

МФ МУЗАЧ
ВЛАСТИМИР СТАЛИЋ
професор

АРИТМЕТИКА

ЗА ДРУГИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

СЕДМО ПРЕРАЂЕНО ИЗДАЊЕ

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧКОГ ЗАВОДА
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТАТА
Број инвентара 10.696

36.44.62
Београд



БЕОГРАД
ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА
1940

ГЛАВА I

ЧИТАЊЕ И ПИСАЊЕ БРОЈЕВА ДО МИЛИЈАРДЕ

1. — Практично упутство за читanje написаних бројева:

Ако број има највише три цифре, треба изговорити редом сваку цифру са именом реда, који та цифра претставља. Ако број има више од три цифре, онда се он најпре подели у класе, почевши с лесна налево. У сваку класу долазе по три цифре. Последња класа налево може имати две или једну цифру. Свака таква класа чита се редом као засебан број, тј. у њој се увек читају стотине, десетице и јединице, а при том изговара име класе. Прва класа, почевши с лесна налево, претставља просте јединице, друга хиљаде, трећа милионе, четврта милијарде итд.

Број 42 345 704 чита се: четрдесет и два милиона три стотине четрдесет и пет хиљада седам стотина четири.

Практично упутство за писање изговорених бројева:

Ако број садржи само просте јединице, онда се редом напишу цифре стотина, десетица и јединица, при чему се још ваља старати да се напише нула онде где недостају јединице известног реда. Ако број има више од три цифре, онда се редом пише свака класа, почевши са највишом. У случају да неке класе нема, њено место попуни се са три нуле.

Број тридесет и два милиона три стотине осам пише се: 32 000 308.

Напомена. — Треба избегавати уobičajeno стављање тачке поред хиљада и запете поред милиона. Ради боље прегледности, ми ћемо поједине класе писати мало више размакнуте.

2. — Ово што смо рекли о читану и писању бројева, боље и прегледније се види из приложене табеле.

IV Класа мили- јарди	III Класа мили- она	II Класа хиљада	I Класа простира- јединица
12-TN peA	11-TN peA	10-TN peA	9-TN peA
8-WN peA	7-WN peA	6-TN peA	5-TN peA
9-TN peA	10-TN peA	11-TN peA	12-TN peA
7-WN peA	8-WN peA	6-TN peA	5-TN peA
6-TN peA	5-TN peA	4-TN peA	3-TN peA
7-WN peA	8-WN peA	6-TN peA	5-TN peA
8-WN peA	9-TN peA	10-TN peA	11-TN peA
5-TN peA	6-TN peA	7-WN peA	8-WN peA
4-TN peA	3-TN peA	2-RN peA	1-BN peA
5-TN peA	6-TN peA	7-WN peA	8-WN peA
6-TN peA	7-WN peA	8-WN peA	9-TN peA
7-WN peA	8-WN peA	9-TN peA	10-TN peA
8-WN peA	9-TN peA	10-TN peA	11-TN peA
9-TN peA	10-TN peA	11-TN peA	12-TN peA

Упракси се, углавном, употребљавају само ове четири класе.

За писмено вежбање

Напиши:

1. Милион двеста шездесет хиљада пет стотина четрдесет и седам.
2. Двадесет милиона тридесет и шест хиљада четири стотине.

3. Милион четрдесет хиљада и четрнаест.

4. Милион и један; милион једна хиљада и један; милион сто један; милион десет.

5. Тридесет и пет милиона седам стотина и две хиљаде.
6. Сто једанаест милиона један; милион десет хиљада и један.

7. Три милиона и две стотине петнаест.

8. Један ученик нека чита, један нека пише на табли, а остали да пишу на својим свескама ове бројеве: 10 900 019, 160 000 006, 10 001 101, 304 040 000, 10 300 003, 11 011 011, 3 050 204, 90 008 007, 290 000 092.

9. Једна милијарда двеста педесет девет милиона седам стотина шездесет хиљада пет стотина седамдесет и четири.
10. (72 000 — 6785) + (120 000 000 — 94 785 023) =
11. (77 895 + 357 084 + 780 463) — (109 437 + 73902) =

12. Површина целе земље је 510 000 000 квадратних километара. Европа има 9 700 000 км², Азија 44 200 000 км², Африка 29 800 000 км², Америка 38 500 000 км², Австралија са Полинезијом 9 000 000 км² и поларни предели 12 000 000 квадратних километара.

- а) Колико квадратних километара покрива вода?
б) За колико је површина суве земље мања од површине воде?

13. Кад је пречник Земље 12 740 километара, а отстојање Сунца од Земље 11 700 Земљиних пречника, колико километара има од Земље до Сунца?

14. Израчунај производ од више чинилаца: 365 · 24 · 60 · 60!

15. Израчунај производе и изврши пробу са 9: 9 980 · 292 000 · 83 607 = 9 980 · 795 · 42 = 650 437 · 96 580 =

16. (8 276 + 512) · (900 · 1 + 886 + 637) =
17. (67 843 — 59 670) · (11 345 — 1 287) =
18. (17 835 + 1 996) · (162 371 — 39 864) =

19. Колики је квадрат бројева 4 873; 6 55; 11 111 ?
20. Колики је куб бројева 108; 321; 432; 1 054 ?

21. Дељеник је 3 136 338 делилац 648, колики је количник и остатак?
22. Производ је 3 492 720, један чинилац 2 835, колики је други чинилац?

23. На земљи живи отприлике 1 800 000 000 људи. Да ли би било места за све људе у једном кубном километру, ако се рачуна да је за једног човека довољно простора 50 см дужине, 50 см ширине и 2m висине?

24. **Слуга који одлично рачуна. Домани задатак за три недеље.** Погађајући се са газдом слута рече: „Не тражим велику месечну плату. Платите ми овако: за први дан једну пару, за други две паре, за трећи 4 паре итд., за сваки наредни дан два пута више од претходног дана. Колико је изнела та његова мала плата за месец дана?“

25. Колика је разлика између производа бројева 1 568 и 6 024 и количника бројева 4 488 330 и 638?
26. [(4 829 099 — 809 898) : 347 + 947] : 70 + 77 · 22 =

28. $[(12\ 444\ 452 : 1\ 438 - 371\ 995 : 65) : 877\ 333 + 1\ 001] :$

$$: 200 - 10 =$$

$$29. [(18\ 812\ 725 : 479 + 2\ 005 \cdot 105) : 4\ 996 + 50 \cdot 39] :$$

$$: 40 - 38 =$$

$$30. (20\ 777 : 79 + 49\ 737) : \{ [15 \cdot (7\ 000 - 3\ 333) : 18\ 335] - \\ \cdot 100 \} =$$

3. Како ћеш поделити на два једнака дела дуж на сл. 2? Како једну траку од хартије? Како један конац?

Сл. 2

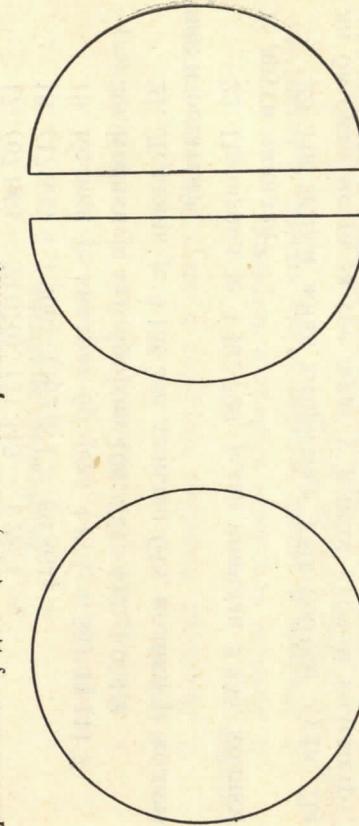
4. Колика је $\frac{1}{2}$ од 18 динара, од 36 метара, од једног товара, од 58, од 246, од 5 000, од 2 614?

5. Којом рачунском радњом налазимо половину?

6. Колико половина има једно цело? Како то да напишемо?

3. **Половине.** — Два друга добију једну округлу погачицу да поделе другарски на једнаке делове. Колико добије сваки? Део свакога обележавамо са $\frac{1}{2}$ погачице.

Величина $\frac{1}{2}$ коју смо добили тиме, што смо поделили или разломили једно цело, зове се **разломак**.

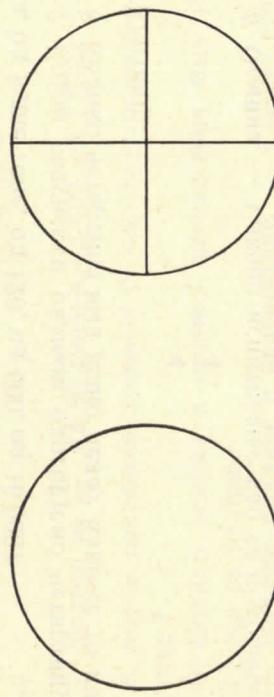
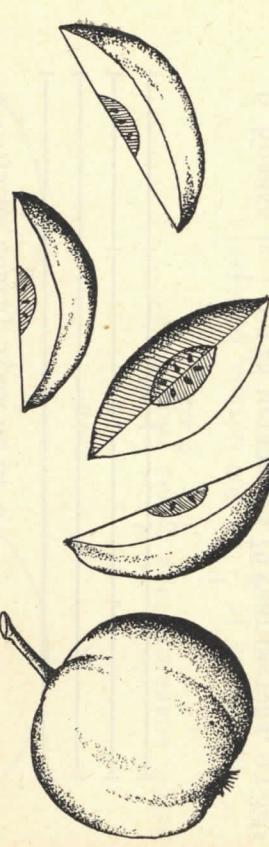


Сл. 1

За усмено вежбање

1. Колико сантиметара износи $\frac{1}{2}$ од метра, колико грама $\frac{1}{2}$ од килограма, колико минута $\frac{1}{2}$ од сата?

2. Како друкчије зовемо 500 грама, како 12 сати, како 30 минута, како 6 комада?



Сл. 3

На колико једнаких делова је подељен круг, на колико јабука на сл. 3?

Како се пише једна четвртина?

Одговор: $\frac{1}{4}$. И $\frac{1}{4}$ је разломак.

ГЛАВА II

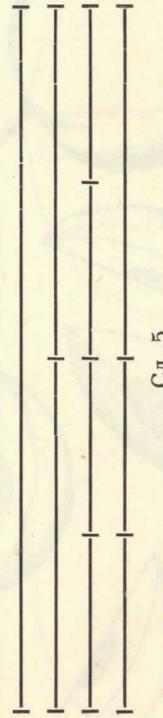
ОСНОВНИ РАЗЛОМЦИ

За усмено вежбање

1. Колико сантиметара има $\frac{1}{4}$ од метра, колико литара $\frac{1}{4}$ од хектолитра, колико метара $\frac{1}{4}$ од километра, колико квадратних метара $\frac{1}{4}$ од ара?
2. Који је део 250 грама од килограма, 15 минута од сата, 3 месеца од године?
3. Како ћеш поделити на четири једнака дела дуж на сл. 4? Како једну траку од хартије? Како један конац?

Сл. 4

4. Како се дуж на сл. 4 може поделити на четири једнака дела траком од хартије?
5. Објасни поделу дужи на сл. 5!



Сл. 5

6. Колика је $\frac{1}{4}$ од 28 метара, од 76 сантиметара, од 320 грама, од једне тоне, од 120, од 600, од 16 000?
7. Којом рачунском радњом одређујемо четвртину?
8. Колико четвртина има једно цело? Како се то пише?
- Одговор:

$$1 = \frac{4}{4}.$$

5. **Осмине.** — Слично испитивање као са половинама и четвртдинама можемо извести и са осмнинама, шеснаестинама итд.

За усмено вежбање

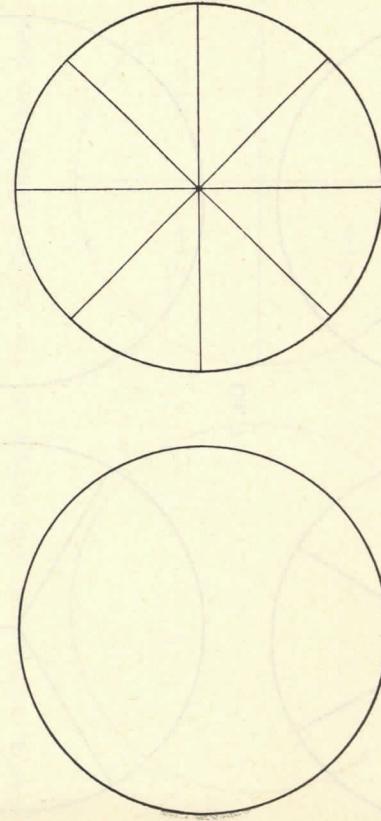
1. На колико једнаких делова је подељен круг на сл. 6? Како се зове сваки такав део? Како се пише?

За усмено вежбање

2. Како се може конац поделити на осам једнаких делова? Како на шеснаест?

3. Подели један табак хартије на осам једнаких делова!

4. Колико грама има $\frac{1}{8}$ од килограма, колико је килограма $\frac{1}{8}$ од тоне, колико је кубних десиметара $\frac{1}{8}$ од кубног



Сл. 6

метра, колико метара $\frac{1}{8}$ од километра?

5. Колика је $\frac{1}{8}$ од 200 метара, од 4 000?
6. Како се могу слично као на слици 6 добити шеснаестине?

7. Колика је $\frac{1}{8}$ од 80 динара, од 400, од 1 632?
8. Којом рачунском радњом се одређују осмине и шеснаестине?

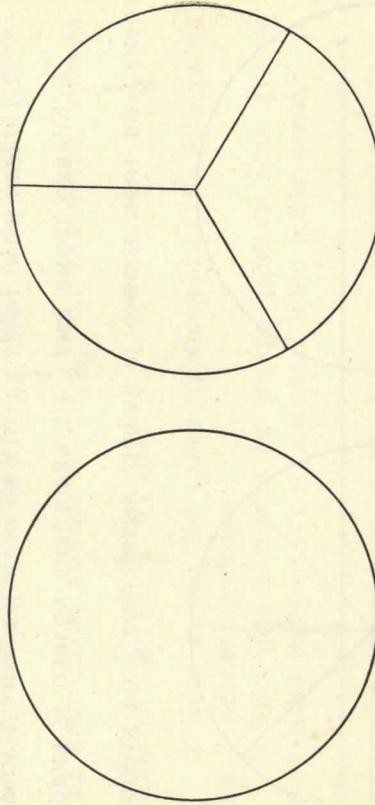
9. Колико осмина и колико шеснаестина има једно цело? Како се то пише

6. **Трећине, шестине и дванаестине.** — Слично испитивање можемо извршити са трећинама, шестинама, дванаестинама итд.

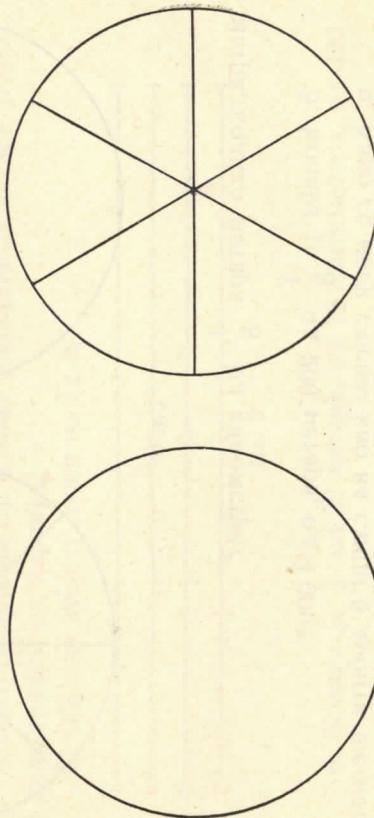
За усмено вежбање

1. На колико једнаких делова је подељен круг на слици 7? Како се пише једна трећина?

2. На колико једнаких делова је подељен круг на сл. 8?
Како се пише једна шестина?



Сл. 8



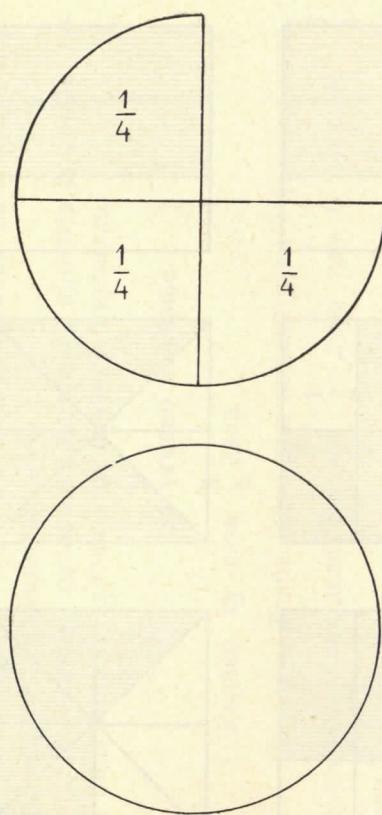
Сл. 8

7. Колико једно цело има трећина, шестина, дванаестина? Како се то пише?

8. Којом рачунском радњом се одређују $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$?

Изведени разломци

7. — Кад један хлебар отсече и прода једну четвртину хлеба, колико му још остаје од тог хлеба? Очевидно њему



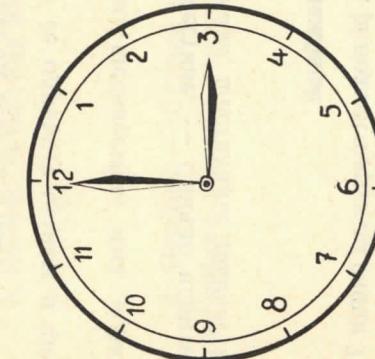
Сл. 10

преостану још три дела, од којих је сваки по једна четвртина.
Остану му *три четвртине*, што пишемо $\frac{3}{4}$.

8. — Од једног табака хартије, који је пресавијањем изломљен, тако да се на њему виде *осмине*, ученик отсеца сваког дана по једну осмину. Колико је отсекао после три дана? Колико је после тога преостало још неотсечених осмина табака?

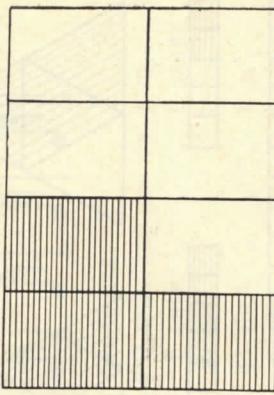
Секући сваког дана по $\frac{1}{8}$, он је за три дана отсекао $\frac{3}{8}$. Преостало је још $\frac{5}{8}$ табака.

Сл. 11



Сл. 9

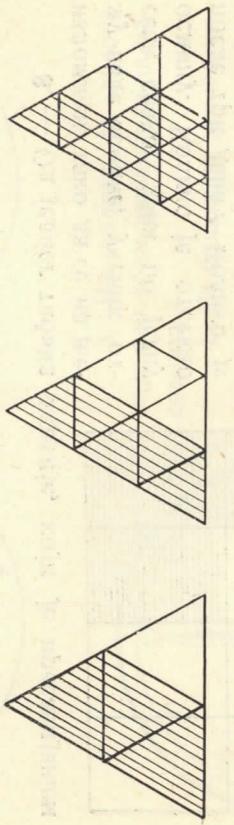
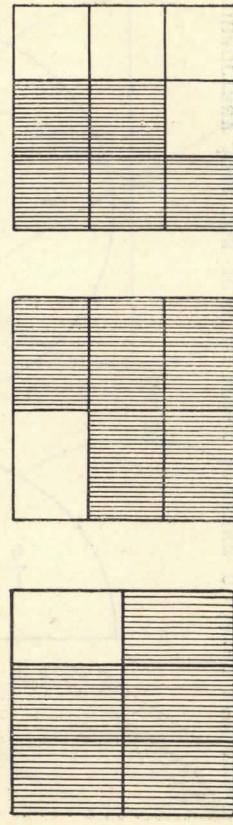
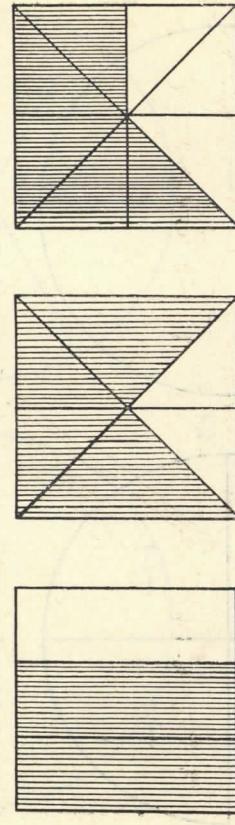
3. На колико је делова подељен обим цифарника на часовнику?
4. На колико је делова подељен цифарник, ако цифре спојимо са центром цифарника? Како се зове сваки такав део? Како се пише?
5. Како је цифарник подељен казаљкама у 6 сати?
6. Који део цифарника исказују казаљке у 3 сата? Који у 4 сата? Који у 2 сата?



9. — Цифарник на часовнику спајањем цифара са центром подељен је на 12 једнаких делова. Како се пишу ови пару 5 таквих делова, како 7, како 11? Како се изговарају?

И $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ итд. зову се разломци.

10. — Које делове претстављају следеће слике и како се обележавају разломцима?



Сл. 12

11. **Бројилац и именилац.** — Посматрајмо разломак $\frac{31}{4}$. Та величина је означена помоћу два броја и једне црте, разломачке црте. Број испод црте казује нам **име** делова и зове се **именилац** разломка. Он објашњава како се деобом добија разломак. Број изнад црте казује колико је узето једнаких делова. Он броји једнаке делове и зове се **бројилац**. Овакви су разломци **обични**.

Напомена. — При писању разломака увек треба написати разломачку црту.
При читању разломака најпре се прочита бројилац, па се онда искажу делови које означује именилац.

За усмено вежбање

1. Колико су сати $\frac{3}{4}$ дана.

Одговор: Треба један дан поделити на 4 једнака дела, па узети 3 таква дела. Поншто $\frac{1}{4}$ дана има 6 сати, то $\frac{3}{4}$ дана 18 сати

2. Како постају разломци $5\frac{2}{9}$, $8\frac{6}{15}$? Претстави их очигледно на квадрираној хартији!

3. Прочитај разломке: $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{6}{19}$, $\frac{16}{25}$!

4. Изрази разломком следеће ноте:



5. Како се пишу у облику разломка:

25 паре као део од 1 дин., 200 mm. као део од 1 m,
12 минута " " 1 сата, 5 саги " " 1 дана,
39 m^2 " " 1 а, 49 m^2 " " 1 ha,
165 грама " " 1 kg., 41 dm³ " " 1 m³,
90 литара " " 1 hl., 5 ком. " " 1 тутепта?

6. Кад 11 вина стаје 10 динара, пошто су $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{11}{20}$?

7. $\frac{3}{4}$ неког броја износе 9, колика је $\frac{1}{4}$? Колики је цео број?

У следећим примерима ученик сам да постави питање:

8. $\frac{4}{5}$ неког броја износе 20; $\frac{7}{8}$ неког броја износе 35.

9. $\frac{3}{7}$ неког броја износе 18; $\frac{5}{12}$ неког броја износе 65.

10. $\frac{8}{13}$ неког броја износе 128; $\frac{6}{7}$ неког броја износе 276.

11. Један ученик има 32 кликера. Он у игри изгуби $\frac{3}{4}$ од тог броја. Колико му је још остало?

12. У $\frac{2}{3}$ једне кесе могу стати 18 ораха. Колико може стати у целој кеси?

Питања

1. Шта нам казује разломак?

2. Шта казује бројилац, а шта именилац?

3. Како се пише разломак?

4. Како се чита разломак?

За писмено вежбање

1. Од 80 дрвета у једном воћњаку су $\frac{2}{5}$ јабуке, $\frac{5}{16}$ крушице, $\frac{3}{20}$ трешње, остало шљиве. Колико има од сваке врсте?

2. Један чиновник има годишњу плату 45 000 динара, Од тога он употреби $\frac{1}{2}$ за кирију, $\frac{1}{9}$ за одело и обућу, $\frac{1}{15}$ за дуван, $\frac{3}{50}$ за огрев, $\frac{1}{25}$ за осветљење. Колико му остаје за исхрану и друге потребе?

3. Неко остави после своје смрти 72 000 динара. Од тога добије жена $\frac{1}{3}$, свако од 5 деце по $\frac{1}{8}$ а остатак да се подједнако подели на 5 сродника. По колико добија сваки?

4. Нацртaj једну дуж од 8 cm; измери $\frac{5}{8}$ овe дужи! Колико још преостајe? Отсечи од остатка још $\frac{1}{10}$!

5. Нацртaj једну дуж од 6 cm, продужи је за $\frac{2}{3}$ њене дужине, затим од тако добијене дужи одузми $\frac{3}{10}$!

6. Нацртaj дуж од 48 mm, продужи је налево за $\frac{1}{2}$, надесно са $\frac{5}{12}$ њене дужине, затим отсечи $\frac{3}{4}$ од нове дужи!

