UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

MILAN JOVANOVIĆ

# O EKSTREMNIM VREDNOSTIMA NIZOVA NEZAVISNIH SLUČAJNIH VELIČINA SA ISTOM RASPODELOM KOJA JE MEŠAVINA RASPODELA

— Magistarska teza —

Beograd, 2004.

# Sadržaj

# Predgovor

Proučavanje slučajnih pojava i njihovo modeliranje matematičkim modelima važno je u raznim oblastima čovekove delatnosti: saobraćaju, ekonomiji, teoriji pouzdanosti, meteorologiji, hidrologiji, inžinjerstvu itd. Veoma je bitno da se te pojave dobro modeliraju kako bi se mogle predvideti i na njih uticati. Pri opisivanju pojava koje u zavisnosti od nekog slučajnog faktora imaju različite raspodele pojavljuju se mešavine raspodela. Na primer, u teoriji pouzdanosti raspodela vremena ispravnog rada elementa sistema posmatra se kao mešavina raznih uzroka kvara; protok saobraćaja na nekoj deonici puta posmatra se kao mešavina raznih raspodela opterećenja deonice u zavisnosti od doba dana; kod ekonomskih i finansijskih serija slučajni faktori mogu izazvati promene u njihovom ponašanju. Takodje, kod slučajnih pojava veoma su bitne i veoma velike, odnosno veoma male vrednosti koje se pojavljuju, tj. ekstremne vrednosti posmatranih pojava. Tako, mogući veliki nivo reke u toku nekog vremenskog intervala zahteva predostrožnost u cilju zaštite od poplava; maksimalne brzine vetra moraju se uzeti u obzir pri projektovanju mostova, puteva i visokih zgrada.

Ovi i slični primeri pokazuju veliku praktičnu primenu teorije ekstremnih vrednosti, naročito u vezi sa mešavinama raspodela. Ovaj rad je pokušaj doprinosa takvim proučavanjima.

U prvoj glavi data je definicija mešavine raspodela i izvedena su neka jednostavnija tvrdjenja vezana za mešavine raspodela. Dat je pregled klasične teorije ekstremnih vrednosti kod nizova nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, kao i veliki broj primera koji pokazuju pripadnost ili ne nekoj od oblasti privlačenja raspodela ekstremnih vrednosti.

U drugoj glavi kao zajednička raspodela članova niza nezavisnih slučajnih veličina uzeta je mešavina raspodela. Kod konačnih mešavina dokazano je da one pripadaju istoj oblasti privlačenja kao i komponente koje učestvuju u mešavini (u slučaju oblasti privlačenja Frešeove i Vejbulove raspodele). Dat je veliki broj konkretnih primera kod kojih su izračunate i normirajuće konstante, a dati su i konkretni primeri kod kojih se razmatra slično tvrdjenje za oblast privlačenja Gumbelove raspodele. Slična razmatranja na konkretnim primerima data su i u slučaju prebrojivih mešavina.

*Posebnu zahvalnost želim da izrazim svom mentoru prof. dr Pavlu Mladenoviću na ukazanoj pomoći, mnogobrojnim primedbama i savetima prilikom izrade ovog rada. Takodje se zahvaljujem i prof.dr Vesni Jevremović i prof. dr Jovanu Mališiću koji su svojim savetima i predlozima poboljšali tekst ovog rada.*

U Beogradu, oktobra 2004. Milan Jovanović

# Glava 1

# Ekstremne vrednosti nizova nezavisnih slučajnih veličina

## 1.1 Funkcija raspodele i mešavine raspodela

Jedan od osnovnih pojmova u teoriji verovatnoća, pored slučajne veličine, svakako je njena funkcija raspodele.

**Definicija 1.1.1** Funkcija $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja ima svojstva:

1. $F$ je neopadajuća funkcija, tj. za $x_1 < x_2$ važi $F(x_1) \leq F(x_2)$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
3. $F$ je neprekidna sa desne strane, tj. za svaki realan broj $x_0$ važi $\lim\limits_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0)$,

zove se *funkcija raspodele verovatnoća* (ili kraće *funkcija raspodele*).

**Definicija 1.1.2** Neka je $X : \Omega \to \mathbf{R}$ slučajna veličina definisana na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Funkcija $F_X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definisana sa

$$F_X(x) = P\{\omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} \tag{1.1}$$

zove se *funkcija raspodele verovatnoća slučajne veličine* $X$ (ili kraće *funkcija raspodele slučajne veličine* $X$).

Može se pokazati da funkcija raspodele slučajne veličine zadovoljava sva tri svojstva iz definicije 1.1.1, a važi i obrnuto, ako funkcija koja slika iz $\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}$ zadovoljava ta tri svojstva, onda postoji slučajna veličina čija je funkcija raspodele upravo ta funkcija.

Slučajne veličine se dele prema tipu svoje funkcije raspodele. Osnovni tipovi funkcije raspodele su: diskretna, apsolutno neprekidna i singularna.

**Definicija 1.1.3** Funkcija raspodele $F$ je *diskretna* ako postoji konačan ili beskonačan niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ medjusobno različitih realnih brojeva i njemu odgovarajući niz $p_1, p_2, p_3, \ldots$ nenegativnih brojeva za koje važi $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$, takvi da je

$$F(x) = \sum_{\{k: a_k \leq x\}} p_k. \tag{1.2}$$

**Definicija 1.1.4** Funkcija raspodele $F$ je *apsolutno neprekidna* ako postoji nenegativna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takva da za svaki realan broj $x$ važi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{1.3}$$

Funkcija $f$ se zove *gustina raspodele verovatnoća* (ili kraće *gustina raspodele*).

**Definicija 1.1.5** Funkcija raspodele $F$ je *singularna* ako izvod $F'$ postoji i jednak je nuli skoro svuda (sem na skupu mere nula).

Postoje funkcije raspodele koje ne pripadaju nijednom od gore navedenih tipova. Medjutim, za sve funkcije raspodele važi *teorema o dekompoziciji funkcije raspodele.*

**Teorema 1.1** *Svaka funkcija raspodele može se predstaviti kao konveksna kombinacija diskretne, apsolutno neprekidne i singularno neprekidne funkcije raspodele.*

**Dokaz:** Neka je $F$ proizvoljna funkcija raspodele. Ona je neopadajuća i ograničena, a za takvu funkciju važi:

(a) Funkcija $F$ ima najviše prebrojivo mnogo prekida, pri čemu u svakoj tački prekida ima levu i desnu graničnu vrednost.

(b) Funkcija $F$ ima izvod $F'$ skoro svuda, tj. skup tačaka $x$ za koje ne postoji izvod $F'(x)$ je mere nula i pri tome za proizvoljne realne brojeve $x_1$ i $x_2$ važi $\int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx \leq F(x_2) - F(x_1)$.

Kako funkcija raspodele $F$ ima najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida, možemo ih obeležiti sa $a_1, a_2, a_3, \ldots$ . Neka je

$$p_n = F(a_n) - \lim_{x \to a_n -} F(x). \tag{1.4}$$

Definišimo funkcije

$$F_1(x) = \sum_{\{n: a_n \leq x\}} p_n, \tag{1.5}$$

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt, \tag{1.6}$$

$$F_3(x) = F(x) - F_1(x) - F_2(x). \tag{1.7}$$

Ako je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \alpha \neq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(t)dt = \beta \neq 0$ i $1 - \alpha - \beta = \gamma \neq 0$, onda su

$$F_d(x) = \frac{1}{\alpha} F_1(x), \tag{1.8}$$

$$F_{an}(x) = \frac{1}{\beta} F_2(x), \tag{1.9}$$

$$F_{sn}(x) = \frac{1}{\gamma} F_3(x), \tag{1.10}$$

redom diskretna, apsolutno neprekidna i singularno neprekidna funkcija raspodele i važi jednakost

$$F(x) = \alpha F_d(x) + \beta F_{an}(x) + \gamma F_{sn}(x). \tag{1.11}$$

Ako je neki od brojeva $\alpha, \beta, \gamma$ jednak nuli, onda u jednakosti (1.11) nema odgovarajućeg sabirka.$\Box$

U primenama, od osnovnih raspodela uglavnom se koriste diskretne i apsolutno neprekidne, a od složenijih veoma su značajne mešavine raspodela. Ove raspodele naročito se sreću u statističkoj analizi, meteorologiji, ekologiji, ekonomiji itd. Videti na primer: Titterington, Smith, Makov (1985), Quandt, Ramsey (1978), Roy, Mukherjee (1988), Kayano, Shimizu (1994), Hamilton (1994).

**Lema 1.1.1** *Neka su $F_1, F_2, \ldots, F_n$ funkcije raspodele i $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Tada je funkcija $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definisana sa $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i F_i(x)$ takodje funkcija raspodele.*

**Dokaz:** $F_1, F_2, \ldots, F_n$ su funkcije raspodele, pa važi:

1. Za $x_1 < x_2$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $F_i(x_1) \leq F_i(x_2)$, pa je

$$F(x_1) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x_1) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x_2) = F(x_2), \tag{1.12}$$

   odnosno $F$ je neopadajuća funkcija.

2. Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $\lim\limits_{x\to-\infty} F_i(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_i(x) = 1$, odakle sledi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \lim_{x\to-\infty} F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i 0 = 0, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x)\\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \lim_{x\to+\infty} F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i 1 = 1.\end{aligned} \tag{1.14}$$

3. Za svaki realan broj $x_0$, za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $\lim\limits_{x\to x_0+} F_i(x) = F_i(x_0)$, odakle sledi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0+} F(x) &= \lim_{x\to x_0+}\sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x)\\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \lim_{x\to x_0+} F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x_0) = F(x_0),\end{aligned} \tag{1.15}$$

   odnosno $F$ je neprekidna sa desne strane.

Kako su za funkciju $F$ ispunjena sva tri svojstva iz definicije 1.1.1, zaključujemo da je ona funkcija raspodele.□

**Lema 1.1.2** *Neka su $F_i(x), i \in \mathbf{N}$, funkcije raspodele i $p_i, i \in \mathbf{N}$, pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Tada je funkcija $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definisana sa $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x)$ takodje funkcija raspodele.*

**Dokaz:** Za svako $i \in \mathbf{N}$ i svako $x \in \mathbf{R}$ je $0 \le F_i(x) \le 1$, pa je $|p_i F_i(x)| \le p_i$. Kako je $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x)$ ravnomerno konvergira na $\mathbf{R}$. Odatle sledi da je funkcija $F$ dobro definisana, odnosno da je njen domen ceo skup realnih brojeva.

Za svako $i \in \mathbf{N}$ $F_i$ je funkcija raspodele, pa važi:

1. Za $x_1 < x_2$, za svako $i \in \mathbf{N}$ je $F_i(x_1) \le F_i(x_2)$, pa je

$$F(x_1) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x_1) \le \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x_2) = F(x_2), \tag{1.16}$$

   odnosno $F$ je neopadajuća funkcija.

2. Za svako $i \in \mathbf{N}$ je $\lim_{x\to-\infty} F_i(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 1$. Kako red $\sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x)$ ravnomerno konvergira na $\mathbf{R}$, sledi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \lim_{x\to-\infty} F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i 0 = 0, \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \lim_{x\to+\infty} F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i 1 = 1. \end{aligned} \tag{1.18}$$

3. Za svaki realan broj $x_0$, za svako $i \in \mathbf{N}$ je $\lim_{x\to x_0+} F_i(x) = F_i(x_0)$. Kako red $\sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x)$ ravnomerno konvergira na $\mathbf{R}$, sledi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0+} F(x) &= \lim_{x\to x_0+} \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \lim_{x\to x_0+} F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x_0) = F(x_0), \end{aligned} \tag{1.19}$$

odnosno $F$ je neprekidna sa desne strane.

Kako su za funkciju $F$ ispunjena sva tri svojstva iz definicije 1.1.1, zaključujemo da je ona funkcija raspodele.$\square$

S obzirom na leme 1.1.1 i 1.1.2 možemo uvesti sledeće definicije:

**Definicija 1.1.6** Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne veličine sa odgovarajućim funkcijama raspodele $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$. Neka je

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \text{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_n & \text{sa verovatnoćom} \quad p_n, \end{cases} \tag{1.20}$$

gde su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{1.21}$$

Tada je funkcija raspodele slučajne veličine $X$ data sa

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{i=1}^{n} p_i P\{X_i \leq x\} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x) \tag{1.22}$$

i za takvu slučajnu veličinu kažemo da ima raspodelu koja je *mešavina konačno mnogo raspodela* odredjenih funkcijama raspodele $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$.

**Definicija 1.1.7** Neka su $X_i, i \in \mathbf{N}$, slučajne veličine sa odgovarajućim funkcijama raspodele $F_i(x), i \in \mathbf{N}$. Neka je

$$X = \Big\{ \; X_i \quad \text{sa verovatnoćom} \quad p_i, \quad i \in \mathbf{N}, \tag{1.23}$$

gde su $p_i$ pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{1.24}$$

Tada je funkcija raspodele slučajne veličine $X$ data sa

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i P\{X_i \leq x\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x) \tag{1.25}$$

i za takvu slučajnu veličinu kažemo da ima raspodelu koja je *mešavina prebrojivo mnogo raspodela* odredjenih funkcijama raspodele $F_i(x), i \in \mathbf{N}$.

O nekim svojstvima mešavina govore sledeća dva tvrdjenja:

**Lema 1.1.3** *Slučajna veličina koja je najviše prebrojiva mešavina diskretnih slučajnih veličina je diskretna.*

**Dokaz:** Neka je slučajna veličina $X$ najviše prebrojiva mešavina diskretnih slučajnih veličina, tj.

$$X = \Big\{ \; X_i \quad \text{sa verovatnoćom} \quad p_i, \quad i \in I, \tag{1.26}$$

gde je $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ili $I = \mathbf{N}$, zavisno od toga da li se radi o konačnoj ili prebrojivoj mešavini, $p_i, i \in I$, su pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$ i $X_i$ je diskretna slučajna veličina za svako $i \in I$. Skup vrednosti koje uzima slučajna veličina $X$ je unija skupova vrednosti koje uzimaju slučajne veličine $X_i, i \in I$. Kako se radi o najviše prebrojivoj uniji skupova koji sadrže najviše prebrojivo mnogo elemenata, to slučajna veličina $X$ može uzeti najviše prebrojivo mnogo vrednosti, pa je diskretna.$\Box$

**Lema 1.1.4** *Slučajna veličina koja je konačna mešavina apsolutno neprekidnih slučajnih veličina je apsolutno neprekidna.*

**Dokaz:** Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ apsolutno neprekidne slučajne veličine sa odgovarajućim funkcijama raspodele $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$. Neka je slučajna veličina $X$ konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Tada za njenu funkciju raspodele $F(x)$ važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x), \tag{1.27}$$

gde su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Kako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ apsolutno neprekidne slučajne veličine, to za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji nenegativna funkcija $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takva da za svaki realan broj $x$ važi

$$F_i(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_i(t)dt. \tag{1.28}$$

Uvedimo funkciju $f(x)$ na sledeći način:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x). \tag{1.29}$$

Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je nenegativna i za svaki realan broj $x$ važi

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int\limits_{-\infty}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \int\limits_{-\infty}^{x} f_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x) = F(x), \end{aligned} \tag{1.30}$$

odakle sledi da je slučajna veličina $X$ apsolutno neprekidna.□

## 1.2 Raspodele ekstremnih vrednosti i oblasti privlačenja

Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih veličina definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i date su im raspodele verovatnoća. Definišimo slučajne veličine

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \tag{1.31}$$
$$m_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}. \tag{1.32}$$

Teorija ekstremnih vrednosti nizova slučajnih veličina bavi se asimptotskim ponašanjem raspodela ovih slučajnih veličina kad $n \to \infty$.

U slučaju razmatranja maksimuma, glavno pitanje je da li postoje nizovi realnih konstanti $a_n > 0$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, takvi da

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} = G(x) \tag{1.33}$$

za svaku tačku neprekidnosti $x$ neke nedegenerisane funkcije raspodele $G(x)$, odnosno da $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ konvergira u raspodeli ka $G(x)$, kad $n \to \infty$. Ako postoje, onda se takvi nizovi zovu *normirajuće konstante*, a funkcija raspodele $G(x)$ odredjuje graničnu raspodelu linearno normiranog maksimuma $M_n$.

U vezi sa asimptotskim ponašanjem minimuma primetimo da važi

$$\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, \dots, -X_n\}, \tag{1.34}$$

pa se sva razmatranja vezana za minimume mogu rešiti razmatranjima vezanim za maksimume.

U daljem izlaganju isključivo ćemo se baviti nizovima nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele $F(x)$ i problemima vezanim za asimptotsko ponašanje maksimuma.

