UNIVERZITET U BEOGRADU

vektori I

ING. DRAGIŠA IVANOVIĆ
DOCENT UNIVERZITETA

OSNOVI TEORIJE VEKTORA

ZA TEHNIČARE I FIZIČARE

Naučna knjiga
IZDAVAČKO PREDUZEĆE NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD 1948

62

„TIPOGRAFIJA", GRAFIČKO-NAKLADNI ZAVOD U ZAGREBU

PREDGOVOR

Savremene fizičke i tehničke nauke toliko su se razvile da je za njihovo razumijevanje i uspješno praćenje neophodno ovladati prilično visokim matematičkim znanjem. Teorija vektora zauzima važno mjesto u nizu ostalih oblasti matematike i fizike koje služe za osposobljavanje savremenog inžinjera i fizičara. Zato je i zadatak knjige »Osnovi teorije vektora« da fizičarima i tehničarima, kako studentima, tako i diplomiranim, pruži kratki uvod u tu oblast. Prema tome se kod metoda izlaganja vodilo računa da se čitalac ne opterećuje suvišnim detaljiziranjima, naročito u dokazivanjima i izvođenjima teorema i definicija. Odvajanje i isticanje važnijih pitanja i stavova takođe treba da knjigu učini što preglednijom i podesnijom za bržu i uspješniju upotrebu i kao potsjetnika po pojedinim pitanjima teorije vektora.

Namjera autora bila je da knjiga posluži i onim inžinjerima i fizičarima koji na Univerzitetu nisu slušali vektorsku analizu, pa je to uticalo i na metod izlaganja.

Pri definicijama i stavovima u teoriji polja polazilo se prvenstveno od fizičkih pojava, izbjegavajući što je više mogućno definicije koje bi bile vezane za koordinatne sisteme.

Beograd, januara 1948 god.

Ing. Dragiša M. Ivanović
docent Univerziteta

UVOD

O vektorima se prvi put govori u djelima holandskog fizičara Simona Stevina oko 1600 godine (godine 1585). On je dao princip paralelograma sila, pa je fizičke veličine pretstavljao usmjerenim dužima. Mehanika, i to njen dio statika, je prva nauka u kojoj je ponikao vektor, a sila je bila konkretni obrazac vektorske veličine. Razvojem mehanike fizičari su dolazili do otkrića i zaključaka, koji su u sebi sadržavali odnose između vektorskih veličina. Iako izražavani na razne, ponekad i vrlo komplikovane načine, zakoni mehanike su se odnosili na usmjerene fizičke veličine, kako u statici, tako u kinematici i dinamici. Tako sto godina poslije Stevinovog djela drugi Newtonov zakon između ostalog pokazuje da su ubrzanje i sila uvijek jednako upravljeni. Fizičari i matematičari su pronašli mnogo važnih odnosa među vektorima i ne govoreći o vektorima.

Prvobitne operacije sa vektorima pretstavljao je elementarni **geometriski metod,** pomoću kojeg je vektor uziman kao cjelina i pretstava jedne fizičke veličine. Ali u komplikovanim zadacima mehanike tim metodom se nije moglo mnogo postići. Bio je bespomoćan naročito po pitanjima prostornog prikazivanja.

Godinom 1637, kada je Descartes uveo koordinatni sistem u nauku, a naročito kada je uveden sa sve tri koordinate, te se ovladalo računanjem u prostoru pomoću koordinata, silan zamah sa neslućenim razmjerama dobio je novi metod računanja i sa sastavnim djelovima vektorskih veličina, a to je **analitički metod.** Počeo ga je uvoditi Parent (Paran) oko 1700 godine, a naročito ga razvija Clairaut (Klero) u svom djelu »Recherches sur les courbes a double courbure« objavljenom 1731 godine. Analitički metod vektorske veličine nije pretstavljao niti nazivao vektorima, nego je vektor razlagao na tri komponente po koordinatnim osama u prostoru i smatrao ih skalarima, te je s njima računao kao sa običnim skalarnim matematičkim funkcijama, primjenjujući na njih obične zakone algebre i analize beskonačno malih veličina.

Veliki matematičari i fizičari 17. i 18. vijeka u većini su se služili analitičkim metodom, a redovno skalarnim računanjem. Descartes-ov sistem je postao skoro universalan. Jedno od najljepših djela u kojima analitički metod dostiže kulminaciju je Lagrange-ova »Analitička mehanika«, objavljena u Parizu 1788 godine. Autor ponosno ističe da u djelu nema crteža, nego je sve svedeno na matematičke algebarske operacije, da su i geometriske i mehaničke veličine podvrgnute algebarskom računu analitičkim metodom. Naravno, za svaku geometrisku veličinu, koja je pretstavljala neku fizičku veličinu uzima po tri broja, koji pretstavljaju komponente na koordinatnim osama.

Newton i engleski matematičari 18. vijeka operisali su sa geometriskim veličinama neposredno, ne prelazeći na komponente u svakom slučaju. Ma da je Newton te veličine, dakle i vektorske veličine, posmatrao u cjelini, posmatrao ih je izolovano, metafizički, te i pored svoje vanredne genijalnosti nije uspio dati prost, jasan i pristupačan metod operisanja sa tim veličinama.

Analitički metod dovodi do sjajnih rezultata, što dokazuju mnogobrojna i genijalna djela i pronalasci velikih matematičara i fizičara. Taj metod može i danas oduševiti čitaoca.

Ali i pored pozitivnih strana analitičkog metoda treba imati na umu da vektorska veličina, koju taj metod razlaže na tri komponente, pretstavlja neku fizičku veličinu u cjelini i kao cjelina. Analitički metod je rastavlja, pa djelove analizira bez veze sa cjelinom. Štoviše, analitički metod vektoru oduzima, zanemaruje i svojstva, koja ga karakterišu, ne vodi računa o fizičkoj stvarnost, koju vektor odražava i prikazuje. Vektor kao konkretno jedinstvo brojne veličine, pravca i smjera u analitičkom metodu izgubi svoje kvalitete i rastrže se na svoje djelove, koji su drukčijeg karaktera, nego što je sam vektor, a da se i ne govori o fizičkoj stvarnosti. Neosporno je da se visoko razvijenim algebarskim aparatom u širokom smislu računski dolazi spretno do rezultata. Ali i pored razbijanja cjeline-kompleksa operacije su duge, sa mnogo brojeva i veličina, često nedovoljno pregledne, pored sve genijalnosti velikih naučnika, koji su tim metodom došli do rezultata od istoriske važnosti za nauku i čovječanstvo uopšte.

Dakle, kod analitičkog metoda se umjesto jednog broja upotrebljavaju tri broja, vrlo velik je broj analitičkih jednačina, a često je i složenost veća pod uticajem izabranog koordinatnog sistema.

Razvojem fizike i matematike u drugoj polovini 19. vijeka ponovno se prišlo posmatranju, proučavanju i primjeni vektorskih veličina u cjelini, bez razlaganja vektora u tri komponente. Naravno se i koordinatni sistem upotrebljava kao pomoćno sredstvo. To je opet upotreba ranijeg geometriskog metoda, ali **na višem stepenu**. Uzimajući vektor kao cjelinu stvorio se novi aparat kako za obilježavanje, tako i za proračunavanje i prikazivanje. Pronađene su i nove metode vektorske algebre, analize i uopšte teorija vektora. Razvija se hidromehanika, a kasnije elektrodinamika.

Prvi radovi iz teorije vektora pojavljuju se sredinom 19. vijeka. Njemački matematičar Hermann Grassmann objavljuje 1844 godine djelo »Učenje o liniskom istezanju« (Die lineale Ausdehnungslehre), a irski astronom, fizičar i matematičar William Rowan Hamilton 1853 godine djelo »Lekcije o kvaternijonima« (Lectures of Quaternions). Autori na vrlo komplikovan i teško pristupačan način izlažu matematički, ne uzimajući dovoljno u obzir fizičku stvarnost, te pomenuta djela nisu odmah široko prihvaćena i rasprostranjena. Ali i pored matematički složenih izlaganja, kao na pr. kod Hamiltona kvaternijoni, koji su naročiti »hiperkompleksni« brojevi sa četiri nezavisne jedinice, dati su izvjesni pojmovi i operacije iz vektorskog računa. Hamilton je dao pojam polja i nekih diferencijalnih operacija u polju, dao je operator ∇. Do proizvoda vektora Hamilton je došao 1843, a Grassmann nezavisno od njega 1844 godine.

Teoriski fizičari su razradili i primijenili teoriju vektora tek u drugoj polovini 19. vijeka. Genijalno klasično djelo James Clerk Maxwell-a »Traktat o elektricitetu i magnetizmu« (Treatise on electricity and magnetism), objavljeno 1873 godine, pisano je u vektorskom obliku. Zatim slijedi plejada fizičara, koji primjenjuju i razvijaju vektorski račun, kao John Willard Gibbs (Gips), Heaviside (Hivisajd), Föppl, Abraham, a kasnije u 20. vijeku Max Planck i većina savremenih fizičara, koji sve više produbljuju i primjenjuju teoriju vektora. Fizičar Gibbs je uglavnom dao i formu vektorskog računa još 1881 godine, pri čemu je naravno upotrebljavao drukčije oznake nego što se danas upotrebljavaju.

Savremena fizika je uglavnom usvojila vektorski račun u svim važnijim oblastima. Postoji samo još ne veliki niz pitanja iz oblasti matematike, fizike, nauke o čvrstoći i sl., gdje se vektori tek počinju primjenjivati, ili se još ne primjenjuju uopšte. To su sa principijelne tačke posmatranja pitanja manjih razmjera i važnosti u odnosu na osnovne glavne oblasti fizike, koje se ne mogu danas ni zamisliti bez vektorske analize, kao što je na pr. elektrodinamika, hidromehanika itd. Međutim iako je savremena fizika uglavnom potpuno usvojila vektore, neki autori, — doduše mali broj, — pod uticajem starog analitičkog metoda inertno nastavljaju rad po starom, danas nedovoljnom i nepraktičnom metodu, a novi ne žele, ne proučavaju, te ga i ne usvajaju i kada se radi o vektorskoj, a da se ne govori o tenzorskoj analizi, bez koje se takođe savremena fizika ne može zamisliti. Neosporno je da simbolika u teoriji vektora ne osvaja na brzinu i zbog nezgodno izabrane terminologije i zbog vraćanja na komponente prilikom definitivnog izračunavanja i rješavanja pojedinih zadataka i pitanja.

Ali prirodnost, praktičnost i kratkoća, pa i elegantnost vektorskog izlaganja i računanja obara svaki prigovor. Tako teorija vektora posljednjih decenija i godina pretstavlja najelegantniji, a skoro i jedini, metod prikazivanja i proučavanja u fizici. Današnji fizičar, inženjer i matematičar ne mogu biti na savremenom nivou nauke i svoga poziva, ako ne poznaju osnovne stavove iz teorije vektora i njihovu primjenu.

Vektorski račun se, dakle, ne može nazvati »računska stenografija«, jer u vektorskim formulama slika fizičke stvarnosti dobija često takav oblik, da ističe vezu sa tom stvarnošću daleko više od ranijih metoda.

Prema tome, u savremenoj teoriji vektora se vodi računa o pojedinim definicijama raznih veličina drukčije nego kod ranijih metoda. Danas se te veličine definišu nezavisno od koordinatnog sistema, koji se samo eventualno primjenjuje na razne načine. Tako na pr. pravougli sistem nije uvijek najpogodniji, pa se primjenjuju i krivoliniski sistemi.

Radi lakšeg snalaženja onih čitalaca, koji prvi put proučavaju teoriju vektora, paralelno se izlaže i analitički metod kod niza pitanja. Tako će se čitalac lakše i brže orijentisati u raznovrsnoj literaturi raznih jezika i autora.

PRVA GLAVA

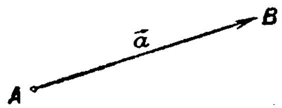
§ 1. — VEKTOR I SKALAR

U proučavanju strukture i strukturne zakonitosti materije fizika i matematika obuhvataju sa manjom ili većom apstrakcijom razne oblike materije i njenog kretanja. Veličine koje karakterišu razna kretanja i ostale osobine materije koju proučava fizika prema prirodi i prema mogućnosti izražavanja mogu se podijeliti u dvije kategorije: skalarne veličine i vektorske veličine.

Sam naziv skalar označava svojstvo skalarne veličine. Skalar se može pretstaviti na jednoj skali, a to znači jednim brojem, brojnom vrijednošću. Jedan broj je potreban i dovoljan uslov da se okarakteriše jedna skalarna veličina. Tako na pr. zapremina nekog tijela je poznata kada se zna brojna vrijednost u zapreminskim jedinicama, masa tijela je poznata kada se zna brojna vrijednost u jedinicama mase, temperatura tijela je takođe poznata i određena kada se zna brojna vrijednost u jedinicama temperature — stepenima; zatim električno opterećenje, gustina itd. — za sve to je dovoljno znati odgovarajuću brojnu vrijednost u dotičnim jedinicama. Na primjer masa tijela iznosi 5 grama, a grama, m grama; temperatura tijela iznosi 30^{0}C, t^{0}C; električno opterećenje iznosi 1 kulon, e kulona itd.

Vektorska veličina pretstavlja se **vektorom.** Vektor ima slijedeće karakteristike: **intenzitet (brojnu vrijednost,** apsolutnu veličinu, apsolutnu vrijednost, dužinu, modul), **pravac** i **smjer.** Neki autori nazivaju vektor usmjerenom duži, drugi ne vode računa o smjeru, nego pored dvije prve karakteristike još o početnoj ili napadnoj tački itd. Brojna vrijednost vektora je broj koji pokazuje koliko odgovarajućih jedinica ima veličina koju vektor pretstavlja. Tipičan primjer vektorske veličine u fizici je sila. Za potpuno određivanje sile koja djejstvuje na jednu materijalnu tačku potrebno je znati ne samo broj dina ili ostalih jedinica, kojima se sila mjeri, nego je potrebno znati i pravac u kojem sila djejstvuje, a zatim i smjer te sile, odnosno toga pravca sile, u kojem sila djejstvuje (vuče ili gura). Brzina je takođe vektorska veličina itd.

Vektor se pretstavlja usmjerenom duži (sl. 1). Veličina duži pretstavlja veličinu vektora. Vektor ima početnu tačku ili početak i krajnju tačku ili kraj (završetak). Smjer vektora označava se strjelicom na kraju.



Sl. 1.

Mi ćemo vektore obilježavati uopšte malim slovima latinice sa horizontalnom strjelicom odozgo usmjerenom udesno kada se piše rukom, na pr. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{j}$, $\vec{r}$, ili sa dva velika slova, koja označavaju početak i kraj vektora, a iznad njih takođe strjelica, na pr. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{OA}$. Takođe ćemo pored opštih notacija upotrebljavati i vektore sa jednim velikim slovom, koje je uobičajeno kao notacija za izvjesne fizičke veličine, kao na pr. sila $\vec{F}$, magnetno polje $\vec{H}$, električno polje $\vec{E}$, orijentisana površina $\vec{S}$, moment sile $\vec{M}$ itd. Što se tiče štampe u knjizi, usvojili smo sovjetsku notaciju, koja je po našem mišljenju najpraktičnija, a to je da se vektor obilježava masnim slovom bez strjelice, bez obzira da li je slovo malo ili veliko. Ako se pak vektor obilježi velikim slovima početne i završne tačke, onda se i kod štampanog teksta stavlja strjelica iznad tih slova. Na pr. **a**, **b**, **c**, **j**, **r**; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{OA}$.

Brojnu vrijednost vektora ili **modul vektora označavaćemo** istim slovom kao i vektor, ali bez strjelice, — prosto dotičnim slovom kao skalar, ili pak vektor među uspravnim crtama. Tako na pr. modul vektora **a** označavaćemo a ili |**a**|, modul vektora $\overrightarrow{AB}$ sa $|\overrightarrow{AB}|$.

U literaturi postoje razni načini obilježavanja. Neki autori upotrebljavaju velika gotska slova, neki iznad slova i kod štampanog teksta stavljaju strjelicu kao kod pisanog rukom, neki ne stavljaju strjelicu, nego običnu crtu, neki stavljaju slovo v pred oznakom za vektor itd., a apsolutne vrijednosti (veličine) označavaju takođe na razne načine.

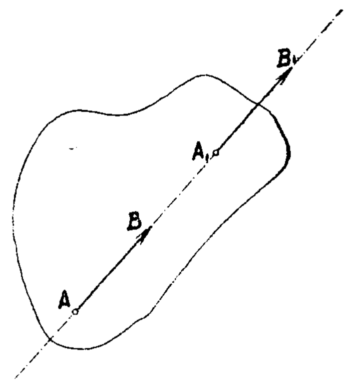
§ 2. — PODJELA VEKTORA PREMA PRIRODI FIZIČKE VELIČINE

Vektori mogu pretstavljati različite veličine, od kojih zavisi i vektor u cjelini i njegova geometriska slika. Početak vektora posmatran kao »napadna tačka« vektora može biti proizvoljno uzet, a može biti određen u izvjesnom domenu ili potpuno u čitavom prostoru, ako se o njemu radi. Prema tome se vektori dijele na:

1. — Slobodne vektore, 2. — kližuće ili liniske vektore i 3. — vezane vektore.

Kod slobodnog vektora napadna tačka se može izabrati proizvoljno u prostoru, pri čemu treba da modul, pravac i smjer vektora ostanu nepromijenjeni. Slobodni vektor se može pomjerati paralelno samom sebi prema potrebi, a da se pritom ne izmijeni. Tako se može početak vektora dovesti recimo u početak proizvoljno izabranog koordinatnog sistema, a da se ne poremeti tačnost prikazivanja veličine i pojave, koja se proučava i vektorom pretstavlja. Kao primjer slobodnog vektora uzećemo brzinu translatornog kretanja jednog tijela. Sve tačke tijela imaju pri translatornom kretanju istu brzinu, pa možemo proizvoljno izabrati napadnu tačku vektora brzine.

Kod liniskog vektora početna tačka vektora može se pomjerati po pravoj liniji, koja se poklapa sa pravcem vektora (sl. 2). Djejstvo je isto, a vektor se može uzeti proizvoljno ili na pr. kao $\overrightarrow{AB}$, ili kao $\overrightarrow{A_1B_1}$ itd. Primjer kližućeg vektora je vektor sile, koja djejstvuje na kruto tijelo. Pomjeranje napadne tačke sile duž prave koja se poklapa sa pravcem sile ne remeti prvobitno kretanje.



Sl. 2.

Kod vezanog vektora određena je početna tačka, pa se vektor ne može pomjerati, jer je u raznim tačkama različit. Primjer vezanog vektora je vektor polja, gdje je u svakoj tački polja različiti vektor kao pretstavnik fizičke veličine u dotičnom polju. Na pr. ako je dato elektrostatičko polje, onda je vektor polja karakteristika polja, a uopšte može biti različit u raznim tačkama.

Proučavaćemo najprije slobodne vektore, a zatim i ostale što se više odnosi na pojavu i veličinu, koja se proučava, a ne na same vektore. Naravno to će biti u vezi izvjesnih pitanja i zadataka, koji se budu proučavali.

§ 3. — PROIZVOD I KOLIČNIK VEKTORA I SKALARA

Proizvod vektora **a** sa skalarom k je takođe vektor **b** brojne vrijednosti ka, istog pravca kao vektor **a**, a istog smjera ako je $k > o$, suprotnog smjera ako je $k < o$.

Dakle,

$$\mathbf{a} \cdot k = k \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}, \text{ gdje je } b = ka. \tag{3,1}$$

Ako je k = 1 onda je **b** = **a**, a to znači da su jednaki vektori paralelni (mogu se i poklapati) i istog smjera.

Ako je k = —1 onda je **b** = —**a**. Za takva dva vektora kaže se da su međusobno suprotni, a to znači da su paralelni, iste brojne vrijednosti, ali suprotnog smjera. Uopšte se nazivaju i antiparalelni.

Analogno se dobija $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{k}$, pa se može reći da je količnik vektora i skalarne veličine proizvod vektora **b** i recipročne vrijednosti skalara k. Količnik je takođe vektor k puta manje brojne vrijednosti itd.

§ 4. — JEDINIČNI VEKTOR ILI ORT VEKTORA

Neka je dat vektor a. Uzmimo drugi vektor, koji je istog pravca i smjera kao dati vektor **a**, ali ima brojnu vrijednost ravnu jedinici. Označimo ga sa $\mathbf{a}_0$. Vektor $\mathbf{a}_0$ naziva se **ort vektora a.** Ovaj vektor označava orijentaciju vektora **a**, pa je otuda i uzet naziv za jedinični vektor.

Prema tome je

$$\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{a}, \tag{4,1}$$

ili svaki vektor je ravan proizvodu iz svoje brojne vrijednosti i svoga orta; ort jednog vektora ravan je količniku tog vektora i brojne vrijednosti istog vektora.

Primjeri i zadaci:

1. — Napisati u vektorskom obliku zakon gravitacije i Coulombov zakon.

Kod zakona gravitacije sila kojom mase dvaju tijela međusobno djejstvuju je:

$$\mathbf{F} = \varkappa \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0$$

gdje je $\mathbf{r}_0$ ort vektora **r**, istog smjera kao i vektor **F**, a $\varkappa$ gravitaciona konstanta. Ako se stavi $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$, dobija se definitivno vektorski oblik

$$\mathbf{F} = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}.$$

Coulomb-ov zakon međusobnog djejstva dviju količina elektriciteta je

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_0,$$

gdje je ε dielektrična konstanta sredine. Analogno se dobija u vektorskom obliku:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}.$$

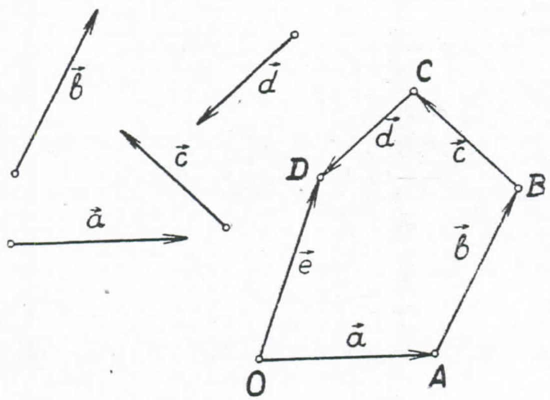
Analogija ovih zakona nikako ne znači identičnost, jer je kod elektriciteta drukčije kretanje materije nego što je mehaničko kretanje, što sve još nije dovoljno proučeno, pa se i analogija brzo iscrpljuje.

Iz posljednje relacije se dobija vektor elektrostatičkog polja

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^3} \mathbf{r}.$$

§ 5. — SABIRANJE VEKTORA

Vektori se sabiraju ili slažu prema pravilu poligona. Neka su dati vektori **a**, **b**, **c**, **d** (sl. 3). Nanese se vektor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. Na kraj toga vektora



Sl. 3.

nanese se drugi vektor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ i tako dalje $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{d}$. Zbir svih vektora je vektor $\overrightarrow{OD} = \mathbf{e}$.

Lako je dokazati da za zbir vektora važe slijedeća svojstva:

a) komutativnost: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$; . . . . (5,1)

b) asocijativnost: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$; . . . . . . (5,2)

c) distributivnost: $k\,(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b} + k\mathbf{c}$. . . . (5,3)

Razlika dvaju vektora se dobija kao zbir prvog vektora i vektora suprotnog drugom:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \qquad (5,4)$$

§ 6. — KOLINEARNI I KOMPLANARNI VEKTORI

Dva vektora su kolinearni kada su paralelni jednoj pravoj ili se nalaze na jednoj pravoj. Prema tome kolinearni mogu biti vektori različite brojne vrijednosti i smjera. Glavno je da budu paralelni (sl. 4).

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel LL'$$

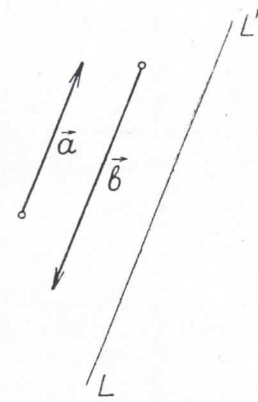
Iz prethodnog se zna da je proizvod vektora i skalara također vektor, pa je vektor $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ kolinearan sa vektorom **a**, gdje može biti $k \lesseqgtr 0$.

Uslov kolinearnosti dvaju vektora može se izraziti i u simetričnom obliku ovako:

$$-k\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0.$$

Pomnožimo ovu jednačinu sa μ i stavimo $-k\mu = \lambda$, pa je uslov kolinearnosti dvaju vektora:

$$\lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b} = 0. \qquad (6,1)$$

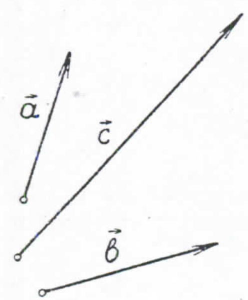


Sl. 4.

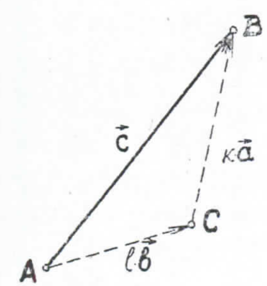
Tri ili više vektora su komplanarni kada su paralelni jednoj ravni ili se nalaze u jednoj ravni.

Neka su data tri vektora **a**, **b**, **c** u jednoj ravni (ravan crteža) (sl. 5a). Onda je mogućno vektor **c** razložiti u dvije komponente $\mathbf{c}_1$ i $\mathbf{c}_2$ koje su paralelne sa vektorima **a** i **b**. Prenese se vektor $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ (sl. 5b). Razlaganjem na komponente određenog pravca se dobija: $\overrightarrow{CB} = k\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = l\mathbf{b}$, pa je uslov komplanarnosti triju vektora:

$$\mathbf{c} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b}. \qquad (6,2)$$



Sl. 5a



Sl. 5b

Simetrični oblik se dobija slično ranijem:

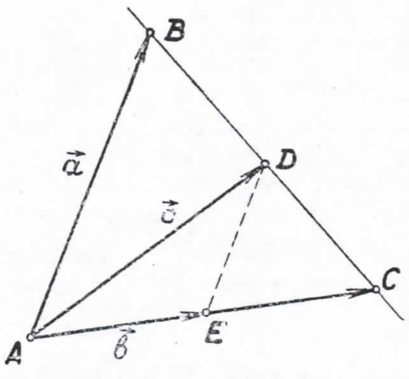
$$-\mathbf{ka} - \mathbf{lb} + \mathbf{c} = \mathrm{o}$$

Pomnoži se sa ν i stavi $-\mathrm{k}\,\nu = \lambda$, $-\mathrm{l}\,\nu = \mu$, pa se uslov komplanarnosti definitivno dobija u simetričnom obliku:

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathrm{o}. \qquad (6{,}2\mathrm{a})$$

Primjeri i zadaci

1. — Data su tri vektora **a**, **b** i $\mathbf{c} = \mathrm{k}\mathbf{a} + \mathrm{l}\,\mathbf{b}$ sa zajedničkom početnom tačkom. Dokazati da je uslov da vrhovi svih triju vektora budu na jednoj pravoj: $\mathrm{k} + \mathrm{l} = 1$.



Sl. 6.

Povuče se DE‖AB (sl. 6), pa je $\overrightarrow{ED} = \mathrm{k}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AE} = \mathrm{l}\mathbf{b}$, a iz sličnosti trouglova ABC i EDC dobija se prema sl. 6

$$\mathrm{k}\,.\,\mathrm{AB} : \mathrm{AB} = (\mathrm{AC} - \mathrm{l}\,.\,\mathrm{AC}) : \mathrm{AC}, \text{ ili}$$

$$\mathrm{k} + \mathrm{l} = 1.$$

2. — Data je relacija: $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \lambda\mathbf{F} + \mu\mathbf{G} + \nu\mathbf{H}$. Dokazati da su tada komplanarni slijedeći vektori:

$$\mathbf{a} - \mathbf{F},\ \mathbf{b} - \mathbf{G},\ \mathbf{c} - \mathbf{H}.$$

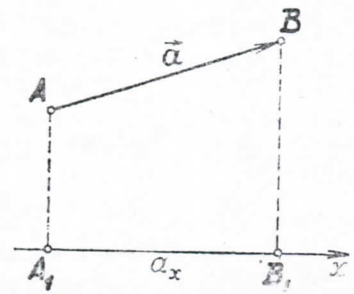
Prebacivanjem članova jednačine sa desne na lijevu stranu dobija se $\lambda\,(\mathbf{a} - \mathbf{F}) + \mu\,(\mathbf{b} - \mathbf{G}) + \nu\,(\mathbf{c} - \mathbf{H}) = \mathrm{o}$, a to je uslov komplanarnosti, što je trebalo dokazati.

3. — Data su tri vektora **a**, **b**, **c**. Koji uslov treba da ispune, pa da se od njih može formirati trougao?

Traženi uslov je: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathrm{o}$.

§ 7. — PROJEKCIJA VEKTORA

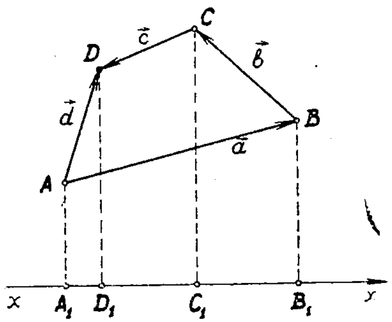
Projekcija vektora na neku osu je otsječak ose, koji čine ravni povučene kroz krajnje tačke vektora normalno na datu osu. Projekcija vektora $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ je $A_1B_1 = a_x$ (sl. 7). Ravan povučena kroz A normalno na osu xx ima sa osom zajedničku tačku A_1 — prodornu tačku —, a ravan povučena kroz tačku B normalno na istu osu ima prodornu tačku B_1. Osa je, kao što je poznato, prava koja ima određeni smjer osim pravca. Ugao između vektora i ose takođe je ugao među dvjema pomoćnim pravama povučenim iz neke tačke u prostoru paralelno vektoru i osi.



Sl. 7.

Projekcija vektora na osi se smatra skalarnom i algebarskom veličinom. Strogo uzevši projekcija vektora je vektor. No radi kratkoće uzimaćemo samo mjerni broj te projekcije. Projekcija je pozitivna ako ima smjer ose, a negativna ako ima suprotan smjer. Projekcija vektora na nekoj osi jednaka je proizvodu veličine vektora i kosinusa ugla između vektora i ose. Ako ugao između vektora i ose označimo sa α, kao što je iz geometrije poznato biće $a_x = a\cos\alpha$; ova relacija važi za sve vrijednosti ugla α. Ako je $\alpha = \mathrm{o}$ onda je $a_x = a$, tj. vektor je paralelan osi. Ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, onda je $a_x = \mathrm{o}$, tje. vektor je normalan na osi. Ako je $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ biće $\cos\alpha < \mathrm{o}$, ali je i projekcija a_x negativna, pa relacija važi i za taj slučaj.

Projekcija geometriskog zbira vektora na nekoj osi jednaka je algebarskom zbiru projekcija pojedinih vektora. Neka je $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ onda je $d_x = a_x + b_x + c_x$. U prostoru se vektori sabiraju geometriski, a projekcije na osi algebarski. Na slici 8. je a_x i d_x pozitivno, a b_x i c_x negativno.



Sl. 8.

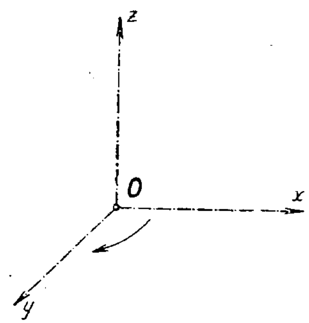
Primjer:

Brojna vrijednost jednog vektora je $a = 10$. Projekcija tog vektora na datoj osi je $a_x = -5{,}6$. Naći ugao α između tog vektora i ose.

Prema podacima je $\cos\alpha = -\frac{5{,}6}{10}$. Suplementni ugao je α_1. $\cos\alpha_1 = 0{,}56$, $\alpha_1 \approx 55^0 57'$. $\alpha = 124^0 3'$.

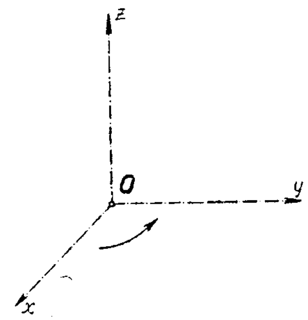
§ 8. — PROUČAVANJE VEKTORA U KOORDINATNOM SISTEMU

U matematici i fizici upotrebljavaju se dva Descartes-ova koordinatna sistema: lijevi sistem i desni sistem. Kod lijevog koordinatnog sistema (sl. 9) rotacija od x-ose prema y-osi za posmatrača koji stoji uz z-osu obavlja se najkraćim putem slijeva udesno, kao kazaljka na satu gledano odozgo. To je pozitivni smjer rotacije sistema. Taj sistem se može pretstaviti redom palcem, kažiprstom i srednjim prstom lijeve ruke. Razvojem fizike, a naročito nauke o elektricitetu i magnetizmu ispostavilo se da lijevi sistem nije podesan. Za matematičko proučavanje i prikazivanje zakona elektriciteta i magnetizma bolje odgovara d e s n i koordinatni sistem (sl. 10). Rotacija od x-ose ka y-osi najkraćim putem obavlja se za posmatrača, koji stoji uz z-osu, s desna ulijevo, u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu gledane odozgo. To je

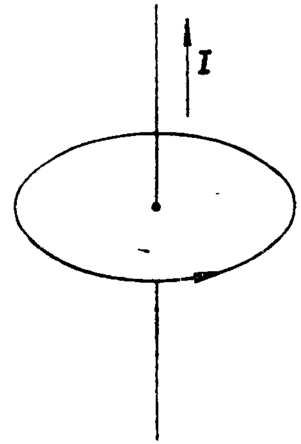


Sl. 9.

pozitivni smjer rotacije. Desni sistem se može pretstaviti redom palcem, kažiprstom i srednjim prstom desne ruke. Kolika je prednost desnog koordinatnog sistema vidi se na raznim primjerima i u fizici i u matematici. U teoriji elektriciteta za određivanje smjera vektora magnetnog polja,



Sl. 10.



Sl. 11.

koje izaziva struja, koja protiče kroz provodnik, dobro objašnjenje daje Maxwell-ovo pravilo, ili pravilo svrdla. Ako se vrši rotacija duž silnica u njihovom smjeru, onda će po pravilu svrdla okretanje udesno izazivati napredovanje svrdla u smjeru kojim protiče struja (sl. 11).

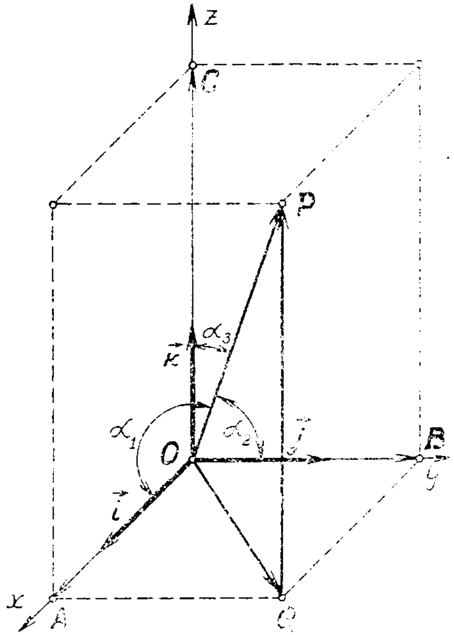
U matematici je kod desnog sistema prirodnija veza između sistema u prostoru i u ravni, te je i prelaz olakšan.

Prema tome mi smo usvojili desni koordinatni sistem.

RAZLAGANJE VEKTORA NA KOMPONENTE

Dat je vektor $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$ u koordinatnom sistemu (sl. 12). Zbog lakšeg proučavanja uzećemo početnu tačku vektora u početku koordinatnog sistema. Dati vektor možemo razložiti na tri vektora duž koordinatnih osa, pa je

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8{,}1)$$



Sl. 12.

Vektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ nazivaju se k o m p o n e n t e vektora $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$. P r o j e k c i j e vektora **a** na osama su algebarske veličine: $OA = a_x$, $OB = a_y$, $OC = a_z$. To su k o o r d i n a t e vektora $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$. Prema tome koordinata vektora je algebarska vrijednost njegove odgovarajuće komponente na koordinatnoj osi, ili projekcija vektora na osi.

Jedinične vektore ili ortove duž koordinatnih osa označavamo sa: **i**, **j**, **k**. U ovom slučaju ort vektora $\overrightarrow{OA}$ je **i** (sl. 12), ort vektora $\overrightarrow{OB}$ je **j**, ort vektora $\overrightarrow{OC}$ je **k**, ili u pravouglom koordinatnom sistemu:

$$\overrightarrow{OA} = a_x \cdot \mathbf{i}, \qquad \overrightarrow{OB} = a_y \cdot \mathbf{j}, \qquad \overrightarrow{OC} = a_z \cdot \mathbf{k}.$$

Vektori **i**, **j**, **k** nazivaju se k o o r d i n a t n i o r t o v i. Prema tome je

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8{,}2)$$

Označimo sa α_1, α_2, α_3 uglove vektora **a** sa koordinatnim osama, pa će biti:

$$a_x = a\cos\alpha_1, \; a_y = a\cos\alpha_2, \; a_z = a\cos\alpha_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8{,}3)$$

Prema Pitagorinoj teoremi je

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8{,}4)$$

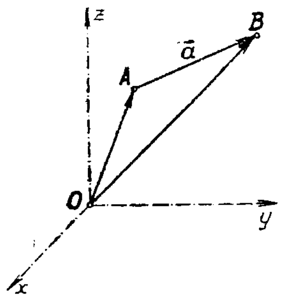
Na osnovu toga dobija se relacija među uglovima tako da se treći može izračunati kada se znaju dva:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8{,}5)$$

Iz (8,3) i (8,4) se dobija

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\alpha_2 &= \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\alpha_3 &= \frac{a_z}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (8{,}6)$$

Za određivanje vektora dovoljno je znati tri projekcije. Ako vektor nije slobodan, te se uopšte početak vektora ne nalazi u koordinatnom početku, onda nije dovoljno znati samo tri projekcije. Potrebno je znati i



Sl. 13.

koordinate početne tačke vektora (sl. 13). Povucimo pomoćne vektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Onda je $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Označimo koordinate tačke A sa x_1, y_1, z_1, a tačke B sa x_2, y_2, z_2, pa je prema pravilu o projekciji razlike:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1.$$

Veličina vektora **a** je

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

a uglovi sa koordinatnim osama dobijaju se iz relacija:

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \text{ itd.}$$

Primjeri i zadaci:

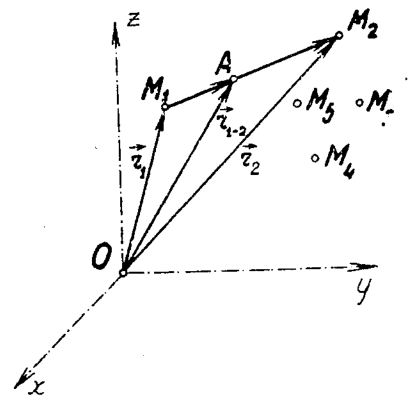
1. — Projekcije vektora **a** na koordinatnim osama su $a_x = 3$, $a_y = -4$, $a_z = 12$. Naći dužinu vektora i kosinuse njegovih uglova sa koordinatnim osama.

Odg.: $a = 13$, $\cos\alpha_1 = \frac{3}{13}$, $\cos\alpha_2 = -\frac{4}{13}$, $\cos\alpha_3 = \frac{12}{13}$.

2. — Date su projekcije vektora **a, b** i **c** na koordinatnim osama: $a_x = 5$, $a_y = 7$, $a_z = 8$; $b_x = 3$, $b_z = 6$; $c_x = -6$, $c_y = -9$, $c_z = -5$. Naći dužinu vektora zbira tih vektora.

Odg.: $r = 11$.

3. — U tačkama $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$, $M_3\ (x_3, y_3, z_3)$, ... nalaze se mase $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$. Odrediti koordinate težišta tog sistema (sl. 14).



Sl. 14.

Za dobijanje koordinata težišta poćićemo od dviju masa, na pr. m_1 i m_2, koje se nalaze u M_1 i M_2. Označimo radius-vektore sa $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ itd. Neka je A težište masa m_1 i m_2. Tačka A dijeli duž $M_1 M_2$ u odnosu obrnutom masama: $\frac{M_1A}{AM_2} = \frac{m_2}{m_1}$, pa je

$$\overrightarrow{M_1A} = \mathbf{r}_{1-2} - \mathbf{r}_1, \quad \overrightarrow{AM_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{1-2},$$

$$m_1 (\mathbf{r}_{1-2} - \mathbf{r}_1) = m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{1-2}), \quad (m_1 + m_2)\, \mathbf{r}_{1-2} = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2,$$

$$\mathbf{r}_{1-2} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Radius-vektor težišta masa m_1, m_2, m_3 dobiće se kao težište između masa $m_1 + m_2$, koje se fingiraju u tački A, i mase m_3 u tački M_3, pa se dobije:

$$\mathbf{r}_{1-2-3} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

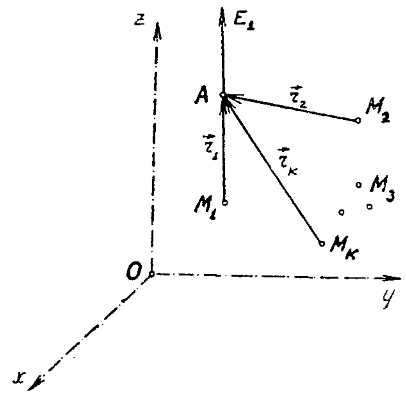
Za n materijalnih tačaka radius-vektor težišta biće:

$$x = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k \mathbf{r}_k}{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k}$$

Odavde se razlaganjem radius-vektora dobijaju koorinate težišta:

$$x = \frac{\Sigma m_k x_k}{\Sigma m_k}, \quad y = \frac{\Sigma m_k y_k}{\Sigma m_k},$$

$$z = \frac{\Sigma m\ z_k}{\Sigma m_k}.$$



Sl. 15.

4. — U tačkama $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$ itd. nalaze se količine elektriciteta $q_1, q_2, \ldots q_n$. Odrediti projekcije vektora električnog polja **E** u nekoj tački A (x, y, z) (sl. 15).

Vektor **E** je poznat iz relacije $\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}$ gdje je $\mathbf{r} = \overrightarrow{M_1A}$. Vektor **E** je ravan zbiru svojih komponenata na koordinatnim osama $\mathbf{E} = E_x\,\mathbf{i} + E_y\,\mathbf{j} + E_z\,\mathbf{k}$, a vektor **r**:

$$\mathbf{r} = (x - x_1)\,\mathbf{i} + (y - y_1)\,\mathbf{j} + (z - z_1)\,\mathbf{k}.$$

Prema tome je

$$E_{1x} = \frac{q}{\varepsilon}\cdot\frac{x - x_1}{r^3}, \qquad E_{1y} = \frac{q}{\varepsilon}\cdot\frac{y - y_1}{r^3}, \qquad E_{1z} = \frac{q}{\varepsilon}\cdot\frac{z - z_1}{r^3}.$$

Uzimajući u obzir sva opterećenja dobiće se:

$$E_x = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{q_k}{\varepsilon}\,\frac{x - x_k}{r_k^3}, \qquad E_y = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{q_k}{\varepsilon}\,\frac{y - y_k}{r_k^3},$$

$$E_z = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{q_k}{r_k^3}\,\frac{z - z_k}{r_k^3},$$

gdje je

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}.$$

§ 9. — SKALARNI ILI UNUTRAŠNJI PROIZVOD DVAJU VEKTORA

Skalarni ili unutrašnji proizvod dvaju vektora je proizvod iz brojne vrijednosti (intenziteta) jednog vektora i projekcije drugog vektora na prvom. Taj proizvod je skalarna veličina. Obilježavamo ga pisanjem vektora jedan uz drugi bez ikakvih znakova ili sa tačkom — kao u algebri:

$$\mathbf{ab} = ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9{,}1)$$

Prema tome skalarni proizvod dvaju vektora jednak je proizvodu njihovih apsolutnih vrijednosti i kosinusa ugla među njima.

Iz (9,1) se vidi da je

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9{,}2)$$

tj. veličina skalarnog proizvoda dvaju vektora ne mijenja se promjenom reda faktora, a to znači da za skalarni proizvod dvaju vektora važi **komutativni zakon.**

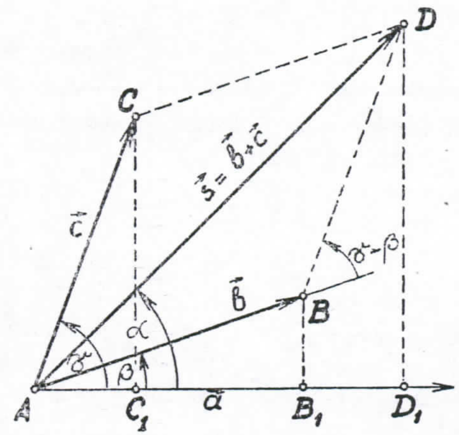
Prema pravilu o projekcijama dobija se kao skalarni proizvod jednog vektora sa zbirom drugih vektora slijedeća relacija:

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9{,}3)$$

a to znači da za skalarni proizvod vektora važi **distributivni zakon.** To se može dokazati i geometriski prema sl. 16. Projekcija vektora **s** na **a** neka bude s_a, pa je $\mathbf{a}\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{as} = as_a$. Prema slici je $s_a = b_a + c_a$, ili $as_a = ab_a + ac_a$, čime je takođe dokazana tvrdnja (9,3).

Distributivni zakon važi za proizvoljan broj sabiraka:

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\ldots) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{ad} + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9{,}4)$$



Sl. 16.

To se može proširiti i na proizvod vektorskih polinoma, na pr.:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{bc} + \mathbf{ad} + \mathbf{bd},$$

što je lako dokazati zamjenom izraza u jednoj zagradi jednim vektorom i uzastopnim množenjem.

Kao specijalni slučajevi se dobijaju:

$$(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})^2 = \mathbf{aa} \pm 2\mathbf{ab} + \mathbf{bb} = a^2 \pm 2ab + b^2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9{,}5)$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{aa} - \mathbf{bb} = a^2 - b^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9{,}6)$$

Asocijativni zakon važi samo još i za množenje nekim skalarom:

$$(k\mathbf{a})\,\mathbf{b} = k\,(\mathbf{ab}) = k\mathbf{ab} = (k\mathbf{b})\mathbf{a}. \quad \ldots\ldots \quad (9{,}7)$$

jer za više od dva vektora nema smisla.

Iz (9,1) se vidi da skalarni proizvod **ab** može imati sve vrijednosti od — ab do + ab, što zavisi od veličine ugla **(a, b)** $= \varphi$. Ako je $\varphi = 0$ onda je **ab** = ab. Ako je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ onda je **ab** = 0, ili **skalarni proizvod dvaju međusobno normalnih vektora jednak je nuli.**

Iz prethodnog se vidi da je proizvod vektora samim sobom, odnosno kvadrat vektora, jednak kvadratu njegovog intenziteta

$$\mathbf{aa} = a\,.\,a\cos 0^0 = a^2. \quad \ldots\ldots \quad (9{,}5a)$$

Za vektor nije najzgodnije pisati kvadrat kao za običan algebarski broj zbog toga što ta oznaka može imati u vektorskom računu drugo značenje, pa ćemo kvadrat vektora češće pisati kao proizvod.

Skalarni proizvod nekog vektora sa jediničnim vektorom jednak je projekciji tog vektora na osi jediničnog vektora:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b} = b\cos\varphi, \quad \ldots\ldots \quad (9{,}8)$$

gdje je $a_1 = 1$, $\varphi = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b})$.

Iz dosadašnjeg izlaganja se vidi da se na skalarni proizvod vektora mogu primijeniti svojstva proizvoda običnih algebarskih brojeva prema distributivnom zakonu. Ipak se ne mogu primijeniti sva svojstva algebarskih operacija, kao na pr. ako je dato **ab** = **ac**, oduzimanjem dobijamo **a (b—c)** = 0. Odavde se ne može zaključiti da je **b** = **c**, jer skalarni proizvod može biti ravan nuli i u slučaju kada nijedan od činilaca nije ravan nuli, nego kada su među sobom normalni.

Ako je poznat proizvod i jedan činilac, onda drugi činilac nije jednoznačno odredjen, a to znači da ne postoji dijeljenje kao obrnuta radnja skalarnom množenju.

Prema tome skalarni proizvod dvaju vektora ima svojstva, koja ga razlikuju od običnog proizvoda i koja su važna u matematičkim operacijama.

Skalarni proizvod dva koordinatna orta kod pravouglog sistema dobija se prema prethodnom:

$$\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0, \; \mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1 \quad \ldots \quad (9{,}9)$$

Skalarni proizvod dvaju vektora u analitičkom obliku.

Izrazićemo vektore u funkciji njihovih projekcija na koordinantnim osama:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \; \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}.$$

Skalarni proizvod se dobija množenjem:

$$\mathbf{ab} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\,(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$

a u vezi (9,9) definitivno

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \quad \ldots\ldots \quad (9{,}10)$$

Uslov međusobne normalnosti dvaju vektora je

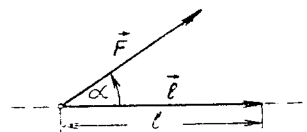
$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad \ldots\ldots \quad (9{,}11)$$

Iz (9,10) se dobija ugao među dva vektora, ili među dvjema pravama u prostoru slijedećom relacijom:

$$\cos\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (9{,}12)$$

Primjeri i zadaci:

1\. — **Izraz za rad.** — Prvobitni skalarni proizvod potiče iz izraza



Sl. 17.

za rad. Sila **F**, kojoj se napadna tačka pomjeri za dužinu l u pravcu vektora **l**, koji sa pravcem sile zatvara ugao α, vrši rad

$$A = Fl\cos\alpha, \text{ ili } A = \mathbf{Fl}.$$

Prema tome rad je jednak skalarnom proizvodu iz sile i puta, koji pređe napadna tačka sile (sl. 17).

2. — Koji uslov moraju ispunjavati vektori **a** i **b**, pa da bude **a** + **b** normalno na **a** — **b**?

Odg.: Traženi uslov je **aa** = **bb**.

3. — Naći uslov pod kojim je m**a** — n**b** normalno na **c**.

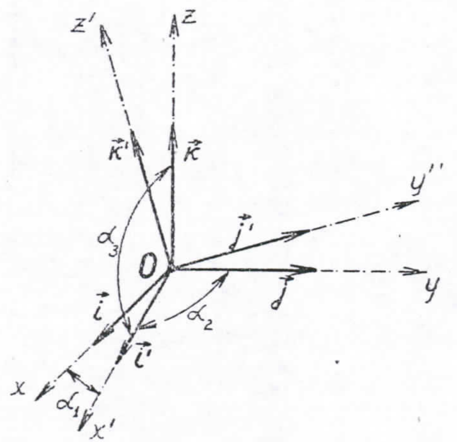
Odg.: $\frac{m}{n} = \frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{bc}}$ osim slučaja kada je **a** ⊥ **c** i **b** ⊥ **c** kada odnos $\frac{m}{n}$ dobija neodređen oblik.

4. — Dokazati da je **b** . **ac** — **c** . **ab** normalno na **a**.

Skalarnim množenjem ovog izraza vektorom **a** dobija se **ab** . **ac** — **ac** . **ab**, a to je identično nuli, te je normalnost dokazana.

§ 10. — ROTACIJA KOORDINATNOG SISTEMA

Neka je dat pravougli koordinatni sistem xyz sa ortovima **i**, **j**, **k**, koji rotacijom pređe u drugi sistem x'y'z' sa ortovima **i'**, **j'**, **k'** tako da su uglovi između ose Ox' i koordinatnih osa Ox, Oy, Oz redom α_1, α_2, α_3, između ose Oy' i osa prvobitnog sistema β_1, β_2, β_3, a ose Oz': γ_1, γ_2, γ_3. (Sl. 18). Onda se dobijaju slijedeće relacije među kosinusima ovih devet uglova, a iz skalarnog proizvoda koordinatnih ortova



Sl. 18.

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{ii'} = \cos\alpha_1, & \mathbf{ji'} = \cos\alpha_2, & \mathbf{ki'} = \cos\alpha_3 \\ \mathbf{ij'} = \cos\beta_1, & \mathbf{jj'} = \cos\beta_2, & \mathbf{kj'} = \cos\beta_3 \\ \mathbf{ik'} = \cos\gamma_1, & \mathbf{jk'} = \cos\gamma_2, & \mathbf{kk'} = \cos\gamma_3 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (10,1)$$

Relacije (10,1) mogu se dobiti i iz tablice:

	i	j	k
i'	$\cos\alpha_1$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$
j'	$\cos\beta_1$	$\cos\beta_2$	$\cos\beta_3$
k'	$\cos\gamma_1$	$\cos\gamma_2$	$\cos\gamma_3$

gdje se lako nađe odgovarajući proizvod, čemu ne treba objašnjenja.

Među ovim devet kosinusa postoji 12 jednačina. One se dobijaju na osnovu ranijeg izlaganja

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 \\ \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1 \\ \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10,2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0, & (\mathbf{i'} \perp \mathbf{j'}) \\ \cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3 = 0, & (\mathbf{j'} \perp \mathbf{k'}) \\ \cos\gamma_1\cos\alpha_1 + \cos\gamma_2\cos\alpha_2 + \cos\gamma_3\cos\alpha_3 = 0. & \end{array}\right\} \quad (10,3)$$

Jednačine (10,2) izražavaju da je koordinatni sistem xyz pravougli, a jednačine (10,3) označavaju međusobnu normalnost osa koordinatnih sistema. Šest jednačina (10,2) i (10,3) nezavisne su među sobom. Među njima ne postoji nijedna jednačina kao posljedica ma kojih drugih.

Ako posmatramo ortove **i'**, **j'** i **k'** kao prvobitne, a **i**, **j**, **k** kao ortove novog sistema, dobijaju se slijedeće relacije:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \\ \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1 \\ \cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (10,4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0, & (\mathbf{i} \perp \mathbf{j}) \\ \cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 = 0, & (\mathbf{j} \perp \mathbf{k}) \\ \cos\alpha_3\cos\alpha_1 + \cos\beta_3\cos\beta_1 + \cos\gamma_3\cos\gamma_1 = 0, & (\mathbf{k} \perp \mathbf{i}) \end{array}\right\} . \quad (10,5)$$

Jednačine (10,4) izražavaju da je koordinatni sistem x', y', z' pravougli, a jednačine (10,5) izražavaju međusobnu normalnost osa Ox, Oy, Oz, odnosno ortova **i**, **j**, **k**.

Lako je vidjeti da su jednačine (10,4) i (10,5) posljedica jednačina (10,2) i (10,3), te od 12 jednačina među devet kosinusa nezavisne su svega šest jednačina u grupama (10,2) i (10,3).

Za određivanje međusobnog položaja oba sistema dovoljno je znati tri ugla, a to znači da treba imati šest nezavisnih jednačina među devet kosinusa.

