrajno malih veličina koje moramo *stepenovati* nekim celim izložiocem da bi u količniku s nekom drugom beskrajno malom količinom dale *količnik različit od nule*. Izložilac kojim se stepenuje izvesna količina je *red* beskrajno male količine: u gornjem primeru je α je trećeg reda u odnosu na $\frac{1}{4}\alpha^3$. Međutim $1 + 3\alpha^3$ prema $4 - 2\alpha$ je prvog reda jer je odmah

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1 + 3\alpha^2}{4 - 2\alpha} = \frac{1}{4}.$$

2. Binomni obrazac

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \cdot \cdot \cdot + x^n$$

kad se primeni za slučaj $x = \frac{1}{n}$ daje

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot n(n-1)\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} n(n-1)(n-2)\frac{1}{n^3}\cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

što je drugačije napisano

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

kad *n* teži beskrajnosti onda izrazi $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}\cdots$ teže nuli pa dobijemo.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots\cdots$$

Red na desnoj strani poslednje funkcije je konvergentan [1]) jer su mu članovi (počevši od četvrtog) manji od članova beskrajne geometriske progresije

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

koja je konvergentna i čiji je zbir

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

odmah se vidi da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + S'$$

gde je S' zbir članova počevši od drugog a kako je $S' < S$ onda je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + 2.$$

---

[1]) Konvergentan red pretstavlja beskrajni zbir koji ima konačnu i određenu vrednost. Članovi ovog zbira ređaju se po izvesnom utvrđenom zakonu. Najprostiji primer konvergentnoga reda pretstavlja beskrajna geometriska progresija (za $|q| < 1$). Interval u kome je za sve vrednosti od x red konvergentan zove se razmak konvergencije. Za beskrajnu geometrisku progresiju razmak konvergencije je

$$-1 < q < 1.$$

Prva dva člana reda pokazuju da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$$

što pokazuje da se ova granična vrednost nalazi između 2 i 3. Detaljnim računanjem iz reda 1) moguće je utvrditi prvih jedanaest decimala

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459\ldots\ldots$$

Ova se granična vrednost označava sa e i pretstavlja *transcendentan* broj tj. broj koji niti se može pretstaviti količnikom celih brojeva niti korenima iz njih. Ovaj broj e igra značajnu ulogu u matematici i prirodnim naukama. To je jedan od najznačajnijih limesa, dakle pamtimo

$$\text{II} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

3) Najzad poslednji od ova tri limes-a izvodi se iz prethodnog. Ako izvršimo smenu $\frac{1}{n} = \delta$ poslednji limes postaje:

$$\lim_{\delta\to 0}(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e$$

pri čemu vidimo da $\delta = \frac{1}{n}$ teži nuli kad $n \to \infty$

iz poslednjeg obrasca logaritmovanjem za osnovu m dobijamo

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\log_m(1+\delta) = \log_m e$$

ili ako izvršimo smenu $1+\delta = a^x$ (odavde je $\delta = a^x - 1$ pa je za $\delta = 0$ i $a^x - 1 = 0$ odakle je $x = 0$) imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_m a^x}{a^x - 1} = \log_m e$$

ili dalje

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{a^x - 1} = \frac{\log_m e}{\log_m a}$$

odakle se dobija recipročna vrednost

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{\log_m a}{\log_m e}$$

Ovo je vrlo važna granična vrednost koju ćemo, kao i dve ranije navedene koristiti u našim rasmatranjima. Kad se uzme mesto m osnova e koja se se isključivo i upotrebljava u višoj analizi onda se dobija

$$\text{III} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$$

pri čemu oznaka ln („logaritmus naturalis") pretstavlja logaritam za osnovu e (prirodni logaritam).

U svim ovim primerima videli smo da ukoliko su manje količine koje postoje kao razlika između promenljive i granice utoliko je to za račun podesnije. Najpodesnije je kad te male količine imaju za granicu nulu. Promenljive količine koje imaju za granicu nulu zovu se *beskrajno male količine*.

Primedba. Granica, kako promenljive tako i funkcije, može biti svaka vrednost između $+\infty$ i $-\infty$. Na pr.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

jer je 1 prema ∞ vrlo maleno. Slično se rasuđuje i kod

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

jer je 1 prema x (koje je beskrajno malo) vrlo veliko pa je količnik takođe beskrajan.

Funkcije koje imaju za određeno x granicu $+\infty$ kaže se da imaju *diskontinuiteta* (prekida). Prethodna funkcija $y = \frac{1}{x}$ ima tačku diskontinuiteta za $x = 0$.

Funkcija $y = \frac{x}{x-1}$ ima tačku diskontinuiteta $x = 1$; isto tako funkcija $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ima dve tačke diskontinuiteta $x = 1$ i $x_2 = -1$, a njena granična vrednost biće za $x_1 = 1 + \varepsilon$ i $x = 1 - \varepsilon$

$$\lim y = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 + 2\varepsilon}{2\varepsilon} = \lim \frac{1}{2\varepsilon} = +\infty,$$

$$\lim y = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2 - 1} = \lim \frac{1 - 2\varepsilon}{-2\varepsilon} = \lim \frac{1}{-2\varepsilon} = +\infty.$$

Odavde vidimo da ima funkcija kod kojih kad se približavamo sa pozitivne strane dobijamo jednu vrednost funkcije, a sa negativne strane — drugu vrednost funkcije. U gornjem primeru slično bi dobili i za $x_2 = -1$. Racionalne algebarske fuekcije imaju tačaka diskontuiniteta[1] i vidi se da se one dobijaju kao koreni polinoma u imenitelju (ovo važi ako su ti koreni realni).

Napomena. Granična vrednost onih racionalnih funkcija kod kojih promenljiva teži beskrajnosti — dobija se deobom brojitelja i imenitelja najvećim stepenom pa se onda pusti da promenljiva teži beskrajnosti. Na pr.

$$\lim_{x \to \infty} y = \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

jer izrazi $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x}$ itd. za $x \to \infty$ teže nuli

Vežbanja. Naći granične vrednosti ovih funkcija

1) $y = \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$ za $x \to 0$ (skratiti razlomak)

2) $y = \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$ za $x \to 1$

3) $y = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ za $x - 1$ i n ceo broj — primena algebarskog indentiteta $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdots + 1)$

4) $y = \dfrac{3x^2 + \sqrt{x^3 + 2}}{x^2 - x + 1}$ za $x \to \infty$ — napisati $\dfrac{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x}}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

5) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$ za $x \to \infty$

6) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}}$ za $x \to \infty$

1) U ostale slučajeve diskontinuiteta kao i u pravu definiciju pojma — nećemo se upuštati. U intervalu u kome funkcija nema diskontinuiteta ona je neprekidna (kontinuirana).

7) $y = \frac{1^2+2^2+3^2\cdots\cdots+n^2}{n^2}$ za $n \to \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{napisati } 1^2 = 2^2 + 3^2 \cdots\cdots n^2 \text{ u} \\ \text{obliku } \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \end{array} \right.$

2. Račun limesa. Ispitaćemo sad kako se dobija limes zbira, proizvoda i količnika dveju funkcija, čiji su nam limes-i poznati. Zaključci tog ispitivanja čine osnovu računa limes-a koji je poslužio kao temelj diferencijalnog računa.

Neka imamo dve funkcije y_1 i y_2 koje za istu vrednost promenljive x (kad ova teži svojoj granici a) teže svaka svojoj granici α i β.

Pre početka izlaganja — skrenimo pažnju na dva skoro očigledna stava — koja mi nećemo dokazivati:

1^0. konačan zbir beskrajno malih količina i sam je beskrajno mala količina — dakle

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \delta$$

pri čemu ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 označavaju te beskrajno male količine.

2^0. beskrajno mala količina ε kad se množi konačnom količinom daje beskrajno malu količinu — dakle $N \cdot \varepsilon = \lambda$ — pri čemu je N konačna količina a λ nova beskrajno mala količina.

Sad se vratimo na naše dokaze. Ako je α granica za y_1 i β za y_2 (kad $x \to a$) onda izmedu α i y_1 mora pvstojati beskrajno mala razlika μ kao i između β i y_2 što će biti beskrajno mala razlika ν — dakle

$$1) \left\{ \begin{array}{l} y_1 - \alpha = \mu \\ y^2 - \beta = Y \end{array} \right.$$

odakle dobijamo

$$2) \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \alpha + \mu \\ y_2 = \beta + \nu \end{array} \right.$$

iz odnos koji čine sistem 2) lako se dobija (sabiranjem, množenjem, deljęnem)

$$3)\ y_1 + y_2 = \alpha + \beta + \mu + \nu$$

$$4)\ y_1 \cdot y_2 = \alpha\beta + \beta\mu + \alpha\nu$$

$$5)\ \frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha+\mu}{\beta+\nu} \text{ ili } \frac{Y_1}{v_2} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\mu\beta - \gamma\alpha}{\beta(\beta+\nu)}.$$

Ako se primene stavovi 1^0.) i 2^0.) za odnose 3) 4) i 5) onda se vidi da je

$$6)\ \lim(y_1 + y_2) = \alpha + \beta = \lim y_1 + \lim y_2$$

$$7)\ \lim y_1 \cdot y_2 = \alpha \cdot \beta = \lim y_1 \cdot \lim y_2$$

$$8)\ \lim \frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim y_1}{\lim y_2}$$

odnose 6) 7) i 8) čitamo

I. limes zbira jednak je zbiru limes-a na pr.

$$\lim_{x\to 0} y \lim = \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{a^x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = 1 + \ln a.$$

II. limes proizvoda jednak je proizvodu limes-a na pr.

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\sin x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = e \cdot 1 = e.$$

III. limes količnika jednak je količniku limes-a

$$\text{na pr. } \lim_{x\to 0} y = \lim \frac{a^x - 1}{\sin x} = \lim \frac{\frac{a^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim \frac{a^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

Što se tiče limes-a razlike on je obuhvaćen limes-om zbira.

Vežbanja. Naći graničnu vrednost u ovim slučajevima

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ napisati $\left(\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{mx}} = \frac{n}{m}\,\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin mx}{nx}} = \frac{m}{n}\,\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ $\left(\text{tranformacija } 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\ !\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$ $\left(\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\ !\right)$

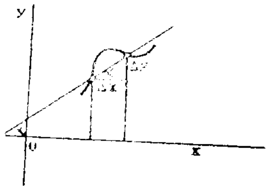
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ $\left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};\ \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} = \right.$

$$\left. = \frac{\sin x}{x}\,\frac{1-\cos x}{x^2 \cos x}\right)$$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$ $\left(\cos u - \cos v = -2 \sin \dfrac{u+v}{2} \sin \dfrac{u-v}{2}\right)$ $u = mx$ $v = nx$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$ $\left(\sin u - \sin v = 2 \cos \dfrac{u-v}{2} \sin \dfrac{u-v}{2}\right)$ $u = a + x$ $v = a - x$

3. Priraštaj. Priraštajem se naziva razlika između dve ma koje vrednosti promenljive (bilo nezavisno promenljive bilo funkcije). Na pr. $y_2 - y_1$ označava priraštaj funkcije y a $x_2 - x_1$ označava priraštaj nezavisno promenljive. Priraštaj se označava grčkim slovom „delta" Δ a pored njega se stavlja količina čiji se priraštaj hoće da označi: na pr. Δy znači priraštaj y; tako će biti



Sl. 5.

$$y_2 - y_1 = \Delta y$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

Ako se posmatra jedna kriva $y = f(x)$ onda se vidi da količnik priraštaja $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ pretstavlja koeficijent pravca sečice koja prolazi kroz tačke čija razlika koordinata pretstavlja priraštaj. Ako su ti priraštaji mali onda se količnik tih priraštaja sve više bliži koeficijentu pravca tangente.

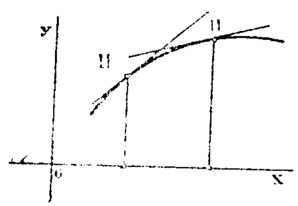
Granična vrednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive označava se

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$\dfrac{dy}{dx}$ zove se izvod i pretstavlja koeficijent pravca tangente.

Sa promenom tačke na krivoj menja se i pravac tangente a samim tim i njen koeficijent pravca — izvod $\dfrac{dy}{dx}$

Znači, izvod $\dfrac{dy}{dx}$ menja svoju vrednost



Sl. 6.

kako se menjaju koordinate x i y, a pošto je $y = f(x)$ znači kako se menja x. Izvod je funkcija od x.

4. Izvodi osnovnih funkcija: Izloženi zaključak da je $\dfrac{dy}{dx}$ funkcija od x potvrdiće i dalje izlaganje i daće nam oblik izraza tih funkcija.

α) Eksponencijalna funkcija $y = a^x$. Promenu na funkciji i nezavisno promenljivoj označavaćemo priraštajem pa će biti

$y = a^x$	funkcija
$y + \Delta y = a^{x + \Delta x}$	svaka od promenljivih dobija priraštaj
$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$	Prebacili smo y na drugu stranu i kako je $y = a^x$ izrazili y sa a^x.
$\Delta y = a^x a^{\Delta x} - a^x$	$a^{x+\Delta x} = a^x a^{\Delta x}$
$\Delta y = a^x (a^{\Delta x} - 1)$	Izvukli smo zajednički množitel a^x.
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$	Podelili smo i levu i desnu stranu sa Δx da bi dobili količnik priraštaja.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	Pustili smo da Δx teži nuli.
$\boxed{\dfrac{dy}{dx} = a^x \ln a}$	Na levoj strani dobili smo $\dfrac{dy}{dx}$, a na desnoj kako je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ dobili smo izraz $a^x \ln a$.

Iz ovoga smo uvideli da funkcija $y = a^x$ ima izvod $\dfrac{dy}{dx} = a^x \ln a$ i da zaista izvod pretstavlja funkciju x.

Kad je osnova $a = e$ onda izvod $\dfrac{dy}{dx} = a^x \ln a$ prelazi u $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ jer je $\ln e = 1$, pri čemu i sama funkcija $y = a^x$ prelazi u $y = e^x$.

β) Funkcija $y = \sin x$. Postupićemo kao i u prethodnom primeru, promenljive će dobiti priraštaje a odatle uz algebarske operacije i prelaskom na granice dobićemo izvod.

$y = \sin x$	Funkcija
$y + y = \sin(x + \Delta x)$	Svaka od promenljivih dobija priraštaj
$y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$	Prebacili smo y na desnu stranu i zamenili ga funkcijom $\sin x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin x \frac{(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Podelili smo i levu i desnu stranu sa Δx da bi dobili količnik priraštaja.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Izraz $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ razvili smo po obraszu

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

gde je $\alpha = (x+\Delta x)$ a $\beta = x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Podelili smo i brojitelj i imenitelj sa 2 da bi dobili $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Izdvojili smo izraz $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ od izraza $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Pustili smo da Δx teži nuli pa izraz $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ teži 1 a $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ teži $\cos x$ zato dobijamo $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \cos x}$$

v) Funkcija $y = \cos x$. Postupak je isti kao i u predašnjem slučaju

$y = \cos x$ — Funkcija.

$y + \Delta y = \cos(x+\Delta x)$ — Svaka promenljiva dobija priraštaj.

$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$ — Prebacili smo y na drugu stranu i zamenili ga funkcijom cos x.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Podelili smo obe strane sa Δx da bi dobili količnik priraštaja (iz koga ćemo dobiti izvod).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Izraz $\cos(x+\Delta x) - \cos x$ razvili smo po obrascu

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

gde je $\alpha = x+\Delta x$ a $\beta = x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Podelili smo i brojitelj i imenitelj sa 2 da bi dobili izraz

$$\frac{\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Izdvojili smo izraz $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$

a odavde dobijamo

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Pustili smo da Δx teži nuli a izraz $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ teži jedinici, dok — $\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ teži $-\sin x$.

Zato dobijamo

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sin x}$$

Pomoću priraštaja tj. količnika priraštaja dobili smo izvode tri osnovne funkcije a^x, $\sin x$ i $\cos x$.

Na ovaj način moguće je dobiti izvode svih ostalih funkcija — ali mi ćemo ići drugim putem koristeći ove izvedene rezultate.

1. Napomena. Ako je $y = c$, gde je c konstanta, onda pošto konstanta ne može imati priraštaja imamo

$$\Delta y = c - c, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad \text{Dakle izvod konstante je nula}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y' = 0$$

2. Napomena. Lako je izvesti izvod proste funkcije $y = x$ koji će nam biti potreban u daljem izlaganju

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

dakle izvod od $y = x$ je $y' = 1$.

Primedba. Ako je nekakva funcija $f(x)$ pomnožena konstantom c, onda će biti

$$y = c f(x)$$

$$y + \Delta y = c f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = c f(x + \Delta x) - c f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \frac{f(x + \Delta x) - c f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = c f'(x) \quad \text{Oznaka } f'(x) \text{ znači izvod funkcije } f(x).$$

Izvod funkcije pomnožene konstantom dobija se kad se izvod same funkcije pomnoži tom konstantom. Na pr. izvod funkcije

$y = m a^x$ biće $\frac{dy}{dx} = m a^x \ln a$; izvod od $y = a \cos x$ biće $\frac{dy}{dx} = -a \sin x$; mesto $\frac{dy}{dx}$ možemo, kratkoće radi, staviti y'.

5.) Izvod složene funkcije

Ako je data neka funkcija koja zavisi od argumenta — tj. od neke funkcije od x — onda se uvek ova složena funkcija može svesti na prostu zamenom složenog argumenta novom promenljivom u.

Tako za slučaj $y = \sin a^x$ imaćemo $u = a^x$ i biće

$$y = \sin u \qquad u = a^x.$$

Sad imamo prostu funkciju $y = \sin u$ i možemo lako naći izvod $\frac{dy}{du}$ ali kako nam treba izvod $\frac{dy}{dx}$ — izvedimo ovo rasuđivanje. Posmatrajmo količnik priraštaja funkcije i nezavisno promenljive iz koga kad $\Delta x \to 0$ dobijamo izvod. Taj količnik

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

možemo napisati i ovako

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

pri čemu je u računanje uvedena i funkcija u. Kad $\Delta x \to 0$ imaćemo (po teoremi o graničnoj vrednosti proizvoda)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

a odavde je očigledno (jer svi limes-i prelaze u izvode)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Iz desne strane poslednje formule vidimo način za nalaženje izvoda složene funkcije od x preko funkcije u: treba naći izvod funkcije y po u i njega pomnožiti izvodom funkcije **u** po x. Drugim rečima izvod složene funkcije nekog argumenta od x nalazi se kao da je funkcija prosta — samo se množi izvodom argumenta.

Za $y = \sin a^x$ imaćemo

$$\frac{dy}{dx} = \cos a^x \cdot (a^x)' = \cos^x \cdot a^x \ln a$$

Slično je sa funkcijom $y = a^{\sin x}$. Dobijamo kao izvod $\frac{dy}{dx} = a^{\sin x} \ln a (\sin x)' = a^{\sin x} \ln a \cos x$,

6. **Izvod funkcije $y = lux$, $y = \arccos x$, $y = x$**

Koristeći izvod složene funkcije možemo lako dobiti izvode ovih funkcija

1.) $y = \ln x \qquad y = \arcsin x \qquad y = \arccos x.$

Napišimo ove funkcije ovako

2.) $x = e^y \qquad x = \sin y \qquad x = \cos y$

Diferencirajmo leve i desne strane ovih funkcija — vodeći računa da je y složena funkcija od x pa će biti (imamo na umu da je $(x)' = 1$)

3.) $1 = e^y \cdot \frac{dy}{dx} \qquad 1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} \qquad 1 = -\sin y \frac{dy}{dx}$

Kod prve funkcije imamo da je $e^y = x$ (iz formula 2.) a kod druge i treće primenom obrasca $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ i uz korišćenje odgovarajućih odnosa iz formula 2.) — dobijamo

$$\sin y = \sqrt{1 - x^3} \text{ kao i } \cos y = -\sqrt{1 - x^2} \text{ pa zato}$$

rešavanjem po $\frac{dy}{dx}$ dobijemo iz formula 3.)

4.) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Na ovaj način smo dobili izvode još tri funkcije. Kao izvod složene funkcije možemo dobiti i izvod važne funkcije $y = x^n$.

Napišimo $x = e^{\ln x}$ pa imamo $y = x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \ln x}$.

Sad imamo kao izvod složene funkcije

$$y' = (x^n)' = (n^{n \ln x})' = e^{n \ln x}(n \ln x)' = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n x^{x-1}$$

pri ovome $(n \ln x)' = n(\ln x)' = n \cdot \frac{1}{x}$ po napomeni o funkciji množenoj konstantom.

Primetimo da transformacija $e^{n \ln x}$ važi za sve vrednosti n — cele, razlomljenje, pozitivne i negativne.

Tako kad tražimo na pr. izvode funkcija

$$y = x^4 \qquad y = \frac{1}{x^3} \qquad y = \sqrt{x} \qquad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

dobićemo po gornjoj primedbi

$$y' = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$$

$$y' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{--4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3} 1} = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

Izvodi sllčnih funkcija u čestoj su primeni i treba ih dobro naučiti.

Vežbanja. Naći izvode ovih funkcija

$y = 2 \sin a, \quad y = 5a^x, \quad y = na^x, \quad y = x^3, \quad y = 4x^3$

$y = 4 \cos x, \quad y = m \sin x, \quad y = 4e^x, \quad y = x^2, \quad y = 5x^2$

$y = \frac{1}{x}$ (napisati $y = x^{-1}$ ovde je $n = -1$); $\quad y = \frac{1}{x^3}$

$y = \sqrt[3]{x^2}$ (napisati $y = x^{\frac{2}{3}}$ ovde je $n = \frac{2}{3}$); $\quad y = \frac{2}{4} \frac{1}{x^2}; \quad y = \frac{4}{7x^2}$

$y = \frac{6}{11 \sqrt[5]{x^4}}, \quad y = \frac{7}{9} \sqrt[3]{x^4}, \quad y = e^{2x}, \quad y = e^{mx}, \quad y = e^{\cos x}$

$y = e^{\arcsin x}, \quad y = a^{x^4}, \quad y = \log \cos x, \quad y = \arcsin \log x, \quad y = \log x^3.$

7. **Izvodi zbira, proizvoda i količnika**

a) Neka je data funkcija $y = u + v$, gde su u i v funkcije x

$y = u + v$	Funkcija
$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$	Svaka funkcija dobija priraštaj
$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$	Prebacili smo y na desnu stranu i zamenili ga sa $u + v$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$	Podelili smo i levu i desnu stranu sa Δx da bi dobili količnik priraštaja.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Pustili smo da priraštaji teže nuli pa imamo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

ili

$$\boxed{y'=u'+v'}$$

Dobijena formula pokazuje: da se izvod funkcije koja je pretstavljena kao zbir funkcija, dobija kad se nađu izvodi funkcija koje su sabirci pa se ti izvodi saberu ili kraće rečeno: *Izvod zbira jednak je zbiru izvoda.* Na pr. izvod funkcije

$y=\log x+x$ biće dalje $y'=(\log x)'+(x)'=\frac{1}{x}+1$

Ovo važi za oduzimanje (pošto je u algebarskom smislu oduzimanje sabiranje sa negativnim znakom). Sem ovoga, pravilo važi i za veći broj sabiraka: na pr. funkcija

$y=u+v+w+t+z$ ima izvod $y'=u'+v'+w'+t'+z'$

Vežbanja. Naći izvod funkcija

$y=x^3+\log x$, $y=x^2-a^{\sin x}$, $y=a^x-\sin\log x$, $y=\sqrt[3]{x}-2x+\frac{4}{x}$.

b.) Uzmimo sad funkciju $y=u\,v$ gde su u i v funkcije od x. Dajući ovim funkcijama priraštaje dobijamo:

$y=u\cdot v$ — Funkcija.

$y+\Delta y=(u+\Delta u)\,(v+\Delta v)$ — Svaka funkcija dobila je svoj priraštaj.

$\Delta y=u\,v+\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta u+\Delta u\,\Delta v-u\,v$ — Prebacimo y na drugu stranu i zamenimo sa u v.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u+\frac{\Delta u\;\Delta v}{\Delta x}$ — Podelili smo levu i desnu stranu sa Δx te dobili količnik priraštaja.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\;\Delta v}{\Delta x}$$

Pustimo da priraštaji teže nuli i dobijamo

$$\frac{dy}{dy}=\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u$$

Izraz $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$ postaje beskrajno mali iako $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ mora imati konačnu vrednost.

$$\boxed{y'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

Izvod prve funkcije pomnožen drugom, više prva nepromenjena — pomnožena izvodom druge.

Primer: Naći izvod funkcije $y=x\sin x$.

Po obrascu $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ dobićemo

$$y'=(x)'\sin x+x\cdot(\sin x)'=\sin x+x\cdot\cos x.$$

Vežbanja: Naži izvod funkcija:

$y=x\log x$; $y=x^2\log x$; $y=\sqrt[3]{x}\log x$; $y=xe^x$

$y=x^2e^x$; $y=xe^{\sqrt{x}}$; $y=xa^x$; $y=x\sin\log x$

$y=(a+x)\,(b+x)$; $y=(x+1)^3\log x$.

c.) Na sličan način izvešćemo izvod funkcije $y=\frac{u}{v}$. Pomoću priraštaja izrazićemo promenu na funkcijama y, u, v (koje su funkcije x)

$y=\frac{u}{v}$ — Funkcija.

$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$ — Svaka funkcija dobija priraštaj.

$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}$ — Prebacili smo y na drugu stranu i zamenili ga sa $\frac{u}{v}$.

$\Delta y=\frac{v\cdot u+\Delta u\cdot v-u\cdot v-u\cdot\Delta v}{(v+\Delta v)\,v}$ — Doveli smo na zajednički imenitelj.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u}{(v+\Delta v)\,v}$ — Podelili smo obe strane sa Δx da bi dobili količnik priraštaja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} v - \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} u}{(v + \Delta v)\, v}$$

Pustimo da Δx, teži nuli i dobili smo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \text{ili} \quad \boxed{y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

Primer: Naći izvod funkcije $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$; imamo:

$$y' = \frac{(x^2)'(x^2 - 1) - x^2 (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2 - 1 - x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Vežbanja: Naći izvode funkcija:

$$y = \frac{x}{e^x}; \quad y = \frac{x}{x - 1}; \quad y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}; \quad y = \frac{\log x}{x};$$

$$y = \frac{\sin x}{x}; \quad y = \frac{\sqrt{x}}{a^x}; \quad y = \frac{e^x}{x}; \quad y = \operatorname{tg} x; \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

Napomena: Znajući izvod količnika, moguće je izvesti izvod funkcije $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{cotg} x$, jer su one u stvari $y = \frac{\sin x}{\cos x}$, i $y = \frac{\cos x}{\sin x}$. Znajući izvode ovih funkcija, moguće je izvesti i izvode ciklometrijskih — njima inverznih funkcija $y = \operatorname{arc\,tg} x$ i $y = \operatorname{arc\,cotg} x$.

Lako dobijemo za: $y = \operatorname{tg} x$, $\quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ i $y = \operatorname{ctg} x$, $\quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Za funkciju $y = \operatorname{arc\,tg} x$ imamo najpre $x = \operatorname{tg} y$ a odavde diferéncirajući levu i desnu stranu (kao u odeljku 6) imamo

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ako napišemo $\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = \operatorname{tg}^2 y + 1 = x^2 + 1$ onda imamo traženi izvod

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Za funkciju $y = \operatorname{arcctg} x$ dobili bismo: $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Tablica izvoda

Najpre smo izveli pomoću računa limes-a izvode triju funkcija: eksponencijalne, sinus funk. i cosinus funkcije. Na osnovu izvoda složene funkcije, izveli smo izvod logaritamske funkcije i funkcija arc sin x i arc cos x. Zatim smo na osnovu izvoda složenih funkcija izveli izvod važne funkcije $y = x^n$. Najzad na osnovu pravila o količniku izveli smo izvode tg x i ctg x, a zatim, funkcije arc tg x i arcctg x. Sada ćemo napisati pregledno sve ove funkcije i njihove izvode. Ova tablica je za praktičnu upotrebu od bitnog značaja i treba je naučiti napamet.

$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{arc\,ctg} x$	$y = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Izvodi ovih ovih funkcija lako se pamte tokom samog izvođenja, a lako ih je zapamtiti jer ima mnogo sličnih ili onih koji se razlikuju samo po znaku kao što su ciklometrijske funkcije za arc sin x i arc cos x i za arc tg x i arc ctg x.

Slično je nešto i kod trigonometrijskih funkcija: izvod od sin x je cos x, a od cos x je — sin x. Kod tgx i cotg x treba se setiti da $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ i $\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$ pa u izvodu je $\frac{1}{\cos^2 x}$ i $\frac{1}{\sin^2 x}$ (kod izvoda količnika mora doći imenitelj kao kvadrat).

Primetimo da su naročito od važnosti potencije tipa

$$y = (ax^n + b)^m$$

čiji je izvod:

$$y' = m(ax^n + b)^{m-1}\cdot(ax^x + b)' = m(ax^n +)^{m-}\cdot anx^{n-1}$$

slične su i potencije na pr.:

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3; \quad y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}; \quad y = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^3 \text{ itd.}$$

$$y = \frac{1}{(3x+5)^3}; \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}; \quad y = \sqrt{(x^2-1)^3} \quad \text{itd.}$$

Napomena. Za izvode funkcije koje u eksponentu sadrže promenljivu ili uopšte njen argumenat kao na pr. $y = x^x$, $y = x^{\sin x}$, $y = (1+x)^{x^2}$ primenićemo već korišćeni način pisanja $x = e^{\ln x}$ ili $1 + x = e^{\ln(1+x)}$ pa imamo

$$y = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$$

$$y = x^{\sin x} = (e^{\ln x})^{\sin x} = e^{\sin x\cdot\ln x}$$

$$y = (1+x)^{x^2} = [e^{\ln(1+x)}]^{x^2} = e^{x^2\ln(1+x)}$$

Na ovaj način dobili smo složene eksponencijalne funkcije čije izvode nije teško naći.

$$y' = (x^n)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$$

$$y' = x^{\sin x} = (e^{\sin x\ln x})' = e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)' = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$y' = (1+x)^{x^2}[e^{x^2\ln(1+x)}]' = e^{x^2\ln(1+x)}[x^2\ln(1+x)]' =$$

$$= (1+x)^{x^2}\left[\ln(1+x)^2 + x\frac{1}{1+x}\right]x.$$

Primedba. Iz samog napisanog limes a

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

proizlazi da je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(x) \quad \text{ili} \quad \Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(x)\Delta x$$

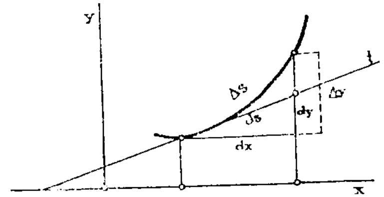
pri čemu smo sa $\varepsilon(x)$ označili razliku između $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i $f'(x)$ a sem toga kad $\Delta x \to 0$ onda mora biti i $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Izraz $f'(x)\Delta x$ naziva se diferencijalom funkcije pri čemu je Δx konstantna veličina dok ceo izraz kad $\Delta x \to 0$ ima oblik

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x$$

i vidi se da se dy menja sa $f'(x)$. Kad $\Delta x \to 0$ upotrebićemo oznaku dx jer se vidi da za funkciju $y = x$ je $dy = \Delta x$ pa možemo napisati

$$dy = f'(x)\cdot dx.$$

Poslednja jednačina pokazuje da je $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ — dakle izvod je količnik diferencijala funkcije i diferencijala argumenata (promenljive). Ovo tumačenje da se izvod može smatrati kao količnik priraštaja — iako beskrajno malih — kako funkcije tako i nezavisno promenljive je od velike važnosti za razne primene.



Sl. 7.

Zadaci za vežbanje

Naći izvode funkcije:

1)	$y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 12$	$y' = 6x^2 - 10x + 7$
2)	$y = x^4 - 3x^2 + 16$	$y' = 4x^3 - 6x$
3)	$y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3$	$y' = 1 - x + x^2 - x^3$
4)	$y = x^3(x^2 - 1)^2$	$y' = 7x^6 - 10x^4 - 3x^2$
5)	$y = \frac{x-1}{x+1}$	$y' = \frac{2}{(x+1)^2}$
6)	$y = \frac{x}{1-x^2}$	$y' = \frac{1+x^2}{(1-x)^2}$

7) $y = \dfrac{3x-1}{x^5}$ $\qquad y' = \dfrac{5-12x}{x^6}$

8) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ $\qquad y' = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$

9) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $\qquad y = \dfrac{7}{8\sqrt[8]{x}}$

10) $y = e^x(x^2-2x+2)$ $\qquad y' = x^2 e^x$

11) $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$ $\qquad y' = x^3 \cos x$

12) $y = x \ln x - x$ $\qquad y' = \ln x$

13) $y = \dfrac{x^3}{3} \ln x - \dfrac{1}{9} x^3$ $\qquad y' = x^2 \ln x$

14) $y = \sqrt{x} + \ln x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

15) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad y' = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

16) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

17) $y = \dfrac{1}{\ln x}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$

18) $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ $\qquad y' = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

19) $y = e^x(\sin x - \cos x)$ $\qquad y' = 2e^x \sin x$

20) $y = (ax+b)^n$ $\qquad y' = na(ax+b)^{n-1}$

21) $y = \sin^3 x$ $\qquad y' = 3\sin^2 x \cos x$

22) $y = (x^2-1)^5$ $\qquad y' = \ln x\,(x^2-1)^4$

23) $y = \cos^5 x$ $\qquad y' = 5\cos^4 x \sin x$

24) $y = \sqrt{3x-5}$ $\qquad y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

25) $y = \sin 5x$ $\qquad y' = 5\cos 5x$

26) $y = \sqrt{a^2-x^2}$ $\qquad y' = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

27) $y = e^{-x}$ $\qquad y' = -e^{-x}$

28) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

29) $y = \ln \sin x$ $\qquad y' = \operatorname{ctg} x$

30) $y = \dfrac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad y' = -\dfrac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$

31) $y = \ln \operatorname{tg} x$ $\qquad y' = \dfrac{2}{\sin 2x}$

32) $y = x\sqrt{x^2+1}$ $\qquad y' = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

33) $y = e^{-x^2}$ $\qquad y' = -2x e^{-x^2}$

34) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ $\qquad y' = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

35) $y = \ln(x^3+x^2)$ $\qquad y' = \dfrac{3x+2}{x^2+x}$

36) $y = \sqrt{(2x+1)^2}$ $\qquad y' = \dfrac{4}{3\sqrt{2x+1}}$

37) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ $\qquad y' = \dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x(x+\sqrt{x^2+a^2})+a^2}$

38) $y = \cos ax \sin bx$ $\qquad y' = b \cos ax \cos bx - a \sin ax \sin bx$

39) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x^2-1}$

40) $y = e^{ax}\cos bx$ $\qquad y' = e^{ax}(a\cos bx - \sin bx)$

41) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\cos x}$

42) $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ $\qquad y' = \dfrac{4}{(e^{x} + e^{-x})^2}$

43) $y' = \ln tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\cos x}$

44) $y = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ $\qquad y' = -\dfrac{2}{1+x^2}$

45) $y = \arcsin\dfrac{2}{1+x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{2}{1+x^2}$

46) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1+x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{1+x^2}{2+x^2+x^4}$

47) $y = \dfrac{1}{\sqrt{ab}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,tg\,x\right)$ $\qquad y' = \dfrac{m}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$ $\quad m = const$

48) $y = e^{2}$ $\qquad y' = \alpha e^{\alpha x + \beta}$

49) $y = (a + bx + cx^2)^n$ $\qquad y' = n(a + bx + c^2)^{n-1}(b + 2cx)$

50) $y = a\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$ $\qquad y' = e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{-\frac{x}{\alpha}}$

51) $y = \ln\sin x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$ $\qquad y' = \dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$

52) $y = \sqrt{2ax}$ $\qquad y' = \sqrt{\dfrac{a}{2x}}$

53) $y = \mathrm{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

54) $y = (a^2 - x^2)^4$ $\qquad y' = -8x(a^2 - x^2)^3$

55) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 1}$ $\qquad y' = \dfrac{2x^2 - 10x + 2}{(x^2-1)^2}$

56) $y = 2x + \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$ $\qquad y' = (e^{x} + e^{-x})^2$

57) $y = \dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sin^3 x}$

58) $y = \mathrm{arc\,ctg}\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\qquad y = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

59) $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{e^{x}}$ $\qquad y = -\dfrac{x^3}{e^{x}}$

Napomena. Izvodi višeg reda su izvodi koji se dobijaju uzastopnim diferenciranjem izvoda jedne funkcije. Na pr. neka je funkcija $y = 4x^3 + 2x^2 + 1$; izvod prvog reda je $y' = 12x^2 + 4x$ njegovim diferenciranjem dobijamo drugi izvod iste funkcije

$y'' = 24x + 4,$ a diferenciranjem ovoga dobijemo

$y''' = 24$ treći izvod, i najzad

$y'''' = 0$ četvrti izvod.

Kod polinoma n — tog stepena uvek je $(n+1)$ izvod ravan nuli, kod ostalih funkcija to nije slučaj. Na pr. funkcija

$$y' = \log(x+1)$$

ima izvod $y' = \dfrac{1}{x+1}$

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2};\quad y''' = \frac{2}{(x = 1)^3};\quad y'''' = \frac{6}{(x+1)^4}\ \dots$$

Jedina funkcija koja ima sve izvode jednake, to je funkcija

$$y = e^{x}$$

9. Parcijalni izvodi i totalni diferenaijal

Do sad smo uvek uzimali u rasmatranje funkcije sa jednom nepoznatom $y = f(x)$. Međutim od interesa je koristiti rezultate razmatranja funkcija sa dve promenljive — što će odmah biti pokazano. Neka je data funkcija z od dve promenljive x i y pa ćemo označiti

1. $$z = F(x, y)$$

Kao i u slučaju jedne promenljive — posmatraćemo promene na funkciji kad obe nezavisno promenljive dobijaju priraštaj

2. $$z + \Delta z = F(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

ili zbog jednačine 1. imaćemo dalje

3. $$\Delta Z = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)$$

u jednačini 3. moguće je izvršiti ovakvu transformaciju — dodavanjem i oduzimanjem $F(x + \Delta x, y)$

4. $$z = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x + \Delta x, y) - F(x, y)$$

Sem ovog napisaćemo gornje izraze još i ovako

5. $$\Delta z = \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y + $$
$$+ \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \Delta x$$

Izraz u brojitelju prvog razlomka pretstavlja izvod po y kad $\Delta y \to 0$ (jer $x + \Delta x$ u obe funkcije F ostaje bez promene); isto tako izraz u brojitelju drugog razlomka pretstavlja, kad $\Delta x \to 0$, izvod po x (jer je y u obe funkcije F bez promene), dakle kad $\Delta z \to 0$, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ imaćemo iz odnosa (5).

$$dz = F'_y \, dy + F'_x \, dx$$

ili

6. $$dz = F'_x \, dx + F'_y \, dy$$

gde F'_x i $F'y$ označuju izvode funkcije F po x i po y.

Pošto funkcija F zavisi od dve promenljive to se ovi izvodi odnose samo na po jednu promenljivu dok se druga smatra kao konstanta. Ovi izvodi se zovu parcijalni (delimični). Oni se beleže

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad F'_y = \frac{\partial F}{\partial x}$$

sam izraz na desnoj strani jednačine (6)

(6) $$dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

zove se totalni diferencijal. Njegov je značaj u matematici uopšte vrlo veliki — ali mi ćemo se ograničiti na jednu primenu u jednom specijalnom slučaju.

Neka je $z = 0$, tada funkcija u formuli 1) postaje

1.) $$F(x, y) = 0$$

a njoj odgovarajući totalni diferencijal

6.) $$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

Ova formula daje

(7) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

što znači da se izvod funkcije F date odnosnom 1) (a takve su sve implicitne funkcije!) može dobiti pomoću parcijalnih izvoda.

Primer. Naći izvod funkcije

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Prema odnosu 7.) biće

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\frac{x}{a^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{y}{b^2} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2\frac{x}{a^2}}{2\frac{y}{b^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

ili ako hoćemo da izrazimo sve pomoću x iz gornje jednačine imamo

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

pa je zato

$$y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Na ovaj se način mogu naći izvodi mnogih algebarskih funkcija implicitnog oblika i tako se na pr. funkcije $y^2 = 2px$, $y^2 = ax^3$ mogu napisati u implicitnom obliku:

$$y^2 - 2px = 0 \text{ i } y^2 - ax^3 = 0$$

pa se na njih može primeniti gornji postupak.