7. Нацртaj 6 једнаких дужи једну испод друге, па прву сматрај као $\frac{2}{3}$ неке друге веће дужи; другу као $\frac{3}{4}$, трећу као $\frac{6}{7}$, четврту као $\frac{4}{9}$, пету као $\frac{5}{12}$, а шесту као $\frac{3}{10}$ неке дужи! Затим нацртај 6 већих дужи знајући њихове делове!

8. Обим цифарника једног часовника је 76 cm 8 mm. Колики је пут описан врх сатне казаљке, почевши од 12^h, до 4^h? Колико изменењу врхова обеју казаљки у 3^h?

9. Један ученик добије од оца за излет 32 динара. $\frac{1}{4}$ од тог платио је за возњу, $\frac{3}{8}$ за храну, 2 динара дао другу на зајам. Колико је новаца вратио кући?

10. Један крчмар купи 9 hl 60 l вина; од тога он прода прве недеље $\frac{2}{15}$, друге $\frac{1}{4}$, треће $\frac{7}{24}$, а четврте остатак. Колико је сваке недеље пазарио, кад је продавао по 8 динара литар?

11. Израчунај: $\frac{5}{12}$ од 4 km 44 m; $\frac{4}{15}$ од 14 ha 70 a!

12. $\frac{11}{60}$ од 79 hl 20 l; $\frac{11}{84}$ од 23 m³ 436 dm³!

13. $\frac{4}{15}$ од 4 050 дин., 3 600 kg, 2 040 m!

14. $\frac{3}{125}$ од 80 kg = g; $\frac{7}{500}$ од 17 m³ = dm³?

15. Израчунај: $\frac{3}{8}$ од 24, 32, 56, 112, 144, 200;

$\frac{11}{60}$ од 240, 540, 780, 1 020, 1 500!

16. Реши ове задатке (најчешће усмено):

$\frac{1}{5}$ једног броја је 16, који је тај број?

$\frac{3}{4}$ " су 18, " " "

$\frac{4}{5}$ " " 28, " " "

$\frac{7}{9}$ " " 63, " " "

$\frac{11}{12}$ " " 121, " " "

17. Кад 1 1 вина стаје 10 дин. 50 пар., пошто су

$\frac{2}{3} 1; \frac{3}{5} 1; \frac{7}{10} 1?$

18. Неко прими $\frac{4}{7}$ од 350 динара, а плати $\frac{2}{11}$ од 638 дин. Колико му је преостало?

19. Попшто је неко ишао већ 20 km, прешао је $\frac{5}{8}$ пута. Колико км има да иде?

20. Колико година има један ученик, кад $\frac{5}{6}$ његове ста-
рости износе 10 година и 10 месеци?

21. Израчунај цену 1 л вина, кад једна бодца од $\frac{3}{4}$ l стаје
1 дин. 80 пар.; 2 дин. 40 пар.; 2 дин. 70 пар., 3 дин. 60 пар.,
4 дин. и 50 пар!

22. Кад се у једно буре наспе 135 l течности, напуни се

$\frac{3}{4}$ l. Колико литара може стати у то буре?

23. При картању један играч изгубио $\frac{3}{5}$ свога новца. Тако му остане свега 3 600 динара. Колико је новаца имао?
Колики је његов губитак?

24. Кад се на $\frac{5}{6}$ једног броја дода још 15, добије се 200.
Који је тај број?

25. Попшто је отсечено од једног комада платна $\frac{13}{20}$,
остало је 28 m. Колико је било у комаду?

26. Неко исплати $\frac{3}{5}$ свога дуга са 2 610 дин. Колики је
део његов дуг?

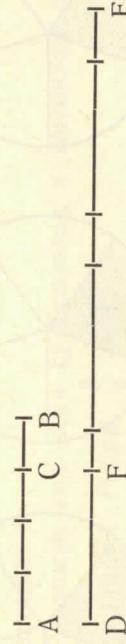
27. Један брод је прешао 225 km. тј. $\frac{5}{9}$ целог пута. По-
стави сам питање и одговори!

28. Једно лице потроши $\frac{2}{5}$ од свога новца. Преостало
му је још 75 дин.

Напомена. — Ученик нека покуша да и сам саставља
овакве задатке.

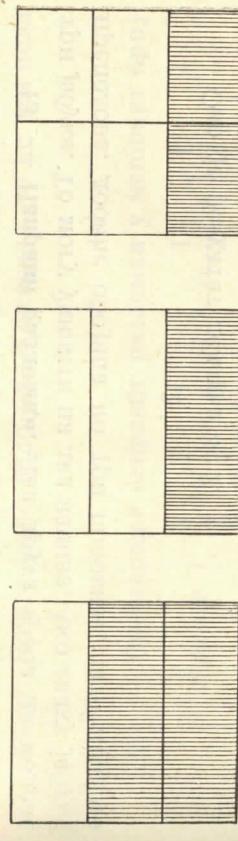
Разломак исто што и количник

12. — Према оном што смо досада рекли на пр. $\frac{3}{4}$ зна-
чи да једну јединицу треба поделити на 4 једнака дела и од
тог узети 3 таква дела. Исти резултат добијамо кад 3 целе
јединице поделимо на 4 једнака дела, па узмемо по један
део од сваке. На слици дуж AB је једно цело, AC је $\frac{3}{4}$ од
AB. Дуж DE је три пута већа од AB, при цела DF је четвр-
тина од DE, тј. по $\frac{1}{4}$ од 3 цела, AC = DF.



Сл. 13

Шта претставља слика 14?



Пример: $\frac{7}{10}$ м = 7 дм; то исто имамо, кад 7 м поделимо на 10 тј. $7 \text{ m} : 10 = 7 \text{ dm}$.

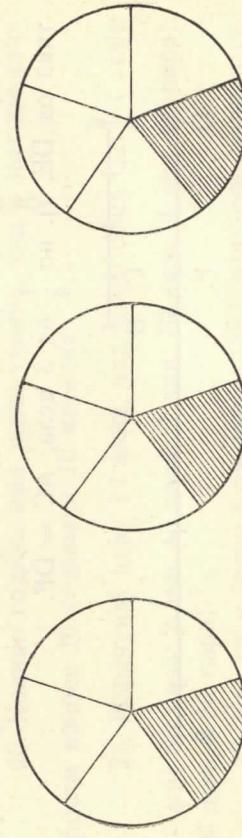
Један разломак може се сматрати као количник, у коме је бројилац дељеник именилач делитељ.

Напомена 1.— Ово у ствари за нас није ништа ново. Ми смо још прошле године употребљавали положену цртку као знак дељења.

Напомена 2.— Због тога многи, потпуно оправдано, разломке читају као дељење. На пр. $\frac{3}{5}$ чита се 3 подељено на 5. Чак се и реч „подељен“ изоставља, па се краће каже *три са пет*, $\frac{14}{17}$ чита се четрнаест са седамнаест.

За писмено вежбање

- Помоћу квадриране хартије покажи како на два начина могу постати разломци: $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{12}$. Како $\frac{3}{2}$?
- Који је разломак претстављен на сл. 15?



Сл. 15

Подела обичних разломака

- 13. — Направи разломци.** Два друга треба да поделе три јабуке. То могу учинити на два начина. Ако сваку јабуку преполове, добиће обојица по три половине, што пишемо

$$\frac{3}{2}.$$

Ово је резултат дељења 3 : 2.

Разломци као што су $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}$ где је бројилац већи од

имениоца зову се **неправи разломци**. А они чији су бројици мањи од имениоца зову се **прави разломци**.

14. — Мешовити бројеви. Ако другови узму по једну целу јабуку, а само једну преполове, сваки ће добити по једну целу и једну половину јабуке. То се пише

$$1 + \frac{1}{2},$$

или краће $1\frac{1}{2}$.

Оваква величина састављена од једног целиог броја и једног разломка, зове се **мешовит број**.
Пошто су другови добили исто, кад је деоба вршена и на један и на други начин, можемо написати

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Према томе сваки неправ разломак може да се напише као мешовит број и сваки мешовит број у облику неправог разломка.

15. — Привидни разломци. — То су разломци, код којих је бројилац или једнак именинцу, или се бројилац садржи у имениоцу без остатка. На пр. $\frac{4}{4}, \frac{4}{8}, \frac{16}{16}$. Такав разломак у ствари није разломак, већ цео број, само написан у облику разломка.

Разломак код кога су бројилац и именилац једнаки, има вредност 1. На пр. $\frac{3}{3} = 1$.

Сваки цео број може се на безбрзју начина написати као привидан разломак.

Пример: $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = \frac{18}{6}$. итд.

Доказ: Посто једно цело има 6 шестине, то ће три цела имати $\frac{18}{6}$.

16. — Претварање неправог разломка у мешовит број

Пример 1. $\frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Пример 2. $\frac{25}{3} = \frac{24}{3} + \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$, или

$25 : 3 = 8 + \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$. Тако неправ разломак $\frac{25}{3}$ даје мешовит број $8\frac{1}{3}$.

Обрнуто, један мешовит број може се претворити у разломак, кад се најпре цели претворе у разломак, па се бројницу овог разломка дода бројилац правог разломка.

$$\text{Пример: } 3\frac{3}{8} = \frac{24}{8} + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}.$$

За усмено вежбање

1. Колико целих има у 18 половина; у 69 трећина; 45 петина; 60 петнаестина; 108 дванаестина; 320 двадесетина?

2. Именуј један прави разломак, чији је именилац 3, 9, 12, 15, 30! Речи разломак коме је бројилац 3, 5, 7, 10, 13, 40!

3. Речи један неправ разломак са имениоцем 2, 4, 6, 12, 14!

4. Именуј неколико мешовитих бројева који се налазе између 3 и 7!

5. 25 хлебова раздјелени су, тако да је свако лице примило $\frac{1}{4}$ хлеба. Колико је лица примило хлеба?

6. 112 m^3 дрва раздјелени су сиротињи, тако да је свако лице добило по $\frac{1}{8}$ m^3 . Колико је лица добило дрва?

7. Који разломци посталају, кад се 5 подели са 14, или 25 са 8; кад се узме шести део од 5, или 12 део од 17?

8. Колики је један део, кад се 8 подели на 15 једнаких делова; или 90 на 20, 50 на 27?

9. Један канап 3 м дужине исечен је на 8 једнаких делова. Колико је дугачак један комад?

10. 3 kg чаја раздјелено је у 20 једнаких пакета. Колико је сваки пакет тежак?

11. Колико има целих у 48 половине; у 42 трећине; у 56 осмина; у 52 тринестине; 175 двадесетпетина; у 1 125 двадесетпетина?

12. Колико има целих у разломцима: $\frac{21}{4}, \frac{19}{5}, \frac{84}{9}, \frac{124}{11}$? Како налазиш?

$\frac{25}{3}$ даје мешовит број $8\frac{1}{3}$.

13. Претвори ове неправе разломке у мешовите бројеве:

$\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{7}{4}, \frac{10}{3}, \frac{11}{4}, \frac{17}{5}, \frac{21}{7}, \frac{29}{5}, \frac{13}{7}, \frac{14}{9}, \frac{26}{26}, \frac{8}{7}, \frac{57}{3}, \frac{34}{3}$!

14. Претвори у године: 19 мес., 37 мес., 79 мес.!

15. Колико је месеца: 47 дана, 71 дан, 103 дан, 149 дан?

16. Колико је дана: 29 h, 41 h, 79 h, 100 h, 145 h?

17. Колико је центи: 37 kg, 105 kg, 163 kg?

18. Претвори у неправе разломке: $1\frac{2}{3}, 2\frac{3}{4}, 3\frac{4}{5}, 9\frac{5}{12}$!

19. Код следећих разломака да се промене места бројиоца и именница, тј. да се напише чијиха **реципрочна** вредност (реципрочна = обрнута): $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{15}, \frac{10}{15}, \frac{13}{26}, \frac{1}{290}, \frac{55}{290}, \frac{14}{314}$!

20. Која је реципрочна вредност од 2, 5, $2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{5}, 9\frac{5}{9}$?
За писмено вежбање

1. Претвори у неправе разломке: $5\frac{11}{12}, 17\frac{1}{4}, 19\frac{5}{6}, 21\frac{2}{9}$!

2. Претвори у мешовите бројеве: $\frac{101}{12}, \frac{179}{17}, \frac{200}{19}$,

$$\frac{3153}{30}, \frac{4247}{36}!$$

3. Колико су простих година 130 недеља? 909 дана?

4. Који мешовит број добијамо кад 5585 поделимо са 97?

5. Напиши као мешовит број 1 000 дeo од 2 987, 6 071, 35 001, 100 232!

6. Колико грама је: $\frac{1}{9} \text{ kg}, \frac{5}{13} \text{ kg}, \frac{8}{17} \text{ kg}, \frac{17}{24} \text{ kg}, \frac{53}{69} \text{ kg}$?

7. Поншто је 1 m, кад 17 m вреде 169 паре; 11 m 2 дин.; 24 m 7 дин. 70 паре; 60 m 29 дин. 30 паре?

8. Напиши у облику мешовитог броја који изражава т: 7 m 33 cm; 8 m 1 dm 3 cm; 5 m 6 mm; 4 m 4 dm 4 cm 4 mm; 13 m 9 cm; 9 m 7 mm; 2 km 347 m 4 dm; 1 km 2 m 3 cm; 1 km 1 mm!

9. Колико метара квадратних су: 595 dm^2 , 6 100 cm^2 , $4m^2 9dm^2$, 1 m^2 1 000 cm^2 ; 1 m^2 23 dm^2 ; 4 cm^2 3 dm^2

28 cm²; 8 m² 88 cm; 1 a 27 m² 58 dm²; 3 a 4 m² 17 dm²; 9 a 3 300 cm²; 1 ha 24 a 35 m² 26 dm²?

10. Колико метара кубних су: 2 347 dm³; 30 003 dm³; 57 000 cm³; 2 m³ 432 dm³; 1 m³ 27 000 cm³?

11. Колико килограма су: 4 423 g; 7 007 g; 35 π; 2 kg 977 g; 1 π 333 g; 3 π 223 g; 14 st 2 π; 1 g?

12. Колико година су 1 777 дана, 407 недеља, 296 месеца?

Сабирање и одузимање разломака једнаких именилаца.

17.— Чиме се одликују разломци $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$? Колико је

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8}?$$

Одговор: $\frac{9}{8}$ или $1\frac{1}{8}$?

Потврди овај резултат сликом на квадрираној хартији! Како гласи практично упутство за сабирање разломака једнаких именилаца?

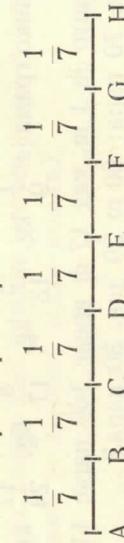
Одговор. Разломци једнаких именилаца сабирају се, кад се њихови бројиоци саберу, па тај збир подели заједничким имениоцем.

Пример 2. $2 + 4\frac{1}{12} + 3\frac{5}{12} + \frac{11}{12} = 9\frac{17}{12} = 10\frac{5}{12}$,

попшто су $\frac{17}{12} = \frac{12}{12} + \frac{5}{12} = 1 + \frac{5}{12}$.

Напомена. — При сабирању мешовитих бројева треба прво сабрати целе.

Пример 3. $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$.



Која дуж на слици одговара горњој разлици?

Како гласи практично упутство за одузимање разломака истих именилаца?

Пример 4. $5\frac{11}{15} - 2\frac{7}{15} = 3\frac{4}{15}$.

За писмено вежбање

$$1. \frac{3}{10} + \frac{7}{10} + \frac{1}{10} + \frac{9}{10} =$$

$$3. \frac{3}{20} + \frac{7}{20} + \frac{11}{20} =$$

$$5. 2\frac{3}{8} + 3\frac{1}{8} + 5\frac{7}{8} =$$

$$7. 5 + 2\frac{1}{15} + 8\frac{13}{15} + 6\frac{4}{15} + \frac{2}{15} =$$

$$8. \frac{8}{11} - \frac{5}{11} =$$

$$11. 7\frac{2}{9} - 3\frac{5}{9} =$$

$$14. \frac{2}{2} - 1 =$$

$$9. 10 - \frac{5}{9} =$$

$$12. 1\frac{9}{19} - \frac{12}{19} =$$

$$15. \frac{9}{4} - 2 =$$

Прости и сложени бројеви

18. Пре него што пређемо на даље проучавање рачунских радњи са разломцима, упознаћемо се са неким деловима из теорије бројева, са појмовима, који су нам потребни за рад са разломцима. То су **прости и сложени бројеви**, **деливост бројева**, **растављање бројева на просте чинioце и најмањи заједнички садржалац**.

19. — Посматрајмо број 17 и 15. Број 17 делив је само 1 и 17, а број 15 делив је још и са 3 и 5. За број 17 кажемо да је прост, а број 15 сложен.

Прости су бројеви: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 итд.

Сложени су: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16 итд.
У сложеним бројевима увек се садрже по два и више
малих бројева. Тако у броју 15 садржи се 3 и 5.
Онај сложени број у коме се садрже други бројеви
зове се **садржалец**. Они бројеви који се садрже зову се
чиниоци. У овом случају 15 је садржалец, а 3 и 5 су чи-
ниоци.

Именуј неколико простих бројева!

Питања и вежбаша

1. Сви су парни бројеви сложени бројеви. Постоји
само један који је прост. Именуј га!
2. Зашто су сви парни бројеви сложени бројеви?
3. Сви једноцифренi непарни бројеви су прости бро-
јеви изузев једног. Који је тај?
4. Следеће сложене бројеве расстави на чиниоце: 6, 10,
14, 21, 22, 26, 38, 49, 58, 69, 87, 91, 121!

За писмено вежбаше

1. **Ератостеново сито.** — Одредити све прости бројеве од 1 до 100. Овај задатак је решио научник из времена старих Грка, Ератостен. (Живео је у Александрији од 276 до 194 г.д. пре Хр. р.). По њему је тај поступак и назван *Ератостеново сито*.

Напишу се сви непарни бројеви од 1 до 100, заједно са бројем 2: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99. Затим се прецртају сви бројеви који садрже број 3, а број 3 се не прецрта. Потом се прецртају сви бројеви који садрже 5. Многи од ових бројева су већ прецртани као садржачи броја 3. Нагласетку то исто радимо и са 7. Резултат је тада овај: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Кроз сите смо просејали све сложене бројеве, остали су само прости.

2. Наштрај 1 dm^2 и подели га на ст²! Замисли да се у сваком квадрату налази по један број почевши од 1 до 100, али упили само прости бројеве у одговарајућа поља. Кад посматраш разне ступице, видићеш известну правилност. Ко-

лико има свега простих бројева између 1 и 100? У ком ступцу има највише? Колико стубаца има само са једним бројем? Колико стубаца има без иједног броја? Објасни зашто ту нема простих бројева!

- Напомена 1.** — Простих бројева има бескрајно много.
Напомена 2. — Данас има таблица простих бројева до 9 милиона.

20. — Ми смо прошле године имали овакав пример:

$$16 \cdot 10 + 16 \cdot 4 = 16 \cdot (10 + 4).$$

Одатле можемо прочитати ово важно правило: Ако је сваки сабирак једнога збира **дељив једним бројем**, онда је **тим бројем дељив и збир**. У овом случају сабирци су $16 \cdot 10$ и $16 \cdot 4$ или 160 и 64; и један и други деливи су бројем 16, па је и збир $16 \cdot (10 + 4)$, или 224 делив бројем 16.

То исто могли бисмо рећи и за разлику. Ако су умањник и умањилац једне разлике деливи неким бројем, онда је и разлика делива **тим истим бројем**. На пример: $48 - 32$. И 48 и 32 деливи су са 8, па је и њихова разлика 16 делива са 8.

$$48 - 32 = 8 \cdot 6 - 8 \cdot 4 = 8 \cdot (6 - 4).$$

21. — Ако је један број делив неким другим бројем, онда је и сваки салржалац првог делив другим бројем.

Дељивост бројева

22. — На питање да ли је један вишецифренi број, рецимо 3 373 делив са 3, или да ли је број 4 589 делив са 9, или садржи ли се број 8 без остатка у 638, није лако одговорити на основу онога што досада знамо. Најчешће бисмо морали да извршимо дељење. Међутим постоје проста правила помоћу којих се може брзо и лако видети кад је један број делив са 2, 3, 4 итд.

23. — **Бројеви дељиви са 2.** — Који је од ових бројева делив са 2, а који није: 14, 18, 39, 45, 86, 109, 204, 260? Број 10 делив је са 2. И сваки садржац броја 10 делив је са 2. Са 2 су деливи бројеви и 80 и 830 итд.

Сваки број може да се напише као збир од десетица и јединица. На пр. број 837 може да се напише у облику $830 + 7$ или $83 \cdot 10 + 7$.

Како су десетице увек деливе са 2, деливост зависи само од јединица. Број 837 очевидно није делив са 2.
Шта треба ставити место цифре 7 у броју 837, па да број буде делив са 2?

Одговор. Број је делив са 2, ако се свршава са 0, 2, 4, 6 или 8 тј. са нулом или парном цифром.

24. — Деливост са 5. — Који је од ових бројева делив са 5: 35, 48, 70, 92, 1 200?

Број 10 делив је са 5. Сваки садржалац броја 10 та-
кође је делив са 5.

Сваки број може да се претстави као збир од десетица и јединица. Број 275 може да се напише у облику $2\overline{7}5$

$$270 + 5 \text{ или } 27 \cdot 10 + 5.$$

Како су десетице увек деливе са 5, деливост зависи само од цифре на месту јединица.

Број 275 делив је са 5.

Кад је број делив са 5?

Одговор. Број је делив са 5, ако на месту јединица има 5 или 0.

25. — Деливост са 9 и 3. — Да бисмо утврдили пра-
вило деливости са 9 и 3 узенчмо неки пример:

Пример 1: Број 234 можемо написати овако: $200 + 30 + 4$ односно: $2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4$ или $2(99 + 1) + 3(9 + 1) + 4 = 2 \cdot 99 + 2 + 3 \cdot 9 + 3 + 4 = (2 \cdot 99 + 3 \cdot 9) + (2 + 3 + 4)$. Јасно се види да је збир у првој заради делив са 9, а збир у другој је $2 + 3 + 4 = 9$. Као што се види и он је делив, са 9, према томе је и број 234 делив са 9. Још се запажа да је у другој загради збир цифара броја 234.

Овако се сваки број може овако разложити у два збира. Један који је увек делив са 9 и други који је састављен од збира цифара.

Пример 2: Број $2547 = 2000 + 500 + 40 + 7 = 2(999 + 1) + 5(99 + 1) + 4(9 + 1) + 7 = 2 \cdot 999 + 2 + 5 \cdot 99 + 5 + 4 \cdot 9 + 7 = (2 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 4 \cdot 9) + (2 + 5 + 4 + 7)$. Као што се види збир у другој загради састављен је од збира цифара и делив је са 9. Према томе и број 2547 делив је са 9.

Сличним поступком се испитује и деливост са 3.

Из ових примера видимо кад је број делив са 9 и 3. Број је делив са 9 и 3, ако му је збир цифара делив са 9 и 3.

26. — Деливост са 4. — Број 100 делив је са 4. И сваки садржалац броја 100 делив је са 4. Према томе сваки број који се свршава са две нуле делив је са 4. На пр. број 32 700 делив је са 4. Количник је 8 175. Остатка нема.

Ако место нула ставимо друге цифре, на пр. напишемо број 32 713, хоће ли овај број делив са 4? Да ли је делив са 4 број 32 714, да ли 32 712?

Кад је број делив са 4?

Одговор. Број је делив са 4, ако је двочифрен број, који образују цифре на месту десетица и јединица делив са 4.

27. — Деливост са 8. — Број 1 000 делив је са 8. И сваки садржалац броја 1 000 делив је са 8. Сваки број који са свршава са три нуле делив је са 8. Нпр. број 17 000 делив је са 8. Количник је 2 125. Остатка нема.

Ако место нула ставимо друге цифре, на пр. напишемо 17 032, да ли је овај број делив са 8? Садржи ли се 8 без остатка у 17 120 и у 17 018?

Кад је број делив са 8?

Одговор. Број је делив са 8, ако је троцифрен број, који образују цифре стотина, десетица и јединица делив са 8.

28. — Деливост са 6. — Број је делив са 6 ако се може поделити без остатка са 2 и 3. Зашто?

Напомена 1. Постоје праавила деливости и за бројеве 7, 11, 13 итд. али је засада лакше извршити пробу делињем, неголи памтити та правила.

Напомена 2. — Кад смо проучили деливост са 2, 3, 5, лако је сада распознати да ли је један број прост, кад је мањи од 100. Само треба приметити да су $49 = 7 \cdot 7$, $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$ једини бројеви мањи од 100, који нису прости, а при том нису деливи ни са 2, ни са 3, нити са 5. Отуда имамо ово практично упутство за распознавање простих бројева мањих од 100: Ако задани број није делив ни са 2, ни са 3, нити са 5, а при том тај број није 49, 77 или 91, онда је то сигурно прост број.

