Biblioteka
GRADITELJI FILOZOFSKE MISLI

Urednik
Dragan Mojović

MILOŠ ARSENIJEVIĆ

PROSTOR
VREME
ZENON

Drugo, izmenjeno izdanje

IZDAVAČKA KNJIŽARNICA ZORANA STOJANOVIĆA
SREMSKI KARLOVCI • NOVI SAD
2007

Prvo izdanje
BibliotekaTeka – Filozofske studije, Beograd–Zagreb, 1986.

CIP – Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

1 Zenon
114/115

АРСЕНИЈЕВИЋ, Милош
Prostor vreme Zenon / Miloš Arsenijević. – 2. izmenjeno izd. – Sremski Karlovci ; Novi Sad : Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, 2007 (Novi Sad : Budućnost). – 810 str. ; 20 cm. – (Biblioteka Graditelji filozofske misli)

Tiraž 1.000. – Str. 5-10: Predgovor urednika biblioteke / Dragan Mojović.

ISBN 978-86-7543-132-9

a) Зенон из Елеје (око 490–430 пре н. е.) b) Простор c) Време

COBISS.SR-ID 223876359

PREDGOVOR UREDNIKA BIBLIOTEKE

Prve knjige pisaca, naučnika ili filozofa, ne retko, određuju karakter celokupnom njihovom opusu.

U doslovnom smislu to važi za knjigu *Prostor, vreme, Zenon* Miloša Arsenijevića. Plodnošću i značajem „domišljatih rešenja“ ona je, između dva izdanja, prvog, zagrebačko-beogradskog (1986), i drugog, Izdavačke knjižarnice Zorana Stojanovića (2007), obeležila skoro celokupan dosadašnji opus ovog autora i ispunila sadržajem dobar deo njegove filozofske biografije.

Čitav niz članaka i studija koje je Arsenijević objavio tokom protekle dve decenije u vodećim svetskim časopisima i najprestižnijim zbornicima ili izlažu i razrađuju rezultate sadržane u ovoj knjizi ili se na njih prirodno nadovezuju. Tako članci objavljeni u zbornicima *Kluwer* (1988) i *Spektrum Akademischer Verlag* (1995), kao i časopisu *Analysis* (1989) [pune reference relevantnih tekstova nalaze se u popisu na kraju ovog predgovora], iznose pred svetsku filozofsku javnost originalan predlog rešenja najizazovnijih aporija zenonovskog tipa, koji je sadržan u poglavlju *Ishod* knjige *Prostor, vreme, Zenon*, dok članak u časopisu *Dialektik* (1994) govori o odnosu matematike i fizičkog sveta onako kako je o tome zaključeno u završnom, poglavlju *Posledice*, pre svega u paragrafu 126 iste knjige.

Navedenoj grupi tekstova, koja prezentira najvažnija saznanja do kojih je autor došao do 1986, ne pripadaju, kako bi se moglo pomisliti, samo radovi objavljeni u deceniji posle prvog izdanja knjige. Istovremeno sa pojavljivanjem ovog, drugog izdanja knjige *Prostor, vreme, Zenon*, u časopisu *Apeiron* (2007) izaći će obimna autorova istorijsko-filozofska studija, napisana u saradnji sa Sandrom Šćepanović i Džeraldom Mesijem, u kojoj je izvršena rekonstrukcija izvorne verzije aporije *Strela*, zasnovana na paragrafu 38 c). Istoj grupi tekstova pripada i studija koja će se pojaviti u zborniku *Filozofija vremena* izdavačke kuće Vittorio Klostermann (2007), a koja sadrži međusobno povezani skup najvažnijih rezultata o značaju Zenonovih paradoksa do kojih je autor došao u svojim dvema knjigama *Prostor, vreme, Zenon* i *Vreme i vremena* (2003).

Iz tematskog kruga knjige *Prostor, vreme, Zenon* proistekla je i druga knjiga, *Vreme i vremena*. Suprotno knjizi o Zenonu, ova knjiga je umnogome zasnovana na tekstovima koji su prethodno objavljeni na engleskom i nemačkom jeziku. Reč je o obimnoj studiji publikovanoj u dva nastavka u *Philosophia naturalis* (1992), o člancima objavljenim u časopisima *Erkenntnis* (2002), *Journal of Applied Logic* (2003) i studiji uvršćenoj u zbornik MIT Press-a (2003).

Priča o *Zenonu* se, međutim, tu ne završava. Prošle godine autor je objavio tekst o Specijalnoj teoriji relativiteta, u zborniku *Time and History* (2006), koji je u celini uključen u ovo, drugo, izdanje knjige *Prostor, vreme, Zenon*, umesto paragrafa 122 prvog izdanja. Najzad, u istoj 2007. godini, pored ostalih pomenutih tekstova, već se pojavila i Arsenijevićeva aksiomatizacija aristotelovske i kantorovske teorije linearnog kontinuuma, predstavljena na međunarodnoj konferenciji za primenjenu matematiku u Dalasu (u saradnji sa Miodragom Kapetanovićem), dok je u štampi tekst u *Grazer Philosophische Studien* (sa istim ko-autorom) u kojem je, na osnovu teksta iz *Journal of Applied Logic* (2003), pokazano da ceo spor ove dve teorije predstavlja „mnogo buke ni oko čega".

Prostor, vreme, Zenon pokazuje da prve knjige mogu da osmisle i ispune ne samo biografiju već i sudbinu samog autora. Kao što su s njom u vezi svi navedeni radovi objavljeni u minule dve decenije, tako je, u istom periodu, ponajviše zahvaljujući tim tekstovima, njen autor bio prisutan u najvećim centrima filozofije. Predavao je matematiku u okviru Evropskog odeljenja Univeriteta Merilend 1992–1993, pošto je, dve godine ranije, proveo kao stipendista Humboltove fondacije u Hajdelbergu. Tokom 1994. i 1995. godine bio je saradnik na projektu *Kvantni objekti* Nemačkog istraživačkog društva (DFG) na Institutu za teorijsku fiziku Univerziteta u Kelnu. Od 1988. godine član je Ficviliam koledža Univerziteta u Kembridžu, a od 1996. i Centra za filozofiju nauke Univerziteta u Pitsburgu. Gostujuća predavanja držao je na najprestižnijim univerzitetima, kakvi su Oksford, London, Berkli, Pitsburg, Florida, Los Anđeles, Montreal, Hajdelberg, Bilefeld, Karlsrue, Dortmund, Oslo, Grac, itd. U Hajdelbergu je održao ceo kurs o Zenonu, a u Gracu, pored ostalog, kurs iz filozofije vremena, koji je uključio i mnoge teme iz knjige *Prostor, vreme, Zenon.*

Zahvaljujući takvom ugledu Arsenijević je poslednjih godina bio pozivan da napiše tekstove za zbornike najvećih svetskih izdavača, poput američkog MIT Press-a i nemačke kuće Vittorio Klostermann, i da učestvuje na svetskim skupovima kakvi su Međunarodna konferencija matematičara u Dalasu (mart 2007) i 28. Vitgenštajnov simpozijum u Kirhbergu (2005), gde je održao predavanje pretočeno u studiju objavljenu u zborniku *Time and History* (2006).

Iz toga što se većina objavljenih članaka, studija i knjige preovlađujuće bave Zenonom, prostorom ili vremenom, pogrešno bi bilo zaključiti da se Arsenijević, od svog prvog rada do danas, isključivo bavi jednom temom ili različitim temama jedne filozofske oblasti. Samo pomenuti tekstovi objavljeni 2006. i 2007. godine pokazuju izuzetno širok dijapazon njegovih interesovanja, koja se kreću od istorije filozofije do logike, od filozofije nauke do istorije matematike, od fizike do metafizike. Razne teme iz ovih oblasti mogu se pronaći i u izvanredno obimnoj knjizi koja je pred nama, a koju uprkos sjajnom stilu i jeziku nije nimalo lako čitati.

Knjiga *Prostor, vreme, Zenon* rezultat je velikog istraživačkog napora koji je usledio nakon toga što se njen autor „iznenada suočio sa surovom verzijom aporije *Ahil* u svedenom obliku" i začudio kako „iz neosporivih premisa" može „sasvim nedvosmisleno da sledi neprihvatljiv zaključak". „Zenonova besmrtnost", kaže Arsenijević, „počiva na tome što je konstruisao aporije u kojima i premise i izvođenje deluju neodoljivo prihvatljivo, dok zaključci deluju isto toliko neprihvatljivo. Zenonove aporije nisu samo protivrečnosti nekog formalnog sistema koje lako možemo otkloniti nekom promenom u tom sistemu."

Svoja razmatranja Zenonovih aporija Arsenijević je osmislio u okviru četiri velika poglavlja. U prvom, pod nazivom Aporetika, na pristupačan način, pokazao je u čemu se sastoji najizazovnija Zenonova aporija i kako izgledaju njene razne varijacije vezane za matematiku i fiziku. U drugom, najopširnijem poglavlju (Gigantomahija), dao je istorijski pregled raznovrsnih rešenja koja se mogu eksplicitno ili implicitno pronaći u učenjima filozofa, matematičara i fizičara, od Zenona do danas. Treće poglavlje (*Ishod*) je najkraće, ali najvažnije. U njemu je ponudio originalno rešenje glavne aporije i ostalih aporija koje su na njoj zasnovane. U četvrtom poglavlju (*Posledice*) razmatra različite posledice koje proizlaze iz ponuđenog rešenja, a koje se tiču sporova među programima savremene matematike, teorije kontinuuma, kvantne mehanike, teorije relativiteta i, generalno, pitanja odnosa između prostora, vremena i fizičkog sveta.

Malo ko će biti spreman da s jednakom pažnjom prati i razume sve slojeve navedenih poglavlja. Autor je, međutim, uložio veliki napor da tekst učini što razumljivijim. Formalni delovi (matematičke i logičke formule) uvek su praćeni ekstenzivnim tekstualnim (neformalnim) razjašnjenjima. Istorijsko-filozofske i filološke digresije štampane su manjim slogom, što ukazuje čitaocu da ih, ako želi, može zaobići. Osim toga, na početku je dat iscrpan analitički sadržaj, koji mu omogućuje da se uključi u „razvoj događaja" i ako je pojedine paragrafe preskočio.

Zbog takvog truda *Prostor, vreme, Zenon* je knjiga jasne kompozicije, fascinantnih logičkih analiza i tumačenja, kristalno jasnih zaključaka i, u literaturi ove vrste, retko dopadljivog stila i jezika.

Niko u našoj filozofiji, sa izuzetkom Branislava Petronijevića, nije s toliko kompetencije, lakoće i nepretencioznosti koristio matematičke i fizičke teorije u svojim filozofskim razmatranjima. Posebnu draž i živost tekstu knjige daje polemička veština kojom Arsenijević konfrontira i raspravlja suprotstavljena stanovišta filozofa, fizičara i matematičara. Arsenijevićev osećaj za stil učinio je da su citati brojnih dela (spisak citiranih naslova iznosi 27 stranica) vešto uklopljeni u njegove rečenice, pa im ne remete ni sklad, ni tempo, ni eufoniju.

Povodom članaka i studija objavljenih na engleskom i nemačkom jeziku, a u kojima su, pored ostalog, predstavljena stanovišta iz knjige *Prostor, vreme, Zenon*, ordinarijus za filozofiju Univerziteta u Karlsrueu prof. dr Hans-Peter Schütt kaže: „Impresionira Arsenijevićevo poznavanje tradicije Zapadne filozofije, od antike do modernog vremena, koje se na diskretan način ispoljava u njegovim tekstovima... Arsenijević fascinira sposobnošću da kombinuje visoku tehničku ekspertizu zasnovanu na formalnoj logici s krucijalnim filozofskim pitanjima. Arsenijević je bio u stanju da pokaže da veliki deo standardne literature u svetu pati od nerazumevanja stvarnih alternativa u diskusiji različitih pogleda na klasične paradokse zenonovskog tipa, odnosno klasične probleme vremena (time), vremena (tenses) i determinizma."

Svetska prezentacija Arsenijevićevih radova i reči ordinarijusa za filozofiju iz Karlsruea uveravaju nas da Arsenijevićevo delo pripada biblioteci „Graditelji filozofske misli", koju izdavač namenjuje „filozofskim ostvarenjima koja su, od početaka filozofije do današnjih dana, najviše doprinela oblikovanju filozofske misli o prirodi sveta, moći saznanja i smislu života, kao i najznačajnjim delima svetske i domaće produkcije koja tu misao dalje razvijaju, tumače i vrednuju". *Prostor, vreme, Zenon* nije samo knjiga jednog od vodećih domaćih filozofa, već i delo koje tumači jedan od najvećih problema u istoriji filozofske misli na svetski relevantan način. „Čovek mora da čita Miloša Arsenijevića da bi jasno uvideo koliki je div dijalektike Zenon bio" (Hans-Peter Schütt).

Dragan Mojović

ČLANCI I STUDIJE MILOŠA ARSENIJEVIĆA NA ENGLESKOM I NEMAČKOM JEZIKU

"Die Bedeutung der Zanonischen Paradoxa für die Philosophie der Zeit", *Philosophie der Zeit*, (Thomas Müller Hrsg.), Vittorio Klostermann, 2007 (pp. 139–173).

"A new reconstrution of Zeno's Flying Arrow" (with S. Šćepanović and G. Massey), *Apeiron*, 2007 [u štampi].

"The 'great struggle' between Cantorians and Aristotelians: Much ado about nothing" (with M. Kapetanović), *Grazer Philosophische Studien* 76, 2007 [u štampi].

"An $L\omega_1\omega_1$ Axiomatization of the Linear Archimedean Continua as Merely Relational Structures" (with M, Kapetanović), *Proceedings of the 11 th WSEAS International Conference on the Applied Mathematics*, Dallas, 2007 (pp. 180–185).

"'Close to the speed of light': Dispersing various Twin Paradox related confusions" in *Time and History* (F. Stadler and M. Stölzner eds.) Ontos Verlag, 2006 (pp. 233–252).

"Generalized concepts of syntactically and semantically trivial defferences and instant-based and period-based time ontologies", *The Journal of Appliend Logic* 1 (2003), (pp. 1–12)

"Real tenses" in *Time, Tense, and Reference* (Jokic. A. and Smith Q. eds.) MIT Press, 2003 (pp. 325–354).

"Determinism, indeterminism and the flow of time", *Erkenntnis* 56/2, 2002 (pp. 123–150).

"Logic, matematics and phylosophy", in *Physik, Philosophie und die Einheit der Wissenschaften* (Krüger, L. und Falkenburg, B. Hrsg.) Spektrum Akademischer Verlag (Heidelberg/Berlin/Oxford), 1995 (pp. 83–94).

"Mathematics, infinity and the physical world", *Dialektik* 3/1994 (pp. 83–107).

"Eine aristotelische Logik der Intervalle, die Cantorsche Logik der Punkte und die physikalischen und kinematischen Prädikate I: Logik der Punkte und der Intervalle, *Philosophia naturalis* 2/1992 (pp. 161–180).

"Eine aristotelische Logik der Intervalle, die Cantorsche Logik der Punkte und die physikalischen und kinematischen Prädikate II: Die mit physikalischen und kinematischen Prädikaten erweiterte Logik der Punkte und der Intervalle", *Philosophia naturalis* 2/1992 (pp. 181–209).

"How many physically distinguished parts can a limited body contain", *Analysis* 38, 1989 (pp. 36–42).

"Solution of the Staccato Version of the Achilles Paradox" in *Contemporary Yugoslav Philosophy: The Analytic Approach* (A. Pavković, ed.), Kluwer (Dordrecht/Boston/London), 1988 (pp. 27–55).

PREDGOVOR AUTORA DRUGOM IZDANJU

Osim ispravki uočenih grešaka, ovo drugo izdanje se ne razlikuje od prvog, izuzev kada je u pitanju paragraf 122, koji je u potpunosti zamenjen novim, znatno opširinijim tekstom. Naime, iako bih, posle dve decenije, neke stvari svakako izložio na drugačiji način, zaključio sam da promene, sa izuzetkom pomenutog paragrafa, ne bi imale suštinski značaj i da je zato, sa ciljem očuvanja autentičnosti izvorne zamisli i kompozicije, bolje da sve ostane onakvo kakvo je bilo. Interpretaciju Specijalne teorije relativiteta, vezanu za rešenje „paradoksa blizanaca" u paragrafu 122, morao sam ipak zameniti novim tekstom, jer sam u odnosu na to radikalno promenio mišljenje, tako da se sada među osporavanim tumačenjima nalazi i ono koje sam u prvom izdanju i sam zastupao. Tekst novog paragrafa 122 u celini je preuzet iz zbornika *Time and History* (F. Stadler and M. Stölzner, eds.), Ontos Verlag, 2006, a proizašao je iz predavanja koje sam, povodom stogodišnjice Specijalne teorije relativiteta, po pozivu, održao na 28. Vitgenštajnovom simpozijumu u Kirhbergu 2005. godine.

Elektronska priprema novog izdanja ove, tehnički gledano, izuzetno komplikovane knjige, donela je ogromne teškoće. Za izradu i unošenje formula i crteža izuzetno sam zahvalan Mašanu Bogdanovskom, Branki Romčević i Draganu i Aleksandru

Mojoviću, za nezamenljivu pomoć pri unosu i dodatnoj kontroli grčkog teksta Sandri Šćepanović, a za neumoljivi lov na greške svake vrste Ivanu Volencu.

U Beogradu, maja 2007. Autor

PREDGOVOR AUTORA PRVOM IZDANJU

«Il n' y a rien de plus étonnant
que ce qui est évident»
(Cauchy)

Većina dece se čudi gledajući put neba, pokušavajući da shvati beskraj vasione. Nešto manje nâs se čudilo teoriji beskonačnih nizova i beskonačnih redova s kojima smo se sreli na časovima matematike kao gimnazijalci. Suočivši se u završnom razredu sa Zenonovim aporijama, povratilo se nešto od prvobitnog čuđenja, mada je profesor filozofije pokušao da nas sve umiri gotovim jednostavnim rešenjima. Na studijama je već trebalo biti mudar i ne čuditi se previše, kada su nam već stajali na raspolaganju odgovori tolikih filozofskih velikana, o čemu smo se mogli obavestiti iz prve ruke. Bilo je to, u izvesnom smislu, doba dogmatskog dremeža, kada je, pre svega, trebalo proučiti razne filozofeme.

Za mene je sve palo u vodu s jeseni 1979. godine, kada sam se iznenada suočio sa surovom verzijom *Ahila* u svedenom obliku, u obliku silogizma sa dve premise. Razlika između nekadašnjeg čuđenja i čuđenja koje me je tada obuzelo sastojala se upravo u tome što sam mogao da gledam u taj silogizam, što je to čuđenje bilo artikulisano. To me je potpuno porazilo i možda sam tada prvi put shvatio kako treba da izgleda filozofski problem: iz neosporivih premisa je sasvim nedvosmisleno sledio neprihvatljiv zaključak. Taj silogizam je ono do čega se, u stvari – u tekstu koji sledi – stiže na kraju *Aporetike*, a što je eksplicitno formulisano kao silogizam u Trećem delu, u § 106. Filozofski problem se može predstaviti kao nešto što može razumeti dete, u šta sam se neposredno uverio, a što isto toliko zbunjuje izvežbane filozofe i naučnike, u šta sam se isto tako uverio.

Jednom suočen sa artikulisanim problemom, nisam ga više mogao ostaviti, sve dok mi, opet sasvim iznenada, nije palo na pamet rešenje koje me je zadovoljilo. Prihvatio sam mogućnost da premise budu istinite, a ipak nisam prihvatio zaključak koji bi iz njihove konjunkcije sledio, pošto sam porekao *saodrživost* premisa. U izvesnom smislu ova knjiga je završena još početkom 1980. godine, kad su skicirani Prvi i Treći deo: aporija i rešenje.

Nisam, naravno, mogao biti siguran da je odgovor koji me je zadovoljio originalan, a još manje mogu biti siguran da će zadovoljiti druge. Imajući to na umu, četiri godine sam upoređivao rešenja ne samo izvorne Zenonove aporije, već i raznovrsnih srodnih problema, i iz toga je proizišao Drugi deo – Gigantomahija.

Metod kojim sam se služio u testiranju raznih ponuđenih rešenja oprobani je filozofski metod, metod kojim se služio i glavni junak naše drame, Zenon, koga je Aristotel nazvao prvim dijalektičarem. No nije svođenje na apsurd teorija u okviru kojih se nude rešenja – često, nažalost, u nekoj verziji aporije koja nije tako surova – samo destruktivno. Cela Gigantomahija je i jedna platonska drama: isključivanjem *prima facie* mogućnosti treba se približiti pravoj; iako se Treći deo može čitati direktno posle Prvog, on će, svakako, imati neuporedivo veću težinu ako se čita posle *Gigantomahije*.

Filozofski *reductio ad absurdum* razlikuje se od apagoških dokaza s kojima se srećemo u matematici i zatvorenim formalnim

sistemima uopšte: niti je unapred određeno šta je „dozvoljena rečenica", odnosno „dobro formirana formula", niti su unapred određeni kanoni dokazivanja. Filozofija je u izvesnom smislu *keč-ez-keč-ken*, ali to ne znači da sve što poželimo uspeva – pre svega zato što u filozofiji prevashodni cilj nije uveriti druge, već sebe: mnogi od pokušaja propadaju jer nâs same ne zadovoljavaju. Upravo je filozofija mesto gde se, uprkos načelu *Voraussetzungslosigkeit*, postepeno formiraju izuzetno strogi kanoni argumentisanja i prihvatljivosti, u izvesnom pogledu stroži nego u drugim duhovnim delatnostima.

Rešenjima koja proizlaze iz strategija razmatranih u *Gigantomahiji* možemo biti nezadovoljni iz različitih razloga. Osim odgovora koji se završavaju eksplicitnim *„credo quia absurdum est"* (§§ 41–42), najneprihvatljiviji su oni koji su dati unutar učenja u kojima se otkriva imanentna protivrečnost (§§ 49–52); nisu mnogo prihvatljiviji odgovori koji svođenje na apsurd izbegavaju *ad hoc* ograničenjima u cilju sprovođenja definicionalnog *fiat* (§§ 56, 100–101); naići ćemo i na taktiku pomeranja problema (§§ 89), no nigde se bolje ne vidi nego u glavnoj kinematičkoj aporiji koliko se problem ne može s uspehom pomeriti; srešćemo se i sa zanimljivim, inače vrlo iznijansiranim teorijama, u kojima ipak nema odgovora na naše glavno pitanje – tu je sigurno reč ili o nesuočenosti s najneprijatnijom verzijom problema (§ 47), ili o potiskivanju (§§ 57, 76); ima i suviše ekskluzivnih teorija, čija je idiosinkrazija za neke od nas preskupa (§§ 41–42, 61–62); teško će se mogu otkloniti i radikalnim empirističkim ustručavanjem da se raspravlja o problemima za čije je formulisanje neophodno rastezanje upotrebe uobičajenih ili naučnih termina (§ 63), no pošto se problem i javlja tek kada se takvo „rastezanje" pretpostavi, verovatno bismo ga radije rešili pod tom pretpostavkom, ako je to moguće; skeptička rezignacija je pošten stav, ali nije i rešenje (§ 41–42). Šta ne zadovoljava u rešenju koje se ovde nudi, u *Ishodu* Gigantomahije, ostaje da se vidi.

Suočivši se s najneprijatnijom verzijom problema, odmah sam bio pomislio da bi njegovo rešenje moralo biti vrlo plodno, jer je on „empirijski“ u najvećoj meri u kojoj to filozofski problem uopšte može biti: prisustvujemo zamislivim situacijama u kojima se samim činom proizvodi paradoksalan efekat. Zaista, rešenje najoperativnije i najočiglednije teškoće, kojim se moraju isključiti razne *prima facie* mogućnosti, omogućava nam da rešimo i mnoge srodne probleme, što se vidi u Četvrtom, poslednjem delu. Protivno uverenju sadržanom u rasprostranjenom dvadesetovekovnom mitu o neinformativnosti filozofije, ispostavlja se da su neki filozofski iskazi, iako neempirijski i analitički, informativni utoliko što govore o tome šta mora i šta ne može biti slučaj a da pri tome to što kažu nije ni najmanje trivijalno.

Proširenje uvida u druge delatnosti predstavlja jednu od karakteristika filozofije koja se pominje još od Sokratovih dana. Uz pomoć rešenja glavne aporije i više srodnih problema, u *Posledicama* se preispituju pojedini aspekti prakse matematičara i fizičara. Pri tome ne samo što se ponekad nude ekspozicije poznatih teorija koje se razlikuju od uobičajenih, kao što je to slučaj sa ekspozicijom Specijalne teorije relativiteta, već se unekoliko, onim delom kojim mogu biti filozofska, prosuđuje i o pojedinim razilaženjima među matematičarima, kao što su razilaženja klasičara, intuicionista i nestandardnih analitičara, ili sporenjima među fizičarima oko „paradoksa“ za koje verujem da su velikim delom filozofski, kao što su takozvani paradoks nepotpunosti kvantne mehanike i takozvani paradoks blizanaca.

Razmatranje koje proističe iz rešenja glavne aporije i mnogih drugih koje su s njom povezane služi nam, najzad, da formiramo izvesnu sliku o strukturi i izvesno uverenje o načinu postojanja prostora i vremena.

Čitalac će u knjizi uočiti tri različita štamparska sloga. Prvi, glavni nivo može se, naravno, pratiti bez druga dva, koji sadrže filozofske, odnosno filološko-istorijske digresije.

Beograd, avgusta 1986.

SADRŽAJ

PREDGOVOR UREDNIKA BIBLIOTEKE 5

PREDGOVOR AUTORA DRUGOM IZDANJU 13

PREDGOVOR AUTORA PRVOM IZDANJU 15

APORETIKA

1. *Savladavanje prepreka korak po korak i odjednom*
Ima slučajeva u kojima je prepreku lakše, ili možda, jedino moguće, savladati korak po korak, dok je u nekim slučajevima to lakše, ili možda jedino moguće, učiniti odjednom 63

2. *Savladavanje beskonačnosti*
Ima slučajeva u kojima izgleda da je beskonačnost moguće savladati odjednom 64

3. *Da li je moguće savladati beskonačnost korak po korak?*
Na osnovu pojma beskonačnosti i prirode savladavanja prepreka korak po korak deluje očigledno da je beskonačnost nemoguće savladati korak po korak, mada su neki filozofi mislili drukčije 65

4. *Jedna aporija savladavanja beskonačnosti korak po korak*
Ako besmrtni Zevs na svaki svoj rođendan bude dozivao po jednu, uvek narednu, od beskonačno mno-

go u niz poređanih kosmičkih stanica i ako se ne može navesti ni jedna stanica koja neće biti dozvana, ne znači li to da će Zevs dozvati sve stanice i savladatiti beskonačnost korak po korak 66

5. *„Neki“, „bilo koji“, „svaki“*
I imeničke i količinske zamenice „neki“ i „svaki“, a ne samo zamenica „bilo koji“, mogu se upotrebiti i neodređeno; u kvantifikatorskom računu određenost i neodređenost kvantifikatora ∃ i ∀ zavise od opsega i redosleda uvođenja kvantifikatora 69

6. *Opseg i redosled uvođenja kvantifikatora i izlaz iz aporije*
Tvrdnja da će Zevs dozvati svaku od beskonačno mnogo kosmičkih stanica bila bi istinita kada bi se „svaka“ ostavilo neodređeno, što je upravo slučaj kada se zahteva da se navede navodno nedozivljiva stanica 73

7. *„Svaki“ i „svi“ i priroda beskonačnosti rednih brojeva*
Kada se „svaki“ upotrebi neodređeno, ono se ne sme zamenjivati sa „svi“; postojanje beskonačnih skupova ne implicira postojanje beskonačnih rednih brojeva 74

8. *Konvergentni nizovi i nesavladivost beskonačnosti korak po korak*
I ako je niz koji treba savladati konvergentan, Zevs ne može savladati beskonačnost korak po korak, jer se ne može osloboditi ukletog svojstva konačnosti, koje se rekurzivno održava 77

9. *Da li se obična trka može shvatiti kao savladavanje beskonačnosti korak po korak?*
Ako se obična trka može predstaviti kao savladavanje beskonačnosti korak po korak, onda i ono što deluje očigledno moguće, kao što je Ahilovo dostignuće kornjače, počinje da izgleda nemoguće 78

10. *Dosegnuće tačaka i prelaženje rastojanja*
Analogija između Zevsovog zadatka da dozove beskonačno mnogo kosmičkih stanica i Ahilovog zadatka da stigne kornjaču opravdana je, kako izgleda, zato što i za beskonačno mnogo mikrostanica, a ne samo za beskonačno mnogo geometrijskih tačaka, ima dovoljno mesta na jednom ograničenom prostoru 80

11. *Sporan ontološki status tačaka*
Način postojanja tačaka nije bio kroz istoriju jednoznačno određen; s obzirom na jednu od mogućih formulacija Ahilovog zadatka, moramo se zapitati postoje li tačke u čulnom svetu 81

12. *Da li se geometrijske tačke i linije mogu opažati?*
Geometrijske linije i tačke se mogu videti, pošto se može videti kako se raznobojne površine uzajamno ograničavaju 82

13. *Opažanje geometrijskih površina*
Ako se dva prostranstva obasjana različitom svetlošću uzajamno ograničavaju i ako dok smo u jednom ne možemo videti nijedan deo drugog, nećemo li gledajući iz jednog prema drugom videti geometrijsku površinu i ne vidimo li, štaviše, geometrijsku površinu i onda kad gledamo crni zid? 86

14. *Vizuelni i taktilni svet*
Svet našeg iskustva je svet ujedinjenog iskustva i zato opravdano kažemo da vidimo zid i onda kad vidimo samo geometrijsku površinu 87

15. *Geometrijski i materijalni svet*
Materijalna tela kojima se bavi fizičar i geometrijska su: nije sve što uočavamo i o čemu govorimo kada su u pitanju *materijalna tela materijalno: njihov* oblik je nematerijalan 91

16. Dodirivanje

Dva tela se dodiruju tako da mogu tvoriti kako kontinuum tako i kontingent; dva materijalna tela se mogu dodirivati kontigualno-kontinualno, kontigualno budući materijano raznorodna, kontinualno budući geometrijska 92

17. Porodica postojanja

Ontolozi na razne načine govore o postojanju, vršeći često ontološku redukciju, no za konstrukciju aporije, radi koje se bavimo ontologijom, dovoljno je to što geometrijski objekti postoje u čulnom svetu u smislu koji je određen u §§ 12–16 98

18. Trenutak

Trenutak u vremenu odgovara tački u prostoru, on je granica dva intervala koji su raznorodni s obzirom na promenu koja se tokom njih dešavala 100

19. Dosegnuće tačaka

U cilju prevladavanja disanalogije između stanica koje Zevs doziva i tačaka koje Ahil doseže, Ahilov put obasjavamo sa beskonačno mnogo međusobno različitih svetlosti 101

20. Staccato trčanje

Da bi smo aktualizovali Ahilova dodirivanja međusobno raznobojnih prostranstava, tražimo od Ahila da trči *staccato*, da se zadržava na kraju svakog prostranstva, mada dovoljno kratko da bi na cilj trebalo da stigne u ograničenom vremenu 102

21. Legato brojanje

Zevs broji deonice Ahilovog puta koje se smanjuju geometrijskom progresijom; koliko ih je izbrojao stigavši s Ahilom na cilj? 103

22. Trkač koji neobično usporava i trkač koji neobično ubrzava

Kada uslovi konvergencije nisu zadovoljeni i s obzirom na prostorne i s obzirom na vremenske intervale, već su zadovoljeni samo za jedne od njih, trkač ili ne može stići do konačno udaljenog cilja a da to prestaje da bude čudno na način na koji je bilo čudno u Ahilovom slučaju, ili izgleda kao da trkač može dosegnuti tačku beskonačno udaljenu od početne – jer neograničeno ubrzava 104

23. Mašine koje izvršavaju „super-zadatke"

U „veku tehnike", filozofi su izumeli mnoge mašine koje bi trebalo da izvršavaju zadatke s beskonačno mnogo akata, da bi na njima ispitivali teze o mogućnosti ili nemogućnosti savladavanja bekonačnosti korak po korak 107

24. Aporija nedostižnosti i aporija nepokretnosti

Ako se svaki dati cilj može učiniti nedostižnim zahvaljujući nekoj konstrukciji poput *Ahila*, mogli bismo zaključiti da je nemoguće i pomeriti se 109

GIGANTOMAHIJA

25. Kako se suočiti sa istorijom

Dveipohiljadegodišnja istorija Zenonovih dokaza protiv mnoštva i kretanja sastoji se iz filološko-filozofskih rekonstrukcija izvornih argumenata, svesnih i nesvesnih varijacija na Zenonovu temu – ne samo u filozofiji već i u matematici i fizici – i raznovrsnih odgovora na Zenonov izazov; ponuđena rešenja su ovde klasifikovana prema opštoj strategiji odnošenja prema problemu 113

A. NEGATIVNA DIJALEKTIKA

26. *Vreme nastanka Zenonovih dokaza i značaj nezavisne rekonstrukcije prethodnih učenja*

Vreme nastanka Zenonovih dokaza važno je ne samo radi otkrivanja Zenonovih pobuda i ciljeva, već i radi tačnog određenja strukture njegovih dokaza 116

27. *Da li ranopitagorejska matematika sadrži neku koncepciju osnovnih geometrijskih objekata?*

Nikakve pitagorejske koncepcije osnovnih geometrijskih objekata nije moralo biti u vreme nastanka Zenonovih dokaza: matematička znanja Pitagorejaca pre Zenona ne impliciraju nikakvu takvu koncepciju, a neposredna evidencija o tome ne postoji 118

28. *Neizvesnost oko korišćenja infinitezimala u grčkoj matematici*

Nema nikakve direktne evidencije o tome da su se grčki matematičari koristili nekakvom infinitezimalnom metodom, a posredno zaključivanje o postojanju takve metode je neuverljivo 123

29. *Otkriće nesamerljivosti*

Najverovatnije je da se otkriće nesamerljivosti dijagonale i stranice kvadrata desilo posle nastanka Zenonovih dokaza: suprotno mišljenju izvesnih istraživača, verovatno je da Zenon nije stupio na istorijsku scenu u trenutku krize osnova grčke geometrije 124

30. *Pitagorejsko učenje o broju i proporciji*

Pitagorejci su do učenja o broju i proporciji verovatno došli istraživanjem odnosa dužina žica prilikom proizvođenja konsonantnih muzičkih intervala: brojevi su se prvobitno javljali samo u odnosu dužina i nisu se odnosili na tačke, sa ili bez veličine, što inače misle mnogi istraživači 126

31. *Aritmetizovanje geometrije kod ranih Pitagorejaca*

Učenje o broju i proporciji primenjeno je i pri upoređivanju dveju geometrijskih oblasti, u metodu višestruke aplikacije jedne oblasti 130

32. *Parmenidovo učenje o homogenom, kontinuiranom, jedinstvenom biću*

a) M e t o d
Najverovatnije je da je Parmenid atribute postojanja, homogenosti, kontinuiranosti i jedinstvenosti pripisuje onome o čemu se jedino sa smislom može govoriti, a do čega se dolazi svođenjem na apsurd drugih „mogućnosti" 133

b) H o m o g e n o s t
Ono što potoji ne može biti u sebi različito ili deljivo s obzirom na karakteristiku postojanja: ono je kao postojeće svuda isto 136

c) K o n t i n u i t e t
Pošto nema delova onoga što postoji koji bi se mogli jedni na druge nadovezivati, Parmenid συνεχές upotrebljava na nov način, primenjujući ga na samo jedno biće, čime kontinuiranost postaje obeležje jedne stvari a ne relacija između dve stvari 137

d) J e d i n s t v e n o s t
Bez heterogenosti ili diskontinuiranosti nema mnoštvenosti i utoliko je ono o čemu se jedino sa smislom može govoriti jedno i jedinstveno biće 138

33. *Identitas indiscernibilium i indiscernibilitas identitatum kod Parmenida i Melisa*

Kod Parmenida je princip *identitas indiscernibilium* princip negativne dijalektike kojom se svode na apsurd razne „mogućnosti" a *indiscernibilitas identitatum* je ontološki princip kojim se karakteriše ono o čemu se jedino može smisleno govoriti; kod Melisa je, kako izgleda, *identitas indiscernibilium* načelo zahvaljujući kojem smrtnici istinito govore o onome što navodno razlikuju 140

34. *O kakvoj je sve množtvenosti reč kod Empedokla i Anaksagore?*
Po Empedoklu sve propadljive stvari nastaju uzajamnim umetanjem četiri nepropadljiva, kvalitativno različita korena, koji time gube neke karakteristike Parmenidovog bića; Anaksagora je, govoreći o mnoštvu različitih semena svega što postoji, dopustio postojanje beskonačne kvalitativne izdiferenciranosti ograničenih tela 141

35. *Osnovni elementi iz pojmovne mreže u Zenonovim dokazima protiv mnoštva*
a) M n o š t v o
Elemente mnoštva u pluralističkoj hipotezi koju Zenon pobija čini sve ono do čega bi se moglo doći kad bi se dopustilo deljenje parmenidovskog kontinuiranog bića 144
b) T a č k a
Iako nije upotrebljavao reč στιγμή, Zenon je, možda prvi, govorio o matematičkom entitetu koji će kasnije biti nazvan tim imenom; takozvanim Zenonovim aksiomom tvrdi se da se od takvih entiteta ništa ne može sačiniti 146
c) V e l i č i n a, d e b lj i n a, m a s a
Upotrebljavajući reči μέγεθος i πάχος, možda i ὄγκος, Zenon praktično operiše pojmom dimenzije; pošto „tačka" ne može biti element navodno postojećeg mnoštva, kao kandidat za element mnoštva preostaje samo ono što je telesno, što ima veličinu i debljinu (i masu) 156
d) D o d i r i v a nj e
Prema najuverljivijem prevodu i interpretaciji fragmenta *DK* 29 B 1, kod Zenona se ne govori o problemu mogućnosti dodirivanja elemenata mnoštva 156

e) M e s t o
U aporiji mesta reč je o neodređenosti mesta ili beskonačnosti prostora na kojem se, odnosno u kojem se nalazi neko telo 157
f) D e lj e nj e
Za poentu Zenonovih argumenata protiv postojanja mnoštva nije važno da li se deljenje kojim se dolazi do delova kao elemenata mnoštva shvati kao sečenje ili samo kao „deljenje u mislima", važno je jedino da se, po pretpostavci, delovi deobom otkrivaju a ne stvaraju 158
g) B e s k o n a č n o s t
U Zenonovom pobijanju pluralističke hipoteze ἄπειρον se može odnositi na neodređenost mnoštva (u vezi s neodređenošću jedinice), beskonačnost delova po broju, neizmernost tela u pogledu veličine, beskonačnost procesa deljenja i beskonačnost procesa dodavanja (u aporiji mesta) 159
h) H o m o g e n o s t
Dokazi protiv mogućnosti postojanja mnoštva su tako konstruisani da njihova poenta eventualno biva ugrožena tek ako se pretpostavi da delovi, da bi bili delovi, moraju biti međusobno kvalitativno izdiferencirani 163
i) K o n t i n u i t e t
Mada se o deljivosti kontinuuma najčešće govori u hipotetičkom smislu, na nekim mestima je teško ne priznati da se Zenon o njoj izjašnjava kategorički 164
j) J e d n o
Antički komentatori razlikuju pravo jedno (κυρίως ἕν) i navodne jedinice koje upravo na osnovu Zenonovih dokaza treba da budu odbačene kao jedinice; nije sasvim sigurno da Zenon ne dovodi u pitanje i Parmenidovo Jedno, iako komentatori tvrde da on to ne čini 165

k) B i ć e
Τὰ ὄντα iz pluralističke hipoteze koja se pobija telesna su bića, s veličinom i debljinom (i masom), i, eventualno, u pobijanju drugog roga dileme, tačke bez ikakve veličine 167

36. Struktrura i poenta Zenonovih dokaza protiv mnoštva
Zenonovi dokazi iz *DK* 29 B 1-3 izvode *reductio ad absurdum* pluralističke hipoteze, hipoteze da postoji mnoštvo bića; ovi dokazi se mogu podeliti u dve grupe: one u kojima je ἄπειρον neohodno prevoditi sa „beskonačno“ i one u kojima ga je dovoljno prevoditi sa „neodređeno“; da bi pobijanje pluralističke hipoteze predstavljalo ujedno i afirmaciju monističke, neohodno je koristiti u ovom slučaju princip *tertium non datur*, a nije sasvim izvesno da je to Zenon činio 170

37. Zenonovi dokazi protiv mnoštva na filozofskoj sceni
Poređenje nezavisno izvedenih rekonstrukcija, s jedne strane Zenonovih dokaza protiv postojanja mnoštva, s druge strane njima prethodećih učenja, ukazuje da su se ovi Zenonovi dokazi mogli upotrebiti za pobijanje učenja Pitagorejaca i Anaksagore, ali razlozi za takvo uverenje nisu oni koji se uobičajeno navode 174

38. Zenonove kinematičke aporije
a) D i h o t o m i j a
Prema Aristotelovom tekstu, problem savladavanja beskonačnosti o kojoj je reč u ovoj Zenonovoj aporiji može da se shvati ili kao problem dosegnuća beskonačno mnogo tačaka ili kao problem prelaženja beskonačno mnogo deonica nekog ograničenog puta; beskonačni niz tačaka, ili rastojanja, ne mora se na osnovu Aristotelovog teksta interpretirati kao opadajuća geometrijska progresija, što se inače od vremena Simplikija i Filopona redovno čini, a ako se uzme da geometrijska progresija jeste opadajuća, onda se *Dihotomija* razlikuje od uobičajenih Zenonovih svođenja na apsurd, jer se trkaču ne dozvoljava da krene da bi se tek potom njegovo kretanje pokazalo apsurdnim 181
b) A h i l
Sporiji trkač koga Ahil juri može se iskoristiti da se bilo koji dati položaj učini nedostižnim pošto se mogu varirati početni položaj u trci i brzina sporijeg trkača 184
c) S t r e l a
Nije neophodno prepravljati tekst Bekerovog izdanja Aristotelove *Fizike*, što se uobičajeno čini, da bi se razumela poenta ove aporije: ako strela dok leti treba da ostane onolika kolika je kad miruje, ona se ne može kretati, jer da bi promenila položaj ona mora zauzimati prostor koji je veći od nje (kad miruje) a da se, u isto vreme, bivanje u tom prostoru ne može razložiti u niz stanja u kojima strela zauzima prostor koji joj je jednak 185
d) S t a d i o n
Nije potrebna nikakva rekonstrukcija ove aporije, poput takozvane francuske interpretacije, da bi poenta bila značajna: *Stadion* pokazuje nejednoznačnost dužina prostornih i vremenskih intervala u izvesnim kinematičkim uslovima uprkos pretpostavljenoj fiksiranosti jedinice mere 191

39. Dokazi protiv mnoštva i kinematičke aporije
Uz sve međuspbne sličnosti, kinematičke aporije su u jednom važnom pogledu elementarnije od dokaza protiv postojanja mnoštva i dovode nas u veće teškoće: prvi korak u destrukciji sveta u kojem živimo predstavlja „ukidanje“ kretanja, a ono je u kinematičkim aporijama „operativno“, utoliko naime što učesnici u zbivanjima samim činom „proizvode“

paradoksalne efekte; za teškoće koje stvaraju kinematičke aporije dovoljan nam je „slabiji" pojam beskonačnosti, beskonačnost u dinamičkom smislu 201

40. *Opšti rezultat Zenonove negativne dijalektike*

Ako prihvatimo pretpostavke na kojima počivaju Zenonovi dokazi protiv mogućnosti postojanja mnoštva i kretanja, moramo prihvatiti i zaključke 204

41. *Reakcije koje prihvataju opšti rezultat negativne dijalektike*

Prihvatiti Zenonove zaključke i zatim se, poput Antistena, prošetati i uveriti se da kretanja ipak ima, dovelo bi nas u jednu tertulijansku situaciju: *credo quia absurdum est*; skeptik koji prihvata Zenonove zaključke interpretira rezultat strogo *ad hominem*: on lično s obzirom na ponuđene dokaze ne vidi kako bi mnoštvo i kretanje bili mogući; retoričar prihvata dokaze da bi zbunjivao druge; ontološki nihilista, kao što je Gorgija, radikalizuje zaključke do tvrdnje da ništa ne postoji; Bredli čitav šaroliki svet promene proglašava prividom iza kojeg se krije „prava" stvarnost 205

42. *Teškoće odgovora koji prihvataju rezultat negativne dijalektike*

Credo quia absurdum est je antifilozofsko geslo; skeptik je pošten ali nezadovoljan; pozicija retoričara ne odgovara onome ko je i sam zbunjen; iza ontološkog nihiliste krije se retoričar; proglasiti pak prividnim nešto za šta smo bili uvereni da je stvarno a ne objasniti kako taj privid nastaje ne zadovoljava nas ni načelno, a naročito ne u onim slučajevima – kao što je ovaj kojim se bavimo – gde je postuliranje nedokučive „prave" stvarnosti izazvano upravo našom nemoći da im*anentno rešimo teško*će u koje smo zapali 208

B. ATOMIZAM

43. *Elejci i rani atomizam*

Leukipov i Demokritov odgovor Elejcima prvi je u seriji odgovora koji ne dovode u pitanje opštu hipotezu o postojanju mnoštva i kretanja, već neku od specijalnih premisa neophodnih za Zenonov zaključak 212

44. *Paradoks predikacije i prihvatanje postojanja kvalitativnih razlika*

Stvari koje su iste s obzirom na neko obeležje mogu se razlikovati s obzirom na neko drugo obeležje, bivajući tako i iste i različite: praznina je „nebiće" kao „nešto drugo" – kao nešto što se razlikuje od punine – ali i ona postoji 213

45. *Dokaz protiv mogućnosti beskonačne deljivosti*

Zenon u dokazima protiv postojanja mnoštva nije dokazivao da atoma nema već je pod pretpostavkom da je deljenje dopušteno *a priori* isključivao njihovo postojanje; atomisti su Zenonovu argumentaciju koristili kao apagoški dokaz za postojanje atoma, spasavajući tako mogućnost postojanja mnoštva 215

46. *U kom smislu i zbog čega su atomi nedeljivi?*

Atomi moraju postojati iz razloga koje nam pruža Zenonova dijalektika (§ 45), a nedeljivi su po obeležju neprodornosti, dakle, fizički; sićušnost atoma nije uzrok njihove nedeljivosti ali omogućava da se objasni zašto se u iskustvu ne srećemo s njima; sa stanovišta realnosti geometrijska tačka gledišta je sekundarna u odnosu na fizičku i zato se može reći da su atomi, budući fizički nedeljivi, u stvari najmanje veličine 216

47. *Teškoće fizičkog atomizma*
Nije glavni problem fizičkog atomizma u definicionalnom *fiat* kojim je ograničena deoba, već u tome što praznina nije kvantizovana, pa nema odgovora ni na *staccato* ni na *legato* verziju *Ahila* 223

48. *Rana rasprava o osnovama geometrije i nastanak geometrijskog atomizma*
Moguće je da je Platon, shvatajući tačke, linije, površine i tela kao nuladimenzionalne, odnosno jednodimenzionalne, odnosno dvodimenzionalne, odnosno trodimenzionalne entitete, samo tvrdio da je kontinuitet matematičkih rodova takav da se sadržanost viših rodova u nižim, zbog manjka bar jedne dimenzije, ne može shvatiti preko pojma konstituisanja: svi rodovi su nešto *sui generis*; no moguće je da je u cilju ostvarenja kontinuiteta među matematičkim rodovima on, bar jedno vreme, zagovarao učenje o nedeljivim, minimalnim linijama, odnosno površinama, mada je moguće, isto tako, da je to činio tek Ksenokrat 225

49. *Kvantizacija prostora i vremena*
Uprkos peripatetičkoj kritici učenja o nedeljivim linijama, Epikur je uveo prostorna i vremenska *minima*, dovršavajući time ono što su rani atomisti započeli kvantizujući puninu; time se rešavaju i neke teškoće iz domena kinematičke aporetike 231

50. *Teškoće geometrijskog atomizma*
Pored raznih drugih teškoća geometrijskog atomizma, najgore je to što je moguć *reductio ad absurdum* tvrdnje o postojanju epikurejskih *topona* i *hronona* pomoću takozvane francuske interpretacije *Stadiona* 237

51. *Kinematički atomizam*
Kinematički atomizam je učenje u kojem se prihvata nužnost postojanja nedeljivih, ili bar aktualno neizdeljenih, vremenskih intervala bez tome analognog uvođenja prostornih, ili bar fizičkih, atoma 241

52. *Teškoće kinematičkog atomizma*
Glavna nevolja kinematičkog atomizma koji govori o nedeljivim vremenskim intervalima je u tome što je moguć *reductio ad absurdum* tvrdnje o postojanju *hronona* uprkos neprihvatanju postojanja *topona*; verzija kinematičkog atomizma u kojoj bi se zagovarala nužnost postojanja najkraće aktualno nepodeljene faze neke određene promene, bez obzira što vreme te faze ne mora inače biti nedeljivo, ne predupređuje, pak, mogućnost konstrukcije *staccato* verzije *Ahila* 243

C. FINITIZAM

53. *Negativno i pozitivno određenje finitizma*
Negativno određeno, finitisti su svi oni koji su antiinfinitisti, naime, svi oni koji tvrde da se smisleno ne može reći, ili barem da se ne može istinito reći, da se nešto što je ograničeno poput kamena, puta ili vremenskog intervala sastoji iz beskonačno mnogo delova, odnosno faza; pozitivnu tezu finitizma, odnosno finitizam u užem smislu, izložićemo u § 57 246

54. *Jezičko-logički razlozi protiv infinitizma*
Analizom pojmova dela i celine utvrđuje se da je infinitistička teza analitički neistinita 247

55. *Logičko-matematički argumenti protiv statičkog infinitizma*
Infinitista svoju tezu može formulisati uvodeći nove reči i redefinišući relevantne pojmove; pokazuje se,

međutim, da je bar pod standardnim matematičkim pretpostavkama moguć *reductio ad absurdum* teze statičkog infinitizma 249

56. *Logičko-matematički argumenti protiv dinamičkog infinitizma*

Prateći sporenja savremenih infinitista i antiinfinista na primerima rada mašina iz § 23, pokazuje se da je pod standardnim matematičkim pretpostavkama moguć *reductio ad absurdum* i teze dinamičkog infinitizma: nemoguće je obaviti beskonačno mnogo sukcesivnih diskretnih akata 255

57. *Pozitivna teza finitizma*

Savremeni finitisti se koriste Fregeovom i Gičovom analizom iskaza o identitetu da bi utvrdili kako tek upotreba neke zajedničke imenice (*count noun*), zahvaljujući kojoj deo postaje deo određene vrste, omogućava brojanje delova; s obzirom na bilo koji tako određeni deo, ograničeni predmet je konačan 265

58. *Finitističko rešenje kinematičkih aporija*

Kao što staza kojom Ahil trči sadrži konačno mnogo kamenčića, grumena zemlje ili travki, tako će i Ahil u konačnom broju koraka stići kornjaču i, uopšte, sve ono što će Ahil učiniti ograničeno je po broju; bez obzira na koji način identifikujemo vremenske intervale, strela u tim intervalima zaista zauzima prostor koji je veći od nje, a smisao u kojem govorimo o zauzimanju prostora u trenutku – derivativan je 268

59. *Teškoće finitizma*

Identifikovanje deonica koje Zevs broji u *legato* verziji *Ahila* dovoljno je dobro određeno s obzirom na finitističke zahteve a da pri tom finitista ne može da odgovori na pitanje o broju tako izbrojanih deonica po Ahilovom i Zevsovom prispeću na cilj; sam dokaz nemogućnosti izvršenja beskonačno mnogo akata ne pomaže nam da odgovorimo na to pitanje 273

D. RADIKALNI EMPIRIZAM

60. *Iskustvo i zahtev za beskonačnom deljivošću*

Raznobojna prostranstva iz § 19 kroz koja Ahil trči smanjuju se do reda veličina koje su za nas i našu fiziku ništavne; u *staccato* verziji iz § 20 od Ahila se traži da se „odmara", sve kraće i kraće, pošto „prevali" put kroz svako od takvih prostranstava, a u *legato* verziji iz § 21 Zevsov perceptivni prag mora neograničeno da se snižava; brzina rada mašina iz § 23, koje treba da obavljaju super-zadatke, i načelno je nezamislivo velika iz perspektive konstruktora koji bi trebalo da ih napravi stvarno a ne samo u mislima; da li su teškoće sadržane u zahtevu za beskonačnom deljivošću „puke tehničke" teškoće? 276

61. *Subjektivni idealizam*

Barkli, najradikalniji među radikalnim empiričarima, oslobodio se problema vezanih za beskonačnu deljivost ustanovivši da postoje konačno velika perceptivna *minima* a da u isto vreme *esse est percipii*: predmet, staza ili trka gube svoj identitet ako se deoba nastavi preko određene tačke; psihologija percepcije spasava Barklijevo stanovište od svođenja na apsurd pomoću neke od francuskih varijanti *Stadiona* 278

62. *Teškoće subjektivno-idealističkog rešenja*

Barklijevo rešenje nas ne zadovoljava iz sličnih razloga iz kojih nas nije zadovoljilo Bredlijevo (§ 42): teškoća se oslobađamo tako što prosto ukidamo identitet, odnosno oduzimamo realitet onome za šta su teškoće prvobitno bile vezane a u postojanje čega smo prethodno verovali i o čemu i dalje uspešno govorimo u ostalim slučajevima 283

63. *Pozivanje na običan jezik i naučni empirizam*
Možda na osnovu beskonačne deljivosti prostora ne bismo smeli da zaključimo da su i tela beskonačno deljiva, jer se deljivost prostora zasniva na izvesnom matematičkom shematizmu; kako običan tako i naučni jezik pokazuju „ograničenja skale primene reči", tako da se, recimo, ne može opravdano govoriti o „skoku od jedne hiljaditine inča" ili o „šarenom prostoru veličine jednog bilionitog dela čiode": naši zahtevi u formulaciji aporija prekoračuju granice empirijski opravdane upotrebe reči 286

64. *Teškoće u pozivanju na običan jezik i naučni empirizam*
Manevrom radikalnog empiričara mogućnost beskonačne deobe je samo dovedena u pitanje, pošto postojanje ograničenja na skali primene nekih termina ne dokazuje da ona moraju uvek postojati: radikalni empiričar u najboljem slučaju govori o nečemu što je verovatno i što bi *de facto* ukinulo naše teškoće; mi se, međutim, pitamo o nečemu što možda nije verovatno, ali što kao moguće zahteva drugačiji odgovor 294

E. INDEFINITIZAM

65. *Neograničena brojnost mogućih i ograničenost broja stvarnih delova celine*
Indefinitizam je opšti naziv za svako stanovište po kojem zenonovskih teškoća treba da se oslobodimo tako što ćemo tvrditi da iako nema najvećeg mogućeg broja delova ili faza neke celine, njihov broj ipak mora biti konačan. 299

66. *Primarna značenja, načini postojanja i aporija celine i delova*
Iako je ukazivanje na πολλαχῶς λεγόμενα smatrao nužnim preduslovom za rešavanje elejskih aporija, Aristotel to nije smatrao i dovoljnim za njihovo rešenje; o postojanju, jedinstvenosti i mnoštvenosti zaista se govori na višestruk način, ali je jedno značenje primarno; zavisno od toga da li je reč o homogenim ili heterogenim, kontinualno ili kontigualno spojenim stvarima, moramo, imajući u vidu primarna značenja, prednost davati čas jedinstvenosti čas mnoštvenosti 300

67. *Neodređenost i potencijalna beskonačnost*
Stvar koja je u supstancijalnom smislu jedinstvena može u tom smislu u isto vreme biti mnoštvena samo potencijalno; razlikujući ono što će kasnije biti nazvano beskonačnošću u sinkategorematskom smislu od onoga što će se zvati beskonačnošću u kategorematskom smislu, Aristotel dokazuje da nikakvom deobom ne bismo mogli namesto jedne dobiti beskonačno mnogo supstancija: beskonačnost je nužno, a ne samo akcidentalno potencijalna 309

68. *Način postojanja geometrijskih objekata*
Geometrijski objekti postoje samo kao granice geometrijskih objekata viših dimenzija, odnosno, u krajnjoj liniji, tela; u definiciji tela kao supstancije može se pominjati ili bar implicirati oblik tela jer je telo ograničeno, ali takva definicionalna implikacija ne znači ontološki prioritet oblika, naprotiv, fizička tela imaju ontološku prednost u odnosu na matematičke objekte 314

69. *Prvo indefinitističko rešenje kinematičkih aporija*
Kretanje tela može biti sastavljeno iz delova ili faza, utoliko što put može biti sastavljen iz delova a sâmo kretanje biti diskontinuirano ili nejednoobrazno,

no broj delova ili faza mora biti konačan i to je osnov za rešenje *Dihotomije* i *Ahila*; činjenica da se telo u trenutku, kao granici, niti kreće niti miruje, dok u bilo kojem vremenskom intervalu njegov položaj nije strogo određen s obzirom na tela u odnosu na koja se kreće, predstavlja osnov za rešenje *Strele* i *Stadiona* 317

70. *Nemogućnost beskonačnosti stvarnih i beskonačnost mogućih delova*

Zanimljivost Kantovog indefinitizma je u tome što on, za razliku od Aristotela, nije antiinfinitista u slučaju da je reč o mogućim delovima tela; ne samo što telo uvek možemo podeliti na više delova nego što ih trenutno ima, već je broj mogućih delova (prostora) s kojima se deobom susrećemo beskonačan 322

71. *Kinematički monizam*

Kako se kinematički atomizam odnosi prema fizičkom, odnosno geometrijskom atomizmu, tako se Bergsonov kinematički monizam odnosi prema Kantovom indefinitizmu; dok se prostorne veličine mogu sastojati iz neograničeno mnogo delova, u šta se uveravamo deobom kojom se u načelu na njima ništa ne menja, neprekinuto kretanje je jedinstveno u tom smislu da samim svojim odvijanjem isključuje deobu, pošto bi u slučaju deobe prestalo da bude ono što jeste 327

72. *Operacionalizacija indefinitističke teze*

Iz toga što smo izvršivši neki zadatak izvršili i beskonačno mnogo mogućih zadataka, ne sledi da taj zadatak možemo obaviti tako što bi smo prethodno izvršili beskonačno mnogo zadataka; prema Hintonu i Martinu, *staccato* i *legato* verzija iz §§ 20, 21 bile bi suštinski različite od onoga što se dešava kad Ahil trči: stići na cilj na način kako je u tim verzijama zahtevano nemoguće je, dok je Ahilu stići na cilj vrlo jednostavno 330

73. *Status beskonačnosti i ograničenje važenja principa isključenja trećeg u intuicionističkoj matematici*

Ako je, iz razloga koje navode indefinitisti, i matematička beskonačnost samo potencijalna i ako je treba tretirati samo na dinamički način, onda, kad domeni nisu konačni, treba ograničiti i korišćenje principa isključenja trećeg na slučajeve u kojima je zakon nastajanja beskonačnosti takav da to dopušta 333

74. *Intuicionistička definicija realnog broja*

Zbog ograničenja važenja principa isključenja trećeg, moguće je da ima suštinski nerešivih matematičkih problema, koji omogućuju da se pogodnim izborom takozvanog letećeg svojstva konstruišu nizovi koji bi u klasičnoj matematici bili smatrani generatorima realnog broja, a koji više ne određuju jedinstven broj; neophodno je razlikovati jednakost od koincidiranja i odeljenost od nejednakosti i preispitati definicije osobina uređenosti, diskretnosti, gustoće, odvojivosti u sebi, zavisnosti i kompaktnosti, koje su klasično važile za skup realnih brojeva 341

75. *Shvatanje kontinuuma u intuicionističkoj matematici*

Čitav niz sličnosti između filozofskih indefinitističkih teorija i ne samo filozofskih osnova već i mnogih posledica u razvijenoj intuicionističkoj matematici najvidljiviji je u teoriji kontinuuma koji je, intuitivno, medijum slobodnog nastajanja elemenata kojih je on, formalno, definišuće svojstvo, a čiji je poredak samo virtualan 348

76. *Teškoće indefinitizma*

Uz svu iznijansiranost i razrađenost indefinitističkih ideja, nismo dobili odgovor na pitanje o broju Ahilovih zaustavljnja iz *staccato* verzije i izbrojanih deonica iz *legato* verzije, a da nam, u isto vreme, nije pokazano šta eventualno s pitanjem nije u redu; osim toga, Aristotelov dokaz da se neprekinutim kretanjem konačni put mora preći u konačnom vremenu pogrešan je, što pokazuje slučaj usporavajućeg trkača iz § 22; najzad, ima teškoća i u oblasti nekinematičke aporetike koje indefinitisti ne rešavaju: korespondiranjem zgodno izabranog prirodnog zakona nekom matematičkom zakonu beskonačnog nastajanja uvodimo u igru skup tačaka ili intervala koji je aktualno beskonačan 359

F. INFINITIZAM

77. *Dve varijante infinitizma*

Infinitizam je opšti naziv za svako stanovništve po kojem se u pojedinim ili svim spornim slučajevima dopušta aktualnost beskonačnosti u kategorematskom smislu; razne infinističke teze biće grupisane i odvojeno razmatrane prema tome da li sadrže ili ne sadrže pojam neke vrste infinitezimala 363

I. Infinitizam sa infinitezimalama

78. *Antiinfinitistički karakter grčke matematike i potreba za infinitezimalama*

U geometriji postplatonskog doba razvijena je čisto geometrijska teorija proporcije, kojom se prevazilaze teškoće u koje je posle otkrića nesamerljivosti zapala stara aritmetizovana geometrija; grčki metod koji će tek mnogo kasnije biti nazvan metodom ekshaustije, a koji je nastao na temelju čisto geometrijske teorije proporcije, dosledno je finitistički, dok su mu osnovne ontološke pretpostavke indefinitističke, a da bi se doslovno moglo govoriti o iscrpenosti neke oblasti upisanim figurama koje joj se kao granici neograničeno približavaju, bilo je potrebno uvesti u igru infinitezimale 364

79. *Arhimedov aksiom i heuristička upotreba infinitezimala*

U grčkoj matematici je bilo važno to što su svake dve veličine bile uporedive utoliko što se izvesnim konačnim umnoškom manje veća mogla dosegnuti ili nadmašiti; uprkos tome što je to važilo kao aksiom, koji danas nosi njegovo ime, Arhimed je u heurističke svrhe, iako ne u svrhe strogog dokazivanja, površine tretirao kao sastavljene iz linija, pa su kasnije hrišćanski matematičari, prijemčiviji na pojam beskonačnosti, zaključili da su te linije infinitezimalni elementi 371

80. *Infinitezimale kao sastavni deo dokaznog postupka*

Vremenom su infinitezimale postale nezamenljive u izvesnim dokaznim postupcima 375

81. *Geometrijske infinitezimale*

Geometrijski entiteti čija je veličina takva da je sa uobičajenim ograničenim geometrijskim veličinama neuporediva u konačnom broju koraka mogu, kao „beskonačno mali“, igrati ulogu tradicionalnih tačaka, linija i površina a da u isto vreme budu konstituenti entiteta viših dimenzija i da, osim toga, omoguće premošćenje „jaza“ između pravog i krivog; no učenje o geometrijskim infinitezimalama podleže imanentnoj kritici sa stanovišta samog infinitezimalnog metoda, a za „uspešno“ premošćenje „jaza“, ako se „ekshaustija“ shvati doslovno, potrebno je napraviti takozvanu Bernulijevu grešku 387

82. *Jezičke igre i aritmetičke infinitezimale*

Da bi negativni, iracionalni ili imaginarni brojevi prestali da budu *numeri falsi, numeri surdi* ili *numeri ficti*, potrebno je zaigrati nove jezičke igre, drugačije od onih koje se igraju prirodnim brojevima, a to isto važi i za Valisov broj ∞ i njemu odgovarajuću infinitezimalu 1/∞; koherentna teorija beskonačnih prirodnih brojeva, odnosno infinitezimala, biće razvijena tek u savremenoj nestandardnoj analizi (§ 86) 393

83. *Kinematičke infinitezimale*

Kako se kinematički atomizam odnosi prema geometrijskom, tako se teorija kinematičkih infinitezimala odnosi prema teoriji geometrijskih infinitezimala; izbegavajući teškoće teorije fluksije koja je trebalo da sadrži samo kinematičke infinitezimale, Njutn je vremenom počeo da se *de facto* koristi alternativnom teorijom, što će kasnije dovesti do utemeljenja infinitezimalnog računa zasnovanog na pojmu granične vrednosti (§ 91) 399

84. *Statičko i dinamičko shvatanje infinitezimala*

Statičke infinitezimale su sve određene veličine – aritmetičke, geometrijske, vremenske ili kinematičke – koje su, po definiciji, manje od svih uobičajenih konačnih veličina; dinamičke infinitezimale su promenljive veličine bilo koje vrste koje, postajući sve manje, bivaju manje od bilo koje fiksirane konačne veličine; dinamičkim shvatanjem infinitezimala infinitizam se potiskuje, jer se beskonačnost koja se tu javlja može interpretirati indefinitistički 410

85. *Statički shvaćene infinitezimale kao korisne fikcije*

Uviđajući sve teškoće vezane za statičko shvatanje infinitezimala, Lajbnic je na kraju napustio filozofski infinitizam, ali je statički shvaćene infinitezimale zadržao u *calculusu* kao „korisne fikcije" 416

86. *Statičke infinitezimale u savremenoj nestandardnoj matematičkoj analizi*

Sredstva razvijene matematičke logike, naročito teorija tipova, teorija modela i teorema kompaktnosti, omogućila su Abrahamu Robinsonu da sa lakoćom proširi model N standardne aritmetike do strukture $^*N$ koja sadrži beskonačne prirodne brojeve, kao i polje R standardnih realnih brojeva do polja $^*R$ koje sadrži i infinitezimale i gde je Arhimedov aksiom, iako formalno sačuvan, negiran s obzirom na svoje intendirano značenje; infinitezimale iz $^*R$ imaju sve osobine koje su Lajbnicu u njegovom prvobitnom zasnivanju *calculusa* bile potrebne, a monade se mogu definisati kao skupovi realnih brojeva-tačaka koji su beskonačno blizu nekom broju-tački 419

87. *Teorije infinitezimala i Zenonovi dokazi protiv mnoštva*

Sudbina Zenonovog aksioma u nestandardnoj analizi suprotna je, u izvesnom smislu, sudbini Arhimedovog: iako formalno negiran, on je u relevantnom smislu sačuvan, jer su, s jedne strane, standardne tačke „razdvojene" nestandardnim, a, s druge strane, nestandardne nisu samostalne na način na koji standardne jesu da bi kao „gotovi elementi" učestvovale u konstituisanju entiteta viših dimenzija; potrebe samog infinitezimalnog metoda dovele su do uviđanja da infinitezimale ne smeju biti nedeljive i utoliko one nisu tretirane kao κυρίως ἕν, ali je zato u nestandardnoj analizi monada kao klasa ekvivalencije dovoljno dobro određeno κυρίως ἕν; najveći problemi vezani su za Zenonov argument protiv mnoštva kojim se ograničeni predmet pokazuje kao necelovit, jer se stara formula po kojoj bi konačno rastojanje trebalo da bude konstituisano iz beskonačno mnogo beskonačno manjih može u najboljem slučaju spasti kao „kompenzirajuća fikcija" 432

88. *Teorije infinitezimala i kinematičke aporije*

Teorije infinitezimala potpuno su nemoćne pred glavnom kinematičkom aporijom, pošto se operacionalizovani problem pred kojim se, recimo, nalazi

Zevs u *legato* verziji, ne može pomeriti na neki niži nivo, jer ni članova niza deonica s konačnim indeksima nije konačno mnogo 439

89. *Glavne teškoće s kojima se sreće teorija infinitezimala*
Priznajući da nijedna dosad razmatrana teorija nije bila toliko „samokritična“, ujedno se uveravamo kako se matematičari uspešno mogu nositi s mnogim teškoćama koje se javljaju u njihovoj praksi i onda kad ta praksa nije filozofski utemeljena 441

II. Infinitizam bez infinitezimala

90. *Dve teze infinitizma bez infinitezimala*
Topološka infinitistička teza predstavlja otvorenu negaciju Zenonovog aksioma, dok se metričkom infinitističkom tezom negira Zenonov zaključak da se konačno rastojanje ni u kojem smislu ne može konstituisati iz beskonačno mnogo manjih, samo su u infinitizmu bez infinitezimala sva podrastojanja konačna 444

91. *Indefinitistička definicija izvoda i integrala i teškoće oko kontinuiteta, diferencijabilnosti i konvergencije*
Košijeva definicija izvoda je indefinitistička, ona sadrži dinamički shvaćene infinitezimale i dinamički pojam teženja, koji se danas infinitistički mogu izbeći prevođenjem na „statički“ jezik pomoću takozvane ε,δ-tehnike; teškoće indefinitističkog tumačenja činjenice da ima funkcija prekidnih u jednoj tački ili nediferencijabilnih funkcija, koje je definisao Vajerštras, kao i problemi vezani za uslove koji bi, u nekim slučajevima, opravdavali tvrdnju o postojanju ili nepostojanju jedinstvene granice nekog Košijevog niza, mogu ići u prilog infinitističkom redefinisanju osnovnih pojmova matematičke analize koje su izveli Vajerštras, Dedekind i Kantor 446

92. *Infinitistička definicija iracionalnog broja, Dedekindov presek i Dedekind-Kantorov aksiom*
Nasuprot starom geometrijskom rešenju problema nesamerljivosti u kojem se o iracionalnom broju kao broju više ne govori, Vajerštras je definisao iracionalni broj čisto aritmetički, kao beskonačno složeni broj; u Dedekindovoj definiciji iracionalni broj je jedinstveni razgraničavač dva aktualno beskonačna skupa brojeva; aksiomom koji nosi Dedekindovo i Kantorovo ime obostrano jednoznačno se korespondiraju elementi skupa svih racionalnih realnih i iracionalnih, transcendentnih realnih brojeva tačkama prave 454

93. *Prostor kao skup tačaka*
Na osnovu izvesnih rezultata, koji se ovde razmatraju, Kantor je, negirajući Zenonov aksiom, ne samo linearni kontinuum već i čitav višedimenzionalni prostor definisao kao savršen, svuda gust skup nuladimenzionalnih entiteta kardinalnosti $2^{\aleph_0}$ 461

94. *Kantorov kontinuum kao skup tačaka i Zenonov aksiom*
Ono topološko ispitivanje odnosa tačke i linije, linije i površine i površine i tela koje se osniva na Kantorovoj teoriji skupova tiče se samo međusobnog odnosa tih entiteta s obzirom na mogućnost razgraničenja delova; topološki definisan pojam dimenzije nezavisan je od pojma oblika, a u topološkim preslikavanjima irelevantno je pitanje očuvanja oblika 469

95. *Topološka infinitistička teza i jedna indefinitistička reinterpretacija Kantorove definicije realnog broja*
Zahvaljujući tome što u Kantorovoj definiciji realnih brojeva racionalni brojevi iz nizova kojima su definisani realni sami još nisu realni, moguće je indefinitistički reinterpretirati Kantorovu definiciju i

to iskoristiti kao neutralno polazište u razmatranju dubljih sporenja između infinitista i indefinitista, odnosno klasičara i intuicionista u matematici 472

96. *Teškoće topološke infinitističke teze i rezultati koji se mogu indefinitistički reinterpretirati*

Razmatrajući izvesne teškoće topološke infinitističke teze, otkrivamo da sporenje indefinitista i infinitista do izvesne tačke nema značajne posledice, donde naime dok se infinitistički rezultati mogu indefinitistički reinterpretirati 481

97. *Teškoće topološke infinitističke teze i neprevodivi infinitistički rezultati*

Ima infinitističkih matematičkih rezultata koji se ne mogu indefinitistički reinterpretirati; karakterističan primer predstavlja Kantorov ternarni skup – diskontinuum 486

98. *Metrička infinitistička teza*

Metričkom infinitističkom tezom se tvrdi da se jedan konačan nedegenerisan interval može sastojati iz beskonačno mnogo konačnih nedegenerisanih intervala koji se ne preklapaju; inače, s obzirom da interval konačan s obzirom na jedno metričko pravilo može izborom drukčijeg metričkog pravila postati beskonačan, prostor je metrički amorfan 489

99. *Teškoće metričke infinitističke teze*

Ako se shvati doslovno, metrička infinitistička teza podložna je svođenju na apsurd, s čim smo se već sreli u § 55 492

100. *Kinematička infinitistička teza*

Kinematička infinitistička teza je, nasuprot samo dinamičkom shvatanju beskonačnosti, teza dinamičkog infinitizma: beskonačnost je moguće savladati korak po korak 495

101. *Teškoće kinematičke infinitističke teze*

Teškoće kinematičke infinitističke teze opširno su izložene u § 56, a ovde samo upoređujemo izvesne kinematičke uslove koji, prema Grinbaumu, čine nemogućim izvršenje super-zadatka Tomsonove lampe sa sličnim uslovima koji izvršenje super-zadatka dve druge mašine, Blekove „Bete" i „Game" iz § 23, čine navodno mogućim, da bismo, prateći rezonovanje samih infinitista, još bolje sagledali koliko su čudni spoljašnji uslovi pod kojima se primenjuje definicija okončanog beskonačnog procesa kao serije diskretnih akata bez poslednjeg člana 498

G. POZITIVNA DIJALEKTIKA

102. *Ograničenje važenja principa neprotivrečnosti*

Bliže ispitivanje Hegelovog pojma prevazilaženja otkriva nam specifično ograničenje važenja principa neprotivrečnosti: dok teorema kompaktnosti dozvoljava da se na osnovu neprotivrečnosti svih konačnih podskupova rečenica nekog sistema zaključi da je ceo sistem, makar bio i beskonačan, neprotivrečan, Hegel, obrnuto, jemstvo razrešenja protivrečnosti bilo kojeg dela sistema traži u neprotivrečnosti celog sistema i, *a fortiori*, tvrdi da svaki pravi deo sistema nužno sadrži u sebi neku protivrečnost ako se izoluje; uvek moramo navesti bar onoliko odredaba koliko je neophodno da bismo bez protivrečnosti razlikovali ono što treba razlikovati 500

103. *Pozitivno-dijalektički odgovor na dokaze protiv mnoštva i kinematičke aporije*

Opšte ograničenje važenja principa neprotivrečnosti zahteva da se niz odredaba koje Zenonu omogućuju da izvrši *reductio ad absurdum* proširi da bi se protivrečje prevazišlo; Hegelovo se rešenje, posle takvog proširenja, ispostavlja kao pozitivno finitističko (§ 58) 506

104. Teškoće prozitivno-dijalektičkog rešenja

Pokazuje se kako se pomoću jednog prostog pravila svako od Hegelovih transcendirajućih razrešenja protivrečnosti može imanentistički reinterpretirati uz zadržavanje neograničene opštosti principa neprotivrečnosti; tako najlakše uviđamo da Hegelovo rešenje ne daje nikakav odgovor na pitanje o broju deonica koje je Zevs izbrojao stigavši na cilj 509

ISHOD

105. Jesu li svi poraženi?

Unekoliko su svi učesnici Gigantomahije poraženi, utoliko, naime, što smo pronašli slabu tačku u svakom od odgovora na, bar neku, zenonovsku aporiju 515

106. Sasvim nova strategija: nesaodrživost premisa spornog zaključka

Poučeni iskustvom Gigantomahije i uvereni u mogućnost da premise neprihvatljivih zaključaka *staccato* i *legato* verzije Ahila iz §§ 20 i 21 budu istinite, opredeljujemo se za sasvim novu strategiju: ako je svaka od premisa neosporiva kao moguća, kontingentno istinita hipoteza, ne znači da premise u spornim zaključcima mogu zajedno biti istinite 518

107. Nesaodrživost iskaza u logičkim sistemima s relevantnom implikacijom i intenzionalnom konjunkcijom

Ako bismo formalno želeli da izrazimo rešenje *staccato* i *legato* verzije *Ahila* do kojeg smo došli na osnovu lošeg iskustva učesnika Gigantomahije, morali bismo se poslužiti logičkim sistemima s relevantnom implikacijom i intenzionalnom konjunkcijom, jer relevantna implikacija nije svodiva na materijalnu ili striktnu, a samo je u sistemima s relevantnom implikacijom moguće reći da se dodavanjem nove hipoteze (da su Ahil ili Ahil i Zevs stigli na cilj) onemogućava izvođenje zaključaka koji bi sledili na osnovu prethodnih hipoteza, utoliko što nova hipoteza može relevantno protivrečiti prethodnim, odnosno biti nesaodrživa s njima 521

108. Rešenje glavne teškoće i novi pogled na Gigantomahiju

Usvajanje pretpostavke o nesaodrživosti premisa spornih zaključaka omogućava nam da sagledamo kako izvor teškoća u pokušajima razmatranim u Gigantomahiji, tako i aspekt njihove eventualne plauzibilnosti, pod određenim uslovima, uz određene specifikacije i reformulacije 524

