MF 1

Др. НИКОЛА ЧЕПИНАЦ
ПРОФЕСОР

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА УЧИТЕЉСКЕ ШКОЛЕ

СТЕРЕОМЕТРИЈА

ЗНАЊЕ
ПРЕДУЗЕЋЕ ЗА УЏБЕНИКЕ
НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД 1949

Др. НИКОЛА ЧЕПИНАЦ
ПРОФЕСОР

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА УЧИТЕЉСКЕ ШКОЛЕ

СТЕРЕОМЕТРИЈА

ЗНАЊЕ
ПРЕДУЗЕЋЕ ЗА УЏБЕНИКЕ
НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД 1949

Овај уџбеник је одобрен одлуком Министарства просвете НР Србије НС Бр. 61501 од 7/X 1948 г.

Штампа Југословенског штампарског предузећа у Београду

ГЛАВА ПРВА

УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ТАЧАКА, ПРАВИХ И РАВНИ У ПРОСТОРУ

I СТЕРЕОМЕТРИЈА КАО ГРАНА ГЕОМЕТРИЈЕ

§ 1. *Стереометрија* је део геометрије који проучава особине геометријских тела и оних просторних фигура чије тачке не леже све у истој равни. При том проучавању претпоставља се да су познате теореме планиметрије, која проучава особине оних геометријских фигура чије тачке леже све само у једној равни.

II ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ И ОДРЕЂЕНОСТ РАВНИ

§ 2. Тачке, праве и равни зову се *елементи геометрије простора* или *елементи простора.*

Као што су нам за постављање основа планиметрије и њену изградњу биле потребне извесне аксиоме, тј. ставови које не доказујемо, тако ће нам, поред *аксиома равни*, бити потребне још следеће аксиоме за постављање основа и изградњу стереометрије:

1) *Три тачке A, B, C које не леже на истој правој одређују увек само једну раван α.*

2) *Ако две тачке A, B неке праве a леже у некој равни α, свака тачка праве a лежи у равни α.*

3) *Ако две равни α, β имају једну заједничку тачку A, оне имају бар још једну заједничку тачку B.*

4) *Постоје тачке које не леже у истој равни.*

Те аксиоме зовемо *аксиоме простора.*

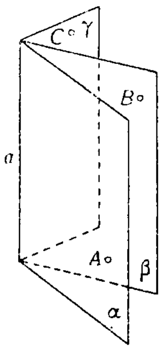
§ 3. *Последице.* Из тих аксиома непосредно следује:

1) Права a и тачка A ван ње одређују увек само једну раван α.

Како, наиме, на правој a можемо узети ма које две тачке B, C, оне са тачком A, која није на правој a, чине три тачке A, B, C, које, према аксиоми 1, § 2, одређују увек само једну раван α.

Отуда произилази да кроз једну дату праву a пролази бескрајно много равни.

Ако узмемо једну праву a (сл. 1) и тачку A ван ње, према последици 1 њима је одређена раван α. Ако, сад, задржимо праву a и уместо тачке A, која лежи у равни α, узмемо неку другу тачку B ван равни α, правом a и тачком B биће одређена нека друга раван β. Очигледно је да се ове две равни α и β неће поклапати, јер тачка B не лежи у равни α. Слично ће бити ако задржимо праву a и уместо тачака A и B узмемо неку трећу тачку C која не лежи ни у равни α ни у равни β: права a и тачка C одредиће неку трећу раван γ, итд. Видимо, дакле, да на тај начин добијамо бескрајно много равни, које све пролазе кроз једну праву. Оне заједно чине свежањ равни. Свима њима заједничка права a зове се оса свежња. Ако сваку раван схватимо као један нарочити положај исте равни, можемо рећи да се раван може обртати око сваке праве која лежи у тој равни.



Сл. 1

2) Две праве a, b које се секу у некој тачки C одређују увек само једну раван α.

Ако поред тачке C пресека узмемо на свакој правој још по једну тачку, и то, рецимо, на правој a тачку A, на правој b тачку B, имаћемо три тачке A, B, C, које не леже на истој правој и које, према аксиоми 1, § 2, одређују увек само једну раван α.

3) Две паралелне праве a, b одређују увек само једну раван α.

Према дефиницији, паралелне праве леже у истој равни. Стога можемо на ма којој од њих узети произвољну тачку A, а на другој две тачке B, C. Три тачке A, B, C које не леже на једној правој, према аксиоми 1, § 2, одређују само једну раван. Та раван је нужно идентична са равни у којој су паралелне праве a, b.

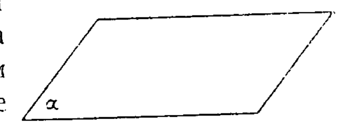
4) Две различите равни које имају једну заједничку тачку имају једну заједничку праву.

Нека су дате две различите равни α, β. Претпоставимо да те равни имају једну заједничку тачку P. По аксиоми 3, § 2, оне имају још једну заједничку тачку Q. Тачке P, Q одређују праву PQ. Како су тачке P, Q у равни α, по аксиоми 2, § 2, све тачке праве PQ леже у равни α. Али тачке P, Q леже и у равни β. Према томе, све тачке праве PQ леже и у равни β. Права PQ је, дакле, заједничка права равни α, β.

§ 4. Раван је неограничена или, како се друкчије каже, она се простире у бескрајност. Узимамо да свака раван дели простор на две области, које леже с обе стране равни и које зовемо полупростори. Међутим, кад је цртамо, ми је претстављамо неким ограниченим делом равни, а најчешће паралелограмом (сл. 2).

Притом је обично обележавамо једним словом, најчешће малим грчким или великим латинским, и читамо, на пример, „раван α“.

Кад је раван једном одређена наведеним елементима, сматрамо да је можемо конструисати, а потом да на њој можемо извршити све конструкције као и у планиметрији. На тај начин се изводе конструкције у простору.



Сл. 2

§ 5. Можемо замислити да раван настаје на овај начин:

1) да се права обрће око неке своје тачке C и да увек сече неку другу праву AB;

2) да се права помера из свога положаја и да увек сече друге две праве које се секу;

3) да се права помера из свога положаја и да увек сече две паралелне праве;

4) да се права помера из свога положаја и да увек сече другу праву остајући паралелна свом првом положају (транслација, § 93).

Да су та тврђења тачна, следује одатле што права која производи раван остаје увек у тој равни и може да прође кроз сваку тачку те равни.

Вежбања

1) Колико је равни одређено са четири тачке које не леже у истој равни?

2) Колико се највише равни може поставити кроз пет датих тачака?

3) Колико је равни одређено са три праве које се секу у једној тачки, а нису у истој равни?

4) Колико је равни одређено са четири праве које се секу у једној тачки, од којих три нису у истој равни?

5) Колико се равни уопште може поставити кроз 6 правих које се секу у једној тачки?

6) Колико је равни одређено са три паралелне праве које нису у истој равни?

7) Колико је равни одређено са четири паралелне праве од којих три нису у истој равни?

8) Колико се равни уопште може поставити кроз 8 правих од којих су две по две међу собом паралелне?

9) Колики је најмањи број равни потребан да се сасвим ограничи простор?

10) Нацртати свежањ од пет равни.

11) Два круга имају заједнички центар и једнаке полупречнике, али не леже у истој равни. Доказати да периферије тих кругова имају две заједничке тачке.

III УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ТАЧКЕ И РАВНИ

§ 6. Између равни и тачке могу постојати ови узајамни положаји:

1) т а ч к а ј е у р а в н и;

2) т а ч к а ј е в а н р а в н и (аксиома 4, § 2), и то у једном или у другом полупростору.

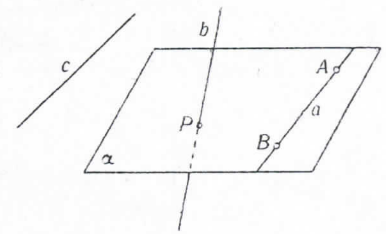
IV УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ПРАВЕ И РАВНИ

§ 7. Између равни и праве могу постојати ова три различита узајамна положаја:

1) п р а в а и м а с а р а в н и д в е з а ј е д н и ч к е т а ч к е (сл. 3, права a),

2) п р а в а и м а с а р а в н и с а м о ј е д н у з а ј е д н и ч к у т а ч к у (сл. 3, права b);

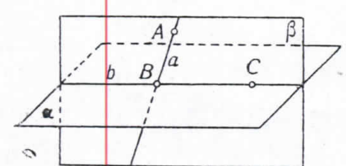
3) п р а в а н е м а с а р а в н и н и ј е д н е з а ј е д н и ч к е т а ч к е (сл. 3, права c).



Сл. 3

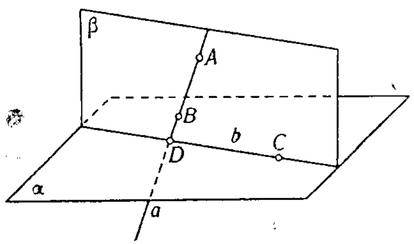
а) Нека нам је дата, на пример, права a и раван α. Како на свакој правој постоје бар две тачке A, B, и како свака од тих тачака може бити у равни или ван ње, можемо их замислити да обе леже у равни α. У том случају (по аксиоми 2, § 2) свака тачка праве a лежи у равни α. Тада кажемо да и права a л е ж и у равни α или да раван α с а д р ж и праву a (сл 3, права a).

б) Претпоставимо да је једна тачка праве a ван равни α, на пример тачка A, а друга тачка у равни α, на пример тачка B (сл. 4). Ако у равни α узмемо још једну произвољну тачку C, различиту од B, кроз те три тачке A, B, C можемо поставити раван β. Равни α и β имају тада две заједничке тачке B, C, које одређују заједничку праву b (§ 3, 4). Како је тачка A ван равни α, равни α и β нису идентичне (§ 3, 1) и имају заједничке само оне тачке које леже на правој b. Права a има, дакле, тачку (A) која не лежи на правој b, и, према томе, те две праве имају само једну заједничку тачку (B). Та тачка је уједно и једина заједничка тачка праве a и равни α.



Сл.

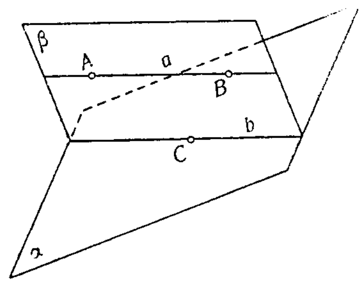
в) Најзад ћемо претпоставити да су обе тачке A, B праве a ван равни α у ма ком полупростору. Затим ћемо уочити трећу тачку C ма где у равни α, ван праве a, и кроз те три тачке A, B, C поставити раван β (сл. 5). Равни α и β имају заједничку праву b (по аксиоми 3, § 2 и последици 4, § 3), која пролази кроз тачку C. Како су тачке A и B ван равни α, права *a*, која пролази кроз те две тачке, не може се поклопити са правом *b*. Међутим, те две праве леже у истој равни β. Оне се, дакле, или секу у некој тачки *D*, што ће рећи да права *a* има само једну заједничку тачку са равни α, или су паралелне, што ће рећи да права *a* нема ниједне заједничке тачке са равни α (сл. 6).



Сл. 5

§ 8. Дефиниције. Кад права има само једну заједничку тачку са равни, кажемо да права продире раван или да раван сече праву. Њихова заједничка тачка зове се продор праве.

Кад права и раван немају ниједне заједничке тачке, кажемо да су паралелне.



Сл. 6

V УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ДВЕ РАВНИ

§ 9. Између две равни постоје ови узајамни положаји:

1) две равни имају три заједничке тачке (које не леже на истој правој);

2) две равни имају две заједничке тачке;

3) две равни немају ниједне заједничке тачке.

а) Ако две равни имају три заједничке тачке, које не леже на истој правој, оне се поклапају (по аксиоми 1, § 2).

б) Ако две равни имају две заједничке тачке, оне имају, како смо видели (§ 3, 4), једну заједничку праву, коју одређују те две тачке. У том случају кажемо да се равни секу, и њихова заједничка права зове се линија пресека.

Међутим, кад равни имају једну заједничку тачку, оне имају бар још једну (аксиома 3, § 2). Према томе, не постоји узајамни положај две равни са само једном заједничком тачком.

в) Ако две равни немају ниједне заједничке тачке, кажемо да су паралелне. (Дефиниција паралелности равни). Да такве равни заиста постоје, видећемо доцније.

VI УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ДВЕ ПРАВЕ У ПРОСТОРУ

§ 10. Између две праве могу постојати у простору ова четири различита узајамна положаја:

1) две праве имају две заједничке тачке;

2) две праве имају само једну заједничку тачку;

3) две праве немају ниједне заједничке тачке, али леже у истој равни;

4) две праве немају ниједне заједничке тачке и нису у истој равни.

а) Кад две праве имају две заједничке тачке, оне се поклапају.

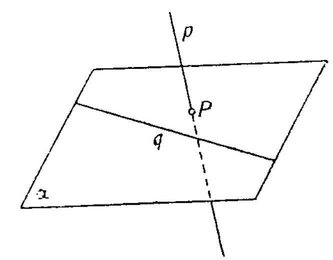
б) Кад две праве имају само једну заједничку тачку, оне се секу.

в) Кад две праве немају ниједне заједничке тачке, али леже у истој равни, оне су паралелне.

г) Кад две праве немају ниједне заједничке тачке и нису у истој равни, оне су мимоилазне.

Да заиста постоје две праве у простору кроз које се не може поставити раван, можемо се лако уверити на овај начин:

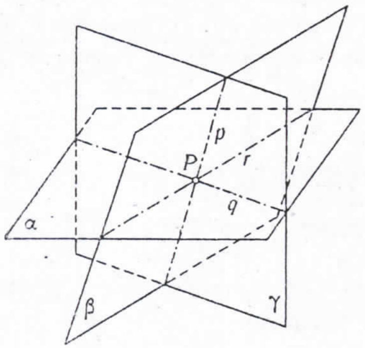
Нека је дата раван α и две праве *p*, *q* (сл. 7) тако да права *p* продире раван α у тачки *P*, а права *q* да лежи у равни α. Тачка *P* и права *q* одређују раван α, која сече праву *p*. Кад бисмо, сад, претпоставили да се кроз праву *q* може поставити још једна раван која садржи праву *p*, то би значило да се кроз праву *q* и тачку *P* могу поставити две различите равни, што се противи последици 1, § 3.



Сл. 7

VII ЗАЈЕДНИЧКА ТАЧКА ТРИЈУ РАВНИ

§ 11. Нека су дате три различите равни α, β, γ које се међу собом секу, али све три не припадају истом свежњу (сл. 8). Означимо са p линију пресека равни β и γ, са q линију пресека равни α и γ, и са r линију пресека равни α и β.



Сл. 8

Узмимо сад, на пример, праву p. Она садржи све заједничке тачке равни β и γ (§ 3, 4). Ако раван α сече равни β и γ тако да сече праву p, продор P праве p у равни α је очигледно заједничка тачка све три равни. Јасно је да бисмо дошли до истог резултата испитивањем пресека праве q и равни β или праве r и равни γ. Према томе, можемо рећи:

Теорема. — Ако се две равни секу а трећа сече њихову линију пресека, три равни имају само једну заједничку тачку.

§ 12. Како је P заједничка тачка трију равни, све три линије пресека пролазе кроз тачку P. Заиста, P је заједничка тачка равни α и γ, а q заједничка права тих истих равни. Значи да тачка P припада правој q (§ 3, 4). Исто тако, P је заједничка тачка равни α и β, а r заједничка права тих истих равни, па, стога, тачка P припада и правој r. Дакле, све три линије пресека пролазе кроз тачку P. Стога се може изрећи ова

Теорема. — Ако се три равни α, β, γ секу у једној тачки P, та тачка је заједничка трима линијама пресека p, q, r.

§ 13. Претпоставимо, сад, да се равни α, β, γ секу по правима p, q и да се те праве секу у некој тачки P. Тврдимо да је P заједничка тачка тих трију равни. Заиста, права p садржи све заједничке тачке равни β и γ, а права q све заједничке тачке равни α и γ. Према томе, P је заједничка тачка све три равни и трећа линија пресека r, по претходној теореми, мора, исто тако, пролазити кроз ту тачку. Може се, дакле, изрећи ова

Теорема. — Ако постоје две линије пресека p, q трију равни α, β, γ, и ако се те линије секу, три равни α, β, γ имају једну заједничку тачку P.

Вежбања

1) Одредити продор дате праве p у датој равни α.

Упутство. Прво узми произвољну тачку у датој равни и кроз њу и дату праву постави раван.

2) Праве a, b секу се у тачки C. Трећа права c сече праве a, b. Какав положај има права c у односу на раван коју одређују праве a, b? Какав је положај праве c, ако су праве a, b паралелне?

3) Кроз дату тачку P повући паралелу датој правој p.

4) Из дате тачке P спустити нормалу на дату праву p.

5) У датој тачки A праве a повући у простору нормалу на ту праву. Да ли је тај задатак одређен?

6) У колико се правих линија највише могу сећи пет равни?

7) Доказати: Ако четири праве имају такав узајамни положај да се две и две секу, оне пролазе кроз исту тачку, или све леже у истој равни. Како ће бити ако се број таквих правих повећа?

8) Повући праву која сече три дате мимоилазне праве. Колико има таквих правих? Какав им је узајамни положај?

9) Кроз дату тачку P повући праву која сече две дате мимоилазне праве p, q. Кад нема решења?

ГЛАВА ДРУГА

ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ И РАВНИ

I ПРАВА И РАВАН ПАРАЛЕЛНЕ МЕЂУ СОБОМ

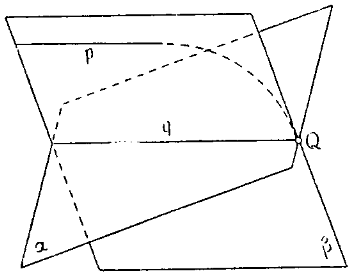
§ 14. У § 8 дали смо дефиницију паралелности праве и равни, а у § 7, в, показали смо и један пример постојања такве паралелности. Овде ћемо тај узајамни положај праве и равни проучавати детаљније.

Теорема. — Ако је права p паралелна равни α, она је паралелна и линији пресека равни α и оне равни β која пролази кроз дату праву p.

Доказ. – Нека је дата раван α и права p паралелна равни α (сл. 9). Кроз праву p поставимо раван β тако да пресече раван α по некој правој q. Тврдимо да су праве p, q, које леже у истој равни β, паралелне. Претпоставимо да нису паралелне. У том случају оне би се секле у некој тачки Q која лежи на правој

q, а тиме и у равни α, што се противи претпоставци да је права p паралелна равни α. Према томе, праве p, q су паралелне.

§ 15. *Теорема* — Ако је права p паралелна некој правој q у равни α, а не лежи у равни α, она је паралелна и равни α.



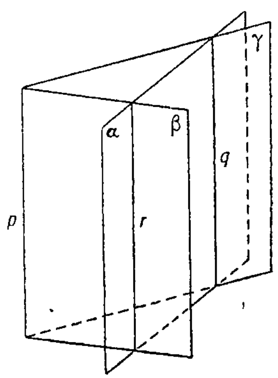
Сл. 9

Доказ. — Нека су дате раван α, права q у равни α и права p изван равни α, паралелна правој q (сл. 9). Поставимо кроз праве p, q раван β. По претпоставци, праве p, q су паралелне и, према томе, немају ниједне заједничке тачке. Како, међутим, све заједничке тачке равни α, β леже на њиховој линији пресека q, значи да права p, која је у равни β, нема ниједне заједничке тачке са равни α, што ће рећи да јој је паралелна.

§ 16. Из теореме у § 14 и § 15 види се да је за паралелност праве и равни потребно и довољно да раван садржи праву паралелну датој правој која не лежи у тој равни.

§ 17. *Теорема.* — Ако се две равни β и γ секу по некој правој p а трећа раван α сече равни β и γ тако да је паралелна правој p, три линије пресека p, q, r паралелне су међу собом.

Нека је p – линија пресека равни β и γ, q – линија пресека равни α, γ, r — линија пресека равни α и β (сл. 10) и нека је $\alpha \parallel p$.



Сл. 10

По теореми у § 14 имамо да је $p \parallel q$ и $p \parallel r$. Претпоставимо да се праве q и r секу у некој тачки P. У том случају би кроз ту тачку пролазила и права p (§§ 12 и 13). Како су праве q и r у истој равни α, значи да би права p имала с том равни једну заједничку тачку, што се противи претпоставци. Дакле је $q \parallel r$, а отуда све три линије пресека су паралелне међу собом, што је требало доказати.

§ 18. *Теорема.* — Ако су две праве a, b паралелне, линија пресека c две равни α и β, од којих β садржи праву a и α праву b; паралелна је правима a и b.

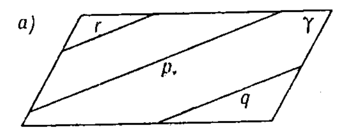
Заиста, ако кроз праве a, b поставимо раван γ, праве a и b претстављају линије пресека равни β, γ и равни α, γ. Кад би се права c секла, на пример, с правом a у некој тачки P, кроз исту тачку би пролазила и права b (§§ 12 и 13), што се противи претпоставци да је $a \parallel b$. Тиме је теорема доказана.

II ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ

§ 19. *Теорема.* – Две праве q, r паралелне истој трећој правој p паралелне су и међу собом.

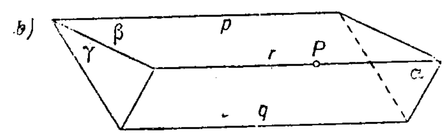
Доказ. — Као што знамо, две паралелне праве одређују једну раван. Нека су, на пример, праве p, q у равни γ, а праве p, r у равни β.

Ако су равни β и γ идентичне, тј. ако се све три праве p, q, r налазе у истој равни, имамо случај познат из планиметрије да су две праве q, r које су паралелне истој трећој правој p паралелне и међу собом (сл. 11, a).



Сл. 11a

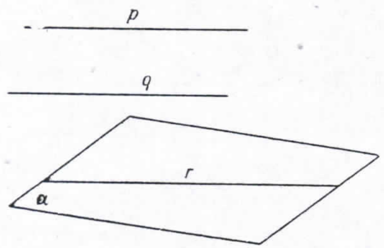
Ако су равни β и γ различите (сл. 11, b), узећемо на правој r произвољну тачку P и кроз тачку P и праву q поставити раван α. Равни α, β секу се по некој правој s, јер имају једну заједничку тачку P (§ 3, 4). Како су, међутим, праве p, q као линије пресека трију равни α, β, γ, по претпоставци, паралелне, три линије пресека p, q, s су паралелне међу собом (§ 17). Али како је и права r, по претпоставци, паралелна правој p, то значи да су кроз тачку P повучене две паралелне праве правој p, што је немогуће. Стога је права s идентична са правом r, из чега следује да је права r паралелна правој q, што је требало доказати.



Сл. 11 b

§ 20. *Последица.* — Ако су две праве паралелне, свака раван паралелна једној правој паралелна је и другој, ако не лежи у тој равни.

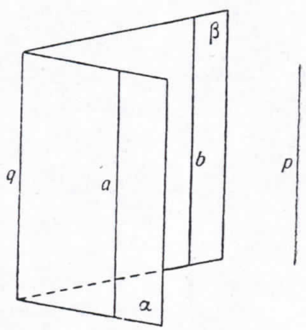
Нека су дате две паралелне праве p, q и раван α паралелна правој q (сл. 12). Тада раван α садржи неку праву $r \parallel q$ (§ 16). Како је, по претпоставци, и $p \parallel q$, следује да је $p \parallel r$ (§ 19), а отуда и $\alpha \parallel p$ (§ 16), што је требало доказати.



Сл. 12

§ 21. *Последица.* — Ако је права p паралелна двема равнима α, β које се секу, она је паралелна и линији њиховог пресека q.

Раван (сл. 13) садржи праву $a \parallel p$, а раван β праву $b \parallel p$ (§ 16). То значи да су праве a, b паралелне међу собом (§ 19). Из тога следује да је линија пресека q паралелна правима a, b (§ 18), а отуда и правој p, што је требало доказати.



Сл. 13

§ 22. *Последица.* — Ако су две праве паралелне, свака раван која сече једну сече и другу праву.

Кад раван не би секла једну од тих правих, била би јој паралелна (или би је садржавала). У том случају била би паралелна и другој (§ 20) (или би је садржавала). Дакле, раван сече обадве праве.

Вежбања

1) Кроз тачку A повући праву паралелну датој равни α. Колико има решења?

2) Дата је раван и њој паралелна права. Кроз дату тачку у равни повући у тој равни праву паралелну датој правој.

3) Кроз дату тачку A повући праву a паралелну двема равнима α, β.

4) Кроз тачку P поставити раван паралелну датој правој p. Колико има решења?

5) Ако су две праве a, b паралелне равни π, да ли су паралелне и међу собом?

6) Повући праву p паралелну правој q тако да сече две мимоилазне праве r, s.

7) Кроз дату тачку P поставити раван паралелну двема правима p, q које се мимоилазе.

8) Ако дужима редом спојимо четири тачке A, B, C, D које не леже у једној равни, добијамо тзв. просторни четвороугао, чије две стране леже у једној, а друге две у другој равни. Доказати да су средине његових страна темена паралелограма.

9) У просторном четвороуглу средине страна су темена паралелограма (види зад. 8). Доказати да је пресек дијагонала тога паралелограма средина дужи која спаја средине дијагонала просторног четвороугла.

10) Шта је у зад. 9 геометријско место пресека дијагонала паралелограма, ако три темена просторног четвороугла остану непомична, а четврто се помера а) по датој правој, б) по датој равни?

11) Дата је раван α и у њој права a. Ако је нека права b паралелна правој a, а не лежи у равни α, свака раван која пролази кроз b сече раван α по правој паралелној правој a или по самој правој a. Доказати.

12) Ако два троугла ABC и $A_1B_1C_1$, који не леже у истој равни, имају такав положај да се праве BC, B_1C_1 секу, а исто тако праве CA, C_1A_1 и праве AB, A_1B_1, тада:

а) три праве AA_1, BB_1, CC_1 пролазе кроз једну тачку или су међу собом паралелне (§ 12 и § 17);

б) три тачке пресека правих BC са B_1C_1, CA са C_1A_1 и AB са A_1B_1 леже на једној правој.

(Упутство. Посматрај линију пресека равни ABC и $A_1B_1C_1$, а затим уважи § 11).

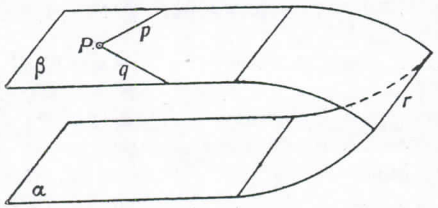
Конструисати и доказати.

III ПАРАЛЕЛНЕ РАВНИ

§ 23. По дефиницији (§ 9, в), паралелне равни немају ниједне заједничке тачке. Према томе, ако су равни паралелне, свака права једне равни паралелна је другој равни; и обрнуто: ако је свака права једне равни паралелна другој равни, и саме равни су паралелне.

§ 24. *Теорема.* — Ако је раван α паралелна двема правима p, q које се секу и леже у некој равни β, равни α и β су паралелне.

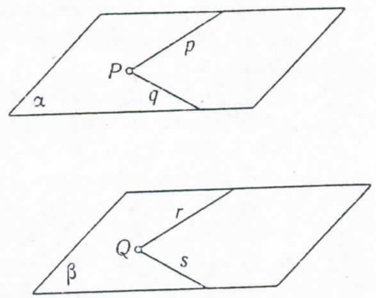
Претпоставимо да равни α, β нису паралелне (сл. 14). У том случају оне би се секле по некој правој r. Права p, будући паралелна равни α, паралелна је и линији пресека r (§ 14). Исто тако је и права q паралелна правој r. То значи да бисмо имали две праве p, q, које леже у истој равни β и пролазе кроз једну тачку P, паралелне правој r, што је немогуће. Према томе, равни α и β су паралелне.



Сл. 14

§ 25. Теорема. — *Кроз дату тачку Q ван дате равни α може се поставити раван паралелна равни α, и то само једна.*

Нека је дата раван α и тачка Q ван ње (сл. 15). Повуцимо кроз произвољну тачку P равни α две различите праве p, q. Ако и кроз тачку Q повучемо две различите праве r, s тако да је $r \parallel p$ и $q \parallel s$, праве r, s одређују раван β, за коју тврдимо да је паралелна равни α. Заиста, права $p \parallel \beta$, јер $p \parallel r$, и права $q \parallel \beta$, јер је $q \parallel s$ (§ 16). Стога је раван β паралелна правима p, q равни α, и, по претходној теореми (§ 24), равни α и β су паралелне.



Сл. 15

Лако је видети да је раван β једина која задовољава постављени услов.

§ 26. Теореме. — *Ако су две равни паралелне:*

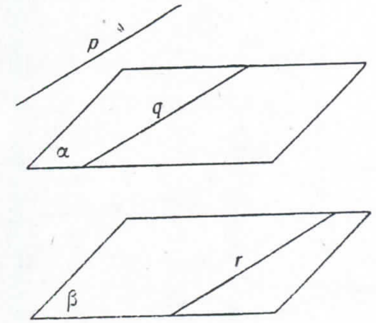
1) права која је паралелна једној од њих паралелна је и другој (ако не лежи у њој);

2) права која продире једну од њих продире и другу;

3) раван која је паралелна једној од њих паралелна је и другој (ако се не поклапају);

4) раван која сече једну од њих сече и другу и њихови пресеци су паралелни.

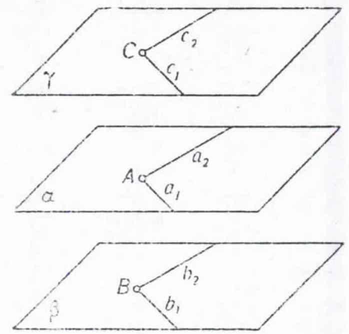
а) Нека су дате две паралелне равни α, β и права p паралелна равни α (сл. 16). Тада у равни α постоји права q која је паралелна и правој p (§ 16) и некој правој r у равни β (§ 23 и § 16). Према томе, права p паралелна је равни β, јер је $p \parallel r$ (§ 19).



Сл. 16

б) Ако права p продире раван α, тврдимо да продире и раван β. Кад је не би продирала, била би јој паралелна, а, по претходној теореми (§ 26, 1), била би паралелна и равни α, што се противи претпоставци. Дакле, права p продире раван β.

в) Нека су нам дате две паралелне равни α, β и нека трећа раван γ, паралелна равни α (сл. 17). Треба доказати да је $\gamma \parallel \beta$. Повуцимо у равни α из неке њене тачке A две различите праве a_1, a_2, затим у равни β из неке њене тачке B праве $b_1 \parallel a_1$, $b_2 \parallel a_2$, и, најзад, у равни γ из неке њене тачке C праве $c_1 \parallel a_1$, $c_2 \parallel a_2$. Како је $b_1 \parallel c_1$ и $b_2 \parallel c_2$ (§ 19), следује да је $\gamma \parallel \beta$ (§ 24).



Сл. 17

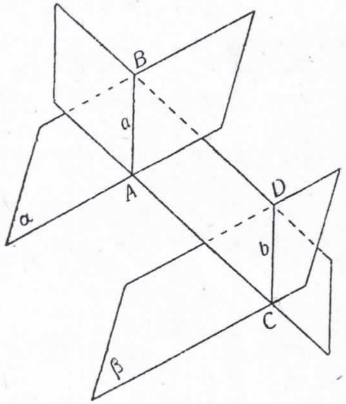
г) Ако раван γ сече раван α, она сече и раван β (сл. 18). Кад је не би секла, била би јој паралелна, а, по претходној теореми (§ 26, 3), била би паралелна и равни α, што се противи претпоставци. Дакле, раван γ сече раван β.

Да су пресеци a, b паралелни, следује отуда што леже у једној равни γ, а не могу се сећи (§ 23).

§ 27. Теорема. — *Отсечци паралелних правих између две паралелне равни једнаки су.*

Нека су дате две паралелне равни α, β и две паралелне праве AC, BD које продиру дате равни (сл. 18). Кроз праве

AC, BD поставимо раван γ, која ће дате равни α, β сећи по паралелним правима a, b. Ако су тачке A, B, C, D продори, четвороугао $ABCD$ је паралелограм, па је $AC = BD$, што је требало доказати.



Сл. 18

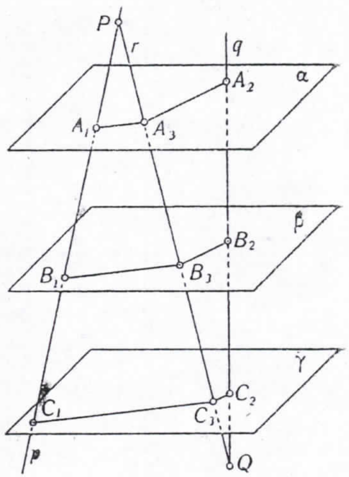
§ 28. *Теорема.* — Отсечци ма каквих правих између три паралелне равни пропорционални су.

Нека су дате три паралелне равни α, β, γ (сл. 19) и две произвољне праве p, q које продиру дате равни, и то права p у тачкама A_1, B_1, C_1, а права q у тачкама A_2, B_2, C_2.

Треба доказати да је

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

На правој p уочићемо тачку P, а на правој q тачку Q, које ћемо спојити правом r. Права r продире дате равни у тачкама A_3, B_3, C_3. Видимо да праве p, r одређују раван која дате равни сече по паралелним правима A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 (§ 26, 4). Исто тако, праве q, r одређују раван која дате равни сече по паралелним правима A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3.



Сл. 19

Из планиметрије знамо да:

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_3B_3}{B_3C_3}.$$

Исто тако знамо да је

$$\frac{A_2B_2}{B_2C_2}=\frac{A_3B_3}{B_3C_3},$$

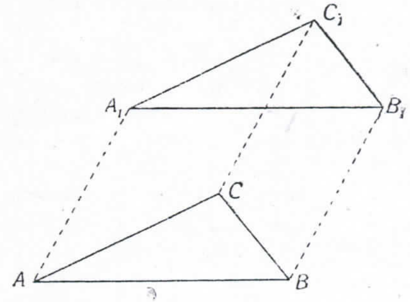
одакле добијамо да је

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2},$$

што је требало доказати.

§ 29. *Теорема.* — Два угла са крацима паралелним у истом смеру једнака су.

Нека су дата два угла BAC и $B_1A_1C_1$ тако да су краци AB и A_1B_1 паралелни у истом смеру као и краци AC и A_1C_1 (сл. 20).



Сл. 20

Ако узмемо да је $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, па спојимо A са A_1, B са B_1, C са C_1, B са C и B_1 са C_1, добићемо паралелограме: ABB_1A_1, ACC_1A_1 и BCC_1B_1. Из паралелограма BCC_1B_1 следује да је $B_1C_1 = BC$. Према томе, троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни су, јер имају једнаке стране. Дакле је $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A$.

Да та два угла леже у паралелним равнима, произилази из теореме у § 24.

Вежбања

1) Дата је раван α и њој паралелна права a. Поставити кроз ту праву раван β паралелно датој равни.

2) Све праве које пролазе кроз једну тачку A и које су паралелне датој равни α леже у једној равни. Доказати.

3) Дата је тачка A, права a и раван α. Кроз тачку A повући праву b која сече праву a и паралелна је равни α.

4) Кад су отсечци које чине две равни α, β на трима паралелним правима a, b, c које нису у истој равни једнаки, равни α, β су паралелне. Доказати.

5) Између тачке P и равни ρ поставити дуж d тако да буде паралелна датој равни π.

6) Доказати да су четири праве по којима две паралелне равни секу друге две паралелне равни међу собом паралелне.

7) Ако су три равни паралелне истој правој да ли су паралелне и међу собом?

8) Да ли две праве паралелне једној равни одређују раван паралелну датој равни?

9) Три паралелне равни α, β, γ ограничавају на свакој правој која их продире две дужи чија размера не зависи од положаја тих правих. Доказати.

10) Ако су отсечци AB, BC на једној правој пропорционални отсечцима A_1B_1, B_1C_1 на другој правој, кроз праве AA_1, BB_1, CC_1 могу се поставити три паралелне равни α, β, γ, од којих α садржи праву AA_1, β праву BB_1 и γ праву CC_1. Доказати.

11) Ако су дате две мимоилазне праве p, q, наћи геометриско место тачака од којих свака дели у датој размери отсечак PQ на правој r која спаја ма коју тачку P праве p са ма којом тачком Q на правој q.

12) Ако су дате две мимоилазне праве p, q, наћи геометриско место тачака од којих свака дели у датој размери отсечак PQ на правој r која спаја ма коју тачку P праве p са одговарајућом тачком Q праве q тако да је увек паралелна некој датој равни α.

13) Ако се права помера тако да непрестано сече две дате праве и да остаје паралелна некој датој равни, она сече безброј других датих правих које су паралелне једној истој равни. Доказати.

14) Ако се нека права p помера тако да непрестано сече три дате праве q, r, s, паралелне истој датој равни α, те три праве чине отсечке на правој p који су у истој размери, а права p остаје паралелна некој извесној равни β. Доказати.

15) Повући једну праву p која сече три дате праве q, r, s тако да су отсечци на правој p у датој размери.

16) Ако права p која се помера сече две дате праве q, r тако да праве q, r и нека дата раван α (која није у исто време паралелна обема правима q, r) чине на правој p отсечке који су у сталној размери, права p паралелна је некој одређеној равни β. Доказати.

17) Између две дате праве a, b повући отсечак дате дужине d паралелан датој равни α.

18) Права AB продире паралелне равни α, β, γ редом у тачкама A, B, C. Друга права DF продире равни α, β, γ редом у тачкама D, E, F. Ако је $AB = 15$ cm, $BC = 21$ cm, $EF = 28$ cm, наћи дуж DE.

ГЛАВА ТРЕЋА

НОРМАЛНЕ ПРАВЕ И РАВНИ

I ПРАВА И РАВАН НОРМАЛНЕ МЕЂУ СОБОМ

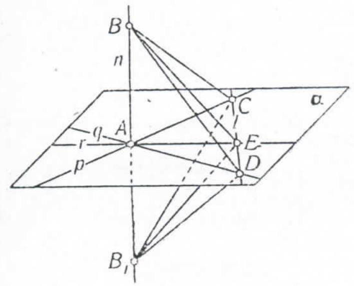
§ 30. Дефиниција. — Права је нормална на равни кад је нормална на свакој правој која пролази кроз њен продор у тој равни.