За усмено вежбање

1. Испитај да ли су ови бројеви 64, 108, 112, 117, 120, 144, 204, 360, 1 040, 1 728! дельиви са 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9?

2. Искажи сам један број који је дельив са 2; са 3; са 4; са 5; са 6; са 8; са 9!

3. Речи један број који је дельив са 2 и 3; са 2, 3 и 5; са 2, 3, 5 и 9!

4. Видети да ли су следећи бројеви прости бројеви: ако неки од њих то није, покажати којим је једноцифреним бројевима дельив тај сложени број: 30, 49, 53, 63, 67, 69, 83, 93, 101, 107, 111, 119, 129, 188, 199, 201, 335, 441, 555, 2 990.

5. Пробањем покажи кадији су од ових бројева 133, 146, 162, 176, 185, 203, 8 638, 5 929, 3 157 дельиви са 7!

6. Којом цифром треба сменити њулу у бројевима 202, 1 046, 6 022, 30 111, 402 555, па да нови бројеви буду дельиви са 9?

7. Шта треба ставити на место цифре јединица у броју 2 347, па да тај број буде дельив са 2, са 3, 4, 5, 6, 7, 8, и 9?

8. Која је од ових година преступна: 1 420, 1 560, 1 770, 1 834, 1 900, 1 938?

9. Именуј један двоцифрен број, који је у исто време дельив са 3, 4 и 5; са 2, 4, 6, 8 и 9; са 2, 4, 8 и 11; са 3, 5, 6, и 10; са 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30!

10. Подели редом бројеве 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 са 3 и 9! Каква се правилност може запазити код количника и остатка?

11. Разлика цифара једног двоцифреног броја је 5, а број је дельив са 9. Који је тај број? Колико има таквих бројева?

Питања

1. Шта је садржалец једног броја?

2. Шта је чинилац једног броја?

3. Шта су прости, а шта сложени бројеви?

4. Зашто морају сви прости бројеви изузев 2 бити не парни бројеви?

5. Како сад можемо дефинисати парне и непарне бројеве?

6. Чиме се завршују парни бројеви?

7. Који је број дельив са 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9?

8. Који су бројеви дельиви са 10?

9. Који су двоцифренi бројеви дельиви са 25?

10. Који су то бројеви, који имају за чиниоце само бројеве 2 и 5?

11. Сваки број који је дельив са 8 може се поделити без остатка са 2 и 4. Објасни зашто! Важи ли и обрнуто правило? Примери!

12. Кад се један број подели са 5, добија се исти остатак, као кад поделimo само његове јединице бројем 5. Зашто? Објасни то на примерима!

13. Изреци слично правило за број 4!

14. Може ли један непаран број бити дельив парним бројем! Примери!

15. Може ли паран број бити дельив непарним бројем? Примери!

16. Кад се од једног произвольног броја одузме збир његових цифара, добијемо, један нови број, који је дельив са 3 и 9. Објасни то на примерима, које ћеш сам изабрати! Покушај да то објасниш на исти начин, као што смо радили, објашњавајући дельивост са 3 и 9!

17. Узми један двоцифрен број и напиши цифре обрнутим редом! Добићеш два броја чија је разлика увек дельива са 9. Покушај да ово објасниш на примерима!

29. — Прости чиниоци. — Број 36 има ове чинионице: 2, 3, 4, 6, 9, 12 и 18. Сви се ови бројеви садрже у 36 без остатка. Међу њима има простих бројева 2 и 3, и сложених 4, 6, 9, 12 и 18. Нас нарочито интересују прости чиниоци, јер је сваки сложени број производ простих бројева, производ простих чинилаца. Број 36 се може овако написати:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,$$

дакле састоји се из простог чиниоца 2, који се јавља 2 пута, и простог чиниоца 3, који се јавља такође 2 пута. Ако сложени број поделимо једним његовим простим чиниоцем, који ће бити производ осталих простих чинилаца.

30. — Распављање бројева на прости чиниоце. Практично упутство: Да бисмо један број расставили на прости чиниоце, треба да га поделимо његовим најмањим прости чиниоцем; затим добијени количник његовим најмањим про-

стим чиниоцем, и тако продужимо, док не добијемо као по-
следњи количник 1.

Кад имамо посла са једноцифреним, двоцифреним и
троцифреним бројевима, ми ћемо то расстављање најчешће
извршити усмено, пишући одмах просте чиниоце.

$$\text{Пример 1. } 420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

$$\text{При том се говори: } 420 = 2 \cdot 210; 210 = 2 \cdot 105; 105 =$$

$$= 3 \cdot 35; 35 = 5 \cdot 7.$$

Пиши се само чиниоци црње оштампани.

Пример 2. — Број 1 260 расставити на просте чиниоце.

$$\text{Решење: } — 1 260 = 2 \cdot 630$$

$$630 = 2 \cdot 315$$

$$315 = 3 \cdot 105$$

$$105 = 3 \cdot 35$$

$$35 = 5 \cdot 7$$

Овако се говори, а пише се само

$$1 260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Пример: 260 расставити на просте чиниоце.

$$\text{Решење: } 260 = 26 \cdot 10 = 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13.$$

Напомена. — Производ од више једнаких чинилаца
можемо писати у облику степена. На пример:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Не може се ни замислiti успешно расстављање на чи-
ниоце, ако ученик не влада сигурно табличом множења и
деливошћу бројева.

Задатак 31. — Из свих расстављања произлази да је сваки број
који је делив са више простих бројева, делив и њиховим
производом.

Пример: Број $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ делив је са $2 \cdot 3 = 6$, и са
 $2 \cdot 5 = 10$ и са $3 \cdot 5 = 15$.

Важи ли се например један број, који је делив са 3 и

9, поделити без остатка и са 3? 9?

Задатак 32. — Ако треба расставити на просте чиниоце број од
више цифара, онда се ради по истом практичном упутству,

само се количници испisuju. Поступак се види из примера
које наводимо. Узенемо један троцифрен и један петоци-
френ број.

450	2	$19\ 992$	2
225	3	$9\ 996$	2
75	3	$4\ 998$	2
25	5	$2\ 499$	3
5	5	833	7
1	1	119	7
		17	17
		1	

$$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \quad 19\ 992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 17.$$

Питања и усмена вежбања

1. Шта су сложени, а шта прости чиниоци једнога броја?

2. Како гласи практично упутство за расстављање броје-
ва на просте чиниоце?

Растави на просте чиниоце:

$$3 \cdot 26, 34, 38, 39, 46, 57, 58, 65, 74, 77, 87, 91, 93, 95, 111,$$

$$115, 129, 159, 187, 209, 221, 237!$$

$$4 \cdot 12, 16, 18, 24, 30, 36, 42, 45, 48, 50, 60, 70, 90, 100.$$

5. Именуј двоцифрене бројеве, чији су сви прости чи-
ниоци 2!

6. Именуј троцифрене бројеве, који имају просте чи-
ниоце само тројке; само петице!

7. Међу двоцифреним брэјевима има их 4 који се могу
раставити на 5 простих чинилаца, а два који се могу раста-
вити на 6 простих чинилаца. Који су ти бројеви?

8. Именуј све чиниоце бројева: 12, 16, 18, 70, 90, 100, 150!

9. Који је број једнак производу $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$
 $3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 3^4$?

10. Колико пута један број треба да садржи чинилац 2,
да би био делив са 8, са 16, са 32? Колико пута чинилац 3,
да би био делив са 9, са 27, са 81?

11. Број 24 делив је са 4 и 8; зашто није делив са 4·8?
" " 30 " " 3 и 6; " " 3 · 6?
" " 40 " " 8 и 10; " " 8 · 10?

За писмено вежбање

- Претстави у облику производа простих чинилаца бројеве: 120, 144, 160, 330, 360, 420, 625, 847, 880, 9, 99, 999, 119, 121, 132, 168, 243, 512, 1 025, 1 100, 1 560, 1 008, 8 712, 1 568, 6 534, 7 488, 1 150 !
- Испиши оне бројеве између 100 и 400, који се могу представити на два једнака прости чиниоца !
- Потражи онај број који садржи 1) чинилац 2 три пута а чинилац 3 два пута; 2) чинилац 2 три пута, чинилац 3 два пута, чинилац 5 једанпут !
- Именуј све чиниоце бројева: 60, 98, 128, 384, 540!

Напомена 1. — Познато нам је већ да је број 60 некада, код стarih народа Месопотамије, служио као основа бројног система исто тако као данас број 10. Постоји вишетумачења откуда је та наклоност старих народа према томе броју. Једно тумачење је у томе, што број 60 има много чинилаца: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

Пример: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Број чинилаца је $(2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Ту се рачуна и број 1 и сам број 60.

Заднички чиниоци. — Један број, који се у вишетим бројевима садржи без остатка, зове се заднички чинилац тих бројева.

Пример: 48 је деливо са $2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 | 16 | 24 |$

60 је деливо са $2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 12 | 15 | 20 |$

Заднички чиниоци бројева 48 и 60 јесу 2, 3, 4, 6 и 12. Који су заднички чиниоци за 18 и 24, 42 и 56?

Међу задничким чиниоцима два или више бројева од нарочите је важности онај, који је највећи.

Задично прости бројеви. — Ако два или више бројева немају ниједан заднички чинилац (изузев 1), онда се они зову *релативно прости бројеви, или бројеви без задничких чинилаца*. На пример: 9 и 10, или 20 и 21.

Заднички садржалац. — Један број у коме се више датих бројева садржи без остатка, зове се *заднички садржалац* или *заднички делјеник* тих бројева. **Пример:** Садржаоци броја 4 јесу: $8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |$

\dots " 6 " $| 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |$

Заднички садржаоци за 4 и 6 јесу 12, 24, 36, 48. Као што видимо, има их бескрајно много. Од нарочите је важно-сти онај заднички садржалац, који је најмањи. У овом случају је 12.

Заднички садржалац за више бројева је онај најмањи број, у коме се сви дати бројеви садрже без остатка. (Краће Н.з.с.).

Н.з.с. више бројева је производ њихових простих чинилаца, при чему се сваки прости чинилац узима онолико пута, колико се јавља у броју, који га највише садржи.

Задничко упутство: Ако су дати бројеви релативно прости бројеви, онда је њихов производ Н.з.с.

Пример: За 4, 5 и 7 је $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$ Н.з.с.

Ако дати бројеви нису релативно прости, поступак се види ових примера:

Пример 1. Потражи Н.з.с. за 15, 24 и 36!

Решење: $15 = 3 \cdot 5$ или $15 = 3 \cdot 5$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ или $24 = 2^3 \cdot 3$

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ или $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

Н.з.с. је $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$. Или $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Треба све бројеве раставити на прости чиниоце, затим подвучи чиниоце и то код оног броја, где се један чинилац највише јавља. Чинилац 2 се јавља код 24 и 36. Подвукли смо га код 24, јер се ту више пута јавља. Чинилац 3 се јавља само на једном месту и ту га подвлачимо.

Производ подвучених чинилаца је Н.з.с. Или производ простих чинилаца, кад се сваки узме са *највишим степеном*, којим се јавља.

2. Пример из практичног живота. — Два бициклиста обилазе једну кружну стазу. Први обиђе цео обим за 15 минута, други за 18 минута. Они поноћу са исте тачке. После кога ће се времена ободица поново наћи на полазној тачки?

Решење: Први стиче на полазну тачку после 1. 15, 2. 15, 3. 15 ... минута; други долази на почетну тачку сваких 1. 18, 2. 18, 3. 18 ... минута. Тражено време биће изражено једним бројем минута, који ће у исто време садржати и 15 и 18.

Прво заједничко стизање на полазну тачку биће, према томе, дато бројем, који је н.з.с. за 15 и 18. Растављам на промене 15 и 18:

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Подвлачим незаједничке и заједничке чиниоце, и то заједничке на оном месту где се највише јављају.

Производ подвучених чинилаца је $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$.

Бициклисти ће бити први пут заједно на полазној тачки после 90 минута. Тада је први обишао стазу 6 пута, други 5 пута.

Напомена. — Одређивање н. з. с. се значатно упростијује, ако се бројеви који се у другима садрже просто изоставе. Ако је на пр. један број делив са 15 онда се сигурно и чиниоци броја 15, 5 и 3 садрже у том броју без остатка.

Пример: Наки н. з. с. за бројеве: 6, 9, 24, 30, 60 и 90.

Решење. Бројеве 6, 9 и 30 треба прецртати, пошто се они садрже у понеком од осталих, те се само непрецртани бројеви имају раставити на чиниоце:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{Н. з. с. је } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360.$$

За усмено вежбање

Именуј н. з. с. за бројеве:

1. 2 и 3; 2 и 4; 4 и 8; 2 и 6; 7 и 9; 6 и 18.
2. 10 и 40; 20 и 30; 14 и 21; 24 и 36; 2, 3 и 7; 2, 3 и 4.
3. 30 и 45; 40 и 60; 100 и 150; 200 и 250; 2, 3 и 5; 3, 4 и 5.
4. 3, 5 и 7; 2, 3 и 8; 3, 5 и 6; 2, 5 и 8; 3, 4 и 10; 2, 6 и 8.
5. 5, 8 и 10; 4, 5 и 10; 6, 7 и 12; 10, 40 и 60; 5, 12 и 15;
- 6, 12 и 24.
6. 7, 10 и 14; 6, 10 и 18; 8, 16 и 24; 15, 30 и 60; 7, 14 и 21;
- 22, 44 и 88
7. 26, 39 и 78; 40, 50 и 200; 100, 150 и 200; 250, 200 и 500.
8. 2, 3, 4, 5, 8; 3, 5, 6, 10, 20; 12, 24, 60, 72, 144.
9. 10, 20, 30, 40, 60; 100, 150, 200, 300, 600, 1 800.

10. Предњи точкови на колима, имају 3 т у обиму, а задњи 4 тп. Колики најмањи пут треба кола да пређу па да сваки точак начини цео број обрта?
11. Остатак дељења једног броја са 6 и 15 је 3. Који је најмањи број који има ову особину?
12. Известан број куглица може да се поређа у редове, да у сваком реду буде по 15; исти број куглица може да се поређа у редове од по 9. Наки најмањи број куглица који има ову особину!
13. Један ученик има у двема кутијама исти број кликара. Он вади из једне и из друге кутије, и то из прве по 12 одједаред, а из друге по 20. Попшто је тако вадио кликер, док је могао, остало му је по пет комада у свакој кутији. Наки најмањи могућни број кликера у свакој кутији!

Питава

1. Шта је садржалца или дјелник једног броја?
2. Колико садржалца може имати један број?
3. Шта је заједнички садржалца?
4. Колико може бити з.с.?
5. Шта је н.з.с.?
6. Шта је н.з.с. за релативно просте бројеве?
7. Како се одређује н.з.с.?
8. Који су бројеви деливи са 100, 1 000, 10 000?
9. Колико има двоцифренih бројева, којима је садржајац број 225?
10. Ако је један број делив са 25, његове последње две цифре морају бити 00, 25, 50 или 75. Објасни зашто!
11. Један број можно је са 125, кад му допишемо 3 нуле, па га затим поделимо са 8. Образложи ово правило!

За писмено вежбање

- Наки н.з.с. за бројеве:
1. 28 и 80; 54 и 126; 48 и 180; 60 и 96; 75 и 120; 8, 12 и 20.
2. 9, 12 и 21; 18, 20 и 30; 12, 30 и 45; 18, 60 и 120; 30, 48 и 144; 14, 22 и 77.
3. 18, 36, 60 и 72; 18, 36, 45 и 81; 18, 36, 50 и 72.
4. 12, 36, 72 и 120; 16, 18, 35 и 63; 26, 33, 39 и 44.

5. 16, 21, 49 и 72; 7, 17, 68 и 238; 8, 12, 20, 30 и 80.
 6. 3, 5, 12, 36 и 45; 9, 12, 16, 18 и 27; 21, 45, 60, 84 и 90;
 12, 18, 27, 30 и 40.
7. 8, 12, 18, 24, 27 и 30; 4, 12, 18, 20, 48 и 72; 4, 12, 40,
 48 и 60.

8. 28, 42, 53, 126, 189; 6, 9, 15, 18, 24, 30, 45 и 60.
 9. 10, 12, 27, 48, 54, 72, 90, 120.
 10. 3, 5, 7, 11, 13, 14, 25, 9, 17.
 11. 24, 32, 36, 160, 300, 540.
 12. 80, 90, 100, 180, 240, 300, 450, 600, 800.
 13. 81, 135, 216, 243, 270, 324, 1080.
 14. 63, 84, 105, 126, 168, 196, 420, 525.
 15. 20, 24, 25, 32, 40, 48, 75, 96, 108, 120, 192.
 16. 33, 36, 55, 72, 99, 165, 270, 330, 540, 720!

17. На једним колима има предњи точак 168 см, а задњи 216 см у обиму. Колики пут начине кола, док оба точка на-
 чине цео број обрта?

18. Два зупчаста точка залазе један у други; први има 30 зубаца, други 24. По колико ће обрта сваки од њих на-
 чинити, док не дођу поново у додир два зубца, од којих је кретање отпочело?

19. Пароброди једне паробродске линије полазе из пристаништа сваких 12 дана, пароброди једне друге линије кре-
 ху са пристаништа сваких 28 дана. Знајући да је један за-
 једнички полазак био 1 јануара 1929, пита се кад ће првипут
 после тога лађе да отптују у исти дан?

20. Један пословни човек посети сваког 15 дана муште-
 рију A, сваког 20 дана муштерију B, и сваког 24 дана му-
 штерију C. Кад ће он првипут имати да посети све три
 муштерије истог дана? Колико је он посета тада учинио.
 лицима A, B и C?

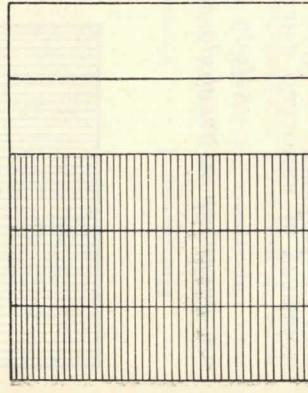
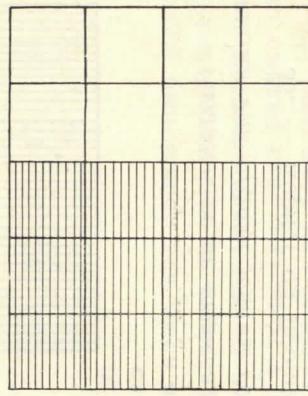
- 21. Јупитерови пратиоци.** — Планета Јупитер има 9 пратилаца. Међу њима има четири које је открио Галилеј, када је пронашао дубину 1 610 године. Та четири пратиоца обиђу своје путање за 42, 85, 172 и 400 часова. После ког ће времена ти пратиоци бити на истом месту, где су и сад? По колико обилажења начини за то време сваки од њих?

САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ ОБИЧНИХ РАЗЛОМАКА**35. — Проширавање и скраћивање разломака. —**Израчунај 1) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ од 40 динара;2) $\frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$, од 60 м;3) $\frac{1}{10}, \frac{2}{15}, \frac{3}{20}$ од 120 kg!

Какве промене претрпи вредност разломка $\frac{1}{5}$, кад се
 -са 2, 3 и 4 помножи 1) бројилац, 2) именилац, 3) и бројилац
 и именилац?

Последица од 3) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}; \frac{1}{5} = \frac{3}{15}; \frac{1}{5} = \frac{4}{20}$.

Кад је 1 петина исто што и 4 десетине, онда су 3 петине
 3 пута по четири десетине, тј. 12 десетина, $\frac{2}{5} = \frac{8}{20} =$
 $\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4}$. Делови су 4 пута мањи — ситнији, али их долупе
 менила. Сл. 16.



Нацртaj 3 једнаке дужи, једну испод друге, и подели прву на 2, другу на 4, а трећу на 6 једнаких делова! Колико четвртина има 1 половина дужи, колико шестина?

Шта показује слика 17?

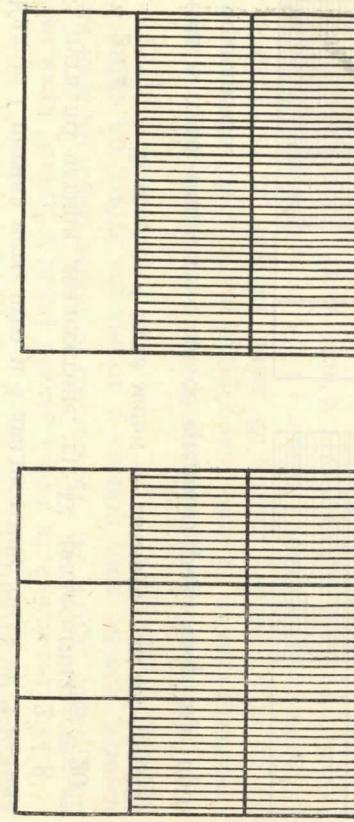


Сл. 17.

Кад и бројилац и именилац једног разломка помно-
жимо једним истим бројем, кажемо да смо га **проширили**.

Како се од $\frac{12}{20}$ добија $\frac{3}{5}$, како од $\frac{3}{15}$ добијамо $\frac{1}{5}$,
како $\frac{2}{3}$ од $\frac{4}{6}$?

Овај поступак зове се **скраћивање** разломка, тј. кад се
бројилац и именилац истим бројем поделе.
Шта показује слика 18?

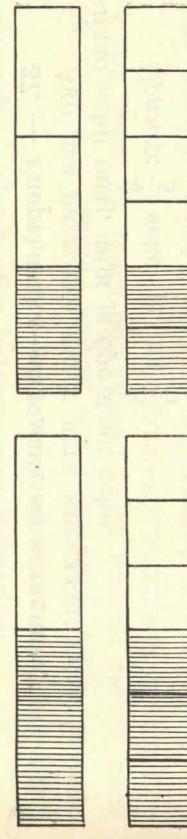


Сл. 18.

Разломак се не мења, ако се бројилац и именилац по-
множи или подели једним истим бројем.

36. — Корист од проширујања разломка је углавном
у томе што се на тај начин више произвољних разломака
могу довести на исти именилац. Тада се разломци зову
истоимени. Једнаки именилац мора бити садржац свих
датих именилаца. Ради лакшег рада бира се увек, најмањи
заједнички садржалци датих именилаца. Он је **заједнички
именилац**.

Пример. — Шта показује слика 19?

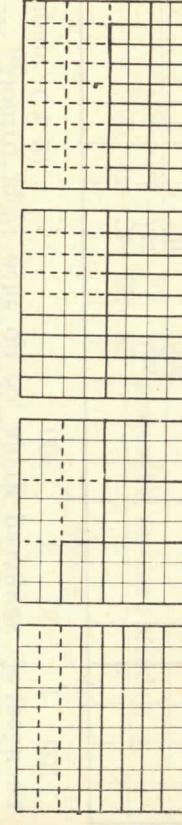


Сл. 19.

Пријер 2.— Разломке $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{17}{36}$, довести на исти
именилац.

Решење. Заједнички именилац је н.з.с. за 8, 12 18 и 36,
дакле $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$. Први ћemo проширити бројем
 $72 : 8 = 9$, други бројем $72 : 12 = 6$, трећи бројем 4, а че-
врти са 2.

Истоимени разломци су: $\frac{45}{72}$, $\frac{42}{72}$, $\frac{52}{72}$, $\frac{34}{72}$.



Сл. 20.

Напомена 1. — Обично се каже, кад проширимо један
разломак, да смо узели ситније делове, да смо га **уситнили**.
Кад скратимо разломак, кажемо да смо узели круније дел-
лове. Корист од скраћивања је у томе, што тада радимо са
мањим бројевима, а боље и разумемо сам разломак! Нама
је јасније, кад кажемо $\frac{2}{3}$ неголи $\frac{1600}{2400}$. Кад смо разломак
скратили, ми смо га **упостили**.

Напомена 2. — Кад кажемо да се скрати један разломак,
ми обично мислимо да се тај разломак доведе на најпро-

стији облик. То се најбрже постиже кад бројилац и именилац поделимо највећим заједничким делioцем.

37. — Упоређивање разломака по величини.

Ако два разломка имају исти именилац, онда је очевидно већи онај, чији је бројилац већи.

Пример: $\frac{4}{5}$ веће је од $\frac{3}{5}$.

Кад два разломка имају једнаке бројиоце, који је већи?

Ако разломци немају исте ни бројиоце, ни имениоце, доводимо их најпре на исте имениоце, па затим упоредимо нове бројиоце.

