

*Универзитетски штампарији
Андреја Николића
Светозарског
отм. адреса.*

Ј. ХЛИТЧИЈЕВ
К. В. ПРОФ. УНИВЕРСИТЕТА У БЕОГРАДУ

MF 11332

НАУКА О ЧВРСТОЋИ

ИЗДАЊЕ УДРУЖЕЊА СТУДЕНАТА МАШИНСКЕ ТЕХНИКЕ.



БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧКОГ ЗАВОДА
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА
Број инвентара *10.413*
26. VI. 62
Београд

БЕОГРАД
ШТАМПА ЗАДРУГА ШТАМПАРСКИХ РАДНИКА „РОДОЉУБ“
1926

... l'analyse pure n'est qu'un instrument logique
tirant des conséquences rigoureuses des prémisses
posées, mais souvent contestables."

Saint-Venant.

Предговор

Практичне потребе инжињера за димензионисање грађевина дале су почетак „Науци о отпорности материјала“. У то доба нису били решени дотични проблеми физике, на којима би се имали базирати обрасци отпорности материјала, и зато су се морала замењивати та решења низом више или мање вероватних хипотеза.

Даљи развитак физике (и то теорије еластичности) показао је степен тачности тих хипотеза и услове, под којима је могућа њихова примена. Али дотична решења проблема теорије еластичности била су толико компликована, да чак нису улазила у обичне уџбенике отпорности материјала. Последњи су као и пре базирали сва извођења на застарелим хипотезама, које су биле далеко од тога, да одговарају свим могућим случајевима праксе. Због тога су наравно извођења изгледала много простија, али, с друге стране, инжињери нису имали критерија о томе, у каквим границама и под којим условима је могуће користити се познатим обрасцима отпорности материјала, и често су их примењивали у случајевима, кад је то доводило чак до грубих грешака. Много примера такве примене формула отпорности материјала може се наћи на пр. у машинској техници.

У последње доба, благодарећи раду више научника, излагање решења проблема теорије еластичности постало је толико просто, да је, по мом мишљењу, дошло већ време, да се уклони она запрека, која је била између теорије еластичности, као дела физике, и примењене науке о отпорности материјала, а инжи-

њеру да се пружи тиме не само збирка формула, него и покаже, када и под којим је условима сходно користити се тим формулама, али када њихова примена доводи до осетних грешака. Ова књига представља такав покушај.

При стварању српског текста књиге указали су ми велику помоћ г. Ing. М. Вречко, и студ. г. Д. Живковић, којима сам јако захвалам.

Нарочито се захваљујем Удружењу Студената Машинске Технике и студ. г. Д. Бракусу, на издању ове књиге.

Београд, 17. априла 1926.

J. X.

Садржај

	Страна
Предговор	III—IV
Глава I. Теорија напона	3—23
§ 1. Унутарње и спољне силе	3
§ 2. Напони	4
§ 3. Напони у различитим равнима. Веза између напона и површинских сила	6
§ 4. Веза напона и запреминских сила	9
§ 5. Елипсоид тоталних напона	11
§ 6. Изналажење нормалних напона за различите равни. — Главни напони	12
§ 7. Правци главних напона	14
§ 8. Изражавање тоталних и нормалних напона помоћу главних напона	16
§ 9. Површина нормалних напона	17
§ 10. Изражавање тангенцијалних напона помоћу главних	19
§ 11. Графичко представљање напрегнутог стања у тачки	21
Глава II. Теорија деформација	24—36
§ 12. Зависност између компоненталних деформација и померања тачке	24
§ 13. Дилатације у ма ком правцу. Главне деформације	28
§ 14. Изналажење померања по заданим компоненталним деформацијама. Услови поклапања деформација	30
Глава III. Зависност између напона и деформација	37—51
§ 15. Хуков закон	37
§ 16. Изотропно еластично тело	39
§ 17. Сен-Венанови услови за изотропно тело	44

Глава I.

Теорија напона.

§ 1. Унутарње и спољне силе.

Под утицајем спољних сила или промене температуре сва чврста тела мењају своју запремину и облик. То показује, да целокупна запремина њихова није испуњена материјом, већ да су тела састављена из делића, који се међусобно не додирују, али су везани узајамно унутарњим силама и под утицајем тих сила налазе се у покретној равнотежи.

При промени растојања између делића мењају се и унутарње силе, тежећи да успоставе првобитни распоред тих делића, т. ј. при приближавању делића теже, да одгурну један од другог и обратно. Али при повећању растојања преко извесне границе те се силе смањују до нуле, т. ј. веза између делића ишчезава или настаје *раскидање* тела.

Кад неким делићима тела, који се налазе у равнотежи, придодамо извесне *спољне* силе, тада ће се ти делићи почети да премештају у правцу приложених сила, те ће се растојања између њих и околних делића изменити. Измениће се и дотичне унутарње силе, тежећи да спрече промену растојања, и примораће околне делиће, да се и они помере, што ће изазвати премештање делића суседних са њима и т. д. На тај ће начин тело или неки његов део добити нов распоред својих делића, измениће се његов облик и запремина, оно ће се *деформисати*; измениће се и унутарње силе. Овако стање тела назива се *напрегнуто*.

Ако промене растојања међу делићима и дотични прирасти унутарњих сила не пређу извесну границу, онда ће се, пошто престане утицај спољних сила, делићи вратити у свој

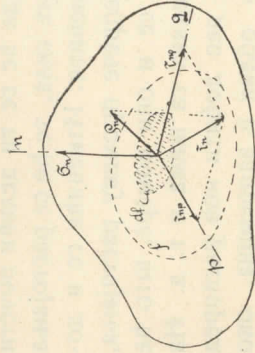
првобитни положај. Та се особина тела назива *еластичношћу*, а свима телима је до извесног степена својствена. Поменута граница зависи од хемијског састава и структуре тела. Ако спољне силе прелазе ту границу, тело се по престанку њиховог утицаја не враћа сасвим у првобитно стање; на њему остају *трајне* промене, које расту при порасту спољних сила. Ако спљсне силе и дотичне промене међусобних растојања делића пређу извесну другу границу, онда, као што смо већ рекли, настаје раскидање тела.

Спољне силе према томе, како дејствују на тело можемо поделити у две групе: *запреминске* и *површинске* силе. Ове прве дејствују на све делиће тела и за сваку тачку пропорцијалне су њеној маси, на пример, силе теже, инерције итд. Површинске силе дејствују на делиће, који се налазе на површини, а потпуно су независне од његове масе, на пример међусобни притисак чврстих тела при додиру, притисак течности или гаса на чврсто тело и т. д.

§ 2. Напони.

Замислимо из тела, које се налази у напрегнутом стању, издвојену ма какву запремину (слика 1.). Ову сматрамо, као неко ново тело, на које се могу применити сви закони механике. То је наша прва и *основна хиломеза*.

Узећемо сада мали део df површине f , која ограничава издвојену запремину. Са обе стране ове површине налазиће се делићи, који један на други узајамно утичу, дакле ће кроз издвојени део површине пролазити ток унутарњих сила. Ако узмемо, да је df довољно мали део површине, тада ћемо заменити ток сила једном резултантом. Та резултанта представља утицај делића распоредених на страни позитивне нормале на делиће, који леже с друге стране тог дела површине. Граничну вредност односа величине ове резултанте према дотичном делу површине при довољном смањивању тог дела површине око неке тачке називамо *нормалним напонам* за раван, која има нормалу n , други означавамо са τ_n и називаћемо га *тангенцијалним напонам* за исту раван.



Сл. 1.

Кад је нормални напон позитиван, т. ј. када има смер спољне нормале на површину, у том случају биће његов утицај у датој тачки тела *затезући*. У обратном случају његов је утицај *притискујући*.

Очевидно је:

$$\sigma_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \dots \dots \dots (1)$$

вамо *величином поталног напона у датој тачки тела за раван, која се поклапа са шим делом површине*. Гранични правац ове резултанте при довољном смањивању дела површине називамо *правцем поталног напона за дату тачку и раван*. Кроз сваку тачку тела можемо повући бесконачно много равни, следствено за познавање напрегнутог стања у датој тачки потребно је познавање величина и праваца тог талног напона за сваку од тих равни.

Напонам смо назвали количник силе и површине, т. ј. он ће бити изражен у јединицама силе на јединицу површине, на пример у $1/m^2$ или у kg/cm^2 и т. д. Како ћемо у будуће имати врло често посла са овако именованим јединицама, то ће нам најгодније бити да изаберемо јединицу најлакшу за изговор, која је на пример, притисак једне атмосфере, који је раван (при висини барометра 760_{mm} и $0^{\circ}C$.) $1,033 \text{ kg/cm}^2$. Да — не би уводили у рачун стално овај гломазан чинилац, који је уз то још и врло близак јединици, ми ћемо на даље подразумевати под атмосфером притисак једног kg/cm^2 ($734,5_{mm}$ висине барометра и $0^{\circ}C$.)

Тотални напон за раван, на коју нормала има правац n , обележаваћемо са ρ_n .

Повуцимо кроз тачку O (слика 1.) три ортогоналне осе и то тако, да се једна од њих Op поклапа са нормалом на површину f , а две друге Or и Oq да леже у тангенцијалној равни. Разложимо резултанту тока сила, која пролази кроз df на две компоненте, и то једну у правцу нормале Op , а другу у тангенцијалној равни Orq . Узимајући однос тих компоненти према површини df , добићемо при смањивању те површине два напона: први од њих означимо са σ_n и називамо га *нормалним напонам* за раван, која има нормалу n , други означавамо са τ_n и називаћемо га *тангенцијалним напонам* за исту раван.

Кад је нормални напон позитиван, т. ј. када има смер спољне нормале на површину, у том случају биће његов утицај у датој тачки тела *затезући*. У обратном случају његов је утицај *притискујући*.

Очевидно је:

$$\rho_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \dots \dots \dots (1)$$

Компоненту, која лежи у тангенцијалној равни можемо разложити на две силе у правцу Ор и Оq. Узимајући однос тих сила према површини df, добићемо при смањивању те површине, два тангенцијална напона за раван, која има нормалу n: тангенцијални напон у правцу Ор, који ћемо обележавати са τ_{np}, и тангенцијални напон у правцу Оq, обележавајући га са τ_{nq}.

Очевидно је:

$$\tau_n^2 = \tau_{np}^2 + \tau_{nq}^2 \quad (2)$$

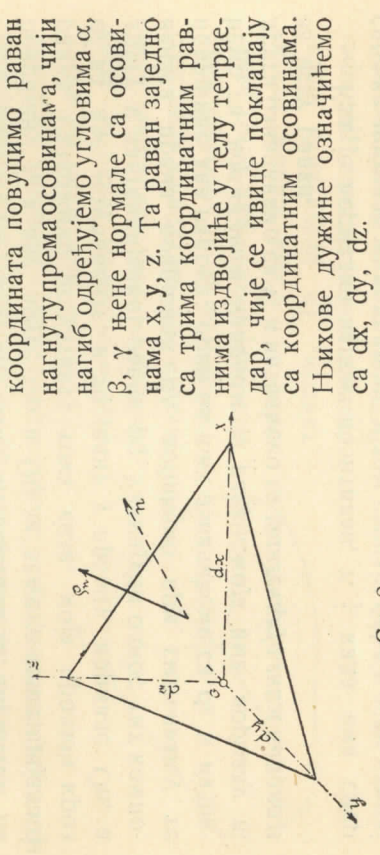
а према томе:

$$\sigma_n^2 = \sigma_p^2 + \tau_{np}^2 + \tau_{nq}^2 \quad (3)$$

§ 3. Напони у различитим равнинама. Веза између напона и површинских сила.

Горе смо рекли да се кроз сваку тачку тела може повући бесконачно много равни, а да за сваку од њих добијемо различите по величини и правцу тоталне напоне. Одмах се намеће питање, да ли нема какве везе између тих напона.

За решење овог питања повуцимо кроз нашу тачку систем координатних равни (слика 2.) и обележимо нормалне и тангенцијалне напоне са дотичним индексима: σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}; σ_y, τ_{yz}, τ_{yx}; σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}. На неком малом растојању од почетка



Сл. 2.

координата повуцимо раван нагнуту према осовинама α, β, γ њене нормале са осовинама x, y, z. Та раван заједно са трима координатним равнинама издвојиће у телу тетраедар, чије се ивице поклапају са координатним осовинама. Њихове дужине означимо са dx, dy, dz.

Кад се овај тетраедар не додирује са спољном површином тела, тада ће кроз све његове пљосни пролазити унутарње силе, које ће представљати утицај оних делића, који леже ван тетраедра на оне, који су у њему.

Површину нагнуте пљосни тетраедра означимо са df, дотични тотални напон са ρ_n, а његове углове са координатним осама са λ, μ, ν. Услед тога, што је површина df врло мала, биће утицај оних делића, који леже на страни нагнуте пљосни (т. ј. ван тетраедра), на оне, који леже на другој страни нагнуте пљосни (т. ј. у тетраедру) престаљен резултатом ρ_n df. Пројекције те резултатне на координатне осе биће равне ρ_n df cos λ, ρ_n df cos μ, ρ_n df cos ν.

Површина пљосни у z биће једнака df cos α. Утицај делића, који леже на страни позитивне осе x (т. ј. у тетраедру), на оне, који леже с друге стране пљосни (т. ј. ван тетраедра) био би представљен резултатом, чије би пројекције на координатне осе биле равне: σ_x df cos α, τ_{xy} df cos α, τ_{xz} df cos α. Према томе утицај делића, распоређених ван тетраедра, т. ј. на страни негативне осе x, на оне који леже у тетраедру, биће представљен резултатом исте величине, али обратног смера, тако, да ће њене пројекције бити равне — σ_x df cos α, — τ_{xy} df cos α, — τ_{xz} df cos α.

На сличан би начин нашли и пројекције резултатне тока сила, који пролази кроз пљосан zx: — τ_{yx} cos β, — σ_y df cos β, — τ_{yz} df cos β и, најзад, пројекције резултатне тока сила, који пролази кроз пљосан xy:

$$- \tau_{zx} df \cos \gamma, - \tau_{zy} df \cos \gamma, - \sigma_z df \cos \gamma.$$

Сем ових сила, које дејствују на пљосни нашег тетраедра, у свакој његовој тачки могу дејствовати још и запреминске силе. Означимо са X, Y, Z пројекције на координатне осе запреминске силе, која се односи на јединицу запремине*. Запремина тетраедра биће равна 1/3 df cos γ dz, а пројекције силе, која дејствује на сав тетраедар биће: 1/3 X df cos γ dz, 1/3 Y df cos γ dz, 1/3 Z df cos γ dz.

Ако се цело тело налази у равнотежи, то ми можемо на основу наше основне хипотезе и на замишљено издвојени тетраедар применити једначине статике. Прва једначина, која каже да је збир пројекција свих сила на осу x једнак нули, гласиће овако:

$$df \rho_n \cos \lambda = df \sigma_x \cos \alpha + df \tau_{yx} \cos \beta + df \tau_{zx} \cos \gamma - \frac{1}{3} df \cos \gamma X dz.$$

* Ове величине биће изражене у јединицама силе на јединицу запремине, н. пр. kg./cm.³, 1/m³ и т. д.

Последњи члан десне стране, који представља дејство запреминске силе, а који садржи чинитељ dz , биће очигледно мала количина вишега реда према осталим члановима, те га можемо занемарити. Написаној једначини додајемо сад још две друге, које показују, да је и збир пројекција свих сила на Oy и Oz такође раван нули. Кад у њима одбацимо чланове вишега реда и скратимо са df добићемо:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_n \cos \lambda &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma \\ \varrho_n \cos \mu &= \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma + \tau_{xy} \cos \alpha \\ \varrho_n \cos \nu &= \sigma_z \cos \gamma + \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta \end{aligned} \right\} (4)$$

Кад овим трима једначинама *) додамо још и

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

добићемо четири једначине, које потпуно одређују углове λ , μ , ν и величину тоталног напона ϱ_n

Три услова статике, да је збир момената свих сила у погледу координатних осовина једнак нули, нећемо овде искористити, а резултат, који би они дали, добићемо у § 4.

Ако сад повучемо кроз узету тачку O једну нагнуту раван паралелну нагнутој пљосни тетраедра, онда ће се њен тотални напон разликовати од онога, који смо нашли само за мале количине реда dx , dy , dz . Ако занемаримо ову малу разлику, можемо сматрати, да добивени изрази одговарају равни, која пролази кроз ту тачку.

На тај начин, кад су нам задата за неку тачку *девет компоненталних напона* (три нормална и шест тангенцијалних), који одговарају трима ортогоналним равнима, можемо наћи по величини и правцу тотални напон за сваку раван, која пролази кроз ту тачку а која је задата угловима α , β , γ њене нормале.

Замислимо сад, да наша тачка лежи у близини спољашње површине тела, а да се нагнута пљосан тетраедра поклапа са елементом те површине. Напона ϱ_n на тој граничној површини неће бити више, и њега ће заменити површински притисак p . Али издвојени тетраедар налазиће се у равнотежи, према томе једначине (4) важиће, ако у њима напон ϱ_n заменимо спољним површинским притиском p .

*) Ове једначине извео је 1822. год. А. Л. Cauchy.

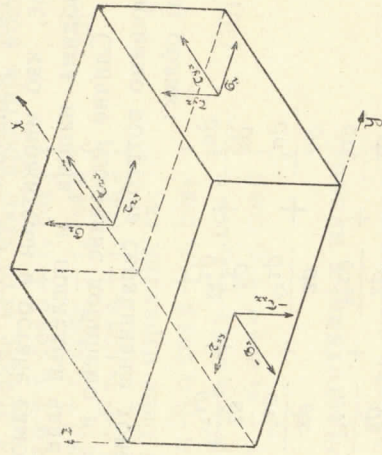
Или другојачије речено, у тачкама, које леже на површини тела, девет напона за три узајамно управне равни морају задовољавати т. зв. *површинске услове*:

$$\left. \begin{aligned} p \cos \lambda &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma \\ p \cos \mu &= \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma + \tau_{xy} \cos \alpha \\ p \cos \nu &= \sigma_z \cos \gamma + \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta \end{aligned} \right\} (5)$$

где су са α , β , γ означени углови спољне нормале на граничну површину са осовинама координата.

§ 4. Веза између напона и запреминских сила.

Да видимо, да ли нема какве везе између напона у даатој тачки и спољних запреминских сила, које на њу утичу. Издвојимо у телу, које се налази у равнотежи, елементарни паралелопипед, са странама dx , dy , dz (слика 3.); на основу основне хипотезе он се мора налазити у овај паралелопипед не додирује са површином тела, онда ће на све његове тачке дејствовати запреминске силе, а кроз свих шест пљосни пролазиће унутарње силе. За три пљосни, које се поклапају са координатним равнима имаћемо, као и у § 3. следећих девет компоненталних напона:



Сл. 3.

σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} ; σ_y , τ_{yz} , τ_{yx} ; σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} . Девет напона за остале три пљосни разликоваће се од оних првих девет само за мале прирасте услед помереног положаја пљосни. Ти прирасти имају облик $\frac{\partial \sigma_i}{\partial i} di$ или $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial i} di$ (где је i једна од координата), јер се сва разлика ових последњих пљосни од паралелних координатних равни састоји само у томе, што су оне померене за растојање di (т. ј. dx , dy или dz). На тај начин напони за три последње пљосни биће: $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$.

$$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx; \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy, \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy, \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy; \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz, \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz, \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz.$$

Примењујући на наш паралелолипед прву једначину статике, да је збир пројекција свих сила на осу x раван нули, добићемо: $-\sigma_x dydz + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz -$

$$-\tau_{yx} dxdz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dxdz -$$

$$-\tau_{zx} dx dy + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy + X dx dy dz = 0$$

У овој једначини скратиће се сви чланови, који садрже напоне, као множитељи и остаће само чланови са делимичним изводима напона, и последњи члан са запреминском силом.

Сличне једначине добићемо и за две друге осе и пошто извршимо потребна скраћивања доведемо ове једначине на овај облик:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

Три једначине, које кажу, да је збир момената свих сила у погледу сваке од координатних оса раван нули, добиће облик:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} dz dx dy - \tau_{zy} dx dy dz &= 0 \\ \tau_{zx} dx dy dz - \tau_{xz} dy dz dx &= 0 \\ \tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dz dx dy &= 0 \end{aligned}$$

При састављању ових једначина одбачени су сви чланови, који садрже делимичне диференцијале напона и запреминске силе, пошто су то мале количине вишега реда према осталим члановима. Из ових једначина*) излази:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (7)$$

Ради упрошћења ми ћемо надале усвојити следеће ознаке:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x, \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y, \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z \quad (8)$$

*) Једначине (6) и (7) извео је 1821. год. L. Navier.

Видели смо у § 3, да је за познавање напрегнутог стања у датој тачки довољно, да знамо величине девет напона за три ортогоналне равни, које пролазе кроз ту тачку. Сад можемо смањити број тих података на шест, узевши у обзир једначине (7).

После усвојених ознака (8) можемо представити једначине (6) у облику:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} (6')$$

Једначине (4) из § 3 добиће исто тако простији облик:

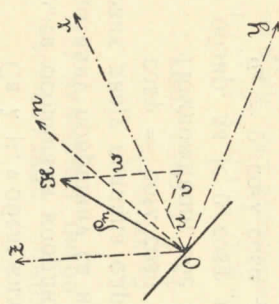
$$\left. \begin{aligned} \rho_n \cos \lambda &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma \\ \rho_n \cos \mu &= \sigma_y \cos \beta + \tau_x \cos \gamma + \tau_z \cos \alpha \\ \rho_n \cos \nu &= \sigma_z \cos \gamma + \tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta \end{aligned} \right\} (9)$$

а површински услови (5) биће изражени са:

$$\left. \begin{aligned} p \cos \lambda &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma \\ p \cos \mu &= \sigma_y \cos \beta + \tau_x \cos \gamma + \tau_z \cos \alpha \\ p \cos \nu &= \sigma_z \cos \gamma + \tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta \end{aligned} \right\} (10)$$

§ 5. Елипсоид тоталних напона.

По једначинама (9), знајући шест компоненталних напона у некој тачки, можемо израчунати тотални напон у тој тачки за сваку раван. Ради боље прегледности распореда тоталних напона у



Сл. 4.

разним правцима прибећићемо геометријском представљању, и то за сваку раван конструишаћемо правац тоталног напона и одмерићемо по томе правцу дужину \overline{OK} , која ће нам представљати у извесној размери величину ρ_n . Укупно, крајње тачке ових одсечака даће нам извесну површину, њен облик одредићемо сад.

Према дефиницији наше површине координате једне њене тачке u, v, w (сл. 4) су једнаке:

или по једначинама (9):

$$\begin{aligned} u &= \varrho_n \cos \lambda, \quad v = \varrho_n \cos \mu, \quad w = \varrho_n \cos \nu \\ u &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma; \\ v &= \sigma_y \cos \beta + \tau_x \cos \gamma + \tau_z \cos \alpha, \\ w &= \sigma_z \cos \gamma + \tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta, \end{aligned}$$

а поред тога:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Сад можемо решити три прве једначине по $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ и добивене вредности ставити у четврту, која ће тада представљати зависност између координата тачке наше површине и компоненталних напона, т.ј. једначину те површине. При том из првих трију једначина добићемо $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, као линеарне функције координата u , v , w . Кад подигнемо те функције на квадрат, добићемо друге степенне координата и њихове дупле производе, који ће ући у леву страну четврте једначине. Из тога се види, да ће тражена површина бити другога реда са центром.

Пошто u , v , w , као суме коначних величина (компоненталних напона, помножених са косинусима) не могу бити бесконачно велики, та површина није хиперболоид, већ елипсоид, који се зове елипсоид тоталних напона, или елипсоид Лапéа.*) Његова већа осовина одговараће највећем тоталном напону у даатој тачки, мала најмањем.

§ 6. Изналажење нормалних напона за различите равни. Главни напони.

Са λ , μ , ν обележили смо углове, које чини тотални напон ϱ_n са осовинама координата, а са α , β , γ углове нормале n на дотичну површину са истим осовинама. Косинус угла φ између ових двају праваца одредиће се познатим односом

$$\cos \varphi = \cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma.$$

Пмноживши обе стране ове једначине са ϱ_n и узевши

у обзир, да је $\varrho_n \cos \varphi$ нормални напон σ_n , добићемо:

$$\sigma_n = \varrho_n \cos \lambda \cos \alpha + \varrho_n \cos \mu \cos \beta + \varrho_n \cos \nu \cos \gamma.$$

Кад ставимо овде изразе за $\varrho_n \cos \lambda$, $\varrho_n \cos \mu$, $\varrho_n \cos \nu$ из једначина (9), наћићемо:

*) G. Lamé предложио је 1841. год. овај начин геометријског представљања тоталних напона.

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2 \tau_x \cos \alpha \cos \beta + 2 \tau_y \cos \alpha \cos \gamma + 2 \tau_z \cos \beta \cos \gamma \dots \dots \dots (11).$$

Овај однос одређује нормални напон за раван, задату угловима α , β , γ , кад познајемо шест компоненталних напона.

Нас највише интересује онај правац, коме одговара екстремна вредност нормалног напона σ_n . Углове тога правца са осовинама назваћемо α_1 , β_1 , γ_1 ; остаје нам да тражимо максимум функције (11) од $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, везаних међу собом једначином:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \dots \dots \dots (12)$$

Узмимо делимичне изводе*) σ_n по $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$:

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \cos \alpha} = 2 \sigma_x \cos \alpha + 2 \tau_x \cos \beta + 2 \tau_y \cos \gamma$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \cos \beta} = 2 \tau_z \cos \alpha + 2 \sigma_y \cos \beta + 2 \tau_x \cos \gamma$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \cos \gamma} = 2 \tau_y \cos \alpha + 2 \tau_x \cos \beta + 2 \sigma_z \cos \gamma$$

Кад уједначимо сваки од ових извода са дотичним изводом једначине (12), помноженим још са неодређеним множителем k , наћићемо:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - k) \cos \alpha_1 + \tau_z \cos \beta_1 + \tau_y \cos \gamma_1 &= 0 \\ \tau_z \cos \alpha_1 + (\sigma_y - k) \cos \beta_1 + \tau_x \cos \gamma_1 &= 0 \\ \tau_y \cos \alpha_1 + \tau_x \cos \beta_1 + (\sigma_z - k) \cos \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Ако додамо овим трима једначинама још и однос (12), добићемо четири једначине са четири непознате: $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$, $\cos \gamma_1$, k .

Кад помножимо прву једначину са $\cos \alpha_1$, другу са $\cos \beta_1$ трећу са $\cos \gamma_1$, саберемо и узмемо у обзир једначину (12), имаћемо:

$$k = \sigma_x \cos^2 \alpha_1 + \sigma_y \cos^2 \beta_1 + \sigma_z \cos^2 \gamma_1 + 2 \tau_z \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + 2 \tau_x \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + 2 \tau_y \cos \gamma_1 \cos \alpha_1;$$

*) Из диференцијалног рачуна знамо, да ако је $U = f(x, y, z) \dots (11)$ и при томе $\varphi(x, y, z) = 0 \dots (12)$, онда за изналажење U_{\max} треба ставити једначине: $\frac{\partial U}{\partial x} = k \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $\frac{\partial U}{\partial y} = k \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $\frac{\partial U}{\partial z} = k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, где је k константа, и решити их заједно са једначином (12) по четири непознате k , x , y , z . Нађене величине за x , y , z , чине функцију U максимум или минимум.

из тога и једначине (11) излази, да је:

$$\sigma_i = k,$$

т. ј. неодређени множител к представља тражену екстремну вредност нормалнога напона.

Сад ћемо решавати добијене четири једначине (12) и (13) после претходне замене к са σ_i . Једначине (13) су хомогене према $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$, дакле могу имати решења различита од (0, 0, 0) само у том случају, ако је детерминанта њихових коефицијената једнака нули. Из услова (12) пак јасно је да решење (0, 0, 0) не одговара нашем случају, због тога је:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i) (\sigma_y - \sigma_i) (\sigma_z - \sigma_i) + 2 \tau_x \tau_y \tau_z - (\sigma_x - \sigma_i) \tau_x^2 - \\ - (\sigma_y - \sigma_i) \tau_y^2 - (\sigma_z - \sigma_i) \tau_z^2 = 0 \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

Ова је једначина трећег степена по σ_i ; може се показати, да су сва три њена корена реална.*) Три напона σ_1 , σ_2 , σ_3 , који су одређени са ова три корена називамо *главним напонима*, један од њих је највећи, а један је најмањи нормални напон у датој тачки.

Кад отворимо заграде у једначини (14) и изразимо коефицијенат при σ_i^2 помоћу корена једначине, добићемо

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

Како величине главних напона не зависе од избора координатног система, то и $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ не зависи од њега, т. ј. представља инваријанту.

Величине главних напона познате су сад, остало је још, да нађемо њихове правце.

§ 7. Правци главних напона.

За изналагажење величина $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$, које одговарају сваком од трију корена σ_i ($i = 1, 2, 3$) једначине (14) искључујемо из прве и друге једначине групе (13) $\cos\alpha_i$; тада ћемо добити

$$\begin{aligned} [(\sigma_x - \sigma_i) (\sigma_y - \sigma_i) - \tau_z^2] \cos\beta_i + \\ + [\tau_x (\sigma_x - \sigma_i) - \tau_y \tau_z] \cos\gamma_i = 0. \end{aligned}$$

Кад искључимо исту непознату из прве и треће једначине, добићемо

*) Упореди аналоган доказ у аналитичној геометрији при изналагажењу главних осовина површина другог реда.

$$\begin{aligned} [(\sigma_z - \sigma_i) (\sigma_x - \sigma_i) - \tau_y^2] \cos\gamma_i + \\ + [\tau_x (\sigma_x - \sigma_i) - \tau_y \tau_z] \cos\beta_i = 0. \end{aligned}$$

Ако означимо:

$$\begin{aligned} (\sigma_y - \sigma_i) (\sigma_z - \sigma_i) - \tau_x^2 = a_i \\ (\sigma_z - \sigma_i) (\sigma_x - \sigma_i) - \tau_y^2 = b_i \\ (\sigma_x - \sigma_i) (\sigma_y - \sigma_i) - \tau_z^2 = c_i \end{aligned} \dots \dots \dots (15)$$

$\tau_x (\sigma_x - \sigma_i) - \tau_y \tau_z = U_i$
изгледаће две последње једначине:

$$\begin{aligned} c_i \cos\beta_i + U_i \cos\gamma_i = 0 \\ b_i \cos\gamma_i + U_i \cos\beta_i = 0 \end{aligned}$$

одавде:

$$b_i c_i = U_i^2,$$

или:

$$\frac{\cos^2\beta_i}{\cos^2\gamma_i} = \frac{U_i^2}{c_i^2} = \frac{b_i}{c_i};$$

на сличан начин наћићемо:

$$\frac{\cos^2\alpha_i}{\cos^2\beta_i} = \frac{a_i}{b_i}$$

дакле:

$$\cos^2\alpha_i : \cos^2\beta_i : \cos^2\gamma_i = a_i : b_i : c_i$$

кад означимо ($a_i + b_i + c_i$) са S_i добићемо:

$$\cos\alpha_i = \pm \sqrt{\frac{a_i}{S_i}}, \quad \cos\beta_i = \pm \sqrt{\frac{b_i}{S_i}}, \quad \cos\gamma_i = \pm \sqrt{\frac{c_i}{S_i}} \quad (16)$$

При избору знакова за косинусе руководићемо се следећим посматрањем:

Имали смо:

$$c_i \cos\beta_i + U_i \cos\gamma_i = 0.$$

Кад помножимо ову једначину са $\cos\gamma_i$ и уочимо, да је

$$\cos^2\gamma_i = \frac{c_i}{S_i}, \quad \text{имаћемо}$$

$$\cos\beta_i \cos\gamma_i + \frac{U_i}{S_i} = 0.$$

Према томе, ако је $\frac{U_i}{S_i} > 0$, онда су $\cos\beta_i$ и $\cos\gamma_i$

супротних знакова; ако је $\frac{U_i}{S_i} < 0$ онда истих знакова. У

осталом избор знакова за ове две величине произвољан је. Знак $\cos\alpha_i$ одредиће се тада из прве једначине групе (13).

Нашавши три корена једначине (14), налазимо на тај начин из једначина (15) и (16) три правца за три дотична главна напона. Остало нам је још, да одредимо углове између тих правца.

Узмимо једначине (13) за $k = \sigma_1$, помножимо прву од њих са $\cos\alpha_2$, другу са $\cos\beta_2$, трећу са $\cos\gamma_2$ и саберемо: Онда добијемо:

$$\begin{aligned} & \sigma_1 (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2) = \\ & = \sigma_x \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sigma_y \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \sigma_z \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 + \\ & + \tau_x (\cos\beta_1 \cos\gamma_2 + \cos\gamma_1 \cos\beta_2) + \tau_y (\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 + \\ & + \cos\alpha_1 \cos\gamma_2) + \tau_z (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\alpha_2); \end{aligned}$$

збир у заградама левог дела ове једначине је $\cos\varphi$, где је φ угао између правца σ_1 и σ_2 .

Ако би сада написали једначине (13) за $k = \sigma_2$, помножили их са $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ и сабрали, то би у левом делу добили $\sigma_2 \cos\varphi$; а у десном она иста шест члана, што и пре. Према томе $\sigma_2 \cos\varphi = \sigma_1 \cos\varphi$; али уопште узев σ_1 није једнако σ_2 , дакле $\cos\varphi = 0$, т. ј. први и други главни напони чине међусобно прав угао. До сличног би закључка дошли и за друга два пара главних напона, дакле, *шири главна напона чине ортогонални систем*.

§ 8. Изражавање тоталних и нормалних напона помоћу главних напона.

Кад упоредимо групу једначина (9) са групом (13) за $k = \sigma_1$, наћићемо пројекције тоталног напона за раван, нормалну на правац главног напона σ_1 :

$$\begin{aligned} \varrho_1 \cos\lambda_1 &= \sigma_1 \cos\alpha_1, \\ \varrho_1 \cos\beta_1 &= \sigma_1 \cos\beta_1, \\ \varrho_1 \cos\gamma_1 &= \sigma_1 \cos\gamma_1. \end{aligned}$$

Кад дигнемо ове једначине на квадрат и саберемо, добићемо:

$$\varrho_1^2 = \sigma_1^2;$$

из дефиниције величина ϱ_n и σ_n очевидно је, да је немогућа једнакост $\varrho_1 = -\sigma_1$, зато долазимо до закључка, да је $\varrho_1 = \sigma_1$, или за равни, нормалне на главне напоне *поштални напони су једнаки дотичним нормалним*. А узимајући у обзир једначину (1):

$$\varrho_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \dots \dots \dots (1),$$

видимо, да у *шим равнима нема тангенцијалних напона*.

Ако координатне осе управимо по правцима главних напона у даатој тачки, т. ј. заменимо σ_x , σ_y , σ_z са σ_1 , σ_2 , σ_3 а τ_x , τ_y , τ_z са нулом, то ће једначине (9) добити облик:

$$\left. \begin{aligned} \rho_n \cos\lambda &= \sigma_1 \cos\alpha \\ \rho_n \cos\mu &= \sigma_2 \cos\beta \\ \rho_n \cos\nu &= \sigma_3 \cos\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Кад дигнемо те једначине на квадрат и саберемо, наћићемо:

$$\rho_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma \dots \dots (18),$$

где су α , β , γ углови нормале n , а λ , μ , ν углови дотичног тоталног напона ρ_n са *правцима главних напона*.

Једначина (11), која даје величину нормалног напона за раван са нормалом n , знатно ће се упростити, ако за координатне осе усмемо правце главних напона:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma \dots \dots (19)$$

где су α , β , γ опет углови нормале n са правцима главних напона.

Враћајући се на елипсоид Ламеа, при координатном систему, који смо сад изабрали имамо

$$u = \sigma_1 \cos\alpha, v = \sigma_2 \cos\beta, w = \sigma_3 \cos\gamma,$$

одакле

$$\frac{u^2}{\sigma_1^2} + \frac{v^2}{\sigma_2^2} + \frac{w^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

То је једначина тога елипсоида у погледу његових главних оса, које се, дакле, поклапају са правцима главних напона. Полуосе елипсоида бројно су равне величинама главних напона, дакле, највећи и најмањи тотални напон једнаки су највећем и најмањем главном напону. Ако су два главна напона, на пр. σ_1 и σ_2 једнаки, елипсоид Ламеа биће ротациони: правац σ_3 биће оса ротације, а два ма каква ортогонална правца у равни, нормалној на σ_3 , могу се сматрати за главне осе елипсоида u и v или за правце главних напона σ_1 и σ_2 . Ако су сва три главна напона једнака, елипсоид Ламеа биће лопта, три ма каква ортогонална правца могу се сматрати за правце главних напона.

§ 9. Површина нормалних напона.

Представимо себи површину, чији се радиуси-вектори поклапају са нормалама различитих равни кроз даду тачку,

а дужине тих радијуса-вектора представљају у извесној размери $\frac{1}{|\sigma_n|}$, где је $|\sigma_n|$ апсолутна величина дотичног нормалног напона. Тада ће координатне тачке те површине бити једнаке:

$$u = \frac{\cos \alpha}{|\sigma_n|}, \quad v = \frac{\cos \beta}{|\sigma_n|}, \quad w = \frac{\cos \gamma}{|\sigma_n|}$$

Кад одредимо из ових једначина $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ и ставимо у једначину (19), добићемо:

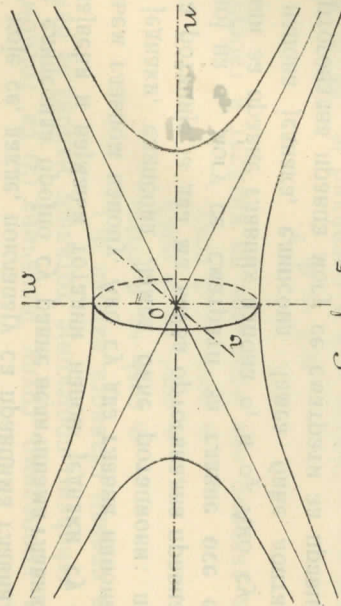
$$\sigma_1 u^2 + \sigma_2 v^2 + \sigma_3 w^2 = \pm 1 \dots \dots (20)$$

т. ј. једначину површине другога реда са центром, у погледу њених главних оса. Да испитамо сад ту једначину.