Ako označimo $u_n = a_n x + b_n$, tada je

$$\begin{aligned}
P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} &= P\{M_n \leq a_n x + b_n\} \\
&= P\{M_n \leq u_n\} \\
&= P\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq u_n\} \\
&= P\{X_1 \leq u_n, X_2 \leq u_n, \dots, X_n \leq u_n\} \\
&= P\{X_1 \leq u_n\} P\{X_2 \leq u_n\} \cdots P\{X_n \leq u_n\} \\
&= F^n(u_n).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Ako, pri tome, za neke nizove realnih konstanti $a_n > 0$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, i neku nedegenerisanu funkciju raspodele $G(x)$ važi relacija (1.33), onda kažemo da funkcija raspodele $F$ pripada *oblasti privlačenja za maksimume* funkcije raspodele $G$. Skup svih takvih funkcija označavaćemo sa $D(G)$.

Navedimo dalje, bez dokaza, nekoliko poznatih teorema koje čine osnovu teorije ekstremnih vrednosti nizova nezavisnih slučajnih veličina, a koje daju odgovor na pitanja: koje funkcije $G(x)$ se mogu pojaviti kao granične funkcije raspodele linearno normiranog maksimuma od $n$ nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele $F(x)$, kad $n \to \infty$; kako za datu zajedničku funkciju raspodele $F(x)$ niza nezavisnih slučajnih veličina odrediti da li postoji i koja je granična funkcija raspodele linearno normiranog maksimuma $M_n$ i kako odrediti normirajuće konstante $a_n$ i $b_n$?

**Teorema 1.2** *Neka je* $X_n, n \in \mathbf{N}$, *niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele* $F, M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, u_n, n \in \mathbf{N}$, *niz realnih brojeva i* $0 \leq \tau \leq +\infty$. *Tada jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau \tag{1.36}$$

*važi ako i samo ako je*

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq u_n\} = e^{-\tau}. \tag{1.37}$$

**Teorema 1.3** *Neka je* $X_n, n \in \mathbf{N}$, *niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele* $F, x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\}, M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ *i* $0 < \tau < +\infty$. *Tada niz* $u_n, n \in \mathbf{N}$, *za koji važi* (1.36), *postoji ako i samo ako je*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x-0)}{1 - F(x-0)} = 0. \tag{1.38}$$

Pre nego što navedemo najznačajniju teoremu teorije ekstremnih vrednosti nizova nezavisnih slučajnih veličina, *teoremu o ekstremalnim tipovima*, uvedimo sledeću definiciju:

**Definicija 1.2.1** Funkcije raspodele $G_1$ i $G_2$ su *iz iste familije*, ako postoje konstante $a > 0$ i $b$, takve da za svaki realan broj $x$ važi jednakost $G_2(x) = G_1(ax+b)$.

**Teorema 1.4** [Gnedenko (1943)] *Neka je* $X_n, n \in \mathbf{N}$, *niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele* $F$ *i neka je* $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. *Ako postoje nizovi realnih konstanti* $a_n > 0$ *i* $b_n, n \in \mathbf{N}$, *takvi da*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \tag{1.39}$$

*za svaku tačku neprekidnosti* $x$ *neke nedegenerisane funkcije raspodele* $G(x)$, *tada je funkcija* $G$ *iz iste familije kao neka od sledeće tri raspodele:*

1. *Gumbelova raspodela*

$$G_0(x) = e^{-e^{-x}}, -\infty < x < +\infty. \tag{1.40}$$

2. *Frešeova raspodela sa parametrom* $\alpha > 0$

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & za \quad x \leq 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, & za \quad x > 0. \end{cases} \tag{1.41}$$

3. *Vejbulova raspodela sa parametrom* $\alpha > 0$

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}}, & za \quad x < 0, \\ 1, & za \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{1.42}$$

Raspodele (1.40), (1.41) i (1.42) zovu se i *raspodelama ekstremnih vrednosti.*

**Lema 1.2.1** *Neka su $G_1$ i $G_2$ funkcije raspodele iz iste familije. Oblast privlačenja za maksimume funkcije raspodele $G_1$ je neprazna ako i samo ako je neprazna oblast privlačenja za maksimume funkcije raspodele $G_2$ i te oblasti se poklapaju.*

**Dokaz:** Neka su konstante $a > 0$ i $b$ takve da za svaki realan broj $x$ važi jednakost $G_2(x) = G_1(ax + b)$. Ako je neka tačka $x_0$ tačka neprekidnosti funkcije $G_1(x)$, onda je $\frac{x_0-b}{a}$ tačka neprekidnosti funkcije $G_2(x)$. Važi i obrnuto, ako je $x_1$ tačka neprekidnosti funkcije $G_2(x)$, onda je $ax_1 + b$ tačka neprekidnosti funkcije $G_1(x)$.

Neka je funkcija raspodele $F$ takva da $F \in D(G_1)$. To znači da postoje nizovi konstanti $a_n > 0$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, takvi da za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G_1(x)$, važi

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G_1(x). \tag{1.43}$$

Neka su $a_n^*$ i $b_n^*, n \in \mathbf{N}$, nizovi konstanti takvi da je

$$\begin{aligned} a_n^* &= a_n a, && (1.44)\\ b_n^* &= a_n b + b_n. && (1.45) \end{aligned}$$

Kako je $a_n^* > 0$, onda je

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F^n(a_n^* x + b_n^*) &= \lim_{n\to\infty} F^n(a_n a x + a_n b + b_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} F^n(a_n(ax+b) + b_n) && (1.46)\\ &= G_1(ax+b) = G_2(x) \end{aligned}$$

i ovo važi za svako $ax + b$ koje je tačka neprekidnosti funkcije $G_1(x)$, odnosno $x$ koje je tačka neprekidnosti funkcije $G_2(x)$. Odavde sledi $F \in D(G_2)$.

Obrnuto, pretpostavimo da $F \in D(G_2)$. To znači da postoje nizovi konstanti $c_n > 0$ i $d_n, n \in \mathbf{N}$, takvi da za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G_2(x)$, važi

$$\lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = G_2(x). \tag{1.47}$$

Neka su $c_n^*$ i $d_n^*, n \in \mathbf{N}$, nizovi konstanti takvi da je

$$\begin{aligned} c_n^* &= \frac{c_n}{a}, && (1.48)\\ d_n^* &= -\frac{c_n b}{a} + d_n. && (1.49) \end{aligned}$$

Kako je $c_n^* > 0$, onda je

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F^n(c_n^* x + d_n^*) &= \lim_{n\to\infty} F^n(\frac{c_n}{a}x - \frac{c_n b}{a} + d_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} F^n(c_n\frac{x-b}{a} + d_n)\\ &= G_2(\frac{x-b}{a}) && (1.50)\\ &= G_1(a\frac{x-b}{a} + b) = G_1(x) \end{aligned}$$

i ovo važi za svako $\frac{x-b}{a}$ koje je tačka neprekidnosti funkcije $G_2(x)$, odnosno $x$ koje je tačka neprekidnosti funkcije $G_1(x)$. Odavde sledi $F \in D(G_1)$.

Znači, svaka funkcija raspodele $F$ koja pripada jednoj od oblasti privlačenja pripada i drugoj, pa odatle sledi da je $D(G_1) = D(G_2)$.□

Iz teoreme 1.4 i leme 1.2.1 jednostavno sledi tvrdjenje:

**Posledica 1.2.1** *Postoje tačno tri neprazne oblasti privlačenja za maksimume nizova nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom.*

U vezi sa prethodnim je i sledeća opštija teorema. Iz nje će slediti važna posledica koja će kasnije često biti korišćena.

**Teorema 1.5** [Hinčin] *Neka je $F_n, n \in \mathbf{N}$, niz funkcija raspodele za koji postoji nedegenerisana funkcija raspodele $G$ i nizovi realnih konstanti $a_n > 0$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, tako da važi*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = G(x) \tag{1.51}$$

*za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G(x)$. Neka je $G_*$ nedegenerisana funkcija raspodele, a $\alpha_n > 0$ i $\beta_n, n \in \mathbf{N}$, nizovi realnih konstanti.*

(a) *Ako važi*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = G_*(x) \tag{1.52}$$

*za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G_*(x)$, onda postoje realne konstante $a$ i $b$, tako da je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = a > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n - b_n}{a_n} = b; \tag{1.53}$$

$$G_*(x) = G(ax + b) \ \textit{za sve}\ x \in \mathbf{R}. \tag{1.54}$$

(b) *Ako važe jednakosti* (1.53), *onda važi* (1.52) *i* (1.54).

**Posledica 1.2.2** *Neka je $F$ funkcija raspodele koja pripada oblasti privlačenja za maksimume funkcije raspodele $G$ i neka su nizovi realnih konstanti $a_n > 0$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, odgovarajuće normirajuće konstante. Ako za neki niz realnih konstanti $\alpha_n > 0$ važi*

$$a_n \sim \alpha_n \tag{1.55}$$

*kad $n \to \infty$, onda su nizovi $\alpha_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, takodje normirajuće konstante.*

**Dokaz:** Za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G(x)$ je

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x). \tag{1.56}$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = 1, \tag{1.57}$$

koristeći teoremu 1.5 sledi da je

$$a = 1, b = 0, \tag{1.58}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} F^n(\alpha_n x + b_n) = G(ax + b) = G(x) \tag{1.59}$$

za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G(x)$.□

## Oblast privlačenja Gumbelove raspodele

**Teorema 1.6** [von Mises (1936)] *Neka je $F$ apsolutno neprekidna funkcija raspodele i $x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\}$. Ako su ispunjeni uslovi:*

(a) $F''(x) < 0$ *za sve $x$ iz nekog intervala $(a, x_0)$, gde je* $x_0 \leq \infty$,

(b) $F'(x) = 0$ *za* $x \geq x_0$,

(c) $\lim\limits_{t\to x_0-} \frac{F''(t)(1-F(t))}{(F'(t))^2} = -1$,

*onda važi* $F \in D(G_0)$.

**Teorema 1.7** [Gnedenko (1943)] *Neka je $F$ funkcija raspodele i $x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\}$. Tada $F$ pripada oblasti privlačenja $D(G_0)$ ako i samo ako postoji funkcija $g : (c, x_0) \to \mathbf{R}_+$, takva da za svaki realan broj $x$ važi jednakost*

$$\lim_{t\to x_0-} \frac{1 - F(t + xg(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}. \tag{1.60}$$

*Normirajuće konstante se mogu odabrati tako da je*

$$a_n = g(b_n), \tag{1.61}$$

$$b_n = \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\}. \tag{1.62}$$

Osim ovog, još neke potrebne i dovoljne uslove pod kojima funkcija raspodele pripada oblasti privlačenja za maksimume Gumbelove raspodele dali su u svojim radovima Mejzler (1949) i de Haan (1970). U formulacijama tih uslova pojavljuje se samo funkcija raspodele $F$, a dati su i izrazi za odredjivanje pomoćne funkcije $g$ koja se koristi u Gnedenkovoj teoremi.

**Primer 1** *Gumbelova raspodela.*

Funkcija raspodele Gumbelove raspodele je

$$G_0(x) = e^{-e^{-x}}, -\infty < x < +\infty. \tag{1.63}$$

Prema tome je $x_0 = +\infty$. Birajući za pomoćnu funkciju iz teoreme 1.7 funkciju $g(t) = 1$, dobijamo da za svaki realan broj $x$ važi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to x_0-} \frac{1 - G_0(t + xg(t))}{1 - G_0(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - G_0(t + x)}{1 - G_0(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - e^{-e^{-(t+x)}}}{1 - e^{-e^{-t}}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - [1 - e^{-(t+x)} - o(e^{-t})]}{1 - [1 - e^{-t} - o(e^{-t})]} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}e^{-x} + o(e^{-t})}{e^{-t} + o(e^{-t})} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-x} + o(1)}{1 + o(1)} = e^{-x}.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Sledi da $G_0 \in D(G_0)$.

Na osnovu jednakosti (1.61) možemo odabrati da je $a_n = 1$. Tada za $b_n$ mora da važi

$$\lim_{n\to\infty} G_0^n(x + b_n) = G_0(x) \tag{1.65}$$

za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G_0(x)$. Za svaki $x \in \mathbf{R}$ je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} G_0^n(x + b_n) &= \lim_{n\to\infty} (e^{-e^{-(x+b_n)}})^n \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-ne^{-(x+b_n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-e^{\ln n}e^{-(x+b_n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-e^{-(x+b_n-\ln n)}},
\end{aligned} \tag{1.66}$$

pa jednakost (1.65) postaje

$$\lim_{n\to\infty} e^{-e^{-(x+b_n-\ln n)}} = e^{-e^{-x}}. \tag{1.67}$$

Sledi da za normirajuće konstante možemo odabrati $a_n = 1$ i $b_n = \ln n$, $n \in \mathbf{N}$.

**Primer 2** *Eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodela sa parametrom $\lambda > 0$.*

Kod ove raspodele funkcija raspodele je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{za} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{1.68}$$

Sledi da je $x_0 = +\infty$. Ako za pomoćnu funkciju odaberemo $g(t) = \frac{1}{\lambda}$, onda za svaki realan broj $x$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to x_0-} \frac{1-F(t+xg(t))}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-[1-e^{-\lambda(t+xg(t))}]}{1-(1-e^{-\lambda t})} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\lambda t}e^{-\lambda x g(t)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda x g(t)} = e^{-x}. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Na osnovu teoreme 1.7 sledi da $F \in D(G_0)$.

Rešavanjem jednačine

$$F(x) = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.70}$$

dobija se

$$1 - e^{-\lambda x} = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.71}$$

$$e^{-\lambda x} = \frac{1}{n}, \tag{1.72}$$

$$-\lambda x = -\ln n, \tag{1.73}$$

$$x = \frac{\ln n}{\lambda}. \tag{1.74}$$

Na osnovu jednakosti (1.61) i (1.62) za normirajuće konstante možemo odabrati $a_n = \frac{1}{\lambda}$ i $b_n = \frac{\ln n}{\lambda}$, $n \in \mathbf{N}$.

**Primer 3** *Normalna $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodela sa parametrima $m \in \mathbf{R}$ i $\sigma \in \mathbf{R}_+$.*

Za normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, gustina i funkcija raspodele date su redom sa

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1.75}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt. \tag{1.76}$$

Koristeći Lopitalovo pravilo dobijamo da važi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{1-\Phi(x)}{\frac{\varphi(x)}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(1-\Phi(x))'}{(\frac{\varphi(x)}{x})'} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-\Phi'(x)}{\frac{\varphi'(x)x-\varphi(x)}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1, \end{aligned} \tag{1.77}$$

odnosno

$$1-\Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}, \quad x \to \infty. \tag{1.78}$$

Ako neka slučajna veličina $X$ ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ raspodelu, onda slučajna veličina $\frac{X-m}{\sigma}$ ima normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu. Sledi da je funkcija raspode normalne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ raspodele

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\frac{X-m}{\sigma} \le \frac{x-m}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x-m}{\sigma}). \tag{1.79}$$

Za nju je $x_0 = +\infty$. Birajući za pomoćnu funkciju $g(t) = \frac{\sigma^2}{t}, t > 0$ i koristeći asimptotsku relaciju (1.78), dobijamo da za svaki realan broj $x$ važi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to x_0-} \frac{1-F(t+xg(t))}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-\Phi(\frac{t+xg(t)-m}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{t-m}{\sigma})} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{\varphi(\frac{t+xg(t)-m}{\sigma})}{\frac{t+xg(t)-m}{\sigma}}}{\frac{\varphi(\frac{t-m}{\sigma})}{\frac{t-m}{\sigma}}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{(t-m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t+xg(t)-m}{\sigma})^2}}{(t+xg(t)-m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t-m}{t+xg(t)-m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(t+xg(t)-m)^2-(t-m)^2]} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t-m}{t+xg(t)-m} e^{-[\frac{x^2g^2(t)}{2\sigma^2}+\frac{txg(t)}{\sigma^2}-\frac{mxg(t)}{\sigma^2}]} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t-m}{t+x\frac{\sigma^2}{t}-m} e^{-(\frac{x^2\sigma^2}{2t^2}+x-\frac{mx}{t})} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2-mt}{t^2-mt+x\sigma^2} e^{-(\frac{x^2\sigma^2}{2t^2}+x-\frac{mx}{t})} = e^{-x}.
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Iz teoreme 1.7 sledi da $F \in D(G_0)$.