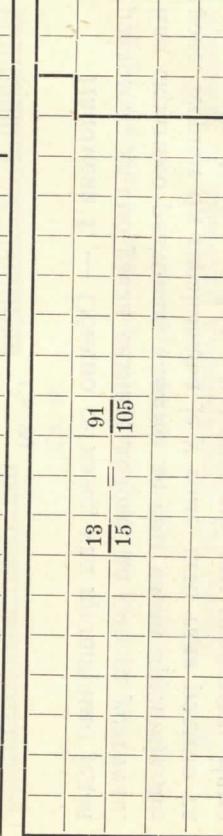
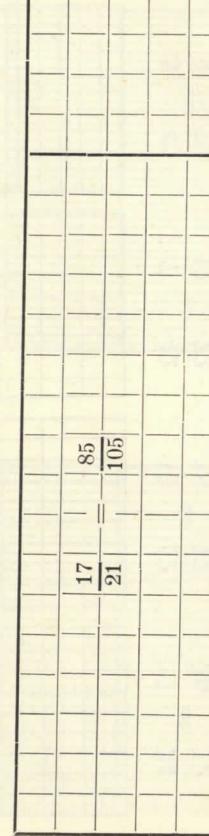
Да бисмо упоредили $\frac{17}{21}$ и $\frac{13}{15}$ ми тражимо н. з. с. за 15 и 21, а то је 105.

Тада имамо:

$$\frac{17}{21} = \frac{17 \cdot 5}{105} = \frac{85}{105}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{13 \cdot 7}{105} = \frac{91}{105}.$$

Пошто је 91 веће од 85, други разломак је већи од првог. Сл. 21.



Сл. 21

За усмено вежбање

1. Претвори $\frac{1}{2}$ у десетине, шеснаестине, двадесетине и стоте!
2. Преобрата у шездесетине: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{7}{10}, \frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{17}{30}$!

3. Колико има дванаестина у: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{4}, 2\frac{1}{3}$?

Одговоре потврди сликом!

4. Изрази разломком као делове године: 9 месеци, 60 дана, (једна година да се рачуна 360 дана), 72 дана, 270 дана, 13 недеља, 32 недеље, 39 недеља!

5. Колико су часова: 72мин, 90мин, 144мин, 200мин, 488мин, 800мин?

6. Претвори у године: 60 недеља, 100 недеља, 32 месеца, 80 месеци, 100 месеци, 400 дана, (година = 365 дана), 1 000 дана!

7. Почађам рукописи. Попуни нестале цифре $\frac{3}{5} = \overline{15}$,

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} &= \frac{7}{40}, \quad \frac{7}{11} = \overline{55}, \quad \frac{9}{16} = \overline{80}, \quad \frac{19}{80} = \overline{160}, \quad \frac{7}{48} = \overline{192}, \quad \frac{20}{25} = \\ &= \frac{8}{200}, \quad \frac{8}{73} = \overline{365}. \\ 8. \quad \frac{2}{3} &= \frac{6}{\square}; \quad \frac{3}{8} = \frac{12}{\square}; \quad \frac{7}{9} = \frac{28}{\square}; \quad \frac{11}{15} = \frac{88}{\square}; \quad \frac{19}{24} = \frac{95}{\square}; \quad \frac{21}{36} = \\ &= \frac{105}{60}; \quad \frac{1}{60} = \frac{20}{\square}; \quad \frac{3}{100} = \frac{300}{\square}. \end{aligned}$$

9. Скрати следеће разломке: $\frac{28}{42}, \frac{26}{65}, \frac{48}{72}, \frac{42}{60}, \frac{21}{35}$!

10. Упрости: $\frac{27}{63}, \frac{27}{45}, \frac{36}{48}, \frac{65}{91}, \frac{75}{90}, \frac{72}{100}, \frac{52}{96}, \frac{52}{91}$!

11. Следеће разломке најпре скрати, па затим претвори у мешовит број: $\frac{12}{8}, \frac{15}{9}, \frac{27}{15}, \frac{32}{12}, \frac{40}{24}, \frac{60}{24}, \frac{60}{18}, \frac{60}{24}, \frac{60}{54}$ и обратну претвори у мешовите бројеве па скрати. Провери које је лакше!

12. Претвори у неправ разломак, пошто претходно извршиши потребна скраћивања: $2\frac{4}{22}, 3\frac{10}{30}, 4\frac{15}{18}, 2\frac{8}{40}, 10\frac{36}{52}$!

13. Једна цев напуни $\frac{1}{20}$ резервоара за 1 сат. За које ће време напунити $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}$ тог резервоара?

14. Доведи следеће разломке на исте имениоце: $\frac{1}{3} \text{ и } \frac{3}{4}$;

$$\frac{1}{3} \text{ и } \frac{5}{6}; \frac{3}{8} \text{ и } \frac{9}{16}; \frac{11}{12} \text{ и } \frac{7}{15}; \frac{2}{3}, \frac{4}{5} \text{ и } \frac{7}{10}; \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}, \frac{8}{25} \text{ и } \frac{27}{50}!$$

15. Упореди по величини разломке: $\frac{3}{5} \text{ и } \frac{2}{5}$, $\frac{17}{23} \text{ и } \frac{19}{23}$,

$$\frac{4}{7} \text{ и } \frac{8}{9}, \frac{8}{3} \text{ и } \frac{5}{3}, \frac{265}{148} \text{ и } \frac{265}{132}, \frac{148}{185} \text{ и } \frac{24}{37}, \frac{117}{180} \text{ и } \frac{13}{20}!$$

16. Колико су половина у 5 1, $7\frac{1}{2}$ 1, $14\frac{2}{4}$ 1, $6\frac{1}{4}$ 1?

За писмено вежбање

1. Једна гимназија има 264 ученика; од тога броја налазе се у другом разреду 88 ученика; изрази тај број разломком од целокупног броја ученика!

2. Један чиновник, који има месечну плату 2 400 динара, плата стап месечно 1 000 динара. Који део од своје плате има да изда за стан?

3. Шта треба ставити наместо х у следећим разломцима?

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{5}; \frac{x}{120} = \frac{1}{8}; \frac{15}{x} = \frac{3}{4}; \frac{1}{2} = \frac{x}{16}; \frac{1}{3} = \frac{6}{x}?$$

4. Преобрати у 84-те делове: $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{9}{14}, \frac{16}{21}, \frac{37}{42}!$

5. Преобрати у 120-те делове: $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{15}, \frac{19}{24}, \frac{29}{40}, \frac{59}{60}!$

6. Следеће разломке довести на заједнички именилац:

$$\frac{3}{16}, \frac{7}{20}, \frac{3}{30}, \frac{11}{8}, \frac{4}{15}, \frac{5}{90}; \frac{8}{6}, \frac{17}{21}, \frac{25}{28}, \frac{19}{56}; \frac{7}{8}, \frac{11}{15}, \frac{19}{50}, \frac{17}{60}!$$

7. Доведи на исто име ове разломке: $\frac{1}{30}, \frac{7}{50}, \frac{10}{75}, \frac{2}{3}, \frac{17}{30}, \frac{37}{90}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}!$

8. Упрости ове разломке: $\frac{75}{165}, \frac{55}{850}, \frac{880}{1440}, \frac{888}{925}, \frac{2000}{3600}!$

9. Претвори у мешовите бројеве: $\frac{1000}{610}, \frac{625}{400}, \frac{1204}{500}, \frac{2222}{550}!$

10. Колико има шестина у $1\frac{2}{3}$, 24-тих у $3\frac{5}{8}$, 60-на у $1\frac{5}{12}$? Резултате потврдити сликама!

12. Колико има осмина у $7\frac{1}{2}$, 120-тих у $1\frac{3}{4}$, стотиху $2\frac{3}{50}$?

13. Изрази разломком, па потом изврши скраћивање: 18 дин: 84 дин; 364 дин: 150 дин; 423м: 750м; 84км: 288км.

14. 24 м : 84 м; 423 м : 750 м; 84 км : 288 км.

15. Претвори у разломке са именоцем 24: $\frac{3}{4}, 2, 2\frac{2}{3}$,

$$5, 3\frac{3}{4}, 7\frac{1}{2}, 1\frac{11}{12}, 8, 8\frac{5}{6}, 25!$$

16. Претвори у стоте делове: $1\frac{1}{2}, \frac{27}{50}, \frac{5}{4}, \frac{46}{200}, \frac{75}{500}, \frac{160}{5000}!$

17. Претвори у неправе разломке: $6\frac{2}{3}, 24\frac{11}{35}, 4\frac{23}{36}!$

18. Упореди, и ако има више од два разломка, уреди по величини: $\frac{3}{14} \text{ и } \frac{5}{14}; \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}; \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}; \frac{12}{7} \text{ и } \frac{13}{5}; \frac{1}{8} \text{ и } \frac{13}{10}; \frac{2}{9} \text{ и } \frac{1}{3}; \frac{5}{24} \text{ и } \frac{11}{48}; \frac{2}{3}, \frac{2}{5} \text{ и } \frac{2}{7}; \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{17}{24}, \frac{1}{48}; \frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{40}, \frac{17}{80}!$

19. Уреди следеће разломке по величини с тим, да се почне са најмањим: $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{3}{5}, \frac{4}{15}; \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{19}{60}, \frac{11}{20}, \frac{13}{40}, \frac{5}{16}, \frac{7}{12}, \frac{11}{18}, \frac{13}{27}, \frac{29}{36}, \frac{35}{79}!$

20. Уреди по величини почев од највећег: $\frac{41}{60}, \frac{11}{36}, \frac{7}{12}, \frac{17}{45}, \frac{37}{72}, \frac{2}{90}, \frac{3}{4}!$

21. Следећи разломци да се скрате, а да се претходно не извршију множење: $\frac{2 \cdot 7}{35}; \frac{3 \cdot 5}{40}; \frac{6 \cdot 13}{91}, \frac{2 \cdot 15}{7 \cdot 45}, \frac{15 \cdot 16}{30 \cdot 48}$,

$$\frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{21 \cdot 35 \cdot 42}, \frac{12 \cdot 17 \cdot 4}{6 \cdot 51 \cdot 18}!$$

22. Нади разломак који ће бити једнак разломку $\frac{6}{11}$, а да у новом разломку буде збир бројица и имениоца 51!

23. Којим бројем би била претстављена дужина од 18 м, кад би за јединицу узели 5 м.

24. Шала: Један ученик добије задатак да скрати разломке $\frac{26}{65}$ и $\frac{16}{64}$. Поншто није добро разумeo скраћивање

разломака, он прецрта шестице! Изврши ти боље и сравни резултате!

38. — Сабирање разломака. — Разликујемо два случаја:

1. Разломци са истим имениоцима. — О овоме је било речи у чланку 17 ове књиге. Како гласи практично упутство за сабирање разломака истих именилаца?

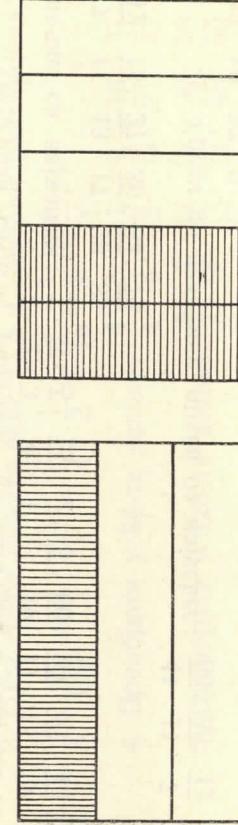
Разломци истих именилаца сабирају се кад им се бројиоци саберу а именилац лоптише.

2. Разломци са различитим имениоцима.

$$\text{Пример 1. } \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = ?$$

Ми смо већ научили сабирање разломака са истим имениоцима. Раније смо се вежбали у довођењу разноменних разломака на исте имениоце. Према томе који је поступак у најтешњој вези са сабирањем разноменних разломака?

$$\text{Решење: } \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}. \quad \text{Сл. 22.}$$



Сл. 22

$$\text{Пример 2. } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{12+4+9+10}{24} = \frac{35}{24} = 1\frac{11}{24}.$$

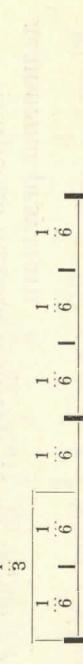
Практично упутство: Разломци са различитим имениоцима сабирају се, кад се најпре доведу на једнаке имениоце, потом саберу.

Напомена. Пре сабирања треба све разломке скратити до најпростијег облика. Ако се међу сабирцима налазе неправни разломци, треба их најпре претворити у мешовите бројеве. При сабирању мешовитих бројева треба прво целе сабирати.

39. — Одузимање разломака. — И овде разликујемо два случаја.

1. Разломци истих именилаца. — О овоме смо говорили у чланку 17 ове књиге. Како гласи практично упутство за одузимање разломака истих именилаца?

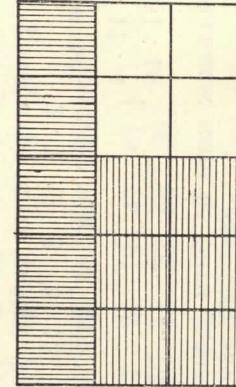
2. Разломци различитих именилаца. —



Сл. 23

1. Колика је на горњој слици разлика $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \frac{5}{6} - \frac{1}{3}?$

2. Претстави једним цртежом разлику $\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$ помоћу правоугаоника, чије су стране 5cm и 2cm, поделивши га на 10cm²! Најпре се извуку последња 2cm², тако да остану $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, затим још 7cm², тако да последњи cm² претставља тражену разлику измене $\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$.



Сл. 24

3. Израчунај $\frac{3}{4} - \frac{7}{12}$! Размишљај на исти начин као код сабирања разломака са неједнаким имениоцима!

Практично упутство: Разломци са неједнаким имениоцима одузимају се, кад се најпре доведу на једнаке имениоце, па потом извршију одузимање.

Напомена. — При одузимању мешовитих бројева треба најпре одузети целе.

$$\text{Пример 1. } \frac{5}{12} - \frac{5}{18} = \frac{15-10}{36} = \frac{5}{36}.$$

Пример 2. $5 - \frac{5}{16} = 4\frac{11}{16}$.

Пример 3. $6\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4} = 4\frac{8-9}{12} = 3\frac{20-9}{12} = 3\frac{11}{12}$.

Напомена. — У тремеку примеру, попшто су $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, или $9 > 8$, узели смо од целих умањеника једну јединицу и претворили је у дванаестине, па додали разломку умањеника и добили $\frac{8}{12} + \frac{12}{12} = \frac{20}{12}$ те на тај начин омогућили одузимање.

Потребни подаци исписују се на табли, а по потреби и делимични резултати.

За усмено вежбање

1. $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} =;$ $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} =;$ $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} =;$ $\frac{4}{11} + \frac{10}{11} + \frac{8}{11} =$
2. $3\frac{7}{18} + 2\frac{11}{18} =;$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =;$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =;$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} =$
3. $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} =;$ $\frac{2}{3} = \frac{5}{6} =;$ $\frac{1}{4} + \frac{7}{20} =;$ $\frac{2}{3} - \frac{7}{12} =$
4. $\frac{11}{12} + \frac{3}{4} =;$ $\frac{29}{50} + \frac{7}{100} =;$ $\frac{11}{30} + \frac{1}{120} =;$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} =$
5. $\frac{7}{10} - \frac{69}{100} =;$ $\frac{11}{100} - \frac{1}{100} =;$ $\frac{59}{100} - \frac{21}{50} =;$
 $\frac{79}{360} - \frac{13}{60} =$

6. $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} =;$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =;$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$
7. $2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{5} =;$ $\frac{2}{3} - \frac{3}{8} =;$ $\frac{5}{4} + \frac{3}{8} =$
8. $\frac{5}{8} - \frac{2}{5} =;$ $\frac{7}{12} - \frac{3}{8} =;$ $\frac{11}{24} - \frac{18}{72} =;$ $\frac{3}{20} - \frac{3}{25} =$
9. $3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{10} =;$ $5\frac{7}{8} - 3\frac{1}{4} =;$ $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$
10. Који је разломак за $\frac{1}{3}$ већи од $\frac{8}{15}$? Слика!
11. Који је разломак за $\frac{1}{18}$ већи од $\frac{7}{30}$? Слика!

12. Кћи има 10 година и $\frac{3}{4}$, син је за $1\frac{1}{2}$ старији. Колико година има син?

13. У један празан суд насупо је најпре $\frac{1}{2}$ л, потом! $\frac{1}{4}$ л и најзад $\frac{1}{6}$ л воде. Колико има сада у њему воде? Слика!

14. Један путник прешао је пре подне 12 km $\frac{3}{4}$, а по подне 15-km $\frac{1}{5}$. Колико је прешао за цео дан?

15. Повећај збир од $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$ за $\frac{1}{8}$!

16. Колико је x, кад је $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10$; $\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x = 19$;

$$\begin{aligned} \frac{7}{8}x + \frac{2}{9}x &= 79; \quad \frac{1}{6}x + \frac{7}{9}x = 51; \quad \frac{3}{4}x + \frac{11}{12}x = 100 ? \\ 17. \quad x + \frac{4}{9} &= \frac{7}{9}; \quad x - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}; \quad 1 - x = \frac{7}{12}; \quad \frac{1}{5} - x = \frac{1}{10} ! \\ 18. \quad x + \frac{9}{20} &= 2; \quad \frac{2}{3} + x = \frac{7}{9}; \quad x = 2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{12}; \\ x &= 2\frac{1}{6} - \frac{1}{3}; \quad 9\frac{4}{15} - 1\frac{5}{6} = x. \end{aligned}$$

19. Колико се мора одузети од следећих разломака, да би се добило $\frac{1}{2}$: $\frac{5}{6}, \frac{9}{10}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{5}{9}, \frac{43}{60}?$

20. Допуни до $\frac{3}{4}$ разломке: $\frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{24}{24}, \frac{17}{60}, \frac{41}{100}, \frac{74}{400}, \frac{299}{400}!$

21. Разлика између $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ једног броја износи 2. Који је тај број? Слика!

22. $\frac{4}{5}$ једнога броја за 6 су веће од његове половине. Који је тај број?

23. $\frac{8}{15}$ једнога броја веће су за 34 од $\frac{1}{4}$ његове. Који је тај број?

Питања

1. Како се сабирају разломци са истим имениоцима?
2. Које су радње у тесној вези са сабирањем разломка различитих именилаца?
3. Како гласи практично употребство за сабирање разломка са неједнаким имениоцима?
4. Како се сабирају неправи разломци и мешовити бројеви?

5. За колико се повећа за онолико јединица, колики је именилац?

6. Како гласи практично упостављање за одузимање разломака са једнаким имениоцима?

7. Како се одузимају мешовити бројеви?
8. Нади два разломка тако да им именилац буде 17, да се разликују за 1, а да им бројиоци не пређу 18!

9. Шта ће бити са разломком $\frac{4}{9}$ кад му се бројилац и именилац повећа за 1? Да ли ће порасти или се смањити?

10. Пробај то исто са разломком $\frac{15}{7}$!

11. Пробај то исто са више правих и неправих разломака, па изведи правило!

12. Шта ће бити са разломцима, ако им бројиоце и имениоце смањујемо за 1?

За писмено вежбање

Ученик да се вежба да унајмре проценује резултате!

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = ?$ Задатак потом решити цртежом, помоћу правоугаоника дужине 6 см ширине 5 см, који је подељен на 30 cm^2 , а поља која су избројена извучи.

2. Колико се добија, кад се изврши сабирање $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$, а колико је $\frac{2+3}{3+5} ?$

3. Шта се добија, кад се сабере петина, осмина, дванаестина и петнаестина од 4? $(1\frac{9}{10})$

4. Који се збир добија, кад се саберу 24 део од 40, 25 део од 45 и 100 део од 65? $(4\frac{7}{60})$
5. Следеће ноте изрази обичним разломком и одреди дужину појединачних тактова:



$$6. \frac{1}{9} - \frac{1}{12} =; \frac{35}{36} - \frac{5}{27} =; \frac{12}{35} - \frac{5}{21} =; \frac{11}{36} - \frac{1}{18} =$$

$$7. 5\frac{11}{20} - \frac{7}{8} =; 9\frac{4}{15} - \frac{5}{6} =; 16\frac{3}{8} - 1\frac{7}{12} =$$

$$8. 8 - 4\frac{2}{5} =; 10 - 2\frac{9}{17} =; 2\frac{7}{30} - 1\frac{13}{55} =;$$

$$9. 9\frac{37}{360} - 3\frac{59}{540} =$$

$$10. 4\frac{1}{21} - 3\frac{9}{14} =; 5\frac{3}{16} - 1\frac{7}{12} =; 7\frac{4}{27} - 6\frac{5}{18} =$$

$$11. \text{Умањеник је } 2\frac{5}{6}, \text{ умањилац } 1\frac{4}{9}, \text{ колика је разлика?}$$

$$12. \text{Разлика два броја износи } 3\frac{1}{6}. \text{ Већи број је } 10\frac{1}{9}$$

колики је мањи?

13. Који је од разломака $\frac{13}{26}$ и $\frac{42}{65}$ већи и за колико?

14. За колико се повећа или смањи разломак $\frac{77}{95}$, кад се бројиоцу и имениоцу дода 5, или од истих одузме 5?

15. За колико је већи 50 део од 169, 12 део од 25?

Провери ове резултате:

$$16. \frac{1}{4} + 2\frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{5}{14} + \frac{9}{28} + \frac{17}{40} = 2\frac{51}{280}.$$

$$17. \frac{7}{11} + \frac{11}{18} + \frac{3}{22} + \frac{1}{36} = 1\frac{9}{22}.$$

$$18. \frac{5}{18} + \frac{6}{7} + \frac{5}{36} + \frac{2}{21} = 1\frac{31}{84}.$$

Аритметика за II разред

19. $\frac{3}{16} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} = 1\frac{47}{144}.$
 20. $\frac{2}{5} + \frac{7}{12} + \frac{5}{8} + \frac{13}{30} + \frac{24}{40} = 2\frac{77}{120}.$

21. $\frac{24}{30} + \frac{30}{36} + \frac{44}{60} + \frac{48}{90} = 2\frac{9}{10}.$

22. $1\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + 3\frac{7}{9} + \frac{13}{15} + 5\frac{1}{20} = 14\frac{7}{9}.$

23. $\frac{1}{27} + \frac{5}{18} + \frac{4}{81} + \frac{11}{36} = \frac{217}{324}.$

24. $\frac{26}{65} + \frac{13}{39} + \frac{91}{78} + \frac{130}{104} = 3\frac{3}{20}.$

25. $\frac{2}{11} + \frac{3}{55} + \frac{7}{10} + \frac{9}{40} = 1\frac{71}{440}.$

26. $1\frac{1}{9} + 2\frac{11}{15} + \frac{40}{42} + \frac{72}{60} = 5\frac{3}{5}.$

27. $9\frac{13}{36} + 4\frac{9}{14} + 8\frac{4}{45} + 5\frac{2}{35} = 27\frac{3}{20}.$

28. Који је број за $2\frac{14}{30}$ већи од збира $7\frac{2}{3} + 3\frac{14}{34} + 5\frac{11}{45}?$

29. Збирај $3\frac{7}{8} + 4\frac{11}{15} + 1\frac{11}{26}$ додати број за $\frac{7}{18}$ већи од $\frac{2}{3}.$

30. Повећај $2\frac{2}{3}$ за $1\frac{7}{9}$ и додај томе још збир $1\frac{39}{100} + 2\frac{77}{120}!$

Провери ове резултате:

31. $(7\frac{9}{20} + 2\frac{4}{5}) + (4\frac{7}{12} + \frac{9}{40}) = 15\frac{7}{120}.$

32. $(7\frac{3}{8} + 9\frac{11}{15}) + 4\frac{1}{12} + (2\frac{7}{10} + 9) = 32\frac{107}{120}.$

33. $(3\frac{5}{6} + 1\frac{8}{21} + \frac{5}{18}) + (2\frac{11}{14} + \frac{8}{63} + 5\frac{1}{6}) = 13\frac{4}{7}.$

34. $(7\frac{4}{9} + \frac{19}{72} + 8\frac{17}{90} + \frac{103}{120}) + \left(1\frac{11}{48} + \frac{203}{360}\right) = 18\frac{79}{144}.$

35. $\frac{60}{24} + 3\frac{27}{45} + \frac{39}{79} + \frac{100}{8} + \frac{125}{100} + \frac{140}{84} + \frac{200}{15} + \frac{119}{51} = 36\frac{41}{60}.$

36. За колико треба повећати збир бројева $8\frac{1}{9}$ и $2\frac{1}{15}$, да бисмо добили 18?

37. За колико треба смањити збир бројева $3\frac{1}{8}$ и $1\frac{11}{12}$, да би се добила разлика тих бројева?

38. Да се од 10 одузме $6\frac{5}{12}$, а добијено разлици да се дода број за $\frac{1}{5}$ већи од $\frac{3}{8}.$

39. Колико треба одузети од збира бројева $3\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{12}$ да бисмо добили број, који је за $\frac{3}{5}$ мањи од $1\frac{7}{20}?$

40. Колико недостаје до 20 целих, кад саберемо $8\frac{5}{18}$ и $4\frac{1}{12}?$

41. Збир углова у троуглу је 180° . Кад је први угao $87\frac{1}{3}^{\circ}$, други $49\frac{5}{12}^{\circ}$, колики је трећи?

42. Збир углова у четвртоуглу је 360° . Од њих је први $90\frac{5}{12}^{\circ}$, други $45\frac{4}{15}^{\circ}$, трећи је толики колики износи збир прва два. Колики је четврти угao?