Odnos između ortova novog i starog koordinatnog sistema dobija se prema pravilu o razlaganju vektora na komponente. Projekcije orta jednake su kosinusima njegovih uglova sa koordinatnim osama, pa se dobijaju slijedeće transformacione formule za koordinatne ortove

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \mathbf{i}\cos\alpha_1 + \mathbf{j}\cos\alpha_2 + \mathbf{k}\cos\alpha_3, \\ \mathbf{j}' &= \mathbf{i}\cos\beta_1 + \mathbf{j}\cos\beta_2 + \mathbf{k}\cos\beta_3, \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{i}\cos\gamma_1 + \mathbf{j}\cos\gamma_2 + \mathbf{k}\cos\gamma_3, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10,6)$$

i analogno:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{i}'\cos\alpha_1 + \mathbf{j}'\cos\beta_1 + \mathbf{k}'\cos\gamma_1, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{i}'\cos\alpha_2 + \mathbf{j}'\cos\beta_2 + \mathbf{k}'\cos\gamma_2, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{i}'\cos\alpha_3 + \mathbf{j}'\cos\beta_3 + \mathbf{k}'\cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10,7)$$

Transformacione formule za neki vektor **a** dobijaju se na slijedeći način.

Neka je $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, gdje su a_x, a_y, a_z projekcije vektora **a** na osama sistema xyz ortova **i**, **j**, **k**. Treba naći projekcije tog vektora na osama sistema x', y', z' ortova **i'**, **j'**, **k'**. Smatra se da su uglovi poznati. Projekcije vektora **a** na osama starog sistema možemo pisati:

$$a_x = \mathbf{ai},\ a_y = \mathbf{aj},\ a_z = \mathbf{ak}. \text{ Onda je}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{ai}\,.\,\mathbf{i} + \mathbf{aj}\,.\,\mathbf{j} + \mathbf{ak}\,.\,\mathbf{k}.$$

U novom sistemu, koji je postao rotacijom, biće

$$\mathbf{a} = a_{x'}\,.\,\mathbf{i}' + a_{y'}\,.\,\mathbf{j}' + a_{z'}\,.\,\mathbf{k}'.$$

Prema prethodnom je $a_{x'} = \mathbf{ai}'$, $a_{y'} = \mathbf{aj}'$, $a_{z'} = \mathbf{ak}'$, ili

$$\begin{aligned} a_{x'} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\mathbf{i}' = a_x\mathbf{ii}' + a_y\mathbf{ji}' + a_z\mathbf{ki}', \\ a_{y'} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\mathbf{j}' = a_x\mathbf{ij}' + a_y\mathbf{jj}' + a_z\mathbf{kj}', \\ a_{z'} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\mathbf{k}' = a_x\mathbf{ik}' + a_y\mathbf{jk}' + a_z\mathbf{kk}'. \end{aligned}$$

Na osnovu (10,1) dobijaju se projekcije vektora **a** u novom sistemu u funkciji projekcija tog vektora u starom sistemu:

$$\left.\begin{aligned} a_{x'} &= a_x\cos\alpha_1 + a_y\cos\alpha_2 + a_z\cos\alpha_3, \\ a_{y'} &= a_x\cos\beta_1 + a_y\cos\beta_2 + a_z\cos\beta_3, \\ a_{z'} &= a_x\cos\gamma_1 + a_y\cos\gamma_2 + a_z\cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10,8)$$

Slično se dobija:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_{x'}\cos\alpha_1 + a_{y'}\cos\beta_1 + a_{z'}\cos\gamma_1 \\ a_y &= a_{x'}\cos\alpha_2 + a_{y'}\cos\beta_2 + a_{z'}\cos\gamma_2 \\ a_z &= a_{x'}\cos\alpha_3 + a_{y'}\cos\beta_3 + a_{z'}\cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10,9)$$

Dakle, nove projekcije u funkciji starih i obratno izražavaju se l i n e a r n o.

Transformacione formule za radius-vektor dobijaju se iz prethodnih formula zamjenom njegovim projekcijama. Poznato je da je radius-vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ u starom, a $\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$ u novom koordinatnom sistemu. Onda je:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3, \\ y' &= x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3, \\ z' &= x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10,8a)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\beta_1 + z'\cos\gamma_1, \\ y &= x'\cos\alpha_2 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\gamma_2, \\ z &= x'\cos\alpha_3 + y'\cos\beta_3 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10,9a)$$

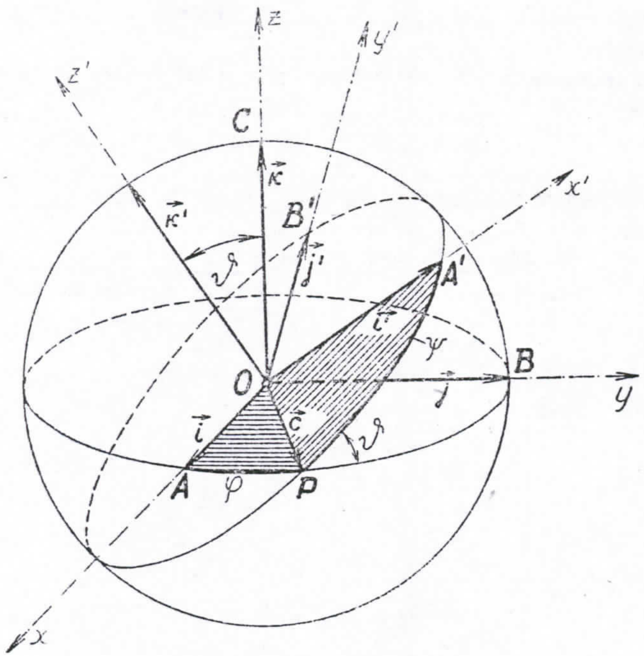
Poznato je iz analitičke geometrije da su (10,8a) i (10,9a) transformacione formule pri rotaciji koordinatnog sistema.

Transformacione formule se mogu dobiti i pomoću teorije determinanata.

§ 11. — EULER-OVI UGLOVI

Osim načina da se među devet kosinusa broj nezavisnih jednačina svede svega na šest postoji i način da se uvedu svega tri parametra i da se u funkciji tih parametara potpuno odrede te međusobne veze. To su tri ugla, koje je uveo Euler, te se i zovu po njegovom imenu. Evo kako su određeni ti uglovi:

Dat je pravougli koordinatni sistem Oxyz ortova **i**, **j**, **k** i drugi sistem Ox'y'z' ortova **i'**, **j'**, **k'** (sl. 19). Radi lakšeg definisanja Eulerovih uglova



Sl. 19.

uzimamo jednu loptu poluprečnika ravnog jedinici. Presjek ravni Oxy sa ravni Ox'y' je OP. Presječna linija tih ravni naziva se l i n i j a č v o r o v a.

Neka je ort čvorne linije $\overrightarrow{OP} = \mathbf{c}$. Neka se ravni Oxy i Ox'y' sijeku pod uglom ϑ, koji se računa pozitivan kada rotacija ose z prema osi z' izgleda pozitivna za posmatrača koji stoji uz čvornu liniju u pozitivnom smjeru. Sa φ označimo ugao između x-ose i čvorne linije i računajmo da je taj ugao pozitivan kada rotacija x-ose prema čvornoj liniji izgleda pozitivna

gledana sa pozitivne z-ose. Sa ψ označimo ugao između čvorne linije i x'ose i računajmo da je taj ugao pozitivan kada rotacija čvorne linije prema x'osi izgleda pozitivna gledana sa pozitivne z'-ose.

Uglovi ϑ, φ, ψ nazivaju se Eulerovi uglovi.

Precizne definicije ovih uglova potrebne su zbog jednoznačnog određivanja prelaza iz starog koordinatnog sistema u novi. Pretpostavlja se zatim da su oba sistema pravougli.

Jasno je da se rotacija starog sistema Oxyz do položaja novog sistema Ox'y'z' može obaviti trima uzastopnim rotacijama, koje se lako opisuju Eulerovim uglovima. Evo te rotacije:

a) Rotacija starog sistema Oxyz oko z-ose za ugao φ dovodi do sistema koordinatnih ortova **c**, **d**, **k**, gdje je **c** ort čvorne linije, a ort **d** je u ravni Oxy normalan na **c**.

b) Rotacija dobijenog sistema oko čvorne linije za ugao ϑ dovodi do sistema koordinatnih ortova (koordinatne baze) **c**, **e**, **k'**, gdje je **e** ort u ravni Oxy normalan na čvornoj liniji.

c) Rotacija sistema baze **c**, **e**, **k'** oko z'-ose za ugao ψ dovodi do novog sistema Ox'y'z'.

Ovim rotacijama odgovaraju i određene transformacione formule prema (10,6) i to:

rotaciji a):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\ \mathbf{d} &= \mathbf{i}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) + \mathbf{j}\cos\varphi \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k} \end{aligned}\right\}, \quad \text{ili} \quad \left.\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi \\ \mathbf{d} &= -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}; \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (11,1)$$

rotaciji b):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{d}\cos\vartheta + \mathbf{k}\sin\vartheta \\ \mathbf{k'} &= -\mathbf{d}\sin\vartheta + \mathbf{k}\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (11,2)$$

rotaciji c):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i'} &= \mathbf{c}\cos\psi + \mathbf{e}\sin\psi \\ \mathbf{j'} &= -\,\mathbf{c}\sin\psi + \mathbf{e}\cos\psi \\ \mathbf{k'} &= \mathbf{k'}. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (11,3)$$

Odavde se dobijaju transformacione formule eliminacijom ortova c, d, e, odnosno:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \mathbf{i}\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi) + \mathbf{j}(\sin\varphi\cos\psi + \\ &\quad + \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi) + \mathbf{k}\,\sin\vartheta\sin\psi \\ \mathbf{j}' &= \mathbf{i}\,(-\cos\varphi\sin - \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi) + \mathbf{j}\,(-\sin\varphi\sin\psi + \\ &\quad \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi) + \mathbf{k}\sin\vartheta\cos\psi, \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{i}\,\sin\varphi\sin\vartheta + \mathbf{j}(-\cos\varphi\sin\vartheta) + \mathbf{k}\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \quad (11,4)$$

Ako je $\vartheta = o$, dobija se

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \mathbf{i}\cos(\varphi+\psi) + \mathbf{j}\sin(\varphi+\psi) \\ \mathbf{j}' &= -\mathbf{i}\sin(\varphi+\psi) + \mathbf{j}\cos(\varphi+\psi) \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{k}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11,5)$$

što se vidi prema slici 19.

§ 12. — INVARIJANTNOST SKALARNOG PROIZVODA

Skalarni proizvod dvaju vektora je i n v a r i j a n t a n, tj. ne zavisi od koordinatnog sistema, što se vidi i prema njegovoj definiciji, gdje se nije uopšte uzimao u obzir nikakav koordinatni sistem. To ćemo dokazati i pomoću koordinatnih sistema na slijedeći način.

Neka su dva vektora **a** i **b** izražena koordinatama u dva koordinatna sistema, koji se rotacijom mogu prevesti jedan u drugi:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = a_{x'}\mathbf{i}' + a_{y'}\mathbf{j}' + a_{z'}\mathbf{k}' \\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} = b_{x'}\mathbf{i}' + b_{y'}\mathbf{j}' + b_{z'}\mathbf{k}' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12,1)$$

Skalarni proizvod ovih vektora je:

$$\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = a_{x'}b_{x'} + a_{y'}b_{y'} + a_{z'}b_{z'} \ldots \quad (12,2)$$

Jednačine (12,2) pretstavljaju isti izraz u dva koordinatna sistema, čime je dokazana invarijantnost skalarnog proizvoda dvaju vektora.

Invarijantnost skalarnog proizvoda može se dokazati i na osnovu transformacionih formula.

§ 13. — VEKTORSKI ILI SPOLJAŠNJI PROIZVOD DVAJU VEKTORA

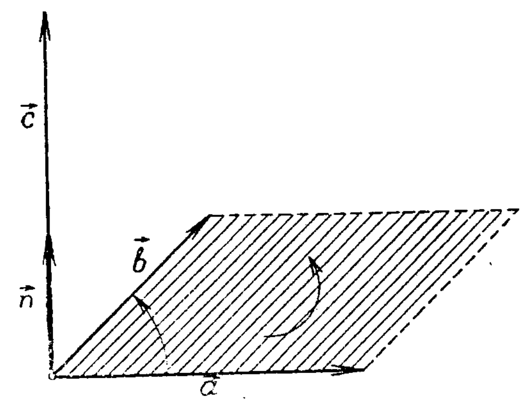
V e k t o r s k i   p r o i z v o d   d v a j u   v e k t o r a   *a* i *b*   j e   v e k t o r   c,   k o j e g a   j e   i n t e n z i t e t   j e d n a k   p o v r š i n i   p a r a l e l o g r a m a,   č i j e   s u   s t r a n e   d a t i   v e k t o r i,   i   k o j i   j e   n o r m a l a n   n a   t o j   p o v r š i n i,   a   t a k v o g   s m j e r a   d a   z a   p o s m a t r a č a,   k o j i   s t o j i   u z   v e k t o r   c   r o t a c i j a   n a j k r a ć i m   p u t e m   o d   a   d o   b   b u d e   p o z i t i v n a   (s u p r o t n o   s m j e r u   k r e t a n j a   k a z a l j k e   n a   s a t u   g l e d a n e   o d o z g o). Vektori **a**, **b** i vektor **c** tim redom čine desni koordinatni sistem. Vektorski proizvod se naziva i s p o l j a š n j i. Kao znak vektorskog množenja usvajamo $\times$.

Ako je φ ugao među vektorima **a** i **b**, a **n** ort vektora **c**, biće (sl. 20):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (ab\sin\varphi)\mathbf{n}. \ldots\ldots\ldots \quad (13,1)$$

Brojna vrijednost vektorskog proizvoda je prema tome

$$c = |\mathbf{c}| = ab\sin\varphi. \ldots\ldots\ldots \quad (13,2)$$



Sl. 20.

Lako je vidjeti da promjenom reda faktora vektorski proizvod mijenja znak, a veličina ostaje ista:

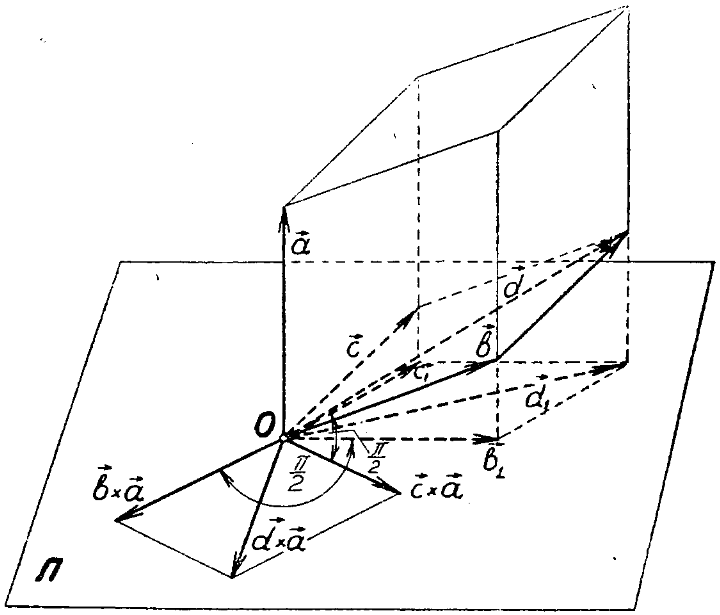
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \ldots\ldots\ldots \quad (13,3)$$

To znači da za vektorski proizvod **ne važi komutativni zakon,** nego mjesto njega **važi alternativni zakon.**

Dokazaćemo da za vektorski proizvod **važi distributivni zakon:**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}, \\ \text{ili}\quad (\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a} &= \mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13,4)$$

Uzećemo tri vektora kao strane kosouglog paralelepipeda (sl. 21).



Sl. 21.

Zatim uzmimo ravan $\Pi \perp \mathbf{a}$ tako da u toj ravni bude tačka O kao tjeme triedra. Projekcijom vektora **b**, **c** i **b** + **c** = **d** na ravan Π dobijaju se projekcije $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ i $\mathbf{d}_1$:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}\sin(\mathbf{b},\mathbf{a}),\ \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}\sin(\mathbf{c},\mathbf{a}),\ \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}\sin(\mathbf{d},\mathbf{a}).$$

Pomnožimo $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ i $\mathbf{d}_1$ sa **a** i u ravni Π obrnimo za ugao $\frac{\pi}{2}$, pa ćemo dobiti tri vektora $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ i $\mathbf{d}\times\mathbf{a}$. Ti vektori imaju brojne vrijednosti **a** puta veće od veličina $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$, pa i oni pretstavljaju strane i dijagonalu paralelograma, odnosno

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a},$$

čime je dokaz izveden.

Ovaj rezultat se može uopštiti, te važi relacija:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{e}+\mathbf{f}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}-\mathbf{a}\times\mathbf{e}+\mathbf{a}\times\mathbf{f}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{d}.$$

Pri množenju vektorskog proizvoda skalarom važi asocijativni zakon, odnosno

$$m\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (m\mathbf{a})\times\mathbf{b} = m\mathbf{a}\times\mathbf{b}. \quad \ldots\ldots \quad (13,5)$$

Vektorski proizvod može biti ravan nuli ili kada je jedan od faktora ravan nuli, ili kada je ugao među vektorima-faktorima ravan nuli, tj. kada su vektori paralelni (kolinearni). Prema tome **uslov paralelnosti dvaju vektora je:**

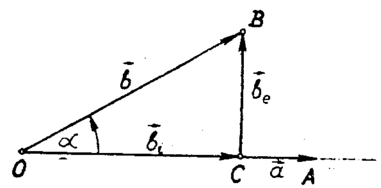
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13,6)$$

Kao posljedica toga zaključka dobija se da je v e k t o r s k i p r o i z v o d n e k o g v e k t o r a s a m i m s o b o m r a v a n n u l i:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13,6a)$$

Još jedno svojstvo vektorskog proizvoda pokazuje razliku od običnog algebarskog proizvoda brojeva, a to je da ne postoji dijeljenje kao obrnuta operacija vektorskom množenju. To znači da, kada se zna vektorski proizvod i jedan faktor, ne može se jednoznačno odrediti drugi faktor.

N a p o m e n a. — Nazivi unutrašnji i spoljašnji proizvod dvaju vektora datiraju od Grassmanna (1846 godine). Ako su, naime, data dva vektora **a** i **b** (sl. 22), možemo vektor **b** razložiti na dvije komponente: u n u t r a š n j u $\mathbf{b}_i$ u pravcu vektora **a** i s p o l j a š n j u $\mathbf{b}_e$ normalnu na **a**. Prema tome skalarni ili unutrašnji proizvod vektora **a** i **b** je proizvod intenziteta vektora **a** i unutrašnje komponente vektora **b**, a vektorski ili spoljašnji proizvod vektora **a** i **b** je proizvod intenziteta vektora **a** i spoljašnje komponente vektora **b** sa poznatom orijentacijom dobijenog vektorskog proizvoda.



Sl. 22.

Vektorski proizvod dvaju vektora u analitičkom obliku

Prema dosadašnjem izlaganju lako je naći vektorske proizvode koordinatnih ortova. Neka su **i**, **j**, **k** ortovi jednog pravouglog koordinatnog sistema. Onda se dobijaju slijedeći vektorski proizvodi ortova:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, \end{aligned}\right\} \qquad (13,7)$$

a zatim prema alternativnom zakonu:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13,7a)$$

Vektorski proizvod orta samim sobom ravan je nuli:

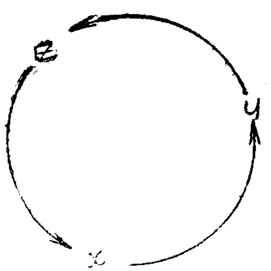
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = o. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13,6b)$$

Na osnovu toga dobija se izraz za vektorski proizvod dvaju vektora u analitičkom obliku. Izrazićemo vektore u funkciji njihovih projekcija na koordinatnim osama:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}.$$

Onda je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}. \; . \; . \quad (13,8)$$



Sl. 23.

Označimo li $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, vidi se da su projekcije vektora **c** na koordinatnim osama vezane sa projekcijama vektora-faktora slijedećim relacijama:

$$c_x = a_yb_z - a_zb_y, \quad c_y = a_zb_x - a_xb_z,$$
$$c_z = a_xb_y - a_yb_x. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13,9)$$

Da bi se ove relacije lakše upamtile poslužićemo se šemom, koja pretstavlja bazu ciklične permutacije indeksa (sl. 23), prema kojoj

se lako doznaju komponente kada se ciklički uzmu prema traženoj. Vektorski proizvod se može pretstaviti i determinantom, koja se često primjenjuje:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13,10)$$

što se lako uviđa razvijanjem determinante.

Iz (13,8) i (13,10) izlazi da vektorski proizvod dvaju vektora u analitičkom obliku izražava geometriski zbir projekcija paralelograma strana **a** i **b** na odgovarajućim koordinatnim ravnima.

Površina paralelograma koji sačinjavaju vektori **a** i **b** je:

$$c = \sqrt{(a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2} \quad . \; . \; . \quad (13,11)$$

Uglovi sa koordinatnim osama dobijaju se iz relacija:

$$\cos\alpha = \frac{c_x}{ab}, \quad \cos\beta = \frac{c_y}{ab}, \quad \cos\gamma = \frac{c_z}{ab} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13,12)$$

Uslov paralelnosti dvaju vektora je prema ranijem izlaganju

$$c_x = o, \quad c_y = o, \quad c_z = o, \quad \text{ili}$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = m, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13,13)$$

a to znači da su projekcije dvaju paralelnih vektora na koordinatnim osama proporcionalne među sobom. Ovaj analitički uslov paralelnosti može se dobiti i prema sastavu o kolinearnosti vektora: $\mathbf{a} = m\mathbf{b}$.

§ 14. — LAGRANGE-OV IDENTITET

Čuveni Lagrangeov identitet može se izvesti pomoću vektorskog i skalarnog proizvoda.

Uzmimo kvadrat vektorskog proizvoda vektora **a** i **b**, koji imaju međusobni ugao α:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (ab\sin\alpha \,.\, \mathbf{n})^2 = a^2b^2\sin^2\alpha = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\alpha.$$

Odavde je

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a})^2.(\mathbf{b})^2 - (\mathbf{ab})^2,$$

jer je posljednji član na desnoj strani skalarni proizvod vekora **a** i **b**. Uzimajući vektore u funkciji projekcija dobija se odmah Lagrangeov identitet:

$$(a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2 =$$
$$= (a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2) - (a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2 \quad . \quad (14,1)$$

ili u obliku kvadrata matrice:

$$\begin{Vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{Vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_x^2+a_y^2+a_z^2 & a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \\ b_xa_x+b_ya_y+b_za_z & b_x^2+b_y^2+b_z^2 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \quad (14,1a)$$

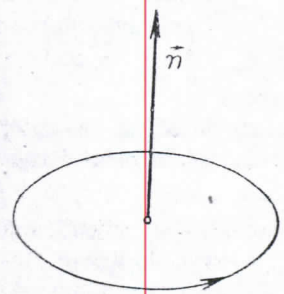
Identitet (14,1) važi uopšte za algebarske brojeve.

§ 15. — ORIJENTACIJA POVRŠINE I PRETSTAVLJANJE POVRŠINE VEKTOROM

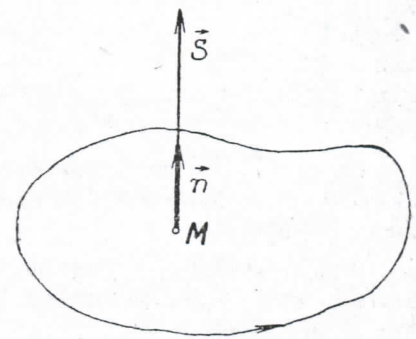
U raznim oblastima fizike i matematike strane jedne iste površine ne igraju istu ulogu. Naročito u teoriskoj fizici uopšte, a napose u nauci o elektricitetu i magnetizmu, dolaze do izražaja različite uloge raznih strana jedne površine. Poznato je da odnos između struje i magnetnog polja jednog provodnika nije isti na objema stranama površine strujnog kola. Pojavila se potreba za o r i j e n t a c i j u površina, a to znači da se jedna strana površine usvoji kao pozitivna, a druga kao negativna, pri čemu se površini da određeni smjer cirkulacije po konturi. Kada je površini dat

smjer cirkulacije onda je pozitivni smjer normale, odnosno normalni ort **n** te površine takav da posmatraču, koji stoji uz **n**, cirkulacija biva u pozitivnom smjeru — sdesna ulijevo (pravilo desnog zavrtnja) (sl. 24). Strana površine prema normali **n** naziva se p o z i t i v n a s t r a n a. Suprotna strana te orijentisane površine naziva se n e g a t i v n a s t r a n a.

Ako je normala orijentisane površine data, lako je naći smjer obilaženja po konturi.



Sl. 24.



Sl. 25.

K o n v e n c i o n a l n o j e u z e t o d a s e o r i j e n t i s a n a p o v r š i n a p r e t s t a v l j a v e k t o r o m, koji ima brojnu vrijednost jednaku brojnoj vrijednosti te površine, a smjer toga vektora je smjer pozitivne normale na površini. Napadna (početna) tačka toga vektora je m a k o j a t a č k a te površine. Brojna vrijednost te površine neka je S (sl. 25). Onda je vektor koji pretstavlja tu orijentisanu površinu:

$$\mathbf{S} = S \,.\, \mathbf{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15,1)$$

Taj vektor se naziva i »dopunski« vektor date površine.

Kod vektorskog proizvoda vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pretstavlja orijentisani paralelogram strana **a** i **b**.

§ 16. — POLARNI I AKSIJALNI VEKTORI

Iz vektorskog proizvoda i orijentisane površine izlazi naročito svojstvo vektora, koji pretstavljaju proizvod ili površinu. Oni se razlikuju od ranije proučavanih vektora, kao što je na pr. vektor brzine, ubrzanja, sile, električnog ili magnetnog polja itd. Ovakvi vektori su vezani za smjer rotacije ili obilaženja konture. Zato se zovu a k s i j a l n i v e k t o r i (vezani za osu). Obični vektori se nazivaju p o l a r n i v e k t o r i, jer su vezani za neku tačku u prostoru, a ne zavise od nekog smjera obilaženja konture i sl. Aksijalni vektor zavisi i od izbora koordinatnog sistema, dok polarni vektor ne zavisi. Ako se sa desnog koordinatnog sistema pređe na lijevi, aksijalni vektor dobije suprotni smjer, a polarni vektor ne mijenja svoj smjer.

Pri prelazu sa lijevog koordinatnog sistema na desni, ili obrnuto, aksijalni vektor dobija suprotan smjer od prvobitnog, dok se polarni vektor ne mijenja.

Primjer aksijalnog vektora je vektor koji pretstavlja orijentisanu površinu, zatim vektor koji pretstavlja vektorski proizvod, koji je uostalom konvencionalno i uzet, jer i on zamjenjuje orijentisanu površinu, zatim vektor uglovne brzine itd.

Polarni pak vektori su obični vektori, koji pretstavljaju, kao što rekosmo, na pr. brzinu, ubrzanje, silu, pomjeraj itd.

PRIMJERI I ZADACI

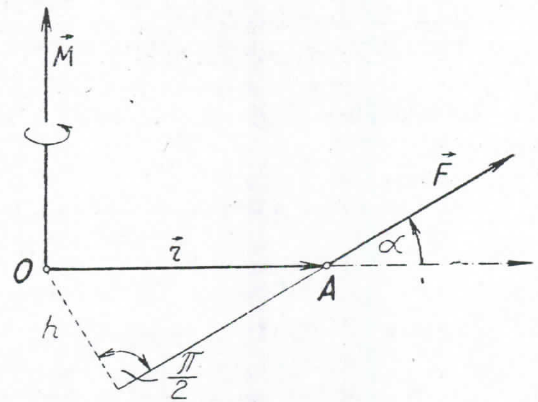
1. — M o m e n t s i l e. — Ako na neko kruto tijelo, koje se može okretati oko nepomične tačke O, djejstvuje sila **F** u tački A, koja je određena radius-vektorom $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ onda je moment sile **F** u odnosu na tačku O vektor **M**, koji ima intenzitet jednak proizvodu intenziteta sile i normalnog otstojanja h tačke O od pravca sile (sl. 26).

$$M = r \cdot F \sin\alpha, \text{ ili } \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Vektorski proizvod je i ponikao iz mehanike i baš iz teorije momenata.

2. — Dokazati da se vektorski proizvod vektora **a** i **b** ne mijenja ako se faktor **b** zamijeni komponentom $\mathbf{b}_1$ toga vektora normalnom na vektoru **a**.

Površina paralelograma strana a i b jednaka je površini pravougaonika strana a i b_1.



Sl. 26.

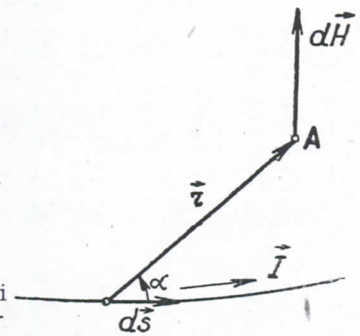
3. — Dokazati da se vektorski proizvod dvaju vektora ne mijenja ako se jednom faktoru doda proizvodni vektor paralelan drugom faktoru.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{p}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{p}.$$

Kako je $\mathbf{p} \parallel \mathbf{a}$, biće $\mathbf{a} \times \mathbf{p} = o$.

4. — Izračunati: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

Rez.: $- 2\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



Sl. 27.

5. Dokazati da su vektori $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ i $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ međusobno paralelni ako je $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

Uputstvo. Konstruisati tetraedar ivica **a**, **b** i **c**, odakle se prema datom izrazu dobija da su vektori **a**, **b** i **c** komplanarni i $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \parallel (\mathbf{c}-\mathbf{b})$.

6. — B i o t - S a v a r t - o v z a k o n. — Neka kroz liniski provodnik protiče struja J (sl. 27). Ta struja izaziva u okolini provodnika magnetno polje. Posmatrajmo element **ds** provodnika kao vektor u smjeru struje. U tački A okolnog prostora jačina magnetnog polja biće

$$dH = k \frac{Ids}{r^2} \sin\alpha.$$

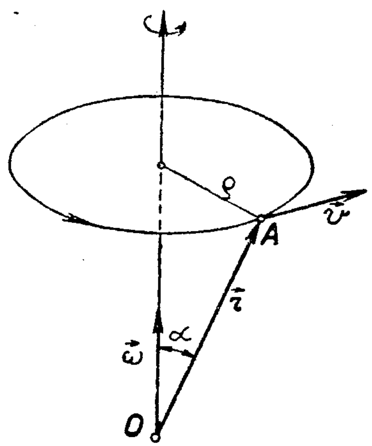
gdje je α ugao između elementa provodnika i rádius-vektora **r** tačke A u odnosu na početak strujnog elementa, k konstanta koja zavisi od sredine i sistema jedinica. Vektor **dH** ima određeni pravac i smjer prema poznatim pravilima (na pr. Maxwellovo pravilo svrdla). Na slici je pretpostavljeno da su **ds** i **r** u horizontalnoj ravni, pa će **dH** biti vertikalno sa smjerom prema gore. Ovaj zakon se može napisati u vektorskom obliku na slijedeći način. Označavajući ort vektora **r** sa $\mathbf{r}_1$, biće

$$ds\sin\alpha = \mathbf{ds} \times \mathbf{r}_1, \text{ ili } \quad \mathbf{dH} = k\frac{I\mathbf{ds} \times \mathbf{r}_1}{\mathbf{r}^2}$$

Kako je $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ i kako neki autori nazivaju proizvod $I\mathbf{ds} = \mathbf{dI}$ vektorski element struje, dobija se definitivni izraz Biot-Savart-ovog zakona u vektorskom obliku:

$$\mathbf{dH} = k\frac{\mathbf{dI} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Ovaj izraz određuje veličinu, pravac i smjer vektora magnetnog polja.



Sl. 28.

7. — T a n g e n c i j a l n a b r z i n a p r i r o t a c i j i. — Označimo ugaonu brzinu rotacije vektorom $\vec{\omega}$, koji ima pravac obrtne ose. Tačka A se kreće po krugu i ima tangencijalnu brzinu $v = \omega\rho = \omega r\sin\alpha$, ili u vektorskom obliku:

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r},$$

čime je dat i pravac i smjer brzine **v** (sl. 28).

8. — Data su dva vektora u prostoru: vektor **a** (2,—1,3) i vektor **b** (1,—2,4) sa zajedničkom početnom tačkom. Izračunati površinu paralelograma čije su strane dati vektori.

Površina je jednaka brojnoj vrijednosti vektorskog proizvoda **c**.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$S = c = \sqrt{38}.$$

VIŠESTRUKI PROIZVODI

§ 17. — PROIZVOD TRIJU VEKTORA

Tri vektora se mogu međusobno množiti na osnovu skalarnog i vektorskog proizvoda tako da se dobija jedna od slijedećih triju kombinacija proizvoda:

a) skalarni proizvod dvaju vektora pomnoži se sa trećim vektorom;

b) vektorski proizvod dvaju vektora pomnoži se skalarno sa trećim vektorom. Takav proizvod se naziva v e k t o r s k o - s k a l a r n i ili m j e š o v i t i p r o i z v o d;

c) vektorski proizvod dvaju vektora pomnoži se vektorski sa trećim vektorom. Takav proizvod se naziva d v o s t r u k i v e k t o r s k i p r o i z v o d ili v e k t o r s k o - v e k t o r s k i p r o i z v o d.

Ad a). Ako se dva vektora pomnože skalarno dobija se skalar. Proizvod toga skalara sa trećim vektorom daje za rezultat vektor kolinearan sa trećim vektorom. Na primjer vektor $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = ab.\mathbf{c}$ je kolinearan sa vektorom **c**, vektor $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = bc.\mathbf{a}$ kolinearan sa vektorom **a**, vektor $(\mathbf{ac})\mathbf{b} = ac.\mathbf{b}$ kolinearan sa vektorom **b**, te je

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq \mathbf{b}(\mathbf{ac}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17,1)$$

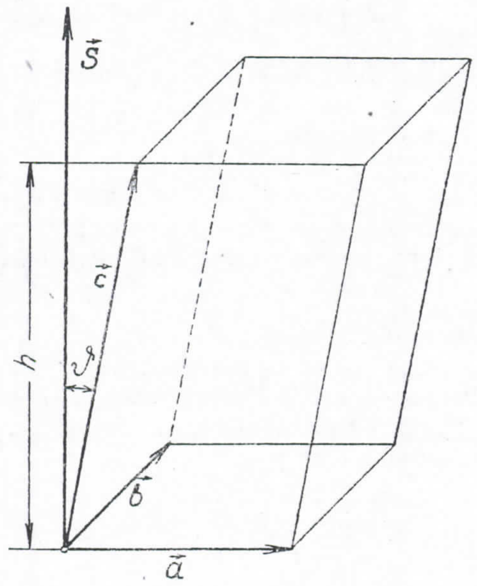
I ne samo što su ovi proizvodi uopšte različitog pravca i smjera, nego i brojno mogu biti različiti. Prema tome ova kombinacija proizvoda je vrlo jednostavna i na njoj se dalje nećemo zadržavati.

§ 17a. — VEKTORSKO-SKALARNI PROIZVOD

Prema definiciji ovaj proizvod se može napisati: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$. Vektorsko-skalarni proizvod je skalar. Pretpostavimo da sva tri vektora imaju zajednički početak i da nisu komplanarni. Kako se služimo desnim koordinatnim sistemom, pretpostavimo da vektori azbučnim redom — **a**, **b**, **c** imaju međusobni položaj kao ose desnog koordinatnog sistema, uopšte uzevši kosouglog (sl. 29). Vektorski proizvod $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ brojno je jednak površini paralelograma strana a i b, a pretstavljen je vektorom $\mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, koji je normalan na ravni vektora **a** i **b**. Zatim je

$$\mathbf{S}\mathbf{c} = Sc\cos\vartheta = Sh = V,$$

a to je **zapremina paralelepipeda**, kojega su strane a, b, c. Ugao ϑ je oštar pod pretpostavkom da **a**, **b** i **c** imaju redosljed osa de-



Sl. 29.

snog sistema. Ugao ϑ može biti i tup, a to je u slučaju kada je redoslijed vektora **a**, **b** i **c** obrnut redoslijedu usvojenog koordinatnog sistema. Prema tome je uopšte:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \pm V. \qquad (17a,1)$$

ili: vektorsko-skalarni proizvod triju vektora brojno je jednak zapremini paralelepipeda, kojega su ivice dati vektori, sa pozitivnim znakom ako je redoslijed vektora isti kao kod osa usvojenog sistema, a sa negativnim znakom ako je redoslijed obrnut.

Lako je vidjeti da se zapremina tog paralelepipeda može dobiti i kao proizvod osnove $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ i vektora **a**, a takođe i kao proizvod $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ i vektora **b**. Prema tome dobija se relacija

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b}, \qquad (17a,2)$$

što znači da se cikličnom permutacijom triju vektora ne mijenja njihov skalarno-vektorski proizvod.

Svakom drugom permutacijom mijenja se znak proizvoda, kao na primjer:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})\mathbf{c}. \qquad (17a,3)$$

Skalarno-vektorski proizvod triju vektora ima još jedno važno svojstvo, koje se dobija iz (17a, 2) izmjenom mjesta faktora u skalarnom proizvodu u sredini, ili

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \qquad (17a,4)$$

Dakle, u mješovitom proizvodu triju vektora znak skalarnog množenja može se zamijeniti znakom vektorskog množenja i obrnuto, ali pod uslovom da se ne mijenja redoslijed faktora.

Izrazi (17a,2) i (17a,4) zajednički prestavljaju pravilo permutacije mješovitog proizvoda.

Ako su vektori međusobno komplanarni, onda je zapremina paralelepipeda, koji treba da obrazuju, jednaka nuli. Prema tome uslov komplanarnosti triju vektora dat je slijedećom relacijom

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0. \qquad (17a, 5)$$

Ako su dva faktora međusobno jednaki — identični, tim prije će vektori biti komplanarni, pa je

$$\mathbf{a}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \ldots = 0, \qquad (17a, 6)$$

ili ako su u mješovitom proizvodu triju vektora dva vektora međusobno identični (ako se jedan vektor pojavljuje dvaput) onda je taj proizvod jednak nuli.

Mješoviti proizvod se označava i sa **[a b c]**.

Analitički oblik vektorsko-skalarnog proizvoda

Kako je $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$,

$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$,

$\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$,

biće

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\,[(b_yc_z - b_zc_y)\,\mathbf{i} +$$
$$+ (b_zc_x - b_xc_z)\,\mathbf{j} + (b_xc_y - b_yc_x)\,\mathbf{k}] =$$
$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b}. \qquad (17a,7)$$

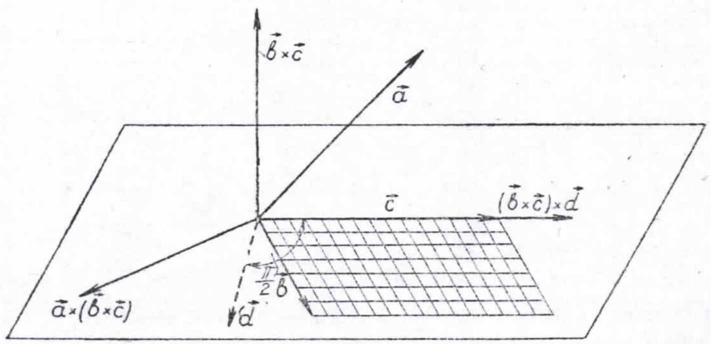
Iz determinante se vide gore izložena svojstva proizvoda.

Vektorsko-skalarni proizvod jediničnih vektora — koordinatnih ortova — je

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j})\mathbf{k} = \;.\;.\;.\; = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,. \qquad (17a,\ 8)$$

§ 17b. — VEKTORSKO-VEKTORSKI PROIZVOD

Prema definiciji ovaj proizvod se može napisati $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Vektorsko-vektorski proizvod je vektor. On je normalan i na vektoru $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ i na vektoru $\mathbf{a}$. Znači, taj vektor se nalazi u ravni vektora $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, odnosno komplanaran je sa vektorima iz zagrade (sl. 30). Iz uslova komplanarnosti dobija se



Sl. 30.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = m\mathbf{b} + n\mathbf{c}, \quad .\;.\;.\;.\; \quad (17b,1)$$

gdje su m i n skalarni faktori, koje nije lako odrediti, kao što izgleda na prvi pogled. Da bismo ih odredili pomnožićemo jednačinu (17b, 1) skalarno pomoćnim vektorom $\mathbf{d}$, koji se nalazi u ravni $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, a normalan je na vektoru $\mathbf{c}$ tako da član sa $\mathbf{n}$ poslije množenja bude jednak nuli. Smjer vektora $\mathbf{d}$ uzećemo tako da vektori $\mathbf{d}$, $\mathbf{c}$ i $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ budu redoslijeda desnog sistema. Poslije množenja dobija se

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\mathbf{d} = m\;(\mathbf{b}\;\mathbf{d}).$$

Dobijeni izraz se može transformirati u slijedeći:

$$[(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d}]\;\mathbf{a} = m\;(\mathbf{b}\;\mathbf{d}).$$

Iz slike se vidi da je vektor $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d}$ usmjeren po vektoru $\mathbf{c}$ i da mu je veličina bcdsin $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ sin $\frac{\pi}{2}$ = cbd cos $(\mathbf{b}, \mathbf{d})$ = c $(\mathbf{bd})$. Onda je sam vektor

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d} = \mathbf{c}\;(\mathbf{bd}).$$

Zamjenom se dobija

$$[(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d}]\;\mathbf{a} = (\mathbf{ac})\;(\mathbf{bd}) = m\;(\mathbf{bd}),$$

a odavde

$$m = \mathbf{ac}. \qquad (17b,\ 2)$$

Za nalaženje faktora n napišimo relaciju (17b, 1) u obliku

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{ac})\mathbf{b} - n\mathbf{c},$$

odakle je

$$n = -(\mathbf{ab}). \qquad (17b,\ 3)$$

Prema tome se definitivno dobija

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}) \qquad (17b,\ 4)$$

Dakle, vektorsko-vektorski proizvod triju vektora transformira se u razliku dvaju vektora, od kojih je prvi proizvod srednjeg vektora i skalarnog proizvoda krajnjih vektora, a drugi vektor proizvod drugog vektora iz zagrade i skalarnog proizvoda ostalih dvaju vektora.

Formula (17b, 4) igra vrlo važnu ulogu u teoriji vektora. Pomoću ove formule mogu se složeni proizvodi uprostiti i svesti na osnovne izraze, koji se lako riješavaju i izračunavaju.

Ovdje je važno istaći da veliku ulogu igra redoslijed vektora u vektorsko-vektorskom proizvodu triju vektora. Ciklična permutacija dovodi do tri potpuno različita vektora, odnosno:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}), \\ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= \mathbf{c}(\mathbf{ba}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc}), \\ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a}(\mathbf{cb}) - \mathbf{b}(\mathbf{ca}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17b, 5)$$

Analogno tome i promjena mjesta zagrade među vektorima izaziva promjenu, kao na pr.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}),$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{ca}) - \mathbf{a}(\mathbf{cb}),$$

odnosno

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}. \quad (17b, 6)$$

Sabiranjem jednačina (17b, 5) dobija se identitet

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \ldots \quad (17b, 7)$$

a to znači da tri vektorsko-vektorska proizvoda triju vektora permutovanih ciklično čine zatvoreni poligon (trougao).

Analitičko izvođenje

Neka je $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{p}$. Onda je koordinata vektora $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ na x-osi:

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_x = a_y p_z - a_z p_y = a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z).$$

Dodajmo identitet $a_x b_x c_x - a_x b_x c_x = 0$, pa ćemo dobiti

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_x = b_x (a_x c_x + a_y b_y + a_z c_z) - c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z c_z) =$$
$$= b_x (\mathbf{ac}) - c_x (\mathbf{ab}).$$

Analogne formule dobijaju se za veličine ostalih komponenata, pa se i na taj način dobije važna formula (17b, 4).

Ako je $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, biće

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{b} - \mathbf{a} (\mathbf{ab}).$$

Odavde se vektor **b** može izraziti na slijedeći način:

$$\mathrm{b} = \frac{\mathrm{a\,b}}{\mathrm{a}^2}\,\mathrm{a} + \frac{1}{\mathrm{a}^2}\,[\mathrm{a} \times (\mathrm{b} \times \mathrm{a})], \quad (17b, 8)$$

odnosno vektor **b** je razložen na dvije komponente: jedna je kolinearna sa zadatim vektorom **a**, a druga je normalna na istom vektoru. Ova formula ima više primjena.

§ 18. — PROIZVOD ČETIRI VEKTORA

Iz prethodnog se može zaključiti da ne postoji neko opšte pravilo ili uputstvo za transformaciju i izračunavanje vektorskih monoma. To se naročito vidi kada »monom« sadrži četiri i više vektora. Treba, dakle, na pojedine slučajeve primijeniti poznata pravila i na taj način izračunavati.

Uzećemo dvije vrste proizvoda četiri vektora:

a) Skalarni proizvod vektorskih proizvoda i

b) vektorski proizvod vektorskih proizvoda.

a) Treba izračunati proizvod

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\ (\mathbf{c} \times \mathbf{d}).$$

Izvršimo zamjenu $\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{s}$, pa je

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\ (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\ \mathbf{s} = \mathbf{a}\ (\mathbf{b} \times \mathbf{s}) = \mathbf{a}\ [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] =$$
$$= \mathbf{a}\ [\mathbf{c}\ (\mathbf{bd}) - \mathbf{d}\ (\mathbf{bc})] = (\mathbf{ac})\ (\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})\ (\mathbf{bc}), \text{ ili}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\ (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18,1)$$

Za isto izračunavanje može se izvršiti i zamjena $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{r}$, ili pak znak vektorskog proizvoda izmijeniti sa znakom skalarnog i obratno, tj.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\ (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a}\ [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\ (= [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}]\mathbf{d}). \qquad (18,2)$$

b) Proizvod $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ izračunaćemo ovako. Opet ćemo izvršiti zamjenu $\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{s}$, pa je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{s} = \mathbf{b}\ (\mathbf{as}) - \mathbf{a}\ (\mathbf{bs}) = \mathbf{b}\ [\mathbf{a}\ (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - \mathbf{a}\ [\mathbf{b}\ (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]$. . . . . (18,3)

Zamjenom $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{r}$ dobija se

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c}\ (\mathbf{rd}) - \mathbf{d}\ (\mathbf{rc}) =$$

$$= \mathbf{c}\ [(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{d}] - \mathbf{d}\ [(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18,4)$$

U oba slučaja dobija se isti rezultat s tom razlikom što se vektor $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ u prvom slučaju razlaže po vektorima **a** i **b**, a u drugom slučaju po vektorima **c** i **d**, gdje su izrazi u uglastim zagradama naravno skalari.

Zadaci:

1. — Odrediti međusobni položaj i orijentaciju jediničnih vektora $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{t}_1$ pod uslovom da apsolutna (brojna) vrijednost njihovog dvostrukog vektorskog proizvoda ima maksimalnu vrijednost:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{t}_1).$$

2. — Dokazati da je

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q})\ (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) + (\mathbf{p} \times \mathbf{r})\ (\mathbf{s} \times \mathbf{q}) + (\mathbf{p} \times \mathbf{s})\ (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) = 0.$$

3. — Dokazati da je

$$(\mathbf{abc})\ (\mathbf{rst}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ra} & \mathbf{rb} & \mathbf{rc} \\ \mathbf{sa} & \mathbf{sb} & \mathbf{sc} \\ \mathbf{ta} & \mathbf{tb} & \mathbf{tc} \end{vmatrix}.$$

4. — Provjeriti identitet

$$(\mathbf{abc})^2 = [\mathbf{a}\ (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2 = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\ [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})].$$

§ 19. — DIJELJENJE VEKTOROM. VEKTORSKE JEDNAČINE. RECIPROČNI SISTEMI

Dok je u običnoj algebri dijeljenje operacija suprotna množenju, koja se obavlja prema poznatim i određenim pravilima, dotle u vektorskoj algebri postoje teškoće u tom pogledu, pa operacija dijeljenja nije uvedena u vektorsku algebru kao gotovo pravilo, niti je u njoj kao pravilo izvedena. Ali vektorske jednačine često sadrže poznati proizvod vektora, gdje je neki od vektora nepoznat. No, kako postoje dvije vrste proizvoda vektora, treba posmatrati i dva načina dijeljenja.

a). — Neka je dat skalarni proizvod vektora **a** i **x**, gdje je **x** nepoznati vektor, a **a** poznati vektor:

$$\mathbf{ax} = \mathrm{m}. \qquad (19,1)$$

Zadatak je da se odavde nađe vektor **x**. Očigledno je da mora biti ispunjen uslov $\mathbf{a} \neq 0$. Jasno je da je

$$\mathbf{ax} = a_x \cdot x = a \cdot x_a = m,$$

odnosno na osnovu jednačine (19,1) može se odrediti samo jedna projekcija nepoznatog vektora **x**: x_a — projekcija u pravcu poznatog vektora **a**. Poznato je da projekciju x_a može imati beskonačno mnogo vektora, čiji se vrhovi nalaze u ravni normalnoj na **a**, a prolaze kroz krajnju tačku projekcije x_a, pa **jednačina (19,1) ima beskonačno mnogo rješenja.**

Prema tome dijeljenje vektorom uzeto kao suprotna operacija skalarnom proizvodu dvaju vektora može biti mogućno pod uslovom da poznati vektor nije jednak nuli, ali se dobija beskonačno mnogo rješenja — »količnika«. To pokazuje da je takva vektorska jednačina nedovoljna za određivanje nepoznatog vektora — faktora skalarnog proizvoda dvaju vektora.

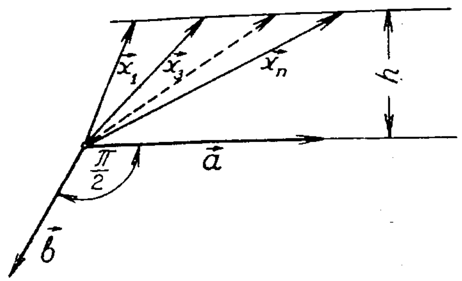
b). — Neka je sada dat vektorski proizvod **b** poznatog vektora **a** i nepoznatog vektora **x**:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}. \qquad (19,2)$$

Prema definiciji vektorskog proizvoda dvaju vektora vektor **b** mora biti normalan na vektoru **a** i na vektoru **x**. To znači da je ovdje »dijeljenje« mogućno samo pod navedenim uslovom. Inače zadatak i operacija ne bi imali nikakvog smisla.

Ni ovaj zadatak nije određen. Vektorska **jednačina (19,2) ima beskonačno mnogo rješenja.** Prema jednačini je $b = ax \sin(\mathbf{a},\mathbf{x}) = ah$, gdje je h konstantno za beskonačno mnogo odgovarajućih brojnih vrijednosti vektora **x** i ugla $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$, koje zadovoljavaju navedeni uslov.

Ova dva primjera su jasan dokaz zašto se u vektorskoj algebri ne proučava dijeljenje kao zasebna operacija: dijeljenje nije jednoznačno, a nije uvijek ni moguće.



Sl. 31.

c). — Posmatrajmo sada sistem jednačina (19,1) i (19,2)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{x} &= m \\ \mathbf{a}\times\mathbf{x} &= \mathbf{b}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (19{,}3)$$

Odavde se vektor **x** može potpuno jednoznačno odrediti. Naravno i ovdje važi uslov normalnosti pretstavljen relacijom (19,2). Za izračunavanje vektora **x** pomnožimo vektorom **a** prvu od jednačina (19,3) skalarno, a drugu vektorski, pa dobijamo

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{a}\mathbf{x}) = m\mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

Razvijanjem druge jednačine dobija se

$$a^2\mathbf{x} - \mathbf{a}\,(\mathbf{a}\mathbf{x}) = \mathbf{b}\times\mathbf{a},$$

a zatim definitivno

$$\mathbf{x} = \frac{m\mathbf{a}}{a^2} + \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{a}}{a^2} = \mathbf{p} + \mathbf{n}. \qquad (19{,}4)$$

Isto ovo rješenje može se dobiti i prema formuli (17b, 8) za razlaganje vektora na dvije komponente, od kojih je jedna paralelna, a jedna normalna datom vektoru **a**, gdje je mjesto vektora **b** ovdje uzet vektor **x**.

Analitičko rješenje. — Neka su 1, 2, 3 indeksi komponenata pojedinih vektora duž koordinatnih osa. Prva jednačina se tada može napisati

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = m, \qquad (19{,}5a)$$

a druga

$$\left.\begin{aligned} a_3x_2 - a_2x_3 &= b_1 \\ a_1x_3 - a_3x_1 &= b_2 \\ a_2x_1 - a_1x_2 &= b_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (19{,}5b)$$

Za tri nepoznate x_1, x_2, x_3 treba tri jednačine, a u (19,5) smo dobili četiri. Lako je vidjeti da je od triju posljednjih jednačina jedna posljedica dviju drugih, što se može pokazati množenjem respektivno sa a_1, a_2, a_3, a zatim sabiranjem. Rješavanjem jednačina (19,5) dobija se

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{m\,a_1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} + \frac{a_3b_2 - a_2b_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \\ x_2 &= \frac{m\,a_2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} + \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \\ x_3 &= \frac{m\,a_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \end{aligned}\right\} \quad . \ (19{,}6)$$

a to je rezultat identičan sa (19,4).

d). — Sada ćemo uzeti slijedeći sistem vektorskih jednačina

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{x} &= k \\ \mathbf{b}\mathbf{x} &= l \\ \mathbf{c}\mathbf{x} &= m, \end{aligned}\right\} \qquad (19{,}7)$$

pod uslovom da su vektori **a**, **b** i **c** nekomplanarni, odnosno da je $\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq 0$. Treba izračunati nepoznati vektor **x**.

Zadatak je jednoznačno određen. Prema ranijim izlaganjima traženi vektor **x** može se rastaviti na komponente duž vektora **a**, **b** i **c**.

$$\mathbf{x} = \varkappa\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}. \qquad (19{,}8)$$

Za izračunavanje koeficijenata $\varkappa$, λ i μ pomnožimo jednačinu (19,8) uzastopno vektorima $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, $(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, pa je

$$\varkappa\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{x}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),$$

jer ostala dva člana nestaju iz razloga što je vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ normalan i na $\mathbf{b}$ i na $\mathbf{c}$, a upravo zbog toga smo i množili takvim vektorima. Odavde je

$$x = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \lambda = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \mu = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}. \qquad (19{,}9)$$

Traženi vektor se odmah dobija zamjenom, odnosno

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{x}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + \frac{\mathbf{b}\mathbf{x}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + \frac{\mathbf{c}\mathbf{x}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})},$$

ili prema (19,7) definitivno

$$\mathbf{x} = k\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + l\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + m\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}. \qquad (19{,}10)$$

Analitičko rješenje. — Služeći se ranije navedenim indeksima, jednačina (19,7) može se napisati u obliku

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= k \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= l \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= m \end{aligned}\right\} \qquad (19{,}7')$$

Rješavanjem sistema (19,7') dobija se takođe (19,10).

RECIPROČNI SISTEMI

Iz (19,10) se vidi da se u složenijim vektorskim jednačinama pojavljuju slijedeći vektori:

$$\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}. \qquad (19{,}11)$$

Proučićemo ove vektore i izvesti opšte zaključke. Označimo ih respektivno cikličnom permutacijom sa $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$:

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}. \qquad (19{,}12)$$

Vektori $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$ i $\mathbf{c}^*$ imaju jednake imenioce: $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Ako se jedan od vektora, na pr. $\mathbf{a}^*$, pomnoži skalarno vektorom $\mathbf{a}$, a zatim sa $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, dobija se

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}^*\mathbf{a} &= 1, \\ \mathbf{a}^*\mathbf{b} &= 0, \\ \mathbf{a}^*\mathbf{c} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19{,}13)$$

To znači da je vektor $\mathbf{a}^*$ normalan na vektoru $\mathbf{b}$ i vektoru $\mathbf{c}$, a skalarno pomnožen vektorom $\mathbf{a}$ daje kao proizvod jedinicu.