Na osnovu teoreme 1.2 konstantu $u_n = a_n x + b_n$, gde je $x$ proizvoljan fiksiran realan broj, možemo odrediti iz uslova

$$\lim_{n\to\infty} n(1-F(u_n)) = e^{-x}. \tag{1.81}$$

Koristeći jednakost (1.79) i asimptotsku relaciju (1.78) ovaj uslov se svodi na

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\varphi(\frac{u_n-m}{\sigma})}{\frac{u_n-m}{\sigma}e^{-x}} = 1, \tag{1.82}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^{x-\frac{1}{2}(\frac{u_n-m}{\sigma})^2}}{\sqrt{2\pi}\frac{u_n-m}{\sigma}} = 1. \tag{1.83}$$

Logaritmovanjem obe strane izraza dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}[\ln n + x - \frac{1}{2}(\frac{u_n - m}{\sigma})^2 - \ln(\frac{u_n - m}{\sigma}) - \frac{1}{2}\ln 2\pi] = 0. \tag{1.84}$$

Kad $n \to \infty$ tada $u_n \to \infty$, pa bi iz (1.84) deljenjem obe strane sa $(\frac{u_n - m}{\sigma})^2$ sledilo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{u_n-m}{\sigma})^2}{2\ln n} = 1. \tag{1.85}$$

Logaritmovanjem obe strane ovog izraza dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}[2\ln(\frac{u_n - m}{\sigma}) - \ln 2 - \ln\ln n] = 0, \tag{1.86}$$

odnosno

$$\ln(\frac{u_n - m}{\sigma}) = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln\ln n) + o(1), \tag{1.87}$$

kad $n \to \infty$. Koristeći ovaj i izraz (1.84) dobijamo da važi

$$\frac{1}{2}(\frac{u_n - m}{\sigma})^2 = \ln n + x - \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln\ln n) - \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1), \tag{1.88}$$

odakle sledi

$$(\frac{u_n - m}{\sigma})^2 = 2\ln n[1 + \frac{x - \frac{1}{2}(\ln 4\pi + \ln\ln n)}{\ln n} + o(\frac{1}{\ln n})], \tag{1.89}$$

kad $n \to \infty$. Koristeći formulu $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, kad $x \to 0$, kao i to da je $(\frac{\ln\ln n}{\ln n})^2 = o(\frac{1}{\ln n})$, kad $n \to \infty$, iz jednakosti (1.89) dobijamo da važi

$$\begin{aligned}\frac{u_n - m}{\sigma} &= \sqrt{2\ln n}[1 + \frac{x - \frac{1}{2}(\ln 4\pi + \ln\ln n)}{2\ln n} + o(\frac{1}{\ln n})] \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\ln n}} + \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}} + o(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}),\end{aligned} \tag{1.90}$$

odnosno

$$u_n = \frac{\sigma}{\sqrt{2\ln n}}x + m + \sigma\sqrt{2\ln n} - \sigma\frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}} + o(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}), \tag{1.91}$$

kad $n \to \infty$. Na osnovu teoreme 1.5 za normirajuće konstante možemo odabrati

$$a_n = \frac{\sigma}{\sqrt{2\ln n}}, \tag{1.92}$$

$$b_n = m + \sigma\sqrt{2\ln n} - \sigma\frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}}, \tag{1.93}$$

$n \in \mathbf{N}$.

## Oblast privlačenja Frešeove raspodele

**Teorema 1.8** [von Mises (1936)] *Neka je $F$ apsolutno neprekidna funkcija raspodele sa gustinom raspodele $f$. Ako su ispunjeni uslovi:*

(a) $f(x) > 0$ *za sve* $x \geq x_0$,

(b) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{tf(t)}{1-F(t)} = \alpha > 0$,

*onda važi* $F \in D(G_{1,\alpha})$.

**Teorema 1.9** [Gnedenko (1943)] *Neka je $F$ funkcija raspodele i* $x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\}$. *Tada $F$ pripada oblasti privlačenja $D(G_{1,\alpha})$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi:*

(a) $x_0 = +\infty$,

(b) *za svaki* $x > 0$ *važi jednakost*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}, \tag{1.94}$$

*gde je* $\alpha > 0$.

*Normirajuće konstante se mogu odabrati tako da je*

$$a_n = \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\}, \tag{1.95}$$

$$b_n = 0. \tag{1.96}$$

**Primer 4** *Frešeova raspodela sa parametrom* $\alpha > 0$.

Kod ove raspodele funkcija raspodele je

$$G_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, & \text{za} \quad x > 0. \end{cases} \tag{1.97}$$

Za nju je $x_0 = +\infty$ i za svako $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1-G_{1,\alpha}(tx)}{1-G_{1,\alpha}(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-e^{-(tx)^{-\alpha}}}{1-e^{-t^{-\alpha}}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-[1-(tx)^{-\alpha}-o(t^{-\alpha})]}{1-[1-t^{-\alpha}-o(t^{-\alpha})]} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\alpha}x^{-\alpha}+o(t^{-\alpha})}{t^{-\alpha}+o(t^{-\alpha})} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-\alpha}+o(1)}{1+o(1)} = x^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.98}$$

Iz teoreme 1.9 sledi da $G_{1,\alpha} \in D(G_{1,\alpha})$.

Na osnovu jednakosti (1.96) možemo uzeti da je $b_n = 0$. Onda $a_n > 0$ biramo tako da važi

$$\lim_{n\to\infty} G_{1,\alpha}^n(a_n x) = G_{1,\alpha}(x) \tag{1.99}$$

za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G_{1,\alpha}(x)$. Za $x \leq 0$ je $G_{1,\alpha}(x) = 0$, dok je za $x > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} G_{1,\alpha}^n(a_n x) &= \lim_{n\to\infty} (e^{-(a_n x)^{-\alpha}})^n \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-n(a_n x)^{-\alpha}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-(a_n n^{-\frac{1}{\alpha}} x)^{-\alpha}}, \end{aligned} \tag{1.100}$$

pa jednakost (1.99) postaje

$$\lim_{n\to\infty} e^{-(a_n n^{-\frac{1}{\alpha}} x)^{-\alpha}} = e^{-x^{-\alpha}}. \tag{1.101}$$

Prema tome, za normirajuće konstante možemo odabrati $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ i $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

**Primer 5** *Paretova raspodela sa parametrima $\alpha > 0$ i $k > 0$.*

Ova raspodela odredjena je funkcijom raspodele

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < k^{\frac{1}{\alpha}}, \\ 1 - kx^{-\alpha}, & \text{za} \quad x \geq k^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases} \tag{1.102}$$

Kod nje je $x_0 = +\infty$ i za svako $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - [1 - k(tx)^{-\alpha}]}{1 - (1 - kt^{-\alpha})} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{kt^{-\alpha}x^{-\alpha}}{kt^{-\alpha}} = x^{-\alpha}, \end{aligned} \tag{1.103}$$

pa na osnovu teoreme 1.9 sledi da $F \in D(G_{1,\alpha})$.

Rešavanjem jednačine

$$F(x) = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.104}$$

dobija se

$$1 - kx^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.105}$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{kn}, \tag{1.106}$$

$$x = (kn)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{1.107}$$

Na osnovu jednakosti (1.95) i (1.96) za normirajuće konstante možemo odabrati $a_n = (kn)^{\frac{1}{\alpha}}$ i $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

**Primer 6** *Košijeva $\mathcal{K}(\lambda, 0)$ raspodela sa parametrom $\lambda > 0$.*

Primetimo prvo da smenom $u = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } s$, odnosno $s = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - u) = \text{ctg } u$, dobijamo da važi

$$\lim_{s\to\infty}(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } s)s = \lim_{u\to 0} u \text{ ctg } u = \lim_{u\to 0} u\frac{\cos u}{\sin u} = 1. \tag{1.108}$$

Kod Košijeve raspodele $\mathcal{K}(\lambda, 0)$ funkcija raspodele je

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{x}{\lambda}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1.109}$$

U ovom slučaju je $x_0 = +\infty$ i za svako $x > 0$ važi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{tx}{\lambda})}{1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{t}{\lambda})}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{tx}{\lambda}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{t}{\lambda}}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\frac{tx}{\lambda}}{\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\frac{t}{\lambda}} \qquad (1.110)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\frac{tx}{\lambda})\frac{tx}{\lambda}}{(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\frac{t}{\lambda})\frac{t}{\lambda}x} = x^{-1},\end{aligned}$$

na osnovu (1.108). Na osnovu teoreme 1.9 sledi da $F \in D(G_{1,1})$.

Rešavanjem jednačine

$$F(x) = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.111}$$

dobija se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{x}{\lambda} &= 1 - \frac{1}{n}, & (1.112)\\ \text{arctg}\frac{x}{\lambda} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, & (1.113)\\ \frac{x}{\lambda} &= \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}), & (1.114)\\ x &= \lambda\text{ctg}\frac{\pi}{n}. & (1.115)\end{aligned}$$

Na osnovu jednakosti (1.95) i (1.96) za normirajuće konstante možemo odabrati $a_n = \lambda\text{ctg}\frac{\pi}{n}$ i $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

## Oblast privlačenja Vejbulove raspodele

**Teorema 1.10** [von Mises (1936)] *Neka je $F$ apsolutno neprekidna funkcija raspodele sa gustinom raspodele $f$ i $x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\}$. Ako su ispunjeni uslovi:*

(a) $x_0 < +\infty$,

(b) $f(x) > 0$ *za sve* $x \in (a, x_0)$,

(c) $\lim\limits_{t \to x_0-} \frac{(x_0-t)f(t)}{1-F(t)} = \alpha > 0$,

*onda važi* $F \in D(G_{2,\alpha})$.

**Teorema 1.11** [Gnedenko (1943)] *Neka je* $F$ *funkcija raspodele i* $x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\}$. *Tada* $F$ *pripada oblasti privlačenja* $D(G_{2,\alpha})$ *ako i samo ako su ispunjeni uslovi:*

(a) $x_0 < +\infty$,

(b) *za svaki* $x > 0$ *važi jednakost*

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1 - F(x_0 - hx)}{1 - F(x_0 - h)} = x^\alpha, \tag{1.116}$$

*gde je* $\alpha > 0$.

*Normirajuće konstante se mogu odabrati tako da je*

$$\begin{aligned} a_n &= x_0 - \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\}, && (1.117) \\ b_n &= x_0. && (1.118) \end{aligned}$$

**Primer 7** *Vejbulova raspodela sa parametrom* $\alpha > 0$.

Funkcija raspodele je

$$G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha}, & \text{za} \quad x < 0, \\ 1, & \text{za} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{1.119}$$

Za nju je $x_0 = 0$ i za svako $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0+} \frac{1 - G_{2,\alpha}(x_0 - hx)}{1 - G_{2,\alpha}(x_0 - h)} &= \lim_{h \to 0+} \frac{1 - G_{2,\alpha}(-hx)}{1 - G_{2,\alpha}(-h)} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{1 - e^{-(hx)^\alpha}}{1 - e^{-h^\alpha}} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{1 - [1 - (hx)^\alpha - o(h^\alpha)]}{1 - [1 - h^\alpha - o(h^\alpha)]} \qquad (1.120) \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{h^\alpha x^\alpha + o(h^\alpha)}{h^\alpha + o(h^\alpha)} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{x^\alpha + o(1)}{1 + o(1)} = x^\alpha. \end{aligned}$$

Iz teoreme 1.11 sledi da $G_{2,\alpha} \in D(G_{2,\alpha})$.

Na osnovu jednakosti (1.118) možemo uzeti da je $b_n = 0$. Onda $a_n > 0$ biramo tako da važi

$$\lim_{n\to\infty} G^n_{2,\alpha}(a_n x) = G_{2,\alpha}(x) \tag{1.121}$$

za svaku tačku neprekidnosti $x$ funkcije raspodele $G_{2,\alpha}(x)$. Za $x \geq 0$ je $G_{2,\alpha}(x) = 1$, dok je za $x < 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} G^n_{2,\alpha}(a_n x) &= \lim_{n\to\infty} (e^{-(-a_n x)^\alpha})^n \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-n(-a_n x)^\alpha} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-(-a_n n^{\frac{1}{\alpha}} x)^\alpha},
\end{aligned} \tag{1.122}$$

pa jednakost (1.121) postaje

$$\lim_{n\to\infty} e^{-(-a_n n^{\frac{1}{\alpha}} x)^\alpha} = e^{-(-x)^\alpha}. \tag{1.123}$$

Sledi da za normirajuće konstante možemo odabrati $a_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}$ i $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

**Primer 8** *Ravnomerna* (*uniformna*) $\mathcal{U}[a,b]$ *raspodela* .

U ovom slučaju funkcija raspodele je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{za} \quad a \leq x < b, \\ 1, & \text{za} \quad x \geq b, \end{cases} \tag{1.124}$$

gde je $a < b$. Ovde je $x_0 = b$ i za svako $x > 0$ važi

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{1 - F(x_0 - hx)}{1 - F(x_0 - h)} &= \lim_{h\to 0+} \frac{1 - F(b - hx)}{1 - F(b - h)} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1 - \frac{b-hx-a}{b-a}}{1 - \frac{b-h-a}{b-a}} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{hx}{b-a}}{\frac{h}{b-a}} = x,
\end{aligned} \tag{1.125}$$

Iz teoreme 1.11 sledi da $F \in D(G_{2,1})$.

Rešavanjem jednačine

$$F(x) = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.126}$$

dobija se

$$\frac{x-a}{b-a} = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.127}$$

$$\frac{x-b}{b-a} = -\frac{1}{n}, \tag{1.128}$$

$$x = b - \frac{b-a}{n}. \tag{1.129}$$

Na osnovu jednakosti (1.117) i (1.118) za normirajuće konstante možemo odabrati $a_n = \frac{b-a}{n}$ i $b_n = b$, $n \in \mathbf{N}$.

**Primer 9** *Usečena eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda, c)$ raspodela sa parametrima $\lambda > 0$ i $c > 0$.*

Ova raspodela odredjena je funkcijom raspodele

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda c}}, & \text{za} \quad 0 \leq x < c, \\ 1, & \text{za} \quad x \geq c. \end{cases} \tag{1.130}$$

Ovde je $x_0 = c$ i za svako $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0+} \frac{1 - F(x_0 - hx)}{1 - F(x_0 - h)} &= \lim_{h \to 0+} \frac{1 - F(c - hx)}{1 - F(c - h)} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{1 - \frac{1-e^{-\lambda(c-hx)}}{1-e^{-\lambda c}}}{1 - \frac{1-e^{-\lambda(c-h)}}{1-e^{-\lambda c}}} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{\frac{e^{-\lambda(c-hx)}-e^{-\lambda c}}{1-e^{-\lambda c}}}{\frac{e^{-\lambda(c-h)}-e^{-\lambda c}}{1-e^{-\lambda c}}} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{e^{-\lambda c}(e^{\lambda hx} - 1)}{e^{-\lambda c}(e^{\lambda h} - 1)} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{\lambda hx + o(h)}{\lambda h + o(h)} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{\lambda x + o(1)}{\lambda + o(1)} = x, \end{aligned} \tag{1.131}$$

pa na osnovu teoreme 1.11 sledi da $F \in D(G_{2,1})$.

Rešavanjem jednačine

$$F(x) = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.132}$$

dobija se

$$\frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda c}} = 1 - \frac{1}{n}, \tag{1.133}$$

$$\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda c}}{1 - e^{-\lambda c}} = \frac{1}{n}, \tag{1.134}$$

$$e^{-\lambda x} = e^{-\lambda c} + \frac{1 - e^{-\lambda c}}{n}, \tag{1.135}$$

$$x = -\frac{\ln(e^{-\lambda c} + \frac{1-e^{-\lambda c}}{n})}{\lambda}. \tag{1.136}$$

Kako je

$$\begin{aligned} c-(-\frac{\ln(e^{-\lambda c}+\frac{1-e^{-\lambda c}}{n})}{\lambda}) &= \frac{\lambda c+\ln(e^{-\lambda c}+\frac{1-e^{-\lambda c}}{n})}{\lambda} \\ &= \frac{\ln(e^{\lambda c})+\ln(e^{-\lambda c}+\frac{1-e^{-\lambda c}}{n})}{\lambda} \\ &= \frac{\ln(1+\frac{e^{\lambda c}-1}{n})}{\lambda} \sim \frac{e^{\lambda c}-1}{\lambda n} \end{aligned} \tag{1.137}$$

kad $n \to \infty$, to na osnovu jednakosti (1.117) i (1.118), kao i posledice 1.2.2, za normirajuće konstante možemo odabrati $a_n = \frac{e^{\lambda c}-1}{\lambda n}$ i $b_n = c$, $n \in \mathbf{N}$.

## Raspodele koje ne pripadaju oblastima privlačenja

Pored raspodela koje pripadaju pomenutim trima oblastima privlačenja, postoje i one koje ne pripadaju nijednoj oblasti privlačenja za maksimume. Na osnovu teoreme 1.3 zaključujemo da su to one raspodele čije funkcije raspodele $F$ ne zadovoljavaju uslov (1.38).

Neka je $X_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina, sa istom diskretnom funkcijom raspodele $F$, a koje uzimaju vrednosti iz skupa nenegativnih celih brojeva. Primenom Xajneovog principa za granične vrednosti na uslov (1.38) dobijamo da funkcija raspodele $F$ ne pripada nijednoj oblasti privlačenja za maksimume ako niz

$$\frac{F(k)-F(k-0)}{1-F(k-0)} = \frac{P\{X_n = k\}}{\sum\limits_{i=k}^{\infty} P\{X_n = i\}}, \tag{1.138}$$

$k \in \mathbf{N}$, ne konvergira nuli kad $k \to \infty$.