Ако су сва три главна напона позитивна, наша површина је елипсоид са полуосама $\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_3}$; сви радијуси-вектори имају коначне дужине, дакле нормални напон ни за један правац неће бити нула, а према томе је увек позитиван.

Ако су сва три главна напона негативна, површина је опет елипсоид са полуосама $\frac{1}{-\sigma_1}, \frac{1}{-\sigma_2}, \frac{1}{-\sigma_3}$, али за сваки правац нормални напон је негативан.

Ако је један од главних напона, на пр. σ_1 негативан, а σ_2 и σ_3 позитивни, једначина (20) ће се развити на две $\sigma_1 u^2 + \sigma_2 v^2 + \sigma_3 w^2 = 1$ и $\sigma_1 u^2 + \sigma_2 v^2 + \sigma_3 w^2 = -1$.



Слика 5.

Прва једначина представља једнограни хиперолоид (сл. 5), који сече v и w раван по елипси, а две друге координатне равни по хиперболама. Друга једначина представља двограни хипер-

олоид, који сече само u осу. Хиперолоиди су раздељени асимптотном купом са елиптичном осном чија се оса поклапа са ou ; једначину те купе добијамо из (20) заменом јединице на десној страни нулом. Радијуси — вектори, који секу двограни хиперолоид, (т. ј. леже у асимптотној купи), одговарају негативним напонима (слично σ_1); они, који секу једнограни хиперолоид (т. ј. леже ван купе) одговарају позитивним напонима; најзад, вектори, који се поклапају са изводницама купе, секу оба хиперолоида у бесконачности, а дотични нормални напони су једнаки нули; дакле купа представља границу, где напони мењају знак.

Ако је један од главних напона, на пр. σ_1 , позитиван, а σ_2 и σ_3 негативни, имаћемо исте хиперолоиде са том разликом, што ће вектори, који леже у асимптотној купи одговарати позитивним напонима, а они, који леже ван купе негативним.

У случају, да су два главна напона, на пр. σ_2 и σ_3 , једнаки, наши елипсоиди и хиперолоиди претвориће се у ротационе површине око осе u . Онда, као што смо видели у § 8, ма какве две ортогоналне праве у равни vw можемо сматрати за правце главних напона σ_2 и σ_3 .

Ако је један од главних напона, на пр. σ_1 , једнак нули, а σ_2 и σ_3 истога знака, то ће се површина претворити у цилиндар са изводницом, паралелном ou , а водиља његова биће елипса у равни vw . Ако су пак σ_2 и σ_3 различитог знака, то ћемо добити два цилиндра са изводницама паралелним ou , а водиље њихове биће две коњуговане хиперболе у равни vw . У последњем ће случају цилиндри делити две равни, које пролазе кроз ou и асимптоте хипербола. Те равни одговарају напонима једнаким нули, а деле позитивне и негативне напоне.

Ако су два главна напона, на пр. σ_2 и σ_3 , једнаки нули, површина ће се распасти на две равни, паралелне vw равни. Сви напони имаће исти знак, као σ_1 , а они, који леже у равни vw биће једнаки нули.

§ 10. Изражавање тангенцијалних напона помоћу главних.

Ако у једначини (1):

$$\tau_n^2 = \rho_n^2 - \sigma_n^2 \dots \dots (1)$$

заменимо ρ_n и σ_n из једначина (18) и (10), добићемо:

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma)^2 \dots (21)$$

Тај образац одређује тангенцијални напон у равни са нормалом n , која затвара углове α , β , γ са правцима главних напона.

За изналажење равни највећег и најмањег тангенцијалног напона применићемо исту методу, помоћу које смо нашли максимум и минимум нормалних напона. Само, да би овде упростили ток излагања, тражићемо екстремну вредност за τ_n^2 , а не за τ_n , а да не би уводили условну једначину (12):

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \dots (12)$$

одредићемо из ње, на пр., $\cos^2 \alpha$ и увесћемо у једначину (21):

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \cos^2 \beta + (\sigma_3^2 - \sigma_1^2) \cos^2 \gamma - [\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \beta + (\sigma_3 - \sigma_1) \cos^2 \gamma]^2$$

Диференцирањем тог израза по β и α наћићемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_n^2}{\partial \beta} &= -2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \cos \beta \sin \beta + 4[\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \beta + (\sigma_3 - \sigma_1) \cos^2 \gamma] (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \beta \sin \beta \\ \frac{\partial \tau_n^2}{\partial \gamma} &= -2(\sigma_3^2 - \sigma_1^2) \cos \gamma \sin \gamma + 4[\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \beta + (\sigma_3 - \sigma_1) \cos^2 \gamma] (\sigma_3 - \sigma_1) \cos \gamma \sin \gamma \end{aligned}$$

Кад изједначимо ове изводе нулом и скратимо са 2 $(\sigma_2 - \sigma_1)$ односно са 2 $(\sigma_3 - \sigma_1)$ јер, у опште главни напона нису једнаке, добићемо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \cos \beta_j \sin \beta_j &= [(\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \beta_j + (\sigma_3 - \sigma_1) \cos^2 \gamma_j] \cos \beta_j \sin \beta_j \\ \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \cos \gamma_j \sin \gamma_j &= [(\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \beta_j + (\sigma_3 - \sigma_1) \cos^2 \gamma_j] \cos \gamma_j \sin \gamma_j \end{aligned} \dots (22)$$

Ако ни један од косинуса или синуса, који улазе, као множитељи у те једначине, није раван нули, онда се оне своде на једначину

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$$

која не одговара нашој предпоставци, да, у опште, σ_2 није једнако σ_3 . Ако предпоставимо, да је један од синуса, на пр. $\sin \beta_j$ једнак нули, онда $\cos^2 \beta_j = 1$ и према томе $\cos \alpha_j = \cos \gamma_j = 0$, т. ј. добићемо правац σ_2 , а ми знамо да у

равни нормалној на њега, нема тангенцијалних напона. Дакле један од косинуса мора бити нула.

Решењу $\cos \beta_j = 0$, одговара из једначине (22): $\cos^2 \gamma_j = \frac{1}{2}$, а према томе из (12): $\cos^2 \alpha_j = \frac{1}{2}$, т. ј. две равни, које пролазе кроз правац σ_2 и које деле на пола угао између координарних равни $\sigma_2 \sigma_1$ и $\sigma_2 \sigma_3$. Дотични тангенцијални напон из једначина (21) биће:

$$\tau_{II}^2 = \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_3^2 - (\frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_3)^2 = \frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_3)^2$$

одакле

$$\tau_{II} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \dots (23)$$

На сличан начин нашли би још два решења

$$\tau_I = \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_2), \tau_{III} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) \dots (23)$$

за равнине, које деле на пола два друга угла између координатних равни.

Ми смо досад искључили случај, да између главних напона има који су међусобом једнаки. Ако су, напр., $\sigma_2 = \sigma_3$, тада ће обе једначине (22) бити задовољени са $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{1}{2}$ или $\cos^2 \alpha_j = \frac{1}{2}$. Заменом ових величина у једначини (21), добијамо:

$$\tau_j^2 = \sigma_1^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) - [\sigma_1 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1)]^2 = \frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

или

$$\tau_{III} = \tau_{II} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

Нормале на дотичне равни чине на правцем σ_1 угао

$$\alpha_{II} = \alpha_{III} = \frac{1}{4}\pi$$

дакле, ти напони биће у свима равнинама тангенцијалним на кружну купу, чија се оса поклапа са правцем σ_1 , а угао у темену је прав.

Ако су сва три главна напона међусобом једнаки, то је лако видети, да су тангенцијални напони једнаки нули.

§ 11. Графичко представљање напрегнутог стања у тачки.

Предпоставимо, да је $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$. На хоризонталној оси (сл. 6) од почетка 0 одмерићемо дужине, пропорционалне тим величинама (на слици предпоставља се, да је $\sigma_1 < 0$) Кроз добивене тачке А, В, С повучемо три круга, чија су средишта у тачкама Е, D, F на оси. Према томе пречници тих кругова једнаки су $(\sigma_3 - \sigma_1)$, $(\sigma_2 - \sigma_1)$, $(\sigma_3 - \sigma_2)$, а одстојања њихових средишта од почетка: $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$, $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$,

ординатним осима. Та померања су различита за различите тачке тела, дакле су функције првобитних координата тачке. Узмимо на тим осима

(сл. 7) четири тачке: једну O , која се је пре дејства спољних сила поклапала са почетком координата и три друге A, B, C , које су биле на осима x, y, z у растојању dx, dy, dz од O . Назовимо померања тачке O по координатним осима са u, v, w , и предпоставимо, да су ове величине мале, и то истога реда, као што dx, dy, dz . Померање тачке A разликоваће се од померања тачке O за делимичне диференцијале величина u, v, w , који би одговарали различитим првобитним апсцисама, т. ј. dx . Према томе померања тачке A биће:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, w + \frac{\partial w}{\partial x} dx,$$

у положај A' са координатама: $dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v + \frac{\partial v}{\partial x} dx,$

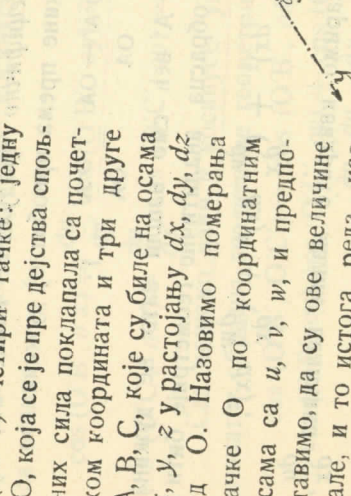
$$w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

Аналого, тачке B и C преместиће се у положај

$$B' \text{ са координатама: } u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy, w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \text{ и } C'$$

са координатама: $u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, v + \frac{\partial v}{\partial z} dz, w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$. При томе, диференцијали померања биће мале величине другога реда према dx, dy, dz , дакле изводи $\frac{\partial u}{\partial x}$ биће мали према јединици.

Провуцимо раван кроз тачке A, B, C . Заједно са координатним равнима издвојиће она у телу мали тетраедар, чији су углови при темену O прави. У деформираном телу темена тетраедра преместиће се у O', A', B', C' , а сам тетраедар измениће свој облик: ивице његове измениће своју дужину, углови ће се такође изменити. Ако будемо нашли промене дужина трију ивица OA, OB, OC , и трију првобитно правих



Слика 7.

Глава II.

Теорија деформација

§ 12. Зависност између компоненталних деформација и померања тачке.

Ако познајемо шест компоненталних напона за неку тачку тела онда можемо помоћу једначина (14) (15) и (16) наћи главне напоне за ту тачку, а за тим из једначина (17), (19) и (21) тотални, нормални и тангенцијални напон за сваку раван кроз ту тачку. Али за одређивање компоненталних напона имали смо досад само једначине (6) и (10), које њих вежују са спољним силама. Те једначине представљају само услове равнотеже крутог тела; оне су неопходне и за чврсто тело, које се може деформисати, али нису довољне за одређивање компоненталних напона у његовим тачкама.

Да се позабавимо сад са дотичним променама облика и померања тачака чврстог тела. Померања, која потичу од трансляција и ротација тела испитују се у механици крутог тела. Наш задатак састоји се у проучавању само оних померања која проузрокују промену растојања између појединих тачака тела и углова између двеју правих, које пролазе кроз три његове тачке. Оваквих померања немају тачке крутог тела, којом се бави механика.

Узмимо три координатне осе, круто везане са телом, тако да добију све његове трансляције и ротације. Ако би тело било круто, то би координате свију његових тачака у погледу тог система остале без промене и после дејства спољних сила. Али у чврстом телу ове ће се координате променити; те промене координата назваћемо померањима тачака по ко-

углова између тих ивица, онда можемо конструисати деформирани тетраедар, а тиме одредити и величине осталих његових ивица и углова.

Назовимо са ε_x специфично продужење ивице $O'A$, т.ј. однос прираста њене дужине према првобитној дужини:

$$\varepsilon_x = \frac{O'A' - OA}{OA} = \frac{O'A'}{OA} - 1;$$

координате тачака O' и A' већ смо нашли зато ће дужина $O'A'$ на основу познатог обрасца аналитичне геометрије бити:

$$O'A' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2},$$

Према томе, ако занемаримо квадрате малих величина $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ поред њихових првих степена, добићемо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 = \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 1} = \frac{\partial u}{\partial x} \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

На сличан начин наћићемо специфична продужења двеју других ивица OB и OC :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (24)$$

Очевидно, при скраћивању ивица величине ε_x , ε_y , ε_z биће негативне; ове се називају такође и дилатацијама у *правцима координатних оса*.

Да испитамо сад промене правих углова при темену O нашег тетраедра. Косинус угла ивице $O'A'$ са x осом добићемо, ако поделимо разлику апсциса тачака A' и O' са дужином $O'A'$:

$$\cos(O'A', ox) = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx}{(1 + \varepsilon_x) dx} = 1.$$

Аналого:

$$\cos(O'A', oy) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \varepsilon_x) dx}; \quad \cos(O'A', oz) = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{(1 + \varepsilon_x) dx}$$

или, ако занемаримо малу величину ε_x према јединици:

$$\cos(O'A', oy) = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \cos(O'A', oz) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

На исти начин наћићемо косинусе углова других ивица са осам:

$$\cos(O'B', ox) = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cos(O'B', oy) = 1, \quad \cos(O'B', oz) = \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\cos(O'C', ox) = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \cos(O'C', oy) = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \cos(O'C', oz) = 1.$$

Сад можемо наћи и косинусе углова између ивица из познатог обрасца аналитичне геометрије, на пр:

$$\begin{aligned} \cos(O'B', O'C') &= \cos(O'B', ox) \cos(O'C', ox) + \\ &+ \cos(O'B', oy) \cos(O'C', oy) + \cos(O'B', oz) \cos(O'C', oz) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}$$

или, ако занемаримо малу величину другог реда:

$$\cos(O'B', O'C') = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Угао између ивица OB и OC био је $\pi/2$, у деформираном стању смањиће се за малу величину, коју ћемо обележити са γ_x^* , тако да је

$$\cos(O'B', O'C') = \cos(\pi/2 - \gamma_x) = \sin \gamma_x;$$

илн, пошто је γ_x мала величина:

$$\cos(O'B', O'C') = \gamma_x,$$

и

$$\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \dots \dots \dots (25)$$

На исти начин налазимо и смањивања двају других углова при темену O :

$$\gamma_y = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots \dots \dots (25)$$

Величине γ_x , γ_y , γ_z , називамо *клизавњима* или *смицањима*. Изведене једначине (24) и (25) дају нама могућност, да по заданим померањима тачке O : u , v , w , нађемо *шест компоненцијалних деформација* ε_x , ε_y , ε_z , γ_x , γ_y , γ_z за ту тачку и конструишемо деформирани тетраедар. Дакле, те величине потпуно одређују деформирано стање у тачки према трима

^{*}) При повећању угла биће γ_x негативно.

изабраним правцима. Да видимо сад, да ли се одређује помоћу тих једначина деформирано стање за ма какав правац.

§ 13. Дилатације у ма коме правцу. Главне деформације.

Повуцимо кроз тачку тела три координатне осе и неку четврту праву l , чије углове са осам означимо са α, β, γ . На тој правој узнемо тачку D у растојању dl од почетка координата, а њене координате назваћемо са dx, dy, dz . Тада је:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \dots \dots \dots (26)$$

$$\cos \alpha = dx/dl; \cos \beta = dy/dl; \cos \gamma = dz/dl \dots \dots \dots (27)$$

Ако померања почетка координата означимо, као и пре, са u, v, w , то ће онда померање тачке D бити $u + du + dv + dw$ где су du, dv, dw , тотални диференцијали функција u, v, w , т. ј.

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

Растојање наше тачке од почетка координата измениће се, ако са ϵ_l , назовемо специфично продужење у правцу l , биће то растојање у деформираном стању $dl(1 + \epsilon_l)$. Истовремено то растојање биће дијагонала паралелоипеда, чије су ивице: $dx + du, dy + dv, dz + dw$, дакле

$$dl^2(1 + \epsilon_l)^2 = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2.$$

Сад, ако узнемо у обзир (26), поделимо са dl^2 и занемаримо мале величине другог реда $(du/dl)^2, (dv/dl)^2, (dw/dl)^2$, добићемо:

$$\epsilon_l = \frac{dx du}{dl dl} + \frac{dy dv}{dl dl} + \frac{dz dw}{dl dl}$$

Ако у тој једначини заменимо du, dv, dw , са изразама (28), добићемо с обзиром на једначине (27).

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= \cos \alpha \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right] + \\ &+ \cos \beta \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right] + \\ &+ \cos \gamma \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \gamma \right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2 \beta + \frac{\partial w}{\partial z} \cos^2 \gamma + \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \cos \beta \cos \gamma + \\ &+ \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \cos \gamma \cos \alpha + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Најзад, помоћу једначине (24) и (25) добијамо образац:

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \beta + \epsilon_z \cos^2 \gamma + \gamma_x \cos \beta \cos \gamma + \\ &+ \gamma_y \cos \gamma \cos \alpha + \gamma_z \cos \alpha \cos \beta \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

који даје дилатацију за сваки правац l , задати угловима α, β, γ , ако су познате величине шест компоненталних деформација за три ортогоналне осе.

Кад упоредимо образац (29), са образцом (11) за нормални напон σ_n у правцу заданом угловима α, β, γ , видимо потпуну аналогију између та два израза. На основу те аналогije можемо проширити на дилатације закључке, које смо добили из једначине (11) за нормалне напоне, и то: за сваку тачку можемо наћи три ортогонална правца *главних деформација*, за које су смицања једнака нули, т. ј. углови између тих правца остају прави и у деформисаном стању, за један од тих правца је дилатација највећа, а за један је најмања; ако узнемо правце главних деформација за координатне осе, онда дилатација у правцу l , задатом угловима α, β, γ , биће

$$\epsilon_l = \epsilon_1 \cos^2 \alpha + \epsilon_2 \cos^2 \beta + \epsilon_3 \cos^2 \gamma; \dots \dots \dots (30)$$

најзад, ако на радије векторе нанесемо величине $\frac{1}{\sqrt{|\epsilon_l|}}$, добићемо централну површину другог реда, која ће нам представити распоред дилатација у разним правцима.

Из исте аналогije излази, да је збир дилатација за три ортогонална правца једнак збиру главних деформација: $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$, дакле је инваријанта за дату тачку. Она се назива *запреминском дилатацијом* у тачки и представља специфично повећање запремине нашег елементарног тетраедра, који је имао у првобитном стању дужине ивица dx, dy, dz , а запремину $V_0 = \frac{1}{6} dx dy dz$. Запремина деформисаног тетраедра по познатом образцу аналитичне пометрије биће:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

где су $x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots$ координате његових темена; замењујући их дотичним вредностима § 12. имамо:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx, & \frac{\partial v}{\partial x} dx, & \frac{\partial w}{\partial x} dx \\ \frac{\partial u}{\partial y} dy, & dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy, & \frac{\partial w}{\partial y} dy \\ \frac{\partial u}{\partial z} dz, & \frac{\partial v}{\partial z} dz, & dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{vmatrix}$$

Кад развијемо ту детерминанту и занемаримо мале величине вишег реда, добијамо $V = \frac{1}{6} dx dy dz \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{6} dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ дакле $e = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

§ 14. Изналажење померања по заданим компоненталним деформацијама. Услови поклапања деформација.

Ми смо нашли зависност између шест компоненталних деформација у тачки и њених померања по координатним осама у облику једначина (24) и (25):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad \dots \quad (24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_z, \quad \dots \quad (25)$$

Ако су позната померања u, v, w , као функције координатних тачке, то изналажење компоненталних деформација постоји, т. ј. изналажење никаквих тешкоћа. Али обратни задатак, т. ј. изналажење померања по задатим компоненталним деформацијама, се састоји у интеграцији система диференцијалних једначина (24) и (25) са делимичним изводима, дакле је много тежи.

Почнимо са померања u : $\frac{\partial u}{\partial x}$ је познато; ако бисмо знали

текође $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ то би нашли*) и саму функцију u . Да би

*) Из интегралног рачуна знамо, да ако су: $\frac{\partial U}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = C$, а при томе: $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}$, онда је:

$$U = \int_{x_0}^x A dx + \int_{y_0}^y (B) dy + \int_{z_0}^z (C) dz,$$

(в. сл. стр.)

нашли те изводе, тражићемо њихове делимичне изводе, т. ј.:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z},$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$ из којих можемо наћи и $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. Од ових шест других извода, два ћемо лако наћи диференцирањем ε_x :

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z},$$

од осталих два су међу собом једнаки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$

дакле, остаје да нађемо само: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, после тога можемо наћи $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, а затим и саму функцију u .

Диференцирањем двеју последњих једначина (25) по z , односно по y , добијамо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y}$$

Диференцирањем истих једначина, али у обрнутом реду, и сабирањем налазимо:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial x};$$

пошто је збир у заграда на основу (25) једнак γ_x , добијамо из те једначине последњи од тражених других извода:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right).$$

Сад можемо наћи и прве изводе функције u

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) dz + \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy + \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx - r \quad (31)$$

где су x_0, y_0, z_0 произвољне константе, а $(B)_{x_0}$ и $(C)_{x_0}$ добију се из B и C заменом x са x_0 , односно y и z са y_0 и z_0 .

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \int_{y_0}^x \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) dy + \int_{z_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz + \int_{y_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \right) dx - r_1 \quad (31)$$

где су r и r_1 произвољне константе. Али при томе други изводи морају задовољити услове могућности интеграције:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right); \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \right); \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right); \end{aligned} \right\} (32)^*$$

Из једначина (31) и прве од једначина (24) можемо садићи и саму функцију u . Али претходно из (31) можемо цикличном пермутацијом добити делимичне изводе померања v и w :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left(-\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dx + \int_{z_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right) dz + \int_{y_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right) dy - p, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_{z_0}^x \left(-\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dz + \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx + \int_{y_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy - p_1, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_{y_0}^x \left(-\frac{\partial \gamma_z}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) dy + \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \right) dx + \int_{z_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz - q, \end{aligned} \right\} (31)^*$$

*) Шеста једначина је изостављена, јер се поклапа са другом.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left(-\frac{\partial \gamma_z}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) dx + \int_{y_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right) dy + \int_{z_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right) dz - q_1 \quad (31)$$

где су p , p_1 , q , q_1 произвољне константе. Дотичне услове могућности интеграције добићемо такође цикличном пермутацијом једначина (32), а то ће дати нама само једну нову једначину. Кад додамо њу, добићемо услове (32) у следећем облику

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right); \end{aligned} \right\} (33)$$

дакле, шест компоненталних деформација у тачки нису произвољне функције њених координата, већ морају задовољити *шест услова поклапања деформација* (33*).

Једначине (31) и (24) дају све прве изводе померања u , v , w . У њих улазе шест произвољних константи p , q , r , p_1 , q_1 , r_1 ; али једначине (25) одређују нама три од тих константи. На пр. прва од тих једначина даје:

$$\begin{aligned} \gamma_z &= \int_{z_0}^z \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} dz + \int_{y_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial y} \right) dy - \iint_{y_0, x_0}^x \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \right) dx dy + \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial x} \right) dx - \\ &- \iint_{x_0, y_0}^x \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \right) dy dx - r - p_1; \end{aligned}$$

кад уведемо прву од једначина (31) и развијемо квадратуре, онда

$$\begin{aligned} \gamma_z &= \gamma_z - (\gamma_z)_{z_0} + (\gamma_z)_{z_0 y_0} + (\gamma_z)_{z_0 x_0} - (\gamma_z)_{z_0 y_0 x_0} + \\ &+ (\gamma_z)_{z_0} - (\gamma_z)_{z_0 x_0} - r - p_1, \end{aligned}$$

одавде:

$$-p_1 = (\gamma_z)_{x_0 y_0 z_0} + r; \dots \dots \dots (34)$$

потпуно аналого:

*) Ове једначине извео је 1861. г. В. де Saint-Venant, зато се често зову Сен-Венановим условима.

$$\begin{aligned} -q_1 &= (\gamma_x) + p \\ -r_1 &= (\gamma_y) + q \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (34)$$

Сад можемо из једначина (24), (31) и (34) наћи померање u :

$$u = \int_{x_0}^x \varepsilon_x dx - \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dz dy + \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y [(\gamma_y) + (\gamma_x)] dz +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{y_0}^y [(\gamma_z) + (\gamma_x)] dy - (\gamma_z) y -$$

$$- \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy dy - \int_{z_0}^z \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz dz - r y + q z + p_0,$$

аналого:

$$v = \int_{y_0}^y \varepsilon_y dy - \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) dx dz + \frac{1}{2} \int_{z_0}^z [(\gamma_z) + (\gamma_y)] dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{z_0}^z [(\gamma_x) + (\gamma_x)] dz - (\gamma_x) z -$$

$$- \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right) dz dz - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx dx - p z + r x + q_0;$$

$$w = \int_{z_0}^z \varepsilon_z dz - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) dy dx + \frac{1}{2} \int_{y_0}^y [(\gamma_x) + (\gamma_x)] dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^x [(\gamma_y) + (\gamma_y)] dx - (\gamma_y) x -$$

$$- \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \right) dx dx - \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right) dy dy - q x + p y + r_0.$$

У ове једначине*) у обликун роизвољних константи p, q, r, p_0, q_0, r_0 , ушла су и померања, потпуно независна од дефор-

*) Услови могућности интеграције дају у том случају опет једначине (33).

мација; јер ако ставимо да су у тим формулама компоненталне деформације једнаке нули, добивамо —

$$u = -r y + q z + p_0, \quad v = -p z + r x + q_0, \quad w = -q x + p y + r_0,$$

т. ј. познате Ајлерове једначине кретања крутог тела, где су p_0, q_0, r_0 транслације по координатним осама, a, p, q, r — ротације око тих оса. Да би елиминирали та померања, везаћемо координатне осе са телом, и то на следећи начин: прво, елиминирамо транслације тиме, што почетак координата везамо са тачком, т. ј. за тачку $(0, 0, 0)$ ставимо $u = v = w = 0$, то ћемо постигнути са $x_0 = y_0 = z_0 = p_0 = q_0 = r_0 = 0$; друго, елиминирамо ротације око ou и oz тиме, што ћемо тачку $(dx, 0, 0)$ приморати, да остане на ox , т. ј. ставимо за њу $v = w = 0$, то ће дати: $(\gamma_z) dx + r dx = 0, (\gamma_y) dx - (\gamma_y) dx -$
 $- q dx = 0$, или: $r = -(\gamma_z), q = 0$; треће, елиминирамо и последњу могућу ротацију око ox тиме, што ћемо тачку $(0, dy, 0)$ приморати да остане у xu равни, те ставимо за њу $w = 0$ то ће дати $(\gamma_x) dy + p dy = 0$, или $p = -(\gamma_x)$.

Кад уведемо нађене вредности за константе, добићемо:*)

$$u = \int_0^x \varepsilon_x dx - \int_0^y \int_0^z \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy dz -$$

$$- \int_0^z \int_0^y \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz dz - \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^z \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dz dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^z \left\{ (\gamma_y) + (\gamma_y) \right\} dz + \frac{1}{2} \int_0^y \left\{ (\gamma_z) + (\gamma_z) \right\} dy,$$

$$v = \int_0^y \varepsilon_y dy - \int_0^z \int_0^y \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right) dz dz - \int_0^z \int_0^y \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx dz -$$

*) Ове једначине извео је 1905 г. И. Г. Бубнов.

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^x \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) dx dz + \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^x \left(\gamma_z \right) dx + \left(\gamma_z \right) \Big|_{y=0}^{y=0} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^x \left(\gamma_x \right) dz - \left(\gamma_x \right) \Big|_{x=0}^{x=0} dz - \left(\gamma_x \right) \Big|_{y=0}^{y=0} dz - \left(\gamma_x \right) \Big|_{z=0}^{z=0} dz + \\
W = & \int_0^z \varepsilon_z dz - \int_0^x \int_0^y \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \right) dx dx - \int_0^y \int_0^x \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right) dy dy - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \left(\frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right) dy dx + \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^x \left(\gamma_x \right) dx + \left(\gamma_x \right) \Big|_{z=0}^{z=0} dy + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \left(\gamma_y \right) dx + \left(\gamma_y \right) \Big|_{z=0}^{z=0} dx - \left(\gamma_y \right) \Big|_{x=0}^{x=0} dx - \left(\gamma_y \right) \Big|_{y=0}^{y=0} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \left(\gamma_z \right) dx - \left(\gamma_z \right) \Big|_{x=0}^{x=0} dx - \left(\gamma_z \right) \Big|_{y=0}^{y=0} dx - \left(\gamma_z \right) \Big|_{z=0}^{z=0} dx +
\end{aligned} \tag{34}$$

Глава III.

Зависност између напона и деформација.

§ 15. Хуков закон.

Ми смо испитали напоне и деформације, не везујући та два појма међусобом. Сад треба одредити зависност између њих и изразити је аналитички.

При испитивању напона говорили смо у ствари о кругом телу, примењујући на различите његове тачке и делове законе статике. Теорија деформација бавила се већ телом, које допушта промену облика и запремине, али, испитујући те геометријске промене, нисмо улазили у њихову зависност од спољних сила. За успостављење везе између деформација и напона (а на тај начин и између деформација и спољних сила, пошто је зависност између напона и спољних сила већ утврђена), морамо сада дефинисати објекат нашег испитивања — *еластично тело*, т. ј. морамо му приписати неке особине. Те особине морају, да проистичу из непосредних опита над реалним телима, тада ће се и закључци, који су основани на таквој дефиницији, моћи применити на реална тела.

Ми ћемо назвати *идеално-еластичним* тело, код којег су деформације линеарне функције напона, при сваким величинама напона. Аналитички ће то бити изражено на следећи начин:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = A_{xx}\sigma_x + A_{yy}\sigma_y + A_{zz}\sigma_z + B_{xx}\tau_x + B_{xy}\tau_y + B_{xz}\tau_z, \\ \varepsilon_y = A_{yy}\sigma_x + A_{yy}\sigma_y + A_{zz}\sigma_z + B_{yy}\tau_x + B_{yy}\tau_y + B_{yz}\tau_z, \\ \varepsilon_z = A_{zz}\sigma_x + A_{zz}\sigma_y + A_{zz}\sigma_z + B_{zz}\tau_x + B_{zz}\tau_y + B_{zz}\tau_z, \\ \gamma_x = C_{xx}\sigma_x + C_{yy}\sigma_y + C_{zz}\sigma_z + D_{xx}\tau_x + D_{xy}\tau_y + D_{xz}\tau_z, \\ \gamma_y = C_{yy}\sigma_x + C_{yy}\sigma_y + C_{zz}\sigma_z + D_{xy}\tau_x + D_{yy}\tau_y + D_{yz}\tau_z, \\ \gamma_z = C_{zz}\sigma_x + C_{zz}\sigma_y + C_{zz}\sigma_z + D_{xz}\tau_x + D_{zy}\tau_y + D_{zz}\tau_z, \end{cases} \tag{36}$$

где су 36 слова A, B, C, D са различитим индексима *коэффициенти эластичности*, који су независни од величина напона и деформација, а зависе једино од хемијског састава и структуре тела и, уопште, су различити за различите тачке тела и различите правце осовина. 1676 год. нашао је *R. Hooke* експерименталним путем да за многа тела у извесним границама постоји пропорционалност између напона и деформација, а то је изразио реченицом: „*ut tensio sic vis*“, коју обично називају Хуковим законом. Та особина је послужила као основица за нашу дефиницију идеално-еластичног тела. Све закључке и формуле, које ћемо добити за такво тело, могу се применити на реална тела само у случајевима, када опит потврди, да је њима та особина својствена.

Израз Хуков „закон“ треба разумети условно. То није универзални природни закон, као што су, на пр., Њутнов или Архимедов закон. Он се може боље упоредити са познатим законом Мариота-Ге-Љусака. Као што знамо, ови први испитивачи особина гасних тела нашли су следећу једначину стања гаса

$$p\nu = RT,$$

где су p — притисак, ν — запремина, T апсолутна температура, а R — константа датог гаса. Даљим испитивањем утврђено је, да особине, изражене у тој једначини, можемо приписати без ограничења само идеалном гасу, који се не да сабити. За реалне гасове та је једначина замењена сада компликованијом једначином Ван-дер-Ваљса или другима.

При томе првобитна најпростија формула није изгубила своју вредност, и њом се можемо користити за реалне гасове, док температура и притисак не прелазе извесних граница, које се одређују експериментално за сваки гас. Слично овом, и Хуков закон и сви закључци, који из њега проистичу, тачни су без икаквих ограничења само за идеално-еластично тело, досад у природи не нађено. Њихова примена на реална тела, напр. на разне конструктивне материјале, даје стварности одговарајуће резултате, само док напони и деформације не прелазе извесних граница, које се за сваки материјал одређују експериментално.

§ 16. Изотропно-еластично тело.

Коэффициенти еластичности*) не само да су различити за различита тела, већ могу бити различити и за различите тачке једног истог тела, као и за различите правце осовина у једној истој тачки. У огромној већини случајева конструктивни материјали су *хомогени*, т. ј. величине коэффициента за њих не зависе од положаја тачке у телу**. Осим тога, материјали, за које важи у широком границама Хуков закон, у већини случајева су *изотропни****), т. ј. имају исте еластичне особине за све правце повучене из једне тачке, дакле коэффициенти еластичности се не мењају при промени праваца координатних оса, Наша даља испитивања тичу се само *хомогених изотропно-еластичних* тела, зато морамо сад извести зависности, које проистичу из тих особина.

Нека је за један систем координатних оса (x, y, z) зависност између деформација и напона изражена једначинама (36). Окренемо наше осе око координатног почетка у неки други положај x_1, y_1, z_1 . Помоћу углова нових оса са старима можемо на основу једначина (29) представити дилатације у правцу нових оса $\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}$, као функције компоненталних деформација за старе осе $\epsilon_x, \dots, \gamma_x, \dots$. Ако у тим изразима заменимо $\epsilon_x, \dots, \gamma_x, \dots$ из једначина (36), добићемо дилатације $\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}$ у облику функција од компоненталних напона за старе осе, т. ј. $\sigma_x, \dots, \tau_x, \dots$.

Али у *изотропном* телу дилатације $\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}$ за нове осе морају бити везане са компоненталним напонима за те исте осе $\sigma_{x_1}, \dots, \tau_{x_1}, \dots$ помоћу тих *истих* једначина (36). Кад за-

*) Могло би се показати, да су ти коэффициенти везани међусобно са више једначина, и да се на тај начин смањује број независних коэффициента. Ми се не задржавамо на томе, јер се даље бавимо само *изотропним* телима за која се те једначине добију заједно са другима.

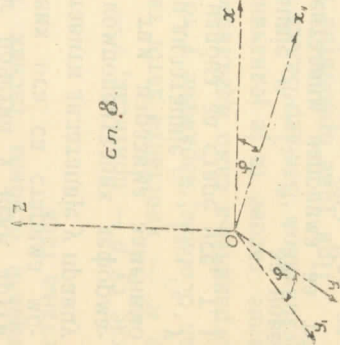
**) Код метала слојеви близу спољне површине, која се непосредно подвргава обради (напр. ваљање или механичка обрада), имају друкчије особине од унутарњих слојева. Због тога примена ниже изведених закључака, напр. на танке гвоздене плоче изискује много опрезности, јер код них дељна тих слојева представља приметни део од целокупне дељна плоче.

***) Код дрва еластичне особине у правцу осовине стабла знатно се разликују од оних у попречним правцима, дакле оно представља пример *анизотропног* тела.

менимо те напоне са њиховим изразима помоћу компоненталних напона за старе осе $\sigma_x, \dots, \tau_x, \dots$, (ове ћемо изразе извести из једначина (9)), добићемо онда опет дилатације $\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}$, изражене помоћу компоненталних напона за старе осе $\sigma_x, \dots, \tau_x, \dots$.

Обадва облика зависности $\epsilon_{x_1}, \epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}$ од $\sigma_x, \dots, \tau_x, \dots$, добијени су независно један од другог, а морају се поклапати, т. ј. коефициенти код $\sigma_x, \dots, \tau_x, \dots$, морају бити међусобом једнаки *независно од величина углова нових осовина са старима*. То ће дати низ зависности између коефицијената еластичности, које изражавају аналитички особину изотропности.

Пређимо сад на извршење наведене шеме решавања задатка. Ако окренемо истовремено све три координатне осе, добићемо сувише компликоване зависности. Зато ћемо испрва окренути осе x и y око осе z за произвољни угао φ (сл. 8), а правац z осе остаће без промене. После можемо окренути наш координатни систем око x , односно око y осе, а све дотичне формуле добићемо цикличном пермутацијом из формула, добијених при првом окретању.