Analogno je

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{b}^*\mathbf{a} &= 0 \\ \mathbf{b}^*\mathbf{b} &= 1 \\ \mathbf{b}^*\mathbf{c} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19{,}14)$$

i

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{c}^*\mathbf{a} &= 0 \\ \mathbf{c}^*\mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{c}^*\mathbf{c} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19{,}15)$$

Vektor $\mathbf{a}^*$ naziva se recipročan u odnosu na vektor $\mathbf{a}$. Isto tako vektor $\mathbf{b}^*$ je recipročan vektoru $\mathbf{b}$, vektor $\mathbf{c}^*$ recipročan vektoru $\mathbf{c}$.

Za sistem vektora $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ kaže se da je **recipročan** sistemu vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ kada zadovoljava uslove (19, 13—15), odnosno (19,12).

Isto tako se može tvrditi i obrnuto. Naime, ako su data tri nekomplanarna vektora $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$, onda su vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, koji zadovoljavaju uslove

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{a}\mathbf{a}^* = 1 & \mathbf{b}\mathbf{a}^* = 0 & \mathbf{c}\mathbf{a}^* = 0 \\ \mathbf{a}\mathbf{b}^* = 0 & \mathbf{b}\mathbf{b}^* = 1 & \mathbf{c}\mathbf{b}^* = 0 \\ \mathbf{a}\mathbf{c}^* = 0 & \mathbf{b}\mathbf{c}^* = 0 & \mathbf{c}\mathbf{c}^* = 1 \end{matrix}\right\} \quad \ldots \quad (19{,}16)$$

takođe recipročni vektorima $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ i izračunavaju se po formulama:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*}{\mathbf{a}^*(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*)}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}^*\times\mathbf{a}^*}{\mathbf{a}^*(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*)}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}^*\times\mathbf{b}^*}{\mathbf{a}^*(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*)}. \qquad (19{,}12')$$

Na osnovu izloženog može se rezultat uopštiti ovako: **dva sistema po tri vektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ nazivaju se recipročni kada su ivice jednog trijedra normalne na odgovarajućim ravnima drugog trijedra, koji sači-**

njavaju **dati vektori.** Ili ako se vektori uzmu duž osa sistema biće dva sistema recipročni kada su ose jednog sistema normalne na odgovarajućim koordinatnim ravnima drugog sistema.

Iz (19,10) i dalje uviđa se potreba ovakvih sistema, a može se postupiti i obrnuto, da se najprije uvede sistem, pa da se primijeni na konkretne slučajeve.

Nađimo sada međusobni odnos zapremina paralelepipeda sa ivicama **a, b, c** i **a*, b*, c***.

Poznato je da je

$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$V^* = (\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^*)\,\mathbf{c}^* = \mathbf{a}^*\,(\mathbf{b}^* \times \mathbf{c}^*).$$

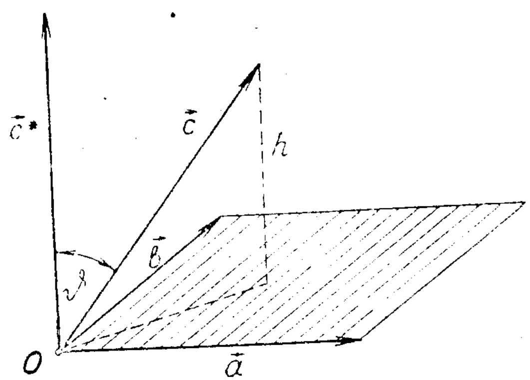
Prema (19,12—12') i § 18 dobija se

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{b}^* \times \mathbf{c}^*) = V^* = \mathbf{a}^* . \frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{[\mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2} = \frac{\mathbf{a}^*\mathbf{a}\,(\mathbf{c} \times \mathbf{a})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})|^2} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}\text{, odnosno}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,.\,\mathbf{a}^*(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*) = 1, \quad \dots\dots \quad (19,\ 17)$$

$$\text{ili } VV^* = 1. \quad \dots\dots \quad (19,\ 17')$$



Sl. 32.

To znači da je zapremina paralelepipeda formiranog od vektora **a, b, c** jednaka recipročnoj vrijednosti zapremine paralelepipeda sa ivicama **a*, b*, c***. Lako je vidjeti da su oba sistema iste orijentacije: oba desni, ili oba lijevi.

Da vidimo sada kako se navedene relacije prikazuju geometriski. Uzmimo sistem vektora **a, b, c** (sl. 32). Onda je $\mathbf{c}^* \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c}^* \perp \mathbf{b}$ i $cc^* = 1$, odnosno $cc^* \cos\vartheta = 1$, $c^*h = 1$.

Na osnovu toga se dobija da je intenzitet vektora **a*, b*, c*** ravna recipročnoj vrijednosti odgovarajućih visina paralelepipeda **a, b, c**, koje su paralelne vektorima **a*, b*, c***.

Iz izloženog se vidi da za opšta pravila rješavanja vektorskih jednačina postoje mnoge i velike teškoće, pa se i za na izgled proste jednačine moraju upotrebljavati komplikovani metodi rješavanja.

Zadaci:

1. — Riješiti sistem vektorskih jednačina

$$\mathbf{a}\,\mathbf{x} = k$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

pod uslovom da je $\mathbf{a}\,\mathbf{b} \neq 0$ i, naravno, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$.

$$\text{Rješenje: } \mathbf{x} = \frac{k}{\mathbf{ab}}\,\mathbf{b} + \frac{1}{\mathbf{ab}}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Napomena. — Ovaj zadatak se može postaviti i geometriski, odnosno: naći prodornu tačku prave $\mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ kroz ravan $\mathbf{ax} = k$. Ako je $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{ab} = 0$, onda je prava paralelna ravni i zadatak nema smisla.

2. — Date su tri ravni $\mathbf{ax} = k$, $\mathbf{bx} = l$, $\mathbf{cx} = m$. Naći uslov da te ravni budu paralelne datoj pravoj.

Odg.: $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$.

3. — Izračunati minimalno otstojanje među dvjema neparalelnim pravama:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{d}$$

u opštem slučaju ukrštanja i izraziti uslov da se prave sjeku.

Odg.:

$$d_{min} = \frac{|\mathbf{cb} + \mathbf{da}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.\ \text{Uslov presjecanja: } \mathbf{cb} + \mathbf{da} = 0.$$

4. — Naći sistem triju vektora recipročan sistemu vektora **i, i+j, i+j+k**.

Odg.: **i—j, j—k, k.**

DRUGA GLAVA

TEORIJA VEKTORA KOJI ZAVISE OD SKALARNOG ARGUMENTA

§ 20. — PROMJENLJIVI VEKTORI KAO FUNKCIJE SKALARNOG ARGUMENTA

Do sada smo proučavali vektore kao konstantne veličine. Međutim, naročito u fizici u ogromnoj većini slučajeva proučavaju se takve pojave i veličine, koje se pretstavljaju **promjenljivim vektorima**, pri čemu vektori u svojoj promjeni zavise od skalarnih veličina kao od parametara, argumenata ili nezavisno promjenljivih. I geometrija daje vrlo mnogo primjera takve zavisnosti, a u fizici se počevši od kinematike odmah nailazi na činjenicu da vektori zavise od skalarnih parametara, od kojih je najvažniji vrijeme, jer se sve dešava u vremenu i prostoru. Za sada ćemo posmatrati vektore, koji se mijenjaju u funkciji od jednog skalarnog argumenta i to od vremena t. Inače se mjesto t može uzeti kao nezavisno promjenljiva uopšte ma koji skalar.

To se može izraziti ovako:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(t), \qquad (20,1)$$

gdje je **f** vektorski, a ne skalarni, simbol i pokazuje da se radi o **vektorskoj funkciji** od skalarne promjenljive t. Da bi se izbjegli suvišni simboli, ta zavisnost se može označiti i sa

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t). \qquad (20,1a)$$

Očevidno je da je jednačina vektorske funkcije (20,1) ekvivalentna sa jednačinom

$$\mathbf{a} = a_x(t).\mathbf{i} + a_y(t).\mathbf{j} + a_z(t).\mathbf{k}, \qquad (20,1b)$$

gdje su **i**, **j**, **k** ortovi po osama utvrđenog koordinatnog sistema, ili kad je zadata vektor-funkcija oblika **a**(t) isto je kao da su zadate tri skalarne funkcije oblika $a_x = a_x(t)$, $a_y = a_y(t)$, $a_z = a_z(t)$ i obrnuto.

Saobrazno notaciji (20,1a) zavisnost od vremena može se pretstaviti slijedećim jednačinama:

Za radius-vektor: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, za brzinu: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, ubrzanje: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, vektor električnog polja: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$, magnetnog polja: $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ itd.

Zadaci:

1. — Data je jednačina elipse u parametarskom obliku skalarno prema komponentama $x = a\cos t$ i $y = b\sin t$. Naći zavisnost radius-vektora od vremena: **r**(t).

Odg.: $\mathbf{r} = \mathbf{i}\, a\cos t + \mathbf{j}\, b\sin t$.

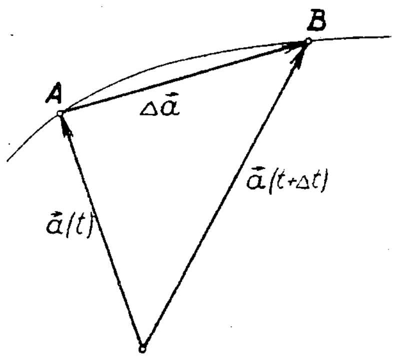
2. — Izraziti radius-vektor (računat od koordinantnog početka) zavojnice u funkciji parametra t.

Odg.: $\mathbf{r} = \mathbf{i}\, a\cos t + \mathbf{j}\, a\sin t + \mathbf{k}\, h\, \frac{t}{2\pi}$.

§ 21. — KONTINUALNOST FUNKCIJE

Analogno teoriji skalarnog infinitezimalnog računa i vektor-funkcija je kontinualna kada je za ma koju vrijednost nezavisno promjenljive skalarne veličine t funkcija **a**(t) konačna i potpuno određena i kada beskonačno maloj promjeni argumenta odgovara takođe beskonačno mala promjena funkcije, ili (sl. 33)

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}\,(t + \Delta t), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (21,1)$$



Sl. 33.

jer kada $\Delta t \to o$, onda i među vektor-funkcijama u tačkama A i B postoji razlika koja takođe teži nuli.

Ta relacija se može napisati i ovako

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t), \tag{21,2}$$

gdje $\Delta \mathbf{a} \to o$ kada $\Delta t \to o$.

Ako je vektor-funkcija kontinualna za s v a k u vrijednost argumenta t u nekom intervalu od t_1 do t_2, onda se takva vektor-funkcija naziva kontinualna funkcija u datom intervalu (t_1, t_2).

Ako su projekcije $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ kontinualne skalarne funkcije, onda je naravno i vektor-funkcija $\mathbf{a}(t)$ kontinualna.

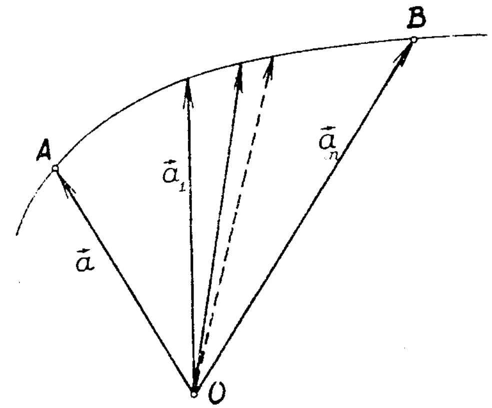
Jasno je da se sva pravila, definicije i teoreme, koje važe u skalarnom infinitezimalnom računu za beskonačno male veličine i limese, analogno primjenjuju i na promjenljive vektore.

Tako na pr. vektor **a** je beskonačno mali ako je njegova apsolutna vrijednost $|\mathbf{a}| = a$ beskonačno mala, odnosno njegove projekcije na osama usvojenog koordinatnog sistema su beskonačno male veličine, gdje je usvajanje sistema proizvoljno.

Takođe je i geometriski zbir konačnog broja beskonačno malih vektora beskonačno mala veličina; geometriska razlika dvaju beskonačno malih vektora je beskonačno mali vektor. Proizvod beskonačno male skalarne veličine i konačnog vektora je beskonačno mala veličina. Proizvod konačne skalarne veličine i beskonačno malog vektora je beskonačno mala veličina. Proizvod, bilo skalarni ili vektorski, ma kojeg konačnog vektora sa beskonačno malim vektorom takođe je beskonačno mala veličina itd.

§ 22. — HODOGRAF VEKTORA a (t)

Promjenljive vektore takođe ćemo smatrati kao s l o b o d n e vektore, a to znači da se, ako je potrebno, mogu svesti i na zajednički početak, da se mogu slobodno pomjerati prema ranije navedenim pravilima. Mogu se, dakle, uzeti za razne vrijednosti t pomoćni vektori jednaki vektoru **a**, ali sa zajedničkim početkom. G e o m e t r i s k o m j e s t o v r h o v a t i h p o m o ć n i h v e k t o r a j e u o p š t e n e k a p r o s t o r n a k r i v a, k o j a s e n a z i v a **hodograf** d a t o g v e k t o r a. Pri tome pomoćni vektor **a** opisuje neku konusnu površinu OAB (sl. 34). Naravno, da bi vektor imao hodograf, mora ispunjavati uslove iznešene u § 21.



Sl. 34.

Hodograf vektora ima veliku primjenu, kao na pr. u mehanici hodograf brzina, ubrzanja itd., gdje je ustvari i ponikao.

Zadaci:

1. — Tačka se kreće po krugu konstantnom brzinom **v**. Kakav je hodograf brzina tačke?

Za određivanje hodografa možemo uzeti na proizvoljnom mjestu neku tačku o, iz koje ćemo nanositi vektore **v** u raznim momentima. Kao hodograf se dobije kružna linija poluprečnika v.

2. — Materijalna tačka se kreće ravnomjerno i pravoliniski. Kakav je hodograf brzina?

Odg.: Tačka na kraju pomoćnog vektora, koji se dobija translacijom vektora **v**.

§ 23. — IZVOD VEKTORA PO SKALARNOM ARGUMENTU

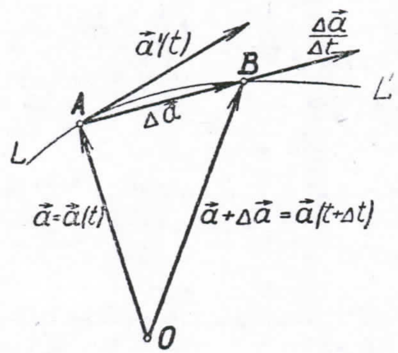
Na osnovu izloženog i definicije skalarnog izvoda izvod vektora **a** po argumentu t uz uslov kontinualnosti i limesa je

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}. \tag{23,1}$$

Izvod se označava ili sa $\mathbf{a}'(t)$, ili u obliku diferencijalnog količnika $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$. Pošto se u fizici uzima za nezavisno promjenljivu najviše uglavnom vrijeme, usvojeno je označavanje izvoda po vremenu pomoću tačke nad vektorom pa je

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{\mathbf{a}}, . \tag{23,2}$$

Takođe je usvojeno da se tako obilježava i izvod skalarne veličine po vremenu. Na pr. $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$. Neka je LL' hodograf vektora **a** (sl. 35).



Sl. 35.

Odmah se vidi da $\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$ uopšte nema isti pravac kao **a**. Onda će količnik

$$\frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}$$

imati pravac i smjer tetive $\overrightarrow{AB}$ hodografa LL'. Kada $\Delta t \to o$ taj količnik teži izvodu $\mathbf{a}'(t)$, a tetiva teži tangenti hodografa u tački A. Prema

tome prvi izvod vektora **a** pretstavljen je vektorom koji tangira hodograf vektora **a** u tački u kojoj se izvod traži. Takođe i diferencijal ima pravac duž tangente, jer je $d\mathbf{a} = \dot{\mathbf{a}}dt$.

Ako se za **a** uzme radius-vektor **r** neke tačke, koja se kreće, onda će $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ biti vektor srednje brzine za interval vremena Δt, a $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ biće vektor brzine u momentu t. Prema tome brzina tačke koja se kreće je izvod radius-vektora te tačke uzet po vremenu:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{23,3}$$

Prvi izvod vektora **a** takođe je funkcija skalarnog argumenta $\mathbf{a}'(t) = \mathbf{f}(t)$, pa se na isti način može definisati i izvod toga izvoda — drugi izvod $\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2}$ itd. — uopšte n-ti izvod.

Ako se za **a** uzme radius-vektor **r**, onda je drugi izvod radius-vektora po vremenu ubrzanje tačke:

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Mi ćemo proučavati samo kontinualne, kako vektorske tako i skalarne funkcije koje se mogu diferencirati.

§ 24. — PRAVILA DIFERENCIRANJA VEKTORA KOJI ZAVISE OD SKALARNOG ARGUMENTA

Osnovna pravila diferenciranja skalara važe i za vektore.

a) **Izvod zbira.**

Neka je data relacija $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, gdje su **u** i **v** promjenljivi vektori koji zavise od t (argument t iz razloga praktičnosti izostavljamo). Onda je

$$\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} + \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

ili

$$\dot{a} = \dot{u} + \dot{v}. \qquad (24,1)$$

Dakle, izvod zbira jednak je zbiru izvoda.

b) **Izvod proizvoda skalara i vektora.**

Neka je $a = pu$, gdje je p neka skalarna funkcija od t. Onda će biti

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(p + \Delta p)(u + \Delta u) - pu}{\Delta t}.$$

$$a = u \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} + p \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \Delta u \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

$$\dot{a} = u \frac{dp}{dt} + p \frac{du}{dt} = u\dot{p} + p\dot{u} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (24,2)$$

Izvod proizvoda skalara i vektora jednak je zbiru proizvoda vektora i izvoda skalara i proizvoda skalara i izvoda vektora.

Ako je $p = \text{const}$, biće

$$\dot{a} = p \frac{du}{dt} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (24,3)$$

a to znači da se konstantni faktor može iznijeti pred znak diferenciranja. Isto se dobija i kao izvod zbira, gdje se sabirak u uzme p puta.

c) **Izvod proizvoda dvaju vektora.**

Neka je dat skalarni proizvod $a = uv$, gdje su u i v funkcije od t. Za diferenciranje ovdje važi pravilo kao u 24b, pa je

$$\dot{a} = \frac{du}{dt} v + u \frac{dv}{dt} = \dot{u}v + u\dot{v} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (24,4)$$

Isto pravilo važi i za vektorski proizvod. Neka je dato $a = u \times v$. Onda je

$$\dot{a} = \frac{du}{dt} \times v + u \times \frac{dv}{dt} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (24,5)$$

Kod diferenciranja vektorskog proizvoda red faktora u sabircima ne može se mijenjati. Za izvod skalaranog proizvoda dokaz je isti kao u 24b, ali zbog navedenog svojstva izvoda vektorskog proizvoda dokazaćemo (24,5).

Prema definiciji je

$$\dot{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta (u \times v)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(u + \Delta u) \times (v + \Delta v) - u \times v}{\Delta t}$$

Brojilac ćemo transformirati na taj način, što ćemo oduzeti i dodati proizvod $u \times (v + \Delta v)$, pa se dobija

$$(u + \Delta u) \times (v + \Delta v) - u \times (v + \Delta v) + u \times (v + \Delta v) - u \times v =$$

$$= (u + \Delta u - u)(v + \Delta v) +$$

$$+ u \times (v + \Delta v - v) = \Delta u \times (v + \Delta v) + u \times \Delta v.$$

Očevidno je da se ovdje prilikom izvođenja zajedničkih faktora pred zagradu ne smije izmijeniti red faktora. Prema tome se dobija

$$\dot{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} \times \lim_{\Delta t \to 0} (v + \Delta v) + \lim_{\Delta t \to 0} u \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

i definitivno

$$\dot{a} = \frac{du}{dt} \times v + u \times \frac{dv}{dt} = \dot{u} \times v + u \times \dot{v}, \qquad (24,5')$$

što je i trebalo dokazati.

Vidi se da i na desnoj strani kod oba sabirka mora biti kao i na lijevoj strani redom u, pa v.

d) **Izvod jediničnog vektora.**

Prema definiciji jediničnog vektora zna se da on ima skalar koji je ravan jedinici. Uslov je da održava svoju konstantnu jediničnu dužinu, a pravac, naravno, mijenja. Kako je kvadrat vektora jednak kvadratu njegove apslolutne veličine, ako taj jedinični vektor označimo sa a_1, biće

$$a_1 . a_1 = a_1^2 = 1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (24,6)$$

Diferenciranjem ove jednačine dobija se

$$a_1\dot{a}_1 = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,7)$$

Skalarni proizvod vektora $\dot{a}_1$ i a_1 ravan je nuli, pa su prema tome ta dva vektora međusobno normalni.

Otuda pravilo: izvod jediničnog vektora normalan je na tom vektoru.

e) — **Izvod vektora izraženog pomoću jediničnog vektora.**

Neka je dat vektor $\mathbf{a} = a\mathbf{a}$, gdje je intenzitet vektora **a**, a vektor $\mathbf{a}_1$ njegov jedinični vektor. Prema 24b izvod toga vektora je

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{a}_1 + a\frac{d\mathbf{a}_1}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,7)$$

Ako je promjenljiv samo intenzitet odnosno veličina vektora **a**, a pravac konstantan, onda se dobija

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{a}_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,8)$$

U tom slučaju izvod vektora je usmjeren duž istog vektora, odnosno kolinearan je sa datim vektorom.

Ako je pak promjenljiv samo pravac vektora **a**, a veličina konstantna, onda je

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = a\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,9)$$

U tom slučaju izvod vektora je usmjeren normalno prema datom vektoru.

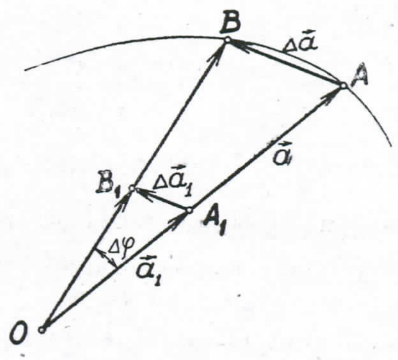
f) **Razlaganje prvog izvoda vektora na kolinearnu i normalnu komponentu.**

Iz (24,7) se vidi da je $\frac{da}{dt}\mathbf{a}_1$ komponenta koja ima pravac datog vektora **a**. Ta komponenta se prema tome može nazvati kolinearna (radijalna). Druga komponenta $a\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}$ je obrnuta za $\frac{\pi}{2}$ prema vektoru **a**, pa

se može nazvati normalna komponenta. Izračunaćemo numeričku vrijednost izvoda jediničnog vektora $\left|\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}\right|$.

Prema slici je $\overrightarrow{OA_1}$ ort vektora u momentu t, a $\overrightarrow{OB_1}$ u momentu $t + \triangle t$, pa je

$$\frac{|\triangle \mathbf{a}_1|}{2} = a_1 \sin\frac{\triangle\varphi}{2} = \sin\frac{\triangle\varphi}{2}.$$



Sl. 36.

Prema definiciji izvoda je

$$\left|\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}\right| = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{|\triangle \mathbf{a}_1|}{\triangle t} = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{2a_1\sin\frac{\triangle\varphi}{2}}{\triangle t} = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle\varphi}{\triangle t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Izvod ugla rotacije po vremenu obično se označava sa ω. Onda je

$$\left|\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}\right| = \omega. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,10)$$

Označimo li jedinični vektor normalne komponente izvoda vektora **a** sa **n**, dobija se

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{a}_1 + a\omega\mathbf{n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,11)$$

Prva komponenta pretstavlja izvod koji se odnosi samo na promjenu veličine vektora, a druga komponenta pretstavlja izvod koji se odnosi samo na promjenu pravca vektora.

g) **Razlaganje drugog izvoda vektora na tangencijalnu i normalnu komponentu.**

Prvi izvod vektora **a** je tangencijalan na liniji. koja je geometrisko mjesto opisano krajem toga vektora. Označimo taj prvi izvod sa **v**. Ako sa $\vec{\tau}$ označimo jedinični vektor prvog izvoda, biće

$$\mathbf{v} = v\vec{\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24{,}12)$$

Diferenciranjem se dobija

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24{,}13)$$

Na osnovu toga drugi izvod **u** vektora **a** može se rastaviti na komponentu $\frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ duž tangente i komponentu $v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ duž normale geometriskog mjesta krajeva vektora **a**, pa se zato nazivaju respektivno tangencijalna i normalna komponenta drugog izvoda vektora **a**.

Odmah se vidi da je ovo poznato razlaganje vektora ubrzanja, o čemu će se govoriti i kasnije.

h) **Izvod složene funkcije.**

Neka je vektor **a** funkcija skalara w, a skalar w je funkcija nekog skalarnog argumenata (osnovnog skalara):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(w), \; w = w(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24{,}14)$$

Onda je **a** složena funkcija ili funkcija funkcije. Prema definiciji izvoda je

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta w} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{a}}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = \mathbf{a}'_w \cdot \dot{w} \quad . \quad . \quad (24{,}15)$$

Ovaj rezultat pokazuje da i kod vektora važi pravilo diferenciranja složene funkcije iz skalarnog infinitezimalnog računa.

§ 25. — OSNOVNE TEOREME I FORMULE DIFERENCIJALNOG RAČUNA KOD VEKTORA

Posmatrajući osnovne teoreme i formule diferencijalnog računa u skalarnoj analizi — Rolle-ovu teoremu, Langrange-ovu teoremu, Cauchy-evu teoremu, Maclaurin-ovu formulu, Taylor-ovu formulu —, zaključuje se da su sve te formule l i n e a r n e u odnosu na funkciju koja se proučava i na njene izvode. Ta linearnost uslovljava činjenicu da se pomenute formule mogu primijeniti na komponente vektora, a to znači i na same vektore, koji zavise od skalarnog argumenta. Naravno, mora biti ispunjen uslov da se vektori kao funkcije promjenljive t mogu u svakoj posmatranoj tački razviti u dotične redove, ako se radi o razvijanju u red, odnosno uopšte moraju ispunjavati uslove diferencijabilnosti.

Ovdje ćemo navesti samo Taylor-ovu formulu. Taylor-ova formula daje aproksimativni izraz ma koje funkcije. Taj izraz ima oblik polinoma, gdje gradativno figuriraju stepeni nezavisno promjenljive, a funkcija i njeni izvodi su prvog stepena. Za funkcije f(t) Taylorova formula može se napisati u obliku

$$f(t) = f(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} \cdot f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} f''(t_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{(t - t_0)^n}{n!} [f^{(n)}(t_0) + \varepsilon] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25{,}1)$$

Analogno se dobija i za vektor

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}\,(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} \mathbf{a}'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} \mathbf{a}''(t_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{(t - t_0)^n}{n!} [\mathbf{a}^{(n)}(t_0) + \varepsilon] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25{,}2)$$

Formula (25,2) može se takođe dokazati i izvođenjem za pojedine komponente, pa zatim slaganjem.

§ 26. — POJAM INTEGRIRANJA VEKTORA KOJI ZAVISI OD SKALARNOG ARGUMENTA

Neodređeni integral ili primitivna funkcija vektora **b** naziva se funkcija **a**, koja ispunjava uslov

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{b}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26.1)$$

odnosno funkcija čiji je izvod po skalaru t ravan zadatom vektoru **b**. Prema tome je

$$\mathbf{a} = \int \mathbf{b}dt + \mathbf{c}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26.2)$$

gdje je konstantni vektor **c** uzet zato što se diferenciranjem (26,2) dobija (26,1) bez obzira na vrijednost vektorske konstante **c**.

Pokazaćemo neke osnovne teoreme za neodređeni integral.

Integral zbira jednak je zbiru integrala $\int(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d})dt =$ $= \int \mathbf{a}dt + \int \mathbf{b}dt + \int \mathbf{c}dt - \int \mathbf{d}dt.$

Konstantni skalarni faktor se može iznijeti ispod integralnog znaka:

$$\int m\mathbf{a}dt = \int \underbrace{(\mathbf{a} + \mathbf{a} + \ldots)}_{m} dt = m\int \mathbf{a}dt,$$

gdje je m konstantno u odnosu na t.

Konstantni vektorski faktor se takođe može iznijeti ispod integralnog znaka, pri čemu mogu biti dva slučaja:

a) proizvod konstantnog i promjenljivog vektora je skalarni

$$\int \mathbf{c}\mathbf{a}dt = \mathbf{c}\int \mathbf{a}dt;$$

b) proizvod konstantnog i promjenljivog vektora je vektorski

$$\int \mathbf{c} \times \mathbf{a}dt = \mathbf{c} \times \int \mathbf{a}dt,$$

gdje je **c** konstantni vektor.

To znači da se vrsta proizvoda održava i poslije iznošenja konstantnog vektora pred integralni znak.

Određeni integral funkcije **a**(t) uzet u granicama od neke vrijednosti t_0 do vrijednosti t naziva se razlika vrijednosti prvobitnih funkcija uzetih za granice t i t_0, tj.

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{b}dt = \mathbf{a}(t) \Big|_{t_0}^{t} = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26,3)$$

Određeni integral vektora takođe se može smatrati kao granična vrijednost sume vektora

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{b}dt = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{k} \mathbf{b}(t_i)(t_{i+1} - t_i), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26,4)$$

gdje t_i pretstavlja niz vrijednosti argumenta t među t_0 i $t = t_{n+1}$. Kada $k \to \infty$ onda $(t_{i+1} - t_i) \to 0$.

Zadaci:

Diferencirati slijedeće izraze pod pretpostavkom da su svi dati vektori funkcija iste skalarne promjenljive t.

1. $\mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Odg.: $\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w}\right) + \mathbf{u}\left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt}\right).$

2. $\mathbf{a} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Odg.: $\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w}\right) + \mathbf{u} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt}\right).$

3. $\mathbf{a} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.

Odg,: $\dot{\mathbf{a}} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v}\right)(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + \left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\mathbf{x} \times \mathbf{y}) +$

$+ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{y}\right) + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\left(\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{y}}{dt}\right).$

4. $\mathbf{a} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$. (Analogno prethodnom).

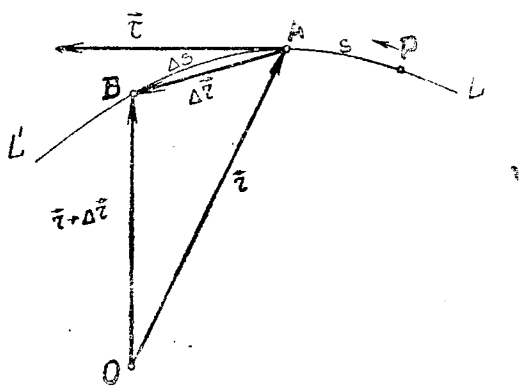
PRIMJENA NA GEOMETRIJU I FIZIKU

Uzećemo samo nekoliko primjera iz opširnih oblasti geometrije i fizike, gdje se primjenjuje iznešena teorija. koja je uglavnom u fizici i nastala. Iznoseći primjenu na pojedina pitanja obuhvatačemo ih ustvari kao cjelinu.

PRIMJERI PRIMJENE NA DIFERENCIJALNU GEOMETRIJU

§ 27. — TRIJEDAR: TANGENTA, GLAVNA NORMALA, BINORMALA. FRENET-SERRET-OVE FORMULE

Neka u prostoru tačka opisuje krivu LL' (sl. 37). Radius-vektori se računaju od tačke O. Položaj tačke određivaćemo lukom s, koji se mjeri od tačke P. Luk treba orijentisati. Na slici strjelica označava pozitivni smjer. Na taj način vektor **r** je funkcija skalara s. Očevidno je da se tetiva $\Delta\mathbf{r}$ poklapa sa lukom Δs kada je među tačkama A i B beskonačno malo rastojanje, odnosno



Sl. 37.

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}\right| = 1. \qquad (27,1)$$

Onda je vektor $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ usmjeren duž tangente na krivoj u tački A na onu stranu kuda se s povećava. To je naravno jedinični vektor. Označićemo ga sa $\vec{\tau}$, pa je

$$\vec{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \qquad \tau = 1. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (27,2)$$

Vektor $\vec{\tau}$ se naziva ort tangente krive LL' u tački M. Prema (27,2) zaključuje se da su komponente vektora $\vec{\tau}$ slijedećih intenziteta:

$$\tau_x = \frac{dx}{ds}, \qquad \tau_y = \frac{dy}{ds}, \qquad \tau_z\ \frac{dz}{ds}.$$

a to su kosinusi uglova koje $\vec{\tau}$ čini sa osama usvojenog koordinatnog sistema.

$$\tau_x = \cos(\tau, x), \qquad \tau_y = \cos(\tau, y), \qquad \tau_z = \cos(\tau, z),$$

pa važi relacija

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (27,3)$$

Sada ćemo posmatrati izvod orta $\vec{\tau}$ po skalarnom argumentu s: $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$.

Prema definiciji je

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},$$

a iz § 24b se vidi da je izvod jediničnog vektora $\vec{\tau}$ normalan na tom vektoru.

Označimo sa $\Delta\varphi$ ugao među dvama susjednim ortovima $\vec{\tau}$ i $\vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$, odnosno među susjednim tangentama. Taj ugao se naziva u g a o k o n t i n g e n c i j e. Onda je

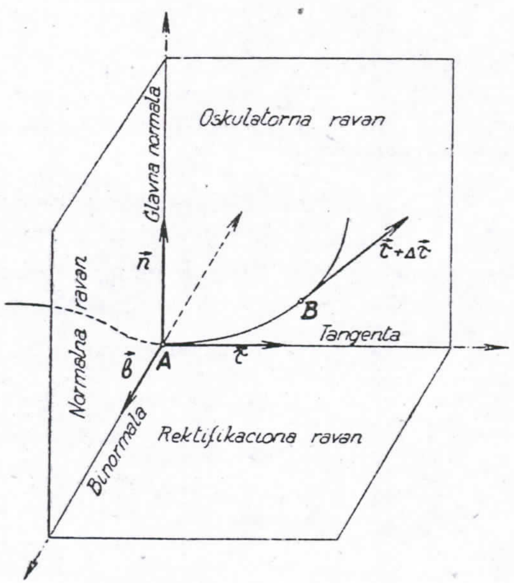
$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Granična vrijednost količnika ugla kontingencije i elementa luka Δs naziva se p r v a k r i v i n a ili f l e k s i j a u dotičnoj takči krive i obično se označava sa $\frac{1}{R}$ ili sa K, pa je

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R} = K. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (27,4)$$

Recipročna vrijednost krivine naziva se r a d i u s k r i v i n e u posmatranoj tački krive. Očigledno je za pravu liniju krivina ravna nuli, pa se može zaključiti da je krivina izvjesna mjera za otstupanje krive od prave linije.

Vidi se da vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ uopšte nije jedinični vektor. Naćićemo pravac i orijentaciju toga vektora. Ako se kroz posmatranu tačku A (sl. 38) osim tangente na krivoj u toj tački povuče i paralela tangenti u obližnjoj tački B, dobije se ravan, čiji se granični položaj kada B→A naziva o s k u l a t o r n a r a v a n. Kako se vektor $\Delta\vec{\tau}$, razlika vektora $\vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$ i $\vec{\tau}$, nalazi u toj ravni, onda će se i vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ takođe nalaziti u oskulatornoj ravni. S druge strane, vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ je normalan na tangenti u tački A, a prava linija koja prolazi kroz posmatranu tačku A i normalna je na tangenti naziva se n o r m a l a, pa je vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ orijentisan duž neke normale u posmatranoj tački. Broj normala u tački A može biti beskonačan.



Sl. 38.

Ravan u kojoj se nalaze normale naziva se normalna ravan krive u tački A i razumije se da je normalna na tangenti u dotičnoj tački. Normala koja se nalazi i u oskulatornoj ravni naziva se g l a v n a n o r m a l a.

Prema tome vektor $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ orijentisan je baš duž glavne normale, a ima smjer prema konkavnoj strani krive linije.

Označimo sa **n** ort glavne normale. Onda je

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R} = K\mathbf{n}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27,5)$$

gdje je n = 1.

Odavde je

$$\mathbf{n} = R\,\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27,6)$$

sa komponentama veličina

$$n_x = R\,\frac{d^2x}{ds^2},\quad n_y = R\,\frac{d^2y}{ds^2},\quad n_z = R\,\frac{d^2z}{ds^2},$$

pa važi relacija

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} \quad \ldots \quad (27,7)$$

Od normala u tački A ćemo proučavati još jednu, koja je karakteristična pri proučavanju prostornih krivih. Ta normala je normalna na oskularnoj ravni. Naziva se b i n o r m a l a. Njen ort ćemo označiti sa **b**. Prema definiciji je

$$\mathbf{b} = \vec{\tau} \times \mathbf{n}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27,8)$$

gdje je b = 1.

Veličine komponenata orta binormale su prema tome

$$\left.\begin{aligned} b_x &= \tau_y n_z - \tau_z n_y = R\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right),\\ b_y &= \tau_z n_x - \tau_x n_z = R\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right),\\ b_z &= \tau_x n_y - \tau_y n_x = R\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27,9)$$

Ortovi $\vec{\tau}$, **n**, **b**, obrazuju desni sistem, odnosno sistem koji smo usvojili (kad bi se usvojio lijevi sistem, onda bi obrazovali lijevi sistem). Napominjemo da je taj trijedar p o k r e t a n, tj. premještanjem tačke A premješta se i trijedar.

Ako se posmatrana kriva linija nalazi u ravni, onda je ta ravan ustvari oskulatorna, jer se u njoj nalaze sve tangente, a glavna normala je obična normala krive u ravni i orijentisana je prema konkavnoj strani krive.

Kod izučavanja promjene pravca orta tangente došli smo do definicije krivine. Posmatraćemo sada promjenu pravca binormale, odnosno oskulatorne ravni. Pošto je **b** jedinični vektor, izvod $\frac{db}{ds}$ biće normalan na njemu. Prema (27,8) biće

$$\frac{db}{ds} = \frac{d(\vec{\tau} \times n)}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \mathbf{n} + \vec{\tau} \times \frac{dn}{ds}.$$

U vezi sa (27,5) prvi član je ravan nuli, pa je

$$\frac{db}{ds} = \vec{\tau} \times \frac{dn}{ds} \quad , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27,10)$$

ili vektor $\frac{db}{ds}$ je normalan na $\vec{\tau}$.

Otuda je vektor $\frac{db}{ds}$, budući normalan i na $\vec{\tau}$ i na **b**, orijentisan duž normale. Analogno definiciji krivine može se napisati

$$\frac{db}{ds} = \pm \frac{n}{\varrho} = \pm \mathrm{T}\mathbf{n}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27,11)$$

gdje se $\frac{1}{\varrho} = \mathrm{T}$ **naziva torzija ili druga krivina,** a ϱ »radius« torzije.

Označi li se sa Δ_ψ ugao među dvijema obližnjim binormalama, biće

$$\left|\frac{db}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho} = \mathrm{T}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27,12)$$

što znači da je torzija mjera za otstupanje krive od prave. U (27,11) konvencionalno je usvojen znak minus. Kod tako usvojenog znaka torzija desne zavojnice u desnom sistemu biće pozitivna, a lijeva zavojnica u desnom sistemu imaće negativnu torziju. Onda je

$$\frac{db}{ds} = -\frac{n}{\varrho} = -\mathrm{T}\,\mathbf{n}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27,13)$$

Sada ćemo naći $\frac{dn}{ds}$. Prema definiciji je $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \vec{\tau}$, pa je

$$\frac{dn}{ds} = \frac{db}{ds} \times \vec{\tau} + \mathbf{b} \times \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\frac{1}{\varrho}(\mathbf{n} \times \vec{\tau}) + \frac{1}{R}(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) =$$

$$= -\frac{1}{R}\vec{\tau} + \frac{1}{\varrho}\mathbf{b} = -\mathrm{K}\vec{\tau} + \mathrm{T}\mathbf{b}. \quad \ldots\ldots \quad (27,14)$$

Analogno definiciji krivine i torzije, odnosno prve i druge krivine, može se definisati i takozvana **totalna krivina** ili treća krivina. Definiše se pomoću ugla Δ_η među obližnjim normalama, odnosno

$$\frac{|dn|}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\eta}{\Delta s} = \Lambda. \quad (27,15)$$

Prema (27;5, — 12,15) dobiva se relacija

$$\Lambda^2 = \mathrm{K}^2 + \mathrm{T}^2, \quad (27,16)$$

što opravdava naziv totalne krivine. Relacija (27,16) naziva se Lancretova relacija.

Formule (27,5), (27,14, i (27,13) napisaćemo u obliku sistema, odnosno

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \frac{\mathbf{n}}{R}, \\ \frac{dn}{ds} &= -\frac{\vec{\tau}}{R} + \frac{\mathbf{b}}{\varrho}, \\ \frac{db}{ds} &= -\frac{\mathbf{n}}{\varrho}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (27,17)$$

ili

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \mathrm{K}\mathbf{n}, \\ \frac{dn}{ds} &= -\mathrm{K}\vec{\tau} + \mathrm{T}\mathbf{b}, \\ \frac{db}{ds} &= -\mathrm{T}\mathbf{n}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (27,17')$$

Ove formule izveli su nezavisno jedan od drugog Frenet — 1847 godine i Serret — 1851 godine, pa se nazivaju **Frenet-Serret-ove formule.** Imaju vrlo veliku važnost pri proučavanju prostornih krivih.

§ 28. — IZRAČUNAVANJE PRVE KRIVINE I TORZIJE

Radius-vektor neke tačke prostorne krive dat je u funkciji dužine luka, pa je prema prvoj Frenet-Serret-ovoj formuli

$$\left(\frac{\mathbf{n}}{R}\right)^2 = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2.$$

Prema tome kvadrat krivine je

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28{,}1)$$

Torziju ćemo izračunati prema trećoj formuli

$$\frac{\mathbf{n}}{\varrho} = -\frac{d\mathbf{b}}{ds}$$

zamjenom $\mathbf{b} = \vec{\tau} \times \mathbf{n}$, pa je

$$T = -\mathbf{n}\,\frac{d}{ds}(\vec{\tau} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n}\,\frac{d}{ds}(\mathbf{n} \times \vec{\tau}) =$$

$$= \mathbf{n}\left(\frac{d\mathbf{n}}{ds} \times \vec{\tau}\right) + \left(\mathbf{n} \times \frac{d\vec{\tau}}{ds}\right)\mathbf{n}.$$

Drugi član je ravan nuli i dobija se

$$T = \mathbf{n}\left(\frac{d\mathbf{n}}{ds} \times \vec{\tau}\right) = \left(\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right)\vec{\tau}. \quad . \quad . \quad . \quad (28{,}2)$$

Dalje je

$$T = \left(R\,\frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right)\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \text{ a u vezi } (27{,}5)$$

$$T = R^2\,\frac{d\mathbf{r}}{ds}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (28{,}3)$$

Iz ove relacije se vidi da je radius torzije pseudoskalar, a to se zaključuje po tome što je tu proizvod dvaju polarnih vektora. Proizvod dvaju polarnih vektora, kao što je poznato, je aksijalni vektor, a proizvod aksijalnog vektora sa polarnim vektorom pretstavlja pseudoskalar. Zbog toga je u (27,13) i usvojen znak minus.

Analitičko rješenje

Neka je radius-vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Onda je

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{dx}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\,\mathbf{k},\\
\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{d^2x}{ds^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\,\mathbf{k},\\
\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} &= \frac{d^3x}{ds^3}\,\mathbf{i} + \frac{d^3y}{ds^3}\,\mathbf{j} + \frac{d^3z}{ds^3}\,\mathbf{k}, \text{ ili}\\
K = \frac{1}{R} &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},
\end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad (28{,}4)$$

$$T = \frac{1}{\varrho} = R^2 \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2} \\ \dfrac{d^3x}{ds^3} & \dfrac{d^3y}{ds^3} & \dfrac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}. \quad . \quad . \quad . \quad (28{,}5)$$

Relacija (28,4) identična je sa relacijom (27,7), koja je izvedena pri proučavanju glavne normale.

Zadatak: Izračunati krivinu i torziju zavojnice:

Odg.: $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{a}{a^2 + h^2}$; $T = \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{h}{a^2 + h^2}$.

PRIMJERI PRIMJENE NA FIZIKU

§ 29. — BRZINA I UBRZANJE. TANGENCIJALNO I NORMALNO UBRZANJE

Prema (28,3 i 4) i §16 f,g za kretanje tačke se iz jednačine $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ gdje je $\mathbf{r}$ radius-vektor, dobiva brzina $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ i ubrzanje $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u}$.

Označili se sa $\vec{\tau}$ ort tangente, biće

$$\mathbf{v} = v\vec{\tau}, \text{ a odavde}$$

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (29,1)$$

Transformiraćemo izvod $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ fungiranjem izvoda po s:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Iz prve jednačine (27,7) je $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}$, a osim toga $\frac{ds}{dt} = v$, pa je $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v\frac{\mathbf{n}}{R}$, gdje je R radius krivine u posmatranoj tački, a $\mathbf{n}$ ort glavne normale. Zamjenom se dobije

$$\mathbf{u} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \qquad (29,2)$$

Iz ove formule se zaključuje da se vektor ubrzanja nalazi u oskulatornoj ravni trajektorije u posmatranoj tački. Ovdje je ubrzanje razloženo na dvije komponente: komponentu $\mathbf{u}_t = v\vec{\tau}$, koja je orijentisana duž tangente, a ima intenzitet v, i komponentu $\mathbf{u}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$, koja je orijentisana duž glavne normale, a ima intenzitet $\frac{v^2}{R}$.

Komponenta

$$\mathbf{u}_t = \dot{v}\vec{\tau} \qquad (29,3)$$

naziva se **tangencijalna komponenta ubrzanja**, a komponenta

$$\mathbf{u}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \qquad (29,4)$$

normalna komponenta ubrzanja.

Intenzitet totalnog ubrzanja je

$$|\mathbf{u}| = u = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{R^2}}. \qquad (29,5)$$

Formula (29,2) ima vrlo veliki značaj u mehanici.

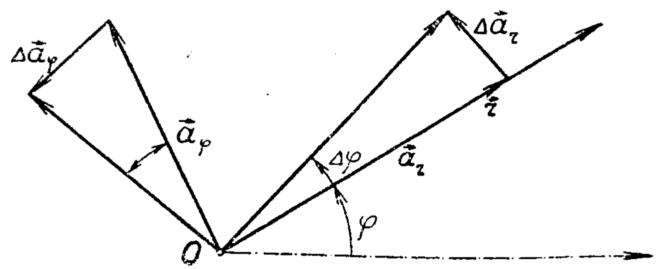
Pomoću komponenata u pravouglom koordinatnom sistemu radius-vektor dat relacijom

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ \text{pa je brzina } \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \text{i ubrzanje } \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}, \end{aligned}\right\} \qquad (29,6)$$

a odavde

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, & v_y &= \dot{y}, & v_z &= \dot{z} \\ u_x &= \ddot{x}, & u_y &= \ddot{y}, & u_z &= \ddot{z} \end{aligned}\right\} \qquad (29,7)$$

Važno je istaći i razlaganje u polarnim koordinatama u ravni. — Neka tačka ima polarne kooridante r i φ, a susjedna tačka $(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ i $\varphi + \Delta\varphi$.



Sl. 39.

Uzmimo ort a_r (sl. 39.) duž radius-vektora $\mathbf{r}$ i ort a_φ normalno na njemu. Orijentišimo ih u smjeru rašćenja radius-vektora i ugla. Pravac tih ortova se mjenja u funkciju vremena, dok ortovi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, ne mijenjaju svoj pravac. Treba, dakle, izračunati izvode ortova a_r i a_φ. Kako je izvod orta normalan na tom istom ortu, biće

$$|\dot{\mathbf{a}}_r| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{a}_r|}{\Delta t} = a_r\dot{\varphi} = \dot{\varphi},$$

ili

$$\dot{\mathbf{a}}_r = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a}_\varphi ;$$

$$|\dot{\mathbf{a}}_\varphi| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{a}_\varphi|}{\Delta t} = a_\varphi \cdot \dot{\varphi}, \text{ ili}$$

$\dot{\mathbf{a}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{a}_r$, gdje je znak minus zbog suprotnog smjera vektora $\mathbf{a}_r$ i $\Delta\mathbf{a}_\varphi$.

Iz izraza za radius-vektor $\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r$ diferenciranjem se dobije

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{a}_r + r\dot{\mathbf{a}}_r = \dot{r}\mathbf{a}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{a}_\varphi , \text{ a zatim}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\mathbf{a}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{a}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{a}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{a}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{a}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\mathbf{a}}_\varphi , \text{ ili}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\, \mathbf{a}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\dot{\varphi})\, \mathbf{a}_\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29,8)$$

Odavde se dobijaju veličine komponenata ubrzanja

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ u_\varphi &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29,9)$$

§ 30. — KRETANJE ELEKTRONA U KONSTANTNOM ELEKTRIČNOM POLJU

Jednačina kretanja elektrona u konstantnom električnom polju $\mathbf{E}$ je jednačina kretanja materijalne tačke u polju konstantne jačine. Ta jednačina glasi

$$\mathbf{F} = m\,\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30,1)$$

gdje je $\mathbf{E}$ = const. Zadatak je da se dobijena jednačina integrira prema iznešenim pravilima. Integriranjem se dobiva

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}t + \mathbf{C} \text{ i}$$

$$\mathbf{r} = \frac{e}{2\,m}\mathbf{E}t^2 + \mathbf{C}t + \mathbf{D}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (30,2)$$

gdje su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ konstantni proizvoljni vektori. Dobijena jednačina se može napisati

$$\mathbf{r} - \mathbf{D} = \frac{e}{2\,m}\mathbf{E}t^2 + \mathbf{C}t,$$

a to znači da se vektor $\mathbf{r}-\mathbf{D}$ nalazi u ravni vektora $\mathbf{E}$ i $\mathbf{C}$, pa su njihove koordinate proporcionalne parametru t na dotičnom stepenu.

Otuda se može zaključiti da se elektron u konstantnom električnom polju kreće po paraboli. Ovaj rezultat i zaključak zasnivaju se na principima klasične mehanike, odnosno elektrodinamike. Međutim na osnovu relativističke mehanike i elektrodinamike dolazi se do zaključka da je u konstantnom električnom polju trajektorija elektrona lančanica, a kako je klasična mehanika aproksimacija relativističke, tako je i parabola aproksimacija lančanice. Ta pitanja se detaljno tretiraju u teoriji elektriciteta.

§ 31. — KRETANJE ELEKTRONA U KONSTANTNOM MAGNETNOM POLJU

Jednačina kretanja glasi

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad . \; . \; . \; . \quad (31,1a)$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elektrona, a c brzina prostiranja međusobnog djejstva. U elektromagnetnom sistemu bilo bi $\mathbf{F} = e\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$. Ova sila je specijalan slučaj takozvane Lorentz-ove sile, o kojoj ovdje nećemo detaljnije govoriti.

Prema pretpostavci ovog paragrafa je $\mathbf{H}$ = const.

Jednačina (31,1) može se napisati i u obliku

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31,1b)$$

Da bismo doznali trajektoriju elektrona integriraćemo jednačinu (31,1) uz istodobnu analizu dobijenih rezultata.

Skalarnim množenjem vektorom **v** dobija se

$$\mathbf{v}\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc}\,[\mathbf{v}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H})] = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,(\mathbf{v}^2) = 0, \text{ ili}$$

$$\mathbf{v}^2 = C, \qquad (31,2)$$

gdje je C integraciona konstanta.

To znači da se energija održava, odnosno da sila **F** ne vrši rad, što se vidi i iz (31,1), jer je vektor **F** normalan na vektoru **v**. Odavde se vidi da je i numerička vrijednost brzine konstantna: $|\mathbf{v}| = \text{const}$.

Skalarnim množenjem vektorom **H** dobija se

$$\mathbf{H}\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc}\;\mathbf{H}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = \frac{d}{dt}\,(\mathbf{H}\mathbf{v}) = 0, \text{ ili}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{v} = D, \qquad (31,3)$$

gdje je D integraciona konstanta.

Odavde je $Hv \cos\,(\mathbf{H}, \mathbf{v}) = D = \text{const}$. S jedne strane prema zadatku je $H = \text{const}$, a s druge strane prema (31,2) $v = \text{const}$, pa je onda i ugao među **H** i **v** takođe konstantan.

Da bismo odredili oblik trajektorije potražićemo još i njenu krivinu. Prema (27,5) je

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\right| = \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{d}{dt}\,\frac{dt}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right)\right| = \frac{1}{v^2}\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|, \text{ jer je } \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \text{const.}$$

Kako je $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{e}{mc}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$, zamjenom se dobiva

$$\frac{1}{R} = \frac{e}{mc}\,\frac{vH}{v^2}\,\sin\,(\mathbf{v}, \mathbf{H}) = \frac{eH}{mcv}\,\sin\,(\mathbf{v}, \mathbf{H}) \qquad (31,4)$$

I krivina trajektorije je prema tome konstantna. Svojstva trajektorije, koja su prikazana sa (31; 2, 3, 4) karakterišu trajektoriju: trajektorija

je zavojnica sa osom duž pravca polja. Ako je početna brzina u pravcu **H** ravna nuli, onda se elektron ne bi kretao po zavojnici, nego po kružnoj liniji, jer je u tom slučaju brzina stalno normalna na vektoru jačine polja. Prema (31,4) radius toga kruga je

$$R = \frac{mcv}{eH} \qquad (31,5)$$

Svojstva trajektorije mogu se naći i analizom projekcije radius-vektora **r** na ravan normalnu na vektoru **H**, gdje se naravno dobije krug.

TREĆA GLAVA

TEORIJA SKALARA I VEKTORA KOJI ZAVISE OD VEKTORSKOG ARGUMENTA

Pri proučavanju fizičkih pojava i veličina što se dublje ulazi u suštinu pitanja, tim se sve veći i veći broj svojstava materije uzima u obzir. Proučavanje neke pojave samo u vremenu pri apstrahovanju prostora znači da se tada pretpostavlja da je pojava svuda u prostoru ista, a sve radi lakšeg proučavanja sa manjom ili većom aproksimacijom. Poznato je da se sve dešava u prostoru i vremenu i izostavljanje jednog znači ne uzeti u obzir promjene u cjelini koje objektivno postoje. Ako se unaprijed konvencionalno odredi stepen tačnosti, onda se dođe do aproksimativnih rezultata, ako tačnost nije velika, no ipak ti rezultati mogu služiti i u daljoj teoriji i u praksi. A tačnost se može uzeti u pojedinim proučavanjima vrlo velika.

§ 32. — FIZIČKO POLJE: SKALARNO I VEKTORSKO

Ako se neko tijelo zagrijeva, pa treba doznati temperaturu u raznim tačkama tog tijela, onda će se za svaku tačku dobiti izvjesna temperatura. Svakoj tački tog tijela odgovaraće neki broj koji odgovara temperaturi. Mjeri li se temperatura vazduha u nekom prostoru, takođe će se za razne tačke uopšte dobiti razni brojevi. Ako treba doznati gustinu nekog tijela u raznim njegovim tačkama, izmjeriće se granična vrijednost odnosa mase tog tijela i dotične zapremine oko tačke kada je zapremina vrlo mala (kada zapremina teži ka tački u fizičkom, a ne u matematičkom smislu). Ta gustina je uopšte različita u raznim tačkama, a može biti ista u raznim tačkama tijela. Gustini tijela u svakoj tački odgovara neki broj.

Treba li naći pritisak u raznim tačkama izvjesne zapremine u atmosferi, za svaku tačku će se dobiti izvjestan broj.

Slično se dobija i za električna opterećenja naelektrizirane sredine. I tako dalje.