Primedba. Parcijalni izvod i totalni diferencijal za tri i više promenljivih nalaze se na isti način kao i za dve promenljeve. Na pr. $u = (x + y) \cdot z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = z \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x + y$$ pa će totalni diferencijal biti

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$du = z \cdot dx + z\, dy + (x + y)\, dz$$

Zadaci za vežbanje

Naći parcijalne izvode i totalni diferencijal ovih funkcija

$$\left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

1) $z=x^3+y^3-3xy$ $\qquad$ $p=3x^2-3\,3y,\ q=3y^2-3x$

2) $z=x^y$ $\qquad$ $p=yx^{y-1},\ q=x^y\ln x$

4) $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$ $\qquad$ $dz=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$

4) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad$ $du+\frac{xdx+ydy+ZdZ}{\sqrt{x^2+y^2+Z^2}}$

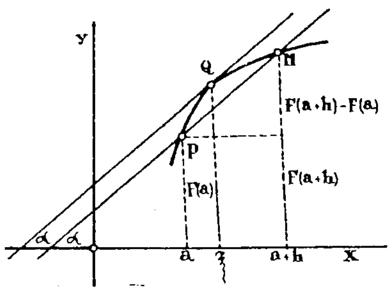
5) $z=\sin(x^2+y^2)$ $\qquad$ $dz=2\cos(x^2+y^2)(xdx+ydy)$

6) $z=xy-\frac{3}{x}+\frac{5}{y}$ $\qquad$ $p=y+\frac{3}{x^2},\ q=x-\frac{5}{y^2}$

10. Lagrange-ova teorema

Teorema o konačnom priraštaju sastoji se u ovome: za svaku neprekidnu funkciju[1] $y=F(x)$ u jednom određenom intervalu moguće je uvek naći naći sečici paralelnu tangentu. Obe prave imaju iste ugaone koeficijente pa će biti

$$F\frac{(a+h)-F(a)}{h}=F$$



Sl. 8.

gde leva strana pretstavlja koeficijenat sečice a desna koeficijenat dirke gde je ξ apcisa za tačku dodira a ta je vrednost između a i $a+h$. Vidimo da je $\xi=a+\theta h$ gde je $0<\theta<1$, dakle θh pretstavlja deo od h, onda teorema za konačni priraštaj ima oblik

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(a+\theta h)$$

1) Ovo važi za sve neprekidne funkcije koje ili stalno rastu („monotono rastuće") ili stalno opadaju („monotono opadajuće"); tome treba dodati i da funkcije treba da imaju izvod. Ima neprekidnih funcija koje nemaju izvoda u pojedinim tačkama na pr. $y=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ za $x=0$ ili uopšte ga nemaju kao na pr. $y=|x|+|x-1|-|x-2|+|y-4|$

Primena ove teoreme je u matematici mnogostruka i u narednom odeljku videćemo njenu primenu u rešavanju jednog važnog zadatka više analize.

Napomena. Ako se Lagrange-ova teorema pimeni na dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ onda se dobija uopštena Lagrange-ova teorema koja se zove i Cauchy-eva. Naravno da su $f(x)$ i $g(x)$ obe kontinuirane u intervalu $a,\ a+h$.

Za funkciju $f(x)$ u intervalu $(a,\ a+h)$ imaćemo Lagrange-ovu teoremu

1.) $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta_1 h)$$

a za funkciju $g(x)$ u istom intervalu biće

2.) $$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'(a+\theta_2 h)$$

Iz formula 1.) i 2.) dobijamo deobom

3.) $$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta_1 h)}{g'(a+\theta_2 h)}$$

Ako se se obrazuje jedna funkcija $v(x)$ takva da je (I) $v(x)=mf(x)+pg(x)+l$ uz uslove

4.) $v(a)\equiv mf(a)+pq(a)+l=0$ $\qquad$ 5.) $v(a+h)\equiv mf(a+h)+$ $+pg(a+h)+l=0$

pri čemu su m i p koeficienti (konstante) — onda pošto je funkcija $v(x)$ za dve vrednosti $x_1=a$ $x_2=a+h$ postala nula[1]) mora se naći bar jedna vrednost $x_3=a+\theta h$ za koju je $v'(x)=0$ dakle (prema I).

6.) $v'(a+\theta h)\equiv mf'(a+h)+pg'(a+\theta h)=0.$

Oduzimanjem jednačine 4.) od 5.) i jednačenjem po količniku $-\frac{p}{m}$ dobijamo

7.) $$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

što izražava Cauchy-evu teoremu.

11. L' Hospital-ovo pravilo

Videli smo na samom početku naših izlaganja (pre računa limes-a(da je bilo potrebno izračunati vrednost pojedinih izraza koji su se javljali u prividno neodređenom obliku $\frac{0}{0}$. Računali smo vrednost tih izraza na

1) Za svaku neprekidnu funkciju (koja ima izvod) važi stav da se između njene dve nule nalazi bar jedna nula izvodne funkcije (Rolle-ova teorema). Teorema je geometrijski očevidna.

razne načine za svaki slučaj: na pr. izraz $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ kad $x \to a$ izračunavali smo primenjujući prećutno stav o granici: između a i x postoji koliko god hoćemo mala razlika δ, dakle $x = a + \delta$; zatim za $\frac{\sin x}{x}$ kad $x \to 0$ izračunali smo uz pomoć geometriskih rasmatranja; graničnu vrednost izraza $\frac{a^{x-1}}{x}$ za $x \to 0$ izračunali smo pomoću granične vrednosti za broj e.

Svi su ovi načini za svaki slučaj — manje ili više različiti. Međutim diferencijalni račun daje sasvim prost način da se svi ti slučajevi rešavaju na jedan način.

Neka je data funkcija F (x) u obliku količnika.

1.) $$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

pri čemu funkcije f (x) i φ (x) za vrednost $x = a$ postaju nula. Dakle za $x = a$ formula 1.) daje *)

2.) $$F(a) = \frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0}$$

Mesto da tražimo količnik $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ možemo koristiti $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ jer je

3.) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f(a)}{\varphi(a)}$$

Kako su funkcije f (x) i φ (x) neprekidne u blizini $x = a$ (u stvari kad $x \to a$) to se na njih obe može primeniti Lagrange-ova teorema o konačnom priraštaju

4.) $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h) \qquad 0 < \theta < 1$$

5.) $$\frac{\varphi(a+h) - f(a)}{h} = \varphi'(a + \delta h) \qquad 0 < \delta < 1$$

pa iz formula 4.) i 5.) dobijamo

6.) $f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$ 7.) $\varphi'(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a + \delta h)$ i granica količnika $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ postaje znajući da je $f(a) = 0$ i $\varphi(a) = 0$.

* Deoba nulom je besmislena — jer nula pretstavlja osustvo kvantiteta — količine, ali se $\frac{0}{0}$ upotrebljava samo kao oznaka.

8.) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a) + hf'(a + \theta h)}{\varphi(a) + h\varphi'(a + \delta h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a + \theta h)}{\varphi'(a + \delta h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

Znači da se formula 3.) može napisati zbog formute (8).

9) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

možemo postupno ovako pisati (koristeći formulu 1) i dalje)

10) $$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

dakle najzad

11) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

Formula 11) kazuje L' Hospital-ovo (1696) pravilo:

vrednost količnika $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *kod* $x \to a$ *i* $f(a) = 0$ *kao* $\varphi(a) = 0$ *dobiva se kad se nađu posebno izvodi tih funkcija i u njih se zameni vrednost* $x = a$.

Tako ćemo primera radi izračunati izraze koji su nam već poznati.

a) $$y = \frac{\sin x}{x} \text{ kod } x \to 0 \text{ postaje } y = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\cos x}{x}\right] = 1$$

b) $$y = \frac{a^{x-1}}{x} \text{ kod } x \to 0 \text{ postaje } y = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{a^x \ln a}{1}\right] = \ln a$$

c) $$y = \frac{x^2 - a^2}{x - a} \text{ kod } x \to a \text{ postaje } y = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \left[\frac{2x}{1}\right] = 2a$$

Kao što se vidi u sva tri slučaja dobili smo na isti način one iste rezultate koji su nam već poznati. Istina je da je diferencijalni račun zasnovan na već poznatim graničnim vrednostima

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^{x-1}}{x}$$

ali nam on daje prostu i jednoobraznu metodu, sistematsku proceduru koju nam nije dao račun sa graničnim vrednostima. Za slučaj da se količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ javi u obliku $\frac{\infty}{\infty}$ može se primeniti isti metod jer je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]'} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f^2(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}\right]$$

dakle $\left(\text{ako postoji } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ i } \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}\right)$ dobijamo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f^2(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)}\right]$$

a odavde je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dakle ostaje isto pravilo kao i za slučaj $\frac{0}{0}$.

Još se mogu javiti oblici $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0, 0^∞, 1^∞. Što se tiče oblika $\infty - \infty$ — ako su u pitanju razlomci — treba ih dovesti na isti imenitelj — na pr. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x}\right) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{(x - \sin x)'}{(x \sin x)'}\right] = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x + \cos x}\right) = \frac{0}{0}$$

treba još jednom primeniti L' Hospital-ovo pravilo i to se u opšte uvek čini dokle god se neodređenost ne izgubi.

Za slučaj 0∞ treba ovaj oblik svesti na $\frac{\infty}{\infty}$; na pr.

$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right] = 0.$$

Oblici 0^0, 0∞, ∞^0, 1∞ svi se svode na $e^{k(x}$

$$\lim_{x \to 0} (x^x) = \lim_{x \to 0} [(e^{\ln x})^x] = \lim_{x \to 0} [e^{x \ln x}] = \lim_{x \to 0} \left[e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\right] = e^0 = 1 \qquad (0^0)$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x \to 0} \left[\left(e^{-\ln x}\right)^x\right] = \lim_{x \to 0} \left[e^{-\ln x}\right] = \lim_{x \to 0} \left[e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\right] = e^0 = 1 \qquad (\infty^0)$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x \to 0} \left\{\left[e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right]^x\right\} = \lim_{x \to 0} \left[e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right] = 1 \qquad (1^\infty).$$

Kao što se vidi, funkcija $k(x)$ dobija za $\mathbf{x} \to a$ jedan od već poznatih oblika 0∞ u poslednjim primerima.

Zadaci sa vežbanje

Naći vrednost prividno neodređenih izraza:

1. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x$ $\qquad 1$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $\qquad \frac{1}{2}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$ $\qquad \frac{n^2 - m^2}{2}$
4. $\lim_{x \to 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ $\qquad \frac{\pi}{2}$
5. $\lim \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ $\qquad \frac{1}{2}$
6. $\lim \frac{\sin x - 3}{1 - 2\cos x}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}$

7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x - 1}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$ $\qquad \dfrac{1}{4}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x}$ $\qquad 2$

9. $\lim \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ $\qquad e^2$

10. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, x^{\,\mathrm{tg}\, 2x}$ $\qquad e^{-2}$

11. $\lim \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$ $\qquad 0$

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$ $\quad n > 0$ $\qquad 0$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2}$ $\qquad 4$

14. $\lim\limits_{x \to 0} (\mathrm{arc}\sin x)^{\mathrm{tg}\, x}$ $\qquad 1$

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ $\qquad 0$

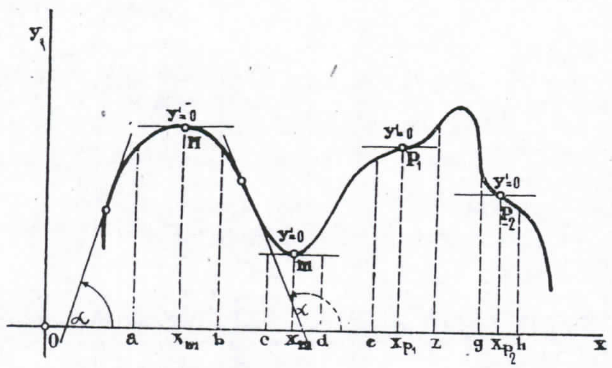
16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$ $\qquad \dfrac{a^2}{b^2}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ $\qquad 1$

18. $\lim\limits_{x \to 0} x^x$ $\qquad 1$

12. Maximum i minimum

I



Sl. 9.

Neka je data funkcija $y = f(x)$. Na krivoj (sl: 9) koja pretstavlja ovu funkciju tačka M ima najveću ordinatu (u intervalu a, b) dok tačka m ima najmanju ordinatu (u intervalu c, d). Vidi se da je u ovim tačkama tangenta paralelna x — osi (sa x — osom zaklapa ugao 0) pa je u ovim tačkama ($y' = \mathrm{tg}\,\alpha$)

$$y' = 0$$

Ali se sa slike vidi da tačka M i m nisu jedine takče u kojima je

$$y' = 0$$

i da tačke P_1 i P_2 imaju istu osobinu — **pa je $y' = 0$ no** zapaža se da tačke P_1 i P_2 imaju ordinate koje nisu ni najmanje ni najveće u njima odgovarajućim intervalima.

Tačke M (Maximum) i m (minimum) zovu se ekstremne vrednosti funkcije (u intervalu a d) a tačke P_1 i P_2 zovu se prevojne tačke (tačke infleksije). Posmatrajmo najpre prvi izvod funkcije u intervalu a, d. Sa slike se vidi da kad kriva raste da su uglovi tangente oštri (za sve vrednosti u intervalu) a njihovi tangensi pozitivni pa znači da je

$$y' > 0$$

Kad kriva opada — uglovi su tupi — pa su njihovi tangensi negativni dakle

$$y' < 0$$

Znajući ovo, uviđamo lako da kod tačke Maximum-a kriva raste pa opada — dokle za vrednost (a) manje od x_M imamo

$$y' > 0$$

a za vrednost (b) veće od x_M biće

$$y' < 0$$

Znači: kod tačke Maximum-a za vrednost x manje od x_M imamo najpre *pozitivnu* vrednost y' a za vrednosti veće od x_M dobijamo *nagativnu* vrednost y' (naravno ovo važi u tom određenom intervalu).

Kod tačke minimum-a za vrednost x manje od x_m biće y' *negativan* a za vrednost veće od x_m izvod y' biće *pozitivan*.

U slučaju prevojnih tačaka P_1 i P_2 kriva ili stalno raste (kao u slučaju tačke P_1) ili stalno opada (kao u slučaju tačke P_2).

Dakle, ostaje stalno — za vrednost x manje od x_{P_1} kao i za veće od x_{P_2}

$$y' > 0$$

ili za vrednosti manje ili veće od x_{P_2}

$$y' < 0$$

Odavde vidimo, da za vrednost x-a u blizini apscise prevojne tačke — izvod y' ostaje ili stalno *pozitivan* ili stalno *negativan*.

Ovim smo pokazali kako se mogu pomoću prvog izvoda naći i tačke ekstremuma i prevojne tačke. Ovo je jedna metoda a pokazaćemo odmah za ovim i drugu. Najpre pokažimo izvedenu metodu na primerima.

Primer. Ispitajmo da li kriva $y = 3x^3 - 6x + 1$ ima ekstremuma.

$y = 3x^2 - 6x + 1$ Funkcija.

$y' = 6x - 6$ Našli smo izvod

$6x - 6 = 0$ Za tačke ekstremuma mora y' biti ravan nuli

$\boxed{x = 1}$ Rešili smo jednačinu po x i tačka sa apscisom $x = 1$ može biti ili ekstremum ili prevojna tačka.

$0 < 1 < 2$ Za tačku sa apscisom $x = 1$ manja apscisa je 0 a veća 2

$y'_{(0)} = 6 \cdot 0 - 6 = -6$ pošto je prvi izvod za vrednost $x = 0$ *negativan*

$y'_{(2)} = 6 \cdot 2 - 6 = +6$ a za vrednost $x = 2$ *pozitivan*, to u tački $x = 1$ funkcija ima minimum.

Ordinatu tačke ekstremuma izračunaćemo iz same funkcije

$$y_{min} = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = 4 - 6 = 2$$

Primer. Ispitati da li kriva $y = 4x^3$ ima ekstremuma

$y = 4x^3$ Funkcija.

$y' = 12x^2$ Prvi izvod funkcije

$12x^2 = 0$ Za tačke ekstremuma ili prevojnu tačku prvi izvod y' mora biti ravan nuli

$\boxed{x = 0}$ Tačka sa apscisom $x = 0$ pretstavlja tačku ekstremuma ili prevojnu tačhu

$-1 < 0 < 1$ apscisa manja od nule je -1 a veća $+1$ za koje treba nastaviti ispitivanje.

$y'_{(-1)} = 12(-1)^2 = +12$ Za ove apscise izvod y' je pozitivan pa je tačka sa apscisom $x = 0$ prevojna tačka.

$y'_{(+1)} = 12 \cdot 1^2 = +12$

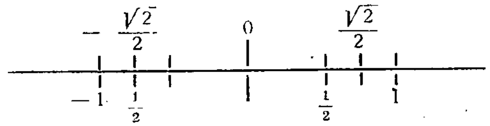
Primer. Ispitati da li kriva $y = x^4 - x^2$ ima ekstremuma.

$y = x^4 - x^2$ Funkcija

$y' = 4x^3 - 2x$ Izvod tunkcije.

$2x(2x^2 - 1) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$ $\boxed{x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\boxed{x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$ Našli smo tri tačke u kojima mogu biti ekstremumi ili prevojne tačke



$-\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2}$ Odredili smo[1]) apscise — manju i veću za tačku $x = 0$.

$$y'_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = +\frac{1}{2}$$

$$y'_{\left(+\frac{1}{2}\right)} = 4 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Kako kriva prvo raste ($y' > 0$) pa opada ($y' < 0$) to je u tački sa apscisom $x = 0$ *Maximum*.

Nastavljamo ispitivanje za tačku sa apscisom $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$-1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$y'_{(-1)} = 4(-1)^3 - 2(-1) = -4 + +2 = -2$$

$$y'_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = +\frac{1}{2}$$

Kako kriva prvo opada ($y' > 0$) pa raste ($y' > 0$) to je u tački sa apcisom $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *minimum*

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ apscisa $\frac{\sqrt{2}}{2}$ se nalazi između apscisa $\frac{1}{2}$ i 1.

$$y'_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$y'_{(1)} = 4 : 1^3 - 2 \cdot 1 = 2$$

Kako kriva prvo opada ($y' < 0$) pa raste ($y' < 0$) to je u ovoj tački *minimum*.

1. **Napomena.** Mesto apscisa koje su veće ili manje od apscise $x = a$ za koju ispitujemo da li je ekstremum ili prevojna tačka — možemo uzeti kao veću apscisu $x_1 = a + \varepsilon$ a kao manju $x_2 = a - \varepsilon$ gde je ε koliko god se

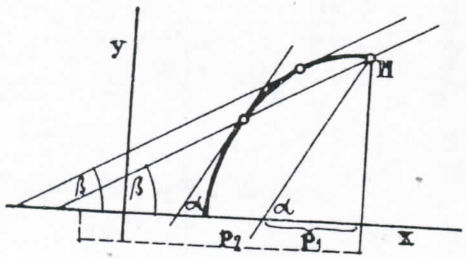
[1]) Vrednosti u čiji se interval zatvara ispitivana vrednost ne smeju prelaziti vrednosti apscisa koje još treba ispitati.

hoće mala količina. Ovaj način ima prednosti nad do sad pokazanim što nema mnogo numeričkog računanja i što se sve potencije ε^2, $\varepsilon^3 \cdots\cdots$ itd. mogu zanemarivati ako se javljaju kao sabirci.

2. **Napomena.** U odeljku I pokazana metoda za ispitivanje ekstremuma i prevojnih tačaka s naročitim uspehom se primenjuje kod funkcija (algebarskih) s višestrukim nulama kao na pr.

$$y=(x-4)^4(x+3)^3$$

3. **Napomena.**

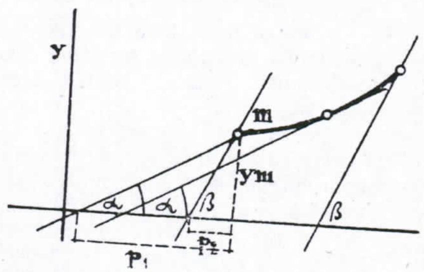


Sl. 10.

Slika 10 pokazuje da kad kriva raste ka tački Maximuma da je prvi izvod y' pozitivan ali *sve manji po apsolutnoj vrednosti* (jer se njegov tengens smanjuje sve više: svaka tangenta ima paralelnu koja prolazi kroz tačku Maximum-a a njihovi tangensi si

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_M}{p_1},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{y_M}{p_2}\ \text{itd. i vidi}$$

se da su sve manji jer y_m se deli sa sve većim p_2, p_3, p_4 itd.). Isto tako slika 11 pokazuje, da kad kriva raste od tačke minimuma da je izvod y pozitivan ali sve *veći po apsolutnoj vrednosti*. Slično se izvodi kad kriva opada.

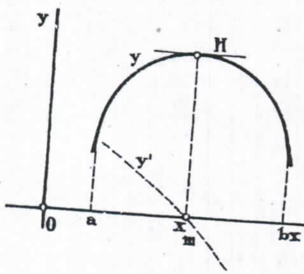


Sl. 11.

II.

Videli smo da je prva metoda za ispitivanje ekstremuma i prevojne tačke zasnovana na prostoj činjenici rašćenja i opadanja funkcije (kontinuirane) što se vidi iz prvog izvoda. Sad ćemo izvesti drugu metodu.

Ako posmatramo i originalnu funkciju $y=f(x)$ i izvodnu $y'=f'(x)$ kao dve funkcije sa istim apscisima a raznim ordinatama — koristeći napomenu 3. iz odeljka I — lako uviđamo:



Sl. 12.

u slučaju Maximum-a kad kriva y raste — kriva y' je pozitivna ali sve manjih ordinata dok u tački sa apscisom x_M ordinata je $y'=0$; od tačke sa apscisom x_M kriva y opada — kriva y' negativna i sve većih ordinata (po apsolutnoj vrednosti); dakle u intervalu (a, b) kriva y' stalno opada to znači njen izvod mora biti

$$y''<0$$

za sve vrednosti u intervalu (a, b). To znači da će i za vrednost x_M (koja nas naročito interesuje) biti isto

$$y''<0.$$

Dakle da bi u tački sa apscisom x_M bio Maximum treba da je

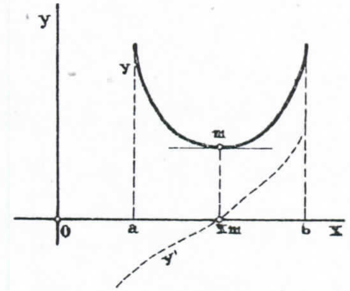
$$y'=0 \text{ i } y''<0$$

Slično razlaganje upotrebićemo i za slučaja minimum-a i utvrdićemo da je za sve tačke krive

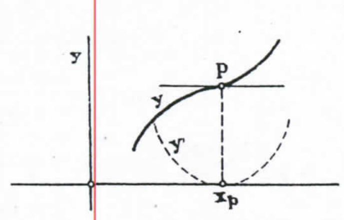
$$y''>0$$

pa i za onu sa apscisom x_m (koja pretstvlja minimum).

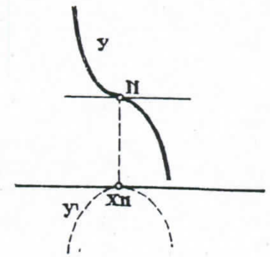
Znači da kriva y ima minimum potrebno je da $y'=0$ i da $y''>0$.



Sl. 13.



Sl. 14.



Sl. 15.

Imajući u vidu prethodna izlaganja lako uviđamo da će kod prevojne tačke originalne krive y — *u istoj apscisi krive y' biti tačka ekstremuma* pa je onda izvod krive y' jednak nuli dakle

$$\boxed{y''=0.}$$

iz svega ovog izlazi da: kad je $y'=0$ (za vrednost $x=a$ koja poništava y')

ako je $\boxed{y''<0}$ postoji Maximum

„ „ $\boxed{y''>0}$ „ minimum

„ „ $\boxed{y''=0}$ „ prevojna tačka (tačka funkcije).

*) Ovo će biti onda ako je za vrednost $x=a$, $y''=0$ ali treba $y'''\neq 0$. Ovo dajemo bez dokaza. Ako je i $y'''=0$ onda postoji metoda koju ovde nećemo izlagati. Međutim metoda pomoću y' rešava i ovakve slučajeve bez teškoće.

Ilustracije radi pokazaćemo ovu metodu na jednom primeru već ranije izrađenom.

Primer. Ispitati ekstremume funkcije $y = x^4 - x^2$

$y = x^4 - x^2$	Funkcije
$y' = 4x^3 - 2x$	prvi izvod funkcije
$x(4x^2 - 2) = 0$	Za tačke ekstremuma i prevojnu tačku prvi izvod mora biti ravan nuli
$y'' = 12x - 2$	Nalazimo *drugi izvod* funkcije

$$12 \cdot 0 - 2 = -2 \qquad y''_{(0)} < 0$$

$$12\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 = 6\sqrt{2} - 2 = 2(3\sqrt{2} - 1 \qquad y''_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} > 0$$

$$12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 = -2(3\sqrt{2} + 1) \qquad y''_{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)} < 0$$

stavili smo u drugi izvod redom vrednosti $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

i dobili smo za

$$x_1 = 0 \qquad \textit{Maximum}$$

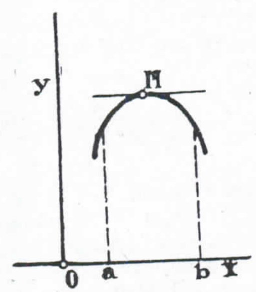
$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textit{minimum}$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textit{Maximum}$$

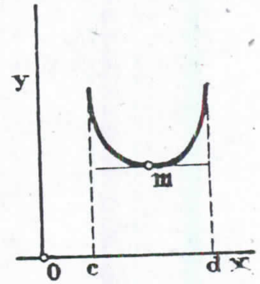
Kao što se vidi — brže smo došli do rezultata i koristili smo samo vrednost x koje su u pitanju — ne tražeći nikakve druge vrednosti, manje ili veće, od one vrednosti za koju vršimo ispitivanje. Ova metoda pomoću drugog izvoda je više uobičajena, ali ima teškoća kod funkcija koje imaju višestruke nule (na pr. $y = (x - 4)^4 (x + 3)$ i dr.) ili uopšte kod onih čiji su izvodi komplikovani. Za ove slučajeve podesnija je prva metoda.

Napomena. Ako je kriva otvorena na dole (sl. 16) onda je kriva prema x — osi konkavna (izdubena) a ako je kriva otvorena na gore onda je ona prema x — osi konveksna (ispupčena). Na **sl. 18** se vidi da kriva može da menja konkavnost. Prvi slučaj konkavne krive imamo u intervalu gde je Maximum (kriva ispod tangente) drugi slučaj u intervalu gde je minimum (kriva iznad tangente) a treći slučaj menjaja konkavnosti imamo kod prevojnih tačaka (s jedne strane ispod a s druge strane iznad tangente). Ovo se sve dobija — ispitivanjem pomoću prvih izvoda — kod traženja ekstremuma i prevojnih tačaka.

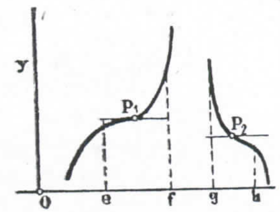
Ali je moguće izvršiti ispitivanje i pomoću **drugog izvoda** — opet uz ispitivanja ekstremuma i prevojnih tačaka. Kako je **za Maximum** $y'' < 0$ — a



Sl. 16.



Sl. 17.



Sl. 18.

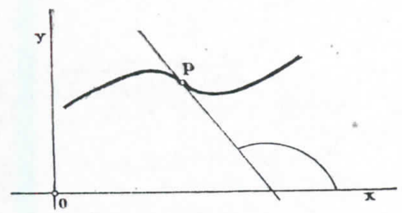
u intervalu gde je Maximum kriva je konkavna (**prema x — osi**) to je uslov za konkavnost

$$y'' < 0$$

a iz istog razloga (iz minimuma funkcije) uslov za **konveksnost** je

$$y'' > 0$$

Primedba. U našim dosadašnjim primerima bilo je **uvek reči** o prevojnoj tački za koju je tangenta paralelna x — osi. **Lako se uviđa** da ima prevojnih tačaka u kojima tangenta nije paralelna x — osi; za te tačke nije $y' = 0$ ali je uvek $y'' = 0$. To se lako može uvideti ako se ima na umu da u prevojnoj tački kriva menja konkavnost. Za vrednosti x nešto manje od apscise prevojne tačke imamo $y'' < 0$ (ili $y'' > 0$) a za vrednosti x-a nešto veća od ove apscise je opet $y'' > 0$ (ili $y'' < 0$). Ako je funkcija y'' neprekidna — ona ne može preći iz oblasti pozitivnih vrednosti u oblast negativnih vrednosti a da ne postane $y'' = 0$. Zato u prevojnoj tački **mora biti uvek** $y'' = 0$.



Sl. 19.

Zadaci za vežbanje

Naći ekstremume funkcija[1])

1.) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ M $(x = 1)$

2.) $y = a + (x - b)^4$ M $(x = b)$

1) Oznake M i m znače maximum (M) i minimum (m).

3.) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 2$ $\qquad M(x=2),\ m_1(x=1)\ m_2(x=3)$

4.) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ $\qquad M(x=1)\ \ m(x=3)$

5.) $y = (x-4)^4 (x+3)^3$ $\qquad M(x=0)\ \ m(x=4)$

6.) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\qquad M(x=1)\ \ m(x=1)$

7.) $y = x + \dfrac{1}{y}$ $\qquad M(x=1)\ \ m(x=-1)$

8.) $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a-x}$ $\qquad M\left(x = \dfrac{a^2}{a-b}\right)\ m\left(x = \dfrac{a^2}{a+b}\right)$

9.) $y = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ $\qquad M(x=4)\ \ m(x=16)$

10.) $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^3}$ $\qquad m(x=1)$

11.) $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 4}$ $\qquad M(x=\sqrt{2})$

12.) $y = y\ln x$ $\qquad m\left(x = \dfrac{1}{e}\right)$

13.) $y = x^2 \ln x$ $\qquad m\left(x = e^{-\frac{1}{2}}\right)$

14.) $y = x^x$ $\qquad m\left(x = \dfrac{1}{e}\right)$

15.) $y = x\ln^2 x$ $\qquad M\left(x = e^{-\frac{1}{2}}\right)\ m(x=1)$

16.) $y = \dfrac{\sin x}{1 - a^2\cos^2 x}$ $\qquad a^2 < 1$ $\qquad$ (rasmotriti dva slučaju) $2a^2 > 1,\ 2a^2 < 1$

17.) $y = x^n e^{-x}$ $\qquad M(x=n)\ \ m(x=0)$

18.) $y = x^2 e^{-x^2}$ $\qquad M(x=1)\ \ m(x=0)$

19.) $y = e^x + e^{-x}$ $\qquad m(x=0)$

20.) $y = e^{-x} - e^{-2x}$ $\qquad M(x=\ln 2)$

21.) Jednačina elastične linije je $y = c\left(\dfrac{x}{3} - 3\dfrac{x^3}{l^3} + 2\dfrac{x^4}{l^4}\right)$ gde su c i l pozitivne konstante; odrediti za koje vrednosti x kriva ima ekstremuma.

22.) Isto za elastičnu liniju $y = \dfrac{3}{2} f\left[\left(\dfrac{x}{l}\right)^2 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{l}\right)^3\right]$ gde su f i l pozitivne konstante.

23.) Naći kolike treba da budu dimenzije pravougaonika najveće površine upisanog u krugu poluprečnika r.

24.) Isto za ravnokraki trapez.

25.) Isto za pravougaonik upisan u polukrugu.

13. Maclaurin-ova formula za polinom-binomni obrazac

Posmatrajmo polinom

1.) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots\ldots\ldots + a_n x^n$
gde su a_0. $a_1 \ldots\ldots a_n$ koeficijenti polinoma.

Uzastopni izvodi ovog polinoma su

$$f'(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \ldots + na_n \cdot x^{n-1}$$

$$f''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 \ldots + \cdot n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4 x \ldots\ldots n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} \ldots\ldots$$

$$f^n(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots\ldots (n-2)(n-1)n.$$

Ako se u funkciju $f(x)$ i sve njene izvode $f'(x)$, $f''(x) \ldots\ldots f^n(x)$ stavi $x = 0$ dobija se (članovi sa x postaju nula):

$$f(0) = a_0 \qquad f'(0) = 1\cdot a_1 \qquad f''(0) = 1\cdot 2a_2 \qquad f'''(0) = 1\cdot 2\cdot 3a_3$$

odakle je

(I) $\quad a_0 = f(0) \qquad a_1 = \dfrac{f'(0)}{1} \qquad a_2 = \dfrac{f''(0)}{1\cdot 2} \qquad a_3 = \dfrac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3} \ldots$

pa će polinom (I) imati oblik

2.) $f(x) = f(0) + \dfrac{1}{1} f'(0)x + \dfrac{1}{1\cdot 2} f''(0)x^2 + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0)x^3 \ldots +$

$+ \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} f^{(n)}(0)x^n.$

Formula (2) pokazuje da se koeficienti svakog polinoma mogu izraziti pomoću izvoda tog polimona (u kojima se smenjuje $x=0$) i prirodnog niza brojeva Formula (2) zove se Maclaurin-ova formula za polinom. Ovu formulu primenićemo na jedan važan primer.

Neka je polinom $f(x)=(1+x)^n$ gde je n ceo broj. Ako bi se izvršilo množenje

$$(1+x)(1+x)\ldots\ldots=(1+x)^n$$

svakako bi se dobio polinom

$$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2\ldots\ldots+a_nx^n$$

Koeficiente a_0, a_1, $a_2\ldots\ldots a_n$ dobili bismo množenjem koje bi bilo dug i zametan posao. Međutim prema predašnjoj primedbi možemo koeficiente a_0, a_1, $a_2,\ldots\ldots a_n$ dobiti tražeći izvode funkcije $(1+x)^n$ što je mnogo jednostavnije.

Dakle pošto je prema formuli (I)

$$a_0=f(0)\qquad a_1=\frac{1}{1}f'(0)\qquad a_2=\frac{1}{1\cdot2}f''(0)\qquad a_3=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}f'''(0)\ldots\ldots$$

treba naći najpre izvode funkcije $f(x)=(1+x)^n$ pa u njih staviti $x=0$. Imaćemo

$$f(x)=(1+x)^n\qquad f'''(x)=n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

$$f'(x)=n(1+x)^{n-1}\qquad f^{IV}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)(1+x)^{n-4}$$

$$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}\qquad f^{V}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(1+x)^{n-5}$$

. . . .

ako stavimo $x=0$ u prethodne formule dobijamo

$$f(0)=1\qquad f'''(0)=n(n-1)(n-2)$$

$$f'(0)=n\qquad f^{IV}(0)=n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$f''(0)=n(n-1)\qquad f^{V}(0)=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

. . . .

Zato će koeficienti polinoma $(1+x)^n=f(x)$ biti oblika

$$\text{(II)}\quad a_0=1;\qquad a_1=\frac{1}{1}n;\qquad a_2=\frac{1}{1\cdot2}n(n-1);$$

$$a_3=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}n(n-1)(n-2)$$

. . . .

$$a_n=\frac{n(n-1)(n-2\ldots.3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\ldots.(n-2)(n-1)n}=1$$

i najzad će sam polinom imati oblik

$$\text{(III)}\quad (1+x)^n=1+\frac{1}{1}n\,x+\frac{1}{1\cdot2}n(n-1)x^2+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}n(n-1)(n-2)\ldots.+x^n$$

Ovaj slučaj određivanja koeficienata jednog polinoma koji je dat u obliku stepena linearnog binoma $1+x$, pokazuje nam kako ćemo moći da odredimo njegove koeficiente pomoću potencija x i prirodnog niza brojeva.

Na pr. za $(1+x)^4$ biće premo formuli (III) (ovde je $n=4$)

$$(1+x)^4=1+n\frac{1}{1}x+4\cdot4\frac{1}{1\cdot2}x^2+4\cdot3\cdot2\frac{1}{1\cdot2\cdot3}x^3+4\cdot3\cdot2\cdot1\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4$$

$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4.$$

Formula (III) je u stvari Maclaurin-ova formula za polinom primenjena na nerazvijeni polinom $(1+x)^n$. Formula (III) pretstavlja važan binomni obrazac Newton-a.

1.) **Napomena**. Formula (III) obično se piše

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-1)}{3!}x^3\ldots\ldots+x^n$$

Ali mi pišemo na gore pokazani način prvo zato što se tako vidi da su n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$ izvodi od $(1+x)^n$ za $x=0$ pa je binomni obrazac samo Maclaurin-ova formula u stvari; drugo zato što se vidi uloga prirodnog niza brojeva $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1\cdot2}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$, ... i treće što ćemo to i dalje koristiti u narednom poglavlju pa je dobro odmah usvojiti takav način pisanja.

2.) **Napomena**. U praksi je obično potrebno da se nađe $(a+b)^n$ ali kako je $(a+b)=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$ to je onda $(a+b)^n=\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ što znači da treba najpre naći $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ tj. $(1+x)^n$ gde ćemo x zameniti sa $\frac{b}{a}$, pa pomnožiti sa a^n sve to. To će se videti iz primera $(a+b)^6$

$$(1+x)^6=1+\frac{6}{1}x+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}x^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5+x^6$$

$$(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$$

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^6 = 1+6\frac{b}{a}+15\left(\frac{b}{a}\right)^2+29\left(\frac{b}{a}\right)^3+25\left(\frac{b}{a}\right)^4+6\left(\frac{b}{a}\right)^5+\left(\frac{b}{a}\right)^6$$

$$a^6\left(1+\frac{b}{a}\right)^6 = (a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

3.) **Napomena**. Ako je dato $(1-x)^n$ onda će koeficienti uz neparne izložice biti negativni (jer je $(-x)^3 = -x^3$!) itd. Sem toga $(1-x)^n$ je u stvari $[1+(-x)]^n$ pa se može i to koristiti: mesto x u formuli (III) staviti $-x$. Slično tome $(1+x^2)^n$, $(1-x^2)^n$, $(1+x^3)^n$ itd. razviće se po formuli (III) samo mesto x stavićemo x^2, x^3 itd.

12.) Taylor-ova formula za polinom

Videli smo da za polinom f(x) važi Maclaurin-ova formula

$$1.)\quad f(x) = f(0)+\frac{1}{1}f'(0)x+\frac{1}{1\,2}f''(0)x^3+\frac{1}{1\,2\,3}f'''(0)x\cdots\cdots+\frac{1}{1\,2\,3\ldots n}f^{(n)}(0)x^n$$

lako je izvesti da za $f(x+a)$, gde je konstanta a, da će biti za $x=0$ funkcija i njeni izvodi

$$f(x+a) = f(a),\quad f'(x+a) = f'(a),\quad f''(x+a) = f''(a)\ldots$$

pa će, prema tome Maclaurin-ova formula za polinom $f(x+a)$ biti oblika

$$1.)\quad f(x+a) = f(a)+\frac{1}{1}f'(a)x+\frac{1}{1\,2}f''(a)x^2+\frac{1}{1\,2\,3}f'''(a)x^3\cdots\cdots+$$
$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n}x^n$$

Ako se stavi $x+a=u$ odnosno $x=u-a$ dobijamo

$$2.)\quad f(u) = f(a)+\frac{1}{1}f'(a)(u-a)+\frac{1}{1\cdot2}f''(a)(u-a)^2+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}f'''(a)(u-a)^3.$$
$$\cdots\cdot\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots,n}f^{(n)}(a)(u-a)^n$$

Kako uopšte funkcija ne zavisi od slova već od načina na koji su vezana slova — to mesto u možemo staviti x pa ćemo dobiti

$$3.)\quad f(x) = f(a)+\frac{1}{1}f'(a)(x-a)+\frac{1}{1\cdot2}f''(a)(x-a)^2\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots\ldots n}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

Ova formula (3) pretstavlja Taylor-ovu formulu za polinom. Vidi se da se ona za $x=0$ svodi na Maclaurin-ovu formulu. Videli smo da se Maclaurin-ova formula upotrebljava za izvođenje binomnog obrasca: upravo binomni obrazac nije ništa drugo nego Maclaurin-ova formula primenjena na nerazvijen polinom $(1+x)^n$; Taylor-ova formula ima svoje mnogostruke teorijske i praktične primene od kojih ćemo sad jednu navesti.