**Primer 10** *Geometrijska raspodela sa parametrom $p \in (0,1)$.*

Zakon ove raspodele je

$$P\{X_n = k\} = (1-p)^{k-1}p, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{1.139}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{F(k)-F(k-0)}{1-F(k-0)} &= \lim_{k\to\infty} \frac{P\{X_n = k\}}{\sum\limits_{i=k}^{\infty} P\{X_n = i\}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(1-p)^{k-1}p}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}(1-p)^{i-1}p} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{(1-p)^{k-1}p}{(1-p)^{k-1}p\sum\limits_{s=0}^{\infty}(1-p)^{s}} \end{aligned} \tag{1.140}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{1-(1-p)}} = p.$$

Kako je $p \neq 0$, sledi da ova raspodela ne pripada nijednoj oblasti privlačenja za maksimume.

**Primer 11** *Negativna binomna raspodela sa parametrima $p \in (0,1)$ i $r \in \{2,3,\ldots\}$.*

Ako uvedemo oznaku $q = 1-p$, njen zakon raspodele je

$$P\{X_n = k\} = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, \quad k \in \{r, r+1, \ldots\}. \tag{1.141}$$

Koristeći Lajbnicovu formulu za izvod višeg reda proizvoda dve funkcije dobijamo

$$\begin{aligned}
& \lim_{k\to\infty} \frac{F(k)-F(k-0)}{1-F(k-0)} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{P\{X_n = k\}}{\sum\limits_{i=k}^{\infty} P\{X_n = i\}} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}}{\sum\limits_{i=k}^{\infty} \binom{i-1}{r-1} p^r q^{i-r}} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}(i-1)\cdots(i-r+1)q^{i-r}} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}(q^{i-1})^{(r-1)}} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}}{(\sum\limits_{i=k}^{\infty} q^{i-1})^{(r-1)}} \qquad (1.142) \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}}{(\frac{q^{k-1}}{1-q})^{(r-1)}} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}}{\sum\limits_{s=0}^{r-1}\binom{r-1}{s}(q^{k-1})^{(r-1-s)}(\frac{1}{1-q})^{(s)}} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}}{(q^{k-1})^{(r-1)}\frac{1}{1-q} + (r-1)(q^{k-1})^{(r-2)}(\frac{1}{1-q})' + \cdots + q^{k-1}(\frac{1}{1-q})^{(r-1)}} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}}{(k-1)\cdots(k-r+1)q^{k-r}\frac{1}{1-q} + \cdots + q^{k-1}(\frac{1}{1-q})^{(r-1)}} \\
= & \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{1-q} + \frac{r-1}{k-r+1}\frac{q}{(1-q)^2} + \cdots + \frac{1}{(k-1)\cdots(k-r+1)}q^{r-1}(\frac{1}{1-q})^{(r-1)}} = \frac{1}{\frac{1}{1-q}} = p.
\end{aligned}$$

Kako je $p \neq 0$, sledi da ni ova raspodela ne pripada nijednoj oblasti privlačenja za maksimume.

**Primer 12** *Puasonova $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodela sa parametrom $\lambda > 0$.*

Zakon raspodele kod Puasonove raspodele je

$$P\{X_n = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \tag{1.143}$$

S obzirom na to, važi

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\frac{F(k)-F(k-0)}{1-F(k-0)} &= \lim_{k\to\infty}\frac{P\{X_n=k\}}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}P\{X_n=i\}} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\lambda^k}{k!}}{\frac{\lambda^k}{k!}+\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^s}{(k+1)\cdots(k+s)}} \qquad (1.144)\\
&\geq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\sum\limits_{s=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{k})^s} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{s=0}^{\infty}(\frac{\lambda}{k})^s} \\
&= \lim_{k\to\infty}(1-\frac{\lambda}{k}) = 1,
\end{aligned}$$

pa sledi isti zaključak kao u prethodna dva primera.

# Glava 2

# Mešavine raspodela i ekstremne vrednosti

## 2.1 Mešavine konačno mnogo raspodela i oblasti privlačenja

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne veličine sa odgovarajućim funkcijama raspodele $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ i neka je slučajna veličina $X$ definisana na sledeći način:

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \text{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_n & \text{sa verovatnoćom} \quad p_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

gde su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{2.2}$$

Raspodela slučajne veličine $X$ je mešavina konačno mnogo raspodela odredjenih funkcijama raspodele $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ i za njenu funkciju raspodele $F(x)$ važi jednakost

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x). \tag{2.3}$$

Neka je $Y_1, Y_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom. Neka je ta raspodela mešavina konačno mnogo raspodela odredjenih funkcijama raspodele $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$, tj. njena funkcija raspodele $F(x)$ definisana je kao u jednakosti (2.3). Definišimo slučajnu veličinu

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.4}$$

Razmatraćemo probleme koji se odnose na asimptotsko ponašanje raspodele ove slučajne veličine kad $n \to \infty$.

U daljem izlaganju od velike koristi će nam biti sledeća lema [Mladenović (2002) lema 1.2.2], koju ovde navodimo bez dokaza.

**Lema 2.1.1** *Ako za merljivu funkciju $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ postoji broj $\rho \in \mathbf{R}$, takav da za svaki $x > 0$ važi*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^\rho, \tag{2.5}$$

*onda važi jednakost*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln F(x)}{\ln x} = \rho. \tag{2.6}$$

U teoremama koje slede pokazaćemo da funkcija raspodele konačne mešavine raspodela, koje pripadaju oblasti privlačenja za maksimume Frešeove, odnosno Vejbulove raspodele, takodje pripada oblasti privlačenja za maksimume Frešeove, odnosno Vejbulove raspodele.

**Teorema 2.1** *Neka su $F_1, F_2, \ldots, F_n$ funkcije raspodele takve da za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $F_i \in D(G_{1,\alpha_i}), \alpha_i > 0$ i neka važi $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$. Tada za funkciju raspodele mešavine $F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x)$ važi $F \in D(G_{1,\alpha_1})$.*

**Dokaz:** Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ iz uslova $F_i \in D(G_{1,\alpha_i})$, na osnovu teoreme 1.9, sledi da je $\sup\{t : F_i(t) < 1\} = +\infty$, pa je i

$$\sup\{t : F(t) < 1\} = +\infty. \tag{2.7}$$

Takodje, za svaki $x > 0$ važi jednakost

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F_i(tx)}{1 - F_i(t)} = x^{-\alpha_i}, \tag{2.8}$$

gde je $\alpha_i > 0$, odnosno

$$1 - F_i(tx) = (1 - F_i(t))(x^{-\alpha_i} + o(1)), \tag{2.9}$$

kad $t \to \infty$.
Koristeći lemu 2.1.1 dobijamo

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln(1 - F_i(t))}{\ln t} = -\alpha_i, \tag{2.10}$$

$$\ln(1 - F_i(t)) = (-\alpha_i + o(1)) \ln t, \quad t \to \infty, \tag{2.11}$$

odnosno

$$1 - F_i(t) = t^{-\alpha_i + o(1)}, \quad t \to \infty. \tag{2.12}$$

Ako za neko $k \neq j$ važi

$$\alpha_k < \alpha_j, \tag{2.13}$$

onda je

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1-F_j(t)}{1-F_k(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\alpha_j+o(1)}}{t^{-\alpha_k+o(1)}} \\ &= \lim_{t\to\infty} t^{\alpha_k-\alpha_j+o(1)} = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Razlikovaćemo tri slučaja:

1. Neka je $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$.

   Koristeći jednakosti (2.8) i (2.14) dobijamo da za svaki $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-\sum\limits_{i=1}^{n} p_i F_i(tx)}{1-\sum\limits_{i=1}^{n} p_i F_i(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(tx))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{p_1(1-F_1(tx))(1+\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{p_i}{p_1}\frac{1-F_i(tx)}{1-F_1(tx)})}{p_1(1-F_1(t))(1+\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{p_i}{p_1}\frac{1-F_i(t)}{1-F_1(t)})} \qquad (2.15) \\ &= x^{-\alpha_1} \lim_{t\to\infty} \frac{1+\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{p_i}{p_1}\frac{1-F_i(tx)}{1-F_1(tx)}}{1+\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{p_i}{p_1}\frac{1-F_i(t)}{1-F_1(t)}} \\ &= x^{-\alpha_1} \frac{1+\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{p_i}{p_1}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1-F_i(tx)}{1-F_1(tx)}}{1+\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{p_i}{p_1}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1-F_i(t)}{1-F_1(t)}} = x^{-\alpha_1}. \end{aligned}$$

   Iz jednakosti (2.7) i (2.15), na osnovu teoreme 1.9, sledi da $F \in D(G_{1,\alpha_1})$.

2. Neka je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k < \alpha_{k+1} \leq \ldots \leq \alpha_n$, gde za $k$ važi $2 \leq k \leq n-1$.

   Na osnovu jednakosti (2.9) za svaki $x > 0$ važi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1-\sum\limits_{i=1}^{n} p_i F_i(tx)}{1-\sum\limits_{i=1}^{n} p_i F_i(t)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(tx))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))(x^{-\alpha_i}+o(1))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} \\
&= \lim_{t\to\infty}[x^{-\alpha_1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))o(1)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} \\
&\quad + \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{n} p_i(1-F_i(t))(x^{-\alpha_i}-x^{-\alpha_1})}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))}] \qquad (2.16) \\
&= x^{-\alpha_1} + \sum_{l=1}^{n} \lim_{t\to\infty} \frac{p_l(1-F_l(t))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} o(1) \\
&\quad + \sum_{s=k+1}^{n} (x^{-\alpha_s}-x^{-\alpha_1}) \lim_{t\to\infty} \frac{p_s(1-F_s(t))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))}.
\end{aligned}
$$

Za svako $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi

$$0 \leq \frac{p_l(1-F_l(t))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} \leq 1. \qquad (2.17)$$

Odatle sledi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p_l(1-F_l(t))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} o(1) = 0, \qquad (2.18)$$

odnosno

$$\sum_{l=1}^{n} \lim_{t\to\infty} \frac{p_l(1-F_l(t))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} o(1) = 0. \qquad (2.19)$$

Za svako $s \in \{k+1, \ldots, n\}$ važi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p_s(1-F_s(t))}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1-F_i(t))} = \lim_{t\to\infty} \frac{p_s \frac{1-F_s(t)}{1-F_1(t)}}{p_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} p_i \frac{1-F_i(t)}{1-F_1(t)}} = 0, \qquad (2.20)$$

jer je

$$p_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i \frac{1-F_i(t)}{1-F_1(t)} \geq p_1 > 0, \qquad (2.21)$$

a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F_s(t)}{1-F_1(t)}=0 \tag{2.22}$$

na osnovu jednakosti (2.14). Iz jednakosti (2.20) sledi

$$\sum_{s=k+1}^{n}(x^{-\alpha_s}-x^{-\alpha_1})\lim_{t\to\infty}\frac{p_s(1-F_s(t))}{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))}=0. \tag{2.23}$$

Koristeći jednakosti (2.16), (2.19) i (2.23) dobijamo da važi

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)}=x^{-\alpha_1}. \tag{2.24}$$

Na osnovu teoreme 1.9, iz ove i jednakosti (2.7) sledi da $F\in D(G_{1,\alpha_1})$.

3. Neka je $\alpha_1=\ldots=\alpha_n$.

   Koristeći jednakosti (2.9) i (2.19) dobijamo da za svaki $x>0$ važi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1-\sum_{i=1}^{n}p_iF_i(tx)}{1-\sum_{i=1}^{n}p_iF_i(t)}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(tx))}{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))(x^{-\alpha_i}+o(1))}{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))}\\ &= \lim_{t\to\infty}[x^{-\alpha_1}\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))}{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))}+\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))o(1)}{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))}]\\ &= x^{-\alpha_1}+\sum_{l=1}^{n}\lim_{t\to\infty}\frac{p_l(1-F_l(t))}{\sum_{i=1}^{n}p_i(1-F_i(t))}o(1)=x^{-\alpha_1}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

   Iz ove i jednakosti (2.7), na osnovu teoreme 1.9, sledi da i u ovom slučaju $F\in D(G_{1,\alpha_1})$.□

**Teorema 2.2** *Neka su* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *funkcije raspodele takve da za svako* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $F_i \in D(G_{2,\alpha_i}), \alpha_i > 0$. *Neka je* $x_i = \sup\{t : F_i(t) < 1\}$ *i neka važi* $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. *Ako je*

(a) $x_1 > x_2 \geq \ldots \geq x_n$

*ili*

(b) $x_1 = \ldots = x_k > x_{k+1} \geq \ldots \geq x_n$ *i* $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k$ *za neko* $k$, *takvo da važi* $2 \leq k \leq n$,

*tada za funkciju raspodele mešavine* $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i F_i(x)$ *važi* $F \in D(G_{2,\alpha_1})$.

**Dokaz:** Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ iz uslova $F_i \in D(G_{2,\alpha_i})$, na osnovu teoreme 1.11, sledi da je $x_i < +\infty$ i za svaki $x > 0$ važi jednakost

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1 - F_i(x_i - hx)}{1 - F_i(x_i - h)} = x^{\alpha_i}, \tag{2.26}$$

gde je $\alpha_i > 0$, odnosno važi

$$1 - F_i(x_i - hx) = (1 - F_i(x_i - h))(x^{\alpha_i} + o(1)), \tag{2.27}$$

kad $h \to 0+$.
Iz jednakosti (2.26), za $y = \frac{1}{x} > 0$, dobijamo

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1 - F_i(x_i - \frac{h}{y})}{1 - F_i(x_i - h)} = y^{-\alpha_i}. \tag{2.28}$$

Smenom $t = \frac{1}{h}$ ova jednakost postaje

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F_i(x_i - \frac{1}{ty})}{1 - F_i(x_i - \frac{1}{t})} = y^{-\alpha_i}. \tag{2.29}$$

Ako uvedemo pomoćnu funkciju $G_i$, takvu da je

$$G_i(x) = 1 - F_i(x_i - \frac{1}{x}), \tag{2.30}$$

dobijamo da važi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G_i(ty)}{G_i(t)} = y^{-\alpha_i}. \tag{2.31}$$

Koristeći lemu 2.1.1 dobijamo

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln G_i(t)}{\ln t} = -\alpha_i, \tag{2.32}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln(1 - F_i(x_i - \frac{1}{t}))}{\ln t} = -\alpha_i. \tag{2.33}$$

Vraćajući smenu $t = \frac{1}{h}$ ova jednakost se dalje svodi na

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{\ln(1-F_i(x_i-h))}{\ln h} &= \alpha_i, & (2.34)\\ \ln(1-F_i(x_i-h)) &= (\alpha_i+o(1))\ln h, \quad h\to 0+, & (2.35)\end{aligned}$$

odnosno

$$1-F_i(x_i-h) = h^{\alpha_i+o(1)}, \quad h\to 0+. \tag{2.36}$$

Ako za neko $k \neq j$ važi

$$\alpha_k < \alpha_j, \tag{2.37}$$

onda je

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{1-F_j(x_j-h)}{1-F_k(x_k-h)} &= \lim_{h\to 0+} \frac{h^{\alpha_j+o(1)}}{h^{\alpha_k+o(1)}}\\ &= \lim_{h\to 0+} h^{\alpha_j-\alpha_k+o(1)} = 0. & (2.38)\end{aligned}$$

Razmotrimo dva data slučaja:

(a) Neka je $x_1 > x_2 \geq \ldots \geq x_n$.

Za $x < x_1$ je $F_1(x) < 1$, pa je i $F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x) < 1$. Za $x \geq x_1$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $F_i(x) = 1$, pa je i $F(x) = 1$. Zaključujemo da je

$$\sup\{t : F(t) < 1\} = x_1 < +\infty. \tag{2.39}$$

Za $x_2 \leq x < x_1$ važi

$$\begin{aligned} F(x) &= p_1F_1(x) + p_2 + \ldots + p_n\\ &= 1 - p_1 + p_1F_1(x) & (2.40)\\ &= 1 - p_1(1-F_1(x)).\end{aligned}$$

Koristeći ovu jednakost dobijamo da za svaki $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{1-F(x_1-hx)}{1-F(x_1-h)} &= \lim_{h\to 0+} \frac{1-[1-p_1(1-F_1(x_1-hx))]}{1-[1-p_1(1-F_1(x_1-h))]}\\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{p_1(1-F_1(x_1-hx))}{p_1(1-F_1(x_1-h))} = x^{\alpha_1}. & (2.41)\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 1.11, iz (2.39) i (2.41) sledi da $F \in D(G_{2,\alpha_1})$.

(b) Neka je $x_1 = \ldots = x_k > x_{k+1} \geq \ldots \geq x_n$ za neko $k$, takvo da je $2 \leq k \leq n$ i neka važi $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k$.