POSLEDICE

109. Rešenje staccato i legato verzije Ahila kao model za rešavanje ostalih verzija

Ako je Ahil, trčeći najnormalnije, stigao na cilj, to znači da je negde morala biti narušena analogija između načina njegovog kretanja i Zevsovog brojanja deonica puta koje se smanjuju geometrijskom progresijom; to je osnov za rešenje problema vezanih za mašine koje treba da izvrše super-zadatke (§ 23); razlika između trkača iz § 22 koji usporava i Ahila nije u istinitosti ili neistinitosti već u modalnom statusu hipoteza; trkač iz § 22 koji neograničeno ubrzava nalazi se u istoj situaciji kao Ahil koji *staccato* juri kornjaču – s obzirom na transcendentnost trenutka u kojem bi trebalo stići na cilj 535

110. Rešenje Dihotomije

Trojanska muva koja leti napred-nazad između Ahila i kornjače koju on juri morala je prestati da se tako ponaša ako je Ahil stigao kornjaču, a zatim je još izvesno vreme morala da se kreće ili paralelno s Ahilom ili paralelno s kornjačom, ako je Ahil prestigao kornjaču; zahvaljujući tome što nam je bar izvesno „slobodno“, nikakvim merenjem neizdeljeno vreme uvek, nužno na raspolaganju – moguće je pomeriti se 539

111. *Rešenje Ahila i Dihotomije kao model za rešavanje metričkih aporija*

Moguć je *reductio ad absurdum* uverenja da se jedna ograničena oblast može sastojati od beskonačno mnogo heterogenih neinfinitezimalnih delova, a matematičarima se čini da stvar stoji drugačije zbog specifičnog shematizma njihovog načina postupanja 542

112. *Rešenje metričkih aporija kao osnov za određivanje broja tačaka nekog prostora*

Ako se tačke shvate kao granice heterogenih delova linije, odnosno površine, odnosno, u krajnjoj liniji, tela, onda ih na ograničenom prostoru mora biti konačno mnogo, a koliko ih je tačno na određenom prostoru – empirijsko je pitanje; za beskonačno mnogo geometrijskih tačaka na ograničenom prostoru nema dovoljno mesta iako su geometrijske tačke tačke bez veličine 552

113. *Rešenje topoloških aporija i razlika između fizičkog i klasičnog matematičkog prostora*

Praveći korak *ab posse ad esse* matematičari sve moguće tačke tretiraju kao realne i tako matematički prostor postaje polje mogućih deoba; no, matematički prostor ne samo što nije realan, već nije moguć ni u smislu potencijalnosti jednovremene aktualizacije beskonačno mnogo tačaka 554

114. *Rešenje „Strele“ na osnovu rešenja topoloških aporija*

Budući da je beskonačno mnogo trenutaka nemoguće aktualizovati u ograničenom vremenu, kretati se pre svega znači zauzimati prostor veći od sebe, a tek se u izvedenom, matematičkom smislu može reći da kretati se kontinuirano znači biti u različitim trenucima u različitim položajima 562

115. *Rešenje „Strele“ i Hajzenbergove relacije neodređenosti*

Slučajevi iz kvantne mehanike na kojima se interpretiraju Hajzenbergove relacije neodređenosti ujedno predstavljaju ilustraciju suštinske neodređenosti položaja tela u kretanju 566

116. *Neodređenost položaja tela u kretanju i Borov princip komplementarnosti*

S obzirom na takozvanu kopenhagenšku interpretaciju kvantne mehanike; i talasno-čestični dualizam i svi drugi oblici komplementarnosti moraju se razumeti na osnovu prethodnog rešenja *Strele*: izbor eksperimentalne situacije vodi ispoljavanju inkompatibilnih a komplementarnih aspekata fenomena zbog toga što se kretanje tela fizički ne može svesti na skup različitih stanja; u okolnostima koje su holističke, to jest u okolnostima u kojima je nemoguće oštro razgraničenje ponašanja atomskih objekata i interakcije s mernim instrumentima koji služe da se definišu uslovi pod kojima se fenomeni pojavljuju, aktualizaciju različitih stanja putem stvaranja različitih konfiguracija prostora *ipso facto* individualizira proces na određen način, isključujući mogućnosti ispoljavanja komplementarnih aspekata 579

117. *Ajnštajn-Podolski-Rouzenov „paradoks“*

Iako Ajnštajn-Podolski-Rouzenov argument protiv navodno nužne nepotpunosti „ortodoksnog“ sistema kvantne mehanike nije valjan, jer kvantno-mehanička situacija koja je opisana u argumentu i koja bi trebalo da bude paradoksalna nije paradoksalna, ipak nam on omogućava da zamislimo situaciju u kojoj bi položaj čestice bio posrdno lokalizovan na više mesta bez promene njenog impulsa; no i tada bi moglo da važi da nijedan mogući položaj između dva stvarna položaja ne bi mogao da bude konstatovan direktnim eksperimentom, ukoliko bi sama realizacija eksperimenta značila realizaciju mogućnosti koja je inkompatibilna sa sledujućim stanjem sistema prema kojem je mogući položaj o kojem je reč izračunat 598

118. Rešenje „Stadiona" na osnovu razlikovanja matematičkog i fizičkog prostora i matematičkog i fizičkog vremena

Ako je kretanje tela kretanje u fizičkom prostoru i ako se sastoji u menjanju odnosa prema fizičkim telima, onda nije čudno što dužina pređenog puta kao mera takve promene ne mora biti ista pri istovremenom menjanju odnosa prema dvama telima uprkos unapred fiksiranoj jedinici mere, a to isto važi i za dužinu vremena tokom kojeg se promena odvijala; nije zbog relativnosti kretanja relativna samo brzina kretanja već to isto važi i za veličinu prostora i za dužinu vremena 610

119. Rešenje „Stadiona" i galilejske transformacije

Poenta *Stadiona* bila je omalovažena u klasičnoj fizici ne samo zato što je u takozvanim galilejskim sistemima lako unutar jednog sistema prevesti kinematičke rezultate dobijene u drugim sistemima, već i zbog invarijantnosti forme mehaničkih zakona u tim sistemima 613

120. Rešenje „Stadiona" i Lorencove transformacije

Neinertno ponašanje svetlosti dovelo je u teškoće galilejsko-njutnovsku mehaniku, ali čak i posle priznavanja Lorencovih negalilejskih transformacija kao adekvatnog matematičkog sredstva za međusistemsko preračunavanje dužina intervala, poenta *Stadiona* nije iskorišćena za kinematičko relativiziranje prostornih i vremenskih intervala, već je specijalnom, Lorenc-Ficdžeraldovom hipotezom modifikacija dužine tumačena kao apsolutno skraćivanje predmeta u pravcu kretanja kroz etar 620

121. Prostor, vreme i prostorvreme

Specijalnorelativističke modifikacije prostornih i vremenskih intervala konačno oživljavaju poentu *Stadiona*: vreme se više ne tretira kao spoljašnji parametar već se prostornim koordinatama pridružuje kao nova koordinata koja varira od mesta do mesta; time događaji postaju osnovni elementi sveta, a vreme postaje lokalno 622

122. „Paradoks" blizanaca

Pokazano je kako iz samog glavnog postulata Specijalne teorije relativiteta sledi da usmerenost kretanja, ne samo svetlosti već i bilo kojeg tela, mora biti šekspirovsko svojstvo, koje je od posmatrača nezavisno; posledica toga je da se na kraju putovanja opisanog u takozvanom Paradoksu blizanaca, gde su se blizanci udaljavali, približavali i na kraju ponovo sreli, mora ispostaviti da se jedan od njih kretao brzinom koja je bila bliža brzini svetlosti od brzine onog drugog, što je konačno i jedino ispravno objašnjenje toga zašto se on ispostavio mlađim; naime, vremenska metrika onoga koji se kretao brže u apsolutnom smislu čini sama po sebi da njegovo vreme teče sporije; u otvorenom ravnom prostorvremenu Minkovskog, tačka obrta u putovanju neophodna je samo zato da bismo mi bili u stanju da ustanovimo koji se od blizanaca kretao brzinom bližom brzini svetlosti, dok ta tačka obrta sama po sebi nije uzrok razlike u starenju, kako se pogrešno tvrdi u nekim poznatim dinamičkim i geometrijskim objašnjenjima; u ravnom ali zatvorenom prostorvremenu isti rezultat će se dobiti i posle putovanja u kojem nije bilo nikakvog usporavanja i ubrzavanja i u kojem nijedan od blizanaca nije menjao referencijalni sistem. 633

123. *Kinematička relativnost oblika*

Analogno pojavi nejednoznačnosti dužina, pod izesnim kinematičkim uslovima možemo otkriti i nejednoznačnost oblika 656

124. *Egzaknta kvadratura kruga i određenje dužine π, problem rektifikacije krivih i narušavanje identiteta geometrijskih objekata u promeni*

Ako zadatak da se izvrši kvadratura kruga postavimo u izvornom obliku, a to znači bez ikakvih kasnije nametnutih, naročitih ograničenja u pogledu dopuštenih sredstava, onda ga možemo izvršiti isto toliko egzaktno koliko egzaktno možemo odrediti tačku na brojnoj osi koja odgovara broju $\sqrt{2}$, a to znači u načelu savršeno tačno; isto važi i za kubaturu lopte i određenje tačke koja odgovara broju π; no, sve to ne znači da jedna kružna geometrijska linija ikada može postati kvadratna, pošto imamo razloga da tvrdimo da se prilikom preoblikovanja narušava identitet geometrijskih objekata o kojima je reč 658

125. *Ontološki status geometrijskih objekata i matematičke definicije kontinuuma*

O matemtičkim sporovima ne treba odlučivati samo na osnovu filozofskih razloga, kao što u filozofskim sporovima ne možemo presuđivati pozivanjem na matematičke definicije; s filozofske strane gledano, imajući u vidu primarni način postojanja tačaka, možemo, uz redefinisan pojam konvergencije iz § 95, prihvatiti da se bilo koja fiksirana tačka na pravoj može predstaviti kantorovskim nizovima racionalnih brojeva, ali odatle ne sledi da se linija sastoji iz tačaka 662

126. *Nerealnost Kantorovog diskontinuuma*

Činjenica da matematičar infinitista ne vodi računa o ontološkom statusu geometrijskih objekata još više pada u oči u onim slučajevima u kojima, kao u Kantorovom diskontinuumu, nesamostalna bića, poput tačaka, u skladu s matematičkim načinom postupanja, postaju samostalna 664

127. *Nerealnost krivih bez tangenti i ostalih znamenitih krivih*

Isto toliko koliko je nerealan Kantorov diskontinuum, nerealne su i krive bez tangenti, kriva koja se sa samom sobom seče u svakoj tački, kriva koja nastaje takvim kretanjem tačke da uspeva da prekrije čitav kvadrat i druge „znamenite krive“; operativno se ontološka razlika između kruga i „znamenitih krivih“ ispoljava u tome što, za razliku od crtanja ostalih krivih u ograničenim intervalima u kojima su znamenite, pri crtanju kruga ne bismo izvršavali *super-zadatak* 666

128. *Matematička pravila igre i asimetrija između statički i dinamički shvaćene beskonačnosti*

Odlikujući se dvojakim i dinamičkim posmatranjem, matematičar, u skladu sa svojim pravilima igre, i ono što je samo dinamički moguće statički ontologizira i zato njegovi objekti liče na „patka-zec“ crteže, poznate iz geštalt-psihologije 676

129. *Kontinuirane i diskontinuirane promene, statički i dinamički shvaćena beskonačnost i Boškovićeva aporija sudara*

To što ima jednako ubrzanih kretanja ne znači da se ona odvijaju tako što se brzina menja u svakom trenutku; rešavajući drukčije od Boškovića njegovu aporiju sudara, mi ne samo što prihvatamo sudare i nagle promene, već nagle promene smatramo primarnima a o kontinuiranim govorimo u izvedenom smislu – matematičkog karakterisanja a ne ontološkog definisanja izvesnih zbivanja ili struktura *sui generis* 682

130. Realitet i struktura prostora i vremena

Ishod i sve dosadašnje posledice Gigantomahije ne samo što ukazuju da prostor po sebi i vreme po sebi nisu struktuirani, već govore u prilog antisupstancijalističkom shvatanju njihovog realiteta; no, uvođenjem kvalitativne razlike neispunjeni delovi prostora, vremena, ili prostorvremena, postaju *nihil privativum* i kao takvi nisu *nihil negativum*, zbog čega treba prihvatiti samo modalnu verziju takozvanog Aristotelovog antisupstancijalističkog principa 686

131. Avgustinov „paradoks"

To što mi izražavajući se melisovski, možemo da govorimo o vremenu pre Stvaranja ili prostorvremenu pre „velike eksplozije" (*big bang*), ne znači da, shodno modalnoj verziji Aristotelovog antisupstancijalističkog principa, za njih ne važi Parmenidov ontološki princip koji smo nazvali *indiscernibilitas identitatum* 695

132. Aritmetika, geometrija, fizika

Iskustvo dosadašnjeg istraživanja omogućava nam da filozofski bolje sagledamo odnos između pojedinih nauka ili naučnih disciplina; „razvod" geometrije i aritmetike u Grčkoj, posle „zlatnog doba" logistike, doneo je najpre korist geometriji, jer se model opirao krutim i siromašnim aritmetičkim pravilima, ali je kasnije omogućio i slobodno razvijanje aritmetike, bez vezanosti za model; današnja, ponovo aritmetizovana geometrija stvara najviše problema filozofima, ali ne zbog navodne krize naše intuicije, već zbog novih pitanja koja se tiču veze matematike s fizičkim svetom; novovekovna matemtička fizika nas prirodno vuče u infinitizam i tek je susret s fenomenima kvantne mehanike bio opomena da ne padnemo u *hybris* verujući da je moguće i ono što Zevsu nije bilo moguće. 696

133. Aporije, nauka, filozofija

Rešavanje Zenonovih aporija, koje spadaju među probleme s najbogatijom i najrazgranatijom istorijom, dragoceno je iskustvo, koje nam, na kraju, pomaže ne samo da bolje sagledamo prirodu aktivnosti koja se naziva filozofijom, i njeno mesto među naukama, već i da povratimo veru u njenu moć: njeni iskazi su, i ako su analitički–informativni, jer analitički iskazi ne moraju biti trivijalni: oni mogu isključivati mnoge *prima facie* mogućnosti; put do takvih iskaza vodi kroz aporije 701

NAPOMENE 711

NAVEDENA DELA 745

SPACE, TIME, ZENO (*Analytical table of contents*) 773

APORETIKA

„Zu Hilfe! Zu Hilfe!
Sonst bin ich verloren...“

1. Savladavanje prepreka korak po korak i odjednom

Bilo da je reč o savladavanju protivnika u borbi ili partnera u igri bilo o savladavanju raznih teškoća ili prepeka, uglavnom možemo dovoljno dobro razlikovati dva načina savladavanja: prvi, kada bismo rekli da se ono vrši korak po korak i drugi, kada se ono obavlja odjednom.

U mnogim slučajevima protivnika ili prepreku, možemo savladati samo na prvi način, dok ih neki put tako barem lakše možemo savladati. I najveštiji ratnik stradaće, ili teško pobediti, ako treba da se bori sa mnogo neprijatelja odjednom.

Ali nisu svi, slučajevi ovakvi. Veliki roj mrava koji lako možemo slistiti jednim udarcem s velikom mukom ćemo uništiti ako mrave ubijamo jednog po jednog. Slično ovome, malo rastojanje koje možemo preći u jednom koraku teško ćemo preći u sedamdeset jednom.

Da li ima dvosmislenih slučajeva, u kojima nije jasno o kojem se od dva načina savladavanja radi, ili u kojima se bar *može reći* da je u izvesnom pogledu reč o prvom a u nekom drugom pogledu o drugom načinu savladavanja? Ako je zadatak bio da se ubiju mravi i ako je udarac bio takav da su svi mravi stradali u istom trenutku, onda je, izgleda, sasvim jasno da se radi o savladavanju odjednom. Ako je zadatak bio da se pređe malo rastojanje i ako ga pređemo jednim korakom, izgleda *prirodno* da se to svrsta u savladavanje odjednom. Ali, da li je to *nužno*? Ne možemo li korak shvatiti kao sled od, recimo, dva *legato* pokreta, *dva* polupokreta?

Većina slučajeva je verovatno takva da nije teško odrediti o kojem je od dva načina savladavanja reč i u kojima je kontekst dovoljno određen da nalaže jednoznačan odgovor. Ali to ne mora uvek biti tako.

2. Savladavanje beskonačnosti

Neko nam može naložiti da ubijemo grupu ljudi, neko drugi da prebrojimo prirodne brojeve. Ljudi se mogu ubijati jedan po jedan i odjednom, brojanje se nužno odvija korak po korak. No osim ove, postoji još jedna za nas zanimljiva razlika. Ljudî u grupi je konačno mnogo, skup prirodnih brojeva je, kažu, beskonačan. Zadatak da se prebroje prirodni brojevi je zadatak da se *savlada beskonačnost korak po korak*.

Što se tiče *savladavanja beskonačnosti odjednom*, može izgledati da bi u nekim slučajevima to bio lak zadatak. Broj čestica kiseonika koje sam odjednom udahnuo ogroman je; možda je delova insekta kojeg sam zgazio beskonačno mnogo. Bar nije bez daljeg jasno da tih delova ne može biti beskonačno mnogo, ako je već prostor beskonačno deljiv, kako nas standardno uče matematičari[1]. Zar nisam mogao odjednom prekriti beskonačno mnogo delova prostora?

3. Da li je moguće savladati beskonačnost korak po korak?

Dok je o savladavanju beskonačnosti korak po korak prirodno govoriti, reći da smo neku prepreku *savladali* načinivši beskonačno mnogo koraka liči na besmislicu.[1]

Razlog iz kojeg izgleda da je beskonačnost nemoguće savladati korak po korak sledi neposredno iz *načina* ovakvog savladavanja prepreka i *pojma beskonačnosti*. Koliko god koraka da smo načinili posle prvog, njih mora da je konačno mnogo. Svakim novim korakom broj koraka se povećava, ali ostaje konačan, svojstvo konačnosti se rekurzivno održava. Dokle god je ovaj niz koraka jedinstven i dok se na konačan broj koraka nadovezuje sledeći korak, bilo šta što smo već savladali, savladali smo u konačno mnogo koraka; broj načinjenih koraka mora biti konačan iako broj koraka koje još možemo načiniti nije ograničen.

Mada ovo izgleda sasvim očigledno, neki filozofi su (vidi *Pierce*, str. 129, *Watling*, str. 43, *R. Taylor 1*, str. 43, *Grünbaum 3*, gl. 2, § 4, *Maxwell and Feigl*, str. 492, *Salmon*, str. 48–52, *Barnes*, str. 264–273), prihvatajući standardnu matematičku analizu, eksplicitno tvrdili da je moguće obaviti beskonačni broj akata, to jest savladati beskonačnost korak po korak. Tako, recimo, Vejtling tvrdi da sve što je za to potrebno jeste „da se počne i ne stane posle bilo kojeg konačnog broja“ (*Watling*, str. 48). Na ovo je Te Henepe (*TeHennepe*, str. 48) primetio da to ni Svemogućem ne bi pošlo za rukom, pošto ni On ne može da učini nešto što je samoprotivrečno, da počne i *završi*, a da ne *stane*.

Ostaje nam ipak da razumemo šta je navelo Vejtlinga i mnoge druge da tvrde jednu tako neobičnu stvar. Vejtlingov tekst je prvi u nizu polemičkih tekstova uperenih protiv Maksa Bleka (*Black 1*) i jednog *non sequitur* u pobijanju mogućnosti izvršenja beskonačno mnogo sukcesivnih akata. Prihvatajući neophodni matematički uslov konvergiranja beskonačnog niza čiji članovi kad se zbroje treba da daju konačnu sumu, Vejtling dodaje da se za dobijanje tražene sume „ništa drugo ne traži do da se načini svaka od adicja (*Watling*, str. 44) i primećuje da „iz 'koji god konačan broj (akata) da je načinjen, još mora da ih ima'... ne sledi da posle beskonačno mnogo načinjenih akata još mora da ih preostane" (*ibid.*, str. 40). Zaista to ne sledi. Ako bismo mogli stati tek pošto načinimo beskonačan broj akata (adicija) savladavši beskonačnost korak po korak i ako je Blek argumentisao pozivajući se samo na to što posle svakog konačnog broja akata, ovih ima još, njegov argument očigledno nije dovoljan za ono što dokazuje (Blek je kasnije i odustao od takvog načina argumentisanja – vidi *Black 2*, str. 115). Ali, ni Vejtling, a ni njegovi slavni branioci (vidi *Grünbaum 3*, *Salmon*), nisu nam pokazali kako da se dočepamo beskonačnosti da bismo (tek) onda prestali delati, kad smo stalno, posle svakog koraka, konačno mnogo koraka udaljeni od početka. Kako da se oslobodimo ukletog svojstva konačnosti koje se rekurzivno održava svakim novim korakom?

U svakom slučaju, prihvatimo zasad da je „beskonačnost savladana korak po korak" *contradictio in adiecto*, jer se time još ne izlažemo nikakvoj neugodnosti. Što se tiče savladavanja beskonačnosti odjednom, tu stvar stoji drukčije. Ne vidimo da ono nije moguće, pa i „beskonačnost savladana odjednom" izgleda *eo ipso* kao nešto moguće.

4. Jedna aporija savladavanja beskonačnosti korak po korak

Od znamenitog dana kada je Rea rodila budućeg večitog vladara prošlo je mnogo godina, ogromno mnogo u poređenju s našim kratkim životom. Ipak, to je tek jedna Zevsova mladost, taj ogromni broj godina je mali s obzirom na ono što stoji pred

njim. Slaveći svoje rođendane on bi faktički prebrojavao skup prirodnih brojeva, savladavajući beskonačnost korak po korak.

Može se primetiti da skup čije elemente Zevs broji nije *aktualno beskonačan*, ako ne zbog prošlosti, ono zbog budućnosti. Ako su prošlost sećanja, a budućnost očekivanja, kako se to jednom činilo Svetom Avgustinu (*Augustine*, knj. 11, odelj. 18, str. 248–249), ipak je ono čega se sećam moglo ostaviti tragove na mom telu koji *sada* postoje i mogu se videti. *Tragovi* prošlih događaja su *aktualni*; bar utoliko priznajmo aktualnost prošlosti. Neka su tragovi Zevsove mladosti ožiljci na svetskom Jasenu blizu Rajne ispod kojeg je on pio s izvora mudrosti u Votanovom obličju, gledajući u još neostvarenu budućnost.

Petrus Hispanus, koji će postati papa Jovan XXI, skovao je, kasnije popularan izraz (vidi *Boyer*, str. 68) za beskonačnost kojom se odlikuje večni paganski život poput Zevsovog. To je beskonačnost u sinkategorematskom smislu, koju su kasniji hrišćani Kantor i Hegel nazvali „nepravom" (vidi *Cantor 9*, str. 165), odnosno „lošom" (vidi, na primer, *Hegel 3*, I, str. 438). Ožiljaka na svetskom Jasenu *konačno* je mnogo i *nikad* neće biti drukčije. Zevs uvek ima konačan broj godina i njegova večnost znači jedino to da zareza na Jasenu nije *definitivno mnogo*.

Možda ni prirodnih brojeva nije stvarno beskonačno mnogo, ako brojeve, poput Aristotela (*Aristotle 21*, 220 a 27 i dalje) i Kanta (*Kant 1*, str. 60), posredstvom brojanja vežemo za vreme; budućnost neće isteći. Zamislimo međutim, niz kocaka koje su kao ruske babuške poređane tako da jedna obuhvata drugu. Neka prva bude nešto veća od Zemlje i neka je obuhvata, neka druga obuhvata ovu tako da obuhvata i Mars, neka treća bude veća od druge otprilike onoliko koliko je druga veća od prve i neka se kocke tako nižu bez kraja. Ove kocke možemo da shvatimo kao geometrijske, ali učinimo ih stvarnijim, „oživimo" ih. Neka se naime u po jednom od temena svake nalaze kosmičke stanice sa kosmonautima i kosmonautkinjama koji tu žive i zabavljaju se, ostavljajući potomstvo. Neka Zevs za svaki rođendan dozove po jednu, uvek naredu stanicu, umesto da samo načini zarez na svetskom Jasenu. Sada se ne može reći da Zevs ne savladava aktualnu beskonačst, pošto on ne broji samo svoje rođendane, već broji kosmičke stanice sa živim bićima, a one nisu buduće kao rođendani ni samo potencijalne kao brojevi.

U svrhu istraživanja oslobodimo se zemaljskog šovinizma i dozvolimo da svi kosmonauti ne budu sa Zemlje, pošto iz jednog centra, ako je verovati dokazu po kojem je namoguće savladati beskonačnost korak po korak (§ 3), nećemo moći da opskrbimo sve stanice. Oslobodimo se za trenutak i hrišćanske i naučničke vere, pošto tu „u početku behu svetlost ili jake interakcije a onda nastade svet velikom eksplozijom“[1], da bismo bili sigurni da on nije konačan. Oslobodimo se rimanovske ili ajnštajnovske tradicije po kojima bi kosmos mogao biti konačan zato što bismo se krenuvši u jednom smeru po geodeziku (vidi *Sciama*, str. 112) vratili otprilike tamo odakle smo pošli. Dozvolimo našoj jeretičkoj misli da slaže kocke pa Euklidu, makar se svetlosni zrak morao kretati i po nekoj neeuklidskoj pravoj.

Može li Zevs imati *kosmički imenik* po kojem će dozivati stanice? Ako treba da ih doziva imenima koja su im nadenuta *proizvoljno*, onako kako mi deci dajemo *krštena imena*, on ne bi mogao imati jedan takav imenik, jer bi ovaj trebalo da sadži beskonačnu listu imena. Ali skup stanica se *može dobro urediti*[2] i Zevs stanice može prozivati po *mestu u nizu*. Tada je *ime* stanice redni broj koji zavisi od mesta u nizu.

Na ovaj način Zevs može dozvati *svaku* stanicu, *nijedna* nije nedozivljiva. Ali, ako *nema* stanica koje ne mogu biti dozvane, ne znači li to da *sve* mogu biti dozvane odnosno da će doći vreme kada će sve biti dozvane? Ako, pak, mogu biti dozvane, onda to

protivreči navodnoj istini koju smo prihvatili, da beskonačnost ne može biti savladana korak po korak.

Tako smo stigli do aporije savladavanja beskonačnosti korak po korak. Između činjenice da ne postoji nijedna stanica koja neće biti dozvana i uverenja da sve ne mogu biti dozvane izgleda da postoji protivrečnost.

5. *„Neki“, „bilo koji“, „svaki“*

Za one koji prihvataju da se beskonačnost može savladati korak po korak pod izvesnim uslovima, aporija ne bi postojala pod tim uslovima. Tako bi Zevs navodno uspeo da dozove sve kosmičke stanice ako bi se rastojanja između njih progresivno smanjivala težeći nuli, kao i vremenski razmaci između poziva (vidi dole, § 56 i § 100). No, i oni koji to prihvate morali bi dati neko rešenje za slučajeve u kojima ovakvi naročiti uslovi nisu zadovoljeni. Za nas koji smo prihvatili da je u načelu beskonačnost nemoguće savladati korak po korak, eventualno rešenje aporije bilo bi univerzalno.

Činjenica da je *svaki* od rednih brojeva stanica, koji predstavljaju njihova imena, *konačan* prirodni broj, a da je, s druge strane, stanicâ koje nikad *sve* ne mogu biti dozvane beskonačno mnogo, sugeriše kojim putem da krenemo da bismo izašli iz ćorsokaka. Ispitajmo najpre neke različite upotrebe imeničkih i količinskih zamenica „neki“, „bilo koji“, „svaki“ i „svi“.

Ako naoružan mladić uleti u sobu dok se zabavljamo i zapreti da će neki od nas biti ubijeni, verovatno ćemo se zapitati ko su ti neki. Ako ga ne poznajemo i ako nam se učini da je verski fanatik ili moralni čistunac, možemo pomisliti da će to biti *bilo ko* od nas. On nam to kasnije može i potvrditi. Ali možda je on samo ljubomoran, tako da je odredio žrtve, te će biti ubijeni tačno *ti* i *ti*.

U ovom primeru vidimo jednu značajnu nijansu u upotrebi zamenice „neki". Mladi ubica je „neki" mogao upotrebiti *neodređeno*, ili samo *relativno određeno* misleći, recimo, na bilo koju trojicu, no on je mogao misliti i na *određene* žrtve. Dok u prvom slučaju nema smisla pitati se dalje „a ko su ti?", ili „koja trojica?", u drugom svakako ima.

Dakle, „neki" se može upotrebiti i neodređeno, ako na pitanje „a koji?" sledi odgovor: „bilo koji", i određeno, ako na pitanje „a koji?" sledi odgovor: „ti i ti".

Srednjovekovni logičari su razlikovali neodređenu i određenu referencu, *suppositio confusa* i *suppositio determinata* (vidi *Geach 2*, str. 63).

Ako vidimo mačku kraj mišje rupe i kažemo „mačka čeka miša", onda nas niko u *tom kontekstu* neće pitati „kojeg miša?", jer tu ni domen nije određen a nekmoli član kojeg bi govornik mogao imati u vidu. U našem slučaju domen bismo bili svi mi koji se zabavljamo, ali se moglo ispostaviti da je ubica o „nekima" govorio neodređeno. Razliku koju su pravili srednjovekovni logičari možemo naći i kod savremenih. Kod Rasela (vidi *Russell 5*, odelj. 59) ta se razlika „tehnicizira" pomoću razlike između neodređenog člana „*a*" u engleskom jeziku i zamenice „*some*" (neki).

Za „svaki" važi slično što i za „neki". Ako mladić počne da ubija, i izjavi da će svako od prisutnih doživeti istu sudbinu, to je, na našu žalost, sasvim određeno. Ali ubica može biti ćudljiv i izjaviti da će ubiti svakog onog ko mu se vremenom učini nesimpatičnim. To otprilike znači da *bilo ko* od prisutnih može biti ubijen, pošto znamo samo kako će se ubica odlučivati.

I ovu razliku možemo naći kod srednjovekovnih logičara, kao razliku između *suppositio coniectiva* i *suppositio distributiva*. Rasel je ovu

razliku tehnički definisao preko razlike između konjunkcije stavova sa različitim ličnim imenima i istim predikatom i stavova sa istim predikatom a konjunkcijom ličnih imena na mestu subjekta[1]. Ako žrtve mogu da budu Saša, Neša i Miša „bilo ko će biti ubijen" bi bilo izraženo konjunkcijom stavova „Saša će biti ubijen i Neša će biti ubijen i Miša će biti ubijen", a „svako će biti ubijen" stavom „Saša i Neša i Miša će biti ubijeni".

Raselovo rešenje deluje neprirodno. Na sreću, u klasičnom kvantifikatorskom računu promena od *suppositio distributiva* ka *suppositio coniectiva* može da se izrazi promenom opsega univerzalnog kvantifikatora (vidi *Quine 1*, str. 120). Mislim da se to može videti kako pri različitom čitanju jedne iste formule, tako i preko razlika u istinosnim vrednostima dve formule s različitim opsegom univerzalnog kvantifikatora, što sve odslikava razliku između određene i neodređene upotrebe.

Da bismo videli kako se razlika između određene i neodređene upotrebe može predstaviti u kvantifikatorskom računu, pustimo da individualna promenljiva x prelazi preko skupa mogućih žrtava, to jest ljudi kojima ubica preti, neka a bude ubica, neka xRa znači „a mrzi x" i neka najzad f znači „biće mrtav u roku od dva sata". $\forall x(xRa)$ tada jednostavno tvrdi da ubica mrzi *svakog* od prisutnih, dok $\forall x(xRa \rightarrow f(x))$ tvrdi da će *svako koga* ubica mrzi biti ubijen u roku od dva sata, što može biti jedan od prisutnih ili više njih. Poslednju formulu možemo pročitati i ovako: „za *bilo kog* od prisutnih važi da će biti mrtav ako ga ubica mrzi", što ima isto značenje kao „za *svakog* od prisutnih važi da će biti mrtav ako ga ubica mrzi". „*Svaki koga* (ubica mrzi)" odnosi se samo na *neke*, eventualno sve, od prisutnih, dok se „*za svakog* (bilo kog) *važi* da..." odnosi na *sve* prisutne. U formuli $\forall x(xRa)$ univerzalni kvantifikator moramo čitati kao „svaki", to ne može biti neodređeno, dok ga u formuli $\forall x(xRa \rightarrow f(x))$ možemo čitati na dva načina, naime *i* kao „bilo koji" (bilo ko od prisutnih), uzimajući *širi opseg*[2].

Pogledajmo sad stvar i sa druge strane. Ako ubica ispuni obećanje, istinosne vrednosti formula $\forall x(xRa) \to f(x)$ i $\forall x(xRa \to f(x))$ biće zbog paradoksalnosti materijalne implikacije, iste; naime, pošto je tada $f(x)$ istinito, svejedno je da li ubica mrzi sve prisutne ili ne. Ali, ako ubica ne ispuni obećanje i poštedi život nekima od nas koje mrzi, nastupiće razlika u pogledu istinosne vrednosti, jer je formula $\forall x(xRa \to f(x))$, koja tačno izražava ubicino obećanje, na to diskriminativna. Mi nismo hteli da kažemo da ako ubica svakog mrzi onda..., već da za bilo kog važi da ako ga ubica mrzi onda... Veći opseg univerzalnog kvantifikatora odgovara neodređenoj upotrebi zamenice „svaki" i bez promene domena za x (prisutni na zabavi) čita se kao „bilo koji (iz domena za x)". Ako hoćemo da ga pročitamo određeno, promeniće se domen: to više nisu svi prisutni, nego oni koje ubica mrzi.

Možemo pretpostaviti da će se i razlika između neodređene i određene upotrebe zamenice „neki" odslikati negde u kvantifikatorskom računu. Iskoristimo za početak jednu staru dvosmislicu srednjovekovnog logičara Viljema Šervudskog. „Svaki čovek vidi svakog magarca izuzev Sivka". Da li time želimo da kažemo da Sivka niko ne vidi, ili pak da svakog od magaraca vide svi a Sivka samo neki? Odgovor Viljema Šervudskog je jednostavan i zadovoljavajući. Sve zavisi od toga da li uzmemo da „svaki čovek" obuhvata *(includit)* „svaki magarac izuzev Sivka", ili pak da drugi izraz obuhvata prvi (vidi *Geach 2*, str. 103). Slično ovome, ako umesto ubice na zabavu nagrne veselo društvo bolje volje, domaćin ih može obradovati rečima: „Došlo je dosta vama nepoznatih zvanica, za svakog od vas naći će se neko interesantan". Ali on može, ne slučajno obrnuto reći: „Neki će biti interesantni svakom od vas". U ovom drugom slučaju društvo će se zapitati *o kojim gostima je reč* i svi mogu navaliti na domaćina da ih vodi pravo njima; u prvom je slučaju to deplasirano, jer domaćin nije imao u vidu određene ličnosti. *Redosled uvođenja i opseg* aplikativa „svaki" i „neki" („za svakog (od vas)", „neko (od prisutnih)") utiče na određenost i neodređenost, omogućavajući i onemogućavajući pitanja kao što su „ko je taj?", „ko je ta?", „ko su ti?".

6. Opseg i redosled uvođenja kvantifikatora i izlaz iz aporije

U teoriji brojeva važi kao istinito da od svakog prirodnog broja postoji veći: $\forall m \exists n(n > m)$ (gde su m i n prirodni brojevi), dok obrnuto, $\exists n \forall m(n > m)$, ne važi; negacija poslednje formule je teorema.

U prvom slučaju „neki" nije određeno i ne možemo pitati „koji je to broj?" Kad veselo društvo iz našeg primera (§ 5) u analognom slučaju nije moglo smisleno da se pita koje su to zanimljive osobe o kojima govori domaćin, zašto bismo se mi smeli pitati koje je to n.

No u drugom slučaju je na mestu pitanje „koje je to n?" i *baš zato* je $\exists n \forall m(n > m)$ lažno. Naime, dopustivost i opravdanost tog pitanja teraju nas da odgovorimo koji to broj treba da bude najveći, a onda, kada ga navedemo, on je *definitivno fiksiran* i *konačan*. To, pak, protivreči zahtevu da niz prirodnih brojeva bude beskonačan, otvoren s desne strane.

U formulaciji naše aporije postoji jedna dvosmislica, čija su dva smisla analogni formulama $\forall m \exists n(n > m)$ i $\exists n \forall m(n > m)$, i neuočavanje te dvosmislice odvelo nas je u ćorsokak. Naime, to što *nema nijedne stanice koja neće biti dozvana*, ili to što će *svaka biti dozvana*, može da znači da se za svaku stanicu, koju god da neko navede, može odrediti trenutak, to jest Zevsov rođendan, kada će ona biti dozvana, a može da znači da postoji, ili da se može navesti, trenutak kada će biti istina da je svaka stanica već dozvana. Ako sa s označimo stanice, sa t Zevsove rođendane i ako uzmemo da $f(s)$ znači „s je dozvana", onda bismo prvi slučaj napisali kao $\forall s \exists t f(s)$ a drugi kao $\exists t \forall s f(s)$.

Prva formula ne protivreči tvrđenju da je beskonačnost nemoguće savladati korak po korak, odnosno, tvrdnji da sve stanice ne mogu biti dozvane; samo druga formula tome protivreči, jer, u stvari, tvrdi da se u *nekom trenutku t* proces dozivanja završava ili da je završen.

7. „Svaki" i „svi" i priroda beskonačnosti rednih brojeva

Iz aporije smo izašli otkrivajući skrivenu ekvivokaciju u tvrđenju da će svaka stanica biti dozvana. Nije isto reći da za svaku stanicu možemo naći trenutak kada će biti dozvana i reći da možemo naći trenutak kada je svaka stanica dozvana[1]. Neko bi pogrešno mogao pomisliti da je ovakvo rešenje u nekoj vezi sa intuicionističkom nedefinljivošću egzistencijalnog i univerzalnog kvantifikatora jednog preko drugog. Naime, iz toga što se ne može naći stanica koja neće biti dozvana, po intuicionističkoj logici zaista još ne sledi da će svaka biti dozvana. Ako uzmemo da $f(s)$ znači „s će biti dozvana", onda bi možda bilo tačno da $\neg\exists s \neg f(s)$ ali ne nužno i $\forall s f(s)$, pošto $\neg\exists s \neg f(s) \rightarrow \forall s f(s)$ nije teorema u intuicionističkom kvantifikatorskom računu (vidi *Heyting 1*, str. 103).

No, nezavisno od toga šta po intuicionistima $\forall s f(s)$ *ne* sledi iz $\neg\exists s \neg f(s)$, ono ipak upravo po njima $\forall s f(s)$ u ovom slučaju *važi.* Naime $\forall s f(s)$ ne bi važilo ako ne bismo raspolagali konstruktivnim dokazom ili konstruktivnom metodom da to proverimo (*ibid.*, str. 102). Mi, recimo, ne raspolažemo konstruktivnom metodom da utvrdimo da je svaki realan broj racionalan ili iracionalan, iako ne možemo navesti nijedan koji nije racionalan ili iracionalan (*ibid.*, str. 103), te zato, po intuicionistima, ne smemo

tvrditi da je svaki realan broj racionalan ili iracionalan, što se inače u klasičnoj, neintuicionističkoj matematici prihvata. Međutim, u našem slučaju taj konstruktivni metod postoji i to je metod potpune matematičke indukcije (*ibid.*, str. 13–14), pošto se radi o skupu koji je prebrojivo beskonačan, skup čiji je kardinalni broj $\aleph_0$. Prvu stanicu Zevs *će* dozvati, i pošto *iz pretpostavke* da će dozvati n-tu stanicu *sledi* da će sledeće godine dozvati $(n+1)$-vu on će dozvati svaku.

S obzirom na okolnost da čak i intuicionista u ovom slučaju mora da prizna da će *svaka* stanica biti dozvana a da ipak nema trenutka kada će važiti da su *sve* dozvane, neko bi mogao pomisliti da je za rešenje *dovoljno* da se neposredno pozove na razliku u upotrebi aplikativa „svaki" i „svi", koja se onda u nekim slučajevima, kao što je ovaj naš, odražava i na razliku u pogledu istinitosti odgovarajućih tvrdnji u kojima se ovi aplikativi pojavljuju[2].

Ako neki predavač po održanoj besedi izjavi da je voljan da razgovara sa svakim, ali da ne može razgovarati sa svima, to po svoj prilici, zavisno od konteksta, znači jednu od sledeće dve stvari: ili je prisutnih mnogo, pa je on voljan da odgovori na pitanje *bilo kog* od njih ali je praktički nemoguće da *svakog* od njih zadovolji, ili prisutni toliko navaljuju da on, uprkos želji da *svakom* odgovori, ne može da odgovara *svima* u isto vreme. U prvom slučju reč je o razlici između određene i neodređene upotrebe zamenice „svaki" s kojom smo se sreli u § 6, a koja je ovde pokrivena razlikom „svaki – svi", u drugom slučaju, pak, reč je o razlici koja nas trenutno zanima, o razlici između *distributivne* i *kolektivne* interpretacije univerzalnog kvantifikatora. Ova poslednja se može pojačati sa „svaki *pojedinačno*" i „svi *odjednom*".

Primer zaista pokazuje da se neki put „svi" javlja *alternativno* sa „svaki" dok mu je neki put *suprotstavljeno*, kao što se i „svaki" javlja neki put alternativno sa „bilo koji" dok mu je neki put suprotstavljeno. No da bismo znali u kojem je smislu aplikativ upotrebljen, moramo znati *kontekst*. A poznajući kontekst možemo navesti *razloge* iz kojih nešto važi za sve, ili zašto važi za bilo kog dok ne važi za svakog. U slučaju sa Zevsovim dozivanjem kosmičkih stanica „svaki" i „svi" *su* se pojavili kao *suprotstavljeni*, ali ako pokušamo da razumemo *zašto* su oni tu suprotstavljeni i da navedemo *razloge* iz kojih će svaka stanica biti dozvana dok sve neće, vratićemo se rešenju iz § 6. Zato mislim da prosto ukazivanje na to da „svaki" i „svi" nisu uvek uzajamno zamenljivi nije definitivan odgovor na aporiju i da, iako tačno, *nije dovoljno* konstatovati da iz toga što će svaka stanica biti dozvana *ne sledi* da će sve biti dozvane. Svaka će biti dozvana *jer* se svakoj navedenoj može korespondirati trenutak kada će se to desiti, a sve neće biti dozvane *jer* nema trenutka kada će se moći reći da je svaka dozvana.

Ovo objašnjenje zbog čega „svaki" i „svi" nisu u ovom slučaju zamenljivi, ujedno razjašnjava prirodu beskonačnosti skupa konačnih ordinalnih brojeva (up. *Cantor 1*, § 14, str. 314–320). I ako svaka od beskonačno mnogo stanica ima svoje proizvoljno nadenuto ime, što *je* moguće, Zevs ipak ne može imati kosmički imenik tih stanica. S druge strane on svaku stanicu može dozvati samo ako se one *po nekom zakonu* poređaju u *niz* tako da svakoj pripadne jedan i samo jedan prirodni broj. No *ređanje*, odnosno pridodavanje brojeva je *sukcesivno* i zato se ono nikad ne može *de facto* završiti. Nije rednim brojem *obeleženih* stanica stvarno beskonačno mnogo, već stanica koje ovim brojevima *mogu biti* obeležene, kao što Zevsovih rođendana nije stvarno beskonačno mnogo, nego stanica koje on na rođendane doziva. Može nam se učiniti da su sve stanice *već* označene zato što znamo zakon obostrano jednoznačnog korespondiranja, ali mi znamo i zakon korespondiranja Zevsovih rođendana i poziva, a da ipak to *ne znači* da će tih poziva ikad stvarno biti više nego konačno mnogo. Obeleženih stanica može biti onoliko koliko i Zevsovih

poziva, odnosno rođendana: neograničeno ali ipak uvek samo konačno mnogo.

Tako možemo s Lajbnicom (*Leibniz 17*, str. 514) podeliti veru u mogućnost beskonačnih skupova uz neveru u realnost beskonačnih rednih brojeva.

8. Konvergentni nizovi i nesavladivost beskonačnosti korak po korak

Otkrivanje ekvivokacije u tvrdnji da će Zevs dozvati svaku kosmičku stanicu i ako je ovih beskonačno omogućilo nam je da slobodno i dalje tvrdimo da je nemoguće savladati beskonačnost korak po korak. To smo, između ostalog, mogli da tvrdimo zato što nas ništa dosad nije nagnalo da priznamo da *mora* doći trenutak kada će sve stanice biti dozvane. Može li nas išta prisiliti da prihvatimo da takav trenutak postoji, ili da mora doći?

Setimo se da je u Vejtlingovom slučaju bio postavljen zahtev da beskonačni niz koji treba savladati bude *konvergentan*. Uzmimo da je uslov i *prostorne* i *vremenske* konvergencije zadovoljen u svakom pogledu. Neka se umesto o makrokosmičkim radi o mikrokosmičkim stanicama, stanicama čija se veličina smanjuje progresivno težeći nuli i neka isto važi za razmak među stanicama i razmak među pozivima. Neka se, recimo, razmaci među stanicama smanjuju po geometrijsikoj progresiji tako da je svaki naredni razmak jednak polovini prethodnog. Neka je prvi razmak 1/2 km, drugi 1/4 km, treći 1/8 km i tako redom, n-ti $1/2^n$ km, gde je n bilo koji prirodni broj. Neka su analogno tome vremenski razmaci među pozivima 1/2 h, 1/4 h, ..., $1/2^n$ h, ...

Sada je teško reći da vreme od jednog sata neće isteći, pošto prosto možemo sačekati da istekne. Svaki trenutak koji izaberemo po isteku jednog sata biće onaj kobni t kada će se moći reći da je svaka stanica dozvana, to jest $\exists t \forall s f(s)$[1]. Koliko će to stanica biti dozvano u roku od jednog sata? Izgleda da nećemo moći da kažemo da ih je dozvano samo *konačno mnogo*, jer je *svaki* konačan broj poziva koji bismo *uopšte mogli* navesti *već obavljen pre isteka* jednog sata i za svaki ponuđeni bi se moglo reći i *koliko pre*, a ako odgovorimo da je dozvano *beskonačno mnogo* stanica, proizlazi da je beskonačnost savladana *korak po korak*.

9. Da li se obična trka može shvatiti kao savladavanje beskonačnosti korak po korak?

Zenon iz Eleje nije znao za kosmičke stanice, ni makro ni mikro, ali je u svom istorijskom dokazu protiv mogućnosti kretanja Ahilu dodelio zadatak da stigne kornjaču koji onako kako je opisan veoma sliči zadatku pred kojim se u našem primeru nalazi Zevs. Ispitajmo detaljnije kako *sličnosti* tako i razne, eventualno važne *razlike* između Ahilovog i Zevsovog zadatka, da bismo videli ne ispostavlja li se i najobičnije kretanje smrtnika kao savladavanje beskonačnosti korak po korak.

Da bi stigao kornjaču brzonogi Ahil svakako mora savladati početno rastojanje koje ga deli od nje. No za to vreme kornjača je ipak prešla neki put, ma koliko mali. Ahil, da bi je dostigao, mora da savlada novo rastojanje, a za to vreme kornjača je opet prešla neki, sad doduše još manji put, ali ipak dovoljan da joj obezbedi prednost. Isto se stalno ponavlja, i uprkos tome što je rastojanje između Ahila i kornjače sve manje, ono je ipak posle svakog Ahilovog dosegnuća položaja u kojem se kornjača nalazila, makar koliko malo, ipak veće od nule. Posle ma koliko mnogo ovih dosegnuća Ahil je još uvek iza kornjače.

Uzmimo, radi analogije i jednostavnosti; da je početno rastojanje između Ahila i kornjače 1/2 km, da se Ahil i kornjača kreću ravnomernom brzinom i da se Ahil kreće dvostruko brže. Tada bi, ako se kreće brzinom od samo 1 km/h trebalo da stigne kornjaču za jedan sat.

Sličnost sa teškoćom u kojoj smo se maločas našli nastaje ako zapitamo Zenona da li je Ahil posle pređenog kilometra još uvek iza kornjače, i ako da, koliko, ili, da li je on posle jednog sata još uvek iza kornjače, i ako da, koliko.

Razmatranje raznih pretpostavki o tome kako bi Zenon odgovorio na ova pitanja, ostavićemo za kasnije. Zasad nas još zanima samo sličnost između Zevsovog i Ahilovog zadatka.

Šta odgovara kosmičkim stanicama koje Zevs treba da dozove? Nameću se dva odgovora: kosmičkim stanicama odgovaraju ili *tačke* obostrano jednoznačno korespondirane brojevima 1/2, 3/4, 7/8, ..., $(2^n-1)/2^n$, ..., ili rastojanja [0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 7/8], ..., $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$, ..., gde je opet n bilo koji prirodni broj, 1, 2, 3, ...

Šta odgovara Zevsovom pozivanju kosmičkih stanica? Ovim pozivanjima odgovara ili *dosezanje tačaka* 1/2, 3/4, 7/8, ..., $(2^n-1)/2^n$, ..., ili *prelaženje deonica* [0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 7/8], ..., $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$, ..., puta na kojem bi Ahil trebalo da stigne kornjaču.

Beskonačnom nizu stanica koje Zevs *doziva* odgovara, dakle *beskonačni niz tačaka*, odnosno *beskonačni niz rastojanja* koje Ahil ima da *doseže*, odnosno *prelazi* jureći kornjaču. I ako dozvolimo da istekne jedan sat, onda je *teškoća* u oba slučaja *ista*: ne možemo bez daljih nezgoda da odgovorimo na pitanje koliko je Zevs stanica dozvao, odnosno Ahil tačaka dosegao, odnosno deonica puta prešao. Ma koji broj naveli, on je *konačan* i zato *već prekoračen* pre isteka jednog sata. Ako pak kažemo da je Zevs dozvao *beskonačan broj stanica*, a Ahil dosegao *beskonačan broj* *tačaka*, odnosno prešao *beskonačan broj* deonica, onda priznajemo da su oni *savladali beskonačnost* korak po korak, što smo dosad odbacivali kao nemoguće.

10. Dosegnuće tačaka i prelaženje rastojanja

Pošto smo pregledali sličnosti između Zevsovog i Ahilovog zadatka i odgovarajućih teškoća oko savladivosti ovog zadatka, prelazimo na traženje eventualno važnih *razlika*.

Iz nekih prevoda Aristotelove *Fizike* proizlazi da u Zenonovoj aporiji kosmičkoj stanici iz Zevsovog zadatka odgovara tačka na putu koji Ahil prelazi[1]. U grčkom tekstu, međutim, tačka se ne pominje na mestu o kojem je reč, iako Airistotel inače vrlo često upotrebljava reč στιγμή. Ostavljajući opredeljenje među mogućim interpretacijama za kasnije, *uzmimo* zasad, kao prvu *varijantu*, da se u Ahilovom zadatku radi o seriji dosegnuća beskonačno mnogo tačaka.

Da li je razlika između stanica u Zevsovom zadatku i tačaka u Ahilovom relevantna ili irelevantna? Pre svega, mogao bi neko pomisliti, kao što je to učinio Vizdom (*Wisdom 2*, str. 70, 72), da u nekom ograničenom prostornom intervalu ima dovoljno mesta za beskonačno mnogo tačaka ali ne i za beskonačno mnogo mikrostanica. Uzmimo, međutim, da je prva stanica udaljena od Zevsa 1 km, lopta prečnika ½ km, neka je sledeća stanica, udaljena 1½ km, lopta prečnika ¼ km, sledeća pak, udaljena 1¾ km, lopta prečnika 1/8 km, i tako dalje, bilo koga *n*-ta, udaljena od Zevsa $1\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$ km, lopta prečnika $1/2^n$ km. Ovaj niz stanica se može *neograničeno* produžavati a da između stanica i uvek bude razmaka i da one imaju neku *veličinu*.

Sledeće, svakako nezaobilazno pitanje koje se tiče razlike između stanica i tačaka odnosi se na ontološki sporan status tačke i uopšte svih geometrijskih objekata. Neka se Zevs i Ahil odmaraju dok ovo pitanje ne razmotrimo bar onoliko koliko je neophodno za uspešno filozofsko praćenje izvršenja njihovih zadataka.

11. Sporan ontološki status tačaka

Tokom istorije filozofije pojedini filozofi su dovodili u pitanje postojanje raznovrsnih stvari u koje su drugi verovali; pitali su se da li postoji „spoljašnji svet“, da li postoje ideje, da li postoje atomi, da li postoji duša, da li postoji bog i, između ostalog, da li postoje tačke. Osim ovakvih pitanja koja počinju sa *da li* često su se pitali i *kako* – ili u *kojem smislu* – sve te stvari postoje, *ako* uopšte postoje.

Ova dva pitanja, pitanje *da li* nešto postoji i pitanje u *kojem smislu* postoji ako postoji, često su blisko povezana, ponekad presudno po odgovor na jedno od pitanja. To je skoro uvek tako kad se ona postavljaju u kontekstu neke prethodno iskrsle teškoće, što je sada upravo slučaj. U jednom takvom kontekstu odgovoriti *da* nešto postoji, i čak da postoji u *nekom* relativno određenom smislu, može biti nezadovoljavajuće ako je za problem relevantno upravo pitanje postojanja ili nepostojanja u *nekom drugom* smislu.

U našem kontekstu nikako ne bi bilo dovoljno da samo znamo da li postoji tačka, jer se mi trenutno bavimo uporednim ispitivanjem i utoliko *uporednom ontologijom*. Nešto što važi za stvari koje postoje na jedan način ne mora da važi za stvari koje postoje na neki drugi način.

Kroz istoriju filozofije i matematike geometrijski objekti su bili prognani iz opažajnog sveta (ὁρατόν) (vidi, pre svega, *Plato 12*, 49 A). Za tačku, liniju ili površinu kako o njima govori zrela grčka matematika u doba Platona (*ibid*., 48 E i dalje) kaže se da se ne mogu videti niti dodirnuti. Učenik koji ulazi u carstvo geometrije mora da nauči da *apstrahuje* od debljine (πάχος) linije nacrtane štapom na pesku, ili kredom na tabli, da bi dospeo do jednog od osnovnih objekata učiteljeve nauke. Na sličan način on treba da se približi shvatanju tačke, koja ne samo što nema debljinu nego nema nikakvu veličinu (μέγεθος). Trag štapa zabodenog u pesak nije geometrijska tačka (στιγμή). Tako može izgledati da geometrijski objekti pripadaju jednom drugom, *misaonom* svetu (νοητόν), svetu o kojem se može misliti, ali koji se ne može čulima opažati. Nije li, međutim, taj svet samo fikcija?[1]

Pitanje da li su geometrijski objekti fikcije koje nastaju apstrakcijom, ili je apstrakcija samo sredstvo da se popnemo u jedan drugi realni svet, za nas trenutno predstavlja nezanimljivu i praznu dilemu, pošto nas zanimaju one tačke ili površine *koje Ahil treba da dosegne.* Da li je zaista tačno da geometrijskih objekata nema u čulnom svetu?

12. Da li se geometrijske tačke i linije mogu opažati?

Ako znamo alfabet znaćemo za Σ da kažemo da je jedno slovo tog alfabeta. Ako nas neko pita koje je ovo slovo: , možda ćemo biti malo zbunjeni, ali ćemo, verovatno, ipak reći ili da je to „sigma", ili barem da to liči na „sigmu" iako nije slovo. Ako nas, međutim, neko zapita koje je ovo slovo: , onda ćemo sigurno prvo reći da to uopšte nije slovo. Ako taj neko to prihvati, ali nas dalje pita da li u toj mrlji, koja nije slovo, možemo ipak

prepoznati neko grčko slovo, mislim da ćemo reći da možemo, samo ne jedno nego dva grčka slova, Σ i Γ. Na sličan način ćemo u mrlji  videti latinično S i grčko Σ.

Izlomljene linije Σ i Γ svakako nisu geometrijske, one imaju izvesnu širinu; isto tako ni kriva S nije geometrijska. Da li slova, Σ, Γ i S koje smo „videli" u gornjim mrljama imaju širinu? Da li su delovi mrlje, to jest delovi crne površine ono što čini Σ, Γ i S koje smo tamo videli? Ili su možda delovi okolne bele površine ono što vidimo kad vidimo ova slova? Zašto bi to bili delovi jedne a ne delovi druge površine?

Zamislimo da je pola ovog lista belo a pola crno, ali tako da se slično kao na gornjoj mrlji može videti slovo Σ jer je razgraničenje sigmoidno. Čini se da je potrebno da vidimo *obe* površine da bismo videli Σ, jer je potrebno da vidimo kako se površine uzajamno sigmoidno ograničavaju.

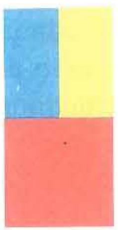
Zamislimo sad svetiljku u mračnoj sobi tako zaklonjenu da na podu sobe dobijemo sigmoidno razgraničene svetlost i tamu. Opet ćemo umeti da pročitamo slovo Σ, ali bi ovog puta bilo čudno reći da vidimo mračni deo poda, pošto uopšte ne vidimo taj deo poda. No ipak, da očima ne registrujemo i tamu koja se sigmoidno razgraničava sa svetlošću, ne bismo videli Σ. Moramo videti da je deo poda u mraku da bismo pročitali Σ. Σ je *forma razgraničenja* svetlosti i tame, odnosno svetle i tamne površine.

Možda bi filozofi koji pomno prate naučna dostignuća rekli da strogo govoreći ni u prethodnom primeru sa crno-belim listom ne treba reći da vidimo crnu površinu jer crno nije boja (vidi, recimo, *Armstrong 2*, tom 2, str. 52), pošto se tu nikakva svetlost ne odbija. Upravo ovakva primedba može da posluži da se uvidi da je razlika između dva prethodna primera zanemarljiva. Svejedno je da li se radi o obojenim površinama koje se uzajamno ograničavaju – ako je potrebno možemo uzeti list koji je polucrven poluplav – ili o svetlosti i tami koje se uzajamno ograničavaju; Σ koje vidimo u našim primerima nije ni belo, ni crno, ni crveno, ni plavo, ni svetlo, ni tamno, ono je *forma razgraničenja* površina, i da bismo ga videli mi moramo ili videti obe površine, ili, ako se radi o slučaju sa svetlošću i tamom, i videti jednu i ne videti drugu u smislu u kojem *vidimo* da deo poda koji je u mraku ne možemo videti. Nije takvo Σ deo jedne površine, jer da je tako druga ne bi bila neophodna, pošto ne bi bilo *nužno* da barem vidimo da dalje više ništa ne vidimo.

Σ koje tako vidimo – suprotno očekivanju na osnovu vekovne tradicije, po kojoj se geometrijski objekti ne mogu videti – zadovoljava uslove da bude *geometrijska linija*, jer ono kao lik ili forma razgraničenja površina *nema širinu*. Baš zato što je to forma razgraničenja površina, moramo, da bismo je videli, videti *i obe površine*, ili na tačno određen način videti jednu i na određen način ne videti drugu. Irelevantno je da li je crno boja ili nije; i privacija može imati formu.

Možda je jedino Ruđer Bošković hteo da liniju ne samo odredi kao presek dve površine, što se nekad činilo u geometriji, već da je učini *vidljivom* na opisani način (*Bošković 2*, str.18).

I geometrijska tačka se može videti, recimo kao tromeđa triju raznobojnih površina, kao na sledećoj slici:



Možda je glavni uzrok što su filozofi toliko insistirali na nevidljivosti tačka i linija okorela praksa kojom su se ovi geometrijski objekti predstavljali. Ako je tačku ili liniju trebalo *neposredno*

predstaviti crtanjem pomoću štapa, krede ili olovke, onda to nije bilo moguće učiniti. Zato su učenici i morali da uče da *apstrahuju* od širine ili dužine, čak i od debljine, da bi dospeli do onog na šta je ciljao učitelj. Kao da učiteljima nikako nije padalo na pamet da taj neposredni način predstavljanja nije i jedini.

Osim ovog banalnog uzroka postoji možda i suptilni filozofski razlog za poricanje mogućnosti viđenja geometrijske tačke i linije. Ako u želji da predstavimo geometrijsku liniju *bojimo* neke površine *ne crtajući* nikakvu liniju, zašto posle toga kažemo da vidimo liniju, a ne samo različito obojene površine? Ali, zar mi ne vidimo *različite načine razgraničavanja*?

Može se izgraditi neka filozofija viđenja u strogom smislu, tako da se kaže da se samo obojene površine vide a da je, recimo, ono Σ koje smo u mrlji pročitali, odnosno ona sigmoidna linija razgraničenja, na neki način *domišljena* na viđenje raznobojnih površina. Ako takva filozofija percepcije ne želi samo da pravi razliku između dva viđenja (za tu razliku vidi, recimo, *Dretske 2*, gl. 3 i 4), već bi u razmotrenom slučaju samo za površine, ili „čulne kvalitete", trebalo da kažemo da se vide a da je ostalo domišljeno, ona je pogrešna, pošto mi ništa ne možemo da domislimo ako ne *vidimo* raznobojne površine *kako se uzajamno ograničavaju*. Mi možemo, znajući alfabet, mrlju domisliti do slova „sigma", ali i onaj ko ne zna alfabet *videće sigmoidno razgraničenje*, koje se *razlikuje* od nekog drugog.

Tačno je da se viđenje boja razlikuje od viđenija oblika u pogledu složenosti, i to jednom može biti značajno. Ako neko kaže da vidi žuti krug, ili žutu kružnu površinu, *odmah* ćemo znati da on ili vidi *i neku drugu* površinu, ili je jedan deo u njegovom vidnom polju crn ili taman. *Kružna* površina se *mora* videti kao ograničena, *žuta ne mora*. Iskaz o viđenju linije *implicira* iskaz o viđenju *dve* površine različite boje ili svetline, pošto je viđenje geometrijske linije *nemoguće* bez viđenja dve površine koje se uzajamno ograničavaju; geometrijska linija se ne može prosto videti kao što se može videti žuta.

Postojanje *implikacije* između dva iskaza nije dovoljno za *značenjsku ekvivalenciju*; nužan uslov nije dovoljan. Kad vidimo geometrijsku liniju, mi vidimo upravo da se dve površine uzajamno ograničavaju i vidimo način na koji se ograničavaju, a ne samo dve površine koje se *osim toga* još i uzajamno ograničavaju. Kad vidimo tačku, onda vidimo kako se tri ili više površina uzajamno ograničavaju, opet ne samo tri ili više površina koje se osim toga još i uzajamno ograničavaju.

13. *Opažanje geometrijskih površina*

Možda je neko i pored svega ostao nedovoljno uveren u mogućnost viđenja geometrijskih tačaka i linija da bi miran produžio u aporetiku. I tome ima leka. Geometrijske površine je jednostavnije videti i tu se neće pojaviti neka razlika poput malopređašnje razlike u „složenosti viđenja", a za Ahilov zadatak biće nam dovoljne i geometrijske površine umesto tačaka.

Zamislimo dva prostranstva, jedno obasjano žutom, drugo crvenom svetlošću, koja se neposredno nastavljaju jedno na drugo, slično kao malopređašnje raznobojne površine. Zamislimo da živimo u žutom prostranstvu i da možemo da vidimo samo donde dokle seže žuta svetlost. Čim pređemo u crveno prostranstvo u potpunom smo mraku. Imamo, međutim, specijalne naočare zahvaljujući kojima i crveno prostranstvo postaje vidljivo, ali sa tim naočarima ništa ne vidimo u žutom prostranstvu. Kad gledamo bez naočara iz žutog u pravcu crvenog prostranstva, vidimo nešto poput ogromnog crnog zida iako to što vidimo nije zid. Za to vreme naše kolege koje gledaju kroz naočare iz crvenog u pravcu žutog prostranstva – vide to isto. Da li površina koju mi i oni gledamo ima debljinu? Nema, jer mi vidimo samo donde dokle seže žuta, oni donde dokle seže crvena svetlost; zar nije ta površina *jedna ista, geometrijska* površina?

Da li stvar drukčije stoji kad gledamo crni zid, ili uostalom, plavi zid? Ako je zid neproziran, mi ne vidimo ni jedan sloj tog zida. Ne vidimo li i kad gledamo zid samo geometrijsku površinu?

Neočekivano smo navedeni da posumnjamo u to da ispravno govorimo kad kažemo da vidimo zid, pošto osim površine ne vidimo nijedan sloj zida. Ispitajmo malo detaljnije „gramatiku"[1] reči „videti".

14. *Vizuelni i taktilni svet*

Mislim da niko od onih koji čitaju ovaj tekst neće za štap zaronjen u vodu reći da je prelomljen. To će možda reći neko neiskusno dete. Ali; isto tako, niko sem nekog neiskusnog deteta neće potvrdno odgovoriti na pitanje: „Vidiš li prelomljen štap?" Verovatno bi odgovor glasio: „Ne, štap samo *izgleda* prelomljen". No, moglo bi se nastaviti s pitanjem: „Zar ti ne *vidiš* prelomljen štap? Nećeš reći da *vidiš neprelomljen štap*, ti samo *znaš* da on, *u stvari*, nije prelomljen?!"

Mislim da bismo svi, i pored ovog razjašnjenja i profinjenja pitanja, osećali nelagodu kad bi trebalo da priznamo da *vidimo* prelomljen štap. Mi upotrebljavamo glagol „videti" samo ako mislimo da je ono za šta kažemo da ga vidimo onakvo kakvim ga vidimo. Mi smo pred neugodnom dilemom kad treba da odgovorimo da li vidimo prelomljen, ili neprelomljen štap. Ne bismo rekli da vidimo *neprelomljen štap*, pošto on izgleda prelomljen baš kad ga gledamo, no opet, baš zato što on samo izgleda prelomljen, ne bismo rekli ni da vidimo *prelomljen štap*. Najradije bismo izbegli dilemu i rekli da *vidimo štap koji izgleda prelomljen.*

Ono neiskusno dete bi u istoj situaciji glatko reklo da *vidi* prelomljen štap i čudilo bi se kad bi se posle vađenja iz vode ispostavilo da je on neprelomljen. Zaronilo bi ga, verovatno, ponovo u vodu i pipalo dok je u vodi. Najzad bi prihvatilo da štap *samo izgleda* prelomljen i verovatno nikad više ne bi reklo u takvoj situaciji da vidi prelomljen štap.

Iskustvo, između ostalog, određuje to šta ćemo *reći* da vidimo kad nešto gledamo. Mogućnost greške ili iluzije navelo je neke filozofe da traže formu perceptivnih iskaza koja će jamčiti za njihovu nepogrešivost (vidi, na primer, *Grice 2*, str. 102–103). Nama ništa slično sada nije potrebno. Pouka kojom se možemo zadovoljiti jeste uviđanje da *iskustvo utiče*, ili bar *može da utiče*, na to šta se može videti, ili, možda preciznije a manje obavezujuće, na to *šta ćemo reći da vidimo*. To omogućava da pravilno razumemo neke različite, ili čak nespojive, izjave date u istoj situaciji. „Vidim štap koji samo izgleda prelomljen" i „Vidim prelomljen štap" nespojive su izjave, jer druga izjava u svakodnevnom jeziku implicira da onaj koji to kaže misli da štap i jeste prelomljen (up. *Dretske 2*, str. 48), dok se to prvom izjavom eksplicitno poriče.

Kada gledamo u crni zid, reći ćemo da vidimo crni zid jer nas iskustvo, između ostalog, uči da je to crni zid. Taj, ili neki sličan zid, mi smo u životu više puta dodirnuli, možda smo po njemu žvrljali, preskakali ga, ili o njega glavu razbili. Međutim, kada stanovnici žutog prostranstva gledaju bez naočara u pravcu crvenog, oni će možda reći da vide crni zid ako nikad nisu kročili u crveno prostranstvo i ako je *vizuelno* iskustvo bilo *jedino* njihovo iskustvo o onome što sada gledaju. No ako su prelazili u crveno prostranstvo, oni neće reći da vide zid, jer *znaju* da pred njima nije zid. Šta će oni reći da vide? Uzmimo da su bivajući u crvenom prostranstvu koristili one specijalne naočare i da dobro znaju kako je tamo. U toj situaciji oni će mažda prosto reći da vide crveno prostranstvo, pošto se ono prostire iza tog crnila u koje oni gledaju, ali mogli bi da kažu da vide početak tog prostranstva jer odatle, *od* crne površine, ili, možda bolje, *tom* površinom, počinje crveno prostranstvo. U svakom slučaju, ako bi ih neko neupućen pitao šta je to crno pred njima, nije li to možda kraj sveta, mislim

da bi prirodan odgovor bio da se kaže da nije, *jer* je to *početak* jednog prostranstva koje se zato i zato zove crveno prostranstvo. No iako je to početak novog prostranstva, *ni pedalj* od njega se ne vidi. Njegov početak nije njegov deo, ako prihvatimo da je crna površina njegov početak.

Početak crvenog prostranstva je za ljude koji uz pomoć naočara gledaju iz crvenog u smeru žutog prostranstva *početak žutog* prostranstva. *Početak jednog je kraj drugog* i obrnuto. Ali ovakvi počeci i krajevi nisu delovi onoga čega su počeci i krajevi. *Granica nije deo onoga što ograničava* (up. *Aristotle 22*, 263 b 10 i dalje).

Nameće se pitanje zašto bi delovalo čudno kad bismo rekli da vidimo početak zida kad gledamo zid, nasuprot prostoj izjavi da vidimo zid. Ne ukazuje li to na neku razliku u odnosu na slučaj sa žutim i crvenim prostranstvom. Možda neka razlika zaista postoji, ali treba vidati kakva i na šta nam ona ukazuje. Mislim da obično ne kažemo da vidimo *početak* zida zbog toga što je to ograničavanje na početak *nepotrebno*. Kad već *na osnovu iskustva* između ostalog, *znamo* da je pred nama *zid*, mi onda i kažemo da *vidimo zid*.

To je jedan razlog – ne mislim da je jedini – koji se može iskoristiti za objašnjenje jezičke prakse u kojoj se kaže da se vidi zid, a ne da se vidi početak zida. Ali ono što je za nas presudno jeste da kada kažemo da vidimo zid mi *ne mislimo* i *ne impliciramo* da vidimo ijedan sloj toga zida kad je zid neproziran. Delovalo bi čudno kad bi neko gledajući neproziran zid rekao da vidi (samo) početak zida, ali onoga ko bi to rekao niko ne bi pokušavao da demantuje time što bi izjavljivao kako on vidi slojeve zida, kako vidi zid iznutra, ili kako vidi kroz zid.

U jednoj malo neobičnoj ali sasvim zamislivoj situaciji, u kojoj bi nam bilo *važno* kakav je zid iznutra i u kojoj bi nam neki novopridošli sagovornik autoritativno tvrdio, samo bacivši pogled, da je zid takav i takav, mogli bismo ga sasvim lepo zapitati:

„Kako to znaš, kad *vidiš samo površinu zida*?". U jednoj takvoj situaciji se naglašava da se ne vide unutrašnji delovi zida, već samo površina. Pridošlica može da objasni kako je zaključio da je zid takav i takav na osnovu toga i toga, pozivajući se na iskustvo i znanje, ali on neće demantovati da vidi samo površinu.

Ova *površina zida*; za koju se sada *eksplicitno izjavljuje da se vidi*, dok se u isto vreme *poriče da se vidi* ijedan, makar kako tanak *sloj* zida, odgovara onom *početku crvenog prostranstva* iz prethodnog primera. I kao što tamo crnu površinu koja je označena kao početak crvenog prostranstva nije trebalo smatrati delom tog prostranstva jer se u tom prostranstvu bez specijalnih naočara ništa ne vidi dok se ta površina videla, tako i ovde, površina zida koja se vidi ne treba da se smatra delom zida. Ako neko hoće da tu površinu nazove delom onda bi mu, ako se to prihvati, bar trebalo skrenuti pažnju da je to jedan *neobičan* deo.

Ne želim da predlažem reviziju običnog jezika zahtevajući da se ne govori više kako se vidi zid i da se umesto toga kaže kako se vidi površina nečega za šta se zna ili pretpostavlja da je zid. Naprotiv, imajući u vidu *svrhe* kojima služi jezik, mislim da treba nastaviti govoriti onako kako se govori. Ali, malopređašnji primeri pokazuju kako je samo zahvaljujući tim svrhama i prethodnom iskustvu, koje *nije isključivo vizuelno*, opravdano i moguće tako govoriti, što sve zajedno ne protivreči tvrdnji da gledajući neproziran zid, ili u pravcu neprozirnog zida, mi *vidimo površinu tog zida koja nema debljinu*.

Svet našeg iskustva nije samo svet našeg vizuelnog iskustva; naše iskustvo je *ujedinjeno iskustvo*[1], iskustvo u kojem učestvuju i druga čula pored čula vida, pre svega čulo dodira, i iskustvo koje je zasnovano na našoj delatnosti i manipulisanju stvarima. Zahvaljujući ovakvom ujedinjenom iskustvu stanovnici žutog prostranstva će razlikovati početak crvenog prostranstva od crnog zida o koji se može razbiti glava.

Svi dosadašnji zaključci idu u prilog uverenju da je svet našeg iskustva pun geometrijskih tačaka, linija i površi. U njemu, doduše, možda nema ravni, jer možda nema potpuno ravnih površina, kao što možda nema ni krugova, kvadrata i drugih savršenstava. Ali, geometrijskih tačaka, linija i površi ima.

Utoliko što stvari možemo da gledamo sa raznih strana i tako vidimo da one imaju debljinu, izgleda da je naš vizuelni svet pun *geometrijskih tela*. Ali ta tela se kreću, sudaraju se i raspadaju pred našim očima i, osim toga, učestvuju i u našem nevizuelnom iskustvu, jer ona su objekti jedinstvenog iskustva. Ona su tvrda ili meka, ona bodu, neka su lomljiva, neka lakša, neka teža, neka brzo menjaju oblik, neka su prozirna, kroz neka se može lakše, kroz neka teže plivati ili roniti. Sve te osobine, i još mnoge slične osobine tela, nisu one o kojima ćemo *geometra* čuti da o njima govori, to su osobine o kojima govori *fizičar* (kome se pridružio i *hemičar*). Tela imaju različite osobine ne samo zato što su različitog *oblika*, već i zato što su od različitog *materijala*; ona su *materijalna*.

Za onog ko ispituje otpornost raznih materijala nećemo reći da se bavi geometrijom, ali preostaje pitanje da li su tela sačinjena od tih materijala čiju otpornost on ispituje geometrijska tela. Odgovor zavisi od toga da li hoćemo da insistiramo na tome da tela koja su predmet izučavanja geometrije ne smeju da imaju materijalne karakteristike, ili im to nećemo braniti, nego ćemo samo reći da te karakteristike nisu one koje geometra zanimaju, da ih on jednostavno ne uzima u obzir i o njima ne govori.

Ako odgovorimo na prvi način, geometrijskih tela neće biti u svetu našeg iskustva, ako odgovorimo na drugi, materijalna tela će biti geometrijska. Za sada ne vidimo nijedan razlog da se insistira na prvom odgovoru. Kao što *praktički* ujedinjujemo vizuelni i taktilni svet dobijajući *jedinstvene* objekte iskustva, tako možemo ujediniti i *nauke* dobijajući objekte koji su i geometrijski i materijalni, samo što *geometrija* izučava *jedne* a *fizika*, i njoj srodne teorijske i primenjene nauke, *druge* karakteristike tih objekata. Pitanje *primenljivosti* geometrije u fizici tako ne izgleda misteriozno. Ako su materijalna tela geometrijska, onda i geometrija govori o materijalnim telima, mada ne o njihovim materijalnim karakteristikama.

Sve što uočavamo na materijalnim telima ne mora biti materijalno; mi o njima govorimo kao materijalnim s obzirom na njihovu *građu* (ὕλη) (up. *Aristotle 1*, 1029 a 2 i dalje), ali nismo obavezni da ili kažemo da ona nemaju *oblik* (εἶδος) (*ibid.*, *loc. cit*)[1], ili tvrdimo da je i taj oblik materijalan. Materijal je materijalan, a oblik je idealan.

16. Dodirivanje

Prisustvo geometrijskog sveta u materijalnom i karakteristični „sudari" ova dva sveta, koji sugerišu da ih ili definitivno razdvojimo ili još tešnje povežemo, najlepše se vide u uporednom ispitivanju dodirivanja geometrijskih i dodirivanja materijalnih tela.

Geometrijska tela se dodiruju tako i samo tako što imaju zajedničke delove površina ili, barem, jednu zajedničku liniju ili tačku. Kod dodirivanja materijalnih tela, kao recimo kod dve priljubljene drvene kocke, ne bi se reklo da ona imaju zajedničke delove površina, pošto nisu srasla, a ipak bismo rekli da se dodiruju. U čemu je uopšte sličnost ili analogija između ovakve vrste dodirivanja?