43. Обим једног троугла је $7\frac{3}{4}$ м. Једна страна је $2\frac{5}{8}$ м, друга $1\frac{13}{20}$ м. Колика је трећа страна?

44. Разлика два броја је $3\frac{5}{24}$. Колики је умањеник, кад је умањилац једнак збиру $\frac{5}{14} + \frac{5}{49}?$

45. Разлика два броја је $7\frac{3}{4}$. Умањеник је за $5\frac{4}{9}$ мањи од 16. Одреди умањилац!

46. $150 - (62\frac{13}{81} - 45\frac{17}{54}) = ; (11\frac{u}{n} - 8\frac{5}{24}) - \left(1 - \frac{1}{32}\right) =$
 $47. (27\frac{11}{63} - 19\frac{29}{84}) - \left(1\frac{5}{12} + 3\frac{4}{11}\right) =$

48. $\left(\frac{11}{111} - \frac{2}{74}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{27}{37}\right) + \left(3 - \frac{133}{222} + \frac{35}{148}\right) =$

49. Кад се од извесног броја одузме разлика 17 — $\left(\frac{11}{12} - \frac{3}{8}\right)$ остаје $2\frac{3}{4}$. Који је тај број?

50. Одреди x из следећих резултата: $2\frac{7}{24} + x = 6\frac{2}{3}$:

$$12\frac{1}{2} = 5\frac{1}{6} + x; x - 6\frac{7}{12} = 3\frac{5}{8}; 7\frac{16}{30} - x = 2\frac{3}{4}!$$

$$51. 6\frac{15}{16} - x = 9 - 3\frac{19}{40}; 3\frac{4}{9} = 13\frac{1}{4} - x; x - \\ - \left(6\frac{7}{15} - 3\frac{11}{12}\right) = 4\frac{1}{12} + \frac{13}{56}; x + \left(68\frac{5}{8} + 47\frac{5}{6}\right) = 132\frac{7}{12}.$$

52. За колико постане већи разломак $\frac{2}{3}$, кад се бројиоцу и имениоцу дода 6?

53. За колико постане мањи разломак $\frac{15}{16}$, кад се од бројиоца и имениоца одузме 12?

54. За колико се повећај $\frac{7}{15}$, кад се бројилац повећа за 4, а именилац за толико исто смањи?

55. Једно лице се копка и у првој игри изгуби $\frac{2}{5}$ од свог новца; у другој игри добије 40 динара; затим се повуче без добитка и губитка. Колико је новца то лице имало у почетку?

56. Два радника радећи засебно свршила би један посao, први за 15 дана, други за 10 дана. За које ће време посао бити готов, кад раде заједно?

Решење. Питамо се најпре који ће део посла бити свршен за један дан, кад ради обајци. Кад први сврши цео посао за 15 дана, за један дан израдиће $\frac{1}{15}$ од целог посла.

Други ће за један дан израдити $\frac{1}{10}$ од посла. Обојица за један дан ће свршити $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{2+3}{30} = \frac{1}{6}$. Кад за један дан ураде $\frac{1}{6}$ целог посла, онда ће, очевидно, сав посао свршити за 6 дана.

57. Задаци цеви и базена. — Још стари грчки математичари Херон и Диофант решавали су задатке цеви и базена. Мисли се да су они творни те врсте задатака. Тачно се не зна какви су били њихови задаци, јер су се они у току времена мењали, а слично тим задатима стварани су и други. На пр. малопређашњи задатак бр. 56. личи на задатак цеви и базена. Ови задаци спадају међу најлепше и много помажу вежбању и развијању оштруомља код ученика. Например:

У један базен тече вода из две цеви. Сами прва цев напунила би базен за 4 часа, сама друга за 12 часова. За које ће се време напунити базен, ако отворимо обе цеви одједно? Решење слично задатку бр. 56.

58. Један базен може да се пуни кроз 3 цеви. Прва сама напунила би га за 6 часова, друга за 8, а трета за 12 часова. Кад се пусте све три цеви одједаред, за време од 2 часа, у базен утече 435l воде. Колика је запремина базена?

ГЛАВА V

МНОЖЕЊЕ ИДЕЉЕЊЕ РАЗЛОМАКА

39. — **Множење разломака целим бројем.**

Пример: $\frac{4}{15} \cdot 3 = ?$ Овај задатак можемо решити на два начина:

1. Нацртај правоугаоник дужине 5 см, ширине 3 см и подели га на 15 ст1! Извуци три пута по четири поља, која се налазе једно до другога, дакле 3 пута по $\frac{4}{15}$ од целог правоугаонника! Колико је извучена површина у односу на цео правоугаоник?

$$2. \frac{4}{15} \cdot 3 = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{4+4+4}{15} = \frac{4 \cdot 3}{15} = \frac{4}{5}.$$

Овде немамо ништа ново. Множење целим бројем своди се на сабирање једнаких сабирача.

Практично употребство. — Разломак се множи целим бројем, кад се бројилац тог разломка помножи целим бројем, а именилач задржи непроменен.

Напомена. — Пре него што се приступи множењу треба обратити пажњу, да ли именилац разломка и цео број који множимо имају заједнички чинилаца. У случају да имају, треба прегходно скратити највећим чиниоцем.

$$\text{Пример 1. } \frac{11}{24} \cdot 16 = \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \\ = \frac{11 \cdot 2}{3} = 7\frac{1}{3}.$$

$$\text{Пример 2. } \frac{7}{18} \cdot 6 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Пример 3. $\frac{5}{8} \cdot 8 = 5$. Какво се правило давде може прочитати?

40. — Множење мешовитог броја. — Попшто је мешовит број збир од целог броја и једног разломка, то треба помножити оба сабирка. Често је лакше да се мешовит број претвори у неправ разломак.

$$\text{Пример: } 2\frac{3}{5} \cdot 3 = \left(2 + \frac{3}{5}\right) \cdot 3 = 6 + 1\frac{4}{5} = 7\frac{4}{5}; \\ \text{или } 2\frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{13}{5} \cdot 3 = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}.$$

За усмено вежбање

9. Колико износе укупно четвростируки и шестоструки број $\frac{17}{60}$?

$$10. \text{ Помножи са } 12: \frac{3}{4}, \frac{13}{24}, \frac{17}{36}, \frac{29}{60}! \\ 11. \text{ Помножи са } 18: \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{13}{90}, \frac{17}{180}! \\ 12. \text{ Помножи са } 40: \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{20}, \frac{11}{80}, \frac{19}{720}!$$

$$13. \text{ Кад } \frac{1}{8} \text{ м платна стаје } \frac{3}{4} \text{ дин, попшто су } 8\text{м}, 24\text{м}^2? \\ 14. \text{ Кад } 11 \text{ вина стаје } 8 \text{ дин и } \frac{1}{4}, \text{ попшто су } 6\text{l}, 12\text{l}, 18\text{l}?$$

За писмено вежбање

Ученик да се вежба у процењивању резултата!

$$1. \frac{5}{14} \cdot 21 =; \frac{2}{27} \cdot 18 =; \frac{103}{120} \cdot 12 =; \frac{229}{3000} \cdot 9 = \\ 2. \frac{87}{800} \cdot 160 =; \frac{203}{225} \cdot 45 =; \frac{581}{1000} \cdot 40 = \\ 3. 20\frac{43}{111} \cdot 6 \cdot 37 =; \frac{29}{360} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 = \\ 4. \text{ Колико је } x, \text{ кад је } \frac{x}{6} = 4\frac{2}{9}; x: 12 = 3\frac{3}{8}; x: 25 = \\ = \frac{14}{15} \cdot 9; \frac{x}{30} = 9\frac{1}{6} \cdot 4?$$

5. У једној породици троши се просечно $\frac{3}{20}$ m³ дрва за једну недељу. Колико се троши горива за четврт године, кад се кубни метар рачуна по 180 динара?

6. Помножи $2\frac{11}{60}$ са 2, 4, 8, 32! Како се може један резултат добити из прегходног? Пробај!

41. — Дељење разломака целим бројем. —

1. Преполови једну погачу, па од половине узми поново половину! Који део од целе погаче претставља такав један део?

2. Нацртај једну дуж, подели је на 7 једнаких делова и одреди $\frac{6}{7}$! Колика је од тога половина, трећина, шестина?

8. Одреди збир 8 једнаких сабираца, од којих је сваки $3\frac{3}{4}$!

Реши на сличан начин: $\frac{8}{9} : 4$; $\frac{10}{11} : 5$; Какво правило се може одатле извести?

3. Али како ћемо поступити, ако бројилац није делив целим бројем? На пример: $\frac{5}{7} : 2$? Може ли се и овај пример некако довести у везу са ранијим примерима? Решење:

$$\frac{5}{7} : 2 = \frac{10}{14} : 2 = \frac{5}{14}.$$

Израчунај на исти начин: $\frac{6}{13} : 5$; $\frac{8}{15} : 3$; $\frac{9}{20} : 7$!

Како се може врло прости из $\frac{5}{7} : 2$ добити резултат $\frac{5}{14}$?

4. Наштај једну дуж и одреди од ње $\frac{3}{4}$! Колика је половина овог комада? Пробај да узмеш $\frac{5}{6}$ дужи и да одредиш половину од тога!

Покажи једним цртежом да је одиста $\frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{14}$!

Све претходне резултате можемо склупити у ово практично упутство за дельчење разломака целим бројем: **Један разломак дели се целим бројем, кад се, или именилац помножи, а бројилац задржи, или бројилац подели тим бројем, а именилац задржи непроменен.**

Напомена. — При дельчењу мешовитих бројева поступа се на исти начин као и код множења.

За усмено вежбање

$$\text{Пример: } 6\frac{4}{5} : 2 = 3\frac{2}{5}; \quad 6\frac{4}{5} : 17 = \frac{34}{5} : 19 = \frac{2}{5}.$$

1. Подели $2\frac{2}{5}$ са 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24!
2. Подели $3\frac{3}{7}$ са 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18,

3. $3\frac{3}{5} : 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18!$
4. $4\frac{2}{7} : 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 24, 30.$

5. $\frac{3}{5} : 4 = ; \quad \frac{2}{3} : 3 = ; \quad \frac{12}{19} : 7 = ; \quad \frac{4}{19} : 8 = ; \quad \frac{15}{18} : 5 =$

6. $2\frac{1}{2} : 5 = ; \quad 3\frac{3}{4} : 3 = ; \quad 3\frac{1}{2} : 7 = ; \quad 2\frac{2}{3} : 4 =$

7. Претвори у године: $\frac{1}{2}$ месеца; $\frac{2}{3}$ месеца; 2 месеца и $\frac{1}{4}$!

8. Изрази у месецима: $\frac{1}{3}$ дана; $2\frac{1}{2}$ дана; 3 д.; $\frac{1}{3}$; 3 д.; 3 h!

За писмено вежбање

1. $3\frac{3}{5} : 9 = ; \quad 3\frac{3}{4} : 5 = ; \quad 8\frac{2}{3} : 13 = ; \quad 5\frac{2}{9} : 8 =$

2. $2\frac{3}{5} : 13, 39 \text{ и } 91; \quad 19\frac{19}{24} : 19 = ; \quad 27\frac{27}{39} : 27 =$

3. $4\frac{2}{9} : 19, 38 \text{ и } 95; \quad 101\frac{1}{99} : 19 = ; \quad 5\frac{167}{365} : 332 = ;$

$$20\frac{4}{7} : 12 =$$

4. Колико је месеци: 16 дана и $\frac{4}{11}$, 20 дана и $\frac{10}{13}$, 18 h?

5. Колико је дана: $28\frac{4}{5}^{\text{h}}$, $13\frac{5}{7}^{\text{h}}$, 48 mn?

6. Колико је часова: $17\frac{1}{2}$ mn, $12\frac{12}{19}$ mn, 54 mn?

7. Реши следеће једначине: $17 \cdot x = 43\frac{5}{7}$; $100 \cdot x = 52\frac{12}{19}$;

$$\frac{16\frac{1}{4}}{x} = 26; \quad 11 \cdot x = 8\frac{4}{5} : 12; \quad 4\frac{1}{2} : x = 35; \quad \frac{x}{6} = 1\frac{7}{18} : 4!$$

8. Један радник сврши један посао за 16 недеља и $\frac{1}{4}$, Колико би радили на истом послу 15 подједнако вредних радника?
9. Седам једнаких бројева заједно износе $123\frac{1}{12}$. Колики је један од њих?

10. Деленик је $257\frac{1}{7}$, делилац 360. Колики је количник?
11. Производ два броја је $631\frac{1}{9}$, Један од њих је 16. Колики је други?

Множење разломком

42. Разликоването два случаја.

1. Множење целог броја разломком. — Рекли смо да је множење сабирање једнаких сабирака. Тако на пр.

$$\frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}.$$

Може ли $15 \cdot \frac{1}{4}$ да се претстави као збир? Човек може да седне 1 пут, 2 пута, 3 пута, али не може $\frac{1}{4}$ пута. Да бисмо протумачили множење са $\frac{1}{4}$ поки ћемо од примера из жи-вота.

1. Кад један килограм шећера стаје 15 динара пошто су 2 килограма, пошто је?

Одговор на ово питање даје нам множење $15 \cdot 2$ и $15 \cdot 3$.

2. Кад један килограм шећера стаје 15 динара, пошто је $\frac{1}{4}$ килограма.

Слично претходном и на ово питање је одговор произ-вод $15 \cdot \frac{1}{4}$.

Одговор на задатак је врло јасан. Кад се за један ки-лограм шећера плати 15 динаара, за једну четвртину плати-мо четвртину од 15, тј. динара $\frac{15}{4}$ или $3\frac{3}{4}$.

Шта у ствари значи помножити један број са $\frac{1}{4}$?

Као што видимо $\frac{1}{4}$ од 15 = $\frac{15}{4}$ тј. $\frac{15 \cdot 1}{4}$, па се сматра да је узети једну четвртину од неког броја исто што и помно-жити га са $\frac{1}{4}$.

Шта онда значи множење са $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ итд.?

3. Кад се за један килограм шећера плати 15 динара, пошто су три четвртине од килограма?

И на ово питање је одговор производ

$$15 \cdot \frac{3}{4}.$$

Резултат је врло јасан. Кад се за једну четвртину кило-грама плати $\frac{15}{4}$ динара, за три четвртине платићемо три пута више тј. динара $\frac{15 \cdot 3}{4}$ или $11\frac{1}{4}$.

До истог овог резултата могли смо доћи и на овај начин. $\frac{3}{4}$ могу се написати и у облику производа $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot 3$ и производ $15 \cdot \frac{3}{4}$ у облику $15 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3$.

Ово значи да треба најпре узети $\frac{1}{4}$ од 15, па добијени резултат помножити са 3. Дакле $15 \cdot \frac{3}{4} = 15 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{15 \cdot 3}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$.

Најзад можемо и овако размишљати: $\frac{3}{4}$ од неке величине значи да ту величину треба поделити на 4 једнака дела, па од тога узети 3. Кад 15 поделимо на 4 једнака дела, сваки део износи $\frac{15}{4}$, а $\frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{45}{4}$.

Из овога видимо да, кад хочемо да одредимо $\frac{3}{4}$ од неког броја, треба само тај број да помножимо са $\frac{3}{4}$. Уопште за-датак да се одреди $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{9}{37} \dots$ од неког броја решава се мно-жењем тог броја са $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{9}{37} \dots$

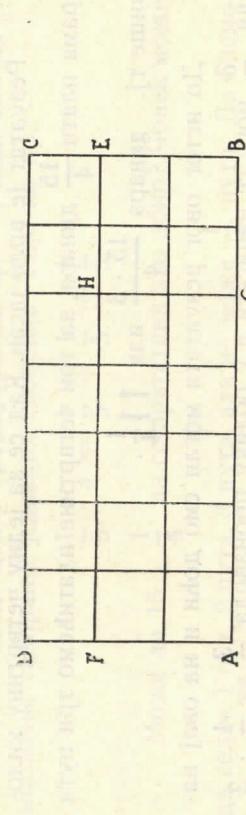
Практично упутство. — Цео број се множи разломком, кад се тај број помножи бројницом разломка, па добијени производ подели именоцем.

2. **Множење разломка разломком.** — Ако је множеник разломак на пример $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = ?$

Изразијте $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$ у облику производа, а затим у облику разломака.

До резултата дојни ћемо посматрањем слике 24.

Правоугаоник ABCD садржи 21 квадрат у три реда по 7 квадрата. Правоугаоник ABEF састоји се од два таква реда,



Сл. 24

што значи да је $A\overline{BEF} = \frac{2}{3}$ од ABCD. Од $\frac{2}{3}$ треба узети $\frac{5}{7}$.

Правоугаоник ABEF састоји се од 7 стубаца од по 2 квадрата, а правоугаоник AGHF састоји се од 5 таквих стубаца. Према томе AGHF је $\frac{5}{7}$ од ABEF. Али ABEF је $\frac{2}{3}$ од ABCD, па је AGHF $\frac{5}{7}$ од $\frac{2}{3}$ од ABCD.

Из слике се још види да правоугаоник AGHF има 10 квадрата, да према томе износи $\frac{10}{21}$ од правоугаоника ABCD који има 21 квадрат. Отуда је $\frac{5}{7}$ од $\frac{2}{3}$ од правоугаоника ABCD исто што и $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ тог правоугаоника.

Или можемо рећи да треба наки $\frac{5}{7}$ од $\frac{2}{3}$ тј. седми део од $\frac{2}{3}$ треба узети 5 пута. Према томе је

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \left(\frac{2}{3} : 7\right) \cdot 5 = \frac{2}{3 \cdot 7} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{21}.$$

Огуда ово практично упутство: Разломак се множи разломком, кад се бројилац бројоцем, а именилаз именом помножи, па се производ бројилаца подели производом именилаза.

Напомена 1. — Пре него што се приступи множењу, треба између бројилаца и именилаза извршити сва могућа скраћивања.

Напомена 2. — Мешовити бројеви множе се, кад се најпре претворе у неправе разломке, па затим помноже као разломци.

$$\text{Пример: } 2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{18}{5} = 9.$$

50. — **Производ од више чинилаца.** Степен. — Кад имамо производ од више разломака, поступићемо као и са производом од више целих бројева.

$$\text{Пример 1. } \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 1}{11 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{21}{110}.$$

$$\text{Пример 2. } 3\frac{1}{5} \cdot 5\frac{5}{8} \cdot 3\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{22} \cdot 2 = \frac{16}{5} \cdot \frac{45}{8}.$$

$$\cdot \frac{32}{9} \cdot \frac{3}{22} \cdot 2 =$$

Овде треба извршити скраћивање између бројилана и именилаза. Скраћени бројеви се прецртавају. При томе се говори: Скраћујем 16 и 8 са 8; 8 у 16, 2; 8 у 8, 1, које се не пише; даље скраћујем 2 и 22; 2 у 2, 1; 2 у 22, 11; скраћујем 45 и 9 са 9; 9 у 45, 5; 9 у 9, 1; даље скраћујем 5 и 5 са 5. Тако да нам преостаје:

$$\frac{32 \cdot 3 \cdot 2}{11} = \frac{192}{11} = 17\frac{5}{11}.$$

Напомена. — При скраћивању на овај начин постоји велика опасност да се задатак забрља и да наступи збрка и пометња. Због тога ученик мора чисто и читко да пише.

За усмено вежбање

$$1. \quad 6 \cdot \frac{5}{12} =; \quad 10 \cdot \frac{7}{5} =; \quad 7 \cdot \frac{5}{28} =; \quad 20 \cdot \frac{5}{8} =;$$

$$24 \cdot \frac{5}{12} =;$$

$$2. \quad 6 \cdot \frac{5}{6} =; \quad 13 \cdot \frac{8}{13} =; \quad 22 \cdot \frac{17}{22} =; \quad 5 \cdot \frac{1}{25} =$$

$$3. \quad 12 \cdot \frac{5}{18} =; \quad 15 \cdot \frac{9}{10} =; \quad 24 \cdot \frac{1}{36} =; \quad 60 \cdot \frac{17}{90} =$$

$$4. \quad 10 \cdot \frac{6}{7} =; \quad 25 \cdot 1\frac{1}{9} =; \quad 8 \cdot 1\frac{3}{4} =; \quad 10 \cdot 2\frac{2}{5} =$$

$$5. \quad 8 \cdot \frac{5}{6} =; \quad 35 \cdot 1\frac{3}{75} =; \quad 10 \cdot 1\frac{13}{20} =; \quad 45 \cdot 7\frac{1}{9} =$$

$$6. \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} =; \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} =; \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{5}; \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{15} =; \left(\frac{8}{9}\right)^2 =; \left(\frac{12}{13}\right)^2 =$$

7. Напиши квадрат и кубових разломака множењем: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$!
7. Шта стају $12\frac{3}{4}$ м по 28 дин; $19\frac{1}{3}$ kg по 56 пар?

8. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} =; \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{10} =; \frac{13}{50} \cdot \frac{5}{13} =; \frac{44}{60} \cdot \frac{30}{44} =$

9. $\frac{11}{12} \cdot \frac{8}{11} =; \frac{23}{24} \cdot \frac{15}{23} =; \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{96} =; \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} =$

$$10. 2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} = \left(3\frac{1}{2}\right)^2 =; \left(1\frac{1}{4}\right)^3 =$$

11. Колико износе $\frac{5}{8}$ од 8, 10, 12, 20, 32, 48, 72?

12. Колико износе $\frac{7}{12}$ од 6, 10, 18, 24, 48, 96, 240?

13. Шта стају $2\frac{1}{4}$ м по 5 дин; $3\frac{3}{4}$ л по 3 дин; $\frac{2}{5}$ kg по $\frac{3}{4}$ дин?

14. Колико је: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}; \left(\frac{2}{3}\right)^4 = ?$

За писмено вежбање

1. Помножи $\frac{5}{6}$ са $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{7}{10}$ и покушај да множење претставиш сликом!
2. $37 \cdot \frac{19}{340} =;$ $25 \cdot \frac{17}{300} =;$ $68 \cdot \frac{5}{17} =;$ $96 \cdot 4\frac{5}{4} =$
3. $\frac{15}{32}$ од $7\frac{1}{9} =;$ $\frac{36}{145}$ од $\frac{87}{128} =;$ $14\frac{3}{5}$ од $\frac{8}{365} =$

Провери ове резултате:

4. $2\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{35} \cdot 3\frac{1}{3} = 2\frac{6}{7}; 17\frac{1}{7} \cdot 1\frac{13}{36} \cdot \frac{16}{35} = 10\frac{2}{3}.$
5. $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{7} = 4;$
17. $\frac{8}{60} \cdot 4\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{34} \cdot 1\frac{3}{20} = \frac{23}{80}.$

$$6. \frac{11}{5} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 82\frac{2}{15}.$$

7. Шта стају $12\frac{3}{4}$ m по 28 din; $19\frac{1}{3}$ kg по 56 para?

$$8. \text{Израчунај: } \frac{1}{2} \text{ од } \frac{4}{7}; \frac{9}{11} \cdot \frac{4}{7} \text{ од } 8\frac{3}{10}; \frac{5}{7} \cdot 9\frac{4}{5}.$$

$$9. \text{Израчунај } \frac{3}{5} \text{ од } \frac{2}{7} \text{ од четвртине од } 510!$$

$$10. \text{Најни број чије } \frac{3}{5} \text{ од } \frac{4}{7} \text{ износе } 120!$$

11. Обим круга је приближно $3\frac{1}{7}$ пута већи од пречника. Колики су обими кругова, чији су пречници 21cm, 1m 5cm, 15 m $\frac{3}{5}$?

12. Једна учионица дугачка је $9\frac{3}{4}$ m, широка $7\frac{1}{5}$ m, а висока $4\frac{1}{2}$ m. Колико ваздуха садржи? Колико је тежак сав ваздух, кад 1m^3 тежи $1\frac{1}{10}$ kg?

13. Једно двориште, облика квадрага, дугачко је $22\frac{3}{4}$ m. Колика је његова површина? То двориште треба да се огради са три стране. За ограду се плаћа $30\frac{3}{5}$ din. по метру. Колико ће се платити за ограду?

14. Једна соба дугачка је $7\frac{1}{2}$ m; ширина је $\frac{3}{5}$ дужине, висина износи $\frac{4}{5}$ од ширине. Колика је њена запремина?
15. Једна правоугла камена плоча дугачка је $2\frac{1}{4}$ m, широка $6\frac{1}{5}$ dm. дебела $\frac{7}{10}$ dm. Колика је њена тежина, кад 1dm^3 тежи $3\frac{1}{5}$ kg?

16. Кад један радник заради за један дан $31\frac{1}{2}$ дин, којко зараде 6 таквих радника за $4\frac{2}{3}$ дана?

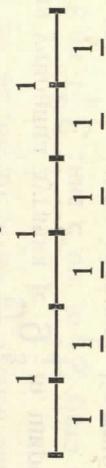
17. Збир једнак производу. Кад се броју $1\frac{2}{25}$ дода $13\frac{1}{2}$, добије се исто, као кад та два броја помножимо.