Za $x < x_1$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ je $F_i(x) < 1$, pa je i $F(x) < 1$. Za $x \geq x_1$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $F_i(x) = 1$, pa je i $F(x) = 1$. Odavde sledi da je i u ovom slučaju

$$\sup\{t : F(t) < 1\} = x_1 < +\infty. \tag{2.42}$$

Za $x_{k+1} \leq x < x_1$ (ukoliko je $k = n$ onda za $x < x_1$) važi

$$\begin{aligned} F(x) &= p_1F_1(x) + \ldots + p_kF_k(x) + p_{k+1} + \ldots + p_n \\ &= 1 - p_1 - \ldots - p_k + p_1F_1(x) + \ldots + p_kF_k(x) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i(1 - F_i(x)). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Razlikovaćemo tri podslučaja:

1. Neka je $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k$.
   Koristeći jednakosti (2.43), (2.26) i (2.38) dobijamo da za svaki $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{1 - F(x_1 - hx)}{1 - F(x_1 - h)} &= \lim_{h\to 0+} \frac{1 - [1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1 - F_i(x_1 - hx))]}{1 - [1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1 - F_i(x_1 - h))]} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1 - F_i(x_1 - hx))}{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1 - F_i(x_1 - h))} \\ &= \lim_{h\to 0+} [\frac{p_1(1 - F_1(x_1 - hx))}{p_1(1 - F_1(x_1 - h))} \\ &\quad \cdot \frac{1 + \sum\limits_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} \frac{1 - F_i(x_1 - hx)}{1 - F_1(x_1 - hx)}}{1 + \sum\limits_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} \frac{1 - F_i(x_1 - h)}{1 - F_1(x_1 - h)}}] \\ &= x^{\alpha_1} \lim_{h\to 0+} \frac{1 + \sum\limits_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} \frac{1 - F_i(x_1 - hx)}{1 - F_1(x_1 - hx)}}{1 + \sum\limits_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} \frac{1 - F_i(x_1 - h)}{1 - F_1(x_1 - h)}} \\ &= x^{\alpha_1} \frac{1 + \sum\limits_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} \lim\limits_{h\to 0+} \frac{1 - F_i(x_1 - hx)}{1 - F_1(x_1 - hx)}}{1 + \sum\limits_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} \lim\limits_{h\to 0+} \frac{1 - F_i(x_1 - h)}{1 - F_1(x_1 - h)}} = x^{\alpha_1}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Iz jednakosti (2.42) i (2.44), na osnovu teoreme 1.11, sledi da $F \in D(G_{2,\alpha_1})$.

2. Neka je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s < \alpha_{s+1} \leq \ldots \leq \alpha_k$, gde za $s$ važi $2 \leq s \leq k-1$. Na osnovu jednakosti (2.43) i (2.27) za svaki $x > 0$ važi

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{1-F(x_1-hx)}{1-F(x_1-h)} &= \lim_{h\to 0+} \frac{1-[1-\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-hx))]}{1-[1-\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))]} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-hx))}{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))(x^{\alpha_i}+o(1))}{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} \\
&= \lim_{h\to 0+} [x^{\alpha_1} \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))}{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} \qquad (2.45) \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))o(1)}{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} \\
&\quad + \frac{\sum_{i=s+1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))(x^{\alpha_i}-x^{\alpha_1})}{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))}] \\
&= x^{\alpha_1} + \sum_{l=1}^{k} \lim_{h\to 0+} \frac{p_l(1-F_l(x_1-h))}{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} o(1) \\
&+ \sum_{r=s+1}^{k} (x^{\alpha_r}-x^{\alpha_1}) \lim_{h\to 0+} \frac{p_r(1-F_r(x_1-h))}{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))}.
\end{aligned}$$

Za svako $l \in \{1,2,\ldots,k\}$ važi nejednakost

$$0 \leq \frac{p_l(1-F_l(x_1-h))}{\sum_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} \leq 1, \qquad (2.46)$$

na osnovu koje sledi

$$\lim_{h\to 0+}\frac{p_l(1-F_l(x_1-h))}{\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(1-F_i(x_1-h))}o(1)=0, \tag{2.47}$$

odnosno

$$\sum_{l=1}^{k}\lim_{h\to 0+}\frac{p_l(1-F_l(x_1-h))}{\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(1-F_i(x_1-h))}o(1)=0. \tag{2.48}$$

Za svako $r\in\{s+1,\ldots,k\}$ važi

$$\lim_{h\to 0+}\frac{p_r(1-F_r(x_1-h))}{\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(1-F_i(x_1-h))}=\lim_{h\to 0+}\frac{p_r\frac{1-F_r(x_1-h)}{1-F_1(x_1-h)}}{p_1+\sum\limits_{i=2}^{k}p_i\frac{1-F_i(x_1-h)}{1-F_1(x_1-h)}}=0, \tag{2.49}$$

jer je

$$p_1+\sum_{i=2}^{k}p_i\frac{1-F_i(x_1-h)}{1-F_1(x_1-h)}\geq p_1>0, \tag{2.50}$$

a

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1-F_r(x_1-h)}{1-F_1(x_1-h)}=0 \tag{2.51}$$

na osnovu jednakosti (2.38). Iz jednakosti (2.49) sledi

$$\sum_{r=s+1}^{k}(x^{\alpha_r}-x^{\alpha_1})\lim_{h\to 0+}\frac{p_r(1-F_r(x_1-h))}{\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(1-F_i(x_1-h))}=0. \tag{2.52}$$

Iz jednakosti (2.45), (2.48) i (2.52) dobijamo da važi

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1-F(x_1-hx)}{1-F(x_1-h)}=x^{\alpha_1}. \tag{2.53}$$

Na osnovu teoreme 1.11, iz jednakosti (2.42) i (2.53) takodje sledi da $F\in D(G_{2,\alpha_1})$.

3. Neka je $\alpha_1=\ldots=\alpha_k$.
Iz jednakosti (2.43), (2.27) i (2.48) dobijamo da za svaki $x>0$ važi

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1-F(x_1-hx)}{1-F(x_1-h)} = \lim_{h\to 0+}\frac{1-[1-\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(1-F_i(x_1-hx))]}{1-[1-\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(1-F_i(x_1-h))]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0+} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-hx))}{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))(x^{\alpha_i}+o(1))}{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} \\
&= \lim_{h\to 0+} [x^{\alpha_1} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))}{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} \\
&\quad + \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))o(1)}{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))}] \qquad (2.54) \\
&= x^{\alpha_1} + \sum_{l=1}^{k} \lim_{h\to 0+} \frac{p_l(1-F_l(x_1-h))}{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1-F_i(x_1-h))} o(1) \\
&= x^{\alpha_1}.
\end{aligned}
$$

Iz jednakosti (2.42) i (2.54), na osnovu teoreme 1.11, sledi da i u ovom podslučaju $F \in D(G_{2,\alpha_1})$.□

U radovima Mladenović (1998) i Mladenović (1999) razmatrani su nizovi nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom koja je mešavina dve konkretne raspodele i rešavani su problemi vezani za asimptotsko ponašanje maksimuma $M_n$ kad $n \to \infty$. U primerima i teoremama koje slede razmatranje će biti prošireno na nizove nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom koja je mešavina $k$ konkretnih raspodela, gde je $k$ prirodan broj, a biće rešavani i neki novi slučajevi.

**Primer 13** *Neka su $X_i, i \in \{1,2,\ldots,k\}$, slučajne veličine takve da su njihove odgovarajuće funkcije raspodele Frešeove $G_{1,\alpha_i}(x), \alpha_i > 0$ i neka je $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_k$, tj.*

$$
X = \begin{cases} X_1 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_k & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_k, \end{cases} \qquad (2.55)
$$

*gde su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$
\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \qquad (2.56)
$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.57}$$

*Tada za svako $x > 0$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n}{(np_1)^{\frac{1}{\alpha_1}}} \leq x\} = e^{-x^{-\alpha_1}}. \tag{2.58}$$

Funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, je

$$G_{1,\alpha_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq 0, \\ e^{-x^{-\alpha_i}}, & \text{za} \quad x > 0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Kako je zajednička raspodela članova niza mešavina tih $k$ Frešeovih raspodela, za njenu funkciju raspodele važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i G_{1,\alpha_i}(x), \tag{2.60}$$

odnosno

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i e^{-x^{-\alpha_i}}, & \text{za} \quad x > 0. \end{cases} \tag{2.61}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ na osnovu primera 4 sledi da $G_{1,\alpha_i} \in D(G_{1,\alpha_i})$. Kako je $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, iz teoreme 2.1 sledi da $F \in D(G_{1,\alpha_1})$. To znači da za svako $x > 0$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} = e^{-x^{-\alpha_1}}, \tag{2.62}$$

gde su $a_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, normirajuće konstante koje treba odrediti.

Na osnovu teoreme 1.9 sledi da je $b_n = 0$, pa se jednakost (2.62) svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq a_n x\} = e^{-x^{-\alpha_1}}. \tag{2.63}$$

Koristeći teoremu 1.2 konstantu $a_n$ možemo izračunati iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x)) = x^{-\alpha_1}, \tag{2.64}$$

koja važi za svako $x > 0$. Kako je $a_n > 0$, iz ove jednakosti dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - \sum_{i=1}^{k} p_i e^{-(a_n x)^{-\alpha_i}}) = x^{-\alpha_1}, \tag{2.65}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{k} p_i(1-e^{-(a_nx)^{-\alpha_i}}) = x^{-\alpha_1}. \tag{2.66}$$

Kada $n \to \infty$, tada $a_nx = u_n \to \infty$, pa $-(a_nx)^{-\alpha_i} \to 0$, odakle sledi da je jednakost (2.66) ekvivalentna jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{k} p_i[1-(1-(a_nx)^{-\alpha_i}+o(-(a_nx)^{-\alpha_i}))] = x^{-\alpha_1}, \tag{2.67}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{k} p_i(a_nx)^{-\alpha_i}(1+o(1)) = x^{-\alpha_1}. \tag{2.68}$$

Dalje je

$$\lim_{n\to\infty} np_1(a_nx)^{-\alpha_1}[(1+o(1))+\sum_{i=2}^{k}\frac{p_i}{p_1}(a_nx)^{\alpha_1-\alpha_i}(1+o(1))] = x^{-\alpha_1}. \tag{2.69}$$

Za svako $i \in \{2,3,\ldots,k\}$ je $\alpha_1 < \alpha_i$, odakle sledi da $(a_nx)^{\alpha_1-\alpha_i} \to 0$, kad $n \to \infty$. Jednakost (2.69) se svodi na

$$\lim_{n\to\infty} np_1(a_nx)^{-\alpha_1} = x^{-\alpha_1}, \tag{2.70}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} np_1(a_n)^{-\alpha_1} = 1. \tag{2.71}$$

Možemo uzeti da je

$$a_n = (np_1)^{\frac{1}{\alpha_1}}. \tag{2.72}$$

Prema tome, važi jednakost (2.58).

**Primer 14** *Neka su $X_i, i \in \{1,2,\ldots,l\}$, slučajne veličine čije su odgovarajuće raspodele Paretove sa parametrima $\alpha_i > 0$ i $k_i > 0$, neka je $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_l$ i nikoja dva uredjena para $(\alpha_i, k_i)$ se ne poklapaju. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_l$, tj.*

$$X = \begin{cases} X_1 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_l & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_l, \end{cases} \tag{2.73}$$

*gde su $p_1, p_2, \ldots, p_l$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{l} p_i = 1. \tag{2.74}$$

*Neka je* $Y_n, n \in \mathbf{N}$, *niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele* $F(x)$ *i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.75}$$

*Ako je* $s$ *broj onih* $\alpha_i$ *koji se poklapaju sa* $\alpha_1$, *tj. ako važi* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s < \alpha_{s+1} \leq \ldots \leq \alpha_l$, *gde* $s$ *može biti iz skupa* $\{1, 2, \ldots, l\}$, *tada za svako* $x > 0$ *važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n}{(n\sum\limits_{i=1}^{s} p_i k_i)^{\frac{1}{\alpha_1}}} \leq x\} = e^{-x^{-\alpha_1}}. \tag{2.76}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$ je

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < k_i^{\frac{1}{\alpha_i}}, \\ 1 - k_i x^{-\alpha_i}, & \text{za} \quad x \geq k_i^{\frac{1}{\alpha_i}}, \end{cases} \tag{2.77}$$

pa za funkciju raspodele njihove mešavine važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{l} p_i F_i(x), \tag{2.78}$$

odnosno

$$F(x) = \sum_{i=1}^{l} p_i (1 - k_i x^{-\alpha_i}), \tag{2.79}$$

za $x \geq \max\{k_1^{\frac{1}{\alpha_1}}, \ldots, k_l^{\frac{1}{\alpha_l}}\}$. Kako za svako $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ na osnovu primera 5 sledi da $F_i \in D(G_{1,\alpha_i})$, koristeći teoremu 2.1 dobijamo da $F \in D(G_{1,\alpha_1})$. Sledi da za svako $x > 0$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n}{a_n} \leq x\} = e^{-x^{-\alpha_1}}, \tag{2.80}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq a_n x\} = e^{-x^{-\alpha_1}}, \tag{2.81}$$

jer je na osnovu teoreme 1.9 $b_n = 0, n \in \mathbf{N}$. Koristeći teoremu 1.2 normirajuću konstantu $a_n, n \in \mathbf{N}$, možemo odrediti iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x)) = x^{-\alpha_1}, \tag{2.82}$$

koja važi za svako $x > 0$. Kako $a_n x = u_n \to \infty$, kad $n \to \infty$, iz ove jednakosti, koristeći jednakost (2.79), dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - \sum_{i=1}^{l} p_i (1 - k_i (a_n x)^{-\alpha_i})] = x^{-\alpha_1}, \tag{2.83}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{l} p_i k_i (a_n x)^{-\alpha_i} = x^{-\alpha_1}. \tag{2.84}$$

Kako je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s$, ova jednakost je ekvivalentna sa

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n x)^{-\alpha_1}(\sum_{i=1}^{s} p_i k_i + \sum_{i=s+1}^{l} p_i k_i (a_n x)^{\alpha_1-\alpha_i}) = x^{-\alpha_1}. \tag{2.85}$$

Za svako $i \in \{s+1,\ldots,l\}$ je $\alpha_1 < \alpha_i$, pa sledi da $(a_n x)^{\alpha_1-\alpha_i} \to 0$, kad $n \to \infty$. Ukoliko je $s = l$ u jednakosti (2.85) druge sume i nema. U svakom slučaju, iz jednakosti (2.85) zaključujemo da važi

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n x)^{-\alpha_1}\sum_{i=1}^{s} p_i k_i = x^{-\alpha_1}, \tag{2.86}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-\alpha_1} n\sum_{i=1}^{s} p_i k_i = 1. \tag{2.87}$$

Prema tome, možemo uzeti da je

$$a_n = (n\sum_{i=1}^{s} p_i k_i)^{\frac{1}{\alpha_1}}. \tag{2.88}$$

Na osnovu jednakosti (2.80) sledi jednakost (2.76).

**Primer 15** *Neka za svako $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ slučajna veličina $X_i$ ima Košijevu $\mathcal{K}(\lambda_i, 0)$ raspodelu, $\lambda_i > 0$ i svi $\lambda_i$ su medjusobno različiti. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_k$, tj.*

$$X = \begin{cases} X_1 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_k & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_k, \end{cases} \tag{2.89}$$

*gde su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{2.90}$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.91}$$

*Tada za svako $x > 0$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\pi}{n\sum_{i=1}^{k} p_i\lambda_i} M_n \le x\} = e^{-x^{-1}}. \tag{2.92}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$ je

$$F_i(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{x}{\lambda_i}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.93}$$

U primeru 6 pokazali smo da $F_i \in D(G_{1,1})$. Funkcija raspodele $F(x)$ je mešavina tih $k$ raspodela, pa važi

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{x}{\lambda_i}), \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Na osnovu teoreme 2.1 sledi da i $F \in D(G_{1,1})$, pa za svako $x > 0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\} = e^{-x^{-1}}, \tag{2.95}$$

gde su $a_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, normirajuće konstante koje treba odrediti.

Na osnovu teoreme 1.9 sledi da je $b_n = 0$, pa se jednakost (2.95) svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \le a_n x\} = e^{-x^{-1}}. \tag{2.96}$$

Koristeći teoremu 1.2 konstantu $a_n$ možemo izračunati iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x)) = x^{-1}, \tag{2.97}$$

koja važi za svako $x > 0$. Koristeći izraz (2.94) dalje dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - \sum_{i=1}^{k} p_i(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i})] = x^{-1}, \tag{2.98}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{k} p_i(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i}) = x^{-1}, \tag{2.99}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi}\sum_{i=1}^{k} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i}) = x^{-1}. \tag{2.100}$$

Ova jednakost je ekvivalentna sa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi}\sum_{i=1}^{k} p_i\lambda_i a_n^{-1}x^{-1}(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i})\frac{a_n x}{\lambda_i} = x^{-1}. \tag{2.101}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi}a_n^{-1}x^{-1}\sum_{i=1}^{k} p_i\lambda_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i})\frac{a_n x}{\lambda_i} = x^{-1}. \tag{2.102}$$

Kako $a_n x = u_n \to \infty$, kad $n \to \infty$, to će i za svako $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ važiti da $\frac{a_n x}{\lambda_i} \to \infty$. Kada primenimo relaciju (1.108) u jednakosti (2.102) dobijamo da važi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} a_n^{-1} x^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_i \lambda_i = x^{-1}, \tag{2.103}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} a_n^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_i \lambda_i = 1. \tag{2.104}$$

Dakle, možemo odrediti da je

$$a_n = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \lambda_i}{\pi}, \tag{2.105}$$

pa važi jednakost (2.92).