§ 31. Теорема. — Права која продире раван и стоји нормално на двема правима равни што пролазе кроз продор праве нормална је на свакој правој која лежи у тој равни и пролази кроз тај продор.

Према дефиницији у § 30, права је тада нормална и на самој равни.

Да постоји права која стоји нормално на двема правима равни што пролазе кроз њен продор, показаћемо у § 33.

Нека је дата раван α и права n која продире дату раван у тачки A (сл. 21). Затим, нека је права n нормална на правима p, q, које пролазе кроз тачку A и леже у равни α. Тврдимо да је права n нормална и на ма којој правој r те равни која пролази кроз тачку A.



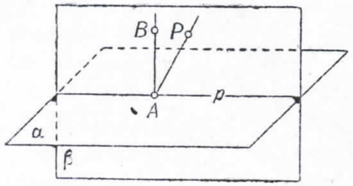
Сл. 21

Уочићемо на правој n две различите тачке B и B_1 у једнаком растојању од A, тако да је $AB_1 = AB$. Затим ћемо повући праву l у равни α тако да пресече све три праве p, q, r, и то праву p у тачки C, праву q у тачки D и праву r у тачки E. Тачке пресека C, D, E спојићемо са тачкама B и B_1. Тиме добијамо ове подударне троуглове: $\triangle ABC \cong \triangle AB_1C$, $\triangle ABD \cong AB_1D$ (јер, у оба случаја, имају једнаке по две стране и њима захваћени угао). Из те подударности следује једнакост страна $BC = B_1C$, $BD = B_1D$, а затим и подударност троуглова BCD и B_1CD. Како је, у том случају, $\sphericalangle BCE = \sphericalangle B_1CE$, следује да је $\triangle BCE \cong \triangle B_1CE$, а отуда, опет, да је $BE = B_1E$. То значи да је троугао BB_1E равнокрак и да је AE његова висина, а BB_1 његова основица. Дакле је $n \perp r$, што је требало доказати.

Продор нормале зове се подножје нормале.

§ 32. Теорема. — Кроз дату тачку у простору може се на дату раван α повући само једна нормала n.

а) Ако би, наиме, сем нормале BA на равни α (сл. 21) постојала још нека нормала, рецимо BE, она би, по претходној теореми (§ 31), била нормална и на правој AE. Значи да би троугао ABE имао два права угла а то је немогуће. Не постоје, дакле, две такве нормале.

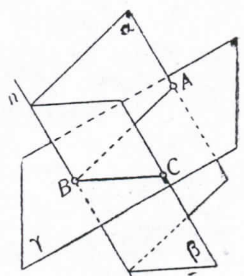


Сл. 22

б) Исто тако, две различите нормале исте равни не могу имати заједничко подножје. Ако претпоставимо да оно постоји, значило би да се у тачки A равни α могу повући две нормале на ту раван (сл. 22): BA и PA. Међутим праве BA, PA одређују неку раван β. По претходној теореми (§ 31) права BA нормална је на линији p пресека равни α, β, а исто тако и права PA. У том случају имали бисмо да се у једној тачки A праве p у истој равни β могу подићи две нормале, а то је, како знамо из планиметрије, немогуће. Према томе, не постоје две такве нормале.

§ *33. Теорема.* — Кроз дату тачку A простора може се на дату праву n поставити само једна нормална раван γ.

Нека је дата тачка A и права n (сл. 23). Оне одређују раван α. У тој равни повучемо праву $AB \perp n$ и добијамо подножје B. Кроз праву n поставимо произвољну раван β различиту од равни α и у њој подигнемо нормалу BC на праву n у подножју B. Праве BA и BC одређују раван γ, која је нормална на правој n (§ 31).



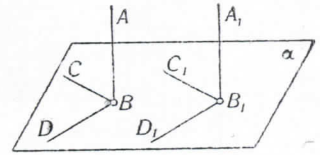
Сл. 23

Лако је видети да је раван γ једина, јер се кроз дату тачку у равни може повући само једна нормала на дату праву.

Ако је дата тачка на самој датој правој, на пример тачка B (сл. 23), из дате слике лако се разабира како би се могла поставити раван γ и како би се доказало да је она једина.

§ *34. Теорема.* — Ако је једна од две паралелне праве нормална на равни, нормална је и друга.

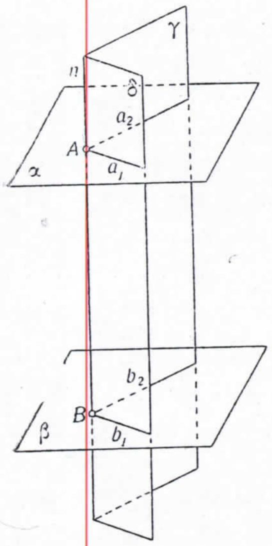
Претпоставимо да је $AB \parallel A_1B_1$ и $AB \perp \alpha$ (сл. 24). Тврдимо да је и $A_1B_1 \perp \alpha$. Заиста, ако у равни α кроз подножје B праве AB повучемо две произвољне праве BC, BD и потом кроз подножје B_1 праве A_1B_1 повучемо праве $B_1C_1 \parallel BC$, $B_1D_1 \parallel \parallel BD$, добијамо да је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$ и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A_1B_1D_1$ (§ 29). Како су углови ABC и ABD прави, јер је $AB \perp \alpha$ (§ 31), прави су и углови $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1D_1$. Стога је $A_1B_1 \perp \alpha$ (§ 31).



Сл. 24

§ *35. Теорема.* — Ако је једна од две паралелне равни нормална на правој, нормална је и друга.

Нека је $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha \perp n$ (сл. 25). Тврдимо да је $\beta \perp n$.



Сл. 25

Кроз праву n поставимо две произвољне равни γ, δ. Оне секу раван α по правима a_1, a_2 и раван β по правима b_1, b_2. Тада је $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$ (§26, 4). Ако је међутим, права нормална на једној од паралелних правих, нормална је и на другој, како нам је познато из планиметрије. Стога је $n \perp b_1$ и $\perp b_2$, а отуда $\beta \perp n$, што је требало доказати.

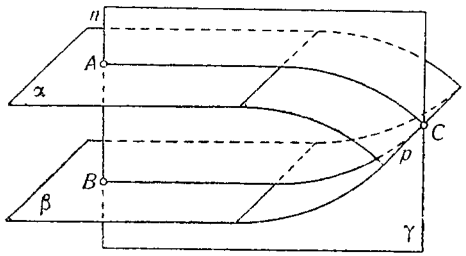
§ *36. Теорема.* — Две праве нормалне на истој равни паралелне су међу собом.

Кад не би биле паралелне, могла би се кроз подножје једне од њих повући права паралелна другој. Значи да бисмо кроз једну тачку имали повучене две нормале на ту раван: једну по претпоставци, а другу по теореми у § 34, а то је немогуће (§ 32, б).

§ *37. Теорема.* — Две равни нормалне на истој правој паралелне су међу собом.

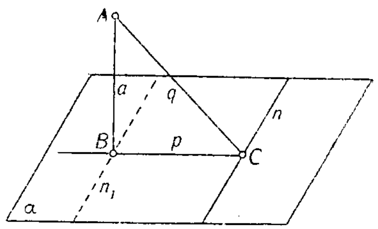
Нека је $\alpha \perp n$ и $\beta \perp n$. Тврдимо да су равни α, β паралелне (сл. 26).

Кад не би биле паралелне, пресекле би се по некој правој p. Ако бисмо на тој правој узели ма коју тачку C и кроз њу и праву n поставили раван γ, та раван би секла раван α по правој AC, а раван β по правој BC. У том случају имали бисмо да је $AC \perp n$ и $BC \perp n$, због тога што је $n \perp \alpha$ и $n \perp \beta$ (§ 31). То, међутим, значи да би из тачке C биле повучене две нормале на праву n, а то је немогуће. Дакле, равни α, β су паралелне.



Сл. 26

§ 38. Нека је дата раван α и коса права q, која продире дату раван у тачки C (сл. 27). Ако кроз ма коју тачку A, различиту од C, на правој q повучемо нормалу a на раван α, добијамо њено подножје у тачки B. Права p која пролази кроз тачке B, C зове се пројекција косе праве q на равни α.



Сл. 27

Кроз тачку C повучемо нормалу n на праву p и тврдимо да ће права n бити нормала и праве q.

Да то докажемо, повући ћемо кроз подножје нормале a праву n_1 паралелну правој n. Права n_1, будући нормална на правима a, p, нормална је на равни ABC (§ 31). Како је права n паралелна правој n_1, она је, исто тако, нормална на равни ABC (§ 34), а отуда и на правој q, која пролази кроз њено подножје C (§ 31). Тиме је доказана ова

Теорема. — Ако у равни α повучемо нормалу n на пројекцију p неке косе праве q, права n је нормала и косе праве q. (Теорема трију нормала).

Важи и обрнута теорема.

Вежбања

1) Ако је права нормална на некој правој у равни, да ли је нормална и на равни?

2) Колико се нормала може повући у простору на дату праву у једној тачки праве? Где леже те праве?

3) Ако су две праве нормалне на некој трећој, да ли су паралелне?

4) У једној тачки P датој у равни π подићи нормалу на π. (Упутство. Кроз тачку P у равни π повуци две произвољне узајамно нормалне праве a, b. Затим кроз праву a постави неку раван α и у њој повуци праву p нормалну на a. Најзад, кроз праве p и b постави раван β и у њој повуци нормалу q на b. Тада је q тражена нормала. Докажи).

5) Из тачке A изван равни α повући нормалу на ту раван. (Упутство. У равни α повуци произвољну праву a. Затим кроз тачку A и праву a постави раван β и из тачке A повуци у њој нормалу p на праву a. Кроз подножје B праве p повуци праву $q \perp a$ у равни α и, најзад, кроз праве p, q постави раван γ. Нормала n повучена из тачке A на праву q у равни γ је тражена нормала. Докажи).

6) Шта је геометриско место тачака у простору које имају једнако растојање од две дате тачке?

7) Шта је геометриско место тачака које имају једнако растојање од две дате тачке и једнако растојање од две паралелне праве?

8) Наћи геометриско место тачака у простору које имају једнако растојање од сва три темена датога троугла.

9) Наћи тачку у датој равни која има једнако растојање од сва три темена троугла који није у датој равни.

10) Наћи тачку која има једнако растојање од 4 тачке које нису у једној равни.

11) Наћи геометриско место тачака које имају једнако растојање од две праве које се секу.

12) Наћи геометриско место тачака које имају једнако растојање од страна датога троугла.

13) Наћи геометриско место тачака које имају једнако растојање од сваког пара наспрамних страна паралелограма.

14) У датој равни α наћи геометриско место тачака које имају једнако растојање од тачака A, B на правој AB која је коса према равни.

15) Геометриско место тачака које имају ту особину да је разлика квадрата њихових растојања од две дате тачке стална јесте раван. Доказати.

16) Шта је геометриско место центара свих кругова у простору који додирују дату праву у датој тачки?

17) Дате су две тачке A, B које леже са исте стране равни; наћи у тој равни тачку са том особином да је збир њених растојања од тачака A и B најмањи.

18) Дате су две тачке A, B које леже са разних страна равни; наћи у тој равни тачку са том особином да је разлика њених растојања од тачака A и Bнајвећа.

19) Ако раван садржи једну дијагоналу паралелограма, нормале на равни спуштене са крајева друге дијагонале једнаке су. Доказати.

20) Ако је права p нормална на равни α, доказати да је свака права q која је нормална на правој p паралелна равни α.

21) Ако су права p и раван α нормалне на правој q, доказати да је права p паралелна равни α.

22) Доказати да све праве нормалне на некој равни α чија су подножја на једној правој у равни α леже у једној равни β.

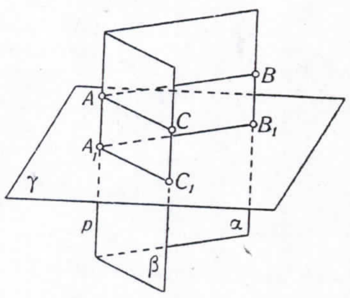
23) Дат је круг. Доказати да равни симетрије тетива тога круга чине свежањ равни.

24) Дата је раван α и у њој тачка P. Ако се та тачка споји са неком тачком Q ван равни α, наћи колико се правих нормалних на праву PQ може повући у равни α кроз тачку P.

25) Дате су две мимоилазне праве p, q, затим на правој p тачка P, а на правој q тачка Q. Наћи тачку R која је подједнако удаљена од тачака P и Q тако да је $RP \perp p$ и $RQ \perp q$.

II ДИЈЕДРИ — НОРМАЛНЕ РАВНИ

§ 39. *Дефиниције.* — **Диједар** је геометриска фигура коју чине две полуравни ограничене једном заједничком правом (сл. 28).



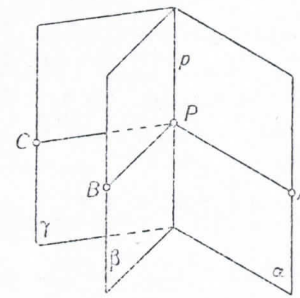
Сл. 28

Заједничка права p је **ивица** диједра, а полуравни α, β су његове **стране**.

Ако на ивици p уочимо произвољну тачку A и из ње повучемо у свакој страни нормале на ивицу, угао CAB који на тај начин добијамо зове се **нагибни угао** диједра. Лако је видети да величина тога угла не зависи од положаја његова темена на ивици. Заиста, ако уочимо неку другу тачку A_1 на ивици p, видимо да је угао $C_1A_1B_1$ једнак углу CAB, јер су краци тих углова паралелни у истом смеру (§ 29)

Раван γ нагибног угла нормална је на ивици p диједра јер садржи две праве A_1B_1 и A_1C_1 које су нормалне на ивици (§ 31).

§ 40. *Упоређивање диједара по величини.* — а) Положимо два диједра $\widehat{\alpha p \beta}$ и $\widehat{\alpha p \gamma}$ један у други тако да им се поклопе ивице p и стране α (сл. 29) и да унутрашња област првог диједра падне у унутрашњу област другог диједра, тј. да се обе унутрашње области диједара нађу са исте стране њихове стране α; ако притом страна γ диједра $\widehat{\alpha p \gamma}$ поклопи страну β диједра $\widehat{\alpha p \beta}$, кажемо да су диједри **једнаки**. Или укратко: **два диједра су једнака, ако се поклапају кад се положе један у други.**



Сл. 29

Унутрашњом облашћу диједра сматрамо онај простор који садржи унутрашњу област нагибног угла диједра.

б) Ако при таквом полагању диједара једнога у други страна γ не поклопи страну β, него, на пример, страна β падне у унутрашњу област диједра $\widehat{\alpha p \gamma}$, диједар $\widehat{\alpha p \beta}$ је део диједра $\widehat{\alpha p \gamma}$ и, према томе, диједри нису једнаки. Диједар $\widehat{\alpha p \beta}$ је **мањи** од диједра $\widehat{\alpha p \gamma}$, или диједар $\widehat{\alpha p \gamma}$ је **већи** од диједра $\widehat{\alpha p \beta}$.

в) Ако, међутим, претпоставимо да су дата два диједра $\widehat{\alpha p \beta}$ и $\widehat{\beta p \gamma}$ тако да им се поклапају ивице p и стране β, али да притом унутрашња област једног диједра падне потпуно ван области другог диједра, кажемо да су диједри **суседни**. У том случају, диједар $\widehat{\alpha p \gamma}$, који тако настаје, претставља **збир** датих диједара.

г) Ако су дати диједри $\widehat{\alpha p \gamma}$ и $\widehat{\alpha p \beta}$ и ако имају положај претстављен под б), диједар $\widehat{\beta p \gamma}$ претставља њихову **разлику**.

д) Из тога излагања видимо да су дате дефиниције потпуно аналогне дефиницијама датим у планиметрији за углове. Слично томе диједри могу бити **упоредни**, унакрсни, прави, итд. Диједри су упоредни кад имају заједничку једну страну, а друге две леже у истој равни.

§ 41. Теореме. —

1) Два једнака диједра имају једнаке нагибне углове.

2) Два неједнака диједра имају неједнаке нагибне углове, и већем диједру одговара већи нагибни угао.

3) Диједру збира (или разлике) друга два диједра одговара збир (или разлика) нагибних углова та два диједра.

Нека су дата два диједра $\widehat{\alpha p \beta}$ и $\widehat{\alpha p \gamma}$ (сл. 29). Положимо их један у други и на заједничкој ивици p уочимо неку тачку P. Кроз ту тачку поставимо раван нормалну на ивицу p. Она ће пресећи стране датих диједара по правима PA, PB, PC, које одређују нагибне углове: APB, APC и BPC.

а) Ако су диједри једнаки, страна γ диједра $\widehat{\alpha p \gamma}$ поклопиће страну β диједра $\widehat{\alpha p \beta}$. Тада ће очигледно, крак PC нагибног угла APC поклопити крак PB нагибног угла APB, што ће рећи да су та два нагибна угла једнака.

б) Ако су диједри неједнаки, страна γ диједра $\widehat{\alpha p \gamma}$ неће се поклопити са страном β диједра $\widehat{\alpha p \beta}$. Нека је, на пример, диједар $\widehat{\alpha p \gamma}$ већи од диједра $\widehat{\alpha p \beta}$. У том случају страна β заузеће неки положај у унутрашњој области диједра $\widehat{\alpha p \gamma}$, између страна α и γ. Тада је нагибни угао APC већи од нагибног угла APB, јер крак PB пада у унутрашњу област угла APC.

в) Ако су диједри $\widehat{\alpha p \beta}$ и $\widehat{\beta p \gamma}$ суседни, са заједничком страном β, диједар њиховог збира је $\widehat{\alpha p \gamma}$. У том случају збир нагибних углова APB и BPC прва два диједра једнак је нагибном углу APC диједра збира, јер су углови APB и BPC у једној равни и суседни.

г) Ако узмемо да два диједра имају положај претстављен под б), лако је доказати да је нагибни угао BPC једнак разлици нагибних углова APC и APB.

Важе и обрнуте теореме.

§ 42. Последице.

1) Ако се за јединицу диједра узме онај диједар чији је нагибни угао једнак јединици нагибног угла, диједар се мери својим нагибним углом.

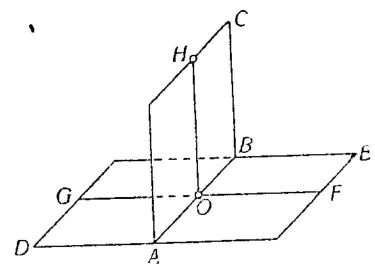
2) Унакрсни диједри су једнаки.

3) Диједри чије су стране паралелне у истом (или у супротном) смеру једнаки су.

§ 43. Нормалне равни. Дефиниције. — Кажемо да су две равни узајамно нормалне, ако образују једнаке упоредне диједре.

Диједар је прав, ако су му стране узајамно нормалне.

§ 44. Теорема. — Диједар је прав, кад му је нагибни угао прав.



Сл. 30

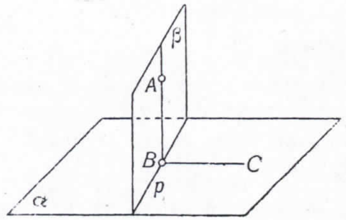
Нека равни DE и AC образују упоредне диједре $DABC$ и $EABC$ (сл. 30). На линији пресека AB тих равни кроз ма коју њену тачку O поставимо нормалну раван, која дате равни сече по правима OH и FG. Те праве чине нагибне углове FOH и GOH. Ако је нагибни угао FOH прав, тада је прав и нагибни угао GOH, јер заједно чине равни угао. Међутим, једнаким нагибним угловима одговарају једнаки диједри (§ 41). Значи да су упоредни диједри $DABC$ и $EABC$ прави, што је требало доказати.

§ 45. Последице.

1) Правом диједру одговара прави нагибни угао.

2) Сви прави диједри једнаки су.

§ 46. *Теорема.* — Кад су две равни узајамно нормалне, свака нормала повучена у једној од њих на њихову линију пресека нормала је оне друге равни.



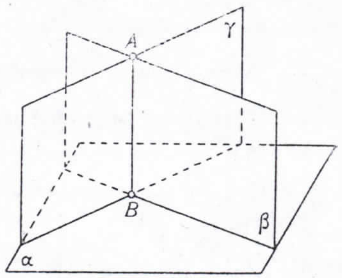
Сл. 31

Нека је дат прави диједар $\widehat{\alpha p \beta}$ (сл. 31). Кроз ма коју тачку A једне његове стране β повучемо нормалу на ивицу p. Ако кроз подножје B те нормале повучемо другу нормалу BC на праву p у равни α, добијамо нагибни угао ABC, који је прав (§ 45, 1). Како је права AB нормална на правој p и на правој BC, она је нормална и на равни α.

Да не постоји никаква друга нормала, произилази отуда што бисмо у том случају имали две нормале повучене из дате тачке на дату раван, а то је немогуће (§ 32, а).

§ 47. *Последица.* — Линија пресека двеју равни које су нормалне на трећој равни и сама је нормална на тој трећој равни.

Нека је $\beta \perp \alpha$ и $\gamma \perp \alpha$ и нека је AB линија пресека равни β, γ (сл. 32). Ако из ма које тачке A на линији пресека повучемо нормалу на раван α, она лежи у равни β и у равни γ (§ 46), па се, дакле, поклапа са правом AB.



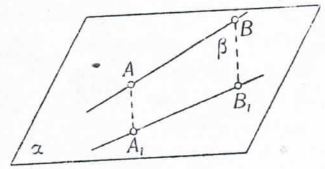
Сл. 32

§ 48. *Теорема.* — Две равни су узајамно нормалне ако једна од њих садржи нормалу оне друге.

Заиста, ако је права AB (сл. 31) равни β нормална на равни α, она је нормална на линији пресека p равни α, β и на нормали BC која пролази кроз њено подножје. Тада је угао ABC прав, а стога и диједар $\widehat{\alpha p \beta}$ (§ 44), што ће рећи да су равни α, β узајамно нормалне.

§ 49. *Теорема.* — Кроз праву која није нормална на равни може се поставити раван нормална на дату раван, и то само једна.

а) Нека је дата раван α и права AB која није нормална на датој равни (сл. 33). Уочимо ма коју тачку A на датој правој и спустимо из ње нормалу AA_1 на раван α. Праве AB и AA_1 одређују раван β, која је нормална на равни α (§ 48).



Сл. 33

Очигледно је да теорема важи и у случају кад је права AB у равни α.

б) Раван β уједно је геометриско место нормала спуштених на дату раван α из различитих тачака дате праве AB.

Заиста, ако из ма које тачке B праве AB спустимо нормалу на раван α, та нормала је паралелна правој AA_1 (§ 36) и лежи у равни β (§ 46); и обрнуто: кроз сваку тачку равни β пролази нормала која сече праву AB, јер је с њом у истој равни, а није јој паралелна.

в) Подножје нормале спуштене из тачке на раван зове се нормална пројекција (или, укратко, пројекција) тачке на равни. На пример, тачка A_1 (сл. 33) је пројекција тачке A на равни α.

У вези с том дефиницијом можемо рећи да је пројекција ма које геометриске фигуре на равни геометриско место пројекција свих тачака те фигуре на равни.

Раван на коју пројектујемо зове се раван пројекције.

Како је раван β (сл. 33) геометриско место нормала спуштених на дату раван α из различитих тачака праве AB, подножја свих тих нормала леже на линији пресека A_1B_1 равни α, β. Према томе, пројекције праве AB на раван α је права A_1B_1, тј. пројекција праве је опет права, сем у случају кад је права нормална на равни; тада је пројекција праве очигледно тачка. На пример, пројекција праве BB_1 је тачка B_1.

Ако је права паралелна равни пројекције, јасно је да је паралелна и својој пројекцији (§ 14).

Раван β која пројектује праву AB на раван α зове се **пројектујућа раван**.

Вежбања

1) Кроз тачку дату изван једне равни поставити раван нормално на ту раван.

2) Кроз праву нормалну на равни поставити раван. Какав ће положај имати те равни? Колико се таквих равни може поставити? Колико се равни нормалних на дату раван може поставити кроз праву косу према равни? Кроз праву паралелну датој равни?

3) Раван нормална на ивици диједра нормална је и на његовим странама. Доказати.

4) Ако су две равни нормалне на две равни које се секу, оне су паралелне међу собом. Доказати.

5) Ако је раван нормална на једној од две паралелне равни, нормална је и на другој. Доказати.

6) Кроз дату тачку поставити раван тако да стоји нормално на двема датим равнима.

7) У равни π дата је права p и тачка A. Кроз тачку A поставити раван нормалну на p и доказати да је она нормална на равни π.

8) Кад су права и раван паралелне, свака раван која је нормална на правој нормална је и на равни. Доказати.

9) Дата је раван и њој паралелна права; кроз ту праву поставити раван која је према датој равни нагнута под углом α.

10) Наћи геометриско место средина дужи одређеног правца које спајају по две тачке двеју датих равни.

11) Из тачке A у диједру повучене су нормале n_1 и n_2 на стране α и β тога диједра. Доказати да је угао између тих нормала суплементан углу нормалног пресека диједра.

12) Наћи геометриско место трећега темена троугла чије стране остају паралелне датим правима док прва два темена остају један у једној а други у другој датој равни.

13) Наћи геометриско место трећега темена троугла чије стране остају паралелне датим правима, док се прво теме клиза по датој правој а друго по датој равни.

14) На једној страни правог диједра узета је тачка A на растојању $d_1 = 16$ cm од ивице диједра, на другој страни узета је тачка B са растојањем $d_2 = 12$ cm од ивице. Растојање између подножја нормала из A и B на ивицу диједра износи 21 cm. Одредити дужину AB.

15) У две тачке једне стране диједра које се налазе на растојањима 15 cm и 21 cm од ивице диједра подигнуте су нормале до пресека са другом страном. Дужина прве нормале је 5 cm. Колика је дужина друге нормале?

16) Ако су дати дијedар и права p која сече ивицу q диједра, нека се кроз праву p постави раван која ће сећи стране диједра по углу чија је симетрала права p. Кад је задатак немогућ, а кад неодређен?

Упутство. У ма којој тачки P праве p постави раван $\alpha \perp p$; затим, између кракова угла који чине линије пресека равни α и страна диједра повуци дуж чија је средина тачка P.

17) Кроз две дате праве p, q пролазе две равни тако да мењајући свој положај увек остају узајамно нормалне. Наћи геометриско место тачака у којима ивица диједра који тако настаје продире дату раван која је нормална на једној од две дате праве.

18) Наћи геометриско место пројекција дате тачке на равнима које пролазе кроз дату праву.

19) Дуж од 15 cm чини угао од 45^0 са равни. Наћи дужину њене пројекције на равни.

20) Дуж од 12 cm чини са равни α угао од 60^0. Наћи дужину њене пројекције на α.

21) Ако су пројекције две праве на две равни које се секу паралелне, да ли су паралелне међу собом и саме праве?

22) Доказати теорему о пројекцији правога угла: Потребан и довољан услов да се прави угао пројектује у прави угао јесте да је бар један његов крак паралелан равни пројекције.

23) Кад се угао AOB пројектује на раван која је паралелна његовој бисектриси OC, његова пројекција је угао чија је бисектриса паралелна бисектриси OC. Доказати.

24) Ако се прави угао пројектује на раван која сече оба његова крака или продужетке оба крака, његова пројекција је тупи угао. Пројекција је оштри угао, ако раван пројекције сече један крак и продужетак другога крака. Доказати.

Упутство. Види теорему у зад. 22.

25) Пројекција оштрога угла је оштри угао, а тупога тупи, ако је раван пројекције паралелна једном његовом краку. Доказати

26) Пројекција паралелограма на равни је паралелограм или права. Доказати.

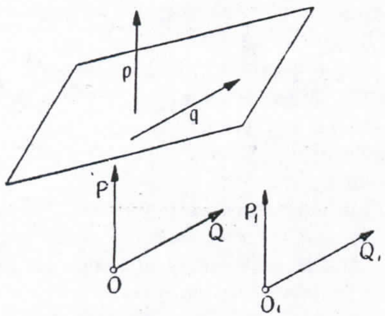
27) Наћи површину пројекције квадрата са страном $a = 8$ cm на равни, ако је једна страна квадрата паралелна тој равни а друга чини с њом угао од 45^0.

28) Равнострани троугао ABC, чија је страна 6 cm, има страну AB паралелну равни α, а раван ABC чини угао од 30^0 са равни α. Наћи периметар пројекције троугла ABC на равни α.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

УГЛОВИ. — НОРМАЛНЕ И КОСЕ ДУЖИ

§ 50. *Дефиниција.* — Угао између две полуправе p, q које имају произвољан положај у простору зовемо угао који чине међу собом полуправе OP, OQ паралелне у истом смеру полуправима p, q и повучене из ма које тачке простора (сл. 34). Очигледно је да величина добијеног угла не зависи од положаја тачке O у простору. Ако, наиме, место тачке O узмемо неку другу тачку O_1 и на показани начин конструишемо угао $P_1O_1Q_1$, тај угао биће једнак углу POQ, јер су им краци паралелни у истом смеру (§ 29).



Сл. 34

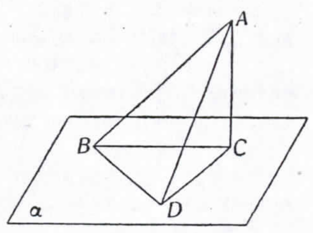
Кажемо да су две праве које имају произвољан положај у простору узајамно нормалне, ако је угао између њих прав.

§ 51. *Дефиниција.* — Угао између праве и равни је оштри угао (ако је права коса према равни) који права чини са својом пројекцијом на тој равни.

У случају да је права нормална на равни каже се да је тај угао између њих прав.

§ 52. *Теорема.* Угао између праве и равни је најмањи од свих углова које права чини са правима повученим кроз њен продор.

Нека је дата раван α и права AB, која продире раван α у тачки B (сл. 35). Из ма које тачке A праве AB спустимо нормалу на раван α и њено подножје C спојимо са продором B праве AB. Дуж BC је пројекција дужи BA. Затим повучемо произвољну праву у равни α кроз тачку B и на њој одмеримо дуж $BD = BC$. Кад тачку D спојимо са A, добијамо троуглове ABC и ABD, који имају



Сл. 35

по две стране једнаке, а треће стране су неједнаке. Страна $AC < AD$, а отуда и $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABD$, што је требало доказати.

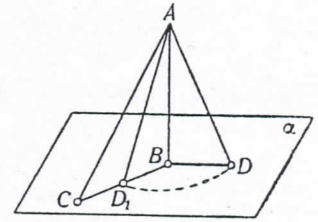
§ 53. *Теореме.* — Ако из неке тачке ван равни повучемо до те равни нормалу и косе дужи,

1) нормала је краћа од сваке косе дужи;

2) косе дужи са једнаким пројекцијама једнаке су;

3) од две косе дужи са неједнаким пројекцијама већа је она чија је пројекција већа.

а) Из тачке A ван равни α повучемо нормалу AB и произвољну косу дуж AC до равни α. Затим спојимо тачке B и C (сл. 36). Из троугла ABC видимо да је нормала AB његова катета, а коса дуж AC његова хипотенуза. Отуда следује да је $AB < AC$.



Сл. 36

Нормала AB узима се за растојање тачке од равни.

б) Из тачке A повучемо још једну косу дуж AD (сл. 36) и спојимо тачке B и D. Затим пренесемо пројекцију BD дужи AD из тачке B на пројекцију BC дужи AC тако да је $BD_1 = BD$ и спојимо тачке A и D_1. Тада су косе дужи AD и AD_1 једнаке због подударности троуглова ABD и ABD_1.

в) Ако је $BC > BD$ (сл. 36), у троуглу ACD_1 угао AD_1C је туп, а угао ACD_1 оштар. Стога је $AC > AD_1$, или, због једнакости $BD_1 = BD$, $AC > AD$, што је требало доказати

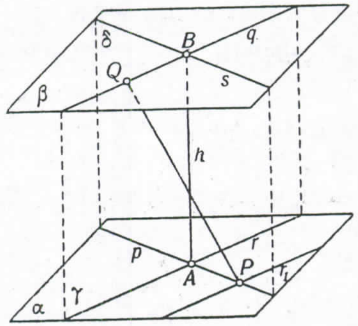
Лако је доказати да важи и обрнута теорема.

г) Ако из подножја B нормале AB (сл 36) нацртамо круг полупречника BD, све косе дужи повучене од тачке A до тачке на периферији тога круга биће међу собом једнаке. Стога можемо рећи:

Геометриско место тачака у равни које су подједнако удаљене од неке тачке у простору јесте круг чији је центар подножје нормале повучене кроз ту тачку на раван.

§ 54. *Теорема.* — Две мимоилазне праве имају само једну заједничку нормалу. Отсечак те нормале између правих најкраће је растојање између тачака правих.

Нека су дате две мимоилазне праве p, q (сл. 37). Поставимо две равни α, β тако да раван α пролази кроз праву p, раван β кроз праву q и да је $\alpha \parallel q$ и $\beta \parallel p$. Ако, сад, кроз праве p, q поставимо раван γ, δ нормално на дате равни α, β, оне ће се пресећи по правој h, која је тражена заједничка нормала. Заиста, права h нормална је на равни α (§ 47), па стога и на правима p, r које пролазе кроз њено подножје, где је r линија пресека равни α, γ. Како је права r пројекција праве q, оне су паралелне, и због тога $h \perp q$.



Сл. 37

Да је h једина заједничка нормала, може се доказати индиректно: Уочимо две произвољне тачке P, Q, различите од A, B, једну на правој p, другу на правој q. Кроз праве q и PQ поставимо раван π, која сече раван α по правој $r_1 \parallel r$, јер је $q \parallel \alpha$ (§ 14). Кад би права PQ била заједничка нормала правих p, q. она би била нормална на правима p, r_1 (§ 31), а тиме и на равни α. Значи да би кроз праву q пролазиле две равни γ, π нормалне на равни α, а то је немогуће (§ 49). Према томе, раван π поклапа се са равни γ, а тиме и тачке P са A и B са Q, што је требало доказати.

Да је h најкраће растојање између тачака датих правих p, q, произилази отуда што праве p, q леже у паралелним равнима α, β и што је нормала најкраће растојање између тачака двеју паралелних равни (§ 27 и § 53, 1).

Вежбања

1) Наћи геометриско место правих које пролазе кроз дату тачку и чине једнаке углове са две мимоилазне праве.

2) Дате су две мимоилазне праве. Конструисати праву која полови угао између њих и пролази кроз средину њиховог најкраћег растојања.

3) Шта је геометриско место праве која чини једнаке углове са две дате праве које се секу?

4) Кроз дату тачку повући праву која гради једнаке углове са три дате праве.

5) Ако полуправа гради једнаке углове са три полуправе које леже у једној равни, она је нормална на тој равни. Доказати.

Упутство. Из ма које тачке полуправе која није у датој равни спустити нормале на све три полуправе.

6) Дате су две равни које се секу и једна права нормална на једној од њих. Доказати да је нагибни угао те праве према другој датој равни комплементни угао нагибном углу тих равни.

7) Ако су две косе дужи повучене из једне тачке до равни и ако чине једнаке углове са равни, оне су једнаке. Доказати.

8) Наћи најкраћу и најдужу дуж која се може повући између једне тачке и периферије датог круга ма на који начин у простору.

9) Шта је геометриско место тачака које имају једнако растојање од две дате тачке и једнако растојање од две паралелне равни?

10) Наћи тачку која има једнако растојање од сва три темена датога троугла и једнако растојање од две дате паралелне равни.

11) Наћи геометриско место тачака које имају једнако растојање од две паралелне равни и дато растојање од неке треће равни.

12) Једна тачка у простору удаљена је од темена троугла за исту дужину d. Израчунати растојање те тачке од равни троугла кад су дате његове стране a, b, c.

13) Ако се две неједнаке дужи повуку из дате тачке до равни, већа дуж чини мањи угао са том равни. Доказати.

14) Из тачке P, 48 cm од равни α, спусти се нормала PA на раван α. Из тачке A као центра нацрта се у равни α круг са пречником од 72 cm. У тачки B тога круга повуче се тангента BC, дуга 144 cm. Наћи растојање од P до C.

15) Из неке тачке A повучена је нормала $AO = 1$ на раван α и две дужи AB и AC које са нормалом образују једнаке углове: $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO = 60^\circ$, а међу собом $\sphericalangle CAB = 90^\circ$. Наћи растојање BC.

16) Основица AB трапеза $ABCD$ налази се у равни α, а друга основица CD удаљена је од равни α за 5 cm. Наћи растојање од равни α тачке M која лежи на пресеку дијагонала тога трапеза, ако је $AB : CD = 7 : 3$.

17) Отсечци двеју правих између две паралелне равни износе 51 cm и 53 cm, а њихове пројекције на једној од тих равни односе се као 6 : 7. Наћи растојање између датих равни.

18) Темена равностраног троугла са страном a налазе се ван равни α на једнаком растојању d од те равни. Из центра троугла повучена је нормала на његову раван величине h на супротну страну од оне на којој је дата раван α. Од краја те нормале повучене су праве кроз темена троугла до пресека са равни α. Наћи отсечке тих правих између темена троугла и равни α и растојања међу њиховим крајевима.

19) На једној страни диједра узети две тачке чија су растојања од његове ивице једнака 51 cm и 34 cm. Растојање прве тачке од друге стране једнако је 15 cm. Наћи растојање друге тачке.

20) а) У датој равни повући праву кроз дату тачку у тој равни тако да она гради дати угао са датом правом. б) У датој равни повући праву кроз дату тачку те равни тако да гради дати угао са неком другом датом равни.

21) Права која гради једнаке углове са обе стране диједра продире те стране у две тачке чија су растојања од ивице диједра једнака, и обрнуто. Доказати.

22) Наћи геометриско место тачака у равни са том особином да праве које их спајају са две дате тачке P, Q граде једнаке углове са том равни.

23) Две равни α и β секу се и чине два пара унакрсних диједара. Показати да тачке две равни које полове те диједре имају једнако растојање од равни α и β (симетриске равни).