Дељење разломком

43. — Најлакше ћемо доћи до потребног правила ако дељење узмемо у смислу мерења или садржања.

$$\text{Пример 1. } 3 : \frac{1}{2} =$$

Питамо се колико пута се садржи једна половина у једном целији, колико половина има у једном целији?



Пример 2. — Колико пута се садрже 3 десиметра у једном метру?

$$\text{Или } \frac{9}{10} \text{ м} : \frac{3}{10} \text{ м} = 3.$$

Ако изоставимо имена, имамо

$$\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = 9 \text{ десетина} : 3 \text{ десетине} = 3.$$

Питамо се колико пута се садржи 3 десетине у једном десиметру.

$$\text{Пример 3. } 6 : \frac{3}{5} = 30 \text{ петина} : 3 \text{ петине} = 10.$$

До истог резултата бисмо дошли, ако место дељења са $\frac{3}{5}$ помножимо са $\frac{5}{5}$, реципрочном вредношћу.

$$6 : \frac{3}{5} = 6 \cdot \frac{5}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

Исто тако је $3 : \frac{1}{2} = 3 \cdot 2 = 6$ и $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{3} = 3$.

Пример 4. $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{20} : \frac{15}{20} = 8 : 15$ дводесетина : 15 дводесетина = $\frac{8}{15}$. Разломке смо довели најпре на исте именице.

До истог резултата долазимо, ако дељеник $\frac{2}{5}$ помножимо реципрочном вредношћу делиоца

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}.$$

Огуда имамо ово **практично употребство** за дељење разломком: **Један број дели се разломком**, кад се тај број **множи реципрочном вредношћу** тог разломка.

Напомена 1. — Ако се при дељењу разломка разломком може без остатка да подели бројилац бројицем, а именилач именицем, онда се дељење тако изврши. Пример:

$$\frac{15}{16} : \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Напомена 2. — Мешовити бројеви се претходно претварају у неправе разломке.

За усмено вежбање

$$1. 6 : \frac{1}{9} =; 5 : \frac{3}{8} =; 7 : \frac{7}{12} =; 13 : \frac{2}{3} =$$

$$2. 100 : 3\frac{1}{3}; 100 : 6\frac{1}{4}; 190 : 12\frac{1}{2}; 109 : 11\frac{1}{9} =$$

$$3. \frac{6}{25} : \frac{2}{5}; \frac{3}{10} : \frac{1}{5}; \frac{4}{27} : \frac{2}{9}; \frac{20}{77} : \frac{5}{11} =$$

$$4. \frac{3}{4} : \frac{1}{6}; \frac{7}{8} : \frac{7}{9}; \frac{5}{24} : \frac{7}{12}; \frac{1}{30} : \frac{4}{5} =$$

$$5. \text{Колико пута се садржи } \frac{1}{8} \text{ у } \frac{1}{2}; \frac{1}{15} \text{ у } \frac{1}{3}; 2\frac{1}{2} \text{ у } 15;$$

$$3\frac{1}{3} \text{ у } 20; 33\frac{1}{3} \text{ у } 100; \frac{1}{25} \text{ у } 25?$$

6. Колико се одела могу начинити од 26m штофа, кад је за једно одело потребно $3\frac{1}{4}$ m?

7. Колико се чаша од $\frac{4}{20}$ l могу напунити са 12l нечекичностим?

Питанња

$$8 \cdot \frac{5}{8} = ; \quad \frac{7}{2} = ; \quad \frac{3}{3} = ; \quad \frac{15}{34} = ; \quad \frac{20}{72} = ; \quad \frac{7}{2} =$$

9. Колико је x , кад је: $3\frac{1}{3} : x = 20$; $x \cdot 2\frac{1}{2} = 15$;

$$x = 1\frac{3}{4} : 3\frac{3}{4}; \quad 1\frac{3}{4} : 2\frac{3}{4} = ; \quad 6 : x = \frac{1}{3}; \quad 3\frac{1}{2} : x = 7?$$

$$10. \quad \frac{17}{20} = ; \quad \frac{7}{17} = ; \quad \frac{10}{20} = ; \quad \frac{3\frac{1}{2}}{2} = ; \quad \frac{5}{15} = ; \quad \frac{6}{6} = ; \quad \frac{1\frac{7}{8}}{1\frac{1}{4}} =$$

За писмено вежбање

$$1. \quad \frac{13}{14} \text{ подели са } \frac{13}{15}, \quad \frac{3}{14}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{9}{15}, \quad \frac{8}{20}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{4}{15}!$$

$$2. \quad \frac{21}{25} : \frac{14}{15}, \quad \frac{18}{25}, \quad \frac{14}{25}, \quad \frac{7}{19}, \quad 50 : \frac{4}{13}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{4}{17}, \quad \frac{11}{21}.$$

$$3. \quad 4\frac{1}{5} : \frac{7}{15} = ; \quad 39\frac{6}{25} : \frac{9}{125} = ; \quad 7\frac{9}{17} : 1\frac{11}{51} = ; \quad 1\frac{5}{12} : \frac{8}{9} =$$

$$4. \quad \text{Колико је } x, \text{ кад је: } x \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}; \quad 3\frac{1}{2} \cdot x = \frac{7}{10};$$

$$4\frac{1}{2} : x = \frac{3}{8}; \quad x : 2\frac{1}{2} = 1: 1\frac{1}{8}; \quad x = 3\frac{11}{17} : 6\frac{4}{5}?$$

5. Чиме треба помножити $8\frac{5}{8}$, да се добије $100\frac{5}{8}$?

6. Кад један воз пређе за 3 сата и 8 минута $13\frac{1}{6}$ km.
Колики пут пређе за 1 сат?

7. Колики је пречник круга, чији је обим $17\frac{3}{5}$ m?

8. Чиме треба поделити $17\frac{1}{2}$, да се добије 14?

9. Којим бројем морамо помножити $6\frac{1}{8}$, да добијемо
толико исто, као кад би $1\frac{3}{4}$ поделили са $2\frac{2}{5}$?

10. Од две локомотиве, једна пређе $37\frac{1}{2}$ km за $\frac{3}{4}$ h,
друга $67\frac{1}{5}$ km за $1\frac{1}{3}$ h. Која има већу брзину?

1. Како се разломак можи целим бројем?
2. Шта бива са разломком, ако му бројилац помножимо
са 2, 3, 4, 5 итд.?

3. Шта бива са разломком, ако именилац помножимо са
2, 3, 4, 5...?

4. Шта ће бити са разломком, ако именилац поделимо
једним целим бројем?

5. Шта смо урадили са разломком $\frac{15}{19}$, ако именилац
помножимо са 2, а бројилац поделимо са 5?

6. Како се множи разломак разломком?

7. Како се множи мешовити број мешовитим бројем?
8. Како се добија производ више разломака?

9. Како се добија квадрат и куб једног разломка?

10. Кад је разломак мањи од 1 да ли је његов квадрат
већи од 1?

11. У ком ће случају квадрат разломка бити већи од
самог разломка?

12. Како се дели разломак целим бројем?
13. Како се дели разломком?

14. Како се дели мешовитим бројем?

Сложени разломци

44. — Један разломак коме је бројилац или именилац
такође разломак, или и једно и друго разломци, званемо
сложен разломак.

За употребљавање сложених разломака користићемо се
познатим правилом: да се вредност разломка не меня, кад
се бројилац и именилац једним истим бројем помноже. По-
ступак при томе видиће се из следећих примера:

$$\text{Пример 1. Упрости } \frac{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{4} + \frac{5}{6}}$$

Решење: Помножићемо и бројилац и именилац са 12,
н. з. с. за имениоце 2, 3, 4 и 6. Тако успевамо да, наместо раз-
ломака и мешовитих бројева у бројицу и имениону, добије-
5*

мо одмах целе бројеве. Имамо: $3\frac{1}{2} \cdot 12 = 42$; $2\frac{1}{3} \cdot 12 = 28$;

$$3\frac{1}{4} \cdot 12 = 39; \frac{5}{6} \cdot 12 = 10.$$

$$\frac{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{4} + \frac{5}{6}} = \frac{42 - 28}{39 + 10} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}.$$

До истог резултата долазимо ако извршимо радње у бројиоцу и имениоцу па главну црту заменимо знаком десетица.

Мешовити задаци за понављање

1. Колика је разлика између

$$(3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2}) : 1\frac{2}{3} \text{ и } 3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2} : 1\frac{2}{3}?$$

2. Колика је разлика између

$$\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} + 5\frac{5}{7} \text{ и } \left(3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2}\right) \cdot 1\frac{2}{3} + 5\frac{5}{7}?$$

3. Нади разлику између

$$3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3} - \frac{5}{6} \text{ и } 3\frac{1}{4} - \left(1\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right).$$

Ученик да процени унапред који ће резултати бити већи!

4. Изврши на два начина

$$(15\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3}) \cdot 7\frac{3}{4} =; (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) \cdot \frac{2}{3}!$$

Провери следеће резултате:

$$5. 15\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3} \cdot 7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3} = 13\frac{3}{4} \cdot \dots$$

$$6. (15\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3}) \cdot 7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3} = 116\frac{11}{16}.$$

$$7. 15\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3} \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 15\frac{35}{36}.$$

$$8. (15\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3}) \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 23\frac{7}{8}.$$

$$9. 15\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 4\frac{19}{36}.$$

$$10. (15\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 15\frac{11}{14}.$$

$$11. 15\frac{1}{4} + \frac{2}{3} : 7\frac{3}{4} = 15\frac{125}{372}.$$

$$12. (15\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) : 7\frac{3}{4} = 2\frac{5}{92}.$$

$$13. 15\frac{1}{4} - \frac{2}{3} : 7\frac{3}{4} = 15\frac{61}{372}.$$

$$14. (15\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) : 7\frac{3}{4} = 1\frac{82}{93}.$$

$$15. 15\frac{1}{4} - \frac{2}{3} : 7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3} = 8\frac{85}{372}.$$

$$16. (15\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) \cdot (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 14\frac{2}{3}.$$

$$17. 15\frac{1}{4} + \frac{2}{3} : (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 15\frac{45}{32}.$$

$$18. (15\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) : (7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}) = 13\frac{6}{13}.$$

Почађали рукописи. Провераји цифре које су нестале! (Место несталих цифара стављене су тачке.)

$$19. \frac{4}{27} + \frac{1}{+} + \frac{5}{63} = \frac{10}{27}$$

$$20. 1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} - \frac{1}{+} - \frac{1}{12} = 3\frac{1}{2}$$

$$21. 7\frac{1}{5} - \frac{1}{+} \frac{1}{19} = 2\frac{95}{95}$$

$$22. 4\frac{3}{17} + \frac{1}{+} - 7\frac{3}{187} - 2\frac{5}{33} = 3\frac{3}{187}$$

$$23. \frac{5}{1} \times 2\frac{1}{+} = 8$$

$$24. \frac{1}{5} \times 2\frac{1}{+} = 9$$

$$25. 5\frac{8}{27} \times \frac{1}{+} \frac{6}{13} = 18\frac{1}{+}$$

$$26. 4\frac{1}{27} \times \frac{1}{+} \frac{1}{16} = 35$$

$$27. Ако потрошим $\frac{2}{3}$ од свог новца, затим $\frac{3}{7}$ остатка, колико ми још остаје?$$

Јасно је да је у сваком случају било да је остатак једнак.

Дакле, ако је у сваком случају било да је остатак једнак, тада је у сваком случају било да је остатак једнак.

28. Ако је делилац $\frac{4}{7}$, а количник $\frac{3}{8}$ од делиоца, колики мора бити дељеник? $(\frac{6}{40})$

29. Колико пута се садржи $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$ у $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$? $(\frac{3}{4})$

30. Да се броју 10 дода збир бројева $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{4} \cdot (18\frac{1}{4})$.

31. Да се разлика бројева $15\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$ подели разликом $7\frac{3}{4} - 6\frac{2}{3}$. (Рез. $13\frac{6}{13}$)

32. Поделити производ бројева $1\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{8}$ са $\frac{15}{16}$. (Рез. $\frac{3}{5}$)

33. Разлику бројева $1\frac{3}{4}$ и $\frac{17}{16}$ поделити производом бројева $3\frac{1}{4}$ и $2\frac{1}{2}$. (Рез. $\frac{11}{130}$)

34. Од четвороструког мешовитог броја $7\frac{7}{18}$ одузми пестоструки број $2\frac{7}{15}$!

35. Да се двострука разлика између 6 и $2\frac{9}{16}$ одузме од четвороструког збира бројева $3\frac{5}{12}$ и $2\frac{7}{30}$. ($15\frac{29}{40}$)

36. Помножи $\frac{7}{20}$ са 13, од производа одузми $2\frac{17}{30}$, добијену разлику помножи са 30 и одузми од производа половину од 37!

37. Четвртом делу броја $67\frac{1}{2}$ додај трећину тога броја, па затим добијени збир подели са 63! $(\frac{5}{8})$

38. Производ од $17\frac{11}{17}$ и 34 подели са 48, па од добијеног количника нађи пети део!

39. Од производа бројева $3\frac{5}{7}$ и $3\frac{3}{4}$ одузми седмострку њихову разлику!

40. Подигни на квадрат $6\frac{1}{4}$, додај том квадрату троизвод бројева $4\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{16}$, па добијени збир подели са $139! (\frac{5}{16} \cdot)$

41. Три наследника поделила су 35 000 динара. Први је примио $\frac{2}{5}$ целе суме, други $\frac{3}{4}$ од дела првога. Који део наслеђства припада трећем? Колики је део свакога од њих?

42. Један отац и син, прости радници, зараде заједно за једну годину 16 000 динара. Идуће године зарада сина повећа се за једну четвртину, а очева остане непромењена. Ове године они приме 17 200 динара. По колико су примили отац и син у првој и другој години?

43. Један трговац зарађује на роби $\frac{3}{5}$ од куповне цене.

Када је продao робу за 640 динара, колику је суму зарадио?

44. Нади разлику између:

$$1) \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \text{ и } \frac{2+4}{3+5}; \quad 2) \frac{4}{7} - \frac{1}{3} \text{ и } \frac{4-1}{7-3};$$

$$3) \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \text{ и } \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 8}; \quad 4) \frac{9}{25} : \frac{3}{5} \text{ и } \frac{9:3}{25:5};$$

$$5) \frac{3}{5} + \frac{3}{10} \text{ и } \frac{3+3}{5+10}; \quad 6) \frac{5}{12} - \frac{4}{11} \text{ и } \frac{5-4}{12-11};$$

$$7) 2\frac{2}{7} \cdot 3\frac{3}{5} \text{ и } 2 \cdot 3 + \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5}; \quad 8) 8\frac{4}{9} : 2\frac{2}{3} \text{ и } 8:2 + \frac{4:2}{9:3};$$

$$9) 8\frac{4}{9} : 2 \text{ и } 8:2 + \frac{4}{9}:2; \quad 10) 2\frac{1}{3} \cdot 4 \text{ и } 2 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 4^2$$

ГЛАВА VI

ДЕСЕТНИ РАЗЛОМИЦИ

45. — Разломци чији су именници 10, 100, 1000... или ма који степен од 10, зову се **десетни** или **десимални разломци**.

За ове разломке је усвојено карочито писање. Ово простије писање засновано је на овоме што ћемо сада показати.

Посматрајмо разломак $\frac{7304}{1000}$.

Бројилац можемо написати као збир:
 $7304 = 7000 + 300 + 4$.

Према томе имамо

$$\frac{7304}{1000} = \frac{7000}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{4}{1000} = 7 + \frac{3}{10} + \frac{4}{1000}.$$

Тако се сваки десетни разломак може да претстави у облику збира једног целог броја и простих десетних разломака, који имају за брјиоце бројеве мање од 10, а за именице различите степене од 10. Један такав разломак се овако пише:

7,304,

где број 7 лево од запеге, сачињава целе. Цифре које долазе после запеге претстављају редом десете, стоте, хиљадите итд., десималне јединице редом 10 пута мање. Нула означава место стотих. Видимо да смо овај десимални број добили од датог десетног разломка, кад смо у бројицу, идући с десне налего, одвојили запетом онолико цифара, колико у именницу има нула.

46. — Писање и читање десималних бројева, може се речи, почива на истим начелима, која смо проучили и за целе бројеве, управо једно проширење тих начела:

1. Цифра лево од запете претставља прсте јединице.
2. Цифра која се налази с десне стране запеге, претставља јединице десет пута мање од јединица које претставља цифра с леве стране.

3. Ако нема јединица известног реда, њихово се место обележава нулом, да би остале цифре сачувале свој ранг. Ако целих уопште нема, наместо простих јединица треба ставити нулу, па до нуле запету.

Пример: Цифре броја 1256,893 означавају: 1 хиљаду, 2 стотине, 5 десетица, 6 јединица, 8 десетих, 9 стотих, 3 хиљадита. То можемо и овим низом претставити:

X С Д Ј Д С Х
1 2 5 6 , 8 9 3

Цифре с десне стране запете зову се десимали или десетна места.

47. — Ваља споменути да се при читању десималних бројева чују више начина. Ми ћemo овде рећи оне, који се најчешће чују, а који су врло практични. Узимамо за пример број 3,1416.

Најпре се прочитају цели, уколико их има, затим сваки десимал изговарајући његову месну вредност, дакле 3 цела 1 д 4с 1х 6 дх;

или 2. сваки десимал, не казујући месну вредност, дакле 3, кома, један, четири, један, шест; (кома = запета);

или 3. прочита се број десно од запете без икаквог имена, дакле 3, кома хиљада четири стотине шеснаест;

или 4. прочита се број десно од запете, при чему се он изрази јединицама најнижег реда, дакле 3 цела 1416 десето-хиљадитих.

Питања и вежбања

Одговор на многа питања налази се у Аритметици за 1 разред.

1. Шта је десетни разломак?
2. Како се може десетни разломак да претстави у облику збира? Пример: $\frac{21506}{10000}$ да се претстави у облику збира.
3. Како се простије пишу десетни разломци?
4. Има ли каква разлика између десетног разломка и десималног броја?
5. Како се читају десимални бројеви?
6. Како се пишу десимални бројеви?
7. Прочитај: 2,716; 0,30103; 100,01; 70,01; 0,001293; 3,001; 1010,0101; 0,34035; 1,01005; 1,01005; 0,000274!
8. Колико десимала има један десималан број који а) треба да изрази стоте; б) хиљадите; в) стохиљадите; г) милионите?
9. Шта значи друга цифра лево од запете, шта друга десно од запете?
10. Шта значи прва цифра лево од запете, шта друга десно стотине?
11. Између које две цифре стоје запете?
12. Које десимале претстављају десети, десетохиљадити, милионити?

13. Напиши: 5Д 7Ј 8д 2с 7х; 3С 3Д 3д; 7Ј 7д 7х; 8д 3с 5х;
2Д 3д 4с; 2Ј 4с 7дх; 2х; 27дх; 106 сх!

14. Напиши у облику десималног броја: $26\frac{33}{100}$, $\frac{91}{100}$.

$$\frac{128}{1000}, \frac{17}{1000}, \frac{483}{10000}, \frac{383}{10000}, \frac{7}{10}.$$

15. Шта: Шта је веће: нула кома 9, или нула кома 10?

16. Стави запету на њено место код:

216, кад цифра 2 треба да изражава десетице
стотине;

5712,	„	5	“	“	“
389,	„	8	“	“	“
27,	„	7	“	“	“
1934,	„	4	“	“	“

десетохиљадите!
милионите!

17. Постоји ли каква разлика између 0,8 и 0,800?

18. Шта бива са десималним бројем, ако му са десне стране дописујемо нуле? Шта ће бити, ако са десне стране бришемо нуле? Да ли се ово може назвати проширавање и скраћивање?

19. Шта ће бити са десималним бројем, ако запету померамо улесно и улево?

20. Који број постаје, кад се код 30,45 запета помакне за 2 места улесно; за 3 места улево; за 4 места улево?

21. Колико свега десетих има у 6,9; колико хиљадних у 0,38?

22. Колико свега десетих има у 1,38; колико ду 0,00597?

23. Колико пута је веће 58 од 0,58; 25,2 од 2,52?

24. Колико пута је веће 1 од 0,0001; 0,5 од 0,0005?

25. Како се десималан број можи и дели са 10, 100, 1000..?

56. — Десимални бројеви зову се истоимени, кад имају једнак број десимала. Разномени десимални бројеви довоље се на истоимене, кад се места која недостају попуне нулама.

Један цео број може увек да се напише као десималан број као на пр. $7 = 7,0000$.

За усмено вежбање

- Доведи на исто име: 2,24 и 0,806; 3,2 и 1,0734!
- Следеће бројеве исписати са 3 десимала: 0,36; 0,9.
- Изрази у стотим: 0,2; 0,6; 0,970; 2,8800; 080000!
- Напиши у најпростијем облику: 3,60; 30,0300; 3,000940!

- Колико су метара: 2m 54cm; 3m 5dm 1cm; 48cm; 3m 4cm; 9dm; 252cm; 4dm 5cm 66mm; 57mm; 518mm; 9mm; 2100mm; 1km 1cm 1mm?

За писмено вежбање

- Изрази у km: 7 km 237 m 40 cm; 10 km 15 m 7 cm!
- 2, 2, m 458 = m cm mm; 0, m 902 = cm mm?
- 0, m 274 = cm mm; 2, m 3 = m cm ; 0, m 04 = mm ?
- Колико m^2 су: 4 m²; 48 dm²; 2735 cm²; 4 m² 6 dm²?
- 0, m² 9 = dm²; 4, m² 07 = mm²; 0, m² 08 = cm²?
- 0, ha 3456 = a m²; 3, a 2 e = m²; 0, ha 0415 = m²?
- 34 a = ha; 2780 m² = a; 7280 m² = ha?
- Колико m³ су: 345 dm³; 68 dm³; 2 dm³; 4 m³ 44 dm³?
9. Колико hl су: 125 l; 90 l; 2 hl 60 l; 345 l?

Питања

- Кад су десимални бројеви истоимени?
- Како се десимални бројеви доводе на исто име?
- Како се десимални бројеви упоређују по величини?
- Како гласи практично употребство за сабирање и одузимање десималних бројева? Како се множе десимални бројеви?
- Кад су десимални бројеви у производу два десимална броја? Овај број места може ли бити мањи у неким случајевима?
- Колико има десетних места у производу десималних бројева?
- Сваки од њих има по 2 десимала? Шта ће бити ако се први свршава са 2, а други са 5?
- Шта у ствари бива са једним бројем, кад га помножиш са 0,1; 0,01; 0,001 итд.?
- Шта значи у ствари помножити један број са 0,5; са 0,25; са 0,125?