Из једначина (9) имамо пројекције тоталног напона за раван y_1oz са нормалом x_1 :

$$\begin{aligned} \rho_{x_1} \cos \lambda &= \sigma_x \cos \varphi + \tau_z \sin \varphi, \\ \rho_{x_1} \cos \mu &= \sigma_y \sin \varphi + \tau_z \cos \varphi, \\ \rho_{x_1} \cos \nu &= \tau_y \cos \varphi + \tau_x \sin \varphi. \end{aligned}$$

Пројекције тог напона на осе x_1, y_1, z даће три компонентална напона за раван y_1oz :

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= (\sigma_x \cos \varphi + \tau_z \sin \varphi) \cos \varphi + (\sigma_y \sin \varphi + \tau_z \cos \varphi) \sin \varphi + \\ &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_z \sin 2\varphi, \\ \tau_{z_1} &= \tau_{x_1 y_1} = -(\sigma_x \cos \varphi + \tau_z \sin \varphi) \sin \varphi + \\ &+ (\sigma_y \sin \varphi + \tau_z \cos \varphi) \cos \varphi = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_z \cos 2\varphi, \\ \tau_{y_1 z} &= \tau_{x_1 z} = \tau_y \cos \varphi + \tau_x \sin \varphi \end{aligned} \quad (37)$$

На сличан би начин нашли пројекције тоталног напона за раван x_1oz са нормалом y_1 , а то би дало:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - \tau_z \sin 2\varphi \\ \tau_{x_1 z} &= \tau_{yz} = \tau_x \cos \varphi - \tau_y \sin \varphi \end{aligned} \quad (37)$$

Очевидно је, да се шести компонентални напон σ_z при окретању оса x и y неће променити.

Из једначина (29) можемо наћи величине дилатација за окренуте осе, напр.:

$$\epsilon_{x_1} = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \gamma_z \sin 2\varphi$$

Сад морамо према нашој шеми у последњој једначини заменити $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_z$ њиховим изразима (36), а истовремено морамо написати једначину (36) за ϵ_{x_1} и заменити у њој $\sigma_{x_1}, \dots, \tau_{x_1}, \dots$, нађеним изразима (37). Кад учинимо ово, имаћемо:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x_1} &= (A_{xx} \sigma_x + A_{xy} \sigma_y + A_{xz} \sigma_z + B_{xx} \tau_x + B_{xy} \tau_y + B_{xz} \tau_z) \cos^2 \varphi + \\ &+ (A_{yx} \sigma_x + A_{yy} \sigma_y + A_{yz} \sigma_z + B_{yx} \tau_x + B_{yy} \tau_y + B_{yz} \tau_z) \sin^2 \varphi + \\ &+ (C_{zx} \sigma_x + C_{zy} \sigma_y + C_{zz} \sigma_z + D_{zx} \tau_x + D_{zy} \tau_y + D_{zz} \tau_z) \frac{1}{2} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

а с друге стране

$$\begin{aligned} \epsilon_{x_1} &= A_{xx} (\sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_z \sin 2\varphi) + \\ &+ A_{xy} (\sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - \tau_z \sin 2\varphi) + A_{xz} \sigma_z + \\ &+ B_{xx} (\sigma_x \cos \varphi - \tau_y \sin \varphi) + B_{xy} (\tau_y \cos \varphi + \tau_x \sin \varphi) + \\ &+ B_{xz} [\frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_z \cos 2\varphi]. \end{aligned}$$

Кад отворимо заграде и уједначимо коефицијенте код компоненталних напона $\sigma_x, \dots, \tau_x, \dots$, у обадва израза добићемо шест једнакости:

$$\begin{aligned} A_{xx} \cos^2 \varphi + A_{yx} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} C_{zx} \sin 2\varphi &= \\ = A_{xx} \cos^2 \varphi + A_{xy} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} B_{xz} \sin 2\varphi, \\ A_{xy} \cos^2 \varphi + A_{yy} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} C_{zy} \sin 2\varphi &= \\ = A_{xx} \sin^2 \varphi + A_{xy} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} B_{xz} \sin 2\varphi, \\ A_{xz} \cos^2 \varphi + A_{yz} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} C_{zz} \sin 2\varphi &= A_{xz}, \\ B_{xx} \cos^2 \varphi + B_{yx} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zx} \sin 2\varphi &= B_{xx} \cos \varphi + B_{xy} \sin \varphi, \\ B_{xy} \cos^2 \varphi + B_{yy} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zy} \sin 2\varphi &= -B_{xx} \sin \varphi + B_{xy} \cos \varphi, \\ B_{xz} \cos^2 \varphi + B_{yz} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} D_{zz} \sin 2\varphi &= (A_{xx} - A_{xy}) \sin 2\varphi + B_{xz} \cos 2\varphi \end{aligned}$$

Пошто ове једнакости морају постојати при свакој вредности φ , то ће се оне претворити у следеће:

$$\begin{aligned} A_{yx} &= A_{xy}, C_{zx} = -B_{xz}, A_{yy} = A_{xx}, C_{zy} = B_{xz}, A_{xz} = A_{yz}, C_{zz} = 0, \\ B_{xx} &= B_{yy} = D_{zx} = B_{xy} = D_{zy} = 0, B_{xz} = -B_{yz}, \\ &\frac{1}{2} D_{zz} = A_{xx} - A_{xy}. \end{aligned}$$

Ових четрнајест једначина добијени смо при окретању координатног система око z осе. При окретању око x осе добијемо би, очевидно, такође четрнајест једначина, које би се разликовале од горњих узајамном заменом слова x и z :

$$\begin{aligned} A_{yz} &= A_{zy}, C_{xz} = -B_{zx}, A_{yy} = A_{zz}, C_{xy} = B_{zx}, A_{zx} = A_{yz}, C_{xx} = 0, \\ B_{zz} &= B_{yy} = D_{xz} = B_{zy} = D_{xy} = 0, B_{zx} = -B_{yz}, \frac{1}{2} D_{xx} = A_{zz} - A_{zy}, \end{aligned}$$

овде је изостављена једна једначина која улази већ у пређашње
Најзад окретање координатног система око у осе дало би
једначине:

$$C_{yz} = -V_{zy}; \quad C_{yx} = V_{zy}; \quad A_{zy} = A_{xy}; \quad C_{yy} = 0; \quad D_{yz} = D_{yx} = 0;$$

$$\frac{1}{2} D_{yy} = A_{zz} - A_{zx};$$

ту су изостављене седам једначина, које проистичу из предидућих.
Поделимо наше једначине на 4 групе: А, В, С, и D а поч-
нимо решавање са групе В. Из наших једначина имамо:

$$V_{xx} = V_{yy} = V_{zz} = 0; \quad V_{yx} = V_{xy} = 0; \quad V_{yz} = V_{zy} = 0;$$

$$V_{zx} = -V_{yz} = 0; \quad V_{zx} = -V_{yx} = 0,$$

т. ј. свих девет коефицијената В једнаки су нули. За групу С
имамо тада:

$$C_{xx} = C_{yy} = C_{zz} = 0; \quad C_{zx} = C_{zy} = 0; \quad C_{xz} = C_{xy} = 0;$$

$$C_{yz} = C_{yx} = 0;$$

т. ј. свих девет коефицијената С једнаки су нули. Даље за
групу D биће:

$$D_{zx} = D_{zy} = 0; \quad D_{xz} = D_{xy} = 0; \quad D_{yz} = D_{yx} = 0;$$

$$D_{zz} = 2(A_{xx} - A_{xy}); \quad D_{xx} = 2(A_{zz} - A_{zy}); \quad D_{yy} = 2(A_{zz} - A_{zx});$$

Најзад за групу А:

$$A_{xx} = A_{yy} = A_{zz}; \quad A_{yx} = A_{xy}; \quad A_{xz} = A_{yz}; \quad A_{yz} = A_{zy};$$

$$A_{zx} = A_{yx}; \quad A_{zy} = A_{xy};$$

т. ј. сви коефицијенти са различитим индексима су једнаки ме-
ђусобом. Дакле, ако означимо коефицијенте А са истим ин-
дексима са A_1 , а коефицијенте А са различитим индексима са
 A_2 , добићемо

$$D_{xx} = D_{yy} = D_{zz} = 2(A_1 - A_2).$$

Следствено, услов, да је тело изотропно смањено је број
независних коефицијената еластичности са 36 до 2, и то:

$$\varepsilon_x = A_1 \sigma_x + A_2 (\sigma_y + \sigma_z); \quad \gamma_x = 2(A_1 - A_2) \tau_x;$$

$$\varepsilon_y = A_1 \sigma_y + A_2 (\sigma_z + \sigma_x); \quad \gamma_y = 2(A_1 - A_2) \tau_y;$$

$$\varepsilon_z = A_1 \sigma_z + A_2 (\sigma_x + \sigma_y); \quad \gamma_z = 2(A_1 - A_2) \tau_z;$$

коефицијенти A_1 и A_2 су карактеристике еластичних особина
датог изотропног материјала, а њихове величине одређују се
експериментално. У техници се за карактеристике материјала
не узимају непосредно коефицијенти A_1 и A_2 , већ

$$E = \frac{1}{A_1} \quad \text{и} \quad \nu = -\frac{A_2}{A_1};$$

ако уведемо те величине у горње једначине, имаћемо:

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z); \quad 2 \frac{E}{(1+\nu)} \gamma_x = \tau_x;$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z); \quad 2 \frac{E}{(1+\nu)} \gamma_y = \tau_y;$$

$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y); \quad 2 \frac{E}{(1+\nu)} \gamma_z = \tau_z. \quad (38)$$

Величину E називамо *Јунговим** модулом или *модулом
еластичности*. Ако ставимо у нашим једначинама, да су сви
компонентални напони сем σ_x једнаки нули, онда је

$$E\varepsilon_x = \sigma_x,$$

т. ј. модул еластичности је коефицијент пропорционалности
између нормалног напона и дотичне дилатације, када су сви
компонентални напони, сем σ_x , једнаки нули; у следећој глави
видећемо, да је то случај аксиално напрегнутог штапа, када x
оса поклапа се са осовином штапа. Димензија Јунговог модула
је иста, као и напона, т. ј. он се изражава у јединицама силе
на јединицу површине, т. ј. у атмосферама.

Неименовани број ν називамо Пуасоновим***) коефицијентом
и карактерише *скраћење* у правцу y и z оса *услед истезања*
у правцу x осе. У наведеном примеру, када су сви компонен-
тални напони сем σ_x једнаки нули, дилатације у попречним
правцима биће негативне:

$$E\varepsilon_x = E\varepsilon_y = -\nu \sigma_x,$$

а однос њихове апсолутне величине према уздужној дилатацији
биће једнак ν . Одавде је јасно, да ν *не може бити мање од
нуле*, јер би тада истезању у правцу осовине штапа, одговарао
не скраћење, већ продужење у попречним правцима. Ако са-
беремо три прве једначине групе (38) добићемо

$$E(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Чинитељ $(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ у левом делу је запреминска ди-
латација, која мора бити позитивна, ако су сва три нормална
напона позитивна, т. ј. затежућа. Дакле, множитељ $(1 - 2\nu)$
мора бити позитиван, или ν *не може бити веће од 0,5*; ова
гранична вредност одговара идеалној течности.

*) По имену T. Young'a, који га је увео 1807 г.

**) По имену S. D. Poisson'a, који га је увео 1829 г. На основу своје
хипотезе о молекуларним силама нашао је, да је исти за сва изотропна тела
 $\nu = 0,25$. Општи нису потврдили ову величину и за већину материјала
дају ν око 0,30.

Чинитељ

$$\frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

у изразима за смицања у једначинама (38) називамо *модулом клизања* и обележавамо га са G ; очевидно је, да G има исту димензију, као што и E . Три последње једначине групе (38) показују, да ако су за три ортогонална правца смицања једнака нули, то ће и тангентијни напони за те правце бити једнаки нули. Одавде излази, да се у *изотропном шелу правци главних деформација поклапају са правцима главних напона*.

Зависност између величина главних деформација и главних напона добићемо из (38) у облику

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3); E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1); E\varepsilon_3 = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2); \quad (39)$$

производи $E\varepsilon_1, E\varepsilon_2, E\varepsilon_3$ имају исту димензију, као што и напони и често се називају *напорима* у тачки.

§ 17. Сен-Венанови услови за изотропно тело.

У добивеним досад једначинама једне групе, и то (6) и (10), везују спољне силе са напонима; друге, и то (38), напоне са деформацијама, најзад треће, и то (33), деформације међусобно. Напрегнуто стање тела биће одређено, ако будемо знали за сваку његову тачку све компоненталне напоне или све компоненталне деформације. Очигледно је, да ће за нас бити zgodније, ако нашим једначинама дамо такав облик, да у њих улазе само напони или само деформације, т. ј. само шест тражених величина, а не дванајест. Ми ћемо изабрати први начин: изразе за деформације (38) увесћемо у једначине (33).

Тада ће прва од једначина групе (33) изгледати:

$$2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

али при сталним величинама запреминских сила из друге и треће једначине групе (6) излази:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y \partial z} = - \left\{ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x \partial z} \right\}$$

кад ставимо ову вредност у нашу једначину, добићемо:

$$- (1+\nu) \left[\frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x \partial z} \right] - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Кад погледамо сад на прву једначину групе (6), видећемо, да ће при сталним запреминским силама бити:

$$- \left(\frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2},$$

и кад ову вредност ставимо у нашу једначину, онда је:

$$(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \nabla (\sigma_y + \sigma_z) + \nu \nabla \sigma_x = 0^{**}$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nabla \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + (1+\nu) \nabla \sigma_x = 0.$$

Аналого би нашли из друге и треће једначине групе (33):

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^2} - \nabla \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + (1+\nu) \nabla \sigma_y = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nabla \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + (1+\nu) \nabla \sigma_z = 0.$$

Кад саберемо ове три једначине, видимо, да је:

$$\nabla (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0,$$

после чега се прве три једначине групе (33) добити овај облик:

$$\nabla \sigma_x = - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \nabla \sigma_y = - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

$$\nabla \sigma_z = - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (40)$$

где је са θ означен збир нормалних напона $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Сад нам још остаје, да извршимо сличну замену деформација са изразима (37) у четвртој, петој и шестој једначинама групе (33). Четврта једначина даће тада:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = (1+\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right)$$

**) ∇ означава збир других извода по x, y и z : $\nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

или:

$$-\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} \right).$$

Ако узмемо у обзир другу и трећу једначину групе (6) добићемо:

$$-\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial z^2},$$

или

$$\nabla \tau_x = -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} \quad (40).$$

Аналого можемо трансформовати и остале две једначине групе (33).

$$\nabla \tau_y = -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z}, \quad \nabla \tau_z = -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (40)^*.$$

Група (40) замењује групу (33), али важи само за *изотропно-еластично тело* при *сталним* запреминским силама док је група (38) погодна за свако тело при произвољним запреминским силама.

§ 18. Методе за решавање задатака. Сен-Венанов постулат.

Са изналажењем горњих једначина исцрпљени су најважнији односи између величина, које одређују равнотежу еластичног тела. Сад можемо прећи на примену добивених образаца за решавање задатака потребних при пројектовању различитих грађевинских и машинских делова.

Пре свега прегледаћемо наше резултате и одредићемо круг питања, које је могуће решити, и ред самог решавања. Ради тога групираћемо најважније од добивених формула:

Веца између напона и запреминских сила:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + Y = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + Z &= 0; \end{aligned} \right\} (6)$$

веца напона међусобно:

*) Једначине (40) извео је 1892 г. Е. Beltrami.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \sigma_x &= -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \nabla \sigma_y = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad \nabla \sigma_z = -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \\ \nabla \tau_x &= -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z}, \quad \nabla \tau_y = -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x}, \\ \nabla \tau_z &= -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} (40);$$

где $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$;

услови на спољној површини тела:

$$\left. \begin{aligned} p_n \cos \alpha &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta + \tau_y \cos \gamma, \\ p_n \cos \mu &= \sigma_y \cos \beta + \tau_x \cos \gamma + \tau_z \cos \alpha, \\ p_n \cos \nu &= \sigma_z \cos \gamma + \tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta, \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

Веца између напона и деформација:

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_x &= \sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z), \quad E \varepsilon_y = \sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x), \\ E \varepsilon_z &= \sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y), \quad G \gamma_x = \tau_x, \quad G \gamma_y = \tau_y, \\ &G \gamma_z = \tau_z. \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

Веца између деформација и померања тачака:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \dots (24)$$

$$\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots (25)$$

или обратно:

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^x \varepsilon_x dx - \int_0^y \int_0^z \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy dz - \int_0^z \int_0^y \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz dy - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^y \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dz dy + \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^y [(\gamma_y) + (\gamma_z)] dz + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y (\gamma_z) + (\gamma_x) dy, \\ v &= \int_0^y \varepsilon_y dy - \int_0^z \int_0^y \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right) dz dz - \int_0^z \int_0^y \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx dz - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^y \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) dx dz + \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^y [(\gamma_x) + (\gamma_z)] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^z [(\gamma_x) + (\gamma_z)] dz - (\gamma_z) x, \end{aligned} \right\} (35)$$

утицајем којих је штап напрегнут истовремено на затезање (или притисак) савијање и торзију. Он је пронашао зависност компоненталних напона σ_z , τ_x , τ_y (који нису једнаки нули) од редукционих резултаната и редукционих момената тих система сила, али под условом, да су саме силе распоређене по основама штапа по неком закону, који зависи од облика попречног пресека штапа. Због овог услова на први поглед Сен Венаово решење је без користи за техничку примену, јер остварити задати унапред распоред сила по основама немогуће је у пракси. Али следећа разлагања показује, да тај услов има мањег утицаја на могућност примена тог решења у пракси.

Замислимо, да на неки попречни пресек штапа дејствује систем сила, које стоје у равнотежи. Цео низ опита и теориских испитивања појединих случајева показују, да ће тај систем изазвати т. зв. *локалне* напоне, т. ј. напоне, који се појављују само у близини оптерећеног пресека и који се брзо смањују при удаљењу од њега, дакле на извесном растојању од оптерећеног пресека ти се напони могу занемарити. На основу наведених теориских и експерименталних података Сен-Венан је дошао до уверења, да то растојање не прелази попречне димензије штапа. Овај закључак, који досад није доказан у општем облику (тада би био закон) назваћемо *Сен-Венановим постулатом*. На основу њега није тешко уопштити решења добивена по Сен-Венановој методи, и на случај произвољно заданог оптерећења на основама штапа.

Нека нам је основа штапа оптерећена системом сила (A), који је произвољно распоређен по њеној површини. Узећемо систем сила (A') статички еквивалентан систему (A), (т. ј. са истом редукционом резултантом и редукционим моментом), али друкчије распоређен по површини, и то баш онако, како се то тражи ради решења задатка по Сен-Венановој методи. Приложимо сад на оптерећену основу, осим система (A), још два система сила: (A') и (-A'). Систем (A) стоји у равнотежи са са системом (A'), дакле, на основу постулата, њихов утицај изазваће само локалне напоне у штапу, а трећи систем (A') распоређен је по траженом закону. Дакле, по цену допуштања локалних напона близу оптерећеног пресека, можемо произвољни систем сила, који напада основу штапа, заменити дру-

51
гим, статички еквивалентним, али распоређеним онако, како се то тражи за решење задатка.

Одавде је јасно, да закључке, добивене полуобратном методом, можемо применити само на штапове, чије су попречне димензије мале у односу према дужини, јер ће се само у том случају локални напони појавити на незнатном делу целокупне дужине штапа, и то близу оптерећених пресека.

Слична разлагања дозволиће нам даље, да применима закључке, добивене из решења Сен-Венановог проблема, не само на штап са произвољним оптерећењем основа, већ и на штап, који се налази под утицајем ма каквих спољних сила. Ти закључци имају, дакле непосредну примену у пракси. Решавање Сен Венаовог проблема у најопштијем случају, када је штап напрегнут истовремено на затезање, одн. притисак, савијање и торзију, доводи нас до доста компликованих разлагања. Због тога, да би разјаснили детаље примене полуобратне методе, ми ћемо почети са најпростијих питања о затезању, одн. притиску, и торзији штапова.

ако под Z будемо подразумевали, на пр., силу теже, онда ћемо ставити

$$Z = \rho g,$$

где је ρ густина материјала штапа, а g убрзање силе теже, дакле је

$$e = -\rho g.$$

а z оса има при томе смер на доле.

Пређимо сад на једначине (10), које везују напоне са површинским силама. За бочну површину је $\gamma = \pi/2$, онда ће те једначине дати

$$p \cos \lambda = 0; p \cos \mu = 0; p \cos \nu = 0;$$

т. ј. $p = 0$, дакле притиска на бочну површину нема. За основе штапа је $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi$, дакле је:

$$p \cos \lambda = 0; p \cos \mu = 0; p \cos \nu = \pm \sigma_z,$$

т. ј. површинске силе на основама паралелне су z оси, а раздељене су по површини основа по истом закону, као и напон σ_z .

Да видимо на шта ће се редуковати те спољне силе. Узмимо тежиште површине горње основе штапа за почетак, а за ox и oy главне централне осе инерције те површине. Силе, које дејствују на доњу основу, а које су паралелне oz , можемо редуковати на силу P_z , која напада тежиште површине те основе и на два спрега M_x и M_y :

$$P_z = \iint_F \sigma_z dF; M_x = -\iint_F y \sigma_z dF; M_y = -\iint_F x \sigma_z dF,$$

где је dF елементар површине основе, а интеграли су узети по целој тој површини. У те интеграле морамо, да уведемо најен израз за σ_z , стављајући у њему $z = l$, где је l дужина штапа. Ако узмемо при томе у обзир, да су услед избора координатног почетка и праваца оса:

$$\iint_F x dF = 0; \iint_F y dF = 0; \iint_F x y dF = 0,$$

пошто представљају статичке моменте и центрифугални момент површине F за њене главне централне осе, а

$$\iint_F y^2 dF = J_x, \iint_F x^2 dF = J_y,$$

т. ј. главни централни моменти инерције те површине, добићемо:

$$P_z = aF - \rho g l F,$$

Глава IV.

Простије врсте напрезања штапова.

§ 19. Аксијално напрезање.

Као најпростији пример полуобратне методе узећемо следећи задатак: у свима тачкама штапа, изводнице којег су паралелне z оси, (сл. 9.) пет компоненталних напона $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ једнаки су нули, само σ_z није нула, а траже се услови под којима је то напрегнуто стање могуће.

Једначине (6) даће, при

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0;$$

$$X = 0; Y = 0; Z = -\frac{d\sigma_z}{dz};$$

дакле запреминске силе су паралелне осовини штапа. Једначине (40) дају:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = 0; \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0; \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0;$$

т. ј. σ_z мора бити линеарна функција од координата:

$$\sigma_z = a + bx + cy + ez,$$

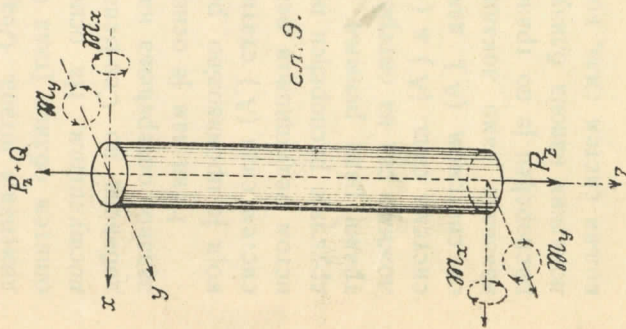
где су a, b, c, e произвољне константе.

Аки пошто је:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = -Z,$$

према томе:

$$e = -Z;$$



сл. 9.

или

$$a = \frac{P_z}{F} + \rho g l,$$

исто тако:

$$\mathfrak{M}_x = -c J_x; \mathfrak{M}_y = -b J_y;$$

или

$$b = -\frac{\mathfrak{M}_y}{J_y}; c = -\frac{\mathfrak{M}_x}{J_x};$$

дакле

$$\sigma_z = \frac{P_z}{F} + \frac{Q}{F} \left(1 - \frac{z}{l}\right) - \frac{\mathfrak{M}_y}{J_y} x - \frac{\mathfrak{M}_x}{J_x} y \dots (41)$$

где је $Q = \rho g l F$ тежина штапа. Аналого редуцираће се силе, које дејствују на горњу основу штапа, на резултанту $-(P_z + Q)$, која напада тежиште те основе и на спрегове $-\mathfrak{M}_x$ и $-\mathfrak{M}_y$.

У изразу (41) први члан представља напон од аксијалне силе P_z , други од *сопствене тежине* штапа, трећи од *савијана спрегом* \mathfrak{M}_y , који дејствује у равни xz и четврти од *савијана спрегом* \mathfrak{M}_x у равни yz . Резултат заједничког утицаја тих фактора добили смо у облику алгебарског збира утицаја сваког од тих фактора посебице, т. ј. у датом случају важи *принцип суперпозиције*. Услед тога можемо испитати засебно сваки од ових четири сабирака, што ће свакако упростити наша проучавања.

Починмо са *заштећућим* силама P_z и Q . Напон од аксијалне силе P_z , нашли смо, да је:

$$(\sigma_z)' = \frac{P_z}{F}, \dots \dots \dots (42)$$

т. ј. он има исту величину у свима тачкама штапа. Напон од сопствене тежине Q је:

$$(\sigma_z)'' = \frac{Q}{F} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \dots \dots \dots (43)$$

т. ј. зависи само од z , дакле је у свима тачкама једног попречног пресека штапа исти*) и пропорционалан је одстојању тог пресека од доњег краја штапа, а једнак нули на том крају.

Кад имамо напон σ_z , а знамо да су остали компонентални напони једнаки нули, напрегнуто стање штапа је потпуно одре-

*) У елементарним се уџбеницима ово уводи као *хипотеза*, а на тој бази изводе се обрасци (42) и (43), које смо нашли без те предпоставке.

ђено. Пошто су тангенцијални напони за наше осе једнаки нули, то су те осе правци главних напона и деформација, т. ј.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \frac{P_z}{F} + \frac{Q}{F} \left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

Највећу вредност σ_3 добије у тачкама горње основе, где је једнак $\frac{P_z + Q}{F}$. Површина нормалних напона прелази у две равни, паралелне основама и за сваки правац кроз дагу тачку нормални напон има исти знак, као и σ_3 . Само за правце, паралелне основама, нормални су напони једнаки нули. Највећи су тангенцијални напони у свакој тачки:

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \pm \frac{1}{2} \sigma_3 = \pm \frac{1}{2} \left[\frac{P_z}{F} + \frac{Q}{F} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \right]$$

и дејствују у равнима, које обавијају кружну кулу са вертикалном осовином и правим углом у темену, т. ј. у равнима нагнутим под 45° према вертикали. Највећи тангенцијални напон биће у тачкама горње основе: $\pm \frac{1}{2} \frac{P_z + Q}{F}$.

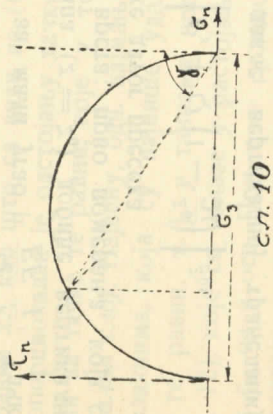
Ако се обратимо графичкој представи тог напрегнуто стања, онда (сл. 10), видимо, да се у нашем случају први унутарњи круг ($\sigma_2 - \sigma_1$) претвара у тачку, а други унутарњи круг ($\sigma_3 - \sigma_2$) да се поклапа са спољњим ($\sigma_3 - \sigma_1$), дакле цело наше поље своди се у том случају на линију, и то на спољни круг. Оса τ_{11} биће тангента на тај круг. Из дијаграма се види, да у том случају σ_n и τ_n зависе само од угла нормале γ , угао α не утиче на њихову величину. Другим речима, у свима равнима, које су подједнако нагнуте према вертикали, напони имају исту величину.

Компоненталне деформације налазимо из једначина (38):

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0;$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E} = -\mu \frac{1}{EF} \left[P_z + Q \left(1 - \frac{z}{l}\right) \right];$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{EF} \left[P_z + Q \left(1 - \frac{z}{l}\right) \right];$$



а померања тачака из једначина (35):

$$u = -\frac{\nu}{EF} \left[P_z + Q \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right] x;$$

$$v = -\frac{\nu}{EF} \left[P_z + Q \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right] y;$$

$$w = \frac{1}{EF} \left[P_z + Q \left(1 - \frac{z}{2l} \right) \right] z - \frac{1}{2} \frac{\nu}{EF} l^2$$

где је са $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ означено одстојање тачке од осовине штапа.

Из добијених израза за померање видимо, да ће тачке осовине штапа ($x = 0, y = 0$) добити само вертикална померања w , т. ј. осовина остаће права и вертикална у деформираним стању. Тачке уздужног влакна, које је се налазило у растојању r од осовине, добиће такође и хоризонтална померања:

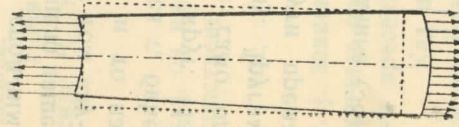
$$\sqrt{u^2 + v^2} = -\frac{\nu}{EF} \left(P_z + Q - Q \frac{z}{l} \right) r;$$

ова се састоје из три члана, од којих су прва два иста за све тачке влакна, према томе представљају хоризонталну трансляцију тог влакна; трећи члан пропорционалан је z , т. ј. он представља окретање тог влакна за мали угао $\frac{Q}{EF} \frac{r}{l}$. Тачке попречног равног пресека штапа ($z = z_0$) добиће вертикална померања двеју врста: прво померања, која су иста за све тачке датог пресека

$$\frac{1}{EF} \left[P_z + Q \left(1 - \frac{z_0}{2l} \right) \right] z_0,$$

која одговарају дакле, вертикалној трансляцији тог пресека, и, друго, померања пропорционална квадрату одстојања тачке од осовине штапа; $-\frac{1}{2} \frac{\nu}{EF} \frac{Q}{l} r^2$, која ће претворити тај пресек у ротациони параболоид (сл. 11).

У нашим су изразима, чланови пропорционални сопственој тежини Q , обично мале величине према члановима, пропорционалним аксијалној сили P_z . Због тога се они обично занемарују, сем случајева врло дугачких штапова или малих допуштених напона.



сл. 11.

Сен-Венанова полуобратна метода дала је нама могућност испитати свестрано напрегнуто стање аксијално напрегнутог штапа, мада добијене формуле одговарају распореду затезућих, одн. притискујућих, сила по површинама основа, по истом закону, по којем се распростире σ_z , т. ј. у датом случају је-днолико. Али, као што смо већ видели, занемарујући локалне напоне, које се појављују око основа штапа, можемо применити ове формуле и у случају оптерећења произвољно распоређеног по основама.

§ 20. Чисто савијање.

Обратимо се сад на два последња сабирка у изразу (41), т. ј. на

$$(\sigma_z)''' = -\frac{M_y}{J_y} x; \quad (\sigma_z)'' = -\frac{M_x}{J_x} y \dots \dots (44)$$

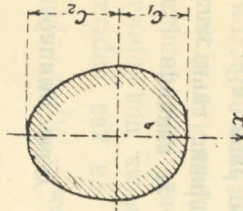
Као што смо видели, то су напони услед савијања спреговима M_y и $-M_x$, M_x и $-M_y$, који дејствују на основе штапа. Напрегнуто стање у штапу услед савијања спреговима зове се *чисто савијање*.

Напон $(\sigma_z)''$ услед спрегова M_y и $-M_x$, који дејствују у равни xz , као што са види из (44), зависи само од x , и то пропорционалан је одстојању тачке од yz равни*) и једнак је нули за тачке те равни, које у том случају представља *неу-шрални слој*. Највећу, одн. најмању, вредност тај напон добије у влакнима, која су највише удаљена од те равни, т. ј. у тачкама пресека (сл. 12), које се налазе у растојању c_1 , одн. c_2 , од yz равни. При $x = c_1$ напон је негативан, дакле, притискујући, а при $x = c_2$ је позитиван, или затезући.

Ако је, напр., $c_2 > c_1$, онда ће нај-већи, по апсолутној величине, напон бити у тачкама $x = -c_2$, и то

$$(\sigma_z)''' = \frac{M_y}{W_y},$$

*) У многим елементарним уџбеницима то се предпоставља а priori (т. зв. Navier' ова хипотеза) и из те се предпоставке изводи образац (44) за $(\sigma_z)'''$. Ми ћемо видети даље, да је та хипотеза тачна и у другим случајевима савијања штапова.



сл. 12.

где је са W_y означено J_y подељено са ϵ_z , т. ј. са одстојањем највише удаљеног влакна од неутралне равни. Та се величина зове *опшорним моментом* пресека штапа при савијању у xz равни: њена је димензија дужина на трећи степен, обично кубни сантметри.

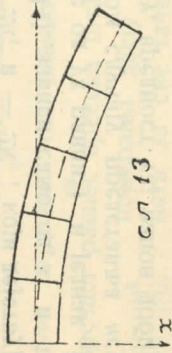
Смицања су у датом случају, очевидно, једнака нули, а дилатације су:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = \nu \frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} x; \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} x.$$

После тога можемо из једначина (35) наћи померања тачака: $u = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} [\nu(x^2 - y^2) + z^2]; \quad v = \nu \frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} xy; \quad w = -\frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} xz.$

Из тих израза види се, да ће тачке неутралног слоја ($x = 0$) добити само вертикална померања $\frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} (-\nu y^2 + z^2)$, која га претварају у површину другог реда. Осовина штапа ($x = d, y = 0$) прелази у криву другог реда (сл. 13), т. зв. *еластичну линију*:

$$u = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} z^2 \dots (45)$$



Ако у општем обрасцу за кривину:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 u_0}{dz^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{du_0}{dz} \right)^2}^{3/2}$$

одбацимо малу величину другог реда $\left(\frac{du_0}{dz} \right)^2$, добићемо

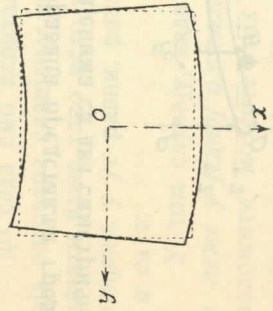
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 u_0}{dz^2} = \frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} \dots (46)$$

т. ј. кривина те линије је стална, дакле при чистом савијању еластична линија је кружни лук.

За тачке попречног пресека ($z = z_0$) померања управна на тај пресек биће $-\frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} z_0 x$, т. ј. пресек *остаће раван и окренуће се око у осе** за угао $\frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} z_0$ који је пропорционалан

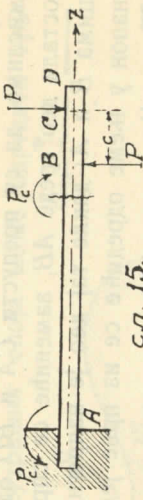
*) Тај се закључак често уводи а ригор под именом *Bernoulli* ове хипотезе у место горе споменуте Navier'ове хипотезе. Видећемо даље, да ова хипотеза није оправдана за друге случајеве савијања.

одстојању пресека од основе штапа. Осим тога тачке пресека добиће померања и у његовој равни, услед којих ће се променити његов облик. Напр., у случају правоугаоног пресека (сл. 14) са ширином b и висином h , његове ће бочне стране ($y = \pm \frac{1}{2} b$) остати праве, али нагнуће се за угао $\frac{1}{2} \nu \frac{\mathcal{M}_y}{E J_y} b$, међутим доња и горња основа ($x = \pm \frac{1}{2} h$) претвара се у криве са конвексном страном окренутом доле.



Најпростији пример примене наших образаца представља конзола (сл. 15) оптерећена двама силама P и $-P$ исте величине, али супротном смера, у пресецима B и C близу слободног краја. Ако посматрамо само део AB конзоле и замислимо, да је део BD одсечен, онда утицај одсеченог дела на део AB можемо заменити, као увек,

силом и спрегом, који ће дејствовати на пресек B у датом случају сила ће бити једнака нули, дакле утицај одсеченог дела на осталу конзолу биће представљен спрегом, који дејствује у xz равни са моментом $\mathcal{M}_y = P \cdot c$, где је c



сл. 15.

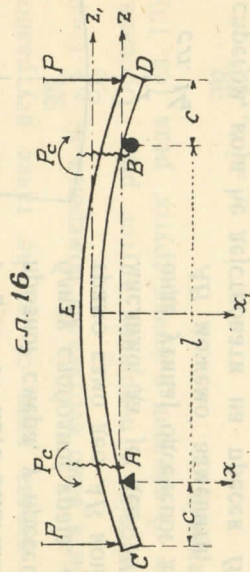
растојање између тета, а отпор на левом крају биће спрег са моментом $-\mathcal{M}_y = -P \cdot c$.

На тај начин, део AB конзоле оптерећен са два спрега $\pm \mathcal{M}_y = \pm P \cdot c$, т. ј. овај случај одговара условима, под којима смо добили (44). Разлика је у томе, да нама овде није познат закон, по којом су распоређени силе по пресецима A и B , док према решавању задатка оне морају бити распоређени по истом закону, као и напони $(\sigma_z)''$, т. ј. морају бити у свакој тачки пропорционалне одстојању њеном од неутралног слоја. Аки ако *занемаримо локалне напоне у близини пресека A и B* , онда можемо на део конзоле AB применити образац (44).

Једначину еластичне линије (45) добили смо из једначина (35), а при извођењу тих једначина (§ 14) везали смо коор-

динатни систем са телом на извесан начин. Дакле, морамо ви-
дети, пре него што применимо једначину (45) на наш пример,
да ли та веза стварно постоји. Ми смо предпоставили (§ 14),
да је почетак координата везан за тачку тела; затим, да се тачка
тела, која је се налазила на x оси у растојању dx од почетка,
може померати само у правцу x осе; најзад, да се тачка која
је била на u оси у растојању du од почетка, може померати
само у xu равни. Ови услови тачно одговарају случају конзоле,
дакле за дат пример може се користити образац (40), ставља-
јући у њему $\mathfrak{M}_y = P.c$.