**Primer 16** *Neka su $X_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$, slučajne veličine takve da su njihove odgovarajuće funkcije raspodele Vejbulove $G_{2,\alpha_i}(x), \alpha_i > 0$ i neka je $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \dots, X_k$, tj.*

$$X = \begin{cases} X_1 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_k & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_k, \end{cases} \tag{2.106}$$

*gde su $p_1, p_2, \dots, p_k$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{2.107}$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}. \tag{2.108}$$

*Tada za svako $x < 0$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n}{(np_1)^{-\frac{1}{\alpha_1}}} \le x\} = e^{-(-x)^{\alpha_1}}. \tag{2.109}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$ je

$$G_{2,\alpha_i}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha_i}}, & \text{za} \quad x < 0, \\ 1, & \text{za} \quad x \ge 0, \end{cases} \tag{2.110}$$

pa važi da je

$$x_i = \sup\{t : G_{2,\alpha_i}(t) < 1\} = 0. \tag{2.111}$$

Zajednička raspodela članova niza je mešavina tih $k$ Vejbulovih raspodela, pa za njenu funkciju raspodele važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i G_{2,\alpha_i}(x), \tag{2.112}$$

odnosno

$$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} p_i e^{-(-x)^{\alpha_i}}, & \text{za} \quad x < 0, \\ 1, & \text{za} \quad x \geq 0, \end{cases} \tag{2.113}$$

a odatle sledi da je

$$x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = 0. \tag{2.114}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ na osnovu primera 7 sledi da $G_{2,\alpha_i} \in D(G_{2,\alpha_i})$. Kako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$ i $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, iz teoreme 2.2 sledi da $F \in D(G_{2,\alpha_1})$. To znači da za svako $x < 0$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} = e^{-(-x)^{\alpha_1}}, \tag{2.115}$$

gde su $a_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, normirajuće konstante koje treba odrediti.

Na osnovu teoreme 1.11 sledi da je $b_n = x_0 = 0$, pa se jednakost (2.115) svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq a_n x\} = e^{-(-x)^{\alpha_1}}. \tag{2.116}$$

Koristeći teoremu 1.2 konstantu $a_n$ možemo izračunati iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x)) = (-x)^{\alpha_1}, \tag{2.117}$$

koja važi za svako $x < 0$. Kako je $a_n > 0$, koristeći (2.113) dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - \sum_{i=1}^{k} p_i e^{-(-a_n x)^{\alpha_i}}) = (-x)^{\alpha_1}, \tag{2.118}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{k} p_i (1 - e^{-(-a_n x)^{\alpha_i}}) = (-x)^{\alpha_1}. \tag{2.119}$$

Kada $n \to \infty$ tada $a_n x = u_n \to 0-$, pa i $-(-a_n x)^{\alpha_i} \to 0$, odakle sledi da je jednakost (2.119) ekvivalentna jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{k} p_i [1 - (1 - (-a_n x)^{\alpha_i} - o((-a_n x)^{\alpha_i}))] = (-x)^{\alpha_1}, \tag{2.120}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{k} p_i(-a_nx)^{\alpha_i}(1+o(1)) = (-x)^{\alpha_1}. \tag{2.121}$$

Dalje je

$$\lim_{n\to\infty} np_1(-a_nx)^{\alpha_1}[(1+o(1)) + \sum_{i=2}^{k}\frac{p_i}{p_1}(-a_nx)^{\alpha_i-\alpha_1}(1+o(1))] = (-x)^{\alpha_1}. \tag{2.122}$$

Za svako $i \in \{2,3,\dots,k\}$ je $\alpha_1 < \alpha_i$, odakle sledi da $(-a_nx)^{\alpha_i-\alpha_1} \to 0$, kad $n \to \infty$. Jednakost (2.122) se svodi na

$$\lim_{n\to\infty} np_1(-a_nx)^{\alpha_1} = (-x)^{\alpha_1}, \tag{2.123}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} np_1a_n^{\alpha_1} = 1. \tag{2.124}$$

Možemo uzeti da je

$$a_n = (np_1)^{-\frac{1}{\alpha_1}}. \tag{2.125}$$

Prema tome, važi jednakost (2.109).

**Primer 17** *Neka za svako $i \in \{1,2,\dots,k\}$ slučajna veličina $X_i$ ima uniformnu $\mathcal{U}[c_i,d_i]$ raspodelu, neka je $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$ i nikoja dva segmenta $[c_i,d_i]$ se ne poklapaju. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \dots, X_k$, tj.*

$$X = \begin{cases} X_1 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_k & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_k, \end{cases} \tag{2.126}$$

*gde su $p_1, p_2, \dots, p_k$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{2.127}$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}. \tag{2.128}$$

*Ako je $s$ broj onih $d_i$ koji se poklapaju sa $d_1$, tj. ako važi $d_1 = \dots = d_s > d_{s+1} \geq \dots \geq d_k$, gde $s$ može biti iz skupa $\{1,2,\dots,k\}$, tada za svako $x < 0$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{n\sum_{i=1}^{s}\frac{p_i}{d_1-c_i}(M_n-d_1) \leq x\} = e^x. \tag{2.129}$$

Funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, je

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < c_i, \\ \frac{x-c_i}{d_i-c_i}, & \text{za} \quad c_i \leq x < d_i, \\ 1, & \text{za} \quad x \geq d_i, \end{cases} \tag{2.130}$$

pa važi da je

$$x_i = \sup\{t : F_i(t) < 1\} = d_i. \tag{2.131}$$

Zajednička raspodela članova niza je mešavina tih $k$ uniformnih raspodela, pa za njenu funkciju raspodele važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(x), \tag{2.132}$$

odnosno

$$F(x) = 1, \tag{2.133}$$

za $x \geq d_1$, a

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{x - c_i}{d_1 - c_i} + \sum_{i=s+1}^{k} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{x - c_i}{d_1 - c_i} + 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i \left(1 - \frac{x - c_i}{d_1 - c_i}\right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{d_1 - x}{d_1 - c_i}, \end{aligned} \tag{2.134}$$

za $\max\{d_{s+1}, c_1, \ldots, c_s\} \leq x < d_1$ ($\max\{c_1, \ldots, c_k\} \leq x < d_1$ ukoliko je $s = k$). Odatle sledi da je

$$x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = d_1. \tag{2.135}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ na osnovu primera 8 sledi da $F_i \in D(G_{2,1})$, pa iz teoreme 2.2 sledi da i $F \in D(G_{2,1})$. To znači da za svako $x < 0$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} = e^x, \tag{2.136}$$

gde su $a_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, normirajuće konstante koje treba odrediti.

Na osnovu teoreme 1.11 sledi da je $b_n = x_0 = d_1$, pa se jednakost (2.136) svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq a_n x + d_1\} = e^x. \tag{2.137}$$

Koristeći teoremu 1.2 konstantu $a_n$ možemo izračunati iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x + d_1)) = -x, \tag{2.138}$$

koja važi za svako $x < 0$. Kako $a_n x + d_1 = u_n \to d_1-$, kad $n \to \infty$, koristeći (2.134) dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - (1 - \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{d_1 - a_n x - d_1}{d_1 - c_i})] = -x, \tag{2.139}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{-a_n x}{d_1 - c_i} = -x. \tag{2.140}$$

Dalje, važi da je

$$\lim_{n\to\infty} n a_n \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{d_1 - c_i} = 1, \tag{2.141}$$

pa možemo odabrati da je

$$a_n = \frac{1}{n \sum\limits_{i=1}^{s} \frac{p_i}{d_1 - c_i}}. \tag{2.142}$$

Sada lako sledi jednakost (2.129).

**Primer 18** *Neka za svako $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ slučajna veličina $X_i$ ima usečenu eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda_i, c_i)$ raspodelu, $\lambda_i > 0, c_i > 0$, neka je $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k$ i nikoja dva uredjena para $(\lambda_i, c_i)$ se ne poklapaju. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \dots, X_k$, tj.*

$$X = \begin{cases} X_1 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_k & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_k, \end{cases} \tag{2.143}$$

*gde su $p_1, p_2, \dots, p_k$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{2.144}$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}. \tag{2.145}$$

*Ako je $s$ broj onih $c_i$ koji se poklapaju sa $c_1$, tj. ako važi $c_1 = \dots = c_s > c_{s+1} \geq \dots \geq c_k$, gde $s$ može biti iz skupa $\{1, 2, \dots, k\}$, tada za svako $x < 0$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{n \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i \lambda_i}{e^{\lambda_i c_1} - 1} (M_n - c_1) \leq x\} = e^x. \tag{2.146}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$ je

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ \frac{1-e^{-\lambda_i x}}{1-e^{-\lambda_i c_i}}, & \text{za} \quad 0 \leq x < c_i, \\ 1, & \text{za} \quad x \geq c_i, \end{cases} \tag{2.147}$$

pa važi da je

$$x_i = \sup\{t : F_i(t) < 1\} = c_i. \tag{2.148}$$

Zajednička raspodela članova niza je mešavina tih $k$ usečenih eksponencijalnih raspodela, pa za njenu funkciju raspodele važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(x), \tag{2.149}$$

odnosno

$$F(x) = 1, \tag{2.150}$$

za $x \geq c_1$, a

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{1 - e^{-\lambda_i x}}{1 - e^{-\lambda_i c_1}} + \sum_{i=s+1}^{k} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{1 - e^{-\lambda_i x}}{1 - e^{-\lambda_i c_1}} + 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i (1 - \frac{1 - e^{-\lambda_i x}}{1 - e^{-\lambda_i c_1}}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{e^{-\lambda_i x} - e^{-\lambda_i c_1}}{1 - e^{-\lambda_i c_1}}, \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{e^{\lambda_i c_1 - \lambda_i x} - 1}{e^{\lambda_i c_1} - 1}, \end{aligned} \tag{2.151}$$

za $c_{s+1} \leq x < c_1$ ($0 \leq x < c_1$ ukoliko je $s = k$). Sledi da je

$$x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = c_1. \tag{2.152}$$

Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ na osnovu primera 9 sledi da $F_i \in D(G_{2,1})$, pa iz teoreme 2.2 sledi da i $F \in D(G_{2,1})$. To znači da za svako $x < 0$ važi jednakost

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} = e^x, \tag{2.153}$$

gde su $a_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, normirajuće konstante koje treba odrediti.

Koristeći teoremu 1.11 zaključujemo da je $b_n = x_0 = c_1$, pa se jednakost (2.153) svodi na

$$\lim_{n \to \infty} P\{M_n \leq a_n x + c_1\} = e^x. \tag{2.154}$$

Na osnovu teoreme 1.2 konstantu $a_n$ možemo izračunati iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x + c_1)) = -x, \tag{2.155}$$

koja važi za svako $x < 0$. Kako $a_n x + c_1 = u_n \to c_1-$, kad $n \to \infty$, koristeći (2.151) dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - (1 - \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{e^{\lambda_i c_1 - \lambda_i(a_n x + c_1)} - 1}{e^{\lambda_i c_1} - 1})] = -x, \tag{2.156}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{s} p_i \frac{e^{-\lambda_i a_n x} - 1}{e^{\lambda_i c_1} - 1} = -x. \tag{2.157}$$

Kad $n \to \infty$ tada $a_n x + c_1 \to c_1$, odnosno $a_n x \to 0$, pa će i $-\lambda_i a_n x \to 0$ za svako $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Zbog toga se (2.157) može svesti na ekvivalentnu jednakost

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c_1} - 1}(-\lambda_i a_n x + o(-\lambda_i a_n x)) = -x, \tag{2.158}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c_1} - 1}(-\lambda_i a_n x)(1 + o(1)) = -x, \tag{2.159}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n n \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i \lambda_i}{e^{\lambda_i c_1} - 1}(1 + o(1)) = 1. \tag{2.160}$$

Možemo odabrati da je

$$a_n = \frac{1}{n \sum\limits_{i=1}^{s} \frac{p_i \lambda_i}{e^{\lambda_i c_1} - 1}}. \tag{2.161}$$

Sledi da važi jednakost (2.146).

U prethodnim primerima razmatrane su konačne mešavine raspodela koje sve pripadaju oblasti privlačenja za maksimume Frešeove, odnosno Vejbulove raspodele. Pri tim razmatranjima od velike koristi su nam bile teoreme 2.1 i 2.2. U teoremama koje slede razmatraćemo konačne mešavine raspodela koje sve pripadaju oblasti privlačenja za maksimume Gumbelove raspodele.

**Teorema 2.3** *Neka su $X_i, i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, slučajne veličine čije su odgovarajuće raspodele eksponencijalne $\mathcal{E}(\lambda_i), \lambda_i > 0$ i neka je $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_k$, tj.*

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \text{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_k & \text{sa verovatnoćom} \quad p_k, \end{cases} \tag{2.162}$$

*gde su* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{2.163}$$

*Neka je* $Y_n, n \in \mathbf{N}$, *niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele* $F(x)$ *i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.164}$$

*Tada za svaki realan broj* $x$ *važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\lambda_1(M_n - \frac{\ln(np_1)}{\lambda_1}) \leq x\} = e^{-e^{-x}}. \tag{2.165}$$

**Dokaz:** Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$ je

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda_i x}, & \text{za} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{2.166}$$

Zajednička raspodela članova niza je mešavina tih $k$ eksponencijalnih raspodela, pa za njenu funkciju raspodele važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(x), \tag{2.167}$$

odnosno

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(1 - e^{-\lambda_i x}), & \text{za} \quad x \geq 0, \end{cases} \tag{2.168}$$

tj.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i e^{-\lambda_i x}, & \text{za} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{2.169}$$

Odavde je jasno da je

$$x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = +\infty. \tag{2.170}$$

Ako za pomoćnu funkciju odaberemo $g(t) = \frac{1}{\lambda_1}$, onda za svaki realan broj $x$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to x_0-} \frac{1 - F(t + xg(t))}{1 - F(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(t + \frac{x}{\lambda_1})}{1 - F(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - [1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i e^{-\lambda_i(t + \frac{x}{\lambda_1})}]}{1 - (1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i e^{-\lambda_i t})} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i e^{-\lambda_i t} e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}x}}{\sum_{i=1}^{k} p_i e^{-\lambda_i t}} \tag{2.171}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{p_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-x}[1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)t} e^{\frac{\lambda_1-\lambda_i}{\lambda_1}x}]}{p_1 e^{-\lambda_1 t}[1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)t}]}$$

$$= e^{-x} \lim_{t\to\infty} \frac{1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)t} e^{\frac{\lambda_1-\lambda_i}{\lambda_1}x}}{1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)t}} = e^{-x},$$

jer za svako $i \in \{2, \dots, k\}$ je $\lambda_1 < \lambda_i$, pa $e^{(\lambda_1-\lambda_i)t} \to 0$, kad $t \to \infty$. Na osnovu teoreme 1.7 sledi da $F \in D(G_0)$, odnosno sledi da za svaki realan broj $x$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\} = e^{-e^{-x}}. \tag{2.172}$$

Takodje važi da je

$$a_n = g(b_n) = \frac{1}{\lambda_1}, \tag{2.173}$$

$n \in \mathbf{N}$. Jednakost (2.172) se svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \le \frac{x}{\lambda_1} + b_n\} = e^{-e^{-x}}, \tag{2.174}$$

gde konstantu $b_n$ možemo odrediti koristeći teoremu 1.2. Na osnovu nje važi da je

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(\frac{x}{\lambda_1} + b_n)) = e^{-x}. \tag{2.175}$$

Kad $n \to \infty$ tada $\frac{x}{\lambda_1} + b_n = u_n \to \infty$, pa je jednakost (2.175) ekvivalentna sa

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - (1 - \sum_{i=1}^{k} p_i e^{-\lambda_i(\frac{x}{\lambda_1}+b_n)})] = e^{-x}. \tag{2.176}$$

Dalje je

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{k} p_i e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}x} e^{-\lambda_i b_n} = e^{-x}, \tag{2.177}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} n p_1 e^{-x} e^{-\lambda_1 b_n}[1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} e^{\frac{\lambda_1-\lambda_i}{\lambda_1}x} e^{(\lambda_1-\lambda_i)b_n}] = e^{-x}. \tag{2.178}$$