Primer. Dat je polinom $f(x) = x^3+4x^2+2x-1$; izračunati koeficiente polinoma $f(x+a)$ kad je $a=5$. Koristićemo formulu 1.) a izračunajmo najpre

$f(x) = x^3+4x^2+2x-1$ $\qquad f(5) = 5^3+4\cdot5^2+2\cdot5-1 = 224$

$f'(x) = 3x^2+8x+2$ $\qquad f'(5) = 3\cdot5^2+8\cdot5+2 = 117$

$f''(x) = 6x+8$ $\qquad f''(5) = 6\cdot5+8 = 38$

$f'''(x) = 6$

Sada formula 1.) ima oblik

$$f(x+5) = 234+\frac{117}{1}x+\frac{38}{1\cdot2}x^2+x^3 = 234+117x+19x^2+x^3$$

Kad imamo funkciju f(x) pa je dato da se izračuna $f(x+a)$ znači mesto x u polinomu x^3+4x^2+2x-1 treba da bude $(x+5)$ dakle $f(x+5) = (x+5)^3+4(x+4)^2+2(x+5)-1$. Međutim, ovo bi računanje bilo mnogo dnže nego što smo računali pomoću Taylar-ove formule. Računanje $(x+5)^3 = 4(x+5)^2+2(x+5)-1$ dalo bi nam isti rezultat posle stepenovanja i redukcije.

14.) Maclaurin-ova formula za makakvu funkciju

Iz prethodnih izlaganja videli smo da Maclaurin-ova formula važi za polinom. Međutim primena ove formule moguća je i za ostale funkcije pod izvesnim uslovima. Da je to zaista moguće pokazaće ovo izlaganje. Neka je data funkcija f(x) koja je neprekidna u intervalu $-\alpha < x < \alpha$. Pokušajmo da predstavimo ovu funkciju za sad ovako

$$1.)\quad f(x) = f(0)+\frac{1}{1}f'(0)x+\frac{1}{1\cdot2}f''(0)x^2+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}M(x)\cdot x^3$$

Naravno da ovo pretpostavlja da su bar prva dva izvoda f'(x) i f''(x) neprekidna u istom intervalu kao i sama funkcija. Ostaje da odredimo funkciju M(x). Da bi ovo izveli posmatrajmo jednu drugu funkciju koja sadrži i funkciju f(x) u sebi a čiji je oblik

$$2.)\quad F(x) = f(x)-f(0)-\frac{1}{1}f'(0)x-\frac{1}{1\cdot2}f''(0)-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}M(x_0)x^3$$

gde je $M(x_0)$ vrednost funkcije $M(x)$ za $x = x_0$, a samo x_0 je vrednost između 0 i α. Odmah se vidi da funkcija $F(x)$ ima dve vrednosti za koje postaje jednaka nuli — a to su $x = 0$ i $x = x_0$. Za $x = 0$ odmah se to vidi iz oblika funkcije $F(x)$ (kad se stavi $x = 0$ ona se poništava); za $x = x_0$ isto dobijamo kad $f(x)$ zamenimo odgovarajućim izrazom na desnoj strani formule 1.) — u funkciju $F(x)$ i u ovoj smenimo x sa x_0.

Ako se funkcija $F(x)$ diferencira onda $F'(x)$ — pošto pretstavlja izvodnu funkciju od $F(x)$ — ima bar jedno $x = x_1$ (između $x = 0$ i $x = x_0$) za koje je $F'(x) = 0$ (Rolle-ova teorema).

Sama funkcija $F'(x)$ ima oblik

3.) $$F'(x) = f'(x) - f'(0) - \frac{1}{1} f''(0)\,x - \frac{1}{1\cdot 2} M(x_0)\,x^2$$

Vidi se opet da vrednost $x = 0$ poništava funkciju $F'(x)$ (to se vidi kad se u formulu 3.) stavi $x = 0$) a sad smo videli da je $x = x_1$ druga vrednost koja je takođe poništava.

Već kod funkcije $F'(x)$ uviđamo da je prilikom diferenciranja isčezlo $f(0)$ — tako će prilikom drugog diferenciranja izčeznuti $f'(0)$ a prilikom trećeg $f''(0)$ — da najzad ostane

4.) $$F'''(x) = f'''(x) - M(x_0)$$

Kako je $F'(x)$ imalo dve vrednosti od x za koje se poništavalo — tako će imati $F''(x)$ opet dve (što nije teško utvrditi) i tako redom.

Jedna od ovih vrednosti koja poništava redom funkcije $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ je uvek $x = 0$.

Tako će za $F'''(x)$ biti svakako (pored $x = 0$) još jedno $x_3 = \delta x_0$ (gde je $0 < \delta < 1$) za koje je

$$F'''(\delta x_0) = 0$$

i onda prema formuli 4.) imamo

5.) $$f'''(\delta x_0) = M(x_0)$$

Kako se može formirati bezbroj funkcija $F(x)$ u kojima će se menjati samo za razne x_i vrednost $M(x_i)$, to se onda može napisati uopšte za sve vrednosti x u intervalu $0 < x < x_0$

6.) $$f'''(\delta x) = M(x)$$

Zato će formula 1.) moći da se napiše definitivno

7.) $$f(x) = f(0) + \frac{1}{1} f'(0)\,x + \frac{1}{1\cdot 2} f''(0)\,x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(\delta x)\,x^3$$

Razume se da bi se ovo moglo na isti način izvesti ako bi hteli više članova formule — na pr. za n članova biće

8.) $$f(x) = f(0) + \frac{1}{1} f'(0)\,x + \frac{1}{1\cdot 2} f''(0)\,x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0)\,x^3 \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots n} f^{(n)}(\delta x)\,x^n$$

Formula 8.) pretstavlja Maclaurin-ovu formulu za makakvu funkciju i važi za svaku funkciju za koju — niti sama funkcija niti koji od njenih izvoda — ne postaju beskrajni niti stalno neodređeni za $x = 0$.

Zato na pr. na funkcije $\frac{1}{x^2}$, $\ln x$, $\sqrt{x}$ ne može da se primeni Maclaurin-ova formula.

Primedba. Primetimo da ako funkcija ima neograničen broj izvoda i ako poslednji član formule

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\delta x)\,x^n$$

teži nuli pri $n \to \infty$ onda imamo beskrajni red

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1} f'(0)\,x + \frac{1}{1\cdot 2} f''(0)\,x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0)\,x^3 \cdots\cdots$$

Izraz obeležen sa R naziva se ostatak i koristi se za mnoga praktična i teorijska rasmatranja. Ovaj oblik ostatka zove se Lagrange-ov i najčešće je u upotrebi. Međutim u praksi se najčešće koriste prva tri člana reda odnosno formule. Na taj način sve se funkcije približno izražavaju (aproksimiraju) parabolama čiji se koeficijenti menjaju od funkcije do funkcije. Za najveći broj tehničkih potreba u računima imamo dakle približno

$$f(x) \approx f(0) + \frac{1}{1} f'(0)\,x + \frac{1}{1\cdot 2} f''(0)\,x^2$$

Napomena. Ako se formula 8.) primeni na funkciju $f(a+h)$ gde je a konstanta i h promenljiva onda imamo najpre

$$\frac{df}{dh} = f'(a+h)(a+h)' = f'(a+h)$$

$$\frac{d^2f}{dh^2} = \frac{df'}{dh} = f''(a+h)(a+h)' = f''(a+h)$$

....

prema formuli 8.) treba staviti $h = 0$ pa onda formula 8.) postaje

9.) $$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1} f'(a)\,h + \frac{1}{1\cdot 2} f''(a)\,h^2 \cdots\cdots + R_1$$

gde je R_1 ostatak.

Ako se izvrši smena $a+h=u$ odnosno $h=u-a$ onda formula 9.) postaje

$$f(u)=f(a)+\frac{1}{1}f'(a)(u-a)+\frac{1}{1\cdot 2}f''(a)(u-a)^2\cdots\cdots+R(u)$$

Kako se funkcija f može izraziti slovom x — pošto funkcija ne zavisi od slova — to ćemo pisati

$$10.)\quad f(x)=f(a)+\frac{1}{1}f'(a)(x-a)+\frac{1}{1\cdot 2}f''(a)(x-a)^2\cdots\cdots+R(x)$$

Formula 10.) zove se Taylor-ova i razlikuje se od Maclaurin-ove po tome što se u funkciju i njene izvode mesto $x=0$ stavlja $x=a$. Jasno je da je Maclaurin-ova formula specijalan slučaj Taylor-ove ali je ipak daleko više u upotrebi Maclaurin-ova. Obe formule igraju znatnu ulogu i u teorijskim izvođenjima i u praktičnim izračunavanjima. Mi ćemo upotrebljavati isključivo Maclauren-ovu formulu. Primetimo da funkcije $\frac{1}{x^n}$, $\ln x$, $\sqrt{x}$ koje se ne mogu razviti u Maclaurin-ov red — da se mogu razviti u Taylor-ov.

Primedba. Važno je primetiti da se Maclaurin-ovi redovi mogu sabirati, oduzimati kao i množiti i deliti potencijama od x. Isto tako dva reda se mogu množiti. Treba napomenuti da se mora voditi računa o intervalu konvergencije oba reda što povlači ograničenja za red koji se dobija množenjem oba reda. Sem ovog se redovi mogu diferencirati Tako — kako je $\cos x = (\sin x)'$ — dobijamo red za $\cos x$ diferenciranjem reda za $\sin x$. To se može proveriti u narednom odeljku. U dokaz svega ovog — vrlo korisnog za praktičan rad — nećemo se upuštati ali treba da dobro uočimo ovu primedbu.

15. Maclaurin-ove formule za osnovne funkcije a^x, $\sin x$, $\cos x$

Prvo ćemo razviti osnovne funkcije a^x, $\sin x$, $\cos x$, po Maclaurin-ovoj formuli. Mesto a^x razvićemo najpre $f(x)=e^x$. Napišimo Maclaurin-ovu formulu

$$1.)\quad f(x)=f(0)+f'(0)\frac{1}{1}x+f''(0)\frac{1}{1\cdot 2}x^2+f'''(0)\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\cdots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}x^n f^n(\delta x)$$

$$0<\delta<1$$

i onda imamo

$$f(x)=e^x,\quad f'(x)=e^x,\quad f''(x)=e^x,\quad f'''(x)=e^x$$

$$f(0)=e^0=1,\quad f'(0)=e^0=1,\quad f''(0)=e^0=1,\quad f'''(0)=e^0=1$$

pa zato dobijamo za e^x Maclaurin-ovu formulu

$$2.)\quad e^x=1+\frac{1}{1}x+\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\cdots\cdots\frac{e^{\delta x}}{1\cdot 2\cdot 2\ldots n}x^n$$

Ovo je Maclaurin-ova formula za funkciju e^x.

Ako se traži da se razvije e^{-x}, $e^{\frac{x}{a}}$, e^{x^n}, e^{mx} možemo postupiti kao i kod razvijena e^x — ali nije potrebno, treba samo u formuli za e^x mesto x staviti $-x$, $\frac{x}{a}$, $-\frac{x}{a}$, x^n (n ceo broj) mx. Na ovaj način jednu dobijenu formulu možemo višestruko da iskristimo. Funkciju a^x možemo opet pomoću formule 2.) da razvijemo jer je $a=e^{\ln a}$ pa je $a^x=e^{x\ln a}$ i onda u 2.) treba mesto x staviti $x\ln a$.

Sad ćemo razviti $\sin x$; po obrascu 1.) imamo

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1}f'(0)x+\frac{1}{1\cdot 2}f''(0)x^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)x^3\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3..n}x^n f^n(\delta x)$$

i za naš slučaj je

$$f(x)=\sin x,\quad f'(0)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,\quad f^{IV}(x)=\sin x$$

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad f^{IV}(0)=0$$

pa će biti (vidi se pravilnost: neparni izvodi samo postoje!)

$$(3)\quad \sin x=x-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7\ldots.+R_n.$$

Lako se uviđa da će za $\cos x$ biti

$$(4)\quad \cos x=1-\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6\cdots+R_n$$

Pomoću formula (3) i (4) možemo razviti i $\sin mx$, $\sin\frac{x}{m}$, $\sin x^n$, $\cos mx$, $\cos\frac{x}{m}$, $\cos x^n$ samo ćemo mesto x staviti odgovarajući argumenat.

Primedba. Na ovaj posredan način ne mogu se u Maclaurin-ovu formulu razviti funkcije čiji argument nije Ax^n (n ceo broj). Na pr. funkcija

$$e^{\sin x}=1+\frac{1}{1}\sin x+\frac{1}{1\cdot 2}(\sin x)^2\ldots.+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}(\sin x)^n f^{(n)}(\delta\sin x)$$

ovo je zaista jedna formula — ali nije Maclaurin-ova jer da bi to bilo mora imati cele stepene x. Međutim funkcije e^{-x}, $e^{\frac{x}{a}}$, $e^{-\frac{x}{a}}$, e^{mn}, e^{x^n}, e^{mx^n} mogu da se razviju pomoću formule (2) zato što su njihovi argumenti isto Ax^n pa (2) ostaje sa celim stepenima. Ovo važi i za sve ostale funkcije pa i za $\sin x$ i $\cos x$.

Dakle od osnovnih funkcija razvili smo a^x, sin x, cos x; moguće je razviti sve ostale funkcije (izuzev ln x jer za $x \to 0$ imamo $\ln x \to \infty$) po formuli (1), ali mi tražimo što jednostavnije načine pa ćemo ostale funkcije ostaviti za docnije kad ćemo pokazati vrlo jednostavne načine koji nam uštedjuju dug rad. Sad ćemo samo ukazati na to da se funkcije tipa

$$\frac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3}, \qquad \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$$

mogu razviti u Maclaurin-ovu formulu koristeći binomnu formulu

$$(1+x)^n = 1 + \frac{1}{1} n x + \frac{1}{1 \cdot 2} n(n-1) x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} n(n-1)(n-2) x^3 \ldots\ldots$$

jer smo kazali da je binomni obrazac — Maclaurin-ova formula pa prema tome se bez izakve ograde primenjuje na pomenute funkcije. U gornjim primerima je

$$n = -3, \qquad n = \frac{1}{2}, \qquad n = -\frac{1}{3}.$$

Isto se tako može razviti u beskrajne redove $\sqrt[m]{(1+x^n)^p}$ gde su m, n, p, celi brojevi jer je $(1+x^n)^{\frac{p}{m}}$ samo mesto x stavimo x^n. Tako dobiveni redovi zovu se binomni redovi.

Zadaci za vežbanje

Razviti u Maclarin-ov red ove funkcije

$$\frac{e^x - 1}{x}, \quad \frac{1}{(1+x)^3}, \quad \sqrt{1+x}, \quad e^{\frac{x}{a}}, \quad e^{-\frac{x}{a}}, \quad \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$e^{3x}, \quad e^{-x^2}, \quad \sqrt[3]{1+x^2}, \quad \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sin\frac{x}{a}, \quad \sin x \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x - 1}{x^2},$$

16. Euler-ova i Moivre-ova formula

Ako se u redu za e^x (ovde je baš podesno uzeti beskrajni red![1])

$$e^x = 1 + \frac{1}{1} x + \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \ldots\ldots$$

mesto x stavi[1]) $x = i$ i vodi računa o tome da je

$$i = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i$$

[1]) Može se dokazati konvergencija reda za e^x i za slučaj kompleksne promenljive — no u to se nećemo upuštati i koristićemo ovaj red bez ovog dokaza.

dobijamo izdvajajući članove sa i i bez njega

$$e^{xi} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 \ldots\ldots +$$

$$+ i\left(x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5\right)$$

članovi bez i pretstavljaju u stvari red za cosx a on sa i red za sinx pa je zato

$$(1.) \qquad e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

ova se formula zove Euler-ova formula i pokazuje jedan zanimljiv odnos koji je proizašao iz logičkih konzekvenci kad se uvede konvencija $\sqrt{-1} = i$.

Ako se u formuli (1.) stepenuje i leva i desna strana sa n imamo

$$(2.) \qquad e^{nxi} = (\cos x + i \sin x)^n$$

ali e^{nxi} po formuli (1.) može da bude — mesto x stavljajući nx

$$(3.) \qquad e^{nxi} = \cos nx + i \sin nx$$

Izjednačujući desne strane formula (2.) i (3.) dobijamo

$$(4.) \qquad (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Formula (4.) još zanimljivija nego Euler-ova, zove se Moivre-ova. Iz nje se za n (razni celi brojevi) dobijaju izdvajajući članove sa i i bez njega cos i sin n-to strukog ugla. To je najbrži način!

Primer. Pomoću Moivre-ove formule izvesti obrasce za sin 2x i cos 2x. Po formuli Moivre-a imamo

$$\cos 2x + i \sin 2x = (\cos x + i \sin x)^2$$

pa će biti

$$\cos 2x + i \sin 2x = \cos^2 x + 2 i \sin x \cos x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x + i \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + i\, 2 \sin x \cos x$$

Izdvajajući sa leve i desne strane realni deo (bez i) i imanigarni (sa i) imamo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

i obe dobivene formule odgovaraju poznatim trigonometriskim obrascima.

Zadatak. Pomoću Moivre-ove formule izvesti obrasce za $\sin 3x$, $\sin 4x$, $\sin 5x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, $\cos 5x$.

II. INTEGRALNI RAČUN

1.) Integral kao primitivna funkcija — osobine neodređenog integrala. 2.) Tablica integrala. 3.) Integracija jednog tipa neodređenih integrala. 4.) Parcijalna integracija. 5.) Integracija smenom — nekoji integrali. 6.) Integracija najprostijih racionalnih funkcija. 7.) Integracija razvijanjem u red. 8.) Razvijanje u red pomoću integracije. 9.) Određeni integral — izračunavanje površine. 10.) Određeni integral kao granica. 11.) Primeri upotrebe određenog integrala: dužina luka, površina i zapremina obrtnih tela. 12.) Približna numerička integracija; metoda trapeza i Simpsonova metoda

1.) Integral kao primitivna funkcija

Poznavanje tablice izvoda omogućava nam ne samo da nađemo izvode osnovnih funkcija nego i da nađemo prvobitne funkcije kad su nam poznati izvodi njihovi. Prvobitna funkcija zove se *neodređeni integral* ili primitivna funkcija. Dakle sama operacija integraljenja, po ovome, je samo vraćanje na prvobitnu funkciju kad znamo izvod. U ovoj činjenici je osnova integraljenja.

Na pr. ako je $y' = \frac{1}{x}$, po tablici izvoda. znamo da je $y = \ln x$.

Znamo da je $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Možemo izdvojiti promenljive $dy = \frac{1}{x} dx$ i sad mesto izvoda imao diferencijal dy ali u suštini vodimo računa o izrazu $\frac{1}{x}$ što je izvod od $\ln x$.

Oznaka
$$y = \int \frac{1}{x} dx$$
nam kazuje samo da znamo izvod $\frac{1}{x}$ (napisan je diferencijal funkcije $\frac{1}{x} dx$) i da se vraćamo na primitivnu funkciju.

Tako na pr. $y' = a^x \ln a$ ako hoćemo da vratimo na prvobitnu funkciju pisaćemo $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$
ili
$$dy = a^x \ln a \, dx$$
što je po tablici izvoda
$$y = \int a^x \ln a \, dx = a^x + C.$$

Dodali smo ovu konstantu C zato što ona pri diferenciranju uvek iščezne (pa ju je primitivna funkcija imala). Ova konstanta se zove *integraciona konstanta* a ceo izraz na desnoj strani pod znakom integrala neodređeni integral. Funkcija pod znakom integrala zove se integrand.

Sad ćemo videti neke osobine neodređenog integrala, koje proizilaze iz tog što je integracija shvaćena kao obrnuta radnja diferenciranju.

1°. Znak diferenciranja d i znak integralenja $\int$ primenjeni na jednu istu funkciju jedan za drugim (kojim bilo redom) ostavljaju je nepromenjenu; na pr.
$$d \int \frac{1}{x} dx = \int d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

2°. Konstanta (koja množi integrand) može se napisati pred znak integrala na pr.
$$\int \frac{m}{x} dx = m \int \frac{1}{x} dx = m \log x + C.$$

3°. Integral zbira jednak je zbiru integrala na pr.
$$\int \left(e^x + \frac{1}{x} + \cos x\right) dx = \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \cos x \, dx = e^x + \log x + \sin x + C$$
naročito u našim daljim izlaganjima, koristićemo navedene osobine 2° i 3°.

Napomene. 1.) Ako je izvod $y' = x^2$ znači da je funkcija x^3 (pošto se pri diferenciranju oduzelo 1 y eksponentu) ali znamo da bi tada izvod bio $3x^2$; pošto ovog 3 u izvodu nema — znači da je ono skraćeno a to može biti ako je funkcija $\frac{x^3}{3} + C$. Isto tako za $y' = x^4$ biće $y = \frac{x^5}{5} + C$ i uopšte ako je $y' = x^n$ onda je $y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Ako je dat izvod $y' = a x^n$ ($a = \text{const.}$) onda je $\frac{dy}{dx} = a x^n$ ili $dy = a x^n dx$ pa pišemo:
$$y = \int a x^n dx = a \int x^n dx = a \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Slično ovome je $\int e^{mx} dx = \int \frac{m}{m} e^{mx} dx = \frac{1}{m} \int m e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx} + C.$

2.) Ako je izvod $y' = \sin x$ onda će biti $\frac{dy}{dx} = \sin x$, $dy = \sin x \, dx$ pa je onda
$$y = \int \sin x \, dx = (-1) \cdot (-1) \int \sin x \, dx = -\int -\sin x \, dx = -\cos x + C.$$

Bio nam je potreban znak „—" jer znamo da je $-\sin x$ izvod od $\sin x$, ali mi smo dobili to „—" na taj način što smo 1 (koje se uvek može napisati pred znak integrala) pretstavili kao $(-1) \cdot (-1)$ pa smo (-1) stavili pod znak integrala a drugo (-1) ostavili ispred znaka $\int$. Ovo ćemo uvek činiti kad nam je potreban znak „—", što je u stvari (—1), a i druge konstante. Na pr.

$$y = \int a^x\,dx = \frac{\ln a}{\ln a}\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\int a^x \ln a\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C.$$

Sad ćemo neodređeni integral pretstaviti u jednoj formi koju ćemo docnije koristiti. Neka je

$$1.)\qquad y = \int f(x)\,dx$$

jedna funkcija pretstavljena integralom. Ta funkcija zavisi od x i neka je $y = F(x)$; funkcija pretstavljena integralom neka je, posle integracije $\varphi(x) + C$, zato formula 1.) postaje

$$2.)\qquad F(x) = \varphi(x) + C$$

Kako x uzima razne vrednosti, biće i takvih za koje je $F(x) = 0$; za tu vrednost $x = a$, $F(x)$ postaje nula i imamo

$$2'.)\qquad 0 = \varphi(a) + C$$

a odavde

$$3.)\qquad C = -\varphi(a)$$

pa formulu 2.) možemo napisati

$$4.)\qquad F(x) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Formula 4.) pokazuje: da je tražena funkcija $F(x)$ pretstavljena kao razlika *dveju funkcija istog oblika* pri čemu u jednoj figuriše x a u drugoj ona vrednost $x = a$ koja poništava samu funkciju $F(x)$.

Formulu 4.) možemo kraće napisati ovako

$$5.)\qquad F(x) = \Big|\varphi(x)\Big|_a^x$$

Ovo je vrlo važan način pretstavljanja integracione konstante i neodređenog integrala.

2.) Tablica integrala

U početku našeg izlaganja o integralu napomenuli smo da je osnova operacije integraljenja poznavanje tablice izvoda. U prvom primeru još nismo pisali nikakav znak — već smo prosto naglasili samo da se vraćamo na prvobitnu funkciju. Ali kako smo uveli znak integrala zgodno je napisati

sve te integrale sa znacima da bi se navikli na **upotrebu** tog znaka. Kratkoće radi izostavićemo pisanje konstante

$y = \int a^x\,dx$	$y = \frac{1}{\ln a}a^x$
$y = \int e^x\,dx$	$y = e^x$
$y = \int \frac{1}{x}\,dx$	$y = \ln x$
$y = \int x^n\,dx$	$y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$y = \int \cos x\,dx$	$y = \sin x$
$y = \int \sin x\,dx$	$y = -\cos x$
$y = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$y = \operatorname{tg} x$
$y = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$y = -\operatorname{cotg} x$
$y = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$y = \arcsin x$
$y = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$y = \arccos x$
$y = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$y = \operatorname{arc\,tg} x$
$y = -\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$y = \operatorname{arc\,cotg} x$

3. Integracija jednog tipa neodređenih integrala

Nekad je moguće čitave izraze pod znakom integrala smatrati kao izvode proizvoda, količnika ili neke složene **funkcije. Na pr.** za integral

$$\int (x^2\cos x + 2x\sin x)\,dx$$

izraz u zagradi smatraćemo kao izvod od $x^2 \sin x$ — **dakle kao izvod** proizvoda i zato će biti

$$\int (x^2\cos x + 2x\sin x)\,dx = x^2\sin x + C$$

slično će biti i sa integralom

$$\int \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx$$

pri čemu ćemo izraz $\frac{1-\ln x}{x^2}$ smatrati kao izvod od $\frac{\ln x}{x}$ i onda je integral

$$\int \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx = \frac{\ln x}{x} + C$$

Ali makoliko da je ovo korisno, nije tako lako raspoznati ove slučajeve — ma da treba uvek pokušati prvo ovaj elementaran način. Međutim među izvodima složenih funkcija ima ih koji zaslužuju posebnu pažnju. Navešćemo jedan od njih

Znamo da je, kad je $y = \ln f(x)$

1.) $$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

i odavde $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ili $dy = \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ odakle je

2.) $$y = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C.$$

Iz formule 2.) vidi se da je brojitelj integranda izvod imenitelja: ako taj uslov zadovoljava neki integrand onda je jasno da se integral može napisati kao $\ln f(x) + C$.

Na pr. integral

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$$

baš pretstavlja ovaj slučaj jer je *funkcija u brojitelju izvod funkcije u imenitelju* pa će biti

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx = \ln(x^2-3x+1) + C.$$

Isto tako za integral $\int \frac{x^2}{x^3-1}$ imamo $\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{3}{3}\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x^3-1) + C = \ln(x^3-1)^{\frac{1}{3}} + C = \ln\sqrt[3]{x^3-1} + C.$$

Još ćemo navesti ove primere

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{(-1)(-1)\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln \sin x + C.$$

Vežbanja. Naći funkcije koje su pretstavljene ovim integralima.

$$\int \frac{x^3}{x^4+a}\,dx, \quad \int \frac{x}{a^2+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx \quad \left(\text{napisati } \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}\right)$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx \quad \left(\text{napisati } \frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx, \int \frac{1}{\sin x}\,dx, \quad \left(\text{napisati } \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)$$

$$\int \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}\,dx.$$

4. Parcijalna integracija

Znamo da kad se diferencira jedan proizvod da će biti, prema pravilu za diferenciranje proizvoda

1.) $$d(uv) = u'v\,dx + uv'\,dx$$

Međutim ako se leva i desna strana ovog identiteta integrale dobijemo

2.) $$\int d(uv) = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

Kako se zna da znak diferenciranja i zrak integraljenja uzastopno primenjeni na jednu funkciju — daju samu nepromenjenu funkciju — to će biti na levoj strani samo uv dakle

3.) $$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

Iz odnosa (3.) moguće je jedan od integrala izraziti drugim i funkcijom uv tako da će biti

4.) $$\int u'v\,dx = u\cdot v - \int uv'\,dx$$

Odnos (4.) kazuje da je moguće jedan integral naći ako možemo da pretstavimo njegovu podintegralnu funkciju kao proizvod ($u'v$) izvesne funkcije (v) i izvoda druge funkcije (u'), a pri čemu nam je moguće da izračunamo drugi integral u kome bi u integrandu navedene funkcije izmenile uloge ($u \cdot v'$).

Ovaj način integralenja zove se parcijalna integracija; navedenu metodu pokazaćemo na integralima.

Treba izračunati $\int x \sin x \, dx$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x \, dx}_{v'} = \underbrace{-x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v} - \int \underbrace{-\cos x}_{v} \underbrace{(x)' dx}_{u'}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

uzimamo da je $v = x$ jer je posle $v' = 1$ pa se drugi integral uprošćava. Kod integrala gde ima x^n tako treba raditi jer se u drugom integralu stepen snižava; kad je u pitanju $\ln x$ njega treba uzimati kao v jer je posle $v' = \frac{1}{x}$ što može u velikom broju slučajeva koristiti. Na pr.

$$\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \cdot dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Mi ćemo koristiti metodu parcijalne integracije u izvesnoj meri — samo nekoliko važnijih tipova integrala čiji su integradni

$x^n \cdot \sin x$, $x^n \cdot \cos x$, $x^n e^x$, $x^n \ln x$, $\arc\sin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$,

Kratko rečeno uputstvo za parcijalnu integraciju (vidi se iz 4!) glasi: jedna funkcija (od dveju iz integranda) se integrali zatim u narednom integralu ostaje integraljena funkcija nepromenjena a druga se diferencira.

Napomena. Kod integracije $\int x^2 \sin x \, dx$ neće biti moguće odjednom dobiti primitivnu funkciju već ćemo dobiti integral tipa $\int x \cos x \, dx$ pa tek posle integracije ovog dobićemo definitivno primitivnu funkciju. Slično važi i za integral

$$\int x^n \sin x \, dx \quad \text{i} \quad \int x^n \cos x \, dx.$$

Zadaci za vežbanje

1.) $\int xe^x dx$ 2.) $\int x \cos x \, dx$ 3.) $\int x^2 \cos x \, dx$

4.) $\int x \ln x \, dx$ 5.) $\int x^2 e^x dx$ 6.) $\int x \sqrt{1 - x^2} dx$

7.) $\int xe^{-x} dx$ 8.) $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$ 9.) $\int \arcsin x \, dx$

10.) $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$ 11.) $\int \arccos x \, dx$ 12.) $\int \operatorname{arc\,cotg} x \, dx$

13.) $\int x^n \ln x \, dx$

Integrali $\int \arcsin x \, dx$ i $\int \arccos x \, dx$ lako se integrale: $v = \arcsin$ $u' = 1$ (isto za $\arccos x$) pri čemu se integrand integrala $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ smatra kao izvod složene potencije jer je $(-\sqrt{1 - x^2})' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ slično se postupa i kod $\int \operatorname{arc\,tg} x \, sx$, $\int \operatorname{arc\,cotg} x \, dx$ pri čemu je $v = \operatorname{arctg} x$ i $u' = 1$ a integral $\int \frac{x}{1 + x^2} dx$ je proučen y u odeljku 3. 10. U navedenim slučajevima uzima se uvek za u ona funkcija koja se lakše integrali osim u 6. i 8 zad.

Primedba. Od znatnog broja integrala koji se mogu integraliti parcijalnom integracijom — dva integrala zaslužuju posebnu pažnju jer se često javljaju u izračunavanjima — to su $\int \sin^2 x \, dx$. $\int \cos^2 x \, dx$. Primenimo parcijalnu integraciju na $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cos x \, dx$ pa imamo

$$\int \cos x \cos x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx$$

dakle

1.) $$\int \cos^2 x \, dx - \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x$$

Međutim iz trigonometrijske formule

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

množenjem sa dx i integraljenjem dobijamo

2.) $$\int \cos^2 x \, dx + \int \sin^2 x \, dx = x$$

U stvari imamo sistem jednačina

$$\int \cos^2 x \, dx - \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x$$

$$\int \cos^2 x \, dx + \int \sin^2 x \, dx = x$$

Iz gornjeg sistema prvo sabiranjem a onda oduzimanjem dobijamo oba integrala.

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x)$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)$$

5. Integracija najprostijih racionalnih funkcija

Sad ćemo izložiti još jednu metodu koju ćemo prikazati na dva osnovna slučaja.

Integral čiji je integrand $\frac{1}{x(x+1)}$ dobija se ovako

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln x - \ln(x+1)$$

$$+ C = \ln\frac{x}{x+1} + C.$$

Kao što se vidi iskoristili smo algebarski identitet $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Ako je integrand $\frac{1}{x(x-1)}$ koristimo $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$. Slično će biti i sa integralom $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C = \frac{1}{2}[\ln(x-1) -$$

$$-\ln(x+1)] + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + C = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$$

Veliki broj racionalnih funkcija može se ovakvim i sličnim načinima integraliti — ali ima u tome raznih ograničenja pa smo se zadržali samo na ova dva slučaja.

6. Integracija smenom.

U parcijalnoj integraciji upotrebljavamo znanje osnovnih integrala iz tablice integrala — to je najčešće. Međutim, ako nije moguće uopšte upotrebiti znanje osnovnih integrala i dosadašnjih metoda mogu se čitavi izrazi smatrati kao promenljiva i njen diferencijal. Na pr.

$\int 2x\cos(x^2+1)\,dx =$ zadati integral

$\int \cos u \cdot du =$ izvršili smo smenu $x^2+1 = u$ odatle* $2x\,dx = du$

*) Prilikom diferenciranja najzgodnije je postupati ovako: nalaziti izvod svake promenljive i množiti je njenim diferencijalom. Na pr. $u^2x + x = x^2 + 1$ biće $2ux\,du + u^2\,dx + dx = 2x\,dx$ pri čemu treba još iz polazne smene izračunati x.

$\sin u + C =$ dobili smo integral

$\sin(x^2+1) + C$ vratili smo se na staru promenljivu.

na pr. integral sa integrandom $\frac{1}{x^2-25}$ treba napisati

$$\int \frac{1}{x^2-25}\,dx = \int \frac{\frac{1}{25}}{\frac{x^2}{25}-1}\,dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^2-1}\,dx$$

i sad izvršiti smenu $\frac{x}{5} = u$.

Isto tako za integral sa integrandom $\frac{1}{x^2-6x-7}$ imamo $\int \frac{1}{x^2-6x-7}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{x^2-6x+9-97}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)^2-16}\,dx = \int \frac{\frac{1}{16}}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2-1}\,dx$$

pa treba izvršiti smenu $\frac{x-3}{4} = u$. Slično će biti i kod

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{1}{x^2+4x+4-4+13}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{9}}{\left(\frac{x+2}{9}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx$$

pa onda izvršiti smenu $\frac{x+2}{3} = u$. Dakle u oba poslednja slučaja dopunjavali smo prva dva člana do potpunog kvadrata.

Veliki broj primera moguće je rešiti na ovaj način i ovo je najuobičajenija metoda rešavanja komplikovanijih integrala i zovu se *metoda smene*. Iako se ne mogu dati sigurna uputstva kad treba koju smenu upotrebiti — ipak se može smenjivati uvek najkomplikovaniji izraz (ili onaj koji najviše pada u oči) novom promenljivom!

Vežbanja.

$\int \frac{4x+5}{2x+1}\,dx$ (smena $2x+1 = u$)

$$\int \frac{3x-2}{4x+1}\,dx, \quad \int \frac{x^2-x+1}{x+1}\,dx \qquad (\text{smena } x+1=u, \ x=u-1)$$

$$\int \frac{(x+1)^3}{(2x-3)^2}\,dx, \quad \int \frac{(2x-1)^2}{(4x-3)^3}\,dx, \quad \int \frac{\ln x}{x} \qquad (\text{smena } \ln x = u)$$

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx, \quad \int \frac{1}{e^x-1}\,dx,$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-9x-7}\,dx, \quad \int \frac{x-1}{x^2+3x+1}\,dx \left[\frac{x-1}{x^2+3x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-2}{x^2+3x+1} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2}\,\frac{2x+3-3-2}{x^2+3x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+3}{x^2+3x+1} - \frac{5}{2}\,\frac{1}{x^2+3x+1}\right]$$

$$\int (4x+5)\,e^{3x-2}\,dx \qquad (\text{smena } 3x-2)$$

$$\int \sqrt[n]{1+mx}\,dx \qquad (\text{smena } 1+mx=u)$$

$$\int \frac{1}{x^2-2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2-10x+24}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (1-x^2=u).$$

Primedba. Navedimo nekoliko integrala koji se dosta često sreću Integrali

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

mogu se lako integraliti smenom $x = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$.

Takođe druga dva, njima srodna integrala

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

sličnom smenom $x = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ privode se integraciji.

Najzad što se tiče dva integrala iz ove grupe

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

odmah u poslednjem upoznajemo tablični integral a predposlednji se lako integrali smenom $x = \sin u$ (ili $x = \cos u$) — naravno da ova smena važi za $x < 1$ jer je $\sin u < 1$ a to i jeste od interesa pošto za $x > 1$ obe funkcije pod znakom integrala u realnoj oblasti ne postoje.

Napomenimo da se u konačnoj formi ne mogu dati integrali onih funkcija koje pod kvadratnim korenom sadrže polinom stepena višeg od drugog.

Na pr. $\int \sqrt{1+x^3}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^5}}\,dx,$

ne mogu se integraliti u konačnoj formi.

7.) Integracija razvijanjem u red

Ima integrala koji se vrlo teško integrale pokazanim metodama, a ima čak i takvih z. koje se zna da se ne mogu uopšte integraliti u konačnoj formi (tj. da se pronađe primitivna funkcija). Takvi su na primer integrali

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Ove integrele dobiamo razvijajući (u red Maclaurin-a) njihov integrand i zatim integrišući desnu stranu, član po član, dobijamo integral u obliku Maclaurin-ovog reda

Uzmimo na primer $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\cdots$$

razvijamo funkciju $\sin x$ u Maclaurin-ov red

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \cdots$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = c + \int dx - \int \frac{1}{3!}x^2\,dx + \int \frac{1}{5!}x^4\,dx - \frac{1}{7!}\int x^6\,dx \cdots\cdots\cdots$$

Podelili smo i levu i desnu stranu sa dx i integraliti. Izvršili smo integraciju (C integraciona konstanta).

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = c + x - \frac{1}{3!}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{7!}\,\frac{x^7}{7} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Poslednja formula pokazuje da je integral na levoj strani pretstavljen beskrajnim redom na desnoj i mesto Integrala možemo koristiti ovaj red. Naravno, uvek je bolje ako može da se pronađe integral u konačnoj formi. — Ali, ako to nije moguće moramo pribeći i ovome načinu.

Vežbanja. Integraliti razvijanjem u red

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx \text{ (razviti prvo } \cos x \text{ u red Maclaurin-a)} \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int e^{-x^2}\,dx.$$

8. Razvijanje funkcija u Maclaurin-ov red integracijom

Iz prethodnog odeljka videli smo da se može integraliti pomoću razvijanja u red; sad ćemo to primeniti na funkcije čiji se integral može dobiti u konačnoj formi: s leve strane dobijamo funkciju, a s desne strane red — u koji je ta funkcija razvijena. Pokazaćemo nekoliko primera osnovnih funkcija. Poznat nam je obrazac za zbir geometrijske progresije kad je $|q| < 1$, to je

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \cdots\cdots$$

ili kad je q negativno

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 \cdots\cdots$$

Ako mesto q stavimo x imamo

$$1.) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 \cdots\cdots$$

$$2.) \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$$

i naravno zadržavamo ograničenje da je $|x| < 1$ koje smo imali za q.

Sad integralimo levu i desnu stranu oba ova reda

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = c_1 + \int dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx + \int x^3\,dx \cdots$$

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = c_2 + \int dx + \int x\,dx - \int x^3\,dx - \int x^3\,dx \cdots$$

Kako je $\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int \frac{-1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x)$ i isto tako.

$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)$ onda dobijemo

$$-\ln(1-x) = c_1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

$$\ln(1+x) = c_2 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

ili kad prvi red pomnožimo sa (-1)

$$3.) \qquad \ln(1-x) = -c_1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \cdots -$$

$$4.) \qquad \ln(1+x) = -c_2 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

Za $x = 0$ obe formu 3.) i 4.) daju $c_1 = 0$ i $c_2 = 0$

Dakle, dobili smo funkciju $\ln(1+x)$ i $\ln(1-x)$ razvijene u Maclaurin-ov red pri $|x| < 1$ jer pod tim uslovom važe polazni obrasci 1.) i 2.).

Redove 3.) i 4.) dobili smo lakše nego da smo tražili izvode funkcija $\ln(1-x)$ ili $\ln(1+x)$.