24) Шта је геометриско место тачака које имају једнако растојање од две равни што се секу и једнако растојање од две дате паралелне равни?

25) Наћи тачку која има једнако растојање од страна датог диједра и једнако растојање од три дате тачке које нису на истој правој.

26) Круг чији је полупречник 8 cm подељен је пречницима на 6 једнаких делова. Раван која садржи један од тих пречника чини угао од 30^{0} са равни круга. Наћи растојање сваке деоне тачке круга од равни.

27) Полуправа AB повучена је из тачке A ивице p диједра у унутрашњој области тога диједра тако да ако поставимо раван α нормално на AB у некој тачки P која није на ивици p диједра, тачка P лежи на симетрали угла чије краке чине линије пресека равни α са странама датога диједра. Доказати да полуправа AB припада симетриској равни тога диједра.

28) На правој a уочи неку тачку P и спусти из ње нормалу PQ на другу праву b која се с њом мимоилази. Ако је тачка A подножје заједничке нормале на правој a и ако се тачка Q налази на правој b, показати да је угао APQ оштар.

29) Дате су две мимоилазне праве са најкраћим растојањем a, 5 cm и углом између њих од 30^{0}. Поставити дуж од 7 cm тако да јој крајеви буду на правима и да са сваком гради исти угао.

30) Дате су две мимоилазне праве са најкраћим растојањем a. Поставити крајеве дужи b $(b > a)$ на тим правима тако да дуж буде на једној од мимоилазних правих нормална.

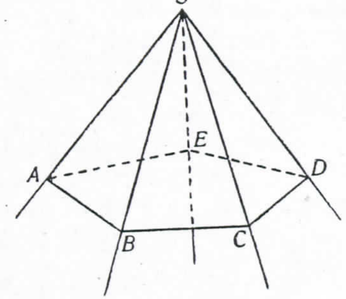
31) Свака тачка на некој правој p утолико је даље од праве q уколико је даље од подножја заједничке нормале правих p, q. Доказати.

32) Кад се две мимоилазне праве a, b пресеку трећом правом c тако да су пресеци A, B једнако удаљени од подножја P, Q заједничке нормале правих a, b, углови које гради права c са правима a, b једнаки су. Доказати.

ГЛАВА ПЕТА

РОГЉЕВИ

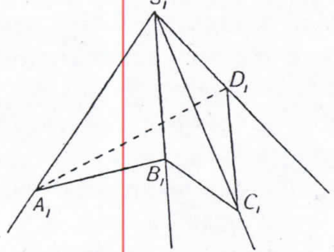
§ 55. *Дефиниције.* — Ако из неке тачке у простору повучемо три или више полуправих које не леже у истој равни и кроз сваке две суседне полуправе поставимо раван, настаје геометриска фигура која се зове **рогаљ** (сл. 38). Заједничка гранична тачка полуправих зове се **врх** или **теме** рогља. Полуправе зову се **ивице** рогља. По две суседне ивице чине **ивични угао** или **страну** рогља. Стране рогља чине заједно његову **површину**. По две суседне стране чине **диједар** рогља.



Сл. 38

Рогаљ обележавамо или словом његова темена (S), или са више слова, од којих је прво слово темена, а остала редом слова ивица ($SABCDE$).

Разликујемо **испупчени** или **конвексни рогаљ** (сл. 38) и **удубљени** или **конкавни рогаљ** (сл. 39). Рогаљ је конвексан кад лежи сав само с једне стране равни сваке своје стране, а конкаван кад сече раван ма и једне његове стране.



Сл. 39

Ако све стране конвексног рогља пресечемо једном равни, добијамо конвексни полигон. Кад то исто учинимо са конкавним рогљем, добијамо конкавни полигон.

У вези с тим могли бисмо рећи да је рогаљ геометриска фигура која настаје кад се полуправа при утврђеном положају своје граничне тачке помера по контури каквог многоугла чија раван не садржи ту тачку (§ 5, 1). Многоугао по чијој се контури помера полуправа зове се водиља рогља, а полуправа која својим померањем производи рогаљ зове се производиља рогља.

Очигледно је да површина рогља дели простор на две области: унутрашњу и спољашњу. Казаћемо да је нека тачка простора у унутрашњој области рогља кад је у унутрашњости полигона његовог пресека чија раван пролази кроз ту тачку.

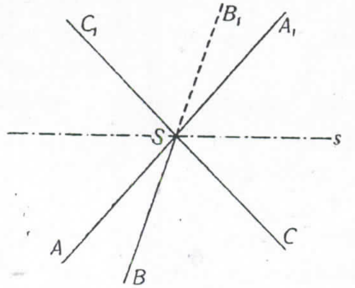
Према броју страна или ивица рогљеви могу бити тространи, четворострани, петострани итд. Тространи рогаљ зове се триједар. Очигледно је да он може бити само конвексан. Овде ћемо проучавати само конвексне рогљеве.

§ 56. Подударност рогљева. — Два рогља су подударна, ако се поклапају кад се положи један у други.

Како се проучавање подударности многостраних рогљева своди на проучавање подударности триједара, задржаћемо се само на проучавању подударности триједара.

Триједар има шест елемената: три стране и три диједра, слично као што троугао има три стране и три угла.

За подударност триједара потребан је услов да свих шест елемената у једном триједру буду једнаки са одговарајућим елементима у другом триједру, слично као и код троуглова, али, за разлику од троуглова, то није довољан услов. Овде долази у обзир још и распоред елемената у једном и другом триједру. Тај услов је потребан зато што се триједар не може превртањем довести у положај да су елементи једнога распоређени као и елементи другога, што је било могућно учинити код троуглова. Зато у правилима о подударности триједара, која су потпуно аналогна правилима о подударности троуглова, долази до изражаја и распоред елемената, као што ћемо видети мало ниже.



Сл. 40

§ 57. Симетрични рогљеви. — Нека је дат произвољан триједар $SABC$ (сл. 40). Ако његове ивице продужимо преко

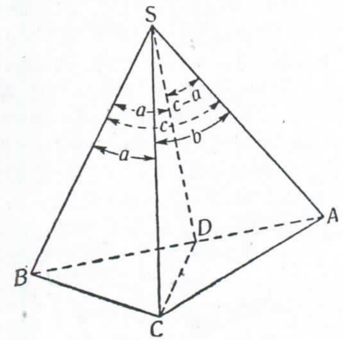
темена S, добијамо нов триједар $SA_1B_1C_1$, који је унакрсан у односу на дати. Ивични углови су као унакрсни једнаки: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle A_1SB_1$, $\sphericalangle ASC = \sphericalangle A_1SC_1$, $\sphericalangle BSC = \sphericalangle B_1SC_1$. Исто тако, унакрсни диједри су једнаки: $\widehat{ASBC} = \widehat{A_1SB_1}C_1$, $\widehat{ASCB} = \widehat{A_1SC_1}B_1$, $\widehat{CSAB} = \widehat{C_1SA_1}B_1$. Према томе, сваки од шест елемената првога триједра једнак је одговарајућем елементу другога триједра. Међутим, видимо да се ипак триједар $SABC$ не може поклопити са триједром $SA_1B_1C_1$. Ако бисмо, наиме, ивични угао A_1SC_1 обрнули у његовој равни око темена S тако да покрије ивични угао ASC, очигледно је да се ивице SB_1 и SB не би поклопиле, јер би лежале на разним странама равни ASC. Ако бисмо, уместо тога, триједар $SA_1B_1C_1$ обрнули око симетрале s угла CSA_1 као осе док се не поклопе ивице SC и SA_1, SA и SC_1, очигледно је да се, у општем случају, ивице SB и SB_1 не би поклопиле, него би са ивицама SA и SC градиле различите углове. Према томе, та два диједра нису подударна.

Ако посматрамо распоред ивица са врха S триједра, видимо да се идући по абецедном реду крећемо у смеру супротном кретању казаљке на часовнику у триједру $SABC$, а у смеру кретања казаљке на часовнику у триједру $SA_1B_1C_1$. Према томе, та два триједра немају једнако распоређене елементе. За два триједра који имају такав узајамни положај као триједри $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ кажемо да су симетрични у односу на заједничко теме S.

§ 58. Теорема. — У сваком триједру једна страна је мања од збира друге две, а већа од њихове разлике.

Нека је дат триједар $SABC$. Узећемо да је c његова највећа страна и да је $a \neq b$ (сл. 41). Треба доказати да је $c < a + b$.

Угао a пренесемо на угао c тако да им је SB заједнички крак. Тада ће други крак угла a пасти негде између ивица SA и SB у положај праве SD.



Сл. 41

На ивицама SC, SD одмеримо једнаке дужи тако да је $SC = SD$ и кроз тачку D у равни c повучемо произвољну праву BDA. Затим спојимо тачку C са тачкама B и A. Тиме добијамо подударне троуглове SBC и SBD, одакле следује да је $BC = BD$. Како је $AB = AD + BD = AD + BC$ а, с друге стране, $AB < AC + BC$, значи да је

$$AD + BC < AC + BC,$$

или

$$AD < AC.$$

Троуглови SAC и SAD имају по две једнаке стране ($SA = SA$, $SC = SD$), а треће неједнаке. Како наспрам мање стране AD лежи мањи угао, то је

$$c - a < b,$$

или

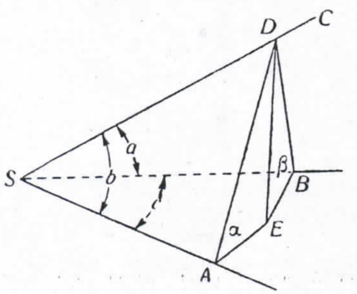
$$c < a + b,$$

што је требало доказати.

Истинитост другог дела теореме следује непосредно из последње неједнакости, тј. $b > c - a$ и $a > c - b$.

§ 59. *Теорема.* — У сваком триједру наспрам једнаких диједара леже једнаке стране.

Нека је дат триједар $SABC$ и нека су једнаки диједри са ивицама SA, SB (сл. 42). Уочимо на ивици SC ма коју тачку D и спустимо из ње нормалу на страну c. Њено подножје обележимо са E. Ако кроз праву DE поставимо раван $DAE \perp SA$ и $DBE \perp SB$, добијамо нагибне углове α и β, чија су темена у тачкама A и B. По претпоставци је $\alpha = \beta$. Из подударних троуглова ADE и BDE следује да је $AD = BD$. Како су троуглови SAD и SBD подударни ($SD = SD$, $AD = BD$, $\sphericalangle SAD = \sphericalangle SBD = 90^0$), мора бити $a = b$, што је требало доказати.



Сл. 42

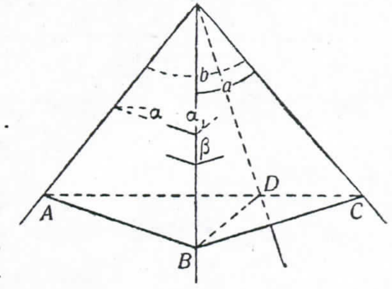
Лако је доказати да важи и обрнута теорема.

Триједар са две једнаке стране (и два једнака диједра) зове се равнокраки.

§ 60. *Теорема.* — У сваком триједру наспрам већег диједра лежи већа страна.

Нека је дат триједар $SABC$ и нека је $\beta > \alpha$ (сл. 43). Треба доказати да је $b > a$.

Кроз ивицу SB поставимо раван SBD тако да са равни SAB чини диједар $\alpha_1 = \alpha$. Тада је $\sphericalangle BSD = \sphericalangle ASD$ (§ 59), и $\sphericalangle CSD + \sphericalangle BSD > \sphericalangle BSC$ (§ 58). Како је $\sphericalangle BSD = \sphericalangle ASD$, следује да је $\sphericalangle CSD + \sphericalangle ASD > \sphericalangle BSC$, тј. $b > a$, што је требало доказати.

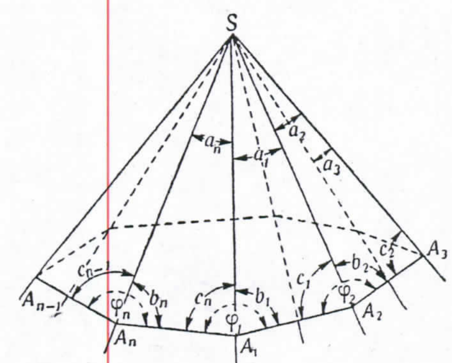


Сл. 43

Лако је доказати да важи и обрнута теорема.

§ 61. *Теорема.* — Збир страна ма кога испупченог рогља мањи је од четири права угла.

Нека је дат ма који испупчени рогаљ $SA_1A_2A_3 \dots A_n$ (сл. 44). Ако све његове ивице пресечемо неком равни, добијамо тачке пресека A_1, A_2, $A_3, \dots, A_n$ и троуглове SA_1A_2, SA_2A_3 итд. У тим троугловима обележићемо углове са a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 итд., а углове полигона $A_1\ A_2 \dots A_n$ са $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Узмимо, сад, да су тачке A_1, A_2, A_3 итд. темена триједара. Тада имамо да је (§ 58):



Сл. 44

$$\varphi_1 < b_1 + c_n$$

$$\varphi_2 < b_2 + c_1$$

$$\varphi_n < b_n + c_{n-1}.$$

Сабирањем левих и десних страна тих неједнакости добијамо:

$$\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n<(b_1+c_n)+(b_2+c_1)+\cdots+(b_n+c_{n-1}).$$

Збир на левој страни те неједнакости значи збир углова у многоуглу $A_1A_2\ldots A_n$, који је једнак $(n-2)\cdot 2R$. Ако збир страна рогља, $a_1+a_2+\cdots+a_n$, обележимо са s, добијамо да је збир на десној страни последње неједнакости једнак $n\cdot 2R-s$, јер је $a_1+b_1+c_1=2R$, $a_2+b_2+c_2=2R$ итд. Према томе, добијамо ову неједнакост:

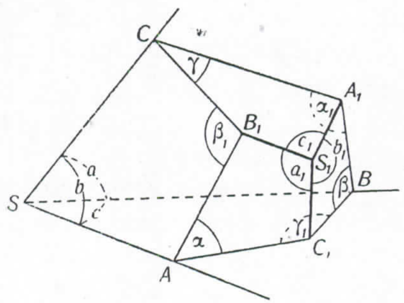
$$(n-2)\cdot 2R<n\cdot 2R-s,$$

а отуда

$$s<4R,$$

што је и требало доказати.

§ 62. Поларни рогаљ. Дефиниција. — Ако из ма које тачке која се налази у унутрашњој области рогља спустимо нормале на стране рогља, те нормале, узете као ивице, одређују нов рогаљ, који се зове поларни рогаљ датоме рогљу.



Сл. 45

Нека је дат, на пример, рогаљ $SABC$ (сл. 45). Из његове унутрашње тачке S_1 спустимо нормале на његове стране тако да је $S_1A_1\perp SBC$, $S_1B_1\perp SAC$, $S_1C_1\perp SAB$. Тиме добијамо рогаљ $S_1A_1B_1C_1$, који је поларан рогљу $SABC$.

§ 63. Теорема. — Сваки рогаљ је поларан своме поларном рогљу.

Раван $B_1S_1C_1$ (сл. 45) постављена је кроз праве S_1B_1 и S_1C_1, које су нормалне на странама SAC и SAB. Стога су и пресек SA страна нормалан на равни $B_1S_1C_1$. Отуда следује да је пресек SA страна нормалан на равни $B_1S_1C_1$ (§ 47). Исто тако је $SB\perp A_1S_1C_1$ и $SC\perp B_1S_1A_1$. Дакле, рогаљ $SABC$ поларан је рогљу $S_1A_1B_1C_1$, што је требало доказати.

§ 64. Теорема. — Ако су два рогља узајамно поларна, свака страна једнога рогља суплементна је одговарајућем диједру другога рогља.

Раван $B_1S_1C_1$ (сл. 45) сече ивицу SA диједра $CSAB$ у тачки A. Како је $SA\perp B_1S_1C_1$, угао $B_1AC_1=\alpha$ нагибни је угао тога диједра. Очигледно је да су углови S_1B_1A и S_1C_1A прави, јер је $S_1B_1\perp ASC$ и $S_1C_1\perp ASB$. Ако ивични угао $B_1S_1C_1$ обележимо са a_1, из четвороугла $AB_1S_1C_1$ добијамо да је $\alpha+a_1=2R$. Исто тако $\beta+b_1=2R$ (у четвороуглу $BA_1S_1C_1$) и $\gamma+C_1=2R$ (у четвороуглу $CA_1S_1B_1$).

С друге стране имамо да је $a+\alpha_1=2R$ (у четвороуглу A_1BSC), $b+\beta_1=2R$ (у четвороуглу B_1ASC), $c+\gamma_1=2R$ (у четвороуглу C_1ASB).

Тиме је теорема доказана.

§ 65. Теорема. — Збир диједара n-страног рогља мањи је од $2n$, а већи од $2n-4$ правих углова.

Ако збир диједара у рогљу означимо са σ, а збир страна његовог поларног рогља са s_1, по претходној теореми (§ 64) добијамо да је

$$\sigma+s_1=n\cdot 2R.$$

Према томе је

$$\sigma<2nR.$$

Како је $s_1<4R$ (§ 61), из претходне једнакости добијамо да је

$$\sigma+s_1-s_1>2nR-4R,$$

или

$$\sigma>(2n-4)R,$$

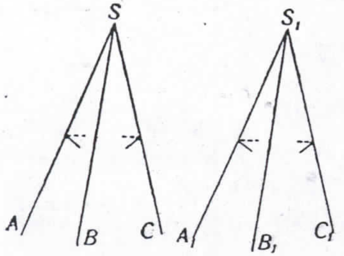
што је требало доказати.

§ 66. Последица. — Збир диједара триједра мањи је од $6R$, а већи од $2R$.

§ 67. Правила о подударности триједара. —

Први случај подударности. — Два триједра су подударна ако су им једнаке по две једнако распоређене стране и диједар захваћен тим странама.

Нека су дата два триједра S и S_1 (сл. 46) са једнако распоређеним елементима. Узмимо да је страна ASB једнака страни $A_1S_1B_1$, страна ASC једнака страни $A_1S_1C_1$ и диједар са ивицом SA једнак диједру са ивицом S_1A_1. Ако триједар S_1 поставимо у триједар S тако да теме S_1 поклопи теме S, ивица S_1A_1 ивицу SA, страна $A_1S_1B_1$ страну ASB, страна $A_1S_1C_1$ страну ASC, очигледно је да ће ивица S_1B_1 поклопити ивицу SB и ивица S_1C_1 ивицу SC, а тиме и страна $B_1S_1C_1$ страну BSC. Тиме је доказана подударност триједара.



Сл. 46

§ 68. *Други случај подударности.* — Два триједра су подударна ако су им једнака по два једнако распоређена диједра и страна на којој су ти диједри.

Ако датим триједрима S_1 и S конструишемо поларне триједре S_1' и S', они ће имати по две стране једнаке и њима захваћене диједре. По претходној теореми (§ 67), поларни триједри S_1' и S' подударни су, а, према томе, и дати диједри S_1 и S.

Доказ би се, међутим, могао извести слично као и у претходној теореми (§ 67), што остављамо ученику, као и доказ осталих случајева подударности, које дајемо у вежбањима.

Вежбања

1) Збир углова које чини полуправа повучена из темена триједра у његовој унутрашњој области са три његове ивице лежи између збира страна триједра и полузбира. Доказати.

Упутство. Сети се сличне теореме код троугла, кад се темена троугла споје са неком тачком која се налази у унутрашњости троугла.

2) Ивични угао који чини ивица SA триједра $SABC$ са бисектрисом наспрамне стране BSC може бити мањи од полузбира, једнак полузбиру или већи од полузбира страна $\widehat{ASB}$, $\widehat{ASC}$: он се налази између тога полузбира и суплемента тога полузбира. Доказати.

Кад је дат положај ивица SB, SC, наћи геометриско место ивице SA под условом да угао који чини ивица SA са бисектрисом угла $\widehat{BSC}$ буде једнак $\dfrac{\widehat{ASB}+\widehat{ASC}}{2}$.

3) Дате су две равни и једна права. Поставити кроз ту праву раван тако да са две дате равни чини равнокраки триједар. (Разликовати два случаја, већ према томе да ли две једнаке стране има да буду у две дате равни или једна од њих да буде у траженој равни).

4) Дат је триједар и једна тачка; поставити кроз ту тачку раван тако да све три ивице триједра имају исти нагиб према тој равни.

5) Кроз теме триједра повући праву тако да све три његове ивице граде с том правом једнаке углове.

Упутство. Из темена одмери три једнаке дужи на ивицама и нађи центар круга који пролази кроз њихове крајње тачке.

6) У сваком равнокраком триједру симетриска раван диједра који чине једнаке стране стоји нормално на трећој страни и дели је на два једнака дела. Доказати.

7) Обрнуто. Триједар је равнокрак:

а) ако је симетриска раван једнога диједра нормална на наспрамној страни;

б) ако раван која пролази кроз једну ивицу и бисектрису наспрамне стране стоји нормално на тој страни. Доказати.

8) Два триједра су подударна ако су им једнаке све три једнако распоређене стране. Доказати.

Упутство. Претпостави да се при полагању једнога триједра у други треће ивице не поклопе. Тада оне са прве две ивице, које се поклапају, чине два равнокрака триједра, чија би заједничка раван симетрије требало да буде наспрамна страна ивица које се не поклапају. Испитај да ли је то могуће и извуци из тога закључак. (Види зад. 6 и 7).

9) Симетриске равни диједара у триједру секу се по једној правој. Исто важи ако се два диједра замене њиховим упоредним диједрима.

Има четири такве праве; оне чине геометриско место тачака једнаких растојања од три стране триједра. Доказати.

10) Ако правоугли триједар $SABC$ (тј. триједар чије су све стране узајамно нормалне и отуда сви његови диједри прави) пресечемо ма којом равни:

а) троугао пресека ABC има као тачку пресека његових висина пројекцију P тачке S на равни ABC;

б) сваки од троуглова SBC, SCA, SAB је средња пропорционала између своје пројекције на равни пресека и пресека ABC;

в) збир квадрата површина та три троугла једнак је квадрату површине троугла ABC.

11) Ако је дат троугао ABC, наћи правоугли триједар чије ивице пролазе кроз темена троугла. – Одредити услов могућности.

12) Пресећи правоугли trијeдар помоћу равни тако да пресек буде једнак датом троуглу.

13) Наћи правоугли тријeдар чије се ивице пројектују у три дате праве на раван која пролази кроз његово теме. - Одредити услов могућности.

14) Бисектрисе упоредних ивичних углова датога тријeдра леже у истој равни (под упоредним ивичним углом подразумева се онај угао који чине један крак датога угла и продужетак другога крака); исто тако бисектрисе два ивична угла и бисектрисе упоредног угла трећем ивичном углу. Свака раван тако добијена чини једнаке углове са све три ивице. Доказати.

15) Равни постављене нормално на стране тријeдра кроз њихове бисектрисе секу се по истој правој која је нормална на равни одређеној у 14 зад.

Шта је геометриско место тачака једнако удаљених од ивица тријeдра?

16) Равни постављене кроз сваку ивицу тријeдра и бисектрису наспрамне стране секу се по једној правој. Доказати.

17) Равни постављене кроз ивице тријeдра нормално на наспрамне стране секу се по једној правој. Доказати.

18) Праве повучене на свакој страни тријeдра кроз његово теме нормално на наспрамну ивицу леже у истој равни. Доказати.

19) Пројекције SA', SB', SC' ивица SA, SB, SC тријeдра на наспрамне стране јесу ивице новога тријeдра чији дијeдри имају као симетриске равни SAA', SBB', SCC'. Доказати.

20) Да ли су могући тријeдри чије су стране:

а) 45^0, 45^0, 90^0 б) 105^0, 118^0, 130^0?

21) У сваком тријeдру збир два дијeдра мањи је од трећега дијeдра увећаног за $2R$.

Упутство. Употреби поларни рогаљ.

22) Ако је у тријeдру $a+b>2R$, тада је $\alpha+\beta>2R$, и обрнуто. Доказати.

Упутство. Пођи од $a>2R-b$ и докажи тврђење помоћу тријeдра чије су ивице SB, SC и продужетак ивице SA.

23) Два тријeдра су подударна, ако су им једнака сва три једнако распоређена дијeдра.

Упутство. Употреби поларни рогаљ.

24) У сваком тријeдру разлика између два дијeдра увек је мања од разлике између $2R$ и трећег дијeдра.

25) Ако у тријeдру два дијeдра имају 130^0 и 75^0, наћи између којих граница лежи трећи дијeдар.

26) Ако су ивични углови тријeдра 70^0 80^0 и 90^0, колики су дијeдри поларног тријeдра?

ГЛАВА ШЕСТА

ПОЛИЈЕДРИ

I ОПШТИ ПОЈМОВИ

§ 69. *Дефиниције.* — Полиједар је геометриско тело ограничено самим равнима (сл. 47. 48 и 49).

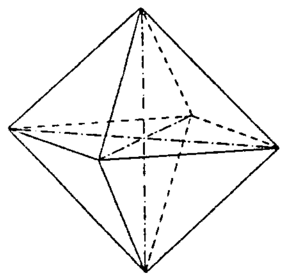
Пресеком тих равни настају многоуглови, који се зову стране полиједра. Стране многоуглова су ивице полиједра, а темена многоуглова су темена полиједра.

Дијагонала полиједра зове се свака дуж која спаја два темена полиједра, а није у страни полиједра. Дијагонална раван зове се свака раван која не садржи страну полиједра, а пролази кроз три његова темена.

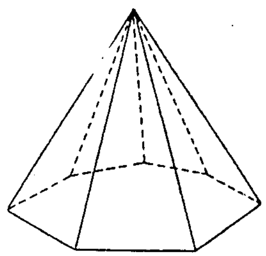
Полиједар може бити конвексан или конкаван. Он је конвексан (испупчен) ако сав лежи само с једне стране равни сваке своје стране, а конкаван (удубљен) у супротном случају.

Ако је полиједар конвексан, његове стране су конвексни многоуглови, а рогљеви које чине стране полиједра што се састају у истом темену исто тако су конвексни.

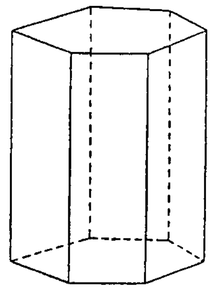
Према броју страна полиједри имају ова имена: тетраедар, са четири стране; пентаедар, са пет страна; хексаедар са шест страна; итд.; октаедар, са осам



Сл. 47



Сл. 48



Сл. 49

страна; итд., додекаедар, са дванаест страна; итд.; икосаедар, са двадесет страна; итд.

Најпростији полиједар је тетраедар.

Међутим, класификација полиједара према броју страна није повољна, као што је била код многоуглова, зато што код полиједара са једнаким бројем страна те стране могу бити скупљене на врло различите начине, како показују, на пример, слике 47, 48 и 49, где три тела имају свако по осам страна.

Површине свих страна заједно образују површину полиједра.

Овде ћемо проучавати само конвексне полиједре.

II ПРИЗМА

§ 70. *Дефиниције.* — Призма је полиједар чије су две стране подударни многоуглови са паралелним странама, а остале стране паралелограми.

Постанак призме можемо замислити овако: Нека је дат ма који многоугао $ABCDE$ у некој равни ρ (сл. 50). Замислићемо да се по његовој контури помера нека права p, која није у равни ρ, тако да остаје паралелна своме првом положају AA_1. Права p описаће део равни (§ 5, 4) између правих AA_1 и BB_1, затим део равни између BB_1 и CC_1 итд. Сви ти делови равни чине заједно призматичну површину. Та површина издваја део простора, који се зове призматични простор. Он је са две стране неограничен.

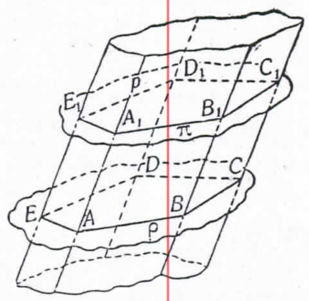
Многоугао по чијој се контури помера права p зове се водиља призматичне површине а права p, која својим померањем (транслацијом, § 93) производи ту површину, зове се производиља те површине. Линије пресека равни које одређују површину, тј. праве AA_1, BB_1 итд зову се ивице површине.

Очигледно је да ће облик призматичне површине зависити од облика многоугла водиље и од положаја праве производиље према равни тога многоугла.

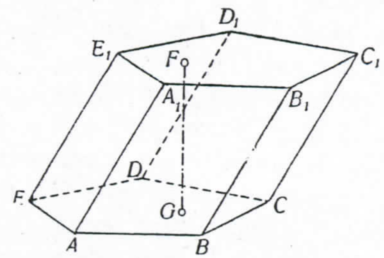
Ако ивице призматичне површине пресечемо двема паралелним равнима, потпуно ћемо ограничити призматични простор. Тако настаје полиједар који се зове призма (сл. 51).

Нека је раван ρ_1, у којој је многоугао $ABCDE$ једна од тих паралелних равни. Ако на ивици AA_1 узмемо произвољну тачку A_1 и кроз њу поставимо раван $\pi \parallel \rho$, раван π сече ивице површине у тачкама A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 (§ 26, 2).

Тиме добијамо многоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$, који је подударан са многоуглом $ABCDE$ и чије су стране паралелне одговарајућим странама тога многоугла. Заиста, $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$



Сл. 50



Сл. 51

итд. (јер су то линије пресека равни ABB_1A_1, BCC_1B_1 итд. са равнима ρ и π, које су паралелне: § 26, 4): затим, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle B_1C_1D_1 = \sphericalangle BCD$ итд. (§ 29); и, најзад, $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$ итд. (јер су ABB_1A_1, BCC_1B_1 итд. паралелограми).

Посматрани паралелни пресеци чине основе призме ($ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$), а паралелограми њене бочне стране (ABB_1A_1, BCC_1B_1 итд), које заједно чине бочну површину или омотач призме.

Ивице заједничке основама и бочним странама призме зову се основне (AB, BC итд. и A_1B_1, B_1C_1 итд.), а оне које су заједничке по двема странама зову се бочне ивице (AA_1 BB_1 итд). Растојање између равни основа зове се висина призме (FG у сл. 51)

§ 71. *Врсте призама.* — Према броју страна многоугла основе призма може бити тространа, четворострана, петострана итд.

Према положају бочних ивица у односу на основу призме се деле на праве и косе. Призма је права, ако су бочне ивице нормалне на основи; иначе је коса. Кад је призма права, висина је једнака бочној ивици, а бочне стране су правоугаоници.

Ако је основа праве призме правилни многоугао, призма се зове правилна. У том случају све бочне стране су подударни правоугаоници.

Кад су све ивице неке призме једнаке, она се зове *једнакоивична*.

Призма чија је основа паралелограм зове се *паралелепипед*. Све стране такве призме су паралелограми. Ако је паралелепипед прав, његове бочне стране су правоугаоници. Кад су основе праве призме правоугаоници, она се зове *правоугли паралелепипед* или *квадар*. Очигледно је да су све стране такве призме правоугаоници.

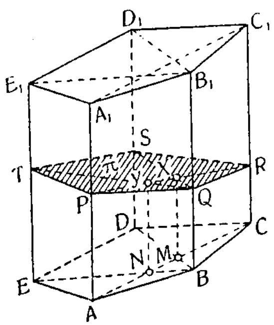
Дужине трију ивица правоуглог паралелепипеда које нису паралелне међу собом (на пример, дужине трију ивица које полазе из истог темена) зову се три *димензије*.

Ако правоугли паралелепипед има једнаке све три своје димензије, зове се *коцка*. У том случају све стране призме су квадрати.

§ 72. Равни пресеци призме. — а) Видели смо да је сваки пресек призме који је паралелан основи многоугао подударан са основом (§ 70). Како су одговарајуће стране подударних многоуглова паралелне, лако је такав пресек и конструисати: треба само на једној бочној ивици (AA_1, сл. 50) узети тачку пресека (A_1) и из ње повући паралелу (A_1B_1) са одговарајућом основном ивицом (AB), затим из пресека те паралеле са суседном бочном ивицом (B_1) повући паралелу (B_1C_1) са другом одговарајућом основном ивицом (BC) итд. Тада добијени многоугао ($A_1B_1C_1D_1E_1$) претставља тражени пресек.

б) Ако је пресек призме кос према основи, он се може конструисати на следећи начин:

Нека је дата призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (сл. 52). Претпоставимо да раван π пресека пролази кроз тачке P, Q, R на ивицама AA_1, BB_1 и CC_1. Она је одређена тим трима тачкама (§ 2, 1) и, према томе, пресеци S, T равни π са бочним ивицама DD_1 и EE_1 више нису произвољне тачке. Треба их, дакле, одредити конструкцијом.



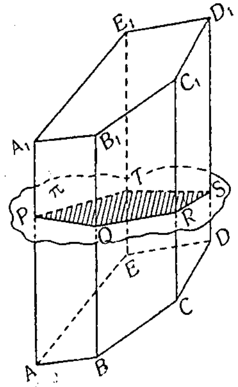
Сл. 52

Спојимо тачку P са тачком Q и тачку Q са тачком R. Затим спојимо тачке A, C и тачке P, R. Дијагонална раван ACC_1A_1 садржи праве AC и PR. Ако спојимо тачку B са тачком D, права BD сече праву AC

у тачки M. Из те тачке повучемо праву $MX \parallel AP$. Она сече праву PR у тачки X. Кроз тачке Q, X повучемо праву. Она сече ивицу DD_1 у траженој тачки S, јер је права QX линија пресека равни π и дијагоналне равни BB_1D_1D.

Ако, сад, тачку B спојимо са тачком E, права BE ће пресећи праву AC у тачки N. Права $N\text{У} \parallel AP$ сече праву PR у тачки У. Најзад, права $Q\text{У}$ сече бочну ивицу EE_1 у траженој тачки T. Заиста, тачка T лежи на правој $Q\text{У}$, јер је та права линија пресека равни π и дијагоналне равни BB_1E_1E.

в) Пресек косе призме чија је раван нормална на бочним ивицама зове се *нормални пресек косе призме* (сл. 53).



Сл. 53

Нека је дата, на пример, призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Ако на једној њеној бочној ивици, на пример AA_1, узмемо произвољну тачку P, и кроз њу поставимо раван $\pi \perp AA_1$, она ће пресећи све бочне ивице под правим углом (§ 34). Линије пресека PQ, QR итд. равни π са бочним странама биће нормалне на бочним ивицама AA_1, BB_1 итд. (§ 31). Према томе, многоугао $PQRST$ је нормални пресек дате призме.

Конструкција косе слике пресека изводи се исто тако као и конструкција косе слике ма којег пресека косог према основи, јер се три његове тачке, у општем случају, могу узети произвољно, али се ипак гледа да слика изазива просторну претставу оригинала.

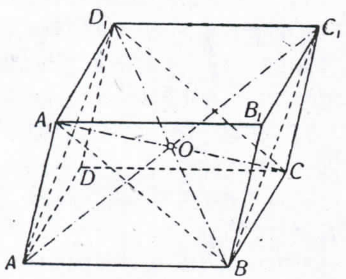
§ 73. Паралелепипед. — Теореме:

1) *Код сваког паралелепипеда наспрамне стране су паралелне и подударне.*

2) *Све дијагонале паралелепипеда секу се у истој тачки, која полови сваку дијагоналу.*

3) *У правоуглом паралелепипеду квадрат дијагонале једнак је збиру квадрата његових димензија.*

а) Нека је дат ма који паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (сл. 54). По дефиницији, све стране паралелепипеда су паралелограми (§ 71). Његове основе $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ су подударне, јер је паралелепипед призма (§ 70). Ивица $AD \parallel BC$, јер су наспрамне стране у паралелограму $ABCD$; ивица $AA_1 \parallel BB_1$, јер су бочне ивице призме; дакле је страна AA_1D_1D паралелна страни BB_1C_1C (§ 24). Затим, $AD = BC$, $AA_1 = BB_1$, јер су наспрамне стране у паралелограмима $ABCD$ и AA_1B_1B; најзад, $\sphericalangle A_1AD = \sphericalangle B_1BC$ (§ 29); дакле су стране AA_1D_1D и BB_1C_1C подударне.



Сл. 54

На исти начин може се доказати паралелност и подударност страна AA_1B_1B и CC_1D_1D.

Одатле видимо да се свака страна паралелепипеда може узети за основу.

б) Узмимо две произвољне (од четири) дајагонале A_1C и BD_1 датог паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (сл. 54). Ако спојимо тачке A_1B, и C, D_1, добијамо четвороугао A_1BCD_1, који је паралелограм, јер је $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$ и $A_1D_1 = B_1C_1$, $BC = B_1C_1$, а отуда и $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$. Дијагонале A_1C и BD_1 паралелепипеда уједно су дијагонале паралелограма A_1BCD_1, које њихова тачка O пресека полови

Да и друге две дијагонале AC_1 и B_1D пролазе кроз исту тачку O, која их полови, може се доказати на сличан начин.

Ако, наиме, спојимо тачке A, D_1 и B, C_1, добијамо паралелограм ABC_1D_1, у коме је дијагонала AC_1 паралелепипеда уједно дијагонала тога паралелограма.

Остављамо ученику да доврши доказ.

в) У правоуглом паралелепипеду $ABCDEFGH$ (сл. 55) поставићемо дијагоналну раван кроз ивице AE и CG. У њој је дијагонала CE паралелепипеда и дијагонала AC основе $ABCD$. Како је ивица AE нормална на основи, угао CAE је

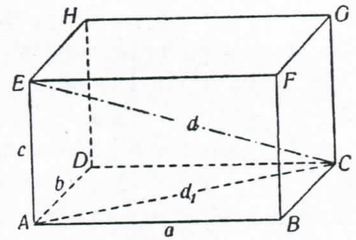
прав. Ако дијагоналу CE паралелепипеда обележимо са d, дијагоналу AC основе са d_1, и ако су димензије $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$, из правоуглог троугла ACE добијамо

$$\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AE}^2,$$

или

$$d^2 = d_1^2 + c^2.$$

Како је $d_1^2 = a^2 + b^2$,



Сл. 55

заменом произилази:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

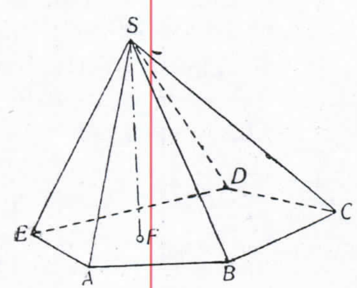
§ 74. *Последице.* —

1) Све дијагонале правоуглог паралелепипеда једнаке су.