Možda treba prosto odustati od analogije i reći da se geometrijske kocke dodiruju na *jedan*, drvene na *drugi* način. Mogla bi se u tu svrhu iskoristiti Aristotelova razlika između dodirivanja

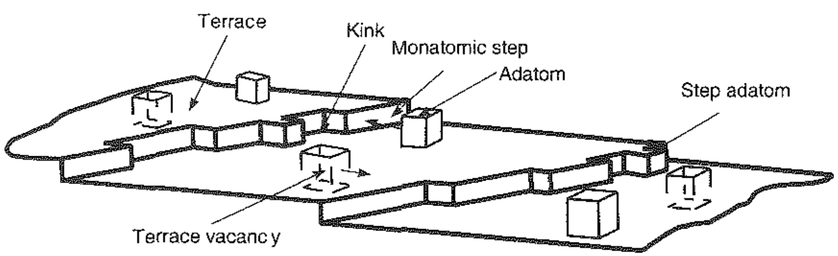
dve stvari kojima se ostvaruje *kontinuitet* (συνεχές) (*Aristotle 22*, 227 a 10) i dodirivanja kojim se *ne* dobija kontinuitet već samo *kontingent* (ἁπτόμενον) (*ibid.*, 227 a 6)[1]; u prvom slučaju je kraj (ἔσχατον) (*ibid.*, 227 a 10 i dalje) jedne stvari početak druge, u drugom nije. Tako bi se *geometrijske* kocke dodirivale *kontinualno, drvene kontigualno*. U ovakvom rešenju matematičarev svet, čistih oblika[2], i naš hiletički svet, drvenih i uopšte materijalnih predmeta[3], bili bi razlučeni i preko razlike u načinu na koji se njihovi objekti dodiruju.

Može izgledati da smo na ovakvo rešenje prinuđeni, jer i pokušaj da se dodirivanje geometrijskih kocaka odredi po uzoru na dodirivanje drvenih, i pokušaj da se dodirivanje drvenih definiše po uzoru na dodirivanje geometrijskih, deluje sasvim ekscentrično; utoliko ne zavređuju da im ovde posvećujemo prostora (više o tome vidi u *Arsenijević 1*, str. 120 i dalje). Uz malo razmišljanja lako je sagledati kakva bi se radikalna revizija osnova geometrije morala preduzeti da bi tačke mogle da se dodiruju a linije ili površine jedna uz druge priljube. Verovatno bi to bila intervencija koju geometrija ne bi preživla (*ibid.*, *loc. cit.*). S druge strane, dopustiti da drvene kocke imaju zajedničke delove svojih drvenih površina značilo bi učiniti ih sraslim i sve to samo zbog neke sklonosti ka analogijama ili graničnim slučajevima zvati dodirivanjem.

Međutim, i pokušaj ekskluzivnog razdvajanja kontinualnog i kontigualnog dodirivanja vodi nas brzo u teškoće. Matematičar može definisati dodirivanje svojih tela, jer je posedovanje zajedničkih delova površina, ili bar tačaka ili linija, i *nužan* i *dovoljan* uslov za dodirivanje geometrijskih tela. Kako definisati kontigualno dodirivanje dva materijalna tela kad odsustvo zajedničkih krajeva (delova) *nije dovoljan* uslov, te je određenje samo negativno? Da li se išta nalazi između dve drvene kocke koje se dodiruju? Rekli bismo da se ne nalazi jer se u protivnom slučaju kocke ne bi dodirivale. No ako se ništa ne nalazi između njih, one se *neposredno nastavljaju* jedna na drugu. Zbog ove karakteristike izgleda da bi trebalo reći da i ovde priljubljenjem nastaje kontinuitet, iako smo odbacili pokušaj da se njegovo ostvarivanje *definiše po analogiji* sa kontinuitetom koji nastaje pri dodiru dve geometrijske kocke.

Sve se rešava jednostavno ako prihvatimo da su i materijalna tela geometrijska i time omogućimo *kontigualno-kontinualna* dodirivanja. Aristotelova razlika je potrebna[4], ali je uzajamna ekskluzivnost dva načina dodirivanja ne samo nepotrebna nego nas vodi u teškoće.

Avrum Strol je verovatno u pravu kad pretpostavlja da je uobičajeno mišljenje o površinama takvo da se „za svaku od dve bilijarske loptice veruje da ima svoju vlastitu površinu... koju ne gubi kad se loptice dodirnu" i da „dok se dodiruju, loptice nemaju ništa zajedničko" (*Stroll*, str. 280). I savremena fizička „nauka o površini", koja eksperimentalno ispituje heterogenu površinu na atomskoj skali, o površini



misli na sličan način, pošto se u shematskom prikazu (vidi sledeću sliku iz *Somorjai*) pojavljuju i entiteti koji očigledno imaju neku debljinu. Ali, o površinama *materijalnih* tela *govori se* i na drugi način; za to je dovoljno pogledati dnevnike Leonarda da Vinčija (*Leonardo da Vinci*, str. 75–76): „Dodir tečnosti i čvrstog tela čini zajednička površina jednog i drugog". Ova površina „nije ni vazduh ni voda", ona

„nije deo ni jednog ni drugog", već je „zajednička granica dva tela koja *nisu kontinualna*", a da ova tela „*ništa ne odeljuje* jedno od drugog" (*sve podv. M. A.*).

Očigledno Leonardo misli da pomenuta tela nisu jedno u odnosu na drugo kontinualna utoliko što su to raznorodna materijalna tela, ali ta tela se dodiruju kao geometrijska, ona imaju *zajedničku geometrijsku površinu*. Kao raznorodna materijalna tela ona se dodiruju kontigualno i čine *kontingent*, kao geometrijska ona daju *kontinuitet*.

Vredelo bi ispitati kakav je odnos između dva načina na koja se govori o površinama, da li je, naime, to nešto više od homonimnosti (vidi dole, § 66), ali to nas trenutno ne zanima. Dovoljno je da zaključimo da se *kad* govorimo o površinama drvenih kocaka koje *nisu* drvene kao što crna površina koju vide stanovnici žutog i crvenog prostranstva nije ni žuta ni crvena, dve *drvene kocke mogu se dodirivati tako što imaju zajedničke delove površina* tvoreći *kontinuitet*. One se dodiruju kao dve *geometrijske* kocke, a da pri tom *nemaju* zajedničke *delove građe* iako imaju zajedničke strane. A što su one dve kocke, a ne *dva dela* jednog kvadra, to je tako iz razloga o kojima *geometar ne zna ništa*, jer *ne razmatra one karakteristike zbog kojih je to tako*. To je tako zbog nekih fizičkih karakteristika tih kocaka o kojima možemo reći nešto tek mi koji *praktično manipulišemo* njima ili fizičar koji to *teorijski ispituje*. I iz tih *vangeometrijskih* razloga je to dodirivanje *i kontigualno*, pored toga što je kontinualno.

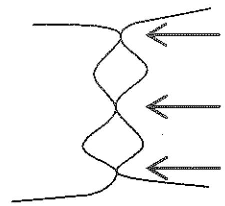
Zamislimo ovakav niz slučajeva: 1. gvozdenu i drvenu kocku iste veličine, koje su priljubljene jedna uz drugu; 2. dve fino obrađene drvene kocke iste veličine priljubljene tako da mislimo da je pred nama kvadar; 3. dve fino obrađene suprotno namagnetisane gvozdene kocke iste veličine priljubljene tako da deluju kao kvadar; 4. kvadar od plastelina obojen spolja tako da mislimo da se radi o dve priljubljene kocke; 5. kvadar od plastelina koji nije samo spolja obojen tako da izgleda kao da su dve kocke priljubljene, već je plastelin i iznutra na odgovarajući način raznobojan da potvrdi spoljašnji utisak.

U prvom slučaju je već *na prvi pogled* jasno da je reč o kontigualnom dodirivanju dve kocke, koje je kontinualno ako ih posmatramo kao geometrijske. U drugom slučaju je potrebno da kocke *uzmemo u ruke* da bismo se uverili kako izgled vara i zaključili da je i tu reč o kontigualnom dodirivanju, dok je u trećem slučaju potrebno čak da *primenimo silu* da bismo se u to uverili. U četvrtom slučaju bismo posle malo *zavirivanja po unutrašnjosti* zaključili da se ne radi o dve kocke već kvadru, a u petom, spolja gledano, istom takvom slučaju, unutrašnja raznobojnost bi nas navela na *suprotan* zaključak.

Za *dva geometrijski određena dela jednog homogenog tela* reći ćemo da se dodiruju *samo kontinualno* ako nemamo *nikakvog razloga* da kažemo da je granica između ta dva dela *ičim fizički aktualizovana*. Ako se to telo *slomije* na tom mestu gde se ta dva dela graniče, pa onda tako dobijena *dva tela* priljube jedno uz drugo na istom mestu, granica *bi bila* aktualizovana i tada *bismo imali* razloga da govorimo o kontigualno-kontinualnom dodirivanju. Slično tome bismo za *dva heterogena dela* jednog tela, iako su to dva dela a ne dva tela, mogli da kažemo da se kontigualno-kontinualno dodiruju, jer *raznorodnost materijala* u tom slučaju predstavlja *razlog* da se govori i o *kontiguitetu*[5].

Razmotrimo još dva pitanja, ili primedbe na račun dodirivanja dva materijalna tela.

Pošto do sada nismo pronašli potpuno glatke površine, kako se dodiruju kocke čije površine nisu glatke? Može se jednostavno odgovoriti da nema *apsolutne* neravnosti i da se te kocke dodiruju tako što se *delovi neravnih površina* poklapaju kao što je to shematski prikazano na sledećoj slici:



Strelice ukazuju na mesta dodira. Ako neko sad kaže da su i ta mesta na kojima se tela navodno dodiruju neravna, onda se na nižem nivou ponovo može iskoristiti ista shema. I tako redom, za svaku se neravninu može iskoristiti ista shema. Onaj ko insistira na uvek novim neravninama ostaje bez poente, pošto *ako* se tela uopšte dodiruju, onda negde, na nekom nivou, shema poput gornje postaje *definitivna*. Preostaje mogućnost da se kaže da se tela možda uopšte i ne dodiruju. Ali šta im stoji na putu da se dodirnu? Borac za neravnine tu može da se pozove na neravnine kao razlog, jer on neku relativno glatku ravninu može da tretira kao neravnu na nekom sledećem mikronivou, ali ne može da počne sa apsolutnom neravnošću. Prema tome, ili se tela iz nekog, *spoljašnjeg* razloga ne mogu dodirnuti, ili borac za uvek nove neravnine gubi u ovom nadmetanju.

Pozivanje na *fizičareva* istraživanja i njegovu kompetentnost u cilju navođenja razloga iz kojih se tela uopšte ne bi mogla kontigualno dodirivati predstavlja drugu primedbu koju treba da razmotrimo. *Moguće je* da se *ispostavi*, i štaviše *ispostavilo se*, da su objekti našeg svakodnevnog iskustva, u stvari, hrpa čestica i da na mikronivou ono što mi smatramo *kontigualnim* dodirivanjem gledano iz mikroperspektive uopšte nije dodirivanje. No ako ovom ništa ne dodamo, ostaje otvoreno pitanje kontiguiteta na mikronivou. Pozivajući se na kvantnu mehaniku mogli bismo osporavati postojanje kontigualnog dodirivanja. Neslično dvema bilijarskim kuglicama, koje su prestale da služe kao model u kvantnoj mehanici, možda dva tela kad se dodirnu uvek postaju jedno homogeno telo poput talasa, kao kad se elektron i pozitron anhiliraju u γ-zračenju. Možda se najzad u fizici prihvata Boškovićeva vizija tačkaste strukture materije (vidi *Bošković 3*, str. 4–6): *ili* apsolutni kontinuitet *ili* apsolutna diskretnost; svet bez kontigualno-kontinualnih dodirivanja.

Ali, celo pobijanje postojanja kontigualnog dodirivanja ipak bi samo značilo da *na sadašnjem nivou znanja* nema *primera* takvog dodirivanja zato što se za ono dodirivanje koje nam je služilo kao model dodirivanja makroobjekata ispostavilo da uopšte nije dodirivanje, a neko drugo nije nađeno. To nije *pobijanje mogućnosti* kontigualnog dodirivanja, kao što nije ni pobijanje toga da bi *dodirivanje makrotela predstavljalo model za kontigualno dodirivanje* kad bi odista bilo onakvo kakvim ga mi uobičajeno smatramo. Zato to nije ni pobijanje *opravdanosti* uobičajenog načina govorenja o dodirivanju tela u uobičajenim situacijama, koje podrazumeva kontiguitet.

17. Porodica postojanja

Ako u materijalnom svetu ima geometrijskih tačaka, linija i površi, koje se i vide, onda izgleda prirodno reći da pored drveta, gvožđa i razne druge građe (ὕλη) i ovi geometrijski entiteti *postoje*. Ali, ne poričući da se oblici mogu videti, možda se može reći da jedino građa postoji *po sebi*, dok su oblici *samo* određena rasprostrtost i raspored građe. Oblici se menjaju kretanjem, koje je preraspoređivanje građe, tako da su i geometrijski oblici u svom *postojanju* i *nastajanju* potpuno zavisni od građe i preraspoređivanja građe.

Zagovornik ovog stanovišta, koje se nasuprot dualizmu materije i oblika može nazvati materijalističkim monizmom, tvrdio

bi da sve ono čije je postojanje potpuno zavisno od postojanja nečeg drugog, tako da postoji *samim tim* i *isključivo tako* što to drugo postoji – kao što je postojanje geometrijskih entiteta potpuno zavisno od postojanja na određeni način rasprostrte građe – *uistinu ne postoji*. Nezavisno od toga da li se vrši *značenjska* redukcija (vidi gore, § 12), može se izvršiti *ontološka*.

Zašto po ovom stanovištu, koje poriče postojanje geometrijskih oblika, ne postoji osim građe još i *raspored* građe? Zato što raspored građe nije nikakav *entitet* pored ili povrh građe; građa je *samim svojim postojanjem* nekako raspoređena i raspored postoji *samim tim* i *isključivo tako*. *Ontološki gledano* mi, prema ovom stanovištu, treba da govorimo o *raspoređenoj građi*, a *ne* o *rasporedu građe*. Razlika, između rasporeda građe i raspoređene građe za zagovornika ovog stanovišta ontološki je veoma važno, nezavisno od opravdanosti ili neopravdanosti značenjske redukcije.

Prema čuvenoj Kvajnovoj devizi, po kojoj biti znači biti vrednost promenljive (vidi *Quine 2*), račun predikata prvog rada nas ne obavezuje na ontologiziranje svojstava, pošto ne koristimo predikatske promenljive. Taj bi račun, uobičajeno interpretiran, mogao da prihvati nominalista koji poriče postojanje svojstava. On bi, nezavisno od toga, svojstva mogao nekako tako da odredi, recimo ekstenzionalno (vidi *Armstrong 2*, str. 28 i dalje), da se vidi kako svaka rečenica računa predikata u interpretaciji govori, u stvari, samo o individuama, ne individuama *i* o svojstvima. Slično tome, onaj ko poriče postojanje geometrijskih objekata ne bi u nekom odgovarajućem računu imao promenljive za *raspored* građe i taj bi račun interpretirao tako da on govori samo *o građi*, dok bi raspored odgovarao svojstvu kod nominaliste. A odatle bi sledilo da kad govori o oblicima, koje tvori raspoređena građa, on opet, *u stvari*, govori samo o građi, a ne o građi *i* rasporedu ili o građi *i* obliku.

U dublja sporenja dva ontološka stanovišta, dualizma materije i oblika i materijalističkog monizma, nećemo da ulazimo, jer nam to nije potrebno. Za nas je taj spor samo borba za dobijanje ili poricanje *prava na upotrebu reči* „postojanje“ u nekim slučajevima.

Ali za nas može da bude vrlo značajno uviđanje da ukoliko prihvatimo da govorimo o postojanju geometrijskih tačaka, linija i površi, ne smemo zaboraviti da se one veoma razlikuju od materijalnih delova materijalnih tela i da se njihovo *postojanje* takođe *razlikuje* od postojanja ovih delova. Možemo na vitgenštajnijanski način govoriti o *porodici postojanja*, imajući uvek na umu da se radi o *porodici*. Geometrijski oblici, bez obzira da li se, kao u slučaju tačke i linije, *vide kao granice*, ili se, kao u slučaju površi, *vide direktno, jesu* granice i prihvatićemo zasad da postoje samo tako. Mnogi problemi s kojima ćemo se sresti vezani su za pitanje *samostalnosti* tačaka, linija i površi; zato je za nas najvažnije *kako* ovi objekti postoje *ako* priznamo da postoje, nego *da li* u nekom strogom smislu postoje.

Osim toga što je važno stalno imati na umu *kako* se geometrijski objekti mogu videti i *kako* postoje, važno je imati stalno na umu i *koje karakteristike* oni mogu ili ne mogu imati. Oven je u svom slavnom članku „Zenon i matematičari“ (*Owen 6*) prihvatio da govori o *crvenoj tački*, misleći na *geometrijsku* tačku (*ibid.*, str. 220) ako je ova tačka na crvenoj površini. Iako je čudno da se tako govori, i to se može dozvoliti, barem kao eufemizam, ako se ne zaboravi da to samo označava tačku na crvenoj površini.

18. Trenutak

Neka telo koje miruje počne da se kreće. Možemo da kažemo da se vreme u kojem se ono kreće neposredno nadovezuje na vreme u kojem je mirovalo, jer nema nikakvog vremena između. Po analogiji sa kontigualnim i kontinualnim dodirivanjem tela, možemo reći da se vremena mirovanja i kretanja tela kontigualno-kontinualno dodiruju, kontigualno jer su kao vremena mirovanja

i kretanja tela raznorodna, to su vreme *mirovanja* i vreme *kretanja*, kontinualno jer između njih nema vremena, *kraj jednog* je *početak drugog*. Taj kraj jednog koji je početak drugog *granica* je dva vremena, Aristotelov νῦν (*Aristotle 22*; 233 b 33, 234 b 5), koje odgovara tački, liniji ili površi kao granicama u geometrijskom i materijalnom svetu. Νῦν, latinski *momentum*, uvek ćemo prevoditi sa *trenutak*, dok ćemo bilo koje određeno, ma koliko kratko, trajanje zvati: prosto *vremenski interval*.

19. Dosegnuće tačaka

Posle mnogih epizoda vraćamo se glavnim ličnostima naše drame. Razmatrali smo sličnosti i razlike između kosmičkih stanica koje Zevs treba da doziva i tačaka koje Ahil treba da doseže; uporedimo sada *dozivanje* i *dosezanje*.

Zevs stanicu *ne može pozvati trenutno*, njemu treba bar malo vremena da to učini, bez obzira kako taj poziv zamislili. Slično shemi po kojoj se stanice smenjuju (vidi § 10), Zevs može planirati pozive po shemi koja mu omogućava da uvek ima dovoljno vremena i za poziv i razgovor i za odmor između dva poziva. On, recimo, poziv može uputiti po isteku prvih četvrt sata, završiti razgovor po isteku prvih pola sata, i odmarati se narednu osminu sata, zatim uputiti poziv, razgovarati do isteka tri četvrti sata, i tako redom, n-ti poziv uputiti posle isteka $(2^n - 3)/2^n$ h i završiti razgovor posle isteka $(2^n - 1)/2^n$ h.

Prva nezgoda s Ahilovim dosezanjem tačaka je u tome što smo dosad geometrijske objekte u materijalnom svetu prihvatali samo kao granice pri kontigualno-kantinualnom dodirivanju. Ovu nezgodu možemo otkloniti tako što pretpostavimo da Ahil na svom putu jezdi kroz prostranstva koja su obasjana različitim svetlostima i koja se jedno na drugo neposredno nadovezuju kao žuto i crveno prostranstvo u našem ranijem primeru (§ 13). Neka su geometrijske površi koje se obrazuju ovakvim uzajamnim ograničenjima prostranstava ravni međusobno paralelne, upravne na stazu kojom Ahil trči, tako da Ahil na njih naleće, odnosno u nova prostranstva uleće, direktno *en face*. Neka se raznobojna prostranstva smenjuju redom posle 1/2 km, 3/4 km, ..., $(2^n-1)/2^n$ km, ... puta. Sad možemo reći da je Ahil dosegao n-tu ravan kad je neki njegov napred najistureniji deo, recimo – u normalnim uslovima – deo nosa, *dodirnuo prostranstvo* koje počinje posle $(2^n-1)/2^n$ km puta. Ako hoćemo da taj dodir bude baš dosegnuće *tačke*, možemo pretpostaviti da Ahil ima tako lepo zaobljen nos da se s ravni mora dodirnuti kao što bi se s njom dodirnula lopta, to jest tačkom.

Druga nezgoda nastaje kad se zapitamo *kada* se Ahilovo dosegnuće tačke dešava, u kojem vremenu? Dok su se Zevsova pozivanja stanica događala u nekom *vremenskom intervalu*, Ahilova dosegnuća tačaka dešavaju se *trenutno*. Aristotel je, analizirajući Zenonovu *Strelu*, tvrdio da strela koja leti *nikada nije ni u jednoj* tački svoje putanje[1]. Dosegnuće tačke kako smo ga maločas opisali bilo bi realno kada bi Ahil neko vreme proveo u položaju dodirivanja novog prostranstva.

20. *Staccato trčanje*

Da bismo realizovali dosegnuće tačke, zatražimo da Ahil trči *staccato*, da se nakratko zadržava u svakom položaju dodirivanja novog prostranstva. Raspored kretanja i odmaranja može da bude potpuno isti kao Zevsov raspored odmaranja i pozivanja, koji je dat malopređašnjom shemom (u § 19), tako da dok se Zevs

odmara, Ahil trči, a dok se Ahil odmara Zevs razgovara s kosmonautima.

Tako smo konačno uspostavili dovoljno dobru analogiju između Zevsovog i Ahilovog zadatka, u kojoj *kosmičkim stanicama* odgovaraju *tačke* dodira Ahilovog nosa sa ravnima raznobojnih prostranstava, a Zevsovim *pozivima* Ahilova *dostignuća* tih tačaka. Šta ćemo odgovoriti kad nas po isteku jednog sata neko zapita koliko je puta Ahil zastao? *Nijedan konačan broj* ne može da slovi kao odgovor, a jedina alternativna mogućnost je, izgleda, da se kaže da je Ahil *savladao beskonačnost korak po korak.*

21. *Legato brojanje*

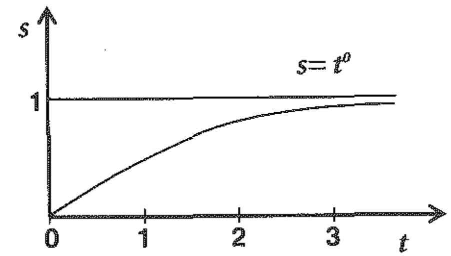
U prvoj varijanti analogiziranja Zevsovog i Ahilovog zadatka Ahil je dobio nezahvalnu ulogu da sve sitnije skakuće, što će mu kao smrtniku, makar koliko superiornom u odnosu na druge, ipak kad-tad postati nemoguće, a i put mu je bio obasjan neobičnom svetlošću. Ali ne moramo se držati onih prevoda iz *Fizike* u kojima se pominju tačke; analogon pozivanju stanica može biti *prelaženje deonica puta.* Tada nam nisu potrebna ni raznobojna prostranstva, a Ahila možemo pustiti da trči normalno, *legato.* Tako na najšokantniji način povezujemo dva sveta, Ahilov i Zevsov, da bismo, s jedne strane, prisilili Zevsa da sprovede zadatak do kraja i, s druge strane, uvideli koliko su najobičniji postupci smrtnika, kao što je Ahil, neverovatni. Stvar je u tome što *dok* Ahil pređe prvu deonicu, kao i bilo koje naredno rastojanje $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$, Zevs obavi jedan razgovor, *izvrši jedan određeni pojedinačni akt.* Ne moramo *narušavati homogenost puta* raznobojnim prostranstvima, niti *cepkati* Ahilov zadatak zaustavljanjima, da bi se ovaj zadatak pokazao kao zadatak da se *načini* *beskonačni broj akata. Biunivoka korespodencija* između Ahilovih *prelaženja* deonica puta i Zevsovih *pozivanja* stanica čini izvršenje Ahilovog zadatka *na isti način* i u *istoj meri paradoksalnim* koliko je to i Zevsov zadatak. Zevs svojim aktima, *u stvari, broji* deonice puta koje Ahil prelazi najobičnijim *legato* trčanjem. Možemo čak Zevsa pustiti da broji legato, ako neko misli da je to za analogiju značajno, da naime ne pravi pauze između razgovora. Možemo pretpostaviti da on sve vreme trči s Ahilom (to je slika iz *Chihara*, str. 87), izgovarajući umesto „jedan, dva, tri, ..." „prva, druga, treća, ..." da bi samoglasnik na kraju svake reči olakšao *legato* brojanje, za vreme dok Ahil, kao uostalom i sam Zevs, prelazi prvih pola kilometra, pa narednu četvrtinu kilometra, pa narednu osminu i tako redom. A posle jednog sata, *kad stignu na cilj* i kad se odmore, zapitaćemo Zevsa koliko je deonica izbrojao.

Na početku, dok smo još bili u blaženom neznanju, pitali smo se ne bi li jedan korak mogao da se shvati kao sled *dva legato pokreta*, ne sluteći, ili nesvesno sluteći, u kakav će nas ćorsokak dovesti ta mogućnost, koja je sad ostvarena sudarom Ahilovog i Zevsovog sveta. Ne proizilazi li, posle svega, da bi prelaženje nekog, ili uopšte bilo kojeg, puta i najobičnijim *legato* kretanjem moglo da se shvati kao savladavanje beskonačnosti korak po korak, budući da uvek možemo Zevsa nagovoriti da broji deonice puta; a ako je korak po korak savladana beskonačnost *contradictio in adiecto*, kako je moguće preći bilo koji put?

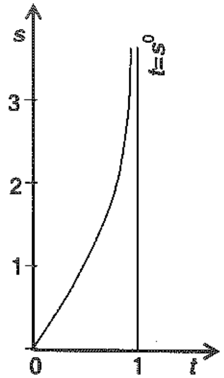
22. Trkač koji neobično usporava i trkač koji neobično ubrzava

Zanimljivo je pogledati šta se dešava kad uslovi konvergencije (vidi gore, § 5) nisu zadovoljeni i za prostorne i za vremenske intervale pri izvršavanju Ahilovog zadatka, već samo za jedne od njih.

Neka Ahil treba da pređe put od jednog kilometra, čije deonice $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$ Zevs broji kao i pre, ali neka svaku od deonica Ahil prelazi za isto vreme, recimo za jedan sat. Neočekivano, ovde se bez ikakve paradoksalnosti ostvaruje elejski san: krećući se neprekidno, Ahil nikad neće preći kratki put od jednog kilometra, a Zevs neće savladati beskonačnost korak po korak. Ako horizontalnom t-osom predstavimo vreme, a vertikalnom s-osom prostorna rastojanja, onda se kriva koja predstavlja trag Ahilovog puta (vidi sl.) neograničeno, sve više i više, približava pravoj $s = t^0$, kao asimptoti.



Ako, međutim, stvar obrnemo i pustimo Brzonogog da rastojanja jednake dužine prelazi u sve kraćim vremenskim intervalima, čiji je opšti član $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$, i zapitamo se gde će on biti po isteku jednog sata, nećemo se naći u nelagodnoj situaciji samo mi kojima je pod *svim* uslovima neprihvatljivo da se beskonačnost može savladati korak po korak, već i oni koji, poput Vejtlinga, Ričarda Tejlora ili Grinbauma (vidi gore, § 3), to pod nekim uslovima dopuštaju. Šta je odgovor standardne matematičke analize na pitanje o vrednosti s u funkciji $t = (2^s - 1)/2^s$ kada je $t = 1$ (vidi sl.)? Da li vrednost u toj tački *nije definisana*, pošto je $t = s^0$ asimptota krive kojom je funkcija $t = (2^s - 1)/2^s$ predstavljena, ili je s za $t = 1$ beskonačno veliko? – Matematičarevi odgovori nam ovde teško mogu pomoći da razumemo Ahilovu sudbinu. Jedan sat *će proteći* i niko nam ne može zabraniti da se tada zapitamo *gde* je Ahil i *koliko* je kilometara udaljen od nas.



Upoređivanje tri slučaja, u kojima Ahil zadatak obavlja krećući se ravnomerno, usporavajući i ubrzavajući, može biti vrlo poučno.

Shema usporavajućeg hoda otkriva nam da se konačna rastojanja mogu pokazati kao beskonačno udaljena, jer se neprekidnim kretanjem prema cilju uz neograničeno mnogo vremena koje nam stoji na raspolaganju ne mogu savladati. No u tome nema ničeg paradoksalnog, jer neograničeno vreme koje je pred nama neće isteći; i večni Zevsov život ne znači da će Zevs ikad biti beskonačno mnogo godina star.

Shema kojom je bilo predstavljeno ravnomerno kretanje vodi nas u teškoće, zato što će vreme od jednog sata isteći i što će tako proizaći da je put od beskonačno mnogo koraka savladan.

Shema ubrzavajućeg kretanja nas unapred opominje da se ne uzdamo previše u uslove konvergencije i da njihov značaj pažljivo preispitamo, jer se, za razliku od slučaja u kojem se konačno udaljen cilj ispostavlja kao nedostižan u neograničenom vremenu, ovde beskonačno udaljen cilj ispostavlja kao dostižan u ograničenom.

U „veku tehnike" Ahil i Zevs su zamenjeni mašinama. Prvu mašinu kojoj je bilo namenjeno da savlada beskonačnost korak po korak „konstruisao" je Herman Vajl (*Weyl 2*, str. 41–42).

Vajlova mašina treba da „kompletira beskonačan niz različitih akata odlučivanja u konačnom vremenu, dajući, recimo, prvi rezultat posle prvih pola minuta, drugi posle naredne četvrtine minuta, treći osminu minuta kasnije od drugog, itd." (*ibid.*, str. 42). Tu je pitanje prostorne konvergencije izbačeno iz igre.

Od Vajlovog vremena „proizvedene" su mnoge mašine na kojima su se lomila koplja (ili više ne samo koplja) oko mogućnosti da beskonačnost bude savladana korak po korak. Najpoznatije su Blekove transportne mašine (*Black 1*, str. 95 i dalje), Tomsonova lampa (*Thomson*, str. 412 i dalje), π-mašina (*Grünbaum 3*, str. 79) i Peano-mašina (*ibid.*, str. 80).

Blekova transportna mašina zvana „Alfa" prebacuje klikere iz levog dela svemira u desni, dok mi stojimo u sredini, ali u malo neobičnom ritmu. Za jedan minut prebaci samo jedan kliker a potom se, verovatno zbog zamora materijala, čitav minut odmara. Zatim za pola minuta prebaci drugi kliker, pa se pola minuta odmara. Vreme njenog rada u kojem prebacuje po jedan kliker i sledujućeg odmora skraćuje se i dalje po geometrijskoj progresiji, ona se uvek odmara onoliko koliko radi: četvrtina minuta rada, četvrtina minuta odmora, osmina minuta rada, osmina minuta odmora i tako dalje neograničeno. Međutim, tačno posle četiri minuta mašina definitivno prestaje sa radom. Koliko je klikera „Alfa" transportovala u desni svemir?

Za slučaj da u levom svemiru nemamo dovoljno klikera Blek je izumeo par mašina, „Betu" i „Gamu". „Beta" radi kao i „Alfa" samo je kliker koji se transportuje uvek isti, pošto uvek dok se ona odmara „Gama" kliker vraća u levi svemir. Po isteku četiri minuta ne rade dalje ni „Beta“ ni „Gama“. Ali gde je kliker s kojim su se igrale?

Tomsonova lampa je takoreći obična lampa za čitanje koja se pali i gasi pritiskom na jedno isto dugme, samo se, za razliku od nama paznatih lampi, dugme može vrlo, vrlo brzo pritiskivati; nema, u stvari, nikakvog mehaničkog ili elektrotehničkog ograničenja u pogledu dužine vremena za koje se dugme može pritisnuti, dovoljno je samo da vremenski interval bude veći od nule. Ako sad još uklonimo ono što bismo s Raselom mogli nazvati „medicinskim“ ograničenjima (*Russell 4*, str. 143), a što se odnosi na ograničenja naših mogućnosti da dugme brzo pritiskujemo, onda možemo dopustiti Tomsonov ritam paljenja i gašenja lampe kojim ona izvršava ono što je on nazvao „super-zadatkom“ (vidi *Thomson*): za jedan minut uspemo da pritisnemo dugme na lampi koja ne gori – prvi put očigledno vrlo sporo; za narednih pola minuta drugi put, a za to vreme lampa gori i tek po isteku tih pola minuta se ugasi; zatim je mrak narednu četvrtinu minuta dok pritiskujemo treći put, i tako dalje. Po isteku dva minuta dugme se više ne pritiskuje. Da li je tada lampa upaljena ili ugašena?

π-mašina je mašina koja kuca decimale broja π, π=3,1415926535..., tako što prvi decimal otkuca za pola minuta, drugi za četvrtinu minuta, treći za osminu minuta i tako dalje. Grinbaum je, naravno, postavio specijalne dodatne uslove (*Grünbaum 3*, str. 86–92): brojevi se progresivno smanjuju, kao i vremenski intervali. π-mašina bi u roku od jednog minuta trebalo da otkuca sve decimale broja π.

Peano-mašina je slična π-mašini, samo ona umesto da kuca recituje (*ibid.*, str. 80, 90–92). Ona recituje redom prirodne brojeve, 1, 2, 3, ..., *n*, ..., tako što prvi obznani posle pola minuta, drugi posle naredne četvrtine minuta, treći osminu minuta posle drugog i tako dalje redom, *n*-ti posle isteka $(2^n-1)/2^n$ minuta (*ibid.*, *loc. cit.*). Za slučaj da se ovde kao problem pojavi dužina naziva velikih brojeva koje treba izgovoriti za kratko vreme, što nije bio problem za Zevsa, Grinbaum predlaže (*ibid.*, str. 92) da mašina ne govori engleski (svakako, u ovom slučaju ni drugi prirodni jezici nisu zgodni), već da se nekim pravilom rekurzivno odrede nazivi koji će biti sve kraći i koji će moći da se izgovore u sve kraćem vremenu. Recimo, nekim zakonom je određeno progresivno skraćivanje dužine zvuka kojim je predstavljen prirodni broj, tako da po dužini zvuka možemo odrediti o kojem je broju reč. Taj zakon može da bude takav da mašina može da govori *staccato*, da, naime, uvek bude vremena za pauzu. Da li će pod ovakvim uslovima mašina u roku od jednog minuta izgovoriti $\aleph_0$ prirodnih brojeva?

Jasno je da kod svih ovih mašina nemamo posla sa simultanom ili statičkom beskonačnošću, već sa beskonačnošću *sukcesivnog* i, bar kod ovih koje rade *staccato*, i *strogo diskretnog* niza akata koje one treba da obave, jer između akata postoji pauza. Njihov zadatak je super-zadatak.

24. Aporija nedostižnosti i aporija nepokretnosti

Dosadašnje teškoće ticale su se nemogućnosti dospeća do *nekog unapred određenog cilja*, utoliko što je Zevs uvek mogao poći s namernikom i učiniti njegov cilj beskonačno udaljenim.

Koristeći se neintuicionističkim zaključivanjem ($\neg\exists x\neg f(x)\rightarrow\rightarrow\forall x f(x)$), pomislićemo da je nemoguće uopšte pokrenuti se, pošto se iz toga što se ne može navesti nijedan unapred fiksiran cilj koji se ne bi mogao učiniti beskonačno udaljenim, *sme* zaključiti da je svaki mogući cilj nedostižan. U ovom slučaju ne postoji konstruktivni način[1] da se utvrdi da za svaki cilj to važi, pošto je na sva moguća rastojanja unutar nekog rastojanja nemoguće primeniti metod matematičke indukcije, ali je *a posteriori* svaki već pređeni put moguće predstaviti kao korak po korak savladanu beskonačnost.

Prema standardnim interpretacijama, Zenon nije samo na ovaj način izvodio nemogućnost kretanja iz nemogućnosti *dostignuća bilo kojeg cilja*, već je nemogućnost pokrenuća dokazivao i *direktno*, prvom kinematičkam aporijom, poznatom pod imenon *Dihotomija*. Ove standardne interpretacije su, kao što ćemo kasnije videti (§ 38), sumnjive, ali, bez obzira na to, postoji savremena, Gardner-Salmonova operativna verzija aporije nepokretnosti (vidi *Gardner i Salmon*, str. 48–52).

Neka, dok Ahil juri kornjaču, Zevs gonič muva, Ζεὺς ἀπόμυιος (vidi *Nilson*, str. 213), kome su Eliđani u Olimpiji prinosili žrtve (*ibid.*, str. 388), uputi svoju podanicu muvu da pijano leti od Ahila do kornjače i nazad. Muva leti brže nego što se i kornjača i Ahil kreću, i neka to ostane uvek zadovoljeno. No, šta će muva činiti pošto Ahil eventualno stigne kornjaču? Kako će ona, pošto Ahil nastavi put, nastaviti da leti između Ahila i kornjače? Ona *treba* da se kreće *brže* od Ahila, budući da leti cik-cak, a ipak *ne bi smela* da leti brže od njega, jer će izleteti ispred i neće više biti između njega i kornjače. Kako će Zevsova podanica pod propisanim uslovima uopšte moći da se pokrene pošto Ahil stigne kornjaču?

„Zu Hilfe! Zu Hilfe!
Sonst bin ich verloren...“

Pozvaćemo u pomoć najjače i prirediti Gigantomahiju, ali ćemo, zavidljivo, povesti sa sobom Zlonamernika da ispipa gde su slabi, makar nas to sve zajedno odvelo u nova bespuća.

GIGANTOMAHIJA

„... der ewigen Götter Ende
dämmert ewig da auf.“

25. Kako se suočiti sa istorijom

Dveipohiljadegodišnja istorija Zenonovih dokaza protiv mnoštva i kretanja nije samo istorija pokušaja da se izađe iz teškoća u koje oni vode. Nastojanja filologa i istoričara filozofije da rekonstruišu ove dokaze i znatna, ponekad i ogromna, razilaženja među njima (vidi, na primer, dole, § 25 a), b) ili § 38 c)) jasno pokazuju koliko je ta istorija i istorija rekonstrukcija izvornih dokaza. Nije reč *samo* o razlikama u čitanju tekstova iz kojih saznajemo o Zenonovim dokazima, već i o problematičnosti interpretacije ovih dokaza, naime, njihove logičke strukture (vidi, naročito, § 38 c) i d)), njihovog cilja (vidi *Cajori* 2, str. 11–20 i *Solmsen*, str. 131 i dalje) i pobuda (vidi *Booth 2* i *3*) koje su Zenona navele da ih sroči. Ako ovome dodamo i svesno sačinjene reformulacije i varijacije na Zenonovu temu s ciljem da se njegovi dokazi ožive, ili učine što rigoroznijim ili što ubitačnijim, čime smo se i sami bavili u prvom delu, kao i ogroman broj nesvesnih ili neeksplicitnih varijacija s kojima ćemo se sresti u istoriji matematike (vidi §§ 73, 74 i celo F ovog dela) i fizike (vidi §§ 115, 116, 118, 119, 120), onda se možemo odvažiti i reći da sve to zajedno predstavlja najbogatiju poznatu istoriju jednog intelektualnog problema.

U takvoj istoriji treba da tražimo izlaz iz teškoća u koje smo zapali. Suočavanje s njom predstavljaće, ujedno, testiranje ponuđenih rešenja. To je nemali zadatak. Današnje razvijeno osećanje obaveze prema istoriji zahteva da se uzmu u obzir rezultati bogatog filološkog i istorijskog rada na rekonstrukciji i interpretaciji izvornih Zenonovih dokaza. Osim toga, ako obraćanje istoriji u traženju izlaza iz teškoća treba da bude i testiranje ponuđenih rešenja, valjanost interpretacije postaje nužan uslov za korektno obavljen zadatak. Povoljna je okolnost što se u odgovorima Zenonu uglavnom više ne radi o izvorima iz druge ruke.

Kako koristiti rešenja koja se odnose na specifične, istorijski date formulacije u slučaju teškoća u kojima smo se mi našli?

Ima među rešenjima koja se odnose na specifične formulacije onih (vidi § 47 i § 105) za koje se prosto ne vidi kako bi se upotrebila pri našim formulacijama. Ako na tome ostanemo, onda to prosto znači da su ona za nas irelevantna, kao što i naše teškoće ne predstavljaju test za njihovu uspešnost, osim utoliko što pokazuju da ta rešenja nisu univerzalna, to jest upotrebljiva za sve varijacije.

Za nas su neupotrebljiva i ona pobijanja (vidi, na prmer, *Waismann 1*, str. 7–8) koja se sastoje u otkrivanju neke proste logičke greške, kao što je *quaternio terminorum* ili *saltus in concludendo* u nekoj *određenoj* formulaciji, ako *naša* formulacija izmiče takvom prigovoru.

Za razliku od pobijanja usmerenih usko *ad hominem*, ima na sreću takvih koja, iako usmerena na neku specifičnu formulaciju, otkrivaju jednu *opštu strategiju* pobijanja. Takva rešenja mogu biti relevantna ako tu strategiju možemo primeniti u našem slučaju. Ta primena bi ujedno značila i ispitivanje domašaja

upotrebljivosti jedne takve strategije. Ovakvu vrstu pobijanja klasifikovaćemo upravo prema strategiji koju koriste.

Najzad, najveći je broj onih rešenja[1] koja se direktno odnose na naše teškoće i koja često predstavljaju izgrađene teorije o prostoru, vremenu i kretanju. Njih možemo direktno testirati.

Što se tiče klasifikacije rešenja (vidi sadržaj *Gigantomahije* (A–G)) unutar koje ćemo ova razmatrati, ne očekujem da će ona svakog zadovoljiti, mada mislim da će dovoljno poslužiti svrsi kao radna klasifikacija. Neko će se, na primer, zapitati zašto atomizam ne razmatramo u okviru finitizma. Odgovor bi se mogao naći u samim delovima o atomizmu i finitizmu. Naime, čak i ako uzmemo za sigurno da atomizam implicira finitizam u smislu koji je za nas relevantan, još uvek se ova implikacija ne čini dovoljnom da nadoknadi razlike u opštoj strategiji argumentisanja i „ontološkim obavezama“ koje postoje među njima; izgleda sasvim zamislivo da se vatreno zastupa finitizam uz odlučno odbacivanje atomizma. No, svakako, ako neko želi, može delove o atomizmu i finitizmu čitati kao da su pod jednim naslovom. S druge strane, unutar jednog istog naslova, *negativne dijalektike*, nalaze se tako različita shvatanja kao što su skeptičko stanovište, Gorgijin ontološki nihilizam, Parmenidova ontologija i Bredlijeva filozofija Apsoluta; no uprkos svim, za nekog možda izuzetno važnim razlikama, tip reagovanja na protivrečnosti koje otkriva Zenonova dijalektika je sličan u svim ovim slučajevima: prihvata se ili da mnoštva i kretanja stvano nema, ili se barem smatra nerazumljivim kako ih može biti.

Iako će teškoće do kojih smo stigli u *Aporetici* predstavljati glavnu perspektivu i glavni test prilikom razmatranja raznih teorija, u *Gigantomahiji* ćemo nailaziti i na nove teškoće, koje ćemo uključivati u spisak onih kojih se na kraju treba osloboditi.

A. NEGATIVNA DIJALEKTIKA

26. *Vreme nastanka Zenonovih dokaza i značaj nezavisne rekonstrukcije prethodnih učenja*

Vreme nastanka Zenonovih dokaza protiv mnoštva i kretanja može biti značajno ne samo ako hoćemo da otkrijemo ko su bili navodni ismevači Parmenidovog učenja protiv kojih su ovi dokazi bili upereni (o čemu se govori u *Plato 4*, 128 D), već, što je još značajnije, to može da utiče na interpretaciju ključnih elemenata iz pojmovne mreže unutar koje su predstavljeni i na njihovu logičku strukturu.

U Platonovom *Parmenidu* (*Plato 4*, 127 B) se neobičajeno precizno navode godine Parmenida i Zenona koji učestvuju u razgovoru koji se vodi u Atini, dok se za Sokrata kaže „da je vrlo mlad", Ta neuobičajena preciznost zaista uliva poverenje (vidi *Lee*, str. 5). Uzimajući u obzir navedene podatke, možemo zaključiti da je Zenon negde polovinom petog veka pre nove ere bio četrdesetogodišnjak. Apolodor, međutim, navodi (prema, Diogenu, *DK* 29 A 1) da je Zenon imao akme za vreme 79. olimpijade, što ga čini nekih desetak godina starijim. No sigurno je da je Zenonov spis koji se pominje u *Parmenidu* nastao i navodno bio ukraden i obznanjen (*Plato 4*, 128 E) u prvoj polovini petog veka pre nove ere.

Eventualna veća vremenska razlika u nastanku dokaza protiv mnoštva i dokaza protiv kretanja mogla bi biti značajna radi procenjivanja pretpostavke nekih istraživača da je četvrta kinematička aporija (vidi § 38 d) uperena protiv nekog atomizma (ὄγκοι bi navodno bile nedeljive jedinice), jer, kao što ćemo videti, u dokazima protiv mnoštva nema pobijanja atomizma već se prosto pretpostavlja da se jednom dopuštena deoba više ne može ograničiti. Četvrta aporija bi, naime, mogla biti napad na neki atomistički odgovor Zenonu. No naslovi četiri Zenonove knjige koje navodi Suida, ostavljajući po strani pitanje verodostojnosti, ni najmanje nam ne pomažu da odlučimo o ovom pitanju. Oven, koji dozvoljava da argumenti o kojima Platon govori i argumenti o kojima govori Aristotel mogu poticati iz različitih Zenonovih spisa, ukazuje, bez namere da išta zaključi o hronologiji, na mesto u *Parmenidu* 152 B–E, koje treba da pokaže da je i Platonu bio poznat bar argument *Strela* (*Owen 6*, str. 201; vidi, takođe, *Plato 7*, 261 D). Iz te činjenice, naravno, ne sledi da je i Zenon u istorijskom razgovoru već imao *Strelu* za sobom.

Za rekonstrukciju učenja koja su bila eventualna meta Zenonovih napada često se koriste i sami Zanonovi dokazi (vidi; na primer, *Lee*, str. 30–32, 111–112, *Tannery 1* i *3*, *Cornford 4*), što je u načelu legitimno, jer su i ti dokazi jedan od istorijskih izvora. Ali, ako smo suočeni sa situacijom da interpretacija nekog Zenonovog dokaza *zavisi* od rekonstrukcije shvatanja koje se napada, onda bez nezavisne *evidencije* ne možemo da se pozovemo na dokaz koji se interpretira a da ne zapadnemo u *circulus vitiosus*. Zato je pri rekonstrukciji potrebno uzimati u obzir nezavisni dokazni materijal.

Od Tanerija naovamo (vidi *Tannery 1*, str. 124, *Tannery 3*, gl. 10, *Cornford 4*, str. 58–59, *Burnet 1*, str. 314, *Burnet 2*, str. 66–67, *Raven*, str. 75, *Guthrie 2*, str. 91) stvorena je tradicija da se Pitagorejci smatraju metom Zenonovih napada. Tu je problem da se nezavisno rekonstruiše rano pitagorejsko učenje prve polovine petog veka pre nove ere. Ova tradicija je kasnije ozbiljno ugrožena (vidi *Heidel*, str. 370 i dalje), ako ne i prevladana (najuverljivije u *Vlastos 4*, str. 169 i dalje). No, nezavisno od toga, nije neophodno pretpostaviti da se svaki Zenonov argument morao odnositi na neko tada postojeće shvatanje[1].

Dok svaki Zenonov dokaz nije morao da ima kao metu već postojećeg protivnika, u izvesnom smislu obrnuta pretpostavka deluje plauzibilno: krajnje je verovatno da Zenon, da je znao za neko eventualno učenje ili protivodgovor kojim se protivnik mogao izmigoljiti iz mreže njegovih dokaza, ne bi propustio da za to iskuje neki eksplicitni *reductio ad absurdum*[2].

Bilo da verujemo da je Sokrat u Platonovom *Parmenidu* u pravu kad tvrdi da su svi Zenonovi dokazi skovani u odbranu Parmenda, a u formi protivnapada na one koji su njegovo učenje napadali ili čak ismevali, bilo da to dovodimo u pitanje[3], moramo biti zainteresovani da odgonetnemo ko su ti ismevači mogli da budu. Dopuštajući da su to mogli biti obični ljudi, neposvećeni ili neobrazovani, što je tradicionalno uverenje koje sledi Celera (vidi *Zeller*, str. 589), to su još mogli biti Pitagorejci, Empedokle i Anaksagora. Proučićemo one delove njihovih učenja koji su u suprotnosti s Parmenidovim monizmom i one delove koji će biti neophodni za dalje razvijanje naše drame. Razmotrićemo, naravno, i učenje samog Parmenida. Pri svemu tome se nigde nećemo pozivati na Zenona, da bismo izbegli pomenuti *circulus*.

27. Da li ranopitagorejska matematika sadrži neku koncepciju osnovnih geometrijskih objekata?

Da bismo rekonstruisali ranopitagorejsko učenje o broju i proporciji, koje je moglo biti poznato i Zenonu, i razumeli često ponavljane Aristotelove izjave da je po njihovom shvatanju sve broj i odnos (na primer, *Aristotle 1*, 985 b 23, 990 a 18–22, 1078 b 21, 1080 b 16, 1090 a 20) potrebno je da uzmemo u obzir razvoj grčke matematike u petom veku pre nove ere. To je naročito važno zbog toga što od stepena matematičkog znanja *može* da zavisi shvatanje osnovnih matematičkih objekata – tačke, linije, površi i tela.

Često se ističe (*Tannery 3*, str. 250, *Cornford 4*, str. 58, *Lee*, str. 112, *Raven*, str. 74) da su se, nasuprot kasnijem, u Aristotelovo vreme (vidi *Aristotle 22*, 231 a 20 i dalje) već sasvim nedvosmislenom shvatanju geometrijske tačke koje se zadržalo do danas, rani Pitagorejci držali jednog naivnijeg shvatanja, po kojem su tačke imale veličinu, mogle se slagati u liniju i slično. Dok su neki istoričari uvereni, da su tačke shvatane kao „nedeljive jedinice koje imaju veličinu" (vidi *Heath*, I, str. 69–70), ili kao infinitezimale (na primer, *Hasse und Scholz, Boyer*, str. 21), neki dozvoljavaju da je shvatanje tačke u to vreme bilo dvosmisleno (na primer, *Booth 2*, str. 99, *Tannery 2*, str. 388). No, u svim ovim formulacijama kao da smo gurnuti u dilemu: ili moderno shvatanje, ili neko primitivnije, čime se implicitno isključuje *treća* mogućnost, da jedostavno nikakvog pitagorejskog shvatanja tačke nije ni bilo u to vreme.

Neki istraživači, a pre svega Hajdel (vidi *Heidel*, str. 363 i dalje), pozivajući se na grčku tradiciju koja počinje Aristotelovim učenikom Eudemom i njegovom „istorijom matematike"[1], sumnjali su u bilo kakva Pitagorina matematička znanja i u matematička znanja drugih stanovnika Velike Grčke (današnje Italije), uključujući i Pitagorejce, u periodu koji nas zanima.

Opšta teškoća pri pokušajima rekonstrukcije ranog Pitagorejstva pozivanjem na doksografske izvore proizilazi iz „stoičke prakse" prilagođavanja i asimilacije ranijih učenja (vidi *Heidel*, str. 363). To sigurno važi za Posejdonijevu školu, pod čijim je snažnim uticajem za nas trenutno značajni Aetije (vidi dole, §§ 31, 48). Što se tiče poznate Proklove izjave, u njegovom sumarnom opisu razvoja grčke matematike, o matematičkim dostignućima samoga Pitagore (vidi *Kirk and Raven*, str. 229–231), s pravom se sumnja da bi izvor za to mogao biti Eudem (*Heidel*. str. 366), jer njegov učitelj Aristotel uvek govori samo uopšte o pitagorejskim dostignućima.

Aristotelove izjave su uopštene i ne nedvosmislene i uglavnom ne omogućavaju ni razlikovanje među Pitagorejcima, a još manje datiranje eventualnih razlika u fazama razvoja njihovog učenja.

Glavni izvor uverenja da su Pitagorejci bili prvi, ili prvi veliki, grčki matematičari predstavlja mesto u *Metafizici* (985 b 23) gde Aristotel kaže: „Za vreme i pre ovih (Leukipa i Demokrita) takozvani Pitagorejci prihvatili su se matematike (,) prvi (,) negujući je napredovali u ovoj oblasti i uzimali da su načela matematike načela svega"[2].

Pri Gatrijevom čitanju teksta (*Guthrie 1*, str. 232), kojem u prethodnom prevodu odgovara smisao koji se dobija kad se izostavi prvi, a ostavi drugi zarez, Aristotel ovde kaže da su Pitagorejci bili prvi koji su se posvetili matematici i da se to dešava u vremenu pre Leukipa i Demokrita.

Na osnovu ovog mesta je, u svakom slučaju, jasno da Aristotel razlikuje matematiku koja bi interesovala *istoričara matematike* od onoga što bi interesovalo pre svega *istoričara filozofije*, pošto je, kako se kaže, bavljenje matematikom dovelo do nečeg što više nije matematika, ili barem nije samo matematika, do učenja o tome da su načela matematike načela svega. No, nažalost, ovde nije jasno da li je matematika kojoj su se Pitagorejci posvetili aritmetika ili geometrija.

Postoji druga mogućnost čitanja prvog dela navedenog teksta, na čemu insistira Hajdel, sa zarezom pre „prvi". Πρῶτοι („prvi") se sasvim moguće, za mene verovatno, ne odnosi na *bavljenje* matematikom („prihvativši se matematike"), već na ono što u tekstu sledi, to jest na *unapređenje* matematike[3].

Ponuđeno, čitanje ima za Hajdela dalekosežne posledice. On najpre pokazuje (*Heidel*, str. 359) da je drugo mesto iz *Metafizike*, 1078 b 17, koje treba da je saglasno sa prvim ponuđenim čitanjem prethodnog, nejasno i da ne može biti nezavisni dokaz u prilog tom čitanju, a zatim pokazuje kako je njegovo čitanje više u skladu sa grčkom tradicijom koja počinje Eudemom, koja, pre svega, Pitagoru i Pitagorejce ne smatra tvorcima grčke matematike. Izgleda da Hajdel ovde, iako ga ne navodi, ima u vidu poznato mesto iz Prokla (*DK*, A 11) gde se, uz navodno oslanjanje na Eudema, kaže da je Tales putovao u Egipat, upoznao se sa matematikom, „sam učinio mnoga otkrića"[4] „i postavljao temelje za one koji će ga slediti..." Ovome se, svakako, mogu dodati svedočanstva Hijeronima, Plinija i Plutarha (vidi *Guthrie 1*, str. 53).

Čitav niz velikih grčkih matematičara je iz Jonije. Po Hajdelu je među Pitagorejcima pouzdano veliko ime tek Arhita (*Heidel*, str. 379).

Ne moramo, svakako, slediti Hajdelove ekstremne antipitagorejske zaključke. Aristotel kaže (*Artstotle 1*, 985 b 23), *barem*, da su Pitagorejci, i ako ne prvi matematičari, *kad tad* ipak *prvi* ovu disciplinu (znatno) *unapredili*. Osim toga, zbog prirode njihovog bratstva uopšte veoma malo znamo o individualnim Pitagorejcima preplatonovskog doba. Ali, da li je matematika kojom su se, prema najverovatnijem smislu Aristotelovog teksta, Pitagorejci bavili i pre vremena Leukipa i Demokrita morala biti geometrija?

Iako je, kao što ćemo videti, vrlo verovatno da su Pitagorejci aritmetizovali geometriju tek pošto su *prethodno*, baveći se muzikom, razvili teoriju proporcije, dopustimo da su u vreme Zenona znali za neku uopštenu verziju teoreme koja nosi Pitagorino ime, a što se nije svodilo samo na poznavanje takozvanog egipatskog trougla. Kako je ta relativno uopštena verzija mogla da glasi

i da li je poznavanje jedne takve matematičke istine moralo da vodi nekom shvatanju osnovnih geometrijskih objekata, tačke, linije ili površi?

Trougao čije su stranice 3, 4 i 5 naziva se egipatski trougao. Stari Egipćani su znali da će trougao sa takvim stranicama biti pravougli[5]. Ali kako su te stranice bile shvatane? Grci su egipatske sveštenike-geometre zvali ἁρπεδονάπται (*DK*, 68 B 298)[6] – to su oni koji zatežu uže. Reč *hipotenuza* potiče od ὑποτείνω, što znači zatezati (žicu ili uže iznad njega), a *geometrija* znači zemljomerstvo. Izraz *tesarski kvadrat* (vidi *von Fritz*, str. 394) ukazuje na sklapanje parčadi drveta. I pomoću takvih sklapanja dobijan je egipatski trougao. Još pre razvoja grčke filozofije i matematike Grci su mogli znati da je zbir dva drvena kvadrata čije su stranice 3 i 4 jednak jednom trećem, čija je stranica 5.[7] Stranice su bile delovi drveta i užadi, a ne geometrijski objekti bez debljine, niti sa nekom minimalnom debljinom, niti sastavljeni od nekih minimalnih delova drveta, kao što ni temena egipatskog trougla nisu bile nikakve tačke, *ni bez* veličine, *ni sa* minimalnom veličinom.

Pošto veličina tesarskih kvadrata nije bila standardizovana (vidi *von Fritz*, str. 394), pomenuto znanje vezano za egipatski trougao bilo je u izvesnom smislu opšte. No, revolucionarno uopštenje, koje Prokle pripisuje samom Pitagori (vidi o tome *Kirk and Raven*, str. 231 i *Heath*, I, str. 80), predstavlja otkriće načina, za koji ne znamo kako je izgledao, da se konstruiše neograničeni broj pravouglih trouglova čije stranice ne stoje više u odnosu 3:4:5. Iz Proklovih reči se vidi da je to način koji bismo mi izrazili formulom $m^2+(m^2-1)/2 = [(m^2+1)/2]^2$, gde je m neparan broj veći od 1. Ovo uopštenje je, bez obzira na to *ko* ga je izveo i *kada*, svakako izuzetno značajan korak, i to iz dva razloga. Prvo, opštost više ne počiva na pukoj *činjenici* da mere nisu standardizovane, pošto datom formulom možemo povezati neograničeni broj trouglova koji su među sobom slični samo u takozvanom ornamentalnom elementu pravouglosti, kao što su to, na primer, trouglovi sa stranicama 3, 4, 5 i 5, 12, 13. Drugo, bez obzira što se do načina za konstrukciju najverovatnije došlo induktivnim empirijskim putem, postupkom koji je Prokle govoreći o Talesu označio kao αἰσθητικώτερον, ovaj način *sam po sebi* predstavlja poznavanje nekog algoritma. Poznavanje jednog ovakvog postupka ne pretpostavlja pojam opšteg broja, kakvo je *m* iz formule kojom smo se mi koristili da ga odredimo. Radi ilustacije, lako je zamisliti da neko, koristeći se samo lenjirom i šestarom, ume po zadatku da nacrta mnogo pravouglih trouglova čije su stranice dugačke ceo broj santimetara, a da pri tom nema nikakav pojam opšteg broja.

Prihvatimo sa Kurt fon Fricom (*von Fritz*, str. 396), iako je to sumnjivo, da se ovo veliko otkriće dogodilo u doba najstarijih Pitagorejaca, čak i ako se pogrešno pripisuje samom Pitagori. Još uvek se ne vidi *niti* da je za to bila potrebna nekakva *koncepcija* osnovnih geometrijskih objekata, *niti* da to otkriće rađa neke *probleme* koji bi zahtevali raspravu o osnovama geometrije. Trouglovi o kojima se govori mogli su i dalje biti poput egipatskih.

To što je kasnije, počev od Euklida, izlaganje ili izgradnja geometrijskih sistema počinjala uvođenjem osnovnih geometrijskih objekata kao što su tačke, linije i površi, bez obzira da li bez definicija ili pomoću definicija – kako je to činio Euklid (vidi *Euclid*, knj. 1, str. l) – može da nas navede na pomisao da su i raniji grčki matematičari na neki sličan način počinjali. Ali to nipošto nije nužno. *Rasprava o osnovama* može da nastupi kasnije, kada je nauka već donekle uznapredovala, a verovatno je da će se razbuktati ako se pojave neki problemi koji to zahtevaju. To se obično naziva *krizom* (vidi *Hasse und Scholz*) (često, u stvari, još naustanovljenih) osnova nauke o kojoj je reč.

Šta je u *samoj geometriji* moglo podstaknuti istraživanje o osnovnim geometrijskim objektima? Postoje dve glavne mogućnosti: suočavanje s problemima za čije bi rešavanje bilo korisno služiti se nekim vidom infinitezimala i otkriće nesamerljivosti.

Nema nikakve direktne evidencije da su se u izračunavanju veličine luka, površine ili zapremine grčki matematičari koristili nekakvom infinitezimalnom metodom, postupkom u kojem se pojavljuju veličine beskonačno, ili neuporedivo, manje od uobičajenih konačnih veličina.

Oni koji veruju da je neki takav metod postojao (vidi *Boyer*, str. 21 i dalje, *Mau*, str. 21) to *zaključuju* i to u slučaju Demokrita, recimo, povezivanjem raznih izjava poput Arhimedove (*Archimedes 2*, str. 570), koji tvrdi da je Demokrit, otkrio da je piramida jednaka trećini prizme koja s njom ima jednaku osnovu, i Plutarhove (*DK*, 68 B 155) koji opisuje aporiju rasecanja kupe koja je, navodno, mučila Demokrita, sa onim što o Demokritovom atomizmu uopšte znamo. Oni, naime, zaključuju da je Demokrit, vrsni matematičar, mogao u nekom trenutku koristiti svoje atome *kao* infinitezimale da bi rešio neke matematičke probleme. Ako sve ovo prihvatimo, i pored toga što to mnogima može delovati neuverljivo, onda je, uz nedostatak bilo kakve pozitivne evidencije o nekoj pitagorejskoj teoriji infinitezimala, to, ako ikakav pokazatelj, pokazatelj da pre Demokrita infinitezimala *nije* bilo (up. *van der Waerden*, str. 154).

Aporija rasecanja kupe, prema Proklu, glasi otprilike ovako: ako kupe sečemo na šnitove čije su kružne površine paralelne osnovi, onda je nezgodno reći da je gornja površina nižeg šnita jednaka donjoj površini gornjeg, jer bi šnitovi, ako je to uvek tako, formirali valjak, kao što je, s druge strane, nezgodno reći da su ove površine nejednake, jer bi tada kupa bila stepenasta, anomalična (ἀνώμαλον). Sad Bojer i ostali (vidi *Boyer*, str. 22) pretpostavlja da je Demokrit aporiju rešio tako što je u skladu sa svojim atomizmom uveo u igru kružne pločice (*laminae*) kao infinitezimale i da je kasnije ovakve infinitezimale koristio u rešavanju čisto matematičkih problema.

Što se tiče izračunavanja površina, iz onoga što Aristotel kaže u *Fizici*, 185 a 14, može se zaključiti da je poznati sofist Antifon bio prvi koji je takozvani problem kvadrature kruga pokušavao da reši upisivanjem u krug pravilnih poligona počev od kvadrata. Na osnovu istog mesta se može zaključiti, kao i iz Simplikijevih komentara (vidi *Simplicius 2*, str. 53 i dalje), da se prvobitni problem kvadrature odnosio na pronalaženje kruga koji bi bio jednak datom kvadratu i obrnuto. Ako su Antifon i kasnije Brison (*Aristotle 13*, 73 b 40), koji je i opisivao poligone u nameri da čak dokaže egzistenciju poligona koji će biti veći od bilo kojeg upisanog a manji od bilo kojeg opisanog, *verovatni* prethodnici Eudoksa i Arhimeda u pogledu takozvane metode ekshaustije, oni su ipak samo *mogući* pobornici matematičkih infinitezimala. Ako i uzmemo da oni to jesu bili, ono ipak ne znamo da li su na to bili *navedeni* prirodom postupka koji su primenjivali, ili su primenjivali postupak *već od pre* prihvatajući infinitezimale, ili su možda čak postupak primenjivali u cilju *dokazivanja* njihove egzistencije. U nedostatku ikakve druge evidencije, nemamo razloga da u ovom slučaju idemo dalje u prošlost (up. *van der Waerden*, str. 153), slično kao što s obzirom na zapremine nemamo razlog da idemo dalje od Demokrita.

29. Otkriće nesamerljivosti

Strogo govoreći, i problem kvadrature je problem nesamerljivosti ako se postavi kao problem zajedničke mere kojom bi se u konačno mnogo koraka samerili krug i kvadrat (ili, uopšte, poligon). Ali problem kvadrature se nije ispostavio kao problem nesamerljivosti. On je u najboljem slučaju doveo do pitanja o infinitezimalama bez prethodnog dokaza nesamerljivosti. Problem nesamerljivosti verovatno je otkriven u slučaju sameravanja stranice

kvadrata i njegove dijagonale. Vrlo je moguće da se ovo značajno otkriće dogodilo polovinom petog veka pre nove ere.

U Platonovom *Teetetu* (*Plato 9*, 147 D) Teodor iz Kirene demonstrira grupi mladića, među kojima je i Teetet, iracionalnost $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ i tako dalje do $\sqrt{17}$. Dijalog je pisan 368/67. godine pre nove ere, to je, izgleda, opšteprihvaćeno (vidi *von Fritz*, str. 383), nešto posle nesrećne smrti još relativno mladog Platonovog prijatelja Teeteta. Navodna godina kada se stvar odigrava je 399. godina pre nove ere, pred Sokratovu smrt. Ako prihvatimo svedočanstvo Platona, mada je i to dovođeno u pitanje (Oto Nojgebauer u pismu Kurtu fon Fricu – vidi *von Fritz*, str. 382, nap. 2), onda je Teodor iz Kirene, koji je u dijalogu star, ili sâm otkrio, tada ili ranije, ili od nekog saznao za nemogućnost da se pomenuti brojevi, od 3 do 17, korenuju do onoga što mi zovemo racionalnim brojem. (Za Grke je to bila prosto činjenica da ne postoji konačan broj jedinica dužine od kojih se može sačiniti kvadrat date veličine.[1]) To ukazuje da se otkriće o kojem je reč dogodilo u petom veku pre nove ere, možda i na prelazu u četvrti vek (vidi *Frank*, str. 228), mada, još uvek, samo na osnovu ovoga, ne možemo reći tačnije kada. No, karakteristično je da se ne pominje $\sqrt{2}$. Ne znači li to da je nesamerljivost stranice kvadrata i dijagonale otkrivena ranije?

Ako u igru uključimo i kasnije izvore, onda, mora se reći ne nesaglasno sa očekivanjima koja nam izaziva Platon, dolazimo do Hipasa iz Metaponta. Tradicija je, izgleda, jednoglasna kada njega povezuje sa otkrićem nesamerljivosti[2]. Kasniji izvori možda u nama izazivaju sumnju zbog legendi koje se u to vreme vezuju za Pitagoru i Pitagorejce. Tako Jamblih (*DK*, 18 4) priča o brodolomu koji je Hipas doživeo zbog obznanjivanja otkrića nesamerljivosti. Nije jasno da li je to shvatano samo kao kazna zbog otkrivanja tajni jednog bratstva, ili je implicirano i nešto više, naime, da su tim otkrićem, koje bi bilo Hipasovo, dovedeni u pitanje osnovi pitagorejskog učenja, tako da je obznanjivanje bilo neka vrsta sabotaže, zbog koje je kažnjen. Prisustvo ovakvih legendi ne treba da nas navede da radikalno posumnjamo u sve podatke koje kasniji autori navode o ovim Pitagorejcima. Legende su, možda ne bez osnova, stvarane kasnije, a podaci su svoje poreklo mogli imati u tradiciji koja počinje Aristotelom[3] i Eudemom[4]. Jamblih posle Hipasa pominje zajedno Hipokrata sa Hiosa i Teodora iz Kirene (*DK*, 18 4), a ovu dvojicu zajedno pominje i Eudem (prema Proklovim komentarima za Euklidove *Elemente* – vidi *von Fritz*, str. 384). Sve se to generacijski slaže sa onim što doznajemo od Platona i sa očekivanjima u pogledu vremena prvog otkrića nesamerljivosti[5].

Možemo zaključiti da je, iako neki autoriteti pomeraju otkriće nesamerljivosti do prelaza petog u četvrti vek pre nove ere, kao Erih Frank, ili još napred, kao Oto Nojgebauer, vrlo verovatno da se ono dogodilo generaciju pre

Hipokrata i Teodora, možda još negde polovinom petog veka pre nove ere. Ali nemamo zaista nikakve evidencije i razloga da idemo još dalje u prošlost, mada, naravno, i to ostaje moguće zahvaljujući pretpostavci o mnogim tajnim znanjima ranih Pitagorejaca.

Vidimo, dakle, da bi, što se tiče eventualnih podsticaja za filozofiranje o osnovnim objektima geometrije koji bi dolazili iz same geometrije i koji bi bili vezani za rešavanje određenih problema i za izvesna otkrića – kao što su problemi koji bi mogli voditi uvođenju infinitezimala, ili kao što je otkriće nesamerljivosti – ti podsticaji, ukoliko ih je kao podsticaja uopšte bilo, verovatno bili vezani za drugu polovinu petog veka pre nove ere. Pošto su Zenonovi spisi gotovo sigurno nastali ranije, u prvoj polovini petog veka pre nove ere, i to verovatno ne u njenim poslednjim godinama, to je, prvo, teško prihvatiti mišljenje Hasea i Šolca[6] da je Zenon stupio na scenu u trenutku krize osnova grčke geometrije, i drugo, bar s obzirom na razvoj same geometrije, nikakvog, pa ni pitagorejskog, shvatanja osnovnih geometrijskih objekata nije moralo biti, mada ga je moglo biti.

Kakva nam sad evidencija stoji na raspolaganju o eventualnom shvatanju geometrijskih objekata *nezavisno* od problema i otkrića u samoj geometriji?

30. Pitagorejsko učenje o broju i proporciji

Vrlo je verovatno, mada jedna izjava Aristoksena, prijatelja Pitagorejaca, pobuđuje sumnju (vidi *Guthrie 1*, str. 221–222)[1], da je prvi i glavni izvor pitagorejskog učenja o brojevima (bez obzira kako ono tačno izgledalo) bilo otkriće fiksnih numeričkih odnosa dužina žice pomoću kojih se proizvode kvarta, kvinta i oktava, muzički intervali koji su za Grke bili konsonantni, saglasni (φθόγγοι συμφωνοῦντες).

Prema Gatriju, Porfirije predstavlja najraniji dostupan izvor u kojem se ovo otkriće pripisuje Pitagori. Sâm Porfirije navodi u stvari mesto iz *Uvoda u muziku* Heraklida iz Ponta, koji se pak poziva na Ksenokrata, koji tvrdi da je Pitagora otkrio da harmonija (ἁρμονία) i disharmonija imaju svoje poreklo u odnosu dva kvantiteta, odnosno broja. Kasnije Teon iz Smirne (vidi *Guthrie 1*, str. 224) izjavljuje da je to opšte uverenje.

Razne apokrifne priče (vidi *DK*, 58) objašnjavaju kako se to dogodilo. Pitagora je, navodno, čuo kako čekići različite težine proizvode različite tonove kada se njima udara po nakovnju. To je, međutim, u najboljem slučaju mogla biti inspiracija za istraživanja koja je, prema Teonu, Pitagora vršio na monokordu, *kanonu*, kako se taj instrument zvao. Kanon je imao kapotaster pomoću kojeg se menjala dužina žice (vidi *Burnet 1*, str. 106, *Guthrie 1*, str. 224)[2]. Pitagora je, navodno, tako otkrio da su odnosi dužina žice za oktavu 2 : 1, za kvintu 3 : 2 i za kvartu 4 : 3.

Mnogi istraživači ne sumnjaju da je otkriće numeričkih odnosa vezanih za harmoniju zaista Pitagorino (*A. E. Taylor 1*, str. 164, 489; *Cornford 2*, str. 144–145; Barnet misli da je to „sasvim moguće, i ako ne možemo biti sigurni" – vidi *Burnet 1*, str. 105). Neki su oprezniji, kao na primer Ros (vidi *Ross 1*, str. 145), kojli samo kaže da se za Pitagoru navodi da je načinio to otkriće i da su pojedini istraživači, kao Barnet, skloni da u to veruju. Neki, kao Hajdel (*Heidel*, str. 357), insistiraju na tome da Aristotel nijedno jedino otkriće ne pripisuje Pitagori. U svakom slučaju, ako ovo otkriće i ne pripišemo samom Pitagori, mogli bismo ga pripisati ranim Pitagorejcima i smestiti ga u prvu polovinu petoga veka pre nove ere.

Kod Filolaja, koji treba da je rođen početkom druge četvrtine petog veka pre nove ere (vidi *Raven*, str. 94), nalaze se pomenute proporcije (fragment 6), mada treba reći da je autentičnost fragmenata koji mu se pripisuju predmet stalnih rasprava (vidi *Guthrie 1*, str. 330 i dalje). S druge strane, pomenuti eksperiment Hipasa iz Metaponta (*DK*, 18 12) već je vrlo suptilan i teško da je predstavljao tek induktivnu osnovu za nastanak teorije proporcije. I on je, kao i mnogi rani eksperimenti, pre bio usmeren na potvrđivanje postojećih teorija nego na otkrivanje nečeg novog[3].

Mislim da je veoma značajno utvrditi, ako je moguće, šta je bio *izvor* pitagorejskog učenja o brojevima, zbog toga što od toga može da zavisi i *priroda* samog ovog učenja, odnosno njegova rekonstrukcija. Značajno bi bilo utvrditi da li je rana pitagojeska aritmetika prethodila geometriji ili je obrnut slučaj. S druge strane, zbog eventualnog odnosa Zenona prema matematici, posebno geometriji, važno je i kada je otprilike sve to nastajalo.

Sam Aristotel, koji inače sklad (συμφωνία) određuje kao numerički odnos visokog i niskog (tona) (*Aristotle 1*, 1093 a 26), govoreći o razlozima pitagorejskog verovanja da su same stvari brojevi (*ibid.*, 1090 a 20), koje je već ranije naveo (*ibid.*, 987 b 28), pominje na prvom mestu činjenicu da harmonija od njih potiče (*ibid.*, 1090 a 24). S obzirom na ovo kao i na razna druga mesta gde se stvari poput pravde ili braka izjednačavaju s pojedinim brojevima (vidi, na primer, *Aristotle 1*, 895 b 29, 1078 b 21), možemo se zapitati ne odnosi li se sporno mesto (*Aristotle 1*, 985 b 23), gde se pitagorejsko bavljenje matematikom navodi kao razlog njihovog verovanja da su načela matematike načela svega, samo na pitagorejsku aritmetiku i teoriju proporcije. To izgleda vrlo verovatno.

Kako razumeti raznolike Aristotelove izjave, počev od onih, poput upravo navedene, po kojima su za Pitagorejce stvari brojevi (τὰ πράγματα ἀριθμοί) (*Aristotle 1*, 987 b 28), pa do onih po kojima, s jedne strane, stvari postoje podražavanjem brojeva (τὰ ὄντα μιμήσει τῶν ἀριθμῶν) (*ibid.*, 987 b 11), dok su, s druge strane, elementi brojeva elementi svega (τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων) (*ibid.*, 986 a 2), ili uzroci suštine (ἀριθμοὶ αἴτιοι τῆς οὐσίας) (*ibid.*, 987 b 24)?

Kao putokaz mogu poslužiti Aristotelove pohvale i pokude. On hvali pitagorejce što nisu prihvatili odvojeno postojanje brojeva (μὴ χωριστοὶ ἀριθμοί) (*ibid.*, 1083 b 10), a kritikuje ih, prvo, što su fizička tela (τὰ φυσικὰ σώματα) konstruisali iz brojeva (τὸ ποιεῖν ἐξ ἀριθμῶν) (*ibid.*, 1090 a 32), pitajući ih, na primer, kako belo, slatko ili vruće mogu biti brojevi (*ibid.*, 1092 b 15), i drugo, što su, tvrdeći da su brojevi uzroci i suštine, prevideli da je broj (ἀριθμός) uvek samo broj stvari, a tek odnos (λόγος) suština na koju su mislili (*ibid.*, 1092 b 17).

Pitagorejci su, možda, uvideli dve stvari: *prvo*, da se pojedini muzički intervali, pre svega konsonantni, dobijaju tako što se dužina žica menja u određenom odnosu, i *drugo*, da je za svaki od tih intervala važan samo taj odnos, a ne apsolutna dužina žice, pošto različite dužine žica daju isti interval ako su u istom odnosu. Na osnovu toga su, možda, zaključili da je za interval *važan* jedino *odnos* (λόγος) i *brojevi* (ἀριθμοί) pomoću kojih se odnos

izražava (l, 2, 3, 4). Kvarta *je* jedan određeni odnos (4:3), kvinta drugi (3:2), oktava treći (2:1). Ako su ovakve i slične odnose otkrivali i u drugim stvarima, onda su, možda, izvršili generalizaciju: sve je *odnos* i *broj* (λόγος καὶ ἀριθμός), i to je, možda, cela suština prvobitnog pitagorejskog učenja o brojevima.