Iz rečenog se vidi da se takva funkcionalnost pretstavlja na taj način što svakoj tački prostora, u kome se proučava izložena fizička realnost, odgovara neki **skalar.** Onda se postavlja pitanje proučavanja skalarnih funkcija u zavisnosti od položaja tačke (od mjesta). Prostor u kojem svakoj tački odgovara neki skalar naziva se **skalarno polje.**

Postavi li se zadatak da se u raznim tačkama rijeke izmjeri i dozna brzina čestica vode, onda će se za svaku tačku dobiti po jedan **vektor,** koji odgovara izvjesnom svojstvu kretanja. Traži li se ubrzanje, opet se dobija vektor. I tako dalje. Prostor u kojem je za svaku tačku vezan neki vektor kao pretstava fizičke realnosti naziva se **vektorsko polje.**

I uopšte, ograničen ili neograničen prostor, u kojemu je pri proučavanju neke fizičke pojave za svaku tačku vezan neki skalar ili vektor naziva se **fizičko polje.** I skalar i vektor uzeti uopšte promjenljivi su.

Kako je položaj tačke određen nekim vektorom položaja, — nekim radius-vektorom **r**, onda je skalarno ili vektorsko polje tek onda dato kada se zna dotični skalar ili vektor u funkciji radius-vektora pojedinih tačaka, odnosno kada se zna neka skalarna funkcija V (**r**) ili vektorska funkcija **v** (**r**).

Pošto se svuda u prostoru dešavaju promjene u raznim oblicima kretanja materije u jednom istom mjestu istovremeno može biti više polja. U jednoj tački atmosfere postoji skalarno polje temperatura, skalarno polje atmosferskog pritiska, a zatim vektorsko magnetsko polje zemlje, vektorsko električno polje, vektorsko polje gravitacije, eventualno vektorsko polje brzine vjetra, itd.

Pri proučavanju polja uviđa se povezanost prirode tako da kada se prouči jedno polje, može se u izvjesnim slučajevima znati kakve će se promjene dešavati u drugom polju, koje sa prvim ima prirodnu vezu. Znači, da ćemo proučavati i vezu među raznim poljima, a ne samo pojedino polje zasebno i odvojeno. Funkcija skalarnog polja može određivati vektorsko polje i obrnuto. Naravno, ovdje ćemo proučavati samo opšte zakone, a posebni se proučavaju u specijalnim oblastima fizike.

Te skalarne i vektorske funkcije mogu zavisiti osim od radius-vektora **r** takođe i od vremena t. Polje U (**r**) ili **v** (**r**), koje se ne mijenja u toku vremena, te ne zavisi od vremena, naziva se **stacionarno ili konstantno (stalno) polje,** a polje U (**r**, t) ili **v** (**r**, t), koje se mijenja u toku vremena, naziva se **nestacionirano ili varijabilno (promjenljivo) polje.**

Pretpostavlja se da su funkcije (**r**, t) i **v** (**r**, t) jednoznačne, kontinualne i da se mogu diferencirati i po vektoru **r** i po skalaru t. Ako neko polje zavisi i od nekog drugog skalarnog argumenta, pretpostavlja se da se može takođe i po tom argumentu diferencirati. Ukoliko bude otstupanje od toga posmatraćemo ih posebno.

§ 33. — SKALARNO POLJE

Skalarno polje je okarakterizirano funkcijom U. To znači da su date vrijednosti skalara V za sve tačke polja. Poslužimo li se Descartes-ovim vrijednosti skalara U za sve tačke polja. Poslužimo li se Descartes-ovim

$$U = U(x, y, z) \dots \dots \dots \dots \dots \quad (33,1)$$

Tačke kojima odgovara jedan isti skalar V nalaze se na nekoj površini

$$U(x, y, z) = \text{const.} \dots \dots \dots \dots \quad (33,2)$$

Dajući toj konstanti razne vrijednosti dobiće se više površina, koje se nazivaju svaka zasebno **površine istog nivoa, nivoske površine ili izo-površine skalarnog polja.** Primjena takvog načina prikazivanja skalarnog fizičkog polja je vrlo velika. Ukoliko se vrijednosti konstante uzmu bliže jedna drugoj, utoliko se polje bolje poznaje, utoliko je preglednija i jasnija slika polja. Za vrijednosti među nivoskim površinama upotrebljava se metod interpolacije. Matematički se može pretpostaviti da se nivoske površine uzimaju beskonačno blizu jedna druge i na taj način se doznaju svojstva dotičnog polja. Površine i linije ovakvih osobina poznate su, i veoma često se susreću u velikom broju pitanja i zadataka nauke i tehnike, a obično počinju sa **izo-** ili **ekvi-** baš zbog navedenih osobina. Veoma su moćno sredstvo za brzo i pregledno rješavanje praktičnih zadataka grafički, odnosno za pregledno i spretno upoznavanje promjena raznih fizičkih veličina.

Obično se od izo- površina ili -linija ucrtavaju samo neke i to sa istom razlikom među uzastopnim vrijednostima skalara, pa se prema takvom grafiku mogu doznati kako kvalitativne tako i neke kvantitativne osobine polja koje se proučava.

U slučaju kada se nivoska površina transformira u liniju, ta se linija može posmatrati kao beskonačno tanka površina u obliku cijevi (u nekim slučajevima i kao cilindrična).

U slučaju da se u polju nalazi izolovana tačka, sa kojom obližnje tačke nemaju blisku vrijednost skalara U, takva se tačka može posmatrati kao sfera sa beskonačno malim radiusom.

Napominjemo da se u nekim slučajevima skalar U naziva **potencijal,** a nivoske površine i linije **ekvipotencijalne.**

§ 34. — GRADIJENT SKALARNOG POLJA

Dato je polje okarakterisano skalarom U, koje se, dakle, može pretstaviti nivoskim površinama. Skalar U se mijenja u funkciji radius-vektora, odnosno od tačke do tačke. Najbrža promjena skalara U očevidno je duž normale na nivoskim površinama, odnosno duž najkraćeg puta. On se od jedne do druge nivoske površine gradativno povećava.

Vektor koji u posmatranoj tački skalarnog polja ima smjer najbržeg rašćenja skalara U, a veličinu jednaku porastu skalara U u tom istom pravcu po beskonačno maloj dužini, naziva se gradijent skalara U. Označićemo ga sa

$$\mathbf{G} = \text{grad } U. \dots \dots \dots \dots \quad (34,1)$$

Prema definiciji je smjer gradijenta duž normale na nivoskoj površini u dotičnoj tački. Vektor grad U karakteriše varijaciju funkcije U u blizini posmatrane tačke.

Gradijent je definisan bez ikakvog koordinatnog sistema, a to znači da **gradijent ne zavisi od koordinatnog sistema.** Gradijent je invarijanta polja.

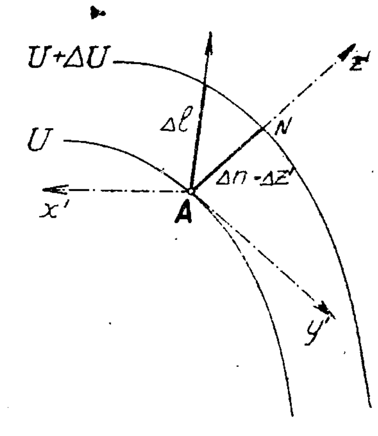
Prema definiciji je

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{n}. \dots \dots \dots \quad (34,2)$$

Gradijent ćemo prikazati i analitički. Za određivanje komponenata vektora **G** poslužićemo se pomoćnim koordinatnim sistemom, koji ćemo izabrati tako da se dvije ose tog sistema x' i y' nalaze u tangencijalnoj ravni nivoske površine, a treća osa z' da bude duž normale na nivoskoj površini (sl. 40). Vektor grad U u tom sistemu ima koordinate

$$(\text{grad } U)_{x'} = 0, \ (\text{grad } U)_{y'} = 0,$$

$$= (\text{grad } U)_{z'} = \frac{dU}{dn}. \quad (3,34)$$



Sl. 40.

Konstruirajmo zatim drugu nivosku površinu na normalnom otstojanju $\Delta z' = \Delta n$ od prve površine. Iz tačke A povučemo proizvoljnu osu, koja će među tim nivoskim površinama imati dužinu Δl kao hipotenuzu trougla, kojega je jedna kateta Δn. Uzmu li se diferencijali, dobiva se

$$dl = \frac{dn}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (34,4)$$

Uzmemo li zatim proizvoljni koordinatni sistem xyz, dobićemo

$$dx = \frac{dn}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (34,5)$$

Tada je priraštaj skalara U na jedinicu dužine u smjeru l

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (34,6)$$

a u smjerovima x, y i z:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{dU}{dn} \cos(z', x) = \dfrac{dU}{dn} \cos(n, x) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{dU}{dn} \cos(n, y), \dfrac{\partial U}{\partial z} = \dfrac{\partial U}{\partial n} \cos(n, z). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (34,7)$$

Prema (34,3) i transformacionim formulama dobivaju se veličine komponenta za grad U:

$$\left.\begin{array}{l} G_x = (\text{grad } U)_x = (\text{grad } U)_{z'} \cos(z', x) \\ G_y = (\text{grad } U)_y = (\text{grad } U)_{z'} \cos(t', y) \\ G_z = (\text{grad } U)_z = (\text{grad } U)_{z'} \cos(z', z). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \qquad (34,8)$$

Na osnovu relacija (34,3 i 7) dobija se

$$G_x = (\text{grad } U)_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad G_y = (\text{grad } U)_y = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$G_z = (\text{grad } U)_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (34,9)$$

Dakle, veličine komponenata vektora grad U su parcijalni izvodi skalara U po koordinatama radius-vektora tačke A u kojoj se gradijent računa. Komponente su očigledno duž osa usvojenog koordinatnog sistema.

Definitivno je sam vektor

$$\mathbf{G} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad . \quad . \quad . \quad , \qquad (34,10)$$

Modul gradijenta je

$$G = /\text{grad } U/ = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial U}{\partial n} \qquad (34,11)$$

Lamé je ovaj modul nazvao **prvi diferencijalni parametar od U.** Modul gradijenta je mjera gustine nivoskih površina polja, jer je obrnuto proporcionalan otstojanju beskonačno bliskih nivoskih površina.

Uglovi gradijenta sa koordinatnim osama dobijaju se iz relacija

$$\cos(\text{grad } U, x) = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{|\text{grad } U|},$$

$$\cos(\text{grad } U, y) = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial y}}{|\text{grad } U|},$$

$$\cos(\text{grad } U, z) = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial z}}{|\text{grad } U|}.$$

Isti rezultati (34; 10, 11, 12) mogu se dobiti i prema definicionoj relaciji (34,2) zamjenom $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ u funkciji izvoda od U po koordinatama tačke A, odnosno

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn},$$

gdje su $\dfrac{dx}{dn}$ itd. kosinusi odgovarajućih uglova.

Lako je dokazati da je gradijent konstante jednak nuli.

Iz izloženog se zaključuje i to da dok skalar U karakteriše skalarno polje, gradijent tog skalara **karakteriše vektorsko polje.**

§ 35. — IZVOD SKALARA U DATOM PRAVCU

Neka je dato skalarno polje karakterisano skalarom U, koji u tački A ima vrijednost U_A. Treba u toj točki naći izvod skalarne funkcije U pod uslovom da bude po unaprijed određenom pravcu **l**. U tački B koja je veoma blizu tački A na rastojanju Δl, a u pravcu paralelnom sa **l**, taj skalar će imati vrijednost U_B. Onda će količnik $\frac{\Delta U}{\Delta l}$ predstavljati srednju brzinu promjene skalarne funkcije U na jedinici dužine puta u datom pravcu.

Granična vrijednost

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{U_B - U_A}{\Delta l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35,1a)$$

pod uslovom da AB bude paralelno određenom pravcu **l** naziva se izvod skalarne funkcije U u tački A u datom pravcu. **l**. Označava se sa $\frac{\partial U}{\partial l}$, pa je

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35,1b)$$

Neki autori ovakav izvod označavaju i sa $\frac{dU}{dl}$. Međutim oznaka parcijalnog izvoda pokazuje da u toj tački skalarna funkcija U može imati beskonačno mnogo izvoda — po svim pravcima.

Odmah se vidi veza ovog izvoda sa gradijentom, ako se uzme u obzir relacija (34,6):

$$\frac{\partial U}{\partial l} = |\mathrm{grad}\ U|\ \cos\ (\mathrm{grad}\ U, \mathbf{l}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35,\ 2a)$$

a to znači: **izvod skalarne funkcije U u datoj tački u pravcu l jednak je projekciji gradijenta te funkcije u toj tački na pravcu l.**

Relacija (35,2a) može se napisati i u obliku

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \mathbf{l}_1\ \mathrm{grad}\ U = \mathbf{G}\mathbf{l}_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35,2b)$$

gdje je $\mathbf{l}_1$ ort u pravcu l, pa je drugim riječima: izvod skalarne funkcije U u datoj tački u pravcu l jednak skalarnom proizvodu gradijenta te funkcije i orta u datom pravcu.

Ovaj izvod se može prikazati i analitički. Zamijene li se navedeni vektori komponentama, dobija se

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right)(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma).$$

gdje su α, β, γ uglovi među pravcem l i koordinatnim osama. Dalje je

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35,2c)$$

Isto se dobije ako se diferencira $\frac{\partial U}{\partial l}$ kao funkcija

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dl} \quad . \quad . \quad (35,2\ d)$$

U vezi priraštaja radius-vektora relacija (35,2) može se transformirati ovako:

$$\frac{dU}{dr} = \mathbf{G}\mathbf{r}_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35,3a)$$

gdje je $\mathbf{r}_1$ jedinični vektor u pravcu dr. Ova relacija se može napisati i u slijedećem obliku:

$$dU = \mathrm{grad}\ U\ .\ d\mathbf{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35,3b)$$

Ako je data relacija

$$dU = \mathbf{a}\ d\mathbf{r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35,4)$$

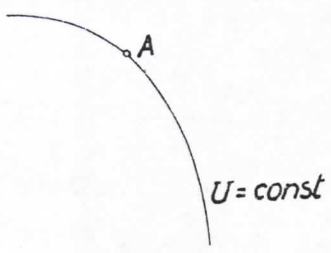
onda je jasno da je u tom slučaju **a** = grad U.

Relacija (35,3) može se dobiti i na slijedeći način: Neka je radius-vektor tačke A u koordinatnom sistemu xyz: **r** = x**i** + y**j** + z**k**. Na istoj nivoskoj površini razne tačke imaće razne radius-vektore, ali će na njoj svuda biti U = const. Međutim na ma kojoj drugoj nivoskoj površini U će imati drugu vrijednost. Onda je totalni diferencijal skalara U:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

a to je skalarni proizvod vektora $\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z} = \text{grad } U$ i vektora $\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz = \mathbf{dr}$, pa se tako dobija relacija (35,3).

Relacija (35,2) se može dobiti i prikazati geometriski. Kroz tačku A (sl. 41) povučemo nivosku površinu U = const. Vektor gradient orijentisan je duž normale na toj površini: AP = |gradU|. Opišimo nad AP kao diametrom loptu i posmatrajmo neki zrak iz A u pravcu **l**. Taj zrak presjeca loptu u tački Q. Očevidno je



Sl. 41.

$$AQ = \frac{\partial U}{\partial l} \qquad (35,5)$$

jer je to kateta pravouglog trougla AQP u glavnom polukrugu konstruisane lopte.

Kako gradijent ima smjer normala od površine nižeg nivoa ka površinama višeg nivoa, on se mora razlikovati od izvjesnih gradativnih veličina u fizici, koje se mahom karakterišu izrazom **pad.**

Ortogonalne trajektorije nivoskih površina nazivaju se **linije polja.** U njihovo detaljnije tretiranje ovdje se nećemo upuštati.

§ 36. — HAMILTONOV OPERATOR ∇ — NABLA

U formuli za grad U možemo konvencionalno izdvojiti skalar U:

$$\text{grad } U = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}\right) U \quad . \; . \; . \quad (36,1)$$

Izraz u zagradi, sastavljen iz zbira triju oznaka parcijalnog diferenciranja po x, y, z, po trehodnom množenju sa odgovarajućim ortima, Hamilton je označio simbolom ∇, koji se izgovara nabla.

Dakle,

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (36,2)$$

Ovako simboličko pretstavljanje pomoću operatora uzelo je u teoriji vektora veliki mah, a to znači i u savremenoj fizici i matematici,

kako zbog svoje elegancije, tako i zbog velike brzine i kratkoće izračunavanja i izvođenja raznih relacija i veličina. Operator nabla je diferencijalni operator i simbolički vektor. On ima kako svojstva vektora, tako i diferencijalna svojstva. Nabla zahtijeva diferenciranje funkcije koja iza njega slijedi. Pravila će se iznositi postepeno. Zamjenom (36,2) u (36,1) dobija se

$$\text{grad } U = \nabla U, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36,3)$$

a to znači da skalar U treba umetnuti na prazna mjesta izraza (36,2) i izvršiti naznačenu operaciju. Jednačina (36,3) čita se: gradijent (od) U jednak je nabla (od) U.

Iznošenjem pravila postepeno će se pokazati vrlo važna svojstva operatora nabla. Upotrebljavaćemo ga redovno, kako u zasebnom metodu, tako i zajedno sa ostalim metodima. Naravno treba imati u vidu da je to formalni vektor, a istodobno je i simbol koji pretstavlja operaciju diferenciranja — on je, dakle, i diferencijalni operator.

§ 37. — OSNOVNE FORMULE TEORIJE GRADIJENTA

a). — **Gradijent zbira.** — Neka su data dva skalara U i V. Treba naći grad (U + V). Prema definiciji i osnovnim pravilima diferenciranja je

$$\text{grad } (U + V) = \mathbf{i}\frac{\partial (U + V)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial (U + V)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial (U + V)}{\partial z}$$

ili

$$\text{grad } (U + V) = \text{grad } U + \text{grad } V. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37,1a)$$

Simbolično:

$$\nabla (U + V) = \nabla U + \nabla V. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37,1b)$$

Gradijent zbira skalara jednak je zbiru gradijenta pojedinih skalara — sabiraka.

Iz (37,1b) se vidi da je došla do izražaja **linearnost** operatora ∇, jer važi distributivni zakon.

Jednačine (37,1) pokazuju da se vektorska polja sabiraju, a to je vrlo važna osobina, iako formule izgledaju jednostavne i skoro razumljive kao običan identitet.

b). — **Gradijent proizvoda.** — Neka su data dva skalara U i V. Treba naći grad (UV). Prema definiciji je

$$\operatorname{grad}(UV) = i\frac{\partial(UV)}{\partial x} + j\frac{\partial(UV)}{\partial y} + k\frac{\partial(UV)}{\partial z}, \text{ ili}$$

$$\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U. \quad (37,2a)$$

Analogno diferenciranju (ali ne identično) operaciju operatorom ∇ nad proizvodom obavimo na taj način što ćemo ∇ rastaviti na sabirke, koji se odnose na dotične faktore proizvoda, na koje i djejstvuje. Tako je u ovom slučaju

$$\triangle = \triangle_u + \triangle_v . \quad (37,2b)$$

gdje operator ∇_u djestvuje na U, a operator ∇_v djestvuje na V. Faktor na koji operator ne djejstvuje izlazi pred operator ∇ sa indeksom, kao konstanta uz promjenljivu pred diferencijalni znak.

Zamjenom se, dakle, dobija

$$\nabla(UV) = (\nabla_u + \nabla_v)(UV) = \nabla_u(UV) + \nabla_u(UV) =$$
$$= U\nabla V + V\nabla . U \quad (37,2c)$$

Ista operacija se može prikazati i na taj način da se faktori smatraju uzastopno konstantni i rad se obavi analogno diferenciranju.

Iz rezultata se vidi da gradijent proizvoda ima oblik analogan diferencijalu proizvoda.

c). — **Gradijent složene funkcije**

Treba naći grad f(U). Prema definiciji je

$$\operatorname{grad} f(U) = i\frac{\partial f(U)}{\partial x} + j\frac{\partial f(U)}{\partial y} + k\frac{\partial f(U)}{\partial z}, \quad \text{ili}$$

$$\operatorname{grad} f(U) = f'(U) \operatorname{grad} U. \quad (37,3a)$$

Simbolično:

$$\nabla f(U) = f'(U)\nabla U. \quad (37,3b)$$

Gradijent funkcije skalara U jednak je proizvodu iz izvoda te funkcije po U i gradijenta tog skalara U.

d) — **Gradijent apsolutne vrijednosti radius-vektora**

Treba naći grad r. Prema definiciji je

$$\operatorname{grad} r = \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k = \frac{x}{r} i + \frac{y}{r} j + \frac{z}{r} k,$$

ili

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (37,4)$$

§ 38. — SIMBOLIČKI OBLIK IZVODA SKALARA U DATOM PRAVCU

Primjenjujući operator ∇ napisaćemo relaciju (35,2) u simboličnom obliku, što je važno i zbog česte upotrebe i daljih svojstava izvoda skalara po određenom pravcu.

Ima se, dakle,

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{dU}{dl} = l_1 \operatorname{grad} U = l_1 \nabla U. \quad (38,1)$$

Stavi li se

$$dr = dl \,.\, l_1, \text{ dobija se}$$

$$dU = dr\nabla U \quad (38,2a)$$

Ovdje se formalni skalarni »proizvod« dr ∇ ili i proizvod $l_1 \nabla$ može takođe smatrati kao simbol, koji označava skalarno diferenciranje, pa se može staviti

$$dU = (dr\,\nabla)U. \quad (38,2b)$$

Relacije (38) su samo simbolični izraz relacija (35,2), koji je veoma važan pri izračunavanjima i transformacijama raznih formula.

Zadaci:

1. — Dokazati da je grad $(\mathbf{a}\mathbf{r}) = \mathbf{a}$, gdje je $\mathbf{a}$ konstantni vektor.

2. — Izračunati: a) grad r^{10}, b) grad r^n, c) grad $\sqrt{r}$.

Odg.: a) $10 r^8 \mathbf{r}$, b) $n r^{n-2} \mathbf{r}$; c) $\dfrac{\mathbf{r}}{2r\sqrt{r}}$

3. — Izračunati grad $\dfrac{n}{r}$, gdje je n konstanta.

Odg.: $-\dfrac{n\,\mathbf{r}}{r^3}$.

4. — Izračunati grad $[(\mathbf{a}\times\mathbf{r})(\mathbf{b}\times\mathbf{r})]$, gdje su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ konstantni vektori.

Odg.: $(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{b}+(\mathbf{b}\times\mathbf{r})\times\mathbf{a}$.

5. — Izračunati grad $\ln(x+y)$, gdje su x i y koordinate tačke.

Odg.: $\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{x+y}$.

§ 39. — VEKTORSKO POLJE

Vektorsko polje je okarakterisano nekom vektorskom funkcijom $\mathbf{v}$. To znači da je vektor $\mathbf{v}$ poznat u svim tačkama polja, odnosno da se može izračunati na osnovu izvjesnih podataka.

Poslužimo li se Descartes-ovim koordinatnim sistemom polje će biti dato kada se u potpunosti zna vektor

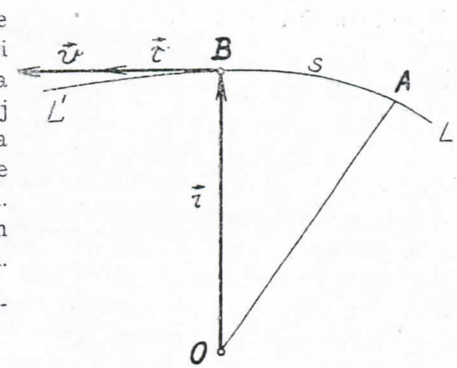
$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k},$$

ili kada su date projekcije vektora $\mathbf{v}$ kao skalarne funkcije koordinata x, y, z tačke u kojoj se polje traži.

Već smo kod gradijenta naišli na primjer vektorskog polja: $\mathbf{v} =$ grad U.

Vektorske linije. Za poznavanje vektorskog polja važno je znati takve krive linije, koje u svakoj tački imaju pravac vektora polja. Takve linije se nazivaju **linije polja** ili **vektorske linije**. Pod pravcem krive linije

podrazumijeva se pravac tangente te linije u posmatranoj tački. Znači da je vektor polja tangencijalan na vektorskoj liniji u posmatranoj tački. Na sl. 42 je LL' vektorska linija vektorskog polja. Neka se luk s te linije mjeri od tačke A. U tački B vektor $\mathbf{v}$ je orijentisan duž tangente na vektorskoj liniji.



Sl. 42.

Izvešćemo diferencijalnu jednačinu vektorskih linija.

Neka je $\mathbf{r}$ radius-vektor neke tačke B na vektorskoj liniji. Tačka B ima tekuće koordinate x, y, z. Ort tangente te linije u tački M je $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \vec{\tau}$. Ort $\vec{\tau}$ i vektor $\mathbf{v}$ su kolinearni, pa je njihov vektorski proizvod ravan nuli, odnosno

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{v} = 0, \qquad (39,1)$$

ili

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0. \qquad (39,2)$$

Ovo je u vektorskom obliku diferencijalna jednačina vektorskih linija.

Ova diferencijalna jednačina može se izraziti analitički. Poznato je da su projekcije dvaju paralelnih vektora proporcionalne među sobom, pa je

$$\frac{dx}{ds} : v_x = \frac{dy}{ds} : v_y = \frac{dz}{ds} : v_z, \text{ odnosno}$$

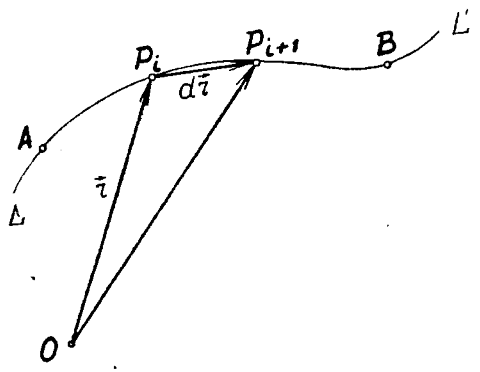
$$dx : dy : dz = v_x : v_y : v_z, \text{ ili}$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \qquad (39,3)$$

Relacija (39,3) pretstavlja sistem od dvije diferencijalne jednačine, koje treba integrirati da bi se našle vektorske linije. Kada se te dvije jednačine riješe dobiće se dvije proizvoljne konstante. Odavde dobijemo samo pravac vektora, a da se dobije njegova veličina pribjegava se obično grafičkim metodima. Vektorsko polje je mogućno posmatrati kao skalarno polje okarakterisano skalarem U i konstruisati zatim nivoske površine U=const. Veličina vektora se može pretstaviti i brojem linija. No kako se svaka tačka može uzeti kao polazna za konstrukciju vektorske linije, jasno je da se može pretpostaviti beskonačno mnogo vektorskih linija. Može se uzeti da je polje u cjelini ispunjeno tim linijama. Ta pretpostavka je neko vrijeme dominirala u fizici i to tako da su izvjesni fizičari te linije smatrali kao da postoje u stvarnosti, a ne da su to linije koje su samo pomoćno sredstvo. Materija je raspoređena drukčije, a ne tako kako su učili mehanicisti. U fizici je usvojeno da se uzima konačan broj tih linija u konačnom polju — u ograničenom dijelu polja. Obično fizičari usvajaju da se linije konstruišu takvom gustinom da je **broj linija**, koje prolaze kroz jediničnu površinu povučenu u nekoj tački normalno na vektor polja, **proporcionalan apsolutnoj vrijednosti toga vektora** (neki uzimaju da je broj linija jednak apsolutnoj vrijednosti vektora polja). Kako se vektor polja mijenja, te ima različite vrijednosti u raznim tačkama polja, to se i broj linija mijenja — linije su negdje gušće a negdje rjeđe raspoređene i to gdje je veličina vektora veća, tu će linije biti gušće raspoređene, a gdje je veličina vektora manja, tu se linije crtaju rjeđe. Ako je vektor u svim tačkama polja konstantan, tj. ako ima stalnu veličinu i pravac, onda će linije polja biti jednake gustine i biće paralelne među sobom. Vektorsko polje sa konstantnim karakterističnim vektorom, odnosno sa jednakom gustinom linija polja naziva se **homogeno polje.** Ako vektor pretstavlja silu onda se njegovo vektorsko polje naziva **polje sila.**

§ 40. — LINISKI INTEGRAL VEKTORA

Neka je dato vektorsko polje sa karakterističnim vektorom **v** i u polju kriva linija LL' (sl. 43). Uzmimo na toj liniji dvije tačke A i B



Sl. 43.

i označimo po liniji pozitivni smjer od A ka B. Izdijelimo luk AB na vrlo male djelove tako, da se pojedini dio $\widehat{P_iP_{i+1}}$ linije može aproksimativno zamijeniti pravoliniskim elementom $\overline{P_iP_{i+1}}$. Taj pravoliniski element možemo posmatrati kao vektor, pa ćemo ga označiti $\overrightarrow{P_iP_{i+1}} = \Delta s_i$.

Liniski integral vektora v duž krive linije AB naziva se granična vrijednost sume skalarnih proizvoda vektora v_i i elementa Δs_i kada broj n tih proizvoda teži beskonačnosti, a veličina elementa teži nuli. Naravno ta granična vrijednost je uopšte konačna. To se može napisati na slijedeći način:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v_i \Delta s_i = \int_{AB} v\, d s \qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (40,1)$$

Ovaj integral se može napisati i u drugom obliku. Iz slike se vidi da je ds = dr, pa je

$$\int_{AB} v\, d s = \int_{AB} v\, d r \, . \qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (40,2)$$

Liniski integral vektora po zatvorenoj krivoj liniji (konturi) naziva se cirkulacija vektora duž te konture i mahom se obilježava

$$\oint_C v ds, \qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (40,3)$$

gdje C označava konturu duž koje se uzima integral.

Ako vektor pretstavlja neku silu, a kriva AB pretstavlja trajektoriju tačke, onda je liniski integral takvog vektora duž te trajektorije rad sile na putu koji napadna tačka pređe, odnosno

$$\int_{AB} \mathbf{F} d\mathbf{r} = A. \qquad . \ . \ . \ . \ . \quad (40,4)$$

Prema izloženom, liniski integral zavisi ne samo od krajnjih tačaka, među kojima se po liniji uzima, **nego zavisi i od puta,** od oblika linije među tim dvjema tačkama. To znači da liniski integral zavisi i od izbora početne i završne tačke puta po kojem se uzima. To je jasno i prema činjenici da vektor **v** uopšte ima različite vrijednosti u raznim tačkama polja, pa svaka promjena puta među A i B znači i promjenu vektora **v**, odnosno promjenu njegovih komponenata, ukoliko se radi o njegovom razlaganju, a to znači i promjenu liniskog integrala.

Da vidimo sada što će biti ako se uzme suprotan smjer integriranja. Lako je uvidjeti da se u tom slučaju izmijeni znak elementa Δs_i, a vektor v_i ostaje sa ranijim znakom, pa je

$$\int_{BA} vds = -\int_{AB} vds, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40{,}5)$$

ili pri integriranju u suprotnom smjeru duž iste linije i među istim krajnjim tačkama mijenja se znak liniskog integrala, a njegova veličina ostaje nepromijenjena.

Ako je C neka tačka na liniji po kojoj se integriranje vrši, onda je

$$\int_{AB} vds = \int_{AC} vds + \int_{CB} vds. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40{,}6)$$

Postoje vektorska polja, koja čine izuzetak od ovih pravila, što ćemo iznijeti u slijedećem paragrafu.

Izračunavanje liniskog integrala. — Liniski integral izračunava se u Descartes-ovim koordinatama na taj način, što se dotični vektori pretstave pomoću koordinata, pa je

$$\int_{AB} v\mathbf{dr} = \int_{AB} (v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k})\,(dx.\mathbf{i}+dy.\mathbf{j}+dz.\mathbf{k}) =$$

$$= \int_{AB} (v_x dx+v_y dy+v_z dz) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40{,}7)$$

Prema tome, izračunavanje integrala $\int v\mathbf{dr}$ se svodi na izračunavanje krivoliniskog integrala skalarnih veličina, što je poznato iz integralnog računa. Vrlo često se, radi lakšeg izračunavanja, jednačina dotične krive linije uzima u parametarskom obliku, pa se integral svodi na obični, koji se lako izračunava.

§ 41. — POTENCIJALNI VEKTOR. POTENCIJALNO POLJE. POTENCIJAL

Potencijalni vektor je takav vektor, koji se može pretstaviti kao gradijent nekog skalara.

Polje potenicijalnog vektora naziva se potencijalno polje.

Skalar čiji je gradijent potencijalni vektor naziva se potencijal.

Osim ovih definicija upotrebljavaju se i druge na razne načine. Na pr. najprije se definiše potencijalno polje na osnovu osobina koje posjeduje, a zatim ostalo, što će se vidjeti iz daljeg izlaganja.

Dakle, ako je

$$\mathbf{G} = \text{grad } U \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41{,}1)$$

onda se vektor **G** naziva potencijalni vektor, a skalar U potencijal.

Proučimo svojstva potencijalnog vektora i potencijalnog polja.

Da vidimo kakva su svojstva liniskog integrala potencijalnog vektora.

Uopšte uzevši, krivoliniski integral zavisi od puta među početnom i krajnjom tačkom među kojima se računa, o čemu je bilo riječi u prošlom paragrafu. Posmatra li se izraz (40,2), odmah se dođe do zaključka da to pravilo ima izuzetaka. Integral se može odmah izračunati i zamijeniti gornja i donja granica kod običnog integrala u slučaju kada bi podintegralni izraz bio totalni diferencijal jednoznačne funkcije. Znači, krivoliniski integral **ne zavisi** od puta, od oblika krive linije među posmatranim tačkama, u onom slučaju kada je podintegralni izraz totalni diferencijal. Onda se može jednostavno pisati

$$\int_{AB} v\mathbf{dr} = \int_{AB} dU = U_B - U_A \; , \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41{,}2)$$

gdje je U funkcija čiji je totalni diferencijal podintegralni izraz.

Uzme li se umjesto vektora **v** potencijalni vektor **G**, dobija se

$$\int_{AB} \mathbf{G}\mathbf{dr} = \int_{AB} \text{grad}U\mathbf{dr}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41{,}3)$$

Međutim prema važnoj formuli (35,3) vidi se da je ovdje podintegralni izraz baš totalni diferencijal, pa je

$$\int_{AB} \mathbf{G}\mathbf{dr} = \int_{AB} dU = U_B - U_A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41{,}4)$$

To znači da **krivoliniski integral potencijalnog vektora ne zavisi od puta ili oblika krive među krajnjim tačkama, ili liniski integral vektora grad U duž ma koje krive linije, koja spaja dvije tačke, jednak je razlici vrijednosti funkcije U u tim tačkama.**

Prema (40,3) odmah se zaključuje da je **cirkulacija potencijalnog vektora duž zatvorene krive linije jednaka nuli:**

$$\oint_C \mathbf{G}d\mathbf{r} = 0. \qquad \qquad (41,5)$$

Važi i obrnuta teorema:

Ako je liniski integral nekog vektora duž ma kakve zatvorene krive linije jednak nuli, onda je taj vektor gradijent nekog skalara.

Napominjemo da je uslov za (41,4) i (41,5) jednoznačnost funkcije.

Uzmemo li iz fizike takav primjer da mjesto vektora **G** bude sila **F**, dobijaju se slijedeće relacije:

na putu od 1 do 2:

$$\int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{r} = A_2 - A_1, \qquad \qquad (41,4')$$

a po zatvorenoj konturi

$$\oint \mathbf{F}d\mathbf{r} = 0, \qquad \qquad (41,5')$$

ili: **u potencijalnom polju rad sila toga polja na putu među dvjema proizvoljnim tačkama uopšte ne zavisi od oblika puta, nego samo od položaja tih tačaka. Rad sile potencijalnog polja po zatvorenom putu jednak je nuli.** Takva sila se naziva **konzervativna sila.** Prema tome konzervativna sila je gradijent neke funkcije.

Navedena činjenica takođe može poslužiti kao polazna tačka za definiciju potencijalnog polja i potencijalnog vektora.

Kako je u potencijalnom polju uopšte **v** = grad U, vidi se da će se vektor **v** poklapati sa normalama na nivoskoj površini, pa se može zaključiti slijedeće:

u potencijalnom polju vektorske linije su normalne na nivoskim površinama funkcije U.

§ 42. — VEZA MEĐU KOMPONENTAMA POTENCIJALNOG VEKTORA

Dato je vektorsko polje okarakterisano vektorom **G**.* Treba naći analitički izraz uslova da to polje ima potencijal. Prema definiciji je

$$\mathbf{G} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Odavde je

$$G_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad G_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad G_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad \qquad (42,1)$$

gdje su komponente duž osa Descartes-ovog koordinatnog sistema.

Diferenciranjem se dobija:

$$\frac{\partial G_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial G_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \text{odnosno}$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial y} = \frac{\partial G_y}{\partial x}. \qquad \qquad (42,2)$$

Prema tome tražena veza među komponentama potencijalnog vektora je:

$$-\frac{\partial G_x}{\partial y} + \frac{\partial G_y}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial G_y}{\partial z} + \frac{\partial G_z}{\partial y} = 0,$$

$$-\frac{\partial G_z}{\partial x} + \frac{\partial G_x}{\partial z} = 0. \qquad \qquad (42,3)$$

Ovo su takođe potrebni i dovoljni uslovi koje mora ispuniti vektor **G**, koji karakteriše polje, pa da bude potencijalni vektor, odnosno uslovi da dotično polje ima potencijal. Ako uslovi (42,3) nisu ispunjeni, dotično polje nema potencijala.

Složi li se slijedeći vektor

$$\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_x}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_y}{\partial y}\right)\mathbf{k}, \qquad (42,4)$$

vidi se da je invarijantan (u slučaju potencijalnog polja ravan je nuli). Vektor (42,4), gdje se umjesto **G** uzima ma koji vektor **v**, ima vrlo veliku važnost u teoriji vektora, odnosno u fizici i tehnici.

Kasnije ćemo na drugi način proučiti taj vektor, te iznijeti i objasniti uslove (42,3).

§ 43. — IZVOD VEKTORA U DATOM PRAVCU

U § 35 smo vidjeli da se kod izvoda skalarne funkcije u određenom pravcu dobija gradijent tog skalara, odnosno vektor, kao jedan od faktora izvoda. Analogno tom postupku, kada bi se proučavale promjene vektora i uopšte tražili izvodi, došlo bi se do komplikovanijih veličina i funkcija. Dok se kod skalara došlo do vektora, kod vektora bi se došlo do tenzora. To važi za izvod uopšte. A nas ovdje interesuje **samo izvod vektora u određenom pravcu.**

Neka je dat vektor $\mathbf{v}$ koji karakteriše vektorsko polje. Treba naći izvod tog vektora u pravcu $\mathbf{l}$ u nekoj tački A. Iz tačke A se povuče ort $\mathbf{l}_1$ paralelan sa $\mathbf{l}$. Na otstojanju Δl u tom pravcu uzme se tačka B. Vrijednosti vektora u tim tačkama su respektivno: $\mathbf{v}(\mathbf{r}_A)$ i $\mathbf{v}(\mathbf{r}_B)$.

Onda je

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}_B) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_A)}{\Delta l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43,1)$$

Radius-vektori su funkcije od koordinata x, y, z, pa je na osnovu diferenciranja složenih funkcija

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\frac{dz}{dl}.$$

No kako je $\frac{dx}{dl} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dl} = \cos\beta$, $\frac{dz}{dl} = \cos\gamma$, gdje su α, β, γ uglovi između vektora $\mathbf{l}$ i koordinatnih osa, biće

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\cos\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43,2)$$

Dalje se može izvršiti slijedeća transformacija

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} = (\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma)\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{v}.$$

Prema već navedenim oznakama može se za izvod vektora u datom pravcu definitivno pisati:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} = (\mathbf{l}_1 \nabla)\mathbf{v}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43,3)$$

ili izvod vektorske funkcije v u datoj tački vektorskog polja u datom pravcu l jednak je simboličkom proizvodu tog vektora v i diferencijalnog operativa $\mathbf{l}_1 \nabla$.

Sada ćemo relaciju (43,3) uopštiti na taj način, što ćemo umjesto jediničnog vektora $\mathbf{l}_1$ uzeti ma koji vektor $\mathbf{u}$ i analizirati izraz $(\mathbf{u}\ \nabla)\ \mathbf{v}$. Odmah se vidi da je ova operacija složenija i da se najlakše obavlja simboličkim metodom. Tako se skalarni proizvod vektora $\mathbf{u}$ i simboličkog vektora ∇ može napisati

$$\mathbf{u}\nabla = u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}. \quad . \; . \; . \quad (43,4)$$

Konvencionalno usvojimo da se vektor $\mathbf{v}$ može pripisivati sa desne strane, pa ćemo dobiti vrlo važnu relaciju

$$(\mathbf{u}\ \nabla)\mathbf{v} = u_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + u_y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + u_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad . \; . \; . \quad (43,5)$$

Ako je $\mathbf{l}_1$ ort vektora $\mathbf{u}$, biće

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = (\mathbf{l}_1 u \nabla)\mathbf{v} = u(\mathbf{l}_1\nabla)\mathbf{v} = u\left(\cos\alpha\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right),$$

i definitivno

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = u\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43,6)$$

Dakle, izraz $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}$ jednak je izvodu vektora v u pravcu vektora u pomnoženom veličinom vektora u iz zagrade.

Ako se umjesto vektora $\mathbf{u}$ uzme $d\mathbf{r}$, biće

$$(d\mathbf{r}\ \nabla)\mathbf{v} = dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \text{ a odavde}$$

$$(d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v} = d\mathbf{v}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43,7)$$

Ova formula je vrlo važna i često se primjenjuje kod raznih zadataka i izračunavanja.

Zadaci:

1. — Dokazati da je $(\vec{\tau}\nabla)\vec{\tau} = \frac{\mathbf{n}}{R}$, gdje je $\vec{\tau}$ ort tangente, **n** ort glavne normale, R radius krivine neke krive.

2. — Izračunati izraz $(m\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r}$, gdje je **a** konstantan vektor.

Odg.: m**a**.

§ 44. — VEZA MEĐU TOTALNIM I PARCIJALNIM IZVODOM PO VREMENU

Data je neka skalarna funkcija $f = f(x, y, z, t)$, gdje su i koordinate x, y, z takođe funkcije od t. Neka se tačka A (x, y, z) kreće brzinom **v**. Totalni izvod po vremenu t je

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z .$$

Prema § 35 je

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla f \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (44{,}1)$$

Totalni izvod $\frac{df}{dt}$ naziva se takođe i **supstancijalni** ili **individualni** izvod funkcije f po t, jer se lokalna i konvektivna promjena izražavaju posebnim sabircima. Parcijalni izvod po vremenu $\frac{\partial f}{\partial t}$ naziva se još **lokalni izvod f po t.**

Analogno se dobija i za izvod vektorske funkcije. Neka je **u** (x, y, z, t) ta složena vektorska funkcija, gdje su x, y, z funkcije od t.

Jasno je da je

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (44{,}2)$$

Članovi $\mathbf{v}(\nabla f)$ i $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}$ nazivaju se **konvektivni** članovi, jer prikazuju kretanje koje je vezano sa prenošenjem — konvekcijom djelića kontinuuma koji se proučava.

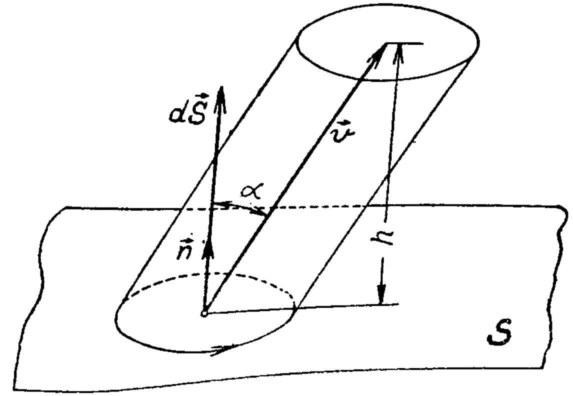
Lokalna promjena $\frac{\partial f}{\partial t}$ kod stacioniranih strujanja jednaka je nuli, a konvektivna promjena postoji i kod stacioniranih strujanja.

§ 45. — FLUKS VEKTORA

Neka vektor **v** karakteriše neko vektorsko polje. Taj vektor može pretstavljati razna kretanja materije, na pr. brzinu kretanja tečnosti, električnu struju itd., uglavnom kretanje nekog fluida, koji se smatra kao kontinuum, što je naravno grubo pretstavljanje s obzirom na mikroskopsko pretstavljanje. Ovdje se pod fluidom podrazumijeva tečnost ili fiktivna tečnost kao uopštavanje raznih oblika kretanja materije proučavanih makroskopski, gdje se ne uzima u obzir diskretna struktura. Za razne zadatke ovaj metod zadovoljava, bez obzira na apstrahovanje mnogih osobina materije.

Uopšte uzevši vektor **v** je promjenljiv — u raznim tačkama ima različiti pravac i vrijednost. Specijalan slučaj proticanja fluida, koji se lako proučava, je kada je vektor **v** konstantan, odnosno kada je vektorsko polje homogeno.

Treba doznati koliko fluida u jedinici vremena proteče kroz datu površinu. Opšti slučaj varijabilnosti vektora **v** u prostoru proučava se pomoću specijalnog slučaja tako što se uzme elementarni dio površine kroz koju tečnost protiče, pa se zbog vrlo malih dimenzija te elementarne površine može uzeti da je na tako maloj površini vektor **v** konstantan, jer se pretpostavlja da je vektor kontinualna funkcija. Neka je takva elementarna površina $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, gdje je **n** pozitivna normala. Obično se radi lakšeg računanja pretpostavlja da je elementarna površina ili paralelogram ili krug. Naravno zbog beskonačno malih dimenzija uzećemo da je ta elementarna površina ravna (sl. 44). Jasno je



Sl. 44.

da će u jedinici vremena proteći količina tečnosti jednaka zapremini paralelepipeda (odnosno cilindra) čija je baza dS, a bočna ivica v. Označimo li tu količinu sa d Φ, biće

$$d\Phi = dS \cdot h = vdS\cos\alpha \quad . \; . \; . \quad (45{,}1)$$

Kako se i baza može pretstaviti vektorom normalnim na samoj bazi, a u smjeru pozitivne normale, dobija se

$$d\Phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dS = \mathbf{v}d\mathbf{S}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45{,}2)$$

jer je (45,1) skalarni proizvod vektora brzine i vektora orijentisane površine kroz koju tečnost (fluid) protiče.

Odmah se vidi da je dΦ skalarna veličina i da pretstavlja protok tečnosti (fluida) kroz beskonačno malu površinu (kroz element površine).

Naravno, neposredna aproksimacija, koju smo naveli uzimanjem diferencijala površine, može se zamijeniti uzimanjem diferencija i traženjem granične vrijednosti dotičnih izraza u što se ovdje nećemo upuštati.

Veličina dΦ naziva se **elementarni fluks vektora v** ili **fluks vektora v kroz element površine dS**. Može se nazvati i diferencija fluksa vektora kroz površinu.

Onda je fluks vektora **v** kroz cjelokupnu posmatranu površinu S očevidno skalarna veličina Φ, koja se dobija integriranjem izraza (45,2). Treba imati u vidu kakav je to integral, naime da se dobija kao granična vrijednost $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \Delta S_i$, kada dakle i $\Delta S_i \to 0$. Dakle, ukupan fluks vektora **v** kroz površinu S je

$$\Phi = \int_S \mathbf{v}d\mathbf{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45{,}3a)$$

Ovo je površinski integral, koji se, kao što je poznato, svodi na dvostruki integral podintegralne funkcije, koja se nalazi uz dS. Integral se računa po cjelokupnoj površini S.

Iz (45,3a) se dobija

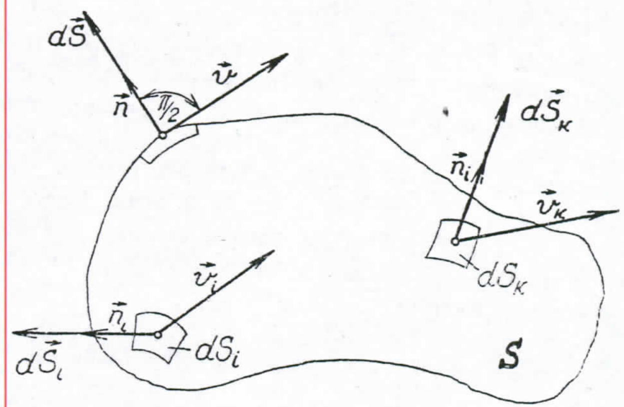
$$\Phi = \iint_S v_n dS = \iint_S [v_x\cos(\mathbf{n}, x) + v_y\cos(\mathbf{n}, y) + v_z\cos(\mathbf{n}, z)]dS. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45{,}3b)$$

U izvođenjima i formulama upotrebljavaćemo i za površinski integral samo jedan integralni znak kao u (45,3a), prosto zbog praktičnosti u pisanju, jer dS jasno pokazuje da se ima posla sa površinom.

Fluks vektora kroz zatvorenu površinu. — Ako je površina zatvorena, tj. ako obuhvata određenu zapreminu, onda ćemo konvencionalno usvojiti da **spoljašnja normala bude pozitivna**, a fluks vektora **v** iznutra napolje kroz zatvorenu površinu S označavaćemo sa

$$\Phi = \oint_S \mathbf{v}d\mathbf{S} = \oint_S v_n dS. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (45{,}4)$$

Pošto zatvorena površina obuhvata izvjesnu zapreminu, interesantno je posmatrati kakav može biti fluks kroz tu površinu, jer je vektor **v** uopšte uzevši varijabilan, — različit u raznim tačkama. Neka je ta zatvorena površina S (sl. 45), a vektor **v** neka bude vektor brzine. U tački



Sl. 45.

elementa dS_i te površine ugao među vektorom **v** i pozitivnom normalom je tup, pa je onda fluks negativan. To znači da u posmatranoj tački, odnosno u posmatranom dijelu površine, gdje vektor zahvata tup ugao sa pozitivnom normalom na površini, tečnost utiče u zapreminu, koju obuhvata posmatrana zatvorena površina, tj. fluks vektora je od izvana unutra. Ali u tački nekog elementa dS_k ugao među vektorom **v** i pozitivnom normalom je oštar, pa je fluks pozitivan. To znači da kroz posmatranu tačku, odnosno element površine, tečnost ističe iz ograničene zapremine. U tačkama površine, gdje vektor **v** tangira dotičnu površinu, ugao među tim vektorom i normalom je $\frac{\pi}{2}$, pa je fluks toga vektora jednak nuli. Kroz takve tačke tečnost niti utiče, niti ističe.

Prema tome fluks vektora može imati sve vrijednosti, odnosno može biti manji od nule, jednak nuli ili veći od nule. Kada je $\Phi = 0$ to znači da u posmatranu ograničenu zapreminu utiče tačno onoliko tečnosti, koliko i ističe. Kada je $\Phi > 0$, onda iz ograničene zapremine više tečnosti ističe, nego što u nju spolja utiče, a to znači da se u toj zapremini nalaze **izvori** tečnosti. Kada je pak $\Phi < 0$, onda u tu zapreminu više tečnosti utiče spolja, nego što ističe iz zapremine napolje, a to znači da se u toj zapremini nalaze ponori tečnosti (ili »negativni izvori«).

Dakle, **integral** $\Phi = \oint_S$ **vdS pretstavlja mjeru izdašnosti izvora koji se nalaze u zapremini ograničenoj zatvorenom površinom S.**

To je u slučaju kada je **v** vektor brzine kretanja tečnosti. Ali i uopšte dotični integral pretstavlja mjeru izdašnosti izvora zapremine, obuhvaćene zatvorenom površinom, odnosno na osnovu toga integrala može se doznati priroda polja u toj zapremini.

Ranije smo vidjeli da je »broj« vektorskih linija proporcionalan vektoru polja, pa fluks Φ može biti i mjera za »broj« vektorskih linija, koje »nastaju« ili »nestaju« u toj zapremini. One tačke gdje vektorske linije »izviru« nazivaju se izvori, a tačke u kojima linije »poniru« nazivaju se ponori. Uzmimo primjer iz elektriciteta. Pri crtanju vektorskih linija za elektrostatičko polje usvojeno je da se linije orijentišu od pozitivnih opterećenja ka negativnim. Pozitivna opterećenja, odakle linije počinju, mogu se smatrati kao »izvori«, a negativna opterećenja kao »ponori« (ili »negativni izvori«).

Fluks konstantnog vektora kroz zatvorenu površinu.

Neka je vektor **c** konstantan. Fluks toga vektora kroz zatvorenu površinu biće

$$\Phi = \oint_S \mathbf{c}dS.$$

Konstanta se može iznijeti pred integralni znak, pa je

$$\Phi = \mathbf{c}\oint_S dS = 0, \quad \ldots\ldots \quad (45{,}5)$$

jer je integral vektora zatvorene površine jednak nuli.

Drugim riječima: **fluks konstantnog vektora kroz zatvorenu površinu jednak je nuli.**

Fluks radius-vektora kroz zatvorenu površinu. — Ako je vektorsko polje okarakterisano umjesto vektorom **v** radius-vektorom **r**, onda se dobija

$$\Phi = \oint_S \mathbf{r}dS.$$

Bez obzira gdje se nalazi početak od kojeg se računaju razni radius-vektori, uvijek se iz tog početka kao tjemena mogu konstruisati piramide ili konusi elementarnih baza dS, pa je skalarni proizvod **r**dS jednak trostrukoj zapremini te elementarne piramide ili kupe, odnosno

$$\mathbf{r}dS = 3dV. \quad \ldots\ldots \quad (45{,}6)$$

Prema tome je

$$\Phi = 3V, \quad \ldots\ldots \quad (45{,}7)$$

ili **fluks radius-vektora kroz zatvorenu površinu jednak je trostrukoj zapremini koju ta površina obuhvata.** Očevidno je da se radius-vektor odnosi na tačke te površine.

§ 46. — DIVERGENCIJA

U prethodnom paragrafu smo vidjeli da fluks vektora kroz zatvorenu površinu prikazuje polje u cjelokupnoj zapremini, obuhvaćenoj dotičnom površinom. Fluks služi kao kvantitativna mjera polja u cjelokupnoj dotičnoj zapremini. Međutim, da bi se polje bolje upoznalo potrebno je naći neku mjeru za kvantitativne karakteristike polja ne samo u cjelokupnoj zapremini, nego u **pojedinim tačkama** vektorskog polja. Ovdje se podrazumijeva tačka u fizičkom smislu, jer odražava fizičku realnost bez velikog apstrahovanja (dio neke tečnosti, toplote, elektriciteta itd.), pa nisu potrebne ekskluzivističke apstrakcije, ali se i na tačke u fizičkom pogledu primjenjuju matematičke operacije analogno primjenama na matematičke tačke. Dok je apstraktna tačka u matematičkom smislu bez dimenzija, tačka u fizičkom smislu ima dimenzije, iako vrlo male, relativno čak i beskonačno male.

Potražimo kolika je izdašnost polja u nekoj tački. Lako je uvidjeti da se tražena izdašnost dobija kada se fluks vektora dotičnog polja podijeli sa zapreminom i nađe granična vrijednost toga količnika kada zapremina postaje beskonačno mala. Neka je V zapremina koju obuhvata površina S. Onda je srednja izdašnost polja u toj tački.

$$\frac{\oint_S \mathrm{v} dS}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46,1)$$

Ako se površina smanjuje tako da $V \rightarrow o$, onda će (46,1) uopšte imati neku graničnu vrijednost. Ta granična vrijednost naziva se **divergencija polja** ili **divergencija vektora v**. Dakle,

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathrm{v} dS}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46,2)$$

Divergencija polja pretstavlja izdašnost izvora polja u beskonačno maloj zapremini, koja okružava jednu tačku (izdašnost izvora polja u tački). Ili divergencija vektora u datoj tački je granična vrijednost, kojoj teži količnik iz fluksa vektora kroz proizvoljnu zatvorenu površinu i zapremine koju ta površina obuhvata kada ta zapremina teži nuli i obuhvata dotičnu tačku.