Iz redova 3.) i 4.) moguće je dobiti još jednu novu funkciju razvijenu u red. Oduzmimo sad red 3.) od 4.) i dobićemo $(c_2 + c_1 = c)$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = c + 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} \cdots$$

i kako razlika logaritma funkcija znači logaritam količnika to imamo

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = c + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots$$

$$5.) \qquad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = c + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots\cdots$$

Što se tiče konstante c — za $x = 0$ formula 5.) daje $c = 0$

Dobijeni red 5.) je mnogo lakše naći na pokazani način nego kad bi to činili na uobičajeni način. Red 5.) važi za $-1 < x < 1$ dakle za x između -1 i $+1$ jer količnik $\frac{1-x}{1-x}$ za sve te vrednosti ostaje pozitivan pa izraz $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ima smisla (jer koren kvadratni ima realnu vrednost). Slično ovome, ako posmatramo izraz $\frac{1}{1+x^2}$ koji može biti shvaćen kao zbirni obrazac geometrijske progresije kad je količnik $-x^2$, imamo $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + + x^8 + x^{16} \cdots$

što daje dalje

$$a_1 = 1 \qquad a_3 = \frac{1}{3} \quad \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}$$

i zato je red oblika

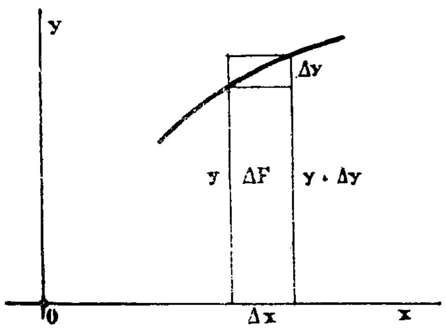
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\, x^3 + \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot x^5 + \frac{2^4\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot x^7 \cdots\cdots$$

Što idemo dalje računanje je, iako elementarno sve zametnije, ali ipak smo dobili bar prva tri člana. Na ovaj se način može dobiti i red za $x \operatorname{cotg} x$ oblika

$$x \operatorname{cotg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Napomena. U predjašnjem primeru za $\operatorname{tg} x$ na levoj strani imamo neparne potencije izložilaca 1, 3, 5, 7. ······ na desnoj strani treba tražiti najpre odgovarajuću potenciju u redu $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cdots$ i dodati sa odgovarajućim znakom i sve one kombinacije parnih potencija koje sabiranjem izložilaca potencija iz reda $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cdots$ daju odgovarajuću. Na pr. ako tražimo za x^5 na levoj strani imaćemo na desnoj (za 5) $2+3$, $4+1$ dakle koje je $a_5 + a_1 \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{1\cdot 2}\cdot a_3$; za x^7 biće ($2+5$, $4+3$, $6+1$) $a_7 - a_5\cdot\frac{1}{1\cdot 2} + a_3\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - a_1\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ što treba da je jednako koeficijentu uz x^7 na levoj strani dakle $-\frac{1}{7!}$.

9.) Integral kao površina — određeni integral



Sl. 20.

Posmatrajmo površinu F ispod*) krive $y = f(x)$ ograničenu x — osom i dvema ordinatima y i $y + \Delta y$; ta površina ΔF nalazi se između površina pravougaonika $y \cdot \Delta x$ i površine pravougaonika $(y + \Delta y)\,\Delta x$, dakle imamo

1.) $\quad y \cdot \Delta x < \Delta F < (y + \Delta y)\,\Delta x$

Ako podelimo i levu i desnu stranu sa Δx dobijamo

$$y < \frac{\Delta F}{\Delta x} < y + \Delta y$$

*) Ovaj izraz „ispod krive" nije podesan — jer površina može biti „iznad krive" (u polju negativnih ordinata); površina je uvek između krive, — x ose i dveju ordinata; pomenuti izraz zadržavame, kratkoće radi, za najčešće upotrebljene primere.

i ako pustimo da Δx, Δy i ΔF teže nuli dobijamo

$$y < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} (y + \Delta y)$$

što onda dovodi do

$$y < \frac{dF}{dx} < y,$$

a to znači da je jedino moguće

3.) $$\frac{dF}{dx} = y$$

iz jednačine 3.) integracijom dobijamo onda

4.) $$F = \int y\, dx + C = \varphi(x) + C$$

ili dalje prema onome što znamo o integracionoj konstanti

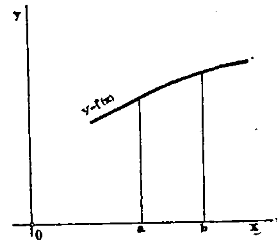
5.) $$F = \varphi(x) - \varphi(a)$$

ili odavde kraćim beleženjem

6.) $$F = \Big|\varphi(x)\Big|_a^x$$

Kako x može imati razne vrednosti to će za $x = b$ biti

7.) $$F = \varphi(b) - \varphi(a)$$



Sl. 21.

a to znači: površina ispod krive $y = f(x)$ između ordinata čije su apscise a i b. Jednačina 4.) nam kazuje da se *površina F ispod krive $y = f(x)$ dobija kad se integrali funkcija koja pretstavlja krivu.* Jednačina 7.) kazuje da se ta površina nalazi između ordinata apscisa a i b. Mesto oznake u jednačini 5.) možemo pisati

8.) $$F = \int_a^b y\, dx$$

Ovako označeni integral u formuli 8.) zove se *određeni integral*. Vrednosti a i b zovu se *granice integrala* pri čemu je b gornja granica, dok je a donja granica. No iz svega ovoga se vidi da je prvo potrebno naći *neodređeni integral* pa u funkciju koja pretstavlja neodređeni integral smeniti granice.

Sad ćemo videti neke osobine određenog integrala koje proizilaze i njegove definicije

a.) kako je $\int_a^b y\,dx = \Big|\varphi(x)\Big|_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$ to je

$$-\int_b^a y\,dx = -\Big[\varphi(a) - \varphi(b)\Big] = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b y\,dx.$$

dakle $\quad -\int_b^a y\,dx = \int_a^b y\,dx$ što znači: *izmena mesta granica povlači znak minus pred integralom.*

b.) neka je *c* jedan broj u intervalu (a, b) — napišimo sad ovako

$$\int_a^b y\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(b) + \varphi(c) - \varphi(a) - \varphi(c) = \varphi(b) - \varphi(c) +$$

$$+ \varphi(c) - \varphi(a) = \int_c^b y\,dx + \int_a^c y\,dx$$

Dakle određeni integral u granicama od a do b može da se rastavi na zbir dva integrala, od a do c i od c do b gde je c vrednost u intervalu od a do b.

1. **Napomena.** Granice moraju biti samo one vrednosti koje ne čine integrand beskrajnim ili neodređenim. Na pr. za

$$\int \ln x\,dx \text{ imamo to kod } \int_0^1 \ln x\,dx$$

jer vrednost $x = 0$ čini integrand beskrajnim. Isto tako $\int_1^3 \frac{x+2}{x-1}\,dx$ pokazuje sličan slučaj jer $x = 1$ čini funkciju beskrajnom. Isto tako granice ne smeju obuhvatiti vrednost x koja čini podintegralnu funkciju beskrajnom

$$\text{na pr. } \int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$$

U onim slučajevima kao prva dva treba mesto granica a i b stavljati $a + \delta$ (ili $b + \delta$) i ispitivati vrednosti izraza, dobivenih integracijom a ako

je diskontinuitet obuhvaćen granicama ondra treba integral uzeti od jedne granice do diskontinuiteta (i na predašnji način ispitati) pa zatim od diskontinuiteta do druge granice

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \int_{+\delta}^1 \ln x\,dx = \Big|x \ln x - x\Big|_{+\delta}^1 = \Big|1.\ln 1 - 1\Big| - \Big|\delta \ln \delta - \delta\Big|_{\delta \to 0} = -1$$

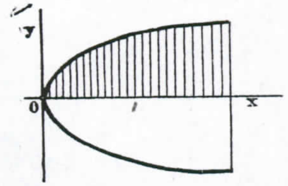
jer $\delta \ln \delta$ kad $\delta \to 0$ po L' Hospital-ovom pravilu teži 0. Dakle integral $\int_0^1 \ln x\,dx$ ima smisla jer teži granici -1, a znak — pokazuje samo da je površina ispod x — ose. Za drugi primer imaćemo

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{-\delta} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{+\delta}^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \Big|-\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{-\delta} + \Big|-\frac{1}{x}\Big|_{+\delta}^3 = \underset{\delta \to 0}{+\frac{1}{\delta} + \frac{1}{-2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\delta} = \infty.$$

Odavde se vidi da ovaj integral nema smisla jer ova površina raste u beskrajnost.

Napomenimo da ima primera u kojima se može dobiti isti rezultat (slučajno!) ako bi radili i bez ovih limes-a, ali to su pojedini slučajevi pa zato treba uvek raditi za ovakve slučajeve kako je pokazano.

Napomena. Za krive koje su simetrične prema x — osi (na pr. $y^2 = 2px$) računom će se dobiti površina iznad x — ose jer je tako po našem izvođenju i sam određeni integral definisan: površina ispod krive ograničena x — osom. — Prema tome površina od 0 do b koju ograničava parabola biće jednaka dvostrukoj površini koju računom dobijamo. — Pokazaćemo to odmah na primeru za parabolu $y^2 = 2px$ ili $y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x}$ pa ćemo imati



Sl. 22.

$$P = \int_0^b \sqrt{2p}\,\sqrt{x}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^b \sqrt{x} \cdot x = \sqrt{2p}\int_0^b x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2p}\,\Bigg|\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^b =$$

$$\sqrt{2p}\,\Bigg|\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^b = \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\;\; b\sqrt{b}\;\frac{2}{3} b \cdot \sqrt{2p}\,b = \frac{2}{3} b \cdot y_b.$$

Izraz $\frac{2}{3} b y_b$ pokazuje da je površina ograničena lukom parabole i x — osom jednaka $\frac{2}{3}$ površine onog pravougaonika što ga obrazuju apscisa i njoj odgovarajuća ordinata neke tačke na paraboli. — Površina celog paraboličnog otsečka biće

$$2p = 2\cdot\frac{2}{3}\,b\,y_b = \frac{2}{3}\,b\,2y_b = \frac{2}{3}\,b\cdot t \quad \text{gde } t \text{ pretstavlja tetivu.}$$

Vežbanja. 1.) Naći površinu ispod Neil-ove parabole $y^2 = ax^3$, u granicama od 0 do b — Isto za krivu $xy = 1$, u granicama od 1 do b —

2.) Isto za krivu $y^m = ax^n$ u granicama od 0 do b

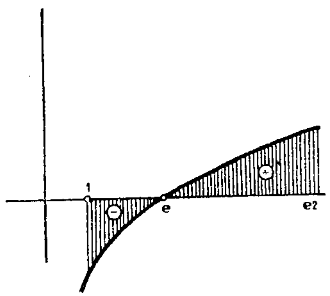
3.) Isto za krivu $y = \ln x$ u granicama od 1 do b

4.) Isto za krivu $y = \frac{x+2}{x-1}$ u granicama od a do d i izraziti pomoću koordinata y_a, y_b.

Primedba. Sem ukazanih slučajeva u vezi sa granicama mora se obratiti pažnja još i na to da granice ne obuhvataju presek krive koja pretstavlja podintegralnu funkciju. Na pr. traži se površina između luka krive

$$y = \frac{\ln x - 1}{x} \text{ i } x\text{ — ose u intervalu } x = 1 \text{ do } x = e^2.$$

Izračunajmo neodređeni integral $\int \frac{\ln x - 1}{x}\,dx$ (smena $\ln x - 1 = u$)



Sl. 23.

pa će biti $\int \frac{\ln x - 1}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 + C$

Ako računamo

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Big|(\ln x - 1)^2\Big|_1^{e^2} =$$

$$= \frac{1}{2}[(\ln e^2 - 1)^2 - (\ln 1 - 1)^2] = 0$$

grešimo — jer kriva $y = \frac{\ln x - 1}{x}$ ima presek $\ln x - 1 = 0$ tj. $x = e$, pa smo na ovaj način sabrali i negativnu (ispod x — ose) i pozitivnu (iznad x — ose) površinu što je u ovom slučaju dovelo do 0; trebalo je računati

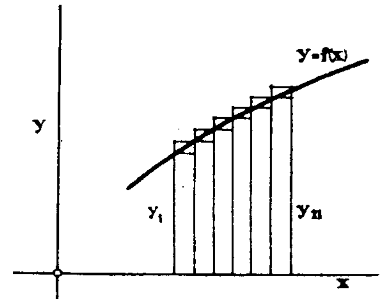
$$\left|\int \frac{\ln x - 1}{x}\,dx\right| + \int \frac{\ln x - 1}{x}\,dx = \left|-\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2} = 1$$

Na ovaj slučaj treba obratiti pažnju!

Primer: izračunati $\int_2^4 (x^2 - 8x + 15)\,dx$, $\int_0^3 (x^2 - 1x)\,dx$

10. Određeni integral kao zbir

U predhodnom odeljku posmatrali smo jednu površinu pravougaonika ispod krive $y = f(x)$, to je bila površina ΔF i videli smo najzad da je moguće dobiti jedan funkcionalan odnos u diferencijalnom obliku odakle smo integracijom dobili funkciju — površinu. — Međutim, oribližno površinu F_1 ispod krive $y = f(x)$ možemo dobiti kao zbir izvesnog broja pravougaonika sa stranama od y_1 do y_{n-1} i ta površina će biti manja od prave površine F; uzimajući „spoljne" pravougaonike čije strane počinju od y_2 pa se završavaju do y_n, dobićemo površinu F_2 dakle sa slike se vidi:



Sl. 24.

$$F_1 = \sum_{i=1}^{i=n-1} y_i\,\Delta x \quad \text{i} \quad F_2 = \sum_{i=2}^{i=n} y_i\,\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} y_i\,\Delta x < F \quad \text{i} \quad \sum_{i=2}^{i=n} y_i\,\Delta x > F$$

Ali ako se broj *n* uvećava beskrajno i $\Delta x \to 0$ onda će površina sa „spoljnim" prevougaonicima da se sve više bliži pravoj površini *F*. —

Dakle napisaćemo:

$$\lim F_1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=2}^{n-1} y_i\,\Delta x = F$$

$$\lim F_2 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} y_i\,\Delta x = F$$

Zadržimo samo

1.) $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=2}^{n} y_i\,\Delta x = F$$

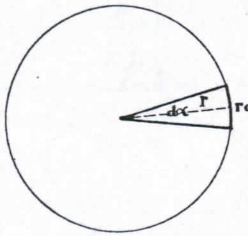
Ali u prethodnom odeljku imali smo da je:

2.) $$F = \int_a^b y\,dx$$

pa je zato

3.) $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=2}^{n} y_i \, \Delta x = \int_a^b y \, dx$$

Formula 3.) kazuje da je *granica beskrajnog zbira* ($n \to \infty$) *beskrajno malih količina* ($y\,dx$) u stvari određeni *integral*.



Sl. 26.

Na pr. posmatrajmo beskrajno mali isečak na krugu — njegova površina je:

$$dp = \frac{r \cdot ds}{2}$$ a kako je $ds = r\,d\alpha$ onda je

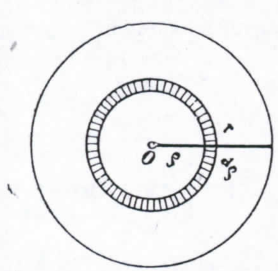
$$dp = \frac{r \cdot ds}{2} = \frac{r \cdot r \cdot d\alpha}{2} = \frac{r^2\,d\alpha}{2}$$

Zato je cela površina kruga zbir svih beskrajno malih površina pri čemu će ugao α početi od 0 a dostići 2π pa će biti

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2\,d\alpha = \frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{1}{2} r^2 \Big| \alpha \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi - \frac{1}{2} r^2 \cdot 0 = r^2 \pi$$

a to je površina kruga. Još drugačije možemo shvatiti površinu kruga kao beskrajan zbir beskrajno mnogo beskrajno uskih prstenova. Površina jednog takvog prstena će biti

$$dp = 2\rho\pi\,d\rho$$



Sl. 27.

jer smo površinu ovog prstena shvatili kao pravougaonik čija je jedna strana obim kruga $2\rho\pi$ a druga strana $d\rho$.

Integracija (za celu površinu kruga!) treba da se vrši od 0 do r pa će biti

$$P = \int_0^r 2\rho\pi\,d\rho = 2\pi \int_0^r \rho\,d\rho = 2\pi \left| \frac{\rho^2}{2} \right|_0^r =$$

$$= 2\pi \frac{r^2}{2} = r^2 \pi .$$

Kao što što se vidi iz ovog slučaja površine kruga — u mogućnosti smo nekad da na više raznih načina protumačimo jednu graničnu vrednost.

11. Primeri upotrebe određenog integrala.

Već kod našeg rasmatranja o površini ispod krive može se uočiti jedna činjenica: dobili smo

1.) $$\frac{dF}{dx} = y$$

iz čega dobijamo integracijom da je samo površina

2.) $$F = \int_a^b y\,dx$$

Dakle odnosom 1.) pretstavljen je *diferencijalni* oblik jedne matematičke funkcionalnosti. Vrlo često i u matematici i u drugim naukama koje koriste matematiku dobijaćemo zakone izražene u diferencijalnom obliku iz kojih integracijom dobijamo prave funkcije. — U ovoj činjenici je osnova primene infinitezimalne matematike u prirodnim naukama. — Izlaganje u prošlom odeljku nam je pokazalo kakva je priroda integralenja: integralenje je u stvari sabiranje beskrajno mnogo beskrajno malih količina. — Sad ćemo navesti tri primera iz same matematike u kojima će se videti kako se od diferencijalnog oblika zavisnosti prelazi integracijom na prave funkcionalnosti.

1°. Ako se posmatra elemenat luka (beskrajno mali luk) u odnosu na diferencijale dx i dy uviđa se da postoji prost odnos po Pitagorinoj teoremi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

ovo stoga što smo uzeli mesto beskrajno malog luka (sl. 7) beskrajno mali deo prave — tangente.[1] Iz ovog prostog odnosa se dobija dalje

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

a iz ove poslednje jednačine integracijom se dobija

$$s = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Razumljivo je da pošto se dužina luka traži od izvesne tačke M na krivoj do tačke P da će se onda voditi računa o vrednostima x koje odgovaraju tim tačkama — dakle biće

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

[1]) Postoje i drugi stroži načini izvođenja, ali mi smo računanje s priraštajima zamenili računanjem s diferencijalima što ćemo i u dalja dva primera učiniti.

Primer. Naći dužinu luka Neil-ove parabole $y^2 = ax^3$ od 0 do b.

Kako je $y = \sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}}$ to je

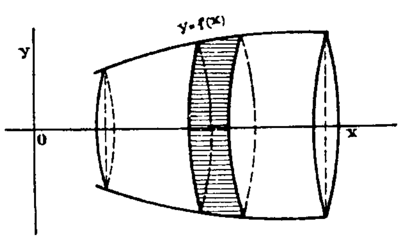
$y' = \frac{3}{2}\sqrt{a}\cdot x^{\frac{1}{2}}$ pa je $y'^2 = \frac{9}{4}\, a\, x$ a odavde

$$s = \int_0^b \sqrt{(1 + \frac{9}{4} ax}\, dx = \int_0^b (1 + \frac{9}{4} ax)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{8}{27a}\left(\sqrt{(1 + \frac{9}{4} ab)^3} - \cdot\right)$$

pri čemu smo integral $\int \left(1 + \frac{9}{4} ax\right)^{\frac{1}{2}} dx$ računali smenom $1 + \frac{9}{4} a x = u$.

Integrali za izračunavanje luka često su vrlo komplikovani i neki od njih (na pr. izračunavanje luka elipse — eliptični integral) ne mogu se izračunati u konačnoj formi.

Vežbanje. Izračunati dužinu luka lančanice $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ od $x = 0$ do $x = 1$.

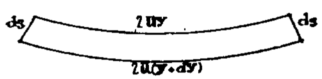


Sl. 28.

2°. Uočimo sad elemenat površine obrtnog tela koje postaje kad se kriva $y = f(x)$ obrće oko x — ose. Ta elementarna površina kad se razvije pretstavlja u stvari omotač zarubljene kupe

$$dp = \frac{2\pi y + 2\pi (y + dy)}{2}\cdot ds$$

$$dp = 2\pi y\, ds \quad (\text{jer } ds\cdot dy \to 0)$$



Sl. 29.

Površina omotača elementarne zarubljene kupe biće dakle u diferencijalnom obliku.

$$dp = 2\pi y\cdot ds$$

ili kako je:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\cdot dx$$

imamo dalje

$$dP = 2\pi y\cdot \sqrt{1 + y'^2}\cdot dx$$

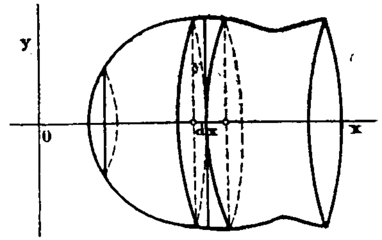
a odavde integracijom

$$P = 2\pi \int_a^b y\cdot \sqrt{1 + y'^2}\cdot dx$$

Ova formula pokazuje način izračunavanja površine — pri čemu y i y′ treba izraziti u funkciji x.

Vežbanje. Izračunati površinu obrtnog tela koje gradi lančanica $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ u granicama $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Neka je data zapremina tela koje opisuje krivu $y = f(x)$ kad se obrće oko x — ose. Elementarna zapremina pretstavlja zarubljenu kupu visine dx koja bi mogla biti smatrana kao zapremina zarubljene kupe



Sl. 30.

$$dv = \frac{dx}{3}\pi\Big[y^2 + \sqrt{(y + dy)^2} - +$$

$$+ (y + dy)^2\Big].$$ Kako u zbiru i $dy^2 dx$ i $dy\, dx$ teže nuli imamo

$$dv = \pi y^2\cdot dx$$

što pretstavlja funkcionalnu vezu u diferencijalnom obliku i odatle se integracijom dobija

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx$$

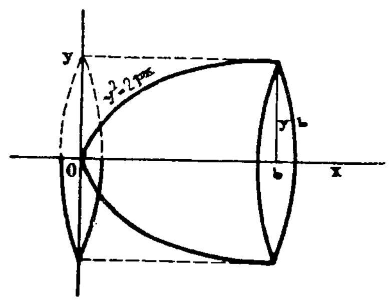
Ovaj obrazac pokazuje da će zapremina obrtnog tela biti data kao određeni integral pri čemu će *y* biti smenjeno funkcijom $f(x)$.

Ova vrsta integrala može da se izračuna u mnogo većem broju nego oba prethodna i od posebnog značaja je za praksu šumarskih inženjera.

Primer. Izračunati zapreminu obrtnog paraboloida koji opisuje parabola $y^2 = 2px$ obrćući se oko x-ose a u granicama od 0 do b.

Prema izvedenoj formuli biće

$$v = \pi \int_0^b y^2\, a\, x = \pi \int_0^b 2px\cdot dx = 2p\pi \int_0^b x\, dx = 2p\pi \left|\frac{x^2}{2}\right|_b^b = 2p\pi \frac{b^2}{2}$$



Sl. 31.

Dobijeni rezultat prema jednačini parabole $y^2 = 2px$ (pa onda $y_b^2 = 2pb$) protumačićemo ovako

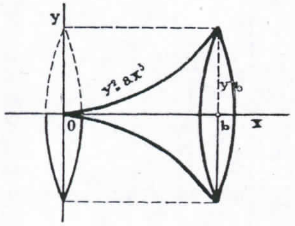
$$\frac{2p\pi b^2}{2} = \frac{2p\pi\cdot b}{2} = \frac{\pi y_b^2 b}{2}.$$

Znači izraz $\frac{y_b^2 \pi b}{2}$ tumačimo kao polovinu zapremine valjka čija je visina *b*, a poluprečnik osnove *y*. Drugačije rečeno: *zapremina obrtnog paroboloida je polovina zapremine valjka iste osnovice i visine.*

Primer. Izračunati zapreminu obrtnog najloida koji opisuje Neil-ova parabola $y^2 = ax^3$ obrćući se oko x-ose u granicama od 0 do b. — Kao i u prethodnom primeru imamo.

$$v = \pi \int_0^b y^2\, d\, x = \pi \int_0^b a\, x^3 = \pi\, a \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^b = \pi\, a\, \frac{b^4}{4}.$$

I ovaj dobijeni rezultat protumačićemo pomoću formule $y^2 = a\, x^3$ znajući da je $y^2{}_b = a\, b^3$.



Sl. 32.

Zato će biti:

$$\frac{\pi\, a\, b^3\, b}{4} = \frac{\pi\, y^2{}_b\, b}{4}.$$

Dakle

$$v = \frac{y^2{}_b\, \pi\, b}{4}$$

znači da je zapremina obrtnog najloida *četvrtina zapremine valjka visine b* i poluprečnika osnove *y* koje odgovara apscisi b.

Ova dva primera i poređenje zapremine sa zapreminom valjka igraju izvesnu ulogu u dendrometriji.

Zadaci. 1.) Naći zapreminu obrtnog tela koje gradi lančanica

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

obrćući se oko x-ose u granicama od 0 do b.

2.) Isto za $y = mx$; $y = a\, x + b$; $y = a\, x^2 + b\, x + c$.

Napomena. Ako se obrtno telo dobija obrtanjem krive oko y-ose onda je poluprečnik kruga x pa će elementarna zapremina, visine dy biti $dv = x^2 \pi dy$ i onda je

$$v = \pi \int x^2\, d\, y.$$

Na pr. za parabolu $x^2 = 2\, p\, y$ biće:

$$v = \pi \int_a^b 2\, p\, y\, d\, y = \pi \cdot 2\, p \int_a^b y\, d\, y = \pi\, 2\, p \left| \frac{y^2}{2} \right|_a^b$$

12. Približna numerička integracija.

Videli smo u više mahova da izračunavanje neodređenih integrala zadaje znatne teškoće a u više slučajeva je bilo naglašeno da je integracija u konačnom obliku i nemoguća — već se pribegava razvijanju u redove. — Za praktične potrebe često nije potrebna ona tačnost koju bi nam dalo striktno izračunavanje u konačnoj formi niti korišćenje nekog reda, već se možemo zadovoljiti rezultatima, u većoj ili manjoj meri, približnim.

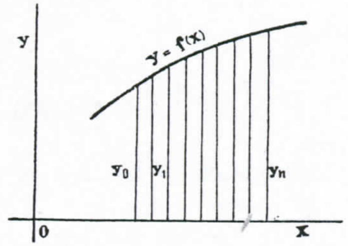
1°. Znamo da svaki određeni integral uopšte može biti shvaćen kao površina ispod krive (koju pretstavlja integrandova formula) data obrascem

$$1.) \qquad P = \int_a^b y\, dx$$

Međutim približno će ta površina moći biti izračunata na taj način što ćemo integral (a, b) podeliti na izvestan broj jednakih podelaka i dobićemo niz trapeza sa visinom $\frac{b-a}{n}$, a paralelnim stranama y_1; y_2 . . . . . , pa tako izračunata površina P_1 biće

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{n-a}{n} \left[(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + (y^2 + \right.$$

$$\left. + y_3) \ldots . + (y_{n-1} + y_n) \right]$$



Sl. 33.

$$2.) \qquad P_1 = \frac{b-a}{n} \left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ldots . . + 2y_{n-1} + y_n \right]$$

Lako je uvideti da će tačnost tim veća biti što je veće n — što je veći broj podelaka zbir površina trapeza se sve više približava pravoj površini ispod krive.

Prema odnosu 1.) i 2.) dobija se:

$$P \approx P_1 \text{ ili}$$

$$3.) \qquad \int_a^b y\, dx \approx \frac{1}{2} \frac{b-a}{a} \left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ldots . 2y_{n-1} + y_n \right]$$

Formula 3.) pokazuje kako je moguće približno izračunati jedan određeni integral.

Ova metoda za približno izračunavanje zove se *metoda trapeza* i zasnovana je na tome što se luk krive zamenjuje izlomljenom linijom — delovima prave.

Primedba. Vrednosti y_0, y_1 . . . . y_n dobijamo iz jednačine krive $y = f(x)$ kad stavimo $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}$, $x_3 = a + \frac{3(b-a)}{n}$,

1.) **Primer.** Izračunati pomoću metoda trapeza vrednost integrala $\int_0^4 x^2\, dx$ uzimajući da je $n = 10$ ($b = 4$, $a = 0$).

Imaćemo posle izračunavanje ordinata y_0, y_1, y_2 . . . y_n

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 \ldots . + y_n \right] =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 0,\ 4\,[0+0,\ 32+1,\ 23+2,\ 68+5,\ 12+8+11,\ 52+15,\ 68+20,$$
$$48+25,\ 92+32]=21,\ 44.$$

2.) **Primer.** Izračunati istom metodom vrednost integrala $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ za $n=6$. Po istom obrascu dobijamo

$$P_1=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{6}\left(\sin 0+2\sin\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{2\pi}{6}+2\sin\frac{3\pi}{6}+2\sin\frac{4\pi}{6}+2\sin\frac{5\pi}{6}+\right.$$
$$\left.+\sin\pi\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{6}\,(1+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+1)=1,\ 9541$$

Međutim ako se izračuna integral $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ pomoću integralnog računa imamo vrednost 2 — dakle greška u izračunavanju metodom trapeza je 0,0449 za ovaj slučaj.

2°. Simpsonova metoda je druga od najčešće upotrebljenih metoda za izračunavanje određenih integrala.

Ta metoda se sastoji u ovome: Kakva komplikovana kriva $y=f(x)$ može se pretstaviti Maclaurin-ovim redom

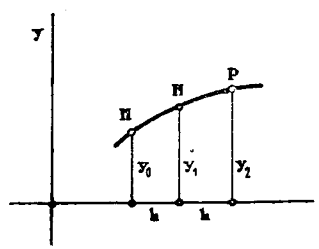
$$f(x)=a+bx+cx^2+\ldots$$

pa mesto integrala $f(x)\,dx$ uzimamo:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\approx\int_{x_2}^{x_2}(a+bx+cx^2)$$

tj. krivu zamenjujemo parabolom. — Kod Simpson-ove metode zadovoljamo se parabolom — inače u principu moguće je uzeti koliko god se hoće članova pomenutog Maclaurin-ovog reda. Parabola je izabranana zbog osobine koju ćemo sad pokazati.

Lako se uviđa da kroz tri makoje tačke u ravni može da se povuče parabola[1]) oblika $y=ax^2+bx+c$. Neka su date tri tačke u ravni kroz koje prolazi pomenuta parabola; veličine apscia neka se razlikuju za h. Površina ograničena y_0 i y_2 i x-osom neće se promeniti ako se uzme novi sistem čija će se ordinatna osa poklopiti sa y_0: ordinate parabole ostaju iste kao i površina samo se menja veličina apscisa. Izračunajmo ovu površinu. Jednačina parabole u novom sistemu neka je $y=At^2+Bt+C$.



Sl. 34.

[1]) Ako tri tačke $M(x_1y_1)$, $N(x_2y_2)$, $P(x_3y_3)$ prolaze kroz takvu parabolu — njihove koordinate zadovoljavaju jednačinu $y=ax^2+bx+c$ pa se dobija sistem jednačina za odredbu a, b, c.

Površina će biti

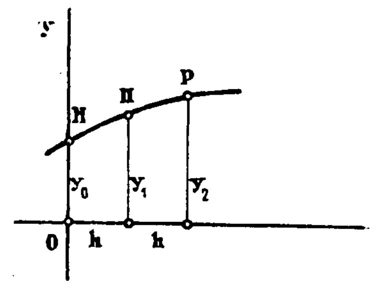
$$P=\int_0^{2h}y\,dt=\int_0^{2h}(At^2+Bt+C)\,dt=\left|A\frac{t^3}{3}+B\frac{t^2}{2}+Ct\right|_0^{2h}=$$
$$8A\frac{h^3}{3}+2Bh^2+2Ch=\frac{h}{3}(8Ah^2+6Bh+6C).$$

Međutim ako se izračunaju ordinate y_0, y_1, y_2 za apscise $t=0$, $t=h$, $t=2h$ imamo

$$y_0=C,\qquad y_1=Ah^2+Bh+C$$
$$y_2=4Ah^2+2Bh+C.$$

Zato će izraz P biti oblika

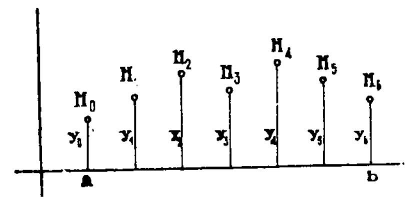
$$P=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$



Sl. 35.

Dakle površina ispod parabole može se izraziti pomoću dve krajnje ordinate intervala i četvorostruke srednje. Ovo važi ma gde parabola u koordinatnom sistemu bila samo ako je oblika

$$y=ax^2+bx+c.$$



Sl. 36.

Ako je dat niz tačaka neke funkcije čiji oblik ne znamo — ali znamo veličinu ordinata, onda je moguće na osnovu ovoga odrediti približno površinu ispod krive čije su nam ordinate samo poznate. Za slučaj prikazan na slici (tačke M_0, M_1.... M_6) imaćemo

$$p_1\approx\frac{b-a}{6n}[y_0+4y_1+y_2]$$

p_1 je površina izražena prvim trima ordinatama.

$$p_2\approx\frac{b-a}{6n}[y_2+4y_3+y_4]$$

p_2 je površina za tri naredne ordinate.

$$p_3\approx\frac{b-a}{6n}[y_4+4y_5+y_6]$$

p_3 je površina preostalog dela.

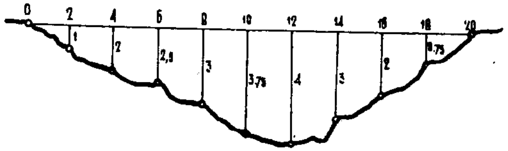
$$P\approx\frac{b-a}{6n}[y_0+y_6+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

celokupna površina.

Razume se da će i za makoliki broj tačka biti analogno

$$P\approx\frac{b-a}{6n}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots..y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots..y_{n-2})].$$

Primer. Izračunati površinu poprečnog preseka korita jedne reke kad je na svaka 2 m širine merena dubina 1, 2, 2, 5, 3, 3,75, 4, 3, 2, 0,75.



Sl. 37.

Primenom Simpson-ovog pravila imamo

$$\left(\frac{b-a}{n}=2, y_0=y_n=0\right)$$

$$P \approx 2[4(1+2,4+3,75+3+ +0,75)+2(2+3+4+2)]= = 108\,m^2.$$

Primedba. Ne samo što je korisno upotrebiti Simson-ovo pravilo kad samu funkciju ne znamo — nego i onda kad nam je ona poznata pa je izračunavanje integrala teško ili nemoguće a možemo se zadovoljiti izvesnom približnošću. Pošto funkciju poznajemo ordinate ili možemo s crteža meriti ili izračunavati.

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA
(u ravni)

1. Tangente krivih. 2. Normale krivih. 3. Izračunavanje dodirnih količina. 4. Dužina luka krivih. 5. Poluprečnik krivine. 6. Singularne tačke. 7. Konstrukcija krivih.

1.) Tangente krivih

U osnovima diferencijalnog računa napomenuto je da izvod pretstavlja koeficijenat pravca tangente i da se za razne vrednosti x mora menjati i vrednost izvoda. Izvod je dakle funkcija apscise tačaka krive linije. Na osnovu izvoda moguće je za svako x odrediti koeficijenat pravca tangente.

Primer. Neka je data parabola $y^2=4x$; odrediti koeficijenat pravca tangente u tački $x=2$.

Treba naći prvi izvod — možemo to učiniti koristeći totalni diferencial. Napisaćemo $y^2-4x=0$ pa imamo:

$$2y\cdot dy-4\,dx=0$$

odavde je

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$$

i kako je

$$y=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$$

imamo dalje

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

za $x=z$ dobijamo

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tangenta je granični položaj sečice koja prolazi kroz dve tačke, kada su obe beskrajno blizu.

Jednačina prave koja prolazi kroz dve tačke je

$$y-y_0=\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0)$$

gde su y i x tekuće koordinate a y_0, x_0 koordinate jedne od tačaka. U graničnom položaju količnik postaje izvod a koordinate tačaka su u stvari za obe tačke x_0, y_0 pa imamo za jednačinu tangente

$$y-y_0=\frac{dy}{dx}(x-x_0)$$

pri čemu x_0, y_0 označavaju sad koordinate tačke dodira, a $\frac{dy}{dx}$ označava izvod funkcije (koja pretstavlja krivu); vrednost izvoda treba izračunati za x_0.

Primer. Napisati jednačinu tangente parabole $y^2=x$ u tački $M(1, y)$.

Tačka dodira M ima koordinate $x_0=1$ $y_0=\sqrt{x_0}=\sqrt{1}=+1$. Izvod krive $y^2=x$ je $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$. Koeficijenat pravca tangente u tački $M(1, 1)$ biće $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$.

Jednačina tangente

$$y-y_0=y'(x-x_0)$$

Za naš slučaj postaje

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$$

ili

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Drugu tangentu za tačku $M'(1, 1)$ lako je na isti način napisati.

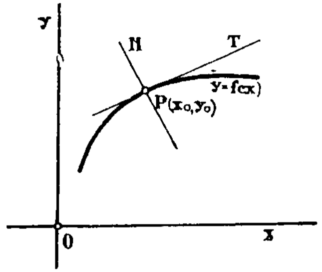
Iz ovih primera se vidi da nam izvodi mogu dati odmah lak način za određivanje tangenata što bi inače po metodama analitičke geometrije bilo vrlo tegobno a nekada i nemoguće.

Zadaci. Napisati jednačine tangenata

krive	u tačkama
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$	$M(2, y)$, $M(1, y)$
$y=\ln x$	$M(1, y)$
$y=\sin x$	$M\left(\frac{\pi}{4}, y\right)$ $M\left(\frac{3\pi}{4}, y\right)$
$x^2+y^2-xy=3$	$M(1, y)$

2. Normale krivih.

Normala je upravna na tangentu u tački dodira. To znači da je njen koeficijent pravca $-\frac{1}{y'}$ (jer je koeficijenat pravca tangente y') pa kako normala prolazi kroz tačku dodira čije su koordinate x_0 i y_0, onda će jednačina normale biti



Sl. 38.

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0).$$

Primer. Napisati jednačinu normale parabole $y^2 = 4x$ u tački $x_0 = 2$ u prvom kvadrantu.

Znači da će tačka dodira biti sa apscisom $x_0 = 2$. Odgovarajuće y_0 biće dato $y_0^2 = 4 \cdot 2$ ili $y_0 = \pm 2\sqrt{2}$ ili za prvi kvadrat $y_0 = 2\sqrt{2}$. Treba naći još y'.

U prošlom odeljku je bilo $y' = \frac{2}{y}$ i onda je $y'_0 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

pa je jednačina normale

$$y - 2\sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$$

$$y - 2\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}$$

Zadaci. Naći normale krivih.

1. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ u tačku $x = a$

2. $y^2 = a x^3$ u tački $x = 1$

3. $y = \frac{a}{x^2}$ u tački $x = a$

4. $y = \sin x$ za $x = \frac{\pi}{8}$

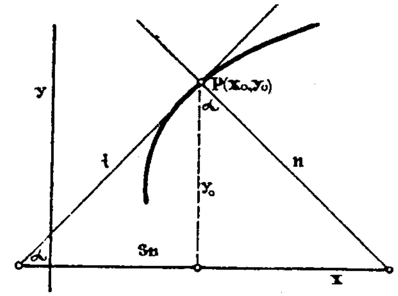
5. $y = e^x$ za $x = 1$

6. $y = a^x$ za $x = 0$.

Napomena. Treba pomoću izvoda naći koeficijente pravca tangenata u opštem obliku za parabolu $y^2 = 2px$. Neil-ovu parabolu $y^2 = ax^3$, kubnu parabolu $y = ax^3$, krivu $y^3 = ax^2$, krug $x^2 + y^2 = r^2$, elipsu, hiperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x.y = C$, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, jer je ovo od koristi za mnoge zadatke.

3. Izračunavanje dodirnih količina.

Dodirnim količinama nazivaju se: dužina tangente (t) od tačke dodira do preseka sa x-osom; dužina normale (n) od tačke dodira do preseka sa x-osom; subtangenta (S_t) je projekcija tangente; subnormala (S_n) je projekcija normale.



Sl. 39.