Razlikovanje određene kvarte od suštine kvarte, ili tretiranje odnosa kao uzroka konsonancije, verovatno je kasnijeg porekla. Nisu rani Pitagorejci morali brkati te stvari; brkati se može nešto što je već prethodno razdvojeno. Greška i zbrka nastaju ako se izvrši neko apstrahovanje, pa onda pobrka ono što je apstrahovano sa onim od čega se apstrahovalo, pobrkaju, na primer, četiri jabuke i broj četiri, ili, eventualno, pomisli da ono što je apstrahovano postoji samostalno i nezavisno, ili zaboravi da i ono od čega se apstrahovalo postoji. Da grešku osamostaljivanja brojeva Pitagorejci nisu načinili priznaje sam Aristotel (na navedenim mestima: 1090 a 30, 1083 b 8), a onda, teško da su mogli načiniti i prvu, pošto nisu izvršili apstrahovanje. Reći da je kvarta odnos 4:3 ne mora nužno značiti *ni* da muzike ima bez sviranja na instrumentu, *ni* da su četvorka i trojka žice, ili dve određeno dugačke žice. To prosto može značiti da je kvarta interval koji se može dobiti pomoću *bilo koje* dve žice *ako* su ove u datom odnosu dužine i da *utoliko* nisu važne *ni* žice *ni* određena dužina žica koja bi se izrazila nekom merom, već jedino odnos 4 : 3.[4]

Uzeto u jednostavnom, mada ne trivijalnom, vidu u kojem sam ga upravo izložio, učenje o broju i proporciji podnosi raznolike Aristotelove izjave, prosto zato što je nedovoljno određeno i bez potrebnih razlika s obzirom na Aristotelovu analitičku terminologiju. Na neki način je tačno da žice pomoću kojih se dobija kvarta stoje u odnosu 4:3, na neki način je tačno da im se mogu pridodati brojevi 4 i 3 a da to ne bude prosto nadevanje imena – to ne mogu biti, recimo, 5 i 3. Zbog ovoga, ovakve korespondencije, ove žice *su* bar u međusobnom odnosu četvorka i trojka, ali su, budući da se ne sme izvršiti konverzija – 4 i 3 nisu žice – one i samo *reprezententi* četvorke i trojke, one ih na neki način *oponašaju*. Najzad, odnos 4:3 je na neki način *uzrok* što je dobijeni interval kvarta a ne nešto drugo, i on je na neki način *suština* kvarte.

Zapitajmo se sad, u vezi sa jednim ovakvim tumačenjem, šta je bio cilj poznatog eksperimenta Hipasa iz Metaponta (*DK*, 18 **12**). Hipas se koristio različitim diskovima, fiksirao na različite načine po dve dimenzije u paru diskova i pokazivao da dobijanje određenog intervala zavisi isključivo od odnosa u trećoj, svejedno da li je to širina, dužina ili debljina. Zaključak koji se odatle može izvesti jeste da harmonija *ne zavisi od materijala* instrumenta koji je proizvodi, pošto zavisi od numeričkog odnosa *u samo jednoj dimenziji*. Ta *nezavisnost od materijala* i *isključiva zavisnost od numeričkog odnosa* predstavlja ono što prema ponuđenom tumačenju čini smisao pitagorejske tvrdnje da je *sve odnos i broj*, bez obzira na to na koji se od raznih Aristotelovih načina to kasnije precizira.

31. Aritmetizovanje geometrije kod ranijih Pitagorejaca

Za nas je centralno pitanje pitanje primene pitagorejskog učenja o broju i proporciji u geometriji, odnosno *pitanje odnosa aritmetike i geometrije*.

Ako bi ponuđeno tumačenje nastanka i značenja učenja o broju i proporciji bilo tačno i ako su Pitagorejci sa svojom teorijom pristupili opazivim telima po analogiji sa onim kako su svoju teoriju primenjivali i shvatali kad je u pitanju muzika, onda je moguće da su oni, i nezavisno od njihovih konkretnih geometrijskih znanja, u jednom važnom pogledu tvorci nove geometrije. Jer ako se u slučaju muzike pokazala nezavisnost harmonije od materijala u smislu u kojem to najbolje može da ilustruje Hipasov

eksperiment, onda se slična nezavisnost mogla pretpostaviti i u stvarima koje se tiču opazivih tela. Pitagorejci su, onda, mogli biti zainteresovani samo za ustanovljavanje numeričkih odnosa dveju dužina, površina ili zapremina, i moguće je da su imali nameru da sve pojave svedu na ovakve odnose, što bi takoreći bio program jedne matematičke prirodne nauke, kao što na to ukazuje značajno mesto iz Aristotelove *Metafizike*: 990 a 12. Oni izgleda, kaže Aristotel nešto dalje (*Aristotle I*, 990 a 19–20), nemaju šta da kažu o opazivim telima kao takvim. Ali oni, možda, iz navedenih razloga, o tome nisu ni hteli da govore.

Naše očekivanje se potvrđuje činjenicom da su grčki matematičari uopšte (vidi *Heath*, I, str. 150) uvek samo govorili o odnosu dve oblasti, a ne prosto o, recimo, površini neke figure. Oni su se pitali „kakav je odnos neka dva kruga?“, ali ne „kolika je površina nekog kruga?“ (vidi *Boyer*, str. 32).

Na osnovu ponuđene interpretacije učenja o broju i proporciji možemo zaključiti da je metod višestruke primene jedne oblasti, da bi se izvršilo upoređivanje dveju oblasti, verovatno pitagorejskog porekla. To je kasnije moglo dovesti do problema kvadrature kruga ili otkrića nesamerljivosti, a ovo je pak moglo dovesti u krizu učenje Pitagorejaca, *ali* ne neku njihovu teoriju o osnovnim geometrijskim objektima, ili ne pre svega to, *već* samu njihovu *logistiku*. Ovaj termin „logistika“ (λογιστικά) nalazimo u jednom fragmentu Pitagorejca iz četvrtog veka pre nove ere, znamenitog Arhite iz Tarenta (*DK*, 47 B **4**). U ovom fragmentu se jasno govori o centralnom mestu logistike i njenoj prioritetnosti u odnosu na geometriju, čak se kaže da gde geometrija otkazuje tu dokaze daje logistika.

Dakle, sa dosta pouzdanosti možemo reći da je pitagorejska geometrija kasnija u odnosu na njihovo učenje o broju i proporciji i da je još izvesnije da je bar u petom veku pre nove ere bila aritmetizovana. Tek u kasnijoj grčkoj matematici – možda preokret počinje negde u doba Platona, odnosno Teeteta – dolazi do geometrizovanja aritmetike. Kod Eudoksa, Euklida i Arhimeda način izražavanja je čisto geometrijski.

Što se tiče eventualnog shvatanja tačke i ostalih osnovnih geometrijskih objekata Pitagorejaca prve polovine petog veka pre nove ere, možemo zaključiti da – kako na osnovu razmatranja razvoja geometrije tako i na osnovu pitagorejskog učenja o broju i proporciji – nismo pronašli nikakav razlog da pretpostavimo da su Pitagorejci u tom periodu imali ikakvo takvo shvatanje.

Što se pak tiče pretpostavke o tome da su oni aritimetičke jedinice (monade) shvatali kao tačke koje ipak imaju veličinu, ili kao atome, koju je detaljno razvio Rejvn (vidi *Raven*, str. 72–73), a što su prihvatili mnogi drugi (vidi *Guthrie 1*, str. 238, 259), pre vidimo razlog protiv te pretpostavke nego za nju. Razlog protiv te pretpostavke je opisani način aritmetizovanja geometrije. Kao što se jedinica u odnosu 2:l, koji određuje oktavu, ne odnosi ni na kakvu elementarnu veličinu – to je bar kod proizvodnje muzičke harmonije sasvim očigledno – već naprotiv, što Hipasov eksperiment i eksplicitno pokazuje, na bilo koju dužinu (širinu ili debljinu) koja je u datom odnosu prema nekoj drugoj (pri fiksiranim drugim dvema dimenzijama), tako i brojevi koji se pojavljuju u izvesnim odnosima u geometriji, poput onih iz Pitagorine teoreme, nisu, bar u početku, morali da se odnose ni na kakve tačke-atome.

Da li je i ako jeste ko od Pitagorejaca i kada kasnije eventualno uveo tačke-atome teško je pouzdano reći, mada postoji eksplicitno Aetijevo svedočanstvo (*DK*, 51 2) da je to učinio Ekfant iz Sirakuze. Vlastos (*Vlastos 4*, str. 170) tvrdi da je to jedino svedočanstvo kod doksografa koje ijednom Pitagorejcu kategorički pripisuje verovanje u nekakav atomizam. Za Ekfanta su, doduše, neki[1] tvrdili da je imaginarna ličnost, ali je, svakako, verovatnije da je postojao i pripadao generaciji Pitagorejaca savremenika Platonovih (vidi *Guthrie 1*, str. 325)[2].

32. *Parmenidovo učenje o homogenom, kontinuiranom, jedinstvenom biću*

a) Metod

Od Aristotela važi da je prvi dijalektičar Zenon (prema Diogenu to Aristotel kaže u *Sofistu* – *DK*, 29 A 10). Na osnovu Platonovog *Parmenida* mogli bismo zaključiti da je to ipak već Parmenid. No, da li da dijalektiku, i uopšte bilo koju filozofsku argumentaciju, tražimo u poemi koja počinje poput Pindarove ode (vidi, naročito, *Šestu olimpijsku odu*)?

Kada je na molbu Helijada Pravda pesniku otvorila kapiju Svetlosti, Boginja mu je odmah, uzevši ga za ruku, najavila kako će biti nagrađen: otkriće mu se srce istine, u suprotnosti sa mnenjima smrtnika (βροτῶν δόξαι) (B **1** 29–30), za koja se kaže da su bez istinske verodostojnosti. Ali, umesto da mu istinu otkrije neposredno, kako bismo očekivali, Boginja prvo naznačuje koje sve mogućnosti uopšte postoje, navodeći najpre dva zamisliva puta istraživanja (ὁδοί...διζήσεως B **2** 2)[1] i kompletirajući ih nešto kasnije (B **6** 4–9) trećim, kao kakvom kombinacijom prva dva.

Koja su to tri puta? Teško je naći slučaj u kojem se filolozi, istoričari i filozofi više razilaze u prevođenju i interpretaciji. Meni se čini najverovatnije da je centralna stvar koju Boginja želi da saopšti – odgovor na pitanje o čemu se sve smisleno može govoriti i uopšte misliti, tako da ona svođenjem na apsurd pokazuje da se nikako ne može smisleno govoriti o onome što ne postoji. Protivno rasprostranjenom prevođenju, koje celu argumentaciju trivijalizuje, ne čini se da je Parmenid tvrdio, ili želeo da tvrdi da ono što postoji postoji dok ono što ne postoji ne postoji (biće jeste, ne biće nije). *Prvi put* je da se prihvati da se samo o onome što postoji može smisleno govoriti, *drugi*, potpuno bizaran, da je to moguće činiti samo u pogledu onoga što ne postoji, *treći*, na prvi pogled najprihvatljiviji, da se smisleno može govoriti i o jednom i o drugom. Nije nimalo čudno što se Boginja najviše bavi trećim putem.

Na mestu gde se govori o prva dva puta (ὁδοί) ne pojavljuju se ni „biće" ni „nebiće", već grčki tekst prosto glasi: ἔστιν τε καὶ ὡς οὐκ ἔστι μὴ εἶναι (*prvi put* – B 2 3) i οὐκ ἔστιν τε καὶ ὡς χρεών ἐστι μὴ εἶναι (*drugi put* – B 2 5). Na mestu gde se govori o trećem putu ne kaže se, pak, da su biće i nebiće isto u pogledu bivstvovanja, već samo da oni važe za isto (τὸ πέλειν τε καὶ οὐκ εἶναι ταὐτὸν νενόμισται – B 6 8).

Kornford, koji se zalaže za uobičajeno čitanje, koje je, kao što vidimo, već interpretacija, predlaže da se „prećutani" subjekti „biće" i „nebiće" čak ubace u tekst (*Cornford 4*, str. 30): ἡ μὲν (ὁδὸς) ὅπως ἐὸν ἔστι καὶ ὡς οὐκ ἔστι μὴ εἶναι.

Ovakvo čitanje, ili dočitavanje, celu stvar trivijalizuje, utoliko što kazati da ono što postoji postoji dok ono što ne postoji ne postoji znači reći nešto što je istinito *ex vii terminorum*, dok drugi i treći put otpadaju odmah, jer se osnivaju na kontradikciji[2].

Uverljiv razlog protiv ovakvog čitanja naveo je Oven (*Owen 3*, str. 58–59). Jednostavno, ceo prvi deo poeme gde se govori o putu istine (do B 9) deluje kao *dokazivanje* ispravnosti prvog i neispravnosti druga dva puta. Osim ovoga, možemo navesti još dva protivrazloga. Prvo, da je istinu želeo da predoči tautološki, Parmenid je to uverljivije mogao da učini uvođenjem subjekata u odgovarajuće rečenice. Drugo, treći put, gde se pojavljuju biće i nebiće (B 6 4–9) on ne uvodi analogno prethodnim dvama i ne zamera se smrtnicima što smatraju da i nebiće postoji, već to što se za njih biti i nebiti (τὸ πέλειν τε καὶ οὐκ εἶναι) ispostavljaju kao nešto što je isto, iako oni i nisu isto.

Frenkel je predložio da se na spornim mestima ἔστιν prevede inpersonalno, poput „grmi" ili „seva". Ali šta se filozofski dobija oslobađanjem od subjekta?

Postoji jedna mogućnost koja meni deluje uverljivo. Pošto se rečenice o kojima je reč ionako izgovaraju, prećutano bi moglo biti: „reći". Prvi put bi bio *reći*: ἔστιν τε καὶ ὡς οὐκ ἔστι μὴ εἶναι, a drugi *reći*: οὐκ ἔστιν τε καὶ ὡς χρεών ἐστι μὴ εἶναι.

Mada ne daje ovakvo tumačenje, Oven daje parafrazu, u kojoj uvodi subjekat koji je po njegovom mišljenju prećutan, a kojom parafrazom se dobija smisao koji je vrlo blizak, ili u osnovi isti kao prethodni. On misli da je subjekat „ono o čemu se može govoriti i misliti" (*Owen 3*, str. 60). Taj subjekat se, inače, eksplicitno pojavljuje na početku B 6 1–2: τὸ λέγειν τε νοεῖν τ' ἐόν...

I pri ponuđenoj interpretaciji inpersonalnog prevođenja, i pri Ovenovoj parafrazi, pitanje vezano za tri puta glasilo bi: o čemu se može a o čemu ne može govoriti i misliti? Prvi deo poeme predstavljao bi *reductio ad absurdum* drugog i, naročito, trećeg puta[3], a zaključak bi bio da se o onome što postoji i samo o onome što postoji može smisleno govoriti i misliti.

Ako je neko mislio da je i o biću i o nebiću, koji inače treba da se razlikuju, moguće smisleno govoriti i uopšte misliti utoliko što nešto o čemu se govori i misli jednom jeste a posle toga nije, onda je protiv toga uperen dokaz o nemogućnosti nastajanja (γένεσις) i propadanja (ὄλεθρος) (B 8 6–21). Ako je mislio da je to moguće činiti tako što bi se o nečemu nešto reklo što se o nečemu drugom ne bi moglo kazati, ili bi se moglo reći ovde ali ne bi onde, onda je protiv toga uperen dokaz o nemogućnosti deljenja (οὐδὲ διαιρετόν ἐστιν) i raznovrsnosti (πᾶν ἐστιν ὁμοῖον) (B 8 22), ili stepenovanja zastupljenosti (πάντοθεν ἶσον) (B 8 49). I tako redom, posle celog svođenja na apsurd druga dva uopšte zamisliva puta, ostaje na kraju otvoren samo prvi.

Dakle, već je Parmenid nastojao da na neki način koristi *dijalektički metod*: poći od neke tvrdnje koju treba testirati i pokušati je svesti na apsurd. To je tačno ono što je Rajl zvao *jaki reductio ad absurdum* (*Ryle 2*, str. 197).

Ali, osim toga što je ovako postupao Parmenid je izgleda, verovao da se tako može doći i do *pozitivnog ontološkog rezultata*. Jer ako je univerzum mogućnosti iscrpen, to jest ako su isključene sve mogućnosti sem jedne, onda stvari moraju biti u skladu s tom preostalom mogućnošću. Osnovna i opšta *pretpostavka* uspešnosti celog postupka i valjanosti rezultata jeste da stvari stoje onako kako se o njima *neprotivrečno* može misliti i govoriti, a Parmenid je verovao da se to može činiti na samo *jedan način*. Nošen ovom idejom on je, reklo bi se, verovao da je koherencija tvrdnji i nužan i dovoljan uslov i smislenog i istinitog govora.

Pretpostavku koju smo upravo interpretirali Parmenid je koristio na više mesta u poemi. Tako je on, ako se prihvati ponuđena interpretacija, koristi već u B 3, u cilju svođenja na apsurd drugog puta.

Ovaj slavni fragment (...τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστιν τε καὶ εἶναι) prevođen je na različite načine. Uobičajeno se infinitiv νοεῖν uzimao za subjekat rečenice (to je slučaj i u Dilsovom prevodu), tako da je proizilazilo da je sâmo mišljenje ono što se izjednačuje s postojanjem. No Barnet je sledio Celerov prevod (vidi *Zeller*, str. 558, *Burnet 1*, str. 173; vidi takođe, *Guthrie 2*, str. 14), dokazujući da se infinitiv *nije* tako upotrebljavao, te da ga zato treba uzeti u njegovoj uobičajenoj dativskoj upotrebi. Nezavisno od toga koliko je Barnet u pravu u svojoj radikalnoj tvrdnji, svakako je moguće da se infinitiv upotrebi na taj način i tada τὸ αὐτό ne mora da se odnosi ni na kakve entitete koji se izjednačuju, već na okolnost da se može misliti samo o onom što postoji: isto je, naime, *da se* bude mišljen i *da se* bude (akcenat u ἐστιν se sa ι, kako se uobičajeno čita, pomera na ε (ἔστιν) jer se ἐστιν vezuje uz νοεῖν) utoliko što, kao što smo videli, stvari moraju stajati onako kako se o njima jedino smisleno, odnosno neprotivrečno može govoriti. Ova pretpostavka se javlja i u B 8 8–9, B 8 16–17, B 8 34–35.

b) Homogenost

Svodeći na apsurd pre svega treću od svih *prima facie* mogućnosti, Boginja je Parmenidu usput pomenula mnoga obeležja (σήματα)[4], koja ukazuju na to da je ono o čemu se jedino smisleno može govoriti homogeno, kontinuirano i jedinstveno.

Ono što postoji ne može biti u sebi različito ili deljivo (οὐδὲ διαιρετόν ἐστιν – B 8 22) s obzirom na karakteristiku postojanja; ono je zato, kao postojeće, svuda isto (πᾶν ἐστιν ὁμοῖον). Pošto se ne može reći da su njegovi *delovi* isti, jer ono *kao postojeće* nema delova, ὁμοῖον je bolje uzeti adverbijalno (up. *Owen 3*, str. 58) (pri čemu se akcenat u ἐστιν mora nalaziti na ε): ono o čemu je reč svo postoji na isti način i ne možemo se pitati koje su to dve stvari koje su slične, ili iste.

Takozvani paradoks predikacije koji srećemo u Platonovom *Parmenidu* (*Plato 4*, 139 E, 148 A) počiva na ovom obeležju onoga što postoji, pošto se, bar na prvi pogled, ne vidi kako neku

stvar možemo karakterisati sa više predikata ako je ona kao postojeća sva istovetna (ὁμοῖος).

Bivstvovanje kao obeležje onoga o čemu se može misliti i govoriti ne podleže ni stepenovanju (B 8 23). Dakle, i *vremenski*, ako nema nastajanja i propadanja, i *prostorno*, ako nema stepenovanja, biće je homogeno.

c) Kontinuitet

Συνεχές bi van konteksta posmatrano u B 8 5–6 izazivalo zbunjenost (...ἔστιν ὁμοῦ πᾶν, ἕν, συνεχές) pošto se pre Parmenida (vidi *Kullmann*, str. 169) samo za dve ili više stvari moglo reći da su συνεχές, to jest da se jedna na drugu neposredno nastavlja. Tako se, na primer, kod Homera (*ibid.*, *loc. cit.*) to kaže za dane i noći. Kod Parmenida, međutim, subjekat koji se ima u vidu trebalo bi da bude „ono o čemu se može misliti i govoriti", tako da nema *dve* stvari za koje bi se reklo da su συνεχές. Smisao ovakve upotrebe je, ipak, u kontekstu jasan, pogotovu kad se uzme u obzir i mesto B 8 23, gde se pojavljuje συνέχεσθαι. Pošto nema *delova* onoga što postoji koji bi se jedan na drugi nadovezivali, Parmenid συνεχές upotrebljava na nov način, primenjujući ga na samo jedno biće, čime se značenje malo pomera, tako da najadekvatniji prevod postaje: ono o čemu se može misliti i govoriti mora biti (u sebi) kontinuirano.

Συνεχές je tako postalo *obeležje jednog* bića, a ne *relacija dva* bića. Parmenid nije hteo da kaže da su *navodni delovi* συνεχές jer je verovatno do kraja hteo da izbegne da u definitivnoj karakterizaciji govori o delovima, to jest o onome za šta inače kaže da se o tome ne može govoriti[5].

I συνεχές kao obeležje onoga o čemu se jedino može misliti i govoriti važi i u *vremenskom* i u *prostornom* smislu (u prvom smislu je to u B 8 5–6, u drugom u B 8 23) i, što je za nas najvažnije,

nije to samo zato što nema nebića, koje bi svojim umetanjem omogućilo odeljivanje u onome što postoji, već i zbog toga što je biće homogeno[6].

d) J e d i n s t v e n o s t

Bez heterogenosti ili diskontinuiranosti nema mnoštvenosti i utoliko je ono čemu se jedino sa smislom može govoriti jedno i jedinstveno (ἕν); pišimo ga velikim slovom: Jedno. Kako je, kao što smo videli, ono o čemu se jedino sa smislom može govoriti ono što jedino može postojati, a ne samo obrnuto, ono što postoji ono o čemu se jedino smisleno može govoriti, to kod Parmenida nije reč samo o tome da mi ne možemo *ustanoviti* da ima mnoštvenosti, već nje *de facto* nema. Utoliko Parmenidov zaključak ne ostaje na onome što je Lajbnic kasnije nazvao *identitas indiscernibilium*, već sadrži inverzni princip, koji je ontološki i koji možemo nazvati *indiscernibilitas identitatum*[7]: biće kao biće je u svom identitetu i jedinstvenosti u sebi nerazlučivo i nedeljivo[8].

Zbog obeležja homogenosti i kontinuiranosti i odsustva nebića, ne bismo nikako očekivali da Parmenid svoje biće o kojem se jedino može misliti i govoriti karakteriše prostornom ograničenošću. Jer kada bi ono bilo prostorno ograničeno, bilo bi ograničeno ili heterogenim bićem ili nebićem. Pa ipak se i u grčkoj tradiciji (to, prema Aleksandru, kaže sâm Teofrast – *DK*, 28 A 7) i među današnjim istraživačima[9] susrećemo sa mišljenjima kako je Parmenid svoje biće shvatao kao prostorno ograničeno, tačnije, kao savršenu loptu (tako to shvata Teofrast – *DK*, 28 A 7). Ovakva mišljenja, međutim, počivaju na određenoj vrsti čitanja i interpretiranja redova B 8 42–49, koje nećemo prihvatiti.

Na prvi pogled i van konteksta, čitanje po kojem je Parmenidovo biće ograničeno može izgledati sasvim uverljivo i čak može delovati čudno kad se naglašava da se radi o *interpretaciji*. U B 8 42–43 se krajnja granica (πεῖρας

πύματον) navodi kao razlog što je ono o čemu se govori, znači biće, dovršeno na sve strane (τετελεσμένον ἐστὶ πάντοθεν) i pravi se poređenje sa savršenom loptom, utoliko što je ova (u sebi) svuda ista (εὐκύκλου σφαίρης ἐναλίγκιον ὄγκωι). Ali, dve stvari vrlo brzo dovode u pitanje uverljivost ovakvog čitanja. Prva se odnosi na čitanje reči πεῖρας u prethodećim argumentima u B 8 26–33, a druga na celinu samog argumenta u B 8 42–49, koja tek otkriva smisao u kojem se upotrebljava analogija s loptom.

U B 8 26–27 se kaže da ono (o čemu se govori) nepromenljivo i nepokretno (ἀκίνητον)[10] leži u *granicama* moćnih okova, da je bez početka i prestanka, jer nema nastajanja i propadanja. Nešto niže (B 8 30–31) kaže se da je Nužda (Ἀνάγκη) ta koja drži te sveze granica. U oba ova slučaja, gde se govori o granicama, nije reč o ograničenosti u nekom prostornom smislu. No, što je još važnije, u prvom slučaju se govori o granicama tamo gde se s obzirom na vreme *upravo poriče* postojanje početka i kraja (ἔστιν ἄναρχον ἄπαυστον). U drugom slučaju se o granicama govori tamo gde se poriče nedovršenost (οὐκ ἀτελεύτητον) i potrebitost (οὐκ ἐπιδευές). Dakle, granice su samo *granice nužnosti* po kojoj stvari stoje onako kako se u argumentu konstatuje da moraju stajati[11].

Imajući sad u vidu kontekst i smisao u kojem na analiziranim mestima Parmenid upotrebljava reč πεῖρας (πείρατα), nemamo razloga da u tom smislu ne protumačimo i *poslednju granicu* (πεῖρας πύματον) na mestu gde se navodno govori o prostornoj ograničenosti, pogotovu što se, kako primećuje Oven (*Owen 3*, str. 65), sa ἐπεί („pošto“) ceo argument neposredno dovodi u vezu sa prethodnim i što se u τετελεσμένον πάντοθεν („dovršeno na sve strane“) upotrebljava ista reč, koja je upotrebljena ranije, kod poricanja potrebitosti i nedovršenosti (οὐκ ἀτελεύτητον).

Teško je složiti se sa Vlastosom i fon Fricom (vidi *ibid.*, str. 61 i nap. 53) da se Parmenid ne bavi prostornim pojmovima; upravo na analiziranom mestu (B 8 43) on se okreće prostornom aspektu homogenosti i kontinuiranosti. Ali, poređenje sa lepo zaobljenom loptom ne moramo dovoditi u vezu sa pomenutom poslednjom granicom u smislu prostorne ograničenosti. Poređenje se može dovesti u vezu sa masom (ὄγκος) koja je *ravnomerno raspoređena* (ἰσοπαλές), *kao što bi* to bio slučaj kod homogene lopte kod koje ne bi nigde bilo nikakvog pretezanja: ono o čemu se govori je εὐκύκλου σφαίρης ἐναλίγκιον ὄγκωι, μεσσόθεν ἰσοπαλὲς πάντηι (B 8 43–44). S ovim je upravo saglasan nastavak u argumentaciji, gde se kaže da (ono o čemu se govori) ne može biti ovde ili onde pretežnije ili neznatnije (οὔτε τι μεῖζον οὔτε τι βαιότερον)[12]. Jer, kao što se odmah zatim kaže, niti ima nebića niti biće može tu ili tamo biti više ili manje prisutno (B 8 46–48). Dakle, samo se zaključuje ono s čim smo se već sreli kad je bilo reči o homogenosti i kontinuiranosti uopšte, naime, da je ono o čemu se može govoriti i misliti s obzirom na homogenost i kontinuiranost *i u prostornom pogledu* na sve strane isto (πάντοθεν ἶσον) (B 8 49).

Slažući se sa onim tumačenjima (*Fränkel 1*, str. 34–36, *Owen 4*, str. 61–68) po kojima Parmenid ne argumentiše u prilog bića koje bi bilo ograničeno poput savršene lopte, možemo povući strogu analogiju između vremenskog i prostornog aspekta jedinstvenosti s obzirom na ontološki princip koji smo nazvali *indiscernibilitas identitatum*. Kao što se tvrdi da je zbog odsustva svake promene nemoguća vremenska diferencijacija, pa je ono o čemu mislimo i govorimo nužno samo u sadašnjosti, tako je zbog odsustva svake heterogenosti nemoguća prostorna diferencijacija, a time se ukida razlika ovde-onde, pa je biće, da tako kažemo, samo ovde.

33. Identitas indiscernibilium i indiscernibilitas identitatum kod Parmenida i Melisa

Samim tim što smo odbacili interpretaciju po kojoj poređenje sa savršenom loptom treba da znači da je Parmenidovo Jedno prostorno ograničeno, ne možemo se složiti s Barnetom (*Burnet l*, str. 325) da je Melis, za razliku od Parmenida, uveo u igru i prostornu neograničenost, pored vremenske. Ali, kod Parmenida se ne govori ni o vremenskoj neograničenosti, iako se ne govori ni o vremenskoj ograničenosti. Razlika između Parmenida i Melisa nije u načinu na koji su oni shvatali ono što postoji, već u načinu korišćenja principa koji je Lajbnic zvao *identitas indiscernibilium*.

Princip *identitas indiscernibilium* se kod Parmenida upotrebljava jedino u *dijalektičkom pobijanju*, to jest svođenju na apsurd raznih mogućnosti, pre svega „trećeg puta“, pri čemu se koriste

imena koja su „stvarima nadenuli smrtnici“ (B 8 38–39) i usputni znaci (σήματα), koji samo ukazuju na to kakvo je ono što postoji. Kod Melisa se pak, kako izgleda, ono što postoji, a što je upravo Parmenidovo Jedno, karakteriše *iz perspektive smrtnika*, pa se zbog toga kaže za ono o čemu se jedino istinito može govoriti da je uvek bilo, da jeste i da će uvek biti (B 1), zbog čega je večno (ἀίδιον) kao što je i ovde i onde i svuda, i utoliko beskonačno (ἄπειρον).

Pošto se Parmenid i Melis slažu da ontološki važi *inidiscernibilitas identitatum*, i pošto, kako duhovito primećuje Oven (*Owen 5*, str. 276), „odredište ne sadrži znake koji njemu vode i putnicima na cilju ovi nisu više potrebni“, Melisova upotreba prošlog i budućeg vremena ipak je samo gramatička ispomoć smrtnicima, kojom ukazuje na ono što je vanvremeno i za šta Platon kaže da ga strogo uzevši treba karakterisati samo sa „je“ (τὸ ἔστι) (*Plato 12*, 37 E – 38).

Ako ἄπειρον ne bismo shvatili u smislu beskonačnosti, već u smislu neodređenosti, što je moguće značenje, tako da je ono što postoji – ne beskonačno kao navodno i ovde i onde i svuda, već neodređeno jer se u njemu ne mogu razlikovati ovde i onde, i ako u odgovarajućem smislu shvatimo i ἀίδιον, onda više ne bi bilo razlike – ne samo između Parmenidovog i Melisovog shvatanja onoga što postoji, već ni između perspektiva iz kojih ga karakterišu.

34. O kakvoj je sve mnoštvenosti reč kod Empedokla i Anaksagore?

Sličnost pojedinih mesta u Parmenidovoj i Empedoklovoj poemi s istim naslovom (*O prirodi*) dovoljna je da se utvrdi da je Empedokle, *donekle* prihvatajući Parmenidove zaključke, *svesno* izgradio alternativnu, pluralističku ontologiju.

Fragmenti B 12, 13 i 14 iz Empedoklove poeme potpuno su parmenidovski i s obzirom na *osnovnu* karakteristiku onoga o čemu se govori, a to je ono što postoji: ono niti može nestati, to jest prestati da postoji, niti je nastalo (Empedokle još eksplicitno poriče postojanje praznine – κενεών). Međutim, to što postoji, iako jedinstveno po osnovnoj karakteristici, sadrži i *druge* karakteristike, po kojima *se u sebi razlikuje*: po tim drugim karakteristikama ono nije jedinstveno već četvorno.

Voda, vatra, zemlja i vazduh, kao koreni svega drugog (πάντων ῥιζώματα), razlikuju se *po sebi*: oni se, kao ono što postoji u Parmenidovom smislu, kao takvi ne mogu jedni u druge preobražavati. Oni nisu samo kvalitativne suprotnosti, kao što su toplo-hladno ili suvo-vlažno, koje se diferenciraju iz zajedničke klice (ἀρχή), što je slučaj kod jonskih fizičara; mnoštvenost je radikalna mnoštvenost, mnoštvenost samih izvora.

Time što je ono što postoji četvorno, koreni i *posmatrani sami po sebi* gube neke karakteristike Parmenidovog Jednog. Tako oni mogu menjati (spoljni) oblik uzajamnim umetanjem jednih u druge. Takvim kretanjem i mešanjem (κρᾶσις) nastaju sve prolazne, smrtne stvari.

Uzajamno umetanje, odnosno mešanje korena, nije u načelu ničim ograničeno, mada je, izgleda, jedna Aristotelova primedba (*Aristotle* 9, 305 a 2) navela neke doksografe (na primer, Aetija, *DK* 31 A 43) i neke savremene istraživače (vidi *Gaye*, str 109 i dalje) da Empedoklu pripišu i zagovaranje izvesnog atomizma.

U spisu *O nebu* Aristotel kaže kako „izgleda da Empedokle misli da najmanji delovi, iako deljivi, neće nikad biti dalje deljeni" (*Aristotle* 9, 305 a 2). Treba odmah primetiti da Aristotel ovo *zaključuje*, nemajući neposrednu evidenciju u Empedoklovom tekstu. Osim toga, Aristotel ne kaže da najmanji delovi *ne mogu* biti deljeni, već da *neće* biti dalje deljeni. But ukazuje da ni Stobej ni Plutarh ne govore u vezi sa Empedoklom o nedeljivim, već samo o najmanjim česticama (ἐλάχιστα) (*Booth I*, str. 4, nap. 5).

Pominjanje najmanjih a ipak ne i nedeljivih čestica može se dovesti u vezu s činjenicom da se kod Empedokla koreni mešaju i razdvajaju, već prema tome da li prevladava Ljubav ili Mržnja, i da je mešanje, to jest deljenje svakog od korena umetanjem nekog od ostala tri, uvek *de facto* izvršeno do određene tačke, iako se najmanji homogeni delovi koji tako nastaju mogu dalje deliti. Obrnuto iskazano, iako se mogu deliti, najmanji delovi ne prestaju zbog toga biti najmanji (ἐλάχιστα)'.

Empedoklovoj mnoštvenosti korena odgovara Anaksagorino mnoštvo semena (σπέρματα – *DK*, 59 B 4), samo je ovih semena, koja se razlikuju *sui generis*, mnogo više. Suprotno mišljenju nekih istraživača (*Luria*, str. 107, *Mau*, str. 19), izgleda da je kod Anaksagore, za razliku od Empedokla, sasvim izvesno da se odbacuje svaki atomizam, pošto on u nespornom fragmentu B 3, govoreći o semenima, nedvosmisleno kaže da su, budući da uvek od malog postoji manje i od velikog veće, veliko (τὸ μέγα) i malo isto (ἴσον τῷ σμικρῷ) u pogledu mnoštvenosti (πλῆθος), da utoliko nisu nešto što je po sebi (πρὸς ἑαυτό) veliko ili po sebi malo, već i jedno i drugo (ἕκαστόν ἐστι καὶ μέγα καὶ σμικρόν). Kolin Streng je verovatno u pravu kad kaže da je ova teza čak deo „čvrstog jezgra" Anaksagorine fizike (*Strang*, str. 361).

35. Osnovni elementi iz pojmovne mreže u Zenonovim dokazima protiv mnoštva

Zenonove navodno izvorne reči, kao i reči drugih o njemu, razmatraćemo najpre koliko god je moguće *po sebi*, a tek ih potom sučeliti sa ustanovljenom evidencijom o prethodnicima i mogućim protivnicima.

a) Mnoštvo

U komentarima Aristotelove *Fizike* Simplikije tvrti (*Simplicius 2*, 139. 6) da je u svim dokazima Zenon pokazivao da ko govori o mnoštvu taj istovremeno govori suprotne stvari, to jest govori protivrečnosti (ὅτι τῷ πολλὰ εἶναι λέγοντι συμβαίνει τὰ ἐναντία λέγειν) i navodeći doslovo u 140. 27 jedan od dokaza, on ga počinje rečima: ako mnoštvo postoji (εἰ πολλά ἐστι...). O kakvom mnoštvu je reč, šta su njegovi elementi?

Iako i Simplikije (*Simlplicius 2*, 97. 12, 138. 33 – 139. 1) i Filopon (*Philoponus*, 42. 24) govore o dve vrste mnoštvenosti, pošto, se svaka opaziva stvar može smatrati mnoštvenom i po raznim obeležjima koja joj se mogu pripisati, i s obzirom na delove koje bi nam otkrila neka stvarna ili zamišljena deoba (*Simplicius 2*, 97. 14–15), savremeni istraživači uglavnom nisu skloni da prihvate da je Zenon u svojim dokazima imao u vidu i prvu vrstu mnoštvenosti – kategoričku mnoštvenost (razloge za i protiv vidi prvenstveno u *Booth 3*, str.198).

Ako se dopusti da elemente mnoštva čini, sve ono do čega je moguće doći deobom, onda je, prema Zenonovim dokazima, protivrečno tvrditi da mnoštvo postoji, zbog toga što bi se moralo tvrditi da se svaka stvar sastoji – ili iz neodređeno mnogo delova, ili iz beskonačno mnogo delova sa veličinom (μέγεθος), pošto se od nečega što je bez veličine ništa ne može sačiniti.

U dokazu koji Simplikije citira (*DK*, B 3) Zenon tvrdi da mnoštvo mora biti onoliko koliko je (ἀνάγκη τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστὶ...) da bi odatle odmah zakijučio da bi elemenata mnoštva moralo biti ograničeno mnogo (πεπερασμένα) (*Simplicius 2*, 140. 29–31). To, međutim, ne može biti slučaj, jer njih će biti ili neodređeno, ili beskonačno mnogo, već prema tome kako prevedemo ἄπειρα.

Ako vas neko pita od koliko se delova sastoji vaš automobil, možete pogledati u knjigu delova, prebrojati sve delove i odgovoriti. Ako vas zapita od koliko delova se sastoji neki kamen, naći ćete se u teškoćama, ne samo iz *tehničkih* razloga, zato što je recimo, teško brojati molekule, već zato što niste sigurni da li su ono što bi trebalo da brojite molekuli ili nešto drugo. Tek ako se specifikuje *šta* da se uzme kao deo, stvar postaje načelno jasna. Zenon je mogao želeti da ukaže na to da je zahvaljujući mogućnosti uvek nove deobe (ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστί) moguće *uvek iznova*, drugačije odrediti šta je deo, čime se broj navodnih delova pokazuje neodređenim. Reći pak da se nešto sastoji od *neodređeno mnogo delova* može da zvuči besmisleno.

Za komentatore je samoočevidna istina da se mnoštvo, ako postoji, sastoji iz jedinica (ἐξ ἑνάδων) (*ibid.*, 99. 15–16, *Philoponus*, 42. 13–14). Ἑνάδες su ovde očigledno ono što bismo mi zvali elementima mnoštva. I ako sâm Zenon nije upotrebio reč ἑνάς – u navođenju njegovih reči ona se i ne pojavljuje – mnogi njegovi dokazi koje komentatori navode zasnivaju se na jednoj istoj poenti, na dokazivanju nemogućnosti postojanja jedinica, to jest elemenata mnoštva. I na izgled nezavisan dokaz koji Simplikije citira mogao je imati istu poentu.

Postoji kod komentatora više mesta koja bi išla u prilog ovom pravcu u tumačenju. Citirajući Eudema Simplikije (*Simplicius 2*, 97. 12–13) navodi da je Zenon rekao da bi o bićima (u množini) bio sposoban da govori ako bi mu neko objasnio šta je to jedno: εἴ τις αὐτῷ τὸ ἕν ἀποδοίη τί ποτέ ἐστι ἕξειν τὰ ὄντα λέγειν. To bi moglo da znači upravo da su navodni elementi mnoštva neodređeni. Na jednom drugom mestu (*ibid.*, 99. 12) Simplikije se poziva na Aleksandra, koji se opet poziva na Eudema, koji kaže da je Zenon pokušao da pokaže kako je mnoštvo nešto nemoguće zato što nema ničeg što je jedno među postojećim stvarima: ὅτι μὴ οἷόν τε τὰ ὄντα πολλὰ εἶναι τῷ μηδὲν εἶναι ἐν τοῖς οὖσιν ἕν... Ovo bi opet moglo biti zbog toga što su navodni elementi mnoštva neodređeni. Najzad, Filopon u svojoj *Fizici* tvrdi da je Zenon dokazivao da ne može biti mnoštva jer ništa nije pravo jedno (κυρίως ἕν): εἰ δὲ μηδέν ἐστι κυρίως ἕν, οὐδὲ πολλά (*Philoponus*, 80. 27).

Drugi pravac u tumačenju je da se ἄπειρα ne uzme u smislu neodređenosti, već u smislu *beskonačnosti po broju*. U tom slučaju Zenon je mogao imati u vidu *neki razlog* iz kojeg bi bilo nemoguće da se neka stvar sastoji iz delova koji su doduše *određeni*, ali kojih je beskonačno mnogo. S jednim takvim razlogom ćemo se sresti.

Na kraju, i ako prihvatimo da Zenona ne treba smatrati, pored svega, još i tvorcem paradoksa predikacije (vidi gore § 32), možemo priznati da ovaj paradoks nije bez ikakve osnove povezan s njegovim imenom. Nije Platonov Parmenid već je istorijski Parmenid bio taj koji je izgradio učenje o biću koje je jedinstveno i s obzirom na homogenost i s obzirom na kontinuiranost, i poricanje jedinstvenosti moglo je teći ne samo preko ukazivanja na *deljivost*, već i preko ukazivanja na *raznovrsnost*. Sasvim simetrično Zenonovom dokazu protiv mnoštva pod pretpostavkom deljivosti, mogao bi se sačiniti dokaz o nemogućnosti pravog jednog (κυρίως ἕν) pod pretpostavkom heterogenosti, i to bi vodilo upravo paradoksu predikacije.

Simplikije kaže da *izgleda* (ὡς ἔοικε) da Zenon govori i o kategoričkoj mnoštvenosti. Filopon pak, u primeru koji citira(!), pominje Sokrata, i to baš onog trbušastog filozofa sa prćastim nosem iz Platonovih i Aristotelovih primera. Filopon je sumnjiv svedok (vidi *Philoponus*, 42. 24)[1].

b) Tačka

Iako nije upotrebljavao reč στιγμή, niti neku drugu odgovarajuću reč, Zenon *je* u izvesnom smislu govorio o onome što je kasnije nazvano tim imenom. Ali ne moramo prihvatiti da je on o tome govorio kao o nečemu o čemu se *već*, na ovaj, ili onaj način, govorilo u nekom učenju.

Govoreći o Zenonu Simplikije na dva mesta (*Simplicius 2*, 99. 11, 97. 15) koristi reč στιγμή. Na prvom mestu je to očigledno njegovo razjašnjenje pri navođenju Eudemove interpretacije Zenona. Eudem govori o „jednom kojeg se Zenon odriče", a Simplikije kaže da je to jedno, o kojem se tu govori, tačka. Na drugom mestu, gde se govori o kategoričkoj mnoštvenosti, dodaje se na kraju da Zenon ni tačku nije smatrao za jedno. Mislim da se možemo složiti sa Butom (*Booth 1*, str. 6) i Ovenom (*Owen 6*, str. 214–215) da je Aristotel kod Zenona prepoznao koncepciju tačke, jer, zaista, na mestu gde govori o „Zenonovom aksiomu" (*Aristotle 1*, 1001 b 7), po kojem jedinica ne postoji ako je nedeljiva, on nešto niže (*ibid.*, 1001 b 13) upotrebljava reč στιγμή, očigledno referirajući na jednu takvu stvar. Simplikije je kasnije, iz istog razloga, mogao slobodno upotrebiti već uobičajenu reč στιγμή.

Zenon je, kako izgleda, u svođenju na apsurd hipoteze o postojanju mnoštva tražio kandidate za elemente mnoštva, i kad je utvrdio da pod pretpostavkom da se deljenje dopusti bilo šta što ima veličinu (μέγεθος), debljinu (πάχος) i, eventualno, masu (ὄγκος) ne može biti jedno u pravom smislu (κυρίως ἕν), mogao je pravo jedno pokušati da dobije tako što bi ukinuo svaku veličinu, debljinu i masu. Na ovom se mestu možemo sasvim složiti sa Frenkelom da se do novog kandidata za pravo jedno kod Zenona dolazi upravo neposrednim *ukidanjem* onoga što je prethodno omogućavalo deljivost (*Fränkel 2*, str. 6, nap. 16), a *ne* procesom deljenja, pošto se kod svih antičkih komentatora suviše često srećemo sa tvrdnjom da je Zenon smatrao da se deljenje, ako se jednom dopusti, nikad ne može okončati. (*Simplicius 2*, 140. 32, 141. 5 – gde se navode Zenonove reči; *Philoponus*, 80. 24–25, 80. 26–27, 81. 12, 43. 1–3).

Ali, kandidat do kojeg se došlo ukidanjem veličine (debljine i mase) pokazuje se takođe kao nekvalifikovan i, utoliko, kao ništavan ili nepostojeći (εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν οὐδ' ἂν εἴη) (*Simplicius 2*, 141. 1).

Ovde se ne moramo složiti sa Frenkelom da Zenon prosto „bezrezervno" tvrdi da ono što je bez ekstenzije ne postoji, umesto da doda kvalifikaciju „s obzirom na veličinu, debljinu i masu" (*Fränkel 2*, str. 199). Zenonovu tvrdnju ipak ne moramo svesti na prostu tautologiju, naime na tvrdnju da ono što je bez veličine, debljine i mase ne postoji kad se posmatra s obzirom na veličinu, debljinu i masu. Zenonova tvrdnja o ništavnosti (ili nepostojanju) jedinice bez veličine, debljine i mase *vezana je uz kontekst* u kojem se ovakva jedinica razmatra kao *kandidat za konstituenta mnoštva*, i *kao takva* ona je ništavna, jer, kako navodi Simplikije, kada bi bila nečemu dodana ovo se ne bi povećalo (εἰ γὰρ ἄλλῳ ὄντι, φησί, προσγένοιτο οὐδὲν ἂν μεῖζον ποιήσειεν) (*Simplicius 2*, 139. 11), i, isto tako, kad bi se od nečeg oduzela ovo se ne bi smanjilo (*ibid.*, 139. 13–14).

S obzirom na određenje tačke kao granice, s kojim smo se sreli u prvom delu, izuzetno je važno to što Zenon *ne govori* o onome što je bez veličine *kao* o granici, već samo kao o nečemu što bi eventualno moglo da bude konstituent mnoštva. Bilo bi, naime, pogrešno reći da Zenon poriče postojanje tačke *tout court* i podrazumevati pri tom geometrijsku tačku kako je ona kasnije definisana.

Ono što Aristotel naziva „Zenonovim aksiomom" (Ζήνωνος ἀξίωμα) (*Aristotle 1*, 1001 b 7) podložno je *dvostrukoj* interpretaciji, pri čemu je upravo ona koja se prva nameće – pogrešna. Zenonov aksiom nije tvrdnja da nedeljiva jedinica ne postoji već da ona ne postoji kao konstituent mnoštva. Iako Aristotel nešto niže (*ibid.*, 1001 b 13) o toj jedinici govori kao o tački (στιγμή), ta jedinica je tačka *samo* utoliko što nema nikakvu veličinu, a ne po tome što bi eventualno bila granica, i ona samo *kao takva* ne postoji ni *samostalno* ni kao *konstituent* mnoštva.

Suštinu Zenonovog aksioma najbolje je sagledati kroz njegovu matematičku interpretaciju: tačke su ništavne utoliko što se nijedna linija ne može od njih sačiniti. Kad god se budemo sretali sa Zenonovim aksiomom mislićemo pre svega na ovu formulaciju.

Aristotel izvodi iz Zenonovog aksioma dve posledice, naime, da ni ostali objekti geometrije – linija (γραμμή) i površ (ἐπίπεδον) – ne uvećavaju ono čemu bi se dodali, ako se dodaju na izvestan način, to jest ne nadovezuju nego slažu.

Povodom Zenonovog aksioma Frenkel veoma mnogo insistira na razlici između teze o *ništavnosti* i teze o nepostojanju tačke (*Fränkel 2*, str. 21). On kaže da su Elejci uzimali zdravo za gotovo da sve za šta se u bilo kojem kontekstu ispostavi da je ništavno, odmah i ne postoji. Po njemu, Zenon je čak naročito koristio dvosmislenost u jezičkom izražavanju da bi načinio prelaz od ništavnosti ka nepostojanju tačke. Τὸ προσγινόμενον οὐδέν ἐστιν može da znači da ništa nije dodano, ali može da znači i da je ono što je dodano ništa (*ibid.*, str. 20).

Kolika je težina Frenkelove primedbe zavisi od toga kakvi su tačno kontekst i poenta onoga što Zenon želi. Spor u kojem bi se razlika o kojoj Frenkel govori *mogla* pokazati značajnom bio bi spor oko toga da li tačka uopšte, na bilo koji način, postoji i, eventualno, kako postoji. Uopšte uzev, to bi bio spor oko prava na upotrebu reči „postojanje" u slučaju tačke (up. gore, § 17), a realnu težinu bi moglo da ima u slučaju da su neki matematičari, recimo, već imali tačku na spisku svojih osnovnih objekata. Tada bi Zenonov zaključak o *nepostojanju* tačke mogao biti prejak, ukoliko bi, naime, iz ništavnosti tačke kao *elementa u adiciji* on zaključio na ništavnost i nepostojanje tačke u svakom, pa i onom za *geometra relevantnom* smislu.

Na ovom mestu se vidi kako je značajno odgovoriti na pitanje o eventualnoj koncepciji tačke kod ranijih Pitagorejaca. Ako su oni već imali razvijeno moderno shvatanje tačke, a verovatno je da nisu (up. gore, § 27), onda je Zenonov zaključak o nepostojanju tačke mogao biti pretenciozan. Ali, ako gledamo Zenonov argument *sam za sebe*, u njemu se ne može primetiti težnja za nedopustivom generalizacijom na koju nas upozorava Frenkel. Tačka samo gubi svaku ulogu u pokušaju izgradnje pluralističke ontologije.

Možemo reći da osim delova sa veličinom, debljinom i masom, do kojih se dolazi deobom, a koji se uvek mogu dalje deliti, i ništavnih jedinica bez ikakve veličine, treće vrste kandidata za konstituente mnoštva, prema Zenonu, nema, uprkos jednom Porfirijevom svedočanstvu o kojem nas izveštava Simplikije, prema kojem je Zenon pobijao i neku vrstu atomizma, i mišljenje nekih iztraživača, da je Zenon pobijao neko učenje o tačkama s veličinom. Porfirijevo svedočanstvo je, osim toga što je jedino, još i jako sumnjivo, a uverenje da je Zenon pobijao na odgovarajućoj već unapred pretpostavljenoj rekonstrukciji ranopitagorejskog učenja (vidi § 27), počiva na određenom neuverljivom prevođenju Zenonovog dokaza u Dilsovom B 1.

Prema Simplikiju (*Simplicius 2*, 139. 24), Porfirije pripisuje Parmenidu pokušaj – a po Simplikijevom komentaru taj pokušaj treba, u stvari, pripisati Zenonu (*ibid.*, 140. 22) – da se dokaz u prilog nedeljivom jednom izvede pomoću dihotomije (διχοτομία) (*ibid.*, 139. 26), ukoliko se uopšte dozvoli deljenje, gde se, na kraju, u jednom od rogova dileme, dolazi, navodno, do krajnjih, najmanjih i nedeljivih veličina (ἔσχατα μεγέθη ἐλάχιστα καὶ ἄτομα).

Na stranu zbrka oko autorstva ovog argumeuta – to sasvim izvesno nije Parmenidov argument – ovo je jedino mesto gde se kod komentatora u vezi sa Zenonom uopšte upotrebljava reč ἄτομος i *uzima u razmatranje* postojanje ovakvih nedeljivih veličina. Za nedeljive elemente se, inače, uvek upotrebljava reč ἀδιαίρετον i njihovo se postojanje *ne pobija*, već se samo nemogućnost njihovog postojanja, koja se smatra *očiglednom*, navodi kao *razlog* protiv mogućnosti postojanja pravog jednog (paralelan argument vidi u *Philoponus*, 80. 29–30). Sve ovo čini svedočanstvo o kojem je reč sumnjivim. No, stvar postaje još sumnjivija kad se pogleda nastavak argumenta. Za atome se odmah kaže da ih je beskonačno (neodređeno) mnogo, a da je celina od njih sastavljena (τὸ ὅλον ἐξ ἐλαχίστων) (*Simplicius 2*, 139. 30), dok se kasnije samo konstatuje da je ovaj rog dileme apsurdan (*ibid.*, 139. 32). Niti se vidi zašto bi ovih atoma moralo biti beskonačno (neodređeno), niti se kaže zašto je zaključak apsurdan. Što je najlepše, posle svega ovoga, odmah, ali ne kao novi argument, sledi tipična zenonovska dilema, u kojoj se sveopštoj i stalnoj deljivosti (*ibid.*, 140. 1) suprotstavlja onaj ništavni kandidat (*ibid.*, 140. 3), koji je kasnije nazvan tačkom.

Mada je *moguće* da je Zenon hteo najpre da se nekim argumentom, koji nam usled nepotpunosti svedočanstava izmiče, obračuna s atomizmom, eda bi onda postavio dilemu koju smo razmatrali i koja je opšte mesto kod komentatora, to, imajući sve prethodno u vidu, ne izgleda verovatno. Cela Porfirijeva priča, koja se još, povrh svega, tek Simplikijevom intervencijom odnosi na Zenona, deluje kao strano telo u Zenonovom načinu argumentacije. Ipak, trebalo bi nekako objasniti zašto Simplikije, koji deluje pouzdano i koji je navodno imao u rukama originalne Zenonove dokaze, argument o kojem govori Porfirije pripisuje Zenonu.

Meni izgleda sasvim moguće da je Simplikje, kome su razne vrste atomizma bile poznate – i rani fizički i kasniji geometrijski atomizam (vidi § 43 i §§ 48, 49) – jednostavno prevideo razliku uobičajenog Zenonovog *pozivanja* na nepostojanje nedeljivih jedinica u dokazu protiv prave jedinice mnoštva i pokušaja *pobijanja* postojanja atoma o kojem se govori u argumentu koji navodi Porfirije, pa je, požurivši da ispravi Porfirija, koji argument pripisuje još Parmenidu, argument olako pripisao Zenonu. A argument je verovatno još mlađi, na šta ukazuje i terminologija, jer se srećemo sa ἄτομος umesto s uobičajenim ἀδιαίρετος.

Neki istraživači, kao sam Li, koji je sakupio sva mesta gde se kod komentatora verovatno govori o Zenonovim dokazima, ipak smatraju da kod Zenona postoji i kritika nekog shvatanja tačke drukčijeg od kasnijeg aristotelijanskog (*Lee*, str. 30–31), naime, nekog infinitezimalističkog shvatanja. Ako na ovom mestu, izbegavajući *circulus*, ostavimo po strani razloge koji sadrže pozivanje na ranopitagorejska shvatanja tačke, ostaje nam, pošto smo argument o kojem govori Porfirije razmotrili, da još pogledamo kako stoji stvar s možda najznačajnijim fragmentom u kojem Simplikije navodno citira Zenonove reči (B 1), a u kojem Li nalazi potvrdu za svoju tezu o Zenonovom napadu na „geometrijske tačke s veličinom" (*ibid.*, str. 31).

U B 1 postoji pre svege teškoća s prevodom. Dokaz koji razmatramo Simplikije uvodi tako što kaže da je Zenon najpre pokazao da „ako bi biće bilo bez veličine, ne bi postojalo (εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ᾽ ἂν εἴη)" (*Simplicius 2*, 141. 1). Kao što sam sugerisao, ovo se ne mora obavezno shvatiti kao postulat, već se, pogotovu što Simplikije i ovde kaže da je Zenon to prvo *pokazao*, može se shvatiti i ograničenije, u kontekstu pobijanja pluralističke hipoteze: takvo biće je ništavno kao kandidat za konstituenta mnoštva. No, u svakom slučaju, ono što sledi, i što počinje bezlično sa εἰ δὲ ἔστιν, razmatra se pod pretpostavkom mnoštvenosti, a ἕκαστον, koje je subjekat u glavnoj rečenici, odnosi se na *svakog od novih kandidata za konstituente mnoštva*. Oni nužno moraju imati veličinu i debljinu: ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος. Glavne teškoće nastaju kad se posle svega ovoga u produžetku kaže: καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου.

I kod Dilsa i kod Lia se ovaj nastavak prevodi na isti način: „i svaki mora biti na odstojanju od drugog". Za subjekat se ovde i dalje uzima ono ἕκαστον sa početka glavne rečenice, koje se odnosi na svaki od elemenata mnoštva. Ali šta je sa αὐτοῦ?

Sledeći Hajdela (iz *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* 48, 1913, str. 724), Frenkel (*Fränkel 2*, str. 194, nap. 67), Vlastos (*Vlastos 2*, str. 177–178) i Abraham (*Abraham*, str. 40) su se pobrinuli da i ovo αὐτοῦ dobije svoje mesto. Αὐτοῦ je partitivni genitiv. Nije prosto svaki od elemenata mnoštva udaljen od drugog (ἀπέχειν...τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου), već za svaki (element) svakog od njih (ἕκαστον αὐτοῦ) važi (da je od drugog) ἀπέχειν. Ovo ἀπέχειν na kraju namerno sam ostavio neprevedeno, jer se sve ne završava na αὐτοῦ. Dok Frenkel i dalje uzima ἀπέχειν u smislu „biti na odstojanju od", Vlastos i Abraham ga uzimaju u smislu „štrčati". Vlastos navodi primere iz Aristotela (*Vlastos 2*, str. 178), gde se za delove tela kao što su nos i uši kaže da su τὰ ἀπέχοντα. Nos i uši, svakako, nisu na odstojanju od tela, već samo štrče u odnosu na njega.

Uvođenje u igru onog αὐτοῦ omogućava da se u celoj rečenici prepozna uobičajena Zenonova poenta, koju uočavamo na drugim mestima komentatora. Ono što ima veličinu i debljinu (videli smo da se na, jednom mestu dodaje i masa) nužno je takvo da se na njemu mogu otkrivati delovi. Za delove se ovde kaže da su odeljeni, ili, možda, da štrče jedan u odnosu na drugi. Kakvom će se deobom do tih delova stići zavisi, između ostalog, i od toga kako se prevede ἀπέχειν. U Frenkelovoj interpretaciji, gde se i dalje govori o odstojanju (jednog od drugog), deoba se vrši umetanjem. Makar koliko Vlastos ismevao ovu interpretaciju, nazivajući je „doduše logički konzistentnom i lucidnom“ ali ipak na kraju samo „šarmantnom“ jer Zenonu pripisuje usmerenost na pobijanje jedne sasvim smešne hipoteze o mnoštvu (*Vlastos 2*, str. 182), ona ima indirektnu potvrdu u paralelnom mestu u B 3, gde se govori o sve novim i novim delovima kojih uvek ima *između* (prethodnih) (ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστί).

Delovi o kojima bi se govorilo u Frenkelovoj interpretaciji bili bi kao delovi kore razdvajani sredštem. Središte je ono što se „ubacuje“ i što se smanjuje, ali nikad ne nestaje. Na primer, na sledećoj slici:

delovi su najpre AC i DB, a središte CD, međutim, delovi ovog središta su potom CE i FD, a središte EF, i tako dalje bez kraja.

Frenkel metom Zenovog napada ovde smatra hipotezu po kojoj je površina tela (kod Grka često shvatana) poput kore ili kože (*Fränkel 2*, str. 195, nap. 70). Slični termini se upotrebljavaju za površinu, boju i koru (*ibid.*, *loc. cit*). Zenonov argument bi trebalo da je uperen protiv nekog, kako Frenkel kaže „smešnog shvatanja“, zapravo neke „smešne geometrije“ po kojoj površine imaju debiljinu (*ibid.*, str. 195) i u isto vreme upravo predstavljaju konstituente tela.

Ovaj dodatak u Frenkelovoj intepretaciji deluje neuverljivo i tek bi nekakva nezavisna evidencija u prilog jednog ovakvog pluralističkog shvatanja mogla da joj da težinu. (Ovakvo shvatanje, ako se još debljina površina shvati kao minimalna, moglo bi postati ono do čega je na kraju, kao do mete Zenonovog napada, sasvim drugim putem došao Li). No prvi deo, gde se samo govori o umetanju, kao načinu dolaženja do uvek novih delova koji su na odstojanju jedan od drugog, deluje uverljivije i može da proizađe iz teksta ako ἀπέχειν prevedemo u smislu „biti na odstojanju od“, dok u isto vreme dolaženje do delova shvatamo kao umetanje novog dela.

Vlastosov prevod ἀπέχειν kao „štrčati“, koji sledi i Abraham, ipak omogućava još veću doslovnost, jer zaista doslovno svaki deo svakog dela štrči u odnosu na neki drugi, pod jednom dosta očiglednom pretpostavkom, koju je

ovde lako podrazumevati, da se delovi ne uzimaju tako da se preklapaju u svakom pojedinačnom trenutku deobe.

Inače, Abraham je jasno pokazao kako je ἀπέχειν „simetrična relacija“ koja važi za sve delove u deobi ako se ova zamisli kao kompletna (*Abraham*, str. 42, 44). Na primer, pódelimo AB na AC i CB (vidi sl.), tada αὐτοῦ važi za AC i CB, zatim pódelimo *svaki tako* dobijeni deo i dobijemo AD i DC i CE i EB, za koje to važi:

Ako u prevođenju sledimo samo Frenkela, *nismo prinuđeni* da zaključimo da su za Zenona bez ograničenja svi delovi mnoštva udaljeni jedan od drugog, a što je, kao što ćemo odmah videti, Lia navelo na zaključak o infinitezimalama. Li je, izostavljajući u prevodu ono αὐτοῦ, izgleda prevideo da Zenon ukazuje na proces neke deobe kojom se dolazi do delova delova, dakle, da se govori o delovima delova a *ne o neposredno diskretnim jedinicama*. I Frenkelov prevod, koji zadržava tvrdnju o odstojanju delova, ne implicira nužno nekakav jaz između delova, jer je moguće da *u smislu samih Zenonovih reči* u B 3 4 ono što je između takođe bude deo. Ma koliko se deo koji je između smanjivao, svi delovi delova leve „kore“ udaljeni su od svih delova desne (vidi sl., na str. 152) Pošavši s leve ili s desne strane ne može se u konačno mnogo koraka ostvariti *dodir* delova. Ali, ovo ne implicira da dodirivanja *uopšte* nema, kao da navodno vlada apsolutna diskretnost.

A naravno, ako ἀπέχειν još prevedemo poput Vlastosa i Abrahama, onda i bez pozivanja na B 3 4 nema traga nikakvom pobijanju dodirivanja.

U argumentu je bitno da se broj koraka u deobi, ili umetanju, ne može ograničiti. Zato se i po Frenkelovom prevodu, čak i ako se prizna dodirivanje, ono se može ostvariti kada su u pitanju delovi leve i desne kore, ma koliko se središte smanjilo. Posle rečenice koju analiziramo Zenon upravo govori o ovom procesu bez kraja: „isto važi i za sledeći (očigledno sledeći član do kojeg se dođe započetim procesom) (καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος), jer i on će imati veličinu, i novi (drugi) će biti pred njim (καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι). Isto je to reći jedanput i govoriti uvek (ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν), jer nijedan (deo) istog (tj. dela[2]) neće utoliko biti poslednji, nijedan pre drugog (οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται)“. Ako nema poslednjeg člana deobe, nema ni povlašćenog elementa (pravog jednog) od kojeg bi počelo sastavljanje.

Li već od početka progres nije shvatio kao dolaženje do novih (drugih) delova delova, već kao umetanje novih (drugih) delova mnoštva koji *nisu* delovi delova *već* samostalne jedinice, u cilju pokušaja povezivanja odnosno poništavanja rastojana među datim elementima mnoštva (*Lee*, str. 30–31). On nudi sledeću sliku:

Ako XY sečemo sa a, aY sa a_1, i tako dalje, dobijamo seriju u kojoj uvek ima tačaka između dve dotad najbliže. Po njemu, upravo jedino ako su a, a_1, a_2, a_3, ... tačke, dolazimo u situaciju koju opisuje Zenon, naime, u situaciju u kojoj se umetanjem ne ostvaruje povezivanje. No, s druge strane, za elemente mnoštva o kojima se ovde govori pretpostavljeno je da imaju veličinu i debljinu. Da bi i jedno i drugo bilo zadovoljeno, neophodno je da X, Y, a, a_1, a_2, a_3, ... *imaju osobinu geometrijskih tačaka i u isto vreme poseduju veličinu i debljinu.* Dakle, ovi elementi su geometrijske tačke s veličinom, ili infinitezimale.

Kada bismo prihvatili Liove pretpostavke, trebalo bi da prihvatimo i Liov zaključak. Ali, na osnovu svega rečenog je jasno da ne moramo prihvatiti njegove pretpostavke.

Kada bi sve teklo kako Li opisuje, Zenonov argument bi bio *petitio principii* i to, rekao bih, na njegovu štetu, a ne na štetu njegovog navodnog protivnika koji bi koristio inverzan argument. Umetanjem geometrijskih tačaka ne može se ostvariti dodir elemenata. Ali, kako stvar stoji ako te tačke, imaju veličinu? Navodni Zenonov odgovor je da je to opet nemoguće, jer su te tačke *tačke* (kao geometrijske). Ali, one su (geometrijske) tačke *s veličinom*, odgovorio bi protivinik, i zašto onda ne bi mogao da se ostvari dodir. Ovde bismo od Zenona morali da tražimo novi argument.

Prihvatili smo da se do tačke o kojoj govori Zenon ne može stići deobom, jer se ova nikad ne može okončati. Ako deobu (u B 1) shvatimo kao dihotomnu, što je najverovatnije, onda se deobom neke stvari na pola, pa deobom dobijenih delova na pola, i tako dalje, ne može stići do *krajeva* delova, odnosno do *površine* stvari o kojoj je reč. Ako deobu shvatimo kao trihotomnu, gde se srednji deo smanjuje, čime se s krajeva bližimo središtu, onda ne možemo stići do *centra.* U oba slučaja stvar se ispostavlja kao suviše velika da bismo uspeli da joj povežemo bilo krajeve bilo slojeve različite debljine s jedne i druge strane.

„Ako ima mnoštva, ono mora biti u isto vreme i malo i veliko", (*Simplicius 2*, 141. 7) i to tako „malo da nema veličinu, veliko da bude beskonačno (μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι)" (*ibid., loc. cit.*). Vrlo je karakteristično da se u ovom zaključku ne kaže da ako ima mnoštva ono mora biti *ili* malo (toliko da uopšte nema veličinu), *ili* veliko (toliko da bude beskonačno), već se umesto možda očekivanog „ili" (up. *Fränkel 2*, str. 200) pojavljuje „i": οὕτως εἰ πολλά ἐστι ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα. Frenkel, kome je ovo „i" neočekivano, kaže da je Zenon njime hteo da postigne „otvorenu protivrečnost", tako da zaključak „zvuči jače nego što stvarno jeste" (*ibid., loc. cit*). Ja moram priznati da mi Zenonov zaključak i sa „i" izgleda potpuno korektan. Jednostavno, kandidati za konstituente mnoštva koji su ispitivani nisu takvi da se isključuju. Do tačke se *ne* dolazi deobom, već *apstrahovanjem* od svake veličine – s tim se uostalom i Frenkel slaže (*Fränkel 2*, str. 6, nap. 16), dok se deoba, kad se jednom dopusti, nikad ne okončava. Tačke i elementi do kojih bi se došlo deobom možda ne bi mogli u isto vreme da *budu* konstituenti mnoštva, bar utoliko što ne bi mogli i jedni i drugi biti κυρίως ἕν – telo bi se moglo sastojati ili iz ovih delova ili iz tačaka – no, kad se već svaki od kandidata pojedinačno pokazao *nekvalifikovanim* a da se oni svojom prirodom i načinom na koji se do njih dolazi ne isključuju, onda je *moguće reći* da su oni *zajedno* nekvalifikovani, i otuda „i" (καί) u zaključku. Bilo šta što postoji (neko telo) ništavno je s obzirom na zasluge tačaka *i* beskonačno veliko s obzirom na zasluge kandidata do kojih se dolazi deobom, kad se ona jednom dopusti. *Svaki* od članova konjunkcije se pokazao apsurdnim i *reductio ad absurdum* se ne ostvaruje sofistički, tek njihovim konjugovanjem.

c) Veličina, debljina, masa

Videli smo da Zenon, koliko je verovati Simplikiju, koristi reči μέγεθος (veličina) i πάχος (debljina) (*Simplicius 2*, 140. 2–3). U B 2 Simplikije dodaje i ὄγκος.

Činjenica da Zenon uz veličinu dodaje i debljinu i, verovatno, masu ukazuje da u razmišljanju on već operiše pojmom dimenzije. Jer, da bi nešto postojalo, odnosno bilo konstituent mnoštva, ono mora pored veličine u jednom pravcu imati i debljinu i telesnost.

Zenon očigledno nije pravio razliku između tela koja bi bila objekti geometrije i opazivih tela fizičkog sveta. Kad govori o telima on govori o fizičkim telima; on ne razdvaja čulni, fizički, i geometrijski svet. Čim pridođe „treća dimenzija" telo je odmah i maseno. Uostalom, ὄγκος znači i „telo" i „masa".

d) Dodirivanje

Kod komentatora se, kad je reč o Zenonu, nigde ne srećemo s rečju ἅπτεσθαι, koju srećemo u Platonovom *Parmenidu* (*Plato 4*, 148 E), gde se dodirivanje problematizuje i određuje preko pojmova sukcesije i susedstva. Inače, videli smo da je kod Aristotela dodirivanje nešto što se raščlanjuje na dve podvrste, kontigualno i kontinualno dodirivanje.

Ukoliko se kod Zenona uopšte dokazuje neka nemogućnost dodirivanja, mada je verovatno da se to ne čini, dokazuje se da je nemoguće ostvariti susret kada se sa dva kraja nekog tela krene prema centru, jer je sve manji srednji deo ipak uvek pred nama, te se tako telo pokazuje kao nejedinstveno, jer mu se krajnji delovi ne mogu povezati ni posredstvom otkrivanja novih i novih delova.

Hoćemo li reći da je dodirivanje problematizovano već kod Zenona, jer odsustvo odgovarajuće reči nije još jemstvo da se to ipak ne čini, zavisi od

prevoda i interpretacije dokaza u B 1. Ako bi se usvojio Dilsov i Liov prevod (vidi ranije, str. 151), proizašlo bi da Zenon argumentiše protiv mogućnosti mnoštva time što nastoji da pokaže da ga njegovi elementi ne mogu konstituisati jer se među njima nalazi nepremostiv jaz. No, kao što je sam Li pokazao (vidi isto mesto), ti elementi bi tada, uprkos priznatoj veličini, morali imati i osobine geometrijskih tačaka, jer se inače ne vidi zašto bi jaz bio nepremostiv.

Ako se usvoji Frenkelov prevod (vidi str. 152), nedodirljivost jeste u igri, ali samo utoliko što se leva i desna kora ne mogu dodirivati, jer ih uvek neko novo, ma koliko tanko, središte razdvaja.

Ako usvojimo Vlastosov i Abrahamov prevod (vidi isto mesto), onda se ni o kakvoj nedodirljivosti ne govori, čak se, kako izgleda, dodirivanje delova koji se deobom dobijaju i koji štrče jedan u odnosu na drugi – pretpostavlja.

e) Mesto

U vezi sa Zenonom reč τόπος srećemo kod Aristotela, Simplikija, u Eudemovim rečima koje Simplikije citira i kod Filopona (*Aristotle 21*, 209 a 23, 210 b 23, *Simplicius 2*, 562. 9, *Philoponus*, 510. 4), svuda u kontekstu jedne iste aporije (ἀπορία). Aporija počinje, kako je uobičajeno za Zanonove dokaze: εἰ ἔστιν ὁ τόπος, da bi se zatim ova pretpostavka svela na apsurd time što se pokazuje da je svako mesto na nekom drugom mestu (ἐν τόπῳ).

Očigledno je da se u pretpostavci o mestu govori kao o određenom mestu, kao što se u pobijanju postojanja mnoštva podrazumevalo da je ono određeno utoliko što je „onoliko koliko je" (up. § 35 a). Ako je, međutim, mesto određeno u odnosu na neko drugo mesto, koje je određeno u odnosu na neko treće itd., onda ono neće biti dovoljno određeno, neće naime biti određeno utoliko što je progres od mesta do mesta neograničen. Mesto nije na nekom definitivno određenom mestu ili – ono je neodređeno zbog beskonačnosti prostora. Τόπος se, inače, može prevoditi i kao „prostor".

f) Deljenje

Kako da zamislimo deljenje s kojim se srećemo u B 1 ili B 3 i svim sličnim dokazima, da li možda kao sečenje, ili pre samo kao razlikovanje delova u mislima (τῇ διανοίᾳ), kako se to kaže u Platonovom *Parmenidu* (*Plato 4*, 165 A)? O tome istraživači iznose različita mišljenja (vidi *Kullmann*, str. 168, nap. 3, *Fränkel 2*, str. 6 i 14, *Booth 1*, str. 5), no poenta Zenonovih dokaza je u oba slučaja ista, pod pretpostavkom, koja je izgleda nesporna, da delovi ne nastaju tek deobom. Bez obzira da li se neka navodna jedinica deli tako što se raseče pa se delovi jasno pokažu, ili tako što joj se u mislima razluče neki levi i odgovarajući desni deo, ona s obzirom na to što su na bilo koji od ovih načina otkriveni delovi, nije κυρίως ἕν.

Među Zenonovim rečima koje Simplikije citira ne nalazi se ni διαιρέω ni διχοτομέω, niti bilo koji oblik koji bi bio izveden iz διαιρέω ili τέμνω. Međutim, u prepričavanju Zenonovih dokaza vrlo se često i kod Temistija, i kod Simplikija, i kod Filopona sreću pridevi διαιρετός i ἀδιαίρετος, a naročito često supstantivirani oblik od ἀδιαίρετος: τὸ ἀδιαίρετον, koji se odnosi na deo bez veličine. Za navodne jedinice mnoštva se kaže da su διαιροῦνται (izdeljene) (*Philoponus*, 81. 3). Takođe se upotrebljava i διχοτομία (*Simplicius 2*, 139. 26, 140 24), a u sumnjivom argumentu o kojem govori Porfirije (vidi gore, str. 149) čak i ἄτομος (*Simplicius 2*, 139. 30).

Bez obzira da li se usvoji način deobe prema Frenkelovom ili prema Vlastosovom prevodu (vidi str. 152), izgleda da je poenta Zenonovih dokaza ista. Ne samo što se deobom ne može stići do pravih delova, odnosno konstituenata mnoštva već *uopšte ne postoje* takvi elementi koji bi bili pravi konstituenti mnoštva. Ne vidi se, prema Zenonu, nikakav razlog da se onemogući jednom dopuštena deoba, a njome se bilo šta što ima veličinu, debljinu (i masu), čini iznova mnoštvenim.

Ni u Zenonovim rečima ni kod antičkih komentatora ništa ne ukazuje na to da bi eventualno priznavanje postojanja delova bilo uslovljavano unutrašnjom raznorodnošću onoga što postoji. Ako bismo deljenje, ili izdeljenost, hteli da povezujemo sa heterogenošću, morali bismo da se pozivamo na činjenicu da je to činio Zenonov učitelj Parmenid.

g) Beskonačnost

Kao što smo videli, i na mestima gde se kod Simplikija citiraju Zenonove reči, i na mnogim drugim mestima gde se dokazi prepričavaju pojavljuje se reč ἄπειρον. Pozivanje na ἄπειρον igra ključnu ulogu u svođenju na apsurd teze koja se pobija. Ali, ἄπειρον je vrlo osetljiva reč, koja ne samo što može da se prevodi i sa „neodređeno", i sa „beskanačno" (vidi gore, 35 a), već značenje od konteksta do konteksta može jako da se pomera i onda, kad se u prevođenju možemo koristiti istom rečju. Mi ćemo je analizirati po parovima „neodređenost" – „beskonačnost", „beskonačnost po broju" – „beskonačnost po veličini", „statička beskonačnost" – „dinamička beskonačnost" i „unutrašnja beskonačnost" – „spoljašnja beskonačnost".

Videli smo da je jedna od mogućnosti pri interpretaciji fragmenta B 3 (koju iz teško razumljivih razloga interpretatori zaobilaze čak i kada sami naglašavaju da se ἄπειρον može prevoditi i kao „neodređeno" – vidi *Fränkel 2*, str. 196–197) da se apsurdnost teze koja se pobija iskaže preko suprostavljanja činjenice, koja bi trebalo da se osniva na analitičkoj istini, da stvarî ili delova mora biti *onoliko koliko ih je*, i okolnosti da ih zbog neograničene mogućnosti deljenja mora biti *neodređeno mnogo*. Za ovu poentu nije neophodo pozivati se na „jaču" mogućnost, gde bi ἄπειρον značilo „beskonačno", odnosno „aktuelno beskonačno mnogo". Dovoljno je da se, pod pretpostavkom da delovi ne nastaju tek deobom, tvrdi da se *proces deobe* u načelu ne bi mogao završiti, pa da se zaključi da nema određenih elemenata od kojih bi se mnoštvo sastojalo. Nijedan od njih nije, kao što se na drugom mestu kaže (*Philoponus*, 80. 26), κυρίως ἕν, to jest prava jedinica. U tom smislu je *neodređenost mnoštva* povezana s *neodređenošću jedinica*, to jest s nepostojanjem prave jedinice.