Kako $\frac{x}{\lambda_1} + b_n \to \infty$, kad $n \to \infty$, to i $b_n \to \infty$. Odatle sledi da $e^{(\lambda_1-\lambda_i)b_n} \to 0$, pa zbog toga važi

$$\lim_{n\to\infty} n p_1 e^{-\lambda_1 b_n} = 1. \tag{2.179}$$

Dalje, možemo odabrati da bude

$$e^{-\lambda_1 b_n} = \frac{1}{np_1}, \tag{2.180}$$

odnosno da je

$$b_n = \frac{\ln(np_1)}{\lambda_1}. \tag{2.181}$$

Na osnovu jednakosti (2.172), (2.173) i (2.181) sledi tvrdjenje teoreme.□

**Teorema 2.4** *Neka su $X_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, slučajne veličine čije su odgovarajuće raspodele normalne $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2), \sigma_i > 0$, neka je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k$ i nikoja dva uredjena para $(m_i, \sigma_i)$ se ne poklapaju. U slučaju da je prvih nekoliko standardnih odstupanja jednako sa $\sigma_1$, tj. $\sigma_1 = \ldots = \sigma_s$, gde $s$ može biti iz skupa $\{2, \ldots, k\}$, neka je $m_1 > \ldots > m_s$. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je konačna mešavina slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_k$, tj.*

$$X = \begin{cases} X_1 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_1, \\ X_2 & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_2, \\ \vdots & \\ X_k & \textit{sa verovatnoćom} \quad p_k, \end{cases} \tag{2.182}$$

*gde su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{2.183}$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.184}$$

*Tada za svaki realan broj $x$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - m_1 - \sigma_1\sqrt{2\ln n} + \sigma_1 \frac{\ln\ln n + \ln\frac{4\pi}{p_1^2}}{2\sqrt{2\ln n}}}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\ln n}}} \leq x\} = e^{-e^{-x}}. \tag{2.185}$$

**Dokaz:** Na osnovu jednakosti (1.79) funkcija raspodele slučajne veličine $X_i, i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, je

$$F_i(x) = \Phi(\frac{x - m_i}{\sigma_i}). \tag{2.186}$$

Zajednička raspodela članova niza je mešavina tih $k$ normalnih raspodela, pa za njenu funkciju raspodele važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(x), \tag{2.187}$$

odnosno

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i \Phi(\frac{x - m_i}{\sigma_i}). \tag{2.188}$$

Za nju važi da je

$$x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = +\infty. \tag{2.189}$$

Koristeći (2.188) dobijamo da je

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i \Phi(\frac{x - m_i}{\sigma_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i [1 - \Phi(\frac{x - m_i}{\sigma_i})] \\ &= p_1 [1 - \Phi(\frac{x - m_1}{\sigma_1})][1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{p_i}{p_1} \frac{1 - \Phi(\frac{x-m_i}{\sigma_i})}{1 - \Phi(\frac{x-m_1}{\sigma_1})}]. \end{aligned} \tag{2.190}$$

Posmatrajmo izraz

$$\begin{aligned} A_i(x) &= (\frac{x - m_1}{\sigma_1})^2 - (\frac{x - m_i}{\sigma_i})^2 \\ &= (\frac{x - m_1}{\sigma_1} - \frac{x - m_i}{\sigma_i})(\frac{x - m_1}{\sigma_1} + \frac{x - m_i}{\sigma_i}) \\ &= \frac{[(\sigma_i - \sigma_1)x - m_1\sigma_i + m_i\sigma_1][(\sigma_i + \sigma_1)x - m_1\sigma_i - m_i\sigma_1]}{\sigma_1^2 \sigma_i^2}. \end{aligned} \tag{2.191}$$

Za svako $i \in \{2, \ldots, k\}$ po pretpostavkama teoreme moguća su dva slučaja. Ili je $\sigma_1 > \sigma_i$, pa $A_i(x) \to -\infty$, kad $x \to \infty$, ili je $\sigma_1 = \sigma_i$ i $m_1 > m_i$, pa je onda $A_i(x) = \frac{(m_i - m_1)\sigma_1[2\sigma_1 x - (m_1 + m_i)\sigma_1]}{\sigma_1^4}$ i opet $A_i(x) \to -\infty$, kad $x \to \infty$. Na osnovu ovoga i asimptotske relacije (1.78) dobijamo da važi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \Phi(\frac{x-m_i}{\sigma_i})}{1 - \Phi(\frac{x-m_1}{\sigma_1})} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\varphi(\frac{x-m_i}{\sigma_i})}{\frac{x-m_i}{\sigma_i}}}{\frac{\varphi(\frac{x-m_1}{\sigma_1})}{\frac{x-m_1}{\sigma_1}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-m_1}{\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_i}{\sigma_i})^2}}{\frac{x-m_i}{\sigma_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sigma_i(x - m_1)}{\sigma_1(x - m_i)} e^{\frac{1}{2}[(\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2 - (\frac{x-m_i}{\sigma_i})^2]} \\ &= \frac{\sigma_i}{\sigma_1} \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2}A_i(x)} = 0. \end{aligned} \tag{2.192}$$

Koristeći ovu i jednakost (2.190) dobijamo da važi

$$1 - F(x) \sim p_1 [1 - \Phi(\frac{x - m_1}{\sigma_1})], \tag{2.193}$$

kad $x \to \infty$. Za svaki realan broj $x$ izraz $t + x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1} \to \infty$, kad $t \to \infty$, pa birajući za pomoćnu funkciju $g(t) = \frac{\sigma_1^2}{t-m_1}$ i koristeći asimptotske relacije (2.193) i (1.78) dobijamo da važi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to x_0-} \frac{1-F(t+xg(t))}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-F(t+x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1})}{1-F(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{p_1[1-\Phi(\frac{t+x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1}-m_1}{\sigma_1})]}{p_1[1-\Phi(\frac{t-m_1}{\sigma_1})]} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{\varphi(\frac{t+x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1}-m_1}{\sigma_1})}{\frac{t+x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1}-m_1}{\sigma_1}}}{\frac{\varphi(\frac{t-m_1}{\sigma_1})}{\frac{t-m_1}{\sigma_1}}} \qquad (2.194) \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{(t-m_1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t+x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1}-m_1}{\sigma_1})^2}}{(t+x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1}-m_1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m_1}{\sigma_1})^2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{\frac{1}{2}[(\frac{t-m_1}{\sigma_1})^2-(\frac{t+x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1}-m_1}{\sigma_1})^2]} \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{\frac{-x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1}(2t-2m_1+x\frac{\sigma_1^2}{t-m_1})}{2\sigma_1^2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{-x-\frac{1}{2}(\frac{x\sigma_1}{t-m_1})^2} = e^{-x}.
\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 1.7 sledi da $F \in D(G_0)$, odnosno sledi da za svaki realan broj $x$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n-b_n}{a_n} \le x\} = e^{-e^{-x}}, \qquad (2.195)$$

gde su $a_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, normirajuće konstante koje treba odrediti.

Za proizvoljan fiksiran realan broj $x$ neka je $u_n = a_n x + b_n$. Jednakost (2.195) se svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \le u_n\} = e^{-e^{-x}}. \qquad (2.196)$$

Na osnovu teoreme 1.2 konstantu $u_n$ možemo odrediti iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1-F(u_n)) = e^{-x}. \qquad (2.197)$$

Kako $u_n \to \infty$, kad $n \to \infty$, koristeći asimptotske relacije (2.193) i (1.78), iz jednakosti (2.197) dobijamo da važi

$$\lim_{n\to\infty} np_1[1-\Phi(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1})] = e^{-x}, \qquad (2.198)$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} np_1 \frac{\varphi(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1})}{\frac{u_n-m_1}{\sigma_1}} = e^{-x}, \tag{2.199}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{np_1 e^{x-\frac{1}{2}(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1})^2}}{\sqrt{2\pi}\frac{u_n-m_1}{\sigma_1}} = 1. \tag{2.200}$$

Logaritmovanjem obe strane izraza dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}[\ln n + \ln p_1 + x - \frac{1}{2}(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1})^2 - \ln(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1}) - \frac{1}{2}\ln 2\pi] = 0. \tag{2.201}$$

Deljenjem obe strane sa $(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1})^2$ sledilo bi da važi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1})^2}{2\ln n} = 1. \tag{2.202}$$

Logaritmovanjem obe strane ovog izraza dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}[2\ln(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1}) - \ln 2 - \ln\ln n] = 0, \tag{2.203}$$

odnosno

$$\ln(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1}) = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln\ln n) + o(1), \tag{2.204}$$

kad $n \to \infty$. Koristeći ovaj i izraz (2.201) dobijamo da važi

$$\frac{1}{2}(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1})^2 = \ln n + \ln p_1 + x - \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln\ln n) - \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1), \tag{2.205}$$

odakle sledi

$$(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1})^2 = 2\ln n[1 + \frac{x - \frac{1}{2}(\ln\ln n + \ln\frac{4\pi}{p_1^2})}{\ln n} + o(\frac{1}{\ln n})], \tag{2.206}$$

kad $n \to \infty$. Koristeći formulu $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, kad $x \to 0$, kao i to da je $(\frac{\ln\ln n}{\ln n})^2 = o(\frac{1}{\ln n})$, kad $n \to \infty$, iz jednakosti (2.206) dobijamo da važi

$$\begin{aligned} \frac{u_n-m_1}{\sigma_1} &= \sqrt{2\ln n}[1 + \frac{x - \frac{1}{2}(\ln\ln n + \ln\frac{4\pi}{p_1^2})}{2\ln n} + o(\frac{1}{\ln n})] \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\ln n}} + \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln\frac{4\pi}{p_1^2}}{2\sqrt{2\ln n}} + o(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}), \end{aligned} \tag{2.207}$$

odnosno

$$u_n = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\ln n}}x + m_1 + \sigma_1\sqrt{2\ln n} - \sigma_1\frac{\ln\ln n + \ln\frac{4\pi}{p_1^2}}{2\sqrt{2\ln n}} + o(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}), \tag{2.208}$$

kad $n \to \infty$. Na osnovu ove jednakosti i teoreme 1.5 za normirajuće konstante možemo odabrati

$$a_n = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\ln n}}, \tag{2.209}$$

$$b_n = m_1 + \sigma_1\sqrt{2\ln n} - \sigma_1\frac{\ln\ln n + \ln\frac{4\pi}{p_1^2}}{2\sqrt{2\ln n}}. \tag{2.210}$$

Iz jednakosti (2.195), (2.209) i (2.210) sledi jednakost (2.185).□

Ovim je pokazano da, iako opšteg dokaza nema, bar u ovim konkretnim slučajevima, razmatranim u prethodne dve teoreme, važi da funkcija raspodele konačne mešavine raspodela, koje sve pripadaju oblasti privlačenja za maksimume Gumbelove raspodele, takodje pripada oblasti privlačenja za maksimume Gumbelove raspodele.

## 2.2 Mešavine prebrojivo mnogo raspodela i oblasti privlačenja

U ovom poglavlju bavićemo se istim problemima kao i u prethodnom, samo što će se umesto konačnih ovde javljati prebrojive mešavine raspodela.

Neka su $X_i, i \in \mathbf{N}$, slučajne veličine sa odgovarajućim funkcijama raspodele $F_i(x), i \in \mathbf{N}$, i neka je slučajna veličina $X$ definisana na sledeći način:

$$X = \left\{ \; X_i \quad \text{sa verovatnoćom} \quad p_i, \quad i \in \mathbf{N}, \right. \tag{2.211}$$

gde su $p_i$ pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{2.212}$$

Raspodela slučajne veličine $X$ je mešavina prebrojivo mnogo raspodela odredjenih funkcijama raspodele $F_i(x), i \in \mathbf{N}$, i za njenu funkciju raspodele $F(x)$ važi jednakost

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x). \tag{2.213}$$

Neka je $Y_1, Y_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom. Neka je ta raspodela mešavina prebrojivo mnogo raspodela odredjenih funkcijama raspodele $F_i(x), i \in \mathbf{N}$, tj. njena funkcija raspodele $F(x)$ definisana je kao u jednakosti (2.213). Definišimo slučajnu veličinu

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.214}$$

Razmatraćemo probleme koji se odnose na asimptotsko ponašanje raspodele ove slučajne veličine kad $n \to \infty$, tj. pokazaćemo da bar u nekim konkretnim slučajevima važi da funkcija raspodele mešavine prebrojivo mnogo raspodela, koje sve pripadaju jednoj istoj oblasti privlačenja za maksimume, takodje pripada toj istoj oblasti privlačenja za maksimume.

**Teorema 2.5** *Neka su $X_i, i \in \mathbf{N}$, slučajne veličine čije su odgovarajuće raspodele eksponencijalne $\mathcal{E}(\lambda_i), \lambda_i > 0$ i neka je niz $\lambda_i, i \in \mathbf{N}$, rastući, tj. $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je prebrojiva mešavina slučajnih veličina $X_i$, tj.*

$$X = \left\{ \begin{array}{l} X_i \quad \textit{sa verovatnoćom} \quad p_i, \quad i \in \mathbf{N}, \end{array} \right. \tag{2.215}$$

*gde su $p_i$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{2.216}$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}. \tag{2.217}$$

*Tada za svaki realan broj $x$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\lambda_1(M_n - \frac{\ln(np_1)}{\lambda_1}) \le x\} = e^{-e^{-x}}. \tag{2.218}$$

**Dokaz:** Za svako $i \in \mathbf{N}$ funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$ je

$$F_i(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda_i x}, & \text{za} \quad x \ge 0, \end{array} \right. \tag{2.219}$$

a na osnovu primera 2 sledi da $F_i \in D(G_0)$. Zajednička raspodela članova niza je mešavina tih prebrojivo mnogo eksponencijalnih raspodela, pa za njenu funkciju raspodele važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x), \tag{2.220}$$

odnosno

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(1 - e^{-\lambda_i x}), & \text{za} \quad x \ge 0, \end{array} \right. \tag{2.221}$$

tj.

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i x}, & \text{za} \quad x \ge 0. \end{array} \right. \tag{2.222}$$

Odavde je jasno da je

$$x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = +\infty. \tag{2.223}$$

Pogledajmo red $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)s}$. Za svako $i \geq 2$ i svako $s > 0$ važi $|e^{(\lambda_1-\lambda_i)s}| \leq 1$, odnosno $|\frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)s}| \leq \frac{p_i}{p_1}$, jer je $\lambda_1 < \lambda_i$. Kako red $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1}$ konvergira, jer je $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} = \frac{1-p_1}{p_1}$, po Vajerštrasovom kriterijumu sledi da red $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)s}$ ravnomerno konvergira za $s > 0$. Odatle sledi

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)s} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} \lim_{s\to\infty} e^{(\lambda_1-\lambda_i)s} = 0. \tag{2.224}$$

Ako za pomoćnu funkciju odaberemo $g(t) = \frac{1}{\lambda_1}$, koristeći jednakost (2.224) dobijamo da za svaki realan broj $x$ važi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to x_0-} \frac{1-F(t+xg(t))}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-F(t+\frac{x}{\lambda_1})}{1-F(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1-[1-\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i(t+\frac{x}{\lambda_1})}]}{1-(1-\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i t})} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i(t+\frac{x}{\lambda_1})}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i t}} \qquad (2.225) \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{p_1 e^{-\lambda_1(t+\frac{x}{\lambda_1})}[1+\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)(t+\frac{x}{\lambda_1})}]}{p_1 e^{-\lambda_1 t}[1+\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)t}]} \\
&= e^{-x} \lim_{t\to\infty} \frac{1+\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)(t+\frac{x}{\lambda_1})}}{1+\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)t}} \\
&= e^{-x} \frac{1+\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)(t+\frac{x}{\lambda_1})}}{1+\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)t}} = e^{-x}.
\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 1.7 sledi da i $F \in D(G_0)$, odnosno sledi da za svaki realan broj $x$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} = e^{-e^{-x}}. \tag{2.226}$$

Takodje važi da je

$$a_n = g(b_n) = \frac{1}{\lambda_1}, \tag{2.227}$$

$n \in \mathbf{N}$. Jednakost (2.226) se svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq \frac{x}{\lambda_1} + b_n\} = e^{-e^{-x}}, \tag{2.228}$$

gde konstantu $b_n$ možemo odrediti koristeći teoremu 1.2. Na osnovu nje važi da je

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(\frac{x}{\lambda_1} + b_n)) = e^{-x}. \tag{2.229}$$

Kad $n \to \infty$ tada $\frac{x}{\lambda_1} + b_n = u_n \to \infty$, pa je jednakost (2.229) ekvivalentna sa

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - (1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i(\frac{x}{\lambda_1}+b_n)})] = e^{-x}, \tag{2.230}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{-\lambda_i(\frac{x}{\lambda_1}+b_n)} = e^{-x}. \tag{2.231}$$

Dalje je

$$\lim_{n\to\infty} np_1 e^{-\lambda_1(\frac{x}{\lambda_1}+b_n)}[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)(\frac{x}{\lambda_1}+b_n)}] = e^{-x}, \tag{2.232}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} np_1 e^{-\lambda_1 b_n}[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)(\frac{x}{\lambda_1}+b_n)}] = 1. \tag{2.233}$$