Други пример примене наших образаца представља греда
са прудистима (сл. 16), оптерећена крајевима са два симетрична



терета P . Отпори ослонаца A и B су једнаки $-P$; Ако за-
мислимо, да су прудисти CA и BD одсечени, њихов утицај на
остали део греде AB , замениће се спреговима $\pm P.c$ у пресе-
цима B и A ; дакле тај део је напрегнут на чисто савијање и
напон у њему одредиће се из прве једначине (44) после замене
 \mathfrak{M}_y са $P.c$.

Средњи пресек наше греде E , услед симетрије оптерећења,
налази се под истим условима, као што укљештени крај кон-
золе у прошлом примеру. Зато би могли непосредно употре-
бити образац (45) и у датом случају, али тада би морали
узети почетак координата у тежишту пресека E . Ако означимо
те осе са x_1 и z_1 , а дотичну ординату еластичне линије са
 u_1^0 , онда је:

$$u_1^0 = \frac{1}{2} \frac{P.c}{EJ_y} z_1^2.$$

Највеће ординате (у границама AB) биле би у тачкама A и B :

$$(u_1^0)_A = (u_1^0)_B = \frac{1}{8} \frac{P.c}{EJ_y} l^2.$$

Ако узмемо почетак координата у тачки A , то морамо у овој
једначини заменити z_1 са $(z - \frac{1}{2}l)$ и u_1^0 са $u^0 + \frac{1}{8} \frac{P.c}{EJ_y} l^2$,
дакле имаћемо:

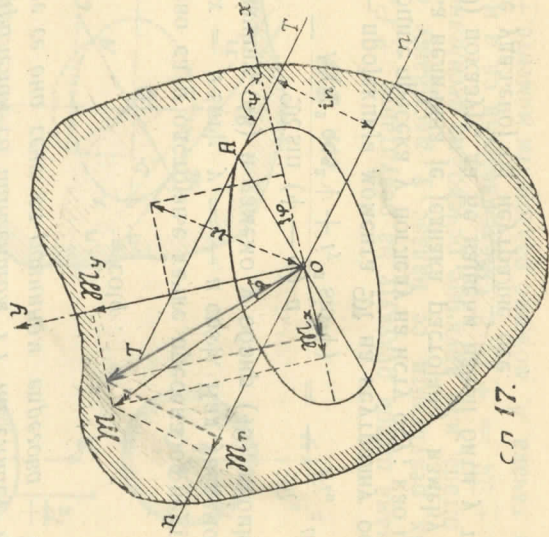
$$u^0 = -\frac{1}{2} \frac{P.c}{EJ_y} (l - z) z.$$

Образац (46) можемо применити на оба примера без икаквих
промена, пошто кривина не зависи од положаја координат-
ног почетка.

До сада смо испитали детаљно прву од једначина (44),
која одговара савијању услед спрегова \mathfrak{M}_y . Сви добивени ре-
зултати важе тако исто и за другу од једначина (44), т. ј. за
савијање у yz равни, разлика би била само у замени x са y
и y са x .

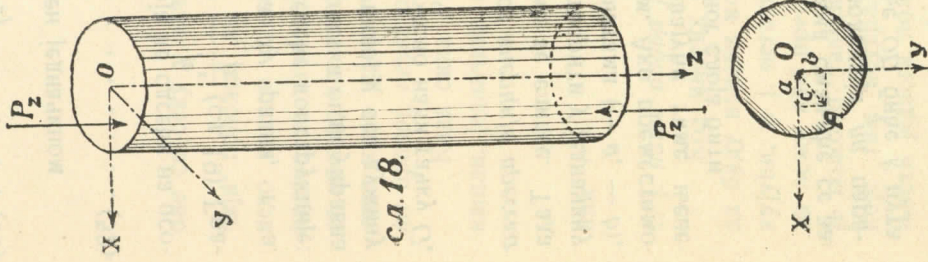
У том случају, када спрегови $\pm \mathfrak{M}$, које савијају штап,
не леже у једној од његових главних равни инерције, морамо
разложити моменте тих спрегова на моменте \mathfrak{M}_x и \mathfrak{M}_y у
правцу главних оса. После тога треба наћи посебице напоне и
померања за савијање у равни xz спрегом \mathfrak{M}_y и у равни yz
спрегом \mathfrak{M}_x . Добивене величине сабирају се алгебарски, и
тада остаје само наћи тачку, у којој ће σ_z бити највеће.

Када је за дати пресек штапа конструисана елипса инер-
ције, онда се положај неутралног слоја може одредити гра-

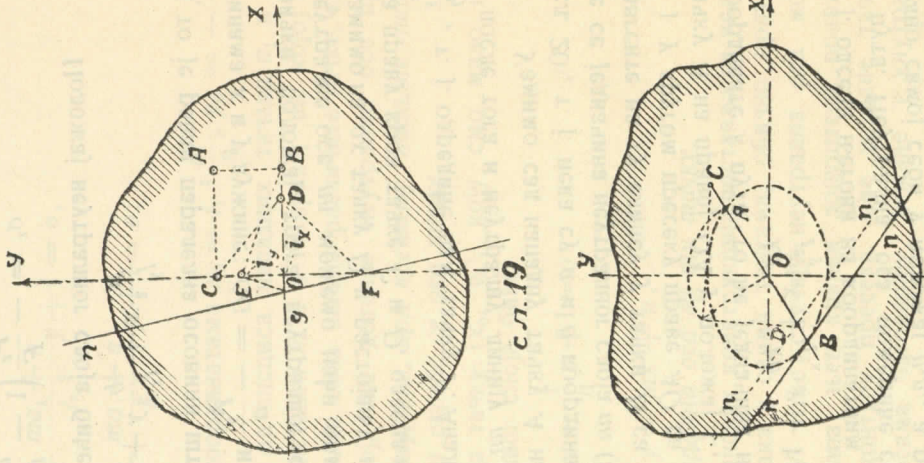


§ 21. Ексцентричан притисак.

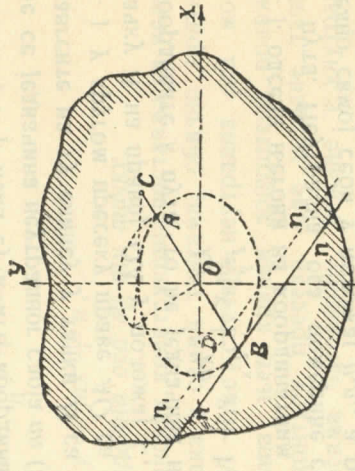
Ми смо проучили посебнице напоне од аксијалних сила $\pm P_z$, сопствене тежине штапа Q и момената $\pm M_x$ и $\pm M_y$. Сад можемо прећи на општи случај, када се површинске силе



сл. 18.



сл. 19.



сл. 20.

на основама штапа редукују на резултанте $\pm P_z$, али нападне тачке тих резултанте се налазе у растојању c (сл. 18) од осовине штапа, или друкчије речено, на аксијалне силе $\pm P_z$ и моменте $\pm M = \pm P_z c$. Обележавајући са a и b координате нападаних тачака A , можемо разложити моменте $\pm M = \pm P_z c$

фички (сл. 17). Ако раван спрегова OA затвара угао φ са једном од централних главних оса пресека ox , онда су компоненте момената $\pm M$ паралелне координатним осама:

$$\pm M_x = \pm M \sin \varphi, \quad \pm M_y = \pm M \cos \varphi;$$

дакле из двеју једначина (44) имамо

$$\sigma_z = -\frac{M}{F} \left(\frac{\cos \varphi}{i_y^2} x + \frac{\sin \varphi}{i_x^2} y \right) \dots \dots \dots (48)$$

где су i_x и i_y главни радиуси инерције пресека. Одавде налазимо једначину неутралног слоја

$$\frac{\cos \varphi}{i_y^2} x + \frac{\sin \varphi}{i_x^2} y = 0.$$

Он затвара са x осом угао ψ , који се одређује из односа:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{i_x^2}{i_y^2} \cot \varphi \dots \dots \dots (49)$$

Из једначине елипсе инерције

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1$$

видимо, да тангента на ту елипсу у тачки (x, y) затвара са x осом угао, чији је тангенс једнак

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \frac{i_x^2}{i_y^2},$$

дакле праг mn неутралног слоја на равни xy (т. зв. неутрална оса) биће паралелан са тангентом TT на елипсу инерције у тачки A , где се она сече са равнином спрегова $\pm M$, јер је у тој тачки

$$\frac{x}{y} = \cot \varphi.$$

Означено са u одстојање тачке пресека од неутралне осе, тако да су $x = u \sin \psi$, $y = -u \cos \psi$. Кад уведемо ове вредности у једначину (48) и узмемо у обзир (49), добићемо

$$\sigma_z = -\frac{M \sin(\psi - \varphi)}{F(i_x^2 \cos^2 \psi + i_y^2 \sin^2 \psi)} = -\frac{M_n}{F i_n^2} u \dots \dots (50)$$

где је M_n — пројекција момента M на неутралну осу, а i_n је радијус инерције пресека у погледу на исту осу; као што знамо, ово последња величина је једнака растојању између TT и nn . Образац (50) показује, да ће највећи напон бити у тачки пресека највише удаљеној од неутралне осе.

на два: $+ \mathcal{M}_y = + P_z a$ и $+ \mathcal{M}_x = + P_z b$. Ако занемаримо сопствену тежину штапа, онда из једначина (41) добијемо за случај *пришискујућих* сила P_z :

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_y = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0 \\ \alpha_z &= -\frac{P_z}{F} \left(1 - \frac{ax}{i_y^2} - \frac{by}{i_x^2} \right) \dots \dots \dots (51) \end{aligned}$$

Положај неутралног слоја биће одређен једначином

$$\frac{a}{i_y^2} x + \frac{b}{i_x^2} y + 1 = 0; \dots \dots \dots (52)$$

а то је раван паралелна осовини штапа, која ће одсећи на осовинама x и y дужине: $OG = -\frac{i_y^2}{a}$ и $OF = -\frac{i_x^2}{b}$ (сл. 19). Графички положај трага неутралног слоја на xu равни, т. з. неутралне осе nl можемо наћи помоћу следеће конструкције: узмимо на ox тачку D у растојању i_x од почетка онда управна на праву кроз тачке C и D , одсеца на негативној u оси дужину $\frac{i_y^2}{b}$, т. ј. одредиће нам тачку F . Аналого можемо наћи тачку G , а после тога и неутралну линију nl .

Узмимо сад нападну тачку A на елипси *инерције пресека* (сл. 20), т. ј. нека су a и b координате тачке те елипсе. Тада ће се једначина неутралног слоја nl (52) претворити у једначину тангенте на ту елипсу у тачки B са координатама $(-a, -b)$, т. ј. у другом пресеку праве AO са елипсом. Ако преместимо тачку A на правој OA у положај C , повећавајући тиме њене координате k пута, то ће једначина неутралног слоја бити

$$\frac{ka}{i_y^2} x + \frac{kb}{i_x^2} y + 1 = 0,$$

т. ј. одсеци његови на координатним осовинама смањиће се за k пута. Неутрална оса помериће се из положаја nl паралелно самој себи у положај nl_1 , а растојање OD биће k пута мање од растојања OB , т. ј.

$$k = \frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OD} \dots \dots \dots (53);$$

на овој пропорционалности оснива се графичко изналажење положаја тачке D , показано на сл. 20.

Пошто смо одредили померање неутралне линије при кретању нападне тачке силе по правој, која пролази кроз почетак

координата, да пређимо на општији случај. Узмимо две тачке са апсцисама a_1 и a_2 , на правој $y = mx + n$ као нападне тачке сила и нађимо тачку у којој се секу дотичне неутралне линије. Заменом у једначини (52) a и b са a_1 и $ma_1 + n$, односно са a_2 и $ma_2 + n$, добићемо две једначине неутралних линија:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{i_y^2} x + \frac{ma_1 + n}{i_x^2} y + 1 &= 0, \\ \frac{a_2}{i_y^2} x + \frac{ma_2 + n}{i_x^2} y + 1 &= 0; \end{aligned}$$

оне се секу у тачки са координатама $x_0 = i_y^2 \frac{m}{n}, y_0 = -\frac{i_x^2}{n}$. чиији положај не зависи од апсциса нападних тачака a_1 и a_2 , него зависи само од константи m и n те праве, на којој се налазе те тачке. Дакле, када сила напада различите тачке, које се налазе на истој правој, све дотичне неутралне осе пролазе кроз једну исту тачку, или, *при кретању нападне тачке на правој, неутрална оса окрете се око тачке.*

Када сила P_z напада тачку (x_0, y_0) , коју смо мало пре нашли, једначина неутралног слоја биће

$$\frac{m}{n} x + \frac{1}{n} y + 1 = 0$$

или

$$y = mx + n,$$

т. ј. наша права је неутрална оса за ту тачку.

Код многих грађевинских конструкција поставља се услов, да буду напони истог знака у свима тачкама, обично притискујући, т. ј. негативни. У томе случају неутрална оса мора да лежи ван пресека штапа; њен крајњи допуштени положај је положај тангенте на контуру пресека. Све нападне тачке, које тим неутралним осама одговарају, лежаће у унутрашњости једнога поља, које зовемо *језгром* даог пресека. Да би нашли контуру језгра морамо пре свега да конструишемо за дати пресек централну елипсу инерције, а затим да нађемо нападне тачке за све неутралне осе, које додирују контуру пресека; те нападне тачке образују нам контуру језгра.

На пр. (сл. 21) за правоугаони пресек радијуси лењивости биће:

$$i_x^2 = \frac{1}{12} h^2, \quad i_y^2 = \frac{1}{12} b^2.$$

Неутралној оси AB одговара нападна тачка E у растојању k_1 од тежишта, које ће на основу једн. (53) бити:

$$k_1 = \frac{i_x^2}{\frac{1}{2}k} = \frac{1}{6}h;$$

симетрично се налази нападна тачка F , за неутралну осу CD . На сличан начин за неутралне осе BC и AD наћи нападне тачке G и H на x осовини у растојању $k_2 = \frac{1}{6}b$ од тежишта. За све неутралне осе, које пролазе кроз теме A , додичне нападне тачке морају се налазити на правој EH ; неутралним осама, које пролазе кроз B одговарају тачке праве GE и т. д. На тај начин добићемо језгро у облику ромба са дијагоналама $\frac{1}{3}h$ и $\frac{1}{3}b$.

За кружни пресек полупречника R биће $i_x^2 = i_y^2 = \frac{1}{4}R^2$, а језгро је круг са полупречником

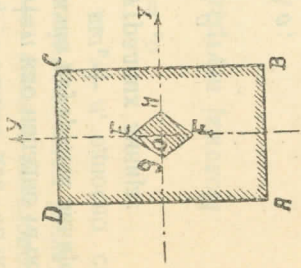
$$k = \frac{\frac{1}{4}R^2}{R} = \frac{1}{4}R,$$

за кружни прстен са спољњим полупречником R и унутарњим r , биће језгро круг са полупречником

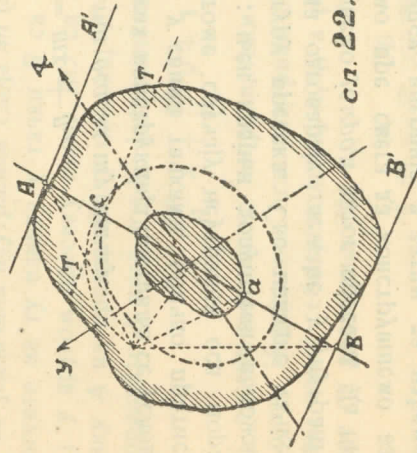
$$k = \frac{\frac{1}{4}(R^2 + r^2)}{R} = \frac{1}{4}R \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)$$

У општем случају произвольно задатог пресека (сл. 22), морамо повући произволно зрак AB и тангенту TT на елипсу инерције у тачки C , где тај зрак сече елипсу, а затим, две тангенте AA' и BB' на контуру пресека паралелно тангенту TT . Неутралној линији AA' одговара на зраку AB нападна

тачка a у растојању $Oa = \frac{OC^2}{OA}$ од тежишта, а неутралној ли-



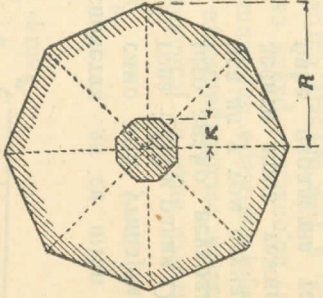
сл. 21.



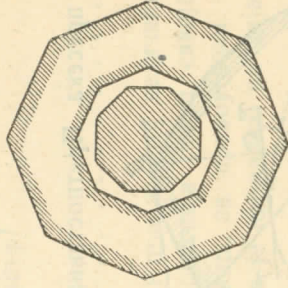
сл. 22.

нији BB' нападна тачка b на истом зраку у растојању $Oa = \frac{OC^2}{OB}$. Обе ове тачке можемо наћи графички (види сл. 22). Оним нападним тачкама, које леже на зраку AB између a и b одговарају неутралне линије паралелне TT , које леже ван пресека. На тај начин добијамо на сваком зраку, повученом кроз тежиште од по две тачке, а кад спојимо све те тачке добићемо контуру језгра.

Ако је пресек многоугаоник, то ће и његово језгро бити многоугаоник, јер ће сваком темену пресека, око којег се може окретати неутрална линија, одговарати страна језгра, на којој се при томе креће нападна тачка силе. На пр., за осмоугаони пресек (сл. 23) са радијусом описаног круга R , језгро је осмоугаоник са радијусом уписаног круга $k = 0,226 R$; за шупљи осмоугаоник са радијусима описаних кругова R и r (сл. 24)



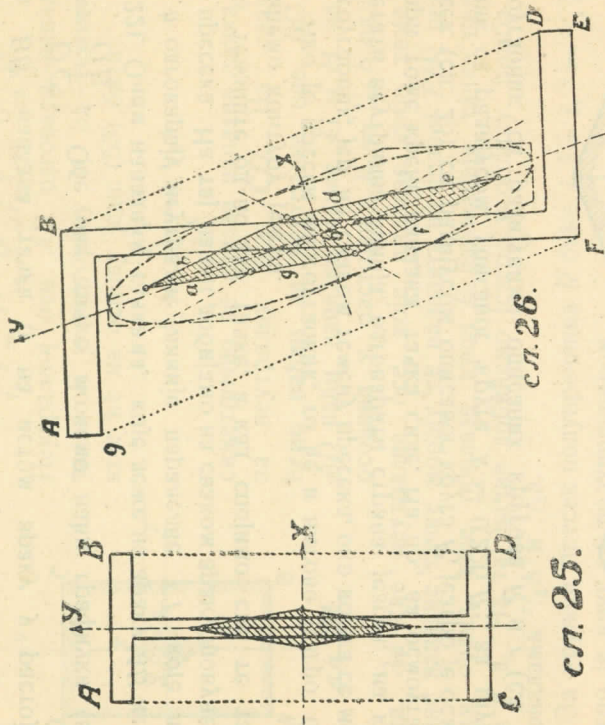
сл. 23.



сл. 24.

језгро ће бити такође осмоугаоник са радијусом уписаног круга $k = 0,226 R \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)$. За \mathbf{I} пресек (сл. 25) језгро је ромб, пошто се неутралне линије могу окретати само око 4 његових темена A, B, C, D . Али за \mathbf{I} пресек (сл. 26) језгро је шестоугаоник, чије стране одговарају 6 теменима A, B, C, D, E, F , око којих се може окретати неутрална линија, а да не сече при томе контуру пресека.

Када је за дати пресек конструисана централна елипса инерције и језгро (сл. 27), онда је сасвим просто одредити највећи напон σ_z од силе P_z , која надада ма какву, произволно задату



сл. 25.

сл. 26.

тачку пресека. Препоставимо испочетка, да се штап савија само под утицајем спрегова $\pm M$ у равни OA . Као што знамо, неутрална ће оса nn у том случају пролазити кроз тежиште, а биће паралелна тангенти TT на елипсу инерције, повученој у оној тачки, где та елипса сече траг OA равнине савијања. Највећи напон одредиће се по једначини (50):

$$\sigma_z = - \frac{M \sin \varphi}{F i_n^2} e,$$

сл. 27.

где $e = OD'$ представља одстојање највише удаљене тачке пресека од неутралне осе, а φ је угао те осе са OA . Радијус i_n представљен је дужином OC' , дакле из једначине (53) следеће:

$$\left(\frac{i_n}{\sin \varphi} \right)^2 = OC'^2 = \overline{OD} \cdot \overline{OE} = \frac{e}{\sin \varphi} k,$$

или:

$$\frac{e \sin \varphi}{i_n^2} = \frac{1}{k},$$

дакле:

$$\sigma_z = - \frac{M}{Fk}.$$

Ако место савијања спрегива $\pm M$ имамо притискујућу силу у тачки A , у растојању s од тежишта, то ћемо према једн. (50) требати да заменимо M са P_s и да додамо напон од аксијалног притиска. Тада добијамо:

$$\sigma_z = - \frac{P_z}{F} \left(1 + \frac{c}{k} \right) \dots \dots \dots (54)$$

Неутрална оса неће више пролазити кроз тежиште пресека, већ ће се померати за растојање a у положај nn' , који се према једначини (53) одређује из односа

$$\frac{a}{\sin \varphi} c = \left(\frac{i_n}{\sin \varphi} \right)^2$$

или:

$$a = \frac{ek}{c} \dots \dots \dots (55)$$

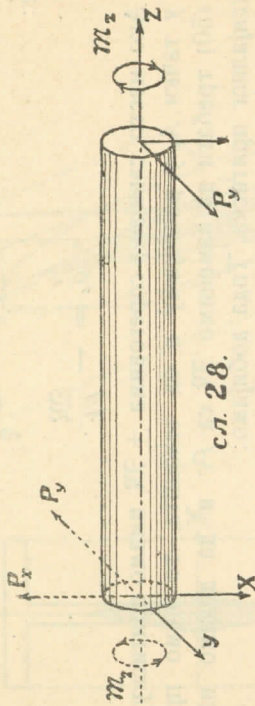
Као што се види из једначине (54) при задајој величини силе P_z и њеног ексцентриситета c , најопаснија раван савијања је она, којој одговара минимум k . Напр., за правоугаони пресек (сл. 21) најопаснија раван савијања је нормална на дијагонали пресека, а том случају одговара

$$k_{\min} = \frac{bh}{6(b^2 + h^2)}.$$

§ 22. Торзија штапова. Осовине кружног и прстенастог пресека.

Закључци у §§ 19-21 добивени су из решења Сен-Венановог проблема и то за најпростији случај напрегнутог стања, када су сви компонентални напони, осим σ_z , једнаки нули; да пређемо сад на случај напрегнутог стања које је у неколико теже. Замислимо себи штап (сл. 28), чија се осовина поклапа са Oz , а Ox и Oy да су главне централне осе основе штапа. Контура пресека је затворена крива линија, за сада још про-

извољна. Ми ћемо тражити услове, под којима су у свакој тачки четири компонентална напона и то: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и τ_x, τ_y, τ_z једнаки нули.



сл. 28.

Кад уведемо те вредности у једначине (6) и занемаримо утицај запреминских сила, добићемо:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 0$$

прве две једначине показују, да ће τ_x и τ_y бити функција само од двају променљивих x и y ; трећа једначина даје зависност, коју те функције морају задовољити у свакој тачки штапа. Ми ћемо задовољити ту зависност, ако ставимо:

$$\tau_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \dots \dots \dots (56)$$

где је $\varphi(x, y)$ функција само од x и y , за сада произвољна. Услови поклапања деформација (40) даће нама:

$$\nabla^2 \tau_x = 0, \quad \nabla^2 \tau_y = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \varphi) = 0,$$

одакле изилази:

$$\nabla^2 \varphi = c,$$

где је c константа. Дакле функција $\varphi(x, y)$, која је досад била произвољна мора задовољити једначину:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c \dots \dots \dots (57)$$

Пређимо сад на површинске силе. За основе штапа биће углови нормале са координатним осама

$\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2, \gamma = 0$ или π и једначине (40) даће:

$$p_z \cos \lambda = \pm \tau_y, \quad p_z \cos \mu = \pm \tau_x, \quad p_z \cos \nu = 0,$$

т.ј. спољне силе, које дејствују на основе штапа, немају нормалних компонента, које би могли истезати или скраћивати штап, већ леже све у равнима основа и расподељени су по њиховим површинама по оном истом закону, као и напони τ_y и τ_x .

За бочну површину је $\gamma = \pi/2$, те је према томе

$$p_n \cos \lambda = 0, \quad p_n \cos \mu = 0$$

$$p_n \cos \nu = \tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta,$$

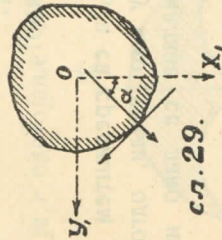
т.ј. на бочну површину могу дејствовати само силе паралелне z оси.

Ако поставимо још накнадни услов, да и таквих сила на бочној површини нема (пошто се у пракси на такве силе не наилази), добићемо следећу зависност

$$\tau_y \cos \alpha + \tau_x \cos \beta = 0, \dots \dots \dots (58)$$

коју морају задовољити τ_x и τ_y у тачкама бочне површине. Кад уочимо, да је за те тачке (сл. 29) $\alpha + \beta = \pi/2$, дакле је

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{dx_1}{dy_1}$$



сл. 29.

где су x_1 и y_1 текуће координате тачке бочне површине, то ћемо онда имати

$$\tau_y dy_1 = \tau_x dx_1,$$

или кад заменимо τ_x и τ_y њиховим вредностима из (56):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} (x_1, y_1) dy_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} (x_1, y_1) dx_1 \dots \dots \dots (59)$$

На тај се је начин наш задатак свео на то, да нађемо функцију $\varphi(x, y)$ која би задовољила у свакој тачки површине пресека штапа диференцијалну једначину (57), а у тачкама бочне површине т. зв. контурни услов (59). Нашавши те функције, компоненте τ_x и τ_y добијају се већ лако из једначина (56). Из тога излази, да пре, него што пређемо на даље решавање задатка, морали би изабрати облик контуре попречног пресека нашег штапа или функционалну зависност $y_1 = f(x_1)$,

где су $\iint_E y dF$ и $\iint_F x dF$ једнаки нули, као статички моменти површине у погледу на њене централне осе, а J_0 је поларни моменат инерције те површине у погледу њеног тежишта.

На тај начин спољне силе се редуцирају само на *менше шорзије* $\pm \mathfrak{M}_z$; константа c , која улази у изразе за τ_x и τ_y сад је одређена

$$c = 2 \frac{\mathfrak{M}_z}{J_0},$$

а према томе је

$$\tau_x = \frac{\mathfrak{M}_z}{J_0} x, \tau_y = -\frac{\mathfrak{M}_z}{J_0} y \dots \dots \dots (60)$$

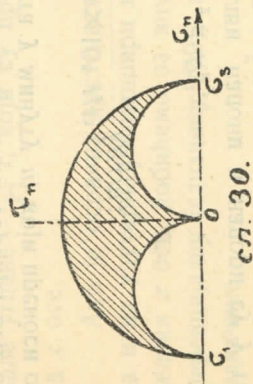
Главни напони одређују се из једначине (14), која ће у нашем случају добити облик

$$-\sigma_1^3 + \sigma_1 (\tau_x^2 + \tau_y^2) = 0,$$

одакле

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = -\frac{\mathfrak{M}_z r}{J_0}, \sigma_2 = 0, \\ \sigma_3 &= +\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = +\frac{\mathfrak{M}_z r}{J_0}, \end{aligned} \right\} (61)$$

где је r одстојање тачке до координатног почетка. Графички је напредно стање представљено на сл. 30.



За одређивање правца σ_2 имамо из (15):

$$a_2 = \tau_x^2, b_2 = \tau_y^2, c_2 = 0, u_2 = 0;$$

из последње једначине види се, да за одређивање знакова при косинусима

треба да се обратимо непосредно једначинама (13), а из последње једначине те групе видимо, да су $\cos \alpha_2$ и $\cos \beta_2$ разних знака, дакле је:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= -\frac{\tau_x}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}} = -\frac{x}{r}, \\ \cos \beta_2 &= \frac{\tau_y}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}} = \frac{y}{r}, \cos \gamma_2 = 0. \end{aligned}$$

одредити из ње $\frac{dy_1}{dx_1}$ и увести га у једначину (59), а затим тражити функцију φ , која би одговарала изабрагом облику пресека

До сада не постоји општи начин за решавање сличних задатака, т. ј. начин за изналажење функције φ за произвољно задату контуру, саме пак функције φ нађене су за неколико најпросторијих облика попречног пресека: елипсу, правоугаоник и неколико других. Ми нећемо овде излагати начине, помоћу којих су те поједине функције нађене, већ ћемо прићи нашем задатку на други начин, и то узећемо једну од функција, које задовољавају једначину (57) (таквих функција има бесконачно много) и ставићемо је у (59) заместо φ . Тада ће та једначина дати зависност између x_1, y_1, dx_1 и dy_1 , т. ј. биће диференцијална једначина дотичне контуре попречног пресека. Друкчије речено, ми нећемо тражити функцију φ за задату једначину контуре, већ контуру, која одговара узетој функцији.

Узмимо, на пр. функцију φ у облику:

$$\varphi = \frac{1}{4} c (x^2 + y^2);$$

лако се је уверити, да ће она задовољити једначину (57). Заменом исте у једначину (59), добићемо —

$$\frac{1}{2} c x_1 dx_1 = -\frac{1}{2} c y_1 dy_1;$$

кад скратимо са $\frac{1}{2} c$ и интегришемо, имаћемо:

$$x_1^2 + y_1^2 = R_0^2,$$

т. ј. једначину круга са полупречником R_0 а са средиштем у координатном почетку. Дакле, функција, коју смо узели, одговара кружном пресеку; дотични напони налазе се лако из једначина (56):

$$\tau_x = \frac{1}{2} c x, \tau_y = -\frac{1}{2} c y.$$

Ми смо већ видели, да спољне силе, које нападају (сл. 26) основе штапа, леже у њиховим равнима, те се према томе редуцирају на резултанте $\pm P_x, \pm P_y$ и спрег $\pm \mathfrak{M}_z$:

$$\begin{aligned} \pm P_x &= \iint_F \rho_n \cos \alpha dF = \pm \iint_F \tau_y dF = \pm \frac{1}{2} c \iint_F y dF = 0, \\ \pm P_y &= \iint_F \rho_n \cos \beta dF = \pm \iint_F \tau_x dF = \pm \frac{1}{2} c \iint_F x dF = 0, \\ \pm \mathfrak{M}_z &= \iint_F (x \rho_n \cos \alpha - y \rho_n \cos \beta) dF = \pm \iint_F (x \tau_x - y \tau_y) dF = \\ &= \pm \frac{1}{2} c \iint_F (x^2 + y^2) dF = \frac{1}{2} c J_0, \end{aligned}$$

Из компоненталних деформација:

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_z = 0, \\ \gamma_x = \frac{\mathfrak{M}_z x}{J_0 G}, \quad \gamma_y = -\frac{\mathfrak{M}_z y}{J_0 G}, \\ u = -\frac{\mathfrak{M}_z}{J_0 G} \varepsilon y, \quad v = \frac{\mathfrak{M}_z}{J_0 G} xz, \quad w = 0 \dots \dots (65) \end{aligned}$$

можемо помоћу једначина (35) наћи померања тачака:

Из тих једначина видимо, да тачке округле осовине имају услед торзија померања само у равни попречног пресека,^{*)} која су једнака $\sqrt{u^2 + w^2} = \frac{\mathfrak{M}_z}{J_0 G} xz$, управна на дотични радијус и пропорционална одстојању тачке од z осе и одстојању пресека од учвршћене осове ($z = 0$). Друкчије речено, радијуси даога пресека остају прави и окрећу се око тежишта сви за исти угао $\varphi = \frac{\mathfrak{M}_z}{J_0 G}$. Највећу вредност добија тај угао на слободној осови ($z = b$), и то

$$(\varphi)_{\max} = \frac{\mathfrak{M}_z l}{J_0 G} \dots \dots \dots (66)$$

ова величина зове се *углом торзије осовине*. Геометријска осовина штапа ($x = 0, y = 0$) неће добити никаквих померања, међутим уздужна влакна остаће права, али нагнуће се за мале углове $\frac{\mathfrak{M}_z}{J_0 G} r$, који су пропорционални одстојању влакна од z осе.

Ако је осовина прстенастог пресека, то претпостављајући да и на унутарњој површири њеној нема спољних сила паралелних z осе, добићемо за унутарњу контуру такву исту диференцијалну једначину (59), као и за спољну. Интеграл те једначине

$$x_2^2 + y_2^2 = r_2^2$$

разликоваће се од горе нађене једначине спољне контуре само у величини константе r_2 , т. ј. полупречника круга. Сва даља извођења остају без промене, са том разликом, што ће у из-

^{*)} У елементарним уџбеницима то се прима à priori и одавде изводе се оне формуле, које смо за наполе нашли. Видели смо, да је за кружан пресек ова „хипотеза“ оправдана, али за ма какав други облик пресека она није тачна и доводи до погрешних резултата.

Одавде је јасно, да σ_2 лежи у равни пресека а да је управљен према тежишту пресека. На сличан начин можемо наћи и два друга главна напона — они леже у равни нормалној на σ_2 и затварају углове $\gamma_1 = \frac{3}{4}\pi$ и $\gamma_3 = \frac{1}{4}\pi$ са z осом.

Површина нормалних напона прелази у два цилиндра са изводницама паралелним σ_2 , а водиће су две коњуговане хиперболе са полуосама $\frac{1}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}} = \frac{J_0}{\mathfrak{M}_z r}$.

Од тангенцијалних напона

$$\tau_I = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}, \quad \tau_{II} = -\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2},$$

$$\tau_{III} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$$

највећу апсолутну вредност има τ_{II} , а дејствује у обе равни које деле напола углове између равни σ_1, σ_2 и σ_2, σ_3 , т. ј. у равнинама xy и $\sigma_2 z$.

Најзад напори одређиће се из:

$$\begin{aligned} E\epsilon_1 = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = -(1 + \mu) \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \\ = -(1 + \mu) \mathfrak{M}_z \frac{r}{J_0} \end{aligned} \quad (63)$$

$$E\epsilon_2 = 0, \quad E\epsilon_3 = (1 + \mu) \mathfrak{M}_z \frac{r}{J_0}$$

Помоћу образаца (61), (62) и (63) прорачунавају се димензије осовина кружног пресека. При томе се обично у машинској техници задаје не величина момента торзије, већ број коњских снага HP и број обрта у минути n , који преноси осовина. Лако је видети, да је

$$\mathfrak{M}_z = \frac{75 \times 60 \times 10^2}{2\pi} \frac{HP}{n} \text{ kg.cm.}$$

пошто је за кружни пресек

$$J_0 = \frac{1}{2} \pi R_0^4,$$

а највећи главни и тангенцијални напони и напори су у тачкама контуре, т. ј. при $r = R_0$, онда, ако је R_0 даго у cm , добићемо у atm . при $\mu = 0, 3$:

$$\begin{aligned} (\sigma)_{\max} = (\tau)_{\max} &= \frac{75 \times 60 \times 10^2}{2\pi} \frac{2}{\pi} \frac{HP}{R_0^3 n} = \\ &= 44,3 \times 10^3 \frac{HP}{R_0^3 n}; \\ E(\epsilon)_{\max} &= 57,6 \times 10^3 \frac{HP}{R_0^3 n} \end{aligned} \quad (64)$$

раз за моменат торзије ући на место поларног моменга инерције површине круга, поларни моменат површине прстена, ограниченог са два концентрична круга са полупречницима r_1 и r_2 , где је $r_1 > r_2$. Ако са n означимо $\frac{r_2}{r_1}$, имамо за тај моменат.

$$J'_0 = \frac{1}{4} \pi r_1^4 (1 - n^4).$$

Да упоредимо сад тежину шупље и пуне осовине при истој величини напона, т.ј. при

$$\frac{r_1^4 (1 - n^4)}{r_1} = R^3_0$$

или

$$R_0 = r_1 (1 - n^4)^{1/3}.$$

Однос тежина шупље и пуне осовине биће

$$\frac{r_1^3 (1 - n^2)}{R_0^3} = \frac{1 - n^2}{(1 - n^4)^{1/3}} = \frac{1 + n^2}{1 - n^2};$$

овај однос је увек мањи од јединице и кад n тежи јединици можемо га направити колико год хоћемо малим. У пракси величину n ретко кад праве већом од 0,5, задовољавају се дакле са уштедом материјала од

$$1 - \frac{(1 - 0,5^4)^{1/3}}{1 + 0,5^2} = 1 - 0,78 = 0,22,$$

т. ј. од 22%.

Глава V.

Савијање статички одређених греда

§ 23. Општи случај напрезања штапова.

У првом, најпростијем случају напрегнутог стања штапова пет компоненталних напона су били једнаки нули; у случају торзије — само четири. Сад ћемо испитати случај, када су само три компонентална напона σ_x , σ_y и τ_z једнаки нули, а z оса, као и пре је паралелна изводницама бочне површине.

Треба да нађемо услед којих спољних сила и под каквим околностима је могуће у штапу такво напрегнуто стање. Ако занемаримо, као и у случају торзије, запреминске силе, онда из једначина (6) добићемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} &= 0 \dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$

дакле опет τ_x и τ_y не зависе од z , а једначина (67) даје везу између компоненталних напона у свакој тачки штапа.