Sa slike se vidi da je:

$$\text{I}\left\{\begin{array}{ll} \frac{y_0}{n} = \cos\alpha & \frac{y_0}{t} = \sin\alpha, \\ \frac{y_0}{S_t} = y' & \frac{S_n}{y_0} = y' \end{array}\right.$$

Iz ovih je odnosa lako izračunati jednu od veličina pomoću ordinate y_0 i trigonometriskih funkcija $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Treba imati na umu proste trigonometriske odnose $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i odavde je

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ kao i } \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Znajući da je $\operatorname{tg}\alpha = y'$ možemo izračunati svaku od dodirnih veličina na osnovu sistema (I) znajući koordinate tačke $M(x_0, y_0)$.

Zadaci.

1.) Izračunati dodirne količine kod parabole $y^2 = 2x$ u tački $x = 1$.

2.) Isto za krivu $y = \frac{x^3}{6Rl}$ (gde su a, l, konstante). Za $x = l$ (izračunavanje subtangenata ima primemenu kod železnice).

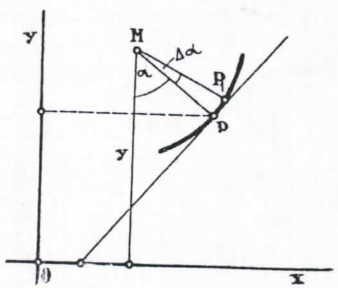
4. Izračunavanje dužine luka krivih

Za izračunavanje dužine luka ranije smo izveli obrazac

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Ukazali smo na teškoće oko izračunavanja ovog integrala, i videli neke primere gde je moguće izračunavanje na najprostiji način.

5. Poluprečnik krivine — krug krivine


Sl. 40.

Krivininom neke krive naziva se granična vrednost količnika

$$1.)\qquad \lim_{\substack{\Delta\alpha\to 0\\ \Delta s\to 0}} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = K$$ gde je α ugao, a

s luk. Gornji količnik možemo ovako pisati

$$2.)\qquad K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx}\,\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$ Znamo da

je $\operatorname{tg}\alpha = y'$ i $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y'$ to je

$$3.)\qquad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1+y'^2}\,y''$$

Isto tako nam je poznato $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ pa je

$$4.)\qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

Na osnovu formula 3.) i 4.) obrazac 2.) postaje

$$5.)\qquad K = \frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Obrazac 5.) nam daje krivinu izraženu prvim i drugim izvodom. Već iz obrasca 2.) za krug izlazi, znajući da je $ds = \rho\, d\alpha$

$$6.)\qquad K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{\rho\, d\alpha} = \frac{1}{\rho}$$

dakle — krivina je za krug recipročna vrednost poluprečnika krivine. Kako se može pretpostaviti da za svaki beskrajno mali elemenat luka krive postoji krug koji će se svojim beskrajno malim lukom poklopiti sa lukom krive to ćemo pisati obrazac 5.)

$$7.)\qquad K = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gde je ρ promenljivi poluprečnik koji se menja od tačke do tačke kao što će se menjati i krugovi koji imaju elemenat luka zajednički sa elementom luka krive. Ovi krugovi se zovu krugovi krivine a ρ je njihov poluprečnik koji je funkcija od x.

Iz formule 7.) videli smo da je krivina recipročna vrednost od ρ koje je dato formulom.

$$8)\qquad \rho = \frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Sa slike iz tačke 5. se vidi da je središte kruga krivine data formulama

$$9.)\qquad \begin{cases} X = x - \rho\sin\alpha \\ Y = y + \rho\cos\alpha \end{cases}$$

pa kako znamo da se $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ mogu izraziti pomoću $\operatorname{tg}\alpha = y'$ to imamo $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, $\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ pa zamenjujući vrednost ρ iz formule 8.) u 9.) dobijamo

$$10.)\qquad X = x - \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''} \qquad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Primer. Naći poluprečnik krivine u tački $x = 2$ parabole $y^2 = 2x$ i odrediti središte kruga krivine.

Imamo obrazac za poluprečnik krivine

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

treba naći y' i y'' iz funkcije $y^2 = 2x$ a to je

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} \qquad y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x)^2}}$$

za $x = 2$ imamo $y' = \frac{1}{2}$ $\quad y'' = -\frac{1}{8}$ pa će biti

$$\rho = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{8}} = -8\sqrt{\frac{125}{64}} = -8\cdot\frac{3}{8}\cdot\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

Za koordinate središta kruga krivine imamo iz 10.)

$$x = 2 + 3\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 5 \qquad y = 2 - 3\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 2 - 6 = -4.$$

Centar kruga se nalazi u tački $(5, -4)$.

Zadaci. Naći poluprečnik kruga krivine i centar kruga krivine za parabolu $y^2=2px$, za krive $y^2=ax^3$, $y^3=ax^2$, $xy=C$, $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

izražavajući sve u funkciji x i stalnih koeficijenata.

Napomena. 1) Kada je y' vrlo malo (za vrlo male uglove) onda obrazac za ρ dobija ovaj prost oblik $\rho=\frac{1}{y''}$ koji je korišćen u tehnici (momenat savijanja).

2) u prevojnim tačkama je $\rho=\infty$ jer je $y''=0$.

Primedba. Iz formula 9.) uviđa se da sa promenom poluprečnika krivine ρ da se menjaju koordinate središta kruga krivine. To se još bolje uviđa iz formula 10.) koje izražavaju koordinate središta kao funkcije x, y, y', y'' — dakle u krajnjoj liniji kao funkcije od x jer je i $y=f(x)$, $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$ na kraju sve zavisno od x. Geometrijsko mesto centara krugova krivine je jedna kriva: jednačine 10) su parametarske[1]) jednačine te krive a sama jednačina krive dobiva se eliminacijom x iz obe jednačine. Ova kriva se zove *evoluta*, dok se kriva $y=f(x)$ zove *evolventa*.

Iz formula 9.) lako se izračunava dy i dx odakle se dobiva odnos

$$\frac{dY}{dX}\cdot\frac{dy}{dx}=-1$$

iz čega se zaključuje da su normale krive $y=f(x)$ tangente njene evolute.

Formule 9.) daju takođe za dužinu luka evolute[2]) $l=\pm\rho$; ako za dve tačke imamo $l_1=\rho_1$ i $l_2=\rho_2$ onda $l_1-l_2=\rho_2-\rho_1$ znači razlika dužina lukova je jednaka razlici poluprečnika krivine.

6. Singularne tačke.

Singularnim tačkama nazivaju se tačke neke krive $F(xy)=0$ za koje su oba parcijalna izvoda $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ za iste vrednosti x i y jednaka nuli tj. ako sistem jednačina

1.) $$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial F}{dy}=0$$

daje za x i y određene vrednosti pri čemu pak y' postaje

2.) $$y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{0}{0}$$

[1]) Parametarskim jednačinama krive u ravni naziva se skup od dve jednačine u kojima je i y i x izraženo nekom novom promenljivom (parametrom) i tek njenom eliminacijom iz obe jednačine $y=y(t)$ i $x=x(t)$ dobija se $y=f(x)$. U slučaju evolute ulogu parametra ima samo x.

[2]) Ovo se dobija iz $\left(\frac{dl}{dx}\right)^2=\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2$ pri čemu se dobija $\left(\frac{dl}{dx}\right)^2=\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2$ odakle imamo $l=\rho$.

Ako za neku tačku na krivoj $F(xy)=0$ utvrdimo da zadovoljava uslov 1.) ili 2.) onda je tačka takva — singularna.

Pošto je pojam singularnosti vezan za istraživanje vrednosti prvog izvoda — to znači da u singularnim tačkama nastupaju neki posebni odnosi tangente prema krivoj. Diferencirajmo dva put funkciju $F(xy)=0$ pa ćemo imati

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0$$

ili kako je

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

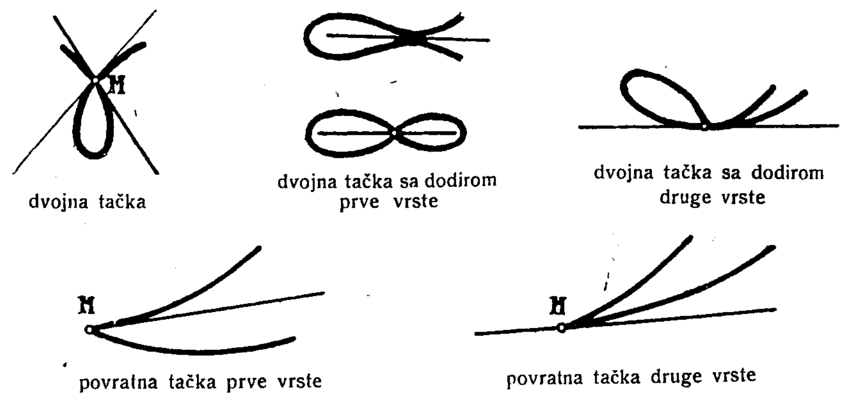
dobijamo

3.) $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y^2}y'^2=0$$

Vidimo da će jednačina 3.) dati dva korena za y' pa prema tome imamo i različite singularne tačke: dvostruka, povratna.[1]) Nećemo se upuštati u detaljnu analizu jednačine 3.). Zadovoljićemo se time što ako utvrdimo da je

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

onda imamo singularne tačke.[2]) Prikazaćemo na slici razne vrste tačaka:



1.) **Napomena.** Ako se po crtežu neke krive može sumnjati da je tu singularna tačka: povratna, dvostruka i dr. odmah videti dali za tu tačku nije $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ $\frac{\partial F}{\partial y}=0$; ako je to, onda je sigurno da je to singularna tačka.

[1]) Dvostruka (dvojna) tačka je ona tačka kroz koju prolaze dve grane krive a povratna tačka pretstavlja tačku iz koje polaze dve grane krive.

[2]) Rešenja koja dobijamo iz sistema $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ mora da zadovolji i samu funkciju $F(x,y)=0$.

2.) **Napomena.** Ako i drugi izvodi isčeznu $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0 \; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=0 \; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$ onda imamo višestruku tačku: kroz jednu tačku prolaze više grana krive.

3.) **Napomena.** Prevojna tačka za koju je $y''=0$ ne spada u singularne tačke po ovoj klasifikaciji kako smo ovde izložili.

7. Konstrukcija krivih

Da bi se prilikom konstrukcija krivih linija imao jedan pregledan postupak potrebno je vršiti ispitivanja po izvesnom redu. Mi ćemo podrobnije izložiti taj red.

1°. Najpre dolazi u obzir definisanost krive: pod definisanošću krive razume se za koje vrednosti nezavisno promenljiva postoji kriva a za koje ne. Na pr. kriva $y=\ln x$ ne postoji za $x<0$ jer kvadratni koren iz negativnog broja u realnoj oblasti ne postoji. Isto tako kriva $y=\sqrt{1-x^2}$ ne postoji za $x^2<1$ jer kvadratni koren iz negativnog broja u realnoj oblasti ne postoji. Naprotiv kriva $y=\frac{x}{x^2-1}$ definisana je u celoj ravni tj. postoji za sve vrednosti x pozitivne i negativne. Iz ovih primera se vidi da za krive koje se izražavaju pomoću *logaritama* i *parnih korenova* da za njih postoje ograničenja koja proizilaze iz izraza pod znakom korena ili logaritma. Vrednosti koje čine nulom izraze pod tim znacima pretstavljaju ograničenja.

2°. Pored ovog dolaze u obzir opšti podaci o krivoj: simetričnost (isto y za $+x$ i $-x$) nule funkcije, karakteristične vrednosti, opšte primedbe. Karakteristična vrednost bi bila za krivu $y=e^x$ vrednost $x=0$ i onda $y=e^0=1$; isto tako za $y=\ln x$ bilo bi za $x=1$, $y=0$. Opšte primedbe bi se odnosile na neku specifičnu osobinu koja odmah pada u oči. Na pr. za krivu $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ odmah se vidi da se ona nalazi iznad x — ose jer je y uvek pozitivno za makakvo x. Sem toga njene ordinate nikad neće preći vrednost 1 jer je brojitelj uvek manji od imenitelja.

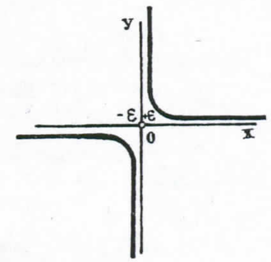
3°. Tačke u kojima za određeno x funkcija y dobija vrednost ∞ zovu se tačke diskontinuiteta. U malopređašnjem primeru $y=\frac{x^2}{x^2-1}$ tačke diskontinuiteta su $x_1=1 \; x_2=-1$; ove vrednosti istina prestavljaju asimptote ali su one i tačke diskontinuiteta. To će se uvek desiti kod racionalnih funkcija: koreni imenitelja daju i tačke diskontinuiteta i asimptote paralelne y — osi. U tačkama diskontinuiteta kriva dobija za y vrlo velike vrednosti i može imati dve grane.

Najprostiii primer za to je funkcija $y=\frac{1}{x}$; ona ima tačku diskontinuiteta $x=0$; Međutim ako stavimo $x=+\varepsilon$ gde je ε vrlo malo imamo $y=+\infty$; a ako stavimo $x=-\varepsilon$ dobijamo $y=-\infty$; dakle u tački $x=0$ kriva ima dve grane. Isto tako već pominjana funkcija $y=\frac{x^2}{x^2-1}$ za $x=1$ ima tačku diskontinuiteta: ispitajmo da li ima dve grane; stavićemo $x=1+\varepsilon$ najpre a potom $x=1-\varepsilon$

$$y=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}=+\infty$$

$$y=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1-\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{-2\varepsilon}=-\infty$$

vidi se da i ova kriva u tački diskontinuiteta $x=1$ ima dve grane. Slično bi se dobilo i za drugu tačku diskontinuiteta $x=-1$.



Sl. 46.

Primedba. Mesto ovog ispitivanja pomoću ε moguće je videti kakve će ordinate biti za vrednost $x>1$ ili $x<1$; na pr. za $x=2$ imamo $y=\frac{3}{4}$ a za $x=\frac{1}{2}$ dobijamo $y=-\frac{1}{3}$. Pošto smo dobili za $x=2$ pozitivnu ordinatu onda je za $x>2$ grana krive u pozitivnom polju y — ose, dok je za $x=\frac{1}{2}$ u negativnom polju y — ose. Ova ispitivanja treba primeniti kod tačaka diskontinuiteta, preseka i dr.

4°. Jedan važan pojam je — pojam asimptota; s tim pojmom smo se već upoznali kod hiperbole u analitičkoj geometriji. Mi ćemo se ovde upoznati samo sa jednom vrstom asimptota*): asimptote paralelne x ili y — osi. Za $x\to\infty$ treba da $y\to a$ (const) to je asimptota paralelna x — osi; ako je obrnuto: za $y\to\infty$ da $x\to b$ onda je to asimptota paralelna y osi. Na pr. kriva $y=\frac{x^2}{x^2-1}$ za $x\to\infty$ ima $y=1$ i to je jedna asimptota paralelna x — osi; ista kriva za $x_1=1 \; x_2=-1$ ima $y=\infty$ dakle $x=1$ i $x=-1$ pretstavljaju dve asimptote paralelne y — osi.

Sve ove napomene mogle bi se sistematisati u ovu tablicu za ispitivanje krivih.

1°. Definisanost krivih (prema Izrazima pod znakom parnog korena i logaritma).

2°. Opšti podaci: simetrija, preseci, karakteričtične vrednosti, opšte primedbe: ograničenje vrednosti i dr,

3°. Tačke diskontinuiteta — ispitivanje broja grana krive.

4°. Asimptote paralelne koordinatnim osama.

Ovo ispitivanje krivih je bez diferencijalnog računa i za vrlo veliki broj krivih koje dolaze u praksu ono je dovoljno.

---

*) Kod asimptota koje nisu paralelne osama postoji poseban postupak kako se dolazi do njih — no za naše ciljeve to ne dolazi u obzir.

Naravno, da imamo krivih kod kojih otpadaju čiiavi stupnjevi ovih ispitivanja. Tako na pr. za krivu $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ otpadaju ispitivanja grana krive jer su tačke diskontinuiteta imaginarne.

Na primeru ćemo pokazati sistematski rad po izloženoj tablici.

Primer. Konstruisati krivu $y=\frac{x^2}{x^2-1}$

1. Definisanost	Kriva je definisana u celoj ravni (nema parnih korena ni logaritama).
2. Opšti podaci: simetrija, preseci, karakteristične vrednosti, ograničenja za vrednosti y	Kriva je simetrična prema y jer se ista vrednost y dobija za x i $-x$; za $x=0$ imamo $y=0$ pa je to presek.
3. Tačke diskontinuiteta (D) ispitivanje grana krive	y postaje beskrajno za $x^2-1=0$; tačke diskontinuiteta su D_1 sa $x=+1$ i D_2 sa $x=-1$.

Sad ispitajmo grane krive u tačkama diskontinuiteta za $x=1+\varepsilon$ imamo

$$y=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}=+\infty$$

za $x=1-\varepsilon$

$$y=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1-\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-2\varepsilon}{-2\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{-2\varepsilon}=+\infty$$

dakle u tački $x=1$ ima kriva dve grane $y=+\infty$ i $y=-\infty$ isto bi dobili i za tačku $x=-1$.

4. Asimptote (A)

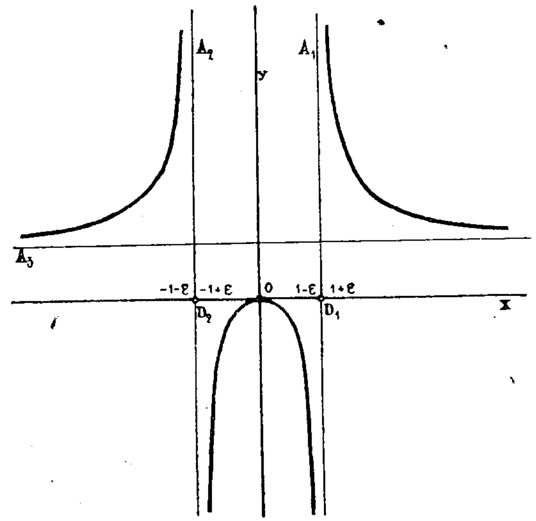
Dve asimptote su već dobijene to su $x=1$ $x=-1$ protumačene kao prave paralelne y-osi.

Treću dobijamo deleći i brojitelj i imenitelj najvećim stepenom x pri čemu $x\to\infty$, dakle

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

Sad možemo konstruisati krivu: na crtežu se najpre obeleže asimptote i tačke diskontuiteta kao i karakteristične vrednosti, pa se prema njima ucrtava kriva.

Tako ćemo za našu krivu dobiti sl. 47:



Sl. 47.

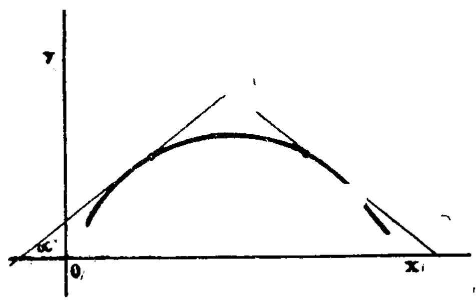
Napomenuli smo da je za priličan broj krivih ovo ispitivanje dovoljno — ali ima krivih koje zahtevaju podrobnija ispitivanja pomoću diferencijalnog računa. Taj drugi deo ispitivanja sastoji se iz ovih stupnjeva.

1° Ispitivanje toka funkcije pomoću izvoda. Sa slike (sl. 48) se vidi da kad kriva raste uglovi su oštri, tangensi su pozitivni tj. izvod je pozitivan za te vrednosti x-a. Obrnuto, ako je izvod negativan, kriva opada.

Na primer kriva $y=e^x$ stalno raste jer je $y=e^x$ uvek pozitivno za makakvo x. Isto tako kriva $y=\ln x$ koja postoji samo za $x>0$, stalno raste jer je

$$y'=\frac{1}{x}$$

uvek pozitivan za sve pozitivne x-ove.



Sl. 48.

2° Konkavnost i konveknost ispituje se pomoću drugog izvoda a prema primedbi učinjenoj kod Maximum-a i minimum-a; za $y''=0$ imamo prevojne tačke (kad je $y'''\neq 0$).

3° Traženje ekstremnih vrednosti funkcije zahteva da se povede računa o onome što je već napomenuto kod Maximum-a i minimum-a.

Ima krivih koje nemaju ekstremuma. Na pr. kriva $y'=e^x$ čiji je izvod $y'=e^x$ nema ekstremumae jer e^x ne može biti nula ni za koje konačne vrednosti x-a; isto tako kriva $y=\ln x$ čiji je izvod $y'=\frac{1}{x}$ nema ekstremuma.

Imajući celu sistematiku ispitivanja bez diferencijalnog računa i sa diferencijalnim računom, moguće je sastaviti ovaj pregled stupnjeva ispitivanja i prikupljanja podataka za konstrukciju.

I

1. *Definisanost.* (da li se kriva prostire u celoj ravni — da li nema znaka ln i parnih korena).

2. *Opšti podaci:* Simetrija, nule, karakteristične vrednosti, ograničenja vrednosti y.

3. *Tačke diskontinuiteta* i ispitivanja grana krivih u blizini tačaka diskontinuiteta.

4. *Asimptote paralelne x-osi* $(x \to \infty)$ *i paralelne y-osi* $(y \to \infty)$.

II

1. *Maximum i minimum* (uz to tok krive pomoću y′).

2. *Prevojne tačke* (uz to konkavnost).

3. *Singularne tačke.*

Ova tablica trebala bi za naročito komplikovane slučajeve da se dopuni još detaljnijim uputstvima ali je za mnoge krive ovo već dovoljno — pa čak i sam prvi deo izložen pod I.

Napominjemo da smo ovo izveli za krive Déscartes-ovog sistema i da bi trebalo činiti izvesne izmene za polarni sistem — no kako je onaj prvi u češćoj upotrebi ograničili smo se samo na to. Sem toga ovo se odnosi u glavnom na krive u eksplicitnom obliku a za krive u implicitnom obliku treba učiniti izvesne dopune.

Zadaci za vežbanje:

1⁰ Konstruisati krive $y = e^x$ (eksponencijalna kriva)

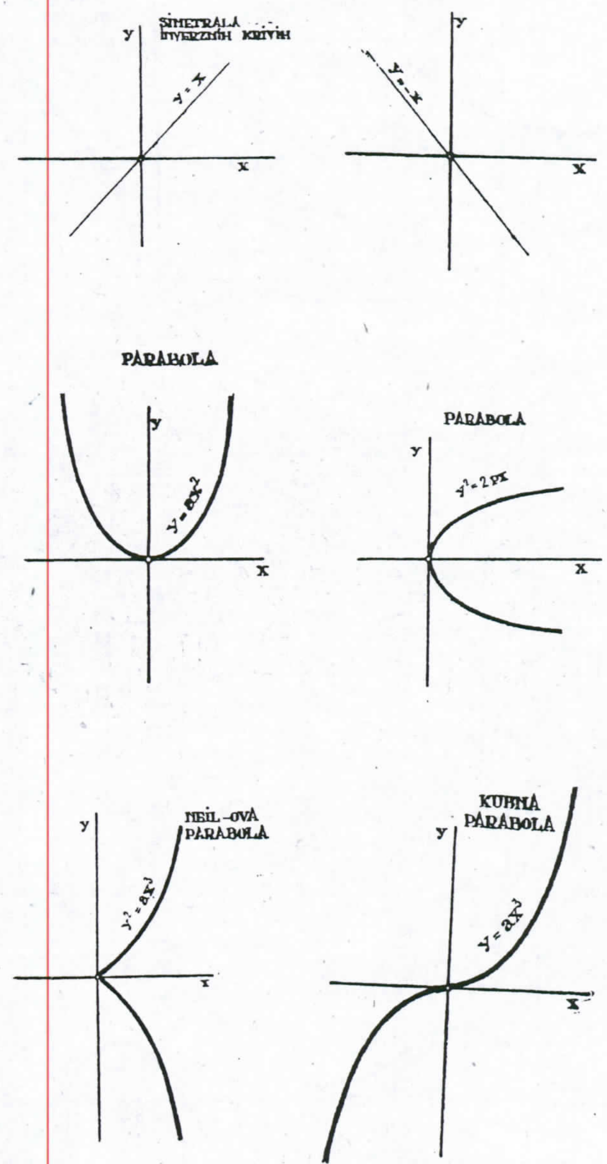
$y = \ln x$ (logaritamska kriva)

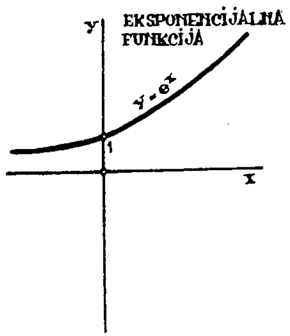
$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad \text{(lančanica)}$$

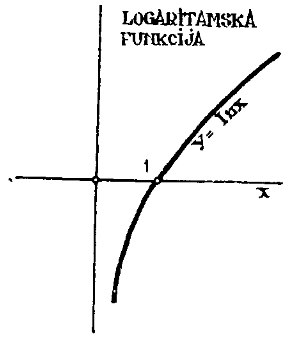
2⁰ Isto za krive $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (serpentin Newton-a),

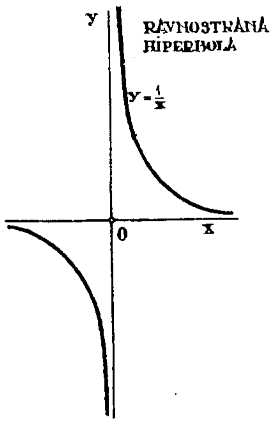
$$y = \frac{x^2}{x-1}, \qquad y = \frac{3-x}{x^2}, \qquad y = \frac{2x^2}{x^2-1}, \qquad y = x \cdot \ln x$$

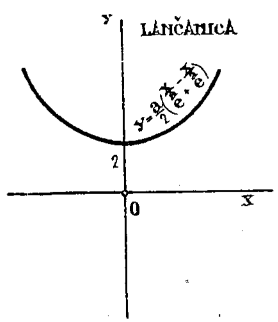
POZNATIJE I VAŽNIJE KRIVE

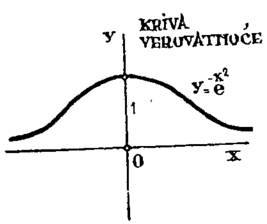


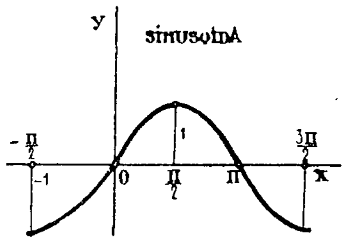


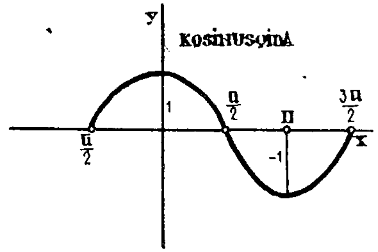


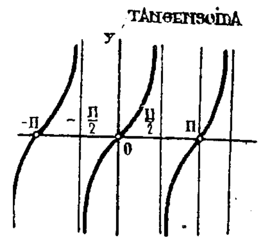












Diferencijalne jednačine

1.) Pojam diferencijalne jednačine. 2.) Neke osnovne jednačine prvog reda: a) jednačine koje razdvajaju promenljive, b) homogene jednačine. 3.) Najprostiji tipovi jednačina drugog reda.

1.) Pojam diferencijalne jednačine

U više mahova smo naglasili da se može u diferencijalnoj formi dobiti izvesna funkcionalnost. To je bio slučaj sa nekim prostim matematičkim zavisnostima kao što su površina ispod krive, površina obrtnog tela, zapremina obrtnog tela i dr.

Ovo nije moguće samo u slučaju matematičkih funkcionalnosti nego u slučaju svih onih zavisnosti iz raznih prirodnih nauka i tehnike koje koriste matematiku.

Te zavisnosti, obično, izražavaju se nezavisno promenljivom funkcijom i izvodom (ili izvodima) i čine diferencijalnu jednačinu. Dakle diferencijalna jednačina je zavisnost između promenljive, funkcije i njenih izvoda, i izražava u primenjenim naukama neki prirodni zakon.

Primeri diferencijalnih jednačina su:

$$y' + x^2 y = 0; \quad y'' = y; \quad yy' = x; \quad yy'' + y' = 0$$

Ako diferencijalna jednačina sadrži i izvode višeg reda onda je po izvodu najvišeg reda i sama jednačina toga reda. Na pr.

$y'' + y' x = 0$ (drugog reda)

$y''^2 + y' x + x' = 0$ (drugog reda i drugog stepena)

$y''' + y'_x = 0$ (trećeg reda)

Naravno mi smo se ograničili na diferencijalne jednačine sa jednom funkcijom i jednom nezavisno promenljivom, jer su u praksi ove najčešće i imaju neposrednu primenu.

Diferencijalne jednačine mogu se dobiti iz funkcija kad se iz same funkcije i njenih izvoda eliminišu konstante. Na pr. neka je data funkcija

1.) $$x^2 + Cyx - 1 = 0$$

Ako nađemo prvi izvod ove funkcije dobijamo

2.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{df}{\partial y}} = -\frac{2x + Cy}{Cx}$$

Kad izračunamo C iz same funkcije dobijamo

3.) $$C = \frac{1 - x^2}{yx}$$

i zamenimo u desnu stranu jednačine 2.) dobijamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1 - x^2}{x} - 2x}{\frac{1 - x^2}{y}}$$

odakle dobijamo množeći brojitelj *i* imenitelj sa xy.

4.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - 3x^2)}{x(1 - x^2)}$$

Dakle eliminacijom konstante C iz funkcije 1.) i njene izvodne jednačine 2.) dobili smo diferencijalnu jednačinu 4.).

Koliko proizvoljnih konstanta sadrži funkcija tog će reda biti jednačina, jer je potrebno za ove konstantne da bi se eliminisale tri jednačine: sama funkcija, prvi izvod funkcije, drugi izvod funkcije. Ako funkcija sadrži $C_1, C_2 \cdots C_n$ konstanata trebaće pored same funkcije još n jednačina (koje ćemo dobiti diferencirajući n puta funkciju) da bi izbacili te konstante. Funkcija od koje je postala diferencijalna jednačina zove se njen integral: za difeencijalnu jednačinu 4.) njen integral je 1.). U praksi je najčešće da imamo diferencijalnu jednačinu pa tražimo njen integral[1]. Postupak kojim tražimo rešenje (integral) diferencijalne jednačine zove se integracija; mi ćemo pokazati dva prosta slučaja integracije diferencijalne jednačine prvog reda.

Zadatak: 1.) Napisati diferencijalnu jednačinu kad je njen integral $y^2 = Cx$.
2.) isto za $y = C_1 x^2 + C_2 xy$

2.) Neke osnovne jednačine prvog reda

a) *Jednačine koje razdvajaju promenljive* — to su jednačine oblika

1.) $$y' = \frac{P(x)}{Q(y)}$$

[1]) Partikularni integral neke diferencijalne jednačine to je onaj integral u kome integraciona konstanta ima posebne vrednosti. Na pr. neka je opšti integral $y = ax + c$ onda je $y = ax + 1$ partikularni integral.

ili

2.) $$y' = \frac{Q(y)}{P(x)}$$

dakle na levoj strani je izvod a na desnoj količnik dveju funkcija od kojih svaka zavisi ili samo od x ili samo od y.

Ove jednačine rešavaju se prebacivanjem funkcija uz odgovarajući diferencijal (otuda („razdvajanje promenljivih") pa će biti za 1.)

$$\frac{dy}{dy} = \frac{P(x)}{Q(y)}$$

$$Q(y)\,dy = P(x)\,dx$$

ili integraciom leve i desne strane

1.) $$\int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx + C$$

slično će biti i za drugi slučaj

2.) $$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int \frac{dx}{P(x)} + C.$$

(Napominjemo da diferencijal ostaje uvek u brojitelju!)

Primer. Rešiti jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}.$$

Prebacivanjem istoimenih promenljivih uz odgovarajući diferencijal dobijamo

$$y^2\,dy = x^2\,dx$$

a odavde integraleći levu i desnu stranu

$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx + C$$

pa dobijamo

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C.$$

Zadaci. Integraliti ove diferencialne jednačine

1.) $\alpha \frac{dy}{dx} = \beta y + \gamma$, 2.) $\frac{dy}{dx} = y\sqrt{1-x}$, 3.) $\frac{dy}{dx} = y^2 x \sqrt{1+x^3}$, 4.) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1+x^2}$, 5.) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$, 6.) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+x^2}{1+y^2}$,

7.) $\frac{dy}{dx}=\frac{y(1+x^2)}{y(1+y^2)}$, 8.) $\frac{dy}{dx}=e^x y^2$, 9.) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x(1-y^2)}$

Primedba. Neke jednačine drugog reda mogu da se svedu na jednačine prvog reda: na pr. jednačina vertikalnog hitca u otpornoj sredini je

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-kv^2+mg, \text{ kako je } \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}v=\frac{dv}{dt} \text{ (jer je } \frac{ds}{dt}=v)$$

imamo $m\frac{dv}{dt}=-kv+mg$ a ova jednačina razdvaja promenljive.

b) Homogene jednačine prvog reda i prvog stepena su oblika

1.) $$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

gde je f kakva bilo funkcija. Ove jednačine se rešavaju smenom

2.) $$\frac{y}{x}=u$$

ili odavde

3.) $$y=xu$$

iz jednačine 3.) diferenciranjem dobijamo

4.) $$u+x\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

a zbog ovoga je dalje jednačina 1.)

5.) $$u+x\frac{du}{dx}=f(u)$$

odakle dobijamo

$$x\frac{du}{dx}=f(u)-u$$

što daje

6.) $$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

Iz poslednje jednačine 6.) vidimo da su promenljive razdvojene. Dakle homogena jednačina 1.) smenom 2.) svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive. Posle zuvršene integracije jednačine 6.) vraćamo se na stare promenljive zamenjujući u integralu jednačine 6.) mesto u izraz $\frac{y}{x}$, jer je $u=\frac{y}{x}$.

Primer. Rešiti jednačinu $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1$. Kako leva strana zavisi od $\frac{y}{x}$ to ćeme izvršiti smenu $\frac{y}{x}=u$ i dobijamo prema jednačini 4.)

$$u+x\frac{dy}{dx}=u^2+u+1$$

a odavde

$$u\frac{du}{dx}=u^2+1$$

ili

$$\frac{du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg} u=\ln x+\ln c$$

a) $\operatorname{arctg} u=\ln cx$

Ako bi hteli da rešimo po y koristili bi jednačinu a)

$$u=\operatorname{tg}\ln cx$$

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\ln cx$$

$$\boxed{y=x\operatorname{tg}\ln CX}$$

Zadaci: Rešiti ove jednačine

1.) $\frac{dy}{dx}=\operatorname{cotg}\frac{y}{x}-\frac{y}{x}$, 2.) $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

3.) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$

1.) **Primedba.** Nije samo homogena jednačina jedina koja se svodi smenom na razdvajanje promenljivih. Veliki broj jednačina različitim smenama svodi se na razdvajanje promenljivih.

Na pr. $y' = 2\frac{y}{x} + f(x)$ smenom $y = x^2 u$

$$y' = \frac{y}{x \ln x} + f(x) \text{ smenom } y = u \ln x,\ y^2 = xf(yy') \text{ smenom } y^2 = u$$

pa onda $\frac{u}{x} = f\left(\frac{dy}{dx}\frac{1}{2}\right)$ ili $\varphi\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$ a onda novom smenom $\frac{u}{x} = t$.

2.) **Primedba.** Neke jednačine drugog stepena po izvodu y' mogu se rešavanjem po y' svesti na razdvajanje promenljivih, tako na pr.

$$y'^2 + xyy' - x^2 y^3 = 0; \quad y'^2 - 2xyy' + y^2 = 0;$$

$$y'^2 + (x + \alpha) yy' + y^2 = 0; \quad y'^2 + f(x) yy' + y^2 = 0$$

$$y'^2 + \varphi(x) yy' + xy^2 = 0.$$

3.) **Najprostiji tipovi jednačina drugog reda.** Sada ćemo upoznati neke najprostije tipove jednačina drugog reda koje su dosta česte u praksi.

a) jednačina tipa $y'' = a$

kako je $y'' = \frac{dy'}{dx}$ imamo

$$\frac{dy'}{dx} = a,\ dy' = adx \qquad \int dy' = \int adx \qquad y = ax + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = ax + C_1,\ dy = a \cdot x \cdot d \cdot x + C_1\, dx, \int dy = \int ax d_x + \int C_1\, dx$$

$$y = a\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

(Ova se jednačina javlja kod slobodnog padanja u bezvazdušnom prostoru).

b) $y'' = f(x)$ jednačina ovoga tipa integrali se isto kao i prethodni primer

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad dy' = f(x)\, dx \qquad y' = \int f(x)\, dx + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\, dx + C_1 \qquad dy = \left(\int f(x)\, dx\, C_1\right) dx$$

$$\int dy = \int\left(\int f(x)\, dx + C_1\right) dx, \qquad y = \int\left(\int f(x)\, dx + C_1\right) dx + C^2.$$

(Ova jednačina $y'' = f(x)$ pretstavlja jednačinu elastične linije).

v) jednačina tipa $y'' = by$; ova jednačina zadovoljena je partikularnim rešenjem $y = e^{\lambda x}$ gde je $\lambda = \text{const.}$ jer ako se izračuna imamo

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \qquad b\, y = \lambda\, e^{dx}$$

pa je

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = b e^{\lambda x}$$

odakle dobijamo

$$\lambda = \pm\sqrt{b}$$

i zato imamo dva partikularna integrala

$$y_1 = e^{\sqrt{b}x} \qquad y_2 = e^{-\sqrt{b}x}$$

Lako je uveriti se da sy $C_1\, y_1$ i $C_2\, y_2$ takođe integrali (gde C_1 i C^2 konstante) pa čak i njihov zbir $C_1 y^1 + C_2 u_2 = C_1\, e^{\sqrt{bx}} + C_2\, e^{-bx}$ jer ako se on diferencira i stavi u gornju jednačinu dobijamo identitet. Poslednji izraz tj. zbir $C_1 e^{\sqrt{bx}} + C_2\, e^{-\sqrt{bx}}$ pretstavlja opšti integral jer ima dve proizvoljne konstante a integral jednačine drugog reda mora imati i dve proizvoljne $C^1 e^{\sqrt{bx}} + C^{-\sqrt{bx}}$ zadovoljava uslov da ima dve proizvoljne konstante — on pretstavlja opšti integral

Dakle integral jednačine $y'' = by$ jeste

$$y = C_1\, e^{\sqrt{bx}} + C_2\, e^{-\sqrt{bx}}$$

Kako b može biti makakva konstanta pozitivna[1]) ili negativna to se može desiti da b bude baš negativno i tada imamo

$$y_1 = e^{i\sqrt{bx}}$$

ili primenom Euler-ovog obrasca

$$y = \cos\sqrt{b} \cdot x + i \sin\sqrt{b} \cdot x$$

---

[1]) Kad je b pozitivno onda ostajemo pri već izvedenoj formuli integrala

$$y = C_1\, e^{\sqrt{bx}} + C_2\, e^{\sqrt{b\,x}}$$

pa je zato izvedena formula[1])

$$y = A\cos kx + B\sin kx.$$

Međutim ponovnim uvođenjem oznaka $A = C\sin\gamma$, $B = C\cos\gamma$ dobijamo

$$y = C[\cos kx \sin\gamma + \sin kx \cos\gamma]$$

ali kako izraz u zagradi, po poznatoj teoremi trigonometrije pretstavlja $\sin(kx+\gamma)$ to imamo definitivno

$$y = C\sin(kx+\gamma).$$

(Jednačina pomenutog tipa je u stvari jednačina harmonijskog kretanja).
Za rešenje nešto komplikovanije jednačine

$$y'' = ay + b$$

treba izvršiti smenu $z = ay + a$ (jednačina ovog tipa $y'' = -k^2(y - a - f)$ gde su k. a i f konstante javlja se kod problema izvijanja u mehanici)

g) Najzad pomenimo još jedan tip — a to je

$$y'' = f(y)$$

koju ćemo integraliti ovako: pomnožićemo obe strane sa y, pa imamo:

$$y'y' = f(y)y'$$

ili možemo napisati

$$y'dy' = f(y)dy$$

pa sad sa leve strane imamo promenljivu y' a sa desne y — dakle promenljive su razdvojene. Integralimo levu i desnu stranu

$$\int y'dy' = \int f(y)dy$$

$$\frac{y'^2}{2} = \int f(y)dy + C_1$$

odakle je

$$y' = \sqrt{2\int f(y)dy + C_1}$$

[1]) Lako se uveravemo da kad jedna kompleksna funkcija $y = P + iQ$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ gde su a_1, a_0 funkcije x onda su P i Q (realni i imaginarni deo) takođe partikularni integrali — pa je lako napisati opšti integral.