Iz relacije (37,2) se vidi da su i brojilac i imenilac skalarne veličine, pa je **divergencija vektora skalarna veličina.** To znači da je vektorsko polje preko divergencije (izdašnosti izvora) povezano sa skalarnim poljem.

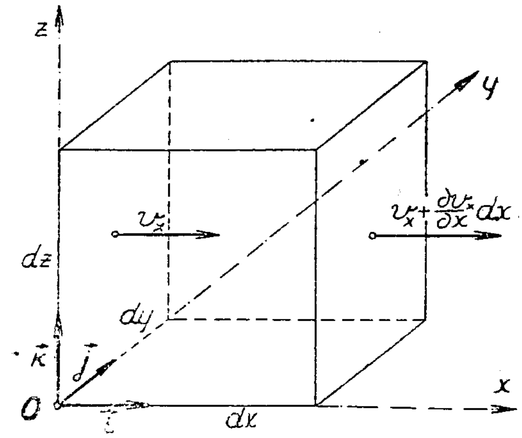
Divergencija je definisana bez ikakvog koordinatnog sistema, a to znači da **divergencija ne zavisi od koordinatnog sistema. Divergencija je invarijanta polja.** Divergencija pretstavlja sliku fizičke realnosti, pa koordinatni sistem kao pomoćno sredstvo pri proučavanju ne može na nju uticati, jer je ona vezana sa dotičnim poljem, bez obzira da li ćemo mi primijeniti koordinatni sistem. Divergencija je prema definiciji ravna gustini »tečnosti« izvora.

Lako je uvidjeti da je **divergencija konstantnog vektora ravna nul:**

Maxwell je divergenciju sa negativnim znakom nazivao **konvergencija vektora,** a iz razloga što nije upotrebljavao pravilo množenja koordinatnih ortova ii = + 1, nego pravilo iz takozvane teorije kvaterniona **ii** = — 1.

Analitički izraz divergencije

U tački polja koja nas interesuje uzmemo početak pravouglog koordinatnog sistema. Konstruišimo elementarni paralelepiped sa ivicama duž osa i sa jednim tjemenom u koordinatnom početku (sl. 46). Dužine ivica



Sl. 46.

tog paralelepipeda su, dakle, dx, dy, dz. Izračunaćemo fluks kroz svih šest strana tog paralelepipeda. Ulazni fluks je negativan, a izlazni pozitivan.

Označimo li sa $d\Phi_1$ fluks kroz stranu dydz, koja se nalazi u ravni yz, biće

$$d\Phi_1 = - v_x dydz.$$

Fluks je ulazni, pa je zbog toga uzet sa negativnim znakom.

Fluks kroz stranu paralelnu prvoj, a na otstojanju dx, označimo sa

$d\Phi_2$, pa će biti

$$d\Phi_2 = + (v_x + \varepsilon)\ dydz.$$

Uopšte uzevši veličina ε se ne može zanemariti, jer je to priraštaj komponente v_x na dužini dx. Priraštaj na jedinicu dužine je $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, pa je priraštaj na dužini dx:

$$\varepsilon = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx.$$

Zamjenom se dobija

$$d\Phi_2 = +\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right) dydz.$$

Isti se izraz može dobiti i razvijanjem funkcije $(v_x)_{x+dx}$ u Taylorov red uzevši samo prva dva člana.

Na taj način fluks vektora **v** kroz obje paralelne strane dydz biće

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdydz.$$

Analogno se izračunava fluks kroz ostale strane, odnosno fluks kroz strane dxdz biće $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ dxdydz, a fluks kroz strane dxdy: $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ dxdydz.

Sabiranjem se dobija fluks kroz elementarni paralelepiped:

$$d\Phi = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Odavde je

$$\frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

odnosno divergencija vektora **v** izražena u Descartes-ovom koordinatnom sistemu:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad \ldots \quad (46.3)$$

Vektorsko polje za koje je divergencija jednaka nuli naziva se solenoidno polje. Takvo polje nema ni izvora ni ponora. Za njega je, dakle,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad \ldots \quad (46,4)$$

Kasnije ćemo tretirati izvjesna svojstva solenoidnog polja.

§ 47. — SIMBOLIČNO PRETSTAVLJANJE DIVERGENCIJE

Iz izraza za divergenciju

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

može se zaključiti da je to skalarni proizvod dvaju vektora sa komponentama veličina: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ i v_x, v_y, v_z, naravno pod uslovom da se navedeni simboli mogu smatrati kao »veličine« komponenata. Prema tome je

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}), \text{ ili}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}. \quad \ldots \ldots \quad (47,1)$$

Ovo je vrlo važna relacija, koja pokazuje da je **divergencija vektora v jednaka skalarnom »proizvodu« operatora nabla i vektora v.** Elegancija navedene notacije je očigledna, a praktičnost će se uvidjeti u daljoj primjeni.

§ 48. — OSNOVNE FORMULE TEORIJE DIVERGENCIJE

a). — **Divergencija zbira.** — Neka su data dva vektora **u** i **v**. Treba naći div (**u** + **v**). Prema definiciji i osnovnim pravilima vektorske algebre i diferenciranja je

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{\partial (\mathbf{u} + \mathbf{v})_x}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{u} + \mathbf{v})_y}{\partial y} + \frac{\partial (\mathbf{u} + \mathbf{v})_z}{\partial z}.$$

Projekcije geometriskog zbira vektora sabiraju se algebarski, pa je

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_x = u_x + v_x \text{ itd.}$$

Zamjenom se dobija

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \text{ ili}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad \ldots \ldots \quad (48,1a)$$

Divergencija zbira jednaka je zbiru divergencija pojedinih sabiraka.

Ista formula se može izvesti i na osnovu prve definicije divergencije.

Ima se $\operatorname{div}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lim\limits_{V\to 0}\dfrac{\oint\limits_S (\mathbf{u}+)\mathbf{v}dS}{V}$. Integral sadrži skalarni proizvod $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\,d\mathbf{S} = \mathbf{u}d\mathbf{S} + \mathbf{v}d\mathbf{S}$, pa je

$$\oint\limits_S (\mathbf{u}+\mathbf{v})d\mathbf{S} = \oint\limits_S \mathbf{u}d\mathbf{S} + \oint\limits_S \mathbf{v}d\mathbf{S},$$ čime je formula izvedena.

Simbolično:

$$\nabla(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{v}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48,1b)$$

gdje je ∇ linearni operator.

b). — **Divergencija proizvoda skalara i vektora.** Neka je dat skalar U i vektor **v**. Treba izračunati div (U**v**). Prema definiciji u analitičkom obliku je

$$\operatorname{div}(U\mathbf{v}) = \frac{\partial(Uv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Uv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Uv_z)}{\partial z} =$$

$$= U\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \left(v_x\frac{\partial U}{\partial x} + v_y\frac{\partial U}{\partial y} + v_z\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

i definitivno

$$\operatorname{div}(U\mathbf{v}) = U\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\operatorname{grad}U. \quad \ldots\ldots \quad (48,2a)$$

Simbolično

$$\nabla(U\mathbf{v}) = U\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla U. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48,2b)$$

Ovdje dolazi do izražaja diferencijalno svojstvo operatora nabla. On redom djejstvuje na jedan, pa na drugi faktor kao kod diferencijalenja, ili pak zamjenom (37,2b), pri čemu djejstvuje na faktor označen indeksom.

c). — **Divergencija proizvoda vektora i složene skalarne funkcije**

Neka je data skalarna funkcija f(U) i vektor **v**. Treba naći div [f(U)**v**].

Prema definiciji i dobijenim formulama je

$$\operatorname{div}[f(U)\mathbf{v}] = f(U)\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\operatorname{grad}f(U).$$

U vezi sa (37,3) dobija se

$$\operatorname{div}[f(U)\mathbf{v}] = f(U)\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}.\,f'_U(U)\operatorname{grad}U \quad \ldots\ldots \quad (48,3a)$$

Simbolički:

$$\nabla[f(U)\mathbf{v}] = f(U)\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}f'_U(U)\nabla U. \quad \ldots\ldots \quad (48,3b)$$

d). — **Divergencija radius-vektora**

Prema definiciji je

$$\operatorname{div}\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad \ldots\ldots \quad (48,4)$$

Divergencija radius-vektora r ista je u svim tačkama i jednaka 3.

Ovaj zaključak se može dobiti i iz relacije (45,7), gdje se izračunavao fluks radius-vektora kroz zatvorenu površinu.

Nije važno da li radius-vektor polazi od koordinatnog početka ili ne, jer divergencija ne zavisi od koordinatnog sistema.

Napominje se da je lako uvidjeti veličinu divergencije vektora računatu samo u ravni, odnosno vektora u koordinatnoj ravni. Kako onda vektor ima svega dvije komponente, divergencija će naravno biti jednaka 2.

e). — **Divergencija vektorskog proizvoda dvaju vektora**

Neka su dati vektori **u** i **v**. Treba izračunati div (**u** × **v**). Prema definiciji i vektorskoj algebri je

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \frac{\partial(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_x}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_y}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})_z}{\partial z}.$$

Kako je

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_x = u_y v_z - u_z v_y,\quad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})_y = u_z v_x - u_x v_z,$$

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_z = (u_x v_y - u_y v_x)$, poslije diferenciranja se dobija

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = v_x\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + v_y\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) +$$

$$+ v_z\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) - u_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) -$$

$$- u_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) - u_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$ ili

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]-$$
$$-\mathbf{u}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] . \quad (48,5)$$

U uglastim zagradama smo dobili vektore, koji se odnose na vektore **u** i **v**, kao što se vektor (42,4) odnosi na vektor **G**. Kasnije ćemo takav vektor detaljnije proučavati, pa će i slična izvođenja biti brža i preglednija. Za sada ćemo odložiti i simbolički način izvođenja formule (48,5) zbog novih operacija, koje ćemo kasnije izložiti.

Primjeri i zadaci:

1. — Izračunati divergenciju elektrostatičkog polja prouzrokovanog tačkastim opterećenjem.

a) Vektorsko rješavanje.

Poznato je da je jačina polja, pod pretpostavkom da je dielektrična konstanta ravna jedinici,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\,\mathbf{r},$$

gdje je q data opterećenje, a **r** vektor rastojanje od opterećenja do tačke u kojoj se traži divergencija. Prema (48,2) je

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\left(\frac{q}{r^3}\mathbf{r}\right) = \frac{q}{r^3}\operatorname{div}\mathbf{r} + q\,\mathbf{r}\operatorname{grad}\frac{1}{r^3} = \frac{3q}{r^3} + 3\,q\mathbf{r}\,.\,\frac{-1}{r^5}\,\mathbf{r} = 0.$$

b) Analitičko rješavanje

Uzmimo koordinatni sistem tako da se opterećenje q nalazi u koordinatnom početku. Koordinate tačke u kojoj se divergencija traži su uopšte (x, y, z). Onda su veličine komponenata vektora **E**:

$$E_x = q\frac{x}{r^3},\; E_y = q\frac{y}{r^3},\; E_z = q\frac{z}{r^3},$$

a rastojanje posmatrane tačke od opterećenja

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Dalje je

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = q\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}\right) = q\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right).$$

Analogno se dobija

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = q\left(\frac{1}{r^3}-3\frac{y^2}{r^5}\right),\quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = q\left(\frac{1}{r^3}-3\frac{z^2}{r^5}\right).$$

Prema tome je

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0.$$

Dobijeni rezultat važi za sve tačke, osim za tačku u kojoj se nalazi opterećenje q, jer tada $r \to o$, pa vektor **E** nema smisla za tu tačku.

Ako postoji više tačkastih opterećenja, onda se na osnovu pravila o divergenciji zbira takođe dobija:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\ldots+\mathbf{E}_n) = \operatorname{div}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{div}\mathbf{E}_i = 0.$$

Razumije se da dobijeni rezultat važi za sve tačke prostora, osim za tačke u kojima se opterećenja nalaze.

2. — Izračunati oblik sila u funkciji radius-vektora **r**, pod uslovom da njihova divergencija bude ravna nuli.

Uopšte uzevši, relacija sila u funkciji radius-vektora može se napisati

$$\mathbf{F} = \varphi(r)\mathbf{r}.$$

Treba naći $\varphi(r)$ pod uslovom da bude $\operatorname{div}\mathbf{F} = o$.

Prema § 48 je

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3\,\varphi(r) + \varphi'(r)\,.\,r, \text{ pa je}$$

$$\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{3}{r},\quad \frac{d\varphi(r)}{\varphi(r)} = -\frac{3dr}{r},\; \ln\varphi(r) = -3\ln r + \ln a,$$

a odavde

$$\varphi(r) = \frac{a}{r^3}, \text{ gdje je a konstanta.}$$

Definitivno se dobija

$$\mathbf{F} = \frac{a}{r^3}\,\mathbf{r}.$$

Ovaj oblik je poznat kako iz nauke o elektricitetu i magnetizmu, tako i iz mehanike, i to pod imenom kulonovskih i njutnovskih sila.

3. — Izračunati div $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, gdje je **a** konstantan vektor, a **r** radius-vektor u odnosu na koordinatni početak.

Odg.: 0.

4. — Izračunati div $(r^3\mathbf{r})$, gdje je **r** radius-vektor.

Odg.: $6r^3$.

5. — Izračunati div $(r^n\,\mathbf{r})$.

Odg.: $(n + 3)\ r^n$.

6. — Na osnovu zad. 5 izračunati napamet:

$$\text{a) div}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\,;\ \text{b) div}\ r^{10}\mathbf{r};\ \text{c) div}\,\frac{\mathbf{r}}{r^4}.$$

Odg.: a) $\frac{2}{r}$; b) $13\ r^{10}$; c) $-\frac{1}{r^4}$.

7. — Izračunati div $\mathbf{r}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, gdje je **a** konstantan vektor.

Odg.: 0.

§ 49. — TEOREMA GAUSSA I OSTROGRADSKOG

Dosadašnje izlaganje o divergenciji vektorskog polja, odnosno vektora, ima razne primjene. Ali jedna od najvažnijih primjena, a donekle i samo prikazivanje divergencije, nalazi se u čuvenoj teoremi, koja je prvobitno pronađena u analitičkom obliku. Kolika je prednost vektorskog računa pred analitičkim vidi se pored ostalog i u izvođenju i obliku ove vrlo važne teoreme. Pronašli su je Gauss i Ostrogradski nezavisno jedan od drugog i to Ostrogradski godinu dana prije Gaussa. Neki autori je nazivaju samo po Gaussovom imenu, što je pogrešno. Drugi, pak, autori, — mahom francuski — nazivaju je teorema Ostrogradskog.

Pomoću ove teoreme može se površinski integral transformirati u zapreminski i obrnuto.

Teorema je na jedan način već skoro izvedena prilikom izlaganja definicije i dalje teorije divergencije.

Dato je vektorsko polje, koje je okarakterisano vektorom **v**. Treba izračunati izlazni fluks toga vektora **v** kroz proizvoljnu zatvorenu površinu S, koja obuhvata zapreminu V. Ili drukčije, treba izračunati površinski integral $\underset{S}{\oint} \mathbf{v}d\mathbf{S} = \underset{S}{\oint} v_n dS$ pomoću integrala po zapremini, ili obrnuto.

Prema definiciji divergencije zaključuje se da je cjelokupna izdašnost izvora zapremine V, koja je ograničena površinom S:

$$\int \varrho dV = \int \operatorname{div}\mathbf{v} dV \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49{,}1)$$

Ovdje se integriranje vrši po cjelokupnoj zaremini V, a jedan integralni znak mjesto tri piše se zbog kratkoće. Ta izdašnost zapremine V mora biti jednaka izlaznom fluksu kroz cjelokupnu površinu S.

Izjednačivanjem se dobija

$$\oint \mathbf{v}d\mathbf{S} = \int \operatorname{div}\,\mathbf{v}dV \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49{,}2)$$

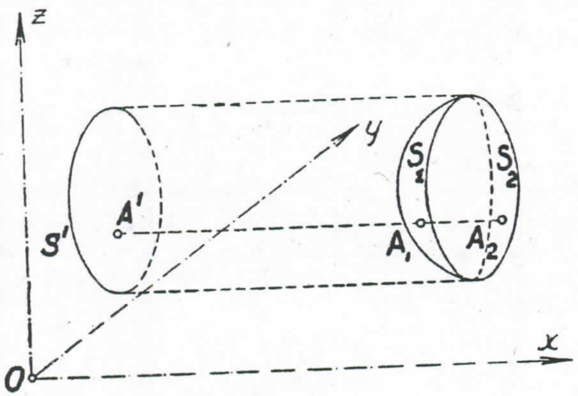
Ovo je teorema Gaussa i Ostrogradskog i glasi: **površinski integral vektora v uzet po zatvorenoj površini S jednak je zapreminskom integralu divergencije toga vektora v po zapremini V obuhvaćenoj površinom S.**

Sledujući hidrodinamičkoj očiglednosti, a analogno i za komplikovanija kretanja materije (no nikako ne shvatiti da se mehaničko kretanje »proširuje« ili »primjenjuje« na komplikovanija kretanja u takvom slučaju!), količina »tečnosti« koja isteče iz zapremine V mora biti jednaka količini »tečnosti« koja prođe kroz površinu S, pa teorema Gaussa i Ostrogradskog takođe glasi: **Fluks vektora v kroz zatvorenu površinu S jednak je izdašnosti zapremine V, obuhvaćene tom površinom.**

Prva formulacija ima istoriski prioritet, ali se prema drugoj formulaciji vidi prirodnost zaključka do kojeg se ovom formulom dolazi tako, da je skoro sama po sebi razumljiva, što se iz analitičkog izlaganja ne može tako brzo i lako uvidjeti. Znači da unutrašnji značaj teoreme Gaussa-Ostrogradskog dolazi do jasnog izražaja u punoj mjeri samo u vektorskom obliku.

Analitičko izvođenje. — Apstrahujući fizičko značenje postavlja se matematički zadatak da se trostruki integral po zapremini V transformira u dvostruki integral po površini S koja obuhvata tu zapreminu, odnosno da se zapreminski integral transformira u površinski. Maločas smo uzeli obrnuto iz razloga praktičnosti i bolje očiglednosti prikazanih u definiciji divergencije.

Data je proizvoljna funkcija P, koja zavisi od x, y i z. Funkcija je kontinualna u svim tačkama prostora V ograničenog površinom S. Posmatrajmo trostruki integral te funkcije po zapremini V (sl. 47):



Sl. 47.

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

Taj integral treba transformirati u dvostruki — površinski. Može se napisati u obliku

$$\iint_{S'} dy\, dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\,,$$

gdje su x_2 i x_2 apscise tačaka A_1 i A_2, u kojima prava $A'A_1A_2$, koja je paralelna osi x, prodire kroz površinu S, a dvostruki integral se uzima po projekciji S' konture na ravni yz.

Integriranjem po x dobija se

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx = P(x_2,y,z) - P(x_1,y,z), \text{ a zamjenom}$$

$$\iint_{S'} dy\, dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx = \iint_{S'} P(x_2,y,z)\, dy\, dz - \iint_{S'} P(x_1,y,z)\, dy\, dz.$$

Dalje izračunavanje može se obaviti po površini S'. Međutim, nas interesuje integriranje po površini $S = S_1 + S_2$. Kako je S' takođe i projekcija površine S_2 na ravni yz, dobija se $\iint_{S'} P(x_2,y,z)\, dydz = \iint_{S_2} P dydz$.
Isto tako umjesto integrala po površini S' za funkciju $P(x_1, y, z)$ može se uzeti integral po površini S_1, ali sa unutrašnje strane prema zapremini V. Nas interesuje integral po toj površini, ali sa spoljašnje strane, a taj integral je jednak drugom sabirku gornje relacije sa obrnutim znakom.

Prema tome je

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz = \iint_{S_1} Pdydz + \iint_{S_2} Pdydz = \iint_S Pdydz.$$

Ako su date još dvije funkcije Q (x,y,z) i R (x,y,z), analogno se dobija:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz = \iint_S Qdxdz,$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_S R\, dxdy.$$

Sabiranjem se dobija

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S (Pdydz + Q\, dzdx + R\, dxdy) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (49{,}3)$$

a ovo je tražena transformacija zapreminskog u površinski integral za proizvoljne funkcije P, Q, R od x, y, z. Integral se uzima u odnosu na spoljašnju normalu (pozitivan smjer).

Ako su P, Q, R projekcije nekog vektora **v**, onda desna strana jednačine (49,3) pretstavlja fluks vektora **v** kroz površinu S, a lijeva strana izdašnost dotične zapremine ispunjene »tečnošću«. Stavi li se $P = v_x$, $Q = v_y$, $R = v_z$, dobija se

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S (v_x dydz + v_y dzdx + v_z dxdy) \quad \dots\dots\dots\dots (49,4)$$

Ovo je teorema Gauss-a i Ostrogradskog u analitičkom obliku, koja je identična sa vektorskim oblikom (49,2).

§ 50. — GAUSSOVA TEOREMA U ELEKTROSTATICI

Primjena teoreme Gauss-a-Ostrogradskog iz opšteg oblika na specijalne oblasti fizike vrlo je raznovrsna. Ali specijalno primjena na elektrostatičko polje toliko je važna da teorema dobija oblik, koji se razlikuje od opšteg i ima zaseban naziv. Taj oblik zavisi od sistema jedinica, koji se usvoji. Mi ćemo ovdje primjenjivati takav sistem da u Coulomb-ovom zakonu ne bude »parazitnih« koeficijenata, pa je jačina polja $\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}$. Taj sistem se naziva Gaussov sistem, u čije karakteristike ovdje nećemo dalje ulaziti. Inače pored ostalih postoji i Heaviside-Lorentz-ov sistem, gdje je $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}$. Smatra se da se opterećenje nalazi u vakuumu.

Prema izlaganju i rezultatima prethodnog paragrafa biće

$$\int \mathbf{E}d\mathbf{S} = \int \mathrm{div}\mathbf{E}dV \quad \dots\dots\dots (50,1)$$

Zamjenom se dobija

$$q\int \frac{dS}{r^2} = \int \mathrm{div}\mathbf{E}dV \quad \dots\dots\dots (50,2)$$

Oko opterećenja q opiše se sferna površina radiusa r, pa je $S = 4\pi r^2$, odnosno

$$\int \mathbf{E}d\mathbf{S} = 4\pi q \quad \dots\dots\dots (50,3)$$

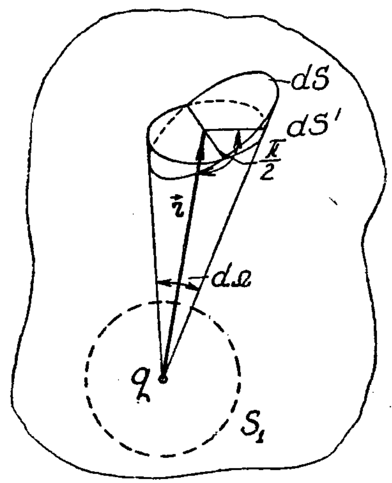
Ovo je čuvena Gauss-ova teorema u elektrostatici, a izražena riječima glasi: **u elektrostatičkom polju fluks vektora jačine električnog polja E kroz zatvorenu površinu jednak je proizvodu 4π i električnog opterećenja q, koje se nalazi u prostoru obuhvaćenom tom površinom.**

Ako se uzme drugi pomenuti sistem jedinica, onda je dotični fluks jednak jednostavno opterećenju q, ali, iako praktičan u ovoj formuli, taj sistem nije podesan za druge formule i izračunavanja.

Ova teorema se naziva **elektrostatička Gauss-ova teorema ili druga Gauss-ova teorema.**

Pri izvođenju ove formule za elektrostatičko polje poslužili smo se pri izračunavanju fluksa samo sfernom površinom. Međutim ista se teorema dobija i za fluks kroz zatvorenu površinu ma kakvog oblika, tj. fluks ne zavisi od oblika površine kroz koju se u elektrostatičkom polju računa.

Neka površina ima proizvoljan oblik i dimenzije. Promjenljivi radius-vektor od opterećenja q do tačaka te površine neka je **r**. Uzmemo li



Sl. 48.

neki element dS te površine, on će se iz mjesta opterećenja vidjeti pod tjelesnim uglom $d\Omega$. Uopšte uzevši, element dS nije normalan na radius-vektoru. Povučemo li element površine dS', koji će biti normalan na radius-vektoru, biće $dS' = dS\cos(d\mathbf{S},\mathbf{r})$. Prema definiciji tjelesnog ugla je $dS' = r^2\,d\Omega$, pa je fluks vektora **E** kroz površinu dS':

$$d\Phi = \mathbf{E}d\mathbf{S}' = E_n dS = \frac{q}{r^2}\cdot r^2 d\Omega = q d\Omega.$$

Cjelokupna zatvorena površina vidjeće se pod uglom $\Omega = 4\pi$, pa je

$$\Phi = \int \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50,4a)$$

To se može dokazati i posrednim metodom. Opišimo oko q sfernu površinu S_1 proizvoljnog radiusa r_1. Radius r_1 ćemo uzeti tako da se ta pomoćna sferna površina nalazi u posmatranoj zatvorenoj površini. Očigledno je da je izdašnost zapremine među površinom S i sfernom površinom S_1 ravna nuli, a prema § 49 ta izdašnost je

$$\int \mathrm{div}\ \mathbf{E} dV = {}_{0}\!\int \mathbf{E} d\mathbf{S} + {}_{0}\!\int \mathbf{E} d\mathbf{S}_1 = 0.$$

Sve normalne te zapremine orijentisane su napolje, tj. fluks kroz obje površine je izlazni. Ali ta orijentacija u lopti S_1 suprotna je od pozitivne orijentacije površine S, odnosno negativna je u odnosu na sfernu površinu, pa je

$$ {}_{0}\!\int \mathbf{E} d\mathbf{S} = {}_{0}\!\int \frac{r^3}{r^3} \cdot dS_1 = 4\pi q,$$

što je i trebalo dokazati.

Ako se opterećenje q nalazi izvan površine S, onda je, naravno, fluks vektora **E** kroz tu površinu ravan nuli. To se uostalom može dobiti iz Gauss-ove teoreme, stavljajući za takav slučaj $q = 0$.

Ako se u elektrostatičkom polju nalazi više opterećenja $q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$, i ako površina S obuhvata sva ta opterećenja, onda je

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i, \text{ pa kako je}$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i, \text{ biće}$$

$$\Phi = {}_{0}\!\int_{S} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n = 4\pi \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad . \quad . \qquad (50,4b)$$

a to je (50,3) u opštem obliku za n opterećenja.

Napominjemo da je ovdje ova primjena iznešena kao produženje prethodnog izlaganja pored ostalog i zbog toga što se ove dvije formule

moraju razlikovati među sobom kao opšte od posebnog, koje je izvedeno, ali ima svoj specijalan oblik. A nazivi su skoro identični.

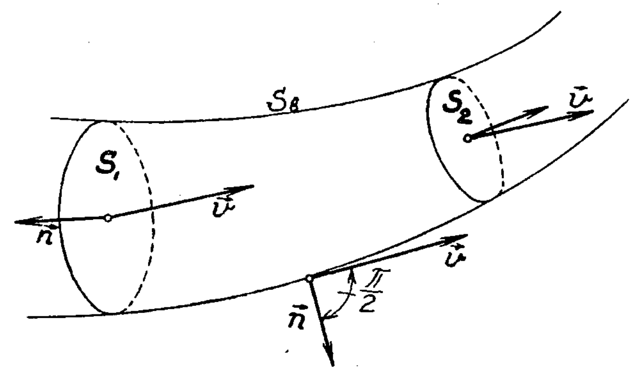
Inače, ova formula se može uopštiti i dobiti izraz za divergenciju potencijalnog polja

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 4\pi\varrho, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50,5)$$

gdje je ϱ gustina sredine.

§ 51. — SVOJSTVA SOLENOIDNOG VEKTORA I POLJA

Sada možemo pomoću teoreme Gaussa-Ostrogradskog pobliže proučiti solenoidno polje, odnosno solenoidni vektor. Izračunajmo fluks solenoidnog vektora. Uzmimo jednu vektorsku cijev (tubu) u polju (sl. 49).



Sl. 49.

Presjecimo je na dva mjesta. Označimo presjeke sa S_1 i S_2. Sa S_b označimo bočnu površinu među tim presjecima. Onda je zatvorena površina dotičnog dijela tube:

$$S = S_1 + S_2 + S_b.$$

Označimo li sa V zapreminu obuhvaćenu tom površinom, dobija se prema formuli Gaussa-Ostrogradskog

$$\int_{S_1} \mathbf{v} d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{v} d\mathbf{S} + \int_{S_b} \mathbf{v} d\mathbf{S} = \int \mathrm{div}\ \mathbf{v} dV.$$

No, prema definiciji solenoidnog vektora je div $\mathbf{v} = 0$, pa je

$$\int_{S_1} \mathbf{v}d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{v}d\mathbf{S} + \int_{S_b} \mathbf{v}d\mathbf{S} = 0. \qquad (51,1)$$

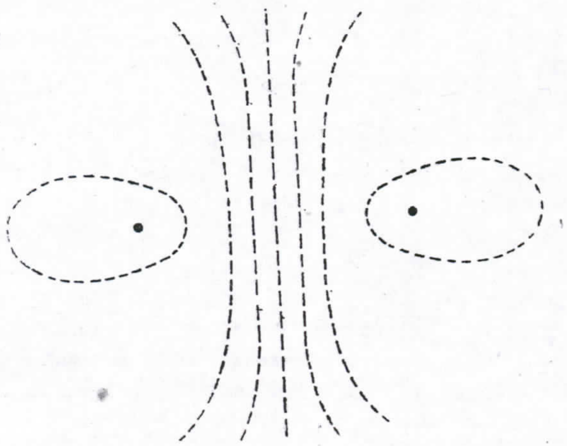
Skalarni proizvodi pod integralnim znacima jednaki su apsolutnim vrijednostima vektora $\mathbf{v}$ i $d\mathbf{S}$ pomnoženim kosinusom ugla među vektorom i normalom na površini. Odmah se vidi da za bočnu površinu tube taj ugao iznosi $\frac{\pi}{2}$ pa je dotični proizvod jednak nuli, odnosno fluks solenoidnog vektora kroz bočnu površinu tube jednak je nuli. Za presjeke S_1 i S_2 normale imaju suprotne smjerove: kod prvog su orijentisane prema unutrašnjosti obuhvaćene zapremine, a kod drugog obrnuto, pa je

$$\int_{S_1} \mathbf{v}d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{v}d\mathbf{S}. \qquad (51,2)$$

Dobili smo izraz koji prikazuje svojstvo solenoidnog vektora, što se može kazati riječima: **fluks solenoidnog vektora isti je kroz sve presjeke vektorske tube.**

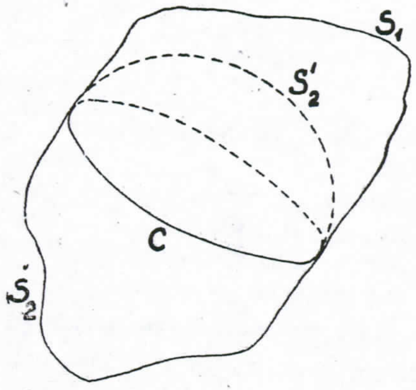
Prema ranijem izlaganju može se zaključiti da je u svim presjecima vektorske tube broj vektorskih linija konstantan, tj. iz vektorske tube izlazi isti »broj« vektorskih linija, koji u istu tubu ulazi.

Dakle, **u solenoidnom polju vektorske linije ne mogu imati ni početnu ni krajnju tačku, nego mogu ići ili prema beskonačnosti, ili biti zatvorene** (sl. 50).



Sl. 50.

Uzmimo zatim neku konturu C (sl. 51). Neka dvije površine S_1 i S_2 imaju tu konturu zajedničku. Površine se međusobno mogu kontinualnom deformacijom prevesti jedna u drugu. Potražimo fluks solenoidnog vektora kroz te površine pod uslovom da se poslije deformacije normale na tim površinama poklapaju. Prema teoremi Gaussa-Ostrogradskog dobija se



Sl. 51.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_{S_1} v_n dS \pm \int_{S_2} v_n dS = 0,$$

gdje se znak drugog sabirka uzima prema tome da li su normale na tim površinama prema obuhvaćenoj zapremini obje spoljašnje, ili jedna spoljašnja, a druga unutrašnja. Znači da je fluks solenoidnog vektora isti kroz obje površine pri naznačenim uslovima, ili drugim riječima **fluks solenoidnog vektora kroz ma koju površinu** S, **koja se oslanja na datu konturu** C, **zavisi samo od konture** C, **a ne zavisi od oblika površine.**

U vezi izloženog o liniskom integralu i jednoznačnosti ova teorema važi samo za takve površine, koje se u solenoidnom polju mogu pretvoriti u tačku ne izlazeći iz obuhvaćene zapremine. Na pr. u takva područja ne spada površina oblika torusa, površina koncentričnih lopti (šuplje lopte) itd.

§ 52. — PRIMJENA TEOREME GAUSSA-OSTROGRADSKOG NA FIZIKU KONTINUUMA

Navešćemo dva primjera primjene ove važne teoreme na hidrodinamiku.

1. — Jednačina kontinuiteta za idealnu tečnost

Pod idealnom tečnošću se podrazumijeva takva tečnost, u kojoj je pritisak na svakom mjestu isti. Drugim riječima, na svaku jedinicu površine ma kojeg površinskog elementa djejstvuje jedan te isti specifični pritisak, koji se uzima duž normale.

Gustinu tečnosti označavamo sa ϱ, koje je uopšte promjenljivo u funkciji od pritiska. Tečnost kod koje je ϱ = const naziva se **nestišljiva ili inkompresibilna** tečnost.

Naravno ovdje se uzima u obzir samo makroskopska strana, tj. pretpostavlja se da tečnost kontinualno ispunjava cjelokupan prostor gdje se nalazi. To znači da elementarna, »beskonačno« mala zapremina u fizičkom smislu zaista je vrlo mala u odnosu na zapreminu tijela, ali je velika u odnosu na intermolekularni prostor. Tako, kada se govori o čestici tečnosti, ne podrazumijeva se samo jedan molekul, nego mnogo molekula u jednoj maloj zapremini, koja se u hidrodinamici smatra kao »tačka«. Ovo važi takođe i za neidealne tečnosti.

Posmatrajmo neku zapreminu V ispunjenu tečnošću. Kako se tečnost kreće i izvire, vremenom će se mijenjati i gustina tečnosti. Količina tečnosti u toj zapremini je $\int \varrho dV$. Ako je $\mathbf{v}$ brzina kretanja tečnosti, onda kroz element dS površine S, koja obuhvata tu zapreminu, protiče u jedinici vremena količina tečnosti $\varrho \mathbf{v} d\mathbf{S}$. Cjelokupna količina tečnosti koja isteče iz zapremine V kroz površinu S je $\oint_S \varrho \mathbf{v} d\mathbf{S}$. A s druge strane, izdašnost zapremine V u jedinici vremena je $\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho dV$. Za toliko se smanji količina tečnosti, pa se taj izraz mora uzeti sa negativnim znakom.

Onda je

$$\oint \varrho \mathbf{v} d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho dV. \qquad \qquad (52,1)$$

Izvršimo transformaciju prvog integrala prema teoremi Gaussa-Ostrogradskog, pa je

$$\oint \varrho \mathbf{v} d\mathbf{S} = \int \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) dV,$$

$$\int \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho dV, \text{ ili}$$

$$\int \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v}\right) dV = 0. \qquad \qquad (52,2)$$

Ova jednačina važi za ma koju zapreminu, pa se dobija

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0. \qquad \qquad (52,3)$$

Ovo je **jednačina kontinuiteta.** Vektor $\varrho \mathbf{v}$ naziva se gustina protoka tečnosti. Orijentisan je u pravcu kretanja tečnosti, a njegova veličina jednaka je količini tečnosti, koja u jedinici vremena proteče kroz jedinicu površine, koja je normalna na vektoru brzine kretanja tečnosti. Ova jednačina važi za područje bez izvora.

Jednačina kontinuiteta može se tranformirati pomoću veze među totalnim i parcijalnim izvodom, odnosno primjenom supstancijalne promjene (§ 44).

Jednačina (52,3) može se napisati

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho = 0.$$

Prema (44,1) je

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ ili}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{d \ln \varrho}{dt}. \qquad \qquad (52,4)$$

Ova relacija prikazuje divergenciju brzine pomoću supstancijalnog izvoda funkcije gustine, a to znači da pokazuje prilikom kretanja održanje mase djelića (radi se samo o makroskopskom posmatranju).

Za nestišljive tečnosti jednačina kontinuiteta se svodi na jednačinu

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \qquad \qquad (52,5)$$

2. — **Euler-ova jednačina**

Uzmimo neku malu zapreminu tečnosti koja se kreće pod uticajem zemljine teže. Neka je p pritisak. Onda je ukupna sila koja djejstvuje na taj djelić tečnosti

$$mg - {}_{0}\int pdS,$$

gdje je mg sila teže. Drugi član se može transformirati prema teoremi Gaussa-Ostrogradskog, pa je

$$-{}_{0}\int pdS = -\int \operatorname{grad} pdV.$$

Prema tome na jedinicu zapremine djejstvuje sila — grad p. Masa jedinice zapremine je ϱ, pa se dobija

$$\varrho \frac{dv}{dt} = \varrho g - \operatorname{grad} p. \quad \ldots \ldots \quad (52.5)$$

Odavde je

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p.$$

Prema (44,2) može se staviti $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v$, pa je

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = g - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p. \quad \ldots \quad (52,6)$$

Ovo je čuvena **Euler-ova jednačina** za kretanje tečnosti — jedna od osnovnih jednačina hidrodinamike.

I ovdje se ne uzimaju u obzir procesi disipacije energije uslijed viskoziteta i prenošenja toplote među dijelićima tečnosti, nego se posmatra kretanje idealne tečnosti ili gasa.

§ 53. — ROTOR

Vidjeli smo da divergencija od vektorskog polja dovodi do skalarnog polja. Sada ćemo vidjeti kako druga takođe važna diferencijalna operacija od jednog vektorskog polja dovodi do drugog vektorskog polja. Pojam i neka svojstva liniskog integrala izloženi su ranije, pa ih detaljnije ne treba iznositi.

Data je zatvorena kriva linija s. Uzmimo neku proizvoljnu površinu S tako da kriva s bude kontura te površine. Uzmimo linijski integral ${}_{0}\int vds$ duž zatvorene krive s. Podijelimo ga površinom koju linija obuhvata pa će se dobiti

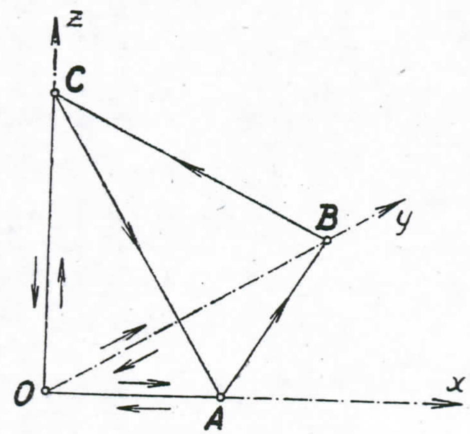
$$\frac{{}_{0}\int vds}{S} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53,1)$$

Označimo li sa **n** pozitivnu normalu površine, onda ćemo kao graničnu vrijednost izraza (53,1), kada površina S postaje beskonačno mala, dobiti normalnu komponentu nekog vektora **R**:

$$\mathbf{R}_n = \lim_{S \to 0} \frac{{}_{0}\int vds}{S} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53,2)$$

Tako definisani vektor **R** naziva se **rotor vektora v**, a označava se sa rot **v.** Čita se rotor **v.** Postoji i označavanje: curl (körl).

Sada ćemo dokazati da je tako definisana veličina zaista vektor. Zbog toga ćemo uzeti kao liniju, po kojoj se integral uzima, obim elementarnog trougla ABC (sl. 52), koji predstavlja stranu tetraedra uzetog



Sl. 52.

u uglu triedra. Na takve elementarne trouglove možemo razdijeliti posmatranu površinu. Tako su površine strana tog elementarnog tetraedra dS_x, dS_y, dS_z, dS. Ose O_x, O_y, O_z su paralelne sa osama eventualno ranije usvojenog koordinatnog sistema. Tada je

$$dS_x = dS\cos\alpha,\ dS_y = dS\cos\beta,\ dS_z = dS\cos\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad (53,3)$$

gdje su α, β, γ uglovi normale sa koordinatnim osama. Napišimo liniske integrale oko dS_x, dS_y, dS_z u pozitivnom smjeru. Onda će se duž svih ivica po koordinatnim osama obići dvaput u suprotnom smjeru, pa se potiru tako da ostane samo liniski integral po konturi hipotenuze površine. Sabiranjem se dobija

$$R_n dS = R_x\, dS_x + R_y dS_y + R_z dS_z.$$

Zamjenom se dobija

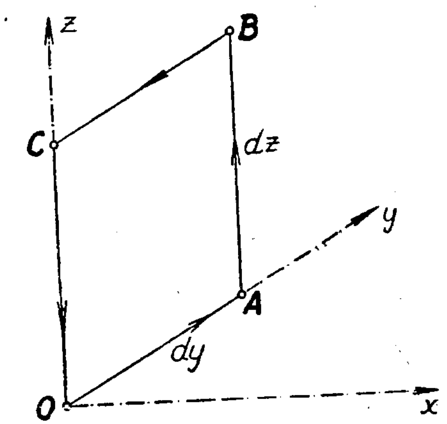
$$R_n dS = (R_x\cos\alpha + R_y\cos\beta + R_z\cos\gamma)dS, \text{ ili}$$

$$R_n = R_x\cos\alpha + R_y\cos\beta + R_z\cos\gamma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53,4)$$

Relacija (53,4) pretstavlja skalarni proizvod orta normale **n** i vektora **R**, čije su komponente R_x, R_y, R_z. Tako je dokazano da je R zaista vektor.

Odavde je

$$\text{rot } \mathbf{v} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53,5)$$



Sl. 53.

Prema definiciji rotora (53,2) vidi se da **rotor ne zavisi od koordinatnog sistema. Rotor je invarijanta polja.**

Analitički izraz rotora

Uzmimo u ravni yz elementarnu površinu $dS_x = dydz$. Po konturi te elementarne površine uzmimo integral $\int v_s ds$. Za put OA treba kao podintegralni izraz uzeti $v_y dy$. Duž AB komponenta vektora **v** nije v_z kao duž OC, nego je pretrpjela promjenu. Na jedinici dužine v_z se promijeni za

$\frac{\partial v_z}{\partial y}$, a na dužini dy biće promjena $\frac{\partial v_z}{\partial y} dy$. Prema tome uzduž AB dobićemo

$$\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy\right) dz.$$

Dalje se dobija duž BC slijedeći izraz

$$-\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz\right) dy,$$

gdje se uzima znak minus zbog suprotne orijentacije od smjera raščenja y, a duž CO dobiće se — $v_z dz$.

Sabiranjem svih tih izraza dobija se linijski integral duž OABC:

$$\oint_{OABC\,(dydz)} \mathbf{v} d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dydz = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dS_x. \quad . \quad (53,6)$$

Analogno se dobija

$$\oint_{(dzdx)} \mathbf{v} d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dzdx = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dS_y \text{ i}$$

$$\oint_{(dxdy)} \mathbf{v} d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dxdy = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dS_z.$$

Na osnovu toga komponente vektora rotv su:

$$\left.\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{v})_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ (\text{rot } \mathbf{v})_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ (\text{rot } \mathbf{v})_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53,7)$$

Dakle, vektor rotv analitički se pretstavlja:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad (53,8)$$

§ 54. — SIMBOLIČNO PRETSTAVLANJE ROTORA

Iz izraza (53,8) za rotor može se zaključiti da pretstavlja vektorski proizvod dvaju vektora sa komponentama »veličina«:

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z}\quad \text{i}\ v_x,\ v_y,\ v_z.$$

Prema tome je

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}),$$

ili

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}. \qquad (54,1)$$

Ovo je vrlo važna relacija, koja pokazuje da je **rotor vektora v jednak vektorskom proizvodu operatora nabla i vektora v.**

Ova relacija se može pisati i u obliku determinante:

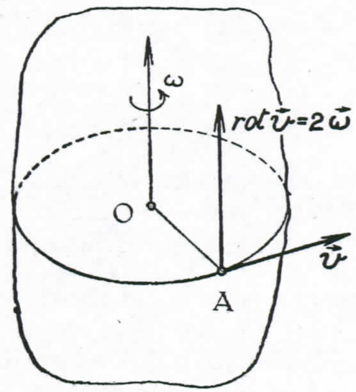
$$\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \qquad (54,2)$$

Otuda i relacija (54,1), odnosno (54,2) takođe može služiti kao definicija rotora.

§ 55. — VEZA MEĐU UGAONOM BRZINOM I BRZINOM U MEHANICI. DRUGA DEFINICIJA ROTORA

Neka kruto tijelo rotira oko ose kroz tačku O (sl. 54). Ugaona brzina $\vec{\omega}$ biće orijentisana duž ose kroz tačku O. Brzina neke tačke A tijela biće

$$\vec{v} = \omega \times \mathbf{r}, \qquad (55,1)$$



Sl. 54.

gdje je **r** radius-vektor te tačke, a

$\vec{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ je vektor ugaona brzina. Odavde je

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\,\mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\,\mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\,\mathbf{k},\ \text{ili}$$

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y,\quad v_y = \omega_z x - \omega_x z,\quad v_z = \omega_x y - \omega_y x. \qquad (55,2)$$

Može se dokazati da je

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right),\quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \qquad (55,3)$$

Komponente vektora

$$\mathbf{R} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

proporcionalne su komponentama vektora ugaone brzine kod **rotacije,** odnosno upravo

$$R_x = 2\,\omega_x,\ R_y = 2\omega_y,\ R_z = 2\omega_z, \quad \ldots \ldots \quad (55{,}4)$$

pa je ovaj vektor pored ostalog i zbog toga nazvan rotacija ili rotor vektora **v**.

Dakle
$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\vec{\omega}. \quad \ldots \ldots \quad (55{,}5)$$

Ova relacija se odmah dobija i prema već usvojenoj definiciji, uzimajući rotor jednačine (55,1) i izračunavajući determinantu, ili pak iz (55,2) sastaviti komponente vektora **v**.

U hidromehanici pretstavlja vrtlog, pa ga neki autori i tako nazivaju. Maxwell i Heaviside, a i kasnije mahom anglo-američki autori nazivaju ga i označavaju sa curl, pored ostalog i iz razloga, što mu komponente nisu prosto jednake komponentama ugaone brzine, nego su dvaput veće. Ipak se oznaka rot sve više usvaja, jer je praktičnija.

Vektor brzine **v** je polarni vektor, a rot **v** je prema već izloženom aksijalni vektor. Uopšte se može zaključiti da je **rotor polarnog vektora aksijalni vektor, a rotor aksijalnog vektora je polarni vektor.**

§ 56. — OSNOVNE FORMULE TEORIJE ROTORA

a) Rotor zbira. — Neka su data dva vektora **u** i **v**. Treba naći rot (**u**+**v**). Prema definiciji je

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \left[\frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})_z}{\partial y} - \frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})_y}{\partial z}\right]\mathbf{i} +$$
$$+\left[\frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})_x}{\partial z} - \frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})_z}{\partial x}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})_y}{\partial x} - \frac{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})_x}{\partial y}\right]\mathbf{k},$$

odakle se prema relaciji $(\mathbf{u}+\mathbf{v})_x = u_x + v_x$ itd. i prema pravilu diferenciranja zbira dobija

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \operatorname{rot}\mathbf{u} + \operatorname{rot}\mathbf{v}. \quad \ldots \ldots \quad (56{,}1a)$$

Rotor zbira vektora jednak je zbiru rotora pojedinih sabiraka.

Ista formula se može dobiti i na osnovu definicije (53,2), odnosno

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lim_{S\to 0}\frac{\oint(\mathbf{u}+\mathbf{v})d\mathbf{s}}{S}$$

Integral $\oint(\mathbf{u}+\mathbf{v})d\mathbf{s}$ sadrži proizvod $(\mathbf{u}+\mathbf{v})d\mathbf{s} = \mathbf{u}d\mathbf{s} + \mathbf{v}d\mathbf{s}$, pa je

$$\oint(\mathbf{u}+\mathbf{v})d\mathbf{s} = \oint\mathbf{u}d\mathbf{s} + \oint\mathbf{v}d\mathbf{s}, \quad \ldots \ldots \quad (56{,}1b)$$

čime je formula dokazana.

Simbolički:

$$\nabla\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \nabla\times\mathbf{u} + \nabla\times\mathbf{v}, \quad \ldots \ldots \quad (56{,}1c)$$

jer je ∇ linearni operator.

b) **Rotor proizvoda vektora i skalara**

Neka je dat skalar U i vektor **v**. Treba izračunati rot (U**v**). Prema analitičkom obliku rotora je

$$[\operatorname{rot}(U\mathbf{v})]_x = \frac{\partial(Uv_z)}{\partial y} - \frac{\partial(Uv_y)}{\partial z} = U\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) +$$
$$+\left(\frac{\partial U}{\partial y}v_z - \frac{\partial U}{\partial z}v_y\right),$$

$$[\operatorname{rot}(U\mathbf{v})]_y = U\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial z}v_x - \frac{\partial U}{\partial x}v_z\right),$$

$$[\operatorname{rot}(U\mathbf{v})]_z = U\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}v_y - \frac{\partial U}{\partial y}v_x\right).$$

Sastavljajući od ovih komponenata odgovarajući traženi vektor, dobija se

$$\operatorname{rot}(U\mathbf{v}) = U\operatorname{rot}\mathbf{v} + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}v_z - \frac{\partial U}{\partial z}v_y\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}v_x - \frac{\partial U}{\partial x}v_z\right)\mathbf{j} +\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial U}{\partial x}v_y - \frac{\partial U}{\partial y}v_x\right)\mathbf{k}\right].$$

Vektor u uglastoj zagradi je vektorski proizvod grad U $\times$ **v**, pa je definitivno

$$\operatorname{rot}(U\mathbf{v}) = U\operatorname{rot}\mathbf{v} - \mathbf{v} \times \operatorname{grad} U \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (56{,}2a)$$

Simbolički:

$$\nabla \times (U\mathbf{v}) = (\nabla_{\mathbf{v}} + \nabla_U) \times (U\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} \times (U\mathbf{v}) + \nabla_U \times (U\mathbf{v}).$$

Ovdje se faktor na koji ∇ ne djejstvuje smatra kao konstantan, pa se može iznijeti pred znak ∇ sa indeksom drugog faktora, odnosno

$$\nabla \times (U\mathbf{v}) = U(\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla U \times \mathbf{v} = U(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \nabla U. \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (56{,}2b)$$

Ova se operacija može izvesti i kao »diferencijalenje« pomoću operatora ∇.

c) **Rotor proizvoda vektora i složene skalarne funkcije**

Neka je data skalarna funkcija f(U) i vektor **v**. Treba naći rot [f(U)**v**].

Prema definiciji i formulama (56,2) je

$$\operatorname{rot}[f(U)\mathbf{v}] = f(U)\operatorname{rot}\mathbf{v} - \mathbf{v} \times \operatorname{grad} f(U) = f(U)\operatorname{rot}\mathbf{v} - \mathbf{v} \times f'_U(U)\operatorname{grad}U. \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (56{,}3a)$$

Simbolički:

$$\nabla \times [f(U)\mathbf{v}] = f(U)\,(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \nabla f(U) = \\ = f(U)\,(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times f'_U(U)\,\nabla U \; . \; . \; . \qquad (56{,}3b)$$

d) **Rotor radius-vektora**

Prema definiciji je

$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = \left(\frac{\partial r_z}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial r_x}{\partial z} - \frac{\partial r_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial r_y}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

ili

$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (56{,}4)$$

Rotor radius-vektora r jednak je nuli.

Nije važno odakle radius-vektor polazi, jer je rotor invarijanta.

e) **Rotor vektorskog proizvoda dvaju vektora**

Neka su dati vektori **u** i **v**. Treba izračunati rot (**u** $\times$ **v**). Prema definiciji (54,2) je

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (u_y v_z - u_z v_y) & (u_z v_x - u_x v_z) & (u_x v_y - u_y v_x) \end{vmatrix} \; . \; . \; . \; . \qquad (56{,}5)$$

Izračunavanjem ove determinante poslije dužih operacija se dobija

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{u} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}. \; . \; . \; . \qquad (56{,}6)$$

Simbolički:

Treba izračunati $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Zamijenimo $\nabla = \nabla_{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{v}}$, gdje $\nabla_{\mathbf{u}}$ **djejstvuje samo na u,** a $\nabla_{\mathbf{v}}$ **samo na v.** Ovo se ponovno ističe iz razloga što i najmanji nepravilan postupak sa ∇ dovodi do pogrešnih rezultata. Tada se može izmijeniti red ∇ i vektora na koji ne djejstvuje.

Onda je

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Prema pravilu transformacije vektorsko-vektorskog proizvoda je

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}\,(\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{u}}) - \mathbf{v}\,(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) + \mathbf{u}\,(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}) - \mathbf{v}\,(\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{v}}),$$

ili definitivno

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}\,(\nabla\mathbf{v}) - \mathbf{v}\,(\nabla\mathbf{u}) + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}. \; . \qquad (56{,}6)$$

I ovo je jedan od primjera na kome se vidi neobična praktičnost simboličkog metoda.

f) — **Gradijent skalarnog proizvoda dvaju vektora**

Neka su dati vektori **u** i **v**. Treba izračunati grad (**uv**).