Једначине (40) дају нама:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \dots \dots (68) \\ \nabla \tau_x &= -\frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}, \quad \nabla \tau_y = -\frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \dots \dots (69) \end{aligned}$$

Из једначина (68) видимо, да функција σ_z мора имати облик:

$$\sigma_z = a + bx + cy + z (a_1 + b_1x + c_1y),$$

раз за моменат торзије ући на место поларног момента инерције површине круга, поларни моменат површине прстена, ограниченог са два концентрична круга са полупречницима r_1 и r_2 , где је $r_1 > r_2$. Ако са n означимо $\frac{r_2}{r_1}$, имамо за тај моменат.

$$J'_0 = \frac{1}{4} \pi r_1^4 (1 - n^4).$$

Да упоредимо сад тежину шупље и пуне осовине при истој величини напона, т.ј. при

$$\frac{r_1^4 (1 - n^4)}{r_1} = R_0^3$$

или

$$R_0 = r_1 (1 - n^4)^{1/3}.$$

Однос тежина шупље и пуне осовине биће

$$\frac{r_1^2 (1 - n^2)}{R_0^2} = \frac{1 - n^2}{(1 - n^4)^{2/3}} = \frac{1 + n^2}{1 - n^2};$$

овај однос је увек мањи од јединице и кад n тежи јединици можемо га направити колико год хоћемо малим. У пракси величину n ретко кад праве већом од 0,5, задовољавају се дакле са уштедом материјала од

$$1 - \frac{1}{1 + 0,5^2} = 1 - 0,78 = 0,22,$$

т. ј. од 22%.

Глава V.

Савијање статички одређених греда

§ 23. Општи случај напрезања штапова.

У првом, најпростијем случају напрегнутог стања штапова пет компоненталних напона су били једнаки нули; у случају торзије — само четири. Сад ћемо испитати случај, када су само три компонентална напона σ_x , σ_y и τ_z једнаки нули, а z оса, као и пре је паралелна изводницама бочне површине.

Треба да нађемо услед којих спољних сила и под каквим околностима је могуће у штапу такво напрегнуто стање. Ако занемаримо, као и у случају торзије, запреминске силе, онда из једначина (6) добићемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$

дакле опет τ_x и τ_y не зависе од z , а једначина (67) даје везу између компоненталних напона у свакој тачки штапа.

Једначине (40) дају нама:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \dots \dots (68)$$

$$\nabla \tau_x = -\frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}, \quad \nabla \tau_y = -\frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \dots \dots (69)$$

Из једначина (68) видимо, да функција σ_z мора имати облик:

$$\sigma_z = a + bx + cy + z (a_1 + b_1 x + c_1 y),$$

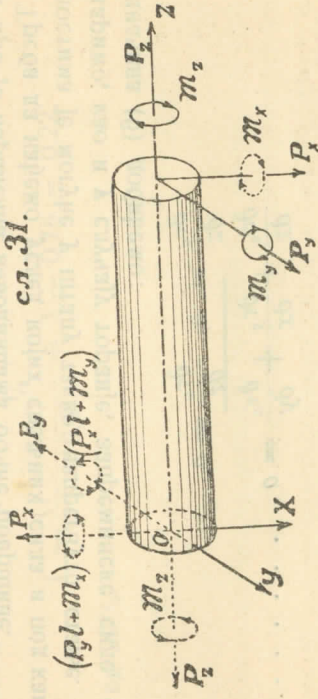
где су a, b, c, a_1, b_1, c_1 константе. За изналажење τ_x и τ_y послужиће нам једначине (67) и (69), у којима можемо сад заменили σ_z са нађеним изразом; тада ћемо имати

$$a_1 + b_1x + c_1y + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \dots \dots (70)$$

$$\begin{cases} \nabla \tau_x = -\frac{1}{1+\nu} c_1 \\ \nabla \tau_y = -\frac{1}{1+\nu} b_1 \end{cases} \dots \dots \dots (71)$$

Изналажењу функција τ_x и τ_y из ових једначина ћемо приступити доцније, сад ћемо прећи на спољне силе, које изазивају претпостављено напрегнуто стање. Испитивање тих сила одређиће нам константе у нађеном изразу за σ_z и на тај начин завршиће онај део нашег задатка, који се тиче нормалног напона σ_z .

Почетак координатног система узећемо (сл. 31), као и пре, у тежишту основе штапа, а за x и y осе правце главних оса



инерције те основе. Тада површинске силе, које нападају десну основу штапа ($z = l$) одредиће се из једначина (10) при $\alpha = \beta = \pi/2$ и $\gamma = 0$ на следећи начин:

$$p_z \cos \lambda = \tau_y, p_z \cos \mu = \tau_x, p_z \cos \nu = a + bx + cy + l(a_1 + b_1x + c_1y)$$

Пројекције редукуционе резултанте овог система сила назваћемо са P_x, P_y, P_z , а пројекције редукуционог момента у погледу на тежиште пресека са M_x, M_y, M_z ; онда је

$$\begin{aligned} P_x &= \iint_F \tau_y dF, P_y = \iint_F \tau_x dF, \\ P_z &= \iint_F [a + bx + cy + l(a_1 + b_1x + c_1y)] dF = (a + l_1 a_1) F, \\ M_x &= - \iint_F y [a + bx + cy + l(a_1 + b_1x + c_1y)] dF = -c_1 J_x, \\ M_y &= - \iint_F x [a + bx + cy + l(a_1 + b_1x + c_1y)] dF = -b_1 J_y, \\ M_z &= \iint_F (x\tau_x - y\tau_y) dF \end{aligned}$$

На леву основу штапа ($z = 0$) дејствоваће површинске силе, које ћемо добити из једначина (10) при $\alpha = \beta = \pi/2$ и $\gamma = \pi$: $p_z \cos \lambda = -\tau_y, p_z \cos \mu = -\tau_x, p_z \cos \nu = -(a + bx + cy)$. Ако, као и пре, претпоставимо, да спољне силе нападају само основе штапа, то ће онда силе леве основе стајати у равнотежи са силама десне, т. ј. редукуциона резултанта сила леве основе мора имати пројекције: $-P_x, -P_y$ и $-P_z$, а редукуциони момент у погледу координатног почетка мора имати пројекције: $-[M_x + P_y l, -[M_y + P_x l], -M_z$. Дакле мора бити:

$$\begin{aligned} -P_x &= - \iint_F \tau_y dF, -P_y = - \iint_F \tau_x dF, \\ -P_z &= \iint_F (a + bx + cy) dF = -aF, \\ -[M_x + P_y l] &= - \iint_F y (-a - bx - cy) dF = cJ_x, \\ -[M_y + P_x l] &= - \iint_F x (-a - bx - cy) dF = bJ_y, \\ -M_z &= - \iint_F (x\tau_x - y\tau_y) dF. \end{aligned}$$

Пошто τ_x и τ_y не зависе од z , то прве две и последња од ових једначина неће дати ништа новог, али остале, кад упоредимо њих са дотичним једначинама за десну основу, дају:

$$\begin{aligned} a &= \frac{P_z}{F}, b = -\frac{M_y + P_x l}{J_y}, c = -\frac{M_x + P_y l}{J_x}, \\ a_1 &= 0, b_1 = \frac{P_x}{I_y}, c_1 = \frac{P_y}{I_x}, \end{aligned}$$

одакле:

$$\sigma_z = \frac{P_z}{F} - \frac{M_y + P_x(l-z)}{J_y} x - \frac{M_x + P_y(l-z)}{J_x} y \quad (72)$$

Пре него што пређемо на детаљно проучавање нађеног обрасца за нормални напон σ_z , остаје нам још, да изразимо

математички учињену горе претпоставку, да спољне силе не нападају бочне површине. За ту површину је $\gamma = \pi/2$, $\alpha + \beta = \pi/2$, дакле је

$$P_n \cos \lambda = 0, P_n \cos \mu = 0, P_n \cos \nu = \tau_y \cos \alpha + \tau_x \sin \alpha,$$

т. ј. што се тиче пројекција на Ox и Oy наша претпоставка је сама по себи задовољена, што се пак тиче пројекције на Oz , то наш услов, да је

$$\tau_y \cos \alpha + \tau_x \sin \alpha = 0$$

можемо, као што смо већ радили у случају торзије, представити у облику

$$\tau_x dx_1 = \tau_y dy_1, \dots \dots \dots (73)$$

где су x_1 и y_1 текуће координате тачке контуре пресека.

Дакле за одређивање тангенцијалних напона τ_x и τ_y имамо коншурни услов (73) и диференцијалне једначине (70) и (71), које ће сад изгледати:

$$\frac{P_x}{J_y} x + \frac{P_y}{J_x} y + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = 0, \dots \dots \dots (74)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\mu} \frac{P_y}{J_x}, \left\{ \dots \dots \dots (75) \right.$$

$$\frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\mu} \frac{P_x}{J_y}$$

Функције τ_x и τ_y морају задовољити ове једначине у свакој тачки штапа, или, пошто не зависе од z , у свакој тачки пресека, а сем тога у тачкама контуре пресека морају задовољити услов (73). За одређивање интеграционих константи, које ћемо при томе добити, имамо једначине:

$$\iint_F \tau_y dF = P_x, \iint_F \tau_x dF = P_y, \iint_F (x\tau_x - y\tau_y) dF = \mathfrak{M}_z \quad (76)$$

§ 24. Нормални напон при савијању

Да се задржимо детаљније на добивеном изразу за нормални напон:

$$\sigma_z = \frac{P_z}{F} - \frac{\mathfrak{M}_y + P_x(l-z)}{J_y} x - \frac{\mathfrak{M}_x + P_y(l-z)}{J_x} y \dots \dots (72)$$

који представља збир од три члана. Први члан представља нормални напон од аксијалне силе P_z . Други члан представља нормални напон од силе P_x и спрега \mathfrak{M}_y ; тај напон је линеарна

функција од x .*) Бројитељ у том члану, као што се види, представља нападни моменат у дотичном пресеку M_y ; дакле тај члан представља напон услед савијања у xz равни:

$$-\frac{M_y}{J_y} x.$$

Најзад трећи члан израза (72) представља нормални напон од силе P_y и спрега \mathfrak{M}_x , или од савијања у yz равни нападним моментом M_x :

$$-\frac{M_x}{J_x} y.$$

тај напон је линеарна функција од y .

Дакле, да бисмо добили нормални напон у тачки штапа, кога истовремено растежу аксијалне силе и савијају силе и спрегви, који не леже у његовим равнима инерције, треба разложити ове последње силе и спрегве на компоненте, које ће лежати у главним равнима инерције. После тога треба ићи посебно нормалне напоне од савијања услед тих компонента и алгебарски сабрати те напоне са напоном од аксијалних сила. Овај закључак даје нам просто решење најважнијег питања при савијању штапова, — о величини нормалних напона. Базирајући се на њему, ми можемо проучити детаљно само питање о савијању силом и спрегом, који леже у једној од главних равни инерције, јер ћемо при савијању у другој главној равни имати аналогичне појаве. Што се тиче нормалних напона од аксијалних сила, њих смо већ раније проучили.

Савијање у равни xz изазваће, као што смо видели, напон

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{J_y} x,$$

који достиже највеће апсолутне величине у оним тачкама једног датог пресека, које су највише удаљене од равни yz , т. ј. у оним, за које x има највећу апсолутну вредност x_{\max} . Онда је

$$(\sigma_z)_{\max} = -\frac{M_y}{J_y} (x)_{\max} = -\frac{M_y}{W_y} \dots \dots \dots (73)$$

где је са W_y означена величина

$$\frac{J_y}{(x)_{\max}},$$

*) Дакле, т.зв. Navier'ова хипотеза потврђује се и у случају савијања силом.

коју смо већ раније назвали отпорним моментом греде.

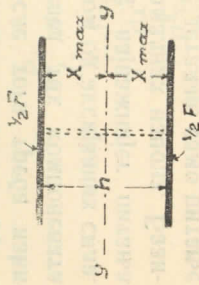
Када су нам задане спољне силе, које дејствују на греду, (т. ј. кад је задано M_y) и задан материјал, т. ј. величина допущеног напона (σ_z), онда се величина W_y одређује лако из једначине (73) и задатак конструктора састоји се у томе, да се постигне та величина W_y при најмањој потрошњи материјала, т. ј. при најмањој величини F .

Из саме дефиниције отпорног момента:

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{\int_F x^2 dF}{x_{\max}} = x_{\max} \int_F \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^2 dF$$

види се, да ће се добити највећа величина за W_y при задатом F за пресек, састављен из два равна и врло танка појаса, распоређених паралелно у оси (сл. 32) у растојању x_{\max} од ње. У том би случају била величина W_y скоро једнака

$$Fx_{\max} = \frac{1}{2} Fh.$$



сл. 32.

Али такав профил нема ребра, које мора да спречава зближавање појаса и да, као што ћемо видети даље, прими на себе тангенцијалне напоне. Због тога смо принуђени, да узмемо један део материјала од појаса за образовање тог ребра и да том делу материјала дамо мање користан положај с обзиром на нормалне напоне. Тада ће отпорни момент бити увек мањи од нађене максималне вредности, тако да можемо ставити

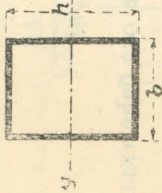
$$W_y = \frac{1}{2} \eta Fh, \dots \dots \dots (74)$$

где је η прави разломак, који ћемо назвати *коэффициентом искоришћења пресека*. Његова величина (у извесној мери) показује степен рационалности расподеле материјала греде. Ако је висина греде h , из било каквих разлога већ задана, треба тежити ка повећању коэффициента η ; у противном случају треба повећавати производ ηh .

Величине η за најпростије профиле су следеће:

- круг или елипса 0,25,
- правоугаоник 0,33,
- веома танак кружни прстен 0,50,

пресек на сл. 33 при веома танким зидовима $3b + h$ при $b = h$, то ће дати 0,67.



сл. 33

Овај последњи облик пресека има висок коэффициент η , а уједно допушта повећавање висине h , зато се он сматра, као најпогоднији. Ако спојимо оба вертикална ребра у једно, добићемо **I**, **C** и **T** профиле, који се разликују један од другог само хоризонталним померањем појаса, али су исто толико рационални. За ваљане греде са таквим профилима коефицијенти η су око 0,6 и варирају у уским границама:

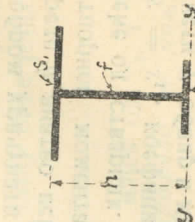
- за **I** при $h > 10 \text{ cm}$ од 0,65 до 0,61,
- за **C** од 0,61 до 0,59,
- за **T** од 0,57 до 0,60.

За лимане греде η може бити до 0,70 и чак нешто више.

§ 25. Особине **I** профила.

Да испитамо неке особине профила, који се састоје из два појаса и ребра и који ћемо скраћења ради звати „дупло те“, мада ће сви наши закључци важити уопште за **I**, **C** и **T** профиле. За последњи само приближно, пошто се главна оса инерције не поклапа са равнином ребра; у том случају, када се тај профил употребљава у комбинацији са лимом ова је разлика веома мала.

Да не би добили наше закључке у облику гломазних формула, ми ћемо се задовољити са приближним решењем питања, посматрајући дебљину појаса t , као малу величину према висини профила h , т. ј. занемарујући пред јединицом разломке реда $\frac{t}{h}$:



сл. 34.

Тада, ако назовемо (сл. 34), са s и s_1 површине пресека појаса (при томе је увек $s_1 > s$), а са f површину пресека ребра, имаћемо површину пресека:

$$F = s + s_1 + f;$$

статички момент те површине у погледу на уу осу, која се поклапа са доњом

коју смо већ раније назвали W_y .
 Када су нам задани s и f , онда је висок
 (т. ј. кад је задан s), онда је висок
 пуштеног h $h = 0,67 \cdot \frac{3b + h}{3(b+h)}$
 једнак $h = 0,67 \cdot \frac{3b + h}{3(b+h)}$

у ту осу биће:

$$J_y F - S_y^2 = \frac{1}{12} s^3 + \frac{1}{12} f^3 + \frac{1}{2} s f^2 + \frac{1}{2} f s^2$$

ду тежишне осе биће тада:

$$J_y F - S_y^2 = \frac{1}{12} s^3 + \frac{1}{12} f^3 + \frac{1}{2} s f^2 + \frac{1}{2} f s^2$$

$$+ \frac{1}{3} f^2 = h^2 s s_1 + \frac{1}{3} f (s + s_1 + \frac{1}{4} f)$$

$$s + s_1 + f$$

$$W_y = \frac{1}{6} s_1 + \frac{1}{6} f (4s + 4s_1 + f) = \frac{1}{6} \left(\frac{4s_1 + f}{2s_1 + f} \right) \cdot \left(\frac{1}{6} (4s_1 - 2s + f) \right) \quad (75)$$

Последњи образац, који везује у простом облику отпорни моменат са димензијама појаса и ребра, може служити за приближна прорачунавања греде или за контролу резултата, добивених на други начин. Сем тога, из обрасца се види јасно, да **главни ушлицај на отпорност греде има површина пресека мањег појаса s** ; много мање утиче површина пресека ребра f , која улази са коефицијентом

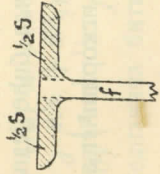
$$\frac{1}{6} \frac{2s_1 + f}{4s_1 - 2s + f},$$

чија је вредност у границама од $\frac{1}{6}$ до $\frac{1}{3}$; што се тиче површине пресека већег појаса s_1 , њено повећавање скоре је без икакве користи.

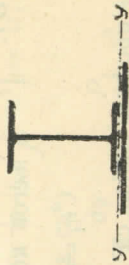
При примени обрасца (75) на греде, састављене из лимова, могу се површине угаоника, који заквирцима спајају појасе са ребром урачунати у површину дотичног појаса, ако је висина греде h знатно већа од ширине страна тих угаоника. Величине отпорног момента, добивене на такав начин биће за 5—7% **веће од стварних**. За ваљане греде, чији су појаси једнаки ($s = s_1$), коефицијенат уз f биће $\frac{1}{6}$. У том случају лако је узети у обзир и мале величине првога реда, које смо у обрасцу (75) занемарили; у том би случају било:

$$W_y = h (s + \frac{1}{6} f) - 2st \dots \dots \dots (76)$$

где је s површина појаса шрафирана на сл. 35. Овај образац даје величину отпорног момента, која се разликује од стварне највише за 1%.



сл. 35.



сл. 36.

Добивене образце применићемо на случај, кад је профил заквирцима спојен са лимом (сл. 36). Да видимо, за колико се повећава отпорни моменат профила додавањем лим. Означимо са F површину профила, са s површину пресека лим, а са t његову дебљину. Целокупна површина биће $F + s$, њен статички моменат у погледу уу осе $\frac{1}{2} Fh - \frac{1}{2} st$, а моменат инерције у погледу на ту осу $\frac{1}{4} Fh^2 + \frac{1}{2} W_0 h + \frac{1}{3} st^2$. Ако занемаримо мале величине реда t/h и заменимо W_0 са $\frac{1}{2} \eta Fh$ добићемо моменат инерције у погледу главне осе у облику

$$J_y^0 = \frac{1}{4} Fh^2 (1 + \eta) - \frac{1}{4} \frac{t^2 h^2}{F + s} = \frac{1}{4} Fh^2 \frac{(1 + \eta)s + \eta F}{F + s};$$

Растојање највише удаљеног влакна биће

$$x_{max} = h - \frac{1}{2} \frac{Fh}{F + s} = \frac{1}{2} h \frac{F + 2s}{F + s},$$

онда је отпорни моменат једнак:

$$W_y = \frac{1}{2} Fh \frac{(1 + \eta)s + \eta F}{F + 2s} = W_0 + \frac{1}{2} Fh \frac{s(1 - \eta)}{F + 2s} \quad (77).$$

Други члан у том обрасцу даје прираст отпорног момента услед додавања лим. Његов однос према првом члану биће једнак

$$\frac{1 - \eta}{1} \frac{s}{F + 2s};$$

при величини η око 0,6, тај је однос увек мањи од $\frac{1}{3}$, т. ј. **појачање једног појаса код симетричног профила не може повести отпорни моменат више од 30%**.

Да испитамо сад други случај (сл. 37), и то симетрични профил, спојен са лимом, а појачан са супротне стране по-

ивицом мањег појаса, је:

$$S_y = h(s_1 + \frac{1}{2}f);$$

момент инерције исте површине у погледу на ту осу биће:

$$J_y = h^2(s_2 + \frac{1}{3}f),$$

а одстојање тежишта те површине од исте осе

$$x_{\max} = \frac{S_y}{F} = \frac{1}{2}h \frac{2s_1 + f}{s + s_1 + f} > \frac{1}{2}h.$$

Момент инерције површице у погледу тежишне осе биће тада:

$$J_y^0 = J_y - Fx_{\max}^2 = \frac{J_y F - S_y^2}{F}$$

$$= h^2(s_1 + \frac{1}{3}f)(s + s_1 + f) - (s_1 + \frac{1}{2}f)^2 = h^2 ss_1 + \frac{1}{3}f(s + s_1 + \frac{1}{4}f),$$

а отпорни момент:

$$W_y = \frac{J_y^0}{x_{\max}} = \frac{1}{2}h \frac{4ss_1 + \frac{1}{3}f(4s + 4s_1 + f)}{2s_1 + f} = h \left[s + \frac{1}{6} \frac{4s_1 - 2s + f}{2s_1 + f} \right] \quad (75)$$

Последњи образац, који везује у простом облику отпорни момент са димензијама појаса и ребра, може служити за приближна прорачунавања греде или за контролу резултата, добиених на други начин. Сем тога, из обрасца се види јасно, да *главни утицај на отпорност греде има површина пресека мањег појаса s*; много мање утиче површина пресека ребра *f*, која улази са коефицијентом

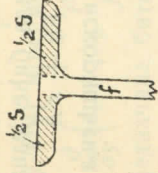
$$\frac{1}{6} \frac{4s_1 - 2s + f}{2s_1 + f},$$

чија је вредност у границама од $\frac{1}{6}$ до $\frac{1}{3}$; што се тиче површине пресека већег појаса s_1 , њено повећавање скорје је без икакве користи.

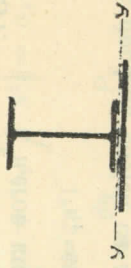
При примени обрасца (75) на греде, састављене из лимова, могу се површине угаоника, који закивцима спајају појасе са ребром урачунати у површину дотичног појаса, ако је висина греде *h* знатно већа од ширине страна тих угаоника. Величине отпорног момента, добивене на такав начин биће за 5—7% веће од стварних. За ваљане греде, чији су појаси једнаки ($s = s_1$), коефицијент уз *f* биће $\frac{1}{6}$. У том случају лако је узети у обзир и мале величине првога реда, које смо у обрасцу (75) занемарили; у том би случају било:

$$W_y = h(s + \frac{1}{6}f) - 2st \dots \dots \dots (76)$$

где је *s* површина појаса шрафирана на сл. 35. Овај образац даје величину отпорног момента, која се разликује од стварне највише за 1%.



сл. 35.



сл. 36.

Добивене обрасце применићемо на случај, кад је профил закивцима спојен са лимом (сл. 36). Да видимо, за колико се повећава отпорни момент профила додавањем лим. Означимо са *F* површину профила, са *s* површину пресека лим, а са *t* његову дебелину. Целокупна површина биће $F + s$, њен статички момент у погледу уу осе $\frac{1}{2}Fh - \frac{1}{2}st$, а момент инерције у погледу на ту осу $\frac{1}{4}Fh^2 + \frac{1}{2}W_0h + \frac{1}{3}st^2$. Ако занемаримо мале величине реда *t/h* и заменимо W_0 са $\frac{1}{2}\eta Fh$ добићемо момент инерције у погледу главне осе у облику

$$J_y^0 = \frac{1}{4}Fh^2(1 + \eta) - \frac{1}{4}\frac{t^2h^2}{F + s} = \frac{1}{4}Fh^2 \frac{(1 + \eta)s + \eta F}{F + s};$$

Растојање највише удаљеног влакна биће

$$x_{\max} = h - \frac{1}{2}\frac{Fh}{F + s} = \frac{1}{2}h \frac{F + 2s}{F + s},$$

онда је отпорни момент једнак:

$$W_y = \frac{1}{2}Fh \frac{(1 + \eta)s + \eta F}{F + 2s} = W_0 + \frac{1}{2}Fh \frac{s(1 - \eta)}{F + 2s} \quad (77).$$

Други члан у том обрасцу даје прираст отпорног момента услед додавања лим. Његов однос према првом члану биће једнак

$$\frac{1 - \eta}{2} \frac{s}{F + 2s};$$

при величини η око 0,6, тај је однос увек мањи од $\frac{1}{3}$, т. ј. *појачање једног појаса код симетричног профила не може повећати отпорни момент више од 30%.*

Да испитамо сад други случај (сл. 37), и то симетрични профил, спојен са лимом, а појачан са супротне стране по-

јасом површине s' . Ако издвојимо из лима површину једнаку s' , можемо испитивати наш профил, као симетричан, али са придодатим лимом површине $s - s'$. Отпорни моменат тог симетричног профила биће једнак

$$W_0 = \frac{1}{2} \eta F h + s' h$$

$$\eta = \frac{\eta F + 2s'}{F + 2s'}$$

сл. 37.

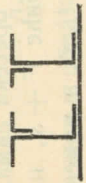
а његов коефицијенат искоришћења

За такав профил, спојен са лимом, наћићемо отпорни моменат из обрасца (77), кад ставимо тамо нађене вредности за W_0, η и кад заменимо s са $s - s'$:

$$W_y = \frac{1}{2} \eta F h + s' h + \frac{1}{2} F h \frac{(s - s') (1 - \eta)}{F + 2s'} \quad (78)$$

т. ј. повећавање отпорног момента услед додавања појаса s' једнако је:

$$s' h \left[1 - \frac{1}{2} \frac{F(1 - \eta)}{F + 2s'} \right];$$



сл. 38.

збир у загради је скоро јединица, дакле *појачање површине мањег појаса на величину s' повећава отпорни моменат скоро шoliko, као што и додавање свакоме од појаса по s' . Готово исти резултат даје и додавање угаоника **I** и **L** профилима у случајевима, представљеним на сл. 38.*

§ 26. Тангенцијални напони при савијању греда елиптичног пресека.

Сад, кад смо проучили, расподелу нормалних напона код греде, која се савија под утицајем силе P_x и спрега \mathcal{M}_y , можемо се вратити на тангенцијалне напоне. Ми смо имали за њих диференцијалне једначине:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{P_y}{J_x} y + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{P_z}{J_y} x = 0 \dots \dots \dots (74),$$

$$\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2} = - \frac{1}{1 + \nu} \frac{P_y}{J_x},$$

$$\frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2} = - \frac{1}{1 + \nu} \frac{P_x}{J_y}, \dots \dots \dots (75)$$

а сем тог контурни услов

$$\tau_x, dx_1 = \tau_y dy_1 \dots \dots \dots (73)$$

и једначине за одређивање интеграционих константи:

$$\int \tau_y dF = P_x; \int \tau_x dF = P_y;$$

$$\int \int (x \tau_x - y \tau_y) dF = \mathcal{M}_z \dots \dots \dots (76)$$

Једначину (74) можемо представити у облику:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_x + \frac{1}{2} \frac{P_y}{J_x} y^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_y + \frac{1}{2} \frac{P_x}{J_y} x^2 \right) = 0,$$

а та ће једначина бити задовољена са*)

$$\tau_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{P_y}{J_x} y^2; \tau_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{P_x}{J_y} x^2 \dots \dots (79)$$

где је $\varphi(x, y)$ за сад још произволна функција од x и y . Али стављајући вредности (79) у једначину (75) добићемо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = - \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P_y}{J_x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P_x}{J_y},$$

одакле видимо, да $\varphi(x, y)$ мора задовољити једначину:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P_x}{J_y} y - \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P_y}{J_x} x + C,$$

где је C интеграциона константа.

Ову последњу једначину можемо задовољити, ако претставимо φ у облику збира функција $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, које биле решења једначина

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P_x}{J_y} y,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = - \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{P_y}{J_x} x,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = C$$

и осим тога би свака посебно задовољавала услов (73). Последња од нађених једначина поклапа се са једначином (57) у § 22, дакле њено решење $\varphi_3(x, y)$ даће тангенцијалне напоне услед момената торзије \mathcal{M}_z , а те смо напоне раније испитали. У прву једначину улази само сила P_x , према томе њено решење $\varphi_2(x, y)$ даће тангенцијалне напоне од утицаја те силе. Најзад друга једначина даће тангенцијалне напоне од силе P_y .

*) То је приметно С. Тимошенко 1913 год.

то цела функција, онда мора бити трећег степена у погледу на u и другог у погледу на x , т. ј. облика

$$\varphi_1(x, y) = (A + Bx^2 + Cy^2)u, \dots \dots \dots (85)$$

где су A, B и C константе.

Покушајемо избором тих константи задовољити једначину (80) и услов (84). Ако ставимо израз (85) у диференцијалну једначину (80), имамо:

$$2(B + 3C)u = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{P_x}{J_y} u,$$

т. ј. она ће бити задовољена, ако је

$$B + 3C = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{P_x}{J_y}; \dots \dots \dots (86)$$

ако ставимо тај исти израз (85) у услов (84), добићемо

$$2Ba^2x_1u_1^2 - (A + Bx_1^2 + 3Cy_1^2 - \frac{1}{2} \frac{P_x}{J_y} x_1^2) b^2x_1 = 0,$$

или, ако заменимо u_1^2 помоћу израза (83) и издвојимо чланове са x и x^3 :

$$(2a^2b^2B - b^2A - 3b^4C)x_1 - (3b^2B - 3\frac{b^4}{a^2}C - \frac{1}{2} \frac{P_x}{J_y} b^2)x_1^3 = 0,$$

т. ј. услов (84) биће задовољен кад је:

$$\begin{cases} 2a^2b^2B - b^2A - 3b^4C = 0 \\ 3b^2B - 3\frac{b^4}{a^2}C - \frac{1}{2} \frac{P_x}{J_y} b^2 = 0 \end{cases} \dots \dots \dots (87)$$

Из једначина (86) и (87) имамо:

$$\begin{cases} A = \frac{P_x}{J_y} \frac{2(1 + \mu)a^2 + b^2}{2(1 + \mu)(b^2 + 3a^2)}, \\ B = \frac{P_x}{J_y} \frac{(1 + \mu)a^2 + \mu b^2}{2(1 + \mu)(b^2 + 3a^2)}, \\ C = \frac{1}{3} \frac{P_x}{J_y} \frac{(2\mu - 1)a^2}{2(1 + \mu)(b^2 + 3a^2)}, \end{cases} \dots \dots \dots (88)$$

а из (84) величине тангенцијалних напона за греду елип- тичког пресека

$$\begin{cases} \tau_y = \frac{P_x}{J_y} \left[\frac{k}{2(1 + \mu)} (a^2 - x^2) - \frac{1 - k}{2(1 + \mu)} y^2 \right], \\ \tau_x = - \frac{P_x}{J_y} \frac{1 - k + \mu}{1 + \mu} xy, \end{cases} \dots \dots \dots (89)$$

где је са k обележено:

На тај начин у датом општем случају напрегнутог штапа, ми можемо наћи засебно тангенцијалне напоне од сила P_x, P_y и спрега M_x , а затим их алгебарски сабрати. При том потпуна сличност прве две једначине допушта, да се ограничимо испитивањем само једне од њих, а да затим тако добивене резултате проширимо и на савијање у другој главној равни.

Дакле, сада се наш задатак састоји у томе, да нађемо функцију $\varphi_1(x, y)$ која би задовољила диференцијалну једначину:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{P_x}{J_y} u \dots \dots \dots (80)$$

а сем тога и контурни услов (73); кад уведемо у тај услов изразе (79) за напоне од силе P_x

$$\begin{cases} \tau_x = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\ \tau_y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{P_x}{J_y} x^2 \end{cases} \dots \dots \dots (81),$$

имати ће облик

$$- \frac{\partial \varphi_1(x_1, y_1)}{\partial x_1} dx_1 = \left[\frac{\partial \varphi_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} - \frac{1}{2} \frac{P_x}{J_y} x_1^2 \right] dy_1 \dots (82).$$

У § 23 видели смо већ, да нема општих метода за зналажење функција, које су, слично φ_1 , задати диференцијалном једначином (80) и контурним условом (82). Саме функције су нађене за неколико најпростијих контура, далеких по облику од најважнијих за техничку примену **I**, **C** и **L** профила. Ипак, из добивених резултата могу се извести и општи закључци о расподели тангенцијалних напона, који у извесној мери важе и за горе наведене профиле.

Једна од најпростијих контура је елипса:

$$y_1^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2; \dots \dots \dots (83)$$

диференцирањем по x_1 добијамо из те једначине:

$$\begin{cases} dy_1 = - \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}, \\ dx_1 = - a^2 \frac{y_1}{x_1}, \end{cases}$$

а кад уведемо ту вредност у контурни услов (82), добићемо

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} a^2 y_1 - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} - \frac{1}{2} \frac{P_x}{J_y} x_1^2 \right) b^2 x_1 = 0 \dots \dots \dots (84).$$

Из једначине (80) види се, да функција $\varphi_1(x, y)$ мора бити ларна у погледу на x и непарна у погледу на y и да, ако је

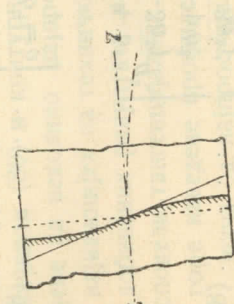
$$k = \frac{b^2}{2(1+\nu) + \frac{b^2}{a^2}} \dots \dots \dots (90)$$

Добивене изразе тангенцијалних напона испитаћемо у идућем §-у, сад ћемо помоћу њих наћи деформације и померања тачака греде елиптичног пресека савијене у хz равни, и то само силом P_x , јер дотичне величине од спрега M_y биле су већ нађене у § 20. Из једначина (38) налазимо:

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \nu \frac{P_x}{EJ_y} (l-z)x; \quad \epsilon_z = -\frac{P_x}{EJ_y} (l-z)x \\ \gamma_x = -2(1-k+\nu) \frac{P_x}{EJ_y} xy; \quad \gamma_y = \frac{P_x}{EJ_y} [k(a^2-x^2) - (1-k)y^2]; \\ \gamma_z = 0. \end{aligned}$$

Осим тога из једначина (35) добићемо померања тачака:

$$u = \frac{1}{2} \frac{P_x}{EJ_y} \left[(l - \frac{1}{3}z) z^2 + 2ka^2z + \nu(l-z)(x^2 - y^2) \right], \\ v = \nu \frac{P_x}{EJ_y} (l-z)xy, \\ w = -\frac{P_x}{EJ_y} \left[(l - \frac{1}{2}z)z + \frac{1}{3}(k - \frac{1}{2}\nu)x^2 + (1-k + \frac{1}{2}\nu)y^2 \right] x$$



сл. 39

малне на хz раван, већ ће се претворити у површину трећег реда (сл. 35). Контура ће пресека такође променити свој облик.

§ 27. Општи закључци о расподели тангенцијалних напона. Главни напони.

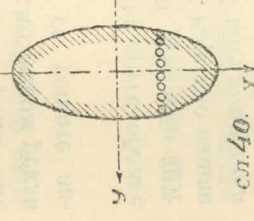
У обрасце (89) за тангенцијалне напоне код савијене греде елиптичног пресека улази коефицијенат k , који је одређен једначином (90). Величина тог коефицијента зависи од односа

полуоса елипсе, али варира само у границама од 0,87 (при веома малом $\frac{b}{a}$) до 1,00 (при веома великом $\frac{b}{a}$).

Нађени израз (89) за τ_y састоји се само из два члана, од којих први зависи само од $(a^2 - x^2)$, а други само од y^2 . Њихови коефицијенти односе се међусобно, као $\frac{1-k}{k}$, дакле, узевши у обзир нађене границе за k , можемо закључити, да је коефицијенат другог члана увек мали*) према коефицијенту уз први члан. Због тога можемо за техничку примену занемарити тај други члан, тако да је

$$\tau_y = \frac{k}{2(1+\nu)} \frac{P_x}{J_y} (a^2 - x^2) \dots \dots \dots (91)$$

т. ј. можемо сматрати, да напон τ_y скоро не зависи од y или (сл. 40) да је гошво ишти за све шачке пресека, које се налазе на једној истој хоризонтални.



сл. 40

Из једначине (91) види се, да је τ_y једнако нули у крајним влакнима ($x = \pm a$), а достиже највеће вредности у тачкама неутралног слоја ($x = 0$). Доле приведена таблица даје однос $(\tau_y)_{\max}$ и $(\tau_y)_{\min}$ према $\frac{P_x}{J_y} (a^2 - x^2)$ за различите величине односа $\frac{b}{a}$. Из ње се види, да је за

$\frac{b}{a} < 1$ (т. ј. за греде чија је висина већа од дебљине), разлика између $(\tau_y)_{\max}$ и $(\tau_y)_{\min}$ за тачке једне исте хоризонтале доста мала. Чак за греде са дебљином већом од висине т. ј. за $\frac{b}{a} > 1$ образац (91) неће нам дати грубо нетачних резултата, као што се то види из исте таблице; сем тога је за те греде τ_y уопште толико мало према σ_z , да се може занемарити

$\frac{b}{a} =$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	∞
$(\tau_y)_{\max}$	0,333	0,333	0,337	0,346	0,363	0,383	0,385
$(\tau_y)_{\min}$	0,333	0,333	0,325	0,308	0,275	0,234	0,231

* Њихов однос лежи у границама од нуле до 0,15.