За усмено вежбање

1. $3,4 + 2,2 =$; $0,9 + 0,7 =$; $2,8 + 0,6 =$; $0,12 + 1,3 =$
 $7,6 - 5 - 1,6.$
 2. $3,1 + 0,05 =$; $0,8 + 0,18 =$; $17,04 + 1,05 =$
 $3,01 + 0,01 =$; $0,3 + 0,03 =$; $0,125 + 0,4 =$
 3. $105,035 + 202,45;$ $363,85 + 122,0017;$ $0,2 + 0,02 +$
 $+ 0,002 =$
 4. Који децималан број добијамо сабирањем 12д и 7д;
9с и 48с; 6д и 7с; 4д и 76с; 99с и 1д; 2J, 4д и 1с; 8Д, 4д и 5с?
 5. Број од 0,7 до 8,7 све по 0,8 од 0,8 до 2 по 0,12!
 6. $0,7 - 0,5 =$; $1,2 - 0,9 =$; $1,7 - 0,7 =$; $0,47 - 0,37 =$
 $1,04 - 0,99 =$; $3 - 2,7 =$; $3 - 2,07 =$; $1,2 - 0,8 =$
 $9,07 - 0,07;$ $0,1 - 0,01;$ $1,1 - 0,99;$ $0,5 - 0,375;$ $1 -$
 $- 0,999 =$
 7. Колика је разлика између: 1 и 0,9; 6д и 47с; 58д и 57с.
 8. Број уназад од 4 до 0,5 по 0,7; од 2 до 0,4 по 0,16;
 9. Шта треба додати броју 2,4 да се добије 4,2; броју
5,9 да се добије 8,2; броју 0,45 да се добије 2; од 0,08 до 0,8?
 10. $5,75 - 1,05;$ $31,09 - 1,05;$ $1,1 - 1,001 =$
 $11,2 - 0,3 - 0,03;$ $0,8 - 0,45 - 0,15;$ $0,5 + 0,6 - 1 =$
 $12,1 - 0,7 - 0,17;$ $(0,8 + 0,9) - 1,5;$ $(5 - 2,9) - 1 =$
 13. Колика је разлика између: 1 и 0,9; 6д и 47с; 58д и 57с.
 14. Број уназад од 4 до 0,5 по 0,7; од 2 до 0,4 по 0,16!
од 1 до 0 по 0,125!
 15. Шта треба додати броју 2,4 да се добије 4,2; броју
5,9 да се добије 8,2; броју 0,45 да се добије 2; од 0,08 до 0,8?
-
16. $0,1 \cdot 9;$ $0,2 \cdot 7;$ $1,4 \cdot 8,$ $1,06 \cdot 6;$ $3,7 \cdot 5 =$
 $17. 3,052 \cdot 100;$ $0,075 \cdot 10;$ $0,00304 \cdot 1000;$ $4,5 \cdot 2 =$
 $18. 0,05 \cdot 0,2;$ $0,002 \cdot 45;$ $0,005 \cdot 24;$ $0,036 \cdot 25;$ $03 \cdot 4 \cdot 5 =$
 $19. 25,02 \cdot 0,2;$ $40,2 \cdot 0,5;$ $2,5 \cdot 0,4 =$
 20. $0,028 + 0,028 + 0,028 + 0,028 + 0,028 =$
 $21. 1,1^2; 2,1^2 \cdot 0,5^2; 0,03^2; 0,2^3; 0,4^3; 0,1^4; 0,2^5 =$
 $22. 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,7; 0,15^2; 0,01 \cdot 0,1; 0,01^2 + 0,001^2 =$
 $23. 2,44 \cdot 10;$ $0,08 \cdot 10;$ $1,576 \cdot 100;$ $0,0593 \cdot 1000 =$
 $24. 3,2 \cdot 1000;$ $0,004 \cdot 1000;$ $0,00004 \cdot 10000 =$
 $25. 2,2 \cdot 1000000;$ $1000 \cdot 0,79;$ $100 \cdot 0,0004 \cdot 10 =$
 $26. 0,32 \cdot 0,4 \cdot 1000;$ $0,8 \cdot 0,9 \cdot 1000;$ $1,5 \cdot 1,2 \cdot 100 =$
 $27. 3 \cdot 0,002 \cdot 10000;$ $3,14159 \cdot 100000;$ $10 \cdot 0,00356 \cdot 100 =$
 $28. Колико пута је веће 0,3 од 0,003; 0,26 од 0,026?$
 $29. Чиме треба помножити 0,1 да се добије 10; 2,7 да се добије 2700; 0,00024 да се добије 0,024; 0,000001 да се добије 10?$

30. $1,7 + 1,8 + 1,6;$ $2,8 + 2,5 - 1,9;$ $5,8 - 2 + 2,9;$
 $7,6 - 5 - 1,6.$
31. $2 + 3,1 + 4,9 - 3,4 - 2,5;$ $0,7 - 2,4 + 3,8.$
32. $1,5 - 2,5 - 3,5 + 4,6;$ $0,7 + 0,17 - 0,27 + 0,4.$
- Питања**

1. Како се дели децималан број целим бројем?
 2. Како се дели цео број децималним бројем?
 3. Како се дели децималан број децималним бројем.
 4. Покажи да је исто помножити један број са 10 или поделити га са 0,1!
 5. Шта у ствари значи дељење једног броја са 0,01 и 0,001?
 6. Како се брже дели са 0,5; 0,25; 0,125; са 0,05 и 0,005?
- Задаци за усмено вежбање**
1. $9,6 : 4 =$; $13,5 : 15 =$; $7,2 : 24 =$; $0,084 : 12 =$
 $2. 25,2 : 2;$ $3,4,5,6,8,12,0,108 : 12;$ $44,44 : 11 =$
 $3,2,8 : 7;$ $0,3 : 5;$ $6,9 : 6;$ $30,2 : 5;$ $14,4 : 8;$ $18,4 : 8 =$
 4. Које дес. бројеве добијамо кад поделимо 4,20 са 7; 105 са 30; 130 са 40; 260 са 50?
 5. Колико је половина од 0,3; 1,330, 0,99, 11?
 6. $34,7 : 10;$ $34,7 : 100;$ $34,7 : 1000;$ $3,587,5 : 1000.$
 7. $216 : 200;$ $35 : 500;$ $8 : 80000;$ $135 : 90.$
 8. $4,5 : 1,5;$ $0,126 : 0,21;$ $0,121 : 1,1,$ $0,4 : 0,008.$
 9. $18 : 0,5;$ $1 : 0,025;$ $0,12 : 0,0024;$ $33 : 0,11.$
- Приближне вредности**
48. — При сабирању, одузимању и множењу децималних бројева добијамо увек тачан резултат, који је најчешће и сам децималан број. Код дељења није тај случај. Количник је најчешће **приближан**.
- У задацима из практичног живота често није ни потребно да се ради са потпуно тачним бројевима. Допуштено је да се тачни бројеви замене бројевима, који се од њих врло мало разликују. Тако ако имамо да наплатимо суму од 300 динара и неколико паре, ми ове паре можемо занемарити. Кад трговац прода 3,20 т штофа, он сигурно при мерену учини грешку за који милиметар, али кројач који ради одело ту грешку и не примети.

У горњим примерима дељења децималних бројева количник је тачан број. Али то су примери нарочито удешени. Најчешћи је случај, да је количник само приближан. На пример $5 : 0,3$. Ако приступимо дељењу према познатом практичном упутству, имамо:

$$50 : 3 = 16,666 \dots$$

$$\underline{20} \\ 20 \\ -0 \\ \dots$$

Видимо да се у количнику јављају 16 целих, а као дечимали увек шестице. Дељење бисмо могли продолжити докле хоћемо, никад га не бисмо могли завршити. Увек се као остатак јавља број 2. Постоје очевидно да негде морамо стати, ми унапред одредимо до ког десетног места треба ићи. Тада обично кажемо да се количник одреди на 1, 2, 3, 4 ... децимала. Разуме се да је количник утолико тачнији, уколико узмемо већи број децимала.

Кад се зауставимо на извесном децималу, обично поступамо двојајко. Послењу задржану цифру или оставимо неизмену, или је повећамо за 1. Како треба поступити каузе нам цифра, која долази иза последњег задржаног дечимала. Ако је та цифра већа од 4, онда се последња, коју узимамо, повећа за 1. То чинимо због тога, што хоћемо да нам грешка буде што мања.

Узимимо да нам је задано да горњи количник $5 : 0,3$ одредимо на 3 децимала. Решење је 16,667, а не 16,666. И једна и друга вредност су приближне. Само ако узмемо место 16,66666 ... број 16,666, грешка износи 0,000666..., а ако узмемо 16,667, грешка је 0,000333 ...

За писмено вежбање

- Изврши сабирање:
1. $4,753 + 3,504 + 703,2; 54,02 + 3,075 + 125,8$
 2. $405,031 + 0,752 + 4,71; 0,003 + 0,075 + 0,701$
 3. $1,30103 - 4,4583; 5,5 - 6,389$
 4. $0,47712 \cdot 0,84; 7,952 \cdot 2,1703$
 5. $0,90309 \cdot 5,006; 4,027 \cdot 9,4022$
 6. $0,49712 \cdot 0,97; 9,7 + 7 + 0,709 + 0,07 + 2,454 =$

Изврши одузимање:

8. $6,853 - 3,17; 87,8705 - 82,007; 0,06 - 0,045; 2,22 - 1,934.$
9. $48,707 - 0,893; 34,706 - 33,098; 7,003 - 0,0871;$
10. $6,0432. \quad \underline{0,60206} \quad 3,45 \quad 10 \quad 3,90309 \\ - 0,47712 \quad - 1,8957 \quad - 5,07943 \quad - 1,77815$
11. $12,597 - 4,193 - 10,684 - 7 = ; 10,4 - 7 = 1,6626!$
12. Долгуни 0,048 до 0,85; 2,0091 до 5; 0,009 до 0,9!
13. Разлика два броја је 0,835; умањеник је 3,3792. Колики је умањилац?
14. $2,718 \cdot 42; 0,30103 \cdot 26; 4,05 \cdot 3,12; 43,95 \cdot 1,7 =$
15. Израчунај следеће производе и изврши пробу са 9

- 34,2 · 1,22; 9,832 · 1,75; 60, 0076 · 47,5; 0,00607 · 2,37; 64,31 · 279; 0,5506 · 4 500; 65,417 · 308 060; 96,007 · 181 000; 2,25 · 4 000; 9,003 · 4 500; 100,057 · 8 100 000!
16. $0,0039675 \cdot 100 \cdot 300; 0,01993 \cdot 500 \cdot 20.$

Израчунај:

17. $\frac{1}{\text{отом}} \cdot \underline{1,038} \quad 18. \quad 36,597 \quad 19. \quad \frac{100}{\text{отом}} \cdot \underline{0,94} \quad 17,03 \quad - 12,58$
20. $(0,5 + 0,03 + 0,003) + (1 - 0,003) - (0,3 - 0,03) =$
21. $9 - [(2,6 - 1,2) - 0,08] + 2,908 - (3,6 - 2,094) =$
22. Збиру бројева 5,6 и 2,018 да се дода њихова разлика, затим да се тако добијени збир умањи за онај број, који је за 0,017 мањи од 1.

23. Која је грешка мања кад се место 2,944 узме 2,94 или 2,95;
24. $(8,4 - 7,68) \cdot 9,6 - 2,24 \cdot (3 - 2,099) =$
25. $9,278 \cdot 14 + 21 \cdot 0,004 + 9 \cdot 0,004 - 0,020 \cdot 40 =$
26. Збир 4 једнака сабирка, од којих је сваки 2,718 да се помножи разликом бројева 1 и 0,84.

27. Шта се мора додати производу бројева 1,4 и 0,14, да се добије њихова разлика?
28. Шта се мора одузети од збира бројева 9,6 и 0,90, да остане њихов производ?
29. $45,25 : 25 ; 1,113 : 21 ; 3,33333 : 111 =$
30. $0,0808 : 16 ; 1,536 : 48 ; 883,92 : 116 =$
31. Који број морамо узети 19 пута као сабирак, да бисмо добили 5,966?
32. $3,30103 : 1\,000 ; 297,5 : 100\,000 ; 100,1 : 2\,000 =$
33. $1,051,1 : 23\,000 ; 7,8 : 60\,000 ; 1\,600 : 64\,000 =$
34. $50,24 : 1,6 ; 4,2588 : 4,2 ; 0,24384 : 0,96 ; 0,2 : 0,032 =$
35. У следећим примерима одреди количник најпре на 1 дес., а затим на 3 дес.: $3 : 42 ; 0,3 : 0,12 ; 0,003 : 0,0045 ; 0,0001 : 0,3 !$
39. У овим примерима да се одреди количник на 3 дес.: $23,746 : 0,0059 ; 0,185 : 34,06 ; 15,125 : 17,5 ; 0,78 : 361,059.$

Претварање обичних разломака у десетне

49. — Коначан и периодичан десетни разломак. — Из свега што смо досада проучили јасно се види да је много лакше рачунање са десетним разломцима, неголи са обичним. У практичном животу ради се готово само са десетним разломцима, са обичним врло ретко. Због тога је потребно да проучимо како ћемо претворити обичне разломке у десетне. Кад хоћемо један обичан разломак да претворимо у десетни, треба да извршимо назначено дељење. Раније смо рекли да разломачка цртга претставља знак дељења.

$$\frac{13}{16} : 16 = \frac{0,8125}{130}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \hline 80 \\ 0 \end{array}$$

Огуда имамо ово практично упутство: **Обичан разломак претвара се у десетни, кад се бројилац подели именоцем.**

50. — Периодични разломци. — При претварању једног обичног разломка у десетни дешава се да се дељење не заврши, већ се поједини децимали — цифре — или читаве групе децимала стално понављају. Групе децимала које се тако

понављају зову се **период**. А такви разломци зову се **периодични**.

Пример: $2\frac{3}{11} = 2,272727 \dots \dots \dots \frac{35}{60} = \frac{7}{12} = 0,58333 \dots$

Кад период долази после једног или два децимала, зове се **мешовито периодични разломак**.

Периодични разломци не изражавају тачну вредност. Што се већи број децимала узима, то се све више приближујемо правој вредности. Периоди се обележавају или стављају под тачака изнад цифара које се понављају или стављају под периода у заграду.

Пример: $0,3 ; 0,26 ; 0,27 ; 0,(3) ; 0,(72).$

За усмено вежбање

Претвори у десетне разломке,

$$1. \frac{1}{2}, \frac{2\frac{1}{4}}{4}, 10\frac{1}{5}, \frac{9}{20}, 2\frac{2}{25}, \frac{13}{50}, \frac{9}{200}.$$

$$2. \frac{21}{40}, \frac{250}{125}, \frac{1}{19}, \frac{15}{2\,000}, \frac{1}{5\,000}.$$

$$3. \frac{7}{2}, \frac{19}{4}, \frac{28}{5}, \frac{17}{25}, \frac{25}{8}, \frac{93}{20}, \frac{99}{50}.$$

$$4. \frac{9}{6}, \frac{21}{35}, \frac{1}{96}, \frac{84}{24}, \frac{102}{48}, \frac{111}{150}.$$

5. Претвори у године (дес. разл.): 3. мес., 72 дана (1 год. = 360 д.), 270 дана!

6. Претвори у месеце (1 мес. = 30 дана): 21 д., 201 д.,

$$\frac{1}{48} \text{ г.}, \frac{8}{20} \text{ г. !}$$

7. Изрази часовима: 2 h, 24 mn, 1 дан, 7 h, 45 mn!

Питања

1. Како се претвара обичан разломак у десетни?
2. Може ли сваки обичан разломак да се претвори у десетни?
3. Шта су периодични разломци?
4. Каквих има периодичних разломака?
5. Шта је период?
6. Шта је предпериод?
7. Како се заокругљују периодични разломци?

За писмено вежбање

Претвори у десетне разломке:

$$1. \frac{1}{16}, \frac{3}{32}, \frac{11}{64}, \frac{9}{80}, \frac{11}{128}, \frac{44}{160}, \frac{49}{256}, \frac{111}{320}.$$

$$2. \frac{1}{400}, \frac{9}{1200}, \frac{1}{1600}, \frac{4}{4000}, \frac{1}{2500}.$$

$$3. \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{7}{9}, \frac{10}{11}, \frac{5}{12}, \frac{12}{18}, \frac{1}{24} \text{ (на 4 дец.)}$$

$$4. \frac{3}{30}, \frac{19}{48}, \frac{5}{59}, \frac{29}{70}, \frac{7}{6}, \frac{29}{120}, \frac{7}{180}, \text{ (на 5 дец.)}$$

$$5. \frac{10}{12}, \frac{39}{81}, \frac{80}{110}, \frac{2000}{875} \text{ (на 3 дец.)}$$

Претварање десетних разломака у обичне

51. — Претвори усмено у обичне разломке и изврши потребна скраћивања: 9,6; 0,16; 1,25; 0,25; 0,48; 6,72; 42,075; 2,225; 0,08; 8,375; 0,0025; 7,625; 5,5555; 2,0405; 0,0005!

Претвори писмено у обичне разломке: 2,575; 0,15625; 2,1728; 0,01716; 0,000768; 0,2525; 0,00366; 5,04625; 0,001275!

Спајање обичних и десетних разломака

52. — Рекли смо већ да је угодније рачунање са десетним разломцима, неголи са обичним. Ученик треба да мотри да ли ће се у следећим примерима наћи на случају, где је згодније урадити обратну.

За усмено вежбање

$$\begin{aligned} 1. \frac{1}{1} + 0,9; \frac{3}{4} + 0,09; \frac{1}{8} + 0,875; \frac{1}{2} + 0,8; \frac{9}{10} + 0,34 = \\ 2. \frac{1}{2} - 0,1; 0,8 - \frac{3}{5}; \frac{7}{10} - 0,2; \frac{3}{4} - 0,7; \frac{4}{5} - 0,79 = \\ 3. 0,5 + \frac{1}{3}; 0,3 + \frac{4}{15}; 0,75 + \frac{1}{6}; 0,75 - \frac{2}{3}; 1,5 - \frac{5}{6} = \end{aligned}$$

За писмено вежбање

1. $7\frac{1}{5} + 0,8365 + 3\frac{7}{40} + 0,94 =$
2. $\frac{2}{3} + 3,7833 - 0,45 =$ Упутство: претвори $\frac{2}{3}$ у десетничан разломак са 4 дец.!

$$3. 0,7956. \frac{1}{4} = \text{Упутство: подели са } 4! 0,1728 \cdot \frac{11}{12} =$$

4. Који десимални број треба додати разлици између $0,4$ и $\frac{3}{8}$, да се добију $\frac{3}{4}$?

5. Који број треба поделити са 0,27 да количник буде десет пута мањи од $2\frac{2}{9}$?

6. Број 2,97 да се растави на 2 чиниоца, од којих је један $4\frac{2}{7}$.

7. Број 1,8 да се растави на два дела, тако да већи део буде $1\frac{2}{7}$ пута већи од 0,84. Колики је мањи део?

ГЛАВА VII

ПРОПОРЦИОНАЛНЕ ВЕЛИЧИНЕ

Просто правило тројно

53. — Пример 1. Кад 5 килограма јабука стају 40 динара-колико треба да се плати за 3 килограма истих јабука?

Решење: 5 килограма стају 40 динара,

1 килограм стаје 5 пута мање тј. $\frac{40}{5}$.

Препоставимо да сви радници раде посao истом бројном.

Решење: 4 радника израде 56 метара, 1 радник израдиће, за исто време 4 пута

мање тј. $\frac{56}{4}$,

3 радника израдиће, за исто време, 3 пута више неголи један радник, или $\frac{56}{4} \cdot 3 = 42$.

Три радника израдиће 42 метра.

У оба ова примера имамо по две врсте величине. У првом број килограма јабука и динара, а у другом број радника и број метара штофа. Ове величине зависе једна од друге. Ето на пр. кад се број килограма мења, рецимо расте, бива већи и одговарајући број динара. Исто тако, ако се повећа број радника и количина израђеног штофа ће се растти. Ако се број радника смањи, количина штофа ће се такође смањити.

У првом примеру дакле број динара зависи је од броја килограма, у другом броју метара зависи од броја радника. Ова зависност је и нарочите врсте. Тако кад број килограма постане 2 пута већи, број динара ће бити такође 2 пута већи. Кад се за 5 килограма плати 40 динара, за 10 килограма платиће се 80 динара. Кад број килограма постане 3 пута већи, број динара ће такође бити 3 пута већи, итд.

Исто тако кад број радника постане 2 пута, 3 пута, 4 пута већи и број метара штофа за исто време постане 2 пута, 3 пута, 4 пута већи. Или ако се број радника 2 пута смањи и број метара штофа смањиће се 2 пута.

Ово истичемо због тога, што величине могу бити зависне и на други начин. На пр. површине квадрата зависна је од дужине стране. Само кад страна постане 2 пута већа, површина не постане 2 пута, него 4 пута већа. Кад страна порасте 3 пута, површина квадрата не порасте 3 пута већ 9 пута.

Зависне величине онакве као што су рецимо у првом примеру килограми и динари зову се **пропорционалне величине, и то управно пропорционалне.**

Кажемо уопште да су две величине управно пропорционалне, ако је њихова међусобна зависност таква да, кад једна, мењајући се, постане 2, 3, 4, пута већа и друга такође постане 2, 3, 4 ... пута већа.

Пример 1. Кад 6 јаја стају 9 динара, пошто су 18 ко-
мада?

Решење: Троштуком броју јаја одговара и троструки број динара: $9 \cdot 3 = 27$ динара.

Пример 2. 1 kg неке робе стаје 32 динара. Колико ће се добити за 4 динара?

Да се сврши посао за 1 час требало би 12 пута већи број радника, или 15 · 12.

Да би се посао свршио за 9 часова требаће 9 пута мање радника, него што је потребно за 1 час или $\frac{15 \cdot 12}{9} = 20$.

Биће потребно 20 радника.

У овом примеру број часова зависан је од броја радника. Само кад број радника постане 2, 3 ... пута већи, број часова постане 2, 3 ... пута мањи. И ово су пропорционалне величине, само **обрнуто пропорционалне.**

Кажемо уопште да су две променљиве величине обрнуто пропорционалне, ако су међусобно тако везане, да кад једна постане 2, 3, 4 ... пута већа, друга постане 2, 3, 4 ... пута мања. Напр.

Број радника и време.

Напомена 1. — У свима задацима правила тројног мониторинга разликовати два дела, управо два става: **погодбени став и упитни став.** Препоручљиво је при писменом решавању задатака да се ова два става напишу један испод другог, тако да величине исте врсте дођу једна испод друге. Тражено ставље једне величине, као непознато, обележи се са x.

Пример: Кад 20 kg брашна стају 80 дин. пошто су 13 kg?

Решење: погодбени став 20 kg 80 дин.
упитни став 13 kg x дин.

$$x = \frac{80 \cdot 13}{20} = 52$$

Напомена 2. — Има задатака ове врсте, код којих размишљање, закључивање, не мора да иде преко јединице, него се од множине из погодбеног става одмах пређе на множину упитног става.

Пример 1. Кад 6 јаја стају 9 динара, пошто су 18 ко-
мада?

Решење: Троштуком броју јаја одговара и троструки број динара: $9 \cdot 3 = 27$ динара.

Пример 2. Узимимо да сви радници раде подједнако брзо.

Решење: Да се сврши посао за 12 часова потребно је 15 радника.

Решење: За осмину куповне цене добија се осмине робе. За 4 динара добија се $\frac{1}{8}$ килограма или 125 грама.

Напомена 3. — Не треба никако губити из вида да се у задацима са пропорционалним величинама може покаткац до бесмислених резултата, до правих апсурда. Морамо водити рачуна да **практично** узев **пропорционалност** има смисла дотле док **посматране величине не пређе извесне границе**. Кад оне постану сувише велике, или сувише мале, резултат теориског рачуна је увек аритметички тачан, али за праксу он је нетачан, пошто тада пропорционалност не постоји. Ми тада немамо право да закључујемо као да она постоји.

Пример 1. 2 радника могу да сазидају један зид за 8 часова. За које ће време сазидати тај зид 7 200 радника? Лако је израчунати да је резултат 8 секунада. Овај резултат практично је бесmisлен. Због сувише великог броја радника би у раду сметали један другом. Тако би сваки од њих радио лошије неголи каđ је сам. Ту, dakle, нема пропорционалности.

Пример 2. У једној покрајини вредност земљишта је 500 динара хектар. За коју суму се може купити 1 квадратни метар? Резултат је 5 паре. Овај резултат је тачан, али је јасно да у пракси нико не може постати сопственик само 1 квадратног метра земљишта.

Напомена 4. — Зависне величине у математици зову се **функције**.

За усмено вежбање

1. 4 м стају 48 дин, пошто су 5 м; 61 стају 30 дин, пошто су 15 !?

2. $\frac{1}{20}$ м стаје 20 дин. пошто су $4\frac{1}{2}$ м; $\frac{1}{8}$ м стаје 30 паре, пошто су $2\frac{1}{2}$ м ?

3. Један извор даје за 6 мин 13 ! воде, колико ће дати за 1 час?

4. Један извор даје за 2 ч 3 600 ! воде, колико ће дати за 45 мин ?

5. За које ће време свршити посао 10 радника, кад 5 радника сврше тај посао за $2^{1/2}$ дана ?

6. Колико су тешки $1\frac{1}{4}$ hl јечма кад 11 тежи 800 g, колико 30 l пшенице, кад 1 hl тежи 90 kg; колико $\frac{1}{10}$ m³ гвожђа, кад су 100 cm³ 750 g ?

7. Један тркачки конь пређе 60 метара за 5 s. Колико пређе за пола минута, за $2\frac{1}{2}$ мин ?

8. **Шала:** Кад два друга стигну од Београда до Авале за 4 сата, за које ће време стићи 4 друга?

9. Са 491 вина можемо напунити 70 једнаких боца. Колико је боца потребно за 1, 21, 42, 63, 77, 91 вина ?

10. 33 комада robe стају 75 динара. Пошто су 11, 55, 88- 121, 165 комада ?

11. 102 пера стају 36 динара. Пошто су 17, 51, 85, 119, 187 комада ?

12. 36 берберских сапуна стају 60 динара. Пошто су 9, 27, 45- 63, 81, 180 комада ?

13. 184 грама глицерина заузимају 152 cm³ простора. Колики простор заузимају 23, 69, 115, 138, 230 грама глицерина ?

14. Један путник пређе за 8 дана 232 километра. За колико ће дана прећи 29, 87, 145, 204, 319 километара ?

15. Извесна количина хране за 35 лица трајаће 36 дана. Колико би трајала иста количина хране за 70, 140, 105, 315, 45 лица ?

16. Један аутомобил, кад вози брзином од 90 km на час, пређе извесну стазу за један сат. За које ће време прећи исти пут кад вози брзином од 45, 30, 15, 36, 72, 108, 135 km на сат ? По потреби часове треба претворити у minute.

Питња

1. Кажи неколико зависних величина !

2. Које су величине управно пропорционалне? Пример!

3. Које су величине обрнуто пропорционалне? Пример!

4. Може ли једна величина бити зависна од више других величин ?

5. Које су количине управно сразмерне?

6. Које су количине обрнуто сразмерне?

За писмено вежбање

Ученик треба да се вежба у проценавању резултата, пре него што приступи рачунању.