Prema pravilima o vektorsko-vektorskom proizvodu poznata je relacija

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}), \text{ ili}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{ac}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c}(\mathbf{ab}).$$

Za ovaj slučaj uzećemo samo simbolički metod, pa je

$$\text{grad}\,(\mathbf{uv}) = \nabla(\mathbf{uv}) = \nabla_u(\mathbf{uv}) + \nabla_v(\mathbf{uv}).$$

Maločas je navedeno, ali opet navodimo, da u ovakvom slučaju nabla sa indeksom djejstvuje samo na odgovarajući faktor, pa je:

$$\nabla_u(\mathbf{u\,v}) = \mathbf{v} \times (\nabla_u \times \mathbf{u}) + \mathbf{u}\,(\mathbf{v}\nabla)$$

$$\nabla_v(\mathbf{u\,v}) = \mathbf{u} \times (\nabla_v \times \mathbf{v}) + \mathbf{v}\,(\mathbf{u}\nabla).$$

Odavde se odmah dobija

$$\text{grad}\,(\mathbf{uv}) = \nabla(\mathbf{u\,v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{v} \quad \ldots \quad (56{,}7a)$$

ili

$$\text{grad}\,(\mathbf{uv}) = \mathbf{v} \times \text{rot}\,\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot}\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\Delta)\mathbf{v}. \quad . \quad (56{,}7b)$$

Uzmimo sada specijalan slučaj kada je $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Tada se zamjenom definitivno dobiva

$$\frac{1}{2}\,\text{grad}\,v^2 = \mathbf{v} \times \text{rot}\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}. \quad \ldots \quad (56{,}8)$$

g) — **Divergencija vektorskog proizvoda dvaju vektora**

Neka su dati vektori **u** i **v**. Treba izračunati div $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Ovaj slučaj je već riješen u § 48. Ovdje preostaje samo da se (48,5) prepiše prema izloženom, pa se sada može pisati

$$\text{div}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\,\text{rot}\,\mathbf{u} - \mathbf{u}\,\text{rot}\,\mathbf{v}. \quad \ldots \quad (56{,}9a)$$

Isti rezultat se dobija i primjenom simboličkog metoda, odnosno

$$\nabla(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla_u(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \nabla_v(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) =$$

$$= \mathbf{v}\,(\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u}\,(\mathbf{v} \times \nabla_v) = \mathbf{v}\,(\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u}\,(\nabla \times \mathbf{v}). \quad (56{,}9b)$$

Primjeri i zadaci:

1. — Izračunaćemo rotor elektrostatičkog polja prouzrokovanog tačkastim opterećenjem.

a) — Vektorsko rješavanje. — Poznato je da je

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}. \text{ Prema definiciji (56,2) dobija se}$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = \text{rot}\,\frac{q}{r^3}\,\mathbf{r} = \frac{q}{r^3}\,\text{rot}\,\mathbf{r} - \mathbf{r} \times \text{grad}\,\frac{q}{r^3} = -\frac{3q}{r^4}\,\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r}.$$

Kako je vektorski proizvod dva ista vektora jednak nuli, biće

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = 0.$$

b) Analitičko rješavanje. — Kako je

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}, \text{ odnosno } E_x = \frac{q\,x}{r^3},\ E_y = \frac{q\,y}{r^3},\ E_z = \frac{q\,z}{r^3}, \text{ biće}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Odavde je

$$(\text{rot}\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{3qyz}{r^5} + \frac{3qyz}{r^5} = 0.$$

Takođe su jednake nuli i ostale dvije komponente, te je

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0.$$

2. — Izračunati rot $[f(r)\mathbf{r}]$.

Odg.: 0.

3. — Dokazati da je rot $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$, gdje je **a** konstantan vektor, a **r** radius-vektor.

§ 57. — STOKES-OVA TEOREMA

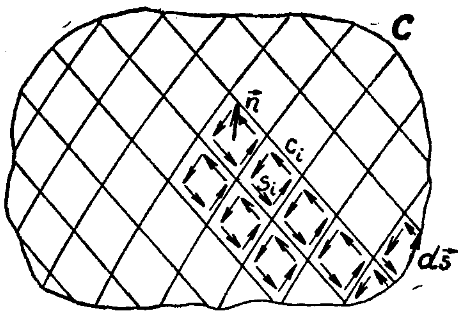
Pitanje transformacije liniskog integrala u površinski integral riješio je Stokes. On je u analitičkom obliku pronašao vezu među krivoliniskim i dvostrukim integralom, te se i čuvena transformaciona teorema naziva njegovim imenom.

Ova teorema je na jedan način već skoro izvedena prilikom izlaganja definicije i dalje teorije rotora.

Dato je vektorsko polje, koje je okarakterisano vektorom **v**. Treba transformirati krivoliniski integral toga vektora po nekoj konturi u površinski integral po površini koja naleže na tu konturu. Liniski integral vektora **v** duž zatvorene linije, — konture C, — je

$$\oint_C \mathbf{v} ds$$

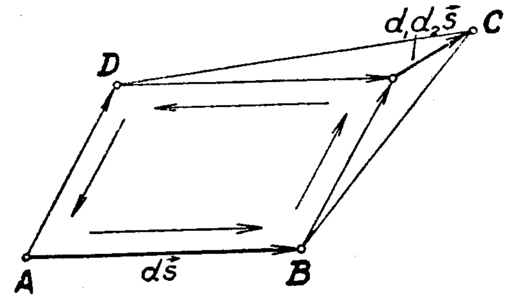
gdje je ds element luka te konture (sl. 55).



Sl. 55.

Posmatrajmo elementarnu površinu oblika četvorougla. Inače oblik elementarne površine je proizvoljan. Može se na pr. uzeti i trougao itd. Pošto je ta površina elementarna, može se smatrati ravnom. Inače površina S koja leži na konturi C uopšte uzevši nije ravna površina. Naravno, pretpostavlja se da je vektor **v** u svim tačkama posmatrane površine S konačan, jednoznačan i da se može diferencirati.

Treba dati liniski integral pretvoriti u površinski po površini, koju obuhvata data zatvorena kriva linija, duž koje se integral uzima. Na elementarnoj površini (sl. 56) treba izračunati krivoliniski integral duž strana AB, BC, CD i DA u funkciji površine tog elementa.



Sl. 56.

Znači, treba izračunati liniski integral duž čitave konture, odnosno

$$\int_{ABCD} \mathbf{v} ds = \int_{AB} \mathbf{v} ds + \int_{BC} \mathbf{v} ds + \int_{CD} \mathbf{v} ds + \int_{DA} \mathbf{v} ds \quad . \ . \quad (57,1)$$

Polje je različito u raznim tačkama. Obilježimo li priraštaj u pravcu $\overrightarrow{AB}$ indeksom 1, a u pravcu $\overrightarrow{AD}$ indeksom 2, biće poslije skraćivanja

$$\int_{ABCD} \mathbf{v} ds = d_1(\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AD}) - d_2(\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot d_1\mathbf{v} + \mathbf{v} d_1\overrightarrow{AD} -$$
$$- \overrightarrow{AB} d_2 \mathbf{v} - \mathbf{v} d_2 \overrightarrow{AB}.$$

Ali je

$$d_1\overrightarrow{AD} = d_2\overrightarrow{AB},$$ jer elementarni četvorougao mora biti zatvoren.

Onda je

$$\int_{ABCD} \mathbf{v} ds = \overrightarrow{AD} d_1 \mathbf{v} - \overrightarrow{AB} d_2 \mathbf{v}.$$

Kako je $d_1 v = \overrightarrow{AB} \cdot \nabla v$, $d_2 v = \overrightarrow{AD} \cdot \nabla v$, biće

$$\int_{ABCD} v ds = \overrightarrow{AB} \cdot \nabla v \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \nabla v \cdot \overrightarrow{AB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57,2)$$

A ovo je razvijeni skalarni proizvod vektorskih proizvoda, pa je

$$\int_{ABCD} v ds = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) (\nabla \times v) = (\nabla \times v) dS,$$

ili

$$\int_{ABCD} v ds = \mathrm{rot} v dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57,3)$$

Iz sl. 55 se vidi da su cirkulacije duž pojedinih susjednih elemenata suprotne, pa u krajnjoj sumi ostaje samo izračunavanje integrala duž konture C. Onda je prema (57,3) definitivno

$$\oint_C v ds = \oint_S \mathrm{rot} v dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57,4)$$

Ovo je **Stokes-ova teorema, koja glasi: liniski integral vektora po zatvorenoj konturi jednak je fluksu rotora tog vektora kroz površinu, koju data kontura obuhvata, ili cirkulacija vektora po zatvorenoj konturi jednaka je fluksu rotora tog vektora kroz površinu, koju data kontura obuhvata.**

Ova teorema je u stvari uglavnom prikazana samom definicijom rotora (53,2), jer se na desnoj strani relacije (57,4) pod integralom nalazi proizvod iz normalne komponente vektora rotv i elementarne površine.

Vidi se da oblik površine S ne igra ulogu, što znači da je fluks rotora vektora **v** jedan te isti kroz dvije razne površine, koje imaju zajedničku konturu, duž koje se izračunava cirkulacija vektora **v**.

U vezi prve i druge formulacije važi rasuđivanje analogno iznešenom za teoremu Gaussa-Ostrogradskog.

Analitičko izvođenje. — Stokes-ova teorema može se analitički izvesti metodom iznešenim u § 53, gdje je skoro definitivno već i izvedena. Međutim, mi ćemo ovdje iznijeti i drugi način rješavanja zadatka da se

krivoliniski integral po konturi C transformira u površinski integral po površini S koja je ograničena tom konturom. Napominjemo da postoji više načina izvođenja ove vrlo važne teoreme.

Kao element površine uzećemo kao u § 53 trougao tako da se nalazi u prvom oktantu pomoćnog koordinatnog sistema, čije su ose paralelne sa osama eventualno usvojenog koordinatnog sistema, koji može biti izvan posmatrane površine i konture. Taj trougao je ABC (sl. 52).

Neka su date tri funkcije od x, y, z: P, Q, R. Treba integral

$$\int_{ABCA} (Pdx + Qdy + Rdz)$$

transformirati u površinski.

Najprije ćemo posmatrati funkciju P, koja je kontinualna u svim tačkama površine, koju ćemo posmatrati. Uzmimo sada slijedeći integral

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial z} dxdz.$$

Naćićemo vezu među krivoliniskim i tim integralom na slijedeći način:

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial z} dxdz = \int dx \int \frac{\partial P}{\partial z} dz = \int (P_2 - P_1) \; dx,$$

gdje se P_2 kao gornja granica odnosi na CA, a P_1 kao donja granica integriranja po z, što se lako vidi na pomenutoj slici.

Znači

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial z} dxdz = \int_{CA} Pdx - \int_{OA} Pdx = \int_{CA} Pdx + \int_{AO} Pdx.$$

Dalje je

$$\int_{CA} Pdx + \int_{AO} Pdx = \int_{CA} Pdx + \int_{AO} Pdx + \int_{OC} Pdx = \int_{CAOC} Pdx,$$

jer je duž OC dx jednako nuli (ne postoji).

Prema tome je

$$\int_{CAOC} Pdx = \iint \frac{\partial P}{\partial z} dxdz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57,5)$$

Analogno prethodnom dobija se

$$\iint \frac{\partial R}{\partial x} dxdz = \int dz \int \frac{\partial R}{\partial x} dx + \int (R_2 - R_1)\ dz,$$

gdje se R_2 kao gornja granica odnosi na AC, a R_1 kao donja granica integriranja po x.

Zatim se dobija

$$\iint \frac{\partial R}{\partial x} dxdz = \int_{AC} Rdz - \int_{OC} Rdz = -\int_{CAOC} Rdz, \quad \text{ili}$$

$$\int_{CAOC} Rdz = -\iint \frac{\partial R}{\partial x} dxdz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57,6)$$

Sabiranjem (57,5) i (57,6) dobija se

$$\int_{CAOC} (Pdx + Rdz) = \iint \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz$$

odnosno kako je u toj ravni dy = 0,

$$\int_{CAOC} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx \quad . \; . \quad (57,7)$$

Takođe je

$$\int_{ABOA} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad . \; . \quad (57,8)$$

$$\int_{BCOB} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz \quad . \; . \quad (57,9)$$

Sabiranjem triju posljednjih relacija poništavaju se cirkulacije duž strana OA, OB i OC, pa je

$$\int_{ABCA} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz +$$

$$+ \iint \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (57,10\text{ a})$$

Površina elementarnog trougla ABC je dS, pa je

$$dydz = dS\cos(n,x),$$
$$dzdx = dS\cos(n,y),$$
$$dxdy = dS\cos(n,z), \text{ ili definitivno}$$

$$\oint_C (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos (n,x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos (n,y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos (n,z) \right] dS \qquad (57,10b)$$

Relacija (57,10) pretstavlja Stokes-ovu teoremu u analitičkom obliku.

I ovo je još jedan primjer koji pokazuje prednost vektorskog računa.

§ 58. — FORMULE IZVEDENE IZ TEOREMA GAUSSA-OSTROGRADSKOG I STOKES-OVE

a. — Veza među površinskim integralom skalara i zapreminskim integralom njegovog gradijenta

Uzmimo teoremu Gaussa-Ostrogradskog

$$\int \mathrm{v}dS = \int \mathrm{div}\,\mathrm{v}\,dV$$

i zamijenimo v sa Ua, gdje je a neki konstantni vektor, a U skalarna funkcija. Onda je

$$\int U\mathrm{a}dS = \int \mathrm{div}\ (U\mathrm{a})\ dV.$$

Primjenjujući (48,2) i skraćivanjem sa a poslije iznošenja pred integralni znak, dobija se

$$\int_S U d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{grad} U dV, \quad \ldots \ldots \quad (58,1)$$

ili: **Vektorski površinski integral skalara jednak je zapreminskom integralu njegovog gradijenta.**

Ako je U = 1, dobija se poznati izraz

$$\oint d\mathbf{S} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (58,1')$$

b. — **Veza među vektorskim površinskim integralom vektora i zapreminskim integralom njegovog rotora**

Neka je dat vektorski površinski integral

$$\mathbf{u} = \int \mathbf{v} \times d\mathbf{S}.$$

Treba ga transformirati u zapreminski. Množenjem skalarno vektorom **a**, koji je konstantan dobija se

$$\mathbf{u}\mathbf{a} = \int \mathbf{a}\,(\mathbf{v} \times d\mathbf{S}), \text{ ili}$$

$$\mathbf{u}\mathbf{a} = \int (\mathbf{a} \times \mathbf{v})\, d\mathbf{S}.$$

Prema teoremi Gaussa-Ostrogradskog je

$$\mathbf{u}\mathbf{a} = \int \operatorname{div}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{v})\, dV.$$

Prema (56,9) je div (**a** × **v**) = — **a** rot **v**, jer je rot **a** = **0**, a zatim

$$\mathbf{u}\mathbf{a} = -\int \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{v} dV, \text{ i definitivno}$$

$$\int_S \mathbf{v} \times d\mathbf{S} = -\int_V \operatorname{rot} \mathbf{v} dV, \text{ ili} \quad \ldots \ldots \quad (58,2a)$$

$$\int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{v} = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{v} dV \quad \ldots \ldots \quad (58,2b)$$

Dakle, vektorski površinski integral vektora jednak je zapreminskom integralu njegovog rotora, gdje znak zavisi od reda vektora i orijentisanog elementa površine.

c. — **Veza među liniskim integralom skalara i površinskim integralom njegovog gradijenta**

Uzmimo Stokes-ovu teoremu

$$\int \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int \operatorname{rot} \mathbf{v} d\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}\,(\nabla \times \mathbf{v}) = \int (d\mathbf{S} \times \nabla)\mathbf{v}$$

i zamijenimo **v** sa U**a** kao maločas. Onda je

$$\int (U\mathbf{a}) d\mathbf{s} = \int \operatorname{rot}\,(U\mathbf{a})\, d\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}\,(\nabla \times U\mathbf{a}),$$

$$\int U d\mathbf{s} = \int d\mathbf{S} \times \nabla U, \text{ ili} \quad \ldots \ldots \quad (58,3a)$$

$$\int U d\mathbf{s} = \int d\mathbf{S} \times \operatorname{grad} U \quad \ldots \ldots \quad (58,3b)$$

d. — Na sličan način se dobija formula

$$\oint d\mathbf{s} \times \mathbf{v} = \int (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{v} \quad \ldots \ldots \quad (58,4)$$

§ 59. — DIFERENCIJALNE OPERACIJE DRUGOG REDA

Izložene operacije grad, div, rot, (**v**∇) mogu se nazvati **diferencijalne operacije prvog reda.** Naravno, onda se mogu međusobnim kombinacijama izvesti **diferencijalne operacije drugog reda,** kojima ćemo se sada pozabaviti.

1. — **Divergencija gradijenta**

Neka je dat skalar U. Treba izračunati div grad U. Prema ranijim definicijama je

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \operatorname{div}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad \ldots \ldots \quad (59,1a)$$

Izdvojimo li formalno skalar U, dobićemo

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U \quad . \ . \quad (59{,}1b)$$

U zagradi se nalazi diferencijalni operator, koji se naziva **Laplace-ov operator** ili **laplasijan.** Označava se sa Δ (delta). Dakle:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (59{,}2)$$

Primjena operatora Δ je vrlo velika u svim granama fizike. On pretstavlja simbol skalarne operacije.

Prema tome je

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (59{,}1c)$$

Simbolično:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \nabla\nabla U = \nabla^2 U \quad . \ . \ . \ . \quad (59{,}1d)$$

To pokazuje da među Hamiltonovim operatorom nabla i Laplace-ovim operatorom delta postoji slijedeća relacija:

$$\nabla\nabla = \nabla^2 = \Delta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (59{,}3)$$

Ovakvo pretstavljanje prvi je uveo Lamé.

Isti rezultat iznešene operacije može se dobiti i primjenjujući komponente operatora nabla, odnosno

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \nabla\nabla\, U = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial y} k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) U =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U$$

Vidi se da se operator Δ vrlo praktično primjenjuje na skalarne veličine polja. Međutim, uspješno i praktično se primjenjuje takođe i na vektorske, pa i na komplikovanije veličine, koje su izvedene iz vektorskih veličina — na tenzore.

Sada ćemo izračunati izraz Δ (UV), gdje su U i V skalarne funkcije. Primjenom Hamiltonovog operatora dobija se

$$\Delta (U V) = \nabla\nabla (U V) = \nabla (U\nabla V + V\nabla U) =$$

$$= (\nabla_U + \nabla)\, U\nabla V + V\nabla U) = \nabla U \nabla V + V\nabla\nabla U + U\nabla\nabla V + \nabla U \nabla V$$

i definitivno

$$\Delta (UV) = U\Delta V + 2\nabla U \nabla V + V\Delta U \quad . \quad (59{,}4)$$

2. — **Gradijent divergencije**

Neka je dat vektor **v**. Treba izračunati grad div **v**. Primijenićemo simbolični formalni metod.

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \nabla \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla\nabla \mathbf{v}, \text{ ili}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (59{,}5)$$

Inače

$$\nabla^2 = ii \frac{\partial^2}{\partial x^2} + ij \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + ik \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + ji \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + jj \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$+ jk \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + ki \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + kj \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + kk \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

je jedan od pomenutih komplikovanijih izraza, pa se relacija (59,5) obično izvodi na određeni način izračunavanja rot rot **v.**

3. — **Rotor gradijenta**

Neka je dat skalar U. Treba izračunati rot grad U. Na osnovu ranijih definicija i formula biće

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \operatorname{rot}\left(\frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right) + \ldots, \text{ odnosno}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (59{,}6a)$$

Simbolično se dobija odmah

$$\nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla)\, U = 0. \qquad (59{,}6b)$$

jer je vektorski proizvod dvaju identičnih vektora jednak nuli.

4. — **Divergencija rotora**

Neka je dat vektor **v**. Treba izračunati div rot **v**.

$$\mathrm{divrot}\,\mathbf{v} = \frac{\partial (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_x}{\partial x} + \frac{\partial (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_y}{\partial y} + \frac{\partial (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_z}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \text{ ili}$$

$$\mathrm{divrot}\,\mathbf{v} = 0. \qquad (59{,}7a)$$

Simbolično se izvede odmah:

$$\mathrm{divrot}\,\mathbf{v} = \nabla (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \nabla)\, \mathbf{v} = 0. \qquad (59{,}7b)$$

5. — **Rotor rotora**

Neka je dat vektor **v**. Treba izračunati rotrot**v**.

$$\mathrm{rotrot}\,\mathbf{v} = \mathrm{rot}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right].$$

$$\text{ili} \quad (\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{v})_x = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}\right) -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}\right) -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \Delta v_x =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \Delta v_x .$$

Dobijanjem respektivnih izraza i za druge dvije komponente i slaganjem u vektor dobija se

$$\mathrm{rotrot}\,\mathbf{v} = \mathrm{graddiv}\,\mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (59{,}8a)$$

Iz izvođenja ove relacije se vidi da je analitički metod glomazan, a kao potvrda toga navodimo metod pomoću operatora, naime

$$\mathrm{rotrot}\,\mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \mathbf{v}) - \Delta\, \mathbf{v}, \qquad (59{,}8b)$$

gdje je samo primjenjeno poznato pravilo o vektorsko-vektorskom proizvodu i definitivni rezultat se odmah dobije.

Na osnovu ovih operacija i na osnovu izloženih teorema mogu se pored ostalog i izvesti izvjesni zaključci u vezi vektorskog polja.

Ako je vektor **v** potencijalni, onda je rotor toga vektora jednak nuli, jer je **v** = gradU, pa je rot **v** = rotgradU = 0. Isti rezultat se može dobiti i neposrednom primjenom Stokes-ove teoreme, jer je onda liniski integral jednak nuli. Važi i obrnuta tvrdnja.

To znači, da bi u nekom vektorskom polju vektor **v** bio potencijalni, potreban i dovoljan uslov za to je da polje bude **bezvrtložno,** tj. da rotor toga vektora bude jednak nuli. **Potencijalno polje nema vrtloga.**

Iz relacije (59,7) vidi se da **vrtložno polje nema izvora; — izdašnost vrtložnog polja ravna je nuli.** Onda se i površina, po kojoj se uzima integral rotora, pretvara u tačku, — postaje ravna nuli.

Prema tome se i svaki solenoidni vektor **v** može pretstaviti kao rotor nekog drugog vektora, na pr. vektora **u.** Naime, ako je divv = 0, onda se može staviti **v** = **rotu.**

§ 60. — O NEKIM SVOJSTVIMA OPERATORA ∇

Iz dosadašnjeg izlaganja se vidi da je praktičnost primjene Hamiltonovog operatora ∇ vrlo velika. U savremenoj fizici se sve više i više upotrebljava, jer se pored ostalog i vrlo brzo dolazi do rezultata.

Ali, prilikom rada sa operatorom ∇ treba stalno imati na umu njegova svojstva, jer i mala neopreznost može dovesti do pogrešnih rezultata i zaključaka.

Analiziraćemo neke ranije navedene izraze.

Poznato je da je $\mathrm{grad} U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$. Ovdje operator ∇ jednostavno djejstvuje na skalar U.

U izrazu $\mathrm{div} \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ operator ∇ takođe djejstvuje na vektor **v**, naravno na određeni način. Analogno je i za rot $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$.

Uzmimo sada slijedeći izraz: $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}$. Prema § 43. je

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = u_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} .$$

Ovdje operator ∇ djejstvuje samo na vektor **v**, koji se nalazi iza njega.

U izrazu $\nabla \mathbf{u}\, \mathbf{v} = (\nabla_u \mathbf{u})\, \mathbf{v} + (\nabla_v \mathbf{u})\, \mathbf{v} = \mathbf{v} \mathrm{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}$ je ∇ zamjenjen sa $\nabla_u + \nabla_v$. Tu se vidi da operator djejstvuje na oba vektora, naravno prema uslovima koji su u izrazu dati.

Ako je dat izraz $\nabla (\mathbf{uv})$ onda se takođe zamijeni ∇ sa $\nabla_u + \nabla_v$ i dobije se izraz (56,7), pri čemu se vodi strogo računa o tome koji je i gdje proizvod naznačen. Na pr. $\nabla (\mathbf{uv}) \neq (\nabla \mathbf{u})\, \mathbf{v}$.

Prema tome **operator ∇ djejstvuje na faktore koji se nalaze iza njega, a ne djejstvuje na faktore ispred sebe.** Djejstvo se vrši na način naznačen u dotičnom zadatku (različiti proizvodi i slično).

Zamjena ∇ dotičnim sabircima znači da svaki sabirak djejstvuje na onu veličinu koju pokazuje njegov indeks, a ostale veličine se pri operaciji sa tim označenim operatorom smatraju kao konstante, što je već ranije spomenuto.

Važno je svojstvo operatora ∇, što se pomoću njega rješavaju zadaci bez upotrebe ma kakvog koordinatnog sistema.

§ 61. — TRANSFORMACIJA INTEGRALA POMOĆU OPERATORA ∇

Teorema Gaussa-Ostrogradskog se može napisati i u slijedećem obliku

$$\int \mathbf{v} d\mathbf{S} = \int dV \,.\, \nabla \mathbf{v}, \qquad (61,1a)$$

a takođe i iz nje izvedene:

$$\int d\mathbf{S} \,.\, U = \int dV \nabla U, \int d\mathbf{S} \times \mathbf{v} = \int dV \nabla \times \mathbf{v} \,. \qquad (61,1b)$$

Odavde se može izvući zaključak kako se može površinski integral trasformirati u zapreminski, naime

površinski integral se transformira u zapreminski integral kada se orijentisani površinski element formalno zamijeni proizvodom zapreminskog elementa i operatora ∇, odnosno formalnom zamjenom

$$d\mathbf{S} \rightarrow dV\nabla \qquad (61,2)$$

Isto tako se i Stokes-ova teorema može napisati u slijedećem obliku

$$\int \mathbf{v} d\mathbf{s} = \int d\mathbf{S}\, (\nabla \times \mathbf{v}) = \int (d\mathbf{S} \times \nabla)\mathbf{v}, \qquad (61,3a)$$

a takođe i iz nje izvedene

$$\left.\begin{aligned} \int d\mathbf{s} V &= \int (d\mathbf{S} \times \nabla)\, V = \int d\mathbf{S} \times \mathrm{grad} V, \\ \int d\mathbf{s} \times \mathbf{v} &= \int (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \qquad (61,3b)$$

Odavde se može izvući zaključak kako se liniski integral može transformirati u površinski, naime **liniski integral se transformira u površinski integral kada se orijentisani liniski element formalno zamijeni vektorskim proizvodom orijentisanog površinskog elementa i operatora ∇**, odnosno formalnom zamjenom

$$d\mathbf{s} \rightarrow d\mathbf{S} \times \nabla \qquad (61,4)$$

Naravno važi za oba slučaja da se ne mora raditi samo o vektoru **v**, nego i o proizvoljnoj linearnoj funkciji vektora, koja može na izgled biti i vrlo komplikovana.

Ovakav način transformacije je vrlo podesan pri rješavanju raznih zadataka.

§ 62. — POISSON-OVA I LAPLACE-OVA JEDNAČINA. PODJELA VEKTORSKIH POLJA

U § 41 pokazana je veza među jačinom električnog polja i potencijalom: **E** = — gradU. Isto tako i u hidrodinamici vektor brzine može biti potencijalni, pa je **v** = gradU, gdje je U potencijal brzina. Primjeni li se teorema Gaussa-Ostrogradskog kao u § 50, dobija se

$$\int_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = 4\pi\int_V \varrho dV, \quad \ldots\ldots \quad (62,1)$$

gdje je ϱ gustina opterećenja. S druge strane je

$$\int_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{E}dV \quad \ldots\ldots \quad (62,2)$$

Onda je

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\varrho. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62,3)$$

Zamjenom vektora **E** biće prema (59,1)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\varrho, \text{ ili} \quad \ldots \quad (62,4a)$$

$$\triangle U = -4\pi\varrho. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62,4b)$$

Ova jednačina se naziva **Poisson-ova jednačina.** I uopšte jednačina ovakvog tipa nosi taj naziv, a izvođenje, koje se odnosi na jednu oblast fizike, može se uopštiti.

Gdje nema opterećenja biće $\varrho = 0$, pa se iz (62,4) dobija slijedeća važna jednačina:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \text{ ili} \quad \ldots \quad (62,5a)$$

$$\triangle U = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62,5b)$$

Ova jednačina se naziva **Laplace-ova jednačina.**

Jednačine (62,4) i (62,5) igraju vrlo veliku ulogu u fizici; u teoriji polja. Teorija ovih jednačina pretstavlja značajan dio matematike, odnosno diferencijalnih jednačina.

Napominjemo da je i jednačina $\triangle U = \varrho$ takođe Poissonova jednačina, jer konstantni faktor 4π uopšte ne mijenja tip jednačine.

Sada ćemo dokazati da postoji samo jedno rješenje ove jednačine. Da bismo to dokazali pretpostavimo da su na neki način nađena dva rješenja U_1 i U_2. Onda za pojedini takav slučaj važi

$$\triangle U_1 = -4\pi\varrho \text{ i } \triangle U_2 = -4\pi\varrho.$$

Oduzimanjem se dobija

$$\triangle (U_1 - U_2) = 0.$$

Odavde se vidi da dobijeno polje nema izvora, a to znači ni vektorskih linija koje polaze od izvora. S druge strane nema ni zatvorenih vektorskih linija, jer je rotv = 0, pa prema tome u čitavom polju U_1—U_2 nema vektorskih linija, pa je

$$U_1 - U_2 = \text{const} \quad \ldots\ldots \quad (62,6)$$

Odavde se vidi da je rješenje Poissonove jednačine jednoznačno, jer ako se potencijalima dodaje jedna te ista konstantna veličina, to nema nikakvog značaja.

Na taj način se dolazi do vrlo važnog zaključka, a to je: ako se na ma kakav način nađe makar jedno rješenje ove jednačine, onda je sigurno da je to jedno jedino rješenje.

Napominjemo da u ovom slučaju funkcija mora biti analitička u cijelom prostoru, uključivši i tačke u beskonačnosti.

Ovdje nećemo izlagati metode rješavanja Poissonove jednačine, nego ćemo navesti samo rješenje te jednačine, koja glasi

$$U = \int \frac{\rho d V}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62,7)$$

Ovdje se podrazumijeva da su određeni granični uslovi. Često je podesnije pri rješavanju raznih zadataka polaziti od same Poisson-ove jednačine, nego od njenog integrala (62.7).

Kao specijalan slučaj rješenja Poissonove jednačine može poslužiti izraz za potencijal elektrostatičkog polja. Ako je polje tačkastih opterećenja, onda je potencijal polja jednak sumi potencijala pojedinih opterećenja:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{r_i},$$

gdje je r_i rastojanje tačke polja, u kojoj se potencijal traži, od opterećenja q_i. U slučaju površinskog opterećenja elementarno opterećenje će biti $dq = \rho dV$. U posljednjem slučaju će se dobiti (62,7), gdje je r rastojanje tačke polja, koja ima potencijal V, od elementa zapremine dV.

Sada se može dati klasifikacija vektorskih polja. Prema vrijednosti rotora i divergencije vektorska polja se mogu podijeliti na četiri vrste:

1. — **Potencijalno ili bezvrtložno polje,** kada je svuda u polju $\text{rot}\ \mathbf{v} = 0$, a $\text{div}\ \mathbf{v} \neq 0$ u nekim tačkama. Neki autori takvo polje nazivaju i **lamelarno polje;**

2. — **Solenoidno**[1] **ili bezizvorno polje,** kada je svuda u polju $\text{div}\ \mathbf{v} = 0$, a $\text{rot}\ \mathbf{v} \neq 0$ makar u nekim tačkama;

3. — **Laplace-ovo polje,** kada je svuda u polju $\text{rot}\ \mathbf{v} = 0$ i $\text{div}\ \mathbf{v} = 0$; i

4. — **Složeno polje ili polje opšteg oblika,** kada je u nekim tačkama polja $\text{rot}\ \mathbf{v} \neq 0$ i $\text{div}\ \mathbf{v} \neq 0$.

Analize pojedine vrste polja već su uglavnom date tokom dosadašnjeg izlaganja.

[1] Naziv solenoidno polje dao je lord Kelvin.

§ 63. — PRIMJENA I PRIMJERI

1. — **Bernoulli-eva jednačina.**

Euler-ova jednačina (52,6) može se transformirati tako da dobije vrlo zgodan oblik. Tu transformaciju je prvi izvršio Heinrich Weber, pa se obično i zove njegovim imenom. Transformacija se sastoji u tome što se primijeni (56,8), odakle je $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\text{grad}\ v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot}\ \mathbf{v}$.

Zamjenom se dobija

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\text{grad}\ v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot}\ \mathbf{v} = -\text{grad}U - \frac{1}{\rho}\text{grad}\ p, \quad . \quad . \quad . \quad (63,1)$$

gdje je spoljašnja sila na jedinicu mase uzeta kao konzervativna i izražena pomoću potencijalne energije.

Iz § 55 je $\text{rot}\ \mathbf{v} = 2\vec{\omega}$, gdje je $\vec{\omega}$ ugaona brzina. To važi uglavnom za kretanje čvrstog tijela. Ali i kod kretanja tečnosti može se kao jedna od komponenata složenog kretanja djelića tečnosti uzeti rotacija toga djelića oko neke momentalne ose, gdje se taj djelić tečnosti smatra kao čvrsto tijelo, te se prema tome posljednja relacija može primijeniti i na takvo kretanje. Takvo kretanje naziva se vrtložno kretanje.

Označi li se toplotna funkcija jedinica mase tečnosti sa w, specifična zapremina sa $V = \frac{1}{\rho}$, pod pretpostavkom da je entropija konstantna, dobija se

$$dw = Vdp = \frac{1}{\rho}dp.$$

Onda se jednačina (63,1) može napisati

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\text{grad}\ v^2 - (\mathbf{v} \times \text{rot}\ \mathbf{v}) = -\text{grad}U - \text{grad}\ w. \quad . \quad . \quad (63,2)$$

Ako je kretanje tečnosti stacionarno, tj. brzina kretanja je konstantna u toku vremena, onda je $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$, pa se može pisati

$$\frac{1}{2}\text{grad}\ v^2 - (\mathbf{v} \times \text{rot}\ \mathbf{v}) = -\text{grad}U - \text{grad}\ w. \quad . \quad . \quad (63,3)$$

Označimo sa **l** vektor koji odgovara strujnim linijama. Poznato je da je projekcija gradijenta na neki pravac ravna izvodu u tom pravcu. Uzmimo projekcije svih članova jednačine (63,3) na pravac **l**. Onda jednačina (63,3) prelazi u

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)=-g\frac{dz}{dl},$$

gdje je osa z uzeta duž sile teže, a $\frac{dz}{dl}$ je ravno kosinusu ugla među **g** i **l**. Dalje se dobija

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}+w+gz\right)=0, \text{ ili definitivno}$$

$$\frac{v^2}{2}+w+gz=\text{const.} \qquad (63,4)$$

Ovo je **Bernoulli-eva jednačina** za stacionarno kretanje. Zamijeni li se w u funkciji pritiska, ova jednačina se može napisati i ovako:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U=\text{const.} \qquad (63,5)$$

Ovdje konstanta na desnoj strani, odnosno zbir svih članova na lijevoj strani, pretstavlja cjelokupnu energiju jedinice mase.

2. — Fourier-ova jednačina provođenja toplote

Neka je T temperatura nekog tijela mjerena stepenima, k njegova provodljivost, ϱ gustina i c_g specifična toplota po gramu.

Poznato je da se u toku vremena ujednačuje temperatura raznih djelova tijela, odnosno da nestaje temperaturne razlike među raznim mjestima u dotičnom tijelu. Toplota prelazi sa mjesta više temperature na mjesta niže temperature. Protok toplote, odnosno količina toplote koja u jedinici vremena proteče kroz jedinicu površine, koja je normalna na pravcu proticanja, proporcionalan je sa **padom temperature**, a to znači da je proporcionalan negativnom gradijentu temperature.

Biće dakle

$$\mathbf{j}=-k\,\text{grad}\,T \qquad (63,6)$$

Količina toplote koja u jedinici vremena isteče iz jedinice zapremine je div **j**. Onda je promjena temperature

$$dT=-\frac{1}{\rho c_g}\,\text{div}\,\mathbf{j}\,dt, \text{ ili}$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{k}{\rho c_g}\,\text{divgrad}\,T.$$

Odavde se definitivno dobija jednačina provođenja toplote, ili tzv. Fourier-ova jednačina:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{k}{\rho c_g}\triangle T. \qquad (63,7a)$$

Kako T uopšte uzevši zavisi i od drugih promjenljivih, ova jednačina se može napisati

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k}{\rho c_g}\triangle T. \qquad (63,7b)$$

Ovo je parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda, koja se kao i ostale rješava pod uslovom da su određeni početni i krajnji uslovi, što zavisi od zahtjeva i uslova pojedinog zadatka.

3. — Vektorski potencijal magnetnog polja

Kada je kod elektrostatičkog polja bio poznat raspored opterećenja, izračunavalo se je vektorsko polje na osnovu izvora polja. To polje je bilo **bezvrtložno.** Pri tom izračunavanju služi se elektrostatičkim potencijalom, skalarom koji se definiše i izračunava prema ranije iznešenim definicijama i relacijama.

Postavi li se zadatak da se izračuna polje bez izvora kada su poznati vrtlozi, onda se pribjegava olakšanju, koje je analogno onome u elektrostatičkom polju. Uvede se novi vektor, koji je sa vektorom jačine magnetnog polja vezan relacijom

$$\mathbf{H}=\text{rot}\,\mathbf{A}. \qquad (63,8)$$

Vektor **A** naziva se **vektorski potencijal.** Pomoću njega je, dakle, lako proučavati magnetno polje jednosmjerne struje, kao što se pomoću skalarnog potencijala U olakšava proučavanje električnog polja stacionarnog sistema električnih opterećenja.

Sada ćemo na jedan način naći izraz za vektorski potencijal i to pomoću Biot-Savart-ovog zakona. Označimo sa **j** gustinu struje, tj. onu količinu elektriciteta koja u jedinici vremena proteče kroz jedinicu površine, koja je normalna na struji. Onda je

$$j = \frac{dJ}{dS}, \text{ ili } dJ = jdS. \quad \ldots\ldots \quad (63{,}9)$$

Uzmemo li liniski element struje Jds, odmah se na osnovu Biot-Savart-ovog zakona može izračunati jačina magnetnog polja, koje ta struja izaziva oko provodnika kroz koji protiče. Taj zakon glasi

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{dJ\,(ds \times \mathbf{r})}{r^3}, \quad \ldots\ldots \quad (63{,}10)$$

gdje je dJds element struje, a **r** rastojanje od tog elementa do tačke u kojoj se traži dotično magnetno polje. c je koeficijent proporcionalnosti, koji zavisi samo od izbora jedinica. U teoriji elektriciteta se dokazuje da je to brzina ravna brzini prostiranja svjetlosti.

Zamjenom se dobija

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\, dSds.$$

Kako je dSds = dV element zapremine provodnika, kroz koji struja protiče, biće

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\, dV. \quad \ldots\ldots \quad (63{,}11)$$

Cjelokupna jačina magnetnog polja je

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\, dV, \quad \ldots\ldots \quad (63{,}12)$$

gdje se integriranje uzima po cijelom provodniku, kroz koji protiče struja J.

Uspije li se izraz (63,10) prikazati kao rotor nekog vektora, dobiće se izraz za **A**.

Transformirajmo izraz $\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}$. Odmah se vidi da je $\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, pa je

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\left(\mathbf{j} \times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right).$$

Prema (56,2) se dobija

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\cdot\mathbf{j}\right) - \frac{1}{r}\operatorname{rot}\mathbf{j}.$$

Vrijednost vektora **j** u elementu dV ne zavisi od pomjeranja tačke posmatranja, pa je rot**j** = **0**, te je

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\cdot\mathbf{j}\right). \quad \ldots\ldots \quad (63{,}13)$$

Definitivno se dobija

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\mathbf{j}\right) dV.$$

Ovdje se rotor uzima po koordinatama tačke posmatranja, a integriranje po zapremini provodnika, kroz koji protiče struja, pa se može izmijeniti red operacija.

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}dV}{r}\right).$$

Prema tome traženi vektor, odnosno vektorski potencijal je

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}dV}{r}. \quad \ldots\ldots \quad (63{,}14)$$

Vektor gustine struje za magnetno polje igra ulogu kao skalar gustine opterećenja za električno polje.

Analogija među skalarnim i vektorskim potencijalom vidi se iz slijedećih formula:

$$U = \int\frac{\varrho dV}{\varrho}, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}dV}{r},$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U = \int\frac{\varrho\mathbf{r}}{r^3}\,dV, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}\,dV.$$

Vidi se da se izraz vektorski potencijal mogao izvesti i polazeći od Poisson-ove jednačine za **A**, odnosno od izraza

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}. \qquad \dots\dots \quad (63,15)$$

4. — Izračunati izraz $\mathbf{a}\,.\,\nabla(\mathbf{bc})$.

Odg.: $\mathbf{ba}\,.\,\nabla\mathbf{c} + \mathbf{ca}\,.\,\nabla\mathbf{b}$.

5. — Izračunati izraz $\Delta(U\mathbf{v})$, gdje skalar U karakteriše skalarno, a vektor **v** vektorsko polje.

Odg.: $U\Delta\mathbf{v} + \mathbf{v}\Delta U + 2\,(\mathrm{grad}\,U\nabla)\,\mathbf{v}$.

6. — Dat je izraz $\Delta\,(\mathrm{grad}U)$. Transformirati ga u gradijent neke funkcije.

Odg.: $\mathrm{grad}\Delta(U)$.

7. — Izračunati $\Delta(\mathbf{ar}) + \mathrm{grad}\,(\mathbf{ar})$.

Odg.: **a**.

8. — Transformirati površinski integral $\int\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times d\mathbf{S})$ u zapreminski.

Uputstvo: Staviti $d\mathbf{S}\rightarrow\nabla dV$, $\nabla = \nabla_A + \nabla_B$.

Odg.: $\int\mathrm{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{A}dV + \int\mathbf{B}\mathrm{div}\mathbf{A}dV - \int\mathbf{B}\times\mathrm{rot}\mathbf{A}dV - \int\mathbf{A}(\mathbf{B}\nabla)dV$.

§ 64. — GREEN-OVE FORMULE

1. — Transformacija nekih površinskih integrala u zapreminske praktično se može izvršiti ne samo pomoću teoreme Gaussa-Ostrogradskog, nego i nizom drugih formula. Čak prije Gaussa Green je uspio pronaći formule za tu transformaciju, pa se s pravom nazivaju njegovim imenom. Radi lakšeg izvođenja mi ćemo se ipak poslužiti teoremom Gaussa-Ostrogradskog, iako Green za nju nije znao prilikom pronalaženja ovih formula.

Neka su date dvije skalarne funkcije $U(\mathbf{r})$ i $V(\mathbf{r})$, koje zavise od koordinata položaja. Pretpostavlja se da su i funkcije i njihovi parcijalni prvi izvodi, koji nas ovdje interesuju, kontinualni u cjelokupnom području, u kojem se posmatraju. Sastavimo slijedeći vektor

$$\mathbf{v} = U\mathrm{grad}W, \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (64,1)$$

koji će karakterisati vektorsko polje. Primijenimo na njega teoremu Gaussa-Ostrogradskog, pa ćemo imati

$$\int_S \mathbf{v}\,d\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dV,$$

$$\int \mathrm{div}(U\mathrm{grad}W)dV = \int U\mathrm{grad}Wd\mathbf{S} \qquad \dots \quad (64,2)$$

Podintegralni izraz na lijevoj strani je

$$\mathrm{div}(U\mathrm{grad}W) = \mathrm{grad}U\mathrm{grad}W + U\Delta W, \text{ pa je}$$

$$\int_V(\mathrm{grad}U\mathrm{grad}W + U\Delta W)dV = \int_S U\mathrm{grad}Wd\mathbf{S}. \qquad . \quad (64,3a)$$

Ova formula se može napisati i u drugom obliku, kada se izvrši slijedeća transformacija:

$$U\mathrm{grad}Wd\mathbf{S} = U(\mathrm{grad}W)_n dS,$$

gdje je projekcija gradijenta u pravcu normale na površini jednaka izvodu funkcije W u tom pravcu, ili

$$U\mathrm{grad}Wd\mathbf{S} = U\frac{\partial W}{\partial n}dS.$$

Zamjenom se dobija

$$\int_V(\mathrm{grad}U\mathrm{grad}W + U\Delta W)dV = \int_S U\frac{\partial W}{\partial n}dS. \qquad . \quad (64,3b)$$

Jednačina (64,3) naziva se **prva Greenova formula.**

U analitičkom obliku prva Green-ova formula glasi:

$$\int_V\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}\right) + U\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)\right]dV =$$

$$= \int_S U\left[\frac{\partial W}{\partial x}\cos(\mathbf{n},x) + \frac{\partial W}{\partial y}\cos(\mathbf{n},y) + \frac{\partial W}{\partial z}\cos(\mathbf{n},z)\right]dS.$$

Ako je W = U, prva Greenova formula dobija slijedeći oblik:

$$\int_V [(\mathrm{grad}U)^2 + U\Delta U]dV = \int_S U\frac{\partial U}{\partial n}dS. \quad . \quad . \quad (64,4)$$

Neki autori ovu formulu (64,4) nazivaju druga Greenova formula, što mi nećemo usvojiti, jer je ona samo specijalan oblik prve Greenove formule.

Ako se u (64,3) funkcije U i W međusobno zamijene, dobiće se

$$\int_V (\mathrm{grad}U\,\mathrm{grad}W + W\Delta U)dV = \int_S W\,\mathrm{grad}U\,dS. \quad . \quad . \quad (64,5)$$

Oduzimanjem (64,5) od (64,3) eliminiše se član gradUgradW i dobija se

$$\int_V (U\Delta W - W\Delta U)dV = \int_S (U\,\mathrm{grad}W - W\,\mathrm{grad}U)dS, \qquad (64,6a)$$

ili, uzevši u obzir drugi oblik

$$\int_V (U\Delta W - W\Delta U)dV = \int_S \left(U\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS. \qquad (64,6b)$$

Jednačina (64,6) naziva se **druga Greenova formula.** Neki autori ovu formulu nazivaju treća Greenova formula, što mi iz navedenih razloga nećemo usvojiti.

Ako jedna od tih funkcija, recimo U, zadovoljava Laplace-ovu jednačinu, onda (64,6b) postaje

$$\int_V U\Delta W dV = \int_S \left(U\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS. \quad . \quad . \quad (64,7)$$

U ovoj jednačini U je ma koje rješenje Laplace-ove jednačine, a W proizvoljna skalarna funkcija, pri čemu se vodi računa da obje funkcije i njihovi prvi izvodi budu kontinualni u svim tačkama zapremine, koju obuhvata dotična površina.

Druga Greenova formula je vrlo važna iz toga razloga, što se pomoću nje dobija vrijednost potencijala u datoj tački kada je poznat raspored izvora u polju koje se proučava.

2. — Sada ćemo posmatrati slučaj kada je u Greenovim formulama $W = \frac{1}{r}$, gdje je r rastojanje od tačke A sa tekućim koordinatama do tačke 0, koja može pretstavljati pol.

Odmah se zaključuje da funkcija $\frac{1}{r}$ zadovoljava Laplace-ovu jednačinu

$$\Delta\frac{1}{r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64,8)$$

za sve tačke, za koje je r različito od nule. To se dokazuje na slijedeći način

$$\Delta\frac{1}{r} = \mathrm{divgrad}\frac{1}{r} = \mathrm{div}\left(-\frac{1}{r^3}\mathbf{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\mathrm{div}\mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Navodimo i analitički dokaz. Uzme li se pomoćni koordinatni sistem sa početkom u O biće

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ pa je } \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} =$$

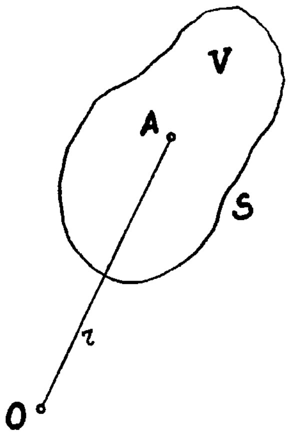
$$= -\frac{1}{r^2}\,\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

Analogno je $\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3y^2}{r^5}$, $\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3z^2}{r^5}$.

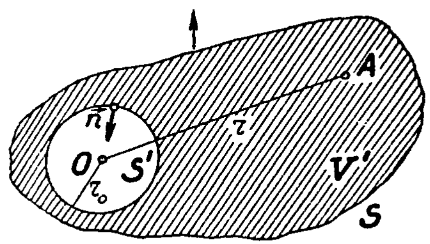
Sabiranjem se dobije isti rezultat kao kod vektorskog načina. Poslije zamjene u (64,6) dobija se

$$-\int_V \frac{\Delta U}{r}dV = \int_S \left(U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right)dS. \quad . \quad . \quad (64,9)$$

Osim ovog slučaja kada se tačka 0 nalazi izvan zapremine V, koju obuhvata površina S, tj. ne pripada oblasti integriranja (sl. 57), treba razlikovati drugi slučaj kada se tačka 0 nalazi u zapremini V, tj. pripada oblasti integriranja (sl. 58).



Sl. 57.



Sl. 58.

Naime, i iz sl. 57 se vidi da je za prvi slučaj $r \neq 0$, odnosno takođe $\frac{1}{r} \neq 0$ i $\Delta \frac{1}{r} = 0$, pa važi (64,9).

U drugom slučaju (sl. 58) kada se tačka O nalazi u unutrašnjosti zapremine V tačke A i O se očevidno mogu i poklopiti, tj. može biti r = O. Onda je $\Delta \frac{1}{r}$ neodređen izraz, jer $\frac{1}{r}$ tada teži ka beskonačnosti. Da bi se Greenova formula mogla uspješno primijeniti i na taj slučaj opisaćemo oko tačke O loptu S' radiusa r_0 tako da bude izvan posmatrane zapremine V'. Onda se Greenova formula može primijeniti na zapreminu V' ograničenu površinama S spolja i S' iznutra, gdje je svuda $\frac{1}{r} \neq 0$

$$-\int_{V'} \frac{1}{r} \Delta U dV = \int_{S} \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS +$$

$$+ \int_{S'} \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS' \quad . \; . \; . \; . \quad (64,10)$$

Element sferne površine je

$dS' = r_0^2 \, d\Omega$, gdje je $d\Omega$ element tjelesnog ugla sa tjemenom u točki O, centru lopte. Prema tome površinski integral po sfernoj površini S' je

$$\int_{S'} \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS' = \int_{S'} \frac{1}{r_0^2} U dS' + \int_{S'} \frac{1}{r_0} \frac{\partial U}{\partial r_0} dS' =$$

$$= \int_{S'} U d\Omega + \int_{S'} r_0 \frac{\partial U}{\partial r_0} d\Omega .$$

Kada $r_0 \to 0$, onda se obuhvata cjelokupna zapremina V, a u posljednjem izrazu drugi sabirak teži nuli, tj.

$$\lim_{r_0 \to 0} \int_{S'} r_0 \frac{\partial U}{\partial r_0} d\Omega = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64,11)$$

Granična vrijednost prvog sabirka u tom slučaju je

$$\lim_{r_0 \to 0} \int_{S'} U d\Omega = 4\pi U. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64,12)$$

Granična vrijednost integrala na lijevoj strani relacije (64,10) je

$$\lim_{r_0 \to 0} \int_{V'} \frac{\Delta U}{r} dV = \int_{V} \frac{\Delta U}{r} dV. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (64,13)$$

Prema tome se dobija

$$-\int_{V} \frac{\Delta U}{r} dV = \int_{S} U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS - \int_{S} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS + 4\pi U, \text{ ili}$$

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int_{V} \frac{\Delta U}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_{S} \frac{1}{r} \operatorname{grad} U dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S} U \operatorname{grad} \frac{1}{r} dS. \quad (64,14)$$

Na taj način smo dobili potencijal u funkciji integrala njegovih vrijednosti i izvoda po površini i zapremini.

Dobijenu relaciju ćemo i dalje transformirati. Iz (64,5) se dobija

$$\int_V \mathrm{grad}U\,\mathrm{grad}W\,dV = \int_S W\,\mathrm{grad}U\,dS - \int_V W\triangle U\,dV.$$

Izmijene li se U i W međusobno, dobija se

$$\int_S U\,\mathrm{grad}W\,dS - \int_V U\triangle W\,dV = \int_S W\,\mathrm{grad}U\,dS - \int_V W\triangle U\,dV. \qquad (64{,}15)$$

Ovdje nećemo vršiti zamjenu W sa $\frac{1}{r}$, nego ćemo smatrati da posljednja relacija (64,15) ne zavisi od (64,14). Prebacimo sve članove iz (64,15) na desnu stranu i saberimo sa (64,14), pa ćemo dobiti

$$4\pi U = \int_V \left(-W - \frac{1}{r}\right)\triangle U\,dV + \int_V V\triangle W\,dV +$$

$$+ \int_S \left(W + \frac{1}{r}\right)\mathrm{grad}U\,dS - \int_S U\,\mathrm{grad}\left(W + \frac{1}{r}\right)dS.$$

Uzme li se zamjena:

$$-W - \frac{1}{r} = G_1,$$

gdje je G_1 skalar (ne brkati sa gradijentom!), biće

$$4\pi U = \int_V G_1\triangle U\,dV + \int_V U\triangle W\,dV - \int_S G_1\,\mathrm{grad}U\,dS + \int_S U\,\mathrm{grad}G_1\,dS.$$

Ako funkcija W zadovoljava Laplace-ovu jednačinu i ako je na površini S skalar $G_1 = O$, dobija se poslije zamjene U sa W i uzimanjem mjesto G_1 izraza $G = U - \frac{1}{r}$:

$$4\pi W = \int_V G\triangle W\,dV + \int_S W\,\mathrm{grad}G\,dS. \qquad (64{,}16a)$$

Inače je prema prethodnoj notaciji

$$4\pi U = \int_V G_1\triangle U\,dV + \int_S U\,\mathrm{grad}G_1\,dS. \qquad (64{,}16b)$$

Neki autori ovu formulu (64,16) takođe nazivaju Greenova formula, a funkciju $G = U - \frac{1}{r}$ Greenova funkcija.

Prema ovoj formuli može se skalar W odnosno U u polju izračunati iz njegovih površinskih vrijednosti i vrijednosti $\triangle U$ unutra zapremine V.

3. — Greenova formula se može generalisati i za slučaj više od dvije skalarne funkcije. Neka je vektor $U\nabla W$ pomnožen skalarnom funkcijom Q. Prema teoremi Gaussa-Ostrogradskog dobija se

$$\int_S UQ\,\mathrm{grad}W\,dS = \int_V \mathrm{div}(UQ\,\mathrm{grad}W)\,dV = \int_V Q\,\mathrm{grad}U\,\mathrm{grad}W\,dV +$$

$$+ \int_V U\,\mathrm{div}(Q\,\mathrm{grad}W)\,dV = \int_V Q\,\mathrm{grad}U\,\mathrm{grad}W\,dV +$$

$$+ \int_V UQ\triangle W\,dV + \int_V U\,\mathrm{grad}Q\,\mathrm{grad}W\,dV.$$

Odavde je

$$\int_V Q\,\mathrm{grad}U\,\mathrm{grad}W\,dV = \int_S UQ\,\mathrm{grad}W\,dS - \int_V U\,\mathrm{div}(Q\,\mathrm{grad}W)\,dV \qquad (64{,}17a)$$

ili simbolično

$$\int_V Q\nabla U\nabla W\,dV = \int_S UQ\nabla W\,dS - \int_V U\nabla(Q\nabla W)\,dV. \qquad (64{,}17b)$$

Ovu generalizaciju je prvi izveo Thomson (Lord Kelvin).

Primjer i zadatak:

1. — Energija potencijalnog polja

Neka je potencijalno polje okarakterisano vektorom $\mathbf{v} = -\,\mathrm{grad}U$, gdje je U potencijal polja. Prema § 50. divergencija polja je

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 4\pi\varrho, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (64{,}18)$$

gdje je ϱ gustina sredine.

Potencijalna energija polja je

$$W = \frac{1}{2}\int_V U\varrho dV, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (64{,}19)$$

gdje je U potencijal polja. Zamijeni li se ϱ iz (64,18) dobija se

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V U \operatorname{div} \mathbf{v} dV = -\frac{1}{8\pi}\int U \Delta U dV \quad . \ . \ . \qquad (64{,}20)$$

Prema Greenovoj formuli (64,4) biće

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V (\operatorname{grad} U)^2 \, dV - \frac{1}{8\pi}\int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

Kao zapreminu ovdje možemo uzeti pomoćnu loptu u kojoj se nalazi cjelokupna zapremina V. Pretpostavimo da radius lopte raste do beskonačnosti. Onda drugi integral na desnoj strani teži nuli, a ostane samo prvi integral, koji se uzima za beskonačno velike dimenzije prostora.