2) Дијагонала коцке ивице a једнака је $a\sqrt{3}$.

III ПИРАМИДА

§ 75. *Дефиниције.* — Пирамида је полиједар чија је једна страна ма који многоугао, а остале стране троуглови који чине рогаљ. Отуда произилази да је пирамида тело које се добија кад се све ивице рогља пресеку једном равни (сл. 56). Страна која је у тој равни зове се основа пирамиде ($ABCDE$). Остале стране зову се бочне стране (ASB, BSC итд.). Оне се све састају у једној тачки, која се зове врх пирамиде (S), и заједно чине бочну површину или омотач пирамиде. Ивице које полазе из врха пирамиде су бочне ивице пирамиде (SA, SB итд.), а стране основе су основне ивице пирамиде (AB, BC итд.). Растојање врха пирамиде од равни основе зове се висина пирамиде (SF).



Сл. 56

§ 76. *Врсте пирамида.* — Пирамида је тространа или тетраедар, четворострана, петострана итд. према томе да ли јој је основа троугао, четвороугао, петоугао итд.

Ако је пирамида тространа, све стране су јој троуглови и сваки од њих може бити основа пирамиде.

Бочне ивице пирамиде могу бити све једнаке. Јасно је да је основа такве пирамиде тетивни многоугао, јер се крајње тачке бочних ивица које нису у врху пирамиде налазе на периферији круга чији је центар подножје нормале спуштене из врха пирамиде на основу (§ 53, г).

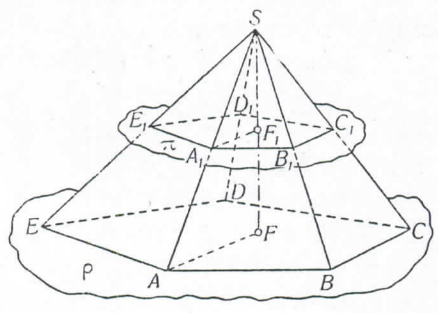
Ако је основа пирамиде једнаких бочних ивица правилни многоугао, пирамида је п р а в и л н а. Све бочне стране такве пирамиде су равнокраки подударни троуглови. Висина једног таквог троугла зове се а п о т е м а правилне пирамиде.

Код правилне пирамиде, у неким случајевима (у којима?), бочне ивице могу бити једнаке основним ивицама. Таква пирамида се зове ј е д н а к о и в и ч н а.

§ 77. Равни пресеци пирамиде. — Слично као што смо конструисали равне пресеке призме (§ 72), можемо конструисати и равне пресеке пирамиде.

а) Најпростији случај конструкције пресека пирамиде једном равни претставља пресек паралелан основи пирамиде.

Нека је, на пример, дата пирамида $SABCDE$ (сл. 57) са основом $ABCDE$ у равни ρ. Да је пресечемо равни која је паралелна основи, узећемо неку тачку A_1 на бочној ивици SA и кроз њу поставити раван π паралелну равни ρ. Пресеци A_1B_1 и AB равни SAB са равнима π и ρ међу собом су паралелни (§ 26, 4). Исто тако је $B_1C_1 \parallel BC$ итд. Тако добијемо пресек $A_1B_1C_1$-D_1E_1 паралелан основи $ABCDE$.



Сл. 57

Према томе, конструкцију посматраног пресека и з в е ш ћ е м о овако:

Из тачке A_1, на бочној ивици SA, повући ћемо праву $A_1B_1 \parallel AB$, затим из пресека B_1 те праве са бочном ивицом SB праву $B_1C_1 \parallel BC$ итд. Тако настаје многоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$, који је тражени пресек.

б) На тај начин настаје геометриско тело $ABCDE$ $A_1B_1C_1D_1E_1$, које се зове з а р у б љ е н а п и р а м и д а. Паралелне стране зову се о с н о в е зарубљене пирамиде. Остале стране чине б о ч н у п о в р ш и н у или о м о т а ч зарубљене пирамиде. Бочне стране су трапези. Растојање између равни основа (F_1F) зове се в и с и н а зарубљене пирамиде. Пирамида $SA_1B_1C_1D_1E_1$ зове се д о п у н а зарубљене пирамиде.

Зарубљена пирамида је п р а в и л н а, ако је постала таквим пресеком правилне пирамиде. Њене бочне стране су равнокраки подударни трапези. Висина једног трапеза зове се а п о т е м а правилне зарубљене пирамиде.

§ 78. Теореме. — А к о с е п и р а м и д а п р е с е ч е р а в н и к о ј а ј е п а р а л е л н а о с н о в и,

1) б о ч н е и в и ц е и в и с и н а п о д е љ е н е с у у и с т о ј р а з м е р и;

2) п р е с е к ј е м н о г о у г а о с л и ч а н м н о г о у г л у о с н о в е;

3) п о в р ш и н а п р е с е к а и п о в р ш и н а о с н о в е о д н о с е с е к а о к в а д р а т и њ и х о в и х р а с т о ј а њ а о д в р х а п и р а м и д е.

а) Нека је, на пример, дата пирамида $SABCD$ (сл. 57) и њен пресек $A_1B_1C_1D_1E_1$, паралелан основи $ABCDE$, и подножја F_1 и F нормале спуштене из тачке S на паралелне равни π и ρ, у којима су пресек и основа.

Како је $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $D_1E_1 \parallel DE$, $A_1F_1 \parallel AF$ (§ 26, 4), следује из сличности троуглова SAB и SA_1B_1, SBC и SB_1C_1, SDE и SD_1E_1, SFA и SF_1A_1 да је

$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \cdots = \frac{SE}{SE_1} = \frac{SF}{SF_1},$$

што је требало доказати.

б) Многоуглови $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ имају једнаке углове: $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$ итд. (§ 29); затим, из пропорција

$$\frac{SB}{SB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}, \quad \frac{SB}{SB_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

следује пропорција

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

па затим, на исти начин,

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \text{ итд.}$$

Из тога закључујемо да су посматрани многоуглови слични.

в) Знамо да се површине сличних многоуглова односе као квадрати хомологних страна. Према томе, ако површину основе пирамиде обележимо са P, а површину њој паралелног пресека са p, можемо написати:

$$\frac{P}{p} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A_1B_1}^2}.$$

Како је, међутим,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SA}{SA_1} = \frac{SF}{SF_1},$$

добијамо да је

$$\frac{P}{p} = \frac{\overline{SF}^2}{\overline{SF_1}^2},$$

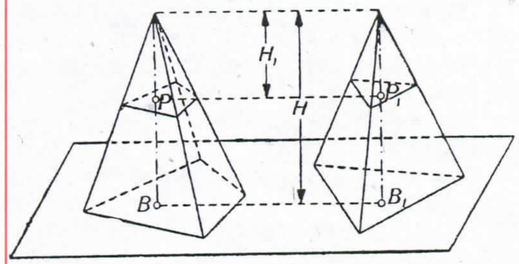
што је требало доказати.

§ 79. Последица. — Обе основе правилне зарубљене пирамиде су правилни многоуглови, а бочне стране су равнокраки подударни трапези. Висина ма кога од тих трапеза зове се а п о т е м а правилне зарубљене пиримиде.

§ 80. Теорема. — А к о с е д в е п и р а м и д е ј е д н а к и х в и с и н а п р е с е к у р а в н и м а к о ј е с у п а р а л е л н е о с н о в а м а н а и с т и м р а с т о ј а њ и м а о д в р х о в а, п о в р ш и н е п р е с е к а п р о п о р ц и о н а л н е с у п о в р ш и н а м а о с н о в а.

Нека су B и B_1 површине основа двеју пирамида једнаких висина H и P, P_1 површине пресека равнима паралелним основама на истом растојању H_1 од њихових врхова (сл 58).

На основу теореме 3 у § 78 знамо да је



Сл. 58

$$\frac{P}{B} = \frac{H_1^2}{H^2} \quad \text{и} \quad \frac{P_1}{B_1} = \frac{H_1^2}{H^2}.$$

Одатле следује да је

$$\frac{P}{B} = \frac{P_1}{B_1},$$

или

$$\frac{P}{P_1} = \frac{B}{B_1},$$

што је требало доказати.

§ 81. Последица. — А к о с е п и р а м и д е ј е д н а к и х о с н о в а и в и с и н а п р е с е к у р а в н и м а п а р а л е л н и м о с н о в а м а н а и с т о м р а с т о ј а њ у о д в р х о в а, п о в р ш и н е п р е с е к а с у ј е д н а к е.

Заиста, ако је $B_1 = B$, из једнакости $\frac{P}{P_1} = \frac{B}{B_1}$ следује $P = P_1$.

В е ж б а њ а

1) Правилну а) петострану, б) шестострану призму пресећи равни косом према основи.

2) Правоугли паралелепипед пресећи равни нормалном на дијагонали.

3) Дате су три праве од којих по две нису у истој равни; конструисати паралелепипед који има по једну ивицу на свакој од тих правих.

4) Нека су A, C_1 два наспрамна темена паралелепипеда $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$; B, D, A_1, темена суседна тачки A; D_1, B_1, C, темена суседна тачки C_1. Доказати:

а) да дијагонала AC_1 пролази кроз тежишта троуглова BDA_1, D_1B_1C;

б) да је та тежишта деле на три једнака дела;

в) да су троуглови BDA_1, D_1B_1C равнострани и да је права AC_1 нормална на њиховим равнима, ако је посматрани паралелепипед коцка.

5) Дате су две праве a и b које не леже у истој равни. Тражи се:

а) Геометриско место центара паралелепипеда који имају по једну своју ивицу на свакој од те две праве.

б) Геометриско место центара паралелепипеда који имају по једну своју ивицу на свакој од те две праве, а једну ивицу паралелну некој правој c тако да стране које садрже ивице a и b буду ромби.

6) Коцку пресећи равни која пролази кроз дату тачку и стоји нормално на дијагонали. Проучити облике таквих пресека, ако се дата тачка помера по дијагонали.

7) Дата је ивица a коцке. Наћи најкраће растојање између дијагонале и ивице која се не сече са дијагоналом. Нацртати.

8) Конструисати коцку кад је дата њена дијагонала.

9) Доказати да је збир квадрата свих дијагонала паралелепипеда једнак збиру квадрата свих његових ивица.

Упутство. Сети се теореме из планиметрије да је збир квадрата дајагонала у сваком паралелограму једнак збиру квадрата свих његових страна.

10) У правом паралелепипеду основне ивице дужине 3 cm и 4 cm чине угао од 60°, а бочна ивица је средња пропорционална између тих ивица. Одредити дијагоналу паралелепипеда.

11) Дата је правилна тространа једнакоивична призма са ивицом $a=8$ cm. Кроз основну ивицу и средину осе призме пролази раван. Наћи површину пресека.

12) Кроз једну основну ивицу праве тростране призме постављена је раван тако да је према основној равни нагнута под углом од 45° и да сече наспрамну бочну ивицу. Ако је површина основе једнака $B=200$ cm², наћи површину пресека.

13) Висина пирамиде подељена је на четири једнака дела, и кроз сваку деону тачку постављена је раван паралелно основи. Површина основе је 800 cm². Израчунати површине пресека.

14) Правилна осмострана пирамида основне ивице $a=12$ cm пресечена је паралелно основи једном равни која дели висину у размери 3 : 4 рачунајући од врха. Израчунати површину пресека.

15) Рогаљ је пресечен двема паралелним равнима тако да су пресечене све његове ивице. Ако отсечци на једној ивици, рачунајући од темена износе a и b, а разлика површина пресека износи d, израчунати површине тих пресека.

16) Две пирамиде једнаких основа, а различитих висина, пресеку се равни на истом растојању од основе. Наћи у ком су односу површине пресека тих пирамида, ако је висина једне трипут већа од друге и ако је растојање пресека од основе једнако $\frac{2}{3}$ мање висине.

17) Правилна шестострана пирамида, чија је висина 25 cm а основна ивица 5 cm, пресечена је равни паралелно основи. Израчунати растојање те равни од врха пирамиде, кад је површина пресека $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm².

18) На ком растојању од врха пирамиде висине H треба пресећи ту пирамиду па да површина пресека износи половину површине основе?

19) Ако се пирамида пресече равни паралелно основи тако да се висина преполови, израчунати како се односе површине пресека и основе.

20) Висина пирамиде износи 16 m; површина основе једнака је 512 m². На ком растојању од основе треба пресећи пирамиду паралелно основи па да пресек износи 50 m²?

21) Правилна четворострана пирамида има основну ивицу $a=16$ cm и висину $H=12$ cm. Израчунати отсечак бочне ивице, рачунајући од основе, ако је пирамида пресечена равни паралелно основи и ако површина тога пресека износи 120 cm².

22) У правилну четворострану пирамиду, чија је основна ивица a и висина H, поставити коцку тако да јој четири темена леже у основи, а друга четири на бочним ивицама. Нацртати косу слику и израчунати ивицу коцке, ако је $a=6$ cm, $H=8$ cm.

23) Нека су B и B_1 основе зарубљене пирамиде а H њена висина; наћи на коме растојању од доње основе, паралелно тој основи, треба пресећи пирамиду па да површина пресека буде геометриска средина између обе основе.

24) Израчунати у ком односу треба поделити висину ма које пирамиде да се површина пресека паралелног основи односи према површини основе као висина добијене зарубљене пирамиде према висини дате пирамиде.

25) Ако се зарубљена пирамида пресече равни паралелно основи кроз средину висине, површина пресека је једнака полузбиру аритметичке и геометриске средине површина обе основе. Доказати.

26) Основе зарубљене пирамиде су $B=1{,}44$ dm² $B_1=1$ dm²; ако ту пирамиду пресечемо равни паралелно основи тако да дели висину пирамиде у размери 2 : 3 рачунајући од веће основе, колика је површина пресека?

27) Висина зарубљене пирамиде чије су основе B и B_1 подељена је двема равнима паралелно основи на три једнака дела. Израчунати површине пресека. (На пример: $B=64{,}8$ cm², $B_1=28{,}8$ cm².

IV ПРАВИЛНИ ПОЛИЈЕДРИ

§ 82. *Дефиниција и врсте.* — За конвексан полиједар кажемо да је п р а в и л а н, ако су му све стране правилни подударни многоуглови и сви диједри подударни.

Да утврдимо које врсте правилних полиједара могу постојати, поћи ћемо од збира ивичних углова код испупченог рогља. Како је тај збир мањи од $4R$ (§ 61), јасно је да не може постојати ниједан полиједар са рогљем чији би збир ивичних углова био једнак $4R$ или већи од $4R$.

а) Узећемо прво рогаљ чије су стране правилни троуглови. Најпростији случај претставља тријeдар. Збир његових ивичних углова износи $60^\circ \times 3 = 180^\circ$, или $2/3\ R \times 3 = 2R < 4R$. Затим ћемо узети рогаљ чије стране чине четири равнострана троугла. Збир његових ивичних углова износи $60^\circ \times 4 = 240^\circ$, или $2/3R \cdot 4 = 8/3R < 4R$. Најзад ћемо узети рогаљ састављен од пет равностраних троуглова. Збир ивичних углова тога рогља износи $60^\circ \times 5 = 300^\circ$, или $2/3R \times 5 = 10/3R < 4R$. Очигледно је да не може постојати рогаљ који би био састављен од шест равностраних троуглова, јер би збир његових ивичних углова износио $60^\circ \times 6 = 360^\circ$ или $4R$.

Из тога закључујемо да могу постојати само три врсте правилних полиједара чије су стране правилни троуглови, а то су:

1) *Правилни тетраедар* (сл. 59); он има 4 стране, 4 темена и 6 ивица.

2) *Правилни октаедар* (сл. 60); он има 8 страна, 6 темена и 12 ивица.

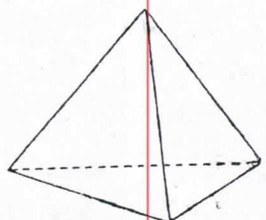
3) *Правилни икосаедар* (сл. 61); он има 20 страна, 12 темена и 30 ивица.

б) Ако узмемо да су стране рогља квадрати, збир ивичних углова у тријeдру износи $90^\circ \times 3 = 270^\circ$, или $3R < 4R$. Како не може постојати рогаљ чију површину образују четири квадрата, јер је $90^\circ \times 4 = 360^\circ$, или $4R$, јасно је да је могућан само један правилни полиједар чије су стране квадрати, а то је *правилни хексаедар* или коцка (сл. 62); он има 6 страна, 8 темена и 12 ивица.

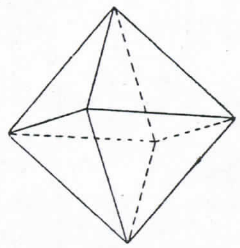
в) Нека су стране рогља правилни петоуглови. Збир ивичних углова у тријeдру износи $108^\circ \times 3 = 324^\circ$, или $6/5R \times 3 = 18/5R < 4R$. Код рогља чије би стране образовала четири правилна петоугла збир ивичних углова износио би $108^\circ \times 4 = 432^\circ$, или $6/5R \times 4 = 24/5R > 4R$, а такав рогаљ је немогућан. Према томе, може постојати само једна врста правилних полиједара чија је површина састављена од правилних петоуглова, а то

је *правилни додекаедар* или *правилни пентагонални додекаедар*; он има 12 страна, 20 темена и 30 ивица (сл. 63).

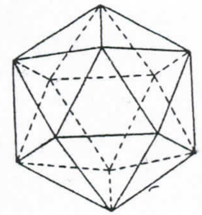
Дакле, како видимо, може да постоји свега пет врста правилних полиједара.



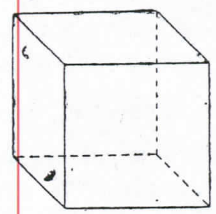
Сл. 59



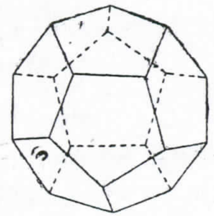
Сл. 60



Сл. 61



Сл. 62

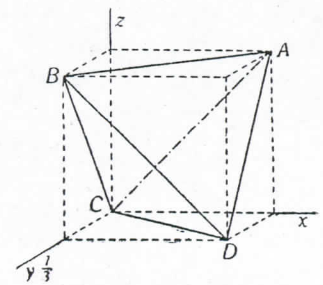


Сл. 63

§ 83. *Конструкције правилних полиједара.*

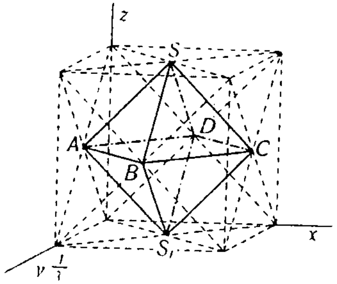
а) За конструкцију правилних полиједара можемо употребити коцку, чија нам је конструкција као призме позната (§ 70 и § 71). Притом претпостављамо да нам је из нижег течаја познато како се коцка црта у косој паралелној пројекцији.

б) Ако у датој коцки, претстављеној на сл. 64 ($\alpha = 30^\circ$ $q = 1/3$), њена четири темена A, B, C, D спојимо међу собом, настаје правилни тетраедар $ABCD$. Заиста, ивице добијеног полиједра су дијагонале страна коцке и стога све међу собом једнаке. Према томе, стране добијене пирамиде су правилни подударни троуглови.



Сл. 64

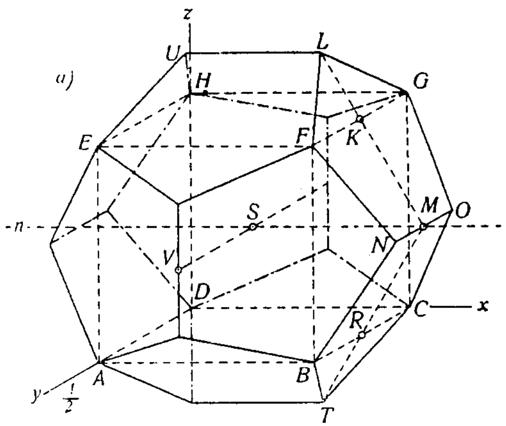
в) Нека је дата коцка својом косом сликом (сл. 65, $\alpha = 30^0$ $q = 1/3$). Средине њених страна су темена правилног октаедра. Остављамо ученику да то докаже.



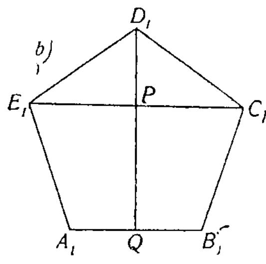
Сл. 65

г) Нека је дат правилни петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$ (сл. 66 b) у правој величини. Помоћу њега и коцке, чија је ивица једнака дијагонали C_1E_1 датог петоугла, можемо конструисати правилни додекаедар (сл 66, a) на овај начин:

У средини квадрата $BCGF$ коцке повучемо нормалу n на раван тога квадрата; она пролази кроз средину S дате коцке (зашто?). Сад преносимо петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$ на коцку тако да његова дијагонала C_1E_1 поклопи ивицу FG коцке. Због датог скраћења $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ она ће на слици бити једнака половини своје праве величине. Висина D_1Q петоугла пролазиће кроз средину K ивице FG, а њена крајња тачка Q пашће у неку тачку M на нормали n. Ту тачку ћемо добити кад PQ пренесемо из тачке K до



Сл. 66 a



Сл. 66 b

пресека са n. PQ узимамо у правој величини, јер је висина петоугла у том положају паралелна равни пројекције. Затим,

MK продужимо преко K и од K пренесемо PD_1 у правој величини. Тако добијамо тачку L. Кроз тачку M повучемо паралелу оси y и из те тачке пренесемо с једне и с друге стране по четвртину (због скраћења $q = 1/2$) основице A_1B_1 петоугла. Најзад, спојимо тачке N и F, O и G, F и L, G и L. Тим смо пренели дати петоугао и конструисали његову косу слику. Затим кроз тачку M и средину R ивице BC повучемо праву и од M пренесемо дуж $MT = ML$. Тиме је одређен и други петоугао $ONBTC$.

Даља конструкција изводи се овако:

Кроз тачку L повучемо праву паралелно ивици EF коцке и на њој одмеримо праву дужину $A_1B_1 = LU$ стране петоугла, јер је ивица LU паралелна равни пројекције. Потом кроз тачку S повучемо паралелу оси y и на њој одмеримо дуж $SV = 1/2\ SM$; кроз тачку V пролази вертикална ивица, која се на слици приказује у правој величини A_1B_1. Слично се добијају и остале ивице и темена додекаедра, како се разабира из слике.

Остављамо ученику да докаже могућност таквог састављања петоуглова у додекаедар.

д) Правилни икосаедар конструише се тако да се средина свих страна додекаедра узму за темена полиједра.

Вежбања

1) Састави а) два правилна тетраедра, б) две коцке, у нови полиједар тако да страна једног тела поклопи страну другог. Да ли су ти добијени полиједри правилни?

2) Доказати да су центри страна октаедра темена коцке.

3) Доказати да су средине ивица правилног тетраедра темена правилног октаедра.

4) Ако се четири стране правилног октаедра од којих се по две не састају у истој ивици, продуже до пресека, настаје правилни тетраедар. Доказати.

5) Све четири висине правилног тетраедра једнаке су и секу се у истој тачки. Та тачка дели сваку висину у размери 3 : 1 рачунајући од темена. Доказати.

6) Ако се из ма које тачке у унутрашњости правилног тетраедра спусте нормале на све четири његове стране, збир тих нормала једнак је висини тетраедра. Доказати.

7) Ако се правилни тетраедар пресече равни паралелном двема супротним ивицама, пресек је паралелограм. Проучити мењање површине тога паралелограма.

8) У сваком правилном октаедру постоје три дужи од којих свака спаја по два супротна темена; оне су једнаке, секу се у истој тачки (у центру октаедра) и стоје узајамно нормално. Доказати.

9) Осам страна правилног октаедра чине четири пара паралелних равни са истим растојањем. Доказати.

10) У сваком правилном икосаедру може се свако теме узети за врх правилне петостране пирамиде, чије су бочне стране пет страна икосаедра што се сустичу у једној тачки. Основе тих дванаест пирамида ограничавају правилни додекаедар. Доказати.

11) Пресећи правилни додекаедар равни која пролази кроз његов центар и средине две ивице са заједничким крајем. Какав облик има пресек?

12) Продужеци пет ивица правилног додекаедра који полазе од темена исте стране, а не леже у тој страни, секу се у истој тачки. Ако један од тих продужетака, рачунајући од темена па до пресека с другим, пресечемо по златном пресеку, већи део је једнак ивици додекаедра. Доказати.

13) Кроз ивицу AD правилног октаедра $ABCDEF$ постављена је раван која чини пресек $AGHD$. Доказати да је тај пресек трапез и да се његове дијагонале секу у тачки J на главној оси EF октаедра.

Затим спој тачку H са B и G са C, а потом пресек K тих правих спој са тачком J; докажи да је дуж JK паралелна дужи AB.

Конструисати октаедар кад је дато GH и JK.

V ПОВРШИНЕ ПОЛИЈЕДАРА

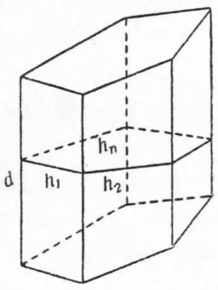
§ 84. Површина призме. — Како је површина сваког полиједра једнака збиру површина свих његових страна, површина призме једнака је збиру површина двеју основа и бочних страна или омотача.

Ако површину основе означимо са B, површину омотача са M, а површину призме са P, можемо написати:

$$P = 2B + M.$$

Кад је призма коса, површина омотача израчунава се помоћу њеног нормалног пресека (§ 72, в).

Нека је дата ма која призма са својим нормалним пресеком (сл. 67). Површина омотача једнака је збиру површина паралелограма који имају за основицу бочну ивицу призме, а за висине стране нормалног пресека. Ако дужину бочне ивице обележимо са d, а стране нормалног пресека редом са $h_1, h_2, \ldots, h_n$, површина омотача је



Сл. 67

$$M = dh_1 + dh_2 + \cdots + dh_n,$$

или

$$M = d\,(h_1 + h_2 + \cdots + h_n).$$

Збир страна нормалног пресека чини његов обим. Ако тај обим означимо са s, можемо написати

$$M = ds.$$

Тиме се добија ова

Теорема. — Површина омотача призме једнака је производу бочне ивице и обима нормалног пресека.

Последица 1. — Површина омотача праве призме једнака је производу обима основе и висине.

Последица 2. — Ако су a, b, c димензије правоуглог паралелепипеда, његова површина једнака је

$$P = 2\,(ab + ac + bc),$$

тј. површина правоуглог паралелепипеда једнака је двоструком збиру свих производа по две разне димензије.

Последица 3. — Ако је a ивица коцке, њена површина једнака је

$$P = 6a^2,$$

тј. површина коцке је једнака шестоструком квадрату ивице.

§ 85. Површина пирамиде. — Површину пирамиде чини збир површина основе и омотача. Ако површину пирамиде

означимо са P, површину основе са B, а површину омотача са M, површину пирамиде можемо изразити овако:

$$P = B + M.$$

Да се израчуна површина омотача, мора се, у општем случају, израчунати површина сваког троугла бочне стране, а затим се резултати сабирају.

Ако је пирамида правилна, њен омотач чине равнокраки подударни троуглови (§ 76). Површина једне бочне стране чија је основица a и висина h једнака је $\frac{ah}{2}$. Ако је омотач састављен из n таквих троуглова, његова површина износи

$$M = n \cdot \frac{ah}{2} = \frac{na}{2} \cdot h.$$

Како је производ na обим основе пирамиде а h апотема пирамиде, можемо рећи:

Теорема. — Површина омотача правилне пирамиде једнака је полупроизводу обима основе и апотеме.

§ 86. Површина зарубљене пирамиде. — Површина зарубљене пирамиде једнака је збиру површина B и B_1 њених основа и површине M омотача, тј.

$$P = B + B_1 + M.$$

Бочне стране зарубљене пирамиде су трапези. Да се израчуна површина њеног омотача, потребно је прво, у општем случају, израчунати површине свих трапеза и потом резултате сабрати.

Ако је зарубљена пирамида правилна, њен омотач образују равнокраки подударни трапези. Површина једног трапеза чије су основице a и b а висина h једнака је $\frac{a+b}{2} \cdot h$. Ако пирамида има n бочних страна, површина омотача је

$$M = \frac{n(a+b)}{2} \cdot h.$$

Како $n(a+b)$ значи збир обима обе основе пирамиде а h апотему пирамиде, можемо написани израз изрећи овако:

Теорема. — Површина омотача правилне зарубљене пирамиде једнака је производу полузбира обима обе основе и апотеме.

Вежбања

1) Израчунати ивицу коцке и њену површину, кад је збир дијагонале стране и дијагонале коцке s ($s = 20$ cm).

2) Колико пута је већа површина једне коцке од површине друге коцке, ако је ивица прве двапута већа од ивице друге?

3) Колико пута мора бити већа ивица једне коцке од ивице друге коцке па да јој површина буде двапута већа?

4) Површина правоуглог паралелепипеда је 214 cm², а неједнаке основне ивице су 5 cm и 6 cm. Израчунати бочну ивицу и површину омотача.

5) Израчунати површину правоуглог паралелепипеда са квадратном основом, кад су дати обим $s = 21$ дијагоналног пресека и једна његова дијагонала $d = 7\frac{1}{2}$.

6) Дате су размере $a:b:c = m:n:p$ трију ивица правоуглог паралелепипеда које се сустичу у једном темену и дијагонала основе (ab). Израчунати површину ($d = 15$, $m = 3$, $n = 4$, $p = 5$).

7) Основне ивице правог паралелепипеда су 10 cm и 17 cm; једна дијагонала основе износи 21 cm; већа дијагонала паралелепипеда је 29 cm. Израчунати површину паралелепипеда.

8) Основа правог паралелепипеда је ромб, а површине дијагоналних пресека су p и q. Израчунати површину омотача.

9) Основа паралелепипеда је квадрат; једно теме горње основе има исто растојање од свих темена доње основе. Ако је основна ивица a и бочна ивица b, израчунати површину паралелепипеда, дијагонале и површине дијагоналних пресека.

10) Доказати да је збир квадрата свих дијагонала страна сваког правоуглог паралелепипеда једнак двоструком збиру квадрата свих дијагонала тога тела.

11) Површина правилне једнакоивичне призме износи a квадратних метара. Израчунати ивицу кад је основа а) правилни троугао, б) правилни шестоугао.

12) Основне ивице праве тростране призме су 25 cm, 29 cm и 36 cm, а површина 1620 cm². Израчунати површину омотача и висину призме.

13) Основне ивице праве тростране призме односе се као 17:10:9, бочна ивица износи 16 cm а површина 1440 cm². Израчунати основне ивице.

14) Основа праве призме је равнокраки трапез $ABCD$ са странама $AB = CD = 13$ cm, $BC = 11$ cm и $AD = 21$ cm; површина дијагоналног пресека износи 180 cm². Израчунати површину призме и површину пресека AB_1C_1D.

15) Правилна тространа призма чија је основна ивица a пресече се двема паралелним равнима косим према основи. Израчунати површину омотача добијене косе призме, ако је њена бочна ивица b.

16) Растојање између бочних ивица косе тростране призме износе 37 cm, 15 cm и 26 cm, а површина омотача једнака је површини нормалног пресека. Израчунати бочну ивицу.

17) Основа косе призме је равнострани троугао стране a; бочна ивица износи b; једна бочна ивица чини са суседном основном ивицом угао од 45^0. Израчунати површину омотача призме.

18) Израчунати површину и висину правилне тростране пирамиде чија је основна ивица $a=3$ m а бочна $b=5$ m.

19) Позната је површина правилне тростране пирамиде чија је висина двапута већа од основне ивице. Израчунати основну ивицу ($P=46{,}2$ m^2).

20) Израчунати основну ивицу и апотему правилне тростране пирамиде, ако бочна ивица износи 10 cm а бочна површина 144 cm^2.

21) Основа пирамиде је троугао чије су стране 13 cm, 14 cm и 15 cm. Бочна ивица наспрам средње по величини стране основе нормална је на равни основе и једнака 16 cm. Израчунати површину пирамиде.

22) Основа пирамиде је равнострани троугао стране a; једна бочна страна је, исто тако, равнострани троугао и нормална на равни основе. Израчунати бочну површину пирамиде.

23) Основа пирамиде је квадрат око кога је описан круг полупречника $r=2$ m; бочне стране су равнострани троуглови. Израчунати површину пирамиде.

24) Бочна површина правилне четворостране пирамиде износи 14,76 m^2, а површина целе пирамиде 18 m^2. Израчунати основну ивицу и висину пирамиде.

25) Правилна четворострана пирамида пресечена је дијагоналном равни. Ако је површина пресека $p=12{,}6491$ и обим основе $s=8$, израчунати површину пирамиде.

26) Правилна четворострана пирамида има једну заједничку основу са призмом, а врх јој је у центру друге основе призме. Ако су ивице призме a и b, израчунати површину пирамиде.

27) Центар горње основе коцке и средине страна њене доње основе су темена пирамиде. Израчунати бочну површину пирамиде, кад је ивица коцке једнака a.

28) Основа пирамиде је паралелограм чије су стране једнаке 5 m и 4 m, а једна дијагонала 3 m; висина пирамиде пролази кроз пресек дијагонала основе и једнака је 2 m. Израчунати површину пирамиде.

29) Израчунати површину пирамиде која има исту основу са правилном шестостраном призмом, а врх јој је у центру горње основе призме, ако је основна ивица призме $a=5{,}6$ cm, а висина $H=8{,}46$ cm.

30) Израчунати површину правилне шестостране пирамиде, ако је апотема пирамиде једнака h и апотема основе r.

31) Основна ивица правилне осмостране пирамиде је 7,8 m а дужина бочне ивице износи 12 m. Израчунати површину пирамиде.

32) Израчунати површину правилне десетостране пирамиде, ако је полупречник круга описаног око основе једнак r, а висина пирамиде већа од тога полупречника за половину основне ивице.

33) Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су 2 cm и 6 cm. Бочна страна има нагиб према већој основи од 60^0. Израчунати висину.

34) Стране правоуглог рогља пресечене су двема паралелним равнима тако да су пресеци равнострани троуглови са странама a и b. Израчунати бочну површину тако добијене зарубљене пирамиде ($a=8{,}3$; $b=10{,}1$).

35) Правилна тространа зарубљена пирамида чије су основне ивице 8 m и 5 m, а висина 3 m, пресечена је равни која пролази кроз једну страну доње основе и теме горње основе што лежи наспрам те стране. Израчунати површину пресека.

36) Нагиб бочне стране правилне тростране зарубљене пирамиде према основи износи 60^0; страна те основе једнака је a и површина пирамиде P. Израчунати површину друге основе.

37) Правилна четворострана пирамида пресечена је равни паралелно основи. Израчунати површину зарубљене пирамиде, ако је површина пресека $q=5625$ cm^2, висина целе пирамиде $H=231$ cm и висина допуне $H_1=77$ cm.

38) Правилна четворострана зарубљена пирамида, чије су основне ивице 6 cm и 8 cm а бочна ивица 10 cm, пресечена је равни која пролази кроз крај дијагонале мање основе нормално на ту дијагоналу. Израчунати површину тога пресека.

39) Израчунати висину правилне четворостране зарубљене пирамиде чије су основне ивице a и b, а бочна површина једнака збиру површина основа.

40) Из ивице a правилног тетраедра конструисати и израчунати ивицу правилног октаедра, ако оба тела имају једнаке површине.

41) Како се односе површине правилног октаедра и правилног тетраедра који постаје продужењем четири наизменичне стране октаедра?

42) Центри страна коцке су темена октаедра. Израчунати површину октаедра, кад је дата површина коцке ($P=100$ m^2).

43) Површина правилног додекаедра је $P=1{,}2$ cm^2. Израчунати његову ивицу.

VI ЗАПРЕМИНЕ ПОЛИЈЕДАРА

§ 87. *Општи појмови о запремини полиједара.* — Под запремином некога тела уопште разумемо величину дела простора који то тело заузима.

Да бисмо одредили запремину некога полиједра, потребно је наћи једну бројну величину која мери просторну величину полиједра и зове се његовом **запремином**, а има ове особине:

1) Два подударна полиједра имају једнаке запремине, без обзира на њихове положаје у простору.

2) Запремина полиједра R који је састављен из два полиједра P и Q што леже један изван другога једнака је збиру запремина полиједара P и Q.

Претпоставићемо да сваком делу простора одговара један такав број.

Из друге особине следује да од два полиједра од којих је један потпуно у другом већу запремину има онај који садржи други.

Ако два полиједра имају једнаке запремине, кажемо да су **једнаки**.

За мерење запремина потребна је извесна јединица. Из практичних разлога као јединица запремина узима се коцка чија је ивица једнака некој дужинској јединици.

§ 88. Запремина правоуглог паралелепипеда. – Теорема. – **Број који изражава меру запремине правоуглог паралелепипеда једнак је производу бројева који изражавају његове три димензије.** Или, краће: **Запремина правоуглог паралелепипеда једнака је производу његових трију димензија.**

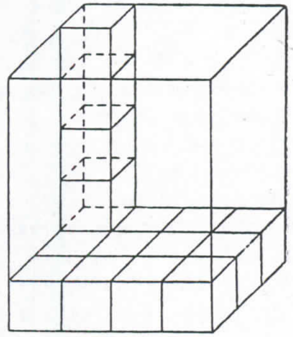
Разликоваћемо ова три случаја:

1) Димензије паралелепипеда изражене су **целим бројевима.**

Нека су, на пример, димензије паралелепипеда цели бројеви a, b, c (у сл. 68) $a=4$, $b=3$, $c=5$. На његову основу може се поставити слој ab коцака чија је ивица једнака дужинској јединици. Како висина има c дужинских јединица, јасно је да се у паралелепипед може поставити c таквих слојева, тј. abc кубних јединица. Ако запремину правоуглог паралелепипеда обележимо са V, можемо написати:

$$V=abc.$$

2) Димензије паралелепипеда изражене су **разломцима.**



Сл. 68

Рецимо да су димензије паралелепипеда дате овим разломцима: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$. Сад ћемо прво као помоћну јединицу за мерење узети највећу јединицу којом се могу измерити све три димензије без остатка. Очевидно је да таква јединица чини $\frac{1}{bdf}$ пређашње дужинске јединице. Ако, дакле, дате разломке $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ сведемо на најмањи заједнички именилац, добијамо разломке.

$$\frac{adf}{bdf}, \frac{bcf}{bdf}, \frac{bde}{bdf},$$

чији су бројиоци adf, bcf, bde они цели бројеви који кажу колико свака димензија садржи нових дужинских јединица величине $\frac{1}{bdf}$. Тиме се овај случај своди на случај 1), тј. запремина паралелепипеда једнака је производу $(adf)\cdot(bcf)\cdot(bde)$, под претпоставком да меримо оном кубном јединицом која одговара узетој помоћној јединици. У пређашњој јединици има $(bdf)^3$ нових кубних јединица. Значи да је нова јединица $\frac{1}{(bdf)^3}$ пређашње. Ако, дакле, желимо да добијену запремину у новим јединицама изразимо у пређашњим јединицама, треба да добијени производ поделимо са $(bdf)^3$, тј.