1. Кад се за исхрану једног ћајког интерната потроши за 19 дана 3 8857 килограма хлеба, колико ће се потрошити за 30 дана?

2. 45m неке материје продати су за 751,50 д. Попшто су 65m исте материје?

3. Кад један пешак прелази 8m за 5s, колико му времена треба да пређе 6 km и 4 hm?

4. Једно дрво високо $14\frac{2}{5}$ m басца сенку дугачку 9m. Колика је у исто време сенка другог дрвета, које је високо 10m?

5. **Мерње висина помоћу сенке.** Једна усправна мотка висока 1,35m басца сенку дугачку 2,80 m. Колика је висина једне куле, која у исто време даје сенку дужине 42m?

6. Кад један степен Целзијусов износи 0° , 8 Ремирових, колико степени R су 22°C и колико степени C су 22°R ?

7. Један минерал садржи метала 21% од своје тежине. Колико треба прерадити минerala, да се добије 82,95 kg метала?

Напомена. $21\% = \frac{21}{100}$ или од 100 kg минерала добија се 21 kg метала?

8. Ако се нека сумма новаца подели на 18 лица, свако добије по 150 динара. По колико би дошло сваком, ако би се та иста сума поделила на 15 лица?

9. Кад један пароброд прелази дневно 168 морских миља, може да стigne на обалу за $7\frac{1}{2}$ дана. Колико морских миља мора прелазити на дан, да би за $\frac{1}{2}$ дана раније стигао?

10. Кад један ученик троши просечно дневно 1 din 20 para, његов месечни цепарац траје 25 дана. За колико би дана раније потрошити свој новац, кад би дневно трошио 30 para више?

11. Четрнаест радника могу да ископају један јарак за 20 дана. Попшто су радили 6 дана, буде отпуштено 4 радника. За које време је свршен посао?

12. Брзи воз, који прелази на сат 64 km., треба да стigne у једну станицу за 3h 35min. После вожње од $1\frac{1}{4}$ h морао је непредвиђено чекати 13min. По колико km треба после тога да прелази на сат, да би ипак стигао на време?

13. Један надничар може да покоси $\frac{2}{3}$ ливаде за 5h 20min. Колико му је времена потребно за $\frac{5}{8}$ ливаде?

14. У један празан базен, који хвата 94hl, тече вода из 3. цеви. Из прве истече 9hl за 2h; из друге 10 hl, за $1\frac{1}{2}$ h; из треће 3hl за 50min. За које ће се време напунити базен, кад се отворе све три цеви једновремено?

15. З радника треба да подигну зид од $19\frac{5}{8}$ m³. Први може за два дана да сврши $2\frac{1}{2}$ m³, други за $4\frac{1}{2}$ дана 6 m^3 , а трећи за $5\frac{1}{4}$ и $9\frac{1}{3}$ m³. За које ће време бити готови са зидом, кад сва тројица ради заједно?

16. 16 радника могу да израде један напис за 15 дана. После $4\frac{1}{2}$ дана рада разболе се 2 радника. За колико, због тога, закасни довршење посла?

17. Од два трансмисиона точка један начини $7\frac{1}{2}$ обрта док други изврши 6. Колики је обим овог другог, кад је обим првог $1\frac{1}{2}$ m²?

18. Од две цеви једна даје на мијаут $4\frac{1}{5}$ l, а друга за четвртину овог износа више. За које би време прва напунила базен, кад је другој за то потребно $1\frac{1}{3}$ h?

19. Четиридесет и четири радника, који раде уједначено, израде један напис за 15 дана. Попшто су радили 6 дана, буде отпуштено 4 радника. За које време је свршен посао?

Ми ћемо се бавити само одређивањем процентног износа.

56. — Израчунавање процентног износа. — Пример:
Неко је од своје имовине која износи 8 400 дин. потрошио путујући 15% . Колики је путни трошак?

1 решење: $100\% \text{ основне вредности } 8 400$

$15\% \text{ основне вредности } x$

Закључујуће је исто како код простог правила тројног.

$$x = \frac{8 400 \cdot 15}{100} = 1 260$$

Путни трошак је 1 260 динара.

$$\begin{aligned} 2 \text{ решење} & \quad \text{Од } 100 \text{ динара потрошено је } 15 \\ & \quad \text{Од } 8 400 \text{ динара потрошено је } x \end{aligned}$$

$$x = \frac{15 \cdot 8 400}{100}.$$

$$3. \text{ решење: } 15\% \text{ од } 8 400 \text{ је } \frac{15}{100} \text{ од } 8 400 \text{ тј.}$$

$$\frac{15}{100} \cdot 8 400 = 1 260.$$

За усмено вежбање

1. 1% од 800 дин; од 7,50; од 90 парара; од 1км; од 60m; 6,4; од 135mm; 2% од 95 дин. = ?

2. $4\frac{1}{2}\%$ од 700 дин; $6\frac{1}{4}\%$ од 40 дин; $1\frac{1}{5}\%$ од 38, m 5?

3. $\frac{1}{5}\%$ од 20 000; 3% од 4kg; $\frac{1}{4}\%$ од 13km; 5% од 37km?

4. 7% од 86m; 90% од 2kg; $\frac{1}{4}\%$ од 3kg; $\frac{1}{8}\%$ од 1 ha?

5. $2\frac{1}{2}\%$ од 12 000 дин; $\frac{1}{4}\%$ од 12 000; $\frac{1}{5}\%$ од 12 000 дин?

6. Од броја 360 израчунај 3% , 2% , $\frac{1}{4}\%$, $\frac{1}{2}\%$, $\frac{3}{5}\%$, $\frac{1}{7}\%$, $\frac{7}{13}\%$ од основне вредности!

7. Изрази у процентима $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{7}{13}$ од основне вредности!

8. У једном возу налазе се 300 путника. Од тога 6% у првој класи, 24% у другој, а остатак у трећој класи. По колико путника има у свакој класи?

9. Који је број за 40% већи од 500; за 8% мањи од 150?

Процентни рачун

54. — 1. У једној шуми обори ветар 16 дрвета. Може ли се утврдити да ли је непогода била велика или мала?
2. У једној школи од 500 ученика понављају разред 50 ученика. У другој од 1 100 ученика понављају разред 120. У трећој од 800 ученика понављају 72. У којој школи је најгори успех?

Да бисмо ово утврдили, морамо да израчунамо колико је поновца на једнак број ученика, тј. могли бисмо узети колико је поновца на 500 ученика, на 50, на 10 итд. Данас је свуда усвојено да се за такво упоређење узима број 100.
Од стога како се латински *per centum*. Одатле је по текла реч *процент*, а пише се $\%$. Покаткад се узима за поређење и број 1 000. Од хиљаде какве се латински *pro milie*. Отуда назив *промил* и пише се ‰ .

Израчунај 1% од 600 дин. 500m, 950a, 900m^3 , 34l!

$$\text{Из ових примера следи: } 1\% = \frac{1}{100}.$$

Колико стотих су према томе 2% , 3% , 5% , 10% , 20% , 50% , 100% ?

$$100\% = \frac{100}{100} = \text{цело (основна вредност).}$$

Проценат треба увек схватити као стоти део.

55. — При сваком процентном рачуну имамо посла са три величине:

1. **Основна вредност**, то је број од кога се проценат израчунава.

2. **Процент или процентна стопа**, то је број стотих које треба узети.

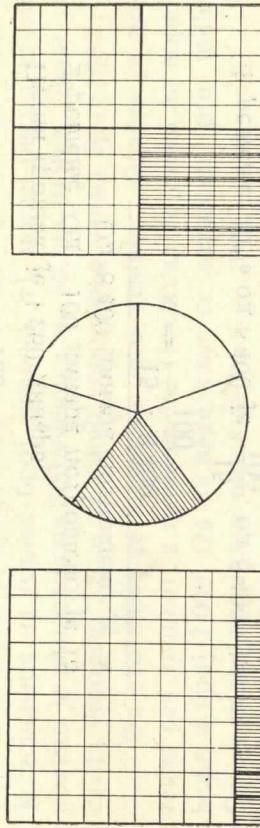
3. **Процентни износ**, који се израчунава из основне вредности и датог процента.

Пример: 4% од 1 800 динара су 72 динара.
1 800 динара су основна вредност, 4 процент, а 72 динара процентни износ.

Ако су познате две од ових величина, трећа се може рачуном одредити.
Ако је број за 40% већи од 500; за 8% мањи од 150?

Питања и вежбе за омладину

1. Које дјелове означују процент и промил?
2. У човецијој крви има шећере 1% , кухинске соли $8\frac{1}{2}\%$. Шта ово значи?
3. Колико је то 100% ?
4. Шта је основна вредност, процентна стопа и процентни износ?
5. Које проценте показују следеће слике?



Сл. 25

6. Који део од основне вредности изаосе процентне стопе:
 $10\%, 20\%, 50\%, 2\frac{1}{2}\%, 40\%, 60\%, 80\%, 120\%, 50\%, 25\%, 12\frac{1}{2}\%, 6\frac{1}{4}\%, 33\frac{1}{3}\%, 16\frac{2}{3}\%, 8\frac{1}{3}\%, 66\frac{2}{3}\%$? Све одговоре потврдiti slikom као у пitanju 5?
7. Колико пута је већи један број од своја 2% , од својих 50% , од $12\frac{1}{2}\%$; од 20% ? Све одговоре потврдiti slikama.
8. За колико је већи један број од своја 20% , од 50% , од $12\frac{1}{2}\%$, од 20% ?

9. Образложи $3\frac{1}{2}\% = 3\% + \frac{1}{2}\% ; \frac{3}{4}0\% = 10\% - \frac{1}{4}0\%$!

10. Јесу ли основна вредност, процент и процентни износ пропорционалне величине и како?

За писмено вежбање

- Ученик да се вежба у процењивању резултата.
1. Надница једног радника, која је досада износила 28 динара повећана је за 5% . Колика ће бити после тога?

2. Једна улица на дужини од 4,8 km пење се за $2\frac{1}{4}\%$.

За колико је њен завршетак виши од почетне тачке?

3. Једно речно корито има под $0,6\%$ на дужини 10,72 km. Колико метара износи водени пад на овој дужини?

4. Један трговац спусти цену једног роби 40% . Поншто је сад 1 комад, кад је раније маркиран 235 динара?

5. Једна жичана жељезница дугачка је 3,380 km, а њено средње пењање износи $46,8\%$. До које висине се пење та жељезница?

6. Ваздух је смеша 21% кисеоника и 79% азота. Колико има од оба гаса у једној ученици, чија је дужина 9,6m, ширина 7,5 a висина 4,8m.

7. Кад кромпир садржи 16% штирка, колико штирка има у 10 товара кромпира?

8. Кад у пиву има $4\frac{1}{2}\%$ алкохола, колико ст³ алкохола унесе у себе неко, који потпије 4 l пива?

9. Чим је на трамвајима смањена тарифа за 50% , број путника повећао се за 100% . Има ли ту општина каквог губитка? Бројни пример!

10. Разлика између $75,5\%$ и $\frac{2}{3}$ једног пута износи 10,6 km. Колика је дужина целог пута?

11. Израчунај агрегат $\frac{1}{2} + \frac{13}{4} - 1\frac{1}{8} - \frac{1}{25} - \frac{1}{80}$, или најпре сваки члан изрази у процентима!

1. Производ два броја је за $1\frac{1}{2}$ мањи од 50. Један чи-нилац је $7\frac{1}{4}$. Одреди други!

2. Разлику $7 - 1\frac{3}{10}$ помножи збиром $\frac{5}{9} + \frac{5}{19}$, а производ смањи за половину од $5\frac{1}{2}! \left(1\frac{11}{12} \right)$.

3. Збир два броја је $17\frac{7}{11}$; један од њих једнак је разлици између $7\frac{2}{3}$ и $4\frac{5}{22}$; који је други број?

Провери следеће резултате!

$$4. \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

$$5. \frac{0,125 \cdot 1,6 + 0,8}{0,25 \cdot 0,04} = 10. \quad 6. \frac{2,5 \cdot 1,007}{0,002^2} = 6293,75.$$

$$7. \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{4}{4} - \frac{2}{5}} : 1\frac{9}{14} = 2. \quad 8. \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} : \frac{1}{3}} = \frac{5}{9}.$$

$$9. \frac{(21,17 + 0,009 + 14,221) \cdot (1,5 - 0,93)}{1 : 0,2 - 4,753} = 84.$$

$$10. \frac{1}{1 : (0,8 - 0,75)} + \frac{4}{0,9 \cdot 3,2 : 0,018} + 3 : 0,75 = 0,1$$

$$11. (10,28 - 15,304 + 7,216) : 1,37 + (3 - 2,25) :$$

$$: 0,1875 = 5,6.$$

$$12. Подели производ бројева 2,45 и 0,19 двоструком разликом између 4,2 и 2,87! (0,175.)$$

$$13. Да се половина збира бројева 5,9 и 4,74 подели двоструком разликом између 4,2 и 2,87. (2).$$

$$14. Збир бројева 2\frac{2}{11} \text{ и } 1\frac{4}{41} \text{ да се подели њиховом разликом, а добијени количник да се помножи бројем } 15\frac{2}{5}.$$

$$\left(51\frac{4}{5}\right)$$

$$15. Додај броју 7\frac{1}{2} трећи део од 13\frac{1}{2}, добијеном збиру додиши једну нулу и подели тако добијени број разликом између 7\frac{1}{5} \text{ и } 3\frac{9}{20}! (32.)$$

$$16. Дата су 4 разломка \frac{3}{8}, \frac{4}{5}, \frac{5}{12}, \frac{2}{15}. \text{ Одузми од збира прва два разлику друга два и подели резултат производом сва четири разломка! } \left(53\frac{1}{2}\right)$$

$$17. \frac{1}{12} \text{ једног броја је } 3\frac{3}{5}. \text{ Израчунат } \frac{11}{25} \text{ од тог броја, затим } \left(19\frac{1}{125}\right)$$

18. Чиме треба поделити количник бројева $5\frac{2}{5}$ и $4\frac{7}{20}$ да се добије $7\frac{7}{40}$?

19. За колико је већи четвороструки збир бројева $2\frac{2}{2}$ и $2\frac{7}{20}$ од половине разлике између $11\frac{1}{5}$ и $7\frac{5}{8}$?

20. За колико је разлика бројева $12\frac{1}{4}$ и $7\frac{19}{60}$ мања од броја који се добија кад се збир $1\frac{5}{6} + 2\frac{1}{8}$ помножи са $3\frac{1}{2}$?

21. Узми половину од $\frac{3}{5}$ и петину од $2\frac{1}{8}$, сабери ове количнике и збир подели производом коме је један чинилац $\frac{3}{4}$ а други разлика између 3 и $1\frac{1}{8}$!

22. Један чиновник има годишњи приход 28 000 динара. $\frac{11}{15}$ од тога је његова плата, $\frac{7}{60}$ износи његов приход од књижевног рада, остатак је интерес од уложеног новца. Колики му је уложен новац, кад интерес износи $\frac{1}{25}$ од уложене суме? (105 000.)

23. Три тркача трче по једној кружној стази. Први је обиђе за 72 секунде, други за 80, а трећи за 88 секунада. Они заједно крену из исте тачке. После ког времена ће они поново бити сви заједно на полазној тачки?

24. Леонардо из Пизе бројио је измену 11 и 97 просте бројеве и нашао да их има 21. Да ли је тачно?

25. Платонов број. Број 5040 делив је са првих 10 бројева природног бројног низа. Греци Филозоф Платон (348 г. пре Хр. р.) тврдио је да број 5040 има укупно 59 чинилаца.

Колико чинилаца ти налазиш у том броју?

26. Нађи две дужине које се разликују за 42m, да једна износи $\frac{2}{3}$ од друге!

27. Кад се од једног броја одузму $\frac{3}{19}$ тог броја, затим $\frac{2}{5}$, добија се 96. Који је тај број? (168)

28. Један ученик рече: кад од својих година одузмем половину, заатим седмину, остаје још 5 година. Колико је година том ученику? (14.)

29. Један туриста пошто је прешао првог дана $\frac{1}{5}$, другог $\frac{1}{4}$, трећег $\frac{1}{3}$ пута, имао је да пређе четвртог дана још 26 km. Колико је пута прешао за 4 дана? (120.)

30. У једној четвороразредној гимназији, у првом разреду налазе се $\frac{3}{7}$ целиокупног броја ученика, у другом $\frac{1}{4}$, у трећем $\frac{1}{6}$, у четвртом осталих 13 ученика. Колико има ученика у осталим одељењима?

Проблеми кретања

31. Два пријатеља који су један од другог удаљени $19\frac{9}{10}$ km крену једновремено у 6h ујутру, један другом у срет. Један пређе за сат $4\frac{1}{2}$ km, други 5km. Колико су удаљени у 7h? Кад ће се срести? Колики је пут тада сваки прешао?

32. А и В, који су удаљени једно од другога 34 km, утврде сусрет. Обојица крену у 5h 40min. А прелази $1\frac{3}{4}$ km на сат, В 5km 600m. Кад ће се срести? Колико km је сваки прешао?

33. Из два места А и В која су удаљена $45\frac{3}{4}$ km крену једновремено два лица једно другом у сусрет. Прво лице пређе за 3 сата 17km, друго за минут 75m. Кад и на ком отстојању од В ће се срести?

34. Два пријатеља који су удаљени $107\frac{1}{5}$ km путују један другом у сусрет. Један прелази за минут просечно $87\frac{1}{2}$ m, други за исто време начини 100 корака од по 80 cm. За колико km се они приближе за 1 сат? После ког времена ће се срести?

35. Један пешак и једне двоколице крену у 7h ујутру ка истом mestу. Пешак прелази за сат $4\frac{3}{4}$ km, а двоколице

$7\frac{4}{5}$ km. Кад двоколице стигну у $\frac{1}{2}$ 10h ујутру, колико је далеко пешак од диста? Кад он стиже?

36. Један пешак крене у $\frac{1}{2}$ 7h ујутру и прелази за сат 5km. У 9h крене за њим из истог места један бициклист, који прелази за сат 15km. Кад ће стићи пешака?

37. Један лопов украде велосипед и почне да бежи брзином од $8\frac{2}{4}$ m (у секунду). За њим појури један жандарм

$1\frac{4}{5}$ mp касније на точку брзином $9\frac{9}{10}$. После ког времена ће га стићи?

38. Неко је отпутовао у 5h 10min и прелази на сат $4\frac{3}{4}$ km. У 8h 32min крене за њим из истог места аутомобил, који за сат прелази 38km. У колико сати ће га стићи?

39. За једним гласником који се кренуо у 5h 36min брзином $4\frac{3}{4}$ km., попуштају један аутомобил у 10h, који га у 12 стигне. Колико је km аутомобил прелазио на сат?

40. Два пријатеља удаљена 70km путују један другом у сусрет. А пређе пешице за сат $5\frac{3}{10}$ km, В на точку за четврт сата просечно $3\frac{7}{10}$ km. Колико су они удаљени у 10h ујутру кад се крену у 6h 40min ујутру? Колики је пут тада прешао А?

Проблеми цеви и базен

43. Један базен може да се пуни кроз 3 цеви. Прва цев напунила би га за 3 часа, друга за 5, а трећа за 7 часова. Који део базена може свака цев напунити за 1 сат? Колико напуње све три цеви за један сат? За које не се време напунити базен, кад све три цеви теку једновремено?

44. Један извор напунио би базен за 8h, други за 6h, а трећи за 4h. За које ће време сва три извора напунити базен, ако се пусте да теку једновремено?

45. Једна када може да се напуни помоћу две славине А и В, за 10 односно 12 минута, а може да се испразни помоћу троће за 15 минута. Ако отворимо све славине једновремено, када ће се када напунити?

46. Један базен има две цеви за пуњење, а једну за отицање. Кроз једну цев може да се напуни за 5h, кроз другу за 4h, а кроз троћу може да се испразни за 3h. Када се све три цеви отворе једновремено, за које ће се време базен напунити?

47. А може да сврши један посао за 15 дана, В за 12 дана. Који део посла може свако од њих свршити за 1 дан? Колико ураде обојица за 1 дан? За које ће време свршити посао кад заједно раде?

48. А може покосити једну ливаду за 8h, В би то исто урадио за $7\frac{1}{2}$ h, а С за $6\frac{2}{3}$. Ако сад сва тројица једновремено косе, за које ће време свршити посао?

Стари проблеми

49. Најстарији познати математички рукопис написао је Египћанин Ахмес. Тај се рукопис чува у Британском музеју у Лондону, под именом Рарутус Rhind. Мисли се да је написан на 18 столећа пре Хр. р. У том рукопису се налазе „овакви резултати:

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}; \quad \frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}.$$

Провери да ли су Египћани добро знали дарачују са разломцима!

50. У том древном рукопису налазе се и ови задаци:

$$\begin{aligned} \frac{1}{42} + \frac{1}{88} + \frac{1}{729} + \frac{1}{301} &=; \quad \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610} =; \quad \frac{1}{40} + \frac{1}{325} \\ + \frac{1}{536} &=; \quad \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365} =; \quad \frac{1}{60} + \frac{1}{327} + \frac{1}{131} + \frac{1}{790} = \end{aligned}$$

51. На 3 000 године после Хр. р., у византијској рачунарици од Ахмиле, нађени су слични задаци са Ахмесовим:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{4}{28}; \quad \frac{239}{6460} = \frac{1}{63} + \frac{1}{85} + \frac{1}{95}.$$

52. **Арабљански проблем.** Један стари Арабљанин имао је 17 камила, а 3 сина. Пред смрт одреди да најмлађи син добије половину од свих камила, средњи $\frac{1}{3}$, а најстарији $\frac{1}{9}$. Синови се никако нису могли сложити при деоби, јер је део свакога од њих био претстављен разломком $\frac{17}{2}$, $\frac{17}{3}$, $\frac{17}{9}$.

Кадија, коме су се обратили да пресуди, поклони им једнуну камилу и изврши деобу. Поншто је сад било 18 камила, први добије $\frac{1}{2}$ тј. 9 камила, други 6, а трећи 2, и кадија узме своју камилу натраг. Синови оду задовољни кући, јер је сваки добио више него што му је отац оставио. Објасни у чему је заблуда!

53. **Други арабљански проблем.** Два Арабљанина, један носећи 5 хлебова, а други 3 хлеба, сретну у пустинији једног путника богатог, а гладног. Они ручају заједно и поједу све хлебове. Путник им за ручак плати 8 златника. Како ће они поделити овај новац?

Први затражи за себе 5 златника. Други је захтевао деобу на једнаке делове, тј. по 4 златника, а он би један хлеб накнадио првоме. Поншто се нису сложили оду кадији. Он не пресуди ни по жељи једног нити другога, већ како налаже рачун.

СТАНДАРДНИ ПОСЛОВИЦИ ИЗМЕДУ МАТЕМАТИКА И СТАРАДА
И ОСНОВНОГ УЧЕЊА НА ДРЖАДО ТРЕБАД ПРИДАТЫХ ЗА
БРАНДИВОР В. Ј. НАУКАЦИЈАЛЧЕВИЋИО КОУЧИЛОВИЋИ
СУДЗИЋИ, ПОСЛОВИЦИ БЛГОВИХ МАТОУ ЧУДОВИДИЈА МАЧИЋИ

САДРЖАЈ:

	Страна
Читанье и писанье бројева до милијарде — — — — —	1
Основни разломци — половине — — — — —	6
Четвртине — — — — —	7
Осмине — — — — —	8
Изведени разломци — — — — —	11
Бројилац и именилац — — — — —	13
Подела обичних разломака — неправи разломци — — —	18
Мешовити бројеви и претварање мешовитог броја у не- прав разломак — — — — —	19
Сабирање и одузимање разломака једнаких именилаца — — —	22
Прости и сложени бројеви — — — — —	23
Дељивост бројева — — — — —	25
Растављање бројева на просте чиниоце — — — — —	30
Заједнички чинитељ — — — — —	32
Релативно прости бројеви — — — — —	32
Заједнички садржај — — — — —	32
Проширивање и скраћивање разломака — — — — —	37
Упоређивање разломака по величини — — — — —	40
Сабирање разломака са истим имениоцем — — — — —	44
Одузимање разломака — — — — —	45
Множење разломка целим бројем — — — — —	53
Множење мешовитог броја — — — — —	54
Дељење разломка целим бројем — — — — —	55
Множење целог броја разломком — — — — —	58
Множење разломка разломком — — — — —	59
Производ од више чинилаца — — — — —	61
Дељење разломком — — — — —	64
Сложени бројеви — — — — —	67
Мешовити задаци — — — — —	68
Десетни разломци — — — — —	71
Приближне вредности — — — — —	77
ПРЕТВАРДАЊЕ ОБИЧНИХ РАЗЛОМАКА У ДЕСЕТНЕ Коначни и периодични разломци — — — — —	80
ПРЕТВАРДАЊЕ ДЕСЕТНИХ У ОБИЧНЕ РАЗЛОМКЕ — — — — —	80
Просто правило тројно — — — — —	82
Процентни рачун — — — — —	83
Мешовити задаци за понављање — — — — —	90
	93