Onda je

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_\infty (\operatorname{grad} U)^2 \, dV \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (64{,}21)$$

Jedinica zapremine prostora sadrži energiju

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} (\operatorname{grad} U)^2, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (64{,}22)$$

koja se naziva **gustina energije polja.**

Specijalno za elektrostatičko polje je

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U, \text{ ili u vakuumu}$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (64{,}23a)$$

Ova energija je raspoređena po cjelokupnom prostoru, a jedinica zapremine sadrži energiju

$$W_1 = \frac{E^2}{8\pi}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (64{,}23b)$$

koja se naziva **gustina elektrostatičke energije polja.**

Ako se radi o tečnosti koja se kreće brzinom **v**, kinetička energija će biti

$$\int \frac{v^2 dm}{2} = \int \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} dV = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{v}^2 dV. \qquad . \quad (64{,}24)$$

2. — Data je lopta radiusa R. Po cjelokupnoj zapremini te lopte ravnomjerno je raspoređeno opterećenje q. Naći električnu energiju te lopte.

Odg.: $\dfrac{3q^2}{5R}$.

§ 65. — DISKONTINUITET POLJA: TAČKASTI, LINISKI I POVRŠINSKI IZVORI

Pri proučavanju polja uglavnom se do sada pretpostavljalo da postoji kontinuitet dotične materijalne sredine. Takođe su i vektorske i skalarne funkcije bile kontinualne. A kada se naišlo na neki tačkasti izvor, onda se izdvojio nekom površinom (najlakše sfernom) i proučavao ostali prostor, po kojem je pod pretpostavkom kontinualna raspodjela dotične materije.

Sada ćemo posmatrati baš te diskontinuitete, koji postoje u polju.

Ako izvor obuhvata toliko malu zapreminu, da se u upoređenju sa rastojanjem izvora od tačke u kojoj se polje posmatra može posmatrati beskonačno mala, onda se kaže da se izvor nalazi u tački, da je tačkast. U fizici se mahom konkretizira oblik materije, koji se proučava. Tako u »tački« može biti koncentrisana ili neka masa, ili neko električno ili magnetno opterećenje, pa se takve tačke nazivaju opterećenje ili takođe i pol. Ovi termini su uzeti iz teorije elektromagnetizma i gravitacije.

Potencijal tačkastog opterećenja je prema ranijem

$$U = \int \frac{\varrho dV}{r} = \frac{q}{r},$$

gdje je q opterećenje. Ako je više tačkastih opterećenja, onda je

$$U = \sum \frac{q}{r}. \qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (65{,}1)$$

Ako mase ili opterećenja obrazuju vrlo usku cijev, čije su poprečne dimenzije vrlo male prema rastojanju od tačke u kojoj se polje posmatra, onda se kaže da su opterećenja ili masa raspoređeni liniski, da su izvori liniski raspoređeni. Naravno, ovdje se apstrahuju poprečne dimenzije, jer je jasno da izvor mora obuhvatiti izvjesnu zapreminu, a linija ima samo jednu dimenziju. Ako se sa ds označi element dužine te linije — cijevi, a normalni presjek sa dS, onda je elementarna zapremina liniskog izvora dV = dSds, pa je njegov potencijal

$$U = \int \frac{\varrho dSds}{r}.$$

Veličina $\varrho dS = j$ naziva se **liniska gustina** izvora, pa je

$$U = \int \frac{jds}{r}.$$

Notacija j se uzima u vezi primjene u elektrodinamici kao gustina struje. Inače je masa jedinice dužine cijevi, ako se radi o masi.

Ako izvori opterećenja obuhvataju izvjestan sloj, čija je debljina vrlo mala u odnosu na rastojanje od tačke u kojoj se polje posmatra, onda se može govoriti o površinskoj raspodjeli opterećenja, ili mase, odnosno o površinskim izvorima.

Poznato je iz nauke o elektricitetu da je na provodnicima elektricitet raspoređen po površini. Ako se debljina tog sloja označi sa dn, onda je elementarna zapremina površinskog izvora dV = dS . dn, pa je njegov potencijal

$$U = \int \frac{\varrho dndS}{r}.$$

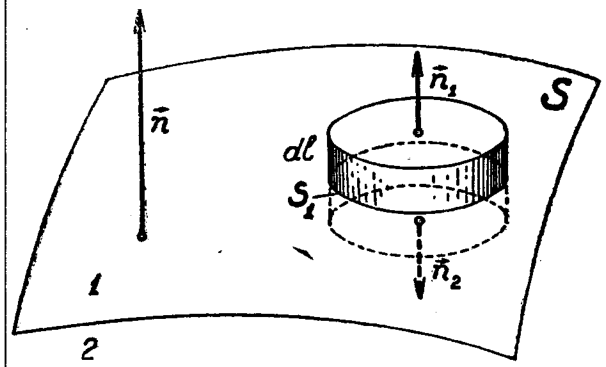
Veličina $\varrho dn = \sigma$ naziva se **površinska gustina**, pa je

$$U = \int \frac{\sigma dS}{r}. \qquad \qquad (65,3)$$

Odmah se vidi da u sva tri slučaja postoji diskontinuitet respektivno u dotičnoj tački, liniji i površini, gdje se izvori nalaze. Na tim mjestima diskontinualni su i vektor, odnosno skalar dotičnog polja. Funkcije polja na tim mjestima imaju prekide, — pretstavljaju skokove. I dosadašnje jednačine se za takva mjesta ne mogu primijeniti, nego se te tačke, linije ili površine moraju odvojiti od ostalog polja naročitim sfernim površinama ili cijevima, da se ne bi dobio beskonačan potencijal (kada $r \to 0$).

Za slučaj tačkastog opterećenja vidjeli smo ranije kako se izdvoji pomoću sferne površine, a zatim se ta lopta steže tako da i njen radius teži nuli i na taj način se uspješno primijene navedene teoreme i formule.

Posmatrajmo slučaj površinskog opterećenja. I ovdje ćemo se poslužiti primjenom graničnih vrijednosti.



Sl. 59.

Neka je data površina izvora S (sl. 59). Neka je n spoljašnja normala te površine. Oko neke tačke na toj opterećenoj površini konstruirajmo cilindar elementarne visine dl tako da se njegov presjek S_1 sa površinom S može smatrati ravan i ravnomjerno opterećen. Neka vektor v karakteriše vektorsko polje. Onda je fluks toga vektora kroz baze cilindra

$$\Phi = \int_S \mathbf{v} dS = 4\pi\sigma S_1.$$

Vektor polja na bazama cilindra je respektivno $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Onda je fluks toga vektora kroz cilindar

$$\Phi = (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{n}_2)\, S_1 + \Phi'.$$

gdje je Φ' fluks kroz bočnu površinu cilindra, koja se može zanemariti, jer se visina cilindra beskonačno smanjuje u graničnom prelazu. Prema slici je orijentacija normale n pozitivna, pa je

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{n}_1 = + v_{1n}, \quad \mathbf{v}_2 \mathbf{n}_2 = - v_{2n}, \text{ ili u graničnom slučaju}$$

$$\Phi = (v_{1n} - v_{2n})\, S_1 = 4\pi\sigma S_1.$$

Odavde je

$$v_{1n} - v_{2n} = 4\pi\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65{,}4)$$

Tangencijalne komponente vektora v nemaju prekida, dok normalne imaju prekid $4\pi\sigma$ i to samo na beskonačno malom rastojanju tačaka — za »debljinu« površinskog sloja.

Drugim riječima, ako je zadato vektorsko polje, u kome postoje opterećene površine, gdje je vektor v diskontinualan, onda se te površine mogu smatrati kao izvori sa površinskom gustinom

$$\sigma = \frac{v_{1n} - v_{2n}}{4\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65{,}5)$$

Napominjemo da normalna komponenta vektora **v** ima skok $4\pi\sigma$ pri prolazu kroz ma koju opterećenu površinu, bez obzira na oblik te površine. Takođe na to ne utiče postojanje ili otsustvo opterećenja van te površine.

§ 66. — POVRŠINSKA DIVERGENCIJA

Ranije prilikom definisanja divergencije bila je riječ o zapreminskoj divergenciji, o izdašnosti zapremine. U prethodnom paragrafu govorilo se o izdašnosti površine, tj. o izdašnosti izvora, koji su raspoređeni po površini. Kao rezultat se dobija skalar, koji je proporcionalan skoku normalne komponente dotičnog vektora, koji karakteriše polje (u slučaju tečnosti radi se o vektoru brzine, a u slučaju elektrostatičkog polja radi se o jačini polja itd.). Analogno zapreminskoj divergenciji ta razlika veličina normalnih komponenata pri prolazu kroz opterećenu površinu naziva se **površinska divergencija** i označava se sa Divv (veliko slovo D!). Dakle,

$$\mathrm{Div}\,v = v_{1n} - v_{2n} = 4\pi\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66{,}1)$$

Analogno izrazu div v = $4\pi\varrho$ za zapreminsku divergenciju, gdje je ϱ prostorna gustina, postoji taj izraz Div **v** = $4\pi\sigma$ za površinsku divergenciju, gdje je σ površinska gustina.

Napominjemo da opterećena površina S ne mora biti otvorena, jer isti zaključci važe i za zatvorenu površinu. Može se dokazati da ti zaključci važe i za slučaj kada postoji više takvih izvornih površina.

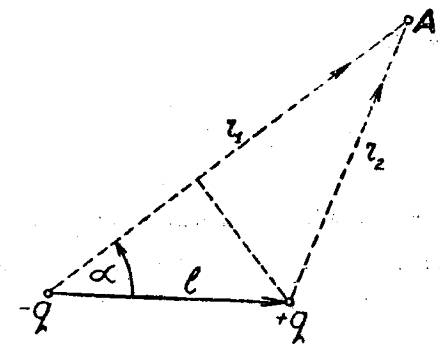
Znači da površinska divergencija postoji tamo gdje normalna komponenta vektora ima skok-prekid, odnosno gdje postoje izvori raspoređeni površinski.

Površinska divergencija se može primijeniti i na više vektora.

Kontinualnost tangencijalnih komponenata vektora i pored diskontinualnosti normalnih komponenata je znak da je dotično polje bezvrtložno.

§ 67. — DIPOL

Sistem od dva tačkasta izvora ili opterećenja sa suprotnim znakom, a međusobnim rastojanjem, koje je malo u odnosu na njihovo rastojanje od tačke u kojoj se polje posmatra, naziva se **dipol.** Takođe se naziva i bipol, dublet, dvostruki pol.



Sl. 60.

Neka su +q i —q (sl. 60) jednaka opterećenja sa suprotnim znakom. Neka je **l** njihovo međusobno rastojanje, koje je u stvari vektor sa početkom u —q i svršetkom u +q, tj. vektor povučen od negativnog ka pozitivnom opeterećenju. Neka su r_1 i r_2 radius-vektori od opterećenja do proizvoljne tačke A, u kojoj se polje posmatra. Prema njima l dipola je beskonačno mala veličina.

Vektor

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67{,}1)$$

naziva se dipolni moment ili moment dipola. Potencijal oba izvora ili opterećenja izračunat u tački A ravan je zbiru potencijala pojedinih opterećenja, ili

$$U = q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = q\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Zbog odnosa među rastojanjima može se staviti $r_1 - r_2 = l\cos\alpha$, $r_1 r_2 = r^2$, gdje je $\mathbf{r}$ radius-vektor od ma koje tačke dipola do tačke A. Tada se dobija izraz za potencijal

$$U = \frac{ql\cos\alpha}{r^2} = \frac{\mathbf{r}\,\mathbf{p}}{r^3}. \qquad (67,2)$$

To znači da je potencijal dipola obrnuto proporcionalan kvadratu radius-vektora i da zavisi od ugla među radius-vektorom i osom dipola. Radius-vektor je usmjeren od opterećenja ka tački posmatranja.

Ovaj izraz za potencijal dipola može se transformirati i na slijedeći način: pošto je $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$, biće

$$U = -\mathbf{p}\operatorname{grad}\frac{1}{r}. \qquad (67,3a)$$

Vektor $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$ je orijentisan na onu stranu kuda r opada, tj. od tačke A prema dipolu. Taj vektor se može zamijeniti vektorom, koji je upravljen od dipola, a koji se od prvog razlikuje samo po znaku, pa je

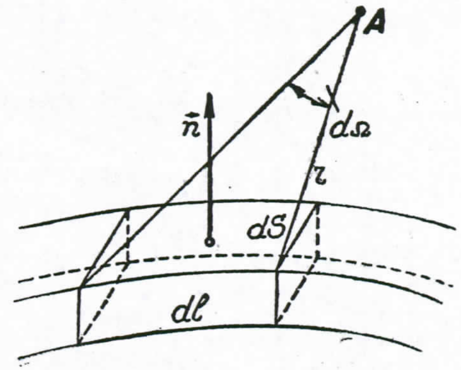
$$\operatorname{grad}_a\frac{1}{r} = -\operatorname{grad}\frac{1}{r},$$

i potencijal dobija oblik

$$U = \mathbf{p}\operatorname{grad}_a\frac{1}{r}. \qquad (67,3b)$$

Naravno, moment dipola se može rastaviti na komponente, ako se uzme neki koordinatni sistem, pri čemu se komponente mogu prethodno posebno izračunati, a zatim složiti. Taj je metod u nekim slučajevima podesan, pa se i primjenjuje.

Dipol se može pretstaviti ne samo u obliku dvaju opterećenja sa međusobnim beskonačno malim rastojanjem, nego i u obliku elementarne zapremine poprečnog presjeka dS i dužine dl (sl. 61), gdje se smatra da



Sl. 61.

»baze« tog elementarnog paralelepipeda ili cilindra imaju površinsko opterećenje gustine $+\sigma$ i $-\sigma$.

Saobrazivši sa maločas iznešenim rezonovanjem o dipolu može se pisati

$$q = \sigma dS,$$

a zatim $p = \sigma dS \cdot dl = \sigma dV$.

Ovdje veličina σ pretstavlja zapreminsku gustinu dipolnog momenta. Ta veličina se naziva vrijednost polarizacije.

Dipolni moment u jedinici zapremine ili gustina dipola **naziva se polarizacija** i obično se označava sa **P**. Polarizacija je vektor. Polje koje je okarakterisano ovim vektorom naziva se **polarizovano polje.**

Dipoli mogu biti tako raspoređeni u prostoru da se mogu smatrati kontinualni, pa se onda mjesto suma uzimaju integrali.

Sada ćemo transformirati izraz za potencijal dipola uvodeći polarizaciju **P**. Odmah se prema definiciji zaključuje da je u vezi (67,3)

$$dU = \mathbf{P}\operatorname{grad}_a\frac{1}{r}\,dV. \qquad (67,4)$$

Ovo je potencijal elementa zapremine pod pretpostavkom kontinualnosti. Onda će potencijal proizvoljne zapremine biti

$$U = \int \mathbf{P}\operatorname{grad}_a\frac{1}{r}\,dV.$$

Pošto posmatrano polje sadrži samo dipole, lako je zaključiti da je u polarizovanom polju divergencija polarizacije ravna nuli, jer je to fluks na jedinicu zapremine kroz površinu koja obuhvata elementarnu zapreminu, a zapremina sadrži isti broj i pozitivnih i negativnih izvora, odnosno opterećenja.

Potencijal dipola se može pretstaviti i u funkciji tjelesnog ugla, pod kojim se iz tačke A vidi pozitivna strana površine. Prema definiciji je

$$d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}\text{, pa je potencijal}$$

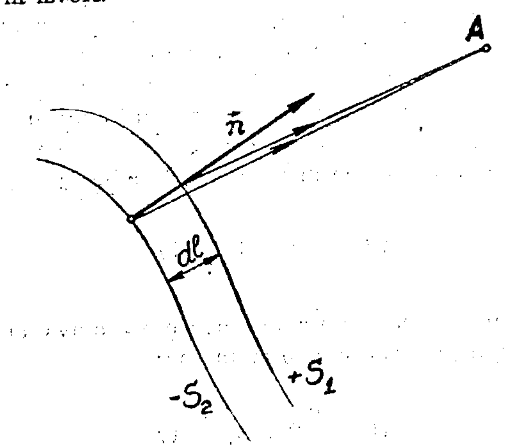
$$U = \frac{\sigma dSdl\cos\alpha}{r^2} = \sigma dl d\Omega = \eta d\Omega \,, \quad \quad (67{,}5)$$

gdje je $\eta = \sigma dl$ gustina dipola.

To znači da je potencijal dipola jednak proizvodu iz gustine dipola i elementarnog tjelesnog ugla pod kojim se iz tačke A vidi pozitivna površina dipola.

§ 68. — DVOSTRUKI SLOJ

Sistem od dvije paralelne površine, koje su jednako opterećene opterećenjima suprotnog znaka i sa beskonačno malim međusobnim rastojanjem naziva se **dvostruki sloj.** Pod dvostrukim slojem može se podjednako razumijevati i površina na kojoj se nalaze dipoli, čije su ose usmjerene duž normala tih površina. Znači, na jednoj strani sloja su pozitivni, a na drugoj negativni izvori.



Sl. 62.

Potencijal sloja biće

$$U = \int \eta d\Omega \,, \quad \quad (68{,}1)$$

gdje je $d\Omega$ tjelesni ugao, pod kojim se vidi površinski element pozitivne površine, odnosno onaj dio površine iz kojeg izlazi pozitivna normala sloja i kuda su orijentisani pozitivni polovi dipola.

Očevidno je da će potencijal na jednoj strani sloja imati jednu vrijednost, a na drugoj strani respektivnu vrijednost sa suprotnim znakom. To znači da potencijal dvostrukog sloja ima prekid-skok. To se pokazuje na taj način što će se tačka A sve više približavati površini dok se ne dođe do njene pozitivne strane. Pritom će se tjelesni ugao stalno povećavati i kada se tačka bude nalazila na pozitivnoj površini dvostrukog sloja, tjelesni će ugao iznositi 2π, pa je

$$U_1 = 2\pi\eta_n .$$

S druge strane, za tačku koja se nalazi na negativnoj površini dvostrukog sloja potencijal je

$$U_2 = -2\pi\eta_n .$$

Razlika potencijala kod dvostrukog sloja, dakle postoji i iznosi

$$U_1 - U_2 = 4\pi\eta_n . \quad \quad (68{,}2)$$

Skok potencijala kod dvostrukog sloja ravan je proizvodu iz 4π i površinske gustine dipolâ, koji su normalni na toj površini.

Naravno, ovakvo pretstavljanje izvora, odnosno opterećenja ne odgovara potpuno stvarnosti, nego je idealiziranje, jer raspodjela opterećenja može samo aproksimativno biti površinska.

Dobijeni rezultati važe i za zatvoreni dvostruki sloj.

Iz (68,2) se dobija

$$\eta = \frac{U_1 - U_2}{4\pi} \,, \quad \quad (68{,}3)$$

što je analogno relaciji (65,5). To znači da ako u polju postoje površine sa diskontinualnim potencijalom, onda se može uzeti da su te površine pokrivene izvorima gustine η.

§ 69. — POVRŠINSKI GRADIJENT

Pri definisanju gradijenta jedne skalarne funkcije iznešeno je da gradijent karakteriše varijaciju funkcije pri prelazu tačke sa jednog mjesta na drugo. Ta skalarna funkcija je bila kontinualna. U prethodnom paragrafu govorilo se o skalarnoj funkciji, koja ima skok, prekid na dvostrukom površinskom sloju. Tu je potencijal, dakle, diskontinualan i mijenja se skokovito za veličinu $4\pi\eta$. Razlika potencijala $U_1 - U_2$ pomnožena ortom normale pretstavlja vektor, koji označava tu promjenu. Taj vektor se naziva **površinski gradijent**, jer označava promjenu potencijala pri prolazu kroz opterećenu površinu, koja izaziva skok. Označava se sa GradU (veliko slovo G!). Dakle,

$$\text{Grad}U = (U_1 - U_2)\,\mathbf{n} = 4\pi\vec{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69{,}1)$$

Površinski gradijent se može primijeniti i na više funkcija pri prolazu kroz diskontinuitet — kroz opterećenu površinu analogno običnom gradijentu.

Tako je na pr. površinski gradijent proizvoda

$$\text{grad}\, UV = \overline{V}\,(U_1 - U_2)\,\mathbf{n} + \overline{U}\,(V_1 - V_2)\,\mathbf{n},$$

gdje crta označava srednju vrijednost pri prekidu:

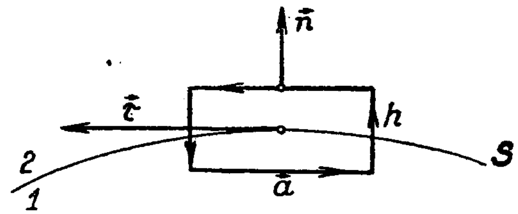
$$\overline{V} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

§ 70. — POVRŠINSKI ROTOR

Kod proučavanja površinske divergencije vidjeli smo da na površini diskontinuiteta normalna komponenta ima skok, dok je tangencijalna komponenta vektora kontinualna. Takvo polje je bilo bezvrtložno. Sada ćemo posmatrati polje, koje je bezizvorno, ali takođe i diskontinualno. Da bi polje bilo bez izvora mora biti divergencija dotičnog vektora ravna nuli u svakom kontinualnom području polja, a osim toga mora i na mjestima diskontinuiteta, na opterećenim površinama površinska divergencija biti ravna nuli. To znači da normalna komponenta dotičnog vektora nema skokova na opterećenoj površini, nego se mijenja kontinualno. Naravno, lako je zaključiti da u tom slučaju diskontinuitet prije svega može biti

kod tangencijalne komponente. Tada se kaže da polje ima **površinski rotor** i da se nalazi na površini diskontinuiteta.

Kod definisanja rotora navedeno je da je rotor jednog vektora granična vrijednost količnika iz liniskog integrala tog vektora i obuhvaćene površine. Analogno postupku kod površinske divergencije, gdje se kao kod prostorne nije radilo o izdašnosti prostora, nego površine, i ovdje se kod površinskog rotora ne radi o prostorno raspoređenom rotoru, nego površinski, pa će površinski rotor biti granična vrijednost količnika liniskog integrala i dužine, a ne površine kao kod prostornog.



Sl. 63.

Neka je S površina diskontinuiteta (sl. 63). Vektor polja u području 2 je $\mathbf{v}_2$, a u području 1 $\mathbf{v}_1$ tako da kroz površinu njegova tangencijalna komponenta ima skok. Da vidimo čemu je ekvivalentan taj skok tangencijalne komponente vektora **v**. Ort normale na površini označimo sa **n**. Konstruišimo mali pravougaonik tako da ga data površina polovi. Visina pravougaonika h neka bude beskonačno mala, tj. h = dn. Orijentišimo tu pravougaonu konturu i primijenimo na nju Stokes-ovu teoremu, pri čemu ćemo zanemariti integriranje duž h. Dobija se

$$\int \mathbf{v}ds = \int \text{rot}\mathbf{v}dS.$$

Lijeva strana ove jednačine je $\int \mathbf{v}ds = \int \mathbf{v}_1 ds = (\mathbf{v}_{2t} - \mathbf{v}_{1t})\,d\tau$, gdje je $d\tau$ element tangente, odnosno, ako smatramo da je pravougaonik elementaran, to je osnovica pravougaonika. Označi li se sa **j** zapreminska gustina rotora, desna strana će postati $4\pi\mathbf{j}d\tau dn$. Vektor zapreminske gustine je orijentisan od crteža ka nama, a normalno i na **n** i na $\vec{\tau}$. Izjednačenjem se dobija.

$$(\mathbf{v}_{2t} - \mathbf{v}_{1t})\,d\tau = 4\pi\mathbf{j}dnd\tau.$$

Ova zavisnost se može izraziti i slijedećom vektorskom jednačinom:

$$4\pi \mathbf{j}dn = \mathbf{n} \times (\mathbf{v}_{2t} - \mathbf{v}_{1t}).$$

Vektorski proizvod normale i razlike vektora sa jedne i druge strane površine diskontinuiteta naziva se **površinski rotor** i označava se sa Rotv (veliko slovo R!). Dakle,

$$\mathrm{Rot}\mathbf{v} = \mathbf{n} \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70,1)$$

Specijalni slučaj (63,15) može se sada uopštiti i umjesto gustine **j** uzeti linisku gustinu **i**, koja je granična vrijednost prve, pa je, izostavljajući c, uopšte

$$\mathrm{Rot}\mathbf{v} = 4\pi \mathbf{i}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70,2)$$

gdje je $\mathbf{i} = \mathbf{j}dn$ liniska gustina.

Iz (70,2) se dobija

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{4\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70,3)$$

što je analogno sa (65,5) i (68,3) za slučajeve drugih diskontinuiteta polja.

§ 71. — SIMBOLIČNO OZNAČAVANJE DISKONTINUITETNIH OPERACIJA

U §§ 65—70 pokazano je da se i u slučaju diskontinuiteta u polju mogu izračunavati vrijednosti veličina koje nas interesuju i koje karakterišu dotično polje. Diskontinuitet se mahom »uokviri« i računalo se sa kontinualnom sredinom prema ranije navedenim formulama i teoremama, pa se onda pristupalo nalaženju graničnih vrijednosti pojedinih izraza i dolazilo do novih operacija, koje se odnose na površine diskontinuiteta.

Da bi se lakše postupalo sa navedenim operacijama u vezi diskontinuiteta, a analogno upotrebi operatora ∇ kod prostornih operacija u vezi kontinuiteta može se usvojiti novi simbol: $\Vert$ i to ovako:

Površinski gradijent skalara U označava se sa

$$\mathrm{Grad}\, U = \Vert U. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71,1)$$

Površinska divergencija vektora **v** označava se sa

$$\mathrm{Div}\mathbf{v} = \Vert \mathbf{v}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71,2)$$

a to je simbolični skalarni proizvod operatora $\Vert$ i vektora **v**.

Površinski rotor vektora **v** označava se sa

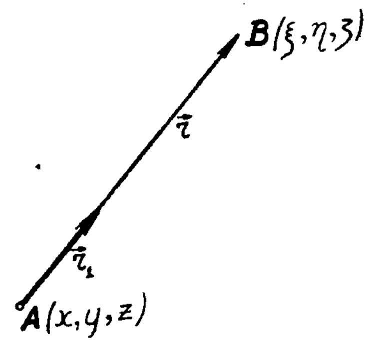
$$\mathrm{Rot}\mathbf{v} = \Vert \times \mathbf{v}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71,3)$$

a to je simbolični vektorski proizvod operatora $\Vert$ i vektora **v**.

Simbolični operator $\Vert$ može se nazvati »površinsko nabla«.

§ 72. — O NEKIM SVOJSTVIMA POTENCIJALA

Iz Newton-ovog zakona gravitacije izlazi da je privlačna sila, koja djejstvuje na jedinicu mase, jednaka gradijentu potencijala. Naime, neka



Sl. 64.

se u tački A nalazi masa m (sl. 64), a u tački B masa ravna jedinici. Na tačku B djejstvuje sila

$$\mathbf{F} = -\varkappa \frac{m}{r^2} \mathbf{r}_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72,1)$$

gdje je r rastojanje od A do B, $\mathbf{r}$ vektor od A do B, $\mathbf{r}_1$ ort u tom pravcu i $\varkappa$ gravitaciona konstanta. Kako je $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}}{r}$, može se pisati

$$\mathbf{F} = -\varkappa \frac{m}{r^3} \cdot \mathbf{r} = \varkappa m \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)_B = -\operatorname{grad}_B \left(-\frac{\varkappa m}{r} \right).$$

Odavde se dobija potencijal

$$U = -\varkappa \frac{m}{r} \quad \dots\dots\dots \quad (72,2)$$

koji se naziva Newton-ov potencijal mase m.

Ako je masa raspoređena kontinualno, onda je

$$U = -\varkappa \int \frac{dm}{r} = -\varkappa \int \frac{\varrho dV}{r}, \quad \dots\dots \quad (72,3)$$

gdje je ϱ gustina.

U teoriskim izlaganjima često se izostavlja koeficijent $-\varkappa$, pa se izraz

$$U = \int \frac{\varrho dV}{r} \quad \dots\dots\dots \quad (72,4)$$

naziva **potencijal ili Newton-ov potencijal.**

Posmatrano u koordinatnom sistemu može se definisati potencijal skalarne funkcije $\varrho\ (\xi, \eta, \zeta)$

$$U(x, y, z) = \int \frac{\varrho\ (\xi, \eta, \zeta)}{r_{12}}\ d\xi d\eta d\zeta,$$

ili sa oznakom pot:

$$\text{pot}\varrho = \int \frac{\varrho\ (\xi, \eta, \zeta)}{r_{12}}\ d\xi d\eta d\zeta = \int \frac{\varrho_2}{r_{12}} dV_2 \,. \quad \dots \quad (72,5)$$

Potencijal je funkcija od promjenljivih x, y, z fiksirane tačke, a ne tačke koja se kreće (ξ, η, ζ).

Analogno se može definisati i potencijal vektora

$$\text{pot}\mathbf{v} = \int_V \frac{\mathbf{v}}{r_{12}}\ dV \quad \dots\dots \quad (72,6)$$

Potencijal vektora je takođe vektor. To je, dakle, uopšte vektorski potencijal, o kojem je u specijalnom slučaju bilo govora u § 63. On se može razložiti na svoje komponente:

$$\text{pot}\mathbf{v} = \mathbf{i}\,\text{pot}v_x + \mathbf{j}\,\text{pot}v_y + \mathbf{k}\,\text{pot}v_z.$$

To znači da je potencijal vektorske funkcije jednak zbiru potencijala komponenata te funkcije.

Prema tome, dok je ∇ diferencijalni operator, pot je integralni operator.

Sada ćemo diferencirati potencijal jedne funkcije. Neka je

$$U = \text{pot}W = \int_V \frac{W}{r_{12}}\ dV_2.$$

Parcijalnim diferenciranjem se dobija

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial\, \text{pot}W}{\partial x_1} = \int_V \frac{1}{r_{12}} \frac{\partial W}{\partial x_2}\ dV_2 = \text{pot} \frac{\partial W}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial\, \text{pot}W}{\partial y_1} = \text{pot} \frac{\partial W}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial\, \text{pot}W}{\partial z_1} = \text{pot} \frac{\partial W}{\partial z_2}\,. \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (72,7)$$

Znači, da je **parcijalni izvod potencijala skalarne funkcije W jednak potencijalu parcijalnog izvoda od W.**

Pomnožimo izraze (72,7) respektivno sa **i**, **j**, **k** i saberimo, pa ćemo dobiti

$$\left.\begin{aligned} \text{gradpot}W &= \text{potgrad}W, \\ \nabla\text{pot}W &= \text{pot}\,\nabla\, W, \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (72,8)$$

ili **gradijent potencijala jednak je potencijalu gradijenta.**

Analogno je i za ostale operacije:

$$\text{divpot}\mathbf{v} = \text{potdiv}\mathbf{v} \quad \dots\dots\dots \quad (72,9)$$

$$\text{rotpot}\mathbf{v} = \text{potrot}\mathbf{v}. \quad \dots\dots\dots \quad (72,10)$$

Takođe važi i za operacije višeg reda:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{divgradpotW} &= \mathrm{potdivgradW}, \\ \mathrm{graddivpot}\mathbf{v} &= \mathrm{potgraddiv}\mathbf{v}, \\ \mathrm{rotrotpot}\mathbf{v} &= \mathrm{potrotrot}\mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (72{,}11)$$

Kada se računa pomoću koordinata naravno treba voditi računa o tome da se lijeve strane odnose na promjenljive x_1, y_1, z_1, a desne strane na x_2, y_2, z_2.

Iz svega ovoga se može zaključiti da ranije navedene diferencijalne operacije mogu sa integralnim operatorom pot međusobno izmijenjati mjesta, a da se dobije isti rezultat, tj. **diferencijalni operator ∇ i integralni operator pot međusobno su komutativni.**

Neki autori, kao na primjer Gibbs, u vezi sa operatorom pot uvode nove oznake, koje ovdje navodimo:

1. — **Njutnijan** skalarne funkcije je gradijent potencijala skalarne funkcije i označava se sa new:

$$\mathrm{gradpotW} = \nabla\,\mathrm{potW} = \mathrm{newW} \quad \ldots \quad (72{,}12)$$

2. — **Laplasijan** vektorske funkcije je rotor potencijala vektorske funkcije i označava se sa lap:

$$\mathrm{rotpot}\mathbf{v} = \mathrm{lap}\mathbf{v} \quad \ldots \ldots \quad (72.13)$$

Treba ga razlikovati od Laplase-ovog operatora Δ, definisanog u § 59, koji se takođe naziva laplasijan.

3. — **Maksvelijan** vektorske funkcije je divergencija potencijala vektorske funkcije i označava se sa max:

$$\mathrm{divpot}\mathbf{v} = \mathrm{max}\mathbf{v} \quad \ldots \ldots \quad (72{,}14)$$

Maksvelijan je očevidno skalarna veličina.

Ako postoji potencijal, onda se može pisati

$$\mathrm{max}\mathbf{v} = \frac{\partial\,\mathrm{potv}_x}{\partial x_1} + \frac{\partial\,\mathrm{potv}_y}{\partial y_1} + \frac{\partial\,\mathrm{potv}_z}{\partial z_1}.$$

Takođe se može pisati i

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{newW} &= \int_V \frac{\mathbf{r}W}{r^3}\,dV, \\ \mathrm{lap}\mathbf{v} &= \int_V \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{r^3}\,dV, \\ \mathrm{max}\mathbf{v} &= \int_V \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{r^3}\,dV. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (72{,}15)$$

Sa ovim veličinama i oznakama mogu se vrlo praktično izvoditi razne operacije, koje su korisne pri rješavanju problema i izvođenju potrebnih relacija.

Iz izraza za potencijal vidi se rješenje Poissonove jednačine, o kojoj je ranije bilo govora.

Iz (64,14) se vidi da prvi član pretstavlja obični potencijal, koji se naziva i **zapreminski potencijal.**

Integral tipa

$$\int_S \frac{\sigma}{r}\,dS \quad \ldots \ldots \quad (72{,}16)$$

naziva se **potencijal prostog sloja,** a integral tipa

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,\eta dS \quad \ldots \ldots \quad (72{,}17)$$

potencijal dvostrukog sloja, što se može vidjeti iz § 67. i § 68.

ČETVRTA GLAVA

TEORIJA VEKTORA U KRIVOLINISKIM KOORDINATNIM SISTEMIMA (GENERALISANIM)

§ 73. — KRIVOLINISKI KOORDINATNI SISTEMI

I pored činjenice što vektorski račun uzima sve više maha i da se savremena fizika ne može zamisliti bez samostalne teorije vektora, koja se sve više oslobađa od raznih koordinatnih sistema, ipak se u mnogo slučajeva upotrebljava i koordinatni sistem. Naravno, teorija vektora se tako brzo usvaja, da će vjerovatno zbog očiglednosti prikazivanja fizičkih pojava sve više potiskivati koordinatne sisteme i više posmatrati bar djelove pitanja, a i čitava pitanja, kao cjelinu, a ne odvojeno bez dovoljne veze, kao što se to radi u raznim sistemima.

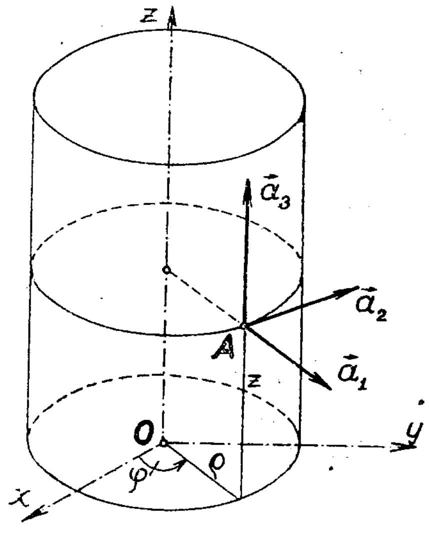
Osim Descartes-ovog pravouglog koordinatnog sistema najviše se primjenjuju **cilindrični** i **sferni** koordinatni sistemi. Oba ova sistema spadaju u krivoliniske koordinatne sisteme, a često mogu biti podesniji za prikazivanje i izračunavanje izvjesnih fizičkih veličina. Zajedno sa Descartes-ovim sistemom i sistemima uopšte mogu se nazvati uopšte **generalisani sistem,** gdje svaki za sebe ima svoje specifičnosti.

Ako se posmatra Descartes-ov koordinatni sistem, vidi se da je u koordinatnoj ravni yz koordinata $x = 0$, u ravni zx koordinata $y = 0$, a u ravni xy koordinata $z = 0$. Ako se umjesto koordinatnih ravni i koordinatnog trijedra uzmu njima paralelne ravni, jasno je da će $x = \text{const} = C_1$ pretstavljati za razne vrijednosti konstante C_1 ravni paralelne sa ravni yz. Analogno važi i za y i za z. Prema tome neka tačka u prostoru sa koordinatama m, n, p biće ustvari presjek ravni $x = C_1 = m$, $y = C_2 = n$, $z = C_3 = p$.

Analogno se može posmatrati i cilindrični koordinatni sistem. Poznato je da su u tom sistemu koordinate neke tačke A takođe tri broja: ϱ, φ i z (sl. 65). Jednačina $\varrho = C_1$ pretstavlja familiju koaksijalnih cilindara sa zajedničkom osom z.

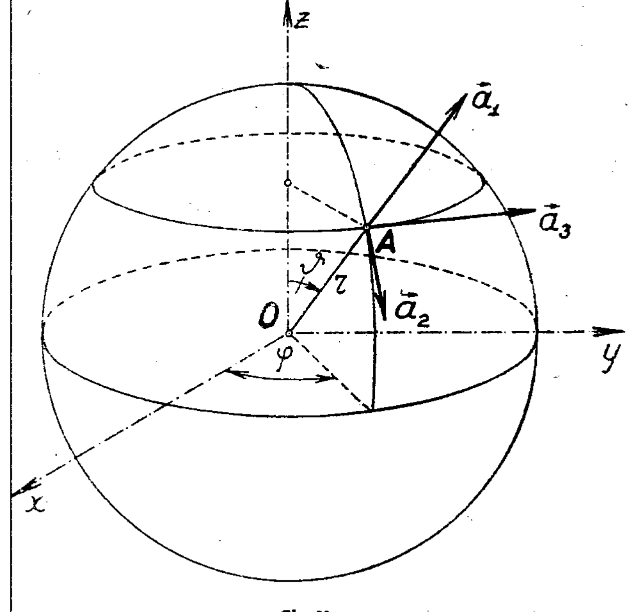
$\varphi = C_2$ pretstavlja familiju meridionalnih poluravni, koje prolaze kroz osu z.

$z = C_3$ pretstavlja familiju ravni paralelnih sa ravni xy, odnosno normalnih na osi z.



Sl. 65.

I u sfernom koordinatnom sistemu položaj tačke takođe je određen pomoću tri broja, pomoću tri koordinate: r, ϑ i φ (sl. 66). Jednačina $r = C_1$ pretstavlja familiju koncentričnih sfernih površina sa centrom O;
$\vartheta = C_2$ pretstavlja familiju konusnih površina sa zajedničkom osom z;
$\varphi = C_3$ pretstavlja familiju meridionalnih poluravni, koje prolaze kroz osu z.



Sl. 66.

Kako se kod koordinatnih sistema, koji se najviše upotrebljavaju položaj tačke određuje sa tri broja, sada ćemo posmatrati uopšte krivoliniski koordinatni sistem — generalisani sistem, —, ali samo sa tri koordinate.

Tri broja koji određuju položaj tačke označimo sa q_1, q_2, q_3. Ta tri broja se nazivaju **krivoliniske koordinate tačke.** Mogu se nazvati i **generalisane koordinate.** Kako svakoj tački odgovara neki radius-vektor, to je i svaka krivoliniska koordinata funkcija radius-vektora:

$$q_i\,(\mathbf{r}) = q_i\,(x, y, z), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73{,}1)$$

gdje je $i = 1, 2, 3$.

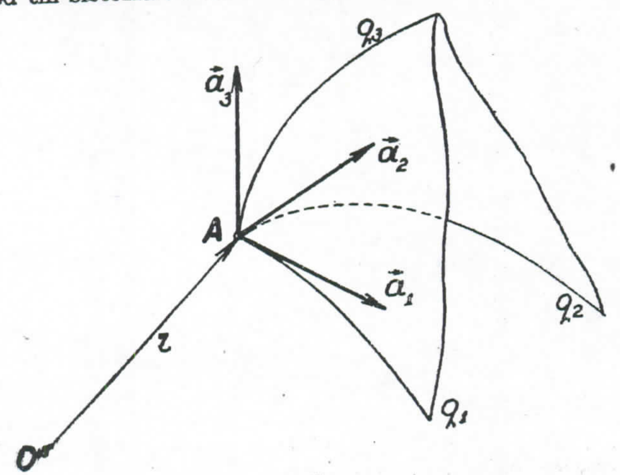
Jasno je da i radius-vektor zavisi od krivoliniskih koordinata, jer čim one određuju položaj tačke, istovremeno određuju i radius-vektor te tačke, pa su Descartes-ove koordinate vektora $\mathbf{r}$ takođe funkcije od krivoliniskih koordinata:

$$x = x\,(q_1, q_2, q_3),\ y = y\,(q_1, q_2, q_3),\ z = z\,(q_1, q_2, q_3).\,. \quad (73{,}2)$$

Istovremeno se Descartes-ove koordinate mogu smatrati kao specijalan slučaj generalisanih koordinata, gdje se uzimaju u obzir svojstva ovog sistema.

Jednačina $q_i\,(\mathbf{r}) = \text{const}$ pretstavlja familiju površina. Površina iz te familije, koja prolazi kroz posmatranu tačku, naziva se **koordinatna površina.** Presjek dviju koordinatnih površina naziva se **koordinatna linija.**

Odmah se vidi da je kod cilindričnog sistema $q_1 = \varrho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, a kod sfernog sistema $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \varphi$. Takođe je lako vidjeti kakve su kod tih sistema i koordinatne površine i linije. Iz sl. 67 se može



Sl. 67.

zaključiti da je na površini q_2q_3 koordinata $q_1 = \text{const}$, na površini q_3q_1 koordinata $q_2 = \text{const}$ i na površini q_1q_2 koordinata $q_3 = \text{const}$. Znači da se duž kordinatne linije, na pr. duž q_1, mijenja samo ta koordinata q_1, dok su ostale dvije koordinate konstantne.

Konstruišimo u tački A tri jedinična orta tangenata na koordinatnim linijama te tačke tako da budu orijentisani u smjeru povećanja koordinata q_i. Označimo ih sa $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ i $\mathbf{a}_3$. Ta tri orta pretstavljaju pokretan trijedar tako, da pri prelazu od jedne tačke na drugu uopšte uzevši mijenjaju svoj pravac. U Descartes-ovom sistemu takvi ortovi su **i, j, k,** koji su konstantni za sve tačke, odnosno ne mijenjaju svoj pravac.

Ortove $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ uzećemo tako da tim redom čine desni sistem. Osim toga upotrebljavaćemo samo pravougle sisteme, kod kojih su koordinatne linije i koordinatne površine međusobno normalne, odnosno kod kojih su ortovi međusobno normalni. Na taj način generalisanje je donekle ograničeno određenim svojstvima.

Posmatrajmo sada vezu među promjenom radius-vektora duž koordinatne linije i dotičnog orta. Promjena radius-vektora $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$ duž koordinatne linije je vektorska veličina i orijentisana je duž tangente na toj liniji, pa je

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \right| \mathbf{a}_1 .$$

Označimo li dužinu vektora $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$ sa H_1, biće

$$\frac{\partial}{\partial q_1} = H_1 \mathbf{a}_1$$

Analogno je

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = H_2 \mathbf{a}_2, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = H_3 \mathbf{a}_3, \text{ odnosno}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i \mathbf{a}_i \,.\ (i = 1, 2, 3). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73{,}3)$$

Nas interesuju koeficijenti H_i. Očevidno je

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 . \quad \ldots\ldots\ldots \quad (73{,}4)$$

Veličine H_i (H_1, H_2 i H_3) nazivaju se **Lamé-ovi koeficijenti.**

Razumije se da su ovi koeficijenti vrlo važni kod krvoliniskih sistema, jer se pomoću njih određuju varijacije radius-vektora raznih tačaka, čije koordinate i njihove veze treba izračunavati i primjenjivati.

Radi izračunavanja ovih koeficijenata posmatrajmo u tački A vektor **v**. Razložimo ga na komponente po krivoliniskim koordinatnim osama:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (73{,}5)$$

Ovdje su v_1, v_2 i v_3 krivoliniske koordinate vektora **v**.

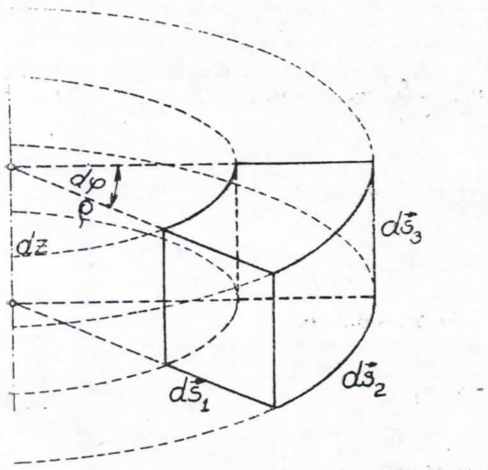
Uzmimo sada specijalan slučaj umjesto vektora **v** vektor diferencijal radius-vektora **dr**, koji ima koordinate ds_i. Tada će biti

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}dq_3, \text{ ili}$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}dq_i \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (73{,}6)$$

Odavde je u vezi (73,4)

$$ds_i = H_i dq_i, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (73{,}7)$$



Sl. 68.

ili kvadrat liniskog elementa

$$ds^2 = H_1^2\,dq_1^2 + H_2^2\,dq_2^2 + $$
$$+ H_3^2\,dq_3^2 \quad . \quad (73{,}8)$$

Dakle,

$$H_1 = \frac{ds_1}{dq_1},\ H_2 = \frac{ds_2}{dq_2},$$

$$H_3 = \frac{ds_3}{dq_3} \quad . \quad (73{,}9)$$

Lamé-ovi koeficijenti u cilindričnom koordinatnom sistemu

U cilindričnom sistemu je (sl. 65 i 68):

$$ds_1 = d\varrho,\ ds_2 = \varrho d\varphi,\ ds_3 = dz;$$

$$q_1 = \varrho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z,$$

pa je

$$H_1 = 1,\ H_2 = \varrho,\ H_3 = 1, \text{ ili}$$

$$H_r = 1,\ H_\varphi = \varrho,\ H_z = 1 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (73{,}10)$$

Lamé-ovi koeficijenti u sfernom koordinatnom sistemu

U sfernom sistemu je (sl. 66 i 69):

$$ds_1 = dr,\ ds_2 = r d\vartheta,\ ds_3 = r\sin\vartheta d\varphi;$$

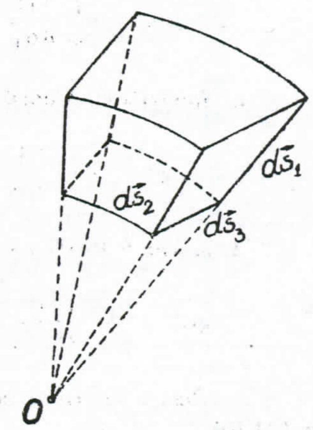
$$q_1 = r,\ q_2 = \vartheta,\ q_3 = \varphi,$$

pa je

$$H_r = 1,\ H_\vartheta = r,\ H_\varphi = r\sin\vartheta \quad . \ . \ . \ . \quad (73{,}11)$$

U Descartes-ovom koordinatnom sistemu naravno je

$$H_i = 1 \quad . \ . \ . \quad (73{,}12)$$



Sl. 69.

Uopšte uzevši zapreminski element se može posmatrati približno kao paralelepiped sa stranama ds_i, pa je njegova zapremina

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1H_2H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (73{,}13)$$

§. 74. — Gradijent u krivoliniskom koordinatnom sistemu

Neka je data skalarna funkcija $U(q_1, q_2, q_3)$, koja karakteriše skalarno polje. Neka je vektor **G** gradijent toga polja u tački A. Treba naći taj vektor u krivoliniskom koordinatnom sistemu. Projekcije tog vektora po pravcima ortova $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ su prema definiciji gradijenta ravne parcijalnim izvodima skalarne funkcije U duž pravca koordinatne linije:

$$(\mathrm{grad}U)_i = \frac{\partial U}{\partial s_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}\cdot\frac{dq_i}{ds_i} \quad . \ . \ . \ . \quad (74.1)$$

Prema (73,7) je $\frac{dq_i}{ds_i} = \frac{1}{H_i}$, pa je

$$(\text{grad } U)_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (74,2)$$

Zamjenom se definitivno dobija:

$$\text{grad } U = \frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\cdot a_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\cdot a_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\, a_3 \quad (74,3)$$

U cilindričnom koordinatnom sistemu je

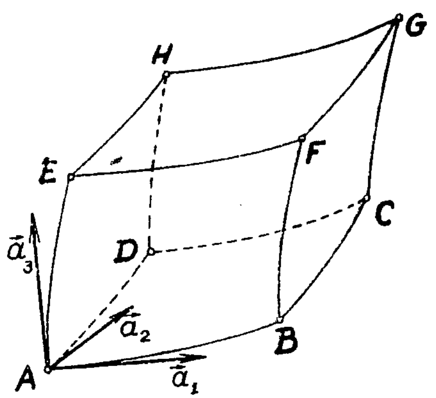
$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\, a_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\, a_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\, a_z . \quad . \; . \; . \quad (74,4)$$

U sfernom koordinatnom sistemu je

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r}\, a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\, a_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot a_\varphi \quad . \; . \quad (74,5)$$

U Descartes-ovom sistemu je $H_i = 1$, pa se (74,3) transformira u (34,10).

§ 75. — DIVERGENCIJA U KRIVOLINISKOM KOORDINATNOM SISTEMU



Sl. 70

Neka je data vektorska funkcija v (q_1, q_2, q_3), koja karakteriše vektorsko polje. Treba naći divergenciju tog vektora u tački A. Najbolje je poći od definicije i izračunavanja divergencije, što je iznešeno u § 46 za divergenciju uopšte i za njen izraz u Descartes-ovom sistemu.

Analogno postupku prema sl. 46 uzmimo elementarni paralelepiped (sl. 70), kod kojega je tačka tjeme jednog njegovog trijedra. Treba naći divv u tački A. Ovdje je $AB = ds_1$, $AD = ds_2$, $AE = ds_3$, pa je površina ADHE:

$$dS_1 = ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3 ;$$

površina ABFE:

$$dS_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1 ,$$

i površina ABCD:

$$dS_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2 .$$

Što se tiče suprotnih respektivnih površina, one se razlikuju od ovih zbog toga što one odgovaraju koordinatama $q_i + dq_i$, gdje se indeks i uzima respektivno samo za dotičnu koordinatu, koja se mijenja, jer su ostale dvije konstantne.

Prema definiciji je

$$\text{div} v = \lim_{V \to 0} \frac{\int_S v dS}{V} . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (75,1)$$

Ovdje se pod V podrazumijeva elementarni paralelepiped, o kojem je riječ. Izračunaćemo fluks kroz sve šest strana tog krivoliniskog elementarnog paralelepipeda. Ulazni fluks je negativan, a izlazni pozitivan. Neka je $d\Phi_1$ fluks vektora v kroz površinu dS_1 (ADHE). Prema definiciji fluksa je $d\Phi_1 = - v_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3$. Fluks kroz suprotnu stranu BCGF označimo sa $d\Phi_2$, pa će biti

$$d\Phi_2 = (v_1 H_2 H_3 + \varepsilon)\, dq_2 dq_3 .$$

Promjena funkcije $v_1 H_2 H_3$ je zbog promjene komponente q_1, odnosno promjene površine

$$\varepsilon = \frac{\partial (v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1, \text{ pa je}$$

$$d\Phi_2 = \left[v_1 H_2 H_3 + \frac{\partial (v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 \right] dq_2 dq_3 .$$

Prema tome fluks vektora v kroz strane ADHE i BCGF biće

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial (v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 .$$

Analogno se dobija fluks kroz ostale četiri strane i to: kroz ABFE i DCGH

$$\frac{\partial(v_2H_3H_1)}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3,$$

a kroz ABCD i EFGH

$$\frac{\partial(v_3H_1H_2)}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3.$$

Sabiranjem ovih vrijednosti dobija se izraz za brojilac u (75,1), a kako je $dq_1dq_2dq_3 = \frac{dV}{H_1H_2H_3}$ biće definitivno

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(v_1H_2H_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(v_2H_3H_1)}{\partial q_2}+\frac{\partial(v_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right], \quad (75,2)$$

Može se izračunati i divergencija pojedinih ortova trijedra kod krivoliniskog koordinatnog sistema. Prema (75,2) dobija se

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div} a_1 &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_2H_3)}{\partial q_1},\\ \operatorname{div} a_2 &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_3H_1)}{\partial q_2},\\ \operatorname{div} a_3 &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_1H_2)}{\partial q_3}.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (75,3)$$

Iz (75,2) za H_i se mogu staviti odgovarajuće vrijednosti u raznim sistemima, a takođe i za q_i analogno postupku za gradijent, pa se dobijaju razni izrazi za divergenciju.

U cilindričnom koordinatnom sistemu je

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial(v_z\rho)}{\partial z}\right],$$

U posljednjem sabirku može se ϱ iznijeti pred diferencijalni znak, pa je definitivno

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho v_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad . \; . \; . \quad (75,4)$$

U sfernom koordinatnom sistemu je

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial(v_r\,.\,r^2\sin\vartheta)}{\partial r}+\frac{\partial(v_\vartheta r\sin\vartheta)}{\partial \vartheta}+\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial \varphi}\right].$$

U prvom članu može se $\sin\vartheta$ iznijeti pred diferencijalni znak, a u drugom i trećem r, pa se dobija

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(v_\vartheta\sin\vartheta)}{\partial \vartheta}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (75,5)$$

Stavljajući $H_i = 1$, relacija (75,2) prelazi u relaciju (46,4) odnosno u poznati izraz za divergenciju u Descartes-ovom koordinatnom sistemu.

§ 76. — ROTOR U KRIVOLINISKOM KOORDINATNOM SISTEMU

Opet ćemo uzeti elementarni paralelepiped, koji je već prikazan na sl. 70. Prema definiciji je

$$(\operatorname{rot} v)_n = \lim_{S\to 0}\frac{\int vds}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (76,1)$$

Vektor v možemo razložiti u tački A na komponente po pravcima ortova, pa je

$$v = v_1a_1 + v_2a_2 + v_3a_3.$$

Izračunaćemo cirkulaciju vektora v po konturi ADHEA. Krivoliniski integral duž AD, gdje je

$$ds = dr = H_2dq_2a_2, \text{ dobiće se iz izraza}$$

$$(vds)_{AD} = v_2H_2dq_2.$$

Duž HE od H ka E funkcija v_2H_2 će se izmijeniti, jer se q_3 mijenja na $q_3 + dq_3$, pa se dolazi do vrijednosti

$$(vds)_{HE} = -\left[v_2H_2+\frac{\partial(v_2H_2)}{\partial q_3}dq_3\right]dq_2,$$

gdje je znak minus uzet zbog suprotnog smjera.

Od E do A će biti $ds = - dr = - H_3 dq_3 a_3$, pa je

$$(vds)_{EA} = - v_3 H_3 dq_3.$$

Od D do H biće analogno rezonovanju za HE

$$(vds)_{DH} \triangleq \left[v_3 H_3 + \frac{\partial (v_3 H_3)}{\partial q_2} dq_2 \right] dq_3.$$

Sabiranjem iznešenih izraza dobija se cirkulacija po konturi ADHEA:

$$\int vds = \left[\frac{\partial (v_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (v_2 H_2)}{\partial q_3} \right] dq_2 dq_3.$$

gdje se zanemaruju beskonačno male veličine višeg reda.