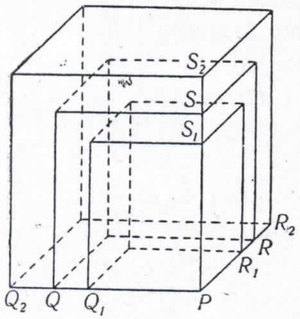
$$\frac{(adf)\cdot(bcf)\cdot(bde)}{(bdf)^3}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}.$$

Лако се уверити да уместо неких од разломака могу бити и цели бројеви.

Пример. Нека су дате ове димензије паралелепипеда: 3,5 m, 4,28 m; 5,63 m. Метре ћемо претворити у сантиметре, јер је то највећа дужинска јединица којом се могу измерити све три димензије без остатка. Према томе, димензије паралелепипеда износе: 350 cm, 428 cm и 563 cm. Његова запремина једнака је $(350\times428\times563)\,\mathrm{cm}^3 = 84\ 337\ 400\,\mathrm{cm}^3$. Ако, сад, кубне сантиметре претворимо у кубне метре добијамо $84{,}3374\,\mathrm{m}^3$. Међутим, до истог резултата бисмо дошли да смо одмах помножили димензије изражене у разломцима, тј. $3{,}5\times4{,}28\times5{,}63 = 84{,}3374$. Добијени производ претставља, дакле, запремину изражену у кубним јединицама које одговарају пређашњој дужинској јединици, тј. она је једнака $84{,}3374\,\mathrm{m}^3$.

3) Димензије паралелепипеда изражене су ирационалним бројевима (бар једним).

Нека су димензије паралелепипеда $PQRS$ (сл. 69) дате бројевима p, q, r, који су сви, или само неки од њих, ирационални. Из алгебре знамо да се ирационални бројеви могу претставити у облику бескрајних непериодских децималних разломака. Њихове мање приближне вредности на n децимала обележићемо са p_n, q_n, r_n, а веће са p_n', q_n', r_n'. Ако, сад, конструишемо паралелепипеде са димензијама $PQ_1 = p_n$, $PR_1 = q_n$, $PS_1 = r_n$, и $PQ_2 = p_n'$, $PR_2 = q_n'$, $PS_2 = r_n'$, видимо да ће паралелепипед са димензијама p_n', q_n', r_n' потпуно садржати у себи паралелепипед са димензијама p, q, r, а овај опет, паралелепипед са димензијама p_n, q_n, r_n, јер је, по претпоставци



Сл. 69

(1) $$p_n < p < p_n',\quad q_n < q < q_n',\quad r_n < r < r_n'.$$

Ако запремине паралелепипеда $PQ_1R_1S_1$ означимо са V_n и $PQ_2R_2S_2$ са V_n', имамо, на основу случаја 2) овога параграфа, да је

(2) $$V_n = p_n q_n r_n$$

(3) $$V_n' = p_n' q_n' r_n'.$$

Из неједнакости (1) следује

$$V_n < V_n'$$

а затим из једнакости (2) и (3)

$$V_n' - V_n = p_n' q_n' r_n' - p_n q_n r_n =$$
$$= (p_n' - p_n)\, q_n' r_n' + (q_n' - q_n)\, p_n r_n' + (r_n' - r_n)\, p_n q_n.$$

Међутим, за довољно велике вредности од n увек се може наћи рационални број R тако да је

$$q_n' r_n' < R,\ \ p_n r_n' < R \quad \text{и} \quad p_n q_n < R,$$

а тада је

$$V_n' - V_n < R\,[(p_n' - p_n) + (q_n' - q_n) + (r_n' - r_n)].$$

Кад број n неограничено расте, сабирци у заградама на десној страни теже нули, а тиме и израз на левој страни, тј.

$$\lim_{n\to\infty} (V_n' - V_n) = 0.$$

Из тога следује да је

$$\lim_{n\to\infty} p_n' q_n' r_n' = \lim_{n\to\infty} p_n q_n r_n = pqr.$$

Та гранична вредност узима се за меру запремине посматраног паралелепипеда $PQRS$. Ако ту запремину обележимо са V, можемо написати:

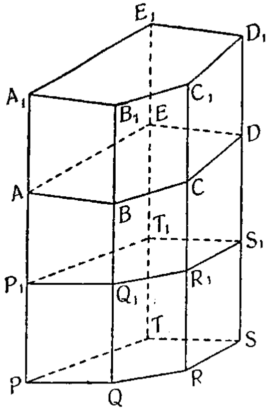
$$V = pqr.$$

Очигледно је да је та дефиниција запремине допуштена, јер добијени број има особину наведену у § 87, 1. Лако је доказати да има и особину 2), што остављамо ученику да докаже.

Последица. — Како производ двеју димензија правоуглог паралелепипеда претставља површину његове основе, а трећа димензија његову висину, може се рећи да је запремина правоуглог паралелепипеда једнака производу површине основе и висине.

§ 89. Запремина ма кога паралелепипеда. — а) *Лема.* — Запремина косе призме једнака је запремини праве призме чија је основа једнака нормалном пресеку косе призме, а висина бочној ивици косе призме.

Нека је дата коса призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (сл 70), коју ћемо укратко обележити са AD_1. Продужимо све њене бочне ивице. На продужетку једне, на пример AA_1, узмимо две тачке P и P_1 тако да буде $PP_1 = AA_1$. Ако кроз те две тачке поставимо равни нормално на ивицу, добијамо два нормална пресека $PQRST$ и $P_1Q_1R_1S_1T_1$, који чине основе праве призме $PQRSTP_1Q_1R_1S_1T_1$, коју ћемо укратко обележити са PS_1. Треба доказати да дата коса призма AD_1 и добијена права призма PS_1 имају једнаке запремине.



Сл. 70

Ако посматрамо полиједре PD и P_1D_1, видећемо да су подударни. Заиста, основа $PQRST$ полиједра PD једнака је основи $P_1Q_1R_1S_1T_1$ полиједра P_1D_1, јер су те основе нормални пресеци призме. Затим, бочна ивица PA полиједра PD једнака је бочној ивици P_1A_1 полиједра P_1D_1, јер су састављене из једнаких дужи. (По претпоставци, наиме, $PP_1 = AA_1$; како је $PA = PP_1 + P_1A$, $P_1A_1 = P_1A + AA_1$, следује да је $PA = P_1A_1$).

Ако, сад, полиједар P_1D_1 поставимо у полиједар PD, видимо да ће основа $P_1Q_1R_1S_1T_1$ поклапати основу $PQRST$, бочна ивица P_1A_1 бочну ивицу PA, јер су елементи у триједрима $P_1A_1Q_1T_1$ и $PAQT$ једнаки и једнако распоређени (§ 68), и тачка A_1 тачку A.

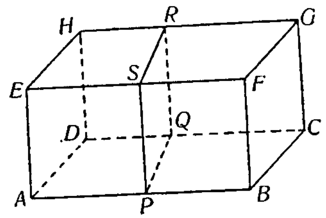
Исто важи за остале бочне ивице, триједре и крајње тачке бочних ивица.

Према томе, полиједри PD и P_1D_1 подударни су.

Ако, најзад, правој призми PS_1 додамо полиједар P_1D_1, добијамо полиједар PD_1. Исто тако, ако косој призми AD_1 додамо полиједар PD, који је једнак полиједру P_1D_1, добијамо исти полиједар PD_1. Из тога следује да права призма PS_1 и коса призма AD_1 имају једнаке запремине, што је требало доказати.

б) *Теорема.* — Запремина правог паралелепипеда једнака је производу површине основе и висине.

Нека је дат прави паралелепипед $ABCDEFGH$ (сл. 71). Он има за основу косоугли паралелограм $ABCD$, а све бочне стране су му правоугаоници. Међутим, тај исти паралелепипед може се сматрати и као кос, ако се за основу узме једна од његових бочних страна, на пример страна $ADHE$. Тада су основне ивице правога паралелепипеда уједно бочне ивице косога паралелепипеда.



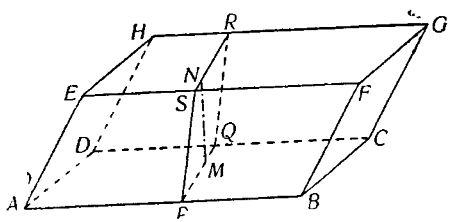
Сл. 71

Ако бочне ивице тога косога паралелепипеда пресечемо равни нормалном на ивице, добијамо нормални пресек $PQRS$, који је правоугаоник, јер је $ABFE \perp ABCD$ (зашто?), па отуда $\sphericalangle SPQ = 90^0$ (§ 26, 4 и § 45, 1).

По леми а) запремина косог паралелепипеда са основом $ADHE$ и бочном ивицом AB једнака је запремини правоуглог паралелепипеда са основом $PQRS$ и висином AB. Како је, међутим, запремина правоуглог паралелепипеда једнака производу његових димензија, она износи $AB \cdot PQ \cdot PS$. Производ $AB \cdot PQ$ претставља површину основе правога паралелепипеда, а PS његову висину; стога је запремина правога паралелепипеда једнака производу површине основе и висине, што је требало доказати.

в) *Теорема.* — Запремина маког паралелепипеда једнака је производу површине основе и висине.

Нека је дат ма који паралелепипед $ABCDEFGH$ (сл. 72). Све његове стране су косоугли паралелограми. Да одредимо запремину паралелепипеда, поставићемо раван нормално на његову ивицу AB. Тиме добијамо нормални пресек $PQRS$, који је у оп-



Сл. 72

штем случају косоугли паралелограм (§ 26, 4). Тај пресек може се узети за основу правог паралелепипеда чија је висина ивица AB. По *леми* а) запремина датог косог паралелепипеда једнака је запремини добијеног правог паралелепипеда, а по теореми б) запремина правог паралелепипеда, у овом случају, једнака је производу површине нормалног пресека $PQRS$ (његове основе) и ивице AB (његове висине). Дакле, запремина датог косог паралелепипеда једнака је $PQ \cdot MN \cdot AB = (AB \cdot PQ) \cdot MN$, где је MN висина нормалног пресека $PQRS$, чија је основица PQ. Међутим, производ $AB \cdot PQ$ претставља површину основе $ABCD$ датог паралелепипеда, а MN његову висину; стога је запремина ма кога паралелепипеда једнака производу површине његове основе и његове висине, што је требало доказати.

Да је MN заиста висина датог паралелепипеда, можемо се уверити на овај начин. Пресек $PQRS$ нормалан је на ивици AB. Он је стога нормалан на основи $ABCD$ (§ 48). Ако у тачки M дигнемо нормалу на основу $ABCD$, она се мора поклопити са дужи MN, која је у нормалном пресеку $PQRS$ и нормална на PQ (§ 32, б).

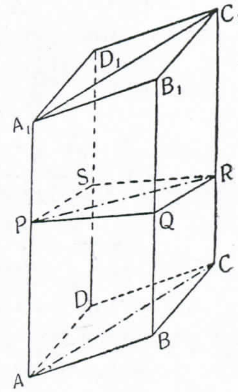
Ако, дакле, са V означимо запремину ма кога паралелепипеда, са B површину његове основе, а са H његову висину, можемо написати

$$V = BH.$$

§ 90. *Запремина призме.* – а) *Лема.* — *Дијагонална раван паралелепипеда дели га на две једнаке тростране призме.*

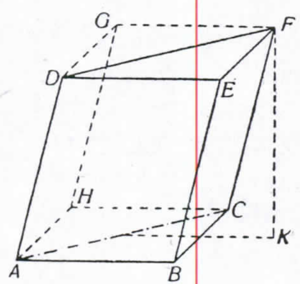
Нека је дат паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (сл. 73). Кроз његове ивице AA_1 и CC_1 поставићемо раван. Та раван дели га на две тростране призме $ABCA_1B_1C_1$ и $ACDA_1C_1D_1$. Тврдимо да су те призме једнаке.

Ако бочне ивице паралелепипеда пресечемо равни која је на њима нормална, добијамо нормални пресек $PQRS$, који је паралелограм (§ 26, 4). Дијагонала PR дели тај паралелограм на два подударна троугла PQR и PRS. Сваки од њих можемо узети за основу праве призме чија је висина бочна ивица датог паралелепипеда. Отуда следује да коса призма $ABCA_1B_1C_1$ има запремину једнаку запремини праве призме са основом PQR и висином AA_1, а коса призма $ACDA_1C_1D_1$ запремину једнаку запремини праве призме са основом PRS и висином AA_1. Како обе праве призме имају подударне основе и једнаке висине, оне су подударне (§ 68), што значи да имају једнаке запремине. Стога и косе тростране призме $ABCA_1B_1C_1$ и $ACDA_1C_1D_1$ имају једнаке запремине, што је требало доказати.



Сл. 73

б) *Теорема.* — *Запремина тростране призме једнака је производу површине основе и висине.*



Сл. 74

Нека је дата тространа призма $ABCDEF$ (сл. 74). Кроз њену ивицу AD поставићемо раван $ADGH$ паралелно равни $BCFE$, а кроз ивицу CF раван $CFGH$ паралелно равни $ABED$. Постављене равни пресећи ће се по правој HG, а са равнима основа по правима AH, CH, DG и FG. Тако настаје паралелепипед $ABCHDEFG$, који је, по претходној леми, једнак двострукој датој призми $ABCDEF$, јер је страна $ACFD$ призме дијагонална раван паралелепипеда.

Према томе, запремина добијеног паралелепипеда $ABCHDEFG$ једнака је производу површине његове основе $ABCH$ и висине FK, а запремина призме $ABCDEF$ *половини* тога производа.

Ако запремину призме означимо са V, површину основе паралелепипеда са Q, а висину паралелепипеда и призме са H, можемо написати:

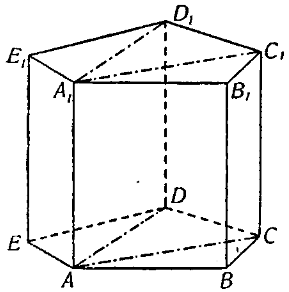
$$V=\frac{QH}{2}=\frac{Q}{2}\cdot H.$$

Израз $\frac{Q}{2}$ претставља уствари површину основе ABC призме; ако га означимо са B, имамо коначно:

$$V=BH,$$

што је требало доказати.

в) *Теорема.* — Запремина ма које призме једнака је производу површине основе и висине.



Сл. 75

Нека је дата многострана призма $ABCDE\,A_1B_1C_1D_1E_1$ (сл. 75). Она се може дијагоналним равнима поделити у тростране призме $ABCA_1B_1C_1$, $ACDA_1C_1D_1$ и $ADEA_1D_1E_1$. Збир запремина тих тространих призама даје тражену запремину многостране призме (§ 87, 2).

Ако површину основе многостране призме означимо са B, површине основа тространих призама са B_1, B_2, B_3, а заједничку висину са H, добијамо да је запремина призме једнака

$$B_1H+B_2H+B_3H=(B_1+B_2+B_3)\,H=BH, \quad \text{тј.}$$

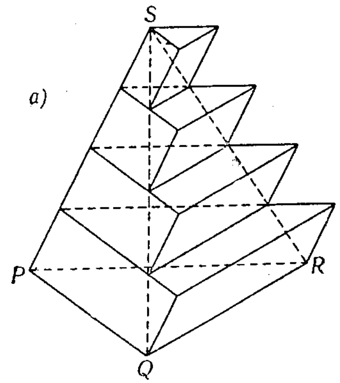
$$V=BH.$$

§ 91. Запремина пирамиде. — а) *Теорема.* — Запремина сваке пирамиде једнака је трећини производа површине основе и висине.

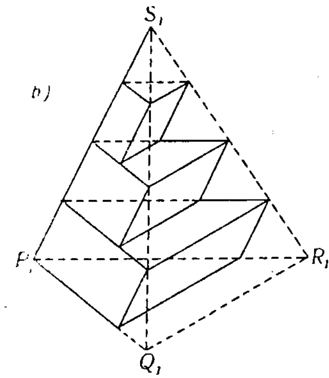
За доказ теореме послужићемо се појмом границе, а ради једноставности цртаћемо тространу пирамиду.

Нека су дате две подударне пирамиде $SPQR$ и $S_1P_1Q_1R_1$ (сл. 76, *a*, и *b*). Ивице SP и S_1P_1 поделимо на n једнаких делова и кроз сваку деону тачку поставимо раван паралелно основи пирамиде. Добијене пресеке узећемо код пирамиде $SPQR$ за доње основе призама, а код пирамиде $S_1P_1Q_1R_1$ за горње основе призама, чије су висине једнаке растојању два

узастопна пресека. На тај начин добијамо два степенаста тела састављена из призама, од којих је прво описано око пирамиде, а друго у њој уписано.



Сл. 76, *a*)



Сл. 76, *b*)

Очевидно је да је запремина описаног степенастог тела већа од запремине пирамиде, док је запремина уписаног степенастог тела мања од запремине дате пирамиде. Ако запремину описаног степенастог тела обележимо са V_n', запремину пирамиде са V, а запремину уписаног степенастог тела са V_n, тај однос можемо изразити овим неједнакостима:

$$(1) \qquad V_n < V < V_n'.$$

Ако, сад, посматрамо та два степенаста тела, видећемо да је прва описана призма, рачунајући од врха пирамиде, једнака првој уписаној призми, друга другој, и тако редом све до последње уписане призме (на основи пирамиде $S_1P_1Q_1R_1$), која је једнака претпоследњој описаној призми. Према томе, разлика запремина та два степенаста тела једнака је запремини последње описане призме (на основи пирамиде $SPQR$). Ако висину пирамиде обележимо са H, површину основе са B, запремина последње описане призме једнака је

$$(2) \qquad V_n'-V_n=B\cdot\frac{H}{n}=\frac{1}{n}\cdot BH,$$

јер је паралелним пресецима пирамиде и њена висина подељена на n једнаких делова (§ 28).

Ако, дакле, уместо запремине V пирамиде узмемо запремину V_n' или запремину V_n, једнога од два степенаста тела, грешка ће бити мања од $\frac{1}{n}\cdot BH$, тј.

$$V_n' - V < \frac{1}{n}\cdot BH \quad \text{и} \quad V - V_n < \frac{1}{n}\cdot BH, \tag{3}$$

како следује из неједнакости (1) и једнакости (2).

Кад n расте, вредност $\frac{1}{n}\cdot BH$ у изразу (3) постаје све мања, а тиме и вредност $V_n' - V$ и $V - V_n$; оне се могу учинити по вољи маленим. Ако n неограничено расте, израз $\frac{1}{n}\cdot BH$ тежи граници нула. У том случају је

$$\lim_{n\to\infty} V_n' = \lim_{n\to\infty} V_n = V,$$

како следује из једнакости (2) и неједнакости (3).

Да бисмо, дакле, одредили запремину пирамиде, треба наћи збир запремина описаних или уписаних призама, које чине степенаста тела, и одредити границу којој теже та два збира за случај да број n призама неограничено расте. Добијена вредност претстављаће тражену запремину пирамиде.

Запремина описаног степенастог тела једнака је

$$V_n' = B_1\cdot\frac{H}{n} + B_2\cdot\frac{H}{n} + B_3\cdot\frac{H}{n} + \cdots + B_n\cdot\frac{H}{n} = \frac{H}{n}(B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n), \tag{5}$$

где су $B_1, B_2, \ldots, B_n$ основе призама које чине то степенасто тело, рачунајући од врха пирамиде.

Међутим, знамо да се паралелни пресеци пирамиде односе као квадрати њихових растојања од врха (§ 78, 3). Стога је

$$\frac{B_1}{B} = \frac{\left(\frac{H}{n}\right)^2}{H^2},\quad \frac{B_2}{B} = \frac{\left(2\cdot\frac{H}{n}\right)^2}{H^2},\quad \frac{B_3}{B} = \frac{\left(3\cdot\frac{H}{n}\right)^2}{H^2}, \ldots, \frac{B_n}{B} = \frac{\left(n\cdot\frac{H}{n}\right)^2}{H^2}, \tag{6}$$

где су $\frac{H}{n}$, $2\cdot\frac{H}{n}$, $3\cdot\frac{H}{n}, \ldots, n\cdot\frac{H}{n}$ растојања основа $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ призама од врха пирамиде.

Из израза (6) добијамо:

$$B_1 = \frac{1}{n^2}\cdot B,\quad B_2 = \frac{2^2}{n^2}\cdot B,\quad B_3 = \frac{3^2}{n^2}\cdot B, \ldots, B_n = \frac{n^2}{n^2}\cdot B.$$

Ако те вредности заменимо у изразу (5), имамо да је

$$V_n' = \frac{H}{n}\left(\frac{1}{n^2}B + \frac{2^2}{n^2}\cdot B + \frac{3^2}{n^2}\cdot B + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\cdot B\right),$$

или

$$V_n' = \frac{BH}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2). \tag{7}$$

Из алгебре знамо да је

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Према томе:

$$V_n' = \frac{BH}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

или

$$V_n' = \frac{BH}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right). \tag{8}$$

Кад уважимо једнакост (2), добијамо:

$$V_n = V_n' - \frac{BH}{n},$$

или

$$V_n = \frac{BH}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{BH}{n},$$

тј.

$$V_n = \frac{BH}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right). \tag{9}$$

Ако n неограничено расте, видимо да ће у изразима (8) и (9) вредности у заградама тежити јединици као својој граници, тако да је

$$\lim_{n\to\infty} V_n' = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{BH}{3},$$

тј.

$$V = \frac{BH}{3},$$

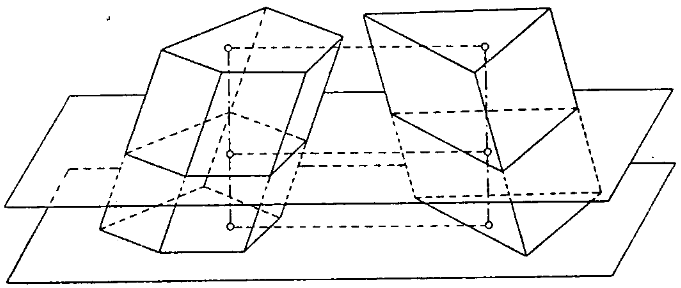
што је требало доказати.

б) *Каваљеријево правило.* — Ако се два тела могу поставити у такав положај да буду међу собом једнаке површине њихових пресека добијених помоћу ма које равни која је паралелна некој датој равни, тада су једнаке и њихове запремине. (Каваљери се родио у Милану 1598 год., а умро у Болоњи 1647 год.).

Ова тела за која важи Каваљеријево правило зову се Каваљеријева тела.

Тај став је Каваљери исказао као аксиому (принцип), али се оно може строго доказати интегралним рачуном. Међутим, лако се можемо уверити да он важи за две ма које призме са једнаким основама и једнаким висинама.

Нека су, на пример, дате две такве призме (сл. 77). Оне имају једнаке запремине, јер је запремина призме



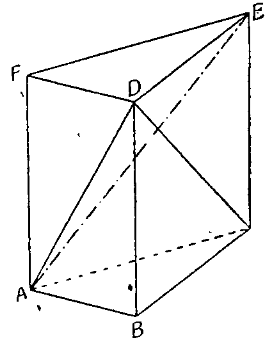
Сл. 77

једнака производу површине основе и висине (§ 90, в). Ако призме поставимо основама на неку раван, па их пресечемо ма којом равни паралелно њиховим основама, пресеци тих призама биће једнаки међу собом, јер је сваки од њих једнак основи призме којој припада (§ 70), а основе су, по претпоставци, међу собом једнаке. Дакле, као што видимо, Каваљеријево правило важи за тај случај, тј. наше две призме су два Каваљеријева тела.

Употребом Каваљеријевог принципа можемо сад лако одредити запремину пирамиде.

Из последице у § 81 следује да две пирамиде једнаких основа и једнаких висина постављене основама на једну раван имају једнаке површине пресека добијене помоћу ма које равни паралелне равни у којој су основе пирамида. По Каваљеријевом принципу те две пирамиде имају и једнаке запремине. Дакле, пирамиде једнаких основа и једнаких висина имају једнаке запремине.

Нека је, сад, дата нека тространа пирамида $DABC$ (сл. 78). Конструисаћемо призму која ће за основу имати основу ABC пирамиде, а за бочну ивицу BD; та призма има са пирамидом једнаку основу и једнаку висину. Као што видимо она се састоји из дате тростране пирамиде $DABC$ и четворостране пирамиде $DACEF$. Ако кроз врх D и дијагоналу AE основе те четворостране пирамиде поставимо раван, она дели ту пирамиду на две тростране пирамиде $DAEF$ и $DACE$, које имају једнаке запремине, јер имају једнаке основе AEF и ACE



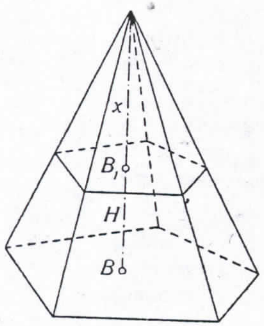
Сл. 78

и исту висину. Међутим, пирамиду $DAEF$ можемо посматрати и тако да јој је основа DEF а врх теме A; у том случају она има са пирамидом $DABC$ једнаку основу и исту висину, и, према томе, једнаку запремину. Значи да све три пирамиде имају једнаке запремине. Како је призма $ABCDEF$ једнака збиру тих трију једнаких пирамида, дата пирамида $DABC$ једнака је трећини запремине призме, која с њом има исту основу и исту висину, тј. запремина пирамиде једнака је трећини производа површине основе и висине, као што смо доказали под а).

Доказ под а) важи за ма коју пирамиду, док се овај доказ под б), који је дат само за тространу пирамиду, лако може уопштити, слично као што смо то доказали за призму (§ 90, в), а то остављамо ученику.

в) *Теорема.* — Запремина зарубљене пирамиде једнака је збиру запремина трију пирамида чије су висине једнаке висини зарубљене пирамиде а основе редом: прве — доња основа зарубљене пирамиде, друге — горња основа зарубљене пирамиде, и треће — средња пропорционала тих основа.

Нека је дата зарубљена пирамида са основама B, B_1 и висином H (сл. 79). Допунимо је пирамидом са основом B_1 и висином x.



Сл. 79

Ако запремину зарубљене пирамиде означимо са V, пуне са V_1, а допуне са V_2, можемо написати:

$$V = V_1 - V_2$$

или (§ 91, а)

$$V = \frac{1}{3}\left[B(H+x) - B_1 x\right] = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[BH + (B - B_1)\,x\right].$$

На основу теореме 3) у § 78 имамо да је

$$\frac{B}{B_1} = \frac{(H+x)^2}{x^2},$$

или

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}} = \frac{H+x}{x}.$$

Из те једначине добијамо

$$x = \frac{H\sqrt{B_1}}{\sqrt{B} - \sqrt{B_1}} = \frac{H(\sqrt{BB_1} + B_1)}{B - B_1}.$$

Кад се ова вредност за x замени у једначини (1) добија се

$$V = \frac{1}{3}\left[BH + (B - B_1)\cdot\frac{H(\sqrt{BB_1} + B_1)}{B - B_1}\right],$$

и, коначно:

$$V = \frac{H}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right),$$

што је требало доказати.

Вежбања

1) Три месингане коцке с ивицама 3 cm, 4 cm и 5 cm саливене су у једну. Колика је ивица те коцке?

2) Метална коцка има спољашњу ивицу $a = 10{,}2$ cm и тешка је 514,15 g. Дебљина јој је $d = 0{,}1$ cm. Одредити специфичну тежину метала из кога је начињена коцка.

3) Шупља коцка од ливеног гвожђа чија је спољашња ивица 260 mm има дебљину 30 mm. Одредити тежину (специфична тежина ливеног гвожђа износи 7,4).

4) Колико пута мора бити већа ивица једне коцке од ивице друге коцке, па да јој запремина буде двапута већа?

5) Запремине две коцке износе заједно a кубних метара, а збир њихових ивичних дужина b метара. Колике су ивице? ($a = 13{,}895$, $b = 3{,}5$).

6) Од две коцке једна има за a метара дужу ивицу од друге, а разлика њихових запремина је b кубних метара. Колике су ивице тих коцака ($a = 0{,}3$, $b = 48{,}627$)?

7) Нека је a ивица једне коцке, δ грешка при мерењу те ивице; колико утиче та грешка на површину и запремину?

8) Сплав је начињен од 16 греда у пресеку облика правоугаоника од којих свака има дужину 3,[illegible] m, ширину 0,20 m и дебљину 0,25 m. Колики је највећи терет који може да носи а да се не потопи? (Специфична тежина дрвета =0,84).

9) Димензије правоуглог паралелепипеда су 2 cm, 3 cm и 6 cm. Наћи ивицу коцке тако да се запремине тих тела односе као површине.

10) Позната је запремина $V = 2080$ dm³, површина $P = 996$ dm² и обим основе $s = 58$ dm једног правоуглог паралелепипеда. Наћи димензије a, b и c.

11) Површине три стране правоуглог пареле лепипеда су 2 m², 3 m² и 6 m². Наћи његову запремину.

12) Основа правога паралелепипеда је паралелограм чија је једна дијагонала једнака 17 cm, а стране 9 cm и 10 cm; површина паралелепипеда износи 334 cm². Одредити запремину.

13) Основа правога паралелепипеда је ромб чија је површина 1 m²; површине дијагоналних пресека су 3 m² и 6 m². Наћи запремину паралелепипеда.

14) а) Из танкога лима облика правоугаоника (a, b) исечена су четири квадрата на угловима и савијањем површина начињен је сандук висине c. Наћи његову запремину V. б) Исти задатак кад је $a = b = 12$,

а висина x као променљива; $\frac{1}{4}$ V узети као функцију од x и графички претставити (за вредности x од 0 до 6).

15) Наћи запремину V правоуглог паралелепипеда кад је позната размера трију ивица и дијагонала једне стране.

16) Колика је запремина правоуглог паралелепипеда на температури од t^0, ако му ивице имају на температури од 0^0 дужине a, b, c, а коефицијент ширења је α?

17) Стране паралелепипеда су ромби са страном a и оштрим углом од 60^0. Наћи запремину паралелепипеда.

18) Краћа дијагонала стране ромбоедра односи се према дужој дијагонали као $m:n$. Израчунати запремину ромбоедра, ако је ивица a $(m=1, n=2)$.

19) Висина праве тростране призме је 5 m, а њена запремина 24 m³; површине бочних страна односе се као 17 : 17 : 16. Наћи основне ивице.

20) Запремина тростране призме једнака је полупроизводу ма које бочне стране и растојања те стране од наспрамне ивице. Доказати.

21) Ако је висина тростране призме двапута већа од пречника круга описаног око основе призме, та призма има запремину једнаку запремини правоуглог паралелепипеда чије су димензије једнаке странама основе призме. Доказати.

22) Коса тространа призма има основне ивице једнаке 5 m, 6 m и 9 m и бочну ивицу 10 m; бочна ивица заклапа са основом угао од 45^0. Израчунати запремину призме.

23) Основа косе призме је равнострани троугао стране a; једна бочна страна је нормална на равни основе и има облик ромба са мањом дијагоналом c. Наћи запремину призме.

24) Бочне ивице косе тростране призме износе 15 m, а растојања између њих су 26 m, 25 m и 17 m. Наћи запремину.

25) Запремина призме чије су основе трапези једнака је производу аритметичке средине њених паралелних страна и њиховог растојања. Доказати.

26) Железнички насип има у пресеку облик равнокраког трапеза са паралелним странама 14 m, 8 m и висином 3,2 m. Наћи колико кубних метара земље долази на 1 km насипа.

27) Површина највећега дијагоналног пресека правилне шестостране призме износи 4 m², а растојање између наспрамних бочних страна 2 m. Наћи запремину.

28) Наћи површину и запремину правилне осмостране призме чија је висина $H=12$ cm, а основна ивица $a=16$ cm.

29) Израчунати тежину железног стуба облика правилне дванаестостране призме са основном ивицом 12 cm и висином $H=78$ cm (специфична тежина $=7{,}4$).

30) Израчунати запремину правилног тетраедра из његове ивице a.

31) Запремине два тетраедра чији је један пар рогљева подударан односе се као производи ивица које долазе из темена тих триједара. Доказати.

32) Дате су три паралелне праве које не леже у истој равни; на првој се узме дуж AB, на другој тачка C, а на трећој тачка D. Доказати да је запремина тетраедра $ABCD$ стална кад се тачке C и D померају по паралелама.

33) Кроз свако теме тетраедра постави се раван паралелна наспрамној страни; тако се добија нов тетраедар. Наћи у коме су односу површине и запремине та два тетраедра.

34) Запремина ма кога тетраедра једнака је производу трећине ма које ивице и пројекције тога тетраедра на равни нормалној на тој ивици. Доказати.

35) Кроз средину бочне ивице правилне тростране пирамиде постављена је раван нормално на њену основу тако да је пресек са основом паралелан наспрамној основној ивици. Наћи запремине оба дела на које је пресечена пирамида, ако су дате основна ивица $a=13{,}8$ и бочна ивица $b=17$.

36) Раван сече правилну тространу пирамиду тако да стоји нормално на њеној основи, а пресек са основом је паралелан основној ивици; један отсечак пирамиде има запремину $\frac{1}{n}$ запремине дате пирамиде. Ако су a и b основна и бочна ивица пирамиде, наћи у коме односу раван дели бочну ивицу b.

37) Ако две тростране пирамиде имају заједничку основу, праву која спаја њихове врхове сече раван основе у односу њихових запремина. Доказати.

38) Тространа пирамида има висину H а њено подножје лежи у центру круга описаног око основе. Ако је обим основе пирамиде једнак $2s$ и ако се стране основе односе као $p:q:r$, наћи: а) запремину пирамиде, в) површину пирамиде ($H=6$, $s=120$, $p:q:r=5:12:13$).

39) Основа пирамиде је равнокраки троугао чији је крак 7 cm а трећа страна 6 cm; врх пирамиде има једнако растојање од свих основних ивица које се према основи односи као 5 : 4. Наћи запремину пирамиде.

40) Запремине два тетраедра који имају једну заједничку ивицу и диједар који припада тој ивици односе се као производи страна које чине тај диједар. Доказати.

41) Наћи тачку која спаја темена тетраедра тако да га дели на четири дела једнаких запремина.

42) Основа пирамиде је ромб стране 15 cm; бочне стране нагнуте су према основи под углом од 45^0; површина омотача је 16 dm². Наћи запремину.

43) Основа пирамиде је равнокраки трапез са паралелним странама 3 cm и 5 cm и краком 7 cm. Висина пирамиде пролази кроз пресек дијагонала основе, а већа бочна ивица износи 10 cm. Наћи запремину пирамиде.

44) Ако је основа пирамиде трапез, запремина пирамиде се налази кад се трећина збира паралелних страна њене основе помножи пројекцијом пирамиде на једној равни која је нормална на паралелним странама поменутог трапеза. Доказати.

45) Запремину једнакоивичне петостране пирамиде изразити као функцију ивице.

46) Из запремине $V=12$ cm³ правилне шестостране пирамиде чија је основна ивица 2 cm израчунати бочну ивицу.

47) Рогљеви коцке ивице a отсечени су равнима које пролазе кроз средине ивица рогља. Израчунати запремину тела које се тако добије помоћу ивице коцке.

48) Центри страна правилног октаедра су темена коцке. Наћи однос запремина оба тела.

49) Запремина правилне пирамиде налази се кад се површина њеног омотача помножи трећином растојања једне стране од центра основе. Доказати.

50) Равнима паралелним основи пресече се висина пирамиде на пет једнаких делова. Наћи у ком односу стоје запремине тих пирамида.

51) У коме растојању од врха треба пресећи пирамиду паралелно основи да би се а) њен омотач, б) њена запремина поделили по размери $m:n$? ($m=n=1$).

52) На ком растојању од доње основе треба пресећи зарубљену пирамиду висине H и основа B и B_1 паралелно основи па да се запремина преполови?

53) Наћи површину и запремину правилне тростране зарубљене пирамиде чија је висина 4 m, а основне ивице 6 m и 2 m.

54) Тространа зарубљена пирамида пресечена је равни која пролази кроз страну мање основе паралелно наспрамној бочној ивици. У ком односу стоје запремине тако добијених делова ако одговарајуће основне ивице стоје у размери $1:2$?

55) Гранитни подупирач има облик правилне четворостране зарубљене пирамиде; њена висина је 3,6 m, а основне ивице $a=2{,}8$ m и $b=2$ m. Наћи тежину подупирача (специфична тежина гранита $=2{,}5$).

56) Дате су површине a^2 доње основе, b^2 горње основе и c једне бочне стране правилне четворостране зарубљене пирамиде. Наћи запремину и површину потпуне пирамиде, чији је део дата зарубљена пирамида.

$$(a^2=12{,}96\ \text{cm}^2,\quad b^2=5{,}76\ \text{cm}^2,\quad c=22{,}5\ \text{cm}^2).$$

57) Апотема и основне ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде односе се као $5:8:2$, а њена запремина је $1\frac{3}{4}$ m³. Наћи површину зарубљене пирамиде.

58) Правилна зарубљена пирамида има за основе правилне осмоугле са ивицама a и b; бочна ивица је c. Израчунати површину и запремину зарубљене пирамиде.

59) Висина зарубљене пирамиде је 15 m, а запремина 475 m³; површине основа односе се као $4:9$. Израчунати те површине.