što dalje daje

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = x + C_2$$

Dalji rad zavisi od integracije integrala $\int f(y)dy$ kao i od drugog integrala čiju integraciju još treba izvršiti. (Ovome tipu pripadaju i dve prethodne jednačine koje se mogu još i ovako rešiti).

Ova četiri primera diferencijalnih jednačina drugog reda dosta su česta u praksi i uz spomenute jednačine prvog reda pretstavljaju najprostije ali važne diferencijalne jednačine. Inače diferencijalne jednačine pretstavljaju važnu granu infinitezimalne matematike — jer su one najpogodnije sredstvo za deskripciju prirodnih pojava preko čijih karakterističnih diferencijalnih zavisnosti se formiraju prave finkcionalnosti koje pretstavljaju prirodne zakone.

PRIMENA OSNOVA INFINITEZIMALOG RAČUNA NA MEHANIKU I DENDROMETRIJU

1. Kinematičko značenje prvog i drugog izvoda. 2. Statički moment — težište. 3. Pappus — Guldin-ove teoreme. 4. Primeri diferencijalnih jednačina. 5. Zakon isticanja tečnosti. 6. Različititi zadaci.

1. Kinematičko značenje prvog i drugog izvoda

Zakon jednakog kretanja pretstavljen je funkcijom

$$s = ct$$

gde je s put, c brzina, t vreme. Iz ove funkcije dobijamo

$$c = \frac{s}{t}$$

što pretstavlja brzinu izraženu pređenim putem i vremenom. U nejednakom kretanju za dva vremenska intervala t_1 i t_2 imamo srednju brzinu datu količnikom.

1.) $$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m$$

pri čemu smo razliku dve vrednosti jedne iste promenljive obeležili kao priraštaj — što i jeste u stvari po definiciji priraštaja.
Ako je uopšte put s dat u funkciji vremena dakle

2.) $$s = f(t)$$

onda možemo posmatrati taj odnos priraštaja imajući na umu funkcionalnu vezu 2.)

Neka funcija s i nezavisna promenljiva t dobijaju priraštaje

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t)$$

ili dalje

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

Kako želimo da posmatramo odnos priraštaja $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ podelimo levu i desnu stranu sa Δt pa ćemo dobiti

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Ako je Δs i Δt teže nuli onda diferencijalni količnik $\frac{ds}{dt}$ ne označava više srednju brzinu nego brzinu u beskrajno malim intervalima vremena — dakle stvarnu brzinu sa svaki taj beskrajno mali interval vremena pa imamo (pošto desna strana pretstavlja izvod od $f(t)$)

3.) $$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

Formula 3.) omogućava nam da izračunamo brzinu u ma kom vremenu — ako je put dat u funkciji vremena.

Primer. Zakon jednako ubrzanog kretanja dat je formulom $s = \frac{1}{2} g t^2$; odrediti brzinu.
Prema formuli 3.) biće

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} g \cdot 2t = gt$$

Na sličan način moguće je protumačiti i ubrzanje. Ubrzanje je priraštaj brzine u izvesnom vremenskom intervalu dakle:

4.) $$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ako se pređe na diferencijale imamo

5.) $$u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

ili kako je

$$\frac{dv}{dt} = v'(t) = \frac{d}{dt} v$$

imamo

6.) $$u = \frac{d}{dt} f'(t) = f''(t)$$

Jednačine 5.) i 6.) pokazuje da je ubrzanje: *izvod brzine po vremenu* ili drugi *izvod puta $s = f(t)$ po vremenu.*

Primer. Ako potražimo ubrzanje u prethodnom primeru imamo

$$\frac{dv}{dt} = (gt)' = g$$

ili na drugi način (kao drugi izvod puta po vremenu)

$$u = \frac{d^2 s}{dt^2} = \left(\frac{1}{2} g t^2\right)''_t = \left(\frac{1}{2} 2\, g t\right)'_t = \left(gt\right)' = g$$

Zadaci.

1.) Naći brzinu i ubrzanje pri harmonijskom kretanju datom zakonom $y = r \sin \omega t$ gde su r i ω konstante (r je najveća amplituda a $\frac{2\pi}{\omega}$ trajanje jedne oscilacije.

2.) Naći brzinu i ubrzanje kad se materijalna tačka kreće po krugu konstantnom uglovnom brzinom ω, pri čemu su koordinate date u funkciji vremena.

$$x = r \cos \omega t \quad y = r \sin \omega t$$

3.) Parametarske jednačine kosog hitca date su jednačinama

$$x = ct \cos \alpha \quad y = ct \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

gde su α, c, g konstante. Odrediti brzinu i ubrzanje pri ovom kretanju. (Naći najpre $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$ pa podeliti)

Napomena. Kako se iz jednačine 3.) vidi — brzina ima pravac tangente na krivu koja pretstavlja put s u funkciji vremena t.

2. Statički momenat — težište.

Statički ili obrtni moment jegne materijalne tačke je proizvod iz mase m i njenog otstojanja l od ose ili ravni. Za više materijalnih tačaka biće njihov statički momenat suma momenta svih datih tačaka — dakle

1.) $$M = \sum_{i=1}^{i=n} l_i \cdot \Delta m$$

Ako se broj tačaka uvećava beskrajno a mase tačaka postaju beskrajno male — imamo

$$2.)\qquad M = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta m \to 0}} \sum_{i=1}^{i=n} l_i \cdot \Delta m = \int_{m_1}^{m_2} l\, dm$$

Kako je elemenat mase (gde je dv elemenat zapremine)

$$dm = dv \cdot \tau$$

gde τ konstanta i pretstavlja gustinu — možemo zbog uprošćenja staviti $\tau = 1$ jer se težište neće promeniti zbog veličine gustine (ako su mase homogene). Za slučaj da je masa raspoređena po zapremini (telu) imamo da je elemenat mase (pri $\tau = 1$)

$$dm = dv$$

slično će biti ako su mase raspoređene po površini (dF elemenat površine)

$$dm = dF$$

i ako su mase raspoređene duž neke linije (elemenat linije ds)

$$dm = ds.$$

Zato će formula 2.) biti oblika

$$3.)\quad M = \int_{v_1}^{v_2} l \cdot dv \qquad 3')\quad M = \int_{F_1}^{F_2} l \cdot dF \qquad 3'')\quad M = \int_{s_1}^{s_2} l \cdot ds$$

pri čemu granice određenog integrala označavaju intervale (odnosno površine, zapremine) u kome su mase raspoređene.

Formule 3.) 3') 3'') pretstavljaju statički ili obrtni momenat jedne mase u odnosu na jednu osu ili jednu ravan.

Sad ćemo videti u kakvom odnosu stoji obrtni momenat i težište.

Težište je ona tačka u kojoj se može zamisliti sadržana cela masa tela pri čemu je momenat te tačke jednak momentu celoga tela tj.

$$l_0 \cdot m = M$$

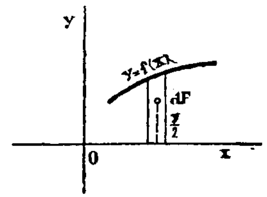
gde je l_0 rastojanje težišta.

Prema tome kako su mase raspoređene (po zapremini, površini po liniji) imamo

$$4.)\qquad l_0 \cdot V = M \qquad l_0 \cdot F = M \qquad l_0 \cdot S = M$$

gde je l_0 otstojanje težišta.

Sad ćemo izračunati statički momenat jedne površine u odnosu na dve ose koje najčešće dolaze u obzir — to su ose koordinatnog sistema x i y. Neka je dF elemenat površine pravougaonika $y \cdot dx$; masa raspoređena na tom elementarnom pravougaoniku imaće statički momenat jednak momentu njenog težišta pomnoženim rastojanjem težišta od ose x a to je $\frac{y}{2}$, dakle momenat masa paspoređenih na elementarnoj površini



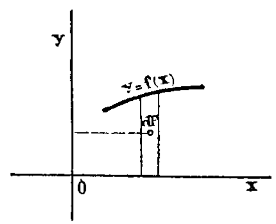
Sl. 63.

$$\frac{y}{2}\, y\, dx = \frac{y^2}{2}\, dx$$

a onda za celu površinu F biće

$$5.)\qquad M_x = \int_a^b \frac{y^2}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int_a^b y^2\, dx$$

U odnosu na y — osu elementarna površina sa masom dx ima težište čije je rastojanje x, to je momenat cele površine $xy\,dx$ ili cele površine F



Sl. 64.

$$6.)\qquad M_y = \int_a^b xy\, dx$$

Kako je $y = f(x)$ to je moguće naći momente svake površine ispod određene krive y kad znamo njenu jednačinu.

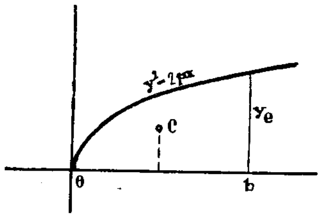
Prema ovome na osnovu druge od jednačina 4) i jednačina 5) i 6) možemo napisati

$$\left(F = \int_a^b y dx;\quad l_0 = \frac{M}{F}\right)$$

$$7.)\qquad x_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\int_a^b y^2\, dx}{\int_a^b y dx} \qquad\qquad y_0 = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}$$

gde su x_0 i y_0 koordinate težišta, jer druga jednačina (4) važi za rastojanje odma koje ose pri čemu su izračunati površina F i momenat M.

Primer. Naći težište polovine parabolinog odsečka dužine b kad je jednačina parabole $y^2 = 2\,px$.



Sl. 65.

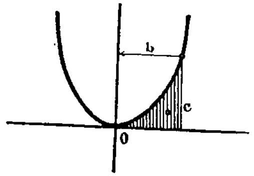
Prema jednačinama 7.) imaćemo

$$x_0 = \frac{1}{2}\frac{\int_0^b 2\,px\,dx}{\int_0^b \sqrt{2\,px}\,dx} \qquad y = \frac{\int_0^b 2\sqrt{2\,px}\,dx}{\int_0^b \sqrt{2\,px}\,dx}$$

odakle dobijamo posle izračunavanja

$$x_c = \frac{3}{4}\frac{b}{y_b} \qquad y_c = \frac{3}{5}b$$

2.) **Primer.** Naći težište odsečaka ispod parabole $y = cx^2$ kada je njegova širina b.



Sl. 66.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^b y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^b (cx^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^b c^2x^4\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}c^2\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^b = \frac{1}{2}c^2\frac{b^5}{5} = \frac{1}{10}y^2{}_b\cdot b$$

Po poznatoj formuli za M_y biće isto tako

$$M_y = \int_0^b xy\,dx = \int_0^b xcx^2\,dx = c\int_0^b x^3\,dx = c\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^b = \frac{c}{4}\,b^4$$

Površina ispod parabolinog luka od 0 do M

$$F = \int_0^b y\,dx = \int_0^b cx^2\,dx = c\int_0^b x^2\,dx = c\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^b = c\cdot\frac{b^3}{3} = \frac{cb^2b}{3} = \frac{1}{3}\,by_b$$

Zato će biti

$$x_c = \frac{M_y}{F} = \frac{3}{4}\frac{y_bb^2}{by_b} = \frac{3}{4}\cdot b$$

$$y_c = \frac{M_x}{F} = \frac{3}{10}\cdot y_b$$

3.) **Primer.** Naći težište jednog kružnog luka s. Neka je luk s simetričan prema y — osi tada je

$$x_c = 0, \quad y_c = \frac{M_x}{M}$$

gde je

$$M_x = \int_0^b y\,ds$$

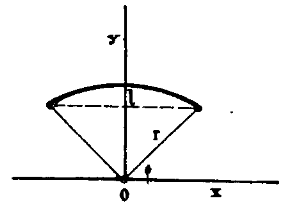
za krug koji je sa centrom u početku imamo

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

ali ako se uzmu polarne koordinate, imamo

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

za $y = \sqrt{r^2 - r^2\cos\varphi} = r\sqrt{1 - \cos\varphi} = r\sin\varphi$



Sl. 67.

i onda je $ds = r\,d\varphi$ pa će biti

$$M_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi\;r\,d\varphi = r^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$-\,r^2\cos\varphi_2 + r^2\cos\varphi_1 = -\,r^2\,(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)$$

Kako je $\varphi_2 = 180 - \varphi_1$ to je $\cos\varphi_2 = \cos(180 - \varphi_1) = -\cos\varphi_1$ i kako je $\frac{l}{r} = 2\cdot\cos\varphi_1$ to imamo za M_x

$$M_x = 2\,r^2\cos\varphi_1 = r^2\cdot\frac{l}{r} = rl.$$

Prema formuli za y_c imamo

$$y_c = \frac{M_x}{s} = \frac{l\cdot r}{s} \qquad y_c = \frac{l\cdot r}{s}$$

što pretstavlja obrazac za težište makakvog kružnog luka — pri čemu smo za početak uzeli centar kruga, a sam luk postavili simetrično prema y — osi. Drugu koordinatu težišta nema potrebe tražiti — $x_c = 0$.

Gornja formula za specijalan slučaj za polukrug (pri čemu je $l = 2r$ $s = r\pi$) postaje

$$y_c = \frac{2r\,r}{r\pi} = \frac{2r}{\pi} \approx 0{,}6366\,r.$$

3. Pappus-Guldin-ove teoreme

Zapremina obrtnog tela po obrascu iz integralnog računa je

1.) $$V = \pi\int_a^b y^2\,dx$$

ovu formulu možemo napisati i ovako

2.) $$y = 2\pi \int_a^b \frac{1}{2} y^2 \, dx$$

Funkcija pod integralom pretstavlja moment oko x-ose za površinu F ispod krive u granicama od 0 do b pa će biti

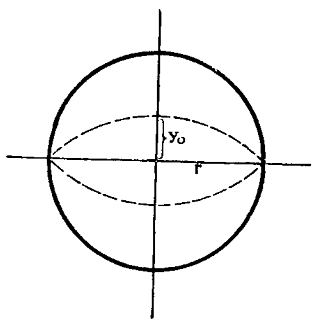
3.) $$V = 2\pi M_x$$

ili kako je $\frac{M_x}{F} = y_0$ dobijamo iz formule 3.)

4.) $$V = 2\pi M_x = 2\pi F y_0 = 2\pi y_0 F$$

Formula 4.) izražava značajnu I Pappus-Guldin-ovu teoremu: Zapremina obrtnog tela jednaka je *proizvodu iz površine koja se obrće i puta njenog težišta.*

Primer. Odrediti težište polukruga poluprečnika r. Ako se polukrug obrće oko x-ose dobijamo zapreminu $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$; po Pappus-Guldin-ovoj teoremi imamo



Sl. 68.

$$V = 2\pi y_0 F$$

odakle je

$$\frac{4}{3} r^2 \pi = 2\pi y_0 \cdot \frac{1}{2} r^2 \pi$$

a odavde je dalje

$$y_0 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \approx 0{,}4244\, r.$$

Ovu prvu Pappus-Guldien-ovu teoremu možemo koristiti ili za određivanje težišta jedne površine (ako nam je poznata zapremina kao u prethodnom slučaju) ili za dobijanje zapremina (kad nam je poznata površina i njeno težište).

Za izvođenje druge Papus-Guldin-ove teoreme služimo se ovim obrascima. Površina obrtnog tela je

5.) $$P = 2\pi \int_a^b y \, ds$$

za tela koja postaju obrtanjem oko x — ose.

Međutim integral

6.) $$M_x = \int_a^b y \, ds$$

pretstavlja statički momenat linije koju pretstavlja krivu y i zato je

7.) $$P = l \pi M_x$$

Ali kako je

8.) $$2\pi y_0 2 = M_x$$

po formuli 7.) dobijamo

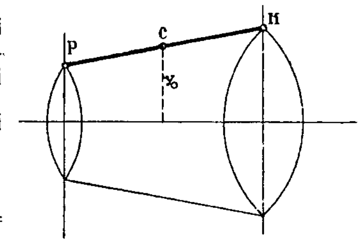
9.) $$P = 2\pi y_0 l$$

Iz formule 9.) čitamo II Pappus-Guldin-ovu teoremu. *Površina obrtnog tela jednaka je proizvodu iz dužine krive i puta njenog težišta.*

Neka se deo prave između tačaka P (o,b) i M (m, h) obrće oko x — ose. Odrediti površinu opisanog tela. Po drugoj Pappus-Guldin-ovoj teoremi biće $P = 2\pi y_0 l$ pri čemu je $y_0 = \frac{b+h}{2}$ $l = \sqrt{m^2 + (h-b)^2}$ i onda je

$$P = 2\pi y_0 l = 2\pi \frac{b+h}{2} \sqrt{m^2 + (h-b)^2} =$$

$$= \pi (b+h) \sqrt{m^2 + (h-b)^2}$$ ili ako l označimo sa s („bočna strana" zarubljene kupe) i $b = r$, $h = R$ onda $P = \pi (r + R)$ s pretstavlja površinu omotača zarubljene kupe što bi se dobilo i elementarnim putem,



Sl. 69.

Napomena. Od dveje Pappus-Guldin-ovih teorema u većoj je upotrebi prva koja se odnosi na zapreminu obrtnog tela.

Pomoću Pappus-Guldin-ove II teoreme dobijamo lako težište polukruga

$$P = 2\pi y_0 l$$

Ako se polukrug obrće onda je $P = 4r^2\pi$ i kako je za polukrug $l = r\pi$ to je

$$4 r^2 \pi = 2\pi y_0$$

odakle imamo

$$y_0 = \frac{2r}{\pi} \approx 0{,}6366\, r$$

Dakle isti rezultat koji smo izveli pomoću obrasca za težište luka iz statičkog momenta.

4.) Razne diferencijalne jednačine

a) Kao prvi primer poslužiće nam jednačina slobodnog padanja u otpornoj sredini (vazduhu).

U ovom slučaju je sila $P = m u = m \frac{d^2 s}{dt^2}$; otpor je srazmeran kvadratu brzine (Newton-ov zakon iz aerodinamike $W = kv^2$) a otpor je suprotan dejstvu zemljine teže $G = m \cdot g$, pa će zato biti:

$$P = g - W$$

ili

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = mg - kv^2$$

Ovu poslednju jednačinu možemo napisti (jer je $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$) $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv$

odakle je $\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k} - v^2\right)$ pa smo dobili mesto jedne jednačine drugog reda jednačinu prvog reda. Stavimo $\frac{mg}{k} = a$ pa imamo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{a^2}(a^2 - v^2)$$

ili

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{g}{a^2} dt$$

Ova jednačina razdvaja promenljive pa ćemo je odmah integraliti

$$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \int \frac{g}{a^2} \cdot dt$$

na levoj strani rastavićemo integrale na sabirke pa će biti:

$$\frac{1}{2a}\int \frac{dv}{a+v} + \frac{1}{2a}\int \frac{dv}{a-v} = \frac{g}{a^2} \cdot t$$

$$\ln(a+v) - \ln(a-v) = \frac{2g}{a} \cdot t$$

odavde je

$$\frac{a+v}{a-v} = e^{2\frac{g}{a}t}$$

ili

$$v = a\frac{e^{2\frac{g}{a}t} - 1}{e^{2\frac{g}{a}t} + 1}$$

ili kada se pomnoži i brojitelj i imenitelj sa $e^{-\frac{g}{a}t}$ dobijamo

$$v = a\frac{e^{\frac{g}{a}t} - e^{-\frac{g}{a}t}}{e^{\frac{g}{a}t} + e^{-\frac{g}{a}t}}$$

Kako je $v = \frac{ds}{dt}$ onda imamo:

$$s = a\int \frac{e^{\frac{g}{a}t} - e^{-\frac{g}{a}t}}{e^{\frac{g}{a}t} + e^{-\frac{g}{a}t}} dt = \frac{a^2}{g}\ln\left(e^{\frac{g}{a}t} + e^{-\frac{g}{a}t}\right)$$

pa smo dobili put u funkciji vremena.

b) Problem slobodnog padanja u bezvazdušnom prostoru svodi se na jednačinu:

1.)
$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

jer je ubrzanje konstantno pri slobodnom padanju. Iz gornje jednaćine, kako je

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

imamo $\frac{dv}{dt} = g$ ili

2.) $v = gt + c_1$ a kako je $v = \frac{ds}{dt}$ to je dalje $ds = gt\ dt + c_1\ dt$ ili odavde integracijom imamo

3.)
$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

Vrednosti konstanata C_1 i C_2 određuju se iz uslova tj. iz jednačine 2.) U početku kretanja za $t = 0$, $v_0 = C_1$, a iz jednačine 3.) zato imamo $s_0 = C_2$.

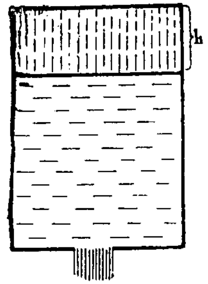
5. Zakon isticanja tečnosti

Jedan od osnovnih zakona hidromehanike je Toričelijev zakon isticanja tečnosti. Po tom zakonu je brzina isticanja tečnosti kad je otvor na dnu suda dat formulom

$$v^2 = 2gh$$

gde je v brzina isticanja, h visina vodenog stuba koji je istekao, a g ubrzanje zemljine teže. Taj se zakon lako može izvesti na osnovu principa o jednakosti kinetičke i potencijalne energije. Potencijalna energija istekle vode pre isticanja bila je

$$V_p = mgh$$



Sl. 70.

a kinetička energija te iste vodene mase m je

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

gde je v brzina isticanja.

Kako po principu o održavanju energije mora biti:

$$E_p = E_k$$

to će biti

$$\frac{m v^2}{2} = m g h$$

odakle je

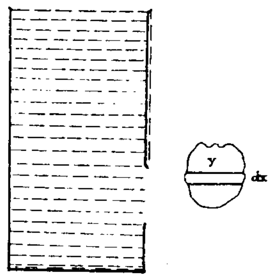
$$v = \sqrt{2gh}$$

Ako je otvor sa strane na zidu koji je upravan na dno suda, poslužićemo se posmatranjem pojave za elementaran otvor $dF = y \cdot dx$ čije je rastojanje od površine vodenog ogledala x a elementani otvor ima širinu $y = f(x)$.

Elementarno isticanje će biti:

$$dQ = dF\sqrt{2gx} =$$

$$= ydx\sqrt{2gx} = y\sqrt{2gx} \cdot dx$$



Sl. 71.

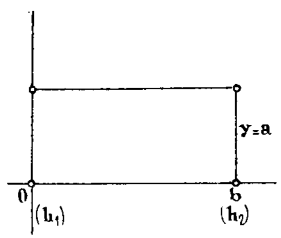
Odavde će za dve razne visine $x = h_1$ i $x = h_2$

$$Q = \sqrt{2g}\int_{h_1}^{h_2} y\sqrt{x}\,dx$$

Primer. Za pravougaoni otvor visine a i širine b — naći veličinu isticanja

$$Q = \sqrt{2g}\int_{h_2}^{h_1} a\sqrt{x}\,dx =$$

$$= \sqrt{2g}\, a \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_{h_1}^{h_2} = \frac{2\sqrt{2g}}{3}\, a\left(\sqrt{h_2^3} - \sqrt{h_1^3}\right)$$



Sl. 72.

6. Razni primeri.

a) Rad. Definicija rada je: rad je proizvod iz sile i puta pređenog u pravcu sile. Stoga će u diferencijalnom obliku to biti izraženo

$$dt = P\,ds$$

a odavde integracijom, znajući da je $P = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt}$

$$A = \int_{s_1}^{s_2} P ds = \int_{s_1}^{s_2} m\frac{dv}{dt} ds = \int_{v_1}^{v_2} m\, dv\frac{ds}{dt} = \int_{v_1}^{v_2} m\, v\, dv = m\left(\frac{v^2}{2}\right)_{v_1}^{v_2} = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2}$$

što znači da je izvršen rad promena kinetičke energije. Uzimamo kao primer rad pri istezanju jedne opruge.

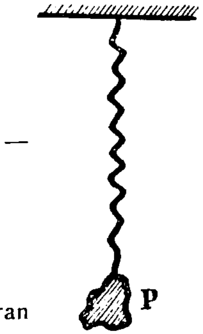
Rad sile P na diferencijalnom pomeranju ds biće

$$dA = P\,ds$$

i kako je rad opruge — sila proporcionalna istezanju — to je $P = ks$ to će biti

$$A = \int_0^s P\,ds = \int_0^s k \cdot s\,ds = k\left|\frac{s^2}{2}\right| = \frac{1}{2}k\,s^2$$

što znači da je u ovom slučaju izvršeni rad srazmeran kvadratu elongacije s.



Sl. 74.

b.) Lančanica i parabola. Jednačina lančanice $y = \frac{a}{2}\left(c^{\frac{x}{a}} + c^{-\frac{x}{a}}\right)$. Ako se razvije u Maclaurin-ov red $e^{\frac{x}{a}}$ i $e^{-\frac{x}{a}}$ pa se saberu i pomnože sa $\frac{a}{2}$ dobija se funkcija y razvijena u Maclaurin-ov red.

Dakle

$$e^{\frac{x}{a}} = 1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{a^3}\ldots\ldots$$

$$c^{-\frac{x}{a}} = 1 - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{a}x + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{a^2}x^2 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{a^3}x^3\ldots\ldots$$

sabiranjem ovih funkcija i množenjem sa $\frac{a}{2}$ dobijamo

$$y = a + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{a^3}x^3\ldots\ldots$$

U mnogim primenama dovoljno je upotrebiti prva dva člana poslednjeg reda pa se lančanica zamenjuje sa:

$$y = a + \frac{1}{2a} x^2$$

tj. dobija se parabola čije je teme na x-osi, pomereno za a u pozitivnom pravcu.

DENDROMETRIJA

1. Formule za izračunavanje zapremine stabla

U dendrometriji — nauci o merenju drvene mase — glavni problemi su: izračunavanje zapremine stabala i priraščivanje drvene mase.

Što se tiče prvog problema — ukoliko nisu u pitanju obrtna tela čiju zapreminu računamo po formuli

$$v = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

postoji čitav niz formula čije ćemo izvođenje sad razložiti.

Primetimo, da ako tela nisu obrtna i ako površina osnove g zavisi od visine x onda će elementarna zapremina biti

$$dv = g(x)\, dx$$

ili odavde integracijom

1.) $$v = \int_a^b g(x)\, dx$$

Ovu je formulu moguće upotrebiti ako je površina preseka data u funkciji visine x.

U opštem slučaju površina preseka zavisi od visine x na način koji nam nije poznat. Ali, znajući da se svaka funkcija g (x) može razviti u Maclaurin-ov red

2.) $$g(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \cdots\cdots$$

(pri čemu predpostavljamo da funkcija g (x) ispunjava uslove sa razvijanje u taj red — tj. neprekidna je a to je sigurno, jer površine g (x) nisu beskrajne ni neodređene za interval u kome ih posmatramo.) — u mogućnosti smo da se poslužimo malopređašnjom formulom 1.) Koristimo najpre dva člana gornje formule 2.) u kojoj treba odrediti još vrednost koeficijenata A, B imaćemo

3.) $$V = \int_a^b (A + Bx)\, dx = \Big| Ax + \frac{1}{2} Bx^2 \Big|_a^b$$

Ako se uzme a = 0 imamo

4.) $$V = Ab + \frac{1}{2} Bb^2$$

i neka je b = l gde je l dužina stabla pa formula 4.) postaje

5.) $$V = Al + \frac{1}{2} Bl^2;$$

da bi odredili koeficijente A i B koji su nam nepoznati setimo se

6.) $$g = A + Bx$$

i posmatrajmo preseke za x = 0 i x = l imaćemo

6'.) $$g_0 = A \quad g_l = A + Bl$$

pa dobijamo iz formule 5.)

$$V = g_0 l + \frac{1}{2} \frac{g_l - g_0}{l} l^2$$

ili odavde

7.) $$\boxed{V = \frac{g_0 + g_l}{2} l}$$

Ova formula daje zapreminu stabla pomoću površine osnovnog i krajnjeg preseka i dužine stabla. Formula 7) zove se Smalian-ova po šumaru koji ju je predložio (1806 g.).

Ako preseci nisu uzeti na osnovi i na kraju nego jedan u sredini stabla a drugi na kraju onda iz jednačine 6.) dobijamo za $x = \frac{l}{2}$, $x = l$ ovaj sistem

8.) $$g_{\frac{l}{2}} = A + B\frac{l}{2} \quad g_l = A + Bl$$

Ako iz sistema 8.) izračunamo količine A i B i stavimo u jednačinu 5.)

$$A = 2g_{\frac{l}{2}} - g_l, \quad B = \frac{2(g_l - g_{\frac{l}{2}})}{l}$$

$$V = l(2g_{\frac{l}{2}} - g_l) + \frac{2(g_l - g_{\frac{l}{2}})}{l} \cdot \frac{l^2}{2}$$

Presek $g_{\frac{l}{2}}$ označava se često sa γ pa se tako dobija iz poslednje funkcije

9.) $$\boxed{V = \gamma \cdot l}$$

Ova formula se zove Huberova (1825 g.). Slično rasuđivanje možemo koristiti ako je presek na jednoj trećini od osnove i površina preseka na kraju pa imamo

10.) $$V = l \cdot \frac{3 g_{\frac{l}{3}} + g_l}{4}$$

Ako je $g_l = 0$ (bez površine) imamo

11.) $$\boxed{V = \frac{3}{4} g_{\frac{l}{3}} \cdot l = 0{,}75\, g_{\frac{l}{3}}\, l}$$

i ova formula se zove Hosfeld-ova. Kao što se vidi sve ove tri formule izvode se na osnovu toga što je za funkciju koja pretstavlja u zavisnosti od x (visine stabla) uzeto samo dva člana Maclaurin-ovog reda i za razne preseke g određena vrednost koeficijenata A i B. Ako se zadatak reši u opštem slučaju tj. $g_{\frac{l}{n}}$ — za presek na ma kojem delu stabla i g_l presek na kraju imamo sistem 8.)

$$g_{\frac{l}{n}} = A + B \frac{l}{n}$$

$$g_l = A + B\, l$$

pa obrazac 4.) dobija obik

12.) $$V = \frac{l}{2(n-1)} \left[n g_{\frac{l}{n}} + (n-2)\, g_l \right]$$

Na ovaj način može se dobiti i formula Gauss-Simpson-a za slučaj da je ne uzima g za krajnji presek nego za 0,79 dužine stabla a $g_{\frac{l}{n}}$ treba da se za dužinu 0,21 stabla.

Dakle imamo

$$V = \frac{l}{2} (g_{0{,}21\, l} + g_{0{,}79\, l})$$

ali ako se uzme presek

$$g_{\cdot 0{,}21} \approx g_{\cdot 0{,}20} = g_{\frac{2}{5}}$$

i

$$g_{\cdot 0{,}79} \approx g_{\cdot 0{,}80} = g_{\frac{4}{5}}$$

dobijamo

13.) $$V = \frac{l}{2} \left(g_{\frac{2}{5}} + g_{\frac{4}{5}} \right)$$

što pretstavlja Gauss-Simpson-ovu formulu u obliku koji je za praksu najpodesniji.

U dosadašnjim izlaganjima koristićemo Maclaurin-ov red 2) sa svega dva člana. Ista rasuđivanja mogla bi se proširiti i na slučaj kad uzmemo iz Maclaurin-ovog reda tri člana, pa imamo za g

14.) $$g = A + Bx + Cx^2$$

i onda će biti zapremina stabla po formuli 1.)

15.) $$V = \int_0^l g\,dx = \int_0^l \left(A + Bx + Cx^2 \right) dx = \left(Ax + \frac{1}{2} Ax^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} Cx^3 \right)_0^l = Al + \frac{1}{2} Bl^2 + \frac{1}{3} Cl^3$$

gde l dužina stabla računata od osnove ($x = 0$) do vrha ($x = l$).

Koeficijente A, B i C odredićemo na isti način kao i u prethodnim rasmatranjima. Uzmimo na pr. preseke za $x = 0, x = \frac{l}{2}, x = l$ pa imamo iz jednačine 14.)

$$g_0 = A$$

16.) $$g_{\frac{l}{2}} = A + \frac{1}{2} Bl + \frac{1}{4} Cl^2$$

$$g_l = A + Bl + Cl^2$$

iz ovog sistema zamenjujući A iz prve jednačine imamo

17.) $$4\, g_{\frac{l}{2}} - g_0 = 2\,Bl + Cl^2$$

$$g_l - g_0 = Bl + Cl^2$$

Oduzimanjem ove dve jednačine dobijamo

18.) $$\frac{4 g_{\frac{l}{2}} - g_l - 3 g_l}{l} = B$$

a zatim zamenom u prvoj od jednačina 17.) imamo

19.) $$\frac{2\, g_l + 2\, g_0 - 4\, g_{\frac{l}{2}}}{l^2} = C$$

zamenom vrednosti A, B, C u formuli 15) dobijamo

$$V = l\left[A + \frac{1}{2}Bl + \frac{1}{3}Cl^2\right] = l\cdot\left[g_0 + \frac{4g_{\frac{l}{2}} - g_l - 3g_0}{2} + \frac{2g_l + 2g_0 - 4g_{\frac{l}{2}}}{3}\right]$$

a odavde je dalje, posle dovođenja na zajednički imenitelj i redukcije

$$20.)\qquad V = \frac{l}{6}\left(g_0 + 4g_{\frac{l}{2}} + g_l\right)$$

Ova formula zove se Riecke-ova formula (1849 g.) — to je u stvari Newton-ova formula ali ju je Riecke predložio za upotrebu.

Kad je $g_l = 0$ (stabla sa oštrim vrhom — neprevršena stabla) onda je

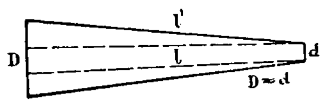
$$21.)\qquad \boxed{V = \frac{l}{6}(g_0 + 4\gamma)}$$

gde je $\gamma = g_{\frac{l}{2}}$. Moguće je izvesti čitav niz formula kao što smo i u prethodnom slučaju činili — za razne preseke y, no to stvara izlišan posao jer se neka osobita *tačnost ne da postići.*

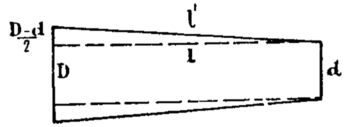
Izloženim nizom formula koji proističe iz formule 1.) i Maclaurin-ovog reda 2.) obuhvaćena su sva najčešće upotrebljena sredstva za rešenje prvog zadatka dentrometrije — izračunavanje zapremine stabla.

2. Uticaj grešaka pri merenju dužina za određivanje zapremine.

Kako često nije moguće meriti dužine koje su nam potrebne — i kako su i pri direktnom merenju dužina činjene greške, potrebno je odrediti te greške a još više greške koje bi se proizvele prilikom izračunavanja zapremine i drugih veličina. Najčešće merimo na pr. dužinu l koju uzimamo kao visinu stabla — a ona je veća od dužine l′ koja pretstavlja pravu visinu stabla. Sa slike se vidi da postoji po Pitagorinoj teoremi ovaj prost odnos



Sl. 76.



Sl. 77.

$$l'^2 = l^2 + \left(\frac{D-d}{2}\right)^2.$$

ili odavde

$$1.)\qquad l'^2 - l^2 = \left(\frac{D-d}{2}\right)^2$$

Iz formule 1.) dobijamo grešku: greška je razlika između stvarne veličine i one koju mi uzimamo.

Formula 1.) daje

$$l' - l = \frac{(D-d)^2}{4(l'+l)}$$

ili ako razliku l′—l obeležimo sa λ imamo

$$2.)\qquad \lambda = \frac{(D-d)^2}{4(l'+l)}$$

Kako razlika između $l' - l$ treba da bude što manja tj. da je l′ što bliže l to je izraz $l' + l \approx 2l'$ to formula 2.) postaje

$$3.)\qquad \lambda = \frac{(D-d)^2}{8l'}.$$

Iz obrasca 3.) se vidi da je greška u toliko veća ukoliko je razlika osnovnog i krajnjeg prečnika veća a manja utoliko ukoliko je dužina drveta veća. Sem ovoga ako se ima na umu da je dužina drveta u metrima a dužina polupréčnika u santimetrima (kao znatno manjih veličina), može se uzeti „bočna" dužina l′ mesto l, a u svakom slučaju obrazac 3.) pokazuje veličinu greške, a docnije ćemo videti izračunavanje greške za zapreminu.

Navedimo da se u cilju izračunavanja grešaka na ma kojim funkcijama može sa osobitom lakoćom i koriščú da upotrebi diferencijalni račun: data funkcija se diferencira — date veličine dobivene merenjem se zamenjuju a greške se smatraju diferencijalima a one koje su poznate zamenjuju se numeričkim veličinama. Na pr. neka je data zapremina valjka — smatrajmo da je greška učinjena samo pa prečniku — pa imamo

$$V = \frac{\pi D^2 l}{4}$$

gde je D prečnik valjka. Diferencirajmo funkciju V

$$dv = \frac{\pi l}{4}\cdot 2\cdot D\,dD\cdot$$

poslednji diferencijal označimo $dD = \sigma$ i dobijamo grešku po zapremini

$$dv = \frac{\pi l}{2}\cdot D\cdot\sigma$$

izraženu dužinom stabla l, dužinom datog prečnika D i greškom na merenju njegove dužine σ.

Ako bi se tražila greška u procentima učinjena na zapremini imamo

$$\frac{dv}{v}=\frac{p}{100}$$

tj. koji deo pretstavlja dv prema v toliko stotih delova pretstavlja p prema 100.

Poslednja formula posle zamene v i dv iz prethodnog izlaganja daje

$$p=\frac{200\,\sigma}{D}$$

što pretstavlja procentualnu grešku.

Ako su u pitanju više veličina koje su pogrešno merene upotrebićemo totalan diferencijal; za naš primer $v=\frac{\pi}{4}D^2 l$ uzećemo da su greške činjene na D i l (a ne i na π) pa će biti

$$dv=\frac{\pi}{4}\cdot D^2\cdot dl+\frac{\pi}{4}\cdot 2\cdot l\cdot D\cdot dD \qquad \begin{aligned} dD&=\sigma\\ dl&=\lambda \end{aligned}$$

ili dalje

$$dv=\frac{\pi}{4}D^2 l\cdot\left[2\frac{\pi}{D}+\frac{\lambda}{l}\right]$$

ili u procentima

$$\frac{dv}{v}=\frac{p}{100}$$

što daje procentualnu grešku na zapremini

$$p=100\left(2\frac{\sigma}{D}+\frac{\lambda}{l}\right)$$

gde bi samo zamenili D i l dobijene merenjem kao i greške σ i λ verovatno učinjene — dobijene naknadnim merenjem.

Ovaj način izračunavaja greške pomoću običnog diferenciranja veoma je praktičan i za najveći deo praktičnih potreba potpuno dovoljan.

3. Izračunavanje priraštaja

Za izračunavanje priraštaja upotrebljava se više formula od kojih ćemo prikazati četiri. Počećemo sa najjednostavnijom koja se izvodi pod ovim prostim pretpostavkama.

Neka je prvobitna masa šume m i neka ona priraste posle n godina na M onda je godišnji priraštaj

$$\frac{M-m}{n}$$

Ovaj godišnji priraštaj uporedićemo ne sa krajnjom masom M nego sa srednjom masom

$$\frac{M+m}{2}$$

Razlomak, koji daje odnos godišnjeg prirasta prema srednjoj masi

$$\frac{\frac{M-m}{n}}{\frac{M+m}{2}}$$

može se izraziti i u stotim delovima — procentima, dakle to će biti $\frac{p}{100}$ pa imamo

$$\frac{M-m}{n}\cdot\frac{2}{M+m}=\frac{p}{100}$$

a odavde

1.) $$\boxed{p=\frac{200}{n}\cdot\frac{M-m}{M+m}}$$

Ova formula zove se Presler-ova i ona je najprostija ali ne i najtačnija. Ona može da se upotrebi za kraće vremenske periode do 10 godina sa zadovoljavajućom tačnošću. Po njoj, kao i po svima drugim formulama te vrste moguće je izračunati ne samo prirast jedne šume nego i jednog stabla.