U fragmentu B 1, međutim, ἄπειρον je teško prevesti sa „neodređeno". Može biti da je to uticalo na interpretatore, mada to ne navode kao razlog, da pređu preko malopređašnje mogućnosti pri prevođenju i interpretiranju B 3. U zaključku B 1 se, naime, kaže da bi bića bila i mala (μικρά) i velika (μεγάλα), i to tako mala da nemaju veličine (μὴ ἔχειν μέγεθος) i tako velika da su ἄπειρα. Pošto se radi o *veličini*, izgleda da je neophodno ἄπειρα prevesti sa „beskonačna". Svaki element mnoštva je *beskonačno veliki*, i to je tako zato što se sastoji iz elemenata kojih je, sad izgleda moramo reći ne: neodređeno, već: *beskonačno mnogo*.

Veoma je važno to što – iako ovde ἄπειρον prevodimo sa „beskonačno", to značenje *nije isto* kao značenje u slučaju da u B 3 ἄπειρον umesto sa „neodređeno „prevedemo sa „beskonačno", jer u B 3 to je „beskonačno po broju" a ovde je to „beskonačno po veličini". Tek kao *razlog* za ovu beskonačnu veličinu elemenata u B 1 , pojavilo bi se „beskonačno" u smislu „beskonačno po broju".

Razlog iz kojeg se u B 1 zaključuje da su elementi beskonačni u pogledu veličine jeste takav da zahteva „jaču" mogućnost, to jest „beskonačnost u pogledu broja", a ne samo, što je za poentu u B 3 bilo dovoljno, „neodređenost". No ipak je (bar ukoliko se držimo Frenkelovog i Vlastosovog prevoda) *dalji razlog za prihvatanje ovog razloga*, to jest razlog iz kojeg se misli da je elemenata elemenata (delova delova) beskonačno mnogo, taj što zbog mogućnosti uvek nove deobe ne postoji κυρίως ἕν. Za poentu u B 3 bio je *dovoljan* zaključak o neodređenosti, ali sada je u B 1 *neophodan* zaključak o beskonačnosti po broju. No ako se već dozvoljava da su upotrebe reči ἄπειρον u B 3 i B 1 različite,

utoliko što se zaključak u B 3 odnosi na broj a zaključak u B 1 na veličinu, zašto bismo insistirali da se u oba slučaja u prevodu mora koristiti ista reč, naime, „beskonačno", a ne u jednom slučaju „neodređeno"? *Einmal gut, alles gut.*

Takođe je značajno to što smo morali da *zaključimo* da je za argument u B 1 neophodno da se kao razlog uzme da je broj elemenata (delova) beskonačan. U tekstu se ni ovde ni drugde ne pravi razlika između beskonačnosti i neodređenosti. Nezavisno od toga šta je Zenon imao u vidu, mi možemo birati između dvoga, već prema tome šta nam za zaključak treba, da li nam je dovoljna slabija ili nam je neophodna jača mogućnost.

Razmotrićemo ukratko beskonačnost po broju i beskonačnost po veličini, što će nas odmah odvesti i trećem paru, statičkoj i dinamičkoj beskonačnosti.

Kao Zenonova „velika greška" (up. *Fränkel 2*, str. 196, *Vlastos 2*, str. 180, *Abraham*, str. 45) navodi se zaključivanje od beskonačne deljivosti (nečega) na beskonačnu veličinu (toga nečega). To se naziva i njegovom „aritmetičkom greškom"[3]. Kao argument protiv Zenona navodi se primer stvari, s kojima se mi, inače, svakodnevno srećemo, koje *nisu beskonačno velike* utoliko što su *ograničene* na sve strane drugim stvarima (*Aristotle 21*, 206 b 4 i dalje), a ipak su *beskonačno deljive*. Takođe se navodi i apstraktniji primer, primer *beskonačnog* konvergentnog niza koji ima *graničnu* vrednost (vidi *Vlastos 5*, str. 104). Ali, ti primeri su dvosekli.

Razlog iz kojeg olovku kojom pišemo ne smatramo beskonačno velikom jeste to što sagledavamo njene granice na sve strane. Ali, pretpostavimo da krenemo odnekud iz središta, ili s jedne njene strane (već prema tome da li usvojimo Frenkelov ili Vlastosov i Abrahamov prevod), u potrazi za tim njenim granicama (ili granicama s druge strane) i na neki način ustanovimo da *ni do kakvih granica nikada* ne možemo stići, jer je beskonačno mnogo njenih delova pred nama. Nije li to *dovoljan razlog* da zaključimo da je olovka *beskonačno velika*? Kakva je razlika između *te* situacije i situacije u kojoj uputivši se ka kraju svemira ustanovimo da do kraja nikada ne možemo stići? Nisu li granice olovke i granice svemira tada jednako fiktivne? Kakvu razliku čini to što se u spornom slučaju radi o onome što se naziva konvergentnim nizom, kad je granica kojoj niz navodno konvergira fiktivna, jer se beskonačnost ne može savladati korak po korak (vidi § 3 i § 8)? Kad je jednom beskonačno mnoštvo pred nama, ono čiji su delovi elementi tog mnoštva beskonačno je veliko[4]. Dakle ako se delovi nečega o čemu se govori deobom otkrivaju a ne stvaraju i ako se deoba uvek može nastaviti, onda to o čemu se govori nema konačno mnogo delova, ono ima beskonačno mnogo delova, a ako ima beskonačno mnogo delova, ono je beskonačno veliko, jer, potpuno nezavisno od toga da li *osim njega* i *izvan njega* išta drugo postoji, njegove su granice, koje bi ga eventualno učinile konačno velikim, *fiktivne*.

Ako, koristeći Abrahamovu terminologiju (*Abraham*, str. 47), napravimo razliku između *dinamičke* i *statičke* beskonačnosti, onda možemo reći da je u prethodnom argumentu, zahvaljujući pretpostavci o tome da se delovi deobom ne stvaraju, napravljen *prelaz* od dinamičke ka statičkoj beskonačnosti, time što se od *neograničenosti jednog procesa*, procesa deobe, koji je kao proces sukcesivan, zaključuje na *beskonačnost simultano postojećih delova* onoga čiji se delovi tako otkrivaju. Ono što važi za *proces*, tako važi i za *stvar*. I zato, ako se *deoba* ne može *okončati*, onda ni *stvar* nema *granica*. A ono što nema granica – *beskonačno je veliko*.

Tako smo videli kakva je veza između neodređenosti, beskonačnosti po broju, beskonačnosti po veličini i dinamičke i statičke beskonačnosti.

Što se tiče razlike između *unutrašnje beskonačnosti* i *spoljašnje beskonačnosti*, o njoj se u Zenonovim dokazima može govoriti

utoliko što se kod dokaza protiv postojanja (određenog) mesta (τόπος) radi o argumentima kod kojih je proces koji se neograničeno nastavlja i vodi apsurdu proces *adicije*, dok je u ostalim dokazima, protiv mnoštva, neoganičeni proces proces *deobe*.

Što se tiče toga kako prevesti ἄπειρον u argumentima protiv postojanja mesta; ono se u tim argumentima uvek pojavljuje u kontekstu u kojem se odnosi na proces *adicije* i prethodi mu ἐπ' ili εἰς (vidi *Philoponus*, 80. 24–25, 80. 27), tako da odgovara kasnijem latinskom *ad infinitum*. Zato se može prevesti i sa „do u beskonačnost“ i sa „do beskonačnosti“, ili prosto „neograničeno“.

h) Homogenost

Videli smo da su Zenonovi dokazi tako konstruisani da poenta ostaje nepromenjena bez obzira na to na koji se način deoba shvati i da na osnovu samog teksta nemamo razloga da verujemo da je Zenon deobu bilo gde uslovljavao heterogenošću. Ono pak za šta se dokaže da važi pod pretpostavkom da se dopusti deljenje onoga što je homogeno, važi i ako se uz to pretpostavi heterogenost. Jer, uzmimo da je heterogeno biće četvorno, kao kod Empedokla. Tada su ili delovi tako izmešani da se na nekom datom mestu uzajamno odeljuju, ili, ako se na tom mestu ne odeljuju, da tu važi ono što važi pod pretpostavkom homogenosti.

Situacija se značajno menja tek ako se prizna postojanje heterogenosti a deljivost *njome uslovi* tako da homogeni delovi nemaju delova pre same deobe. Ali ovo ne nalazimo nigde kod Zenona, ni eksplicitno ni implicitno.

Kod komentatora se na samo jednom mestu pojavljuje ὅμοιον, i to kod Simplikija (*Simplicius 2*, 140. 1) na onom sumnjivom mestu gde se pojavljuju i atomi i gde on pripisuje Zenonu argument koji Porfirije pripisuje Parmenidu. Na tom mestu se kaže da „pošto je (ono o čemu se govori) svuda homogeno (ὅμοιον), ono će, ako je deljivo, biti svuda podjednako (ὁμοίως) deljivo, a ne ovde da, tamo ne".

Što se tiče samog izvođenja, u njemu nema ničeg spornog, jer ako je nešto homogeno i deljivo, onda nema nikakvog razloga da ne bude svuda podjednako deljivo. Ono što bi, eventualno, moglo biti sporno jeste kategoričnost s kojom je u argumentu izrečena tvrdnja o homogenosti, za razaliku od hipotetične forme u kojoj se uvodi deljivost.

i) Kontinuitet

Mada je deljivost kontinuuma često tretirana hipotetički – u cilju svođenja na apsurd pluralističke hipoteze, ima kod komentatora mesta na kojima je teško ne prihvatiti da je tvrđena kategorički.

Govoreći o Zenonovim dokazima koje navodi Temistije, u kojima je reč o tome da ono što postoji mora biti jedinstveno (jedno), Simplikije te dokaze uvodi tvrdeći da se oni temelje na kontinuiranosti i nedeljivosti onoga o čemu se govori (*Simplicius 2*, 139. 19–21). Potom se kaže da je Zenon pokušavao da dokaže jedinstvenost bića time što je ukazivao na to da ako bi ono bilo podeljeno (λέγων ὡς εἰ διαιρεῖται) ono ne bi bilo čvrsto (pouzdano) jedno (βεβαίως ἕν) – kako kaže Temistije – zbog neograničene deljivosti tela (διὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον τομὴν τῶν σωμάτων) (*ibid.*, *loc. cit.*). Ovo mesto je inače lako dovesti u vezu sa ostalim mestima na kojima se poriče postojanje pravog jednog (κυρίως ἕν).

Kontekst je na navedenom mestu takav da prirodno traži hipotezu: „ako se deljenje jednom dopusti", *pošto* se tvrdi da je Zenon dakazivao jedinstvenost *na osnovu* kontinuiranost i nedeljivosti (onoga o čemu je reč). Postoje, međutim, drugačija mesta, gde je kontekst takav da je teže pretpostaviti da je hipoteza „ako se deljenje jednom dopusti" prećutana.

Prelazni slučaj je jedno mesto u Filoponovoj *Fizici* (80. 23), gde se, kako izgleda, kategorički tvrdi da je kontinuum beskonačno deljiv. Kaže se, naime, da je Zenon svoje dokaze zasnivao na toj činjenici (ταῦτα δὲ κατασκεύαζεν ἐκ τῆς ἐπ' ἄπειρον τῶν συνεχῶν διχοτομίας) (*Philoponus*, 80. 24–25).

Na ovom mestu je još moguće tvrditi da je akcenat na *beskonačnoj* deljivosti *kad* se deljenje već jednom dopusti, a *ne* na *deljivosti* kontinuuma. U tom slučaju se ne bi kategorički tvrdilo da je kotinuum deljiv, već samo da je beskonačno deljiv ako se deljenje dopusti.

No, postoji jedno drugo mesto kod Filopona (*ibid.*, 43. 1–4), gde, verujem, niko ne bi smatrao da se radi o skrivenoj hipotezi, osim ako već unapred ne bi bio uveren da ona *mora* postojati. Kaže se, naime, da ako je kontinuum jedinstven (jedan) (τὸ γὰρ συνεχὲς εἴ ἐστιν ἕν), onda, *pošto* je kontinuum uvek deljiv (ἐπειδὴ τὸ συνεχὲς ἀεὶ διαιρετόν), delove (μόρια) uvek možemo deliti (ἔστιν ἀεὶ τὸ διαιρεθὲν εἰς μόρια διελεῖν πλείονα). Odatle se zaključuje da će kontinuum uvek biti mnoštven (πολλὰ ἄρα τὸ συνεχές), i da će ista stvar biti i jedinstvena i mnoštvena (τὸ αὐτὸ ἄρα ἓν ἔσται καὶ πολλά) i dalje, nedvosmisleno, da ništa što je kontinuirano nije jedno (jedinstveno) (μηδὲν τῶν συνεχῶν ἕν).

j) Jedno

Još jednom se srećemo sa činjenicom da se među Zenonovim rečima koje Simplikije citira ne nalazi reč koju razmatramo, i to, još jednom, očigledno izuzetno značajna reč, reč kao što je ἕν ili ἑνάς. Na ostalim mestima gde se dokazi izlažu ona je, međutim, neizostavna.

Da li je svodeći na apsurd pluralističku hipotezu Zenon zaista govorio isto što i Parmenid, kako se to činilo mladom Sokratu (vidi *Plato 4*, 128 A–B), da li je, naime, Zenon time dokazivao da postoji jedno i samo jedno jedino jedno: Jedno? Temistije, Simplikije i Filopon su jednoglasni i kategorični da to jeste slučaj (vidi *Simplicius 2*, 139. 19, 140. 5–6, *Philoponus*, 80. 23). Saglasni su s tim i današnji autoriteti sa izuzetkom Solmsena (vidi *Solmsen*, str. 132 i dalje), Frimanove (Freeman, str. 157) i donekle Buta (*Booth 1*, str. 3). Ali, setimo se za početak, iz metodoloških razloga, često pominjane opomene da su poslednji paganski filozofi bili isto toliko dogmatični i zavisni od Platonovog autoriteta koliko njihovi hrišćanski protivnici od Biblije; Simplikije se stalno vraća na Platonovog *Parmenida*.

Reč ἕν se upotrebljava u raznim kontekstima. Kada navodi Eudemove reči, koji, kao što ćemo videti, dosta nezgodno po opšte pihvaćenu tezu o Jednom, kaže, između ostalog, da je Zenon odbacio jedno (ἀνῄρει τὸ ἕν) (*Simplicius 2*,

99. 11), Simplikije odmah dodaje da je to zato što je tačka ono o čemu se tu govori (τὴν γὰρ στιγμὴν ὡς τὸ ἓν λέγει). Eksplicitno se, dakle, ἕν primenjuje na tačku (στιγμή). Videli smo da kod Aristotela, kad govori o „Zenonovom aksiomu", srećemo istu takvu upotrebu (*Aristotle 1*, 1001 b 7–13).

Osim tačke, koja ne može biti pravo jedno, pominje se još jedno jedno koje nije pravo jedno (κυρίως ἕν). To je svaki element do kojeg se dolazi deobom (*Philoponus*, 81. 1).

Koje pravo jedno, ili Jedno, preostaje, koje svođenjem na apsurd pluralističke hipoteze treba da bude afirmisano? Komentatori nam na nekim mestima o ovome ne govore direktno, već se samo koriste principom *tertium non datur*: ako je pluralistička hipoteza apsurdna onda je nužno prihvatiti monističku. Tako, na primer, Filopon: „nužno je da postoji ili (samo) jedno ili mnoštvo; nemoguće je da bude mnoštva; ostaje da samo jedno postoji (ἀνάγκη δὲ ἢ τὸ ἓν εἶναι ἢ τὸ πλῆθος, πλῆθος δὲ εἶναι οὐ δύναται, λείπεται τὸ ἓν εἶναι)" (*Philoponus*, 42. 16–17).

Ipak, ima mesta gde nam komentatori ukazuju kojim putem treba da krenemo u potrazi za Jednim. Tako nam Temistije, po Simplikiju (*Simplicius 2*, 139. 19–21), kaže „da je Zenonov dokaz pokušaj da se pokaže da ono što jeste jeste jedno na osnovu toga što je kontinuirano i nedeljivo (καί ὁ Θεμίστιος δὲ τὸν Ζήνωνος λόγον ἓν εἶναι τὸ ὂν κατασκευάζειν φησίν, ἐκ τοῦ συνεχές τε αὐτὸ εἶναι καὶ ἀδιαίρετον)", i dalje se navodi šta bi se dogodilo kad bi se deljenje dopustilo. Jedno se dobija kad se *zabrani deljenje* (kontinuiranost je pretpostavljena).

Zbog ovakvih mesta trebalo bi stalno, kad se govori o Zenonovim dokazima, eksplicitno uvoditi *hipotezu*: „ako se deljenje uopšte dopusti". U argumentu koji Porfirije pripisuje Parmenidu a Simplikije Zenonu (*ibid.*, 140. 5–6; vidi takođe Aleksandrov argument koji Simplikije navodi u 138. 3), eksplicitno se kaže da ono što postoji jeste jedno „nedeljivo i bez delova" (ἀδιαίρετον τε καὶ ἀμερές).

Ima, međutim, mesta na kojima prećutnu, ili navodno prećutanu pretpostavku, nije lako dočitati.

S dva takva mesta već smo se sreli govoreći o kontinuitetu. Postoji još jedno nezgodno mesto, ono gde Simplikije navodi Eudema (*Simplicius 2*, 99. 11), koji kaže da je Zenon „odbacio jedno". Što je najgore, to Eudem navodi zajedno sa tvrdnjom da je Zenon dopustio mnoštvo (τὰ δὲ πολλὰ εἶναι συγχωρεῖ) (*ibid.*, *loc. cit.*).

Simplikije priznaje da Zenonov argument na ovom mestu deluje različito od mesta u Zenonovoj knjizi na koje ukazuje Platon u *Parmenidu* (*ibid.*, 99. 7–9). Spas iz nelagodne situacije, jer Eudem je autoritativan i pouzdan čovek, Simplikije nalazi u Aleksandrovom tumačenju, po kojem je ovde, u ovom o čemu govori Eudem, reč o odbacivanju mnoštvenosti (ὁ μέντοι Ἀλέξανδρος καὶ ἐνταῦθα τοῦ Ζήνωνος ὡς τὰ πολλὰ ἀναιροῦντος μεμνῆσθαι τὸν Εὔδημον οἴεται) (*ibid.*, 99. 12–13). Zenon navodno dopušta mnoštvo samo da bi njegovo postojanje sveo na apsurd.

Razumno je držati se onog što preporučuje Solmsen: „ne dati se olako u ruke Simplikiju" (*Solmsen*, str. 136)[5]. Nije nimalo neverovatno da je postojala jedna druga tradicija, nezavisna od one kojoj pripada Simplikije, koja je Zenona drukčije shvatala (vidi *Solmsen*, str. 140–141). Pa ipak, o toj tradiciji samo slutimo po sumnjivim mestima, Simplikijevoj nesigurnosti i jednom mestu iz *Fedra* (261 D). Slutiti jedno je; tvrditi na osnovu toga da je Zenon bio skeptik ili samo sofist ili retoričar – već obavezuje.

k) Biće

Kada govorimo o Zenonu, nema ni osnove ni potrebe da razlikujemo bivstvovanje od postojanja. Zato je particip sadašnji τὸ ὄν od εἶναι (biti) opravdano prevoditi i sa „bivstvujuće" i sa „postojeće", ili, u jednoj ustaljenoj tradiciji, sa „biće". U svakom slučaju, mi smo sad pred pitanjem: šta i kako i, eventualno, u kojem smislu postoji, i u kakvoj su vezi dosad razmatrani pojmovi sa pojmom τὸ ὄν?

Glagol εἶναι se, naravno, u svakoj vrsti teksta stalno javlja u nekom obliku, iz gramatičkih razloga. Oblik τὸ ὄν, međutim, već ukazuje na problematizovanje ili tematizovanje postojanja (τὸ εἶναι), odnosno ukazuje na pitanje koje nas zanima: šta sve, kako i u kojem smislu postoji?

Τὸ ὄν se javlja i među citiranim Zenonovim rečima. Simplikije kaže da je Zenon prvi pokazao da „ako ono što jeste (τὸ ὄν) ne bi imalo veličinu, ono ne bi uopšte postojalo" (*Simplicius 2*, 141. 1). Simplikije zatim nastavlja sa citiranjem: „εἰ δὲ ἔστιν..." Kao i kod Parmenida i ovde se srećemo s pitanjem kako prevesti bezlično ἔστιν.

Pošto se odmah posle uvodnog „εἰ δὲ ἔστιν...", kao subjekat rečenice pojavljuje ἕκαστον (svako), imamo sve razloge da pretpostavimo da je ono o čemu se ovde govori kao postojećem mnoštvo. Izgleda svejedno da li hipotezu ekspliciramo sa „ako mnoštvo postoji" ili sa „ako je postojeće mnoštveno", jer ništa ne ukazuje, ni na ovom mestu ni na bilo kojem drugom mestu, da se pravi razlika između teze o postojanju mnoštva i teze o mnoštvenosti onoga što postoji. U B 3 citat počinje rečima „εἰ πολλά ἐστιν...", što doslovno znači „ako mnoštvo postoji", ali je to moguće shvatiti i kao „ako je bića više".

Na mnogim mestima kod komentatora uveravamo se da je pobijanje pluralističke hipoteze pobijanje teze o postojanju mnoštva bića. Τὸ ὄν se javlja u množini (τὰ ὄντα) i – ili se tvrdi ili zaključuje da je apsurdno da bića (τὰ ὄντα) bude više (mnogo) (*Philoponus*, 81. 5–6), ili se, kao na jednom navedenom mestu, kaže da je Zenon rekao da će o bićima (u množini) moći da govori ako mu neko objasni šta je jedno (*Simplicius 2*, 97. 12–13).

Temistije (prema *Simplicius 2*, 139. 19) kaže da je Zenon pokušavao da dokaže da je biće (τὸ ὄν) jedinstveno. Ovo se, kao što se iz argumenta može videti, dokazuje time što se izvodi neprihvatljiv zaključak iz pretpostavke o dopustivosti deljenja i izdeljenosti, što se, opet, osniva na neograničenoj deljivosti tela (ἄπειρον τομὴν τῶν σωμάτων) (*Simplicius 2*, 139. 21–22). Ovde vidimo da je monistička teza *ontološka* (teza o jednom jedinstvenom biću) i usput još vidimo da je to biće o kojem se govori *telesno*.

U svakom slučaju, i komentatori (vidi još *Simplicius 2*, 141. 1) i Platon u *Parmenidu* (*Plato 4*, 127 E), gde Sokrat pita Zenona o poenti njegovog dokaza, skoro nedvosmisleno ukazuju da je mnoštvo koje je predmet napada mnoštvo bića, i tezu o nepostojanju mnoštva treba uzeti u kontekstu onih dokaza kao tezu o nepostojanju više bića. U *Fedru* je formulacija neodređena utoliko što se kaže da je elejski Palamed, to jest Zenon, doveo do toga da se iste (stvari) (τὰ αὐτά) učine, između ostalog, i jedinstvene i mnoštvene (*Plato 6*, 261 D). Prema svemu τὰ αὐτὰ bi trebalo da budu τὰ ὄντα.

Pitanje u kojem smislu se sve govori o onome što postoji Aristotel je kasnije uvek stavljao u prvi plan, i van okvira dijalektičkog pobijanja, kao pitanje o više načina na koje se o nečemu govori (πολλαχῶς λεγόμενα) (vidi dole, § 66). Setimo se pitanja da li se u Zenonovim dokazima tvrdi da tačka *prosto* ne postoji ili *samo* da ne postoji kao konstituent mnoštva. Nismo zaključili da je ovakva distinkcija kod Zenona uopšte opravdana, ali kad se već u vezi sa ἕν toliko insistira na razlici između jednog i Jednog, to jest jednog *kao* elementa mnoštva i jednog *po sebi*, a ta se razlika osniva na *interpretaciji*, zašto se, barem iz razloga simetričnosti, ne pomene i mogućnost slične razlike u vezi sa postojanjem tačke? Ἕν se u dijalektičkom pobijanju navodno pojavljuje kao samo jedno od suprotnosti (ἐναντία), pa se analogno tome i τὸ ὄν bez veličine u istom kontekstu može shvatiti kao suprotstavljeno širokom, debelom, telesnom biću.

Da li biće za Zenona mora imati veličinu, debljinu i masu, da li može postojati samo kao telesno? Mesta u B 1 (*Simplicius 2*, 141. 1–2) i B 2 (*ibid.*, 139. 10) kao da na to nedvosmisleno ukazuju, mada ne treba zaboraviti da se i ona nalaze u *jednom rogu dileme* koji se pobija. No, u svakom slučaju, i ako im se eventualno porekne kategoričnost, *ništa se pored* tačke i telesnog bića s veličinom i debljinom ne ispituje u dokazima. A po Temistiju (*Simplicius 2*, 139. 21), bića o kojima se govori eksplicitno su tela (σώματα). I u Platonovom *Parmenidu* (135 E) Parmenid karakteriše razliku izmedu Sokrata i Zenona time što se Sokrat nije složio sa Zenonom da se ispitivanje kreće samo među vidljivim stvarima.

36. Struktura i poenta Zenonovih dokaza protiv mnoštva

Baveći se elementima iz pojmovne mreže u Zenonovim dokazima protiv mnoštva bavili smo se i strukturom i poentom ovih dokaza, jer elemente smo morali da razmatramo međusobno povezane u kontekstu ovih dokaza. Sada ćemo samo rezimirati rezultate koji se specijalno odnose na strukturu i poentu ovih dokaza, posmatrajući ih još uvek *per se*.

Opšte uzevši, dokazi su *reductio ad absurdum* polazne hipoteze. Polazna hipoteza je, po svoj prilici, bila tvrdnja da postoji više bića. Ova bića iz polazne hipoteze su, verovatno, shvatana kao tela. Za njihovu mnoštvenost izgleda da je, po pretpostavci, jamčila samo njihova deljivost – koja se, ako je jednom dopuštena, više ne ograničava – jer je paradoks predikacije, koji se odnosi na kategoričku mnoštvenost, verovatno kasnijeg datuma. Deljenje koje se dopušta nije specifikovano, ali je, koliko smo videli, svejedno da li se shvati kao deljenje u mislima ili kao sečenje. Nema ničega u tekstu što bi ukazivalo na uslovljavanje mnoštvenosti heterogenošću.Telo koje je deljivo posmatrano je, dokle nam evidencija seže, kao homogeno. Neophodna pretpostavka u dokazima je da se delovi deobom o kojoj se govori ne stvaraju već otkrivaju.

Pod ovim opštim pretpostavkama, sve dokaze s kojima smo se sretali možemo podeliti u dve grupe i zajedno ih analizirati kao dokaze prvog ili drugog tipa koji imaju neke svoje specijalne pretpostavke.

Dokazi prvog tipa. U prvom tipu dokaza, kojem pripada i navodno autentični fragment B 3, ἄπειρον nije neophodno prevoditi sa „beskonačno" već je dovoljno prevoditi ga sa „neodređeno". Ovaj dokaz, naime, koristi okolnost što zbog činjenice da se deoba uvek može nastavljati ne mogu da se nađu prave, određene jedinice od kojih bi se navodno mnoštveno telo sastojalo; delovi tela se pokazuju kao neodređeni. Ako telo podelimo na dva dela, ono se, pod opštom pretpostavkom da se deobom koja se vrši delovi ne stvaraju već otkrivaju, ipak ne sastoji iz dva dela, jer deljenje možemo nastaviti. No do definitivnog, određenog dela (κυρίως ἕν) može se doći, ne zbog toga što deobu ne možemo dovoljno produžiti, već zato što, *a fortiori*, nema takvog dela koji bi bio nedeljiv. Ovo je, koliko smo uspeli da vidimo, *pretpostavka* i nema nikakvog *pobijanja* atomizma (suprotno Kornfodovom mišljenju – vidi *Cornford 1*, str. 278). Ne možemo reći iz koliko se delova sastoji telo jer delovi nisu određeni. A onda ćemo, vraćajući se na polaznu hipotezu o mnoštvenosti, morati da priznamo i da se telo sastoji iz neodređeno mnogo delova. Za Zenona je, kako izgleda, ovo besmislica; analitički je neistinito reći da se telo sastoji iz neodređeno mnogo delova – to je još jedna pretpostavka koju otkrivamo.

Ako dokaz u fragmentu B 3 ne povežemo sa neodređenošću jedinice, a ἄπειρον prevedemo sa „beskonačno" (u smislu „beskonačno mnogo") dokaz je potpun tek ako se od neograničene deljivosti, odnosno dinamičke beskonačnosti, pređe, uz pomoć opšte petpostavke o nestvaranju delova deobom, na statičku beskonačnost[1], to jest na beskonačni broj delova, a onda se – ili kao analitički neistinito uzme da se telo (celina) može sastojati iz beskonačno mnogo delova, ili se to opovrgava nekim dodatnim razlogom koji kod komentatora ne nalazimo. Uopšte, verzija sa „neodređenošću" manje obavezuje i/ili je potpunija, a povezuje se prirodno sa mestima na kojima se govori o nepostojanju prave jedinice.

Dokazi protiv mesta mogu se, takođe, svrstati u prvi tip dokaza, samo je u njima, umesto o deobi, reč o adiciji, umesto o unutrašnjoj, o spoljašnjoj beskonačnosti i umesto o neodređenosti celine zbog neodređenosti (beskonačne brojnosti) delova, o neodređenosti dela (elementa) zbog neodređenosti celine (ili beskonačne brojnosti mnoštva čiji je dati element element).

Dokazi drugog tipa. Slavni i toliko sporni dokaz iz fragmenta B 1 paradigma je za ovaj tip dokaza.

Mnoštveno telo koje se deli pokazuje se kao beskonačno malo – tačnije, kao potpuno ništavno – i kao beskonačno veliko. Beskonačno je malo, jer koliko je do tačaka ono je bez veličine, ono se ne sastoji iz tačaka. Beskonačno je veliko, jer se sastoji iz beskonačno mnogo delova s veličinom.

Da bi ovaj dokaz bio valjan potrebno je, kao što smo videli, da se napravii prelaz od dinamičke beskonačnosti *deobe* ka statičkoj aktualnoj beskonačnosti *delova*, što znači da se ovde ἄπειρον mora uzeti u smislu „beskonačno mnogo" (opšta pretpostavka da se delovi deobom ne stvaraju i ovde je, naravno, neophodna). A kad se nešto sastoji iz beskonačno mnogo delova sa veličinom, ono je, po Zenonu, beskonačno veliko.

Nezavisno od poente ovog dokaza, on se može iskoristiti da se eventualno pronađe *razlog* iz kojeg bi se u dokazu prvog tipa u verziji sa „beskonačnošću" na kraju proglasilo apsurdnim to da se telo sastoji iz beskonačno mnogo delova. Naime, bez obzira da li se usvoji Frenkelov ili Vlastosov prevod, deoba pokazuje da se u nekom smislu, koji bi za Zenona mogao biti presudan, od tela ne može načiniti celina. Bilo da se deoba vrši po Frenkelu (vidi str. 62), bilo po Vlastosu i Abrahamu (vidi, isto mesto), jednom se leva i desna kora (po Frenkelu) ne mogu susresti da bi dale jedinstveno telo, a drugi put (po Vlastosu i Abrahamu) se ne

može stići do krajeva delova koji se otkrivaju deobom. Tako telo, s jedne strane, kao ograničeno deluje celovito, ali, s druge strane, ta celina je s obzirom na njegovu unutrašnju strukturu, u stvari, nepostojeća.

Ostaje da se još zapitamo da li je pobijanje pluralističke hipoteze isključiva poenta Zenonovih dokaza protiv mnoštvenosti ili ovi dokazi imaju još neki cilj. Videli smo da komentatori često kao cilj navode odbranu Parmenidove monističke ontologije. Ali, kako se ta odbrana ostvaruje? Da li jedino po principu *tertium non datur*, tako da ako nema više bića, a nema ih jer je to apsurdno, onda. samo jedno biće postoji?

Komentatori, videli smo, često koriste ovaj princip. Taj princip je koristio i Sokrat u Platonovom *Parmenidu* kad je saslušavši Zenonov dokaz zaključio da se u Zenonovom spisu nalazi ista teza kao u Parmenidovoj poemi (*Plato 4*, 128 A), samo preokrenuto, mada je, kako se kaže, Zenon pokušao da čitaoce zavede tako da pomisle da je u pitanju neka druga teza.

Iako, kada se celo navedeno mesto iz *Parmenida* (128–129) pročita, može izgledati da se prisutni Zenon slaže sa Sokratovim tumačenjem, ipak je Platon na tom mestu gotovo đavolski oprezan i nigde to sasvim jasno ili direktno ne kaže. Zenon pre svega kaže da Sokrat nije potpuno shvatio istinu koju sadrži njegov spis, iako dobro njuši, poput kučki iz Lakonije. Na kraju proizlazi da Sokrat, u stvari, nije shvatio pravi Zenonov motiv, pa je mislio da je ovom do slave, jer je jednu poznatu tezu hteo da iznese kao drugu, originalnu, a Zenon je to učinio iz mladalačke želje za raspravljanjem. Ovim se, međutim, ništa ne kaže o Sokratovom korišćenju principa *tertium non datur* i ne kaže se da li je to korišćenje opravdano. A ono što Zenon pozitivno u svem tom raspravljanju kaže, to je da je uzvratio udarac onima koji su ismevali Parmenidovu tezu: jer pluralistička hipoteza se pokazuje kao još smešnija. Ali, nije li, ako, je ova smešnija, i monistička hipoteza smešna?

A u *Fedru* (261 D), Platon stavlja u usta Sokratu nešto što se razlikuje od onoga što ovaj o Zenonovom spisu kaže u *Parmenidu*. On u *Fedru* kaže da je Zenon govorima postizao takav uspeh da su se slušaocima iste stvari činile i iste i različite, i jedinstvene i mnoštvene, i mirujuće i pokretne.

U saglasnosti s ovim je i mesto kod Simplikija gde on citira Eudema, iako ga onda brzo i neuverljivo ispravlja.

Zenon je, naročito ako se oslonimo na mesto iz *Fedra* gde ga pod imenom elejskog Palameda Sokrat pominje u kontekstu umešnosti u protivrečenju (ἀντιλογική) (*Plato* 6, 261 C) – u kojem se samo nešto ranije pominje Gorgija – mogao biti retoričar ili, kako Rasel kaže, sofista. On je mogao biti i filozofski skeptik, a na kraju krajeva, poput njegovog sledbenika Gorgije, čak i ontološki nihilista (vidi *Freeman*, str. 157): ako biće nije ni jedinstveno ni mnoštveno ono ne postoji.

Ako Zenon u datom slučaju nije koristio princip *tertium non datur*, onda poentu u dokazima protiv mnoštva treba ograničiti na isključivo pobijanje pluralističke hipoteze. A ako je ovaj princip koristio, onda priroda Jednog koje preostaje zahteva da se ne dopusti deljenje i da mu se uz homogenost pripiše i kontinuitet u Parmenidovom smislu, pošto bez deljenja paradoksa ne bi bilo.

37. Zenonovi dokazi protiv mnoštva na filozofskoj sceni

Došao je trenutak da Zenona izvedemo na filozofsku scenu prve polovine petog veka pre nove ere, da vidimo šta novo donose njegovi dokazi protiv mnoštva i protiv koga su mogli biti upereni. S reakcijama na ove dokaze sretaćemo se kasnije.

Nema nikakve potrebe da za razumevanje Zenonovih dokaza koje navodi Simplikije uvodimo infinitezimale (vidi § 35 b). Nedeljive jedinice, koje se pominju, ili su bez ikakve veličine, ili se, ukoliko imaju veličinu, njihovo nepostojanje smatra očiglednim i samo se koristi kao razlog u prilog neodređenosti neke eventualne jedinice. Reč ἄτομον, koja je verovatno kasnijeg datuma, pojavljuje se samo na jednom sumnjivom mestu, a i tu se ne čini predmetom napada. Ὄγκος se pak ne pominje u nekom tehničkom smislu u kojem bi se odnosilo na minimalne čestice. S druge strane, u ponuđenoj interpretaciji ranopitagorejskog učenja, ne pojavljuju se entiteti poput tačka – bilo s veličinom bilo bez nje, Anaksagora sigurno, a Empedokle verovatno, nije atomista.

Dakle, zaključci koje smo nezavisno izveli iz analize Zenonovih dokaza i rekonstrukcije učenja koja im prethode međusobno su *saglasni* i zato se možemo odvažiti da konačno zaključimo da je verovatnije da pre Zenona nije bilo učenja o geometrijskim tačkama s veličinom, ili nedeljivim jedinicama s određenom ili minimalnom veličinom, nego da ga je bilo, i da Zenonov napad na pluralizam nije napad na pluralizam nekih takvih jedinica. *A fortiori*, njegov napad nije napad na neku teoriju po kojoj bi se tela ili geometrijski objekti *sastojali* iz nekih elemenata poput tačaka ili nedeljivih jedinica s veličinom.

Zenon je verovatno prvi koji uopšte govori o onome što će kasnije biti smatrano geometrijskom tačkom. U svakom slučaju, on je prvi o kome možemo tvrditi da je govorio o nečemu što nema veličinu. Zanimljivo je i značajno što on, uvodeći novi entitet, koji će postati novi objekt geometrije, njega uvodi kao kandidata za pravu jedinicu, i to gradivnu jedinicu (element) mnoštva, a ne kao granicu, presek i slično.

Ako se sad zapitamo ko je onda mogao biti meta Zenonovog napada u dokazima protiv mnoštva, ja bih odgovorio da su se njegovi dokazi mogli odnositi pre svega na Pitagorejce i Anaksagoru, ali interpretacije i razlozi nisu oni koje nude ostali istraživači (u odnosu na Pitagorejce vidi *Tannery 1*, str. 124, *Tannery 3*, gl. 10, *Cornford 4*, str. 58–59, *Burnet 1*, str. 314, *Raven*, str. 75, *Guthrie 2*, str. 91, u odnosu na Anaksagoru *Luria*, str. 107, *Mau*, str. 19, *Windelband*, I, str. 86–87).

U pitagorejskom učenju o broju i proporciji brojevi su prvobitno označavali samo *relativnu* dužinu žica pomoću kojih se stvarala harmonija (vidi § 30). Slično tome, pri korišćenju metoda višestruke primene jedne oblasti da bi se izvršilo upoređenje dve oblasti (vidi § 31) Pitagorejci se nisu pitali neposredno o površini ili zapremini neke oblasti, već o *odnosu* dve površine ili dve zapremine, pri čemu je materijal bio nevažan, ili, na kraju, isključen, kao što potvrđuje, ali verovatno ne tek otkriva, Hipasov eksperiment (vidi § 30), zato što se isti odnos može ostvariti na različite načine. Ako su uz sve ovo Pitagorejci još tvrdili da je sve broj i odnos, a brojeve nisu, na šta ukazuje Aristotel (*Aristotle 1*, 1083 b 10), osamostaljivali u odnosu na fizička tela, onda im je Zenon, eksplicirajući neeksplicirano, mogao pokazati da zapadaju u protivrečnost utoliko što se *istom* predmetu moraju – ili pripisati *različiti* brojevi, ili mu se bar ne može pripisati *jedan određen* broj, zbog čega on ne može biti (neki) broj.

Ako materijal nije važan zato što se isti odnos može ostvarti na različite načine – uostalom 4:2=2:1 – odatle još, svakako, ne sledi da su stvari brojevi a sve samo odnos i broj. No to bi se u jednom važnom smislu ipak *moglo* reći *kad bi* se tela i brojevi mogli *obostrano jednoznačno korespondirati*. Možda su neki Pitagorejci, polazeći od aritmetizovane geometrije, to pokušali da učine, mada je to samo pretpostavka bez evidencije. Ali, Zenon je, svakako, na taj način mogao interpretirati njihovu poziciju da bi je srušio. Ako bi se tela sastojala iz određeno mnogo delova, onda bi se svakom od njih *mogao* dodeliti po jedan i samo jedan broj i *ukidanje razlike* između dela (tela) i broja dobilo bi svoje

opravdanje, a pošto je 4 : 2 = 2 : 1, *isti* odnos i *ista* harmonija bi se mogli, kako Pitagorejci insistiraju, dobiti na *različite* načine, a da zbog toga ne bi bilo 4 = 2 i 2 = 1. Ako se tela, međutim, ne sastoje iz određeno mnogo delova jer nema prave jedinice (κυρίως ἕν), onda je pomenuto korespondiranje nemoguće izvesti.

Zenonovi dokazi *bi mogli*, dakle, pogoditi Pitagorejce. Ova formulacija je oprezna zbog toga što domašaj Zenonovih dokaza izgleda širi i što je, čak i ako su Pitagorejci bili oni koji su Parmenida ismejavali i koji su tako podstakli Zenona da „uzvrati udarac" (*Plato 4*, 128 C–D), Zenon to učinio u obliku koji ima i širu upotrebiljivost. Tako on, kao što smo videli, uvodi i tačku kao mogućeg kandidata za pravu jedinicu da bi univerzum mogućnosti iscrpeo. S druge strane, ne mora neko želeti da tvrdi da je sve broj i proporcija pa da bude zbunjen činjenicom što se jedno ograničeno telo sastoji iz neodređeno mnogo delova, ili što je beskonačno veliko.

Razlog iz kojeg su Zenonovi dokazi mogli biti upereni i protiv Anaksagore, a koji je u isto vreme razlog protiv pretpostavke Kirka i Rejvna (*Kirk and Raven*, str. 371–372) da je Anaksagora u Dilsovom fragmentu B 3 odgovarao Zenonu, sadržan je u okolnosti da upravo u fragmentu B 3, koji smo naveli kao deo „čvrstog jezgra" njegove teorije, Anaksagora *kategorički* tvrdi nešto što Zenon tvrdi pod *pretpostavkom* dopustivosti deobe, *ispitujući pluralističku hipotezu*. Zenon prihvata da se jednom započeti procesi deobe ili adicije ne mogu okončati, ali se na tome ne zaustavlja, već *nastavlja* tamo gde Anaksagora staje, svodeći polaznu pretpostavku na apsurd; beskonačna deljivost je u njegovim dokazima razlog što ne postoji κυρίως ἕν koje bi trebalo da bude konstituent navodnog mnoštva (vidi *Philoponus*, 42. 31–43. 6), što je ono zbog toga neodređeno (vidi *Simplicius 2*, 140. 29) i to zbog nemogućnosti dosezanja središta ili krajeva delova koje otkrivamo deobom (u zavisnosti od toga kako prevedemo argument u Dilsovom B 1) navodno ograničena stvar ne može biti jedna celina.

Odnos Zenona prema Empedoklu mogao bi biti vrlo značajan, ali, nažalost, o njegovom delu Ἐξήγησις τῶν Ἐμπεδοκλέους, koje pominje Suida, a gde ἐξήγησις kako primećuje Dils (vidi *Gaye*, str. 114), ukazuje na njegov polemički karakter, ne znamo ništa osim naslova. Dokazi pak koje smo razmatrali ničim se *specifično* ne odnose na Empedokla, već se samo na njegovo učenje mogu primeniti, ukoliko i za svaki homogeni i kontinuirani deo mešavine četiri korena važi sve što se u dokazima pretpostavlja. Moguće je, međutim da je Empedokle bio veran Parmenidu utoliko što je eventualnu izdeljenost povezivao sa heterogenošću, tako da bi broj delova u mešavini zavisio od broja uzajamnog umetanja korenâ. U tom slučaju deoba o kojoj se govori u razmotrenim Zenonovim dokazima ne bi više mogla da bude *bilo kakva* deoba, ako željeni zaključak treba da se izvede, pošto bi delovi *tek nastajali* uzajamnim umetanjem. Deoba bi morala da se vrši umetanjem po određenom zakonu, nekoj geometrijskoj progresiji, i to ne sukcesivno, jer bi tada, na šta možda ukazuje ono sporno mesto kod Aristotela (*Aristotle 9*, 905 a 2), deljenje uvek bilo izvršeno samo do izvesne tačke (up. gore, § 34). Deljenje bi moralo da se vrši *jednovremeno* da bismo dobili beskonačno mnogo raznorodnih delova koji se nižu poput raznobojnih prostranstava kojima smo izdelili Ahilov put u § 19.

Preostaje još odnos Zenona i Parmenida. I njihov lični odnos je bio zagonetan i predmet raznih govorkanja (vidi *Plato 4*, 127 C), a Platon je, kao što smo videli, vrlo oprezan i kada je u pitanju njihov filozofski odnos. Kod komentatora je drukčije, njima je sve jasno (up. *Simplicius 2*, 139. 19, 139. 27, *Philoponus*, 80. 23).

Zenon je mogao dopuštati deljenje onoga što je homogeno da bi onda pokazivao apsurdnost te hipoteze. To deljenje onda ne bi bilo specifikovano i ne bi, naravno, od početka bilo učinjeno

apsurdnim time što bi se uslovljavalo heterogenošću. Ako stvari ovako stoje, Zenon je mogao raditi za Parmenidovu stvar dokazujući da dopuštanje deljivosti, u bilo kojem smislu – vodi u apsurd.

Sumnju izazivaju ona mesta gde se kategorički govori o beskonačnoj deljivosti onog što je kontinuirano i gde se bez ograničenja deli ono što ima veličinu i debljinu. Ta mesta se, neka lakše, neka teže, mogu nategnuti tako da se čitaju pod opštom hipotezom o dopustivosti deljenja. Sve se jednostavno može rešiti ako se hipoteza o mnoštvu uzme kao ekvivalentna hipotezi o deljivosti, što s obzirom na način kako se mnoštvo tretira nije bez osnova. Tada su sva navodno kategorička mesta automatski hipotetička, jer dokazi stoje pod opštom hipotezom „ako mnoštvo postoji“.

Sumnju izazivaju, kao što smo videli, i Simplikijeva nesigurnost, naročito kad interpretira Eudemove reči (*Simplicius 2*, 99. 12–13), i mesto iz *Fedra* (261 D) gde se Zenon prikazuje kao retoričar koji zbunjuje ljude. Ali ovo mesto bi se moglo povezati sa mestom iz *Parmenida* (*Plato 4*, 135 D – 137 C) gde se govori o vežbanju (γυμνασία) u dijalektici. Tamo Parmenid kaže, ukazujući na Zenona, da za svaki predmet, pa i za Jedno (*ibid.*, 136 A), treba ispitati sve posledice hipoteze o njegovom postojanju, a Zenon kaže da prost svet ne zna da je nemoguće otkriti i razumeti istinu ako se u pojedinostima ne ispitaju svi putevi na svaki način (*ibid.*, 136 E). Zenon je možda zbunjivao ljude vežbajući se u dijalektici, ali na osnovu ovog mesta, gde se govori o istini i prostom svetu, ne izgleda da je to zbunjivanje bilo samo sebi cilj. On je možda i monističku hipotezu podvrgao ispitivanju, onako kako to Platon Parmenidu stavlja u usta (*Plato 4*, 137 B i dalje), ali mi o tome nemamo nezavisnu evidenciju, ne znamo kako je to, eventualno, izgledalo i kakav je zaključak izveden. Pogotovo ne znamo da li je, i ako jeste kako, Zenon u tom slučaju upoređivao monističke i pluralističke hipoteze.

Sve u svemu, u nedostatku pozitivne evidencije, potrebno je dosta smelosti da se Zenon proglasi retoričarem, zbunjivačem ili sofistom,[1] iako ima ozbiljnih sumnji u to da su se on i Parmenid baš toliko slagali koliko to misli mladi Sokrat, da bi govorili isto (λέγοντες ταῦτα) (*Plato 4*, 128 A 6, B 5). Još bi bila veća smelost tvrditi da je već Zenon, pre Gorgije, ontološki nihilista (kako to misli Frimanova – *Freeman*, str. 157).

38. Zenonove kinematičke aporije

Poznate četiri Zenonove kinematičke aporije bilo bi ispravno zvati dokazima protiv mogućnosti kretanja, pošto je njihov krajnji cilj, kako izgleda, da svedu na apsurd opštu hipotezu da ima kretanja; govoreći o njima Aristotel (vidi, na primer, *Aristotle 22*, 239 b 14, 236 a 5) i komentatori (vidi, na primer, *Simplicius 2*, 1011. 19, 1013. 31, 1016. 9, 1034. 4, 1289. 6) upotrebljavaju upravo reč λόγοι koju smo kod dokaza protiv mnoštva prevodili kao „dokazi". Ali ovi dokazi protiv kretanja su poznatiji pod imenom aporije, a reč λόγοι Aristotel takođe povezuje sa Zenonom (vidi *Aristotle* 21, 209 a 24; za Aristotelom ἀπορία ponavlja i Filopon – vidi *Philoponus* 510. 2). Ove kinematičke aporije nas neposredno vezuju za *teškoće* na koje smo, protiv svoje volje, naišli na kraju prvog dela, *nemajući* za cilj da dokažemo da nema kretanja. Reč „aporija", koju je možda najzgodnije prevesti sa „ćorsokak", ili prosto sa „teškoća", manje obavezuje nego reč „dokaz" i zato je pogodnija za one koji još nisu izgubili nadu da će iz ćorsokaka izaći bez poricanja mogućnosti kretanja; aporija je nešto što se možda može rešiti. No sâm Zenon je i ovde, kao i kod ispitivanja pluralističke hipoteze, verovatno želeo ne samo da stvori teškoće,

već i da zaključi da kretanja nema, i afirmiše i time Parmenidovu monističku ontologiju.

a) D i h o t o m i j a

Aristotel na jednom mestu (*Aristotle 22*, 239 b 22), gde govori o *Ahilu*, referira na prvi od dokaza sa διχοτομία, verovatno zato što se u njemu javlja deljenje na dva dela (διχοτομεῖν)[1].

U *Dihotomiji* se pre svega dokazuje da je nemoguće ikada, pod bilo kojim okolnostima, stići do nekog cilja, jer je nemoguće savladati, odnosno „proći kroz" beškonačnost ((τὰ δ' ἄπειρα ἀδύνατον διεξελθεῖν) (*ibid.*, 263 a 6). Način i terminologija kojima je dokaz predstavljen kod Aristotela i komentatora dozvoljavaju da se „savladavanje" shvati na oba od dva načina o kojima smo raspravljali u prvom delu, naime, i kao *dosezanje tačaka* i kao *prelaženje deonica*.

Sam Aristotel ne koristi dosledno uvek istu terminologiju. Prezentirajući argument počev od 239 b 11, on kaže da kretanja nema, budući da „telo koje se kreće (τὸ φερόμενον) mora dospeti do polovine (εἰς τὸ ἥμισυ δεῖν ἀφικέσθαι) pre (no što dospe do) kraja (ἢ πρὸς τὸ τέλος)". Glagol koji je ovde korišćen je ἀφικνέομαι (dospeti)[2]. Međutim, kada nešto niže kaže da je nemoguće „preći (ili proći kroz) beskonačnost", Aristotel koristi glagol διέρχομαι (τὰ ἄπειρα διελθεῖν). Nije reč o tome da to samo ovde, u vezi sa beskonačnošću koju treba preći, Aristotel upotrebljava ovaj glagol. On upotrebljava, upravo u istom kontekstu gde je maločas upotrebio ἀφικνέομαι – διιέναι: „uvek se prvo mora preći pola (ἀεὶ τὸ ἥμισυ διιέναι (δεῖ))" (*Aristotle 22*, 263 a 5). Najzad, Aristotel koristi i διεξιέναι, kada kaže da je „nemoguće savladti beskonačnost (τὰ δ' ἄπειρα ἀδύνατον διεξελθεῖν)" (*ibid.*, *loc. cit*)[3].

Filopon, komentarišući *Dihotomiju* (vidi *Philoponus*, 802. 31 – 803. 12), kaže da „u svakoj veličini postoji beskonačno tačaka (znakova) (ἐν παντὶ μεγέθει ἄπειρά ἐστι σημεῖα)". On je očigledno, sledeći prvi Aristotelov način prezentacije, „prelaženje... beskonačnosti (beskonačnog) (τὸ ἄπειρον διελθεῖν)" (*ibid.*, 803. 1) shvatio kao dosezanje beskonačno mnogo tačaka: σημεῖα su znaci, nešto što je postavljeno duž puta.

Sledeći ovakvu interpretaciju, prevodioci[4] su slobodno, prevodeći i Aristotelov tekst, koristili „tačka“ ili „položaj“, i ako u Aristotelovom tekstu, kao što smo videli postoji osnova i za interpretaciju u kojoj se radi o beskonačnom broju deonica koje se prelaze.

Što se tiče razlike između διιέναι i διεξιέναι, Li ukazuje (*Lee*, str. 68) da kombinacija διά i ἐξ sugeriše da se radi o „prolaženju kroz“ i „dolaženju do kraja“. Zato sam ono mesto kod Aristotela gde se javlja διεξιέναι (*Aristotle 22*, 263 a 6) i preveo sa „nemoguće (je) savladati beskonačnost“.

Osim formulacija u kojima se pominje dosezanje i prelaženje, Aristotel nam nudi još dve formulacije, od kojih prva najviše ukazuje na analogiju između prelaženja nekog puta i *izvršenja beskonačno mnogo sukcesivnih akata* (up. gore, §§ 20, 23), a druga na analogiju sa *prebrojavanjem beskonačnog skupa* (up. §§ 21, 23).

U formulaciji u kojoj Simplikije navodno citira Zenona, a u stvari, samo citira Aristotela, kaže se vrlo slikovito da Zenon pretpostavlja (*Simplicius 2*, 947, 12–13) da je nemoguće „dodirnuti svaki (član) nečega što je beskonačno (ἅψασθαι τῶν ἀπείρων καθ' ἕκαστον)“ (*Aristotle 22*, 233 a 23, *Simplicius 2, loc. cit.*), naravno „u ograničenom vremenu (ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ)“ (*Aristotle 22, loc. cit.*, *Simplicius 2*, 947. 17). Pošto je broj polovina beskonačan, svaku od njih beskonačno mnogo bi trebalo dodirnuti pre no što se stigne na cilj.

Što se tiče *aritmetičke* formulacije, Aristotel, rekavši da je to formulacija koju su dali *neki*, implicira da ona nije bila Zenonova (*Aristotle 22*, 263 a 7). U ovoj formulaciji se kaže da kretati se znači „brojati svaku od nastajućih polovina (ἀριθμεῖν καθ' ἕκαστον γιγνόμενον τὸ ἥμισυ) (*ibid.*, 263 a 8–9). A ovih polovina je beskonačno mnogo, kao što Filopon eksplicira „zato što je kontinuum beskonačno deljiv (τὸ συνεχὲς ἐπ' ἄπειρόν ἐστι διαιρετόν)“ (*Philoponus*, 87. 12).

Prema uobičajenim interpretacijama, koje slede jasne konstrukcije Simplikija (*Simplicius 2*, 1013. 4) i Filopona (*Philoponus*, 81. 7), niz polovina se dobija po opadajućoj geometrijskoj progresiji: 1/2, 1/4, ..., $1/2^n$, ... Filipon tačno navodi da, pre no što pređe celu liniju (γραμμή), nešto što se kreće mora preći „polovinu“ (τὸ ἥμισυ), pre toga „četvrtinu“ (τὸ τέταρτον), pre toga „osminu“ (τὸ ὄγδοον) i tako do „beskonačnosti“ (ἐπ' ἄπειρον). Međutim, kao što neki istraživači s pravom primećuju (vidi *Lee*, str. 68, *Vlastos 5*, str. 96 i dalje), Aristotelov tekst je dvosmislen i dozvoljava, osim konstrukcije koju daje Filopon, i konstrukcije preko rastuće geometrijske progresije: 1/2, 3/4, 7/8, ... $(2^n-1)/2^n$, ... (vidi *Aristotle 22*, 239 b 10–15)[5] i, štaviše, Vlastos je (*Vlastos 5*, str. 96, nap. 7) poredeći vremena kojima je svoju konstrukciju iskazao Simplikije sa vremenom koje je na paralelnom mestu upotrebio Aristotel (*Aristotle 22*, 239 b 10–15), zaključio da razlika sugeriše da je Aristotel pre imao u vidu rastuću geometrijsku progresiju.

Mislim da ovome ide u prilog i način na koji Aristotel sam upoređuje *Ahila* i *Dihotomiju*. On kaže da je dokaz u *Ahilu* isti kao onaj koji se osniva na dihotomiji (*ibid.*, 239 b 18), sem što se u *Ahilu* (nezavisno od razlike u dramskom efektu – *ibid.*, 239 b 25) veličina koja se uzima u sledećem koraku (τὸ προσλαμβανόμενον μέγεθος) ne deli na polovine. Nezavisno od brzine kojom se kreće progonjeni, Ahil, koji uvek stiže tamo gde je trkač ispred njega bio, ne može da savlada broj *ovih* rastojanja, a ne nekakvih polovina. No u oba slučaja, kaže Aristotel, zaključuje se da se „do granice ne dospeva (μὴ ἀφικνεῖσθαι πρὸς τὸ πέρας)“ (*ibid.*, 239 b 23). Kao da se kretanje dopustilo u oba slučaja i da je samo reč o *nedostižnosti* ili *nemogućnosti prispeća*.

Kao što smo u prvom delu videli, razlika između konstrukcije sa rastućom i konstrukcije sa opadajućom geometrijskom progresijom nije sasvim irelevantna. Ako se Aristotelova konstrukcija razlikuje od konstrukcije komentatora i ako ona, u stvari, odgovara Zenonovoj, onda je Zenon i u *Dihotomiji* postupio kao u dokazima protiv mnoštva: *pustio* je trkača da se kreće i dokazao da ne može *stići* na dati cilj, da bi, eventualno, tek zatim zaključio da kretanja ne može uopšte biti jer ne postoji ni jedan cilj koji bi bio dostižan.

Ako pak konstrukcija koju nam nude komentatori odgovara Zenonovoj, onda se dokaz u ovom slučaju razlikuje od uobičajenog Zenonovog *jakog svođenja na apsurd*. Mora se, naime, ne dopuštajući trkaču da uopšte krene, utvrditi *prvo* da je nemoguće stići na dati cilj jer je nemoguće savladati beskonačnost korak po korak, a onda, generališući, zaključiti da to važi za *svaki* cilj, da bi tako trkač ostao nepokretan. Zato bi *Dihotomija* po ovoj konstrukciji, za razliku od Ahila, bila direktno aporija *nepokretnosti*, a ne nedostižnosti. U *Ahilu* tek u eventualnoj generalizaciji koristimo $\neg\exists x \neg f(x) \rightarrow \forall x f(x)$, ako, naime, hoćemo da izvedemo da kretanja nema, a u ovako konstruisatnoj *Dihotomiji* to bismo morali učiniti *u samom dokazu*. U poređenju sa ovom konstrukcijom *Ahil* manje pretpostavlja, on je pre svega aporija nedostižnosti i zato je *operativniji*; on može biti takoreći *empirijsko pokazivanje* neostvarljivosti trkačevog zadatka.

b) Ahil

Naziv aporije potiče od Aristotela (vidi *Aristotle 22*, 239 b. 14). Simplikije u prezentaciji dodaje kornjaču (χελώνη) (vidi *Simplicius 2*, 1014. 23): Ahil ne može prestići ne samo Hektora nego ni kornjaču. Aristotel to izražava tako što kaže da ni najbrži trkač (τὸ τάχιστον) ne može prestići (καταληφθήσεται) najsporijeg (τὸ βραδύτατον) (*Aristotle 22*, 239 b 15).

Gej (*Gaye*, str. 100) misli da su najbrži i najsporiji uvedeni radi „ekstravagantnosti paradoksa", odnosno „uverljivosti argumenta". Ali kornjača može igrati mnogo značajniju, više filozofsku ulogu. Ona se može iskoristiti za to da se *bilo koji dati* položaj učini nedostižnim, time što joj se odredi dovoljno mala brzina (uz odgovarajući, početni položaj, naravno). Tako ona može da posluži za *generalizaciju*, naime za to da se utvrdi kako je nemoguće i *pokrenuti se*, jer je nemoguće *ikuda* stići. Ako je i *Ahil* trebalo da bude svođenje ua apsurd hipoteze o mogućnosti ili postojanju *kretanja*, onda je i ovaj korak neophodno napraviti, i onda je za njega značajna kornjača, odnosno činjenica da Ahil ni najsporijeg „trkača" (najsporijeg koga izaberete) ne može stići.

Do koje mere su vreme i brzina neophodni za eksplikaciju prve dve aporije? Činjenica je da Aristotel u prezentaciji *Dihotomije* ne pominje vreme (a pogotovu ne brzinu), već da tek u *komentaru* kaže da se u „dokazu pogrešno pretpostavlja da je nemoguće preći beskonačnost ili dodirnuti svaki (član) beskonačnog u ograničenom vremenu (ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ)" (*Aristotle 23*, 233 a 23). Filopon pak u komentaru dodaje da je ova pretpostavka o ograničenom vremenu nužna „jer nema kretanja u beskonačnom vremenu (οὐδὲν γὰρ ἐν τῷ ἀπείρῳ χρόνῳ κινεῖται)" (*Philoponus*, 81. 14–15). Kad je *Ahil* u pitanju, tu se preko *najbržeg* i *najsporijeg* brzina *eksplicitno* uvodi u igru.

Ključnu tačku u oba dokaza, bez obzira kako prezentiramo *Dihotomiju*, čini okolnost da je nemoguće savladati beskonačnost (beskonačni broj rastojanja) korak po korak. Pošto bi *savladati nešto* značilo *okončati* jedan proces izvršivši zadatak, to se utoliko ukoliko se, dakle, radi o okončanom procesu, uvodi u igru *ograničeno vreme*. Filopon je to malo nezgodno izrazio tvrdeći da „nema kretanja u beskonačnom (neograničenom) vremenu". Vreme kretanja se, svakako, ne mora ograničiti, ali *obavljen proces – dospeće – implicira* da je vreme kretanja o kojem je reč proteklo, da je utoliko bilo ograničeno. S obzirom na *kontekst*, dakle, u kojem se radi o *problemu dospeća*, kretanje o kojem je reč odvija se u *ograničenom vremenu* (ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ).

c) Strela

U vezi sa trećom kinematičkom aporijom, koja se naziva *Leteća strela* (ἡ ὀϊστὸς φερομένη) (vidi *Aristotle 2*, 239 b 30)[6] ili prosto *Strela*, izgrađen je jedan pravi mit, koji su, bez obzira koliko se pozivali na Aristotela, u stvari, stvorili interpretatori, prepravljači teksta i filozofi. Reč je o tezi da se u *Streli* vreme navodno javlja, ili nužno pretpostavlja, kao kvantizovano.

Glavna teškoća u interpretaciji *Strele* je u sažetosti argumenta kako ga predstavlja Aristotel, i za njim ostali komentatori, zbog čega je potrebno tražiti premise i skrivene međukorake. Ali, pri tom nije neophodno menjati tekst Bekerovog izdanja *Fizike*, koji je inače u skladu s onim što nam kažu antički komentatori.

Eksplicirana premisa je da je sve, pa i strela koja navodno leti, uvek onoliko koliko je, ili, drukčije izraženo, da strela uvek, u bilo kojem trenutku, zauzima prostor koji joj je jednak. Da bi promenila položaj, ili mesto, strela bi morala da savlada rastojanje između dva mesta, a tada ne bi zauzimala prostor koji joj je jednak i utoliko ne bi bila onolika kolika je. Doduše, moglo bi se reći da ona u *međutrenucima* upravo zauzima prostor koji joj je jednak, no tu bi se Zenon verovatno pozivao na okolnost da se međupoložajima koji odgovaraju međutrenucima rastojanje ne može prekriti, kao što smo videli da se od nečega bez veličine ništa ne može sastaviti; odgovarajuća mesta kod Epifanija i Diogena Laertija ukazuju na ovakvo upotpunjenje argumenta.

Skoro je neverovatno kako bezmalo svi istraživači i prevodioci[7] nalaze da berlinski tekst Aristotelove *Fizike* – na jedom mestu (239 b 5–7) gde se, ne znamo koliko verodostojno, prepričava argument – mora da se menja, da nešto mora da se izbacuje ili ubacuje, da bi dobio poentu ili čak uopšte bio smislen[8].

Tekst u berlinskom izdanju glasi: εἰ γὰρ ἀεί, ἠρεμεῖ πᾶν ἢ κινεῖται ὅταν ᾖ κατὰ τὸ ἴσον, ἔστιν δ' ἀεὶ τὸ φερόμενον ἐν τῷ νῦν, ἀκίνητον τὴν φερομένην εἶναι ὀϊστόν.

Ako νῦν („sada") prevedemo sa „trenutak" (što za sada ne mora da bude sporno), jedinu teškoću u prevođenju može da stvori ὅταν ᾖ κατὰ τὸ ἴσον. To se uobičajeno prevodi sa „kad je u prostoru koji mu je jednak" (*Zeller*, str. 599–600) ili „kad zauzima prostor koji mu je jednak" (vidi *Vlastos 1*, str. 3, nap. 2). To se možda može prevesti i sa „kad je na jednom istom mestu". No τόπος se nigde u okolini ne pojavljuje, i ako izbegnemo da upotrebimo „prostor" ili „mesto", onda nije jasno šta je to što je predmetu o kojem se govori jednako. Sasvim je moguće da se želi reći da je on sam onoliki koliki je.

Pošto daljih spornih mesta nema, evo prevoda: „Jer ako je uvek, kaže on (Zenon), sve ili u miru ili u kretanju kad zauzima prostor koji mu je jednak

(odnosno kad je na jednom istom mestu, odnosno kad je onoliko koliko je) i ako leteća strela uvek jeste u nekom trenutku, onda je ona nepokretna".

Ovaj tekst je, dakle, proglašen nepotpunim, nejasnim ili besmislenim, i nad njim su vršene razne intervencije. Pogledajmo najpoznatije. Prvo je Celer (*Zeller*, str. 599–600) izbacio ἢ κινεῖται, u čemu ga je sledio Barnet. Tako je nastala verzija koju imamo u prevodu *Fizike* Viksteda i Kornforda (vidi *Aristotle 22*, str. 181). Njima nasuprot, neki su mislili da ne treba izbacivati ἢ κινεῖται, već da, naprotiv, posle ovoga nešto nedostaje, pa je tako Dils (vidi *DK*, 29 A 27) ubacio οὐδὲν δὲ κινεῖται, u čemu ga je sledio Li (vidi *Lee*, str. 79–80). Alternativno ovome, Kornford je predložio καὶ μὴ κινεῖται (vidi *Aristotle 22*, str. 180, nap. 1). Tako smo u jednom slučaju dobili da Zenon pretpostavlja samo da je nešto uvek u miru kad zauzima prostor koji mu je jednak, dok se u drugom slučaju ostavlja pretpostavka da je sve uopšte uvek u miru ili kretanju, ali je sledujući *uslov* promenjen u *tvrdnju* da ništa nije u kretanju kad zauzima prostor koji mu je jednak.

Kad se ima u vidu da je ovo *sve* što nam Aristotel o argumentu direktno kaže – pošto posle ove rečenice samo sledi kratak komentar od jedne opet dvosmislene rečenice – mislim da je očigledno da „popravljen" tekst nije neposredno jasan, već da zahteva iterpretaciju. Inače, kod Filipona (*Philiponus*, 816. 30) se tekst ne razlikuje od „nepopravljenog" Aristotelovog, a kod Simplikija (*Simplicius 2*, 1015. 28) je s njim potpuno u skladu.

Celer (*Zeller*, str. 600) i za njim Barnet (*Burnet*, str. 319) i Li još su dopunjavali tekst, dodajući posle ἐν τῷ νῦν još κατὰ τὸ ἴσον, čime se za ono što leti ne tvrdi samo da uvek jeste u nekom trenutku, već i da pri tom zauzima prostor koji mu je jednak.

Sva ova prepravljanja vode na kraju jednoj interpretaciji koja je svakako koherentna i smislena, a koju je Li (vidi *Lee*, str. 81) rezimirao sledećom analizom argumenata:

(1) sve mora biti ili u miru ili u kretanju (ova premisa je eksplicitno sačuvana ako se ἢ κινεῖται ne izbaci, po Celerovom predlogu, onda se mora smatrati prećutnom da bi se zaključak mogao izvesti);
(2) ništa što zauzima prostor koji mu je jednak (κατὰ τὸ ἴσον), nije u kretanju (ova se premisa dobija kada se ubaci οὐδὲν δὲ κινεῖται);
(3) leteća strela je uvek ἐν τῷ νῦν (u trenutku);
(4) što god je ἐν τῷ νῦν je κατὰ τὸ ἴσον (ovo je dobijeno ubacivanjem κατὰ τὸ ἴσον);
(5) stoga, leteća strela je κατὰ τὸ ἴσον (naime, iz (3) i (4));
(6) i tako (pomoću (2)), ona nije u kretanju;
(7) stoga (pomoću (1)), leteća strela je u miru.

Ono što u ovako rekonstruisanom dokazu bode oči jeste asimetrija u drugoj i trećoj premisi. Dok se u (3) eksplicitno tvrdi da je strela koja se kreće uvek ἐν τῷ νῦν, iz (2) (koje je dobijeno prepravljanjem teksta) se običnom konverzijom dobija da ono što se kreće, pa dakle i strela, ne može biti κατὰ τὸ ἴσον. Zahvaljujući ovoj asimetriji se (uz pomoć (4), koje je takođe nastalo prepravljanjem teksta) i dobija paradoksalan zaključak u (6), odnosno (7).

Zašto bi ono što se kreće moralo, kad se vreme uzme u obzir, da bude u trenutku (ἐν τῷ νῦν), dok, kad se prostor uzme u obzir, ne bi smelo zauzimati jedan jedini prostor, prostor koji mu je jednak (κατὰ τὸ ἴσον)? Nema nikakvog odgovora, osim uverenja popravljača teksta, zašto je u ovoj Zenonovoj aporiji vreme kvantizovano, dok prostor nije. Li otvoreno kaže da „u bilo kojem pokušaju rekonstrukcije teksta moramo da se rukovodimo time (opštom formom argumenta) da bismo od detalja načinili smisao" (*Lee*, str. 79). A za njega „(3) jasno zavisi od onog što, kako Aristotel pokazuje, predstavlja pretpostavku celog argumenta, naime da je vreme sastavljeno od atomskih 'sada', odnosno trenutaka" (*ibid.*, str. 81–82).

Dakle, na kraju se sve radi za Aristotelovu stvar. Ali, pogledajmo šta to Aristotel, osim sporne rečenice u kojoj navodi, ili sažima, Zenonov dokaz, još kaže. On dodaje da je ono što Zenon kaže pogrešno „jer se vreme ne sastoji od trenutaka koji su nedeljivi, kao što se od ovakvih (nedeljivih) nijedna veličina (ne sastoji) (οὐ γὰρ συγκεῖται ὁ χρόνος ἐκ τῶν νῦν τῶν ἀδιαιρέτων)" (*Aristotle 22*, 239 b 8–9). Nešto kasnije on to isto ponavlja, navodeći ovog puta da Zenonov zaključak sledi na osnovu prihvatanja (τὸ λαμβάνειν) toga da se „vreme sastoji iz trenutaka (τὸν χρόνον συγκεῖσθαι ἐκ τῶν νῦν)" (*ibid.*, 239 b 31).

Dve stvari je važno uočiti u vezi sa ovim Aristotelovim komentarom. Prvo, „sada koje je nedeljivo" ne mora nužno biti neki „kvant vremena", neko „sada koje je nedeljivo iako traje", „vremenska infinitezimala" ili nešto slično, jer ono što Aristotel kaže stoji i kad je „sada" shvaćeno po analogiji sa geometrijskom tačkom. S tim u vezi treba primetiti da se u 239 b 31 pojavljuje samo νῦν; nikakva nedeljivost se ne pominje, a νῦν je za Aristotela *inače* vremenski analogon za στιγμή, i on baš ovaj νῦν u tom smislu suprotstavlja trenutku kao ἐξαίφνης, interpretirajući ἐξαίφνης, kao neopazivo vreme koje ipak ima trajanje, koje je protežno a „neopazivo zbog kratke protežnosti (τὸ ἐν ἀναισθήτῳ χρόνῳ διὰ μικρότητα ἐκστάν)" (*Aristotle 21*, 222 b 15). I *drugo, nezavisno* od toga u kojem smislu je Aristotel upotrebio νῦν na navedenim mestima, on je samo izveo da argument *pretpostavlja* sastavljenost vremena iz trenutaka („sada"), i na tome osnivao pobijanje, a nama ostaje da zaključimo da li je, i ako jeste u kojem smislu, Zenon mogao, ili morao, to imati u vidu u svom argumentu. Šta ćemo zaključiti opet zavisi od interpretacije i nije zajemčeno Aristotelovim tekstom. Prelazimo sada na sasvim drugačiju interpretaciju celog dokaza.

Pogledajmo, za početak, zašto Li misli da je sporno mesto u berlinskom izdanju, koje je toliko prepravljano, čak besmisleno ako ostavimo tekst, onakav kakav je. On daje vrlo otvoreno i jasno obrazloženje. Rečenicu „sve je ili u miru ili u kretanju kad zauzima prostor koji mu je jednak" on shvata kao da znači „sve je ili u miru ili u kretanju kad je u miru" (vidi *Lee*, str. 79). On, dakle, „zauzima prostor koji mu je jednak" *odmah* i *bez daljeg* zamenjuje sa „je u miru". Ali nije li Zenon, ako bismo poverovali u verodostojnost postojećeg teksta, izričući navodno besmislenu rečenicu mogao misliti i nameravati da izrekne tautologiju? Ovde može postati važno ono κατὰ τὸ ἴσον, koje i onako zvuči suviše aristotelijanski, a iza kojeg se tek krije Zenonova izvorna namera. Zenonu se moglo činiti očiglednim, ili je to barem mogla biti pretpostavka u rogu neke dileme, da je sve uvek onoliko koliko je, ili da je tamo gde je. Utoliko je, ako i zadržimo „prostor" u prevodu onog ὅταν ᾖ κατὰ τὸ ἴσον, on mogao pretpostaviti da nešto mora zauzimati prostor koji je tačno toliki koliko je to nešto. Ako umesto „prostor" u prevodu, koristimo „mesto", onda bi ono što je Zenon mogao imati u vidu bilo to da se sve uvek nalazi tačno na jednom određenom mestu, koje je tačno toliko koliko je to nešto. On je, pod ovom pretpostavkom, bez obzira da li očiglednom i bezuslovnom ili možda uslovnom u rogu neke dileme, mogao izreći *tautologiju*, naime, da to, pošto po pretpostavci uvek važi, važi i za tela u miru i za tela u kretanju, odnosno bilo za tela u miru bilo za tela u kretanju, kako stoji u tekstu. Dakle, pod pretpostavkom da se tela ili kreću ili miruju i da su tačno onolika kolika su, ili tačno tamo gde su bez obzira kretala se ili ne. To je sasvim mogući smisao one „besmislene" rečenice iz berlinskog izdanja.

Pogledajamo sad kako argument nastavlja pod pretpostavkom ovako shvaćene rečenice. Kaže se, ili se *potpuno simetrično* pretpostavlja, da je strela uvek u nekom trenutku (ἐν τῷ νῦν). Ovo, naime, možemo razumeti na način analogan načinu na koji smo razumeli ὅταν ᾖ κατὰ τὸ ἴσον. Kao što je sve onoliko koliko je, ili tamo gde je, ili u jednom određenom prostoru ili na određenom mestu, tako je sve, pa i strela, uvek u sadašnjosti, u jednom određenom trenutku, svakako ne u dva tenutka. Κατὰ τὸ ἴσον, koje popravljači teksta ubacuju na ovom mestu (Celer, Burnet i Li), nije potrebno da bi se ovaj korak u argumentu razumeo.

Mora se priznati da nije lako videti kako sad zaključak o nužnom mirovanju strele sledi iz prethodnih premisa. Obratimo, za početak, pažnju na jednu rečcu u prvoj premisi: ἀεί. Ovo sam prevodio sa „uvek". Moguće je da se ἀεί shvati modalno, naime, kao da se tvrdi da je *nužno* da je telo onoliko koliko je, ili tamo gde je, ili da je u određenom prostoru ili na određenom mestu. Ali moguće je da se ἀεί shvati baš *vremenski*, naime kao da znači „u svakom trenutku".

Ostaje još problem opsega, odnosno raspodele kvantifikatora. Nema razloga da mislimo da je Zenon hteo da tvrdi da je *u svim* trenucima telo tamo gde je i u jednom, odnosno da je uvek na istom mestu, ili u istom prostoru, jer tada bi zaključak o mirovanju bio *trivijalno istinit* i za njega ne bi bila potrebna dedukcija iz više od jedine premise. Doseg kvantifikatora, međutim, može biti takav da se tvrdi da u *svakom* od trenutaka telo mora biti onoliko koliko je, ili tamo gde je, ili zauzimati određen prostor i mesto. Time kretanje *još uvek nije isključeno*, jer se dozvoljava da je u *različitim trenucima* telo na *različitim mestima*, iako je u svakom od njih na jednom, tačno određenom, koje je jednako njemu samom.

Zenon se mogao zapitati, a da to pitanje bude prećutano u Aristotelovom tekstu, „*kada* je telo moglo promeniti mesto?" i zaključiti da se to nije imalo kad desiti, jer ako je telo uvek ἐν τῷ νῦν, kako kaže druga premisa, onda međuvremena, u kojem bi se mesto menjalo – nema. To što međuvremena u kojem bi telo promenilo mesto nema, on je mogao smatrati ekvivalentnim sa zaključkom da telo (strela) mora mirovati i na taj način bi zaključak takoreći direktno sledio iz gornje dve premise.