60) Запремина зарубљене пирамиде је 1720 m³, а висина 20 m; одговарајуће стране обе основе односе се као $5:8$. Наћи површине основа.

61) Сви рогљеви октаедра одрубљени су пресецима који су паралелни основи његове двојне пирамиде тако да је свака ивица преполовљена. Из ивице израчунати површину и запремину онога тела које је остало.

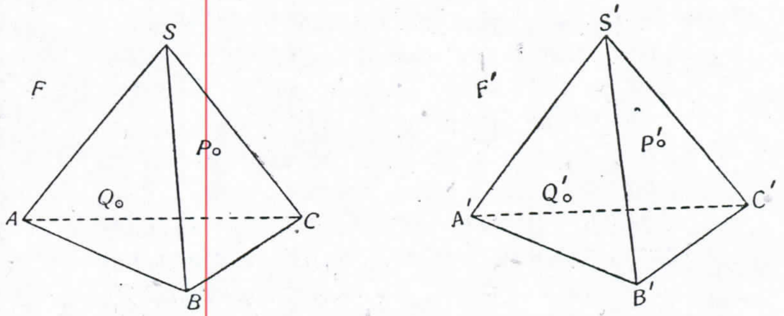
62) Из пирамиде дате основе B и висине H исече се један део, двема равнима паралелним основи, чија је висина h и запремина v. Наћи у ком растојању од основе треба да је доњи пресек. ($B=625$ m², $H=50$ m, $v=336$ m³, $h=12$ m).

ГЛАВА СЕДМА

ПОМЕРАЊА — СИМЕТРИЈЕ — СЛИЧНОСТИ

I ПОМЕРАЊА

§ 92. Општи појмови и дефиниције. — а) Појам поме-



Сл. 80

рања фигура у простору дефинише се слично као и појам померања фигура у равни.

Узмимо, на пример, да су нам у простору дате две фигуре F и F' (сл. 80) тако да свакој тачки фигуре F одговара једна тачка фигуре F' и да се свака тачка фигуре F' може добити том кореспонденцијом. Те тачке у обе фигуре које једна другој одговарају зову се хомологне тачке.

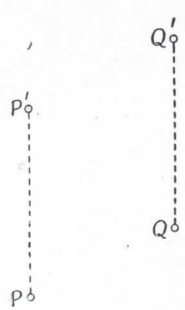
Тако, на пример, на сл. 80 имамо две подударне пирамиде у произвољном положају. Свакој тачки пирамиде F одговара нека одређена тачка пирамиде F'. На пример, темену A одговара теме A', тачки P тачка P' итд. Тачке A, A'; P, P' итд. су хомологне тачке те две фигуре. Свака тачка фигуре F', уз извесне услове, може се одредити кад је дата њена хомологна тачка у фигури F.

Ако сад замислимо да се свака тачка фигуре F поклапа са својом хомологном тачком у фигури F', казаћемо да се фигура F померила из F у F'. Скуп свих тачака које на тај начин добијамо образују фигуру F', која сад после померања, претставља нов положај фигуре F, и у којој свака тачка претставља нов положај њој хомологне тачке у фигури F.

Дата пирамида F је и после померања потпуно сачувала свој облик: ако је положимо у пирамиду F', хомологне тачке ће се поклопити.

Можемо, дакле, рећи: померање не мења облик фигуре, ако фигуру F можемо положити на фигуру F' тако да се притом свака тачка фигуре F поклопи са својом хомологном тачком фигуре F'.

§ 93. *Транслација.* — Нека је дата дуж PP' (сл. 81). Претпоставимо да свакој тачки Q простора одговара нека тачка Q' тако да је дуж QQ' једнака и паралелна дужи PP' и да је с њом истога смера. Та кореспонденција дефинише померање које се зове транслација. Она је, дакле, одређена једном дужи, па се каже транслација PP', да би се на тај начин указало на то да у том померању дуж PP' претставља померање тачке P.

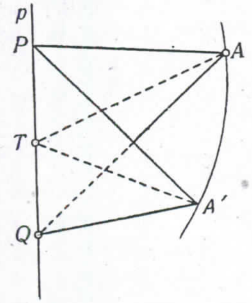


Сл. 81

Код транслаторног померања две ма које хомологне дужи су паралелне и истога смера.

У § 5,4 и § 70 имали смо примере транслаторног померања праве.

§ 94. *Ротација.* — Нека је дата нека права p и на њој две тачке P и Q (сл. 82). Претпоставимо да свакој тачки A ван праве p одговара нека тачка A', тако да је нагибни угао диједра $APQA'$ једнак неком датом углу α и да с њим има исти смер; затим да су троуглови $A'PQ$ и APQ подударни; потом да свакој тачки A одговара само једна тачка A'; и, најзад, да се тачке на правој p поклапају са својим одговарајућим тачкама. Таква кореспонденција дефинише померање које се зове ротација или обртање. Права p зове се оса ротације, а угао α је угао ротације. Ротација је позитивна, ако је угао позитиван, иначе је негативна. Тај знак се одређује као и код углова у планиметрији.



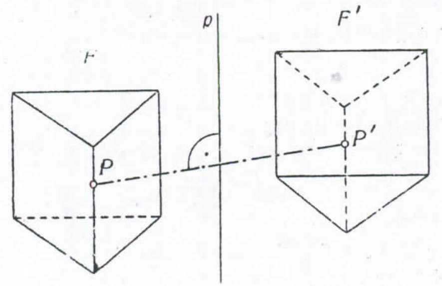
Сл. 82

Ако из тачке A спустимо нормалу AT на праву p, дужи AT и $A'T$ су хомологне. Стога је $A'T = AT$ и $A'T \perp p$. Нагибни угао ATA' диједра $APQA'$ је угао ротације. Јасно је да се његовом променом тачка A' креће по периферији круга чија је раван нормална на оси p и чији је центар тачка T, а полупречник AT.

У § 3 имали смо пример обртања равни око једне праве.

II СИМЕТРИЈЕ

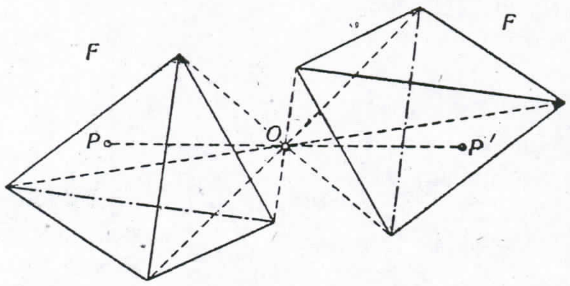
§ 95. *Симетрија у односу на праву (осна симетрија).*— Две фигуре F и F' симетричне су у односу на неку праву p, ако свакој тачки P једне фигуре одговара тачка P' друге фигуре, тако да права p стоји нормално на дужи PP' у њеној средини. Права p зове се оса симетрије (сл. 83).



Сл. 83

Обртање две осно симетричне фигуре око осе p за 180° доводи до њиховог поклапања. Тако, на пример, ако призму F у сл. 83 обрнемо око праве p за 180^0, тачка P поклопиће тачку P', и тако свака тачка призме F поклопиће себи симетричну тачку у фигури F', тј. призма F поклопиће призму F'.

§ 96. Симетрија у односу на тачку (централна симетрија). — Две фигуре F и F' симетричне су у односу на неку тачку O у простору, ако свакој тачки P једне фигуре одговара тачка P' друге фигуре, тако да је тачка O средина дужи PP'. Тачка O зове се центар симетрије (сл. 84).



Сл. 84

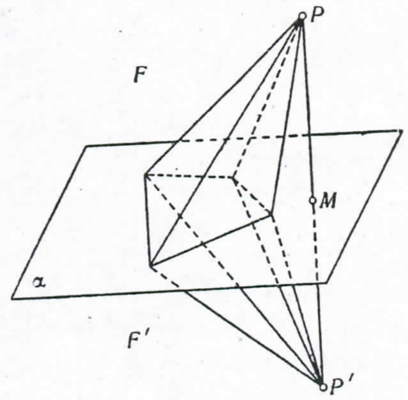
Као пример централно симетричних фигура имали смо унакрсне рогљеве у § 57 (сл. 40). Тамо смо видели да се, на пример, унакрсни триједри, у општем случају, не могу поставити један на други тако да се поклопе, због различитог распореда елемената у обе фигуре. Исто тако видимо да се централно симетрични тетраедри не могу поклопити, ако нису правилни (сл. 84).

Ако две симетричне фигуре чине једно тело, кажемо да то тело има центар симетрије. На пример, тачка пресека дијагонала паралелепипеда је центар симетрије тога тела (сл. 54). Заиста, та тачка полови сваку дуж која кроз њу пролази и спаја по две тачке на површини тога тела. Правилни тетраедар, на пример, нема центар симетрије, у што се лако уверити (§ 101).

§ 97. Симетрија у односу на раван. — Две фигуре F и F' симетричне су у односу на неку раван α ако свакој тачки P једне фигуре одговара тачка

P' друге фигуре тако да раван α стоји нормално на дужи PP' у њеној средини. Раван α зове се раван симетрије или симетриска раван (сл. 85).

Из сл. 85 видимо да се две пирамиде F и F', симетричне у односу на раван α, не могу, у општем случају, поклопити, јер одговарајући елементи у обе фигуре нису једнако распоређени.

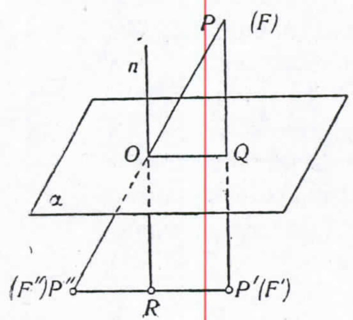


Сл. 85

Ако се неко тело може поделити на два дела симетрична у односу на неку раван, та раван се зове раван симетрије тога тела. На пример, правоугли паралелепипед је симетричан у односу на раван која пролази кроз средине бочних ивица и стоји на њима нормално.

Та врста симетрије врло је распрострањена у природи и у обичном животу.

§ 98. Теорема. — Ако су две фигуре F' и F'' симетричне са истом трећом фигуром F, једна у односу на неку раван α, а друга у односу на неку тачку O у равни α, оне су симетричне и међу собом у односу на праву која стоји нормално на равни α и пролази кроз тачку O.



Сл. 86

Нека је дата раван симетрије α фигура F и F' и тачка O у равни α, центар симетрије фигура F и F'' (сл. 86). Узмимо ма коју тачку P фигуре F и одговарајуће тачке симетрије P' и P'' у фигурама F' и F''. Треба доказати да је тачка P' симетрична са тачком P'' у односу на праву n.

По дефиницији осне симетрије (§ 95) треба да је $P'P'' \perp n$ и $P'R = RP''$, ако је тачка R пресек правих $P'P''$ и n. Да ти односи постоје, доказаћемо посматрањем троугла $PP'P''$. Раван α сече његову страну PP' у њеној средини Q (по дефиницији у § 97) и стоји на њој нормално. Тачка O је (по дефиницији у § 96) средина стране PP''. Према томе, страна $P'P'' \parallel OQ$. Како је $OQ \perp PP'$, исто тако је и $P'P'' \perp PP'$. Ако, сад, у равни посматраног троугла кроз тачку O повучемо праву $n \perp OQ$, она ће бити нормална на дужи $P'P''$ и пролазиће кроз њену средину R. Тиме је теорема доказана.

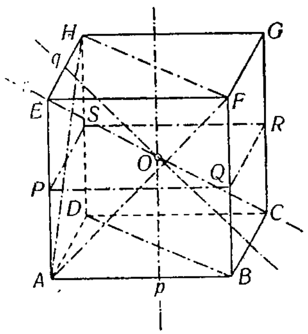
Знамо да се фигуре F' и F'' после обртања за 180° могу поклопити (§ 95). Али како се фигуре F и F'' не могу поклопити (§ 96), следује да се ни фигуре F и F' не могу поклопити, што смо видели у § 97.

§ 99. Теорема. — Два симетрична полиједра имају једнаке запремине.

Нека су, на пример, дате две симетричне пирамиде (сл. 85). Ако за раван њихове симетрије узмемо раван основе, пирамиде ће имати исту основу и једнаке висине, и стога ће им и запремине бити једнаке (§ 91).

Ако су, међутим, дата два ма која симетрична полиједра, они се могу раставити у једнаки број симетричних пирамида чије ће запремине бити једнаке. Дакле и два симетрична полиједра имају једнаке запремине.

§ 100. Симетрија коцке. — У пресеку O дијагонала коцке лежи центар њене симетрије (сл. 87).

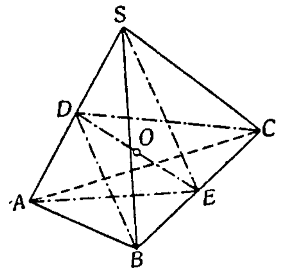


Сл. 87

Раван $PQRS$, која пролази кроз средине паралелних ивица AE, BF, CG, DH, претставља једну њену раван симетрије. На исти начин добијамо још две такве равни симетрије. Затим долази дијагонална раван $BFHD$. Таквих има шест. Према томе, коцка има девет равни симетрије.

Права p, која спаја средине наспрамних страна коцке, претставља једну њену осу симетрије. Има их у свему три. Исто тако, права q, која спаја средине наспрамних ивица, оса је симетрије. Таквих има шест. Коцка, дакле, у свему има 9 оса симетрије.

§ 101. Симетрија правилног тетраедра. — Нека је дат правилни тетраедар $SABC$ (сл. 88). Потражићемо прво његове равни симетрије. Видимо да је раван која пролази кроз ивицу SA и средину E ивице BC једна таква раван. Како тетраедар има шест ивица, јасно је да се могу добити шест таквих равни симетрије. Лако је видети да других нема.

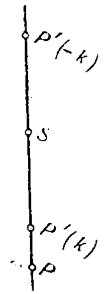


Сл. 88

Ако поставимо раван кроз ивицу BC и средину D ивице AS, она се са равни AES сече по правој DE. Како је $SE \perp BC$ и $AE \perp BC$, равни AES и BCD су узајамно нормалне. Из тога следује да је права DE једна оса симетрије. Заиста, видимо да су с једне стране тачке A и S симетричне у односу на праву DE, а с друге стране тачке B и C. Има још две такве осе симетрије, тј. праве које спајају средине наспрамних ивица.

Све три поменуте осе симетрије секу се у једној тачки O и образују три ивице једног правоуглог триједра. Међутим, тачка O није центар симетрије, јер, како се лако види, симетрична тачка темена S у односу на тачку O није теме тетраедра.

III СЛИЧНОСТ



Сл. 89

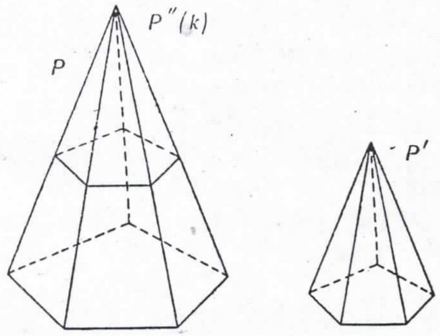
§ 102. Дефиниције. — Нека је S ма која тачка у простору (сл. 89) и k неки дати позитивни или негативни број. Ако, сад, свакој тачки P простора одговара нека тачка P' на правој SP тако да је алгебарска вредност односа $\frac{SP'}{SP}$ једнака k, тачка P' зове се хомотетична тачка тачке P, тачка S — центар хомотетије, а број k — однос хомотетије.

Ако је k позитиван број, тачке P' и P су на истој страни од тачке S; у том случају хомотетија је директна. У противном случају, кад је k негативан број, тачке P' и P су на разним странама од тачке S и хомотетија је инверзна.

Према томе, можемо рећи: Две фигуре F и F' су хомотетичне кад је свака тачка једне фигуре хомотетична са одговарајућом тачком друге фигуре у односу на исти центар хомотетије и са истим односом хомотетије.

На основу тога можемо дефинисати сличност двеју фигура на овај начин: Две фигуре F и F' су сличне ако је једна од њих подударна са једном хомотетичном фигуром оне друге.

§ 103. *Слични полиједри.* — Помоћу претходне дефиниције (§ 102) сличности фигура можемо рећи да је полиједар P' сличан полиједру P, ако је полиједар P' подударан са полиједром P'' који је хомотетичан полиједру P (сл. 90). Однос хомотетије полиједара P'' и P зове се однос сличности сличних полиједара P' и P.



Сл. 90

Већ према томе да ли су полиједри директно (сл. 90) или инверзно (сл. 91) хомотетични кажемо да су директно или инверзно слични.

За два слична полиједра P и P' из хомотетије следују ове особине њихове сличности:

1) однос две хомологне ивице једнак је односу сличности;
2) два хомологна нагибна угла једнака су;
3) две хомологне стране су слични многоуглови;
4) два хомологна диједра су подударна и имају исти смер ако је сличност директна, а супротан смер ако је сличност инверзна.

Инверзно слични полиједри не могу се повећавањем или смањењем довести до поклапања.

§ 104. *Теорема.* — Однос површина два слична полиједра једнак је квадрату њиховог односа сличности.

Нека су $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ површине страна једног полиједра, а $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ површине хомологних страна њему сличног полиједра (сл. 90). Ако је k однос сличности, следује да је

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_3}{Q_3} = \cdots = \frac{P_n}{Q_n} = k^2 .$$

Како је

$$P_1 = k^2 Q_1,\quad P_2 = k^2 Q_2,\quad P_3 = k^2 Q_3, \ldots, P_n = k^2 Q_n,$$

добијамо да је

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = k^2 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n).$$

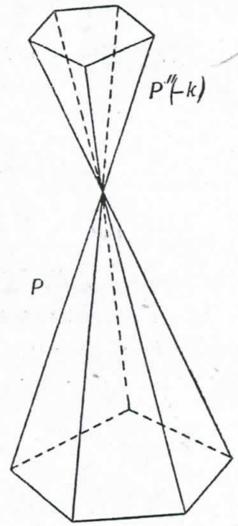
Збир на левој страни претставља површину P првога полиједра, а збир у заградама на десној страни површину Q другог полиједра. Стога је

$$P = k^2 Q$$

или

$$\frac{P}{Q} = k^2 ,$$

што је требало доказати.



Сл. 91

§ 105. *Теорема.* — Однос запремина две сличне пирамиде једнак је кубу њиховог односа сличности.

Нека су V_1 и V_2 запремине две сличне пирамиде, B_1 и B_2 површине њихових основа, H_1 и H_2 њихове висине и k њихов однос сличности. Тада је

$$V_1 = \frac{1}{3} B_1 H_1 ,$$

$$V_2 = \frac{1}{3} B_2 H_2 ,$$

одакле

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{B_1 H_1}{B_2 H_2} = \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{H_1}{H_2} .$$

Међутим, знамо да је $\frac{B_1}{B_2}=k^2$ и $\frac{H_1}{H_2}=k$ (§ 78), па отуда и

$$\frac{V_1}{V_2}=k^3,$$

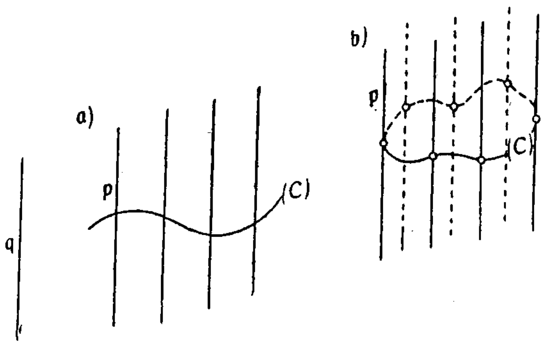
што је требало доказати.

ГЛАВА ОСМА

ОБЛА ТЕЛА

I ЦИЛИНДАР

§ 106. Дефиниције. — Ако се права p помера тако да остаје паралелна некој непомичној правој q (транслација, § 93) и да притом увек сече неку непомичну линију C, она производи површину која се зове цилиндрична површина



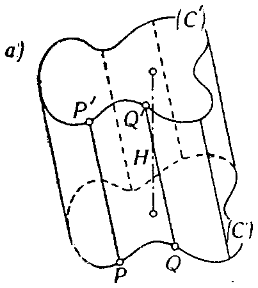
Сл. 92 Сл. 92, *a*) Сл. 92, *b*)

(сл. 92). Покретна права p зове се производиља те површине, а непомична линија C – водиља. Линија C може бити отворена или затворена, па имамо отворену (сл. 92, *a*) или затворену (сл. 92, *b*) цилиндричну површину.

У случају кад је водиља права линија, цилиндрична површина је раван (§ 5,4), а ако је водиља многоугао, цилиндрична површина је призматична површина (§ 70).

Очевидно је да се ма која линија повучена на цилиндричној површини (C'', сл. 93, *b*) може сматрати водиљом те површине, али је често повољно да се као водиља узме равна линија.

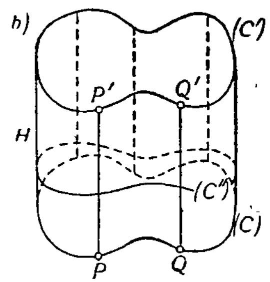
Можемо замислити да цилиндрична површина настаје транслацијом водиље у правцу производиље, јер се притом свака тачка водиље помера уствари по одговарајућој производиљи и тако је описује.



Сл. 93, *a*)

Кад затворену цилиндричну површину пресечемо двема паралелним равнима косим (сл. 93, *a*) или нормалним (сл. 93, *b*) према производиљи, постаје тело које се зове цилиндар (сл. 93).

Да су линије пресека C и C' подударне, може се показати овако: Нека је P нека тачка на линији C. Производиља која пролази кроз ту тачку сече линију C' у тачки P'. Уочимо сад произвољну тачку Q на линији C, различиту од P; производиља кроз тачку Q сече линију C' у тачки Q'. Отсечци PP' и QQ' су једнаки (§ 27), паралелни и истога смера. Из тога следује да ће транслација PP' (§ 93) довести тачку Q у тачку Q', и стога ће линија C поклопити линију C'.



Сл. 93, *b*)

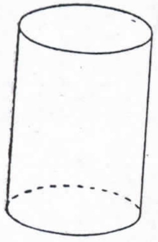
Ако су равни којима сечемо цилиндричну површину нормалне на производиљи, пресеци који настају зову се нормални пресеци цилиндричне површине.

Део цилиндричне површине између две паралелне равни које секу њене производиље зове се бочна површина или омотач цилиндра, а равни пресеци су основе цилиндра. Оне су подударне. Површину цилиндра чине његове две основе и омотач. Висина цилиндра (H у сл. 93) је растојање између равни основа.

Цилиндар је прав или кос према томе да ли производиља стоји нормално или косо према равни основе.

Цилиндар чија је основа круг зове се кружни цилиндар (сл. 94) или ваљак.

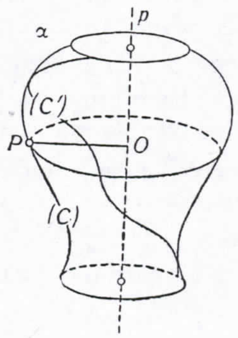
§ 107. *Обртне површине и обртна тела.* — Претпоставимо да су у некој равни α дате права p и ма која линија C и да се раван α обрће (§ 94) око праве p (сл. 95). Површина коју код тога обртања описује линија C зове се обртна површина. Права p зове се оса обртне површине, а линија C је њена производиља. Ако из ма које тачке P производиље C спустимо нормалу на осу p, добијамо тачку O, која је центар круга што га код ротације описује тачка P (§ 94). Јасно је да је раван тога круга, чији је полупречник OP, нормална на оси p.



Сл. 94

Повуцимо на обртној површини ма коју линију C'. Видимо да би њеном ротацијом око осе p постала иста површина. Значи да би она могла, у том погледу, заменити производиљу C.

Сваки пресек површине равни нормалном на оси p је круг, који се зове паралела површине, а сваки пресек равни која пролази кроз осу p је меридијан те површине. Свака раван која пролази кроз осу зове се меридијанска раван. На пример, круг са полупречником OP је паралела, производиља C је меридијан, а раван α је меридијанска раван. Очевидно је да су сви меридијани површине међусобно једнаки, док су паралеле, уколико је меридијан крива линија или дуж коса према оси, кругови са различитим полупречницима. У вези с тим, постанак обртне површине може се замислити и тако да је производи круг са променљивим полупречником чији се центар креће по правој линији и чија раван остаје нормална на тој правој.



Сл. 95

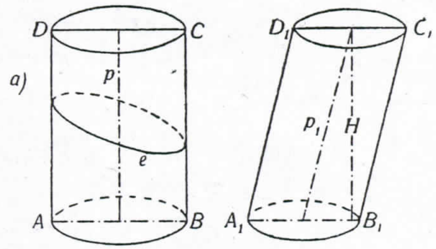
Обртно тело постаје кад се обртна површина пресече двема паралелним равнима нормалним на оси обртања. Међутим, може се замислити да такво тело постаје и на

тај начин да се нека равна фигура обрће око неке праве у својој равни. Тако, на пример, може се замислити да прави кружни ваљак постаје обртањем правоугаоника око једне његове стране. Ваљак који добијамо таквим обртањем зове се обртни ваљак.

Ако прави ваљак (сл. 96, *a*) пресечемо равни која пролази кроз његову осу (p), добијамо правоугаоник ($ABCD$), који се зове осни пресек ваљка.

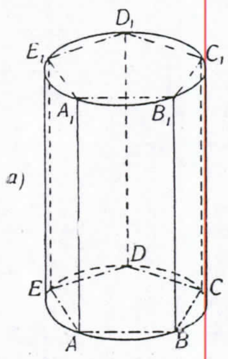
Пресек косог ваљка равни која пролази кроз његову висину и центре његових основа зове се карактеристични пресек косог ваљка ($A_1B_1C_1D_1$).

Пресек правога ваљка равни косом према основи је елипса (e).



Сл. 96

§ 108. *Површина правога ваљка.* — а) *Дефиниције.* — 1) Призма чије бочне ивице имају исту величину, исти правац и исти смер као производиље ваљка уписана је у ваљку (сл. 97, *a*), ако је основа призме многоугао уписан у основи ваљка; она је описана око ваљка (сл. 97, *b*), ако је, под иначе истим условима, њена основа многоугао описан око основе ваљка.



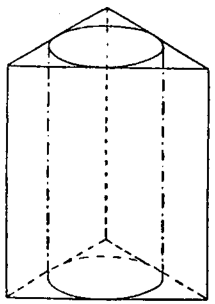
Сл. 97, *a*)

2) Површина омотача правога ваљка је граница којој тежи површина омотача уписане правилне призме кад се број страна многоугла основе неограничено удваја.

б) *Теорема.* — Површина омотача правога ваљка једнака је производу обима основе и висине.

Нека је у ваљку уписана правилна призма $ABCDE$ $A_1B_1C_1D_1E_1$ (сл. 97, *a*). Као што знамо (§ 84, последица 1), површина омотача те призме једнака је производу обима њене основе и висине. Међутим, ако број страна многоугла основе неограничено удвајамо, обим полигона ће имати за границу обим круга у коме је уписан. Како је висина бочних страна уписаних призама стална и једнака висини ваљка, гранична вредност површине омотача тих призама једнака је производу обима основе ваљка и висине. Према дефиницији, тај производ претставља површину омотача правога ваљка, чиме је теорема доказана.

b)



Сл. 97, *b*)

Ако са r означимо полупречник основе правога ваљка, са H његову висину, са M површину омотача, имамо да је

$$M = 2\pi r H$$

јер је $2\pi r$ обим круга основе ваљка.

Ако са B означимо површину основе ваљка, са P његову површину, можемо написати:

$$P = 2B + M$$

или

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot H = 2\pi r\,(r + H).$$

§ 109. *Запремина ваљка.* — а) *Дефиниција.* — Запремина ваљка је граница којој тежи запремина уписане призме чија је основа правилан многоугао кад се број страна многоугла неограничено удваја.

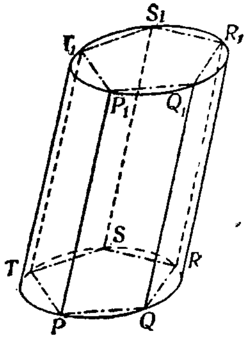
б) *Теорема.* Запремина ваљка једнака је производу површине основе и висине.

Нека је дат коси ваљак (сл. 98) са уписаном призмом $PQRSTP_1Q_1R_1S_1T_1$ чија је основа правилни многоугао. Запремина сваке призме једнака је производу површине њене основе и висине (§ 90, в). Ако број страна многоугла неограничено удвајамо, његова површина тежи извесној граници B, за коју знамо да је једнака површини круга основе у коме је многоугао уписан. Значи да запремине тих призама имају граничну вредност једнаку производу BH, где је H

заједничка висина уписаних призама и ваљка. Тиме је теорема доказана.

Ако је r полупречник основе ваљка, V његова запремина, имамо да је

$$V = \pi r^2 H.$$



Сл. 98

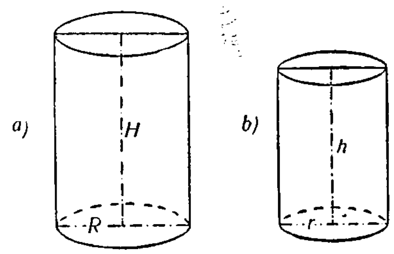
Из планиметрије знамо да неограниченим удвајањем броја страна правилног многоугла описаног око круга његова површина тежи истој граничној вредности као и површина уписаног многоугла, тј. површини круга. Отуда је јасно да би и запремине описаних призама чије би основе биле ти многоуглови имале исту граничну вредност као и уписане призме, тј. запремину ваљка.

§ 110. *Однос површина омотача, површина и запремина сличних обртних ваљака.* — а) *Дефиниција.* — Два обртна ваљка су **слична**, ако су постали обртањем сличних правоугаоника око хомологних страна.

б) *Теореме.* — 1) Однос површина омотача два слична обртна ваљка једнак је квадрату њиховог односа сличности.

2) Однос површина два слична обртна ваљка једнак је квадрату њиховог односа сличности.

3) Однос запремина два слична обртна ваљка једнак је кубу њиховог односа сличности.



Сл. 99

Из дефиниције а) следује да је $\frac{R}{r} = \frac{H}{h} = k$, где су R и r полупречници основа, H и h висине сличних ваљака, а k њихов однос сличности (сл. 99).

Ако површине омотача ваљака обележимо са M и M_1, површине ваљака са P и P_1, а запремине са V и V_1, добијамо редом:

1) $$\frac{M}{M_1}=\frac{2\pi RH}{2\pi rh}=\frac{R}{r}\cdot\frac{H}{h}=k\cdot k=k^2,$$

2) $$\frac{P}{P_1}=\frac{2\pi R(R+H)}{2\pi r(r+h)}=\frac{R}{r}\cdot\frac{R+H}{r+h}=k\cdot k=k^2,$$

3) $$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi R^2H}{\pi r^2h}=\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{H}{h}=k^2\cdot k=k^3,$$

што је требало доказати.

Вежбања

1) Ако се на раван осног пресека правога ваљка постави нормална раван кроз једну од производиља ваљка које су у осном пресеку, тада та раван има са ваљком само ту производиљу заједничку (**тангентна раван** ваљка). Доказати.

2) Раван паралелна оси правога ваљка сече га тако да од круга његове основе отсеца лук од 120°. Дужина осе је $H=10$ cm; њено растојање од равни пресека је $a=2$ cm. Наћи површину пресека.

3) Дијагонала осног пресека **равностраног** ваљка (осни пресек – квадрат) једнака је a. Наћи запремину правилне осмостране призме која је уписана у томе ваљку.

4) Цилиндрични парни котао (прави ваљак) има пречник основе 0,7 m а дужину 3,8 m. Израчунати колики је притисак паре на целу површину котла, ако притисак паре на 1 cm² износи 10 kg.

5) Наћи колики најмање треба да је пречник основе правога ваљка да се у њега може поставити коцка чија је ивица a cm, и колики најмање треба да је тај пречник па да се коцка може у њега поставити у сваком положају.

6) Наћи зависност између висине правога ваљка и полупречника његове основе, ако се њихов збир узме за пречник круга чија је површина једнака површини ваљка.

7) За колико се мора повећати висина правога ваљка па да површина омотача тако добијеног ваљка буде једнака површини датога ваљка.

8) Израчунати основну ивицу правилне четворостране призме која има са датим правим ваљком једнаке површину и висину ($r=7{,}7$ $H=16{,}1$).

9) Израчунати површину шупљег ваљка чија је висина $H=25$ cm, полупречник круга спољашњег омотача $R=15$ cm, а унутрашњег $r=6$ cm.

10) Око правилног октаедра описан је ваљак. Два темена октаедра су у центрима основа ваљка а остала четири на његовом омотачу. Ако је ивица октаедра $a=10$ cm, наћи површину омотача ваљка.

11) Дата је површина $P=150{,}796$ m² правога ваљка и површина $M=94{,}2478$ m² његовог омотача. Наћи висину ваљка.

12) Треба начинити отворен цилиндрични суд од лима тако да се висина односи према пречнику основе као 4 : 3; ако тај суд има да садржи 1000 литара, колико је најмање лима за то потребно?

13) Две полуравни чија је заједничка ивица оса правога ваљка исецају из ваљка један исечак. Израчунати површину тога исечка, ако је угао између полуравни 36° а полупречник ваљка $r=108$ cm и висина $H=60$ cm.

14) Мензура има облик правога ваљка чији је пречник на унутрашњој страни 5 cm. Треба је поделити на кубне сантиметре. Колики је размак између поделака?

15) Кабл има у пречнику 1 cm а дуг је 10 km; треба га обложити оловом у дебљини од 2 mm. Наћи тежину употребљеног олова, ако му је специфична тежина $=11{,}4$.

16) Из цилиндричног стабла дугог 5 m и у пречнику 36 cm треба истесати греду тако да у попречном пресеку има облик правоугаоника чија је дијагонала једнака томе пречнику. Израчунај неке могуће случајеве и колико одлази на отпатке.

17) Водоводна цев има унутрашњи пречник 1,8 cm. На славину излази 30 литара воде за 5 минута. Наћи брзину воде у цеви за то време.

18) Израчунај приближно колико метара бакарне жице дебљине 1 mm треба па да се намота први слој завојака на цилиндрични ваљак пречника 4,3 cm и дужине 12,6 cm. На што треба пазити код следећих слојева?

19) Из жице дуге 30 cm може се савити бескрајно много правоугаоника чијим обртањем око једне или друге стране постају обртни ваљци. Посматрај промене у површини и запремини тих ваљака у зависности од стране правоугаоника.

20) У ваљку је уписана правилна тространа призма, а у призми уписан је ваљак. Наћи однос запремина тих ваљака.

21) Прави ваљак пресечемо равни паралелно његовој висини. Изрази површину тога пресека као функцију полупречника основе ваљка, његове висине и растојања d пресека од осе ваљка. Нарочито за случај кад је $d=\frac{r}{2}\sqrt{3}$. Наћи запремине оба дела ваљка за тај случај.

22) Из правога ваљка $(r,\ H)$ исечена је највећа правилна тространа призма. Колико одлази на отпатке?

23) У равностраном ваљку је уписана и око њега описана правилна шестострана призма. Ако је полупречник основе ваљка r, наћи разлику површина омотача обе призме.

24) Прави ваљак има полупречник основе r и висину H. Ако се полупречник r смањи за извесну величину x, а затим висина H за исту ту величину, та два нова ваљка имају једнаке запремине. Колико је x?

25) Како се односе запремине два права ваљка чије су површине омотача једнаке?

26) Како се односе површине омотача два права ваљка чије су запремине једнаке?

27) Квадрат стране a обрће се око осе која је од центра квадрата удаљена за p. Наћи површину и запремину обртног тела кад је оса паралелна страни квадрата.

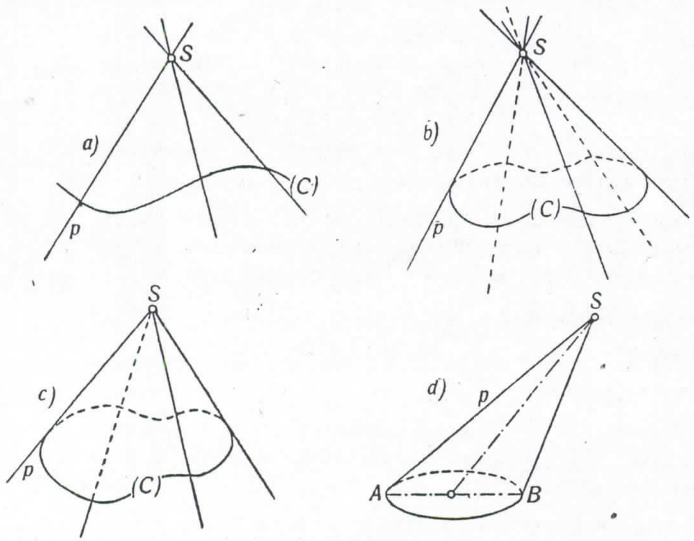
28) Из месингане плоче дебљине $d=2$ cm исече се кружни прстен ширине $b=5$ cm. Пречник унутрашњег исеченог прстена износи $a=12$ cm; наћи површину и запремину прстена.

29) Цилиндричну бакрену жицу дужине $l=1$ m и пречника $d=2$ cm треба обложити концентричним слојем плуте тако да жица лебди у дестилованој води од 4^0 Целзијуса. Коју дебљину мора имати шупљи ваљак од плуте ако је специфична тежина бакра $s=8{,}88$, специфична тежина плуте $s_1=0{,}24$ и колико је тежак?

30) Израчунати запремину косог ваљка чији је карактеристични пресек ромб стране a и оштрог угла $\alpha=60^0$.

II КОНУС

§ 111. *Дефиниције.* — Ако се права p (сл. 100) која пролази кроз неку утврђену тачку S помера по некој непо-

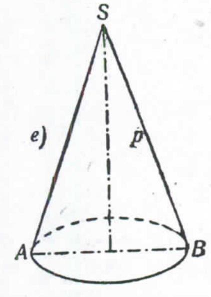


Сл. 100, *a*), *b*), *c*), *d*)

мичној линији C тако да је увек сече, она производи површину која се зове к о н у с н а п о в р ш и н а. Права p је

производиља, линија C — в о д и љ а, а тачка S — т е м е или в р х конусне површине.