Najprostija formula je Leibniz-ova za koju se dugo verovalo da najtačnije pretstavlja kvantitativne promene u pojavi rastenja. To je poznati obrazac iz složenog interesnog računa

$$K=k\cdot q^n$$

gde su mesto K i k upotrebljene oznake M i m a mesto

$$q=1+\frac{p}{100}=1{,}0\,p$$

pa imamo

2.) $$\boxed{M=m\cdot 1{,}0\,p^n}$$

Sa praktične strane ova formula je nezgodna zbog upotrebe logaritamskog računa ali je tačnost veća nego i u jedne od onih što navodimo. Iz ove formule izvedena je Kunze-ova formula. Napišimo obrazac 2.) ovako

$$\frac{M}{m}=\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

odakle je

$$\sqrt[n]{\frac{M}{m}} = 1 + \frac{p}{100}$$

ili dalje

3.) $$p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1\right)$$

Izraz $\frac{M}{m}$ možemo identički napisati

$$\frac{M}{m} = \frac{M+m-m}{m} = \frac{M-m}{m} + \frac{m}{m} = \frac{M-m}{m} + 1$$

zato je

4.) $$\sqrt[n]{\frac{M}{m}} = \sqrt[n]{1+\frac{M-m}{m}}$$

ili po binomnom obrascu

$$\sqrt[n]{1+\frac{M-m}{m}} = \left(1+\frac{M-m}{m}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{M-m}{m} +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{1}{n}\cdot\frac{1-n}{n}\left(\frac{M-m}{m}\right)^2 \cdots\cdots$$

Množeći levu i desnu stranu ovog obrasca sa $1+\frac{n-1}{2n}\,\frac{M-m}{m}$ i zadržavajući se samo na prvoj potenciji izraza $\frac{M-m}{m}$, imamo

5.) $$\left(1+\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{M-m}{m}\right)\sqrt[n]{1+\frac{M-m}{m}} \approx 1 + \frac{M-m}{m}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{2n}\right)$$

ili odavde

$$\sqrt[n]{1+\frac{M-m}{m}} \approx \frac{1+\frac{M-m}{m}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{2n}\right)}{1+\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{M-m}{m}}$$

što je dalje

$$\sqrt[n]{1+\frac{M-m}{m}} = \frac{1+\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{M-m}{m}+\frac{M-m}{m}\,\frac{1}{n}}{1+\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{M-m}{m}}$$

a ovo najzad daje

6.) $$\sqrt[n]{1+\frac{M-m}{m}} = 1 + \frac{\frac{M-m}{m}\cdot\frac{1}{n}}{1+\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{M-m}{m}}$$

Po formuli 4) imamo iz 6) množeći brojitelj i imenitelj dvojnog razlomka sa 2 mn imamo

$$\sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1 = \frac{2(M-m)}{2mn + n\cdot M - M - mn + m}$$

ili dalje

7.) $$\sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1 = \frac{2(M-m)}{M(n-1)+m(n+1)}$$

Koristeći formulu 7.) i formulu 3) dobijamo

8.) $$\boxed{p = \frac{200(M-m)}{M(n-1)+m(n+1)}}$$

Ova formula se zove Kunce-ova i kao što se vidi izvedena je na osnovu Leibniz-ove. Pomoću infinitezimalnog računa izvodi se formula Georgija Turskog.

Izvođenje se sastoji u ovome. Sadašnje stanje mase drveta u jednoj šumi je y a „brzina rastenja mase" $\frac{dy}{dt}$; ova „brzina" pretstavlja u stvari priraslu masu i pretpostavlja se da je odnos $\frac{dy}{dt}$ prema y, i u beskrajnim malim intervalima i u opšte — stalan. Razlomak koji pokazuje odnos prvobitne mase y i prirasle mase $\frac{dy}{dt}$ može da se izrazi i u stotim delovima — procentima pa će biti

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = \frac{p}{100}$$

a odavde integracijom dobijamo

$$\int\frac{dy}{dt} = \frac{p}{100}\int dt$$

ili

$$\ln y = \frac{p}{100}t$$

Kako nas interesuje stanje početne mase y u vremenu t i stanje krajnje mase Y u vremenu T to imamo

$$\left| \log y \right|_y^Y = \frac{p}{100} \left| t \right|_t^T$$

odakle je

$$\log Y - \log y = \frac{p}{100}(T - t)$$

što daje

$$\frac{Y}{y} = e^{\frac{p}{100}(T - t)}$$

Neka je razlika u vremenu $T - t = n$ godina imamo

$$9.) \qquad \boxed{Y = y\, e^{\frac{p}{100} \cdot n}}$$

Formula 9.) pretstavlja formulu Turskog. Pored ovih formula postoji još čitav niz drugih no mi smo se zadržali na ovima koje se najčešće pominju.

Napomena. Neka je masa y jedne šume (ili, jednog stabla) funkcija vremena x dakle $y = f(x)$. Tekući priraštaj mase jedne šume (ili jednog stabla) je promena mase y za beskrajno malo vreme dx pa će („brzina rastenja") tekući prirast biti

$$1.) \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Međutim prosečni prirast je odnos mase prema određenom broju godina (ili prema određenom vremenu) pa će biti prirast P.

$$2.) \qquad P = \frac{y}{x}$$

Pitanje je sad kad je prosečni prirast najveći. Znači treba naći maksimum za P tj.

$$\left(\frac{v}{x}\right)' = 0$$

a odavde je

$$3.) \qquad y' = \frac{y}{x}$$

Poslednja jednačina 3.) kazuje na osnovu jednačine 1.): prosečni prirast P je najveći kad je jednak tekućem. Ovo je Lehr-ov stav o prirastu drvene mase.

DODATAK

I

Dopune integralnom računu

1. Integracija racionalnih funkcija. 2. Integracija nekih iracionalnih funkcija. 3. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija. 4. Izračunavanje površina u ravni. 5. Krivolinijski integral.

II

Obične diferencijalne jednačine

A.) Jednačine prvog reda

1. Totalni diferencijal. 2. Linearna jednačina I reda. 3. Bernouilli-ova jednačina. 4. Clairaut — Lagrange-ova jednačina.

B.) Jednačine drugog reda

1. Homogena jednačina II reda i stavovi o partikularnim integralima. 2. Jednačine s konstatnim koeficijentima. 3. Nehomogena jednačina II reda — stav o opštem integralu. 4. Neke jednačine dinamike.

SISTEMATIKA INTEGRALA

— Dopune integralnom računu —

1. Integracija racionalnih funkcija. 2. Integracija nekih iracionalnih funkcija. 3. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija. 4. Izračunavanje površina u ravni. 5. Krivolinijski integral.

1. Integracija racionalnih funkcija

Da bi koristili u punoj meri metodu rastavljanja na racionalne razlike o kojoj je bilo reči (str. 68) — činimo neke primedbe iz algebre.[1])

Lako se uviđa da sabiranje na pr. ovakvih razlomaka

$$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-5}=\frac{(x-2)(x-5)+3(x-1)(x-5)+4(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-5)}=$$

$$=\frac{P(x)}{(x-1)(x-3)(x-5)}$$

$$\frac{5}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x}=\frac{5(x-1)x-2x+3(x-1)^2x}{(x-1)^2\cdot x}=\frac{Q(x)}{(x-1)^2\cdot x}$$

dovodi do racionalnih funkcija gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi od x. Obrnuto kad vidimo ovakve funkcije znamo da su postale sabiranjem sličnih razlomaka. Valja naglasiti da je u ovim slučajevima brojitelj uvek nižeg stepena od imenitelja.

Napomenimo da za slučaj sabiranja na pr. ovakvih razlomaka

$$\frac{A}{x-(\alpha+\beta i)}+\frac{A}{x-(\alpha-\beta i)}=\frac{Ax-A\alpha+A\beta i+Ax-A\alpha-A\beta i}{(x-\alpha+\beta i)(x-\alpha-\beta i)}=$$

$$=\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{Mx+N}{x^2-2dx+\alpha^2+\beta^2}\quad \text{gde je } 2A=M \quad N=-2A\cdot\alpha$$

imamo jednu specijalnu racionalnu funkciju — u imenitelju je kvadratni trinom sa diskriminatnom manjom od nule a u brojitelju polinom prvog stepena.

---

[1]) Ovo nije dokaz već samo skretanje pažnje na činjenice koje su važne za praktično izvođenje integracije.

Na osnovu ovih primedaba bili bi u mogućnosti da utvrdimo za izvesne funkcije da vode poreklo od sabiranja izvesnih razlomaka.

Tako na pr.

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$$

$$\frac{3x-1}{(x-1)^4\cdot(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+4}$$

$$\frac{2x+3}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Koeficijente A, B, C, D, M i P u ovim slučajevima lako je odrediti: izvršimo naznačena sabiranja na desnoj strani pa uporedimo rezultat sa stvarnim oblikom funkcije na levoj strani. Tako će na pr. u poslednjem slučaju biti

$$\frac{2x+3}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{Ax(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Mx+N)x^2}{x^2(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{(A+M)x^3+(A+B+N)x^2+(A+B+M)x+B}{x^2(x^2+x+1)}$$

upoređenjem brojitelja na levoj i desnoj strani vidimo da je

$$A+M=0 \qquad A+B+N=0 \qquad A+B+M=2 \qquad B=3.$$

Ova metoda („neodređenih koeficijenata") daje nam sistem od izvesnog broja jednačina za odredbu koeficijenata. Iz gornje četiri jednačine lako dobijamo

$$A=-1 \qquad B=3 \qquad M=-3 \qquad N=-2$$

i zato je

$$\frac{2x+3}{(x^2+x+1)x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{-3x-2}{x^2+x+1}$$

Bez teškoća lako je izvesti i za ostale navedene — i za sve slične slučajeve, ovo računanje koeficijenata.

Primedba. Za slučaj da imenitelj nije napisan u obliku proizvoda — najpre ga treba napisati u tom obliku. Na pr.

$$\frac{3x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{3x^2-x+1}{x^3-1+x(x-1)}=\frac{3x^2-x+1}{(x-1)(x^2+x+1)+x(x-1)}=$$

$$=\frac{3x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2x+1)}=\frac{3x^2-x+1}{(x-1)(x+1)^2}$$

Sad će biti

$$\frac{3x^2-x+1}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A'}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

pri čemu će koeficijenti biti određeni na pokazni način. Razume se da ovo rastavljanje polinoma nije svakad jednostavna stvar (u opštem slučaju vezano je za traženje korenova polinoma što za stepene veće od 2 već pretstavlja velike teškoće) — ali obično se pokušava skupljanjem pojedinih članova i izvlačenjem zajedničkog množitelja da se dođe do traženog proizvoda.

Napomena. Lako se uviđa da će za naredni slučaj biti

$$\frac{5x-1}{(x^2+2x+7)^2x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+7}+\frac{Kx+L}{(x^2+2x+7)^2}$$

jer je ovo slučaj potpuno analog onome kad se jedan činilac javi na nekom stepenu u imenitelju[1]) Polinom prvog stepena u brojitelju pokazuje da je diskriminanta trinoma negativna — što smo već imali u navedenim slučajevima. Dakle i na ovaj slučaj se proširuje poznati postupak.

Primenimo ova izlaganja na jedan primer.

Primer. Integraliti

$$\int\frac{x-1}{x^2(x^2+3x+5)}dx$$

Najpre rastavimo podintegralnu funkciju na racionalne razlike. Prema izloženome biće

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+3x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2+3x+5}$$

poslednji razlomak je napisanog oblika zato što kvadratni trinom ima diskriminantnu $3^2-4\cdot5\cdot1=-11$; imaćemo dalje

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+3x+5)}=\frac{A(x^2+3x+)x+B(x^2+3x+5)+Mx+N)x^2}{x^2(x^2+3x+5)}=$$

$$=\frac{(A+M)x^3+(3A+B+N)x^2+(5A+3B))x+5B}{x^2(x^2+3x+5)}$$

Upoređenjem sa brojiteljem na levoj strani dobijamo jednačine

$$A+M=0 \quad 3A+B+N=0 \quad 5A+3B=1 \quad 5B=-1$$

[1]) U polinomu $(x-1)^2(x+3)$ izraz $x-1$ pokaznje „dvostruki koren" jer je za $(x-1)^2(x+3)=0$ u stvari $(x-1)(x-1)(x+3)=0$.

a odavde (zamenjujući $A=-\frac{1}{5}$ iz poslednje jednačine) imamo

$$A=\frac{8}{25},\ B=-\frac{1}{5},\ M=-\frac{8}{25},\ N=-\frac{23}{25}$$

Prema ovome za naš integral biće

$$\int\frac{x-1}{x^2(x^2+3x+5)}dx-\frac{1}{5}\int\left(\frac{8}{25}\frac{1}{x}-\frac{1}{5}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{25}\cdot\frac{8x+23}{x^2+3x+5}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{25}\int\frac{8x+23}{x^2+3x+5}dx$$

Svi se ovi integrali lako integrale pri čemu za integraciju poslednjeg treba postupiti ovako

$$\int\frac{8x+23}{x^2+3x+5}dx=4\int\frac{2x+\frac{23}{4}}{x^2+3x+5}dx=4\int\frac{2x+3+\frac{23}{4}-3}{x^2+3x+5}dx=$$

$$4\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx+11\int\frac{1}{x^2+3x+5}dx=4\ln(x^2+3x+5)+$$

$$+11\int\frac{1}{x^2+3x+5}dx$$

Poslednji integral je poznat i lako se integrali.

Primedba. U slučaju da je kod racionalne funkcije brojitelj višeg stepena od imenitelja — treba izvršiti deobu dok se ne dobije u brojitelju polinom nižeg stepena od onog u imenitelju Tako na pr. za $\int\frac{x^5-1}{x^2(x+1)}dx$ treba najpre podeliti brojitelj (polinom 5 stepena!) imeniteljem (polinom 3 stepena!). Dakle imaćemo

$$(x^5+1):(x^3+x^2)=x^2-x+1+\frac{-x^2+1}{x^2(x+1)}$$

Prema ovome

$$\int\frac{x^5+1}{x^2(x+1)}dx=\int\left[x^2-x+1+\frac{-x^2+1}{x^2(x+1)}\right]dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+$$

$$+\int\frac{-x^2+1}{x^2(x+1)}dx=\frac{x^3}{3}=\frac{x^2}{2}+x+\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}\right)dx$$

pri čemu za poslednji iniegral treba odrediti koeficijente na već pokazani način.

Zadaci za vežbanje.

1. $\int\frac{dx}{x^2+10x+14}$ $\qquad$ $\frac{1}{6}\cdot\ln\frac{x+2}{x+8}+C$

[polinom $x^2+10x+16$ može se rastaviti! — to je $x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$].

2. $\int\frac{2x+43}{x^2+x-12}dx$ $\qquad$ $7\ln(x-3)-5\ln(x+4)+C$

[ovaj se integral može rešiti i drugim putem — kao na st. 140].

3. $\int\frac{4x-7}{x^2+6x+9}dx$ $\qquad$ $4\ln(x+3)+\frac{19}{x+3}+C$

[ista primedba kao pod 2. samo ako se radi kao integral racionalne funkcije onda $x^2+6x+9=(x+3)^2$].

4. $\int\frac{1-x}{x(x+1)^2}dx$ $\qquad$ $\frac{2}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}+C$

5. $\int\frac{5x^2-8x-4}{x^3+1}dx$ $\qquad$ $\ln[(x+1)^3\cdot(x^2-x+1)]-4\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

[identitet! $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$]

6. $\int\frac{4x}{(x-1)^3\cdot(x^2+1)}dx$ $\qquad$ $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}+\mathrm{arc\,tg}\,x-\frac{1}{(x-1)^2}+C$

[x^2+1 ima diskriminantu negativnu!]

2. Integracija nekih iracionalnih funkcija

Obratićemo pažnju na one iracionalne funkcije koje se lako svode na racionalne i prema tome njihovo figurisanje kao podintegralne funkcije ne pričinjava teškoće. Tiče se funkcija oblika

$$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right),\quad R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}},\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right)$$

gde simbol R označava racionalne kombinacije argumenata lako se uveravamo da će prva racionalna funkcija smenom

$$\frac{ax+b}{cx+k}=t^n \quad x=\frac{kt^n-b}{a-ct^n},\quad dx=\left(\frac{kt^n-b}{a-ct^n}\right)'dt$$

da se transformiše u racionalnu funkciju od t^n jer imamo

$$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right)=R\left(\frac{kt^n-b}{a-ct^n},\ t\right)$$

Slično će biti i sa drugom funkcijom samo ćemo vršiti smenu

$$\frac{ax+b}{cx+k}=t^{mn}$$

Na primerima ovo će se potpunije uočiti.

Primer. Izvesti integraciju $\int\frac{\sqrt{3+x}}{x\sqrt{2+x}}dx$

Napišimo

$\frac{\sqrt{3+x}}{x\sqrt{2+x}}=\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{3+x}{2+x}}$ i stavimo $\frac{3+x}{2+y}=t^2$ a odavde je $x=\frac{2t^2-3}{1-t^2}$ pa će zato biti $\left[dx=\left(\frac{2t^2-3}{1-t^2}\right)'dt\right]$ $\int\frac{\sqrt{3+x}}{x\sqrt{2+x}}dx=\int\frac{1-t^2}{2t^3-3}\cdot t\left(\frac{2t^2-3}{1-t^2}\right)'dt$ što vodi integraciji rac. funkcije

Najčešća je primena ovog u slučaju kad se količnik $\frac{ax+b}{cx+k}$ svede samo na x (to je za $a=1$, $b=0$, $c=0$, $k=0$); na pr. treba izvršiti integraciju $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$. Kako je $x=u^6$ ($m=3$, $n=2$) to će biti $\sqrt[3]{x}=u^2$, $\sqrt{x}=u^3$, $dx=6u^5du$ pa imamo

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{u^2}{u^3+1}6u^5du=6\int\frac{u^7}{u^3+1}du.$$

Dakle dobili smo pod znakom integrala racionalnu funkciju; kako je brojitelj polinom stepena većeg od stepena imenioce — to se mora izvršiti deljenje; dobijamo

$$u^7:(u^3+1)=u^4-u+\frac{u}{u^3+1}$$

Zato će biti

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx=6\int\frac{u^7}{u^3+1}du=6\int\left(u^4-u+\frac{u}{(u+1)(u^2-u+1)}\right)du=$$

$$=6\cdot\frac{u^5}{5}-3u^2+6\int\frac{u}{(u+1)(u^2-u+1)}du$$

pri čemu treba izračunati poslednji integral.

Vežbanja.

1.) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ $\qquad 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln(\sqrt[6]{x}-1)+C.$

2.) $\int\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}}dx.$ $\qquad$ 3.) $\int\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}+1}dx.$

3. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija

Slično funkcijama o kojima je bilo reči u prethodnom odeljku — moguće je da pod znakom integrala bude neka funkcija (racionalna) od $\sin x$ i $\cos x$.

Svaka takva funkcija

$$R(\sin x,\ \cos x)$$

može se pomoću jednostavne smene $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$ $\left(x=2\operatorname{arctg}u,\ dx=2\frac{du}{1+u^2}\right)$ pretvoriti u racionalnu funkciju od u.

Znamo da je

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Zato će biti

$$R(\sin x,\ \cos x)=R\left(\frac{2u}{1+u^2},\ \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)$$

Integracija ovih funkcija je mnogo češća u praksi nego onih iz predhodnog odeljka.

1. **Primer**.

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{1+u^2}{2u}\cdot 2\frac{du}{1+u^2}=\int\frac{du}{u}=\ln u+C=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$$

2.) **Primer**.

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot 2\frac{du}{1+u^2}=\ln\frac{1+u}{1-u}+C=\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$$

Vežbanja.

1. $\int\cos^6 x\,dx$ $\qquad \frac{5}{16}x-\frac{1}{6}\sin x\cos x\left(\cos^4 x+\frac{5}{4}\cos^2 x+\frac{15}{8}\right)+C$

2. $\int\sin^8 x\,dx$ $\qquad \frac{35}{128}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{7}{128}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin^3 2x+$
$+\frac{1}{1024}\sin 8x+C$

3. $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$ $\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$

4. $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x-\cos^3 x}\,dx$ $\qquad \ln\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x-1}}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}+C$

5. $\int\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx$ $\qquad \frac{1}{4}\ln\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$

6. $\int\operatorname{tg}^5 x\,dx$ $\qquad \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x+C$

7. $\int\frac{1}{\operatorname{tg}^8 x}\,dx$ $\qquad -\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg}x+x+C$

4. Izračunavanje površina u ravni.

Ranije smo pokazali da se površina ispod krive izračunava pomoću integrala.

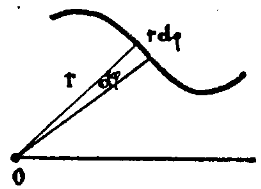
1.) $$P=\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

Međutim kako kriva $y=f(x)$ može biti izražena i kao $x=g(y)$ i ulogu koju ima osa x može da ima osa y — to će površina biti

2.) $$P=\int_{y_1}^{y_2} x\,dy$$

Najzad se lako uviđa da će u polarnom koordinatnom sistemu biti — na osnovu definicije određenog integrala

3.) $$P=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi$$



Sl. 78.

pri čemu je $r=r(\varphi)$ tj. poteg je funkcija polarnog ugla φ. Ako se uzmu polarne koordinate lako se uviđa da između ove tri formule postoji veza. U polarnom koordinatnom sistemu znamo da je

$$x=r\cos\varphi \qquad y=r\sin\varphi$$

pa ako izračunamo izraze $y\,dx$ i $x\,dy$ koji se javljaju u formulama 1.) i 2.) dobijamo

$$y\,dx=r\sin\varphi\,(dr\cos\varphi-r\sin\varphi\,d\varphi)=r\sin\varphi\cos\varphi\,dr-r^2\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$x\,dy=r\cos\varphi\,(dr\sin\varphi+r\cos\varphi\,d\varphi)=r\cos\varphi\sin\varphi\,dx+r^2\cos^2\varphi\,d\varphi$$

Oduzimanjem dobijamo iz poslednjih relacija

$$x\,dy-y\,dx=r^2\,d\varphi$$

ili odavde

4.) $$\frac{1}{2}(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}r^2\,d\varphi$$

Ako se predpostavi da i x i y zavise od nekog parametra t — pošto je izraz $\frac{1}{2}r^2\,d\varphi=dP$ to formula 4.) daje

5.) $$P=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(xy'-yx')\,dt$$

jer je izraz x dy — y dx moguće tada napisati

$$x\frac{dy}{dt}\cdot dt-y\frac{dx}{dt}\cdot dt=(xy'-yx')\,dt$$

Već i same formule 1.) i 2.) pored svoje direktne primene mogu još pod predpostavkom da x i y zavise od parametra t da imaju primene i kod tog slučaja. Za taj slučaj na osnovu formula 1.) i 2.) i formule 5.) mora se uzeti u formuli 1.) ispred integrala znak „minus".

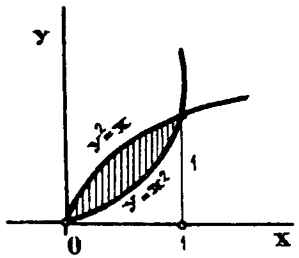
Dakle pored formula 1.) i 2.) imamo još za primenu kod izračunavanja površine ove formule

1'.) $$P=-\int_{t_1}^{t_2}y\,dx$$ 2'.) $$P=\int_{t_1}^{t_2}x\,dy$$

3.) $$P=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^3\,d\varphi$$ 5.) $$P=\int_{t_1}^{t_2}(xy'-yx')\,dt$$

Prve tri se upotrebljavaju kod krivih u parametarskom obliku: nekad se mogu sve tri upotrebiti a nekad je samo jedna od njih podesna. Formula 3.) upotrebljava se kod krivih u polarnim koordinatama — a u tim koordinatama daju se krive kao što su spirale, mnoge zatvorene krive naročito one u Déscartes-ovom sistemu koje se mogu napisiti tako da jedna i druga strana predstavljaju homogeni deo po x i y parnog stepena [$(x^2+y^2)^2=xy$ i dr.]

Napomena. Ako su jednačine krivih date u kakvom prostom obliku za integraciju — nije potrebno pretvaranje u parametarski. Tako na pr. za zadatak: odrediti površinu zajedničku parabolama $y=x^2, y=\sqrt{x}$ u granicama od $x_1=0$ $x_2=1$ — dovoljno je koristiti $P=-\int y\,dx$ pa će biti



Sl. 79.

$$P=-\left(\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^0\sqrt{x}\,dx\right)=-\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1=$$

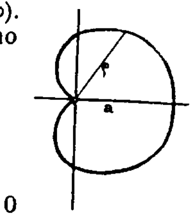
$$-\frac{2}{3}\left|\sqrt{x^5}\right|_1^0=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

U ovom slučaju treba voditi računa o granicama tj. one se ređaju kad se obilazi kontura idući u jednom smislu. Ovo se može primeniti na sve one

slučajeve u kojima se traži površina ograničena lukovima dveju krivih linija, a jednačine krivih su proste.

Primer. Izračunati površinu kardioide $\rho=a(1+\cos\varphi)$. Kako je kriva data u polarnim koordinatama to primenimo obrazac

$$P=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi$$



Sl. 80.

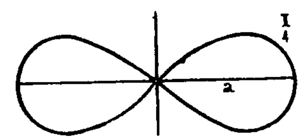
Očigledno je da je kriva simetrična za to će biti $\varphi_1=0$ $\varphi_2=\pi$ pa imamo

$$P=2\cdot\frac{1}{2}a^2\int(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=a^2\int(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

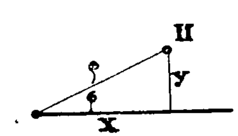
$$=a^2\int_0^\pi d\varphi+2a^2\int_0^\pi\cos\varphi\,d\varphi+a^2\int_0^\pi\cos^2\varphi\,d\varphi=a^2\Big|\varphi\Big|_0^\pi+2a^2\Big|\sin\varphi\Big|_0^\pi+$$

$$+\frac{1}{2}a^2\Big|\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\Big|_0^\pi=a^2\cdot\pi+\frac{1}{2}a^2\pi=\frac{3}{2}a^2\pi.$$

Primer. Izračunati površinu lemniskate $(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)$. Vidimo da je leva i desna strana jednačine homogena — stepen homogeniteta paran — zgodno bi bilo primeniti polarne koordinate



Sl. 81.



Sl. 82.

$$x=\rho\cos\varphi \qquad y=\rho\sin\varphi$$

pa ćemo odmah imati

$$\rho^2=a^2\cos 2\varphi.$$

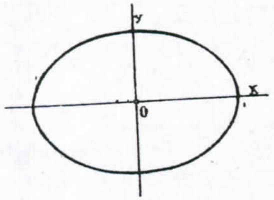
Kako je kriva simetrična prema x i y osi dovoljno je posmatrati je u I kvadratu: φ se menja od $\varphi_1=0$ do φ_2 koje proizilazi iz definisanosti same krive $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$; podkorena količina $\cos 2\varphi$ za najveće φ može biti $\cos 2\varphi=0$ dakle $2\varphi=\frac{\pi}{2}$ tj. $\varphi=\frac{\pi}{4}$ prema tome $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$. Zato će biti celokupna površina

$$P=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi=a^2\Big|-\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2$$

Primedba. Treba praviti razliku između jednačine u polarnim koordinatama i parametarskih jednačina s trigonometrijskim funkcijama: za elipsu $x = a\cos\varphi$ $y = b\sin\varphi$ predstavljaju parametarske jednačine — jer se kod polarnih koordinata menjaju dve veličine (ρ i φ) a u ovom slučaju samo jedna (φ). Isto je i za krug: $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ pretstavljaju parametarske jednačine s trigonometriskim funkcijama.

Ove parametarske jednačine za krug i elipsu u čestoj su upotrebi — gotovo kod svih izračunavanja u kojima se u primeni pojavljuju ode dve krive.

Primer. Izračunati površinu elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Parametarske jednačine[1]) su $x = a\cos\varphi$ $y = b\sin\varphi$ a mogu se primeniti sve tri formule 1'.) 2'.) i 5.). Koristimo formulu 5.) jer ona najpre dovodi do rezultata



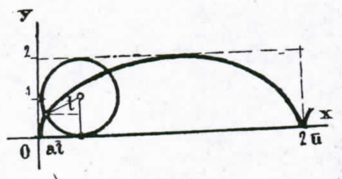
Sl. 83.

$$P=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} x\,dy - y\,dx = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos\varphi\cdot b\cos\varphi\,d\varphi + \sin\varphi\cdot a\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$2\int_0^{\frac{\alpha}{2}} ab(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,d\varphi = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2ab\,\Big|\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\cdot\frac{\pi}{2} = ab\,\pi.$$

Primer. Izračunati površinu cikloide $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$. Pošto imamo parametarske jednačine cikloide koristićemo obrazac 5.) dakle

$$P=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x\,dy - y\,dx$$



Sl. 84.

tj. iz samih parametarskih jednačina imamo

$$dx = a(1-\cos)\,dt \qquad dy = a\sin t$$

$$x\,dy - y\,dx = a^2[t\sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t]\,dt = a^2[t\sin t - 2(1-\cos t)]\,dt$$

Dakle samo izračunavanje površine svelo bi se na računanje tri jednostavna integrala

$$P=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}[t\sin t - 2(1-\cos t)]\,dt = \frac{a^2}{2}\Big| -t\cos t + \sin t - 2t - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{2}(-6\pi) = -3a^2\pi.$$

[1]) Ovo se lako dobija iz same jednačine elipse u poređenju sa $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ imamo $\frac{x}{a}=\cos\varphi$, $\frac{y}{b}=\sin\varphi$.

U stvari sama površina je $P = |-3a^2\pi| = 3a^2\pi$.

Prostije izračunavanje (u toliko što se javlja poznati integral $\int\cos^2 t\,dt$) imali bismo

$$P = -\int_0^{2\pi} y\,dx = -\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt = -3a^2\pi.$$

Isti rezultat bismo dobili kad bi koristili obrazac 2'). U slučaju cikloide (kao i kod elipse) sva tri obrasca 1'.) 2'.) 5.) dovode do rezultata.

Napomena. U mnogim slučajevima ni upotreba polarnih koordinata ni parametarskih jednačina pomoću trigonometrijskih funkcija — neće lako (ili čak nikako) dovesti do rezultata. To se u glavnom tiče algebarskih krivih implicitnog oblika. Na pr. kriva $x^3+y^3-3axy=0$ pretstavlja jednu od njih. Da bi ovu krivu napisali u parametarskom obliku — podelimo celu jednačinu najvećim stepenom od x i dobićemo

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3a\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=0. \qquad \frac{y}{x}=t$$

Količnik $\frac{y}{x}$ obeležimo sa t pa ćemo imati iz poslednjih dveju jednačina

$$x=\frac{3at}{1+t^3} \qquad y = x\cdot t = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Za krive koje se mogu na ovaj način napisati u parametarskom obliku izraz $x\,dy - y\,dx$ iz formule 5.) dobija određen jednostavan oblik

$$x\,dy - y\,dx = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt = \left[x\cdot y'_t - y\,x'_t\right]dt = \left[x(x\cdot t)' - xt\cdot x'\right]dt =$$

$$= \left[x x'\cdot t + x^2 - xt x'\right]dt = x^2\,dt$$

i zato će obrazac za površinu biti

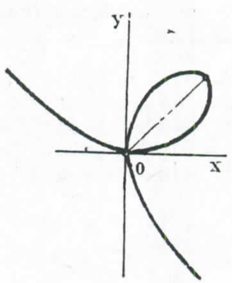
$$P=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x^2\,dt$$

Dakle za ove krive dovoljno je naći x u funkciji t iz same jednačine. Za navedeni slučaj krive[1]) $x^3+y^3-3axy=0$ imamo odmah

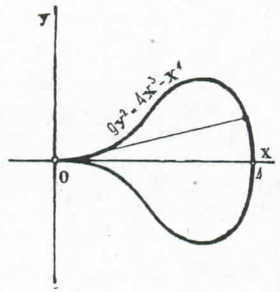
$$P=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \frac{1}{2}3a^2\cdot\int_0^\infty\frac{3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{-3a^2}{3}\Big|(1+t^3)^{-1}\Big|_0^\infty = \frac{3a^2}{2}$$

[1]) Ova kriva poznata je pod imenom Dekartov list.

Što se tiče određivanja granica parametru t — vidimo iz jednačine $\frac{y}{x}=t$ da je u sistemu y, x parametar t ugaoni koeficijenat prave koja prolazi kroz koordinatni početak i koordinate y i x izmenjaju sve vrednosti koordinata tačaka na krivoj dok t varira od 0 do ∞ $\left(\text{kao tg}\,0 \text{ i tg}\,\frac{\pi}{2}\right)$.



Sl. 85.



Sl. 86.

Nekad određivanje ovih pranica neće biti tako lako. Da bi problem bolje uočili posmatrajmo krivu

$$9y^2=4x^3-x^4.$$

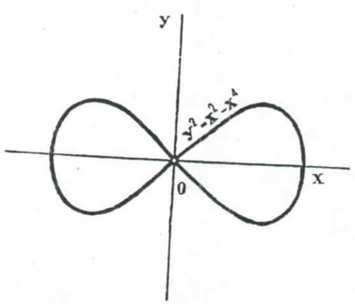
Svakako da će t varirati od nule tj. $t_1=0$ do t_2 a to će biti maksimalna vrednost koje t kao funkcija od x (ili od y) može da dostigne.

Iz jednačine krive imamo u ovome slučaju

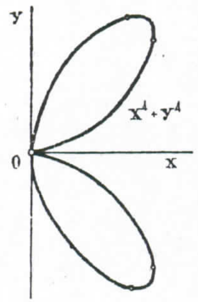
$9\frac{y^2}{x^2}=4x-x^2$ odakle je $x^2-4x+9t^2=0$ $\left(\frac{y}{x}=t\right)$ $x=2\pm\sqrt{4-9t^2}$

Pošto je $x>2$ to znači da će funkcija biti $x=2+\sqrt{4-9t^2}$ ili odavde $t=\frac{1}{3}\sqrt{4-(x-2)^2}$, ako se traži ekstremum za t dobija se da je to u tački $x=2$ i onda tome odgovara $t_2=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$.

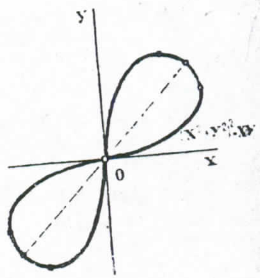
Vežbanja. Odrediti površine ovih krivih $y^2=x^2-x^4$, $x^4+y^4=8xy^2$, $(x^2+y^2)^2=xy$



Sl. 87.



Sl. 88.



Sl. 89.

U poslednjem slučaju pošto je leva i desna strana homogena — lakše se dolazi do rezultata primenom polarnih koordinata!

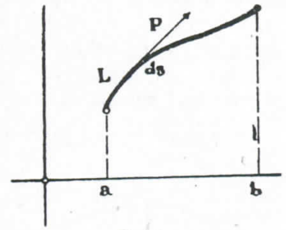
5. **Krivolinijski integral**

Definicija određenog integrala — granična vrednost beskrajnog malih količina — može da se proširi na sve zakonitosti čiju diferencijalnu formu poznajemo*).

Na pr. rad koji izvrši sila P na putu s duž krive L imaće diferencijalnu formu

$$dA=P\,ds$$

a duž kriv L biće to beskrajan zbir — dakle



Sl. 90.

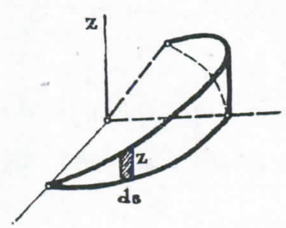
$$1.)\qquad A=\int_L P\,ds$$

Lako se uviđa da je ovaj integral — imajući na umu da je $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ (i da je y' funkcija od x) kao i to da se sila P menja u funciji koordinata — u stvari funkcija jedne promenljive x. Dakle kako je $y=f(x)$, $y'=f'(x)$ i $P=P[x,y]=P[x,f(x)]$ imaćemo

$$2.)\qquad A=\int_L P\,ds=\int_L P[x,f(x)]\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\int_{x_1=a}^{x_2=b}F(x)\,dx$$

što je — kako smo već rekli — običan integral jedne funkcije od x.

Kako se y našem primeru ovaj rad vrši duž luka krive L (ili bolje reći duž jednog dela luka tj. od krive $x_1=a$ do $x_2=b$) to se ovaj integral zove *krivolinijski*. Biće mnogo drugih slučajeva gde su diferencijalne zavisnosti vezane za diferencijal luka — a ceo integral za izvestan luk krive. što će u svim ovim slučajevima dovesti do krivolinijskog integrala.



Sl. 91.

Uzmimo ovakav primer: naći bočnu površinu eliptičnog cilindra $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ presečenog ravni $z=2x$.

Sa slike se vidi da je

$$dP=x\cdot ds$$

i onda je

$$P=\int_L z\,ds$$

Kako je ($a^2=4$, $b^2=1$) $z=2x$, $x=a\cos\varphi=2\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$ to će gornji krivolinijski integral postati

*) Ovde ne dajemo dokaz toga — jer će se suština videti iz primera dalje navedenih.

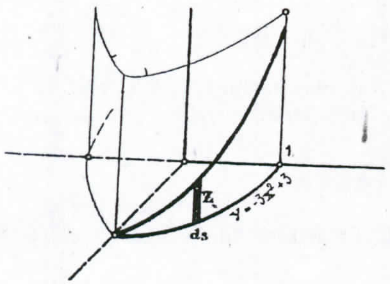
$$P=\int_L z\,ds=\int_L 2x\sqrt{dx^2+dy^2}=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sqrt{4\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sqrt{3\sin^2\varphi+1}\,d\varphi$$

pri čemu je $4\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=3\sin^2\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=3\sin^2\varphi+1$. Ako se upotrebi smena $\sin\varphi=u$ $du=\cos\varphi\,d\varphi$ gornji integral postaje

$$\int\cos\varphi\sqrt{3\sin^2\varphi+1}\,d\varphi=\int\sqrt{3u^2+1}\,du$$

i najzad ponovna smena $\sqrt{3}\cdot u=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ dovodi do krajnjeg rešenja.



Sl. 92.

Međutim ima krivolinijskih integrala (kad nisu u pitanju krug ili elipsa) koji bez parametarskih jednačina dovode do rezultata. To je slučaj sa zadatkom: izračunati bočnu površinu cilindra $y=3x^2+3$ presečenog ravni $z=5x$ a površina je ograničena ravnima $z=0$ $y=0$.

Bočna površina će biti

$$P=\int_L z\,ds$$

i kako je $y=-3x^2+3$ to je $y'=-6x$ pa je $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+36x^2}\,dx$ imamo

$$P=\int_L z\,ds=\int_L 5x\sqrt{1+36^2}\,dx$$

kako je ovde promenljiva x to se sa slike vidi da se x menja od $x_1=0$ do $x_2=1$ (presek parabole sx — osom!) pa će biti

$$P=5\int_0^1 z\sqrt{1+36x^2}\,dx=\frac{5}{72}(37\sqrt{37}-1)$$

pri čemu smo za računanje integrala upotrebili smenu $1+36x^2=u$

Vežbanja. Izračunati bočne površine

1.) cilindra $x^2+y^2=y$ presečenog ravni $z=3x$

2.) cilindra $x^2+y^2=16$ presečenog ravni $z=\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=2$

3.) cilindra $y=-x^2+2$ presečenog ravni $z=4x$

4.) cilindra $x=-y^2+3$ presečenog ravni $z=x$

5.) Naći masu čevrtine kruga ako je gustina u makakvoj tački srazmerna proizvodu apscise i ordinate. (dM elementarna masa, γ gustina; masa je proizvod od ds i pustine; $dM=\gamma\cdot ds=k\cdot x\cdot y\cdot ds$; k koeficijenat srazmernosti).

6.) Isto za luk cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ kad je gustina srazmerna kvadratnom korenu ordinate.

1.) **Napomena.** Pored ovih integrala u kojima se javlja diferencijal luka — javljaju sc integrali u kojima se pojavljuju diferencijali dx i dy. Oni integrali u kojima se javlja diferencijal luka zovu se *krivolinijski integrali ca luku,* a oni u kojia se javljaju diferencijali koordinata zovu se *krivolinijski integrali po koordinatama.* Dakle imamo

$$\int_L R(x,y)\,ds,\quad \int_L P(x,y)\,dx,\quad \int_L Q(x,y)\,dy$$

gde su P, Q, R makakve funkcije x i y koje se dobijaju iz diferencijalnih formi bilo matematičkih, fizičkih i drugih funkcionalnosti. Sem ovog i to vrlo često postoji i ovakav oblik krivolinijskog integrala

$$\int_L P\,dx+Q\,dy$$

Za izračunavanje svih ovih integrala treba da je data kriva $y=f(x)$ pri čemu će svi ovi integrali — odnosno njihove podintegralne funkcije direktno zavisiti od jedne promenljive x.