Rasel je (*Russell 5*, gl. 42, str. 347–348), sledeći Vajerštrasa, definisao kretanje tako da bi jedan ovakav Zenonov zaključak bio *non sequitur. Non sequitur* bi se sastojao u tome što nijednom premisom, kao ni njihovom konjunkcijom, nije isključeno da se kretanje *upravo sastoji u tome* da je telo u *različitim trenucima* na *različitim mestima* i da za kretanje *nikakvo međuvreme* nije potrebno. To je načelno tačno, ali postoji Ahilova peta u Raselovom rešenju i sasvim je moguće da je Zenon tako nešto imao u vidu i da je *imajući to u vidu* izveo zaključak koji je *navodni non sequitur*.

Baveći se Zenonovim dokazima protiv mnoštva videli smo da on govori o tački (iako za nju nema poseban izraz), i to o tački bez veličine, kao kandidatu za jedinicu mnoštva. Zenon je bio uveren da se od ovakvih tačaka ne može ništa sačiniti, ali on neke druge tačke kao kandidate ne razmatra. Osim toga, on je tvrdio da je rastojanje između dva dela (tela) beskonačno deljivo ako se deljenje jednom dopusti. Ako bi telo tebalo da se kreće u *smislu Raselove definicije*, onda se mnoštvo i deljenje već dopuštaju. Telo bi moralo da je na jednom *pa* na drugom mestu, dok *između toga*, shodno prvoj premisi koja govori o tome kako je sve uvek ὅταν ᾖ κατὰ τὸ ἴσον, ono ne bi moglo biti *u trenutku* (ἐν τῷ νῦν). Jedina šansa bi bila da ono, *ne budući* u međuvremenu u međuprostoru, *samo u raznim trenucima* bude na *raznim međumestima*. Ovo pak ne pomaže, jer međuprostori se umnožavaju a da se *nikad ne mogu popuniti*: ništa se ne sastoji iz tačaka, ni put iz položaja, upravo kako sam Aristotel kaže (*Aristotle 22*, 239 b 8–9).

I Epifanije (vidi *Lee*, str. 42) i Diogen Laertije (*Diogen*, IX 72) kažu da je Zenon dokazivao da se ono što se kreće (τὸ κινούμενον) „ne kreće ni na mestu gde je, ni na mestu gde nije (οὔτ' ἐν ᾧ ἔστι τόπῳ κινεῖται οὔτ' ἐν ᾧ μὴ ἔστι)". Šta znači drugi član alternacije, „ni na mestu gde nije"? Formulacija jeste malo čudna, ali upućuje na to da je Zenon činio upravo ono na šta sam maločas ukazao, naime, da je pobijao mogućnost da se rastojanje među mestima u kojima bi se telo navodno nalazilo savlada. Na *međurastojanju* telo *nije* (shodno prvoj premisi sa onog spornog mesta) utoliko što na njemu ne može biti u trenutku, a u njemu se ne može *ni kretati*, iz razloga koji Diogen i Epifanije ne navode, ali koji bismo na osnovu Zenonovih dokaza protiv mnoštva lako mogli da domislimo: i u međuvremenu bi telo koje se navodno kreće bilo u raznim trenucima u određenim položajima, nikad *između*, osim ako *pomešamo* razne trenutke, prošlost i sadašnjost, ili sadašnjost i budućnost. Rastojanje bi bilo savladano jedino kad bi se moglo *sastaviti iz* određenih mesta, no i to je nemoguće.

U ponuđenoj interpretaciji je *irelevantno* kako se shvati trenutak (νῦν), da li bez ekstenzije ili sa nekom, možda minimalnom, ekstenzijom. Važno je jedino da nema prostornih jedinica s minimalnom dužinom, koje možemo zvati *toponi*[9].A pod ovakvom pretpostavkom, kada je već irelevantno kako se trenutak shvati, verovatnije je da Zenon ni o vremenu nije razmišljao kao kvantizovanom, da nije imao u vidu nekakve *hronone*, mada odatle ne sledi da je pravio, poput Aristotela (vidi, na primer, *Aristotle 21*, 223 b), neke analogije kao što je analogija između tačke i trenutka.

d) Stadion

I poslednja kinematička aporija, zvana *Stadion*, nije nesporna u pogledu interpretacije. I tu je Aristotelov tekst menjan da bi se postiglo željeno čitanje. No za razliku od *Strele*, ove izmene u krajnjoj liniji ne utiču na glavnu poentu argumenta kako ju je razumeo Aristotel. To je povoljna okolnost. Ali priča se tu ne završava. S obzirom na *Stadion*, većina savremenih istraživača smatra da Aristotel uopšte nije ni shavtio Zenonovu poentu, i oni iza reči u *Fizici* traže skrivene premise koje bi argument učinile ne samo suptilnijim, već i Zenonovim.

Kao i obično, Aristotel je škrt na rečima kada formuliše argument, i ako je ovde nešto opširniji u ilustraciji koja potom sledi i u kojoj treba da se vidi u čemu se sastoji paralogizam (παραλογισμός) (*Aristotle 22*, 239 b 33 – 240 a 18).

Već na samom početku pojavljuju se teškoće oko prevođenja. Za četvrti dokaz Aristotel kaže da je περὶ τῶν...κινουμένων...ἴσων ὄγκων (*ibid.*, 239 b 33). Očigledno se govori o telima koja se kreću, ali kakva su ta tela, kako prevesti ἴσων ὄγκων? Mnogi prevodioci i interpretatori smatraju da je Zenon upotrebio reč ὄγκος jer je to bio tehnički termin (*Tannery 3*, str. 266, *Evelin*, str. 382–395, *Brochard*, str. 4, *Noël*, str. 107, *Gaye*, str. 106–116, *Burnet 1*, str. 319, nap. 4, *Aristotle 22*, uvodna Kornfordova beleška na strani 176, *Kirk i Raven*, str 291 i 196)[10]. Mi ćemo ὄγκος uzeti u netehničkom smislu: ono što se kreće (τὰ κινούμενα), o čemu se u dokazu govori, su tela jednakih masa (ἴσων ὄγκων), ili višestruka tela sa međusobno istim brojem istih sastavnih delova.

Tela se kreću na stadionu iz suprotnih smerova (ἐξ ἐναντίας) istom brzinom (ἴσῳ τάχει) i to jedno telo s kraja stadiona (ἀπὸ τέλους τοῦ σταδίου), a drugo od sredine (ἀπὸ μέσου) (*Aristotle 22*, 239 b 33).

Posle ovoga opisa Aristotel navodi još samo Zenonov zaključak koji treba da pokaže apsurdnost polaznih pretpostavki, a to je zaključak da će „polovina vremena biti jednaka dvostrukom (ἴσον εἶναι χρόνον τῷ διπλασίῳ τὸν ἥμισυν)“. Nije sasvim jasno da li se ovde želi reći kako proizilazi da je polovina proteklog vremena jednaka dvostrukom tom vremenu ($(1/2)t = 2t$), ili dvostrukoj polovini, to jest celom proteklom vremenu ($(1/2)t = 1t$). Mali je broj onih koji prevode na prvi način. Glavni zagovarač ovakvog načina bio je Gej (*Gaye*, str. 100–103), a u najnovije vreme Farli (*Furley 3*, str. 363).

U ovako predstavljenom argumentu pojavljuju se dva tela koja se na stadionu jedno prema drugom kreću. Da bi stvar ilustrovao i pokazao u čemu je greška koja omogućava paradoksalan zaključak, Aristotel uvodi i treće telo koje na stadionu miruje. Ovo treće telo nije neophodno u argumentu utoliko što sâm stadion može biti takvo treće telo. Tri tela Aristotel označava sa AA, BB i ΓΓ (*Aristotle 22*, 240 a 5). Očigledno on ih uzima kao dvočlana. Danas se u ilustracijama uzimaju četvorna (*Aristotle 22*, str. 185, *DK*, str. 254, *Lee*, str. 85) ili osmorna (vidi *Gaye*, str. 105) tela. Simplikije ukazuje da je jedino potrebno da broj jedinica bude paran (*Simplicius 2*, 1060. 23).

Nije sigurno da prema Aristotelovom tekstu položaj tela treba da bude onakav kako se uobičajeno predstavlja. Opet su potrebna izvesna dovijanja da bi se sve što Aristotel kaže učinilo saglasnim s takvim početnim položajem. Pošto poenta argumenta kako je razumeo Aristotel neće biti izmenjena, mi ćemo se, za promenu, poslužiti dijagramom antičkog komentatora Pakija iz *Naturalis auscultationis*, za koji je Biknel dokazivao da jedini odgovara Aristotelovom (vidi *Bicknell*, str. 41 i dalje)[11].

Prema Pakiju početni položaj tela, ako su četvorna, izgleda ovako:

```
      A A A A
B B B B →
        ← Γ Γ Γ Γ
```

Pošto se BBBB mimoiđe sa AAAA, tela su u sledećem (završnom) položaju:

```
      A A A A
              B B B B
Γ Γ Γ Γ
```

Da bi pokazao u čemu se sastoji paradoksalnost zaključka Biknel popunjava prazna mesta na stadionu. Mi ćemo ih popuniti „sigmama“, jednako velikim kao A, B i Γ:

σ	σ	σ	σ	A	A	A	A	σ	σ	σ	σ
σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	σ	B_4	B_3	B_2	B_1
σ	σ	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	σ	σ	σ	σ	σ	σ

Kada se uporede početni i (ovaj) završni položaj, onda je B_1 u odnosu na „alfe“ prešlo put 2A+4σ. međutim, da bi iz početnog položaja u odnosu na „game“:

B_4	B_3	B_2	B_1	σ	σ	σ	σ	σ	σ
σ	σ	σ	σ	σ	σ	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4

došlo u završni položaj:

				σ	σ	B_4	B_3	B_2	B_1
Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	σ	σ				

B_1 je najpre prošlo 2σ, zatim 4Γ, čime je tek bilo u položaju:

B_4	B_3	B_2	B_1
Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4

i onda je još moralo da pređe 6σ da bi došlo u završni položaj. Kako je A= Γ, to je 4A + 8σ = 2A + 4σ, to jest B_1 je kako s obzirom na kretanje duž „alfi“, odnosno „gamâ“, tako i s obzirom na kretanje van njih, prešlo za isto vreme različit put, ili, ako se pri ravnomernom kretanju dvostruki put mora preći za dvostruko vreme, $t = 2t$ ili $t/2 = t$.

Biknel zaključuje (*ibid.*, str. 44) da Aristotel paradoksalnost zaključka iskazuje prosto ne uzimajući u obzir kretanje van mimoilaženja, iako se i tu javlja dvojakost puta (8σ *i* 4σ), odnosno proteklog vremena, i da zato samo kaže da je B prošlo polovinu A-i, a u isto vreme sve Γ-e. Samo dok u prvom slučaju prolaženja on upotrebljava διεξεληλυθέναι (prolaziti (pored)) (*Aristotle 22*, 240 a 11), u drugom upotrebljava παρεληλυθέναι (*ibid.*, 240 a 14) (proći (i ostaviti za sobom)), jer u drugom slučaju, shodno dijagramima koje Biknel usvaja, B-e i Γ-e ostavljaju jedne druge iza sebe, između njih je praznina.

Kao premisu koja omogućava paradoksalan zaključak Aristotel navodi pretpostavku po kojoj telu treba isto vremena da istom brzinom prođe pored tela koje se kreće kao i pored tela koje je iste veličine kao prethodno samo što miruje (*ibid.*, 240 a 2–4).

Posle svega, jasno je da se četvrti Zenonov dokaz protiv kretanja kako ga prezentira i razume Aristotel, a s tim se slažu i svi antički komentatori[12], koristi okolnošću što je kretanje, ako ga ima, relativno. Simplikije jasno razdvaja paradoksalni zaključak da je „ista veličina dvostruka i polovična (μέγεθος τὸ αὐτὸ εἶναι διπλάσιόν τε καὶ ἥμισυ)“ (*Simplicius 2*, 1018. 28) od zaključka da je „isto vreme dvostruko i polovično (χρόνον τὸν αὐτὸν διπλάσιόν τε καὶ ἥμισυν)“ (*ibid.*,1019. 1), gde se *oba* izvode iz istog argumenta (*ibid.*, 1018. 28 ... 1019. 1): συμβήσεται οὖν καὶ ... καὶ...

Možemo na ovom mestu pokušati da razrešimo spor između Geja i ostalih prevodioca i interpretatora oko toga da li je paradoksalni zaključak zaključak da je $t/2 = 2t$ ili samo da je $t/2 = t$, odnosno $t = 2t$, proširujući na odgovarajući način pitanje i na prostornu veličinu (μέγεθος). Mislim da je tajna u tome što se u argumentu mogu izvesti *dva* zaključka u pogledu vremena. Ako se vreme kretanja tela BB odredi s obzirom na prolaženje mimo AA, onda je s obzirom da je za *to* vreme ono s obzirom na ΓΓ prešlo dvostruki put, $t = 2t$. No ako se vreme kretanja BB odredi s obzirom na to da je ono prošlo ΓΓ, onda je, s obzirom na to da je za *to* vreme ono s obzirom na AA prešlo pola puta, $t=t/2$. Zaključak, kako ga Gej shvata, da se $t/2=2t$, u stvari, dobija po tranzitivnosti iz prethodna dva. Ako je $t=2t$ i $t=t/2$, onda je $t/2=2t$. Sasvim je mogućno da sporna formulacija ἴσον χρόνον ἅμα διπλάσιόν τε καὶ ἥμισυ εἶναι (*Simplicius 2, loc. cit.*) izražava taj, po tranzitivnosti sažeti zaključak. Slično tome bi bilo, $2s=s/2$, gde je *s* put koji se u kretanju prelazi.

Procenu vrednosti Zenonovog argumenta kako ga predstavlja Aristotel počećemo komentarom ovog poslednjeg tranzitivnog zaključka. Pretpostavimo da je Gej u pravu i da su Zenon i Aristotel u argumentu izveli iz $t=2t$ i $t=t/2$: $t/2=2t$. Moglo bi se primetiti da čak i da su pojedinačni zaključci u redu, ne može da se izvede $t/2=2t$, jer su određenja s obzirom na AA i ΓΓ *korelativna*, tako da su i polovina i dvostrukost korelativne; reći da je vreme u kojem se pređe ΓΓ polovina vremena u kojem se prešlo AA *isto* je što i reći da je vreme u kojem se pređe AA dvostruko vreme u kojem se prešlo ΓΓ, ili, ako se paradoksalnost gleda s obzirom na put, u istom vremenu pređen je različit put *samo utoliko* što je dvostruki put AA pređen s obzirom na ΓΓ dostruki put polovine puta pređenog s obzirom na AA.

Ako se ova primedba uvaži, zaključak da je $t/2=2t$ može se ipak lako dobiti kad se uvede četvrto telo, ΔΔ, i time izbegne primedba o korelativnosti. Tada je moguće da vreme u kojem se prelazi ΔΔ bude dvostruko kraće od vremena prelaženja ΓΓ, a vreme u kojem se prelazi ΓΓ dvostruko kraće od vremena u kojem se prelazi AA.

Opšta pouka je da se ne može *jednosmisleno i određeno* reći koji je put neko telo prešlo dok se kretalo kao što se ne može *jednosmisleno i određeno* reći koliko je vremena pri tom proteklo. Za razliku od većine savremenih istraživača koji slede takozvanu francusku interpretaciju, koju ćemo uskoro razmotriti, mislim da je upravo ovo bila poenta Zenonovog argumenta koja je

iskorišćena u svođenju na apsurd hipoteze o postojanju kretanja i pri tom ne mislim da se radi o trivijalnoj grešci koju je Zenon napravio.

Nisu samo naivne predstave njegovih savremenika bile ono što je Zenon ovim svojim dokazom mogao uzdrmati (što misli But – vidi *Booth*, str. 194–195). U dokazu se ne javlja samo relativnost kretanja s kojom smo se svi sreli vozeći se kolima. Radi se o relativnosti *prostornih i vremenskih intervala*. Ispostavlja se da pitanja „koji ste put prešli krećući se?“ i „koliko je vremena proteklo pri tom?“ *nisu dobro definisana* čak i ako se *fiksira jedinica mere*. Jer, kao što smo videli i s obzirom na određenu meru σ, za BB nije pogrešno reći ni da je prešlo put 4A+8σ = 12σ, ni da je prešlo put 2A+4σ = 6σ. A ako se proteklo vreme određuje preko toga koliko je u tom jednom kretanju pređeno tih jedinica σ, kao što se vreme inače meri na satu, onda je jasno da ni odgovor na pitanje o proteklom vremenu nije jednoznačan i pri fiksiranoj meri. Najzad, ako brzina direktno srazmerno zavisi od puta pređenog u vremenu, i obrnuto srazmerno od vremena u kojem je pređen put, onda, naravno, ni odgovor o brzini nije jednosmisleno određen i pri fiksiranim jedinicama mere.

Aristotelov odgovor, koji teškoću pokušava da reši pozivanjem na razliku između mimoilaženja telâ u kretanju i mimoilaženja telâ od kojih jedno miruje, samo napola rešava stvar. Jer on *pretpostavlja definitivnost* razlike u pogledu mirovanja i kretanja tela, čime se, onda, spasava ideja o *jednoznačnosti* prostornih i vremenskih veličina, odnosno – pitanja o tome koji je put pređen i koliko je vremena proteklo ostaju jednoznačna. Relativnost pak postaje nešto *akcidentalno* i uvek se iskazi o *relativnim dužinama*, koji ne dopuštaju *tranzitivnost*, mogu prevesti u iskaze o *apsolutnim* intervalima, ako se kao referenca uzmu *samo* mirujuća tela. Zenonov dokaz pak dozvoljava da se *sensu stricto* relativiše *sama ova razlika* između kretanja i mirovanja; u dokazu se može uzeti da BB miruje i da se zato AA i ΓΓ kreću, ili da ΓΓ miruje a da se AA i BB kreću. Poenta je da pitanja o pređenom putu i proteklom vremenu ostaju *neodređena*, odnosno dozvoljavaju *različite odgovore*.

Ako neko, dakle, prihvati ideju o apsolutnom prostoru i vremenu a ne povlasti, kao što to čini Aristotel, jedan sistem kao referencijalni, onda *Stadion* pokazuje da je kretanje nemoguće, jer se ispostavlja da pitanja koja *bi morala* biti jednoznačna to nisu. *Utoliko* je i *Stadion reductio ad absurdum* hipoteze o postojanju kretanja. Ceo dokaz veoma liči na dokaz protiv mnoštva B 3, kako smo ga interpretirali, gde se naime pretpostavlja da stvarî mora biti onoliko koliko ih je, odnosno određeno mnogo ili na *Strelu*, gde se pretpostavlja da je sve uvek tamo gde je, ili da je onoliko koliko je.

Misleći, međutim, da je dokaz *Stadion* onako kako ga je predstavio Aristotel suviše trivijalno pogrešan da bi mogao biti Zenonov, francuska škola istraživača na čelu sa Tanerijem (vidi *Tannery 3*, *Evelin*, *Brochard*, *Noël*), a sleđena od većine kasnijih istraživača, optužila je Aristotela za nerazumevanje argumenta, koji inače izvorno treba da je bio vrlo suptilan. Mada argument i u francuskoj interpretaciji jeste suptilan, ne mislim da je Zenonov.

Po francuskoj interpretaciji, četiri argumenta protiv kretanja konstruisana su po izvesnoj shemi. Različiti autori nude različite sheme (o tome vidi *Lee*, str. 102–106, *Booth 3*, str. 195), ali im je zajedničko to što se u četvrtom dokazu, za razliku od prva dva (ili prva tri), prostor po pretpostavci kvantizuje. Četvrti dokaz treba da je uperen protiv nekakvog prostornog atomizma.

Možemo se složiti s Butom (vidi *Booth 3*, *loc. cit.*) u tome da ako neko postojanje sheme želi da koristi kao u izvesnoj interpretaciji, onda mora dati jaku i, naglasio bih, nezavisnu evidenciju u prilog postojanju takve sheme.

Tanerijeva hipoteza da je ὄγκος pitagorejski tehnički termin (*Tannery 3*, str. 266) ničim nije potvrđena. Pozivanje na činjenicu, na kojoj naročito

insisitira Gej (vidi *Gaye*, str. 109), da je Zenon voleo pitoreskno predstavljanje svojih argumenata, dok je ovde upotrebio jedan „bezbojan" termin (ὄγκος), ne samo da je nedovoljno da bi se dokazala uperenost dokaza protiv nekih određenih (ili nekog određenog) filozofa koji su upotrebljavali ὄγκος, već je, rekao bih, i samo po sebi sumnjivo. U dokazima protiv mnoštva, recimo, Zenon nije baš mnogo pitoreskan. Gej, inače, ne misli da je ὄγκος pitagorejski termin. On misli da je četvrti dokaz uperen protiv Empedoklovog atomizma, jer je Empedokle upotrebljavao ὄγκος (vidi *Gaye*, str. 109). No, sasvim je neizvesno da li je ὄγκος nedeljiva jedinica, a i ako jeste, teško da je jedinica u smislu prostornog minimuma. Za hipotezu da je ὄγκος kod Empedokla nedeljivo izvor je Aristotel, a u *Stadionu*, i na to naročito treba ukazati jer se zaobilazi, on sâm ὄγκος sigurno ne razumeva u smislu minimalne jedinice. On, naime, u ilustraciji koju daje kaže za BB, kao i ΓΓ, da su ὄγκοι koji su isti po broju i veličini (ἴσοι τὸν ἀριθμὸν … καὶ τὸ μέγεθος) (*Aristotle 22*, 240 a 7–8) kao AA. Čim se veličini dozvoljava da inače u ovakvim slučajevima varira i čim se kao uslov pominje samo jednakost veličine, ne radi se o nečemu što je minimalne veličine. Pouzdani Aristotelov učenik Eudem ove mase (ὄγκοι) zove kockama (κύβοι) (vidi *Simplicius 2*, 1016. 24–25) Čak i ako bi ὄγκοι bili nedeljivi u nekom fizičkom smislu (u smislu u kojem su nedeljivi atomi Leukipa i Demokrita – up. dole, § 46), oni ne bi bili minimalni u smislu u kojem bi to značilo pretpostavljanje *topona* (up. dole, §§ 49, 50), i utoliko sve što nam iz antičke literature stoji na raspolaganju ide protiv francuske interpretacije, koja kao metu napada u četvrtoj aporiji uzima pretpostavku o prostornim ili geometrijskim minimalnim veličinama. Francuska interpretacija je francuska konstrukcija.

Ni ovde, kao ni ranije, nema razloga da pripišemo Zenonu napad na nekakav atomizam ili teoriju o infinitezimalama. Ali, napuštajući pitanje istorijske verodostojnosti, pogledajmo kako izgleda francuska varijacija *Stadiona* na Zenonovu temu.

Neka svaki od delova AAAA, BBBB i CCCC zauzima po jedan minimalni prostorni deo, *topon*, i to tako da između svaka dva A-a, dva B-a i dva C-a nema *topona*, i neka su četverci postavljeni kao na slici:

```
        A A A A
B B B B →
           ← C C C C
```

Neka se BBBB i CCCC kreću u smerovima indiciranim strelicama. Posle izvesnog vremena, uzmimo kao prvu varijantu da je i vreme kvantizovano, tela će zauzeti sledeći položaj:

```
A A A A
B B B B
C C C C
```

ali će u prvom *hrononu* ili BBBB i CCCC biti u položaju:

```
B B B B
      C C C C
```

ili će se AAAA, BBBB i CCCC naći u položaju:

```
  A A A A
B B B B
    C C C C
```

Obe su mogućnosti, međutim neprihvatljive. U prvom bi slučaju proizišlo da su se – posmatrano prema AAAA: BBBB i CCCC pomerili za *pola topona*, što je nemoguće shodno definiciji *topona*, dok bi prihvatanje druge mogućnosti značilo da se prihvata da je položaj:

```
B B B B
      C C C C
```

preskočen, jer su se u prvom *hrononu* BBBB i CCCC odmah našli u položaju:

```
B B B B
    C C C C
```

Ako bi neko hteo da kvantizuje samo prostor, protiv toga se takođe može upotrebiti malopređašnji argument. Ili su se, sad ne

posle prvog *hronona* već posle *nekog vremena*, AAAA, BBBB i CCCC našli u položaju:

```
  A A A A
B B B B
      C C C C
```

što bi značilo da su se – posmatrano prema AAAA: BBBB i CCCC pomerili za *pola topona*, ili je, ukoliko su se posmatrano prema AAAA pomerili za po *topon*, položaj:

```
B B B B
      C C C C
```

preskočen.

39. Dokazi protiv mnoštva i kinematičke aporije

Kako u pojedinim tačkama, tako i u strukturi, postoje značajne sličnosti između Zenonovih dokaza protiv mnoštva i njegovih kinematičkih aporija.

Argument iz fragmenta B 3 u varijanti u kojoj ἄπειρον uzmemo u smislu „neodređeno (mnogo)“ treba da vodi paradoksalnosti utoliko što se ispostavlja da postojećih stvari nije određeno mnogo, ili što se ne može reći koliko delova ima neko ograničeno telo. Očigledno se pretpostavlja da reći da stvarî mora biti onoliko koliko ih ima, što deluje kao tautologija, ili da se jedno (ograničeno) telo sastoji iz onoliko delova iz koliko se sastoji, znači u isto vreme dopustiti da se traži neki određen, jednoznačan odgovor u pogledu broja stvari, odnosno delova. Analogno ovome, u četvrtoj kinematičkoj aporiji se pretpostavlja da je telo, ukoliko se kretalo, prešlo neki određen put i to za neko određeno vreme, a da to znači dopustiti da se traži neki određen, jednoznačan odgovor na pitanje o broju pređenih jedinica na putu i broju proteklih jedinica vremena, bez obzira na meru koja se usvoji. Ali, ispostavlja se da takav jednoznačan odgovor nije moguć ni u prvom ni u drugom slučaju.

Veza između argumenata koji se tiču mesta i *Strele* vrlo je zanimljiva. Sedeći na jednoj *terasi* ja sedim i u jednom *parku*, u jednom *beogradskom* parku, na jednom *svetskom* mestu. Ako bi se mesto *svelo samo* na najmanji prostor koji zauzimam, to jest na prostor koji je tačno toliki koliki sam ja kad sedim, šta bismo odgovorili na pitanje o mestu na kojem je „leteća strela" između ma koja dva trenutka za vreme svog navodnog leta? Ona ne bi bila *ni na kakvom* mestu.

Kao što smo ustanovili, postoji postoji veza i između isključenja tačke kao konstituenta mnoštva, i odbacivanja mogućnosti da se telo kreće kao što bi u različitim trenucima bilo na različitim mestima. Put koji treba preći ne satoji se iz niza položaja baš kao što se telo ne sastoji iz tačaka (niti linija i površina).

Najzad, očigledna je i veza između argumenta u fragmentu B 1 i prve i druge kinematičke aporije. U oba slučaja se pojavljuje nesavladiva a beskonačnost razmaka, samo što ona u prvom slučaju onemogućava da telo bude celovito ili ograničeno, čineći ga necelovitim ili beskonačno velikim, dok u drugom slučaju ona onemogućava da se igde stigne, odnosno da se stigne kornjača, odnosno ma kako spori trkač.

Koja je od ove dve grupe dokaza, dokaza protiv mnoštva i dokaza protiv kretanja, elementarnija, koja manje pretpostavlja, koja stvara veće teškoće? Mislim da u jednom značajnom smislu odgovori na sva ova pitanja idu u prilog kinematičkim aporijama.

Moglo bi se reći da kretanje pretpostavlja mnoštvo i da je moguć mnoštven svet bez kretanja, te da bi zato dokazi protiv mnoštva trebalo da budu elementarniji. Ali upravo se isti razlog

može navesti u prilog prioritetnosti kinematičkih aporija, jer πρὸς ἡμᾶς prvi korak u destrukciji sveta koji opažamo predstavlja ukidanje kretanja. Ukidanje mnoštva je za početak „prejak" dokaz, jer ukidanje mnoštva *eo ipso* ukida kretanje. Moguće je, međutim, da mnoštven svet nije nemoguć a da svet u kojem bi trebalo da ima kretanja to bude.

Dokazi protiv kretanja su i *operativniji*, i zato šokantniji, jer se kod nekih maltene mogu predočiti *empirijske situacije* (up. §§ 20. 21) u kojima, recimo, učesnici u trci (Ahil i Zevs) ukoliko učine ono što se uobičajeno smatra očigledno mogućim (stignu na cilj) *samim činom* učine i nešto paradoksalno (zaustave se pri tom beskonačni broj puta ili doslovno izbroje beskonačnost kardinalnosti $\aleph_0$).

Prednost koja pripada kinematičkim aporijama s obzirom na obaveze koje se preuzimaju pretpostavkama koje su u dokazima neophodne, kao i s obzirom na operativnost i šokantnost, može se naročito dobro pokazati pozivanjem na vrstu beskonačnosti u onim slučajevima u kojima se u odgavarajućim argumentima u dokazima protiv mnoštva i dokazima protiv kretanja koristi okolnost da se deoba može neograničeno produžavati. U kinematičkim aporijama je dovoljno pustiti da se ta deoba neograničeno vrši, dovoljno je, naime, iskoristiti dinamičku beskonačnost i navodno ograničen put koji se čini savladivim učiniti nesavladivim, ili savladivim po cenu vrlo paradoksalnih posledica, kao što bi bila posledica da je beskonačnost savladana korak po korak. U odgovarajućim dokazima protiv mnoštva se ili ne može stići dalje od zaključka o neodređenosti delova i broja delova, ako se, naime, kao u jednom tumačenju B 3, ostane na dinamičkoj beskonačnosti ili se, da bi se, kao u B 1, dokazala beskonačna veličina ograničenog tela, mora od mogućnosti neograničenog produžavanja deobe preći na aktuelnu, statičku beskonačnost delova, a i tada zaključak deluje manje šokantan, jer *prima facie* ograničenost tela i njegova beskonačnost deluju manje neusaglasivi nego savladivost ograničenog puta i nesavladivost beskonačnog broja njegovih deonica.

Iako teškoće u koje nas vode dokazi protiv mnoštva i dokazi protiv kretanja nisu takve da bi zadovoljavajući izlaz iz jednih odmah značio i zadovoljavajući izlaz iz drugih, moglo bi se očekivati da zadovoljavajući izlaz iz jednih *sugeriše* strategiju za izlaženje iz drugih. S obzirom na to da kinematičke aporije s manje obaveza otvaraju veće teškoće, možemo očekivati i da bi neki zadovoljavajući izlaz iz ovih teškoća dao više izgleda za svekoliko razrešenje, nego što bi obrnuto bilo slučaj. Da nam, zaista, mnoga pobijanja Zenonovih dokaza protiv mnoštva ni najmanje ne pomažu da razrešimo kinematičke aporije, videćemo uskoro na mnogim primerima.

40. Opšti rezultat Zenonove negativne dijalektike

Prihvatajući Hegelov izraz (*Hegel 3*, II, str. 62) Zenonovu dijalektiku zovemo negativnom po njenom „negativnom" rezultatu. Opšti rezultat Zenonovih dijalektičkih dokaza bio bi da nas je, prihvatanje tvrdnje da ima mnoštva i/ili kretanja obavezuje na prihvatanje međusobno protivrečnih iskaza. Pod opštom pretpostavkom da prihvatamo načelo neprotivrečnosti ovaj bi rezultat, u stvari, značio da ne smemo prihvatiti postojanje mnoštva i kretanja.

Međutim, izlažući ove dokaze mi smo videli da oni obično imaju nekoliko koraka i da se zasnivaju na raznim, kadšto ekspliciranim ali najčešće neekspliciranim pretpostavkama, bez kojih se paradoksalan zaključak, to jest zaključak koji sadrži međusobno protivrečne tvrdnje, ne bi mogao izvesti. Neke od njih deluju sasvim nesporno, ali ima i takvih, kao što će nam već istorija

pokazati, koje su nekima bile sumnjive ili neobavezujuće. Na odbacivanju ovakvih pretpostavki zasnivala su se razna pobijanja Zenonovih šokantnih zaključaka. No mi ćemo unutar ovog dela koji se odnosi na *negativnu dijalektiku* razmotriti samo one filozofske reakcije koje uz prihvatanje *neograničenog važenja načela neprotivrečnosti* prihvataju opšti rezultat negativne dijalektike.

41. Reakcije koje prihvataju opšti rezultat negativne dijalektike

Šta da čini čovek koji poput Vitroua zaključi da su *Dihotomija* i *Ahil* „istinski paradoksi koji sadrže definitivne logičke antinomije" (*Whitrow 1*, str. 152), ako pri tom prihvata načelo neprotivrečnosti? Da li je neophodno da prihvati da kretanja nema?

U izvesnom smislu, svakako, nije neophodno da se od prihvatanja *zaključka* da je kretanje nemoguće napravi korak do uverenja da kretanja nema. Antisten (vidi *DK*, 29 A 15) se prošetao da bi time uverio sagovornike da kretanja ipak ima. Na taj način se može sprečiti korak ka neprihvatanju postojanja kretanja. Ali, izgleda da je u slučaju ovakve reakcije neophodno priznati da se *ne može razumeti* kako je kretanje moguće, iako se *veruje* da ga ima. Parafrazirajući poznatu izreku koja se pripisuje Tertulijanu, možemo reći da onaj ko se ovako ponaša veruje u nešto iako je to u šta veruje apsurdno.

U manje napetoj situaciji od ovakvog *vernika* našao bi se *skeptik* koji bi zaključak negativne dijalektike, koji mu je prihvatljiv, interpretirao strogo ograničeno i usmereno isključivo *ad hominem*. On bi se, naime, mogao ograničiti na to da *on lično* ne vidi kako bi kretanje bilo moguće i to s obzirom na ponuđene dokaze, ali ne bi tvrdio, ili bi se uzdržao da tvrdi (ἐποχή) da je mogućnost kretanja u principu nešto apsurdno. Pomenute dokaze on bi mogao uzeti kao ilustraciju krhkosti ljudskog znanja i nepouzdanosti naizgled pouzdanih zaključivanja, upravo zbog nesaglasnosti između onoga do čega smo došli jednim zaključivanjem i onoga u šta nas čula i svakodnevni život uveravaju. Možda je Zenon bio neki ovakav skeptik, mada se ja nisam odvažio da to tvrdim (vidi § 37).

Skeptik postaje *retoričar* ako se mnogo ne uzbuđuje, ili se uopšte ne uzbuđuje, zbog paradoksalnosti zaključaka, već se sav orijentiše na zbunjivanje drugih. Elejski Palamed veoma je uspešno zbunjivao druge (*Plato* 6, 261 C). Na sličan način kao Platon u *Fedru*, govori o Zenonu i *Isokrat* (vidi *Guthrie* 3, str. 195), kad kaže da je on pokušavao da za istu stvar pokaže i da je moguća i da je nemoguća. No kao što je teško tvrditi da je Zanon bio skeptik, teško je tvrditi i da je bio samo retoričar, to jest da sâm nije razmišljao o zaključcima svojih dokaza i filozofski ih dalje koristio.

Gorgija je bio učitelj retorike i moguće je, kao što o njemu uopšte govori Isokrat (vidi *ibid.*, *loc. cit.*), da je on i u svojem spisu *O prirodi ili (o) nepostojećem* (Περὶ φύσεως ἢ τοῦ μὴ ὄντος) samo demonstrirao kako se dobrom retorikom može dokazivati što god se želi. Platon, međutim, u *Sofistu* (*Plato* 8, 254 A) pominje sofiste u ontološkom sporu na način koji ukazuje na filozofsku ozbiljnost njihovih tvrdnji. On kaže da su se oni „sklonili u tamu nebića“ nasuprot filozofima koji su se posvetili prirodi bića. Parafraze nekih Gorgijinih argumenata koje nalazimo u pseudoaristotelovom spisu *O Melisu, Ksenofanu i Gorgiji* (vidi *Aristotle* 6, 979 a 11–980 b 20) i kod Seksta (vidi *DK* 82 B 3) sasvim liče na Zenonov dokaz protiv mesta (prostora). Moguće je da je tek Gorgija učinio ono za šta bi neki rekli da je već Zenon učinio (vidi *Freeman*, str. 157), da je, naime, dokazima protiv mnoštva (i kretanja) pridružio dokaze protiv Jednog (za ovo je, na primer, dovoljno isključiti zabranu deljenja) i izveo najradikalniji zaključak

ontološkog nihilizma, da ništa ne postoji. Na nedoslednosti mu se, ako je ovo tačno, ne bi moglo zameriti.

Moguće je, najzad, opšti rezultat negativne dijalektike koristiti onako kako Sokrat u *Parmenidu* misli da ga je koristio Zenon. Opšti zaključak je da je protivrečno tvrditi da ima mnoštva i kretanja; zato, mnoštva i kretanja i nema; a zato je, dalje, istina ono što tvrdi Parmenid, da je ono o čemu se jedino (neprotivrečno) može misliti i govoriti, i što zato i postoji, homogeno, kontinuirano, nedeljivo, nepokretno, bezvremeno Jedno.

U naše vreme slično stanovište zagovarali su britanski neohegelijanci. Tako je Bredli (vidi *Bradley*, knj. 1: „*Appearance*“) dokazivao da su, pored mnogih drugih stvari, i vreme (*ibid.*, str. 33–36), kretanje (*ibid.*, str. 37) i svaka promena (*ibid.*, str. 38) nešto što je samoprotivrečno i kao takvo nerealno (*ibid.*, str. 120, 181). On je kao apsolutni kriterijum usvojio načelo neprotivrečnosti (*ibid.*, str. 120–122), i, slično Parmenidu, mislio da je njegova primena *dovoljna* da bi se ustanovila apsolutna istina, po čemu je postao poznat kao glavni zagovornik teorije istine kao koherencije.[1]

Τὰ δοκοῦντα su predmeti mnenja smrtnika kod Parmenida (*DK*, 28 B 1 31), a kod Bredlija se na odgovarajući način govori o pojavama (*appearances*). Oven (vidi *Owen* 4, str. 49–55) je verovatno u pravu kad misli da se u rečima Boginje u Parmenidovoj poemi ne nalazi nikakva osnova za tvrdnju da se kosmogoniji koja se izlaže u drugom delu poeme (počev od B 8 53) pripisuje ikakva mera istinitosti.[2] A i Bredli svojim apsolutnim kriterijumom ne može dopustiti nikakvu istinitost iskazu koji bi o pojavama govorio kao o realnosti.

No, kako nastaju τὰ δοκοῦντα, odakle privid mnoštvenosti kretanja i promene uopšte? Na to Boginja ne odgovara, a Bredli, koji nije Bog, kaže da je siguran da je nemoguće odgovoriti na takva pitanja (*Bradley*, str. 181). Ali, dodaje on, „ja želim da insistiram na tome da takvo znanje nije neophodno. Ono što se zahteva da znamo je samo to da ove pojave nisu nespojive sa našim Apsolutom" (*ibid.*, *loc cit.*). Na istom mestu on za prostor i vreme kaže da oni „ne daju osnova za tvrdnju da naš Apsolut nije moguć". On se poziva na svoj opšti „stari argument": „Pošto je moguće da ove pojave mogu da se razreše u harmoniji koja ih i sadrži i transcendira i pošto je ponovo nužno, prema našem glavnom principu, da to bude tako – to je zato uistinu realno" (*ibid.*, *loc. cit.*).

Bredli, opet kao Boginja, tvrdi da je „puka predrasuda pretpostaviti da se pozivanjem na iskustvo može dokazati realnost" (*ibid.*, str. 182). Bredli očigledno želi da kaže da zato što ima privida, ili prividnih stvari, one zbog toga nisu manje prividne.

Rezimirajući ovu poslednju reakciju na rezultat negativne dijalektike, možemo reći da je iz božanske perspektive možda jasno i poreklo privida (mnoštvenosti i kretanja), ali o tome nam Boginja preko Parmenida ništa ne poručuje. Bredli pak, smrtnik, priznaje da je nemoguće na razumljiv način povezati pojavu i realnost. On je zadovoljan što se neprotivrečno može tvrditi da se ono o čemu se samo protivrečno može misliti može neprotivrečno razrešiti u Apsolutu. A ljudi su kao začarani, pa o tome što je inače neprotivrečno moraju misliti na protivrečan način. Njihova *perspektiva* je iskrivljena, ali oni zahvaljujući bar nečemu apsolutnom što poseduju, apsolutnom *kriterijumu*, mogu otkriti da su začarani. Istina je da je realno samo ono o čemu se neprotivrečno može misliti i da je zato prostorno-vremenski svet kretanja i promene nerealan.

42. Teškoće odgovora koji prihvataju rezultat negativne dijalektike

Insistiranje na veri kad drugoga nema, jer je ono u šta se veruje apsurdno (*credo quia absurdum est*), već samo sobom ukazuje

na nemir i napetost u kojima se čovek koji na tome insistira nalazi. Teško je zamisliti filozofa koji bi se bez traganja za daljim objašnjenjem zaustavio na konstataciji da teorija koju prihvata proglašava nemogućim ono u šta on inače veruje.

Skeptička pozicija je filozofska i poštena. Ako problem postoji i ako ga nismo rešili, dostojno je filozofa da se to prizna. Ali ako iz svega proizilazi da je nemoguće ono za šta bismo rekli da postoji, onda to kod filozofa, za razliku od vernika, izaziva nelagodnost. Za nas koji još nismo isprobali mnoge pokušaje za izlaz iz teškoća – ostaje nada da se na kraju ipak nećemo morati zadovoljiti ovom skeptičkom pozicijom.

Poziciju retoričara ovde ne moramo ni komentarisati, jer trenutno ne uvaljujmo druge u teškoće nego smo sami u njima.

Ontološki nihilizam je dosledna pozicija i za razliku od verničke može pretendovati na to da bude filozofska. Samo, teško da je poštena. Čudno je, naime, da se filozof može zadovoljiti prosto prihvatajući, bez daljeg, zaključak da nema onoga za šta bi inače rekao da postoji, *samo zato* što po njegovoj teoriji to sledi. „Utoliko gore po činjenice" je perverzno filozofsko geslo, suprotno verničkom ili barbarskom nehaju za teoriju. Gorgija je možda ipak bio retoričar, a Antistenovo pobijanje se može shvatiti kao cinizam na cinizam onih koji navodno veruju u zaključke negativne dijalektike – neka vrsta negacije negacije.

Što se tiče filozofa Apsoluta koji sledi Boginju iz Parmenidove poeme, njihovu poziciju je imanentnom kritikom nastojao da sruši Ejer (*Ayer 1*, str. 210 i dalje). On je pokušao da pokaže kako se problem ne rešava razlikovanjem stvarnog i pojavnog, jer bi se priznati problem zbog ogrešenja o zakon protivrečnosti tako samo prebacio sa stvarnog na pojavno. „Čovek koji je stariji od nekog drugog može da izgleda mlađi, ali", pita se Ejer (*ibid.*, str. 210–211), „kako bi se za njega moglo reći da izgleda istovremeno i stariji i mlađi?" Protivrečan opis nije primenljiv ni na šta, pa ni na pojave.

Mislim da se Bredlijeva pozicija može održati pred ovakvom kritikom, ako se nedvosmisleno istakne da je reč samo o tome da se entiteti čija se realnost suspenduje ne mogu neprotivrečno opisati s obzirom na to kako nam izgledaju, a ne o tome da se mi moramo obavezati na izricanje protivrečnih iskaza. Zamislimo predmet čija se boja menja u zavisnosti od toga da li ga gledamo levim okom, desnim, ili sa oba. U takvoj situaciji je u načelu mogućno dopustiti da naše gledanje menja boju tog predmeta, ali je verovatnije da ćemo pretpostaviti – ne da predmet stvarno menja boju, već da nešto u načinu kako ga opažamo čini da nam izgleda čas ovako čas onako. Ne obavezujući se na prihvatanje međusobno protivrečnih tvrdnji, pošto možemo reći da predmet izgleda ovako kad ga gledamo levim, onako kad ga gledamo desnim okom, a opet ne znam kako kad ga gledamo s oba oka, mi ipak možemo reći da predmet s obzirom na boju ne umemo neprotivrečno da opišemo. Možda je on onakav kakvim ga vidimo levim, možda onakav kakvim ga vidimo desnim okom, možda je onakav kakvim ga vidimo s oba, a možda nije slučaj ni prvo, ni drugo, ni treće. U nedostatku *bilo kakvog drugog znanja*, osim znanja da levim okom izgleda ovakav, desnim onakav, s oba opet na neki treći način, ništa ne bismo o njemu s pravom mogli reći, i ukoliko iz nekog, manje – više opravdanog razloga, ne mislimo da se zbog našeg gledanja on stalno menja, rekli bismo da to *kako on izgleda ne omogućava konzistentan opis* toga kakav je on. U tom i samo u tom smislu možemo reći da je njegov izgled za nas protivrečan.

Bredli je mislio da je ceo pojavni svet, između ostalog i s obzirom na prostornost, vremenitost, pokretljivost i promenljivost, onakav kakav je u malopređašnjem primeru predmet s obzirom na boju. On je odatle izveo možda prejaki zaključak, da ono što je realno nije ni prostorno, ni vremensko, ni pokretljivo, ni promenljivo, ali to je učinio zato što je, izgleda, mislio da su entiteti o kojima je reč takvi da jedan opis *nužno* omogućava i drugi,

njemu protivrečni opis. No u svakom slučaju, Bredlijeva pozicija izgleda konzistentna. Njen problem, kao i problem elejske ontologije, je, prvo, u tome što mnogo nalikuje na takozvanu, negativnu teologiju: o realnosti možemo govoriti samo tako što ćemo poricati sve atribute sveta kakav nam se pojavljuje. I, još važnije, sredstvo kojim se problem rešava je prejako, teškoćâ u koje zapadamo kad razmišljamo o mnoštu, prostoru, vremenu i kretanju oslobađamo se tako što svemu tome oduzmemo realnost, što ukidamo *osnovnu* hipotezu.

Ovakva filozofija tajanstvenog Apsoluta slična je s obzirom na naš problem ontološkom nihilizmu. U oba slučaja se ukidaju osnovne hipoteze, i mnoštvo i kretanje se proglašavaju za privid. U oba slučaja se ne daje nikakvo objašnjenje otkuda ovaj privid. Jedina razlika između ova dva stanovišta je u tome što ontološki nihilizam zastaje na ovakvom poricanju realnosti, pa (prividna) pojava nije nikakvo pojavljivanje neke realnosti, dok filozofija Apsoluta priznaje realnost mističnom Apsolutu. Oba ova stanovišta pak slična su skeptičkom po tome što nam ne omogućavaju da razumemo mogućnost mnoštva i/ili kretanja, samo se skeptik skromno zaustavlja u svom neznanju, ne sklanjajući se u „tamu nebića“, kako bi rekao Platon, ili zasenjujuću božansku svetlost Apsoluta.

Filozof Apsoluta i ontološki nihilista lako mogu da odgovore na pitanja koja se tiču broja stepenika ili broja koraka koje su načinili popevši se stepenicama, *nezavisno od toga* što su i stepenice, i koračanje, i oni sami – privid. No kad ih pitamo o broju Ahilovih zaustavljanja iz *staccato* verzije (vidi § 20), ili broju deonica koje je Zevs izbrojao stigavši s Ahilom na cilj (vidi § 21), onda se oni, *umesto* direktnog odgovora, pozivaju na to da je kretanje privid. Oni nemaju *imanentan* odgovor na naše pitanje.

B. ATOMIZAM

43. Elejci i rani atomizam

Vezu između Elejaca i atomista Barnet je nazvao, „najvažnijom tačkom u istoriji rane Grčke filozofije" (*Burnet 1*, str. 334). Verovatno je Leukipov i Demokritov odgovor prvi u seriji odgovora koji ne dovode u pitanje opšte hipoteze o postojanju mnoštva i kretanja, već neku od „specijalnih" pretpostavki koje su sadržane u Zenonovim dokazima.

Za Leukipa se navodi da je bio Zenonov učenik (vidi *DK*, 67 A 1, A 4, A 5). Ako to i nije tačno, njegova (ili Demokritova) teorija u svakom slučaju nije teorija koja bi samo mogla biti, između ostalog, i odgovor Zenonu; ona je, kako to pokazuju neka mesta kod Aristotela (vidi dole § 45), eksplicitni odgovor Zenonu.

Izlažući i diskutujući Zenonove dokaze protiv mnoštva, stalno smo se sretali s prećutnom pretpostavkom po kojoj se deoba, ako se uopšte dozvoli, može neograničeno produžavati. Parmenid je nemogućnost deobe dokazivao, ukoliko ono što Boginja govori sadrži elemente dokaza, samo time što je svodio na apsurd pretpostavku o mogućnosti deljenja; on apsurd nije video u

beskonačnosti deobe, već u prihvatanju ikakve kvalitativne razlike, nebića ili praznine. Atomisti su, kako izgleda, dopustili postojanje praznine, ne videvši u tome ništa apsurdno, a *ujedno* su Zenonovo dokazivanje apsurdnosti dopuštanja beskonačne deljivosti *prihvatali kao dokaz* – ne protiv *deljivosti*, već protiv *neograničene* deljivosti.

44. Paradoks predikacije i prihvatanje postojanja kvalitativnih razlika

Leukip je, ako je verovati Aristotelu, prvi za prazninu (τὸ κενόν) tvrdio da je nešto nepostojeće (μὴ ὄν) (*Aristotle* 3, 325 a 27) a što na neki način ipak postoji; upravo zato što ona postoji (κενὸν γὰρ εἶναι) (*ibid.*, 325 a 31) ima kretanja; ono se, naime, odvija u praznini (ἐν τῷ κενῷ φέρεσθαι) (*ibid.*, *loc. cit.*).

Protivrečnost na koju bi povodom ovakvih izjava Parmenid ukazao što se, naime, praznini pripisuje i postojanje i nepostojanje – Leukip, ili možda Aristotel u njegovo ime, izbegava tako što, za razliku od punine, za prazninu kaže da nije „pravo biće" (κυρίως ὄν) (*ibid.*, 325 a 27).

Ovo je možda Aristotelov odgovor u Leukipovo ime, na to, naime, ukazuje terminologija koja se tu pojavljuje. U svakom slučaju, pojmovno razlikovanje između dva smisla u kojima se za nešto može reći da postoji detaljno je za Aristotela pripremio Platon, o čemu se možemo uveriti čitajući dijalog *Sofist*. Tamo se nebiću omogućava da postoji kao „nešto drugo" (vidi *Platon 8*, 256 DE). Služeći se Kantovom terminologijom možemo stvar učiniti potpuno jasnom i reći da *nihil privativum* nije isto što i *nihil negativum* (*Kant 1*, str. 232–233). Tama je, na primer, ako se setimo naših primera iz § 12, *nihil privativum*, kao što, možda, i nešto što je crno nije obojeno ako crno nije boja ali to ne znači da tame ili crnine (*crnih* predmeta) nema, da su tama i crnilo *nihil negativum* apsolutno ništa. Dopunjavajući Aristotelovu izjavu o praznini, možemo za nju reći da iako nije κυρίως ὄν, nije ni κυρίως μὴ ὄν. Uz malo razrađene terminologije spasavamo se paradoksa predikacije,[1] tako da možemo dopustiti i *postojanje praznine* kao *jedne od kvalitativno* različitih stvari, na čijem postojanju su insistirali pluralisti Empedokle i Anaksagora. Na neki način kvalitativno *različite* stvari jesu *iste*, jer, pre svega, *postoje* to je ono na čemu bi insistirao Parmenid ali one na neki način ostaju i *različite*, jer je *jedna* od njih *lišena nekog svojstva* koje *druga* ima to je ono što bi dodali Platon i Aristotel.

Nije značajno da sad raspravljamo o tome da li je moguće da samo jedna od dve stvari bude nečega lišena i utoliko bude „manje pravo biće", ili je to iz logičkih razloga nužno za obe, tako da bi se praznina prema punini odnosila kao jedan od Empedoklovih korena prema drugima (ako je grešnik u nečemu lišen dobrote, svetac je lišen „zle strasti"). Dovoljno je da zaključimo da se iste stvari mogu na neki način i razlikovati, odnosno da se za stvari koje se na neki način razlikuju bez protivrečnosti može reći da su na neki način iste.

U *Fizici*, 187 a 14, Aristotel sasvim eksplicitno kaže da su neki napustili (elejski) argument da je sve jedno (πάντα ἕν) ako „biće" ima *jedno značenje* (τὸ ὂν ἓν σημαίνει). Za ovo mesto su antički komentatori Aleksandar i Porfirije (vidi Simplikijev komentar navedenog mesta iz Aristotelove *Fizike* – *Simplicius 2*, 189) mislili da se odnosi na Platona, pogotovu što Aristotel eksplicitno dodaje da su oni koji su napustili elejski argument dopuštali „da nebiće postoji" (ὅτι ἔστι τὸ μὴ ὄν) (*Aristotle 21*, 187 a). Ali, kao što smo videli, *prema samom* Aristotelu to je daleko pre Platona dopustio i Leukip, iako ne rešavajući paradoks predikacije, već problem mogućnosti kretanja.

45. Dokaz protiv mogućnosti beskonačne deljivosti

Govoreći u spisu O *nastajanju i propadanju* o onima koji su stvorili ili podržavali teoriju o nedeljivim veličinama (μεγέθη ἀδιαίρετα) Aristotel pominje Leukipa i Demokrita kao zagovarače postojanja nedeljivih tela (σώματα), dok bi kod Platona nedeljive bile površine (ἐπίπεδα) (*Aristotle 3*, 315 b 29–30). On hvali Demokrita što se služi argumentima koji odgovaraju predmetu istraživanja (*ibid.*, 316 a 13) i neposredno posle toga (316 a 15 317 a 2) navodi jedan dokaz koji se može iskoristiti kao dokaz u prilog postojanju nedeljivih veličina, a u 316 b 16 se eksplicitno pominju baš nedeljiva tela (σώματα ἀδιαίρετα). To ukazuje na to da je upravo taj dokaz mogao biti onaj koji je Demokrita, a možda već i Leukipa, prisilio na prihvatanje postojanja atoma. Dokaz veoma liči na Zenonov dokaz protiv postojanja mnoštva u B 1, 2.

Pretpostavlja se da je telo (σῶμα) kao jedna veličina (μέγεθος) svuda deljivo (πάντῃ διαιρετόν) i da je to deljenje svuda moguće izvesti (καὶ τοῦτο δυνατόν) (*ibid.*, 315 a 15–16). Bez obzira da li se deljenje vrši simultano (ἅμα) (*ibid.*, 316 a 17) ili ne, pretpostavlja se sad da je telo (veličina) svuda izdeljeno. Da stvar učinimo slikovitom, možemo zamisliti da *u isto vreme* dok neki čovek telo seče na dva dela, dvojica drugih ljudi seku tako nastajuće polovine na dva dela, a *u isto vreme* još četvorica dele tako nastajuće četvrtine na po dva dela, i tako uvek iznova drugi mali, sve manji, čovečuljci *simultano* vrše bisekciju nastajućih delova. Za svaki od „opiljaka" (ἔκπρισμα) (*ibid.*, 316 b 1) važi isto (ὁ αὐτὸς λόγος) (*ibid.*, 316 b 3). Pošto se simultano deljenje obavi, možemo se zapitati šta će preostali (τί οὖν ἔσται λοιπόν) (*ibid*, 316 a 24) i ima li nečeg što nije deljeno jer se ne može deliti, a što bi sastavljanjem (συγκρίσει) (*ibid.*, 316 b 35) dalo telo koje je deljeno. Pošto to ne može biti neka veličina (μέγεθος) (*ibid.*, 316 a 25), ako je po pretpostavci ona deljiva a deljenje svuda sprovedeno, to što ostaje je ništa (οὐδέν), ili tačka (στιγμή) (*ibid.*, 316 a 27). Ovo uvođenje *dve* mogućnosti *ništa* ili *tačka* svakako je Aristotelovo delo, jer on ne želi da tačku kao objekat jedne nauke *bez daljeg* proglasi ništavnom (up. gore, § 35 b)). Ali, svejedno je da li je tačka u svakom ili samo nekom strogom smislu ništa (κυρίως οὐδέν) ona je ništavna kao sastavni deo tela (σῶμα), kao što je to i Zenon tvrdio. Pod pretpostavkom da se deljenje dopusti, paradoksalni zaključak se može izbeći tako što se ono *ograniči* time što se uvedu u igru *nedeljiva tela* (σώματα ἀδιαίρετα) (*ibid.*, 316 b 16). Aristotel, koji inače ne prihvata da postoje ovakva tela, kaže, očigledno imajući u vidu one koji su ovakva tela uveli, da je prethodni dokaz *korišćen* da se utvrdi da li je *nužno* da ima ovakvih tela i veličina (ἀνάγκη εἶναι σώματα ἀδιαίρετα καὶ μεγέθη) (*ibid.*, *loc. cit.*; u 317 a 1 se kaže μεγέθη ἄτομα).

46. U kom smislu i zbog čega su atomi nedeljivi?

Ako neko prihvati prethodni apagoški dokaz za postojanje atoma, on se još uvek nije oslobodio obaveze da razjasni *smisao* u kojem su atomi nedeljivi, kao što ima i obavezu da *u njihovoj prirodi* pronađe razlog *iz kojeg* su oni nedeljivi. Za geometrijsku tačku je neposredno jasno da je u *svakom pogledu* nedeljiva i jasno je *zbog čega* je to tako. Kod svega što nije tačka neophodna su razjašnjenja i razlozi.

Kad je reč o Demokritu, koji se na mnogim mestima pominje zajedno sa Leukipom, navodi se više karakteristika atoma, među kojima su najvažnije neprodornost (ἀπάθεια) (*Simplicius 2*, 925. 14, 82. 2) i to što je atom mali (σμικρόν) (sasvim eksplicitno u *Simplicius* 2, 925. 15, *Simplicius* 1, 609. 18; u *Simplicius 1*, 294.

33–295. 3 saznajemo da to kaže sam Aristotel u izgubljenom spisu o Demokritu) i bez delova (ἀμερές) (*ibid.*, 625. 14). Od raznih antičkih komentatora do danas postoji zbrka oko toga šta od svega toga predstavlja nužne a šta dovoljne uslove nedeljivosti, što stvara dvosmislenosti i oko prirode ovih atoma.

Najmanje sporno deluje odnos između tvrdoće i kompaktnosti s jedne i neprodornosti s druge strane, o kojima govori Simplikije (*ibid.*, 81. 34 i dalje). Neprodornost je posledica prethodnih karakteristika. Ali, ako su tvrdoća i kompaktnost uzeti zajedno dovoljan uslov za neprodornost, zašto se pominje i sićušnost atoma?

Zašto atomi ne bi mogli biti i veliki? Kod Dionizija, a po navođenju Euzebija (vidi *DK*, 68 A **43**), nalazimo upravo tvrdnju da je Demokrit smatrao da su neki atomi „vrlo veliki". Aetije pak pominje atome svetske veličine (*DK*, 68 A **47**). Proizilazilo bi, dakle, da sićušnost nije nužan, a verovatno ni dovoljan uslov nedeljivosti (ako je, naime, neprodornost nužan uslov).

Galen, s druge strane (*DK*, 68 A **49**), navodi da je, za razliku od Epikura, koji je kao razlog za neprodornost navodio tvrdoću, Leukipova škola kao razlog navodila upravo sićušnost.

Među antičkim komentatorima vrhunac zbirke je stvorio sam Simplikije, koji na jednom mestu (*Simplicius 2*, 925. 13) eksplicitno tvrdi da je za Leukipa i Demokrita uzrok nedeljivosti neprodornost, sićušnost i odsustvo delova, da bi na drugom mestu (*ibid.*, 81. 34 i dalje) tvrdio kako atomi – iako neprodorni zbog tvrdoće i kompaktnosti, imaju delove i veličinu. Nije, međutim, nužno, kao što to misli Farli (*Furley 2*, str. 519), da se ove Simplikijeve izjave shvate kao međusobno protivrečne, jer prva može izražavati Leukipovo i Demokritovo mišljenje, a druga od Aristotela preuzetu kritiku atomizma (up. *Aristotele 9*, 303 a 29 – b 3), po kojoj bi, eventualno, Demokritovi atomi ipak *morali* u nekom smislu imati delove, iako su kao neprodorni nedeljivi i u *tom* smislu zamišljeni kao da su bez delova. No Simplikije je u svakom slučaju bio izvor zbrke.

Među savremenim istraživačima vlada prava šarolikost u interpretacijama, kao da je prećutni cilj bio da se njima iscrpu sve mogućnosti.

Kao prvo, Bejli je tvrdio da se argument o nedeljivosti na osnovu veličine vezuje samo za Leukipa ali ne i za Demokrita (vidi *Baileu*, str. 126). Sledeći ga, Mau je prihvatio da se Leukipov i Demokritov atomizam razlikuju jer su Demokritovi atomi nedeljivi samo zbog kompaktnosti – odsustva praznine (vidi *Mau*, str. 19). Farli je ukazao da je direktno netačno da se argument na osnovu veličine ne vezuje za Demokrita (*Furley 2*, str. 519). A to što Galen na navedenom mestu nelomljivost zbog malenosti vezuje za Leukipovu školu, nije argument da se on ne vezuje za Demokrita, jer i Demokrit je mogao da bude podrazumevan kao pripadnik te škole.

Lurija (*Luria*, str. 174) je opet zaključio da ne postoji razlika između Demokritovog i Epikurovog atomizma utoliko što i Demokrit navodno prihvata, kao što ćemo uskoro videti da to čini Epikur, da se atomi teorijski mogu deliti iako su fizički nedeljivi, ali opet *ograničeno*, jer postoje i teorijski apsolutno nedeljivi delovi. Potvrda za ovakvu interpretaciju trebalo bi da bude mesto iz Aleksandrovog komentara *Metafizike* (36. 25–27), gde se povodom Leukipa i Demokrita govori o nedeljivim delovima atoma koji su bez težine. Ali to je izgleda jedino mesto koje bi kao direktno svedočanstvo moglo imati težinu (o razlozima za nepoklanjanje vere ovom svedočanstvu vidi *Furley 2*, 523, nap. 39). Sama Aristotelova svedočanstva ne idu u prilog tome da su Leukip i Demokrit zastupali dvostruki atomizam.

Tomas Hit je u svojoj *Istoriji grčke matematike* branio Demokrita od pokušaja da se njegov atomizam interpretira kao neko učenje o matematičkim infinitezimalama, tvrdeći da je on bio „suviše dobar matematičar" da bi uveo takvu vrstu atomizma (vidi *Heath*, I, str. 181). Nikol je navodila aporiju o sečenju kupe kao dokaz za Demokritovo „osećanje kontinuiteta" (*Nicol*, str. 120; o aporiji sečenja kupe vidi gore, § 28), dodajući da je njegov materijalizam doveo samo do fizičkog atomizma, navodeći Simplikija (*Simplicius 2*, 81. 34–82. 6, gde se kao uzrok nedeljivosti navodi neprodornost), kao najeksplicitnije svedočanstvo tome u prilog Barnet (*Burnet 1*, str. 336), Kirk (*Kirk and Raven*, str. 408), Mau (*Mau*, str. 19), i mnogi drugi, istog su mišljenja.

Ako bismo prihvatili da je Demokrit bio samo „fizički atomista", dok je u matematici zastupao teoriju o neograničenoj deljivosti, ostalo bi nam ipak da objasnimo otkud ona sićušnost koja se navodi u prilog fizičkoj nedeljivosti i šta onda znači Aristotelova izjava da su Leukip i Demokrit govoreći o nedeljivim telima nužno došli u sukob s matematičkim znanjima (πρὸς δὲ τούτοις ἀνάγκη μάχεσθαι ταῖς μαθηματικαῖς ἐπιστήμαις ἄτομα σώματα λέγοντας) (*Aristotle 9*, 303 a 20; sličnu tvrdnju Aristotel ponavlja u *Aristotle 9*, 306 a 26 i dalje).

U vezi sa sićušnošću atoma teškoće se znatno povećavaju ako se, kao što to čini Farli (*Furley 2*, str. 518. nap. 22), uzme da je Aristotel mislio na atomiste na jednom mestu u *Metafizici* (1084 b 27), gde govori *o onima koji su bića* sastavljali iz onoga što je minimalno (τὸ ἐλάχιστον). Tada bi, svakako i druga mesta kod Aristotela gde se na sličan način pojavljuje τὸ ἐλάχιστον, i izlaže kritici, trebalo uzimati u istom smislu, kao da se odnosi na atomiste, pa tako, između ostalog, jedno mesto iz spisa *O nebu* (217 b 9) gde se govori o minimalnim veličinama koje uzdrmavaju temelje matematike.

Daću jedno objašnjenje, koje mi deluje plauzibilno, zbog čega se pored tvrdoće, kompaktnosti i neprodornosti atoma često pominje i njihova sićušnost. Leukipov i Demokritov pokušaj da „spasu" svet mnoštvenosti i promene samo je jedan od pokazatelja njihove opšte sklonosti da ne dođu u sukob sa iskustvom; Aristotel ih upravo zbog toga hvali, posebno Demokrita (na primer, *Aristotle 3*, 316 a 11–14). Ako su sad oni, s jedne strane, došli do toga da atomi moraju postojati, jer im je to izgledalo kao jedini način da izbegnu Zenonov paradoksalni zaključak, dok im je, s druge strane, iskustvo govorilo da je sve ipak deljivo, oni su rešenje mogli videti u tome što su postulirali da je razlog našeg nesusretanja sa atomima to što su oni suviše mali da bismo ih mogli ikako opaziti, to jest doći u kontakt s njima. Ako je tako, onda sićušnost ne bi bila *nužan uslov nedeljivosti atoma*, već samo *nužan uslov njihove neopazivosti*, i u vezi sa nedeljivošću atoma pominjala bi se samo zato da tvrdnja o nedeljivosti ne bi bila u sukobu sa iskustvom. A što su neki komentatori kasnije dopuštali da su Demokritovi atomi „vrlo veliki", dok su drugi sićušnost nespecifikovano pominjali, kao da je nužan uslov nedeljivosti, to se moglo desiti zbog dvosmislenosti koja se pojavljuje kada se govori o tome da su atomi nužno sićušni.

Što se tiče Aristotelove zamerke atomistima (*Aristotle 9*, 303 a 20, 306 a 26), da ih je uvođenje nedeljivih tela dovelo u sukob s matematikom, najegzaktnijom naukom, meni sasvim prihvatljivo deluje Vlastosovo tumačenje koje je on dao Farliju (vidi *Furley 2*, str. 513, nap. 17). Prema tom tumačenju μάχεσθαι ταῖς ἀκριβεστάταις ἐπιστήμαις je u 306 a 27 upotrebljeno da ukaže na nekongruentnost između *fizičke* i *matematičke* doktrine, a ne na nesaglasnost *neke matematičke doktrine* sa *nekim matematičkim principima*. Na sličan način je Kant govorio o „šikaniranju matematike od strane metafizike" (vidi *Kant 1*, str. 305). Poenta je u tome što ako matematika dopušta deljivost, onda se i fizička deljivost ne sme zabraniti. U ovoj interpretaciji, dakle, kod Aristotela ipak ne bi bilo implicirano da su Leukip i Demokrit zagovarali nekakav matematički atomizam.

No, dok je Aristotel mislio da se fizički deljivost ne sme isključiti ako se matematički dopušta, Leukip i Demokrit su mogli misliti da je svaka moguća deljivost fiktivna ako je kvalitativna diferenciranost nepostojeća a fizička deljivost nemoguća. U tom smislu su oni atom mogli tretirati kao Parmenidovo Jedno. Oven je primetio (*Owen 6*, str. 210) da je Zenon bez argumenta pretpostavljao da bi konjunkcija veličine i teorijske nedeljivosti dala kontradikciju. Atomisti su mogli tvrditi konjunkciju veličine, kvalitativne nediferenciranosti i fizičke nedeljivosti svojih atoma, a da nikakvu drugu, teorijsku deljivost ni ne uzmu u obzir. Ova se, naime, ne mora tretirati tako kao da se odnosi na nešto realno.

Vizdom, koji je u članku „Zašto Ahil uspeva da uhvati kornjaču" izložio jedno shvatanje koje u mnogo čemu podseća na rani grčki atomizam, zaključuje da „paradoksi (zenonovski – M. A.) pretpostavljaju da fizički intervali odgovaraju matematičkim, što međutim, nije slučaj... Paradoksi su zato plauzibilni što mi mislimo o matematičkim veličinama u fizičkom kontekstu" (*Wisdom 2*, str. 73).

Ako stvari za fizičke atomiste ovako stoje, onda bi između njih i Aristotela moglo da dođe do uzajamnog vraćanja pitanja (*petitio principii*). Mislim da upravo ovaj *petitio principii* može biti *razjašnjenje* zašto na osnovu Aristotelovih izjava (*Aristotle 3*, 315 b 29, *Aristotle 9*, 303 a 20, 306 a 26) atom i jeste i nije najmanja veličina (τὸ ἐλάχιστον ili ἐλάχιστον μέγεθος). *Fizički* gledano atom je najmanja veličina, on je, da tako kažemo, ono κυρίως ἕν, i to je za atomiste jedini smisao o kojem govore i koji ih zanima. Atomi nisu najmanje veličine s *geometrijske* tačke gledišta, to je ono na čemu insistira kritika. Presudno je, izgleda, to što atomisti ovu geometrijsku tačku gledišta nisu smatrali prioritetnom, kao da bi, naime, za stvari, za realna bića, trebalo da važi sve ono što važi za geometrijska. Tako su, *ne zastupajući* matematički atomizam, mogli da tvrde da su *atomi najmanje veličine*. To je ono što je možda izmicalo kritičarima, komentatorima i interpretatorima, a što bi moglo biti pouka atomizma.

Zanimljivo je da je Branislav Petronijević, rešavajući Zenonove aporije, upravo insistirao na tome da se moraju razlikovati *realne* i *irealne* tačke (*Petronijević 3*, str. 16, str. 19) i da sve tačke standardne (nediskretne) geometrije ne mogu biti realne. Svako kretanje se, po njemu, sastoji iz konačno mnogo pomicaja kojima telo stiže u realne tačke u kojima miruje i u kojima jedino *jeste* (*ibid.*, str. 20). Tačke koje bi trebalo da se nalaze između realnih tačaka, to jest tačke o kojima govori standardna geometrija, nisu realne. Tako ne prethodi geometrija fizici već fizika geometriji, barem kada se raspravlja o ontološkim pitanjima.

Razlog zbog čega je kod Simplikija proizašlo da atomi i imaju i nemaju delova isti je kao i razlog zbog čega je izgledalo da atomi i jesu i nisu minimalne veličine. Za atomiste oni *nemaju delove*, jer nisu kvalitativno izdiferencirani; oni su homogeni i kompaktni i, osim toga, nisu fizički deljivi. To je (za atomiste) mogao biti jedini, ili barem jedini *ontološki relevantan*, smisao. Ali to ne znači da su atomisti zagovarali geometrijski atomizam ili teoriju matematičkih infinitezimala i ne znači da matematičari, Aristotel i Simplikije nisu mogli pronaći da *s njihove tačke gledišta* atomi *imaju delove*.

Razmotrimo na kraju Demokritovu aporiju sečenja kupe (vidi gore, § 28) u svetlosti ponuđenog tumačenja njegovog atomizma. Farli misli (*Furley 2*, str. 525) da je Demokrit mogao prihvatiti alternativu po kojoj posle rasecanja kupe gornji krug donjeg dela kupe i donji krug gornjeg nisu jednaki. On se, naime, poziva na Demokritovo razlikovanje „mračnog i pravog znanja", kojim bi se moglo objasniti zašto nam omotač kupe izgleda gladak iako, u stvari, nije gladak. Ali, zapitajmo se, nezavisno od toga što bi to kod nekog *datog* tela moglo biti slučaj, da li je po Demokritu *uopšte moguće* da postoji kupa sa glatkim omotačem. Suprotno Farlijevoj sugestiji, mislim da je to po Demokritu ne samo moguće, već da je on aporiju rešio na drugačiji način od onoga kojeg predlaže Farli.

Na više mesta (na primer, *Aristotle 9*, 306 a 21, 303 a 29, *Simplicius 1*, 295. 5) govori se da su Demokritovi atomi *različitih* oblika. U ponuđenom tumačenju to ni najmanje ne smeta da oni budu κυρίως ἕν, iako Aristotel koristi priliku da na osnovu *toga* pokaže kako oni moraju imati delove – pošto u najmanju ruku mogu da se nađu počeci ovih oblika (*Aristotle 8*, 303 b 2). No, za Demokrita oni su nedeljivi elementi iz kojih se mogu graditi složena tela. Sasvim je moguće da se različiti atomi, to jest atomi različitih oblika tako kontigualno dodirnu da stvore kupu.

Mislim da je Demokrit mogao i uvesti različitost oblika za atome upravo *zato što* je uvideo da bez odgovarajućeg bogatstva oblika na elementarnom nivou ne može biti ni raznovrsnosti oblika složenih tela koja opažamo. Ako je to bio Demokritov razlog, to nije bilo malo otkriće. Ukoliko se atomizam prihvati, od kocke se nikad ne može dobiti lopta, niti od valjka kupa. „Po kojoj teoriji bi to bilo moguće?“, „Kako dolazi do transformacije oblika?“, „Može li se krug preobraziti u poligon?“, „Može li uopšte kružna linija neke dužine postati prava?“, to su pitanja za one *koji ne prihvataju* Demokritov fizički atomizam i koji geometrijske probleme ili posmatraju *per se*, ili imaju drukčiju koncepciju fizičkog sveta. Za Demokrita ne postoji problem kao što je problem kvadrature kruga, jer se, *statički* posmatrano, *a priori* ne vidi razlog zašto bi neki krug morao moći biti jednak nekom poligonu koji je veći od svakog upisanog a manji od svakog opisanog, pošto se poligon, ionako, ne može transformisati u krug.

Dopuštanje deljivosti samo donekle, to jest pretpostavku da ono što se deli nije svuda jednako deljivo (διαιρετόν) već da tu jeste a tamo nije (εἰ δὲ τῇ μὲν τῇ δὲ μή), Aristotel je smatrao nečim veštačkim ili proizvoljnim (πεπλασμένῳ τινὶ τοῦτ' ἐοικέναι) (*Aristotle 3*, 325 a 10). Zenon, koji je implicitno usvajao da se deljenje, ako se jednom dopusti, ne može ograničavati, pretpostavku koju Aristotel smatra proizvoljnom ni ne pominje, verovatno zato što, za razliku od Aristotela, nije imao nikog pred sobom ko je tu pretpostavku koristio.

Zabrana deljenja prostim definicionalnim *fiat* od samog početka deluje kao najizloženija slabost atomizma i izgleda da se na primedbu koja ukazuje na tu slabost, osim navođenja opštih razloga u prilog atomizmu, direktno ništa i ne može odgovoriti. Zašto se deljenje baš *tu* nužno prekida ne može se objasniti, mada se može obrazlagati da ono *negde* mora da se prekine.

No, atomistima se pruža šansa da obrazlažući ovu drugu nužnost, nužnost da se s deljenjem *negde* prekine, tvrde kako je odgovor na konkretno pitanje „zašto baš ovde?“ nemoguć, pošto iz činjenice da je nužno negde stati *ne sledi* da je nužno baš ovde stati. Pitanje „gde se stalo?“ je čisto činjeničko pitanje i zato je pitanje „zašto baš tu?“ deplasirano. Ovakva odbrana atomizma deluje uspešno.

Druga sporna stvar u atomizmu u vezi je sa raskorakom između matematike i fizike o kojem govori Aristotel. Nije, međutim, reč o tome da se deljenje fizički ograničava tamo gde se matematički dopušta, jer tu bi odgovor bio poput prethodnog, već o pitanju da li iz činjenice da je geometrijska deoba moguća sledi da atom u *bar jednom relevantnom smislu* nije nedeljiva jedinica, zbog čega bi zenonovsku argumentaciju bilo moguće *u tom smislu* opet sprovesti. Jedini odgovor koji fizičkim atomistima stoji na raspolaganju, kako izgleda, ili je radikalni Petronijevićev, ili Vizdomov.

Petronijević nije samo u ontološkim raspravama geometriju smatrao sekundarnom, već je, na osnovu uverenja da nas jedino *finitizam* izvodi iz teškoća, predložio *reviziju* geometrije (vidi *Petronijevics 1*). Tako je filozofski finitizam postao osnova za diskretnu geometriju, koju ćemo kasnije razmotriti.

Vizdom je, pak, mislio (vidi *Wisdom 1*, str. 69) da se u matematici smeju dopustiti paradoksi, jer se ona ne odnosi ni na šta realno. Kada bi ono što važi u geometriji važilo realno, tek onda bismo bili u bezizlaznoj situaciji, jer bi geometrijska mnoštvenost tela odmah značila i njihovu realnu mnoštvenost i put Zenonovoj argumentaciji bio bi otvoren.