Према томе да ли је C отворена или затворена линија, и конусна површина је отворена (сл. 100, *a*) или затворена (сл. 100 *b*, *c*, *d* и *e*).



Сл. 100, *e*)

Свака полуправа на правој p описује по једно к р и л о (г р а н у) конусне површине. Према потреби проучавају се једно или оба крила те површине.

Ако затворену конусну површину са једним крилом пресечемо равни која сече све производиље, постаје тело ограничено делом крила конусне површине која се завршава теменом и делом равни која сече производиље. То тело зове се к о н у с (сл. 100, *d* и *e*). Део конусне површине између темена и равни зове се б о ч н а п о в р ш и н а или о м о т а ч а равна површина — о с н о в а конуса. Растојање између врха и равни основе је в и с и н а конуса.

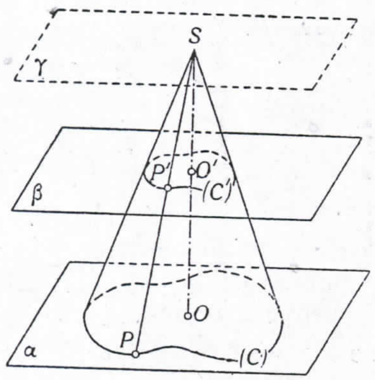
Конус чија је основа круг зове се к р у ж н и к о н у с или к у п а. Кад је права која спаја врх купе и центар основе нормална на основи, купа је п р а в а (сл. 100, *e*), иначе је к о с а (сл. 100, *d*). Производиља праве купе зове се још а п о т е м а праве купе.

Можемо замислити да права купа постаје обртањем правоуглог троугла око једне његове катете. Друга катета описује круг, који је основа купе, а хипотенуза описује омотач. Зато је права купа и о б р т н а к у п а.

Права која спаја врх и центар основе праве купе зове се о с а праве купе.

§ 112. *Равни пресеци конуса.* — a) Пресек праве купе равни која пролази кроз осу зове се о с н и п р е с е к праве купе (сл. 100, *e*; SAB). Пресек косе купе равни која пролази кроз висину купе и центар основе зове се к а р а к т е р и с т и ч н и п р е с е к косе купе. Он садржи најдужу и најкраћу производиљу (сл. 100, *d*; SAB).

б) *Теорема.* — *Ако дати конус* (сл. 101) *пресечемо ма којом равни* β *паралелно равни основе* α, *линија* C' *пресека и контура* C *основе конуса су хомотетичне криве са центром хомотетије у врху конуса.*



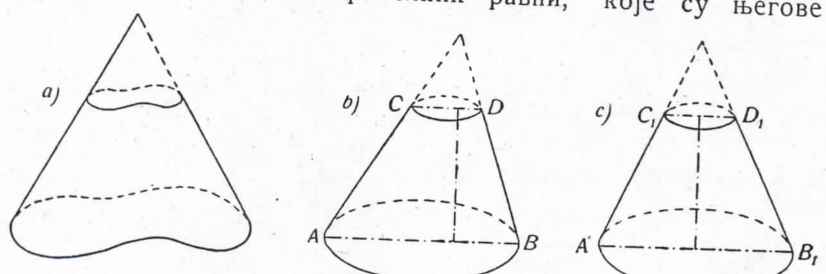
Сл. 101

Нека су SO и SO' растојања врха S од равни α и β; P и P' тачке у којима производиља SP сече криве C и C'; γ-раван која пролази кроз теме S, а паралелна је равнима α и β. Тада, према § 28, имамо да је

$$\frac{SP}{SP'}=\frac{SO}{SO'}.$$

Дакле, криве C и C' су хомотетичне (§ 102), што је требало доказати.

в) Пресеком конуса равни паралелно основи постаје тело које се зове *зарубљени конус* (сл. 102). Он је ограничен деловима паралелних равни, које су његове



Сл. 102, *a*), *b*), *c*)

основе, и делом конусне површине, која је његова *бочна површина* или *омотач*. Ако је основа конуса круг, по претходној теореми (сл. 102, *b*) и пресек паралелан основи је круг. У том случају имамо *зарубљени кружни конус*, који се зове и *зарубљена купа*. Она је

права ако је постала таквим пресеком праве купе, а *коса* ако је постала таквим пресеком косе купе. Растојање основа је *висина* зарубљеног конуса.

Можемо замислити да је права зарубљена купа постала обртањем правоуглог трапеза око крака нормалног на основама, што ће рећи да је обртно тело.

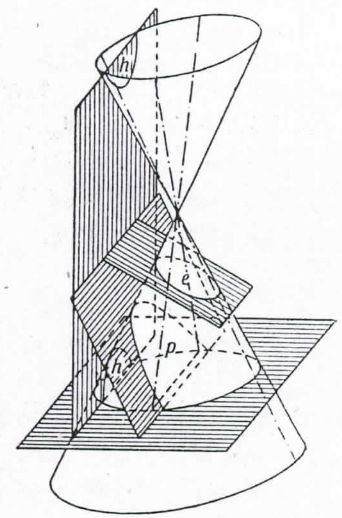
Производиља праве зарубљене купе зове се *апотема* праве зарубљене купе. Права која спаја центре основа праве зарубљене купе зове се *оса* праве зарубљене купе. Пресек те купе равни која пролази кроз осу зове се *осни пресек* праве зарубљене купе (сл. 102, *c*; $A_1B_1C_1D_1$). Пресек зарубљене купе равни која пролази кроз центре основа и висину зове се *карактеристични пресек* косе зарубљене купе (сл. 102, *b*; $ABCD$).

Ако се права купа пресече равни која није паралелна основи, добијају се пресеци који нису кругови. Могу наступити ова три случаја:

1) Ако раван сече све производиље и коса је према основи, пресек је *елипса* (сл. 103, *e*).

2) Ако је раван паралелна једној производиљи, она сече све остале и пресек је *парабола* (сл. 103, *p*).

3) Ако је раван паралелна двема производиљама, она сече све остале на оба крила и пресек је *хипербола* (сл. 103, *h*).



Сл. 103

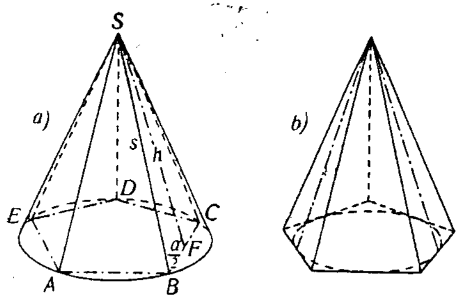
У вези с тим поступком добијања кривих све три криве: елипса, хипербола и парабола зову се једним именом *конусни пресеци*.

§ 113. Површина праве купе. —

а) *Дефиниције.* — 1) Пирамида је *уписана* у купи (сл. 104, *a*) кад је врх пирамиде уједно и врх купе и кад је основа пирамиде многоугао уписан у основи купе; она је *описана* око купе (сл. 104, *b*) ако је, под истим условима, многоугао описан око основе купе.

2) Површина омотача праве купе је граница којој тежи површина омотача правилне пирамиде уписане у купи кад се број страна многоугла основе неограничено удваја.

б) *Теорема.* — Површина омотача праве купе једнака је полупроизводу обима основе и апотеме.



Сл. 104, *a)* и *b)*

Упишимо у основу праве купе правилан многоугао $ABCDE$ (сл. 104, *a)*) и спојмо његова темена са врхом S купе. Тиме смо конструисали правилну пирамиду уписану у купу. Ако је p_n обим основе пирамиде и $SF = h_n$ њена апотема, површина те пирамиде (§ 85) једнака је

$$\frac{p_n h_n}{2}.$$

Ако се број n страна правилног многоугла неограничено удваја, његов обим p_n тежи граници која је једнака обиму круга у који је полигон уписан; апотема h_n тежи, исто тако, граници која је једнака апотеми $SB = s$ купе. Заиста, ако је $BF = \frac{a_n}{2}$ из планиметрије знамо да је $s - h_n < \frac{a_n}{2}$. Међутим је $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$; дакле,

$$\lim_{n \to \infty} (s - h_n) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n \to \infty} h_n = s$$

Према томе, површина $\frac{p_n h_n}{2}$ омотача те пирамиде тежи граници која је једнака полупроизводу обима основе и апотеме купе, а то је, по дефиницији, површина омотача купе. Тиме је теорема доказана.

Лако је показати да и површина омотача правилне пирамиде описане око купе тежи истој граници, што остављамо ученику.

Ако са r обележимо полупречник основе купе, а са M површину њеног омотача, добијамо да је

$$M = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} p_n h_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r s = \pi r s.$$

Целокупна површина P купе једнака је

$$B + M,$$

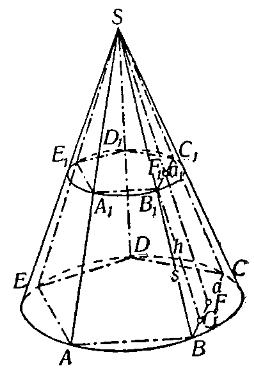
где је површина основе купе, или

$$P = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s).$$

§ 114. *Површина праве зарубљене купе.* — а) *Дефиниције.* — 1) Ако се пирамида, уписана у купи, и купа пресеку једном равни паралелно основи, добија се зарубљена пирамида уписана у зарубљеној купи; она је описана око зарубљене купе ако постаје таквим пресеком описане пирамиде око купе.

2) Површина омотача зарубљене купе је граница којој тежи површина омотача правилне зарубљене пирамиде уписане у тој купи кад се број страна многоугла неограничено удваја.

б) *Теорема.* — Површина омотача праве зарубљене купе једнака је полупроизводу збира обима њених основа и апотеме.



Сл. 105

У дату праву зарубљену купу упишимо правилну зарубљену пирамиду $ABCDE\,A_1B_1C_1D_1E_1$ (сл. 105). Ако је p_n обим доње основе зарубљене пирамиде, p_n' обим горње основе и h_n њена апотема, површина омотача те пирамиде (§ 86) једнака је

$$\frac{p_n + p_n'}{2} \cdot h_n.$$

Међутим, ако се број n страна многоуглова у основама неограничено удваја, обим p_n тежи граници која је једнака обиму круга доње основе купе, а обим p_n' граници која је једнака обиму круга горње основе купе; апотема $F_1F = B_1G = h_n$ има граничну вредност једнаку апотеми $B_1B = h_n$ дате зарубљене купе. Заиста, ако је $BC = a_n$, $B_1C_1 = a_n'$, тада је $BG = \frac{a_n - a_n'}{2}$. Међутим, из планиметрије знамо да је $s - h_n < \frac{a_n - a_n'}{2}$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_n'}{2} = 0$, биће $\lim\limits_{n\to\infty} (s - h_n) = 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = s$. Значи да површина $\frac{p_n + p_n'}{2} \cdot h_n$ омотача те зарубљене пирамиде тежи граници која је једнака полупроизводу збира обима основа и апотеме праве зарубљене купе, а то је, по дефиницији, површина омотача те купе. Тиме је теорема доказана.

Ако полупречник доње основе зарубљене купе означимо са R, горње основе са r, површину омотача са M, добијамо:

$$M = \frac{1}{2} (\lim_{n\to\infty} p_n + \lim p_n') \cdot \lim h_n$$

тј.

$$M = \frac{1}{2} (2\pi R + 2\pi r)\, s = \pi\,(R + r)\, s.$$

Према томе, целокупна површина P правилне зарубљене купе једнака је

$$B + B_1 + M,$$

где су B и B_1 површине основа купе, или

$$P = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi\,(R + r)\, s,$$

и, коначно:

$$P = \pi\,[R^2 + r^2 + (R + r) \cdot s].$$

§ 115. *Запремина купе.* — а) *Дефиниција.* — З а п р е м и н а к у п е је граница којој тежи запремина пирамиде уписане у купи кад се број страна правилног многоугла основе пирамиде неограничено удваја.

б) *Теорема.* — З а п р е м и н а к у п е ј е д н а к а ј е т р е ћ и н и п р о и з в о д а п о в р ш и н е о с н о в е и в и с и н е.

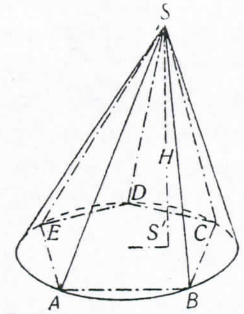
Нека је у датој купи (сл. 106) уписана пирамида $SABCDE$ чија је основа правилни многоугао $ABCDE$. Висина H те пирамиде једнака је висини дате купе. Ако површину основе пирамиде означимо са Q, њена запремина износи (§ 91):

$$\frac{QH}{3}.$$

Међутим, површина Q основе пирамиде тежи површини B основе купе као својој граници кад се број n страна многоугла основе пирамиде неограничено удваја. Према томе, запремина купе једнака је

$$\frac{BH}{3},$$

што одговара датој дефиницији. Тиме је теорема доказана.



Сл. 106

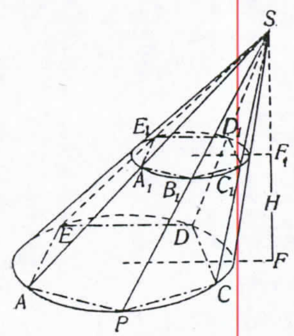
Запремина описане пирамиде тежила би истој граници, јер површина описаног правилног многоугла основе пирамиде тежи, исто тако, површини круга основе купе као својој граници.

Ако полупречник основе купе означимо са r, њену запремину са V, имамо:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

§ 116. *Запремина зарубљене купе.* — а) *Дефиниција.* — З а п р е м и н а з а р у б љ е н е к у п е је граница којој тежи запремина уписане зарубљене пирамиде кад се број страна правилних многоуглова основа зарубљене пирамиде неограничено удваја.

б) *Теорема.* — З а п р е м и н а з а р у б љ е н е к у п е ј е д н а к а ј е з б и р у з а п р е м и н а т р и ј у к у п а ч и ј е с у в и с и н е ј е д н а к е в и с и н и з а р у б љ е н е к у п е, а о с н о в е р е д о м: п р в е – д о њ а о с н о в а з а р у б љ е н е к у п е, д р у г е – г о р њ а о с н о в а з а р у б љ е н е к у п е, и т р е ћ е – с р е д њ а п р о п о р ц и о н а л а т и х о с н о в а.



Сл. 107

У дату зарубљену купу уписаћемо зарубљену пирамиду $ABCDE$ $A_1B_1C_1D_1E_1$ (сл. 107). Зарубљена пирамида и зарубљена купа имају исту висину $F_1F = H$. Означимо површине основа зарубљене пирамиде са Q и Q_1, тада њена запремина V_1 износи (§ 91, *b*):

$$\frac{H}{3}(Q+Q_1+\sqrt{QQ_1}).$$

Ако број страна правилних многоуглова основа зарубљене пирамиде неограничено удвајамо, површина Q доње основе зарубљене пирамиде тежи граници B, која је површина круга доње основе зарубљене купе, површина Q_1 горње основе зарубљене пирамиде тежи граници B_1, која је површина круга горње основе зарубљене купе. Према томе, запремина V зарубљене купе једнака је

$$\frac{H}{3}(B+B_1+\sqrt{BB_1}),$$

што одговара постављеној дефиницији. Дакле, теорема је доказана.

Ако полупречник доње основе означимо са R, горње основе са r, добијамо

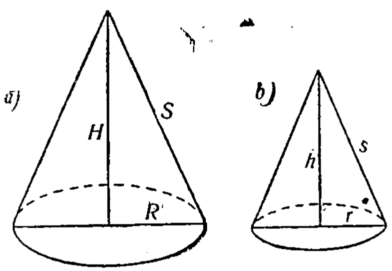
$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr).$$

§ 117. Однос површина омотача, површина и запремина сличних обртних купа. — а) *Дефиниција.* — Две обртне купе су с л и ч н е ако су постале обртањем сличних правоуглих троуглова око хомологних страна.

б) *Теореме.* — 1) О д н о с п о в р ш и н а о м о т а ч а д в е с л и ч н е о б р т н е к у п е ј е д н а к ј е к в а д р а т у њ и х о в о г о д н о с а с л и ч н о с т и.

2) О д н о с п о в р ш и н а д в е с л и ч н е о б р т н е к у п е ј е д н а к ј е к в а д р а т у њ и х о в о г о д н о с а с л и ч н о с т и.

3) О д н о с з а п р е м и н а д в е с л и ч н е о б р т н е к у п е ј е д н а к ј е к у б у њ и х о в о г о д н о с а с л и ч н о с т и.



Сл. 108

Из дефиниције а) имамо да је

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}=\frac{S}{s}=k,$$

где су R и r полупречници основа, H и h висине, S и s апотеме датих сличних купа, а k њихов однос сличности (сл. 108).

Ако површине омотача купа означимо са M и M_1, њихове површине са P и P_1, а запремине са V и V_1, произилази редом:

1) $$\frac{M}{M_1}=\frac{\pi RS}{\pi rs}=\frac{R}{r}\cdot\frac{S}{s}=k\cdot k=k^2,$$

2) $$\frac{P}{P_1}=\frac{\pi R(R+S)}{\pi r(r+s)}=\frac{R}{r}\cdot\frac{R+S}{r+s}=k\cdot k=k^2,$$

3) $$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi r^2 h}=\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{H}{h}=k^2\cdot k=k^3,$$

што је требало доказати.

Вежбања

1) Обим основе праве купе је p а осни пресек је правоугли троугао. Израчунати површину и запремину купе.

2) а) У дату праву купу чији је полупречник основе r и чија је висина H уписати коцку и израчунати њену ивицу. б) Како се односи запремина р а в н о с т р а н е купе (осни пресек — равнострани троугао) према запремини коцке која је у њој уписана?

3) У правој купи је уписана и око ње описана правилна четворострана пирамида. Ако је r полупречник основе купе и H њена висина, израчунати површину пирамиде.

4) У правој купи је уписана и око ње описана правилна а) тространа, б) шестострана пирамида. Израчунати запремине пирамида.

5) У правилном тетраедру је уписана и око њега описана купа. Наћи однос а) површина омотача, б) запремина те две купе.

6) У правој купи датог полупречника r основе и висине H уписана је правилна тространа призма чије су бочне стране квадрати. Наћи ивицу те призме.

7) Колико ће дубоко утонути права купа која плива у води окренута врхом према доле, ако је њена висина H а специфична тежина материјала из кога је начињена $s=0{,}729$?

8) Наћи запремину праве купе ако њен омотач развијен у равни чини кружни исечак са централним углом од 120^0 и ако је полупречник основе једнак 1,5 m.

9) Како се међу собом односе површина основе, површина омотача и целокупна површина равностране купе?

10) Ако је највећи угао између две производиље праве купе 120^0, површина њеног омотача једнака је површини омотача правога ваљка који има са купом исту основу и висину. Доказати.

11) Површина праве купе је $P=28{,}3144$ m^2, а површина омотача $M=20{,}8144$ m^2. Наћи запремину купе и централни угао кружног исечка који чини омотач развијен у равни.

12) а) Правоугли троугао чије су катете $a=2{,}4$ m и $b=5$ m обрће се око хипотенузе c као осе. Наћи површину и запремину настале д в о ј н е купе. б) Косоугли троугао има стране a, b, c. Наћи запремине обртних тела, ако се троугао обрће редом око сваке стране ($a=10$ cm, $b=17$ cm, $c=21$ cm). в) Доказати да су запремине добијене под б) обрнуто пропорционалне странама троугла.

13) Права купа је подељена равнима паралелним основи на три дела који имају једнаке запремине. Растојање равни пресека од врха купе изразити као функцију висине купе.

14) Пласт сена има облик правога ваљка са правом купом на врху. Полупречник основе пласта је 2,5 m, висине 4 m, а висина цилиндричног дела износи 2,2 m. Специфична тежина сена је 0,03. Наћи тежину пласта.

15) Висина и производиља праве купе односе се као $4:5$, а њена запремина је 96π cm^3. Наћи њену површину.

16) Производиља праве купе једнака је s и чини са равни основе угао од 30^0. Наћи запремину купе.

17) Како се међу собом односе запремине равностране купе и равностраног ваљка, ако су им површине једнаке?

18) Права купа и прави ваљак имају заједничку основу и једнаке запремине. Ако се оба тела пресеку равни паралелно основи кроз средину висине ваљка, наћи како се односе површине добијених пресека купе и ваљка.

19) Из праве купе исече се купа помоћу конусне површине чије су производиље паралелне хомологним производиљама дате купе а осе се поклапају. Наћи полупречнике основе шупље купе, ако је њена запремина $V=67{,}1106$, ширина прстена основе $d=1$ и нагиб производиље према основи 60^0.

20) Права купа издубена је помоћу правог ваљка чија је висина једнака половини висине купе и чија оса лежи у оси купе. Полупречник основе купе је $R=3$, основе ваљка $r=1$, а производиља купе је $s=5$. Израчунати запремину и површину издубеног тела.

21) У коме односу стоје површине равностране купе и коцке ако имају једнаке запремине?

22) Наћи запремину косе купе чији је полупречник основе $r=22{,}5$ и чија је најдужа производиља $S=53$, а најкраћа $s=41$.

23) Површине основа праве зарубљене купе су 4 и 25. Њена висина подељена је на 3 једнака дела и кроз сваку деону тачку постављена је раван паралелна основи. Наћи површине пресека.

24) Полупречници основа праве зарубљене купе и њена производиља односе се као $1:4:5$; висина је једнака 8 cm. Наћи површину омотача.

25) Права зарубљена купа има производиљу $s=5$ cm и полупречнике основа $R=5$ cm, $r=1$ cm. Наћи полупречник основе правога ваљка који има с њом једнаку висину и једнаку површину омотача.

26) Наћи површину омотача праве зарубљене купе, ако њена производиља чини угао од 30^0 са равни основе, а површина осног пресека износи Q.

27) Исечак кружног прстена са централним углом од 288^0 чини омотач праве зарубљене купе. Наћи запремину те купе, ако полупречници концентричних кругова који образују прстен износе R и r.

28) Наћи запремину праве зарубљене купе кад су познати полупречници основа $R=54$ и $r=21$ и производиља $s=62{,}5$.

29) Полупречник једне основе праве зарубљене купе двапут је већи од полупречника друге основе; површина омотача једнака је збиру површина основа; површина осног пресека износи 36 m^2. Наћи запремину.

30) Равнострани троугао обрће се око осе која пролази кроз једно теме и стоји нормално на оближњој страни. Површина обртног тела је $P=144\pi$; израчунати његову запремину.

31) Равнокраки трапез са паралелним странама од 7 cm и 17 cm и површином од 144 cm^2 обрће се око своје осе симетрије. Наћи запремину обртног тела.

32) Трапез са паралелним странама a, b и висином h обрће се око стране a. Наћи запремину обртног тела.

33) У правој зарубљеној купи висине H и полупречника основа R и r уписана је правилна четворострана зарубљена пирамида. Наћи запремину те пирамиде.

34) У правој зарубљеној купи уписана је и око ње описана правилна шестострана зарубљена пирамида. Наћи запремине сва три тела, ако је висина купе H, а полупречници основа R и r.

35) Из стабла облика праве зарубљене купе чија је дужина $H=2{,}5$ m а обими на крајевима износе $p_1=0{,}9$ m и $p_2=0{,}6$ m треба истесати греду у облику квадратне призме са основом уписаном у мањем кругу. Колико су тешки отпаци, ако је специфична тежина дрвета $s=\frac{132}{179}$?

36) Ако се уместо запремине праве зарубљене купе узме прави ваљак исте висине чији је полупречник основе једнак аритметичкој средини полупречника основа дате купе, колика је грешка почињена?

37) У коме растојању од веће основе треба пресећи праву зарубљену купу равни паралелно основи па да њена запремина буде једнака запремини правог ваљка исте висине чија је основа тај пресек?

38) Цилиндричну цев од месинга чији су пречници омотача $D=13$ cm и $d=5$ cm а дужина $H=18$ cm треба претопити у праву зарубљену купу са пречницима $a=10$ cm, веће основе, и $b=8$ cm, мање основе. Колика је висина те зарубљене купе?

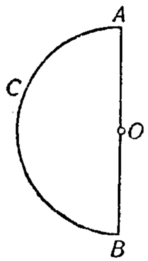
39) Косоугли паралелограм обрће се око сваке од своје две суседне стране a и b. Наћи однос између запремина добијених обртних тела.

III ЛОПТА

§ 118. *Дефиниције.* — Сферна површина или сфера је геометриско место тачака у простору једнаког растојања од неке дате тачке, која се зове центар сфере. Тело ограничено сферном површином зове се лопта.

Дуж која спаја центар са ма којом тачком површине зове се полупречник (радијус) лопте, а она која спаја две тачке површине и пролази кроз центар зове се пречник (дијаметар) лопте. Из дефиниције сфере следује да су сви полупречници међусобно једнаки и да је пречник једнак двоструком полупречнику.

Ако замислимо да се полукруг ABC (сл. 109) обрће око свога пречника AB, он производи лопту. Кружна линија ABC производи сферну површину. Видимо, дакле, да је лопта обртно тело.



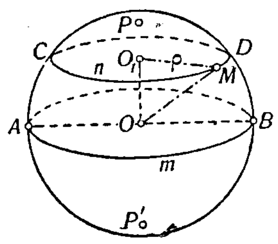
Сл. 109

Ако је растојање неке тачке од центра лопте мање од њеног полупречника, кажемо да је тачка *у* лопти, а ако је то растојање веће од полупречника, тачка је ван лопте.

§ 119. *Равни пресеци лопте.* – а) *Теорема.* – Пресек сфере и равни је круг.

Нека је сфера пресечена једном равни која не пролази кроз њен центар O (сл. 110). Спустимо из тога центра нормалу $OO_1 = d$ на раван пресека и њено подножје O_1 спојмо са ма којом тачком M на линији пресека равни и сфере. Ако је полупречник лопте $OM=r$ и дуж $O_1M = \rho$, из правоуглог троугла OO_1M добијамо:

$$\rho = \sqrt{r^2 - d^2}\,.$$



Сл. 110

У том изразу су величине r и d сталне за сваку тачку M, па је стална и величина ρ, што значи да је геометриско место тачке M заиста круг.

Ако се растојање d равни пресека од центра сфере мења, видимо да се мења и полупречник ρ круга пресека: што је d мање, веће је ρ, и обрнуто. Највећа вредност за ρ добија се кад је $d=0$. Тада је $\rho=r$. Стога можемо рећи:

Последица 1. Равни пресеци сфере подједнако удаљени од центра сфере су једнаки кругови.

Последица 2. Пресек сфере и равни је већи круг кад је раван пресека ближе центру сфере.

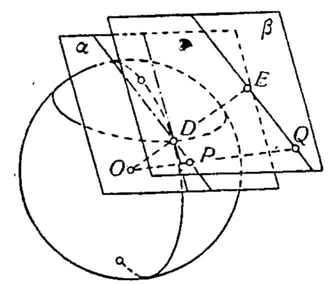
Последица 3. Пресек сфере и равни која пролази кроз центар сфере је највећи круг.

Такав се круг зове велики круг сфере, а сваки други је мали круг сфере.

Раван која сече сферну површину дели је на два дела, који се зову сферне калоте (сл. 110; $CMDP$ и $CMDP'$).

Део сферне површине између две паралелне равни зове се појас или зона лопте. На пример, део сферне површине између кругова m и n. Кругови m и n су основе зоне. Растојање између равни кругова је висина зоне; на пример OO_1.

б) *Тангентна раван сфере.* — Нека су дате лопта и раван (сл. 111). Ако из центра O лопте спустимо нормалу на раван, могу наступити ова три случаја:



Сл. 111

1) Растојање центра од равни веће је од полупречника. Имамо, на пример, лопту L и раван β. Нека је растојање OE центра O од равни β веће од полупречника OD. Ако узмемо ма коју другу тачку Q у равни β и спојимо је са центром O, дуж OQ је већа од дужи OE (§ 53,1) и тиме већа и од полупречника OD. Према томе су све тачке равни β ван лопте (§ 118), тј. раван и лопта немају заједничких тачака.

2) Растојање центра од равни једнако је полупречнику.

Нека је растојање OD центра од равни α једнако полупречнику. Тада тачка D припада сфери. Ма која друга тачка P равни α има од центра веће растојање него што износи полупречник. Све друге тачке равни су, дакле, ван лопте. Таква раван зове се **додирна** или **тангентна раван** сфере.

3) Растојање центра од равни мање је од полупречника.

Тај случај смо разматрали и утврдили да раван, у том случају, сече сферу по малом или великом кругу.

§ 120. Теореме. — 1) **Кроз три различите тачке A, B, C на сфери може се повући круг, и то само један.**

Заиста, те три тачке не леже на истој правој и оне одређују само једну раван. Та раван сече, дакле, сферу по кругу који пролази кроз те три тачке.

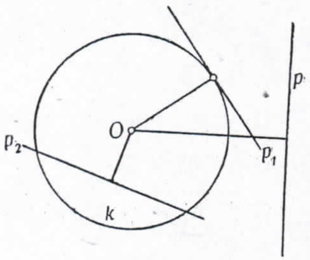
2) **Кроз две ма које различите тачке A и B на сфери које нису крајеви истог пречника може се повући само један велики круг.**

Дате тачке A, B и центар O одређују само једну раван, која сферу сече по великом кругу што пролази кроз тачке A и B.

Међутим, ако су тачке A и B на крајевима истог пречника, таквих кругова има бескрајно много.

3) **Два велика круга секу се у две дијаметрално супротне тачке.**

Заиста, равни тих кругова пролазе кроз центар сфере и стога се секу по пречнику.



Сл. 112

§ 121. Пресек праве и лопте.— Нека су дате лопта L и права p. Да испитамо њихов однос, поставићемо кроз праву p раван великога круга; она сече сферу по великом кругу k (сл. 112). Треба испитати у каквом су узајамном односу права и круг. Као што знамо из планиметрије, постоје ова три случаја:

1) Растојање центра од праве веће је од полупречника. У том случају права (p) нема заједничких тачака са кругом, па стога ни са сфером, тј. све тачке праве су ван лопте.

2) Растојање центра од праве једнако је полупречнику.

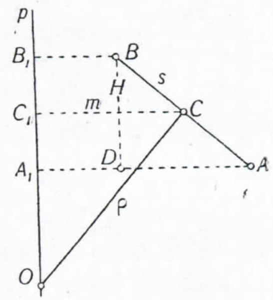
Тада подножје нормале спуштене из центра на праву припада сфери; све друге тачке су ван сфере. Кажемо да је права (p_1) **тангента** сфере.

Ако у тангентној равни (сл. 111) кроз додирну тачку D повучемо произвољан број правих, свака од њих је тангента сфере у тој тачки, јер раван нема других заједничких тачака са сфером. Значи да се кроз једну тачку на сфери може повући безброј тангената. Све оне стоје нормално на полупречнику сфере у додирној тачки као и сама раван, што је лако доказати.

3) Растојање центра од праве мање је од полупречника.

Права (p_2) сече круг (k) у две тачке које су и тачке сфере.

§ 122. Површина лопте и сферних делова. – а) *Лема.* – **Површина коју производи дуж обртањем око осе с којом је у истој равни, а не сече је, једнака је производу пројекције те дужи на оси и обима круга чији је полупречник једнак дужини нормале на ту дуж у њеној средини до пресека са осом.**



Сл. 113

Нека је $AB = s$ дуж која се обрће око осе p (сл. 113). Површина која настаје једнака је површини M омотача праве зарубљене купе (§ 114, б). Ако је $A_1A = R$, $B_1B = r$, $R + r = 2m$, имамо да је

$$M = \pi (R + r) s,$$

или

$$M = 2 \pi m s. \tag{1}$$

Из сличности троуглова ABD и OCC_1 следује

$$m : \rho = H : s,$$

где је $\rho = OC$ и $BD = B_1A_1 = H$.

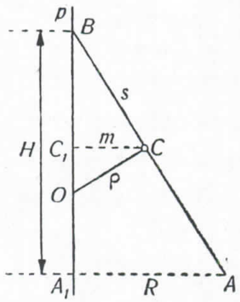
Ако вредност за $m = \dfrac{\rho H}{s}$ заменимо у обрасцу (1), добијамо:

(2) $$M = 2\pi\rho H,$$

што је требало доказати.

Ако $s \parallel p$, обртна површина је омотач ваљка са полупречником ρ, па се лако види да теорема важи и у том случају.

Ако је један крај дужи на оси p, обртна површина је омотач праве купе. Нека је, на пример, тачка B (сл. 114) на оси p. Површина омотача те купе (§ 113, б) једнака је



Сл. 114

$$M = \pi R r$$

или

(3) $$M = 2\pi m s$$

Из сличности троуглова AA_1B и CC_1O следује:

$$m : \rho = H : s,$$

одакле

$$m = \frac{\rho H}{s}.$$

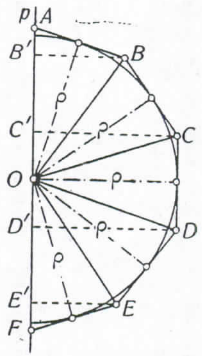
Ако ту вредност заменимо у обрасцу (3), добијамо

(4) $$M = 2\pi\rho H,$$

што је требало доказати.

б) *Лема.* — Површина коју производи правилна изломљена линија обртањем око осе с којом је у истој равни, а не сече је, једнака је производу пројекције те линије на оси и обима круга уписаног у ту изломљену линију.

Нека је дата правилна изломљена линија $ABCDEF$ (сл. 115) која се обрће око осе p. Пројекције њених страна на оси p су AB', $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F$, а апотема је ρ. Према претходној леми имамо да је површина P обртног тела једнака



Сл. 115

$$2\pi\rho \cdot AB' + 2\pi\rho \cdot B'C' + 2\pi\rho \cdot C'D' + 2\pi\rho \cdot D'E' + 2\pi\rho \cdot E'F,$$

или

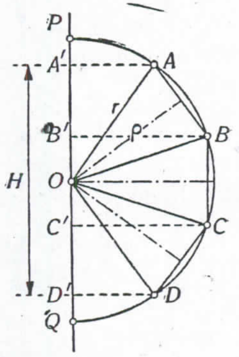
$$P = 2\pi\rho\,(AB' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F).$$

Како је збир у заградама једнак дужи AF, која је пројекција изломљене линије на оси p, можемо написати:

$$P = 2\pi\rho \cdot AF,$$

што је требало доказати.

в) *Површина појаса или зоне.* — 1) *Дефиниција.* — Претпоставимо да се око пречника PQ круга обрће лук AD (сл. 116). Лук ће описати зону чије су основе кругови са полупречницима AA' и DD'. Упишимо у тај лук правилну изломљену линију $ABCD$. Њеним обртањем око пречника постаје површина чија је величина P_1 по претходној леми одређена производом $2\pi\rho \cdot A'D'$, где је ρ апотема и $A'D'$ пројекција изломљене линије на оси. Ако се број страна изломљене линије неограничено удваја, површина P_1 обртног тела тежи некој граници P, коју узимамо за површину зоне описане луком AD.



Сл. 116

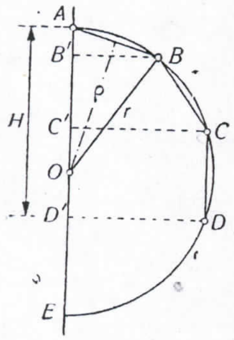
2) *Теорема.* — Површина зоне једнака је производу обима великога круга и њене висине.

Ако се број страна правилне изломљене линије $ABCD$ (сл. 116), која је уписана у луку AD неограничено удваја, дужина изломљене линије приближава се дужини лука као својој граници. Тиме ρ расте тако да је $\lim\ \rho = r$, где је r полупречник великога круга. Заиста, ако страну изломљене линије означимо са a, имамо да је $r - \rho < \dfrac{a}{2}$. Како се страна a неограниченим удвајањем броја страна неограничено смањује, добијамо да је $\lim\ (r - \rho) = 0$ или $\lim\ \rho = r$. Према томе је и $\lim\ 2\pi\rho = 2\pi r$. С друге стране, пројекција $A'D'$ изломљене линије остаје притом стална, тако да је $\lim 2\pi\rho \cdot A'D' = 2\pi r \cdot A'D'$ или $\lim\ P_1 = P$. По дефиницији, граница P претставља површину зоне, чиме је теорема доказана.

Пројекција $A'D'$ једнака је висини H зоне, па можемо коначно написати:

$$P = 2\pi r \cdot H.$$

г) *Површина сферне калоте.* — Обртањем лука AD око пречника $AE = 2r$ великога круга сфере постаје калота (сл. 117).



Сл. 117

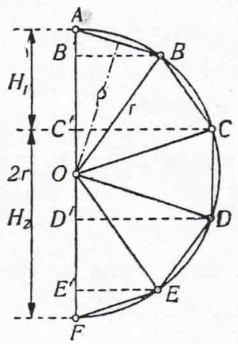
Као што се види, она претставља специјалан случај зоне кад једна од паралелних равни пресека сфере постаје тангентна раван и услед тога зона остане само са једном основом. Правилна изломљена линија $ABCD$, уписана у тај лук, обртањем око пречника AE производи површину чија је величина, по леми б), једнака $P_1 = 2\pi\rho \cdot AD'$. Граница P тога израза, за случај кад је $\lim \rho = r$, претставља површину калоте. Ако висину AD' калоте означимо са H, добијамо за површину калоте исти израз као и за површину зоне, тј.

$$P = 2\pi r H.$$

д) *Површина лопте.* — Површина лопте је величина сферне површине.

Теорема. — Површина лопте једнака је производу обима и пречника великог круга.

Како сферна површина постаје обртањем полукруга ACF (сл. 118) око пречника AF, ту површину можемо схватити као зону чија је висина једнака пречнику сфере или као збир две калоте. Узмимо, на пример, тај други случај. Обртањем лука AC око пречника AF постаје калота чија је висина $AC' = H_1$, а обртањем лука CF постаје калота са висином $C'F = H_2$. Према претходној теореми, површина P лопте једнака је збиру



Сл. 118

$$2\pi r H_1 + 2\pi r H_2 = 2\pi r (H_1 + H_2).$$

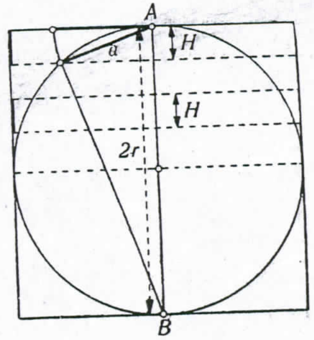
Како је $H_1 + H_2 = 2r$, можемо написати:

$$P = 2\pi r \cdot 2r,$$

чиме је теорема доказана.