Kako $\frac{x}{\lambda_1} + b_n \to \infty$, kad $n \to \infty$, koristeći jednakost (2.224) dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{p_1} e^{(\lambda_1-\lambda_i)(\frac{x}{\lambda_1}+b_n)} = 0, \tag{2.234}$$

pa zbog toga važi

$$\lim_{n\to\infty} np_1 e^{-\lambda_1 b_n} = 1. \tag{2.235}$$

Sledi da možemo odabrati da bude

$$e^{-\lambda_1 b_n} = \frac{1}{np_1}, \tag{2.236}$$

odnosno da je

$$b_n = \frac{\ln(np_1)}{\lambda_1}. \tag{2.237}$$

Na osnovu jednakosti (2.226), (2.227) i (2.237) sledi tvrdjenje teoreme.□

**Teorema 2.6** *Neka su $X_i, i \in \mathbf{N}$, slučajne veličine takve da su njihove odgovarajuće raspodele Košijeve $\mathcal{K}(\lambda_i, 0), \lambda_i > 0$ i neka su svi $\lambda_i$ medjusobno različiti. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je prebrojiva mešavina slučajnih veličina $X_i$, tj.*

$$X = \left\{ X_i \quad \textit{sa verovatnoćom} \quad p_i, \quad i \in \mathbf{N}, \right. \tag{2.238}$$

*gde su $p_i$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{2.239}$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.240}$$

*Ako red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i$ konvergira, tada za svako $x > 0$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\pi}{n\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i} M_n \leq x\} = e^{-x^{-1}}. \tag{2.241}$$

**Dokaz:** Za svako $i \in \mathbf{N}$ funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$ je

$$F_i(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{x}{\lambda_i}, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{2.242}$$

a u primeru 6 pokazali smo da $F_i \in D(G_{1,1})$. Zajednička raspodela članova niza je mešavina tih prebrojivo mnogo Košijevih raspodela, pa za njenu funkciju raspodele važi

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{x}{\lambda_i}), \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{2.243}$$

Sledi da je

$$x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = +\infty. \tag{2.244}$$

Za funkciju $f(s) = (\frac{\pi}{2} - \text{arctg}s)s, s \in \mathbf{R}$, je

$$f'(s) = -\frac{s}{1+s^2} + \frac{\pi}{2} - \text{arctg}s, \tag{2.245}$$

$$f''(s) = -\frac{2}{(1+s^2)^2}. \tag{2.246}$$

Za svaki realan broj $s$ važi $f''(s) < 0$, pa je $f'(s)$ opadajuća funkcija. Kako je

$$\begin{aligned} \lim_{s\to-\infty} f'(s) &= \pi, &(2.247)\\ \lim_{s\to\infty} f'(s) &= 0, &(2.248)\end{aligned}$$

sledi da za svaki realan broj $s$ važi $f'(s) > 0$, odnosno $f(s)$ je rastuća funkcija. Kako je

$$f(0) = 0, \tag{2.249}$$

a na osnovu jednakosti (1.108)

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 1, \tag{2.250}$$

sledi da za $s > 0$ važi

$$|f(s)| = |(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} s)s| \leq 1. \tag{2.251}$$

Koristeći ovo, za opšti član reda $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{s}{\lambda_i})s$ važi da za svako $i \in \mathbf{N}$ i svako $s > 0$ je

$$|p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{s}{\lambda_i})s| = |p_i\lambda_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{s}{\lambda_i})\frac{s}{\lambda_i}| \leq p_i\lambda_i. \tag{2.252}$$

Kako po uslovu teoreme red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i$ konvergira, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma važi da red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{s}{\lambda_i})s$ ravnomerno konvergira za $s > 0$. Zbog toga, uz korišćenje jednakosti (1.108), važi

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{s}{\lambda_i})s &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \lim_{s\to\infty}(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{s}{\lambda_i})s \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i \lim_{s\to\infty}(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{s}{\lambda_i})\frac{s}{\lambda_i} \qquad (2.253)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i. \end{aligned}$$

Koristeći jednakost (2.253) dobijamo da za svaki $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{tx}{\lambda_i})}{1-\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{t}{\lambda_i})} \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{tx}{\lambda_i})}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{t}{\lambda_i})} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{\pi tx}\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{tx}{\lambda_i})tx}{\frac{1}{\pi t}\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{t}{\lambda_i})t} \tag{2.254}$$

$$= x^{-1}\frac{\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{tx}{\lambda_i})tx}{\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{t}{\lambda_i})t}$$

$$= x^{-1}\frac{\sum_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i} = x^{-1}.$$

Iz ove i jednakosti (2.244), na osnovu teoreme 1.9, sledi da i $F \in D(G_{1,1})$, pa za svako $x > 0$ važi

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\} = e^{-x^{-1}}, \tag{2.255}$$

gde su $a_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, normirajuće konstante koje treba odrediti.

Na osnovu iste teoreme sledi da je $b_n = 0$, pa se jednakost (2.255) svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leq a_n x\} = e^{-x^{-1}}. \tag{2.256}$$

Koristeći teoremu 1.2 konstantu $a_n$ možemo izračunati iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x)) = x^{-1}, \tag{2.257}$$

koja važi za svako $x > 0$. Dalje je

$$\lim_{n\to\infty} n[1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i})] = x^{-1}, \tag{2.258}$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i}) = x^{-1}. \tag{2.259}$$

Ova jednakost je ekvivalentna sa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} a_n^{-1} x^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i}) a_n x = x^{-1}, \tag{2.260}$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} a_n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i}) a_n x = 1. \tag{2.261}$$

Kako $a_n x = u_n \to \infty$, kad $n \to \infty$, na osnovu jednakosti (2.253) važi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{a_n x}{\lambda_i}) a_n x = \sum_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i, \tag{2.262}$$

pa se jednakost (2.261) svodi na

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} a_n^{-1} = 1. \tag{2.263}$$

Sledi da možemo odrediti da je

$$a_n = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i\lambda_i}{\pi}, \tag{2.264}$$

pa važi tvrdjenje teoreme.□

**Teorema 2.7** *Neka za svako $i \in \mathbf{N}$ slučajna veličina $X_i$ ima usečenu eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda_i, c)$ raspodelu, $\lambda_i > 0, c > 0$ i neka su svi $\lambda_i$ medjusobno različiti. Neka je $F(x)$ funkcija raspodele slučajne veličine $X$, koja je prebrojiva mešavina slučajnih veličina $X_i$, tj.*

$$X = \left\{ \ X_i \quad \textit{sa verovatnoćom} \quad p_i, \quad i \in \mathbf{N}, \right. \tag{2.265}$$

*gde su $p_i$ pozitivni realni brojevi takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{2.266}$$

*Neka je $Y_n, n \in \mathbf{N}$, niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom, čija je funkcija raspodele $F(x)$ i neka je*

$$M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{2.267}$$

*Tada za svako $x < 0$ važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} P\{n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i\lambda_i}{e^{\lambda_i c} - 1}(M_n - c) \le x\} = e^x. \tag{2.268}$$

**Dokaz:** Za svako $i \in \mathbf{N}$ funkcija raspodele slučajne veličine $X_i$ je

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ \frac{1-e^{-\lambda_i x}}{1-e^{-\lambda_i c}}, & \text{za} \quad 0 \le x < c, \\ 1, & \text{za} \quad x \ge c, \end{cases} \tag{2.269}$$

a u primeru 9 pokazali smo da $F_i \in D(G_{2,1})$. Zajednička raspodela članova niza je mešavina tih prebrojivo mnogo usečenih eksponencijalnih raspodela, pa za njenu funkciju raspodele važi

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x), \tag{2.270}$$

odnosno

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \frac{1-e^{-\lambda_i x}}{1-e^{-\lambda_i c}}, & \text{za} \quad 0 \leq x < c, \\ 1, & \text{za} \quad x \geq c, \end{cases} \tag{2.271}$$

tj.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \frac{e^{\lambda_i c}-e^{\lambda_i (c-x)}}{e^{\lambda_i c}-1}, & \text{za} \quad 0 \leq x < c, \\ 1, & \text{za} \quad x \geq c. \end{cases} \tag{2.272}$$

Sledi da je

$$x_0 = \sup\{t : F(t) < 1\} = c. \tag{2.273}$$

Za funkciju $f(s) = \frac{e^s-1}{s}$, $s > 0$, je

$$f'(s) = \frac{se^s - e^s + 1}{s^2}. \tag{2.274}$$

Ako je $g(s) = se^s - e^s + 1$, onda je

$$g'(s) = se^s > 0, \tag{2.275}$$

za $s > 0$, pa je $g(s)$ na tom intervalu rastuća funkcija. Kako je $g(0) = 0$ i $g(s)$ rastuća funkcija, onda je $g(s) > 0$, pa je i $f'(s) > 0$, odnosno $f(s)$ je rastuća funkcija za $s > 0$. Kako je

$$\lim_{s \to 0+} f(s) = 1, \tag{2.276}$$

to znači da za $s \in (0, A]$, gde je $A$ neki pozitivan realan broj, važi

$$|f(s)| \leq f(A) = \frac{e^A - 1}{A}. \tag{2.277}$$

Pogledajmo red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1} \frac{e^{\lambda_i s}-1}{s}$. Za $s \in (0, c]$ važi da $\lambda_i s \in (0, \lambda_i c]$. Koristeći nejednakost (2.277) dobijamo da za svako $i \in \mathbf{N}$ i svako $s \in (0, c]$ važi

$$|\frac{p_i}{e^{\lambda_i c} - 1} \frac{e^{\lambda_i s} - 1}{s}| = |\frac{p_i \lambda_i}{e^{\lambda_i c} - 1} \frac{e^{\lambda_i s} - 1}{\lambda_i s}| \leq \frac{p_i \lambda_i}{e^{\lambda_i c} - 1} \frac{e^{\lambda_i c} - 1}{\lambda_i c} = \frac{p_i}{c}. \tag{2.278}$$

Kako red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{c}$ konvergira, jer je $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{c} = \frac{1}{c}$, po Vajerštrasovom kriterijumu sledi da red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1} \frac{e^{\lambda_i s}-1}{s}$ ravnomerno konvergira za $s \in (0, c]$. Dalje važi

$$\begin{aligned} \lim_{s \to 0+} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c} - 1} \frac{e^{\lambda_i s} - 1}{s} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c} - 1} \lim_{s \to 0+} \frac{e^{\lambda_i s} - 1}{s} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i \lambda_i}{e^{\lambda_i c} - 1} \lim_{s \to 0+} \frac{e^{\lambda_i s} - 1}{\lambda_i s} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i \lambda_i}{e^{\lambda_i c} - 1}. \end{aligned} \tag{2.279}$$

Koristeći ovo dobijamo da za svako $x > 0$ važi

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+}\frac{1-F(x_0-hx)}{1-F(x_0-h)} &= \lim_{h\to 0+}\frac{1-F(c-hx)}{1-F(c-h)} \\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i\frac{e^{\lambda_i c}-e^{\lambda_i[c-(c-hx)]}}{e^{\lambda_i c}-1}}{1-\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i\frac{e^{\lambda_i c}-e^{\lambda_i[c-(c-h)]}}{e^{\lambda_i c}-1}} \\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i(1-\frac{e^{\lambda_i c}-e^{\lambda_i hx}}{e^{\lambda_i c}-1})}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i(1-\frac{e^{\lambda_i c}-e^{\lambda_i h}}{e^{\lambda_i c}-1})} \\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i\frac{e^{\lambda_i hx}-1}{e^{\lambda_i c}-1}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i\frac{e^{\lambda_i h}-1}{e^{\lambda_i c}-1}} \qquad (2.280)\\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{hx\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1}\frac{e^{\lambda_i hx}-1}{hx}}{h\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1}\frac{e^{\lambda_i h}-1}{h}} \\
&= x\frac{\lim\limits_{h\to 0+}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1}\frac{e^{\lambda_i hx}-1}{hx}}{\lim\limits_{h\to 0+}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1}\frac{e^{\lambda_i h}-1}{h}} \\
&= x\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_i\lambda_i}{e^{\lambda_i c}-1}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_i\lambda_i}{e^{\lambda_i c}-1}} = x.
\end{aligned}$$

Iz ove i jednakosti (2.273), na osnovu teoreme 1.11, sledi da i $F \in D(G_{2,1})$, pa za svako $x < 0$ važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{M_n-b_n}{a_n} \le x\} = e^x, \qquad (2.281)$$

gde su $a_n$ i $b_n, n \in \mathbf{N}$, normirajuće konstante koje treba odrediti.

Na osnovu iste teoreme zaključujemo da je $b_n = x_0 = c$, pa se jednakost (2.281) svodi na

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \le a_n x + c\} = e^x. \qquad (2.282)$$

Na osnovu teoreme 1.2 konstantu $a_n$ možemo izračunati iz jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} n(1-F(a_n x+c)) = -x, \qquad (2.283)$$

koja važi za svako $x < 0$. Kako $a_n x + c = u_n \to c-$, kad $n \to \infty$, koristeći (2.272) dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$\lim_{n\to\infty} n(1-\sum_{i=1}^{\infty}p_i\frac{e^{\lambda_i c}-e^{\lambda_i(c-a_n x-c)}}{e^{\lambda_i c}-1}) = -x, \qquad (2.284)$$

odnosno
$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{\infty} p_i(1-\frac{e^{\lambda_i c}-e^{\lambda_i(-a_n x)}}{e^{\lambda_i c}-1})=-x. \tag{2.285}$$
Ovo se dalje svodi na
$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{\infty} p_i\frac{e^{\lambda_i(-a_n x)}-1}{e^{\lambda_i c}-1}=-x, \tag{2.286}$$
tj.
$$\lim_{n\to\infty} n(-a_n x)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1}\frac{e^{\lambda_i(-a_n x)}-1}{-a_n x}=-x, \tag{2.287}$$
odnosno
$$\lim_{n\to\infty} na_n\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1}\frac{e^{\lambda_i(-a_n x)}-1}{-a_n x}=1. \tag{2.288}$$
Kako $a_n x + c \to c-$, kad $n\to\infty$, to $a_n x \to 0-$, pa $-a_n x \to 0+$. Zbog toga, na osnovu jednakosti (2.279), sledi
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{e^{\lambda_i c}-1}\frac{e^{\lambda_i(-a_n x)}-1}{-a_n x}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_i\lambda_i}{e^{\lambda_i c}-1}, \tag{2.289}$$
pa se jednakost (2.288) svodi na
$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_i\lambda_i}{e^{\lambda_i c}-1}\lim_{n\to\infty} na_n=1. \tag{2.290}$$
Sledi da možemo odabrati da je
$$a_n=\frac{1}{n\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{p_i\lambda_i}{e^{\lambda_i c}-1}}, \tag{2.291}$$
pa važi jednakost (2.268).□

# Literatura


[1] **Everitt, B.S. and Hand, D.J.** (1981): *Finite Mixture Distributions.* Chapman and Hall, London.

[2] **Feller, W.** (1971): *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Wiley, New York.

[3] **Gnedenko, B.V.** (1943): Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, **44**, 423-453.

[4] **Haan, L. de** (1970): *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes.* Mathematical Centre Tracts 32, Amsterdam.

[5] **Haan, L. de** (1971): A form of regular variation and its application to the domain of attraction of the double exponential distribution. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete.*, **17**, 241-258.

[6] **Hamilton, J.D.** (1994): *Time Series Analysis.* Princeton University Press, Princeton.

[7] **Jevremović, V. i Mališić, J.** (2002): *Statističke metode u meteorologiji i inženjerstvu.* Savezni hidrometeorološki zavod, Beograd.

[8] **Jovanović, M. i Mladenović, P.** (2003): O svojstvima mešovitih raspodela u vezi sa ekstremnim vrednostima. SYM-OP-IS 2003 (Herceg Novi), 557-560.

[9] **Kayano, K. and Shimizu, K.** (1994): Optimal tresholds for a mixture of lognormal distributions as the continuos part of the mixed distribution. *J. Appl. Meterology*, **33**, 1543-1550.

[10] **Mejzler, D.G.** (1949): On a theorem of B.V. Gnedenko. *Sb. Trudov Inst. Mat. Akad. Nauk. Ukrain. R.S.R.*, **12**, 31-35.

[11] **Mises, R. von** (1936): La distribution de la plus grande de $n$ valeurs. In: Selected Papers II (Amm. Math. Soc.), 271-294.

[12] **Mladenović, P.** (1995): *Verovatnoća i statistika*. Vesta-Matematički fakultet, Beograd.

[13] **Mladenović, P.** (1998): Mixed distributions and extreme values. SYM-OP-IS 1998 (Herceg Novi), 435-438.

[14] **Mladenović, P.** (1999): Extreme values of the sequences of independent random variables with mixed distributions. *Matematički vesnik*, **51**, 29-37.

[15] **Mladenović, P.** (2002): *Ekstremne vrednosti slučajnih nizova*. Matematički fakultet, Beograd.

[16] **Quandt, R.E. and Ramsey, J.B.** (1978): Estimating mixtures of normal distributions and switching regressions . *Journal Amer. Stat. Assoc.*, **73**, 730-738.

[17] **Roy, D. and Mukherjee, S.P.** (1988): Generalised mixtures of exponential distributions. *J. Appl. Prob.*, **25**, 510-518.

[18] **Titterington, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E.** (1985): *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*. Wiley, New York.