Najveće, i verovatno nesavladive, teškoće za fizički atomizam iskrsavaju na polju kinematike. Jer ako i odoli Zenonovim dokazima protiv mnoštva, on ostaje nemoćan pred kinematičkim aporijama. Na ovom mestu se vidi superiornost kinematičkih aporija nad dokazima protiv mnoštva. Strategije odbrane atomizma s kojima smo se upravo sreli ne mogu više da se koriste ako se kretanje, po atomistima, odvija u praznini, jer tu se ničim ne može onemogućiti uvek novo zaustavljanje *staccato* trkača (iz § 20). Ako atom i jeste nedeljiv u svakom *ontološki relevantnom* smislu, *ništa* nas ipak ne sprečava da se zaustavimo na pola puta do njegovog kraja. Isto tako, ništa ne sprečava Zevsa da, trčeći zajedno s Ahilom *legato*, broji sve manje deonice puta određene geometrijskom progresijom. Geometrijska deljivost je ovde neuklonjiv izvor paradoksa i standardna geometrija je operativno postala ubitačna, ako joj je ta mogućnost i uskraćena u mirnom fizičkom svetu.

Vizdomova odbrana, po kojoj treba odbaciti premisu kojom je „fizičko rastojanje" Ahilovog (i Zevsovog) puta izraženo geometrijskom progresijom (*Wisdom 1*, str. 70, 72), ne počiva na

valjanim razlozima. Vizdom, naime, misli da je problem ove premise u poslednjim trima tačkicama kojima se niz, kad se napiše, predstavlja, odnosno u onom „itd." Jer, navodno su „fizičke tačke" neslične matematičkim, one „uvek imaju neku veličinu" i mi ne možemo „ubaciti beskonačno mnogo njih u konačno rastojanje" (*ibid.*, str. 70). Poblem je za Vizdoma, međutim, u tome što se u varijacijama aporije do kojih smo mi došli na kraju *Aporetike* ne pojavljuju nikakve tačke. [0, 1/2] nije tačka, već *deonica puta koji se prelazi*. Ovakve deonice, a ne tačke, Zevs *legato* broji, a njih nije konačno mnogo.

Vizdom nema odgovor ni na *staccato* verziju. Ako se *staccato* trkač zaustavi na pola puta, on nije zaposeo nikakvu „fizičku tačku", on je jednostavno kontigualno-kontinualno dodirnuo drugi deo puta.

Ako atomisti hoće da primene svoju strategiju i na rešavanje *kinematičkih* aporija, oni ne mogu ostati na kvantizaciji punine, već moraju biti radikalniji. Oni bi morali kvantizovati i prazninu, to jest prostor u kojem se kretanje odvija; morali bi uvesti atomizam i u geometriju.

48. Rana rasprava o osnovama geometrije i nastanak geometrijskog atomizma

Kada se pojavio geometrijski atomizam i ko ga je i zašto prvi uveo, teško je reći.

Moguće je da su ga neki postzenonovski Pitagorejci uveli kao odgovor Zenonu, slično kao što su Leukip i Demokrit uveli fizički atomizam. Moguće je, takođe, da su izvesni problemi u samoj matematici bili inspiracija za uvođenje infinitezimala, a moguće je da su to bila i izvesna apstraktna razmatranja o tome kakav je odnos između brojeva i (čulnih) stvari. Moguće je, naime, da su, poučeni Zenonovim dokazivanjem neodređenosti mnoštva i jedinice, Pitagorejci uvideli da je obostrano jednoznačno korespondiranje brojeva i stvari, koje bi bilo *opravdanje* za tvrdnju da su „stvari brojevi", nemoguće – ako se ne uvedu nedeljive minimalne veličine.

Po Aetijevom svedočanstvu, prvi Pitagorejac koji je tvrdio da je „pitagorejska monada telesna" (Πυθαγορικὰς μονάδας... σωματικάς) da osim praznine postoje još samo nedeljiva tela bio je Ekfant iz Sirakuze (*DK*, 51 2). Ali ne kaže se *zašto* je Ekfant to tvrdio.

Misterija oko stvarnih zagovornika geometrijskog atomizma širi se i dalje u vreme u kojem je, izgleda, *sigurno* to *neko* zastupao. Reč je o Platonovom dobu i o tome da se – samom Platonu sporadičnije, a Ksenokratu češće pripisivalo učenje o nedeljivim linijama. Glavni izvor za to su Aristotel i primedbe antičkih komentatora o tome na koga treba da se odnose pojedini Aristotelovi argumenti protiv nedeljivih veličina. Postoji inače i jedan pseudoaristotelov spis, koji je skoro sigurno napisao neko iz njegove škole, a koji nosi naslov *O nedeljivim linijama* (Περὶ ἀτόμων γραμμῶν) i za koji se smatra da je direktno bio uperen protiv Platona i/ili Ksenokrata (vidi *Nicol*, str. 122).

Svakom će pasti u oči neobična činjenica da se pri pokušaju rekonstrukcije eventualne Platonove teorije o nedeljivim linijama ne pozivamo na same Platonove spise koji su do nas dospeli, već na Aristotela i Aristotelovce. To je možda tako zbog toga što teorija o kojoj je reč nije postala egzoterična, već se zadržala u okvirima Akademije i bila predmet čuvenog Platonovog predavanja o Dobru, na koje se, na primer, poziva Aleksandar (prema navodima Simplikija – vidi *Simplicius 2*, 454. 19) upravo u relevantnom kontekstu, u kojem se govori o počecima (ἀρχαί) svih stvari, i u vezi s tim, o brojevima, monadi, tački, liniji, površi i telima. Inače, od dijaloga nam donekle indirektno može pomoći *Timaj*, na koji se i Aristotel više puta poziva.[1]

Priču o Platonovim nedeljivim linijama počećemo jednim mestom iz Aristotelove *Metafizike* (992 a 10–23), koje u celini veoma liči na pomenute

Aleksandrove reči (koje su navodni citat iz Platonovog predavanja o Dobru), gde Aristotel eksplicitno kaže da je Platon često govorio o nedeljivim linijama (τοῦτο δὲ πολλάκις ἐτίθει, τὰς ἀτόμους γραμμάς). Na tom mestu se za tačke (αἱ στιγμαί) kaže da su one za Platona geometrijske fikcije (γεωμετρικῷ δόγματι), a da je on inače govorio o počecima linije (ἐκάλει ἀρχὴν γραμμῆς) koji treba da su te nedeljive linije. Aleksandar inače povodom ovog mesta precizira da je Platon *istraživao*, a samo Ksenokrat *smatrao* da ima nedeljivih linija (ἱστορεῖ ὡς καὶ Πλάτωνος, οὐ μόνον Ξενοκράτους ἀτόμους γραμμὰς τιθεμένου).

U celom odeljku 992 a 10–24 Aristotel govori o rodovima (γένοι) koji predstavljaju principe (početke) stvari (bića) (ἀρχαὶ τῆς οὐσίας) i o problemu sadržanosti viših rodova u nižim. To je verovatno bio poblem koji je mučio Platona i Akademičare u njihovom pokušaju da poput „izvesnih Pitagorejaca" konstruišu prirodu (ili nebo) iz brojeva (*Aristotle 9*, 300 a 15). Linija se dobija „iz dugačkog i kratkog" (ἐκ βραχέος καὶ μακροῦ) što je samo jedna vrsta neodređene dijade „malo i veliko" (μικρὸν καί μέγα) površina iz druge vrste, to jest na drugi način, „iz širokog i uskog" (ἐκ πλατέος καὶ στενοῦ), a telo „iz dubokog i plitkog" (ἐκ βαθέος καὶ ταπεινοῦ). Sve to ne znači ništa drugo do da je za liniju potrebna jedna (ili samo jedna) dimenzija, za površinu i druga, a za tela[2] i treća. Ali, kako u tom slučaju može površina sadržavati liniju, ili telo liniju i površinu, kad su „široko i usko", i „duboko i plitko", različiti rodovi?

Izgleda, dakle, da je ovde glavni problem shvaćen kao problem *hijerarhizacije* i *klasifikacije*, odnosno podele (διαίρεσις)[3] rodova koji predstavljaju početke ili načela stvari. Možda je zato Aristotel na već navedenom mestu (*Aristotle 3*, 316 a 11) suprotstavljao one koji su se, poput Demokrita, oslanjali na fizička posmatranja onima koji su se oslanjali na čisto logička razmatranja.

Mislim da je sasvim moguće ono što tvrdi Štencel, i za njim Nikol (vidi *Nicol*, str. 123 i dalje), da je Platon razvio izvesnu teoriju *kontinuuma za rodove*, u kojoj bi pojam kontinuiteta odgovarao Aristotelovim definicijama kontinuiteta (συνεχές), s kojima smo se već sretali. Kontinualne stvari su one koje imaju zajedničke krajeve (τὰ ἔσχατα), gde je kraj jedne početak druge. Ako se ovo primeni na rodove o kojima je reč, onda izgleda da tvrditi da je kraj tela površina, kraj površine linija, kraj linije tačka, znači prihvatiti da je tačka *već* linija, linija *već* površina, površina *već* telo. Simplikije, zaista, sasvim eksplicitno tvrdi da „Platon za površine kaže da su prva i najmanja tela (ὁ Πλάτων ἐπίπεδα εἶπεν εἶναι τὰ πρῶτα καὶ ἐλάχιστα σώματα)" (*Simplicius 2*, 142. 25). S druge strane, navedeno mesto iz Aristotela (*Aristotle 1*, 992 a 21), gde se kaže da je Platon tvrdio da su tačke geometrijske fikcije, ali da je priznavao (da postoji) početak linije (ἀλλ᾽ ἐκάλει ἀρχὴν γραμμῆς), može da se shvati kao da tvrdi da je Platon priznavao tačke *samo kao* početke linija i da ih je priznavao kao prve, nedeljive linije. Posle svega bismo još samo očekivali da čujemo da su linije kao počeci (ἀρχαί) površina već prve i nedeljive površine. Aristotel eksplicitno tvrdi (*Aristotle 3*, 315 b 30) da je Platon u *Timaju* govoreći o nedeljivim veličinama govorio o *površinama*.[4]

Ali, da li bi tačke kao prve i nedeljive linije trebalo da imaju neku veličinu? Drugim rečima, da li je Platon prihvatao, ili bio prinuđen da prihvati, geometrijski atomizam? Mislim da na ovo pitanje ne možemo dati nedvosmislen odgovor, jer je, s jedne strane, evidencija sporna i štura, a s druge strane, pitanje o kojem je reč nije tako jednoznačno određeno da bi forsirano vodilo jednom odgovoru. Možemo se, inače, još podsetiti da je Platon *samo istraživao* nedeljive linije.

Pitanje iz *Metafizike* (992 a 13) koje su postavili Akademičari, o tome kako telo kao rod može sadržavati površinu, površina kao rod liniju, a linija kao rod tačku, sugeriše odgovor kojim bi se priznala neka debljina površinama, širina linijama i dužina tačkama. Linije koje nisu tačke razlikovale bi se od tačaka, kao i površine koje nisu linije od linija i tela koja nisu površine od površina, samo po *novom načinu* deljivosti koji bi bio sadržan u *nižem* rodu. Tako bi i tačke bile telesne ali potpuno nedeljive, linije koje su deljive bile bi deljive na jedan ali samo jedan način, dok bi površine koje su deljive bile nedeljive na jedan a deljive na dva načina. Tela koja nisu površine ne bi ni u kojem pogledu bila nedeljiva. Sve ovo se slaže sa tim što su se Platonu pripisivala verovanja upravo u nedeljive *linije* i nedeljive *površine*. To bi se slagalo i sa tvrdnjom da su tačke *kao* tačke koje ne bi bile već linije „geometrijske fikcije", za razliku od tačaka *kao* početaka linije, to jest od tačaka kao nedeljivih linija (vidi navedeno mesto iz *Metafizike*: 992 a 20–24). Ovakvo rešenje, dakle, predstavljalo bi *geometrijski atomizam*.

Ali, iako se Aristotelove izjave *slažu* sa ovakvim rešenjem, on nam ne kaže da je upravo to *bilo* Platonovo rešenje. Istražujući odnos između rodova koji predstavljaju početke, ili načela, stvari, Platon je mogao zaključiti da se kontinuitet ovih rodova ne

ostvaruje *sadržanošću* viših rodova u nižim s obzirom na specifikacije neodređene dijade „veliko i malo" – tako da je nemoguće izvršiti podelu (διαίρεσις) poput prethodne – već da se kontinuitet ostvaruje na *drugačiji* način, tako što rodovi koji se dodiruju imaju doduše zajedničko određenje, ali *nisu* sadržani jedan u drugom. Površine i tela bi imali zajednička određenja s obzirom na dva načina specifikacije neodređene dijade „veliko i malo", naime s obzirom na dužinu i širinu, ali površine *ne bi* bile tela. Tada bi njihova nedeljivost bila *posledica* toga što one nemaju debljinu. Na sličan način bi linije bile nedeljive zbog odsustva širine (i debljine), iako bi sa površinama imale zajedničko određenje dužine. I ovo rešenje, koje ne predstavlja nikakav geometrijski atomizam, *saglasno* je sa mnogim izjavama Aristotela, Aristotelovaca i komentatora.

Pre svega, nepoznati nam pripadnik Aristotelove škole u pomenutom spisu *O nedeljivim linijama* kao prvi razlog za nedeljivost linije navodi idealnost linije. *Ideja linije* (ἰδέα γραμμῆς) (*Aristotle 4*, 968 a 10) bila bi upravo linija koja kao početak, ili načelo (ἀρχή), ne može da se opazi, ne spada u čulni svet (ὁρατόν) (vidi *Plato 12*, 49 A), već samo u inteligibilni svet, u ono o čemu se samo može misliti (νοητόν) (vidi *ibid.*, 48 E). Isti razlog za nedeljivost navodi Prokle u svom komentaru odgovarajućih mesta u *Timaju*. A Platon u *Timaju* opazivost (vidljivost i dodirljivost) vezuje uz ono što je nastalo i što je telesno (γέγονεν ὁρατὸς γὰρ ἅπτος τέ ἐστι καὶ σῶμα ἔχων...) (*ibid.*, 28 B). Razlog za *nedeljivost* geometrijskih objekata mogao bi, dakle, biti isti kao i razlog za njihovu *neopazivost*, a to se slaže sa tim što viši rodovi *nisu sadržani* u nižim, odnosno što nijedan nije sadržan u najnižem rodu – telesnosti. Najzad, Aristotelova izjava iz *Metafizike*, 992 a 21, iako *može* da se shvati kao da se tvrdi da je Platon govoreći o tačkama kao geometrijskim fikcijama ove prihvatao kao nedeljive linije, *ne mora* tako da se shvati. Moguće je ne vezivati izjavu o tačkama sa tvrdnjom o prihvatanju nedeljivih linija, već to tretirati kao dve odvojene tvrdnje koje samo ilustruju *problem sadržanosti viših rodova u nižim*, o kojem je problemu inače reč. Tako se ne vidi zašto Nikol misli da su Ksenokrat i Platon, „verovatnije Ksenokrat, pobrkali nedeljivu liniju sa idealnom". Ne vidi se, naime, zašto Nikol govori o zbrci. U skladu s drugim od dva rešenja koja smo razmatrali, idealnost linije kao i idealnost površine upravo *jeste* pravi razlog njihove nedeljivosti. Samo su tela u *svakom* *pogledu* deljiva, višim rodovima pripada nedeljivost u *jednoj* ili *dve* dimenzije. A opazive linije i površine nisu, u stvari, prave linije i površine i o njihovoj nedeljivosti se ne govori.

Aristotel je, u kritici, mogao zamerati Platonu – ne to što ovaj zagovara geometrijski atomizam, već to što je više rodove *osamostalio* pripisujući im idealno postojanje, umesto da ih u njihovom postojanju veže za fizički svet i shvati *samo kao granice* (πείρατα).

Ako je drugo od dva ponuđena rešenja problema odnosa rodova koji predstavljaju početke, ili načela stvari, odnosno nastajanja (γένεσις) (vidi *Plato 12*, 49 A), ono kojem se Platon priklonio, ili barem uzeo u obzir kao moguće rešenje, onda je moguće da je on *de facto* bio prvi u istoriji matematike koji je geometrijske osnovne objekte *eksplicitno odredio* na način koji se održao do danas. Videli smo ranije (§ 27), kako je moguće da se matematika do izvesne tačke razvija i rešava svoje „unutrašnje probleme" a da se ne bavi svojim osnovama, odnosno prirodom svojih osnovnih objekata. Moguće je da je tek u Platonovo doba stvar dovoljno sazrela da se postavi pitanje u formi dileme: geometrijski atomizam *ili* nešto alternativno. I moguće je da su neki od Pitagorejaca, ili neki od drugih matematičara Platonovog doba bliskih Platonu, ili najzad Platon sam, ili tek Ksenokrat, ponudili rešenje alternativno geometrijskom atomizmu. I kao što ne možemo pouzdano da utvrdimo ni ko je ni kada uveo geometrijski atomizam, tako ne možemo da utvrdimo ni ko je ni kada uveo do danas najrasprostranjenije shvatanje geometrijskih objekata. Platonovo ime se preko nedeljivih linija i površina vezuje za *geometrijski atomizam*, ali isto je toliko moguće da je on *jedan od tvoraca tradicionalnog shvatanja geometrijskih objekata*. U *Timaju* (53 C) Platon ne konstruiše tela iz površina tako što ove slaže jedne na druge, već tako što postavlja *granice*, formirajući *tako* geometrijska tela.

Da je u doba nastanka spisa *O nedeljivim linijama* sigurno postojala i teorija geometrijskog atomizma očigledno je iz drugog

argumenta koji autor spisa navodi u prilog nedeljivim linijama, pored argumenta koji se koristi idealnošću. To je argument koji se služi *dihotomijom* (*Aristotle 4*, 968 a 19) i koji sasvim liči na argument koji je u prilog atomizmu Demokrita naveo Aristotel (*Aristotle 3*, 316 a 15), koji, kao što smo videli (§ 45), liči na Zenonov argument protiv mnoštva iz B **1**, **2**.

Sam autor se tu poziva na Zenona (*Aristotle 4*, 968 a 19). Inače, navodi se i argument za koji se kaže da se na njega pozivaju matematičari (ἐν τοῖς μαθήμασι λέγουσιν) (*ibid.*, 968 b 5), a koji se koristi nesamerljivošću nekih, odnosno potrebom za samerljivošću (συμμετρία) svih linija. Autor potom izlaže kritici sve ove argumente.

Zanimljivo je to što se *isti* argument koji je Aristotel naveo u prilog *fizičkom* atomizmu navodi i u prilog *geometrijskom* atomizmu. A čovek koga najzad možemo imenovati kao onog za koga pouzdano znamo i *da* je i *kako* je ovaj argument koristio, i to *posle* peripatetičke kritike i fizičkog i geometrijskog atomizma, u prilog *geometrijskom atomizmu koji je* zastupao, *bio je Epikur.*

49. Kvantizacija prostora i vremena

U *Metafizici*, u knjizi Θ, Aristotel preduzima ispitivanje različitih upotreba pojmova mogućnosti, stvarnosti i dovršenja kao ostvarenja neke mogućnosti, odnosno ispitivanje načina na koje se sve može govoriti o biću (ἐπεὶ δὲ λέγεται τὸ ὄν) s obzirom na ove pojmove (τὸ δὲ κατὰ δύναμιν καὶ ἐντελέχειαν καὶ κατὰ τὸ ἔργον) (*Aristotel 1*, 1045 b 32). U vezi sa odnosom između ovih pojmova glavna meta njegove kritike su Megarani[1], a nas zanima problematičnost u zaključivanju *ab posse ad esse* na koju je Aristotel ukazivao u kritici Demokritovog zaključka o nužnosti postojanja atoma (u dokazu u *Aristotle 3*, 316 a 15 i dalje). Od paradoksalnosti Zenonovog zaključka da bi svako opazivo telo (σῶμα αἰσθητόν) moralo biti beskonačno izdeljeno i/ili iščeznuti u ništavilo tačaka Aristotel se ne brani time što prihvata postojanje atoma, ne dakle time što ograničava deljivost, već, kao što ćemo uskoro videti, *tako što* ne dozvoljava da se *od deljivosti* koja je potencijalna (u smislu δύναμις) zaključi na mogućnost dovršenja tog procesa deljenja (u smislu ἐντελεχεία) (*Aristotle 3*, 316 b 20 i dalje). Epikur je odbio da prihvati jednu takvu odbranu.

Zanimljivo je to što se ovo Epikurovo odbijanje događa posle iscrpne peripatetičke kritike *svakog* atomizma i što kao posledicu ima ne samo reafirmaciju Demokritovog *fizičkog* atomizma, već i *eksplicitno* uvođenje *geometrijskog* atomizma kvantizacijom *prostora*, uz analognu kvantizaciju *vremena*, jer već sama ova činjenica ukazuje na to da se Epikurova strategija kojom se dokazuje nužnost atomizma mora razlikovati od Demokritove, kao što se razlikuju i *smisao* i *razlozi* iz kojih se za neku veličinu kaže da je nedeljiva.

U *Pismu Herodotu* Epikur, govoreći o atomima, govori doduše najpre o tome (*Epicurus*, **54** 1) da atomi nemaju nikakva svojstva (ποιότητα) koja imaju pojave (τὰ φαινόμενα) „izuzev oblika, težine i veličine i onoga što inače po nužnosti pripada obliku (πλὴν σχήματος καὶ βάρους καὶ μεγέθους καὶ ὅσα ἐξ ἀνάγκης σχήματος συμφυῆ ἐστι)“. Ovi i ovakvi atomi se tako ne razlikuju od Demokritovih i oni, kao što se vidi iz daljeg teksta pisma, i igraju istu ulogu u objašnjavanju toga kako nastaju afekat i opažaj (πάθη καὶ αἴσθησις) i omogućavaju rasvetljavanje porekla kvalitativnih razlika (τῶν ποιοτήτων διαφοράς). U istu svrhu se prihvataju i razlike u obliku i veličini među atomima (*ibid.*, **55** 9–**56** 4), mada, pošto nema opazivog atoma (*ibid.*, **56** 3) te veličine moraju biti nevidljive, strogo govoreći manje od onoga „što je u opažaju najmanje“ (ἐλάχιστον τὸ ἐν τῇ αἰσθήσει) (*ibid.*, **58** 1).

Pored *atoma* koji su fizički nedeljivi i *najmanjih veličina s obzirom na opažanje* (ἐλάχιστον τὸ ἐν τῇ αἰσθήσει), Epikur govori o *trećoj* vrsti minimalnih veličina, koje po tome što su u izvesnom trećem pogledu minimalne i nedeljive imaju nešto

zajedničko (κοινότης) s prethodnim dvema. Po *analogiji* (τῇ ἀναλογίᾳ) on na kraju **58** uvodi ono „što je unutar atoma najmanje“ (τὸ ἐν τῇ ἀτόμῳ ἐλάχιστον). Do ovih najmanjih veličina dolazi se *logičkim razmatranjem* (τῇ διὰ λόγου θεωρίᾳ) (*ibid.*, **59** 8) i za njih se kaže da su mera (καταμέτρημα) (*ibid.*, **59** 6) i velikog i malog.

U kojem su to trećem pogledu nedeljivi ovi najmanji delovi inače fizički nedeljivih atoma? Nedeljivost ove treće vrste minimalnih veličina ne sastoji se više u neopazivosti ili neprodornosti, ali ni u bilo kojoj drugoj specifičnoj osobini. Ove minimalne veličine su *prosto* ili *apsolutno*, dakle *u svakom mogućem pogledu*, nedeljive i zato one kao *po sebi prve* (ἐξ αὐτῶν πρῶτον) (*ibid.*, *loc. cit.*) podaruju meru svemu.

Vidimo dakle da je Epikur ove poslednje nedeljive veličine uveo po analogiji i da su one *apsolutno*, po sebi nedeljive. Ali šta je *opravdanje* za upotrebu ove analogije i *šta zahteva* njenu primenu?

Pošto je u **54**, **55** i na početku **56** završio izlaganje o atomima, odredivši smisao njihove nedeljivosti, Epikur u nastavku **56** govori o delićima (ὄγκοι) tih (tako) određenih tela tvrdeći da se „ne može smatrati (οὐ δεῖ νομίζειν) da u tom (tako) određenom telu (ἐν τῷ ὡρισμένῳ σώματι) ima beskonačno delića (ἀπείρους ὄγκους εἶναι) ma koliko neznatnih (οὐδ᾽ ὁπηλίκους οὖν)“. Ali ne samo to. Protivno Aristotelu, on tvrdi da se ne sme smatrati mogućim ni prelaz (μετάβασις) koji bi se odvijao neograničeno, do u beskonačnost (εἰς ἄπειρον), ka sve manjim (delovima) (ἐ(πι) τοὔλαττον).[2] Razlog za ovu nemogućnost Epikur nam otkriva odmah u **57**.

Delići (ὄγκοι), i ako bi ih bilo beskonačno, morali bi, očevidno (δῆλον), imati neku veličinu (πηλικότης) i ma koliki da su, veličina (μέγεθος) koje su oni delovi bila bi beskonačna (beskonačno velika – ἄπειρον). Zato veličina koja je konačna (ograničeno velika – πεπερασμένον) ne može imati beskonačno mnogo delova. To je Epikuru dokaz *i* za nemogućnost neograničenog deljenja (μετάβασις ἐ(πι) τοὔλαττον).

Na prvi pogled ovaj se argument ne razlikuje od dokaza koji je u prilog atomizmu naveo Aristotel govoreći o Leukipu i Demokritu (vidi gore, § 45). Ipak, postoje dve značajne razlike. *Prvo*, ovde se ne argumentiše u prilog nedeljivosti onoga što sam Epikur za Demokritom naziva atomima, već u prilog apsolutno minimalnim veličinama kod kojih se, kao onih koje su same delovi atoma, očigledno više ne radi o samo fizičkoj nedeljivosti. *Drugo*, ovde se ne argumentiše samo u prilog postojanju minimalnh nedeljivih veličina, već eksplicitno i protiv neograničenosti *procesa* bilo kako shvaćenog deljenja. Ispitajmo sada koje su neophodne pretpostavke ovog „jačeg" argumenta. Videćemo da dve navedene razlike između Epikurovog argumenta i onog kojeg navodi Aristotel (govoreći o ranim atomistima) nisu međusobno nezavisne.

(1) Samim tim što se govori o delovima atoma prihvata se da je i ono što se samo *misaono odeli* od nečeg drugog deo.

(2) Da i takvih (samo) misaono odeljenih delova atoma mora biti konačno mnogo ako su atomi određena i ograničena tela dokazuje se na osnovu prihvatanja da *svi*, pa i takvi, delovi imaju *izvesnu veličinu*. Dakle, o geometrijskim tačkama se ne govori kao o delovima.

(3) Prihvata se da *beskonačan broj delova* sa veličinom *zajedno ne može dati ograničeno telo*. Ovo se, po svemu sudeći, uzima kao tvrdnja nužno ekvivalentna s tvrdnjom da je ograničeno telo konačno veliko *bez obzira kojom se merom* (καταμέτρημα) *meri*. Zaista, kojom god merom da merimo neko ograničeno telo, u rezultatu će se pojaviti neki konačni broj.

(4) Prethodna činjenica, naime to što broj delova s veličinom ne može biti beskonačan kod ograničenog tela, uzima se kao da implicira da taj broj mora biti *određen konačan broj*. To se vidi po tome što minimalne veličine predstavljaju *apsolutnu meru* svega velikog i malog. Ograničena tela su zato nužno na *određen* način ograničena.

(5) Najzad, pošto je proces deljenja u bilo kojem smislu ograničen upravo *zato što* je broj delova *određeni* konačan broj, a ne obrnuto, broj delova atoma je *uvek isti* određeni konačan broj, ako su atomi jednake veličine; delovi ne nastaju tek deljenjem.

Epikur je, kao i rani atomisti, prihvatio sve premise iz Zenonovog dokaza protiv mnoštva *izuzev pretpostavke* o neograničenoj deljivosti. Ali, za razliku od Leukipa, i Demokrita, on je ovu deljivost ograničavao i *apsolutno* (za delove inače fizički nedeljivih atoma) i zato su njegove minimalne veličine ne samo fizički već i geometrijski, prostorni atomi, ono što smo zvali *toponima*.

Da se za razliku od uobičajenih geometrijskih tačaka ove geometrijske minimalne veličine po Epikuru mogu dodirivati i slagati, jasno je na osnovu kraja **57**. Završavajući raspravu o tome da je nemoguće da ono što je ograničeno (τὸ πεπερασμένον) sadrži beskonačno mnogo delova, Epikur daje sliku postepenog odstranjivanja krajeva, i to misaonog, teorijskog (καθ' θεωρητόν). Očigledno su ovi krajevi (τὰ ἄκρα) one minimalne veličine koje su mera svake druge veličine (vidi *Epicurus*, **58**). Njihovim oduzimanjem telo se *smanjuje*. Epikurov ἄκρον nije Aristotelova στιγμή (tačka). Odstranjivanje ovih krajeva ne može se neograničeno produžavati kod tela, koje je na sve strane ograničeno, koje u svim pravcima *ima krajeve*.

Služeći se ponovo analogijom, Epikur u **61–62** uvodi najmanje kontinuirano vreme (ἐλάχιστος συνεχὴς χρόνος). Mada nije sasvim jasno da li je ovo najmanje kontinuirano vreme ujedno i najmanje zamislivo vreme (teorijski posmatrano) (λόγῳ θεωρητὸς χρόνος) pre izgleda, s obzirom na to kako Epikur opisuje kretanje atoma, da nije.[3] Nezavisno od ovoga opisa kretanja, u Epikurovo vreme već ustaljena upotreba reči συνεχές vezuje se za stvari ili veličine čiji se delovi kontinualno didiruju, pa ako se Epikur držao te upotrebe, onda bi kontinuirano najmanje vreme imalo vremenske delove. Tek bi ovi delovi mogli biti apsolutno nedeljivi, znači i misaono.

Za atome se kaže da se nužno kreću jednakom brzinom (καὶ μὴν καὶ ἰσοταχεῖς ἀναγκαῖον τὰς ἀτόμους εἶναι) kad se kreću kroz prazninu dok im se ništa ne opire (ὅταν διὰ τοῦ κενοῦ εἰσφέρωνται μηδενὸς ἀντικόπτοντος). Zaista, i *kretanje je kvantizovano*, i svaki se najmanji deo atoma koji se kreće u svakom najmanjem mogućem vremenskom intervalu nađe u narednom prostorno najmanjem vremenskom intervalu. No, kako su fizički najmanji delovi tela atomi, Epikuru je bio neophodan i pojam ἐλάχιστος συνεχὴς χρόνος što je kontinuirani vremenski interval potreban da *ceo* atom napusti mesto (τόπος) na kojem je bio.

Raznolikost brzina dva tela koja mi opažamo moguća je zbog toga što mi ne primećujemo da se tokom vremena koje je potrebno za opažanje (ἐν αἰσθητῷ χρόνῳ) (*Epicurus*, **47**[b]) nisu svi atomi jednog i drugog dela kretali u smeru kretanja. Razlika u vremenima koja su dvama atomima bila potrebna da pređu neki put objašnjiva je jedino preko činjenice da je ili samo jedan od njih usput *stajao*, ili da je *češće* stajao. Ako se atomi nisu zaustavljali, oni nisu mogli za *različito vreme* preći *isti put*, i ako su se ipak našli na istom rastojanju od početka, jedan od njih je *skretao* s puta. To je tako i u finitizmu Branislava Petronijevića.

Iako antiinfinitistički ovaj odgovor na *Strelu* u nečemu je sličan mnogo kasnijem odgovoru Vajerštrasa i Rasela (vidi dole, § 92) i ujedno je i odgovor na *aporiju mesta*. Na jednom određenom mestu, a to znači jednom nedeljivom mestu (*toponu*), kretanje je nemoguće; nedeljivi delovi tela (atoma) su tada samo mogli *proći kroz* takvo mesto ali *ne i kretati se na (po)* njemu (vidi *Mau* str. 46–47). Minimalni delovi tela se ne kreću u minimalnom vremenu (*hrononu*), niti se kreću na mestu na kojem su, niti na mestu na kojem nisu, oni se kreću tako što su u dvama različitim minimalnim vemenskim intervalima (*hrononima*) na dvama različitim mestima (*toponima*).

Epikur je u boljoj poziciji od Vajerštrasa i Rasela utoliko što ne mora da objašnjava kako je minimalni deo tela savladao međuprostor (up. dole, § 114). Dva *hronona* ili dva *topona* mogu biti *susedni*, za razliku od standardnih matematičkih tačaka, koje se *ne mogu dodirivati*. Međuprostor je ispunjen susednim međumestima (*toponima*), kao što je međuvreme ispunjeno susednim *hrononima*.

50. Teškoće geometrijskog atomizma

Ukidanjem neograničene deljivosti uvođenjem minimalnih nedeljivih veličina za prostor i za vreme oslobađamo se mnogih zenonovskih teškoća. Jedinica nije više neodređena, postoji κυρίως ἕν. Ograničeno telo ima tačno određen konačan broj delova. Ograničeno telo nije beskonačno veliko. Preći neki put ne znači savladati beskonačnost korak po korak. Kretanje je moguće iako je određeno telo u svakom trenutku na određenom mestu, onoliko koliko je, zauzimajući prostor koji mu je jednak. Sva određena tela (atomi) kreću se istom brzinom, i kada se dva takva tela kreću u suprotnim smerovima, pređeni put se određuje isključivo odnosom prema mirujućem telu, odnosno kvantizovanoj praznini, tako da se ne može dobiti rezultat po kojem je polovina vremena, puta ili brzine, jednaka dvostrukom vremenu, putu ili brzini.

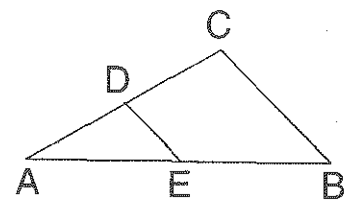
Što se tiče primedbe da se dalja deljivost u jednom trenutku omogućava prostim definicionalnim *fiat*, na nju se može odgovoriti na isti način na koji bi na tu primedbu mogao da odgovori i fizički atomista (vidi § 47).

Što se tiče raskoraka između fizike i matematike na koji je ukazivao Aristotel u vezi sa fizičkim atomizmom (*Aristotle 4*, 303 a 20), on ovde, kod geometrijskog atomizma, jednostavno ne postoji, jer je sama geometrija revidirana. Beskonačna deljivost ni u geometriji više ne postoji, kao što ni geometrijskih tačaka više nema. Ako fizika nije bila kongruentna s matematikom, matematika je učinjena kongruentnom s fizikom.

Glavne teškoće počinju kada se zapitamo da li minimalni, apsolutno nedeljivi delovi prostora imaju neki oblik, kao što ga fizički atomi imaju. Ako na ovo pitanje odgovorimo potvrdno, izlažemo se čitavom nizu nesavladivih teškoća na koje je ukazao autor spisa *O nedeljivim linijama* (vidi *Aristotle 4*, 970 a i dalje). Sve te primedbe počivaju na tome što svaki oblik dozvoljava deobu. Peripatetičar, inače, ima za cilj da svede na apsurd hipotezu o postojanju minimalnih nedeljivih linija. Tako bi, na primer, bio nemoguć trougao sačinjen od minimalnih nedeljivih delova, jer bi njegova visina bila kraća od stranice, pa stranica ne bi bila minimalna linija.

Ako prihvatimo da su *toponi* bez oblika u tom smislu što im je besmisleno pripisivati bilo kakav oblik, onda je, reklo bi se, nemoguće spasti ove entitete od kolapsa u standardnu geometrijsku tačku. No, uzmimo da se ovi entiteti ipak razlikuju od standardnih tačaka po tome i samo po tome što imaju veličinu. Tada je poseban problem to što od ovih entiteta treba da je moguće da se sastave složene veličine kojih oni upravo treba da su mera. Kao što je, opet, pokazao nepoznati Aristotelovac (vidi *ibid.*, 970 a 27 i dalje), trodelne linije, na primer, ili, možemo reći, trodelno telo, ili deo prostora ne bi smeli biti deljivi na dva jednaka dela, jer

bi tada srednji nedeljivi deo bio ipak podeljen. Uopšte, sve što ima ma koji neparan broj elementarnih delova bilo bi nedeljivo na paran broj jednakih delova, kao što bi i obrnuto bio slučaj. To bi onda moralo važiti i za vidljive veličine. A kako ne prhvatiti uobičajene matematičke postupke kojima se svaka data geometrijska veličina može podeliti na proizvoljan broj delova?



Neka je, na primer, linija AB (vidi sliku) sastavljena od neparnog broja elementarnih delova, a linija AC od parnog. Tada postoji mogućnost da se AC podeli na dva jednaka dela, AD i DC. Neka je DE paralelno sa CB. Tada je AE=EB.

Sve ove teškoće opet postaju sasvim operativne u kinematičkim aporijama i to u jednoj francuskoj varijaciji *Stadiona*. Neka AAAA kao i BBBB i CCCC zauzimaju susedne *topone*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & A & A & A & A \\ B & B & B & B\rightarrow & & & \\ & & & \leftarrow C & C & C & C \end{array}$$

i neka AAAA miruje (to sad znači apsolutno miruje). Ako se BBBB i CCCC kreću u smerovima indiciranim strelicama, prvi sledeći položaj biće:

$$\begin{array}{ccccc} & A & A & A & A \\ B & B & B & B & \\ & C & C & C & C \end{array}$$

To znači da će položaj:

```
B B B B
      C C C C
```

biti preskočen. Ako su, međutim, B i C minimalni delovi tela BBBB i CCCC, onda se možemo zapitati zašto se ne bi mogli naći ili zaustaviti u položaju:

```
B B B B
      C C C C
```

Odgovor bi mogao biti da nema *topona* u kojem bi se tako zaustavili, ili dovoljno malog *hronoma* da već tu stanu. Ali šta se dešava ako se paralelno sa CCCC kreće DDDD i to tako da je u početnom položaju situacija ovakva:

```
      A A A A
B B B B—>←D D D D
        ←C C C C
```

BBBB i DDDD će se sudariti upravo kad BBBB i CCCC budu u položaju:

```
B B B B
      C C C C
```

što znači u pola navodnog nedeljivog *hronona* i na pola navodno nedeljivog *topona*. Svejedno je šta će se dalje događati. *Toponi i hrononi* su se pokazali kao deljivi.

Uvođenje sudara u igru dovodi u teškoće i „dvostruki finitizam" (*der zweiformige Finitismus*) Branislava Petronijevića. Za položaj

```
B B B B
      C C C C
```


Petronijević *priznaje* da je preskočen *utoliko* što se potpisivanje $\frac{B}{C}$, odnosno „susret", dešava „u irealnim tačkama prostora" (*in den irreellen Raumspunkten*), pošto se dešava „u stanju kretanja" (*im Zustande der Bewegung*). No irealne tačke susreta postaju *realne* sudarom tela BBBB i DDDD.

51. Kinematički atomizam

Svejedno je da li se kvantizuje i prostor i vreme ili samo prostor, *Stadion* je u francuskoj interpretaciji jednako poguban po takve teorije. U poslednjem primeru, dodajući telo DDDD prisustvovali smo sudaru na pola *topona*, i to je sasvim dovoljno. Da li se možda stvar menja ako se kvantizuje samo vreme a ne i prostor? Džejms (*James*, gl. 7), Vajthed (*Whitehead 2*, str. 53, 103–107, 468) i Vajs (*Weiss*, str. 223–228) učinili su upravo to.

Kombinacijom neogrančene prostorne deljivosti i vremenskog atomizma dobija se svojevrsni kinematički atomizam: telo se izvesno nedeljivo vreme kreće, a pri tom nije unapred određeno koliki će put biti prevaljen. Mada i geometrijski atomizam implicira kinematički, time što se telo mora pomeriti najmanje za jedan *topon*, tek ovde, kod atomizma koji počiva na isključivoj kvantizaciji vremena, epitet „kinematički" postaje opravdan, upravo zato što ovaj atomizam ne proizlazi iz prethodno određene statičke strukture sveta, već je isključivo vezan za prirodu vremena i promene. Vreme se može kvantizovati na dva načina: po analogiji sa fizičkim i po analogiji s geometrijskim atomizmom. U prvom slučaju ono nedeljivo vreme je vreme nekog određenog nastajanja, u drugom slučaju ono je minimalno nedeljivo vreme bilo kojeg nastajanja.

Džejms je bez navođenja posebnih razloga smatrao da je nemoguće rešiti zadatak kod kojeg „uslovi moraju biti ispunjeni *seriatim*" (*James*, str. 93) ako je serija uslova beskonačna. Ako se Ahilov zadatak da stigne kornjaču može opravdano opisati onako kako ga je opisao Zenon, onda ga on ne može izvršiti (*ibid.*, str. 81–82, 87). Ali, „ako bi po teoriji diskontinuiteta, vreme, promena itd. rasli u konačnim priraštajima ili kapljicama, onda ili ništa ne nastaje, ili izvesne jedinice kvantiteta nastaju eksplozijom, 'jednim udarcem'" (*ibid.*, str. 80). Tako čak i ako prostor koji je pred Ahilom u njegovom zadatku možemo *neograničeno deliti samo kretanje* ne bi bilo moguće *beskonačno podeliti*, tražeći da Ahil put savlada korak po korak prema *tako* dobijenoj sukcesiji delova.

Stanislav Kvan je u svom rešenju *Ahila* tvrdio da je ceo argument aporije vođen „izvanrednim mentalnim prebacivanjem od *vremena* na *rastojanje*, od *rastojanja* na *vreme*" (*Quan*, str. 485, nap. 5). To nije tačno utoliko što se problem formuliše kao problem savladavanja beskonačno mnogo deonica ograničenog puta bez obzira na vreme. Ali jeste tačno da pri fiksiranoj brzini kretanja i pri zabrani neograničene deljivosti vremena Ahil, bar ukoliko se kreće neometano, može načiniti samo određen broj „koraka", „skokova" ili „pomicaja" na putu koji mu je određen, te da *utoliko* on ne savladava beskonačnost korak po korak.

Vremenski atomizam Džejmsa, Vajtheda i Vajsa pre dozvoljava analogiju sa fizičkim nego s geometrijskim atomizmom. Vremenske jedinice su nedeljive samo ukoliko se radi o sadašnjem vremenu, to jest vremenu nastajanja. Džejms dozvoljava da je prošlo vreme beskonačno deljivo (*James*, str. 86), a za Vajtheda je „vremenska sukcesija atomična" (*Whitehead 3*, str. 156, 165) ne po tome što ovi atomi vremena, koji su trajanje *jednog* događaja (*ibid.*, str. 166), ne bi ni u kojem smislu imali delove, već po tome što se oni „ne realizuju preko (*via*) svojih *sukcesivnih* deljivih delova, već su dati *zajedno sa (with)* njima" (*ibid.*, str. 164–165). Vajs je pak govorio da je vreme tip serijalnog poretka koji se od ostalih razlikuje po tome što „sadašnji trenutak" zahteva posebnu „boju" kojom bi se razlikovao od prošlog i budućeg vremena (*Weiss*, str. 221–222). Ako je prošlost neograničeno deljiva, trenutak nastajanja nije.

Kinematički atomizam zasniva se, dakle, na uverenju o postojanju „velike disanalogije" između prostora i vremena, pošto se uzima da to što pređeni put, ili prošlo vreme (vidi *James*, str. 86), dozvoljavaju neograničenu deobu, ne znači da i samo kretanje, ili vreme nastajanja, to dozvoljavaju. „Činjenice se", kaže Džejms (*ibid.*, str. 94), „ne opiru pojmovnom tretmanu; ali mi ne moramo verovati da on nužno reprodukuje operaciju kojom su one prvobitno nastale". Zato je moguće, kako to iskazuje slavna Vajthedova rečenica (*Whitehead 2*, str. 53), da „ima nastajanja kontinuiteta iako nema kontinuiteta nastajanja". Ovde se o kontinuitetu ne govori samo u aristotelovskom smislu kontinualnih dodirivanja delova neke veličine, već i u deriviranom, matematičkom smislu, po kojem kontinuirana veličina ne može imati deo koji sam nije kontinuirana veličina, utoliko što se u njemu mogu otkriti novi delovi koji se kontinualno dodiruju. Svaki deo onoga što je nastalo ima kao ekstenzivna veličina levi i desni deo koji su razdvojivi i koji se mogu uzeti samostalno, ali „pulsaciono vreme", kako ga naziva Vajs (*Weiss*, str. 228), čiji „gutljaji" (*ibid.*, str. 233) doduše jesu uređeni relacijom koja je tranzitivna, asimetrična i koneksivna, nije takvo da je *sadašnji* trenutak, predstavljen posebnom bojom (*ibid.*, str. 221–226), koji je trenutak nastajanja, sam kontinuirana veličina.

52. Teškoće kinematičkog atomizma

Kvantizacija samo vremena, naročito u obliku u kojem je to razradio Vajthed, ima mnoge pogodnosti za rešavanje naših teškoća. Za razliku od geometrijskog atomizma, u kinematičkom atomizmu se geometrija ne mora revidirati. Samim tim otpadaju teškoće vezane za prostorni oblik, a vremenske jedinice i onako nemaju nikakvog oblika. Ako se izričito tvrdi da disanalogija između prostora i vemena ne dozvoljava da se vreme predstavlja poput usmerene kontinuirane linije, onda se neposredno ne mogu pronaći paradoksi vezani za nedeljive linije.

Teškoća oko beskonačnosti konačnih predmeta koja je vezana za Zenonov dokaz u B 1 otklonila bi se tako što bi se prihvatila dva smisla ili dva aspekta konačnosti, odnosno beskonačnosti. Određena konstrukcija, izvesna geometrijska progresija na primer, otkrivala bi aspekt u kojem je predmet beskonačan, ali bi se u bilo kojem aktu kretanja, ili obuhvatanja predmeta, pokazala njegova konačnost, i utoliko jedinstvenost, zbog toga što je vreme u kojem se to dešava kvantizovano: ima nastajanja kontinuiteta ali ne i kontinuiteta nastajanja. Inače, što se tiče argumenta u B 3, prihvatilo bi se da ne postoji κυρίως ἕν.

Jasno je kako se izlazi iz prve dve kinematičke aporije. Postoji prvi pomicaj, ali nije određeno koliki on mora biti. Ova neodređenost *ne implicira* da prvi pomicaj nije strogo prvi zato što bi mogao biti manji i utoliko razloživ. Prvi akt je nedeljiv utoliko što je vreme u kojem se on odigrao nedeljivo kao vreme nastajanja (kao sadašnje vreme), iako je put koji je time savladan – ne samo deljiv kao svako prostorno rastojanje, već je i kao *pređeni* put mogao biti manji nego što *de facto* jeste. To je odgovor na *Dihotomiju* (vidi *Whitehead 3*, str. 156). Ahil će, pak, stići kornjaču, jer nema pred sobom zadatak da načini beskonačan broj koraka. Njegovi koraci se ne mogu određivati *mestom* gde je kornjača, već *vremenom* u kojem ih čini.

Vrlo je zanimljivo razmotriti kako bi tačno izgledao odgovor na *Strelu*. Gde je strela u jednom *hrononu* u kojem se ostvaruje pomicaj? S jedne strane, budući da prostor nije kvantizovan, strela

bi trebalo da prođe kroz razne međupoložaje s obzirom na dve krajnje pozicije. S druge strane, s obzirom na to da je vreme kvantizovano, ona u jednom *hrononu* ne bi mogla biti u jednom a *zatim* u nekom drugom položaju. Da li je ona međupoložaje preskočila? Blejk (vidi *Blake*, str. 648) misli da se ne može opravdano govoriti da s jedne strane „konačni koraci" imaju pravih delova, dok s druge strane oni nisu sukcesivni. Ali, kinematički atomizam *može* da *odbije* da prihvati da je naša dilema uopšte smislena: jedino bi se moglo reći da se u jednom *hrononu* strela *nalazi u prostornom intervalu* koji je *po isteku hronona* savladan. *Ne može* se sa smislom govoriti o tome da je ona *bila* u bilo kojem *međupoložaju*, kao što se ne može reći ni da *nije bila*, to jest da je taj položaj preskočen.

Na žalost kinematičkih atomista, pitanje koje se u *Streli definicionalno isključuje* može se operacionalno *nametnuti* u jednoj varijaciji *Stadiona*, čime se i cela strategija koja počiva na ovakvom razbijanju „velike analogije prostora i vremena" izjalovljuje.

Neka dva tela krenu jedno drugom u susret jednakim brzinama. Neka je situacija takva da bi za jedan *hronon* trebalo da savladaju prostor koji ih razdvaja. Tela će se sudariti. Ali kada? Posle pola *hronona*? Kako god da se shvati nedeljivost vremena, bilo *apsolutno*, bilo na Vajthedov način, kao nedeljvo s obzirom na neko određeno *nastajanje*, ono se *upravo kao vreme nastajanja* može načiniti *beskonačno deljivim* ovakvim sudarima, tako da se time ili glavna teza kinematičkog atomizma svodi na apsurd, ili naš *staccato* trkač ponovo oživljava, a s njim i sve teškoće *staccato* varijacije Ahila (§ 20). *Koliko* se sudara može dogoditi *tokom* Ahilovog puta? Šta se dešava ako se intervali među sudarima smanjuju geometrijskom progresijom?

C. FINITIZAM

53. *Negativno i pozitivno određenje finitizma*

Negativno određeno, finitista će biti svako ko ili tvrdi da se uopšte *smisleno ne može reći,* ili tvrdi da se o bilo čemu, ili, specifično, samo o nečem određenom ali za nas relevantnom, *ne može istinito reći* i da je ograničeno i da ima – ili da sadrži, ili da je sastavljeno od – beskonačno mnogo delova. Tako bi, na primer, po nekim finitistima bilo nemoguće reći, ili ne bi bilo tačno reći, da kamen ima – ili da sadrži, ili da se sastoji od – beskonačno mnogo delova. Isto tako bi moralo da važi za Ahilov put, ili za vreme u kojem on stigne kornjaču, ako je, naravno, uopšte može stići. Za ovako određenog finitistu, zadatak koji bi trebalo obaviti u beskonačno mnogo koraka nije moguće izvršiti; beskonačnost se ne može savladati korak po korak.

U smislu ovog, negativnog određenja, finitisti su i oni koji prihvataju rezultat negativne dijalektike i svi atomisti, u najmanju ruku u domenu u kojem zagovaraju atomizam, kao, u relevantnom domenu, i svi oni čiji će pokušaji izlaženja iz teškoća biti svrstani u radikalni empirizam i indefinitizam. Negativno određen finitizam suprotstavljen je infinitizmu, stanovištu po kojem nije

besmisleno, ili nije lažno, ili u najmanju ruku nije nužno lažno reći za nešto što je ograničeno da ima – ili da sadrži, ili da se sastoji od – beskonačno mnogo delova. Inače, stanovište pozitivne dijalektike suprotstavljeno je svim stanovištima, pa je tako, negativno određen finitizam, osim infinitizmu, suprotstavljen i tom stanovištu.

S argumentima protiv infinitizma već smo se sretali. U ovom delu ćemo ih sakupiti i detaljnije razmotriti, i to će biti prvi deo zadatka. Tek potom ćemo se pozabaviti finitizmom u užem smislu, koji će biti *pozitivno* određen i time izdvojen u odnosu na ostala stanovišta koja su takođe suprotstavljena infinitizmu.

54. *Jezičko-logički razlozi protiv infinitizma*

U pobijanju infinitizma često se koristila okolnost što reći da se nešto što je ograničeno, i utoliko konačno, sastoji od beskonačno mnogo delova deluje kao protivrečnost i, utoliko, *besmislica.* Videli smo da se verovatno već Zenon u svojim dokazima pozivao na ovu jezičku, ili jezičko-logičku, „činjenicu".

Aristotel je u odgovoru Zenonu doduše naglašavao da postoje *dva* smisla u kojima se govori o beskonačnosti, te da se na dva načina govori (διχῶς λέγεται) o tome da su razdaljina (μῆκος), ili vreme (χρόνος), ili uopšte nešto kontinuirano (συνεχές), beskonačni (ἄπειρον), ali je i on prihvatao kao *nesporno* da se *samo* s obzirom na deljivost (κατὰ διαίρεσιν) (*Aristotle 22,* 233 a 24) može o nekoj konačnoj razdaljini govoriti kao o beskonačnoj; ova je, naime, samo neograničeno deljiva, ali se ne sastoji od beskonačno mnogo delova. Na jednom drugom mestu (*ibid.,* 263 b 8–9) Aristotel je to izrazio tako što je govoreći o liniji (γραμμή) tvrdio da je to što ona ima neograničeno mnogo polovina (ἄπειρα ἡμίσεα) akcidentalno (συμβέβηκε), dok je njena suština (οὐσία) druga (ἑτέρα).

No, nisu li možda upravo *teškoće* koje stvara Zenonova dijalektika bile razlog što je Aristotel ovako govorio o liniji i o kontinuiranim veličinama uopšte?

Makar koliko ove teškoće bile razlog što Aristotel *insistira* na razlikovanju dva smisla beskonačnosti i što razlikuje prirodu (suštinu) linije od njenih akcidentalnih svojstava, one se *ne navode kao razlog za uvođenje* tih razlikovanja. Izgleda, naprotiv, da i Aristotel pre smatra *neposredno očiglednim* da se ograničena, i utoliko konačna, veličina ne sastoji od beskonačno mnogo delova, kao što se beskonačnost ne može savladati korak po korak. Ne počiva li ova neposredna očiglednost na argumentu koji se poziva na *faktičku upotrebu* jezika?

Nisam siguran da je Aristotel bio dovoljno svestan u kojoj se meri ovde koristio *analizom pojmova* dela i celine, a u kojoj meri *svođenjem na apsurd* infinitističke teze koje bi sadržalo i dodatne premise. U svakom slučaju, čisto pojmovna analiza i argument koji se poziva na jezik najjasnije se vide u sličnom Lokovom razmatranju prostorne beskonačnosti.

Lok razlikuje „ideju beskonačnosti prostora" (*the idea of the infinity of space*) od „ideje beskonačnog prostora" (*the idea of a space infinite*) (*Locke*, knj. 2, gl. 17, § 7, str. 334–335). Prva se ideja odnosi na prostor i jednu njegovu osobinu, na činjenicu da je moguća „neograničena progresija duha" u dodavanju novih i novih prostranstava. U ovoj ideji Lok ne vidi ništa protivrečno. No, ono što „sadrži otvorenu protivrečnost" to je druga ideja, koja se ne odnosi više na prostor i jednu njegovu osobinu – osobinu beskonačnosti, već na samu beskonačnost, beskonačnost u vidu prostornosti (*the space infinite*). Protivrečnost se javlja zbog toga što ova ideja pretpostavlja „da je duh već prošao i da stvarno ima pogled na *sve* ponovljene ideje prostora..." (*ibid.*, *loc. cit.*) (*podvukao M. A.*). Beskonačnost se, dakle, ne može *obuhvatiti*, ona ne može biti *celina* i ne može se kod beskonačnosti sa smislom govoriti o svim elementima celine. Celina s beskonačno mnogo delova je *contradictio in adiecto*.

Kod Kanta je sasvim jasno da je svejedno da li je beskonačni niz divergentan ili konvergentan, „pošto nikakva kombinacija beskonačnog mnoštva" ne može dati „celinu" (*Kant 1*, str. 284–285). „Telo je zato beskonačno deljivo a da se ne sastoji od beskonačno mnogo delova" (*ibid.*, *loc. cit.*).

Kamen se ne može sastojati od beskonačno mnogo delova prosto zato što je kamen, a to znači nešto jedinstveno i celovito. Ovo je jedan način da se shvati izjava Te Henepea (*TeHennepe*, str. 47), da „kamen *nema* beskonačan broj delova, pošto, ma koliko da ih *ima*, čak je na svakom stupnju beskonačne deobe ovih delova konačno po broju". *Analitički* je istinito da kamen, utoliko što je jedno ograničeno celovito telo, ima konačno mnogo delova.

Te Henepe je potpuno analogno dokazivao ono što je mnogima bilo još očiglednije, a što su ipak, kao što smo u prvom delu videli, neki osporavali, da se, naime, beskonačnost ne može savladati korak po korak. „Ako mi se kaže da 'završim, počevši i ne zaustavljajući se posle bilo kojeg konačnog broja', tada se ili ja natežem u pravcu omnipotencije (mada čak i omnipotencija ne bi mogla da ostvari ono što je samoprotivrečno), *ili se jezik nateže do tačke neupotrebljivosti*" (*ibid.*, str. 48) (*podvukao M. A.*).

55. *Logičko-matematički argumenti protiv statičkog infinitizma*

Opšti i, u isto vreme, radikalni manevar kojim bi infinitista mogao da obesnaži sve jezičko-logičke argumente, poput onih koje smo upravo razmotrili, bio bi reformisanje jezika. Tako Fajgl i Maksvel, koji smatraju da Zenonovi paradoksi „nastaju u običnom jeziku", predlažu *reformu jezika*, jer paradoksi „mogu da se reše u ne-običnom jeziku" (*Maxwell and Feigl*, str. 492). Oni štaviše dodaju da je, „čak i kad bi moglo da se pokaže da neki od pokušaja rešavanja unutar običnog jezika uspevaju, neobično rešenje dovršenije, celovitije, elegantnije i stvarno jednostavnije".

Infinitizam se ne mora formulisati u *običnom jeziku*, on se može formulisati u *reformisanom jeziku*, a to je, za Maksvela i Fajgla, matematički jezik. Poredeći grčku matematiku i Kantorovu teoriju skupova, Barker u *Filozofiji matematike* (*Barker*, str. 122), konstatuje da „Grci nisu nikada raspravljali o beskonačnim celinama". To je možda tako zbog toga što im je „beskonačna celina" delovala poput „drvenog gvožđa". To je *jedna* od mogućnosti koju dopušta i sam Barker. Ali, ako bi se umesto o veličinama govorilo o *cveličinama* i umesto o celinama o *cvelinama*, (*ibid*., *loc. cit.*), onda bismo za sporni kamen možda mogli da kažemo da je on *konačna cveličina* koja kao *cvelina* sadrži beskonačno mnogo delova, ili možda *gelova*.

Ali, naravno, ne radi se samo o novim rečima, već i o tome *kako* se one upotrebljavaju. *Cvelina* je, svakako, slična *celini* i stvar je procene učesnika u novoj „jezičkoj igri", (up. *Wittgenstein 1*, str. 57–59), igri koju igraju matematičari, hoće li insistirati na novoj reči, ili će zbog dovoljne sličnosti ipak zadržati staru; važno je samo da dopustimo infinitisti da nekako formuliše svoju tezu bez *očigledne protivrečnosti ex vii terminorum* i da pokušamo da ga razumemo.

Dosta plauzibilno deluje pokušaj da se pojam *celine* i dalje ostavi nužno vezan za *konačnost*, ali da se ova konačnost sa svoje strane dalje veže za postojanje *spoljašnje granice*, a ne za *broj delova*. Kamen bi bio konačan utoliko što bi bio ograničen spoljašnjim prostorom i to bi mu davalo potrebnu jedinstvenost da bismo mogli govoriti o njemu kao kamenu, to jest o njemu kao celini. Duž bi isto tako bila ograničena u oba smera delovima linije koji su spoljašnji u odnosu na nju. No, i kamen bi mogao imati beskonačno mnogo delova, i duž bi mogla sadržavati beskonačno mnogo intervala.

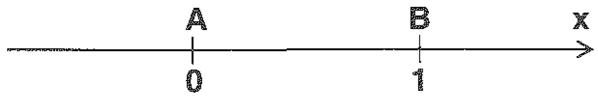
Ostavljajući razmatranje problema infinitezimala i konstitucije entiteta viših iz entiteta nižih dimenzija za kasnije, ovde ćemo se pozabaviti samo argumentima protiv one varijante infinitizma u kojoj se govori o konačnim linijama kao delovima linije, gde su delovi površina uvek konačno velike površine, a delovi tela uvek konačno velika tela, a gde se ne prihvata postojanje nedeljivih linija, površina ili tela.

Mislim da je pokušaj svođenja na apsurd infinitističke teze pod standardnim matematičkim pretpostavkama najubedljivije izveden u tekstovima Bleka (*Black 1* i *2*) i Švajdera (*Schwayder*). Uzmimo neku duž AB (mogli bismo, isto tako, umesto duži uzeti kamen). Pema standardnim matematičkim pretpostavkama, ne postoji interval koji bi bio toliko mali da bi bio beskonačan broj puta sadržan u toj duži. Ako se sad poslužimo neintuicionističkim zaključivanjem od $\neg\exists x \neg f(x)$ na $\forall x f(x)$ videćemo da za *svaki* deo duži važi da je duž konačno velika ako se njime meri. Pošto duž stoga sadrži nužno konačan broj delova bilo koje moguće veličine, izgleda da ipak nema, kao što je u drugom kontekstu rekao Vizdom (vidi *Wisdom 1*, str. 70), dovoljno mesta da se beskonačan broj intervala smesti unutar AB. Infinitistička teza počivala bi na pogrešnoj interpretaciji okolnosti što ne postoji κυρίως ἕν. Mera nije unapred *fiksirana*, ali to ne znači da ona ne mora *uopšte* biti fiksirana. Ne možete, kaže Švajder (*Schwayder*, str. 454), meriti čoveka od šest stopa *bilo kojom* merom, ili *bilo kojim* skupom pravila. Infinitisti *neograničenost* mogućnosti u izboru mere „prodaju" kao *beskonačnost* delova kojima bismo mogli vršiti merenje.

Ali zašto ne bismo mogli zakonomerno *menjati* meru? Ako se u neku duž, recimo duž [0,1], ne može smestiti beskonačno mnogo delova bilo koje moguće ali fiksirane veličine, ne može li se beskonačan broj intervala smestiti na taj način što se ovi intervali smanjuju po geometrijskoj progresiji, tako da je, recimo, n-ti interval određen kao interval $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$, gde je $n = 1, 2, 3, \ldots$? Ako je prirodnih brojeva neograničeno mnogo, zašto ovih intervala ne bi bilo beskonačno? Budući da se članovi niza $S_n = 1, 2, 3, ..., n, ...$ mogu biunivoko korespondirati članovima niza $S'_n = 1/2, 3/4, 7/8, ... (2^n - 1) / 2^n, ...$, skupovi S_n i S'_n su po Kantorovoj definiciji (up. *Cantor 8*, str. 155) ekvivalentni; ako je beskonačan jedan, beskonačan je i drugi. A tada bi i intervala $[(2^{n-1} - 1) / 2^{n-1}, (2^n - 1) / 2^n]$, bilo beskonačno.

Blek i Švajder kao odgovor na ovakav potez infinitiste nude svoje teorije koje ćemo razmotriti u § 57, ali ne nude nikakav direktni *reductio ad absurdum*. Mislim, međutim, da se i ovde *reductio ad absurdum* može konstruisati tako da se na kraju dovede u pitanje bar neka od standardnih matematičkih pretpostavki.

Neka je duž AB zatvoreni inerval [0, 1] na brojnoj osi Ax:



Zapitajmo se da li je beskonačan niz intervala $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$ ($n = 1, 2, 3, ...$) raspoređen duž cele duži AB ili nije. Drugim rečima, postoji li ijedan deo, to jest interval na duži AB, koji ne bi bar jednim delom bio obuhvaćen bar jednim članom niza inervala čiji je opšti član $[(2^{n-1} - 1) / 2^{n-1}, (2^n - 1) / 2^n]$ ili ne? Očigledno ne, pošto za ma koliko mali pozitivni broj ε uvek postoji dovoljno veliko n tako da je $AB - \varepsilon < (2^n - 1)/2^n$. Ali, naravno, ne samo što bar jedan deo intervala $[AB-\varepsilon, B]$ mora biti obuhvaćen bar jednim članom niza intervala $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$, već ne može postojati nijedan deo intervala $[AB-\varepsilon, B]$ za koji to ne bi važilo, pošto bi u protivnom taj neki deo inervala $[AB-\varepsilon, B]$ bio interval koji nijednim delom ne bi bio obuhvaćen bar jednim članom niza intervala $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$. Smemo li zaključiti da su članovi niza čiji je opšti član $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$ raspoređeni duž cele duži AB? Izgleda da smemo, po-

što bi inače, u slučaju da su članovi niza smešteni u nekom intervalu duži AB koji je manji od AB, postojao i neki odgovarajući interval $[AB-\varepsilon, B]$ koji ni delom ne bi bio obuhvaćen nijednim članom našeg niza.

No, s druge strane, nijedan član niza intervala $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$ ne može imati B kao svoju desnu krajnju tačku, prosto zato što ne postoji n takvo da bi bilo $(2^n - 1)/2^n = 1$. Kako to onda niz intervala $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$ obuhvata celu duž AB, ako tačka B nije desna krajnja tačka nijednog od tih intervala?

Mogući odgovor infinitiste koji bi sve ovo dosad prihvatio bio bi da članovi niza obuhvataju celu duž *izuzev* krajnje tačke B; oni bi bili smešteni u poluotvorenom intervalu [A, B), a ne u zatvorenom intervalu [A, B]. Ne postoj nijedan *interval* na duži AB na kojem nema članova niza $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$, rekao bi on, ali postoji tačka, naime tačka B, koja nije krajnja tačka nijednog od intervala niza.

No, šta znači isključiti tačku iz nekog intervala? Dve tačke se ne mogu dodirivati (up. *Aristotle 22*, 231 a 30, 231 b 7, 264 a 4–5), ne postoji prva leva tačka u odnosu na B, da bismo samo tačku B mogli isključiti. Šta znači da nijedan interval $[AB - \varepsilon, B]$, gde je ε proizvoljno malo, ne treba isključiti, a da ipak tačku B treba isključiti? *Tradicionalno geometrijski*, taj zahtev nema smisla. Ukoliko ostane na svom zahtevu, da se samo tačka B isključi, infinitista dolazi u sukob sa fundamentalnim geometrijskim pretpostavkama.

Tako infinitista, govoreći o intervalu u kojem su smešteni svi intervali $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$ (n=1, 2, 3, ...), ne sme iz duži da isključi nijedan mogući, ma koliko mali, interval nalevo od B, jer $\vdash \forall\varepsilon\exists n((AB-\varepsilon)<(2^n-1)/2^n)$, a ne može da isključi ni samo tačku B. No on ne sme da kaže ni da niz intervala $[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n]$ obuhvata ceo zatvoreni interval [A, B], jer $\forall n((2^n-1)/2^n<1)$.

Infinitista mora preduzeti neki *radikalniji* zahvat da bi izašao iz teškoća. Johan Bernuli je, protivno Lajbnicu (vidi *Leibniz 24*, III, str. 536) tvrdio da „ako je broj članova (nekog niza) ∞ (beskonačan), onda mora postojati ∞-ni (beskonačni) član", kao što „nužno postoji deseti član ako je članova 10 i stoti ako je članova 100" (*ibid.*, str. 563). Bernulijeva tvrdnja o postojanju beskonačnog člana niza, u našem slučaju beskonačnog člana niza intervala $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$ vodi teoriji infinitezimala. Za $n=\infty$ interval $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$ je beskonačno mali. Taj interval nije standardna tačka, ali on isto tako nema svojstva standardnog intervala $[AB-\varepsilon, B]$, koji je za ma koliko malo ε činio interval $[A, AB-\varepsilon]$ suviše malim da bi u njega stalo beskonačno mnogo članova niza s opštim članom $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$.

Može li infinitisa ostati infinitista a ne revidirati standardne matematičke pretpostavke? Jedini način za koji ja vidim da mu još stoji na raspolaganju jeste pokušaj *obesmišljavanja dileme* u koju smo ga stavili pitavši ga da li su članovi niza $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$ smešteni duž cele duži AB ili nisu.

Dilema u koju smo gurnuli infinitistu mogla bi se u duhu standardne matematičke interpretacije obesmisliti tako što bi se reklo da se, s jedne strane, članovi niza o kojem je reč *neograničeno približavanju* tački B utoliko što za svako ε postoji n takvo da je $AB-\varepsilon < (2^n-1)/2^n$, ali da, s druge strane, tačku B ipak nikad ne dostižu jer $\forall n \exists \varepsilon((2^n-1)/2^n < AB-\varepsilon)$. No tad se već ne bi radilo o *aktualnoj, statičkoj beskonačnosti*, gde bi *beskonačno mnogo intervala* $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$ *bilo smešteno* na duži AB, već bi se radilo o *potencijalnoj*, ili samo *dinamičkoj beskonačnosti*, gde bi se samo *neodređeno mnogo*, iako po želji uvek sve više, intervala $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$ *moglo smeštati* unutar duži AB. Ovim pokušajem bi infinitista izvršio samoukidanje svoje teze. Ako bi duž AB trebalo da *sadrži* beskonačno mnogo intervala,

o njima bi moralo da se govori *kolektivno*; no u teoremama $\vdash \forall \varepsilon \exists n\, (AB-\varepsilon<(2^n-1)/2^n)$ i $\vdash \forall n \exists \varepsilon((2^n-1)/2^n<AB-\varepsilon)$ univerzalni kvantifikator moramo čitati „za svako od ...", a nipošto „za sve... zajedno...", inače ćemo dobiti kontradikciju. Infinitista se može spasti teškoća tako što zabrani da se govori o svim članovima niza kolektivno, ali time on čini zahvat koji njegova teza ne može da preživi.

Izgleda, dakle, da pod standardnim matematičkim pretpostavkama koje smo eksplicirali postoji *reductio ad absurdum* teze statičkog infinitizma.

56. Logičko-matematički argumenti protiv dinamičkog infinitizma

Imajući u vidu da se pojam *dinamičke* beskonačnosti odnosi na beskonačni *proces* (vidi § 35 g), tezom dinamičkog *infinitizma* zvaćemo tezu po kojoj se bar pod nekim uslovima beskonačnost može savladati korak po korak. Makar koliko je ovo izgledalo *očigledno* nemoguće za većinu onih koji su o tome razmišljali, u dvadesetom veku se našlo dosta poznatih glava koje su ovu tezu branile kao ne samo moguću, već kao tezu koja je u skladu sa razvijenom matematikom i kao u krajnjoj liniji nužnu da bi se razrešili Zenonovi paradoksi (vidi § 3).

U tezi dinamičkog infinitizma ne radi se samo o tome da se put koji Ahil treba da pređe, ili koji je prešao, sastoji iz navodno beskonačno mnogo delova, odnosno intervala, već o tome da bi Ahil *mogao* za konačno vreme da pređe *sve* ove delove jedan *po* jedan jedan *za* drugim i tako stigne na cilj, *ukoliko* su zadovoljeni izvesni uslovi, kao, recimo, uslov da se kreće izvesnom stalnom brzinom, i da intervali puta mogu biti predstavljeni pomoću konvergentnog geometrijskog niza koji konvergira cilju

Ahilovog puta. U svakom slučaju, nepromenjeni moraju ostati uslovi vezani za *vreme* i zato je dobro učinio Vajl što je analogijom sa mašinom koja donosi odluke (vidi gore, § 23) tezu dinamičkog infinitizma predstavio u čistom vidu.

Blek (vidi *Black 1)* i Tomson (vidi *Thomson*) pokušali su da, na u osnovi istovetan način, *svedu na apsurd* tvrdnju da mašine koje smo opisali u § 23 mogu obaviti super-zadatke.[1]

Blek je pošao od premise koja izgleda očigledna, da je, naime, kliker kojim se „Beta" i „Gama" igraju, na kraju, pošto mašine prestanu s radom, nužno ili u levom ili u desnom svemiru. No, ako je u levom, „Gama" nije uspela da izvrši super-zadatak, a ako je u desnom, „Beta" nije uspela. Kako su međutim, zadaci „Bete" i „Game" „tačno paralelni", (*Black 1*, str. 98), *nemoguće je* da jedna uspe a da druga ne uspe da ga izvrši; *svako* je prebacivanje levo praćeno prebacivanjem desno, nijedna mašina nije povlašćena. Dakle, zaključuje Blek, „nijedna mašina ne može da obavi svoj zadatak i naš opis ovih beskonačnih mašina sadrži protivrečnost" (*ibid.*, *loc. cit.*). No dalje, kako je zadatak „Bete" istovetan sa zadatkom „Alfe", ni „Alfa" ne može da izvrši svoj zadatak, što znači da ne može da transportuje beskonačno mnogo klikera u desni svemir, pošto „logička mogućnost postojanja bilo koje od mašina zavisi od logičke mogućnosti postojanja svih..." (*ibid.*, str. 100).

Tomson je rezonovao na isti način. S početkom trećeg minuta lampa je nužno upaljena ili ugašena: *tertium non datur*. Ona, međutim, ne može biti ni upaljena, jer je svako paljenje praćeno gašenjem, ni ugašena, jer je sako gašenje praćeno paljenjem (*Thomson*, str. 411). Dakle, ona nije mogla uspeti da izvrši super-zadatak.

U ovakvom zaključivanju Bleka i Tomsona postoji, nažalost, greška, koju je na najuverljiviji način detektovao Benaceraf (vidi *Benacerraf*). Uzmimo, mada, kao što ćemo videti, ni to nije nesumnjivo, da i u slučaju mesta klikera po prestanku rada mašina,

i u slučaju upaljenosti lampe po isteku dva minuta – važi *tertium non datur*. Tada, pre svega, sama činjenica da je kliker nužno levo ili desno, a lampa nužno upaljena ili ugašena; svakako ne implicira da je kliker nužno levo ili nužno desno, a lampa nužno upaljena ili nužno ugašena. No ni opisi rada „Bete" i „Game" i načina na koji se lampa tokom dva minuta pali i gasi ne impliciraju da je kliker nužno levo ili nužno desno i lampa s početkom trećeg minuta nužno upaljena ili ugašena, a još manje da je kliker, nužno levo i nužno desno a lampa nužno upaljena i nužno ugašena. Opisi se odnose na vreme od četiri minuta, odnosno dva minuta, a potom – početkom petog, odnosno trećeg minuta – kliker može biti levo kao što može biti desno, a lampa može biti upaljena kao što može biti ugašena. Iz toga, naime, što je tokom četiri minuta svakom premeštanju desno sledilo premeštanje levo i obrnuto, *ne sledi* ništa u pogledu položaja klikera *posle četiri minuta*, kao što iz toga što tokom dva minuta svakom paljenju lampe sledi gašenje i obrnuto, *ne sledi* ništa s obzirom na upaljenost ili ugašenost lampe *po isteku dva minuta*.

Ono što je važno u otkriću ovog *non sequitur* koji je sadržan u Blekovom i Tomsonovom zaključivanju jeste to da su opisi rada „Bete" i „Game", i paljenja i gašenja lampe, *analitički spojivi* bilo s kojim od dva položaja klikera po isteku četiri minuta, odnosno bilo s upaljenošću bilo s ugašenošću lampe po isteku dva minuta.

Da bi se u izvršenju super-zadatka pronašla protivrečnost potrebne su *dodatne premise*. Benaceraf sugeriše da u Tomsonovom rezonovanju postoji prećutna premisa da lampa izvršivši super-zadatak ne bi mogla da izvrši i jedan još viši zadatak, neki *super-duper-zadatak* (*ibid.*, str. 772). Ona, paleći se i gaseći se kako je opisano, ne bi mogla ne doći do toga da s početkom trećeg minuta bude upaljena ili da bude ugašena, a bilo kako da izvrši ovaj super-duper-zadatak, rezultat će protivrečiti navodno uspešno obavljenom super-zadatku, jer će upaljenost kao ostvarenje super-duper-zadatka značiti da je u obavljanju super-zadatka postojalo paljenje kojem nije sledilo gašenje, a ugašenost kao ostvarenje super-duper-zadatka značiće da je u obavljanju super-zadatka postojalo gašenje kojem nije sledilo paljenje.

Dodatna premisa, koja treba da omogući *reductio ad absurdum*, ako se ovako formuliše – neodrživa je, i to zbog toga što je i u slučaju klikera i u slučaju lampe po isteku četiri, odnosno dva minuta, ipak *tertium datur*. Izvršenje super-zadatka *ne povlači za sobom* ostvarenje navodnog super-duper-zadatka, prosto zato što kliker upravo s istekom četvrtog minuta može iščeznuti, kao što se lampa upravo s istekom drugog minuta može razbiti. Benaceraf daje duhovit primer (*ibid.*, str. 774) za to kako je u slučaju prelaženja nekog puta AB = [0, 1] moguće preći ga celog a niti proći niti se naći u B! Trkač je demon koji se smanjuje kako se približava kraju puta, tako da upravo kad dodirne interval koji počinje krajnjom tačkom njegovog puta – nestane. Ako je prelaženje puta AB super-zadatak, njegovim ostvarenjem se *ne mora*, dakle, ostvariti super-duper-zadatak – prelaženje kroz ili zaustavljanje u B.

Ako strogo i univerzalno želimo dokazati nemogućnost ostvarenja super-zadatka, ne smemo se pozivati na neki od navedenih viših zadataka, koji predstavljaju zadatak reda $\omega+1$, gde je ω prvi beskonačni ordinal. Kontingentno je, a ne nužno, što se ostvarenjem prvog možda ostvaruje i neki od navedenih viših zadataka. Zaista, izgleda da ni π-mašina ni Peano-mašina ne ostvaruju nikakav zadatak reda $\omega + 1$ time što ispisuju ili recituju decimale broja π, odnosno prirodne brojeve, kojih je $\aleph_0$.