Kako je površina, koju ta kontura ograničava:

$$ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$

a u vezi (76,1) dobija se projekcija vektora rot v na pravac orta a_1, odnosno

$$(\text{rot } v)_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial (v_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (v_2 H_2)}{\partial q_3} \right],$$

a takođe i projekcije na dva druga orta:

$$(\text{rot } v)_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left[\frac{\partial (v_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (v_3 H_3)}{\partial q_1} \right],$$

$$(\text{rot } v)_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (v_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (v_1 H_1)}{\partial q_2} \right]. \qquad \ldots (76,2)$$

Može se izračunati i rotor pojedinih ortova trijedra. Stavi li se $v = a_1$, dobija se

$$\text{rot } a_1 = \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} a_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} a_3 = \frac{1}{H_1} (\text{grad } H_1 \times a_1),$$

$$\text{rot } a_2 = \frac{1}{H_2} (\text{grad } H_2 \times a_2),$$

$$\text{rot } a_3 = \frac{1}{H_3} (\text{grad } H_3 \times a_3). \qquad (76,3)$$

U cilindričnom koordinatnom sistemu je

$$(\text{rot } v)_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z},$$

$$(\text{rot } v)_\varphi = \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varrho},$$

$$(\text{rot } v)_z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\rho v_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi}. \qquad \ldots (76,4)$$

U sfernom koordinatnom sistemu je

$$(\text{rot } v)_r = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial (v_\varphi \sin\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi},$$

$$(\text{rot } v)_\vartheta = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r},$$

$$(\text{rot } v)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta}. \qquad \ldots (76,5)$$

§ 77. — LAPLACE-OV OPERATOR △ U KRIVOLINISKOM KOORDINATNOM SISTEMU

Prema definiciji je

$$\Delta U = \text{div grad } U. \qquad \ldots \ldots \ldots (77,1)$$

Prema (74,3) i (75,2) dobija se

$$\Delta U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right]. \qquad \ldots (77,2)$$

U cilindričnom koordinatnom sistemu je

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varrho \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right].$$

Iznesu li se navedene promjenljive pred diferencijalni znak, koji se na njih ne odnosi, dobija se

$$\triangle U = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\,\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad . \quad . \quad (77{,}3)$$

U sfernom koordinatnom sistemu je

$$\triangle U = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\vartheta\,\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\right].$$

Poslije operacija analognih ranijim biće definitivno

$$\triangle U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77{,}4)$$

§ 78. — IZVODI ORTOVA U KRIVOLINISKOM KOORDINATNOM SISTEMU

Važno je znati izvode ortova $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ po dotičnim koordinatama za razliku od raznih drugih izvoda. Sva je teškoća u tome što ortovi u kriviliniskom koordinatnom sistemu u raznim tačkama imaju razne pravce.

Zadatak je da se nađu izvodi

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial q_3}.$$

Lako je vidjeti da dvjema tačkama A (q_1, q_2, q_3) i B $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$ respektivno odgovaraju jedinični vektori:

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \text{ i } \mathbf{a}_1 + d\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + d\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 + d\mathbf{a}_3.$$

Posmatra li se ort $\mathbf{a}_1$, onda važi relacija

$$d\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_3}dq_3 \quad . \quad . \quad . \quad (78{,}1)$$

Uzimajući u obzir relaciju (43,6) za izvod vektora u određenom pravcu može se napisati

$$\mathbf{a}_1\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial s} = (\mathbf{a}_1\nabla)\,\mathbf{a}_1, \quad \text{ili} \quad \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial s} = (\mathbf{a}_1\nabla)\mathbf{a}_1, \quad . \quad . \quad (78{,}2)$$

gdje je ovdje umjesto l uopšte za krivoliniske koordinate usvojeno s. Vektor $\mathbf{a}_1$ je orijentisan duž tangente na koordinatnoj liniji q_1.

Prema (73,7) dobija se

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial s} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78{,}3)$$

Primjenjujući (56,8) biće

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_1 \times \mathrm{rot}\,\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_1\nabla)\mathbf{a}_1, \text{ ili}$$

$$(\mathbf{a}_1\nabla)\mathbf{a}_1 = \mathrm{rot}\,\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78{,}4)$$

Zamjenom iz (76,3) dobija se

$$(\mathbf{a}_1\nabla)\mathbf{a}_1 = \left(\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\,\mathbf{a}_2 - \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\cdot\mathbf{a}_3\right)\times \mathbf{a}_1 =$$

$$= -\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\cdot\mathbf{a}_3 - \frac{1}{H_1H_2}\cdot\mathbf{a}_2 .$$

Onda je u vezi (78,2) definitivni izraz za traženi izvod

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\mathbf{a}_3 . \quad . \quad . \quad . \quad (78{,}5)$$

Ostali izvodi $\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial q_2}$ i $\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial q_3}$ lako se dobijaju cikličnom permutacijom indeksa.

Sada ćemo naći izvode.

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_3}.$$

Koristeći se § 56 poslije dužih izračunavanja, koja ovdje nećemo iznositi, dobija se

$$(\mathbf{a}_2\nabla)\mathbf{a}_1 = \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\mathbf{a}_2, \text{ pa je} \quad . \quad . \quad . \quad (78,6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_2} = \frac{\mathbf{a}_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78,7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_3} = \frac{\mathbf{a}_3}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78,8)$$

Ostale izvode ovdje nećemo navoditi, jer se mogu dobiti analogno iznešenom.

Primjena i zadaci.

1. — **Primjena na diferencijalnu geometriju: prva fundamentalna formula površine.**

Ako se na nekoj krivoj površini uzme neka tačka A, njen položaj može biti određen pomoću dvije krivoliniske koordinate q_1 i q_2. Onda će i radius-vektor, odnosno i Descartes-ove koordinate te tačke, biti funkcija koordinata q_1 i q_2.

Jednačina te površine biće

$$x = x(q_1, q_2), \quad y = y(q_1, q_2), \quad z = z(q_1, q_2).$$

Odredićemo liniski element površine, odnosno element luka. Ovdje ćemo na površini posmatrati uopšte kosougli sistem, tj. q_1 i q_2 nisu ortogonalne.

Prema ranijem izlaganju je

$$ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}dq_2\right)^2.$$

Kako je $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i\mathbf{a}_i$, gdje je $\mathbf{a}_i$ ort tangente dotične koordinatne linije, biće

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}dq_1dq_2 + H_2^2 dq_2^2.$$

Obično se primjenjuju slijedeće oznake za koeficijente

$$H_1^2 = E, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = F, \quad H_2^2 = G,$$

pa se u obliku

$$ds^2 = Edq_1^2 + 2Fdq_1dq_2 + Gdq_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78,9)$$

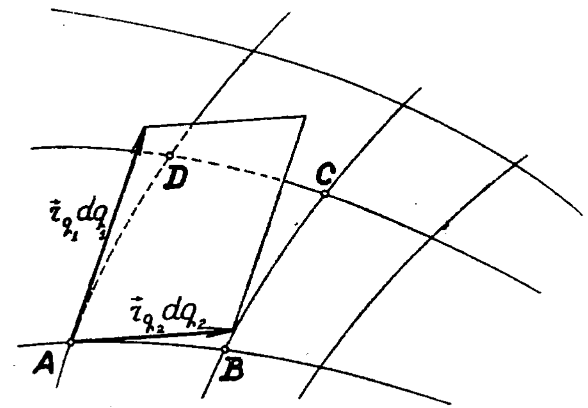
dobija formula za liniski element površine. Po ovoj formuli se može izračunati diferencijal luka ma koje krive u nekoj datoj tački A. Ova formula se naziva **prva fundamentalna forma.** Takođe se naziva i kvadratna diferencijalna forma ili kvadratna fundamentalna forma površine.

Koeficijenti imaju slijedeće vrijednosti:

$$\left.\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_1} = x_{q_1}^2 + y_{q_1}^2 + z_{q_1}^2, \\ F &= \mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2} = x_{q_1}x_{q_2} + y_{q_1}y_{q_2} + z_{q_1}z_{q_2}, \\ G &= \mathbf{r}_{q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_2} = x_{q_2}^2 + y_{q_2}^2 + z_{q_2}^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (78,10)$$

Lako je vidjeti da su koeficijenti E i G uvijek pozitivni, naravno pod pretpostavkom da su linije q_1 i q_2 realne. Koeficijent F može biti i pozitivan i negativan, ili pak jednak nuli. U slučaju F = O biće $\mathbf{r}q_1 \cdot \mathbf{r}q_2 = 0$, tj. ova dva vektora su međusobno normalni, pa se linije q_1 i q_2 sijeku pod pravim uglom. Ako je taj uslov ispunjen na čitavoj površini, onda koordinatne linije q_1 i q_2 obrazuju ortogonalni krivoliniski sistem na površini.

Sada ćemo izračunati element površine dS. Izdijelimo krivu površinu koordinatnim linijama q_1 = const i q_2 = const na krivoliniske četvorougle.



Sl. 71.

Kao što se vidi iz sl. 71 površinski element ABCD, gdje tjemena imaju koordinate: $A(q_1, q_2)$, $B(q_1, q_2 + dq_2)$, $C(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2)$,

$D(q_2 + dq_1, q_2)$ može se aproksimativno zamijeniti paralelogramom, čije su strane vektori $r_{q_1}dq_1$ i $r_{q_2}dq_2$ duž tangenata na liniji q_1 i q_2 u tački $A(q_1, q_2)$.

Površina tog paralelograma je

$$dS = (r_{q_1} \times r_{q_2})\, dq_1\, dq_2 = r_{q_1} \cdot r_{q_2} \sin\alpha \cdot dq_1\, dq_2,$$

gdje je α ugao među tim vektorima odnosno među koordinatnim linijama q_1 i q_2 u datoj tački A. Da bi se izračunala površina treba naći ugao α. Iz (78,10) je

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \text{ pa je } \sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Zamjenom se definitivno dobija

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\; dq_1 dq_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (78{,}11)$$

Iz ove relacije se vidi da se može izračunati ma koji dio površine kada se samo znaju koeficijenti E, F, G liniskog elementa površine.

2. — U jednačini

$$\Delta U + 2\left(E + \frac{Z}{r}\right) U = O$$

rastaviti promjenljivu r od ϑ i φ zamjenom $U = R(r)\,Y(\vartheta, \varphi)$.

Uputstvo: Laplasov operator izraziti u sfernim koordinatama.

Odg.:

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + 2\left(E + \frac{Z}{r}\right)R\right] =$$

$$= -\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right].$$

3. — Dokazati u krivoliniskim koordinatama da je $\mathrm{divgrad}\,v = O$.

4. — Takođe razviti i izraz divgradU.

5. — Izračunati Δr^4. Izvesti opštu formulu!

Odg.: $20r^2$.

6. — Dokazati da jačina elektrostatičkog polja u lopti radiusa a u nekoj tački na odstojanju r od centra iznosi

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\varrho\mathbf{r},$$

gdje je ϱ gustina ravnomjernog raspoređenog elektriciteta.

Uputstvo: Poći od Poissonove jednačine $\Delta U = -4\pi\varrho$, gdje ΔU treba izraziti u sfernim koordinatama. U ne zavisi od ϑ i φ. Definitivno staviti $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}U$.

PETA GLAVA

O NEKIM SVOJSTVIMA VEKTORSKIH POLJA I OPERACIJAMA U NJIMA. SPECIJALNA POLJA

§ 79. — PROSTORNO DIFERENCIRANJE

Prema definiciji gradijenta skalarne funkcije, kao i divergencije i rotora vektorske funkcije, može se zaključiti da se te operacije matematički mogu izraziti na sličan formalan način, što se vidi u §§ 46 i 61. Može se, naime, napisati

$$\nabla U = \text{grad } U = \lim_{V \to 0} \frac{\int_S U d\mathbf{S}}{V} . \qquad (79,1)$$

$$\nabla \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_S \mathbf{v} d\mathbf{S}}{V} . \qquad (79,2)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_S \mathbf{v} \times d\mathbf{S}}{V} , \qquad (79,3)$$

gdje se (79,1) i (79,3) izvode prema stavovima iz navedenih paragrafa. Ovdje je V zapremina, koju obuhvata površina S, a u samom izrazu pod znakom limes element površine i zapremine teže ka nuli, odnosno sažimaju se u tačku.

Ovaj opšti analogni oblik može se prikazati i s druge strane uvođenjem pojma tzv. prostornog diferenciranja.

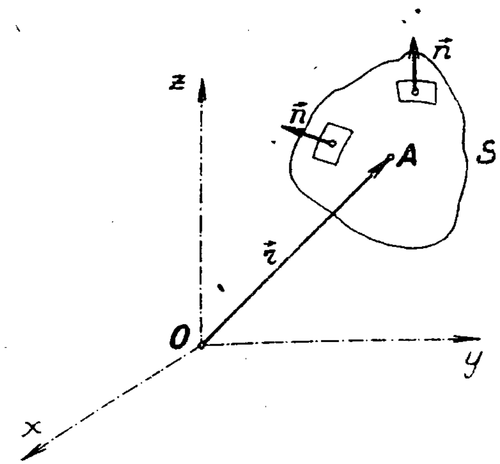
Neka je u izvjesnom dijelu prostora konačnom ili beskonačnom dato skalarno polje okarakterisano skalarom U(**r**) ili vektorsko polje okarakterisano vektorom **v**(**r**), gdje je **r** radius-vektor neke tačke u kojoj se polje posmatra. Treba proučiti varijaciju tih funkcija, kako skalarne,

tako i vektorske, u blizini te tačke i to u svim pravcima. To će se postići ako se oko te tačke uzme mala zatvorena proizvoljna površina S, koja obuhvata takođe malu zapreminu V. Usvojimo, kao i ranije, da spoljašnja normala na toj površini ima pozitivan smjer. Ta se površina S izdijeli na površinske elemente $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$.

Sastavimo proizvode

$$U d\mathbf{S}, \quad \mathbf{v} d\mathbf{S} \text{ i } \mathbf{v} \times d\mathbf{S}. \qquad (79,4)$$

Vidi se da skalar sa elementom površine ima jedan proizvod, a vektor ima dvije vrste proizvoda. Uzmimo sada integrale proizvoda (79,4) po cijeloj površini S i podijelimo obuhvaćenom zapreminom V. Granična vrijednost tih količina, kada obuhvaćena zapremina teži nuli, naziva se **prostorni izvod** funkcije U, odnosno **v** u tački A (sl. 72).



Sl. 72.

Konvencionalno se uzima kao simbol prostornog diferenciranja baš operator ∇, pa je ova definicija izražena formulama (79, 1—3).

Može se dokazati da simbol prostornog diferenciranja nije ništa drugo, nego Hamiltonov operator ∇. U strogi dokaz tog zaključka nećemo se upuštati, ali napominjemo da je to donekle već i dokazano definicijom grad, div i rot, te prostornog izvoda, naročito za divergenciju.

Na osnovu izloženog se vidi da se pomoću definicije i primjene prostornog izvoda može definisati i gradijent skalara i divergencija i rotor vektora, od čega neki autori i polaze.

§ 80. — POVEZANOST PODRUČJA

Pri proučavanju polja, odnosno skalarne ili vektorske funkcije, koja karakteriše polje, važnu ulogu igra i samo područje u kojem je dotična funkcija definisana.

Savremena nauka smatra da je prostor zavisan od materije, prostor nije neki metafizički pojam praznog nepromjenljivog mjesta za materiju, kao što su ga ranije prikazivali izvjesni fizičari i filozofi, nego je prema današnjem shvatanju jedan od oblika postojanja materije.

Područje u kojem je polje definisano uopšte je neki dio prostora. Veličina područja može biti različita, što zavisi od specifičnosti i prirode polja uopšte. Tako na pr. polje tačkastog električnog opterećenja, koje je okarakterisano vektorom jačine polja **E**, obuhvata cjelokupan prostor, tj. beskonačno je veliko, izuzev same tačke, u kojoj se opterećenje nalazi. Spoljašnje magnetno polje, izazivano električnom strujom, koja protiče kroz »beskonačno« dugački cilindrični provodnik, definisano je u području čitavog beskonačnog prostora izuzev zapremine cilindra kroz koji struja protiče. Itd.

Prema tome može se govoriti o povezanosti područja, u kojem je polje definisano. Područje, dakle, može imati i svoje granice. Znači, neki dio prostora može biti takav, da u njemu nije definisano polje koje se proučava. Taj dio prostora može biti ili obuhvaćen područjem polja, ili izvan njega. Nas interesuju samo slučajevi kada se nalazi u području polja.

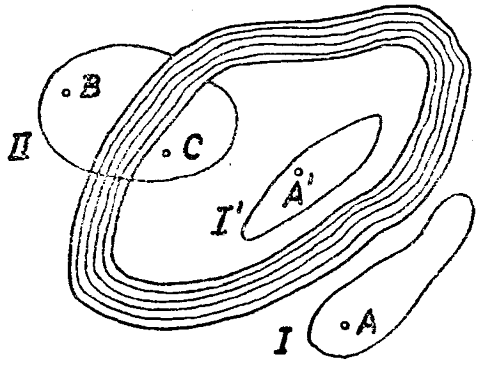
Uzmimo u području polja neku zatvorenu konturu C tako da se **sve tačke konture nalaze u polju.** Ta kontura se može zamisliti kao neki zatvoren konac — omča u ravni, a kao površina u prostoru. Kontura se može deformisati i na taj način da se može stisnuti u tačku, ali pod uslovom da se kontura ne prekine, da se konac omče ne prekida. Pomoću takvih kontura ustanovićemo da povezanost područja može biti različita.

Ako je područje, u kojem je polje definisano, čitav beskonačni prostor, onda se u njemu svaka kontura može kontinualnom deformacijom stisnuti u tačku, a da ne presiječe granice područja, jer je u ovom slučaju područje beskonačno i bez prostornih »oaza« u kojima polje ne bi bilo definisano.

Kao drugi primjer sličnog područja može poslužiti lopta u kojoj je polje definisano. I u takvom području može se omča bez deformacije stisnuti u tačku i to pod uslovom da ne presijeca granice područja.

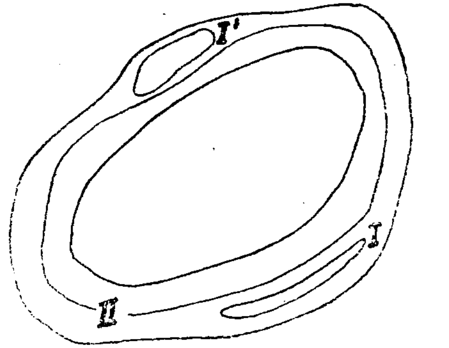
Takva područja, u kojima se svaka kontura može stisnuti u jednu tačku tog područja, a da ne presiječe granice područja niti da se kontura prekida, nazivaju se **jednostruko povezana područja.**

Posmatrajmo sada drukčiji slučaj. Neka je polje definisano u čitavom beskonačnom prostoru izuzev neke zapremine oblika karike (sl. 73) (oblika torusa ili uopšte proizvoljnog oblika karike). Znači, da karika ne pripada polju koje proučavamo. Na pr. čitavo polje van te karike može



Sl. 73.

biti bezvrtložno, a u njoj mogu postojati vrtlozi, i slično. U ovom slučaju u polju se mogu povući dvije vrste kontura, čije se sve tačke nalaze u polju: konture kao I i I', i konture kao II. Odmah se uočava da se konture tipa I i I' mogu stisnuti u ma koju tačku A ili A' bez kidanja konture i bez presijecanja granica područja u kojem je polje definisano. Me-

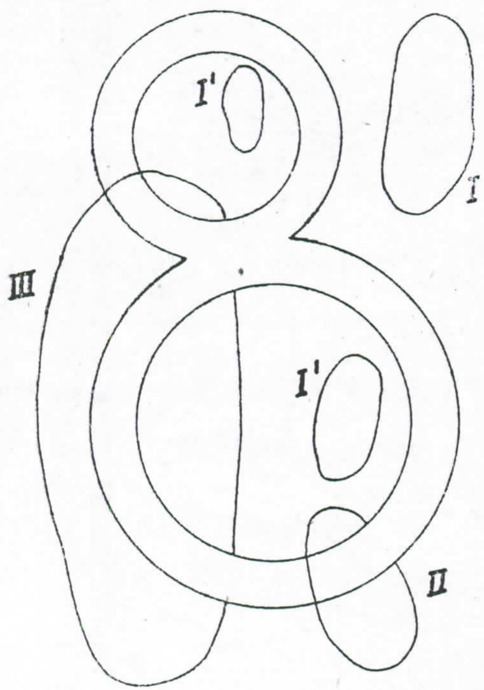


Sl. 74.

đutim konture tipa konture II ne mogu se svesti ni na jednu tačku, a da se ne presijeku granice područja ili da se ne prekine dotična kontura.

Sličan slučaj bi bio i kada bi područje, u kojem je polje definisano, bila zapremina karike (torusa) (sl. 74). Prostor izvan torusa u ovom slučaju je izvan područja u kojem je polje definisano. Jasno je da i ovdje postoje konture tipa I i I', koje se uz ranije navedene uslove mogu svesti na tačku, i konture tipa II, koje se uz te uslove ne mogu svesti na jednu tačku.

Dakle, kada postoji karika u polju, ili polje u obliku karike, postoje dvije vrste kontura, dvije vrste veza, koje ispunjavaju navedene uslove. Takva područja u kojima se mogu ostvariti veze tipa I i veze tipa II nazivaju se **dvostruko povezana područja.** Onda se može reći, da je na primjer i prostor, iz kojeg je izdvojena vrtložna karika, **dvostruko povezani prostor.**



Sl. 75.

Ako je područje, u kojem je polje definisano, opet čitav prostor, osim prostor koji zauzimaju na pr. dvije spojene karike ili torusa (sl. 75), onda takvo područje ima tri vrste veza, pa se zato i naziva **trostruko povezano područje.**

Uopšte može postojati područje sa mnogo veza ili n-to struko povezano područje.

Lako je vidjeti da se područje sa više veza može svesti na područje sa manje veza kada se konvencionalno uzme mogućnost pregrađivanja

otvora izdvojenog područja (kao na sl. 75) nekom membranom. Ako se u sl. 75 pregradi membranom područje jedne karike, onda će se područje sa tri veze svesti na područje sa dvije veze. Uopšte područje sa n veza može se reducirati na područje sa jednom vezom pomoću (n-1) konvencionalnih membrana.

Prema ranijim izlaganjima o potencijalnom polju i liniskom integralu može se sada kazati:

U jednostruko povezanom području pri potencijalnom polju liniski integral vektora među dvjema tačkama ne zavisi od oblika puta.

Isto tako: **cirkulacija vektora u jednostruko povezanom području pri potencijalnom polju ne zavisi od oblika zatvorene konture po kojoj se uzima i jednaka je nuli.**

Međutim u **višestruko povezanom području, uzevši uopšte, liniski integral vektora, pri potencijalnom polju, uzet na izvjesnom putu zavisi od oblika puta.** Dotični put može presijecati i granice područja i prolaziti kroz područje gdje polje nije potencijalno.

U vezi sa tim može se reći: **cirkulacija vektora u višestruko povezanom području uopšte je različita od nule.**

To se vidi na raznim primjerima u fizici, kao na pr. kod električnog ili magnetnog polja gdje se uzimaju u obzir dimenzije provodnika raznih oblika, odnosno diskontinuitet polja.

O područjima sa jednom i više veza bilo je govora i ranije, ali je ovdje izloženo potrebno radi lakšeg povezivanja raznih pojava i veličina, koje imaju međusobno vezu, neuočljivu na prvi pogled, te i radi daljeg izlaganja.

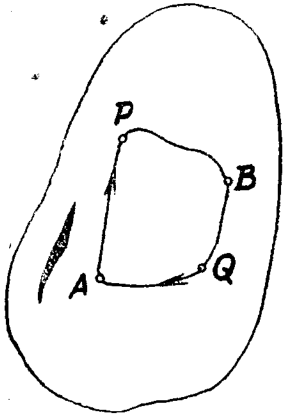
§ 81. — ODREĐIVANJE SKALARNE FUNKCIJE KADA JE POZNAT NJEN GRADIJENT

Neka je za svaku tačku područja dat vektor **G**, koji pretstavlja gradijent neke skalarne funkcije U:

$$\text{grad}U = \mathbf{G}. \qquad (81{,}1)$$

Sličan zadatak tretiran je kod proučavanja gradijenta u § 34 i § 35. U vezi (35,3) može se napisati

$$U = \int_{AB} \text{grad}U dr, \qquad (81{,}2)$$



Sl. 76.

gdje integral krivoliniski, uzet od neke izabrane stalne tačke A do tačke B, koja je uzeta proizvoljno (sl. 76) po krivoj liniji, čije se sve tačke nalaze u području gdje je polje definisano.

Da vidimo sada da li vektor **G** može biti proizvoljan vektor. Iz ranijih izlaganja se zna da je za ma kakav skalar

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,U = 0, \text{ pa mora biti}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{G} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (81{,}3)$$

To znači da je obavezan uslov da rotor tog vektora mora biti jednak nuli.

Iz prethodnog paragrafa je jasno da krivoliniski integral (81,2) zavisi od područja u kojem je polje određeno. Ako je područje jednovezno, lako se zaključuje da integral ne zavisi od puta, pa će u jednoveznom području integral biti jednoznačan. Neka su, dakle, APB i AQB (sl. 76) dva različita puta među tačkama A i B u jednoveznom području. Odmah se može pisati

$$\int_{APB} \mathbf{G}d\mathbf{r} - \int_{AQB} \mathbf{G}d\mathbf{r} = \int_{APB} \mathbf{G}d\mathbf{r} + \int_{BQA} \mathbf{G}d\mathbf{r} = \int_{APBQA} \mathbf{G}d\mathbf{r}.$$

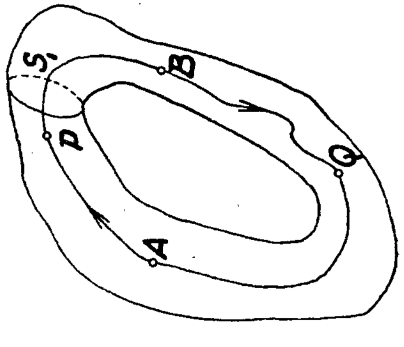
Put APB može se prevesti na put AQB bez presijecanja granica područja ili kontura APBQA može se stisnuti u tačku bez presijecanja granica područja i bez kidanja same konture. Prema Stokes-ovoj teoremi je

$$\int_{APBQA} \mathbf{G}d\mathbf{r} = \int_{S} \mathrm{rot}\mathbf{G}d\mathbf{S} = 0, \text{ pa je}$$

$$\int_{APB} \mathbf{G}d\mathbf{r} = \int_{AQB} \mathbf{G}d\mathbf{r},$$

čime je dokazano da u području sa jednom vezom integral (81,2) ne zavisi od puta duž kojeg se integral uzima.

Posmatrajmo sada isti integral u području sa dvije veze (sl. 77). Neka je to područje unutrašnjost jedne karike (ili torusa). Uzmimo membranu (pregradu) S_1, pomoću koje se područje svodi na jednovezno. Konture koje pregradu sijeku samo jedamput nazivaju se **glavne konture.** U slučaju područja sa više veza cirkulacije duž kontura uopšte uzevši biće različite od nule. Vrijednost cirkulacije duž glavne konture naziva se **ciklična konstanta.**



Sl. 77.

U području, koje je poslije uzimanja pregrade S_1 postalo jednovezno, integral (81,2) biće jednoznačan. Označimo ga sa U_0. Onda će biti

$$U_0 = \int_{AQB} \mathbf{G}d\mathbf{r}.$$

Ovdje je AQB ma koji put koji povezuje tačke A i B naravno u području sa jednom vezom.

Nas sada interesuje integral duž puta koji prolazi kroz pregradu S_1, na pr. duž puta APB. Onda će biti

$$\int_{APB} \mathbf{G}d\mathbf{r} = \int_{APBQA} \mathbf{G}d\mathbf{r} + \int_{AQB} \mathbf{G}d\mathbf{r}.$$

Označimo li cirkulaciju kroz zatvorenu konturu APBQA koja prolazi kroz pregradu S_1 sa C_1 biće

$$\int_{APB} \mathbf{G}d\mathbf{r} = U_0 + C_1.$$

Ako kontura presijeca površinu S_1 dvaput, ali u istom smjeru, tada je

$$\int_{APB} \mathbf{G}d\mathbf{r} = U_0 + 2\,C_1.$$

I uopšte, ako presijeca n_1 puta biće

$$\int_{APB} \mathbf{G}d\mathbf{r} = U_0 + n_1 C_1.$$

Ako je područje sa tri veze, na desnoj strani će biti još sabirak, na pr. n_2C_2 i uopšte za k pregrada biće

$$n_1C_1 + n_2C_2 + \ldots nkCk,$$

gdje su C_i ciklične konstante, a n_i cijeli brojevi.

Generalisanjem se dobiva

$$\int_{APB} Gdr = U_1 + \sum_{i=1}^{k} n_iC_i. \quad \ldots\ldots \quad (81{,}4a)$$

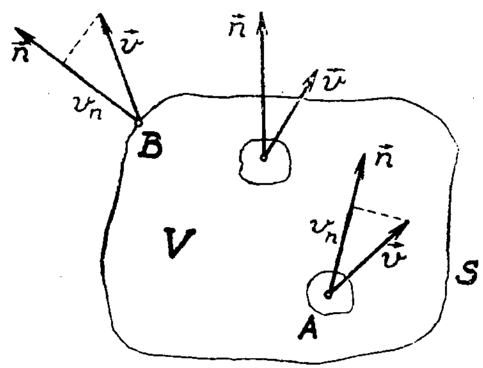
ili

$$U = \int_{AB} Gdr + C, \quad \ldots\ldots \quad (81{,}4b)$$

gdje je C proizvoljna konstanta. Ovo je opšte rješenje jednačine (81,1), kojim je određena skalarna funkcija U kada je zadat vektor **G**, koji je gradijent te funkcije.

§ 82. — TEOREMA JEDNOZNAČNOSTI

Dato je konačno jednovezno područje V (sl. 78). U svakoj tački tog područja poznati su divergencija i rotor vektora v. Dokazaćemo slijedeću teoremu:



Sl. 78.

vektor v je jednoznačno određen u ograničenom području V kada su poznati njegova divergencija, rotor i normalna komponenta u svim tačkama površine koja ograničava zadato područje.

Kao dokaz ove teoreme služiće dokaz nemogućnosti postojanja dvaju vektora, koji ispunjavaju taj uslov.

Uzmimo, dakle, dva različita vektora $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, koji bi tobože oba ispunjavali taj uslov. Označimo li poznatu divergenciju sa ϱ, a rotor sa w, u dotičnom području V biće

$$\mathrm{div}\,v_1 = \varrho, \qquad \mathrm{div}\,v_2 = \varrho \text{ i}$$

$$\mathrm{rot}\,v_1 = \vec{w}, \qquad \mathrm{rot}\,v_2 = \vec{w}, \text{ a na površini S}$$

$$v_{n1} = f(A), \qquad v_{n2} = f(A).$$

Tada će razlika tih vektora $\mathbf{d} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ispunjavati slijedeće:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\,d &= \mathrm{div}\,v_1 - \mathrm{div}\,v_2 = 0, \\ \mathrm{rot}\,d &= \mathrm{rot}\,v_1 - \mathrm{rot}\,v_2 = 0, \\ d_n &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (82{,}1)$$

Iz druge jednačine se zaključuje da vektor **d** mora biti gradijent neke skalarne funkcije, recimo funkcije U:

$$\mathbf{d} = \mathrm{grad}\,U. \quad \ldots\ldots \quad (82{,}2)$$

Tada je $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U = \Delta U = 0 \quad \ldots\ldots \quad (82{,}3)$

$$\text{i} \qquad d_n = \frac{\partial U}{\partial n} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (82{,}4)$$

Poslužimo se slijedećim oblikom Greenove formule (64,4):

$$\int_V [(\mathrm{grad}\,U)^2 + U\Delta U]\,dV = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n}\,dS. \quad \ldots \quad (82{,}5)$$

U vezi sa (82,3) i (82,4) u ovoj formuli ostaje samo prvi sabirak, odnosno

$$\int_V (\mathrm{grad}\,U)^2 dV = 0. \quad \ldots\ldots \quad (82{,}6)$$

Odavde se dobija u čitavom području

$$\mathrm{grad}\,U = 0. \quad \ldots\ldots \quad (82{,}7)$$

Inače za ma koju vrijednost gradijenta različitu od nule integral (82,6) bio bi pozitivan, što ne dozvoljava navedena relacija. Znači, za vektor **d** važi slijedeća relacija

$$\mathbf{d} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 0. \qquad (82,8)$$

Odavde se definitivno dobija

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \qquad (82,9)$$

čime je teorema jednoznačnosti dokazana. Ona pokazuje da postoji samo jedan vektor, kojem odgovaraju dati rotor i divergencija u određenoj ograničenoj zapremini i data normalna komponenta na površini koja obuhvata zadatu zapreminu, odnosno dati rotor i divergencija u svakoj tački područja i ispunjeni granični uslovi.

Teorema jednoznačnosti važi takođe i za slučaj kada je područje beskonačno.

§ 83. — ODREĐIVANJE VEKTORA KADA SU POZNATI NJEGOV ROTOR I DIVERGENCIJA

U raznim problemima se često nailazi na slučajeve kada su poznati rotor i divergencija vektora, a treba naći sam vektor, odnosno na slučajeve proučavanja vektorskih polja prema njihovom vrtlogu i izvoru.

Označimo divergenciju traženog vektora **v** sa ϱ, rotor sa **w** i normalnu komponentu na graničnoj površini sa v_n. Sve te veličine su funkcije položaja, pa je

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{v} &= \varrho\,(x, y, z), \\ \operatorname{rot}\mathbf{v} &= \mathbf{w}\,(x, y, z), \\ v_n &= f(A). \end{aligned}\right\} \qquad (83,1a)$$

Prve dvije jednačine napisane u analitičkom obliku pretstavljaju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \varrho(x, y, z), \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &= W_x(x, y, z), \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &= W_y(x, y, z), \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= W_z(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (83,1b)$$

Rješavanje ovih jednačina bez graničnih uslova suviše je uopšten zadatak. Međutim sa dopunskim graničnim uslovima $v_1 = f(A)$ zadatak nalaženja funkcija v_x, v_y, v_z je potpuno određen, kao što je ranije dokazano.

Ali, da bi sistem jednačina (83,1) imao rješenje, mora ispunjavati još neke uslove, koji ranije nisu navedeni.

Prvi uslov koji moraju ispunjavati funkcije ϱ, **w** i f, da bi sistem imao rješenje, dobija se iz relacije

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \text{ odnosno}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = 0. \qquad (83,2a)$$

Drugi uslov se dobija prema teoremi Gaussa-Ostrogradskog

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV = \int_S \mathbf{v}\,d\mathbf{S} = \int_S v_n\,dS, \text{ odnosno}$$

$$\int_V \varrho\,dV = \int_S f(A)\,dS. \qquad (83,2b)$$

Ovdje je riječ o konačnim područjima. Ako su područja beskonačna, — neograničena —, onda otpadaju granični uslovi.

Ovako opšte postavljeni zadatak odnosi se na polje opšteg oblika ili složeno polje. Ali u § 62 prilikom klasifikacije polja vidjelo se da ima osim sa izvorima i vrtlozima takođe i bezvrtložnih i bezizvornih polja. Zato ćemo postavljeni zadatak izračunavanja vektora, kada su zadate navedene funkcije, postepeno rješavati za razne vrste polja. Pojedini takvi zadaci rješavani su na drugi način djelimično još i ranije rješavani. Iz klasifikacije polja se vidi da su polja 1.—3. (§ 62) specijalan slučaj opšteg oblika polja (4).

Sada ćemo na osnovu datih funkcija naći vektor **v** koji karakteriše razna polja.

1. — **Potencijalno polje**

Poznato je da je potencijalno polje bezvrtložno. Prema tome zadatak se može formulisati ovako:

Izračunati vektor **v** kada je dat sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{v} &= \varrho \\ \mathrm{rot}\mathbf{v} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,3)$$

Granične uslove ovdje nećemo uzimati, nego ćemo zadatak riješiti za čitav beskonačan prostor, pa ćemo na taj način rješenje dobiti i za sve tačke ograničenog prostora, odnosno područja u kojem je polje definisano.

Iz zadatka se odmah zaključuje da je vektor **v**, čiji je rotor jednak nuli, bezvrtložni vektor, odnosno da je gradijent neke skalarne funkcije U:

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}U, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,4)$$

pa se zadatak svodi na jednačinu

$$\mathrm{divgrad}U = \triangle U = \varrho \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,5)$$

Ovdje je U, kao što je ranije navedeno, **skalarni potencijal.** Zadatak se, dakle, svodi na rješavanje Poissonove jednačine. Ovdje će se u daljem izlaganju naravno pojaviti koeficijent 4π, koji je ranije figurirao u Poissonovoj jednačini.

Rješenje Poissonove jednačine dato je u § 62. Prema tome je

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varrho dV}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,6)$$

i traženi vektor

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int\frac{\varrho dV}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (83,7a)$$

Ovdje je r rastojanje tačke A (x, y, z) do neke tačke B (ξ, η, ζ) ili $\mathbf{r} = \overline{BA} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, pa se (83,7) može naznačiti i u funkciji respektivnih koordinata, odnosno

$$\mathbf{v}\,(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}_A\int\frac{\varrho\,(\xi, \eta, \zeta)\; d\xi d\eta d\zeta}{r} \quad . \; . \quad (83,7b)$$

Tačka B se može uzeti i kao koordinatni početak.

Rješenje ovog zadatka takođe je već dato i u § 64. Ovo rješenje (83,7) odnosi se na **beskonačni prostor** sa jednom vezom, gdje je ispunjen uslov da u beskonačnosti vektor **v** teži nuli.

2. — **Solenoidno polje**

Poznato je da je solenoidno polje bezizvorno. Prema tome zadatak se može formulisati ovako:

Izračunati vektor **v** kada je dat sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{v} &= 0 \\ \mathrm{rot}\mathbf{v} &= \mathbf{w} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,8)$$

I ovdje ćemo posmatrati **beskonačno područje** sa jednom vezom, tj. nećemo uzimati u obzir granične uslove, koji se uzimaju kod ograničenog područja.

Iz zadatka se odmah zaključuje da je vektor **v**, čija je divergencija jednaka nuli, bezizvorni vektor, odnosno da je rotor neke vektorske funkcije **A**:

$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,9)$$

Vektor **A** je **vektorski potencijal,** o kojem je bilo govora ranije.

Zamjenom se dobija rotrot**A** = **w**, a odatle razvijanjem

$$\mathrm{graddiv}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \mathbf{w}. \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,10)$$

Postoji beskonačno mnogo vektora **A** koji zadovoljavaju posljednju jednačinu, jer je vektor **A** određen samo do tačnosti još jednog aditivnog člana-gradijenta, odnosno relacija (83,9) se ne mijenja ako se stavi

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathrm{grad}U.$$

To znači da se vektor **A** može izabrati tako da bude

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,11)$$

što ćemo u ovom slučaju i usvojiti.

Tada se dobija

$$\Delta\mathbf{A} = -\mathbf{w} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83,12)$$

Ovo je vektorska jednačina tipa Poissonove jednačine.

Za izračunavanje vektora **A** pretstavićemo vektorsku jednačinu (83,12) u obliku triju skalarnih jednačina:

$$\triangle A_x = -w_x, \ \triangle A_y = -w_y, \ \triangle A_z = -w_z,$$

gdje su A_x, A_y, A_z komponente vektora **A**, a w_x, w_y, w_z komponente vektora **w** na koordinatnim osama.

Rješenja ovih jednačina su, kao što je poznato,

$$A_x = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \frac{w_x\, dV}{r},$$

$$A_y = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \frac{w_y\, dV}{r},$$

$$A_z = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \frac{w_z dV}{r}.$$

Množeći respektivnim ortovima i sabirajući dobija se vektor **A**:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\int_\infty \frac{\mathbf{w}dV}{r}. \quad \dots\dots \quad (83{,}13)$$

Zamjenom se dobija definitivno rješenje:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \text{ rot} \int_\infty \frac{\mathbf{w}dV}{r}, \quad \dots\dots \quad (83{,}14a)$$

gdje opet treba imati u vidu da se veličine u ovoj relaciji odnose na različite koordinate. Ili jasnije: dobijeno rješenje se može napisati u obliku

$$\mathbf{v}\,(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \text{ rot}_A \int_\infty \frac{\mathbf{w}\,(\xi, \eta, \zeta)\; d\xi d\eta d\zeta}{r}. \qquad (83{,}14b)$$

Ovo rješenje je tretirano i ranije prilikom izlaganja vektorskog potencijala.

3. — Laplace-ovo polje

Za ovo polje je karakteristično da je i bezvrtložno i bezizvorno. Prema tome zadatak se može formulisati ovako:

Izračunati vektor **v** kada je dat sistem jednačina:

$$\left.\begin{aligned} \text{div}\mathbf{v} &= 0 \\ \text{rot}\mathbf{v} &= 0 \\ v_n &= f(A) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (83{,}15)$$

gdje se div i rot odnose na sve tačke u **ograničenoj** zapremini V, a v_n je granični uslov na površini S, koja ograničava tu zapreminu, pri čemu je A proizvoljna tačka te površine.

Iz druge jednačine se vidi da je traženi vektor **v** gradijent neke skalarne funkcije, odnosno

$$\mathbf{v} = \text{grad}U. \quad \dots\dots \quad (83{,}16)$$

Zamjenom u prvoj jednačini dobija se

$$\triangle U = 0. \quad \dots\dots \quad (83{,}17)$$

To znači da za izračunavanje vektora **v**, odnosno Laplace-ovog polja, treba najprije riješiti Laplace-ovu jednačinu. Prema (83,16) treća jednačina u (83,15) dobija oblik

$$\frac{\partial U}{\partial n} = f(A), \quad \dots\dots \quad (83{,}18)$$

a to je granični uslov na površini S.

Dakle, za definitivno izračunavanje vektora **v**, koji karakteriše Laplace-ovo polje, treba riješiti Laplace-ovu jednačinu uz dopunski uslov, koji daje vrijednost izvoda skalara U u pravcu normale na površini S, koja ograničava dotičnu zapreminu V u kojoj je polje određeno, kao i vrijednost skalara U na graničnoj površini. Taj problem se naziva **Neumann-ov problem.** Otuda zaključak da pri proučavanju Laplace-ovog polja treba riješiti Neumannov problem.

U slučaju beskonačnog-neograničenog-područja postojaće jedno jedino slijedeće rješenje Laplace-ove jednačine: $U = 0$, jer i $\frac{1}{r} \to 0$.

U rješavanje Neumannovog problema ovdje se nećemo upuštati.

4. — **Polje opšteg oblika.**

Polje opšteg oblika ili složeno polje karakteriše se svojstvom da ima i vrtloga i izvore. Prema tome zadatak za takvo polje može se matematski formulisati ovako:

Izračunati vektor **v** kada je dat sistem jednačina:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{v} &= \varrho \\ \mathrm{rot}\mathbf{v} &= \mathbf{w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (83{,}19a)$$

uz uslov

$$\mathrm{div}\mathbf{w} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83{,}19b)$$

Ovdje se pretpostavlja da područje u kojem je polje definisano obuhvata čitav prostor, te prema tome nije ograničeno.

U ovom slučaju razložićemo vektor **v** na bezvrtložnu komponentu $\mathbf{v}_1$ i na bezizvornu komponentu $\mathbf{v}_2$, odnosno

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Na osnovi izloženog komponente $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ moraju ispunjavati slijedeće uslove (v . 83,3 i 83,8):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{v}_1 &= \varrho \\ \mathrm{rot}\mathbf{v}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \ \mathrm{i} \ \left.\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{v}_2 &= 0 \\ \mathrm{rot}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{w} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (83{,}20)$$

Prema (83,4 i 7) i (73,9 i 14) dobija se

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}U + \mathrm{rot}\mathbf{A}, \text{ odnosno}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int\frac{\varrho dV}{r} + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int\frac{\mathbf{w}dV}{r}. \quad . \quad . \quad (83{,}21)$$

Ovo je definitivno rješenje problema izračunavanja polja koje obuhvata cjelokupan beskonačan prostor, kada su poznati rotor i divergencija, odnosno vrtlozi i izvori polja.

Što se tiče rješenja problema za ograničeno polje, upućujemo čitaoca na detaljniju matematičku literaturu iz te oblasti.

§ 84. — VRTLOŽNA LINIJA, TUBA I NIT I NJIHOVO POLJE

Ranije je bilo govora o vektorskim linijama. Analogno se mogu definisati linije rotora nekog vektora. Ako se u svakoj tački polja vektora **v** izračuna rot**v** dobiće se novo vektorsko polje vektora rot**v**. Grafički pretstavnici toga polja nazivaju se vektorske linije vektora rot**v** ili **vrtložne linije vektora v.**

Odmah se vidi da kod vrtložnih linija nema izvora, odnosno div**w** = = divrot**v** = 0, a to znači da su vrtložne linije ili zatvorene ili da imaju kraj na granici polja, odnosno na nekom diskontinuitetu.

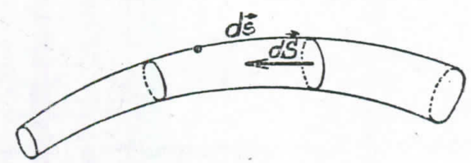
Poznato je, međutim, da su u čisto vrtložnom polju i vektorske linije vektora **v** zatvorene, jer je takvo polje bezizvorno. Vektorske linije vektora **v** i vektora **w**, odnosno vektorske i vrtložne linije vektora **v**, međusobno se obuhvataju (zatvorene su) kao karike jednog lanca.

Ako se u vrtložnom polju normalno na ose vrtloga **w** uzme neka mala površina i od njene konture povuku kao izvodnice vrtložne linije, dobiće se **vrtložna cijev** ili **tuba.** Prema izloženom se zna da ni u toj tubi neće biti izvora pod rečenom pretpostavkom.

Pri proučavanju polja i izračunavanju raznih veličina vrlo često se posmatraju vrtložne tube, koje su tako tanke da se poprečne dimenzije mogu uzeti kao beskonačno male veličine. Takva vrtložna tuba (cijev) se naziva **vrtložna nit** ili **vrtložna žica.** Takvo izdvajanje vrtložnih žičica i posebno proučavanje u mnogome uprošćava računanje i tretiranje pojedinih problema iz oblasti gdje postoje vrtlozi (kako u hidro- i aeromehanici, tako i u ostalim oblastima fizike).

Posmatrajmo sada jednu izdvojenu usamljenu vrtložnu nit nekog neograničenog vrtložnog bezizvornog polja. Pretpostavlja se da je u svakoj tački poznat vrtlog vektora **v**, odnosno da se zna vektor **w** = rot**v**. Prema (83,21) relacija među vektorom **v** i njegovim vrtlogom biće u ma kojoj tački polja

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int_V\frac{\mathbf{w}dV}{r}. \quad \ldots\ldots \quad (84{,}1)$$



Sl. 79.

Označi li se orijentisani element poprečnog presjeka niti sa **dS**, a (liniski) element vrtložne linije sa ds (sl. 79), element zapremine vrtložneniti biće

$$dV = \mathbf{dS} \,.\, \mathbf{ds}.$$

Zamjenom se dobija

$$v = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{V} \frac{w dS ds}{r} .$$

Poznato je da je $w dS$ fluks vektora w kroz površinu dS i to konstantne vrijednosti za ma koji presjek niti. Vektori w i ds su istoga smjera, pa se može pisati

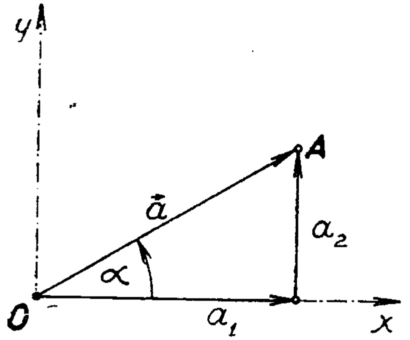
$$v = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\Phi ds}{r} = \frac{\Phi}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{ds}{r}, \quad . \quad . \quad (84{,}2)$$

gdje Φ u ovom slučaju označava pomenuti fluks.

Odavde se vidi da vektor v ne zavisi neposredno od presjeka vrtložne niti, pa se može smatrati i kao vektor koji karakteriše polje izdvojene usamljene vrtložne linije.

§ 85. — VEKTORSKO PRETSTAVLJANJE KOMPLEKSNIH VELIČINA I OBRNUTO

Neka je dat kompleksni broj $a_1 + ja_2$, gdje je $j = \sqrt{-1}$. Usvojeno je da se ovakav broj može prikazati kao »vektor« (sl. 80) sa komponen-

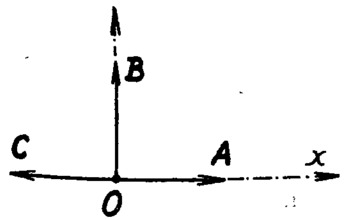


Sl. 80.

tama a_1 i a_2 duž realne i imaginarne ose u takvom koordinatnom sistemu kod kojeg je ordinatna osovina imaginarna. Onda je vektor **a** određen svojom realnom i imaginarnom komponentom.

Može se poći i obrnuto, tj. dati obrtni vektor može se pretstaviti pomoću kompleksnog broja na taj način što se usvoji da za rotaciju od $\frac{\pi}{2}$ fungira simbol j. Znači ako se uz broj nalazi j, treba ga nanijeti po osi koja je okrenuta za $\frac{\pi}{2}$ od prvobitne ose tog broja, gdje se obrtanje računa u pozitivnom usvojenom smjeru. Na pr. uzmimo jedinicu na realnoj Ox-osi (sl. 81): $OA = 1$. Pomnožimo je sa j. Dobiće se

$$OAj = OBj = j.$$



Sl. 81.

Pomnožimo li dalje sa j dobićemo

$$OB \cdot j \cdot j = OBj^2 = j^2 = OC = -1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85{,}1)$$

Odavde se zaključuje da je j imaginarna jedinica.

Onda se može pisati

$$\mathbf{a} = a_1 + ja_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85{,}2)$$

a se naziva **modul vektora,** a α njegov **argument.**

Osim ovog obilježavanja može se pisati i na slijedeći simbolični način:

$$\mathbf{a} = a \underline{|\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85{,}3)$$

Prema sl. 80 je

$$\mathbf{a} = a\cos\alpha + ja\sin\alpha \ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85{,}4)$$

Primjenom Eulerove formule dobija se

$$\mathbf{a} = a\,(\cos\alpha + j\sin\alpha) = ae^{j\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85{,}5)$$

Ovo je takođe simbolična vrijednost vektora **a.**

Dalje operacije i relacije sa ovakvim obrtnim vektorima jasne su, jer se svode na računanje sa kompleksnim brojevima.

Ovakav metod se naročito primjenjuje u teoriji naizmjeničnih struja, gdje se pomoću ovakvog prikazivanja električnih veličina komplikovane diferencijalne jednačine zamjenjuju prostim jednačinama, te se i algebarski i grafički u mnogo slučajeva rješavaju jednostavno.

Nećemo se upuštati u detalje ovog metoda, jer smatramo da takve veličine, koje se prikazuju kompleksnim brojevima, prvenstveno u teoriji naizmjeničnih struja — u elektrotehnici, u stvari nisu vektori, iako ih mnogi autori nazivaju vektorima. To su obrtni vektori, kojima bolje odgovara naziv **versori,** tim prije što se za njih dobivaju i posebna pravila i rezultati prilikom računanja.

Ovdje smo ih spomenuli baš iz pomenutog razloga u većini usvojene terminologije.

§ 86. — D'ALEMBERT-OV OPERATOR

Iz fizike i matematike je poznato da je opšti oblik talasne jednačine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0 \\ \text{ili}\quad &\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (86.1)$$

Ova jednačina se naziva i d'Alembert-ova jednačina. U ovoj jednačini c prtstavlja brzinu prostiranja uzajamnog djejstva. Drugu jednačinu na pr. zadovoljavaju i električno polje **E** i magnetno polje **H**, pa je to jednačina i elektromagnetskih talasa. Ta jednačina se može pisati i u slijedećem obliku:

$$\triangle \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad \ldots \quad (86,2)$$

Obično se uvodi takozvani **d'Alembertov operator** $\square$:

$$\square = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \ldots \quad (86,3)$$

gdje je $\triangle$ Laplace-ov operator.

Prema tome talasna jednačina se može pisati uopšte:

$$\square f = 0, \quad \ldots \quad (86,4)$$

gdje f pretstavlja ma koju od komponenata na pr. elektromagnetnog polja (ukoliko se o njemu radi): **A, E, H,** itd.

Kao što se vidi, d'Alembert-ov operator mnogo uprošćava operacije u toku izvođenja i računanja, jer se izbjegavaju glomazne jednačine sa mnogo članova.

LITERATURA

1. — *Abraham M. und Föppl A.:*
   Theorie der Elektrizität, Bd. I. 1907.
   (Takođe i ruski prevod Beckerovog prerađenog izdanja: Абрахам-Беккер: Теория электричества, 1939.).

2. — *Burali-Forti e Marcolongo:*
   Eléments de calcul vectoriel, 1910.
   Omografie vettoriali, 1909.

3. — *Дубнов Я. С.:*
   Основы векторного исчисления, Часть I, 1939.

4. — *Фиников С. П.:*
   Векторный анализ, 1931.

5. — *Фиников С. П.:*
   Диференциальная геометрия, 1939.

6. — *Френкель Я. И.:*
   Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа, 1940.

7. — *Gans R.:*
   Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik, 1921.

8. — *Gibbs-Wilson:*
   Vector analysis, 1913.

9. — *Haas A.:*
   Vektoranalysis, 1926.

10. — *Haas A.:*
   Einführung in die theoretische Physik, 1930.

11. — *Ignatowsky W.:*
   Die Vektoranalysis, Band I. und II., 1926.

12. — *Joos G.:*
Lehrbuch der theoretischen Physik, 1943.

13. — *Juvet G.:*
Leçons d'analyse vectorielle, I et II partie, 1935.

14. — *Когин Н. Е.:*
Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 1938.

15. — *Ладон И. Ф.:*
Основы векторного исчисления с приложениями к теории электромагнитного поля, 1938.

16. — *Lagally M.:*
Vorlesungen über Vektor-Rechnung, 1934.

17. — *Лоренц Г. А.:*
Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения (ruski prevod s engleskog), 1934.

18. — *Pomey J. B.:*
Principes de calcul vectoriel et tensoriel, 1923.

19. — *Runge C.:*
Vektoranalysis, 1919.

20. — *Schaeffer C.:*
Einführung in die theoretische Physik, 1929—1937.

21. — *Schouten J. A.:*
Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis, 1914.

22. — *Смирнов В. И.:*
Курс высшей математики, Том второй, 1938.

23. — *Spielrein J.:*
Lehrbuch der Vektorrechnung, 1926.
(Takođe i na ruskom jeziku).

24. — *Тамм И. Е.:*
Основы теории электричества, 1946.

25. — *Valentiner S.:*
Vektoranalysis, 1923.

26. — *Weber R. H.:*
Angewandte Elementar-Mathematik
Erster Teil
Mathematische Physik, 1923.

SADRŽAJ

TREĆA GLAVA

Teorija skalara i vektora koji zavise od vektorskog argumenta

ČETVRTA GLAVA

Teorija vektora u krivoliniskim koordinatnim sistemima (generalisanim)

PETA GLAVA

O nekim svojstvima vektorskih polja i operacijama u njima. Specijalna polja