Да пређемо сад на други тангенцијални напон τ_x . Из обрасца (89) лако је утврдити, да ће тај напон имати највећу вредност у тачкама на контури пресека, и то за $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$,

а да ће та вредност бити једнака:

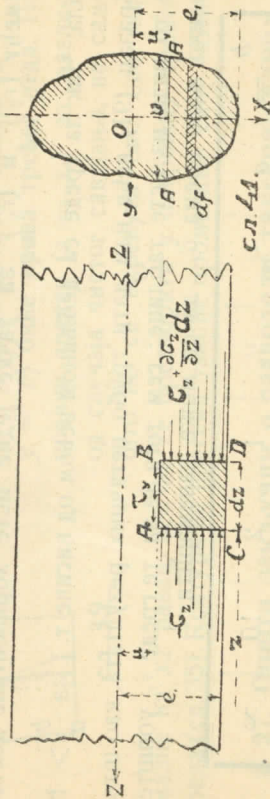
$$(\tau_x)_{\max} = - \frac{P_x}{J_y} \frac{1-k+p}{2(1+p)} ab.$$

Однос ове величине према $(\tau_y)_{\max}$ је једнак:

$$\frac{(\tau_x)_{\max}}{(\tau_y)_{\max}} = \frac{1-k+p}{k} \frac{b}{a},$$

т. ј. биће у границама од $0,3 \frac{b}{a}$ до $0,5 \frac{b}{a}$. Дакле за греде, чија је висина већа од дебелине, тај се напон τ_x може занемарити према τ_y . За „дебеле“ греде биће τ_x истог реда, или чак и веће од τ_y , али код тих греда, као што смо једном рекли величине тангенцијалних напона τ_x и τ_y могу се уопште занемарити.

Решења Сен-Венановог проблема нађена за друге облике пресека (на пр. правоугаоник, кружни прстен и неколико других) довела би нас до закључака, сличних оним, које смо нашли за елиптични пресек, т. ј.: при савијању силом P_x тангенцијални напон τ_y скоро не зависи од y , а напон τ_x може се занемарити.* У техници се претпоставља, да то важи за сваки облик пресека, (напр. и за **I**, **C** и **T** профиле), и ако то није доказано.



Да видимо сад, на какав ће нас приближан закон расподеле тангенцијалних напона τ_y довести та претпоставка, да се у греди произвољног пресека (сл. 41), савијеној силом P_x , појав-

*) Формулисао је Журавски 1856 г

љује само напон τ_y , који зависи само од x и напон σ_z , чију смо расподелу по пресеку већ нашли у облику једначине (72), а која важи за сваки пресек.

Два попречна пресека AC и BD , удаљена од координатног почетка за z и $z + dz$ и хоризонтална равна AB , у растојању u од неутралног слоја, издвојиће у нашој греди запремину $ABCD$, на коју можемо применити једначине статике. На горњу хоризонталну пљосан наше запремине дејствује сила паралелна z оси и једнака $-\tau_y v dz$, где је са v означена дебелина греде у растојању u од неутралног слоја. На пљосан AC дејствује хоризонтална сила $\int_{x=-u}^{x=+u} (-\sigma_z) dF$, где је интеграл узет по оном делу пресека, који лежи од AA на доле. Најзад на пљосан BD дејствује хоризонтална сила $\int_{x=-u}^{x=+u} (\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz) dF$. Алгебарски збир ових сила мора бити нула, т. ј.

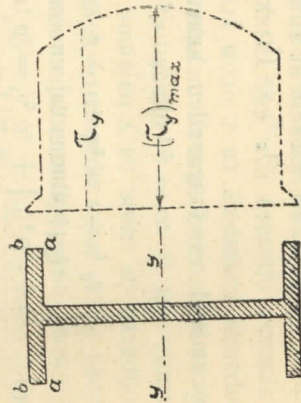
$$\tau_y v dz = \int_{x=-u}^{x=+u} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dF.$$

Кад одредимо $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ из обрасца (72) и уведемо у добивену једначину, наћићемо величину тангенцијалног напона τ_y у тачкама линије AA :

$$\tau_y = \frac{P_x S_y}{J_y v} \dots \dots \dots (92)$$

где је S_y статички моменат у погледу y осе оног дела пресека греде, који лежи испод линије AA' (на сл. шрафирано):

$$S_y = \int_{x=-u}^{x=+u} x dF \dots \dots (93)$$



сл. 42.

Образац (92) обично се употребљава у техничким прорачунима. Применом тог обрасца на **I** профил (сл. 42) лако се да видети, да ће τ_y достићи највеће величине у тачкама неутралног слоја, за које је S_y највеће, а v , које улази у именитељ је дебелина

ребра. Ако занемаримо мале величине $\frac{t}{h}$ према јединици (као што у § 25), онда ћемо за те тачке имати

$$(S_y)_{\max} = sX_{\max} + \frac{1}{2} ex^2_{\max}$$

где је e дебелина ребра. Помоћу овог обрасца и добивених у § 25 израза за J_y и X_{\max} , добићемо за тачке неутралног слоја:

$$\frac{J_y e}{(S_y)_{\max}} = f \left[1 - \frac{1}{3} \frac{f}{2s + 2s_1 + f} \left(\frac{2s_1 + f}{2s + f} - 2 \frac{s_1 - s}{2s_1 + f} \right) \right]$$

У том обрасцу други члан у загради је увек негативан и мањи од $\frac{1}{3}$, дакле је наш израз по величини нешто мањи од површине ребра и можемо ставити

$$\frac{J_y e}{(S_y)_{\max}} = k_1 f = f_1 \dots \dots \dots (94)$$

где је коефицијент $1 > k_1 > \frac{2}{3}$. За ваљане греде обично је k_1 од 0,80 до 0,85, а за састављене из лимова је око 0,90 и више; за правоугаони пресек је $k_1 = 0,67$, а за кружни 0,75. Кад уведемо ту ознаку у једначину (92), добићемо

$$(\tau_y)_{\max} = \frac{P_x}{f_1} \dots \dots \dots (95)$$

Кад имамо једначине (72) и (92) за компоненталне напоне σ_z и τ_y , а занемаримо према горе реченом τ_x , онда можемо из једначине (14) наћи за сваку тачку величине главних напона. У нашем ће случају ($\sigma_x = \sigma_y = \tau_z = \tau_x = 0$), та једначина имати облик:

$$\sigma_1^2 (\sigma_z - \sigma_1) + \sigma_1 \tau_y^2 = 0,$$

одакле

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_z - \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_y^2}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma_z + \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_y^2} \dots (96)$$

За одређивање правца σ_2 имамо из једначина (15):

$$a_2 = 0; b_2 = -\tau_y^2; c_2 = 0; S_2 = -\tau_y^2,$$

одакле

$$\cos \alpha_2 = 0; \cos \beta_2 = 1; \cos \gamma_2 = 0,$$

т. ј. напони σ_1 и σ_3 леже у равни паралелној xz равни. За правац σ_1 имамо:

$$a_1 = -\sigma_1 (\sigma_z - \sigma_1) = \tau_y^2;$$

$$b_1 = -\sigma_1 (\sigma_z - \sigma_1) - \tau_y^2 = 0;$$

$$c_1 = \sigma_1^2; S_1 = \sigma_1^2 + \tau_y^2,$$

одакле

$$\cos \alpha_1 = \frac{\tau_y}{\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_y^2}}; \cos \beta_1 = 0; \cos \gamma_1 = -\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \tau_y^2}},$$

при томе су $\cos \alpha_1$ и $\cos \gamma_1$ различитог знака на основу прве од једначина (15). Правац σ_3 је управан на нађене правце σ_1 и σ_2 . Елипсоид тоталних напона прелази у елипсу, чија је раван паралелна xz равни, а површина нормалних напона у два цилиндра, чије су изводнице паралелне у оси, а водилце су две коњуговане хиперболе.

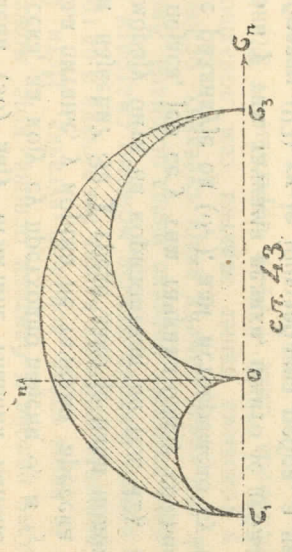
Од три пара тангенцијалних напона:

$$\left. \begin{aligned} \tau_I &= \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sigma_z + \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_y^2} \right), \\ \tau_{II} &= \pm \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_y^2}, \\ \tau_{III} &= \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sigma_z - \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_y^2} \right), \end{aligned} \right\} \dots \dots (97)$$

највећи је, очевидно, τ_{II} ; он напада раван која пролази кроз σ_2 .

Напрегнуто стање је представљено на сл 43. графички.

Из нађених величина косинуса $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ види се, да је



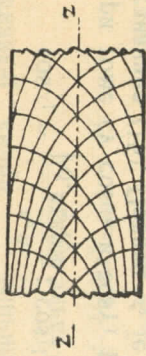
сл. 43

одакле

$$tg 2\gamma_1 = \frac{\sigma_1 \tau_y}{\sigma_1^2 - \tau_y^2} \dots \dots \dots (98)$$

Помоћу овог обрасца можемо за сваку тачку уздужног пресека греде наћи правац σ_1 и управљен на њега правац σ_3 . Из обрасца се види, да у највише удаљеним тачкама од неутралног слоја, где је $\tau_y = 0$, правац σ_1 , одн. σ_2 , је паралелан x , одн. z оси; у тачкама близу неутралног слоја, где је $\sigma_z = 0$, ови правци затварају са z осом углове од 45° . Изаберемо на уздужном пресеку (сл. 44) тачку и конструишемо за њу правце σ_1 и σ_3 , а затим узевши на тим правцима две друге тачке близу прве, конструишемо за те тачке главне правце, на сваком од њих

узмемо опет тачке и т. д. Кад спојимо све те тачке, добићемо на нашем пресеку две фамилије узајамно ортогоналних кривих линија, које се зову *трајекторије напона* и показују промену главних праваца при постепеном прелазу од тачака, распоређених у неутралном слоју, са којим оне затварају углове од по 45° , ка тачкама спољне површине, према којој се трајекторије асимптотички приближавају.



сл. 44.

Из једначина (96) налазимо и величине напора:

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \frac{1}{2} (1 - \nu) \sigma_z - (1 + \nu) \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_y^2}, \\ E\varepsilon_2 &= -\nu \sigma_z, \\ E\varepsilon_3 &= \frac{1}{2} (1 - \nu) \sigma_z + (1 + \nu) \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_y^2}, \end{aligned} \right\} \dots (99)$$

Ови се изрази такође често употребљавају при прорачуну Обрасци (96) дају величине главних напона у ма којој тачки пресека, за коју су претходно нађени σ_z и τ_y . Природно се поставља питање, у којима ће тачкама пресека главни напони бити највећи? За **I** греде лако је наћи положај тих тачака оне морају бити на хоризонталу *aa* (сл. 42), која одваја ребро од појаса, јер се у тим тачкама близу спољне површине σ_z мало се разликује од σ_z^{\max} , али истовремено су и тангенцијални напони у тим тачкама велики, пошто је дебелина ν , која улази у образац (92) ту је још дебелина ребра, а није ширина појаса, као у тачкама више удаљеним од неутралне осе.

За израчунавање главних напона у тим тачкама треба претходно наћи за њих σ_z и τ_y . Ако је $(\sigma_z)_{\max}$ већ раније нађено онда множећи га са коефицијентом $(1 - \frac{t}{x_{\max}})$, добићемо σ_z за наше тачке. Да би нашли тангенцијалне напоне из обрасца (92) морамо израчунати величину

$$\frac{J_y e}{(S_y)_0} = f_2,$$

где је $(S_y)_0$ статички моменат мањег појаса у погледу на неутралну осу. Ако занемаримо, као и пре мале величине:

$\frac{t}{h}$ према јединици, добићемо

$$f_2 = f \left[1 + \frac{1}{6} \frac{f}{s} \frac{4s_1 - 2s + f}{2s_1 + f} \right] = k_2 f; \dots (101)$$

други члан у загради је позитиван и мали према јединици, дакле f_2 је скоро једнако f .

Нађени обрасци (72), (92), (96) и (99) одређују нормалне, тангенцијалне и главне напоне и напоре у свакој тачки греде, аксијално напрегнуте силама $\pm P_z$ и истовремено савијене силама $\pm P_x$ и $\pm P_y$ и спреговима $\pm M_x$ и $\pm M_y$. Ми смо се заиста при проучавању тангенцијалних напона ограничили на савијање у xz равни, али је очевидно, да се сви добивени закључци могу применити и на савијање у равни yz , ако само заменимо узајамно x и y .

Ми смо испитивали до сад греду, која је на својим основима оптерећена силама и спреговима. И ако се расподела тих сила по површинама основа није поклапала са оном, коју тражи Сен-Венанов решење, опет ће то изазвати, као што већ знамо, само локалне напоне у близини основа, које можемо занемарити, ако је наша греда довољно дугачка. Исти Сен-Венанов постулат допушта примену наших закључака и на греду са више ослонаца, пошто њихове отпоре можемо сматрати као силе и спрегове, који нападају пресеке изнад ослонаца. Ако замислимо издвојеним део греде између двају суседних ослонаца. тај ће део бити у условима нашег задатка сем локалних напона у близини ослонаца. Силе $\pm P_x$ и спрегови $\pm M_y$ биће у том случају трансверзалне силе R_x и нападни моменти M_y у пресецима изнад ослонаца, који ће представити утицај одсечених делова греде на издвојени део. Наравно, такво занемарење локалних напона је допуштено само у случају, кад је дужина издвојеног дела неколико пута већа од попречних димензија греде.

Аналого можемо применити наше закључке на греду оптерећену на своје распону са више концентрисаних терета, и то по цену допуштања локалних напона близу оптерећених пресека. У техничкој пракси принуђени смо ићи и даље, и то примењивати наше закључке и на греде оптерећене подељеним теретом. Неколико теориски испитаних случајева показују, да су грешке од таквих примена мале, ако је опет дужина греде неколико пута већа од њених попречних димензија.

§ 28. Еластична линија конзоле.

Помоћу нађених израза за σ_z и τ_y код греде, чије основе нападају силе и спрегови, можемо из једначина (35) наћи једначину еластичне линије:

$$u_0 = - \int_0^z \int_0^z \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right)_{x=0} dz dz + \int_0^z (\gamma_y)_{x=0} dz,$$

или:

$$u_0 = \frac{1}{EJ_y} \int_0^z \int_0^z M_y dz dz + \frac{1}{Gf_1} \int_0^z R_x dz, \dots \dots \dots (102)$$

где је M_y нападни моменат, а R_x трансверзална сила у пресеку. Први члан у изразу (102)

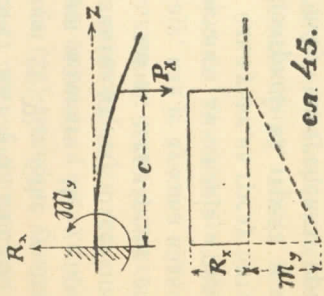
$$u_1 = \frac{1}{EJ_y} \int_0^z M_y dz dz \dots \dots \dots (103)$$

зове се угиб услед савијања, а други:

$$u_2 = \frac{1}{Gf_1} \int_0^z R_x dz \dots \dots \dots (104)$$

угиб услед смицања. Ова последња величина обично је мала према првој и зато се у техничкој примени често занемарују.*) Диференцирањем по z добићемо из израза (103) кривину еластичне линије услед савијања:

$$u_1'' = \frac{M_y}{EJ_y} \dots \dots \dots (105)$$



сл. 45.

У најпростијем случају конзоле оптерећене концентрисаним шрегом P_x у распојању с од укљештеног краја (сл. 45), знамо, да се трансверзална сила и нападни моменат одређују из једначина:

$$R_x = P_x - P_x,$$

$$M_y = P_x \{ (c - z) + (z - c) \};$$

при томе треба додавати у овим изразима чланове десно од

*) Код високих греда I пресека то занемарење може дати осетну грешку.

вертикалне црте само за пресеке, који леже десно од оптерећеног пресека, т. ј. за $z > c$. Кад уведемо израз за M_y у једначину (102), имаћемо

$$u_1 = P_x EJ_y \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{z}{l} \right)^2 \left(3 \frac{c}{l} - \frac{z}{l} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{z-c}{l} \right)^3 \right\} \dots \dots (106)$$

Коефицијент $\frac{l^3}{EJ_y}$, који зависи од димензија греде и еластичности материјала, а карактерише њену гпкост обележићемо са B ; функције од z и c у заграда обележићемо са $\varphi(z, c)$ и $\chi(z, c)$. Тада имамо

$$u_1 = P_x B \left\{ \varphi(z, c) + \chi(z, c) \right\} \dots \dots \dots (107)$$

Највећи угиб биће наравно на слободном крају, и то:

$$(u_1)_{z=l} = \frac{1}{6} P_x B \frac{c^2}{l^2} \left(3 - \frac{c}{l} \right) \dots \dots \dots (108)$$

Угиб оптерећеног пресека биће једнак:

$$(u_1)_{z=c} = \frac{1}{3} P_x B \left(\frac{c}{l} \right)^3 \dots \dots \dots (109)$$

Најзад угиб услед смицања добићемо из (104):

$$u_2 = \frac{P_x}{Gf_1} \left\{ z - (z-c) \right\} \dots \dots \dots (110)$$

Из једначина (106) и (110) лако је видети, да је угиб у пресеку z , изазван оптерећењем пресека c , једнак угибу пресека c , изазваном оптерећењем пресека z . То је т. зв. теорем узјамности, који је формулисао *J. C. Maxwell*, а који обухвата многе физичке појаве.

Однос угиба услед смицања према угибу услед савијања једнак је за оптерећени пресек

$$\frac{Gf_1 B c^2}{3l^3} = 6 (1 + \nu) \frac{F i_y^2}{f_1 c^2}.$$

Ако је $\frac{F}{f_1}$ близу јединице, онда нађени однос можемо

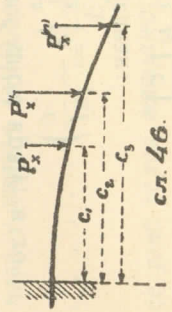
сматрати малом величином другог реда према јединици, јер је i_y мало према c . Као што смо видели биће $\frac{F}{f_1} = \frac{3}{2}$ за правоугаони пресек, а $\frac{4}{3}$ за кружни, али за I греде тај однос може бити 2 и више, тако да је производ $6 (1 + \nu) \frac{F}{f_1}$ истог реда,

као и $\frac{c}{i_y}$, због чега ће однос угиба бити мала величина само првог реда према јединици.

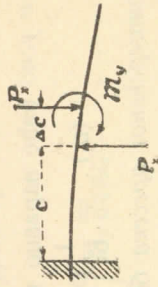
Када је *коизола опшерећена са више концентрисаних шереша* $P_x', P_x'', \dots, P_x^{(n)}$ (сл. 46), који се налазе у растојањима c_1, c_2, \dots, c_n , од укљештеног краја добиће се угиб сабирањем дотичних угиба услед сваког терета посебиче, т. ј.

$$u_1 = B \left\{ \sum_{i=1}^n P_x^{(i)} \varphi(z, c_i) + \sum_{i=1}^k P_x^{(0)} \chi(z, c_i) \right\}, \dots \dots \dots (111)$$

$$u_2 = \frac{1}{Gf_1} \left\{ z \sum_{i=1}^n P_x^{(i)} - \sum_{i=1}^k P_x^{(0)} (z - c) \right\}, \dots \dots \dots (111)$$



сл. 46.



сл. 47.

где је $i = 1, 2, \dots, n$, а величина k одређена је условом $c_k < z < c_{k+1}$.

У том случају, када греду нападају две силе: $-P_x$ у пресеку $c + P_x$ у пресеку $c + \Delta c$, т. ј. када је *грета опшерећена спрегом* (сл. 47) $\mathfrak{M}_y = P_x \Delta c$, величина угиба биће једнака:

$$u_1 = BP_x \left\{ -\varphi(z, c) + \varphi(z, c + \Delta c) - \left[\chi(z, c) + \chi(z, c + \Delta c) \right] \right\} =$$

$$= B \mathfrak{M}_y \left\{ \frac{\partial \varphi(z, c)}{\partial c} + \left| \frac{\partial \chi(z, c)}{\partial c} \right| \right\},$$

или, ако уведемо на место φ и χ њихове изразе из једначине (100);

$$u_1 = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_y}{l} B \left\{ \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left| \left(\frac{z-c}{l} \right)^2 \right| \right\} \dots \dots \dots (112)$$

Угиб у опшерећеном пресеку једнак је:

$$(u_1)_{z=c} = \frac{\mathfrak{M}_y c^2}{2EJ_y} \dots \dots \dots (113)$$

а угиб на слободном крају:

$$(u_1)_{z=1} = \frac{\mathfrak{M}_y}{EJ_y} c (l - \frac{1}{2}c) \dots \dots \dots (114)$$

Пређимо сад на угиб услед *подељеног шереша* (сл. 48)

На елементарни део дужине греде dc , који се налази између пресека c и $c + dc$, дејствује елементарни терет $q_x dc$, где је $q_x(c)$ оптерећење на јединицу дужине греде. Овом елементарном терету одговара у пресеку z угиб:

$$du_1 = B \left\{ \varphi(z, c) + \left[\chi(z, c) \right] q_x(c) dc \right\},$$

где се члан иза вертикалне додаје само $z > c$. Сабирајући угибе услед свију елементарних терета, добивамо:

$$u_1 = B \left\{ \int_0^z \varphi(z, c) q_x(c) dc + \int_0^z \chi(z, c) q_x(c) dc \right\} \dots \dots \dots (115)$$

где су границе интеграције у другом члану 0 и z , пошто тамо c мора бити увек мање од z . Аналогно ће угиб услед смицања бити

$$u_2 = \frac{1}{Gf_1} \left\{ z \int_0^z q_x(c) dc + \int_0^z q_x(c) dc \right\} \dots \dots \dots (116)$$

На пр., у најпростијем случају (сл. 49) *једнако подељеног шереша*

$$q_x(c) = \text{const} = q_0,$$

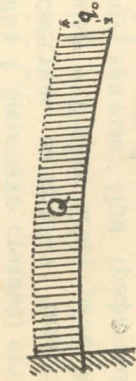
имаћемо ако обележимо са Q величину целокупног терета:

$$u_1 = \frac{QB}{24} \frac{z^2}{l^2} \left(6 - 4 \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2} \right),$$

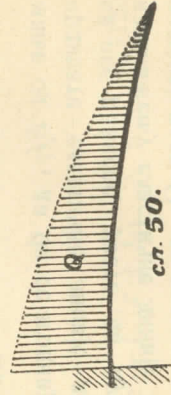
$$u_2 = \frac{Q}{Gf_1} \frac{z}{l} (l - \frac{1}{2}z) \dots \dots \dots (117)$$

дакле:

$$(u_1)_{z=l} = \frac{1}{8} QB; (u_2)_{z=l} = \frac{1}{2} \frac{Q}{Gf_1} l \dots \dots \dots (118)$$



сл. 49.



сл. 50.

За шереш подељен по *проуглу* (сл. 50), је

линија услед смицања добије се из дијаграма нападних момента, ако смањимо њене ординате Gf_1 пута.

§ 29. Еластичне линије просте греде и греде са препустима.

При извођењу једначине (35) за померања тачака везали смо координатне осе са основом греде и на тај смо начин одредили интеграционе константе у тим једначинама. Добивени образац из тих једначина за еластичну линију применили смо без икаквих измена на конзолу, пошто њена основа и везане са њом координатне осе остају непомицне. Али ће се при савијању просте греде лева основа (сл. 52) окренути око у осе, а заједно с њом окренуће се x и z осе. За то, ако хоћемо да се једначине еластичне линије односе x_1 на непокретне осе x_1 и z_1 , од којих прва пролази кроз тежишта основа, а друга је управна на њу, морамо друкчије одредити интеграционе константе у једначинама (35). Општи израз за u_0 биће:

$$u_0 = \frac{1}{EJ_y} \int_0^z M_y dz + \frac{1}{Gf_1} \int_0^z R_x dz + Cz + C_1 \quad (121)$$

где произвољне константе C и C_1 одговарају константама q и p_0, x_0, y_0, z_0 , у основном обрасцу за u , а морају бити одређене из услова, да z оса пролази кроз тежишта основа, т. ј. да је $u_0 = 0$ при $z = 0$ и при $z = l$.

Целокупан угиб u_0 можемо слично угибу конзоле поделити на два угиба, и то угиб услед савијања

$$u_1 = \frac{1}{EJ_y} \int_0^z M_y dz + C'z + C'_1 \dots \quad (122)$$

и угиб услед смицања:

$$u_2 = \frac{1}{Gf_1} \int_0^z R_x dz + C''z + C''_1 \dots \quad (123)$$

Константе C' и C'_1, C'' и C''_1 одређују се из услова, да су u_1 и u_2 једнаки нули при $z = 0$ и при $z = l$.

$$q_x(c) = \frac{2Q(1-c)}{l^2}$$

дакле:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{60} QB \frac{z^2}{l^2} \\ &\left(10 - 10 \frac{z}{l} + 5 \frac{z^2}{l^2} - \frac{z^3}{l^3} \right) \\ u_2 &= \frac{Q}{Gf_1} z \left(1 - \frac{z}{l} + \frac{1}{3} \frac{z^2}{l^2} \right) \end{aligned} \right\} (119)$$

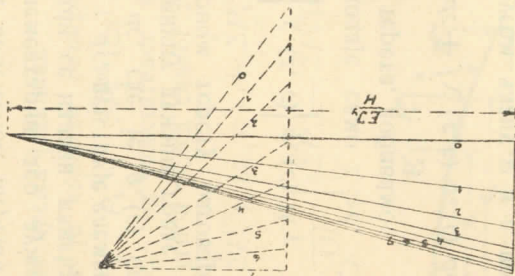
и на слободном крају:

$$\left. \begin{aligned} (u_1)_{z=l} &= \frac{1}{15} QB; \\ (u_2)_{z=l} &= \frac{1}{3} \frac{Ql}{Gf_1} \end{aligned} \right\} (120)$$

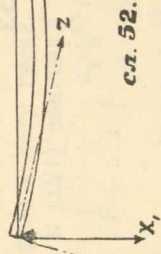
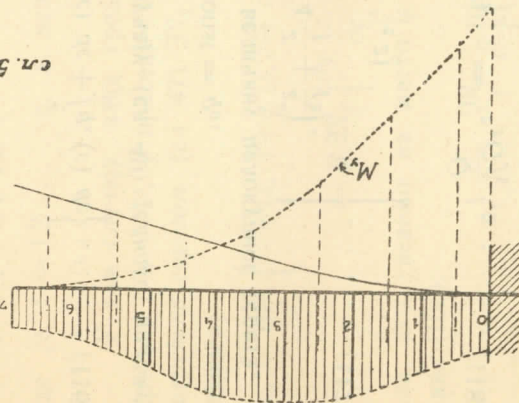
Кад упоредимо једначину (105) са познатом диференцијалном једначином ланчанице:

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} = \frac{q}{H}$$

где је q оптерећење на јединицу дужине ланчанице, а H полно растојање, видимо да се еластична линија поклапа са ланчаницом, чије је оптерећење на јединицу дужине једнако M_y , а полно растојање је EJ_y . На том се оснива графичко изналажење еластичне линије (сл. 51); али се полно растојање обично, узима k (неколико стотина) пута мање од EJ_y , да би се zgodније сместило на цртежу; тада се ординате еластичне линије добијају у k пута већој размери од оне размере, узете за дужину конзоле. При графичком изналажењу еластичне линије конзоле zgodно је узети такав положај пола O , да први зрак буде хоризонталан, тада ће z оса за еластичну линију испасти хоризонтална. Еластична



сл. 51.

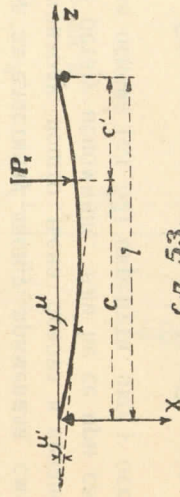


сл. 52.

У случају просте греде оштерењене концентрисаним шешетом P_x (сл. 53.) у растојању c од левог и c' од десног ослоња, имамо за трансверзалну силу R_x и нападни момент M_y познате обрасце:

$$R_x = P_x \frac{c}{l} - P_x,$$

$$M_y = -P_x \frac{c'}{l} z + P_x(z-c),$$



где се чланови иза вертикале додавају, као и пре, само за пресеке, распоређене десно од терета, т. ј. при $z > c$. Кад ставимо ове изразе у једначине (122) и (123) добићемо:

$$u_1 = -\frac{1}{6} \frac{P_x c' z^3}{EJ_y} + C'z + C_1 + \frac{1}{6} \frac{P_x}{EJ_y} (z-c)^3,$$

$$u_2 = \frac{P_x}{Gf_1} \left\{ \frac{c'z}{l} - (z-c) \right\} + C''z + C_1''.$$

Из услова $u_1 = u_2 = 0$ при $z = 0$, наћићемо $C_1' = C_1'' = 0$, а услов $u_1 = u_2 = 0$ при $z = l$ даје:

$$\frac{1}{6} \frac{P_x c' l^3}{EJ_y} + C'l + \frac{1}{6} \frac{P_x c^3}{EJ_y} = 0,$$

$$C'' = 0.$$

Кад одредимо одавде C' и C'' и ставимо у нађене изразе за угибе, имаћемо

$$u_1 = P_x B \left\{ \frac{1}{6} \frac{c'}{l} z \left(1 - \frac{c'^2}{l^2} - \frac{z^2}{l^2} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{z-c}{l} \right)^3 \right\}. \quad (124)$$

$$u_2 = \frac{P_x}{Gf_1} \left\{ \frac{c'}{l} z - (z-c) \right\} \dots \dots \dots (125)$$

Први члан у загради у изразу за u_1 означићемо даље са $\psi(z, c)$, а други, као и пре, са $\chi(z, c)$.

Диференцирањем по z , нађених израза за угибе, наћићемо тангенсе углова нагиба тангенте на еластичну линију, које, пошто су мали, можемо сматрати, да су једнаки самим угловима. Ако ставимо у тим изводима $z = 0$ и $z = l$, добићемо углове нагиба еластичне линије на ослоњима, који ће нам бити потребни за прорачунавање статички неодређених греда. На пр.

за нагибе крајева еластичне линије услед савијања имаћемо:

$$(u_1)'_0 = \frac{P_x B c}{6l} \frac{c'}{l} \left(1 + \frac{c'}{l} \right); (u_1)'_l = -\frac{P_x B c c'}{6l} \frac{c'}{l} \left(1 + \frac{c}{l} \right) \quad (126)$$

Пређимо сад на изналажење највећег угиба $(u_1)_{\max}$, али пре свега одредимо услове, под којима ће он лежати у левом делу греде, т. ј. у пресеку $z_1 < c$. Кад диференцирамо $\psi(z, c)$ и изравнамо са нулом, имаћемо

$$z_1^2 = \frac{1}{3} (l^2 - c'^2),$$

дакле, да би z_1 било мање од c , треба да је $\frac{1}{3} (l^2 - c'^2) < c^2 = (l - c)^2$,

или

$$c' < \frac{1}{2} l < c$$

т. ј. највећи угиб лежи у дужем делу греде. Тада је

$$0,5 l < z_1 = \sqrt{\frac{l^2 - c'^2}{3}} < 0,577 l, \dots \dots \dots (127)$$

а из израза (124)

$$(u_1)_{\max} = \frac{1}{3} P_x B \frac{c'}{l} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{c'^2}{l^2} \right)^{3/2} \right] \dots \dots \dots (128)$$

За случај $c' > \frac{1}{2} l$, т. ј. када се z_1 налази у десном делу, нашли би аналого

$$0,423 l < z_1 = l - \sqrt{\frac{l^2 - c'^2}{3}} < 0,5 l \dots \dots (129)$$

а према томе

$$(u_1)_{\max} = \frac{1}{3} P_x B \frac{c}{l} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{c^2}{l^2} \right)^{3/2} \right] \dots \dots \dots (130)$$

При $c = c'$ оба се израза (128) и (130), разуме се, поклапају и дају,

$$(u_1)_{\max} = \frac{1}{48} P_x B \dots \dots \dots (131)$$

Из нађених израза (127) и (129) видимо, да се уопште највећи угиб налази увек између пресека $0,423 l$ и $0,577 l$, т. ј. у близини средине греде. Узевши у обзир, да се свака функција мало мења у близини свог *максимума*, можемо допустити у техничким прорачунима замену највећег угиба угибом у средини распона, који је при $c > \frac{1}{2} l$ једнак

$$(u_1)_{z=\frac{1}{2}l} = \frac{1}{12} P_x B \frac{c'}{l} \left(\frac{3}{4} - \frac{c'^2}{l^2} \right) \dots \dots \dots (132)$$

при $c' > 1/2 l$ у том обрасцу треба заменити c' са c .
Угиб у опшерећеном пресеку једнак је:

$$(u_1)_{z=c} = \frac{1}{3} P_x B \left(\frac{c}{l} \right)^2 \left(\frac{c'}{l} \right)^2 \dots \dots \dots (133)$$



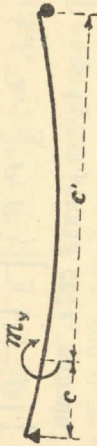
сл. 54.

Када имамо више кон-
центрисаних терета (сл. 54)
 $P_x', P_x'', \dots, P_x^{(n)}$, који се на-
лазе у растојањима $c_1, c_2,$
 \dots, c_n од левог краја, биће
угиб аналого једначини (111):

$$u_1 = B \left\{ \sum_{i=1}^n P_x^{(i)} \psi(z, c_i) + \sum_{i=1}^k P_x^{(i)} \chi(z, c_i) \right\} \dots \dots \dots (134)$$

$$u_2 = \frac{1}{Gf_1} \left\{ z \sum_{i=1}^n P_x^{(i)} c_i' - \sum_{i=1}^k P_x^{(i)} (z - c_i) \right\} \dots \dots \dots (134)$$

Када је греда опшерећена спрегом \mathfrak{M}_y у растојању c од
левог краја (сл. 55), наћићемо слично једначини (112):



сл. 55.

$$u_1 = B \mathfrak{M}_y \left\{ \frac{\partial \psi(z, c)}{\partial c} + \left| \frac{\partial \chi(z, c)}{\partial c} \right| \right\} \dots \dots \dots (135)$$

$$= - \frac{\mathfrak{M}_y B}{l} \left\{ \frac{1}{6} \frac{z}{l} \left(1 - 3 \frac{c'^2}{l^2} - \frac{z^2}{l^2} \right) + \left| \frac{1}{2} \left(\frac{z - c}{l} \right)^2 \right| \right\} \dots \dots \dots (135)$$

а углове нагиба еластичне линије на крајевима $z = 0$ и $z = l$

$$(u_1)'_0 = - \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{M}_y B}{l^2} \left(1 - 3 \frac{c'^2}{l^2} \right) \dots \dots \dots (136)$$

$$(u_1)'_l = - \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{M}_y B}{l^2} \left(1 - 3 \frac{c^2}{l^2} \right) \dots \dots \dots (136)$$

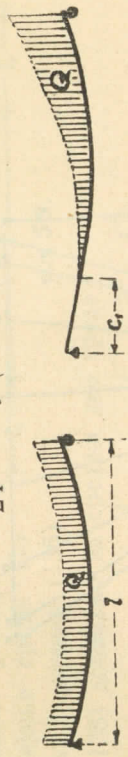
За континуално опшерећење $q(c)$ имаћемо слично једна-
чинама (115) и (116):

$$u_1 = B \left[\int_0^l \psi(z, c) q(c) dc + \int_0^z \chi(z, c) q(c) dc \right] \dots \dots \dots (137)$$

$$u_2 = \frac{1}{Gf_1} \left[z \int_0^l c q(c) dc - \int_0^z (z - c) q(c) dc \right] \dots \dots \dots (137)$$

Из ових једначина имамо за случај једнолико подељеног ше-
рета Q (сл. 56)

$$u_1 = \frac{1}{24} QB \frac{z}{l} \left(1 - 2 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right) \dots \dots \dots (138)$$



сл. 56

сл. 57.

одакле

$$(u_1)_{\max} = \frac{5}{384} QB \dots \dots \dots (139)$$

$$(u_1)'_0 = - (u_1)'_l = \frac{1}{24} QB \dots \dots \dots (140)$$

За случај шерепа расподељеног по шпоуглу на једном делу
раслона (сл. 57.) добивамо из једначина (137):

$$u_1 = \frac{1}{180} QB \left\{ \left(7 + 6 \frac{c_1}{l} - 3 \frac{c_1^2}{l^2} - 10 \frac{z^2}{l^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{c_1}{l} \right) \frac{z}{l} + \left| 3 \frac{(z - c_1)^5}{l^3 (l - c_1)^2} \right| \dots \dots \dots (141) \right.$$

$$(u_1)'_0 = \frac{1}{180} \frac{QB}{l} \left(7 + 6 \frac{c_1}{l} - 3 \frac{c_1^2}{l^2} \right) \left(1 - \frac{c_1}{l} \right) \dots \dots \dots (142)$$

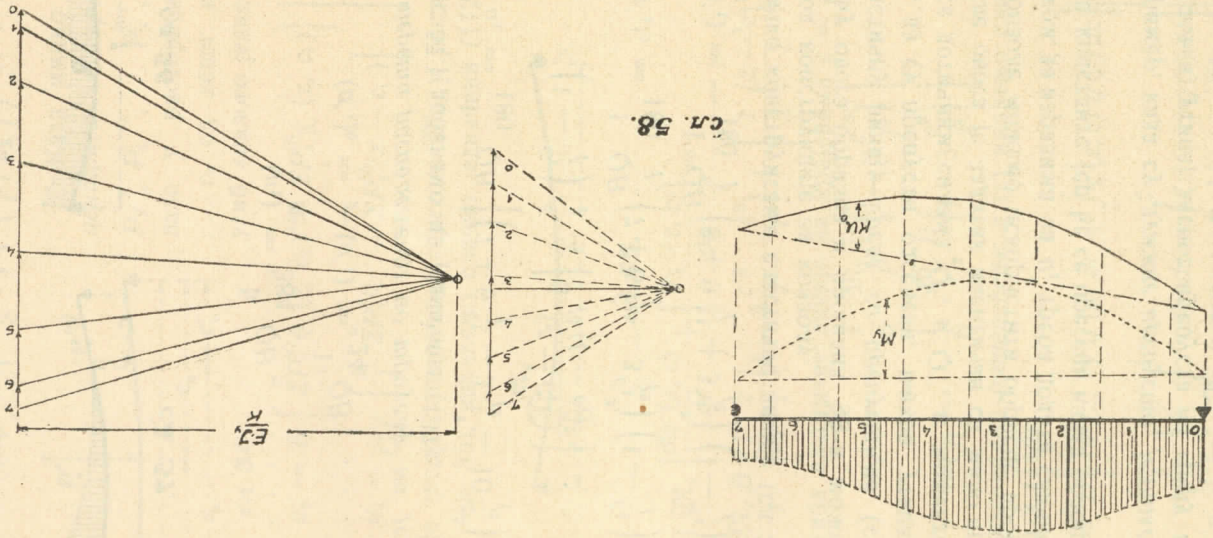
$$(u_1)'_l = - \frac{1}{180} \frac{QB}{l} \left(8 + 9 \frac{c_1}{l} + 3 \frac{c_1^2}{l^2} \right) \left(1 - \frac{c_1}{l} \right) \dots \dots \dots (142)$$

Графичко конструисање еластичне линије (сл. 58) мало се
разликује од конструкије за конзолу.