ђ) *Последице.* 1) Површина зоне једнака је површини онога дела омотача ваљка описаног око лопте који се налази између равни основа зоне.

Израз $2\pi r H$ за површину зоне подударан је са изразом за површину омотача правога ваљка (§§ 122, в и 108, б). Ако око лопте (сл. 119) опишемо ваљак, пречник његове основе једнак је пречнику $AB = 2r$ лопте, па је површина дела омотача чија је висина H једнака $2\pi r H$. Међутим, толика је и површина зоне исте висине. Очевидно је да исто важи и за сферну калоту, јер је она само специјалан случај зоне (§ 122, г).



Сл. 119

2) Површина лопте једнака је површини омотача ваљка описаног око лопте.

Површина омотача ваљка (сл. 119) описаног око лопте једнака је $2\pi r \cdot 2r$, а толика је и површина лопте (§ 122, д).

3) Површина лопте једнака је четворострукој површини великога круга.

Заиста, из израза $P = 2\pi r \cdot 2r$ за површину лопте следује непосредно

$$P = 4\pi r^2.$$

4) Површина сферне калоте једнака је површини круга чији је полупречник највећа тетива лука чијим обртањем око пречника постаје сферна калота.

Из сл. 119 видимо да је

$$a^2 = 2rH.$$

Ако ову једнакост помножимо са π, добијамо:

$$\pi a^2 = 2\pi r H.$$

Замислимо, сад, да је у тачки A сфере постављена тангентна раван (§ 119, б). У њој бисмо могли из тачке A као центра повући круг са полупречником a чија је површина једнака површини одговарајуће калоте. Променом тетиве a мењала би се и површина круга, па видимо да би круг полупречника $a=2r$ имао површину $4\pi r^2$, тј. површину лопте.

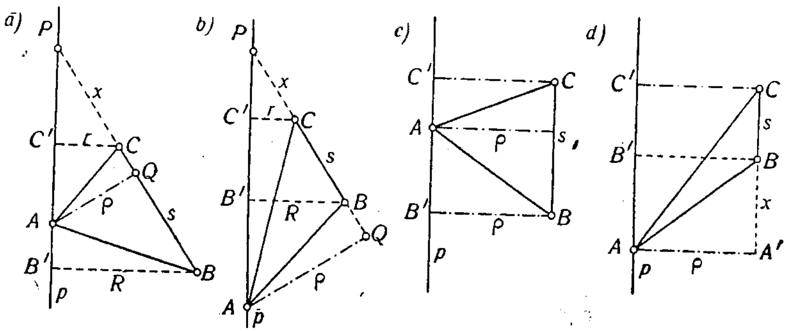
5) Површине две лопте односе се као квадрати њихових полупречника или пречника.

Нека су r_1 и r_2 полупречници две лопте а P_1 и P_2 њихове површине. Тада је (последица 3)

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{(2r_1)^2}{(2r_2)^2}.$$

§ 123. *Запремина лопте и њених делова.* — а) *Лема.* — Запремина тела, које производи троугао обртањем око осе што лежи у његовој равни, а пролази кроз једно његово теме и не сече троугао, једнака је трећини производа површине коју производи страна наспрамна непокретном темену и висине што одговара тој страни.

Нека се троугао ABC обрће око осе p која пролази у његовој равни кроз теме A (сл. 120).



Сл. 120 *a), b), c), d)*

Разликоваћемо два случаја:

1) Страна BC је коса према оси p (сл. 120, *a* и *b*).

Запремина траженог обртног тела једнака је разлици запремине купе која постаје обртањем троугла $BB'P$ (сл. 120, *a*) и запремина две купе: оне која постаје обртањем троугла ABB' и двојне купе која постаје обртањем троугла CAP.

Ако са V означимо запремину нашега тела, са V_1 запремину прве купе, са V_2 запремину друге купе, са V_3 запремину треће (двојне) купе и са V' разлику V_1-V_2, добијамо редом ове изразе (§ 115, б):

(1) $$V_1=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot B'P,\qquad V_2=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot AB',\qquad V_3=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot PA,$$

и

(2) $$V=(V_1-V_2)-V_3=V'-V_3.$$

Прво ћемо одредити вредност за V'; заменом вредности из (1) добијамо:

$$V'=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot B'P-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot AB',$$

или

$$V'=\frac{1}{3}\pi R^2(B'P-AB'),$$

што даје

(3) $$V'=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot AP.$$

Израз на десној страни даје $\frac{1}{3}\pi R\cdot R\cdot AP$; а како је производ $R\cdot AP$ једнак двострукој површини троугла ABP као и производ $BP\cdot\rho$, можемо један заменити с другим у обрасцу (3), па добијамо:

$$V'=\frac{1}{3}\pi R\cdot BP\cdot\rho=\frac{1}{3}\pi R(s+x)\rho,$$

где је $BP=BC+CP=s+x$.

Међутим, производ $\pi R\ (s+x)$ претставља површину омотача купе (§ 113, б) који производи дуж $BP=s+x$ обртањем око осе p.

Ако ту површину означимо са M_1, можемо написати

(4) $$V'=\frac{1}{3}M_1\rho.$$

Ако слично поступимо са изразом $V_3=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot PA$, добијамо:

$$V_3=\frac{1}{3}\pi r\cdot rPA,$$

где је производ $r\cdot PA$ једнак двострукој површини троугла ACP као и производ $CP\cdot\rho$; та замена даје:

$$V_3=\frac{1}{3}\pi r\cdot CP\cdot\rho.$$

Производ $\pi r\cdot CP=\pi rx$ претставља површину омотача купе који производи дуж x обртањем око осе p. Ако ту површину означимо са M_2, можемо коначно написати

(5) $$V_3=\frac{1}{3}M_2\rho.$$

Како је $V=V'-V_3$, заменом вредности из (4) и (5) добијамо:

$$V=\frac{1}{2}M_1\rho-\frac{1}{3}M_2\rho=\frac{1}{3}(M_1-M_2)\rho.$$

Разлика M_1-M_2 претставља површину омотача који производи дуж $BC=s$ обртањем око осе p. Ако ту површину означимо са M, имамо, најзад:

(6) $$V=\frac{1}{3}M\rho,$$

чиме је теорема доказана.

Обрасци (4) и (5) показују да теорема важи и за случај кад и друго теме троугла лежи на оси, и то први образац кад подножје висине троугла повучене из помичног темена пада на продужетак основице, а други кад то подножје пада на основицу.

Ако троугао ABC има такав положај да подножје Q висине ρ не пада на наспрамну страну него на њен продужетак (сл. 120, b), лако је показати да теорема важи и у том случају.

Заиста, запремина V нашега тела једнака је разлици запремина купе што је производи троугао ABP и двојне купе

што је производи троугао ACP обртањем око осе p. Ако запремину прве купе обележимо та V_1, а друге са V_2, затим површину омотача који производи страна BP са M_1, а површину омотача који производи страна CP са M_2, онда на основу обрасца (5) добијамо:

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}M_1\rho-\frac{1}{3}M_2\rho=\frac{1}{3}(M_1-M_2)\rho,$$

тј.

(7) $$V=\frac{1}{3}M\rho,$$

што је требало доказати.

2) Страна BC је паралелна оси p (сл. 120, c и d).

Тражена запремина V једнака је разлици запремине V_1 ваљка који производи правоугаоник $B'BCC'$ обртањем око осе p и запремина V_2 и V_3 две купе што их производе троуглови ACC' и ABB' обртањем око исте осе. Дакле:

$$V=V_1-(V_2+V_3),$$

или

$$V=\pi\rho^2\cdot BC-\left(\frac{1}{3}\pi\rho^2\cdot AC'+\frac{1}{3}\pi\rho^2\cdot AB'\right),$$

што даје:

$$V=\pi\rho^2\cdot BC-\frac{1}{3}\pi\rho^2(AC'+AB'),$$

или

$$V=\pi\rho^2\cdot BC-\frac{1}{3}\pi\rho^2\cdot BC,$$

и, коначно:

$$V=\frac{2}{3}\pi\rho^2\cdot BC.$$

Међутим, производ $2\pi\rho\cdot BC$ је површина омотача који производи страна BC обртањем око осе p. Ако ту површину обележимо са M, добијамо тражену запремину V тела изражену овако:

(8) $$V=\frac{1}{3}M\rho,$$

што је требало доказати.

Ако тачка A има такав положај да подножје висине ρ повучене из тачке A пада на продужетак основице BC, запремина V нашега тела биће једнака разлици запремине ваљка који производи правоугаоник $AA'CC'$ обртањем око осе p и запремина V_2 и V_3 два тела која производе троуглови ACC' и $AA'B$ обртањем око исте осе, тј.

(9) $$V=(V_1-V_2)-V_3.$$

Видимо да је

$$V_1-V_2=\pi\rho^2(s+x)-\frac{1}{3}\pi\rho^2(s+x)=\frac{2}{3}\pi\rho^2(s+x).$$

Из тога закључујемо да је и

$$V_3=\frac{2}{3}\pi\rho^2 x.$$

Ако те вредности заменимо у изразу (9), добијамо:

$$V=\frac{2}{3}\pi\rho^2(s+x)-\frac{2}{3}\pi\rho^2 x=\frac{2}{3}\pi\rho^2 s.$$

Како је производ $2\pi\rho s$ једнак површини M омотача што га производи дуж $BC=s$, имамо коначно:

(10) $$V=\frac{1}{3}M\rho,$$

што је требало доказати.

б) Запремина исечка (сектора) лопте. – 1) *Дефиниција.* – Ако се кружни сектор $OABD$ (сл. 121) обрће око пречника PQ који га сече, он производи тело ограничено са два омотача купа које производе полупречници OA и OD и зоном коју производи лук ABD. То тело зове се **исечак** или **сектор лопте**. Његова **основа** је зона.

Ако у лук ABD упишемо правилну изломљену линију $ABCD$ и њена темена спојимо са центром O, обртањем добијеног правилног многоуглог сектора постаје тело чија је запремина V' по претходној леми једнака

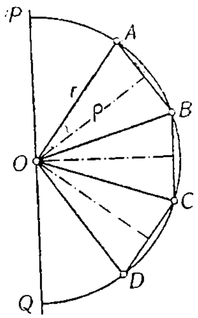
$$\frac{1}{3}M_1\rho+\frac{1}{3}M_2\rho+\frac{1}{3}M_3\rho,$$

или

$$V'=\frac{1}{3}(M_1+M_2+M_3)\rho,$$

где су M_1, M_2 и M_3 величине површина које производе стране AB, BC и CD троуглова OAB, OBC и OCD, а ρ апотема. Ако збир у заградама, тј. величину површине коју производи изломљена линија $ABCD$, означимо са M', можемо написати:

$$V'=\frac{1}{3}M'\rho.$$



Сл. 112

У вези с тим узимамо да је **запремина исечка или сектора лопте** гранична вредност којој тежи запремина тела добијеног обртањем многоуглог сектора ограниченог крајњим полупречницима и правилном изломљеном линијом која је уписана у луку кружнога сектора кад се број њених страна неограничено удваја.

2) *Теорема.* — **Запремина исечка лопте једнака је трећини производа површине зоне која је основа томе исечку и полупречника лопте.**

Видели смо да је запремина тела које постаје обртањем многоуглог сектора $ABCD$ (сл. 121) једнака

$$V'=\frac{1}{3}M'\rho.$$

Кад се број n страна правилне изломљене линије $ABCD$ неограничено удваја, површина коју та линија производи има као граничну вредност површину M зоне (§ 122, в). Притом апотема ρ има као граничну вредност полупречник r лопте тј.

$$\lim_{n\to\infty} M'=M \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\rho=r.$$

Према томе, гранична вредност запремине V' износи

$$\frac{Mr}{3}.$$

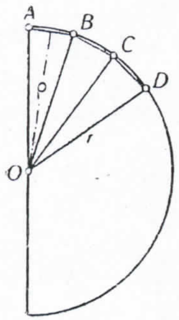
Како је, по дефиницији, та вредност једнака запремини сектора лопте, теорема је доказана.

Ако са V означимо запремину тога исечка и са H висину зоне, добијамо:

$$V = \frac{2\pi r H \cdot r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 H,$$

где је $M = 2\pi r H$ (§ 122, в).

Лако је видети да теорема важи и у случају кад је основа сектора лопте калота која постаје обртањем лука $ABCD$ око пречника AE (сл. 122), јер је калота, као што смо видели, само специјалан случај зоне, па ток расуђивања и закључак остаје исти.



Сл. 122

в) *Запремина лопте.* – 1) *Теорема.* — Запремина лопте једнака је трећини производа површине и полупречника лопте.

Лопту можемо сматрати као исечак који постаје обртањем полукруга око пречника; основа тога исечка је појас чија је висина једнака пречнику лопте, тј. сферна површина. Тада истинитост теореме следује непосредно из претходне.

Ако је r полупречник лопте, њена запремина V једнака је

$$\frac{2}{3}\pi r^2 \cdot 2r,$$

или

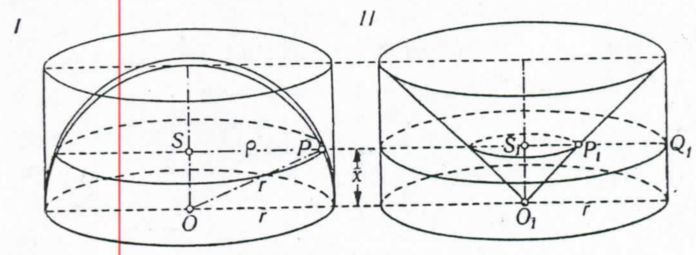
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Ако са d означимо пречник лопте, њену запремину можемо изразити и овако:

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3.$$

2) Запремина лопте налази се врло просто применом Каваљеријевог принципа (§ 91, б).

Нека су дата два подударна ваљка I и II чије основе леже у истој равни α (сл. 122). У првом је уписана полулопта са основом (§ 123, г) на доњој основи ваљка, а у другом права купа са основом на горњој основи ваљка. Замислимо, сад, да из другог ваљка отстранимо купу. Тврдимо да су то преостало тело и полулопта два Каваљеријева тела.



Сл. 123

Да то докажемо, пресећи ћемо дата тела ма којом равни β паралелно равни α, на пример у висини x од равни α. Полулопта је тада пресечена по кругу са полупречником $SP = \rho$, купа по кругу са полупречником S_1P_1 и ваљак по кругу са полупречником $S_1Q_1 = r$.

Ако површину пресека полулопте означимо са p а површину пресека (кружни прстен) нашег тела са p_1, можемо написати:

$$p = \pi\rho^2, \qquad p_1 = \pi(r^2 - x^2).$$

Из троугла OPS имамо да је

$$\rho^2 = r^2 - x^2.$$

Ако ту вредност заменимо у изразу за p, добијамо:

$$p = \pi(r^2 - x^2);$$

дакле,

$$p = p_1,$$

чиме је тврђење доказано..

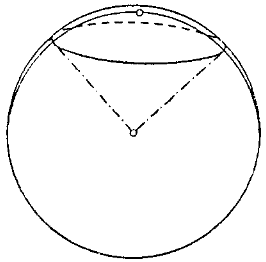
Према томе, запремина полулопте једнака је разлици запремина ваљка и купе, а запремина лопте двострукој тој разлици. Ако запремину лопте означимо са V, можемо написати:

$$V=2\left(\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^3\right)$$

или

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

г) *Запремина отсечка (сегмента) лопте.* — 1) *Дефиниције.* — Отсечак или сегмент лопте је део њене запремине ограничен равни која је сече и одговарајућом сферном калотом. Круг пресека је основа отсечка лопте, а растојање између равни пресека и тангентне равни паралелне равни пресека је висина отсечка лопте (сл. 124).

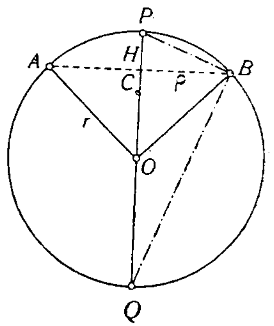


Сл. 124

Теорема. — Запремина отсечка лопте једнака је запремини ваљка чији је полупречник основе висина отсечка, а чија је висина једнака полупречнику лопте умањеном за трећину висине отсечка.

Раван која сече лопту, а не пролази кроз њен центар, дели је на два неједнака отсечка. Запремина мањег отсечка једнака је разлици запремина исечка и одговарајуће купе, а запремина већег отсечка једнака је збиру запремина одговарајућег исечка и купе (сл. 124).

Ако запремину мањег отсечка означимо са V, можемо написати:



Сл. 125

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 H-\frac{1}{3}\pi\rho^2(r-H),$$

где је r полупречник лопте, H висина отсечка и ρ полупречник основе купе (сл. 125). Из троугла BPQ (сл. 125) добијамо:

$$\rho^2=H(2r-H),$$

што заменом у претходном изразу даје

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 H-\frac{1}{3}\pi H(2r-H)(r-H).$$

Кад рачуне средимо, добијамо коначно

$$V=\pi H^2\left(r-\frac{1}{3}H\right),$$

што је требало доказати.

Лако је показати да исти образац важи и за запремину већег отсечка, што остављамо ученику.

§ 124. Последице. — 1) Ако образац $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ за запремину лопте (§ 123, в) напишемо у облику

$$V=\frac{2}{3}\cdot 2\pi r^3,$$

видимо да је запремина лопте једнака $\frac{2}{3}$ запремине ваљка описаног око лопте.

2) Ако у изразу

$$V=\pi H^2\left(r-\frac{1}{3}H\right)$$

за запремину отсечка лопте поставимо $H=2r$, што ће рећи да се отсечак претвара у лопту, добијамо:

$$V=4\pi\cdot r^2\left(r-\frac{2}{3}r\right)$$

или

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

тј. образац за запремину лопте.

3) Запремине две лопте односе се као кубови њихових полупречника или пречника.

Нека су r_1 и r_2 полупречници две лопте, а V_1 и V_2 њихове запремине. Тада је

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}=\frac{r_1^3}{r_2^3}=\frac{(2r_1)^3}{(2r_2)^3}.$$

Вежбања

1) Наћи површину и запремину тела које постаје обртањем правилног шестоугла стране a а) око једне од највећих његових дијагонала, б) око апотеме.

2) Наћи запремину тела које постаје обртањем равностраног троугла страна a око осе која пролази кроз његово теме а паралелна је његовој наспрамној страни.

3) Ако код мерења полупречника лопте граница грешке износи δ, од коликог је то утицаја а) на површину, б) на запремину?

4) Полупречник Земљине лопте је $r=6370$ km. Наћи обим паралелнога круга на ширини од 60^0 и пут који пређе неко место које се налази на периферији тога круга за један час услед обртања Земље око своје осе.

5) Висина зоне је 7 cm, а полупречници основа 16 cm и 33 cm. Наћи површину зоне.

6) Ако се полукруг, подељен на три једнака дела, обрће око свога пречника, површина коју описује средњи лук једнака је збиру површина које описују два крајња лука. Доказати.

7) На ком растојању од центра лопте полупречника r треба поставити светлу тачку да би она осветлила $\frac{1}{3}$ њене површине?

8) Кружни отсечак са луком од 120^0 и површином Q обрће се око своје висине. Наћи површину обртног тела.

9) Да се покрије павиљон који има облик сферне калоте, потребно је 20 m^2 бакреног лима. Израчунати колики се мора узети полупречник лопте, ако кров треба подићи на кружном зиду полупречника $\rho=2,3$ m.

10) Колика је површина Земље што се види са висине од 140 m? (Полупречник Земље $=6370$ km).

11) Површину лопте поделити на пет једнаких делова равним паралелним пресецима.

12) Израчунати пречник ваздушне лопте кад је специфична тежина ваздуха s_1, гаса којим је пуњен s_2, а тежина 1 m^2 омота p kg, да би лопта могла још лебдети у ваздуху (1 dm^3 ваздуха тежи 1,293 g, 1 dm^3 расветног гаса 0,5 g, 1 m^2 омота 0,18 kg).

13) Лоптаста капљица течности полупречника r претвара се у n једнако великих капљица, и обрнуто. У коме односу стоји збир површина малих капљица према површини велике?

Прва појава је од важности за испаравање при запрашивању течности, а друга у погледу густине електрицитета на воденим капљицама облака

14) Ако се лопта оструже тако да се њена површина смањи за $\frac{1}{4}$, за колико се смањи њена запремина?

15) Металну шупљу лопту (љуску) чији је спољашњи пречник $2r=18$ cm а дебљина $d=2$ cm, треба претопити у масивну лопту. Наћи њен пречник.

16) Шупља бакрена лопта спољашњег пречника $2R=200$ mm тоне у води тачно до половине. Ако је специфична тежина бакра $s=8,8$, наћи дебљину лопте.

17) Шупља полулопта има полупречнике R и r, а материјал има специфичну тежину s; колика тежина се може метнути у шупљину да би полулопта, метнута у воду, потонула до половине?

18) У правилној тространој призми са основном ивицом $a=4$ уписана је лопта. Наћи површину и запремину оба тела и однос површина.

19) Висина правилне четворостране призме је 2 cm, а основна ивица 4 cm. Наћи полупречник лопте описане око призме.

20) Бочна ивица правилне тростране призме је 2 m, а основна ивица 3 m. Наћи пречник описане лопте.

21) У правилном тетраедру ивице a уписана је и око њега описана лопта. Наћи полупречник једне и друге лопте.

22) У правилну једнакоивичну четворострану пирамиду ивице a треба уписати лопту. Наћи полупречник и запремину лопте.

23) Основна ивица правилне четворостране пирамиде је a, а бочна ивица $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. Наћи запремину пирамиде и полупречник лопте која је око ње описана.

24) Око правилног октаедра ивице a описана је и у њему уписана лопта. Наћи полупречник једне и друге лопте.

25) Основне ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде су 7 dm и 1 dm. Бочна ивица нагнута је према основи под углом од 45^0. Наћи полупречник описане лопте.

26) Висина правилне тростране зарубљене пирамиде износи 17 cm, а полупречници кругова описаних око основа су 5 cm и 12 cm. Наћи полупречник описане лопте.

27) Из дрвеног равностраног ваљка исечена је највећа лопта. Колико процената износе отпаци?

28) Резервоар за воду састоји се из полулопте полупречника $r=3,5$ m и правога ваљка са основом истога полупречника. Наћи висину H цилиндричног дела, ако је запремина резервоара 200 m^3.

29) Површина равностране купе једнака је површини лопте чији је пречник једнак висини купе. Доказати.

30) У лопти полупречника $r=8$ dm уписана је купа чија је висина једнака пречнику основе. Наћи површину и запремину купе.

31) Права купа постављена је на врх; њена висина је 8 cm а полупречник основе 3 cm и напуњена је водом до висине од 6 cm. У њу се потопи лопта полупречника $\rho=1,5$ cm. До које висине се дигне вода?

32) У равностраном ваљку уписане су лопта и права купа. Наћи како се односе запремине та три тела.

33) Око круга су описани квадрат и равнострани троугао. Ако се те три површине обрћу око осе која пролази кроз центар круга и стоји нормално на основама квадрата и троугла, постаје лопта, ваљак и купа. Наћи:

а) у коме односу стоје површине омотача ваљка и купе и површина лопте;

б) како се односе површине та три тела;

в) како се односе запремине та три тела.

34) Израчунати који део запремине лопте чини запремина исечка лопте чија је сферна површина једнака конусној.

35) Око лопте описана је правилна зарубљена купа чији су полупречници основа R и r. Наћи полупречник лопте.

36) Лопта полупречника $r=3{,}5$ dm подељена је двема паралелним равнима на три дела једнаких површина. Наћи запремину отсечака.

37) Површина сферне калоте је $P=1{,}5$ m^2, а висина $H=0{,}5$m. Наћи површину круга њене основе и запремину тога отсечка.

38) Отсечак лопте полупречника $r=8$ има запремину трипут већу од запремине највеће лопте која је у њему уписана. Наћи запремину отсечка.

39) Наћи запремину конвексног сочива чија је дебљина 2,05 cm и чије сферне стране припадају лоптама са полупречницима 6,15 cm и 4,1 cm.

40) Гасни резервоар има облик правога ваљка на коме лежи отсечак лопте. Наћи запремину резервоара кад је пречник основе ваљка 15 m, његова висина 10 m, а висина отсечка 2,5 m.

41) Ако је површина осног пресека исечка лопте $\frac{1}{3}$ површине великога круга, његова запремина је $\frac{1}{4}$ запремине лопте. Доказати.

42) Лопта из легуре сребра и бакра тешка је 122,8 g; потопљена у воду густине 1 изгуби 12 g од своје тежине. Колико је у њој сребра а колико бакра, ако је специфична тежина сребра $=10{,}62$, а бакра 9? Колико је тешка исто толико велика лопта од сребра и колики је полупречник те лопте?

46) Ако желимо да удвојимо а) површину, б) запремину лопте, којим бројем ваља помножити полупречник?

Како се мења запремина лопте кад се површина удвоји? Како се мења површина кад се запремина удвоји?

КРАТАК ИСТОРИСКИ ПРЕГЛЕД СТЕРЕОМЕТРИЈЕ

Стереометрија, као и планиметрија, има своје порекло у знањима до којих је човек дошао практичним искуством, али се потреба за просторним посматрањима јавила касније од потребе за размишљањима о особинама геометриских фигура у равни, па се стереометрија развила касније од планиметрије. Земљорадник је постепено учио да приближно процењује количине плодова сакупљених на пољу у гомиле одређених облика; техничар је учио да процењује количине грађевинског материјала који му је био потребан за подизање грађевина различитих облика и димензија; астроному је било потребно стереометриско испитивање лопте. На тај начин стечена знања послужила су способним појединцима као материјал за теориска разматрања, из којих се постепено развила наша данашња стереометрија.

Најстарији историски подаци о том предмету налазе се у познатом египатском тзв. Rhind-папирусу, тј. у Ахмесовој рачуници (око 2000 год. пре н. е.). У њој нема никаквог систематског излагања стереометрије, него се само објашњавају рачунски поступци при решавању неких изабраних задатака, који се, уколико се тичу стереометрије, односе на премеравање амбара, о чијем облику се не дају ближи подаци, на нека простија питања у вези са пирамидом и на нека тела са кружном основом. Свакако да постојање великих грађевина у то време сведочи о дубљем познавању стереометриских проблема, али, судећи по метода решавања стереометриских проблема, али, судећи по оскудним подацима у поменутој рачуници, те методе нису биле приступачне широј јавности, него само најужим круговима стручњака.

Колико је била развијена египатска стереометрија, тешко је одредити, али се може узети да су знали да тачно израчунају запремину коцке, праве призме и правога ваљка, и да су за израчунавање запремине пирамиде, зарубљене пирамиде, купе и зарубљене купе, а можда и лопте, нашли приближне обрасце.

О вавилонској стереометрији не знамо скоро ништа. Постоји један мали текст, чији је превод још потпуно нејасан, а из кога се разабира да су Вавилонци знали да израчунају зид чији је попречни пресек имао облик трапеза. Међутим, има још у том погледу и другог до данас неиспитаног материјала.

Практична знања Египћана из области стереометрије имала су јаког утицаја на старе Грке, који су их развили до праве науке, као и раније она знања из области планиметрије. Стереометриски начин посматрања започиње науком о перспективи, за коју је материјал пружио сликар А г а т а р х перспективном позоришном декорацијом, коју је израдио у време последњих Есхилових трагедија (Есхил умро око 456/455 пре н. е.) и једном својом расправом о тој новој уметности. У тим делима запазио је А н а к с а г о р а (дошао у Атину око 463 год. пре н. е.) математички проблем и обрадио га научно-теориски.

Скоро истовремено обрађују стереометриске проблеме Д е м о к р и т из Абдере (460—370 пре н. е.) и Х и п о к р а т из Хиоса (око 440 пре н. е. у Атини). По Архимеду, Демокрит је открио да је запремина пирамиде једнака трећини запремине призме која с њом има једнаку основу и једнаку висину. Међутим, ту теорему, као и теорему да је запремина купе једнака трећини запремине ваљка који с њом има једнаку основу и једнаку висину, доказао је потпуно истом Е у д о к с о из Книдоса (410—356 пре н. е.). Сем тога, Демокрит је проширио и Анаксагорина истраживања. Хипократ је био први који је указао на једно решење проблема удвајања коцке. (Делски проблем). Тај проблем састојао се у томе да се конструктивним путем одреди ивица коцке чија би запремина била једнака двострукој запремини дате коцке, тј. $x^3 = 2a^3$, или $x = a\sqrt[3]{2}$, где је a ивица дате, а x ивица тражене коцке. Он тај проблем решава пропорцијама: $a : x = x : y = y : b$ тј. $x^2 = ay$, $xy = ab$. Множењем тих двеју једначина произилази $x^3 = a^2 b$, где су a и b дате дужи. Дакле, ако је $b = 2a$, добија се $x^3 = 2a^3$. Међутим, као што знамо, тај проблем се не може решити лењиром и шестаром, јер се јавља $\sqrt[3]{2}$, али горње једначине доводе до конусних пресека, којима се доцније бави у вези са стереометриским посматрањима М е н е х м у с (око 350 пре н. е.), најдаровитији ученик Платонов и уједно ученик Еудоксов.

За време П л а т о н о в о (429—348 пре н. е.) није још постојала нека изграђена стереометрија. Он се у својим списима залаже за стереометрију и жали се, у том погледу, на незнање својих савременика. Лично се није много бавио чисто математичким истраживањима, али је потстицао своје ученике на тај рад. Његови савременици и ученици испунили су многе празнине у тој науци. Док су, на пример, П и т а г о р е ј ц и, тј. ужа школа Питагорина, од правилних тела познавали само коцку и тетраедар, а можда још и додекаедар, Т е е т е т (умро 369 пре н. е.) им додаје октаедар и икосаедар и први поставља теорију свих пет правилних тела. Да су Питагорејци могли познавати додекаедар, види се из тога што су га Етрурци вештачки претстављали по угледу на кристални облик у коме се јавља пирит у северној Италији и обележавали га нарочитим знацима као предмет култа. Један такав вештачки примерак из стеатита нађен је и брижљиво проучен. Утврђено је да потиче из првог гвозденог доба, La Téne-периоде (1000 – 900 пре н. е.). Етрурци или Гали могли су то знање пренети у јужну Италију, где су га примили Питагорејци. При том проучавању, Теетет се послужио Еудоксовом расправом *О непрекидном дељењу.* Теетови радови јављају се доцније поново у књизи XIII Еуклидових Елемената. Треба напоменути да је Еудоксо саставио и уџбеник стереометрије, на који се и Еуклид, по свој прилици, прилично ослонио. У ту групу радника спада и А р х и т а из Тарента (430 – 365 пре н. е.), који је ванредно добро познавао основе стереометрије: теореме о узајамном пресеку равни, о постанку цилиндара и конуса, и линије продора тих тела употребио је за једно оштроумно решење проблема удвајања коцке, који је у то време био врло актуелан.

У А р и с т о т е л о в и м (384—322 пре н. е.) списима налазимо врло мало података из стереометрије. Помиње се, на пример, да нормале на једној правој у једној њеној тачки све леже у истој равни; да је пресек сфере и равни која пролази кроз њен центар велики круг. Сем тога, види се да је Аристотел познавао и правилна тела. Његова *Математичка расправа* није нам сачувана. Исто тако је изгубљена *Историја геометрије*, коју је написао његов ученик Т е о ф р а с т (374—

287 пре н. е.), и друга, коју је написао други његов ученик Е у д е м (350—290).

Међутим, скоро потпуна наука елементарне стереометрије налази се у Е у к л и д о в и м (око 325 пре н. е.) Е л е м е н т и м а, и то у књигама XI, XII и XIII. У књизи XI су изложене особине правих и равни и паралелепипеда; у књизи XII расправља се о пирамиди, конусу и цилиндру, а у књизи XIII о правилним полиједрима.

Најважнију допуну, после тога, чине радови А р х и м е д а (287—212 пре н. е.), једнога од највећих математичара свих времена. Он израчунава површину и запремину лопте, уводи полуправилне полиједре и одређује запремине неких обртних тела. Тиме грчка стереометрија достиже свој врхунац. Од његових дела познат нам је спис *Лопта и ваљак*, у коме се налазе ове теореме:

„Површина лопте једнака је четворострукој површини великога круга.

Запремина лопте једнака је четворострукој запремини купе чија је основа једнака великом кругу лопте а висина једнака полупречнику те лопте.

Запремина ваљка чија је основа једнака великом кругу лопте, а висина једнака пречнику те лопте, једнака је три половине запремине те лопте. Исто тако, површина тога ваљка једнака је три половине површине те лопте“.

То последње откриће Архимед је, према Плутарху (I век н. е.), највише ценио и изразио жељу да му се после смрти на надгробни споменик постави ваљак са уписаном лоптом и поменути бројни однос тих тела. Ц и ц е р о н (I век пре н. е.) помиње да је по том знаку пронашао Архимедов гроб.

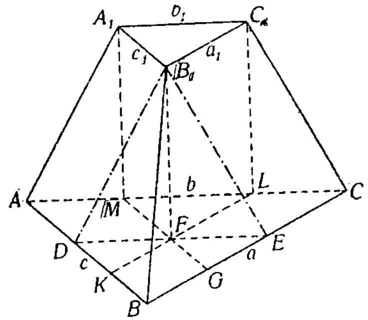
У периоду који затим долази опажа се да се научници више баве примењеном математиком. Један од најзнаменитијих научника тога периода који се бави и стереометријом је Х е р о н из Александрије (I век пре н. е. или I или II век н. е.). Он решава многе практичне проблеме и притом се служи, поред тачних, и приближним обрасцима. Тако на пример, за израчунавање запремине зарубљене купе, употребљава, поред тачног обрасца, и ваљак исте висине чија је

основа једнака средњем пресеку те зарубљене купе. Како ти приближни обрасци потсећају на египатско порекло, неки историчари мисле да се ту види, поред грчког, и египатски утицај.

У једном свом делу (Metrica) даје Херон, на пример, ову теорему:

Запремина тростране зарубљене пирамиде једнака је збиру запремина двеју призама чије су висине једнаке висини те зарубљене пирамиде, а основе: прве - троугао чије су стране једнаке респективно полузбиру хомологних страна обе основе зарубљене пирамиде, а друге - трећина троугла чије су стране једнаке респективно полуразлици тих истих хомологних страна.

Заиста, нека је дата, на пример, тространа зарубљена пирамида $ABCA_1B_1C_1$ висине H (сл. 126). Кроз тачку B_1 поставимо раван B_1DE паралелно равни AA_1C_1C. Тада је $AD=A_1B_1$ и $CE=B_1C_1$. Ако је F средина дужи DE, равни A_1B_1FM и B_1C_1LF секу основу ABC по дужима MG и KL тако да је $MF \# AD$, $FL \# EC$, $GE=BG$, $DK=BK$. Из тога следује да су паралелограми $ADFM$ и $EFLC$ једнаки и $\triangle EFG=\frac{1}{4}\triangle BDE$.



Сл. 126

Из слике видимо да се дата зарубљена пирамида може овако раставити:

1) призма $MFLA_1B_1C_1$, 2) призма B_1DFA_1AM, 3) призма B_1EFC_1CL, 4) призма B_1BDE.

Како призме 2) и 3) имају једнаке основе и једнаке висине, оне су једнаке. Према томе, запремина зарубљене пирамиде једнака је: запремина призме 1) + двострука запремина пирамиде 3) + запремина пирамиде 4), или

$$V = (\triangle MFL + \square EFLC + \frac{1}{3}\triangle BDE) \cdot H.$$

Међутим, $\frac{1}{3}\triangle BDE = \triangle EFG + \frac{1}{3}\triangle EFG$, јер је $\triangle EFG = \frac{1}{4}\triangle BDE$.

Стога можемо написати:

$$V = \left(\triangle MGC + \frac{1}{3}\triangle EFG\right) \cdot H.$$

Ако са a, b, c означимо стране веће основе зарубљене пирамиде, са a_1, b_1, c_1 хомологне стране мање основе, за $\triangle EFG$ добијамо да је:

$$EG = \frac{a - a_1}{2}, \quad EF = \frac{b - b_1}{2}, \quad FG = \frac{c - c_1}{2},$$

а за $\triangle MGC$:

$$CG = CE + EG = a_1 + \frac{a - a_1}{2} = \frac{a + a_1}{2},$$

$$CM = ML + LC = ML + EF = \frac{b + b_1}{2},$$

$$MG = MF + FG = AD + FG = \frac{c + c_1}{2}.$$

Тиме је теорема доказана.

Кад се овај поступак примени на правилну четворострану зарубљену пирамиду, добија се овај Херонов образац:

$$V = \left[\left(\frac{a + a_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{a - a_1}{2}\right)^2\right] \cdot H.$$

Доцније Папус (око 295 н. е.) додаје извесне бројне односе између основних елемената пет правилних тела. Код њега се први пут наилази на постављање тзв. Гулдинове теореме о обртним телима.

Ни Индијци ни Арапи у стереометрији нису отишли даље од Грка. Нове идеје уносе истом Кеплер (1571–1630) и Каваљери (1598?–1647), а особито Њутн (1642–1727) и Лајбниц (1646–1716). Кеплер наставља теорију правилних тела својим звездастим полиједрима. Каваљери поставља свој принцип за израчунавање запремина тела, чији смо један нарочити облик изложили напред. Њутн и Лајбниц открићем интегралног рачуна дају опште решење проблема кубатуре.

Крајем XVII века јавља се аналитичка геометрија простора, а у XIX веку пројективна геометрија простора.

САДРЖАЈ

Глава прва

УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ТАЧАКА, ПРАВИХ И РАВНИ У ПРОСТОРУ

Глава друга

ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ И РАВНИ

Глава трећа

НОРМАЛНЕ ПРАВЕ И РАВНИ

Глава четврта

УГЛОВИ — НОРМАЛНЕ И КОСЕ ДУЖИ 34

Глава пета

РОГЉЕВИ

Глава шеста

ПОЛИЈЕДРИ

Глава седма

ПОМЕРАЊА — СИМЕТРИЈЕ — СЛИЧНОСТИ

Глава осма

ОБЛА ТЕЛА