2. **Napomena.** U slučaju poslednjeg integrala $\int_L P\,dx+Q\,dy$ ako je podintegralna funkcija totalni diferencijal — izračunavanje se uprošćava jer ako je

$$P\,dx+Q\,dy=df$$

onda imamo

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_L df=\Big|f(x,y)\Big|_{x_1,y_1}^{x_0,y_0}=f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)$$

Poslednji rezultat pokazuje da integracija u ovom slučaju ne zavisi od krivih već samo od oblika funkcije i početne i krajnje vrednosti.

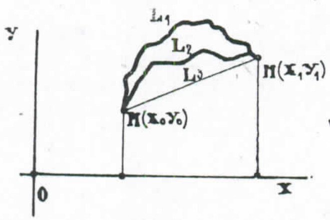
Iz poslednjeg rezultata

$$\int_L P\,dx + Q\,dx = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) \quad \text{kad je } x_1 = x_0 \text{ i } y_1 = y_0$$

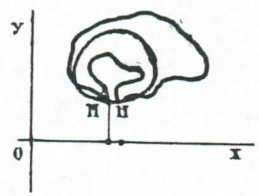
vidi se da će biti

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = f(x_1, y_1) - f(x_1, y) = 0$$

što pokazuje značajnu posledicu: *krivolinijski integral duž zatvorene konture — ako podintegralna funkcija pretstavlja totalni diferencijal — ravan je nuli.*



Sl. 93.



Sl. 94.

Da li je podintegralna funkcija totalni diferencijal lako je proveriti: treba da je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Integracija totalnog diferencijala izvodi se po poznatoj metodi (videti str. 157).

II

Obične diferencijalue jednačine

A.) Jednačine prvog reda

1. Totalni diferencijal. 2. Linearna jednačina. 3. Bernouilli-eva jednačina. 4. Clairaut-Lagrange-ova jednačina.

Pored već navedenih jednačina prvog reda koje se sasvim elementarno rešavaju — jednačine sa razdvajanjem promenljivih i homogene jednačine — ukazaćemo još na ove tipove.

1. Totalni diferencijal

Može se desiti da jednačina

1.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q_1(x, y)}$$

gde su P i Q_1 kakve bilo funkcije od x i y predstavlja u stvari totalni diferencijal. To neće biti teško proveriti: napišimo podesnije jednačinu 1.) za ovu svrhu i imaćemo

2.) $$P\,dx + Q\,dy = 0$$

gde je $-Q_1 = Q$. Ako leva strana predstavlja totalni diferencijal treba da je zadovoljen poznati uslov[1]).

3.) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

i ako je ovaj uslov ispunjen jednačinama 2.) predstavlja totalni diferencijal neke funkcije — dakle biće

4.) $$f(x, y) = C$$

---

[1]) Ovaj uslov zasnovan je na činjenici da se funkcija može najpre diferencirati po x pa zatim po u i obratno — dakle kako je $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ to je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{dy\,dx}$ i zbog toga što je $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ dobijamo uslov 3.) U dokaz se nećemo upuštati.

Da bi našli samu funkciju f — poći ćemo obrnutim putem: kako P (x, y) pretstavlja izvod po x od funkcije f — sad ćemo P (x, y) integraliti po promenljivoj x i kao integracionu konstantu dodati neku funkciju $\varphi(y)$ — koju je moguće imala funkcija f — pa je prilikom parcijalnog diferenciranja po x iščezla. Dakle imaćemo

5.) $$\int P(x,y)\,dx = f_1(x,y)+\varphi(y)$$

gde smo sa f_1 označili onu funkciju koja se razlikuje od funkcije f samo u aditivnoj funkciji φ. Dakle znamo $f=f_1+\varphi$ pa je jasno da mora biti

6.) $$Q=\frac{\partial f}{\partial y}$$

onda je

7.) $$Q=\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{d\varphi}{dy}$$

jer funkcija φ pošto zavisi samo od y — daje ne parcijalni već običan izvod. Iz poslednje jednačine upoređenjem leve i desne strane dobijamo

8.) $$\frac{d\varphi}{dy}=k(y)$$

a odavde integracijom

9.) $$\varphi=\int k(y)\,dy.$$

Ovo ćemo prikazati na jednom primeru.

Primer. Rešiti diferencijalnu jednačinu $2(3xy+2)\,dx+(3x^2+8y)\,dy=0$

Kako je ispunjen uslov $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ što je u našem slučaju

$$\frac{\partial(6xy+4)}{\partial y}=\frac{\partial(3x^2+8y)}{\partial x}$$

to gornja jednačina predstavlja totalni diferencijal. Postupimo po jednačini 5.) i imaćemo

$$2\int(3xy+2)\,dx=2\cdot3\frac{x^2}{2}y+2\cdot2x+\varphi(y)=3x^2y+4x+\varphi(y)$$

Koristimo jednačinu 7.) i dobijamo

$$3x^2+8y=3x^2+\frac{d\varphi}{dy}$$

$$8y=\frac{d\varphi}{dy}$$

Iz poslednje jednačine je

$$\varphi=8\int y\,dy=4y^2$$

Zato je funkcija $f(x,y)=3x^2y+4x+4y^2$ pa je integral gornje jednačine po formuli 4.)

$$3x^2y+4x+4y^2=c$$

Vežbanja. Rešiti jednačine

1.) $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^2-x^2y)\,dy=0$ $\qquad x^4-x^2y^2+y^4=c$

2.) $\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$ $\qquad x+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=c.$

3.) $\frac{2x}{y^3}\,dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0$ $\qquad x^2-y^2=c\cdot y^3$

4.) $e^y\,dx+(xe^y-2y)\,dy=0$ $\qquad xe^y-y^2=c$

5.) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ $\qquad x+ye^{\frac{x}{y}}=c$

Napomena. Totalni diferencijal predstavlja jedan značajni osnov za mnoge teorijska postavke i praktične primene. U teoriji diferencijalnih jednačina zauzima posebno mesto. Sem ovakvog neposrednog totalnog diferencijala — postoji način da se funkcija koja nije totalni diferencijal množenjem izvesnom drugom funkcijom („integrišući faktor" ili „Euler-ov multiplikator") dovede na oblik totalnog diferencijala. Na primer izraz

$$dy+Py\,dx$$

gde je P funkcija samo od x — nije totalni diferencijal — međutim ako ovaj izraz pomnožimo se $e^{\int Pdx}$ prema čemu će biti

$$e^{\int Pdx}\cdot dy+Pe^{\int Pdx}\cdot dx$$

lako se uveravamo da je ovaj izraz totalni diferencijal. Šta više ovde integracija po pokazanoj metodi nije neophodna jer se odmah vidi da je

$$e^{\int Pdx}\cdot dy+y\cdot P\cdot e^{\int Pdx}\,dx=d\left(y\cdot e^{\int Pdx}\right).$$

Uopšte uzevši problem integracije svih jednačina svodi se na traženje odgovarajućeg multiplikatora za pojedine diferencijalne jednačine. Iako je znatan broj matematičara radio na tome problemu (Euler, Lagrange, Jacobi Sophus

Lie i dr.) neki naročito opšti zaključci nisu izvedeni — ali i pored toga to u znatnoj meri olakšava integrisanje jednačina za koje su druge metode bespomoćne.

2. Linearna jednačina.

Ova jednačina je oblika

1.) $$y' + Py + Q = 0$$

gde su P i Q funkcije od x. Ako napišemo ovu jednačinu ovako

2.) $$dy + Py\,dx = -Q\,dx$$

i koristimo primedbu učinjenu na str. 159 imamo

3.) $$d\left(y e^{\int P dx}\right) = -Q e^{\int P dx} \cdot dx.$$

Integralimo levu i desnu stranu i imamo

4.) $$y e^{\int P dx} = k - \int Q e^{\int P dx} \cdot dx \qquad k = \text{const.}$$

a odavde definitivno

5.) $$y = e^{-\int P dx}\left(k - \int Q e^{\int P dx}\, dx\right).$$

Sem ovog načina postoji još načina da se dođe do integrala linearne jednačine prvog reda. Navedimo Lagrange-ovu „varijaciju konstanta". Rešimo jednačinu

6.) $$y' + Py = 0$$

što će nam odmah dati

7.) $$y = c \cdot e^{-\int P dx}$$

Pokušajmo sad da zadovoljimo jednačinu 1.) rešenjem 7.) u kome bi c bilo funkcija od x. Dakle imaćemo

$$c' e^{-\int P dx} - c e^{-\int P dx} \cdot P + c e^{-\int P dx} \cdot P + Q = 0$$

a odavde

$$c' = -Q e^{\int P dx}$$

ili

8.) $$c = k - \int Q e^{\int P dx} dx$$

Pošto smo odredili funkiju c rešenje 7.) daje

9.) $$y = e^{-\int P dx}\left(k - \int Q e^{\int P dx} dx\right)$$

Dakle dobijeno je već poznato malopređašnje rešenje 5). Isti bi rezultat dobili kad bi u jednačini 1.) izvršili smenu $y = u \cdot v$ (gde su u i v funkcije od x) i uveli uslov

10.) $$v' + P \cdot v = 0$$

što daje $v = e^{-\int P dx}$ a sama jednačina 1.) daje $u = -\int Q e^{\int P dx} dx + k$ pa je onda rešenje

11.) $$y = u \cdot v = e^{-\int P dx} \cdot \left(k - \int Q e^{\int P dx} dx\right)$$

Od svih ovih metoda značajna je prva i druga metoda. Lagrange-ova metoda, koja pokazuje duhovitu ideju, u mnogim slučajevima dovodi do rezultata ne samo kod jednačina prvog reda već i kod drugih. Kao što se vidi za rešenje linearne jednačine dobili smo gotov obrazac i prema tome njeno rešenje je sasvim prosto.[1])

Vežbanja.

1. $y' + ay = e^{mx}$ $\qquad y = Ce^{-ax} + \dfrac{e^{mx}}{m+a}$
2. $xy' + 3y = x^2$ $\qquad y = Cx^3 - x^2$
3. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ $\qquad y = x(1 + x^4) + C(1 + x^2)$
4. $y' \sin x - y = 1 - \cos x$ $\qquad y = (x + C)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$
5. $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$ $\qquad y^2 - 2x = Cy^3$

U poslednjem primeru uzeti x za funkciju — dakle $\dfrac{dx}{dy}$!

3. Bernouilli-eva jednačina

Ova jednačina je uopštena linearna i ima oblik

1.) $$y' + Py + Qy^n = 0.$$

Deobom sa y^n dobijamo (n je makakav ceo ili razlomljen broj)

2.) $$y' y^{-n} + Py^{-n+1} + Q = 0$$

i ako izvršimo smenu

3.) $$y^{-n+1} = u, \quad y^{-n} y' = \frac{1}{-n+1} u'$$

---

[1]) Što se tiče izvođenja integracije to neće svakad biti moguće.

dobijamo linearnu jednačinu

4.) $$u' + (-n+1)Pu + (-n+1)Q = 0.$$

Rešenjem linearne jednačine 4.) koristeći formulu 3.) dobijamo samo y — rešenje Bernouilli-eve jednačine.

Vežbanja. Rešiti jednačine

1. $y' + 2xy = 2x^2y^3$ $\qquad \frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$

2. $xy' + y = y^2 \ln x$ $\qquad y(1 + \ln x + x) = 1$

3. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ $\qquad y = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ln x\right)^2$

4. $y\,dy - a\frac{y^2}{x^2}dx = b\cdot\frac{dx}{x^3}$ $\qquad y^2 = Ce^{-\frac{2a}{x}}\frac{b}{2a^2}\left(1 - \frac{2a}{x}\right)$

5. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$ $\qquad \frac{1}{x} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} - y^2 + 2$

U poslednjem primeru uzeti x za funkciju i $\frac{dx}{dy}$ pa će biti Bernouilli-eva jednačina po x!

4. Clairaut-Lagrange-ova jednačina.

Jednačina tipa

1.) $$y = xy' + f(y')$$

gde je $f(y')$ makakva funkcija od y' zove se Clairaut-ova jednačina. Ova jednačina se rešava na taj način što se stavi $\frac{dy}{dx} = p$ i jednačina 1.) postaje

2.) $$y = xp + (p)$$

Diferenciranjem ove relacije po x dobijamo

3.) $$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

a odavde

4.) $$0 = \frac{dp}{dx}[x + f'(p)]$$

Jednačina 4.) daje

5.) $\frac{dp}{dx} = 0, \quad p = C$ $\qquad$ 6.) $x + f'(p) = 0.$

Iz jednačine 2.) i $p = C$ dobijamo

7.) $$y = Cx + f(C)$$

što pretstavlja rešenje Clairaut-ove jednačine. Ovo rešenje je opšte — jer sadrži proizvoljnu konstantu.

Međutim formula 6.) pokazuje da će da se dobije $p = v(x)$ što zamenjeno u jednačinu 2) daje

8.) $$y = x\,v(x) + f[v(x)]$$

Rešenje 8.) — koje po funkciji na desnoj strani pretstavlja rezultat koji se nije mogao dobiti nikakvim posebnim vrednostima konstante iz opšteg rešenja 7.) — ne pretstavlja ni opšti ni bilo kakvi partikularni integral. Ali je izvesno da rešenje 8.) pretstavlja integral jer je dobijeno na način kao i opšti integral; ovo rešenje koje nije ni opšti ni partikularni integral zove se *singularni integral*. Postoji metoda pomoću koje se može raspoznati da li jedna diferencijalna jednačina ima singularnog rešenja ili ne — ali mi se u to nećemo upuštati. Uopštenje jednačine Clairaut-a' je jednačina

9.) $$x = x\varphi(y') + f(y')$$

gde su $\varphi(y')$ i $f(y')$ proizvoljne funkcije. Jednačina 9.) zove se Lagrange-ova jednačina. Ova jednačina se rešava isto kao i Clairaut-ova smenom $\frac{dy}{dx} = p$ i diferenciranjem po x dakle

10.) $$y = x\varphi(p) + f(p)$$

11.) $$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Iz jednačine 11.) dobijamo

12.) $$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x + \frac{f'(p)}{\varphi(p) - p} = 0$$

što pretstavlja linearnu jednačinu po x. Iz ove jednačine dobijamo $x = \theta(p)$ ili $p = M(x)$; kako znamo da je $p = \frac{dy}{dx}$ to je $y = \int M(x)\,dx$. Praktički se često nailazi na velike teškoće prilikom integracije ove jednačine.

Vežbanja. Rešiti jednačine

	opšti	singularni
1. $y = xy' + y'^2$	$y = Cx + C^2$;	$x^2 + 4y = 0$
2. $y' = xy' - 3y'^3$	$y = Cx - 3C^3$;	$9y - 2x\sqrt{x} = 0$

	opšti	singularni
3. $y=xy'+\frac{1}{y'}$	$y=Cx+\frac{1}{C}$;	$y^2=4x$
4. $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$	$y=Cx+\sqrt{1+C^2}$;	$y^2+x^2=1$
5. $y=y'^2(x+1)$	$y=(\sqrt{x+1}+C)^3$	
6. $2yy'=x(y'^2+4)$	$y=Cx^2+\frac{1}{C}$;	$y^2-4x^2=0.$

B.) Jednačine drugog reda

1. Homogena jednačina II reda i stavovi o partikularnim integralima. 2. Jednačine s konstantnim koeficijentima. 3. Nehomogena jednačina II reda — stav o opštem integralu. 4. Neke jednačine dinamike.

1. Homogena jednačina II reda i stavovi o partikularnim integralima

Pored pokazanih tipova jednačina II reda u ranijim odeljcima i primenama u mehanici — obratićemo pažnju na jednu značajnu jednačinu II reda koja se često sreće u primenama.

Jednačina tipa

$$1.)\qquad y''+a_1y'+a_0y=0$$

gde su a_1, a_0 funkcije od **x** zove se *homogena jednačina* II reda.

Za ovu jednačinu važe četiri stava o partikularnim integralima koji su za praktičnu integraciju neophodni. Navodimo redom te stavove

I. Ako je y_1 partikularni integral diferencijalne jednačine

$$1.)\qquad y''+a_1y+a_0=0$$

onda je i Cy_1 takođe partikularni integral. Ovaj stav se lako uviđa jer ako je C_1y_1 takođe integral onda je $y=Cy_1$, $y'=Cy'_1$, $y''=Cy''_1$ pa imamo

$$Cy''_1+Ca_1y'_1+Ca_0y_1=C(y''_1+a_1y'_1+a_0y_1)=0$$

izraz u zagradi mora biti nula jer je y_1 partikularni integral jednačine 1.) pa zato dakle Cy_1 je takođe integral.

II. Ako su y_1 i y_2 dva partikularna integrala jednačine 1.) onda je i $y=C_1y_1+C_2y_2$ takođe integral i to opšti.

I ovo se lako zapaža ako uočimo da za oba partikularna integrala mora biti

$$2.)\qquad \begin{cases} y''_1+a_1y'_1+a_0y_1=0 \\ y''_2+a_1y'_2+a_0y_2=0 \end{cases}$$

i da je $\quad y=C_1y_1+C_2y_2,\quad y'=C_1y'_1+C_2y'_2, y''=C_1y''_1+C_2y''_2.$

Zato imamo iz jednačine 1.) i sistema 2.)

$$C_1y''_1+C_2y''_2+a_1(C_1y'_1+C_2y'_2)+a_0(C_1y_1+C_2y^2)=$$
$$=C_1(y''_1+a_1y'_1+a_0y_1)+C_2(y''_2+a_1y'_2+a_0y_2)=0.$$

Dakle vidi se da je $y=C_1y_1+C_2y_2$ takođe integral jer zadovoljava jednačinu 1.); trebalo bi dokazati da je to baš opšti integral — ali mi ćemo se zadovoljiti konstantacijom da on ima dve proizvoljne konstante i da je već to dovoljno da nas ubedi da je to opšti integral jednačine II reda.

Iz ovoga se vidi vrlo važna činjenica da se opšti integral homogene diferen. jednačine II reda dobija kao aditivna kombinacija dva makoja partikularna integrala umnožena proizvolnim konstantama. Skrenimo pažnju da količnik ova dva parlikularna integrala mora biti

$$3.)\qquad \frac{y_2}{y_1}=u(x)$$

ne $\frac{y_2}{y_1}=k$ (konstanta) jer ako bi $\frac{y_2}{y_1}=k$ onda je $y_2=ky_1$ pa opšti integral

$$y=C_1y_1+C_2ky_1=y_1(C_1+C_2k)=Ky_1$$

nebi imao dve integracione konstante. Ovo je vrlo važna činjenica sadržana u formuli 3.

III. Ako je poznat jedan partikularlni integral y_1 diferencijalne jednačine 1.) onda se drugi dobija iz same jednačine smenom $y_2=y_1\cdot u(x)$ odakle dobijamo u a onda i y_2.

Ovaj stav direktno sleduje iz jednačine 3.) i jednačine 1.) jer imamo $(y_1u)''+a_1(y_1u)'+a_0(y_1u)=0$ pa kako su y_1, a_1, a_0 funkcije od x odavde se dobija u.

IV. Ako jedna kompleksna funkcija $y_1=P(x)+iQ(x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu onda su $P(x)$ i $Q(x)$ (realni i imaginarni deo funkcije) takođe partikularni integrali — pa je opšti integral $y=C_1P+C_2Q$.

Imamo $Y'_1=P'(x)+iQ'(x)$, $Y''_1=P''(x)+iQ''(x)$ i ako je $Y_1=P(x)+iQ(x)$ integral tj. zadovoljava jednačinu1). mora biti

$$P''+iQ''+a_1(P'+iQ')+a_0(P+iQ)=0$$

ili odavde razdvajajući realni i imaginarni deo

$$P''+a_1P'+a_0P+i(Q''+a_1Q'+a_0Q)=0.$$

Dobili smo jednu konmpleksnu funkciju koja mora da bude jednaka nuli — to je moguće ako je

$$P''+a_1P'+a_0P=0\qquad Q''+a_1Q'+a_0Q=0$$

što znači da su P i Q partikularni integrali jednačine 1.).

Sva ova četiri stava su od velike praktične važnosti i treba ih dobro uočiti — jer same jednačine II reda mnogo su češće u primenama nego jednačine I reda.

2. Jednačine s konstantnim koeficijentima.

Specijalan slučaj jednačine 1.) kad su $a_1 = m$ $a_0 = n$ gde su m i n konstante dosta je čest.

Ispitajmo da li jednačina

4.) $$y'' + my' + ny = 0$$

dopušta partikularni integral $y = e^{rx}$ gde je r neka konstanta. Ako je to moguće biće $y' = re^{rx}$, $y'' = re^{rx}$ pa iz jednačine 4.) imamo

$$r^2 \cdot e^{rx} + rme^{rx} + ne^{rx} = 0. \qquad e^{rx}(r^2 + rm + n) = 0.$$

Kako e^{rx} ne može biti nula za konačne vrednosti x to mora biti

5.) $$r^2 + rm + n = 0.$$

Jednačina 5.) pokazuju da jednačina 4) ima partikularno rešenje $y = e^{rx}$ kad je ispunjen uslov dat tom jednačinom. U stvari imamo kvadratnu jednačinu po r koja daje

6.) $$r = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

Imamo dakle dva rešenja za r dakle dva partikularna integrala $y_1 = e^{r_1 x}$ $y_2 = e^{r_2 x}$. Jednačina 5.) se zove *karakteristična jednačina*. Ako su koreni karakteristične jednačine realni i različiti imamo dva partikularna integrala $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ a onda je opšte rešenje

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Ako su koreni karakteristične jednačine jednaki onda nemamo dva rešenja (jer je $r_1 = r_2$) već samo jedno $y_1 = e^{rx}$. Da bi našli drugo partikularno rešenje koristimo jednačinu 4.) iz odeljka 1.) dakle

7.) $$y_2 = y_1 u = e^{rx} \cdot u$$

Odavde imamo

$$y'_2 = r e^{rx} \cdot u + e^{rx} \cdot u' \quad y''_2 = r^2 e^{rx} \cdot u + 2 r e^{rx} u' + e^{rx} \cdot u''$$

Iz same jednačine 4.) dobijamo

$$u'' + u'(m + 2r) + u(r^2 + mr + n) = 0$$

ali poslednji član sadrži sam izraz karakteristične jednačine dakle $r^3 + mr + n = 0$ i zato je

8.) $$u'' = 0$$

jer je po jednačini 6.) kad je $r_1 = r_2$ samo $2r = -m$. Iz jednačine 8.) integracijom dobijamo*

$$u = x$$

pa je zato iz jednačine 7.)

9.) $$y_2 = e^{rx} x$$

Sad je lako za ovaj slučaj napisati opšti integral

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{rx} + c_2 e^{rx} \cdot x = e^{rx}(c_1 + c_2 x)$$

Najzad rasmotrimo i taj slučaj kad su koreni kompleksni tj.

$$r_{1,2} = \frac{m}{2} \pm i \frac{k}{2} = \alpha \pm i\beta.$$

Tada imamo

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

Sad imamo dva partikularna integrala koji su kompleksne funkcije (i to konjugovane — realni i imaginarni delovi jednaki!) pa će prema IV stavu biti

$$y_3 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \qquad y_4 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

Zato će opšti integral biti

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Primer. Rešiti jednačinu $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Karakteristična jednačina je

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

a odavde $r_1 = -3$ $r_2 = -2$ zato imamo $4_1 = e^{-3x}$ $y_2 = e^{-2x}$ i onda opšti integral

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

Primer. Režiti jednačinu $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Karakteristična jednačina je

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

a odavde je $r_1 = r_2 = -3$ i onda $y_1 = e^{-3x}$ $y_2 = xe^{-3x}$ pa je opšti integral $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} = e^{-3x}(C_1 + x C_2)$.

---

* Prilikom ova integracije uzimamo za konstantu 1 jer je to najprostije a prave integracione konstatne c_1 i c_2 nezavisno od toga.

Primer. Rešiti jednačinu $y'' + y' + y = 0$.
Karakteristična jednačina je

$$r^2 + r + 1 = 0$$

i odavde

$$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zato imamo

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

odakle dobijamo opšti integral

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

U ovu grupu jednačina dolazi i jednačina harmonijskog kretanja $y'' = -k^2 y$ koji smo obradili u primenama na mehaniku. Na tu jednačinu može se primenjti ova teorija samo valja imati na umu da se u svim slučajevima gde se u integralu pojavljuju $\sin x$ i $\cos x$ (ili makog argumenta) da se integracione konstante predstavljaju kao $C_1 = a\cos\alpha$ i $C_2 = a\sin\alpha$ i obrnuto zbog podesnijih transformacija.

Uežbanja. Rešiti jednačine

1. $y'' + y' - 12y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 3y = 0$
4. $y'' + y = 0$
5. $y'' + 2y = 0$.

3. Nehomogena jednačina II reda

Nehomogenom jednačinom drugog reda naziva se jednačina.

$$1.) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

pri čemu su a_1, a_0, f funkcije od x. Neka je y opšti integral ove jednačine 1.) i $\bar{y}$ opšti integral homogene jednačine $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ a Y partikularni integral jednačlne 1.) — onda lako je pokazati da $\bar{y} + Y$ integral jednačine 1.) tj. zadovoljava ovu jednačinu a uviđa se da je taj integral i opšti jer $\bar{y}$ sadrži dve integracione (proizvoljne) konstante (u pravi dokaz nećemo se upuštati).

Ako je Y partikularni integral jednačine 1.) onda mora biti

$$2.) \qquad Y'' + a_1 Y' + a_0 Y - f(x) = 0$$

a da je $\bar{y}$ integral (opšti) homogenog dela mora biti

$$3.) \qquad \bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_0\bar{y} = 0$$

Međutim da $\bar{y} + Y$ bude itegral jednačine 1.) mora biti

$$\bar{y}'' + Y'' + a_1(\bar{y}' + Y') + a_0(\bar{y} + Y) = f(x)$$

odnosno

$$4.) \qquad \bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_0\bar{y} + Y'' + a_1 Y' + a_0 Y - f(x) = 0$$

a po jednačinama 2.) i 3.) to mora biti identički jednako nuli.

Dakle $\bar{y} + Y$ je integral jednačine 1.) i pošto $\bar{y}$ sadrži (kao opšti integral homogenog dela) dve proizvoljne konstante — to je svakako opšti integral jednačine 1.); zato je opšti integral y jednačine 1.) oblika

$$5) \qquad y = \bar{y} + Y.$$

Napomena. Što se tiče opšteg integrala homogenog dela njega je moguće naći u većem broju slučajeva ali nalaženje partikularnog integrala jednačine 1.) je prilično otežano ma da postoji i posebna metoda pomoću Lagrange-ove varijacije konstanata. Ipak se za neke obične slučajeve koji se javljaju mogu reći jednostavna uputstva. U praksi je najčešće da je homogeni deo sa konstantnim koeficijentima a nehomogeni ili polinom po x ili $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$ ili njihov zbir; sem ovog moguće su potencije e^x ili kombinacije od ovog. Ako je f(x) polinom onda je partikularni integral takođe polinom istog stepena čije koeficijente treba upoređivanjem odrediti. Na pr. za jednačinu $y'' + 2y = x^3 - 1$ partikularni integral je $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ a koeficijente ćemo odrediti upoređenjem istih potencija leve i desne strane. Ako je na desnoj strani bilo samo sin — ili cos — funkcija ili njihov zbir onda je partikularni integral uvek *zbir* oba. Na pr. $y'' - y' + y = \sin\alpha t$ partikularni integral je $x = p\sin\alpha t + q\cos t$ gde su p i q koeficijenti koji će se iz upoređenja leve i desne strane (pomoću dobijenih jepnačina) još naknadno odrediti. Ako bi bilo na pr. $y'' + 2y' + 3y = \sin 3x + x^2 - 1$ onda bi partikularni integral bio $y = p\sin 3x + q\cos 3x + ax^2 + bx + c$. Napomenimo da se za prvi koeficijenat u polinomu može uzeti $a = 1$ (jer se njime uvek može podeliti cela jednačina pa će se dobiti razmere).

Vežbanja. Izvesti integraciju jednačina

1. $y'' + y' + 2y =^{3x}$ (partikul. integr. $y = pe^{3x} + q$)
2. $y'' - y' + y = x^3 + 2$
3. $y'' + 4y' + 5y = \sin 2x + x^2$
4. $y'' - 2y' + y = x^3 - 1$
5. $y'' - 2y' - 3y = \sin 3x + 2\cos 3x$
6. $y'' + y = e^{2x} + e^x + x + 1$ (partik. integr. $y = ae^{2x} + be^x + cx + d$.)

4. Neke jednačine dinamike

Pored jednačine harmonijskih oscilacija i jednačine slobodnog pada u otpornoj sredini koje su date u primenama mehanike dve važne jednačine ćemo rasmotriti i izvesti njihovu integraciju.

Jednačina amortizovanih oscilacija

1.) $$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+k^2x=0$$

ima karakterističnu jednačinu

2.) $$r^2+2\lambda r+k^2=0$$

čije je rešenje

3.) $$r=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-k^2}$$

kad je $\lambda>k$ onda je

$$r_1=-\lambda+m \quad r_2=-\lambda-m$$

i onda su partikularni integrali

$$x_1=e^{r_1t}=e^{(-\lambda+m)t} \qquad x_2=e^{r_2t}=e^{(-\lambda-m)t}$$

pa je opšti integral

4.) $$x=C_1e^{(-\lambda+m)t}+C_2e^{-(\lambda+m)t}$$

Ako je $\lambda=k$ onda je $r_1=r_2=-\lambda$ i imamo

$$x_1=e^{rt}=e^{-\lambda t} \qquad x_2=e^{-\lambda t}\cdot t$$

pa je onda

5.) $$x_1=e^{-\lambda t}+C_2e^{-\lambda t}\cdot t=e^{-\lambda t}[C_1+C_2t]$$

Najzad za treći slučaj $\lambda<k$ imamo

$$r_{1,2}=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-k^2}=-\lambda\pm i\,m$$

pa je onda

$$x_1=e^{(-\lambda+im)t}=e^{-\lambda t}\cdot e^{+imt}=e^{-\lambda t}(\cos mt+i\sin mt)$$

$$x_2=e^{(-\lambda-im)t}=e^{-\lambda t}\cdot e^{-imt}=e^{-\lambda t}(\cos mt-i\sin mt)$$

a odavde po poznatom stavu o kompleksnim funkcijama kao integralima imamo nove partikularne integrale

$$x_3=e^{-\lambda t}\cos mt, \quad x_4=e^{-\lambda t}\sin mt$$

i zato je opšti integral

$$x=C_1x_3+C_2x_4=C_1e^{-\lambda t}\cos mt+C_2e^{-\lambda t}\sin mt=e^{-\lambda t}(C_1\cos mt+C_2\sin mt)$$

Prema jednoj napomeni koju smo ranije učinili treba uzeti $C_1=a\sin\alpha$ $C_2=a\cos\alpha$ pa ćemo imati

$$x=e^{-\lambda t}(C_1\cos mt+C_2\sin mt)=e^{-\lambda t}(a\sin x\cdot\cos mt+a\cos x\sin mt)=$$

$$a\,e^{-\lambda t}(\sin\alpha\cos mt+\cos\alpha\sin mt)=a\,e^{-\lambda t}\sin(\alpha+mt)$$

Dakle za jednačinu amortizovanih oscilacija imamo za integral definitivno

6.) $$x=a\,e^{-\lambda t}\sin(\alpha+mt)$$

Druga važna jednačina je jednačina prinudnih oscilacija oblika

7.) $$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+k^2x=u_0\sin\eta t$$

gde su λ, κ, μ_0 η konstante. Očigledno pošto imamo posla sa nehomogenom jednačinom pa će biti

8.) $$x=\bar{X}+X$$

gde je $\bar{X}$ opšti integral homogenog dela a X partikularni integral cele jednačine. Ovaj partikularni integral biće oblika

9.) $$X=p\sin\eta t+q\cos\eta t$$

a kako je $\bar{X}$ iz već izvedenog obrasca 6.)

6.) $$\bar{X}=a\,e^{-\lambda t}\sin(\alpha+mt)$$

pa će biti

$$x=\bar{X}+X=a\,e^{-\lambda t}\sin(\alpha+mt)+p\sin\eta t+q\cos\eta t$$

ili ako stavimo

9'.) $$p=b\cos\beta \qquad q=b\sin\beta$$

onda imamo

10.) $$x=a\,e^{-\lambda t}\sin(\alpha+mt)+b\sin(\beta+\eta t)$$

što pretstavlja opšti integral jednačine 7.).

Odredimo vrednosti za p i q u partikularnom integralu 9.)
Da bi to postigli stavimo u jednačinu 8.)

$$X = p \sin \eta t + q \cos \eta t, \quad X' = p \eta \cos \eta t - q \eta \sin \eta t, \quad X'' = -p \eta^2 \sin \eta t - q \eta \cos \eta t$$

i imaćemo

$$11.) \quad p \eta^2 \sin \eta t - q \eta^2 \cos \eta t + 2 \lambda p \eta \cos \eta t - 2 \lambda q \eta \sin \eta t + \\ + \kappa^2 p \sin \eta t + \kappa^2 p \cos \eta t = u_0 \cdot \sin \eta t$$

a odavde

$$12.) \quad (\kappa^2 p - p \eta^2 - 2 \lambda q \mu) \sin \eta t + (\kappa^2 q - \eta^2 q + 2 \lambda p \eta) \cos \eta t = u_0 \sin \eta t$$

Upoređenjem leve i desne strane dobijamo

$$13.) \quad \begin{cases} p (\kappa^2 - \eta^2) - 2 \lambda q \eta = u_0 \\ q (\kappa^2 - \eta^2) + 2 \lambda p \eta = 0 \end{cases}$$

Množeći prvu od jednačina sa $\kappa^2 - \eta^2$ a drugu sa $2 \lambda \eta$ i sabirajući dobijamo

$$p = \frac{u_0 (\kappa^2 - \eta^2)}{(\kappa^2 - \eta^2)^2 + 4 \lambda^2 \eta^2}$$

i na sličan način

$$q = -\frac{2 \lambda \eta n_0}{(\kappa^2 - \eta^2)^2 - 4 \lambda^2 \eta^2}$$

na ovaj način imamo određene p i q pomoću λ, κ, η, u_0 a iz jednačine 9.') određujemo b tj. $\sqrt{p^2 + q^2} = b$ i $\operatorname{tg} \beta = \frac{q}{p}$ dok u jednačini 10.) a i α ostaju kao integracione konstante.

Ispravke

Pored sitnijih grešaka u tekstu se nalaze i krupnije greške koje čitalac treba da ispravi.

str.	red	stoji	treba
7	1 ozdo	$\frac{n (n = 1)}{1 - 2}$	$\frac{n (n - 1)}{1 \cdot 2}$
8	8 ozgo	funkcije	formule
11	11 ozgo	$\frac{4 x^2 - 3 x - 1}{2 \cdot 3^2 + 5 x - 2}$	$\frac{4 x^2 - 3 x - 1}{2 x^2 + 5 x - 2}$
12	1 ozgo	$1^2 = 2^2$	$1^2 + 2^2$
12	13 ozdo	$y^2 - \beta = Y$	$y_2 - \beta = \nu$
12	6 ozdo	$\alpha \nu$	$\alpha \nu + \mu \nu$
12	5 ozdo	$\frac{Y_1}{\nu_2} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\mu \beta - \gamma \alpha}{\beta (\beta + \alpha)}$	$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\mu \beta - \nu \alpha}{\beta (\beta + \alpha)}$
13	5 ozdo	$\frac{n}{m} \cdot \frac{\frac{\sin m x}{mx}}{\frac{\sin m x}{nx}}$	$\frac{\frac{\sin m x}{mx}}{\frac{n}{m} \frac{\sin nx}{nx}}$
14	2 ozgo	$(\sin a + x)$	$\sin (a + x)$
14	2 ozgo	$\sin (a = x)$	$\sin (a - x)$
15	1 ozgo	eksponencifalna	eksponencijalna
15	2 ozdo	$y + y$	$y + \Delta y$
15	1 ozdo	$y =$	$\Delta y =$
16	1 ozgo	$\sin x \frac{(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$	$\frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$
18	5 ozdo	$c f (x)$	$f (x)$
20	1 ozgo	lu x	ln x
20	1 ozgo	$y = x$	$y = x^n$
20	7 ozdo	$n x^{x-1}$	$n x^{n-1}$
21	8 ozgo	$y = 2 \sin a$	$y = 2 \sin a^x$

str.	red	stoji	treba
22	2 ozgo	$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dx}$	$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$
22	3 ozdo	$u\cdot\Delta u$	$u\,\Delta v$
22	2ozdo	$\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v$
24	2 ozgo	$-u\cdot v$	$-u\cdot v'$
26	5 ozdo	$x^{\sin x}$	$(x^{\sin x})'$
26	4 ozdo	$y'=(1+x)^{x^2}[e$	$y'=[(1+x)^{x^2}]'=[e$
27	4 ozdo	$+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3$	$+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$
28	2 ozdo	$\ln x$	$10\,x$
30	8 ozdo	$y=e^2$	$y=e^{\alpha x+\beta}$
31	11 ozdo	log	ln
31	9 ozdo	$\frac{2}{(x=1)^3}$	$\frac{2}{(x+1)^3}$
32	5 ozgo	ΔZ	Δz
34	4 ozgo	$p=3x^3-33y$	$p=3x^2-3y$
34	7 ozgo	du+	du=
34	16 ozgo	$F\frac{(a+h)-F(a)}{h}=F$	$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(\xi)$
34	(u petitu)	(„monotono opadajuće")	(„monotono opadajuće") u jednom intervalu
35	9 ozdo (form. 6)	$f'(a+h)$	$f'(a+\theta h)$
36	8 ozdo	Kako su	Ako su
37	1, 3 ozdo	lim [ ]	lim (zagrada ne treba)
37	5 ozdo	$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{x}\right]$	$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}$
37	5 ozdo	$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$	$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}$
39	4, 6, 7, 8 ozgo	u svim izrazima prva zagrada do znaka lim nepotrebna	
39	u zadacima 5. i 6. treba $\lim_{x\to 0}$		
39	u zadatku 2. rezultat je $\frac{1}{2}$		
42	12 ozdo	$4-6=2$	$4-6=-2$
43	4 ozgo	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1, $\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1, $-\frac{1}{2}$

str.	red	stoji	treba
43	10 ozdo	$(y'>0)$	$(y'<0)$
43	5 ozdo	$(y'<0)$	$(y'>0)$
46	7 ozgo	$y''=12x-2$	$y''=12x^2-2$
		izvesti ispravku računanja dalje i onda je $x_1=0$ Maximum, $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ minimum, $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$ minimum	
46	2 ozdo	— kod traženja	— kao kod traženja
48	5 ozgo	$y=x+\frac{1}{y}$	$y=x+\frac{1}{x}$
58	u zadacima	$\sin x\frac{\sin x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
69	9 ozdo	$\left(\frac{x+2}{9}\right)^2$	$\frac{(x+2)^2}{9}$
85	10 ozgo	$\sqrt{(y+dy)^2}-+$	$\sqrt{y^2(y+dy)^2}+$
87	2 ozgo	formula	funkcija
110	6 ozdo	$a\cdot x\cdot d\cdot x$	$a\,x\,d\,x$
110	6 ozdo	$a\,x\,d_x$	$a\,x\,d\,x$
111	1 ozdo	$y=\mathrm{cob}\sqrt{b}\,x$	$y_1=\cos\sqrt{b}\cdot x$
121	1 ozgo	zato je	zato je za dužinu krive l
121	2 ozgo	$1\pi M_x$	$2\pi M_x$
121	4 ozgo	$2\pi y_0 2$	$1\cdot y_0$
124	3 ozgo	V_p	E_p
124	1 ozdo	treba završiti izračunavanje sa $\frac{2}{3}a\sqrt{2gb^3}$	
125	10 ozgo	za funkciju koja	za funkciju g koja
128	10 ozgo	pretstavlja u zavisnosti	pretstavlja poprečni presek u zavisnosti
128	7 ozdo	treba da se	treba da se uzme