Помоћу овога образаца и прошлих $\mathfrak{S}\mathfrak{S}$ -а можемо такође
наћи и еластичну линију греде са препустима (сл. 59). Ако
замислимо, да су препусти одсечени, њихов утицај на греду
замениће се дотичним силама Q'_x и Q''_x и моментима \mathfrak{M}'_y и
 \mathfrak{M}''_y . После овога је задатак идентичан са мало пре решеним.
За саме конзоле можемо искористити обрасте прошлог \mathfrak{S} -а са
том разликом, да изразима за u_1 треба додати слично једн. (121)
произвољне константе јер ће се пресеци изнад ослонаца, уопште
окренути.

На пример, када су дужине препуста једнаке, а шереш
једнако подељен, утицај десног препуста на греду може се за-
менити силом $Q''_x = q_x l$, и моментом $\mathfrak{M}''_y = 1/2 q_x l^2$, а утицај

левог прелупста силом $Q'_x = Q''_x = q'_x l$, и моментом $M'_y = -M''_y = -\frac{1}{2} q'_x l^2$. Осим тих сила и момената на греду дејствује и једнако подељени терет $q'_x l$. Силе Q'_x и Q''_x на-



сл. 58.

падају пресеке непо-
средно изнад осло-
наца, зато неће имати
никаквог утицаја на
савијање греде. По-
моћу једначина (135)

и (138) добијамо за средњи део греде:

$$u_1 = \frac{1}{24} q_x^0 B z \left(1 - 2 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} q_x^0 B \frac{l_1^2}{l} \left\{ \frac{1}{6} \frac{z}{l} \left(2 + \frac{z^2}{l^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l^2} + \frac{1}{6} \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z^2}{l^2} \right) \right\} =$$

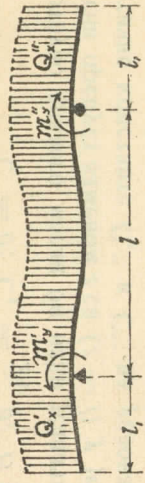
$$= \frac{1}{24} q_x^0 B z \left\{ 1 - 2 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} - 6 \frac{l_1^2}{l^2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{24} q_x^0 B z \left(1 - \frac{z}{l} \right) \left(1 + \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} - 6 \frac{l_1^2}{l^2} \right);$$

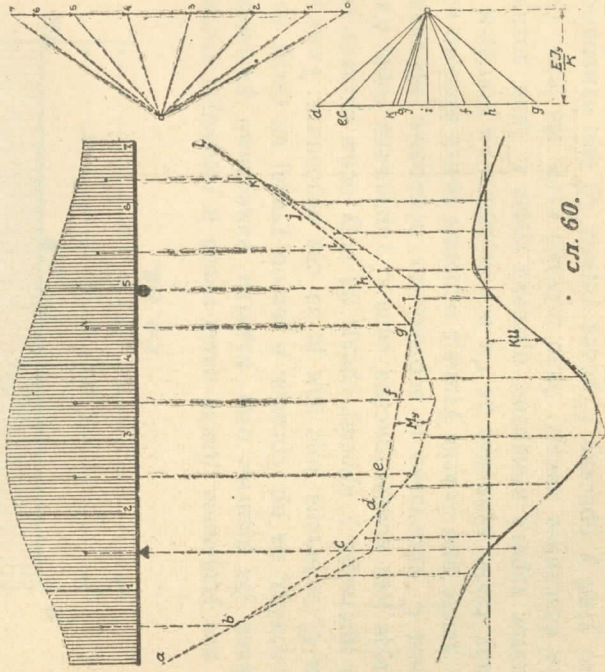
за леви прелупст добићемо из једначине (117) заменом z са $-z$:

$$u_1 = \frac{1}{24} q_x^0 B \frac{z^2}{l_1^2} \left(6 + 4 \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l_1^2} \right) + C'z + C'_1$$

Сад нам остаје да одредимо константе C' и C'_1 из услова, да ординате еластичних линија и углови њихових нагиба у пресеку изнад ослонаца буду једнаки за обе греде; то даје:



сл. 59.



сл. 60.

$$C' = 0; \quad C_1' = \frac{1}{24} q_0^x B \left(1 - 6 \frac{l_1^2}{l^2} \right).$$

Потпуно аналого могли би наћи једначину еластичне линије за десни препуст заменом z са $(z - l)$ у једначини (117) и одредити дотичне константе C_1'' и C_2'' из услова једнакости ордината и угла нагиба у пресеку $z = l$. Највеће су величине угиба у средини распона и на крајевима. Помоћу наведеног обрасца за еластичну линију може се доказати, да је при $l > 0,403 l$ угиб на крајевима већи од угиба у средини.

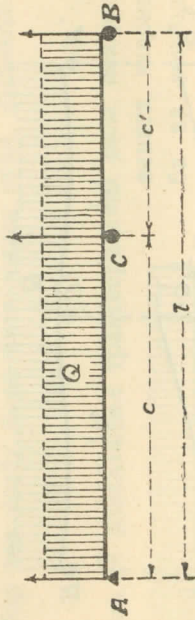
На сл. 60 конструисана је еластична линија греде са препустима графички.

Глава VI.

Савијање статички неодређених греда. Извијање.

§ 30. Изналажење отпора ослонаца.

Из механике је познато да статички неодређеном зовемо ону греду код које је број података који одређује утицај ослонаца на греду већи од одговарајућег броја једначина равнотеже. На пр. за греду са *шри ослонаца равномерно оптерећену* (сл. 61), утицај се сваког ослонаца састоји из вертикалне силе, међутим за равнотежу паралелних сила у равни статика нам даје



сл. 61.

само две једначине. Дакле наша греда је *једануш* статички неодређена. За решење овог задатка замислимо уклоњен један од ослонаца, на пр. средњи, а његов утицај на греду заменимо силом C , величина које нам је за сад непозната. Тиме се наша греда претвара у *просну* греду, на коју осим задатог терета Q дејствује још концентрисана сила C управљена горе. Уклоњени ослонац C спречавао је вертикално померање пресека изнад њега, дакле при замени утицаја ослонаца силом морамо изабрати ту силу такве величине да би под заједничким утицајем те силе и задатог терета померање пресека греде C (или дотична ордината еластичне линије) било једнако нули. Из једн. (13b) добијамо угиб у пресеку C услед терета Q , ако заменимо z са c :

$$(u_1)_Q = \frac{1}{24} QB \frac{c}{l} \left(1 - 2 \frac{c^2}{l^2} + \frac{c^3}{l^3} \right),$$

а из једн. (133) угиб у истом пресеку од силе C управљене горе:

$$(u_1)_C = -\frac{1}{3} CB \left(\frac{c}{l} \right)^2 \left(\frac{c'}{l} \right),$$

Збир тих угиба мора бити нула:

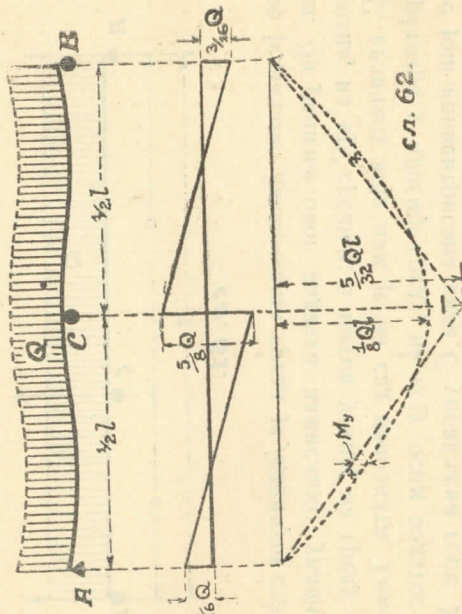
$$\frac{1}{24} QB \frac{c}{l} \left(1 - 2 \frac{c^2}{l^2} + \frac{c^3}{l^3} \right) - \frac{1}{3} CB \left(\frac{c}{l} \right)^2 \left(\frac{c'}{l} \right) = 0$$

одакле:

$$C = \frac{1}{8} Q \frac{l^2 + lc - c^2}{cc'} \dots \dots \dots (143)$$

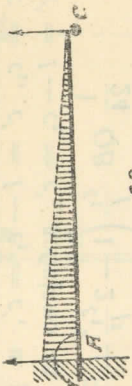
Даље изналажење нападаних момената, трансверзалних сила напона и угиба за дату греду не представља тешкоћа, пошто ју сматрамо као просту греду оптерећену једнолико подељеним теретом Q и познатом концентрисаном силом C . У том случају, *када је* $c = c' = \frac{1}{2} l$, биће величина отпора $C = \frac{5}{8} Q$.

Дотични дијаграми трансверзалних сила и нападаних момената представљени су на сл. 62.



Узећемо сад, као други пример, греду (сл. 63), чији је један крај A укљештен а други C је слободно подупрт. Терет је подељен по проуглу. Ова се греда разликује од конзоле тиме, што је додат десни ослонац C . Утицај његов на греду састоји се из силе C , која спречава вертикално поме-

рање десног краја. Утицај пак левог ослонца, као што знамо, састоји се из силе A , која не допушта вертикално померање левог краја греде и спрега M ,



сл. 63.

који спречава окретања њене леве основе. Дакле у датом случају треба да нађемо три величине (две силе и један моменат), међутим статика паралелних сила у равни даје само две једначине равнотеже, т.ј. и ова је греда *једанш* статички недређена. Ако утицај десног лежишта на греду заменимо силом C , имаћемо конзолу, оптерећену осим задатог терета још и на крају концентрисаном силом C . Величину те силе C морамо наћи из услова, да је ордината еластичне линије на десном крају нула. Из једн. (120) имамо угиб од задатог оптерећења

$$(u_1)_Q = \frac{1}{15} QB,$$

а из једн. (108) од силе C , управљене на горе за $z = l$:

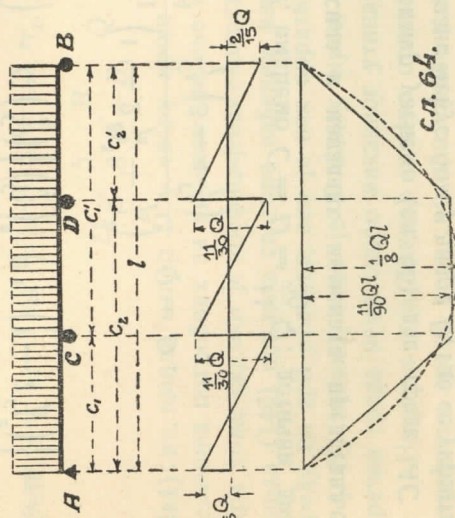
$$(u_1)_C = -\frac{1}{3} CB;$$

пошто збир тих угибу мора бити једнак нули, налазимо, да је

$$C = \frac{1}{5} Q \dots \dots \dots (144)$$

После тога се изналажење трансверзалних сила, нападаних момената, напона и угиба за конзолу, коју нападају силе Q и C , врши помоћу познатих образаца.

Ако у првом од наших примера додамо још један ослонац D (сл. 64), имаћемо четири отпора, али опет само две једначине равнотеже, т.ј. задатак биће *дваш* статички неопређен.



Утицај средњих лежишта C и D можемо заменити силама, ве-

личине којих одређујемо из услова, да су угиби у тим пресецима једнаки нули. Помоћу једн. (138) са $z = c_1$, једн. (133) са $c = c_1$, $c' = l - c_1 = c'$, и једн. (124) са $z = c_1$, $c = c_2$, $c' = l - c_2 = c'_2$ добијамо за пресек С:

$$\frac{1}{24} QB \frac{c_1}{l} \left(1 - 2 \frac{c_1^2}{l^2} + \frac{c_1^3}{l^3} \right) - \frac{1}{3} CB \left(\frac{c_1}{l} \right)^2 \left(\frac{c_1'}{l} \right)^2 - \frac{1}{6} DB \frac{c_2'}{l} \frac{c_1}{l} \left(1 - \frac{c_2'^2}{l^2} - \frac{c_1^2}{l^2} \right) = 0;$$

слично овом за пресек D из једн. (138) са $z = c_2$, једначине (124) са $c = c_2$, $c' = c'' = c'$ и једн. (133) са $c = c_2$, $c' = c'_2$:

$$\frac{1}{24} QB \frac{c_2}{l} \left(1 - 2 \frac{c_2^2}{l^2} + \frac{c_2^3}{l^3} \right) - \frac{1}{6} CB \left\{ \frac{c_1'}{l} \frac{c_2}{l} \left(1 - \frac{c_1^2}{l^2} - \frac{c_2^2}{l^2} \right) + \left(\frac{c_2 - c_1}{l} \right)^3 \right\} - \frac{1}{3} DB \left(\frac{c_2}{l} \right)^2 \left(\frac{c_2'}{l} \right)^2 = 0$$

Сада би требало решити ове две једначине но С и D, после тога се задатак своди на просту греду, оптерећену једнако подељеним теретом Q и концентрисаним силама С и D. Решавање нађених једначина не представља тешкоћа, поготово, ако у њима заменимо слова са задатим бројевима. У случају када су ослонци С и D симетрично распоређени, т. ј. за $c_1 = c'_2$ и $c'_1 = c_2$, имаћемо да решимо само једну једначину, пошто је због симетричне расподеле терета $C = D$.

$$\frac{1}{8} Q \left(1 - 2 \frac{c_1^2}{l^2} + \frac{c_1^3}{l^3} \right) - C \left(\frac{c}{l} \right) \left\{ \left(\frac{c_1'}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{c_1^2}{l^2} \right) \right\} = 0$$

одакле:

$$C = \frac{1}{4} \frac{\left(1 - 2 \frac{c_1^2}{l^2} + \frac{c_1^3}{l^3} \right)}{\frac{c_1}{l} \left(3 - 4 \frac{c_1}{l} \right)} Q = D \dots \dots (145)$$

На пр., за $c_1 = \frac{1}{3} l$, имаћемо $C = D = \frac{11}{30} Q$; дотични дијаграм трансверзалних сила и нападних момената представљен је на сл. 64.

Као последњи пример узећемо (сл. 65) две греде АС и А₁С₁, које су криво везане међусобом у чвору D, где се укрштавају; греда АС је оптерећена једнако подељеним теретом Q. Утицај друге греде на прву можемо заменити непознатом си-

лом D, управљеном горе, онда ће утицај прве греде на другу бити престављен силлом исте величине, али супротног смера. Величину те силе морамо одредити из услова, да су величине угиба датих греда у чвору D једнаке.

За прву греду налазимо из једн. (138)

сл. 65.

за $z = c$ и једн. (133) за $P_x = -D$, угиб у чвору:

$$u_1 = \frac{1}{24} QB \frac{c}{l} \left(1 - 2 \frac{c^2}{l^2} + \frac{c^3}{l^3} \right) - \frac{1}{3} DB \left(\frac{c}{l} \right)^2 \left(\frac{c'}{l} \right)^2;$$

друга греда оптерећена је силом D, зато добијамо из једн. (133) за $P_x = D$ њен угиб у истом чвору:

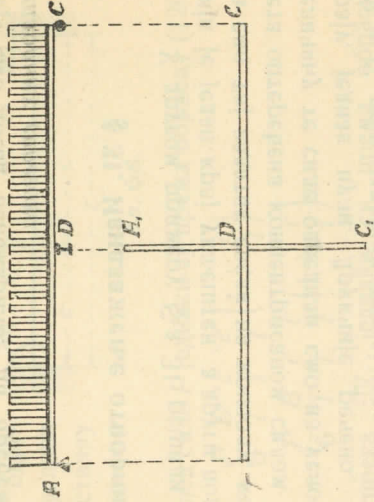
$$u_1 = \frac{1}{3} DB_1 \left(\frac{c_1'}{l_1} \right)^2,$$

где је са B_1 обележен коефицијент гipкости друге греде. Кад изједначимо нађене величине угиба, добићемо једначину, из које налазимо D. На пр., када се чвор налази у средини сваке греде, т. ј. за $\frac{c}{l} = \frac{c'}{l} = \frac{c_1'}{l_1} = \frac{1}{2}$, добијамо

$$D = \frac{5}{8} \frac{B}{B + B_1} Q \dots \dots (146)$$

Кад смо нашли отпор D у чвору врши се даље изналажење величина потребних за димензионисање греде на познати начин. При томе се, ако је коефицијент гipкости друге греде B_1 мали, израз (146) поклапа са горе нађеним изразом из једн. (143) за греду на три ослоња; ако је пак обратно, друга греда гipка, т. ј. B_1 велико онда је D близу нуле, т. ј. таква једна попречна греда нема скоро никаквог утицаја на савијање греде.

Начином изналажења отпора ослоња код статички неодређених греда, који смо применили у овом S-Y, можемо се користити за ма какав број ошпора. На никакве тешкоће нећемо наићи ни онда ако узмемо у обзир и угибе услед смицања,



које смо досад занемарили. Да пређемо сад на одређивање *општорних спрегова*.

§ 31. Изналажење отпорних спрегова.

У другом примеру §-а 31 решили смо задатак о греди, чији је један крај укљештен, а други подупрт, и то на тај начин, да смо тај задатак свели на конзолу, која је осим задатог терега оптерећена концентрисаном силом *S* на слободном крају, величину те силе одредили смо из услова, да је угиб на том крају, једнак нули. Друкчије речено, из трију података *A*, \mathfrak{M} и *S*, који одређују утицај ослонаца на греду, узели смо, као „прекобројну непознату“ силу *S*. Са истим правом можемо узети, као прекобројну непознату, ма какву другу од тих величина. Узмимо, на пр., спрег \mathfrak{M} , т. ј. предпоставимо, да се утицај ослонаца састоји само из отпора *A* и *S* то претвара нашу греду у просту, на коју дејствује сем задатог терега и спрег \mathfrak{M} на њеној левој основи. Величину момента тог спрега можемо узети такву, да би његов утицај на греду био исти, као што и утицај „укљештења“ левог краја, т. ј. да би угао нагиба тангенте на еластичну линију у том пресеку био једнак нули.

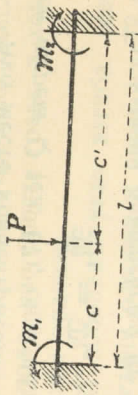
Угао нагиба те тангенте услед троугластог оптерећења биће према обрасцу (142) за $c_1 = 0$ једнак $\frac{2}{45} \frac{QB}{l}$, а услед спрега \mathfrak{M} , који дејствује у супротном смислу, биће према обрасцу (136) за $c' = l$, једнак $-\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}B}{l^2}$. Кад изједначимо збир тих углова са нулом, добијамо једначину, из које налазимо

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{15} Ql \dots \dots \dots (147)$$

После тога прорачунавање просте греде, коју напада задато троугласто оптерећење и познати спрег на левом крају, неће претставити тешкоћа. Резултат наравно, мора да се поклапа са нађеним у § 30 на други начин.

Узмимо сад други пример, и то греду укљештену на оба краја (сл. 66) и оптерећену концентрисаним терешом *P*. Укљештење крајева, као и пре можемо заменити спреговима \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{M}_2 , а тиме претварамо наш задатак у статички

одређени. Величине момената тих спрегова морамо одредити из услова, да су углови нагиба тангенте на еластичну линију једнаки нули за $z = 0$ и $z = l$.



сл. 66.

Углови нагиба услед силе *P* једнаки су према обрасцу (126)

$$(u_1')_0 = \frac{P}{6} \frac{B}{l} \frac{c}{l} \left(1 + \frac{c'}{l}\right),$$

$$(u_1')_l = -\frac{P}{6} \frac{B}{l} \frac{c}{l} \left(1 + \frac{c}{l}\right);$$

углови нагиба услед спрега \mathfrak{M}_1 једнаки су према обрасцу (136) за $c = 0$ и $\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}_1$

$$(u_1')_0 = -\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_1 B}{l^2},$$

$$(u_1')_l = \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{M}_1 B}{l^2},$$

а углови нагиба услед спрега \mathfrak{M}_2 према том истом обрасцу за $c = l$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2$ једнаки су

$$(u_1')_0 = -\frac{1}{6} \frac{\mathfrak{M}_2 B}{l^2},$$

$$(u_1')_l = \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_2 B}{l^2}.$$

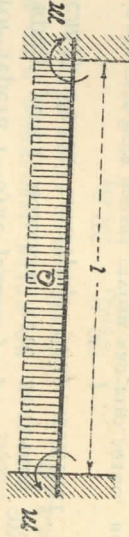
Кад саберемо величине углова и изједначимо их са нулом, добијамо

$$\begin{aligned} P \frac{cc'}{l} \left(1 + \frac{c'}{l}\right) - 2 \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 &= 0, \\ -P \frac{cc'}{l} \left(1 + \frac{c}{l}\right) + \mathfrak{M}_1 + 2 \mathfrak{M}_2 &= 0, \end{aligned}$$

одакле је

$$\mathfrak{M}_1 = P \frac{cc'^2}{l^2}, \mathfrak{M}_2 = P \frac{c^2c}{l^2}; \dots \dots \dots (148)$$

даље решавање задатка неће донети ништа новог.



сл. 67.

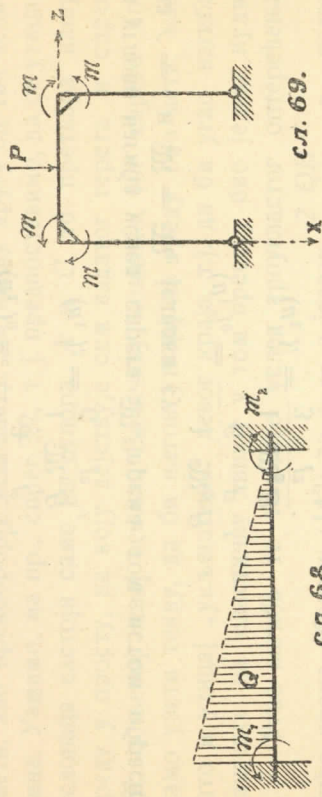
Ако место концентрисаног терета узмемо једнако подељен шерш Q (сл. 67), онда налазимо на исти начин

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} = \frac{1}{12} Ql \dots \dots \dots (149)$$

У случају опшерећења по шроуглу (сл. 68):

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{10} Ql, \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{15} Ql \dots \dots \dots (150)$$

До сад смо изналазили отпорне спрегове у пошуну угљешеним пресецима, т. ј. спрегове, који су поништавали нагиб еластичне линије у тим пресецима. Узмимо сад примр, где отпорни спрегови смањују само до извесног степена тај нагиб. Узмимо греду (сл. 69), оптерећену у средини концентрисаним теретом P и круто везану у крајевима са два вертикална ступца чији су крајеви зглавкасто подупрти. Услед круте везе



сл. 68.

у чворовима остаће прави углови између крајева греде и ступца непромењени, т. ј. услови нагиба еластичне линије према хоризонталној оси на крајевима греде морају бити једнаки угловима нагиба крајева ступца према вертикалној оси. Дакле, утицај стубова на греду неће се састојати само из сила, као што је у случају везе зглавцима, него и из спрегова исте величине, али супротног смисла. Ако узмемо моменте тих спрегова као прекобројне непознате, морамо одредити њихову величину тако, да угао нагиба левог краја греде услед тих спрегова и задатог терета P буде једнак углу нагиба левог ступца на горњем крају услед момента исте величине \mathfrak{M} , али супротног смисла.*) Услед симетрије биће моменат на десном

*) Аксијална сила која напада стубац као што знамо, неће деформисати његову осовину.

крају греде исти, као моменат на левом, али, супротног смисла. Ступце можемо сматрати при томе, као просте греде, а хоризонтална греда биће њихов горњи ослонац.

Из образаца (126) и (136) добићемо угао нагиба левог краја греде услед силе P у средини распона и спрегова \mathfrak{M} на крајевима:

$$(u_1)_0 = \frac{1}{16} \frac{PB}{l} - \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}B}{l^2} - \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{M}B}{l^2}$$

За леви стубац имамо из (136) за $c = l_1$ и $B = B_1$,

$$(u_1)_{l_1} = \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}B_1}{l_1^2}$$

Ако изједначимо ова два угла нагиба, добијамо:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{8} Pl - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{B_1 l^2}{B l_1^2}} \dots \dots \dots (151)$$

Кад упоредимо добивени израз са обрасцем (148) за $c = \frac{1}{2} l$, видимо да ће се они поклапати при малој гинкости стубаца B_1 ; обратно ће моменат \mathfrak{M} при ступцима веома гинким према греди бити мали.

За једнако подељени терет Q нашли би

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{12} Ql - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{B_1 l^2}{B l_1^2}} \dots \dots \dots (152)$$

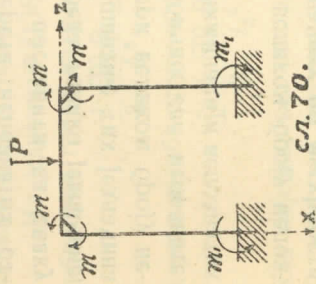
израз који се опет приближава изразу (149) при малом B_1 , а нули при великом B_1 .

Ако су ступци доле укљештени (сл. 70), онда у изразима за нагиб горњег њиховог краја треба узети у обзир и утицај спрега \mathfrak{M}_1 , који напада доњи крај. Тада би наша једначина изгледала овако:

$$\frac{1}{16} \frac{PB}{l} - \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}B_1}{l_1^2} - \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{M}_1 B_1}{l_1^2}$$

а за одређивање тог момента \mathfrak{M}_1 имамо другу једначину, и то услов, да је нагиб доњег краја нула:

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_1 B_1}{l_1^2} - \frac{\mathfrak{M} B_1}{l_1^2} = 0,$$



сл. 70.

одакле је:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} \mathfrak{M};$$

тада је из прве једначине

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{8} Pl \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{B_1}{B} \frac{l^2}{l_1^2}} \dots \dots \dots (153)$$

Аналого је за једнако подељени терет Q :

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{12} Ql \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{B_1}{B} \frac{l^2}{l_1^2}} \dots \dots \dots (154)$$

При извођењу израза (151) — (154) занемарили смо нагиб еластичне линије хоризонталне греде услед смицања и нагиб стубаца услед скраћења хоризонталне греде аксијалном силом. Ако и то треба, лако је додати дотичне чланове у наше једначине.

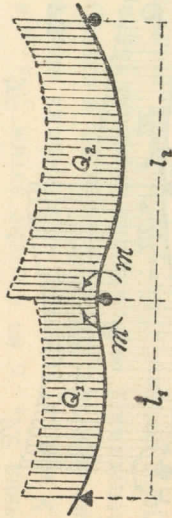
Ако оптерећење хоризонталне греде није *симетрично*, или ако су *ситуаци различити*, онда треба у обрасцима за нагиб узети у обзир, да ће се целокупан систем из три греде претворити у паралелограм, а у изразе \mathfrak{M} и \mathfrak{M}_1 ућиће још разлика хоризонталних померања чворова, која је једнака скраћењу хоризонталне греде услед притиска стубаца и разлика вертикалних померања истих чворова, која је једнака разлици скраћења стубаца услед притиска греде.

§ 32. Континуалне греде.

На горе наведени начин т. ј., сабирањем ордината и углова нагиба еластичне линије услед задатог терета непознатих отпора и отпорних спрегова у стању смо поставити за сваку статички неодређену греду или систем греда толико једначина, колико има прекорбројних непознатих. Решавање тих једначина не представља тешкоћа, али траје дуго, при великом броју непознатих, јер у *сваку* једначину улазе обично *све* непознате. Осим тога се повећава при постепеној елиминацији непознатих и вероватност аритметских грешака.

Зато се обично употребљавају при великом броју непознатих методе код којих улази у сваку једначину по могућности мањи број непознатих. Овде ћемо изложити једну од тих метода, и то ону која се употребљава при прорачунавању континуалних греда.

Почнимо са гредом на три ослоња, коју смо испитали већ у § 30, а оптерећену једнако подељеним теретом Q_1 у првом пољу и једнако подељеним теретом Q_2 у другом (сл. 71). При решавању сличног задатка у § 31 сматрали смо отпор средњег ослоња, као прекорбројну непознату и тиме смо претворили нашу греду у просту. Овог пута учини-



сл. 71.

ћемо то друкчије, замислићемо греду пресечену изнад средњег ослоња. Тиме се греда претвара у две просте греде; утицај одсечене десне греде на леву морамо заменити вертикалном силом и спрегом момента \mathfrak{M} , а утицај леве греде на десну заменићемо силом и спрегом истих величина али супротног смера и смисла. Пошто силе дејствују непосредно изнад средњег ослоња, неће оне имати никаквог утицаја на савијање наших греда, а величине момената $+\mathfrak{M}$ морамо одредити из услова, да углови нагиба за обе греде изнад средњег ослоња буду исти кад обе спојимо опет у једну.

Из једначина (136) и (140) биће угао нагиба прве греде на њеном десном крају једнак

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M} B_1}{l_1^2} - \frac{1}{24} \frac{Q_1 B_1}{l_1},$$

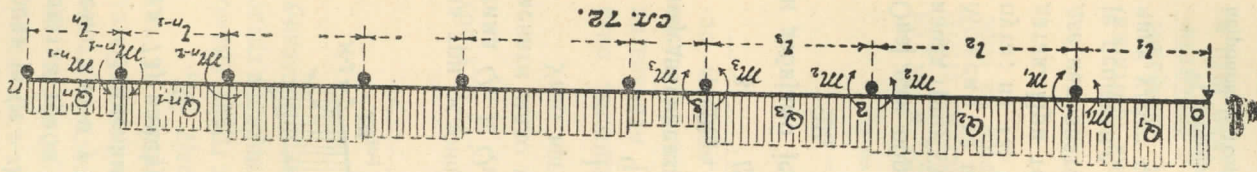
а угао нагиба друге греде на њеном левом крају:

$$-\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M} B_2}{l_2^2} + \frac{1}{24} \frac{Q_2 B_2}{l_2}$$

Кад изједначимо ова два угла и заменимо B_1 и B_2 њиховим изразима, добијамо

$$\mathfrak{M} (l_1 + l_2) = \frac{1}{8} (Q_1 l_1^2 + Q_2 l_2^2),$$

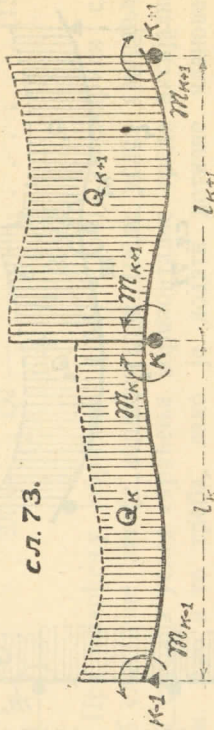
одакле се може одредити \mathfrak{M} .



сл. 72.

Да пређемо сад на греду на n ослонаца (сл. 72). Обележимо њене ослонце са $0, 1, 2, \dots, n$, распоне са l_1, l_2, \dots, l_n , а једнако подељени терет на тим распонима са Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Наша греда је $(n-1)$ пута статички неодређена, дакле за решење задатка треба $(n-1)$ једначина. За прекобројне непознате уземамо, као и у првом примеру, моменте спрегова изнад ослонаца.

Замислимо да смо из греде исекли два суседна распона (сл. 73) између $(k-1)$ -ог и $(k+1)$ -ог ослонца. На ту греду



сл. 73.

на три ослонца, добивену тим издвајањем а оптерећену теретима Q_k и Q_{k+1} и моментима M_{k-1} и M_{k+1} , можемо признати мало пре показану методу.

Угао нагиба леве греде на десном крају:

$$\frac{1}{6} \frac{M_{k-1} B_k}{l_k^2} + \frac{1}{3} \frac{M_k B_k}{l_k^2} - \frac{1}{24} \frac{Q_k B_k}{l_k}$$

изједначићемо са углом нагиба десне греде на левом крају

$$\frac{1}{3} \frac{M_{k+1} B_{k+1}}{l_{k+1}^2} - \frac{1}{6} \frac{M_{k+1} B_{k+1}}{l_{k+1}^2} + \frac{1}{24} \frac{Q_{k+1} B_{k+1}}{l_{k+1}}$$

и добијамо једначину

$$M_{k-1} l_k + 2 M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \frac{1}{4} (Q_k l_k^2 + Q_{k+1} l_{k+1}^2) \dots \dots \dots (155)$$

Овај нам образац даје зависност између нападних момената изнад трију суседних ослонаца и терета на дотичним распонима*). Можемо га поставити за свака два суседна распона, т.ј. $(n-1)$ пута; на тај начин добивени систем једначина решава наш задатак. При томе имамо у првој и последњој једначини само две непознате, а у осталим *шри*. Одавде се већ види уколико је решавање овог система простије од оног, где у сваку једначину улазе све непознате. Сам систем најпростије је решавати

*) Образац је извео Скаретоп 1857 г., зато се често и зове Клајнроновом теоремом.

у следећем реду: елиминацијом M_1 из првих двају једначина, добијамо нову једначину, у коју улазе само M_2 и M_3 ; из ове једначине и треће елиминирамо M_3 , добијамо једначину, која садржи само M_2 и M_4 ; ако извршимо низ таквих елиминација $(n-2)$ пута, доћићемо до последње једначине, која после елиминације M_{n-2} , одређује непосредно M_{n-1} . Користећи се сад низом једначина добивених елиминацијом (свака са 2 непознате), али идући у обратном смеру, наћићемо из последње од тих једначина M_{n-2} , из следеће затим M_{n-3} и на крају M_1 .

У том случају, када на крајевима континуалне греде имамо задаше спрегове M_0 и M_n (на пр. у случају континуалне греде са прелестима), моменти тих спрегова ућиће у прву и последњу једначину система (155), као познате величине:

$$\begin{aligned} M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= \\ &= \frac{1}{4} (Q_1 l_1^2 + Q_2 l_2^2) \\ &\dots \dots \dots \\ M_{n-3} l_{n-1} + 2 M_{n-1} (l_{n-1} + l_n) + M_n l_n &= \\ &= \frac{1}{4} (Q_{n-1} l_{n-1}^2 + Q_n l_n^2) \dots \dots \dots (156) \end{aligned}$$

Када су крајеви континуалне греде укљештени, онда моменти M_0 и M_n нису познати, дакле се број непознатих повећава на $(n+1)$, истовремено добијамо две једначине, из услова да су углови нагиба еластичне линије на крајним ослоњцима једнаки нули:

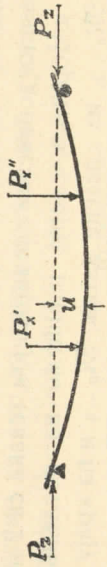
$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \frac{Q_1 B_1}{l_1} - \frac{1}{3} \frac{M_0 B_1}{l_1^2} - \frac{1}{6} \frac{M_1 B_1}{l_1^2} &= 0 \\ \frac{1}{24} \frac{Q_n B_n}{l_n} + \frac{1}{3} \frac{M_n B_n}{l_n^2} + \frac{1}{6} \frac{M_{n-1} B_n}{l_n^2} &= 0 \end{aligned}$$

Помоћу ових једначина можемо изразити M_1 са M_0 и M_n са M_{n-1} увести их у прву и последњу једначину система (156); после тога се даље решавање система једначине врши на горе показани начин.

§ 33. Извијање штапова.

У § 21 добили смо при проучавању ексцентричног притиска нормални напон у облику збира напона услед аксијалне силе P_z и савијања моментом $M = P_z c$, где је c ексцентриситет силе P_z . У том случају претпоставили смо (као што и

Уопште у току целокупног нашег излагања, да су померања тачака осовине штапа u_0 услед савијања моментом M толико мала, да се прирасти нападног момента који су једнаки $-P_z u_0$ (сл. 74) могу услед тих померања занемарити. Да видимо сад када та претпоставка није оправдана.



сл. 74.

У техничкој пракси не може бити ни говора о аксиалном притиску у математском смислу те речи, јер нападна тачка притискујуће силе увек има извесан мали ексцентрицитет, а осим тога и сами штапови никад нису она идеално права хомогена изотропно еластична тела, која су била објекат нашег испитивања. Чак и у том случају, када притискујућа сила нема *задано*г ексцентрицитета, морамо опет узети у обзир да, ће сваки притиснути штап имати услед савијања, извесну кривину која неминовно прати сваки притисак. Треба само да видимо под којим условима може ова појава пореметити наше основне претпоставке и тиме учинити немогућном примену извесних образаца.

Узмимо, на пр. просту греду (сл. 74), притиснуту силама $\pm P_z$. Имајући у виду њено неминовно савијање при том притиску као и одговарајућа померања u_0 тачака осовине, добићемо у сваком пресеку нападни моменат $-P_z u_0$, чија је величина пропорционална ординати еластичне линије, дакле је мала *док су те ординате мале* према димензијама греде, као што то тражи једна од наших основних претпоставки.

Према једначини (105) кривина еластичне линије u_1'' пропорционална је нападном моменту, дакле је

$$u_1'' = \frac{M_y}{EJ_y} = -\frac{P_z}{EJ_y} u_0 = -\frac{P_z}{EJ_y} (u_1 + u_2);$$

кад занемаримо u_2 према u_1 , имаћемо:

$$u_1'' = -\frac{P_z}{EJ_y} u_1,$$

одакле је

$$u_1 = C \cos \left(z \sqrt{\frac{P_z}{EJ_y}} \right) + C_1 \sin \left(z \sqrt{\frac{P_z}{EJ_y}} \right)$$

где су C и C_1 интеграционе константе.

Из услова на левом ослонцу: $u_1(0) = 0$, налазимо $C = 0$; после тога једначина добија облик

$$u_1 = C_1 \sin \left(z \sqrt{\frac{P_z}{EJ_y}} \right) \dots \dots \dots (157)$$

Услов на десном ослонцу: $u_1(l) = 0$ даје нам једначину

$$C_1 \sin \left(l \sqrt{\frac{P_z}{EJ_y}} \right) = 0$$

која ће бити задовољена не само са $C_1 = 0$ (то би одговарало $u_1(z) = 0$, т. ј. идеално правој осовини), него и *произвољном* величином C_1 , ако је

$$l \sqrt{\frac{P_z}{EJ_y}} = k \pi \dots \dots \dots (158)$$

где је k произвољан цео број.

Једначину (158) можемо представити у облику:

$$P_z = k^2 \pi^2 \frac{EJ_y}{l^2} \dots \dots \dots (159)$$

и тада видимо, да осовина греде може имати облик, одређен једначином (157), где је C_1 произвољна величина ако притискујуће силе буду једнаке једној од величина одређених једначином (159). Из једначине (157) се види, да је C_1 највећа ордината еластичне линије, дакле када притискујућа сила буде једнака једној од величина (159), онда ординате еластичне линије могу постати произвољне, т. ј. *не може се правдати* наша основна претпоставка, да су те ординате мале, и зато се на тај случај *не смеју* применити раније поменути образци.

Из ових граничних вредности сила, одређених једначином (159) за нас је, наравно, меродавна најмања, т. ј. она која се добије из једначине (159) за $k = 1$, и која одговара *једном* полу-таласу синусоиде (сл. 74), дакле је сила

$$P_z = \pi^2 \frac{EJ_y}{l^2}, \dots \dots \dots (160)$$

коју морамо сматрати као границу, коју не смеју прелазити притискујуће силе, потпуно независна од величине напона, која се добија при томе из обрасца за аксијално напрезање. Ток разлагања неће се променити и за могућност извијања у другој главној равни инерције yz , а гранична вредност силе, која се при том добије биће:

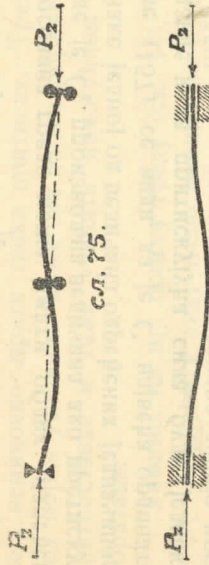
$$P_z = \pi^2 \frac{EJ_x}{l^2}$$

Од ових двају сила меродавна је за практичну примену она, која је мања, т.ј. она која одговара мањем од главних моменталних инерција, зато се

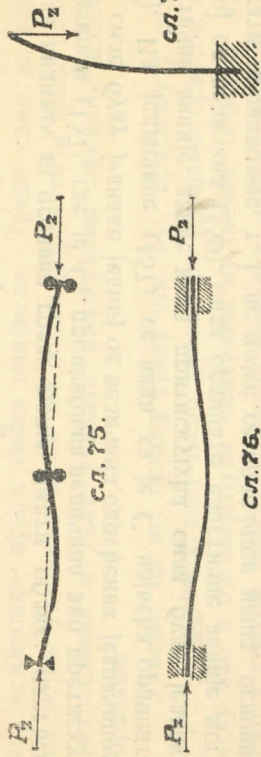
$$P_e = \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{l^2} \dots \dots \dots (161)^*$$

зове *силом извијања* за просту греду

Сила, коју добијамо из једн. (159) за $k = 2$ и којој одговарају два полуталаса не представља никаквог интереса за просту греду, али за греду на три ослонца (сл. 75) она је, очевидно, најмања могућа сила, извијања јер се та греда не може извити сем по двама полуталасима. Слично, са $k = 3$ добијамо силу извијања за греду на четири ослонца са три полуталаса и т. д. Греда, чија су оба краја укљештена (сл. 76) не може се извити мање него у два полуталаса дакле за њу се добије сила из-



сл. 75.



сл. 77.

сл. 76.

вијања из једн. (159) са $k = 2$. Обратно, се, конзола (сл. 77) може извити чак у $1/4$ таласа и за њ је $k = 1/2$.

Ако је притискујућа сила скоро једнака сили извијања дате греде, онда померања њених тачака неће бити више мала, зато постаје и примена наших обичних образаца за такав случај немогућа. Истовремено могу велика померања тачака изазвати раскид греде, ако нема других чврстијих делова у конструкцији, која би спречавала та померања и примила на себе овај сувишни део притискујуће силе, коју не може издржати греда.

На прим.: на три ступца кружног пресека а истог материјала (сл. 78) дејствује преко хоризонталне круте попречне

*) Овај је израз извео L. Euler 1778 г.

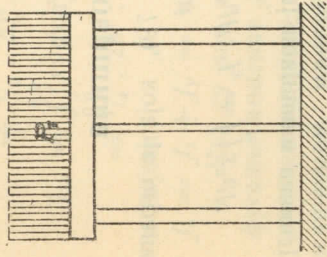
греде притискујућа сила P_z . Крајњи ступци имају пречник 10 cm , а средњи 2 cm , дакле је површина пресека крајњег ступца $7,85 \text{ cm}^2$, а средњег $3,14 \text{ cm}^2$, збир површина пресека ступца биће $2 \times 7,85 + 3,14 = 18,8 \text{ cm}^2$, дакле за $P_z = 1 \text{ t}$, биће напон једнак

$$\sigma_z = - \frac{1000}{188} = - 53 \text{ at}$$

дакле средњи стубац мора примити силу од $53 \times 3,14 = 166 \text{ kg}$, а крајњу силу од $53 \times 7,85 = 417 \text{ kg}$.

Сила извијања средњег ступца једнака је за $E = 2,2 \times 10^6 \text{ at}$:

$$P_e = \frac{1}{4} \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = \frac{9,86 \times 2,2 \times 10^6 \times 3,14 \times 1}{10^4 \times 4} = 425 \text{ kg}$$



сл. 78.

као што смо нашли.

Али, ако повећамо силу P_z , на пр. 5 пута, онда стубац неће издржати више од 425 kg , т. ј. напон у њему биће само

$$\frac{425}{3,14} = - 136 \text{ at},$$

крајњи ступци међутим, спречавајући извијање средњег ступца, морају дакле примити на себе целокупан остатак, т. ј. $5000 - 425 = 4575 \text{ kg}$. и напон у њима биће

$$\frac{4575}{2 \times 7,85} = - 291 \text{ at}$$

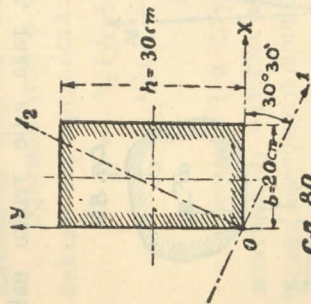
На пример за правоугаоник (сл. 80), у случају да за осовине узмемо његове стране $b = 20 \text{ cm}$ и $h = 30 \text{ cm}$, добићемо:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^b \int_0^h y^2 dx dy = \frac{1}{3} h^3 \int_0^b dx = \frac{1}{3} b h^3 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 30^3 = 18 \cdot 10^4 = 18 \text{ dm}^4 \\ J_y &= \int_0^b \int_0^h x^2 dx dy = \frac{1}{3} b^3 \int_0^h dy = \frac{1}{3} b^3 h = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 20^3 \cdot 30 = 8 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 = 8 \text{ dm}^4 \\ J_{xy} &= \int_0^b \int_0^h xy dx dy = \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{1}{2} h^2 = \frac{1}{4} b^2 h^2 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 20^2 \cdot 30^2 = 9 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 = 9 \text{ dm}^4 \end{aligned} \quad \dots (163)$$

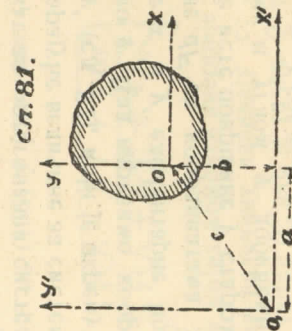
и најзад:

$$J_0 = J_x + J_y = \frac{1}{3} b h (h^2 + b^2) = 18 + 8 = 26 \text{ dm}^4$$

Кад су нам познати моменти инерције J_x , J_y и центрифугални моменат J_{xy} у погледу x и y осе, то није тешко наћи дотичне величине момената инерције за ту исту површину, у



сл. 80.



сл. 81.

погледу x_1 и y_1 осе (сл. 81), које су паралелне осам x и y а удаљене су од њих за растојања a и b ; у том је случају

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + b)^2 dF = J_x + 2b S_y + b^2 F \\ J_{y_1} &= J_y + 2a S_x + a^2 F \\ J_{x_1 y_1} &= \int_F (x + a)(y + b) dF = J_{xy} + a S_x + b S_y + ab F \end{aligned} \quad \dots (164)$$

где су са S_x и S_y означени статички моменти површине F у погледу осовина x и y . У специјалном случају, када је O тежиште површине F , т. ј. кад су x и y тежишне осовине, ови последњи моменти биће једнаки нули, и тада ће једначине (164) добити простији облик:

$$J_{x_1} = J_x + b^2 F; J_{y_1} = J_y + a^2 F; J_{x_1 y_1} = J_{xy} + ab F \quad \dots (165)$$

Додатак

О моментима инерције површина.

Узмимо у xu равни површину F (сл. 79), која је ограничена једном затвореном линијом; интеграл

$$J_x = \int_F y^2 dF; J_y = \int_F x^2 dF$$

узети по целој површини називају се *екваторијалним моментима инерције*; први у погледу на x осу, други у погледу на y осу. По тој истој површини узети интеграл

$$J_{xy} = \int_F xy dF$$

назива се *центрифугалним моментом*

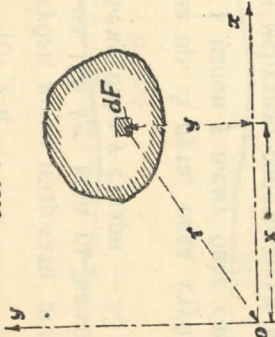
у погледу x и y осе, а

$$J_0 = \int_F r^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = J_x + J_y \quad \dots (162)$$

носи назив *поларног момента инерције* ове површине у погледу на тачку O . Из једначине (162) види се да је он једнак збиру екваторијалних момената инерције те исте површине у погледу двају ортогоналних осовина, које се секу у тачки O , и обратно да је збир *екваторијалних момената инерције* у погледу на две ортогоналне осе једнак поларном моменту инерције у погледу на тачку пресека тих осе, а из овога излази да он не зависи од *праваца ових осе*.

Интеграл J_x, J_y, J_{xy}, J_0 , геометријске су величине, које зависе једино од облика површине F и од њеног положаја према координатним осам (или њиховом пресеку) и имају димензију $[L]^4$. Сем тога су J_x, J_y и J_0 увек > 0 .

сл. 79.



Применом једначина (165) можемо израчунати моменат инерције и центрифугални моменат задане површине у погледу ма какве осе, кад нам је познат моменат инерције и центрифугални моменат у погледу тежишне осе, која је паралелна заданој осовини. Из ових једначина јасно је да је моменат инерције у погледу *ма какве* осе увек *већи*, од оног у погледу њој паралелне тежишне осе.

На пример помоћу једначина (165) можемо наћи моменте инерције и центрифугални моменат нашег правоугаоника за тежишне осовине (сл. 80), које су паралелне његовим странама. Ако заменимо у (165) величине I_x, J_y и $I_{x,y}$ са вредностима нађеним у (163), добићемо

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{4}bh^3 = \frac{1}{12}bh^3 = 4,5 dm^4 \\ J_y &= \frac{1}{12}b^3h - \frac{1}{4}b^3h = \frac{1}{12}b^3h = 2 dm^4 \\ J_{xy} &= \frac{1}{4}b^2h^2 - \frac{1}{4}b^2h^2 = 0 \\ I_o &= J_x + J_y = \frac{1}{12}F(b^2 + h^2) = 6,5 dm^4 \end{aligned} \right\} \dots (166)$$

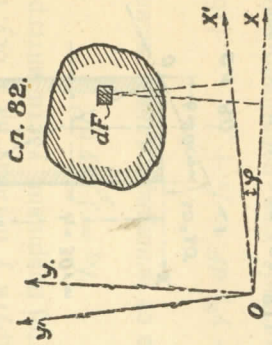
Кад су нам познати момент инерције и центрифугални моменат за ортогонални систем x и y , тада није тешко наћи одговарајуће величине за систем

x' и y' (сл. 82), који је окренут за угао φ . Кад изразимо координате x' и y' елементарне површине dF са координатама x и y те исте површине у старом систему и углом φ добићемо:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi; \\ y' &= y \cos \varphi - x \sin \varphi, \end{aligned}$$

а одавде

$$\left. \begin{aligned} J_{x'} &= \iint_F y'^2 dF = \iint_F (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2 dF = \\ &= J_x \cos^2 \varphi - J_{xy} \sin 2\varphi + J_y \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi \\ J_{y'} &= \iint_F x'^2 dF = \iint_F (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 dF = \\ &= J_y \cos^2 \varphi + J_{xy} \sin 2\varphi + J_x \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi \\ J_{x'y'} &= \iint_F x'y' dF = \\ &= \iint_F [xy \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) \sin 2\varphi] dF = \\ &= J_{xy} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \dots (167)$$



сл. 82.

Величине $J_{x'}, J_{y'}$ и $J_{x'y'}$ функције су угла φ — угла обртања осовина; да одредимо сад, којој величини угла α одговара највећа односно најмања величина $J_{x'}$. Диференцираћемо $J_{x'}$ по φ . Кад тај израз изједначимо с нулом, пошто смо претходно заменили φ са α , добићемо:

$$-(J_x - J_y) \sin 2\alpha - J_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

одакле је

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \dots (163)$$

Кад би сад хтели да одредимо угао, који одговара највећој односно најмањој величини $J_{y'}$, добили би исту једначину (168). То показује да $J_{x'}$ и $J_{y'}$ достижу своје највеће односно најмање вредности при истој величини угла обртања осовина. Ако диференцирамо изразе $J_{x'}$ и $J_{y'}$ и по други пут, добићемо:

$$\frac{d^2 J_{x'}}{d^2 \varphi} = -\frac{d^2 J_{y'}}{d^2 \varphi},$$

а одавде је јасно да за $\varphi = \alpha$ достиже $J_{x'}$ максималну, а $J_{y'}$ минималну вредност или обрнуто.

Заменом угла φ добивеног из (168) у једначине (167) добићемо ове вредности:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \\ J_2 &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \\ J_{1,2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (169)$$

Осовине 1 и 2, у погледу којих момент инерције достижу максималну односно минималну величину називају се *главним осами инерције* површине F з тачку O ; ако је тачка O тежиште површине F , онда су то *главне тежишне осовине* инерције површине F . Из последње једначине (169), видимо да је *центрифугални моменат за главне осовине једнак нули*, и обрнуто ако је *центрифугални моменат за две ортогоналне осовине раван нули*, *то су ове осовине, главне осовине инерције дате површине за тачку њиховог пресека*.

На пр. за правоугаоник (сл. 80) наћићемо из једначине (168) правац главних осовина инерције у погледу његовог ћошка заменом вредности (163):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = -\frac{2 \times 9}{18 - 8} = -1,8,$$

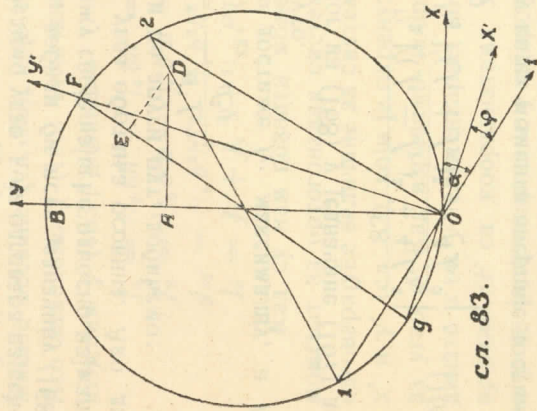
дакле $2\alpha = -61^\circ$ и $\alpha = -30^\circ 30'$, а из (169) добићемо

$$I_1 = \frac{1}{2} (18 + 8) + \frac{1}{2} \sqrt{(18 - 8)^2 + 4 \cdot 9^2} = 13 + 10,3 = 23,3 \text{ dm}^4$$

$$J_2 = 13 - 10,3 = 2,7 \text{ dm}^4$$

За тежиште правоугаоника главни моменти инерције даће већ нађене вредности (166), пошто смо већ за те осовине добили $J_{xy} = 0$.

Израчунавање по формулама (168) и (169) може се заменити и графичком конструкцијом (сл. 83). На вертикалној осовини пренесемо дужину OA , која у произвољној размери представља величину J_{xy} и дужину AB , која представља у тој истој размери J_y , и конструишимо са пречником OB круг (т. зв. круг инерције у датој тачки). Тада ћемо добити правац главних осовина инерције за ту тачку, кад пренесемо нормално на OB у тачки A дужина AD , која представља у тој истој размери J_{xy} ; кад саставимо тачку D са средиштем круга и ту праву доведемо до пресека 1 и 2 са његовом периферијом, то су правци IO и $2O$ правци главних оса, а дужина DI и $D2$ представљају у размери коју смо изабрали величине J_1 и J_2 . Када су нађене величине главних момената инерције и централног момента за осовине, које затварају угао φ са главним осовинама извршити применом (167), у којима треба заменити J_x и J_y са J_1 и J_2 , а J_{xy} ставити једнако нули, после чега добијамо:



сл. 83.

Израчунавање по обрзцима (170) може се заменити конструкцијом, користећи се кругом инерције (сл. 83). Ако повучемо Ox' и Oy' под заданим углом φ према главним осама и спустимо из D нормалу на GF добићемо да је $\overline{GE} = J_{x'}$,

$$J_{x'} = J_1 \cos^2 \varphi + J_2 \sin^2 \varphi; J_{y'} = J_1 \sin^2 \varphi + J_2 \cos^2 \varphi; \quad (170)$$

$$J_{x'y'} = \frac{1}{2} (J_1 - J_2) \sin 2\varphi$$

Израчунавање по обрзцима (170) може се заменити конструкцијом, користећи се кругом инерције (сл. 83). Ако повучемо Ox' и Oy' под заданим углом φ према главним осама и спустимо из D нормалу на GF добићемо да је $\overline{GE} = J_{x'}$,

$\overline{EF} = J_{y'}$ и $\overline{DE} = J_{x'y'}$, у размери у којој су нам представљени J_1 и J_2 .

Раније смо већ видели да моменат инерције површина има димензију $[L]^4$. Тога ради можемо га представити у облику производа величине површине F и квадрата неке дужине на пр.

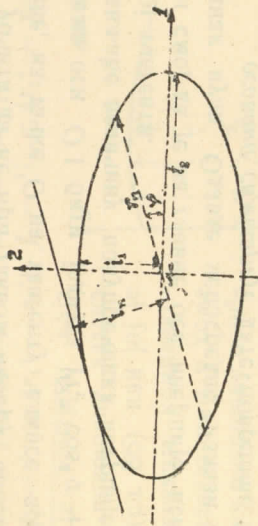
$$J_n = F i_n^2$$

величина i_n носи назив полупречника инерције дате површине у погледу осе n ; одговарајуће пак величине за главне осовине називају се *главним* полупречницима инерције i_1 и i_2 у погледу дате тачке. Ако поделимо прву једначину (170) са F добићемо:

$$i_n^2 = i_1^2 \cos^2 \varphi + i_2^2 \sin^2 \varphi \dots \dots \dots (171)$$

а то је једначина полупречника инерције за правац n , који са првом главном осом заклапа угао φ , изражен помоћу главних полупречника инерције.

Да би што прегледније представили промену полупречника инерције са променом угла φ нанећемо (сл. 84). на одговара-



сл. 84.

јућем правцу n , који пролази кроз нашу тачку O одсечак r_n , обратнo пропорционалан полупречнику инерције

$$r_n = \frac{l^2}{i_n}$$

где је l произвољно изабрана дужина; дужине одсечака, који одговарају главним правцима означаваћемо са r_1 и r_2 . Ако ставимо сад у једначину (171):

$$i_n = \frac{l^2}{r_n}, i_1 = \frac{l^2}{r_1}, i_2 = \frac{l^2}{r_2}$$

пошто скратимо са l^4 добићемо

$$\frac{1}{r_n^2} = \frac{1}{r_1^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r_2^2} \sin^2 \varphi$$

Ако вежемо крајеве одсечака једном кривом, то ће текуће координате неке њене тачке бити

$$J_x = 4 \int_0^{\pi/2} ab^3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \pi ab^3 \dots (173)$$

аналого

$$J_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b; J_0 = \frac{1}{4} \pi ab (a^2 + b^2) \dots (173)$$

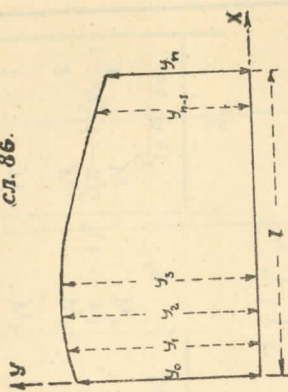
За површину круга полупречника R очевидно је

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} \pi R^4; J_0 = 2 J_x = \frac{1}{2} \pi R^4 \dots (174)$$

и при томе је свеједно, ма какве две ортогоналне тежишне осовине узели за главне, јер представљају осовине симетрије. Елипса ће се инерције у том случају претворити у круг полупречника $i = \frac{1}{2} R$. На основу тог истог принципа биће за кружни прстен екваторијални моменат инерције раван половини поларног, док је овај последњи раван разлици момената инерције спољњег и унутарњег круга, тако да је

$$J_0 = \frac{1}{2} \pi (r_1^4 - r_2^4); J_x = \frac{1}{4} \pi (r_1^4 - r_2^4) \dots (175)$$

Ако је контура, која ограничава површину, задана графички (сл. 86) или јој је једначина сувише компликована, то изналазимо у томе случају њену површину приближним методама, на пр. по *правилу шрапеза* или по *правилу Симсона*. У првом ћемо случају, ако означимо са x и y координате тачке на кривој, добићи образац:



сл. 86.

$$J_x = \int_0^l \left(\frac{1}{2} y\right)^2 y dx = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + \dots + y_{n-1}^3 + \frac{1}{2} y_n^3 \right\} \frac{l}{n} \dots (176)$$

$$J_y = \int_0^l x^2 y dx = \left\{ 0 + y_1 + 4y_2 + 9y_3 + \dots + (n-1)^2 y_n \right\} \frac{l}{n}$$

$\xi = r_n \cos \varphi; \eta = r_n \sin \varphi$
 Заменимо ли у нашој једначини $\cos \varphi$ са ξ/r_n , а $\sin \varphi$ са η/r_n добићемо пошто скратимо са r_n^2 ;

$$1 = \left(\frac{\xi}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{r_2}\right)^2$$

т. ј. једначину елипсе са полуосама

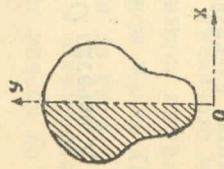
$$r_1 = \frac{l^2}{i_1}; r_2 = \frac{l^2}{i_2}$$

Ова елипса назива се *елипсом инерције* за дату тачку. Произвољну дужину l^2 узимамо обично да је равна $i_1 i_2$, онда ће полуосе елипсе инерције бити $r_1 = i_2$ и $r_2 = i_1$, а једначина елипсе инерције добиће облик:

$$\left(\frac{\xi}{i_2}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{i_1}\right)^2 = 1 \dots (172)$$

Треба уочити да ће при таквом избору константе l^2 , дужина нормале, из тачке O на тангенту елипсе повучене под углом φ према оси $O1$ бити једнака $\sqrt{i_1^2 \cos^2 \varphi + i_2^2 \sin^2 \varphi}$, т. ј. представљаће величину полупречника инерције за осу паралелну овој тангенти.

Видели смо, да је за главне осе инерције центрифугални моменат једнак нули. Одавде непосредно излази да ће свака *осовина симетрије* дате површине бити у исто време и једна од главних осовина за све тачке, које леже на тој осовини, јер се под знаком интеграла $\int_F xy dF$ налази (сл. 85) толико позитивних елемената, колико и негативних, равних овима.



сл. 85.

Сем правоугаоника, за који смо већ нашли величине главних тежишних момената инерције, у науци о чврстоћи често наилазимо на моменте инерције површине елипсе. Из симетрије је очевидно, да ће главне осовине елипсе бити у исто време главне тежишне осовине инерције за њену површину. Ако узмемо једначину елипсе у облику:

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$$

имаћемо

$$dF = x dy = abc \cos^2 \varphi d\varphi$$

Применом пак Симсоновог правила добићемо

$$I_x = \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} y_0^3 + 2y_1^3 + y_2^3 + 2y_3^3 + \dots + 2y_{n-1}^3 + \frac{1}{2} y_n^3 \right] \frac{l}{n}, \quad (177)$$

$$I_x = \frac{2}{3} \left[0 + 2y_1 + 4y_2 + 18y_3 + \dots + 2y_{n-1} + (n-2)^2 y_{n-2} + 2(n-1)^2 y_{n-1} + \frac{1}{2} n^2 y_n \right] \left(\frac{l}{n} \right)^3$$

Рачунање по обим методама врши се zgodно и прегледно у таблци

По правилу трапеза

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
i	y_i	$(2)^3$	$(1)^2$	$(2) \times (4)$
0	y_0	y_0^3	0	0
1	y_1	y_1^3	1	y_1
2	y_2	y_2^3	4	$4y_2$
3	y_3	y_3^3	9	$9y_3$
.
.
.
.
$n-1$	y_{n-1}	y_{n-1}^3	$(n-1)^2$	$(n-1)^2 y_{n-1}$
n	y_n	y_n^3	n	$n^2 y_n$
		Σ		Σ_1
		$\frac{1}{2} (y_0^3 + y_n^3)$		$\frac{1}{2} n^2 y_n$
		Σ'		Σ_1'

$$I_x = \frac{1}{8} \frac{l}{n} \Sigma'; \quad I_y = \left(\frac{l}{n} \right)^3 \Sigma_1'$$

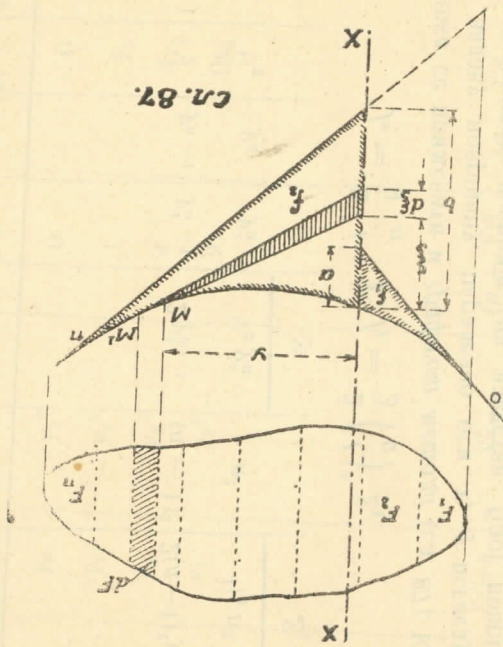
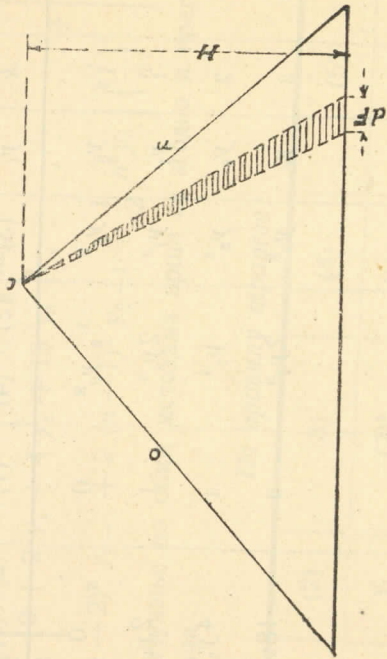
По правилу Симпсона

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
i	k	y_i	$(3)^3$	$(2) \times (4)$	$(1)^2$	$(2) \times (3) \times (6)$
0	$\frac{1}{2}$	y_0	y_0^3	$\frac{1}{2} y_0^3$	0	0
1	1	y_1	y_1^3	$2y_1^3$	1	$2y_1$
2	2	y_2	y_2^3	y_2^3	4	$4y_2$
3	3	y_3	y_3^3	$2y_3^3$	9	$18y_3$
.
.
.
$(n-1)$	2	y_{n-1}	y_{n-1}^3	$2y_{n-1}^3$	$(n-1)^2$	$2(n-1)^2 y_{n-1}$
n	$\frac{1}{2}$	y_n	y_n^3	$\frac{1}{2} y_n^3$	n^2	$\frac{1}{2} n^2 y_n$
				Σ		Σ_1

$$I_x = \frac{2}{9} \frac{l}{n} \Sigma; \quad I_y = \frac{2}{3} \left(\frac{l}{n} \right)^3 \Sigma_1$$

Може се применити и графичка метода (сл. 87). Кад поделимо задану површину, паралелно оси x , у погледу које тражимо моменат инерције, на изван број површина F_1, F_2, \dots, F_n , и сложимо величине ових површина у прозвољној размери у полигон сила, онда можемо произвољним полним растојањем конструисати за те „силе“ верижни полигон који ће се при великом броју ових површина претворити у ланчаницу. Тангенте у двама суседним тачкама на овој кривој одсећиће на оси x одсечак d_x^i и образоваће са њим један троугао површине $\frac{1}{2} y d_x^i$ (где је y одстојање тачке ланчанице

од осовине x), који је сличан троуглу, образованом одсечком dF у полигону сила и зрацима паралелним нашим танген-тама. Онда је



$$y dF = H d\xi$$

$$I_x = \int_F y^2 dF = H \left[\int_a^b y d\xi + \int_0^b y d\xi \right]$$

или ако заменимо $y d\xi$ са дуплом површином одговарајућег елементарног троугла; онда

$$I_x = 2H [J_1 + J_2] \dots \dots \dots (178)$$

где су f_1 и f_2 површине, ограничене верижним полигоном, његовим крајњим странама (тангентама) и одсечком на оси x . У случају, да је x оса тежишна осовина, овај је одсечак раван нули, ако је при томе и полно одстојање H узето да је једнако $\frac{1}{2} F$, онда је:

$$J_x = f F \dots \dots \dots (179)$$

т. ј. J_x једнак је производу површине верижног полигона и површине задате фигуре.

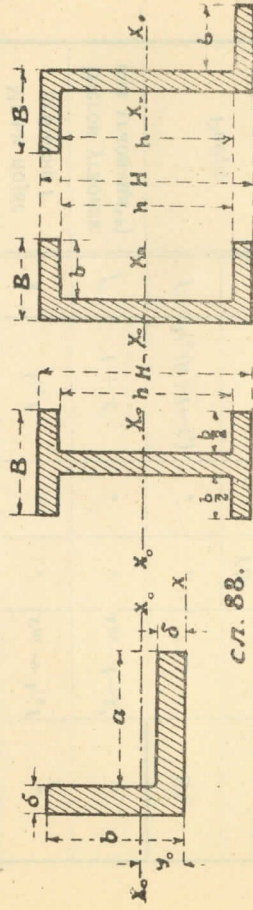
У техничкој се примени обично сусрећемо са површинама, које су састављене из правоугаоника. У том се случају израчунавање своди на сабирање момената инерције појединих правоугаоника.

На пр. за угаоник (сл. 88) биће моменат инерције у погледу његове доње ивице једнак

$$J_x = \frac{1}{3} (b^3 \delta + \delta^3 a) \dots \dots \dots (180)$$

тежиште површине налази се од ове осовине у одстојању

$$V_0 = \frac{1}{2} \frac{b^2 + a\delta}{a + b} \dots \dots \dots (181)$$



тако, да ће моменат инерције у погледу тежишне осовине, паралелне доњој ивици бити једнак

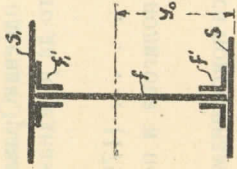
$$I_{x_0} = \frac{1}{3} (b^3 + a\delta^2) \delta - \frac{1}{4} \frac{(b^2 + a\delta)^2 \delta}{a + b} \dots \dots \dots (182)$$

За дупло те (I), у (II), и зет (III) профил (сл. 88) биће моменат инерције у погледу хоризонталне тежишне осовине једнак разлици момената инерције двају правоугаоника:

$$J_{x_0} = \frac{1}{3} (BH^3 - bh^3) \dots \dots \dots (183)$$

На сличан начин могу се срачунати и моменти инерције за сваки пресек састављен из нормалних профила. Металургичке фабрике дају за ваљане профиле готове величине момената инерције, према томе постаје њихово израчунавање сувишно.

При израчунавању момената инерције (сл. 89) лиманог профила, задатак се своди на сабирање „сопствених“ момената инерције појединих делова, (т.ј. момената инерције у погледу осовина, које пролазе кроз тежиште ових делова, а паралелне су заданој оси) са моментима инерције „положаја“ ових делова (т.ј. са производима њихових тежишта и квадрата одстојања њихових тежишта од задане осе). Израчунавање се знатно упрошћује, ако узмемо у обзир, да су дебљине појединих делова обично мале у односу према висини пресека. Због тога можемо сопствене моменте инерције појасева, а такође, готово увек, и угаоника занемарити, као мале величине вишег реда. Цео рачун може се згодно сместити у таблицу:



сл. 89.

Делови пресека	(1) повр- шине	(2) x^*	(3) $(1) \times (2)$	(4) $(?) \times (3)$	(5) $x_m - x$	(6) $(1) \times (5)$
Мањи појас дебљине t	s	$\frac{1}{2}t$	"	"	$x_m - \frac{1}{2}t$	"
Његов угаоник или угаоници**)	f'	$t + x'$	"	"	$x_m - t - x'$	"
Ребро	f	$\frac{1}{2}(h + t - t_1)$	"	"	"	S'_y
Већи појас дебљине t_1	s_1	"	"	"	$\frac{f h^2}{12}$	$\frac{1}{2}(x_m - t)^2 e$
Његов угаоник или угаоници**)	f'_1	$h - t_1 - x'_1$	"	"	"	S''_y
	F	"	S_y	J_y	"	"

*) За осу, у погледу на коју су узети сви моменти, узета је спољна ивица мањег појаса.

***) x' и x'_1 су одстојања тежишта површине угаоника од његове спољне ивице, која налазимо у таблицама ваљаних профила.

$$I_y^0 = J_y - \frac{S_y^2}{F}; \quad x_{\max} = \frac{S_y}{F} > \frac{1}{2}h; \quad W_y = \frac{J_y^0}{x_{\max}};$$

$$f_1 = \frac{J_y^0 e}{S_y} < f; \quad f_2 = \frac{J_y^0 e}{S_y} > f.$$

Међутим чак и овако рачунање захтева много времена и њега треба провести само при коначном избору пресека. За привремено рачунање могу се одбацити и мале величине првог реда, а то нас доводи на приближне формуле §§-а (25) и (27).

Страна 96	14	ред одозго место	коривонгали	треба	хоривонгали
"	100	8	ред одозго	"	"
"	104	5	"	"	"
"	104	13	одоздо	"	"
"	109	4	"	"	"
"	113	19	"	"	"
"	114	3	"	"	"
"	114	6	"	"	"
"	114	8	"	"	"
"	114	9	"	"	"
"	119	1	одоздо	"	"
"	122	сл. 73.	место M_{k+1} десно од ослона k	треба \mathfrak{M}_k	"
"	122	12	ред одоздо место	"	"
Страна 124	1	ред одоздо место	$C_1 \sin \left(z \sqrt{\frac{P_y}{EJ_y}} \right)$	треба $C_1 \left(z \sqrt{\frac{P_z}{EJ_y}} \right)$	"
Страна 128	9	ред одозго место	I_{xy}	треба I_{xy}	"

$$\text{треба } - \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\text{треба } - \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\text{треба } C_1 \left(z \sqrt{\frac{P_z}{EJ_y}} \right)$$

$$\text{треба } I_{xy}$$

$$\text{треба } I_{xy}$$

—

$$-\frac{1}{6} \frac{\mathfrak{M} B_3}{l_1^2}$$

$$\mathfrak{M}_k$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_{k+1} B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\mathfrak{M}_k B_{k+1}}{l_{k+1}^2}$$