Uočivši grešku u Tomsonovom zaključivanju i demonstrirajući kako obavljanje super-zadatka ne povlači nužno za sobom i obavljanje jednog određenog još višeg zadatka, Benaceraf je odustao od traženja skrivenih premisa koje bi trebalo da omoguće

reductio ad absurdum mogućnosti izvršenja super-zadatka. Iz njegovog zaključka vidi se da je on vrlo skeptičan u pogledu mogućnosti pronalaženja odgovarajućih „pomoćnih premisa" (vidi *ibid.*, str. 781 i dalje), koje bi omogućile traženo svođenje na apsurd. Mada priznaje „da ne postoje okolnosti koje bismo mogli zamisliti i opisati u kojima bi bilo opravdano reći da je izvršen beskonačni niz zadataka" (*ibid.*, str. 782), Benaceraf naglašava da ta nezamislivost ne znači logičku nemogućnost. „Nešto nije logički nemoguće samo zato što mi ne možemo zamisliti kako bi to izgledalo" (*ibid.*, *loc. cit.*). Uostalom, možda se nekome činilo da je *protivrečno* reći da je neko prešao izvestan put a da nije niti nastavio niti se našao na kraju tog puta, upravo zato što nije mogao da *zamisli* kako bi to izgledalo, odnosno nije mogao da *opiše uslove* pod kojima bi to moglo biti slučaj. Pa ipak, *posle opisa* iščezavajućeg demona koji taj put prelazi, možda će taj isti neko promeniti mišljenje. Logička nemogućnost se striktno mora izvesti, intenzionalno ili strukturalno – *ex vii terminorum* ili iz izvesnih premisa – a ne sme se koristiti argument na osnovu nezamislivosti.

Ipak mislim da je Benaceraf odustao isuviše rano i da su Blek i Tomson bili na pravom putu.

Pođimo od primera u kojima bi mašine izvršivši Tomsonov super-zadatak *de facto* izvršile i Benacerafov super-duper-zadatak, od primera, naime, u kojima kliker *jeste* levo ili desno s početkom petog minuta, a lampa *jeste* upaljena ili ugašena s početkom trećeg minuta. Da li bismo *bar u ovim slučajevima* mogli izvesti da je protivrečno reći da je mašina izvršila super-zadatak? Uzmimo da je kliker po prestanku rada „Bete" i „Game" u desnom svemiru. Kako se on tu zatekao? Svakako ne drukčije nego tako što je tu bio prebačen iz levog svemira. Ali, kada se to dogodilo? Da li se on tu našao *upravo s početkom* petog minuta, ili je već *neko vreme* bio tu pre početka petog minuta? Ako se tu zatekao *upravo s početkom petog* minuta, onda to znači da ga je

„Beta" prebacila iz levog svemira tokom nekog, koliko god se želi malog, vremenskog intervala kojim je četvrti minut istekao, tako da je definitivno prestala da radi kad se kliker tamo našao, a „Gama" nije imala kad da počne da ga vraća u levi svemir, jer i ona radi samo tokom četiri minuta. Ma koliko da je mali ovaj vremenski interval u kojem je „Beta" poslednji put prebacila kliker u desni svemir (osim ako nije „beskonačno mali", to jest vremenska infinitezimala) može se *tačno izračunati*, shodno ritmu u kojem „Beta" i „Gama" rade, koliko je prebacivanja levo-desno izvršeno u vremenu koje se dobija kad se taj interval oduzme od vremena od četiri minuta. Tako dobijeni broj prebacivanja je nužno konačan, i ni „Beta" ni „Gama" nisu izvršile super-zadatak. Ako je, pak, kliker bio u desnom svemiru već neko vreme pre početka petog minuta, onda to direktno protivreči pretpostavci da „Gama" ne prestaje sa radom pre isteka četiri minuta. Naravno, isti način svođenja na apsurd primenljiv je i u slučaju da se kliker po prestanku rada „Bete" i „Game" našao u levom svemiru.

Slično je kod Tomsonove lampe. Ako se upalila upravo s početkom trećeg minuta, onda je pre toga neko, ma koliko kratko, vreme morala biti ugašena. No za svako vreme koje se dobije kad se od dva minuta oduzme bilo koji, ma koliko mali vremenski interval, važi da se *tačno može izračunati* koliko je paljenja i gašenja izvršeno shodno ritmu u kojem se to dešava. Taj broj je konačan, i super-zadatak nije izvršen. Ako je pak lampa već neko, koliko god se hoće kratko, vreme pre početka trećeg minuta bila upaljena, onda je ona u tom vremenu trebalo da bude i ugašena, i može se tačno izračunati kada.

Dakle, ako se analogno prostornim ne uvedu vremenske infinitezimale kojih bi bilo potrebno beskonačno mnogo da bi se konstituisao neki vremenski interval, pretpostavka o tome da su mašine izvršile super-zadatak izvršivši *de facto* i jedan super-duper-zadatak pokazuje se protivrečnom.

Zasad smo pronašli protivrečnost pod glavnom pretpostavkom, da mašine obavivši super-zadatak izvrše *de facto* i super-duper-zadatak. Šta je sa slučajevima u kojima ne važi *tertium non datur*, ili sa situacijama kada, kao kod π-mašine ili Peano-mašine, ničega posle obavljenog super-zadatka nema? Da li je tada ipak neprotivrečno reći da se super-zadatak može obaviti?

Izgleda da se *svaka* relevantna situacija može *uvek* tako interpretirati da opis super-zadatka *implicira* i super-duper-zadatak. Tako se u slučaju lampe koja se po isteku dva minuta razbije može reći da je to razbijanje bilo super-duper-zadatak, pa se onda, sledstveno tome pitati da li je ona u trenutku razbijanja bila upaljena ili ugašena. Može se, čak, super-duper-zadatak uvesti *protivčinjenično*, samo da bi se omogućio *reductio ad absurdum*. Za Peano-mašinu se može pretpostaviti da ona po isteku jednog minuta počinje ponovo da recituje prirodne brojeve, ili da u inverznom ritmu počinje da ih recituje unazad. Za kliker se pak može dopustiti da je on tačno na sredini, da je, naime, polovinom u levom a polovinom u desnom delu svemira, i pitati se *odakle* je dospeo u taj položaj. Odakle god da je došao, dolaženje je moralo trajati izvesno vreme, i put svođenju na apsurd se otvara.

Akti mašina opisani su kao sukcesivni i kao akti koji izvesno vreme traju, kod nekih mašina još i kao strogo diskretni (vidi § 23). Rekurzivno je ta osobina akata *sačuvana*. Zato ne može nastupiti nikakvo stanje u momentu prestanka rada mašina, ili tačnije, s početkom vremenskog inervala u kojem one više ne rade, a da tom stanju nije prethodilo stanje u kojem je vršen jedan određeni akt. Odgovoriti da je u svakom, ma koliko malom, vremenskom inervalu pre prestanka rada obavljeno beskonačno mnogo akata, znači izvršiti *ignoratio elenchi*, jer mi smo se, pitavši se o stanju, pitali o *aktu*, a *ne o vremenskom intervalu*. Mi nismo pitanjem fiksirali *vreme pa* tražili odgovor o broju akata, već smo se pitali o aktu *bez obzira* za koje je vreme izvršen.

Lampa je bila *upaljena ili ugašena* u trenutku kad je razbijena. Kliker je, ako je ostao u sredini, došao *s leve ili s desne strane*, ako je iščezao, iščezao *ili u levom ili u desnom svemiru, ili na sredini*, ali dospevši tu *s leve ili s desne strane*. Svako dospevanje pak trajalo je izvesno vreme.

Vejtling i Ričard Tejlor su dobro zapazili da se ceo problem kreće oko akta koji prethodi stanju prestanka rada mašina, odnosno oko poslednjeg akta koji je mašina izvršila (vidi *Watling*, str. 41, 42, 46, *R. Taylor 1*, str. 40, 43), pa su infinitističku tezu branili time što su naglašavali da u izvršenju beskonačno mnogo akata „dovršenje ne sme da se pobrka sa izvođenjem poslednjeg akta" (*Watling*, str. 41) i tvrdili da „protivrečnost nastaje samo ako poverujemo da za bilo koji od akata mora postojati neposredno prethodeći" (*ibid.*, str. 46), a da to što „neka serija nema poslednji razlučiv član i otuda 'kraj' u tom smislu, teško da povlači za sobom da se ona ne završava" (*R. Taylor 1*, str. 43). Tejlor i Vejtling bi, dakle, hteli da nam onemoguće željeni *reductio ad absurdum* time što bi nam obesmislili pitanje o tome da li je lampa gorela kada se razbila i odakle je kliker prispeo tamo gde je.

Podsećanje na to da beskonačni niz „*po definiciji* nema oba..., i prvi i poslednji (beskonačni) član" (*ibid.*, str. 40) (*podvukao M. A.*), ne može se po sebi konstituisati razlog za ono što Tejlor i Vejtling tvrde, jer problem se ne može rešiti *pozivanjem na definiciju* tamo gde su upravo u pitanju *uslovi za njenu primenu*. Problem je, naime, u tome *da li uslovi sadržani u opisu* rada mašina *dozvoljavaju* da se niz akata po prestanku rada mašina ispostavi kao beskonačan, pa je u istom smislu upravo *problem* da li je moguće da shodno tim uslovima ne postoji *poslednji član u nizu pre prestanka rada*. Zato obesmišljavanje pitanjâ o tome da li je lampa gorela kad se razbila i odakle je kliker stigao tamo gde je, ne sme da se izvrši *po definiciji*, nego se moraju ponuditi *nezavisni razlozi*. Mi se *ne* pitamo da li beskonačni niz ima poslednji član,

već da li je moguće da opisani niz akata mašina nema poslednji član pre prestanka rada.

Ako bi mašine radile u izvesnom drugačijem ritmu, problem analogan našem trenutnom možda se ne bi postavljao. Ako, na primer, lampa naizmenično jedan minut gori, jedan minut ne gori, i ako pretpostavimo da se to neograničeno nastavlja, onda očigledno nema poslednjeg akta u nizu paljenja i gašenja i nema ničega što bi to dovodilo u pitanje. Ali, ako je lampa, kao u našem slučaju, u jednom trenutku razbijena, onda je to situacija koja sadrži *nove ograničavajuće uslove*. Zašto pitanje o tome da li je ona bila upaljena kada je razbijena ne bi bilo smisleno, kada se njeno paljenje i gašenje odvija u vremenskim intervalima koji, po definiciji, imaju trajanje?

Tejlor i Vejtling očigledno računajući na to što, pod pretpostavkama koje zajednički usvajamo, ne možemo navesti nikakav vremenski interval koji bi prethodio razbijanju lampe u kojem bi bio izvršen jedan jedini akt shodno određenom ritmu u kojem se lampa pali i gasi. Štaviše, rekli bi oni, u bilo kojem intervalu koji bismo naveli trebalo bi da bude beskonačno mnogo paljenja i gašenja. Ali šta odatle sledi u pogledu našeg pitanja? Da li je ono obesmišljeno? Mi se *nismo* pitali *koliko dugo* je lampa bila upaljena ili ugašena pre no što se razbila, *već da li* je bila upaljena ili ugašena pre no što se razbila. Ako na naše pitanje o stanju ili aktu koji je prethodio razbijanju Tejlor i Vejtling odgovore pričom o dužini vremenskog intervala u kojem bi navodni akt trebalo da bude izvršen, onda oni ili čine pomenuti *ignoratio elenchi*, ili misle da *smislenost njihovog* pitanja o dužini trajanja akta koji bi prethodio razbijanju *obesmišljava naše* pitanje o tom aktu.

Uzmimo da Tejlor i Vejtling pokušavaju da ukazivanjem na smislenost svoga pitanja obesmisle naše. Izgleda da oni u tome ipak ne mogu uspeti bez zamene teze ili pozivanja na definiciju tamo gde su zapravo u pitanju uslovi za njenu primenu. Oni nam svojim pitanjem o dužini vremenskog intervala u kojem bi bio izvršen navodno poslednji akt, u stvari, skreću pažnju na to da je opis rada mašina takav da ne postoji poslednji akt, da je niz akata beskonačan; oni govore o odsustvu poslednjeg u nizu paljenja i gašenja. Mi, međutim, pitamo o *nečem drugom*, *ne* o poslednjem aktu koji bi bio određen datim opisom, *već* o stanju ili aktu koji *prethode razbijanju*. U nizu koji određuje paljenje i gašenje *nigde*, kako je Benacerafs pravom naglašavao, nema mesta za stanje koje počinje trećim minutom. Gledano *imanentno*, s obzirom na to kako se niz paljenja i gašenja vrši, taj niz jeste neograničen. Ali odatle *ne sledi* da se beskonačno mnogo paljenja i gašenja *može aktualno izvršiti* u toku dva minuta, i upravo pozivanje na ono što *potom* sledi, pozivanje na razbijanje lampe, omogućava da se postavi pitanje čija smislenost čini nemogućom aktuelnost one beskonačnosti. Ne obesmišljava smislenost Tejlorovog i Vejtlingovog pitanja, o dužini vremenskog intervala u kojem bi se izvršio akt koji prethodi razbijanju, pitanje o tome aktu, već smislenost pitanja o tom aktu predstavlja *reductio ad absurdum* tvrdnje o *beskonačno mnogo izvršenih akata*.

Postoji očigledna sličnost između manevra statičkog infinitiste kojim on pokušava da obesmisli pitanje o tome da li su članovi niza čiji je opšti član $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^{n}-1)/2^{n}]$ smešten duž cele duži [0, 1] ili nisu (§ 55) i manevra dinamičkog infinitiste kojim on pokušava da obesmisli pitanje o aktu koji je prethodio prestanku rada. I jedan i drugi igraju na to što je interval u koji se smeštaju članovi niza *otvoren* s desne strane. Ali, prednost antiinfinitiste je u tome što se taj interval *zatvara i s desne strane*, utoliko što teza statičkog infinitiste ne govori samo o *procesu približavanja*, a teza dinamičkog infinitiste samo o neograničenom nizu akata koji mašina *obavlja*. Ako je mašina *obavila* zadatak, ona je prestala da radi u izvesnom, određenom trenutku, trenutku koji predstavlja granicu dva vremenska intervala[2]. π-mašina i

Peano-mašina mogu neograničeno *ispisivati* ili *recitovati* decimale i prirodne brojeve, ali ne mogu *ispisati* ili *izrecitovati* beskonačno mnogo njih.

Izgleda, dakle, da pod standardnim pretpostavkama, koje ne sadrže vremenske infinitezimale, postoji *reductio ad absurdum* i teze dinamičkog infinitizma.

57. Pozitivna teza finitizma

Pobijanjem infinitizma nije dokazana ispravnost nekog suprotnog shvatanja. Teškoće u koje nas je dovela zenonovska dijalektika i jesu takve da se ispoljavaju tek u *odbrani* nekog stanovišta. Kako će finitista odgovoriti na pitanja na koja nije mogao da odgovara dok je napadao infinitistu? Hoće li on tvrditi da je niz čiji je opšti član $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^{n}-1)/2^{n}]$ konačan? A šta će odgovoriti kad ga pitamo koliko se puta Tomsonova lampa upalila i ugasila tokom dva minuta, ili koliko je prirodnih brojeva izrecitovala Peano-mašina po isteku jednog minuta?

Prema pozitivnoj tezi finitizma, finitizma u užem smislu (§ 53), beskonačni konvergentni niz, koji nam stvara teškoće, predstavlja čistu matematičku konstrukciju, koja se *kao takva* ne odnosi ni na šta realno, ali finitisti pri tom *ne postuliraju* nedeljive jedinice ni u fizičkom, ni u prostornom, ni u vremenskom smislu.

Kada Blek omogućava Ahilu da stigne kornjaču time što tvrdi da „su sve stvari koje on (Ahil) svarno čini konačne po broju; konačan broj koraka, udaraca srca, dubokih udisaja, uzvika prkošenja" i da „staza kojom trči ima konačan broj kamenčića, grumena zemlje i travki" (*Black 1*, str. 100–101), on svakako ne misli da Ahil ne može da čini kraće korake ili brže diše, i eksplicitno dodaje da oni kamenčići, grumeni zemlje i travke *sadrže* enormno mnogo atoma (*ibid.*, *loc. cit.*). Blek, prosto hoće da kaže da je ovih stvari, kao i svih stvari koje u vezi sa Ahilovim zadatkom *možemo imenovati*, konačno mnogo, dok u isto vreme „stvaramo iluziju beskonačnih zadataka vrstom matematike koju upotrebljavamo da opišemo prostor, vreme i kretanje" (*ibid.*, str. 101).

Ali zašto ne bismo koristili upravo niz čiji je opšti član $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$ da *pomoću njega* izdvojimo i imenujemo delove staze ili vremena Ahilovog kretanja? Švajder, čiji je odgovor po vlastitom priznanju „sličan" Blekovom (*Schwayder*, sr. 458, nap. 12), dao je na ovo pitanje jasan finitistički odgovor. Mi navedeni niz *možemo koristiti* da izdvojimo i imenujemo delove staze, ali samo tako što će nam *bilo koji*, ali ipak *neki određeni*, *n*-ti član niza specifikovati i imenovati jedan konačan interval. A bilo koji, pak, ovako specifikovani interval je takav da je *konačno puta* sadržan u celoj dužini staze (*ibid.*, sr. 455).

No, ako niz o kojem je reč *možemo* koristiti *u ovom smislu*, to još uvek ne znači da smemo govoriti kolektivno o *svim* delovima određenim i imenovanim ovim nizom kao beskonačnim. Ovde je, ponovo, u igri razlika između „bilo koji" i „svi" (vidi §§ 5 i 7), koja, ako se ne napravi, predstavlja, po Švajderu, „baba-rogu koja se javila u mnogim delovima filozofije" i to „specijalno tamo gde se ove reči upotrebljavaju u implicitnoj konjunkciji sa modalnim rečima kao što su 'može' i 'sme'" (*Schwayder*, str. 459, nap. 14). Mi možemo govoriti o „koraku" određenom petim, šestim, ili svejedno kojim određenim članom datog niza, ali odatle ne sledi da smemo govoriti o *svim* tako određenim „koracima" (*ibid.*, str. 459). Na *neograničeno mnogo načina* možemo odrediti ili imenovati „delove" i „korake" koristeći se izvesnim matematičkim nizom, na raspolaganju nam je čak *neograničeno mnogo nizova* kojima bismo se mogli služiti (*ibid.*, str. 457). Ali tu se beskonačnost odnosi na broj *načina određivanja ili imenovanja*, a ne na broj *delova ili koraka*. „Beskonačnost ne ulazi u igru kao karakter onoga što opisujemo, već kao karakteristika brojnog sistema" (*ibid.*, *loc. cit.*).

Na neograničeno mnogo načina možemo fiksirati meru kojom ćemo meriti neki predmet i možemo koristiti *bilo koju određenu* meru da bismo ga merili. Ali iz toga što se mera može odrediti na razne načine ne sledi da može biti *neodređena* (*ibid.*, str. 454). Naprotiv, izgleda jasno da mera mora biti određena. Iz toga što nam na raspolaganju stoji neograničeno mnogo mogućih mera ne sledi da možemo neki predmet premeriti koristeći pri tom beskonačno mnogo mera. *Predmet je konačan meren bilo kojom merom* – to je znao još Epikur (vidi gore, § 49). Finitisti, za razliku od Epikura, insistiraju na tome *ne uvodeći* apsolutnu meru, jer se tvrdnja o aktualnoj beskonačnosti delova jednog predmeta obesmišljava i bez toga. Ona se obesmišljava ukazivanjem na *non sequitur* koji postoji u prelasku *od* neograničenog broja mogućih određenja, ili imenovanja, delova – *na* beskonačnost broja delova, ili *od* neograničenog broja mogućih mera – *na* neizmerenost (u smislu neizmerne veličine), ili – *na* izmerljivost pomoću beskonačno mnogo mera istovremeno.

Ukazivanjem na ovakav *non sequitur* trebalo bi, dakle, da bude uklonjen razlog za Zenonovu tvrdnju u B **1** da je navodno konačno veliki predmet beskonačno veliki, pošto je on neizmeran, to jest neizmerno veliki, *samo ako* hoćemo da ga merimo koristeći beskonačan broj mera istovremeno, a u isto vreme se opovrgava i pozitivna teza infinitizma da predmet koji je ograničen sadrži beskonačno mnogo delova.

Finitisti, dakle, *de facto* prihvataju Zenonov zaključak da ne postoji κυρίως ἕν, utoliko što ne prihvataju da govore o delovima *qua* delovima, bez specifikacije koja bi ove činila kamenčićima, grumenima zemlje, travkama, atomima, ili bar intervalima *te* i *te* dužine. Κυρίως ἕν se ne odnosi ni na šta, ukoliko bi, naime, ono na šta bi se navodno odnosilo trebalo da bude nešto apsolutno sa sobom identično, pošto je, kako je tvrdio Gič, „identitet relativan" (*Geach 1*, str. 238).

Mislim da se Gičova teza o relativnom identitetu, koja je inače fregeovske provenijencije (vidi *Frege 2*, § 29, § 46, *Frege 4*, § 42), zgodno može iskoristiti da se precizira finitistička. „Kad neko kaže '*x* je identično sa *y*', ovo je nepotpun izraz; to je skraćenica za '*x* je isto *A* kao *y*', gde '*A*' predstavlja zajedničku imenicu (*count noun* – imenicu koja omogućava brojanje) koja se razume iz konteksta u kojem je upotrebljena..." (*Geach 1*, str. 238). Ako na mesto *y* stavimo *x*, ipak se ne oslobađamo onog '*A*'. Sad, prema finitistima, „ovaj kamenčić", „ova travka", „ovaj grumen zemlje" „ovaj otkucaj srca", „ovaj udisaj", „ovaj uzvik" mogu biti nešto što je *identično sa sobom* i što je *jedno*, jer su „kamenčić", „travka", „grumen zemlje", „otkucaj srca", „udisaj" i „uzvik" zajedničke imenice (koje omogućuju brojanje), dok „ovaj deo" može biti nešto sa sobom identično i jedno *samo ako* je *iz konteksta* jasno da se misli na „kamenčić", „travku", ili nešto slično, barem na „interval *te* i *te* dužine". Deo *qua* deo ne može biti ono '*A*', pošto je besmisleno bez specifikacije pitati „koliko ova olovka ima delova?", kao što je besmisleno pitati „koliko u ovoj sobi ima stvari?" bez, bar kontekstom implicirane, specifikacije toga *šta* ćemo zvati stvarima. A ako specifikujemo koja je vrsta stvari ono što ćemo zvati i smatrati delom, onda je, kako izgleda, tih delova unutar jednog ograničenog prostora nužno *konačno mnogo*.

58. Finitističko rešenje kinematičkih aporija

Pozitivna teza finitizma ima mnogo vrlina fizičkog, geometrijskog i kinematičkog atomizma koje ovi atomizmi ne bi mogli imati i kad bi mogli zajedno da tvore jednu jedinstvenu doktrinu.

Finitizam ne postulira nikakvu nedeljivost i time izbegava sve odgovarajuće teškoće fizičkog, geometrijskog i kinematičkog atomizma koje bi odatle proizašle (up. § 47, § 50, § 52), a ipak uspeva da tvrdi kako se kod ograničenih stvari, putanja, vremena i kretanja nigde ne srećemo s beskonačnošću. Pri svemu tome, ovakav finitizam ne uvodi umesto beskonačnosti neodređenost, tako što bi zahtevao da se umesto o beskonačnom govori o neodređenom broju delova. Ograničene stvari nemaju ni beskonačno mnogo ni neodređeno mnogo delova, već *konačno mnogo delova određene vrste*.

Jedinica nije neodređena iako je identitet relativan, i unutar svake vrste na koju se referira nekom zajedničkom imenicom moguće je pronaći pojedinačno κυρίως ἕν. To je osnova za rešenje i *Dihotomije* i *Ahila*.

Zanimljivo je rešenje *Strele*. Poći ćemo od distinkcija koje je razradio Blek u *Problemima analize*. Iako on izvornu aporiju *Strela* nije rekonstruisao onako kako je mi razmatramo (up. *Black 2*, str. 128–129 i gore, § 38 c), sasvim je jasno kako bi rešenje trebalo da glasi i u našoj verziji.

Blek govori o tri smisla u kojima se na relevantan način može govoriti – i govori se – o „zauzimanju prostora" od strane nekog tela u određenom vremenskom periodu (*Black 2*, str. 140).

Prvi smisao je smisao koji se može ilustrovati ukazivanjem na okolnost da deo puta kojim će se Ahil kretati u nekom vremenskom periodu mora biti *slobodan* jer će ga on tokom tog perioda zauzimati. Taj deo puta je u tom periodu „rezervisan" za Ahila (*ibid.*, str. 141). Ako na putu ima prepreka, Ahil će deo puta o kojem je reč zauzimati samo ako se prepreka bude *oslobodio* i zahvaljujući tome bude put savladao. Nijedan proizvoljno izabran deo puta ne mora sve vreme biti slobodan, ali on mora *izvesno* vreme biti slobodan. Za *ceo* prostor u kojem se Ahil kretao tokom nekog vremena može se, dakle, reći da je u *izvesnom* smislu bio *zauzet* od strane Ahila. „Najmanji prostor na koji je telo bilo ograničeno tokom tog vremena", bez obzira da li se neprekidno kretalo ili nije, predstavlja prostor koji je to (Ahilovo) telo zauzimalo u tom periodu u „prvom" Blekovom smislu (*ibid.*, str. 140). Taj prostor je ili veći ili jednak veličini tela, ako se ovo samo u tom periodu nije menjalo.

No Ahil, ukoliko se kretao, nije sve vreme bio na istom mestu u smislu koji ilustruje činjenica da se može reći da je u istom vremenu neko pred njim, ili za njim, *mogao* trčati istim putem, pošto su i pri tom izvesni delovi puta izvesno vreme mogli biti slobodni; „drugi" smisao u kojem se može govoriti o tome da je telo zauzimalo izvesni prostor je smisao kojim se *ne dopušta* da je taj prostor u ma kojem vremenskom podintervalu bio slobodan. Ako se telo ne menja, ako je čvrsto, taj prostor je tačno veliki toliko koliko i telo i zato predmet zauzima prostor u ovom smislu samo ako miruje. Telo je na jednom mestu u nekom vremenskom periodu ako i samo ako miruje (*ibid.*, str. 141).

Najzad, mi ipak želimo da kažemo i da telo u izvesnom smislu u nekom vremenskom periodu zauzima prostor koji mu je jednak *bez obzira* da li se ono kreće ili ne u tom vremenskom periodu. Pošto to u prvom smislu ne može biti slučaj ukoliko se telo kreće, dok u drugom smislu telo zauzima prostor koji mu je jednak ako i samo ako miruje, potreban je neki „treći" smisao u kojem bi to bio slučaj. Mora se uvesti pojam prostora koji je kongruentan s telom bez obzira da li se ono kreće ili ne, i taj prostor sam mora biti u miru ili kretanju, već prema tome da li se telo kreće ili ne. To je prostor koji se može zvati *relativnim* (up. dole § 71, § 119; vidi takođe *Mach*, str. 312), jer se, za razliku od prostora koji se zauzima u prvom i drugom smislu, on uvek određuje isključivo *u odnosu* na *samo telo,* a *ne u bilo kojem smislu nezavisno* od njega.

Smisao u kojem govorimo o zauzimanju prostora u trenutku, gde je trenutak shvaćen po analogiji s tačkom – znači kao Aristotelovo νῦν (vidi § 18) – Blek naziva „derivativnim" (*Black 2*, str. 142, 143). Ovo čini zbog toga što se vreme ne sastoji iz trenutaka i što je trenutak samo granica neka dva vremenska intervala, pa sve što se vezuje za trenutak treba odrediti preko vremenskih intervala kojih je on granica i onoga što se u tim intervalima zbiva. Tako se može reći da telo miruje u trenutku ako miruje u ma koja dva intervala kojih je granica ili, barem, u jednom od njih, ili, osim toga, ako se u vremenu koje prethodi tom trenutku kretalo na takav način da bismo rekli da se u tom trenutku zaustavilo a u sledećem vremenu kretalo na takav način da bismo rekli da se u tom trenutku pokrenulo (*ibid.*, str. 144).

Može se reći da se telo u trenutku i kretalo i da je mirovalo, ako shvatimo da time hoćemo da kažemo da se kretalo zato što se u nekom od graničnih intervala kretalo, a mirovalo zato što je u nekom od graničnih intervala mirovalo. Činjenica da se radi o „izvedenom smislu", u kojem se značenje određuje preko toga šta bismo rekli da se zbiva u graničnim intervalima, oslobađa nas protivrečnosti u ovakvom načinu izražavanja. Inače, naravno, u trenutku telo uvek zauzima prostor koji mu je jednak.

Kad imamo u vidu sva osnovna i derivativna značenja, raščišćavaju se mnoge stvari vezane za *Strelu.* Telo u trenutku uvek zauzima prostor koji mu je jednak, ali odatle, kao što je već Aristotel utvrdio, ne sledi da moramo reći da ono u tom trenutku miruje. Postoji smisao u kojem telo u kretanju zauzima prostor koji mu je jednak, ali to je samo jedan smisao, smisao pri kojem se ima u vidu *relativan* prostor kojim se telo kreće. No ne znači da ne postoji smisao u kojem telo kad se kreće zauzima prostor koji je *veći* od njega, i upravo taj smisao je onaj koji nam omogućava da napravimo razliku između tela koje miruje i tela koje se kreće. Ako fiksiramo referentni prostor, možemo reći da telo koje u njemu miruje zauzima u njemu prostor koji je telu jednak, a telo koje se kreće prostor koji je veći od njega.

No sve ove distinkcije nas još ne oslobađaju teškoća u koje nas vodi verzija *Strele* koju smo usvojili (§ 38 c). Tačno je da možemo reći da leteća strela u svakom trenutku zauzima prostor koji joj je jednak a da se ipak kreće, jer u izvesnom smislu u vremenu između dva trenutka ne budući sama veća od sebe zauzima prostor koji je veći od nje, ali nije li taj izvesni smisao u kojem to kažemo suviše slobodan, ili upravo sam derivativan? Ne mislimo li mi da strela *u stvari* zauzima *prvo* jedan *pa onda* drugi deo prostora o kojem je reč i da govoreći o tome da ona zauzima prostor veći od nje samo na *skraćeni* način govorimo o celokupnom prostoru koji je ona *u raznim vremenima zauzimala*? Kako sve ovo može da se ponovi za bilo koji od intervala, ne znači li to da nam je glavni adut koji treba da omogući kretanje, „zauzimanje prostora koji je od tela veći", samo eliptičan izraz koj ipak nikad ne možemo doslovno dobro prevesti zbog beskonačnog regresa koji se tu pojavljuje?

U finitističkom duhu, ovde se možemo pozvati na Gičovu tezu o relativnosti identiteta i na finitističku zabranu da se govori o delovima *kao* delovima, bez specifikacije. I intervali *vremena* su uvek nekako određeni i o njima se nikad ne sme govoriti *kao takvim*. Možemo govoriti o vremenskom intervalu u kojem je načinjen korak, ili o vremenskom intervalu od jedne sekunde, koji je opet određen nekim zbivanjem, kretanjem sekundare recimo. Koji god određeni vremenski interval uzeli, doslovno je istinito da je telo koje se kretalo *tada*, u *tom intervalu* zauzimalo izvesni određeni prostor koji *je* veći od njega. Mi govorimo o *tom jednom intervalu*, a *ne eliptično* o skupu nekih ili svih podintervala.

Koliko je prostor koji zauzima telo koje se kreće veći od njega zavisi od referentnog sistema. Kao što *Stadion* pokazuje, taj prostor nije prosto toliki i toliki, jer je i on nekim drugim, a ne nužno *jednim određenim* drugim, telom određen. No, on je opet s obzirom na *određeno* drugo telo *jednoznačno* određen. To je ono što je finitisti dovoljno.

Kao što reći da je neko telo dugačko 5 m *ne znači* reći na eliptičan način da je ono dugačko 500 cm, na čemu je insistirao Riči[1], i kao što reći da na nekom putu ima toliko i toliko kamenčića *ne znači* na eliptičan način reći da na njemu ima enormno mnogo atoma, tako isto, reći da telo koje se kreće u intervalu od jednog minuta zauzima izvestan, prema nekom drugom telu određen prostor koji je veći od njega *ne znači* reći na eliptičan način da ono zauzima šezdeset raznih potprostora tog prostora tokom svake od šezdeset sekundi redom. Za identifikaciju jedinice potreban je i ovde vrsni pojam, zajednička imenica (*count noun*), poput „metra", „santimetra", „kamenčića", „atoma", „minuta" ili „sekunde". Koliko će delova telo imati zavisi od toga o kojim delovima govorimo. Koliki prostor telo zauzima zavisi od toga o *kojem* vremenskom intervalu govorimo i u *kojem* referentnom sistemu. Taj prostor može biti onoliki koliko je telo, a može biti i mnogo veći od njega, čak u isto vreme. Pošto je identitet relativan, protivrečnosti nema.

Finitizam, kad je kretanje u pitanju, postiže isto što i kinematički atomizam: u oba slučaja se ispostavlja da preći neki put ne znači savladati beskonačnost korak po korak, jer bilo koliki da je „korak" – koraka je konačno mnogo. Pri tome se finitizam ne izlaže teškoćama koje svakom, pa i kinematičkom, atomizmu stvara neka francuska varijacija *Stadiona*.

59. Teškoće finitizma

Videli smo da je prednost finitizma (u užem smislu) u odnosu na bilo koji atomizam u tome što, kao i atomizam, sve čini *određenim* i *konačnim* ne upadajući pri tom u teškoće koje proizlaze iz apsolutne određenosti jedinice. Sve je jednoznačno određeno *kada se* relevantne jedinice odrede. Paradoksi nastaju ako se zaboravi da se određenja jedinice mogu vršiti na *razne* načine, jer se tada neće uočiti prividnost protivrečnosti zbog različitih određenja, odnosno identifikacija.

Rukovođeni maksimom Zlonamernika po kojoj se u svakoj vrlini krije neka mana, pokušaćemo da dezavuišemo ovaj neobični spoj određenosti, konačnosti i relativnosti, koristeći se upravo okolnošću da nam neograničeno mnogo mogućih određenja stoji na raspolaganju i da finitizam nije nigde postavio granicu deljivosti. Pri tom nećemo kršiti finitističku zabranu da se nespecifikovano govori o delovima *kao* delovima, pokušaćemo naime da izvršimo *reductio ad absurdum.*

Kada Zevs broji deonice Ahilovog puta koje se određuju nizom $[0, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, ..., $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$, ..., onda je identifikacija narednog rastojanja određena identifikacijom prethodnog; *identifikacija* je određena *rekurzivno.* Zevs ne broji delove puta *kao takve*, on broji delove koji u svakom koraku brojanja bivaju *specifikovani*, delove čiji je način identifikacije i imenovanja uvek dovoljno određen u skladu s finitističkim zahtevima. Prihvatimo sa finitistima da se ne sme kolektivno govoriti o *svim* tako određenim delovima, jer se oni samo dinamički rekurzivno određuju; prihvatimo, takođe, da je valjan *reductio ad absurdum* infinitističke teze po kojoj će Zevs stigavši na cilj moći da kaže da je izbrojao beskonačno mnogo tako određenih deonica. Zapitajmo se samo, pretpostavljajući da Zevs ni u jednom trenutku neće odustati od brojanja dok god Ahil trči, *koliko* će on takvih deonica izbrojati.

Mi ne tražimo da odgovor bude da je Zevs izbrojao $\aleph_0$ deonica, mi ne tražimo da se govori o svim deonicama određenim nizom čiji je opšti član $[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n]$, mi *samo pitamo koliko* je on izbrojao deonica za koje je način identifikovanja bio uvek određen.

Ovde finitista može pozavideti geometrijskim ili kinematičkim atomistima, jer ovde oni imaju odgovor: broj deonica koje je Zevs izbrojao biće po njima neki određeni konačni broj. Za finitistu to ne može biti određen konačan broj, jer nema ni minimalnih prostornih ni minimalnih vremenskih intervala koji bi posle izvesnog koraka u brojanju onemogućili dalje brojanje.

Može li finitista odgovoriti da je broj izbrojanih deonica konačan, ali ne *određeni* konačan broj? Nažalost, ne vidi se šta bi u *ovom slučaju* moglo da znači govoriti o *neodređenom konačnom broju*, šta bi moglo da znači da je Zevs *izbrojao neodređeno konačno mnogo deonica.* Može se govoriti o *neodređenom* broju koraka koje neko *može učiniti* i u isto vreme tvrditi da je broj *učinjenih* koraka uvek *konačan*, ali se ne može govoriti o *neodređeno konačno mnogo načinjenih* koraka.

Pošto finitista ne može da odgovori da je Zevs izbrojao *beskonačno mnogo* deonica, jer bi time prestao da bude finitista, i pošto, isto tako, ne može da kaže ni da je Zevs izbrojao *određeni konačni broj* deonica, ako Zevsovo brojanje negde ne preseče, ni da je izbrojao *neodređeni konačni broj* deonica, jer to nema smisla, on nema valjan odgovor na pitanje „koliko je deonica Zevs izbrojao?" Kako je način identifikovanja deonica koje se broje ovde dovoljno dobro određen *u duhu finitističkih zahteva*, to je nepostojanje odgovora na pitanje o broju izbrojanih deonica Ahilovog puta Ahilova peta finitizma.

D. RADIKALNI EMPIRIZAM

60. Iskustvo i zahtev za beskonačnom deljivošću

U potrazi za što težom i operativnijom varijantom *Ahila* mi smo uveli izvesne pretpostavke i zahteve koji su, bar što se tiče naših sadašnjih ljudskh i tehničkih mogućnosti, empirijski nezadovoljivi. Tako smo, recimo, zamišljali da Ahil jezdi kroz raznobojna prostranstva koja su trebalo da budu sve manja, do reda veličina koje su i za nas i za našu fiziku ništavne. U *staccato* verziji Ahil je trebalo da se „odmara" „prevalivši" put kroz jedno takvo prostranstvo. Ahil jeste brzonog, ali teško da može da se zaustavlja tako brzo. U *legato* verziji izbacili smo Ahilova zaustavljanja, ali je zato Zevsov perceptivni i aperceptivni prag morao da se snižava neograničeno. Zevs je za razliku od Ahila bog, i to vrhovni – utoliko ova *legato* verzija deluje uverljivije – ali danas svakako već nije neuobičajeno sumnjati i u bogove. Možda paljenje i gašenje Tomsonove lampe deluje današnjem laiku realnije nego Zevsovo brojanje, ali će zahtevana brzina paljenja i gašenja ubrzo postati čak načelno nezamisliva iz perspektive jednog elektrotehničara.

U svakom slučaju, mi *de facto* ne možemo organizovati Ahilovu *staccato* trku, ne možemo sami bez ograničenja brojati sve

manje deonice Ahilovog puta, niti Zevsa pitati o broju izbrojanih deonica, ne možemo konstruisati Blekove transportne mašine, niti π-mašinu, niti Tomsonovu lampu, eda bismo *eksperimentalno* proverili sporne teze i na taj način *empirijski* razrešili teškoće. Onaj ko bi Zevsa prognao u carstvo mitologije mogao bi nas sugestivno zapitati da li se i u jednoj *empirijskoj* nauci pojavljuje nekakva beskonačnost ograničenih veličina i da li se uopšte može pojaviti. Psihologija percepcije govori o pragovima i perceptivnim minimumima, fizika o kvantima energije, problem elementarnih čestica je i dalje otvoren, a fiziološka ograničenja, kad su u pitanju diskretni procesi, su očigledna. Mi smo možda suviše olako mnoge teškoće u konstrukciji aporetične situacije proglasili „pukim tehničkim teškoćama", dozvoljavajući neograničeno spuštanje perceptivnog i aperceptivnog praga, uvek sve brže paljenje i gašenje lampe, uvek sve gušće nizanje boja. Možda smo bili *zavedeni matematikom*, koja, međutim, *nije* empirijska nauka. Ako prostor i vreme ne očistimo od svih empirijskih atributa, onda oni možda više nisu beskonačno deljivi. Crveni prostor, recimo, ne može biti sasvim proizvoljno mali, kao što se lampa ne može za bilo koje kratko vreme upaliti. Kud god da krenemo, nailazimo na neke minimume; sva ograničenja su ukinuta samo u čistoj matematici, ali ova i ne govori o realnim, empirijskim stvarima – moglo bi se reći – već o čistom prostoru. Iz perspektive jednog *empiričara* čisti prostor kao i čisto vreme su fikcija, njihova *mogućnost* nije uopšte dokazana, i zato ne bi trebalo da nas muče neke protivrečnosti koje se samo njih tiču.

Preuzimajući termin „radikalni empirizam" od Džejmsa[1], koristićemo ga za sva stanovišta koja teškoće vezane za beskonačnu deljivost ne smatraju pukim tehničkim teškoćama koje su za naše aporije irelevantne, već deljivost žele načelno da ograniče *upravo pozivanjem na naše svakodnevno iskustvo ili iskustvene nauke.*

61. *Subjektivni idealizam*

Najradikalniji među radikalnim empiričarima svakako je Džordž Barkli, pošto prema njegovom načelu *esse est percipii* jedini objekti na koje bismo mogli pokušati da primenimo zenonovsku aporetiku imaju samo one karakteristike kojih je subjekt neposredno svestan dok opaža (sanja ili zamišlja). Ne ističe se koliko je Barkli držao do toga što se prhvatanjem njegovog stanovišta uklanjaju teškoće koje proističu iz pretpostavke o beskonačnoj deljivosti. U § 133 *Rasprave o principima ljudskog znanja* on upravo pominje *te* teškoće kao poslednji razlog da se njegovo stanovište konačno usvoji, „mada je bilo predloženo samo kao *hipoteza*" (*Berkeley 5*, str. 157–158). Uzimanje u obzir Barklijevog stanovišta zanimljivo je zbog toga što pokazuje da se aporije kojima se bavimo odnose samo na objekte koji su materijalni, po sebi postojeći, ne i na objekte iz sna, zamišljene objekte i „mentalne slike" koje nastaju opažanjem.

Ako u pogledu svega što se opaža postoji perceptivni minimum, i prostorno i vremenski, kao *minimum visibile* ili *minimum tangibile* (vidi *Berkeley 2*, § 54, str. 44), koji nije infinitezimala, onda se uočavanjem prethodno neuočenih delova Ahilovog puta narušava identitet objekta kojeg je subjekt neposredno svestan. Broj delova koji se mogu u jednom opažaju distingvirati uvek je ograničen, i čak isti[1], pa su novi delovi puta *u stvari* delovi novog puta, i ako postojanje perceptivnog praga nije samo ljudsko ograničenje, od kojeg bi, recimo, Zevs bio izuzet, onda nije moguće konstruisati nijednu aporiju beskonačnosti.

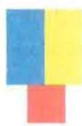
Za svakog ko naginje finitizmu vrlo je poučno da pogleda kako psihologija percepcije izbavlja Barklija iz teškoća *Stadiona*. *Holizam* i *individualizam* situacije u kojoj se nešto opaža čine perceptivne minimume tako vezanim za *tu* situaciju da promena uslova onemogućava deobu onoga što bi trebalo da je nedeljivo: novi uslovi dovešće do *prestruktuiranja* draži u *novu* konfiguraciju.

Kako da zamislimo „vizuelne tačke" i kako da ih shodno tome definišemo? To nije nešto nedvosmisleno, pošto postoji više mogućnosti. Uzmimo da posmatrač gleda kvadratnu crvenu mrlju *c* na belom platnu i da upravo *c* predstavlja *minimum visibile* u datoj situaciji i u datim okolnostima. Iako nije bez daljeg određeno šta to tačno znači, relevantne stvari koje bi se želele implicirati mogu se *empirijski* ispitivati. Nije, na primer, jasno da li se samo želi reći da je *površina* mrlje tačno toliko velika da se mrlja ne bi više uopšte primećivala ako bi se smanjila, a gde oblik nije relevantan, ili se relevantnim smatra i crvenilo, i to što je mrlja kvadratna, pa je dotična površina, recimo, minimalna *crvena* površina *kvadratnog* oblika koja se u datim okolnostima može videti, dok možda, recimo, ista crvena površina raspoređena tako da mrlja bude kružna ne bi bila *minimum visibile* utoliko što ne bi bila najmanja crvena površina kružnog oblika koja se u datim okolnostima može videti. Novija istraživanja u neurofiziologiji otkrila su postojanje izvesnih detektora u korteksu (*features detectors*) (vidi *Hilgard, L. Atkinson and C. Atkinson*, str. 142 i *Geschwind*), zona neurona koje su specijalizovane za prepoznavanje pojedinih karakteristika predmeta kao što je oblik. Sasvim je moguće da količina crvene boje koja je dovoljna da se formira kružna crvena mrlja koja se u datim okolnostima može videti, i to upravo kao kružna, nije dovoljna da se formira kvadratna crvena mrlja koja bi se videla kao kvadratna. Osim toga, poznat je fenomen „dogradnje" posmatranih objekata (vidi *Hilgard, L. Atkinson and C. Atkinson*, str. 133): moguće je da, recimo, okrnjimo jedan ćošak kvadratne mrlje a da je posmatrač i dalje vidi, i to kao kvadratnu, i to neokrnjenu kvadratnu. Pitanje je dokle se s tim može ići, no i ovo pitanje je *empirijsko*.

Mislim da se *minimum visibile* u nekoj situaciji i u datim okolnostima može dovoljno dobro odrediti za neku vrstu objekata s nekim datim skupom svojstava tako što se uzme da je *minimum visibile* najmanji mogući objekat među objektima koji imaju data svojstva a koji se uopšte može identifikovati kao objekat koji ima ta svojstva. Ako uzmemo u obzir razne objekte koji se razlikuju samo po obliku, onda možemo ispitati da li postoji i, ako postoji, koji je to oblik u kojem je ostvaren *minimum visibile* za ovaj skup objekata. Ako takav oblik postoji, možda će on biti kružan, no uzmimo da je on upravo kvadratan[2] da je naša kvadratna mrlja *c minimum visibile* za sve crvene mrlje u datim okolnostima. Tada se nijedan deo *c* ne može *samostalno* opažati.

Peripatetičar koji je pisao *O nedeljivim linijama* koristio se u svojoj kritici atomizma okolnošću da svaka figura ima delove (vidi gore, § 50). Tako kvadrat ima četiri ugla, levu i desnu polovinu itd. Ovu okolnost, međutim, ne možemo direktno iskoristiti u kritici teorije o *minima visibila*, jer iz toga što kvadrat ima levu i desnu polovinu *ne sledi* da se može videti *samo* leva ili *samo* desna polovina, a *nesamostalnost* ovih delova se može uzeti kao *definišuće svojstvo* koje naš crveni kvadrat *čini* prostim elementom, to jest perceptivnim minimumom. No, pomenutu okolnost možemo posredno pokušati da iskoristimo za uvođenje u igru beskonačne deljivosti, jer perceptivni minimum čuva svoj identitet prilikom eventualnog *vizuelnog otkrivanja* njegovih delova, pošto se, *po definiciji*, delovi mogu opažati samo kao *njegovi* delovi, ne i po sebi.

Sledeći ideju francuske interpretacije *Stadiona*, produžićemo eksperiment time što ćemo platno iznad *c* obojiti pola plavim pola žutim i to tako da se plava i žuta površina uzajamno ograničavaju tačno na pola kvadrata *c*, otprilike kao na slici.



Zaklonimo ceo beli deo platna i crvenu mrlju, i pokažimo ostalo subjektu u istim uslovima kao pre. Šta će on videti? Videće plavu i žutu površnu kako se uzajamno ograničavaju (up. § 12). Pokažimo mu zatim celo platno. Neće li on sad *videti* kako se plava i žuta površina *ograničavaju tačno iznad polovine crvene mrlje*? Ako on to vidi, onda on može na ovaj način i *vizuzelno razlikovati* levu i desnu polovinu mrlje *c*. Ukoliko je Barkli i ovaj način razlikovanja smatrao dovoljnim da se *c* ne smatra vizuelnim minimumom, onda bismo, ponavljajući isti postupak za levi deo kvadrata, pa za levi deo ovog dela itd., mogli da pokušamo da svedemo na apsurd tezu o postojanju *minima visibilia*. Ukoliko bismo pak, kao što sam predložio, nemogućnost *samostalnog* opažanja delova mrlje *c* uzeli za dovoljan uslov da *c* bude *minimum visibile*, onda bi ponavljanje postupka imalo drugu funkciju, naime, *ne dirajući crveni kvadrat*, da bi ostao vidljiv, mi bismo samo,

preko različitih razgraničenja *okolnih* obojenih površina, uvodili u igru beskonačni regres, *deleći ipak* u *izvesnom smislu* nedeljivi *minimum visibile*.

Za razliku od raznih atomizama za koje uvek postoji neka pogubna varijacija *Stadiona* (vidi §§ 50, 52), psihologija percepcije će Barklija izvući iz „stadionskih teškoća" na ovaj ili onaj način, u ovom ili nekom drugom slučaju, bez obzira na to da li se *minimum visibile* definiše preko nemogućnosti samostalnog opažanja delova ili preko nemogućnosti makar i posrednog i vizuelnog razlikovanja delova.

Razmotrimo neke činjenice. Gledajući televiziju u boji mi vidimo mnoštvo različitih boja, u svakom slučaju više od tri. Međutim, svetlost koja se emituje iz tačkica ekrana sadrži obično samo tri boje (vidi *Fink*, gl. 2: „The NTSC Color Television Standards", str. 41–60). Ove tačkice su veličinom ispod perceptivnog praga; obično su skupljene u grozdove od po tri tačke, koje su takođe ispod ovog praga; no izvestan skup grozdova svakako ga prekoračuje. Raznim kombinacijama tri boje formiraju se raznovrsni skupovi međusobno istih grozdova s različitim elementima, koji onda, kad zajedno veličinom prekorače perceptivni prag, daju posmatraču utisak jedinstvene jednobojne oblasti, i to oblasti čija se boja ne podudara ni sa jednom od tri osnovne korišćene boje (vidi *ibid.*, gl. 3: „Subjective Aspects of Color Television", str. 60–102).

Ovaj efekat, korišćen kod televizije, pokazuje da – ako su izvesne oblasti unutar perceptivnog minimuma raznobojne, može doći do *mešanja boja prilikom recepcije*. Svejedno je da li su za mešanje odgovorni specijalizovani receptori (vidi *Hilgard, L. Atkinson and C. Atkinson*. str. 115), svejedno je *gde* dolazi do integracije – da li u perifernim delovima nervnog sistema ili tek u korteksu (vidi *Hubel* i *Hubel and Wiesel* i uopšte ceo broj *Scientific American*, od septembra 1979, posvećen mozgu) – dovoljna nam je činjenica da posmatrač vidi jednobojnu oblast koja se sastoji iz dve ili više raznobojnih oblasti.

Do mešanja boja može doći i ako svetlosni izvor emituje redom s istog mesta zrake različitih boja ali tako da je vremenski interval između emisija suviše mali da bi se razlika uočila (vidi *Hilgard, L. Atkinson and C. Atkinson*. str. 103–108). Ovde dolazi do mešanja zahvaljujući *vremenskom* aspektu perceptivnog minimuma.

Da li na osnovu prethodnih primera možemo da zaključimo da posmatrač koji gleda plavu i žutu površinu kako se ograničavaju mora videti jedan zeleni sloj između plave i žute površine? Zaključak ne sledi, a bio bi i po sebi netačan. *Činjenica je* da takav zeleni sloj uobičajeno ne vidimo. No, do mešanja na istom platnu i očekivanom mestu *može* doći, ako se perceptivno polje dovoljno suzi.

Da bismo videli plavu i žutu površinu kako se ograničavaju, odnosno da bismo, shodno onome što smo utvrdili u § 12, videli geometrijsku liniju, perceptivne jedinice bi morale biti tako raspoređene da linija razgraničenja dveju površina bude upravo i linija razgraničenja perceptivnih jedinica. To uobičajeno i jeste slučaj, kad god, naime, bez naročitog usredsređenja na liniju razgraničenja gledamo obojene površine. Ako se, međutim, na neki način, recimo dovoljno velikim suženjem perceptivnog polja, nametne takav raspored perceptivnih jedinica da *jedan minimum visibile* s obzirom na *najmanju moguću širinu* obuhvati *obe površine*, onda će, kao kod opisanog televizijskog efekta, doći do mešanja boja.

Da bismo načelno predupredili razne varijacije „stadionskih" teškoća, poput malopređašnje (s crvenom mrljom i plavom i žutom površinom), dovoljno je da istaknemo da se vidljivost geometrijskih linija kao formi razgraničenja površina i postojanje perceptivnih minimuma uzajamno *ne isključuju*, već da samo određena *konfiguracija* draži može nametati takav raspored perceptivnih jedinica da dolazi do različitih efekata poput opisanog efekta mešanja. *Simultatno* ne možemo izvesti deobu našeg crvenog kvadrata putem niza raznobojnih površina koje se nad njim uzajamno ograničavaju, jer će *direktno* doći do efekata mešanja unutar perceptivnog minimuma. *Alternativnu* deobu možemo pokušati da izvedemo tako što ćemo razgraničavajuću liniju postavljati na različitim mestima, ali tu će *zbog promene konfiguracije draži* ili opet doći do mešanja, formiranjem nekog međusloja – zelenog ili tamnog, svejedno – ili će u nekom trenutku doći do psihološkog *„pomeranja"* linije razgraničenja do kraja kvadrata, *izobličenja* crvene mrlje, ili nečeg sličnog.

Opšti princip holizma i individualizma situacije, zahvaljujući kojem psihologija percepcije ovde spasava Barklija, srešćemo u sasvim drugačijem kontekstu u kvantnoj mehanici (vidi dole, § 116). *Reorganizacija draži* u *novu konfiguraciju* stvara u spornim slučajevima efekte

kojima se *na strani subjekta menja* ono što bi moralo biti *konstantno da bi* bio moguć dokaz neograničene deljivosti ili *reductio ad absurdum* teze o minimumima putem *Stadiona*. Tako se, recimo, prema našem primeru, može videti uzajamno ograničavanje plave i žute površine kada se zakloni crvena mrlja, kao što se, isto tako, može videti crvena mrlja na belom platnu, a da to *ne znači* da se *i* uzajamno ograničavanje plave i žute površine *i* crvena mrlja mogu *bez promene zajedno* videti onako kako je to uveličano predstavljeno na gornjoj slici.

62. Teškoće subjektivno-idealističkog rešenja

Uspeh subjektivnog idealizma u rešavanju teškoća vezanih za neograničenu deljivost i nedeljive jedinice plaćen je na neobičan način: poreknute su sve karakteristike opažanih objekata koje nisu neposredno opažene u tom aktualnom, ne i prošlom, budućem ili samo mogućem opažanju. „Svaka pojedina rasprostrtost koja može biti predmet našeg mišljenja predstavlja jednu *ideju* koja postoji samo u svesti; sledstveno tome, svaki njen deo mora biti opažen" (*Berkeley* 5, § 124, str. 153). Time je opis našeg iskustva postao dosta različit od onog kojeg bismo prirodno želeli da damo, i utoliko je Barklijevo stanovište, iako empirističko, „revizionističko" (vidi *Strawson 1*, str. 9).

Barklijev opis iskustva naprosto nije verodostojan, ako smo, kako primećuje Prajs, mi „od početka svesni *cele* stvari, a ne samo nekog njenog ogoljenog isečka" (*Price*, str. 151–152; vidi takođe *Strawson 2*, str. 43). Do barklijevskih „strogo iskustvenih iskaza" došli bismo tek *ograničavanjem* odgovarajućih iskaza o materijalnim objektima (vidi *Austin*, str. 141–142), koji bi navodno trebalo da budu izvedeni.[1]

U § 14 smo pretpostavili da će svako ko se sretao sa fenomenom „prelomljenog štapa" reći da mu štap *izgleda* prelomljen, a *ne* da *vidi* prelomljen štap, i komplementarno tome smo, s obzirom na konvergenciju čula, govorili o objektima našeg ujedinjenog vizuelno-taktilnog sveta, na primer o *zidu* koji se *vidi*. Barkli, međutim, iako sam eksplicitno prihvata „uobičajeni idiom" da bi izbegao „tegobnost i osobenost u govoru" (*Berkeley 2,* § 55, str. 44), insistira na tome da i zidovi i štapovi za koje mislimo da su jedinstveni objekti našeg vizuelno-taktilnog sveta, pa zato i govorimo da vidimo ono što *shodno tome* treba da vidimo, nisu „prvi i neposredni" već „sekundarni" (*ibid.*, § 50, str. 41–42) objekti, proizvedeni *naviknutošću* da su objekti viđenja pouzdani „znaci" (*ibid.*, § 140, str. 88) za objekte koje dodirujemo i obrnuto, zbog čega smo postali „skloni da pripisujemo jednima ono što pripada samo drugima" (*ibid.*, § 51, str. 42).

Za razliku od Smarta, koji je svoj *materijalizam* hteo da *pripremi* „predmetno neutralnom analizom" *značenja* iskaza o takozvanim mentalnim stanjima – čak i onima koja se odnose na takve fenomene kao što su naknadne slike (*after-imaging*) (*Smart*, str. 167) – što je trebalo da omogući da se, navodno *bez promene značenja*, eventualno naknadno ispostavi da su i ti iskazi iskazi o fiziološkim procesima, Barkli svoj *idealizam nije pripremao* nikakvom analognom predmetno neutralnom analizom *značenja* iskaza o takozvanim materijalnim objektima kao što su štapovi i zidovi. On je, umesto toga, nastojao da učini nešto drugo, da, s jedne strane, slično kasnijoj Hjumovoj analizi kauzaliteta (vidi *Hume*, odelj. 14, str. 205), otkrije empirijsko poreklo naše ideje o nezavisno postojećim objektima koji se mogu gledati i pipati i da, s druge strane, dokaže protivrečnost te ideje. Tako se Barkli, na primer, da bi dokazao da su vizuelni oblici samo zgodni znaci za taktilne, a čemu nas prošlo iskustvo uči, poziva na slučajeve onih koji su rođeni slepi a kasnije progledali (*Berkeley 2*, § 79, str. 58–59, § 110, str. 72) i koji uopšte ne mogu gledanjem da odrede šta je oblo, šta špicasto, šta od čega veće (vidi, takođe, *Gibson*, str. 217), a da bi dokazao protivrečnost ideje o samostalno postojećim objektima koji se, inače, mogu i videti i opipati, poziva se, između ostalog, kao što smo videli, na teškoće vezane za beskonačnu deljivost.

To što se u opisu „pravog iskustva" Barkli ipak koristi „uobičajenim idiomom", u kojem se pojavljuju „stvari", neki filozofi su naročito naglašavali, pošto barem nije dokazano da nije nužno imati iskustvo o „posrednim" objektima da bi se stekla svest, i da bi se govorilo, o „pravom, neposrednom iskustvu". No, ovim putem se ne može svesti na apsurd Barklijevo stanovište kad se ono posmatra ontološki,[2] pošto se čak eventualna neophodnost „konstrukta" – poput „stvari" – za sticanje svesti o „pravom iskustvu" *ne isključuje protivrečnošću* ovih konstruktâ.

Iskoristimo, za ilustraciju, jedan srodni, popularni problem. Izraze koji se odnose na takozvana mentalna stanja mi prvobitno primenjujemo na sve ljude, koji su, između ostalog, od krvi i mesa, jer smo tako naučili da ih upotrebljavamo, a ne primenjujemo ih na druge tek po analogiji, zbog sličnosti njihovih tela i ponašanja sa našim (vidi *Wittgenstein 2,* § 350, str. 111, *Wittgenstein 4,* § 915, str. 162, II, § 570, str. 100). No, s jedne strane, izgleda sasvim moguće da kao mali jezik naučimo od robota dovoljno sličnih ljudima po izgledu i ponašanju i da tek kasnije na neki način otkrijemo da se oni od nas suštinski razlikuju, budući da su roboti.[3] S druge strane, pak, ako na kraju zaključimo da su svi ljudi sem nas samih u stvari roboti, to još uvek ne znači da nam oni nisu bili neophodni u *ulozi ljudi* da bi *nas* doveli do samosvesti.Slično tome, ako na kraju i zaključimo da stvari *kao* stvari *ne postoje*, ili čak da *ne mogu postojati*, ne znači da nam upravo one kao „sekundarni" objekti u Barklijevom smislu nisu bile neophodne kao uslovi samosvesti (up. *Kant 1*, str. 190, *Strawson 1*, str. 23–63).

S obzirom na naš problem, glavni razlog za nezadovoljstvo Barklijevim radikalnim empirističkim rešenjem isti je kao i razlog za nezadovoljstvo Bredlijevim rešenjem (vidi § 42): sredstvo je prejako, jer se teškoćâ u koje zapadamo kad razmišljamo o mnoštvu, prostoru, vremenu i kretanju oslobađamo tako što *upravo zbog tih teškoća* oduzimamo realnost onome za šta su te teškoće prvobitno vezane – u ovom slučaju, od nas nezavisno postojećim stvarima. Kao i Bredli, i Barkli, koristeći „uobičajeni idiom", ume da odgovori na pitanje o broju stepenica koje je savladao penjući se u svoje dvore, *nezavisno od toga* što su one, kao i njegove noge, „sekundarni" objekti; a kad ga pitamo za broj deonica koje je izbrojao Zevs stigavši s Ahilom na cilj (§ 21), on se samo *načelno* poziva na to da se problem tiče „sekundarnih" uistinu nepostojećih objekata.

U dokazivanju da je „očigledno protivrečno" „reći da se neki konačan kvantitet ili rasprostrtost sastoje iz bezbroj delova" (*Berkeley 5*, § 124, str. 153) Barkli se, pozivajući se na iskustvo, poziva i na „upotrebu" reči kao što su „rasprostrtost, delovi (i slično)" (*ibid*., *loc. cit*.). Ovaj pravac u osporavanju infinitizma sledili su u našem veku neki filozofi čije će se stanovište ispostaviti kao radikalno empirističko u definisanom smislu (vidi gore, § 54). Tako je, na primer, poljuljan kritikama Tejlora (vidi *R. Taylor 1*) i Vejtlinga (vidi *Watling*) na račun pokušaja da se dokaže neka čista logička nemogućnost okončanja procesa s beskonačnim nizom akata, Blek vitgenštajnovski počeo da se poziva na „'gramatiku' reči kao što je 'skok'", tvrdeći da je „neprihvatljivo govoriti o 'skokovima' koji su *neograničeno* mali ili *neograničeno* kratki" (*Black 2*, str. 116), utoliko što bi, recimo, bilo „*logički apsurdno* reći da je neki čovek skočio jednu hiljaditinu inča, ako reč 'skočiti' razumemo u bilo kojoj od njenih uobičajenih, svakodnevnih upotreba" (*ibid*., str. 117).

Bernard Pič je u tekstu „Logičke i praktičke protivrečnosti", sumirajući Blekove ideje (iz članka „Saying and Disbelieving" – vidi *Black 3*), eksplicitno tvrdio da „odnos između praktičnih i logičkih protivrečnosti ukazuje na to da je praktička neprotivrečnost osnovna, a logička neprotivrečnost nešto izvedeno" (*Peach*, str. 43). Za razliku od logičkih, „praktičke protivrečnosti se ne mogu identifikovati formalnim ili sintaksičkim kriterijumima" i „njihovo izbegavanje zahteva konzistentnost između delanja i pretpostavki" (*ibid*., str. 149). Da bismo jasno videli šta ovo znači, iskoristićemo jedan duhovit primer L. Džonatana Koena (vidi *Cohen*, str. 13).

Dve jabuke i dve jabuke su četiri jabuke. Moglo bi se pomisliti da se to može prosto izvesti iz toga što je $2+2=4$ i što je protivrečno reći da $2+2\neq4$. No za kupca koji kupuje jabuke i stavlja ih u probušenu kotaricu dve jabuke i još dve jabuke stavljene u kotaricu mogu

možda dati samo tri jabuke. Da bi dve jabuke i dve jabuke i ovde ipak dale četiri jabuke, moramo se pozvati na *neoglašenu pretpostavku* da u zbiranju treba uzeti u obzir i jabuku koja je propala kroz probušenu kotaricu. Šta bismo, međutim, učinili ako bismo mnogo češće, ili stalno, imali posla sa situacijama puput ove s probušenom kotaricom? Zamislimo da je, kao u nekoj mađioničarskoj situaciji, jabuka prosto nestala. Tada moramo u zbiranju uzeti u obzir i *nestalu jabuku*. I u ovim najprostijim matematičkim situacijama, ali gde se ne govori samo o brojevima, već o stvarima koje se broje, možemo biti u situaciji da se tu i tamo moramo pozivati na izvesne pretpostavke praktičkog reda. Ako je $2+2=4$ tvrdnja koja je nužno istinita i kod koje navodno nema nikakvih praktičkih pretpostavki, onda je to tako zato što u sabiranju *brojeva* ovi ne mogu nestati ili ispasti iz kotarice, ili zato što za skupove kojih su oni kardinalni brojevi[1] pretpostavljamo ono što smo *naknadno* pretpostavili prilikom zbrajanja jabuka koje su stavljene u probušenu kotaricu.

„Izvršio sam beskonačni broj akata" predstavlja u Pičovoj analizi *praktičku protivrečnost*, jer iz dela koji govori o izvršenju možemo apstrahovati „uobičajenu pretpostavku" da nema više akata u nizu akata koje treba izvršiti, dok iz dela koji govori o beskonačnom broju akata možemo apstrahovati pretpostavku da *uvek* ima još akata da se izvrši (*Peach*, str. 48). Konjunkcija ovih pretpostavki daje onda otvorenu *logičku protivrečnost* (*ibid*., *loc. cit*.).

Pozivanje na „uobičajene pretpostavke" ovde se koristi za *pobijanje* infinitizma Tejlora i Vejtlinga (*ibid*., *loc. cit*.), ali za *izbegavanje mogućnosti formulisanja* teškoća potrebno je pozvati se na „'gramatiku' reči 'skok'" kod *staccato* verzije, ili na „gramatiku" reči „uočavanje" ili „brojanje" kod *legato* verzije.

Grinbaum kaže (*Grünbaum 3*, str. 83, nap. 51) da Blek trivijalizuje tvrdnju da je logički apsurdno reći da je neki čovek skočio hiljaditinu inča time što dodaje uslov „ako reč 'skočiti' razumemo u bilo kojoj od njenih uobičajenih, svakodnevnih upotreba". Mislim da Grinbaum nije razumeo poentu ove „trivijalizacije". On sam dodaje da „mi moramo upotrebljavati jezik da bismo opisali fizički proces koji konstituiše prelaženje celog intervala koje vrši *staccato* trkač" (*ibid.*, *loc. cit.*), ali da ne smemo postati žrtve „obaveza" (*commitments*) koje nameće običan jezik (*ibid.*, *loc. cit.*). No, reč je upravo o osvešćivanju da ove obaveze *postoje*, i Blekova „trivijalizacija", u stilu onih trivijalizacija koje je uobičajeno činio Vitgenštajn, predstavlja vid upozorenja onima koji jezik slobodno koriste za opis novih, „zamislivih" situacija.

Strategija radikalnog empiričara koji se poziva na *običan jezik* usmerena je na *prvo* „vraćanje loptice" onome ko smatra da se zenonovska dijalektika može maltene operacionalizovati tako da se nemogućnost dospeća do bliskog, obično lako dostižnog cilja učini empirijskom. Kako ćemo uopšte *formulisati* teškoće ako upotreba reči koje nam stoje na raspolaganju nameće obaveze poput onih koje ne dozvoljavaju da se govori o „skoku od hiljaditine inča"?

Naravno, naše iskustvo nije samo svakodnevno, laičko iskustvo; nauka je granice iskustva o „posrednim objektima" pomerila do doskora neslućenih razmera. Ali ako pristanemo na igru i počnemo da se sad pozivamo na empirijsku nauku, makar to bila i mikrofizika, možda smo već unapred omogućili radikalnom empiričaru da se izvuče.

Nijedna od savremenih nauka ne kvantizuje prostor i vreme i zato onaj ko bi se u želji da onemogući beskonačnu deljivost pri konstrukciji aporija pozivao na nauku ne bi mogao da zastupa ni geometrijski atomizam, niti kinematički atomizam koji bi se zasnivao na kvantizaciji vremena.

Kada se Džejms poziva na „prirodu konkretnog iskustva koje se uvek menja u zvesnim opazivim količinama" (*James*, str. 94) i na „diskretni sastav onoga što se odvija u našem opažajnom iskustvu" da bi izbegao zenonovske teškoće, pošto bi se, shodno tome, „vreme, prostor, promena itd... sastojali iz konačnog broja minimalnih količina vremena, prostora i promene" (*ibid.*, str. 80), onda nije sasvim jasno na koji se tačno način ovde opravdava kinematički atomizam.

Ako je Džejms hteo da tvrdi da postoji izomorfizam između niza minimalnh vremenskih intervala kojih možemo uopšte biti svesni i niza minimalnih intervala istog trajanja u kojima se neka fizička promena može odigrati – a to je način na koji je ne samo njega nego i Vajtheda shvatio Grinbaum (*Grünbaum 3*, str. 48) – onda je i njegova tvrdnja o minimalnim intervalima u drastičnom neskladu sa celokupnom današnjom empirijskom naukom, uključujući psihologiju.

Ne samo što nam pojedini *doživljaji vremena*, kao kod uživanja izvesnih droga, recimo LSD (vidi *Stafford*, str. 126 i dalje), ili u slučajevima temporalne epilepsije ili hašišoidne psihoze, *sugerišu* da se jedno vrlo kratko vreme može strahovito „razvući" tako da „minimalni" intervali postaju relativna stvar, već je nizom empirijskih istraživanja indicirano „da i kad se tahistoskopsko izlaganje vrši suviše brzo da bi bilo svesne diskriminacije (merene subjektovom sposobnošću da izvesti o tome koji je stimulus bio prisutan), subjekt ipak biva sposoban da pravi razlikovanja" (*Lazarus and McCleary*, str. 122). Tako se, na primer, kod subjekata uslovljenih da različito reaguju na izvesne besmislene slogove (kao YILIM, ZIFIL, GAHIW itd.) javlja takav galvanski odgovor kože koji pokazuje da oni ove slogove „čitaju" i onda kad je vreme u kojem su izloženi daleko ispod perceptivnog praga, to jest ispod praga „svesnog prepoznavanja" i mogućnosti izveštavanja o tome šta je izloženo (*ibid.*, str. 118–119). Lazarus i Mek Kliri su ovo „autonomno razlikovanje bez svesti" zvali *subcepcijom* da bi, izbegavajući termin „nesvesna percepcija", ostavili mogućnost da se, ako se to želi, očuva analitičnost veze između „perceptivne" i „svesne diskriminacije" (*ibid.*, str. 113). Možda nigde upečatljivije nego ovde ne vidimo kako nas „naučni empirizam" udaljava od onoga što zovemo „običnim iskustvom", odvodeći nas na *subnivoe*, jer se ne radi o subnivoima opaženih stvari (koje je Barkli zvao „posrednim objektima"), već o subnivoima takvih stvari kao što je „čitanje" – takoreći o subnivoima svesti. (Zašto se onda Zevsu ne bi perceptivni prag snižavao i prostorno i vremenski, ako mi sami možemo da „subcipiramo" nešto što je ispod perceptivnog praga?)

No, sasvim je moguće, mislim čak i verovatnije, da Džejms, tvrdeći da postoji izomorfizam između perceptivnog i fizičkog vremenskog niza, nije hteo da tvrdi da su „minimalne količine" u oba slučaja *iste*, već samo *da vremenska minima moraju* postojati. On bi se u tom slučaju usmerio protiv Vajerštras-Raselove teorije promene, koja je bazirana na „matematičkoj definiciji kontinuiranog kvantiteta" (vidi *James*, str. 94–95).

Ali, i ako ovako shvatimo Džejmsa, još nije do kraja jasno šta je on hteo da tvrdi. Da li promena nastaje „jednim udarcem“, to jest tako što „izvesne jedinice kvantiteta nastaju najednom, eksplozijom“ (*ibid.*, str. 80) *zato što* postoje *vremenska minima*, ili obrnuto, *zbog toga* što promena onako nastaje moraju postojati vremenska *minima*? Ukoliko bi Džejms rekao da je prvo slučaj, onda bi se njegov kinematički atomizam *zasnivao* na kvantizaciji vremena i bio bi i u ovom slučaju u neskladu sa savremenom naukom i, što je, kao što smo videli (§ 52), najgore, podlegao bi svođenju na apsurd pomoću jedne varijacije *Stadiona*.

Mislim da nemamo dovoljno evidencije da utvrdimo da li je Džejms u svom pozivanju na iskustvo uopšte uzimao u obzir ovu razliku, gde se jednom vreme tretira subzistentno u odnosu na promenu a drugi put inherentno. No Blek je u svojim radikalno-empirističkim argumentima i prostor i vreme tretirao inherentno.

Čime smo navedeni na to da tvrdimo da su sva tela, Ahilova putanja kao i njegovo kretanje beskonačno deljivi, ili čak da se sastoje iz beskonačno mnogo delova? Prvo uzimamo u razmatranje „makroskopska tela“ (*Black 2*, str. 121) koja „direktno opažamo“ (*ibid.*, str. 123) i konstatujemo da na njima možemo razlikovati delove. Isto tako razlikujemo faze neke promene. Zatim, „anticipiramo metode posmatranja i merenja“ (*ibid.*, *loc. cit.*) koje će nam omogućiti da otkrijemo „skrivene delove“ ovih tela sa „skrivenim svojstvima“ (*ibid.*, str. 121) koji imaju istu osobinu, naime, osobinu deljivosti – osobinu koja nam onda omogućava da tvrdimo da i ovi skriveni delovi imaju delove i da skrivene promene imaju faze. „Uvećavajuća stakla i teleskopi“ (*ibid.*, str. 122) odmah nam u tome pomažu. Razni metodi posrednog merenja koji se koriste u savremenoj fizici (vidi *Jammer*, gl. 11) kao i istraživanja u drugim naukama poput istraživanja subcepcije (*Lazarus and McCleary*, str. 122) uveravaju nas da se granice deljivosti, prema očekivanju, pomeraju. Najzad, *generalizacijom* (vidi *Black 2*, str. 121) zaključujemo da za svaki otkriveni, kao i još

neotkriveni, deo mora važiti da se „sastoji iz najmanje dva rasprostrta dela“ (*ibid.*, str. 120). Ovu poslednju tvrdnju *ne možemo potvrditi iskustvom* (*ibid.*, *loc. cit.*); ona je rezultat generalizacije kojom se vrši „ekstrapolacija“ (*ibid.*, str. 121) osobina izvesnih nama dostupnih tela na područje postuliranih objekata kao što su tela „dužine bilionitog dela čiode“ (*ibid.*, str. 123).

No generalizacija je generalizacija i ekstrapolacija je ekstrapolacija. O mnogim osobinama je smisleno govoriti samo u izvesnim „praktičnim situacijama“ i postoji „donja granica u pogledu dužine“ (*ibid.*, *loc. cit.*) objekata za koje je smisleno pripisivati im te osobine. Tako je, na primer, smisleno govoriti o boji teniske loptice, ali nije smisleno govoriti o boji elektrona (*ibid.*, str. 117).

Šta nam jamči da bi ijedna od poznatih osobina mogla da se pripiše bilionitom delu čiode? A *fortiori*, šta jamči da ima bar skrivenih osobina koje bi mu se mogle pripisati? „Jedino smo s obzirom na *ekstenziju* u iskušenju da mislimo o delu materije kao 'beskonačno deljivom'“; tako je „verovanje u beskonačnu deljivost materije povezano sa verovanjem u beskonačnu deljivost prostora“ (*ibid.*, str. 120).

Matematičari usvajaju da su tela beskonačno deljiva, ali to je možda tako samo zato što, kako je tvrdio još Barkli (*Berkeley 5*, §15, str. 43–44), oni postupaju „shematski“. *Baš zbog toga* što *apstrahuju* od *svih* drugih empirijskih svojstava *sem* rasprostrtosti, oni o dužini govore samo *relativno*; oni uzimaju da je, recimo, neka duž *dva puta veća* od neke druge, ali ne govore specijalno o duži dugačkoj jedan *inč* i drugoj dugačkoj dva *inča*. Geometra se, kaže Barkli, „ne tiče kakva je posebna veličina, velika ili mala, on na to gleda kao na nešto što ne utiče na dokaz“ (*ibid.*, § 126, str. 154). I *samo zato* se „o liniji u shemi dugoj samo jedan inč mora govoriti kao da sadrži deset hiljada delova, pošto se ona ne posmatra po sebi već kao da je opšta“ (*ibid.*, *loc. cit.*).

U vezi s ovim Barklijevim opisom matematičarevog postupanja vrlo je zanimljivo to što je i David Hilbert, kome se bar ne može osporiti poznavanje matematičarske prakse i koji je *kao matematičar* dopustio da bude uveden u Kantorov „raj beskonačnosti" (up. *Hilbert 2*, str. 170), smatrao da uobičajeno matematičko rešenje *Ahila*, koje se poziva na okolnost da je suma beskonačno mnogo intervala na koje je u aporiji izdeljeno Ahilovo kretanje konačna, „uopšte ne dotiče suštinsku tačku u paradoksu, naime ono što je u njemu paradoksalno, da beskonačni sled događaja, čije okončanje mi ne samo faktički nego ni u načelu ne možemo sprovesti, u stvarnosti treba da je zaključen" (*Hilbert und Bernays*, § 1 c 2, str. 16). I Hilbert je zbog toga predložio „radikalnije rešenje" koje je upravo *radikalno empirističko*. „... Mi ni u kom slučaju nismo prinuđeni da verujemo da je matematička prostorno-vremenska predstava o kretanju fizički smislena i u slučaju proizvoljno malih prostorno-vremenskih veličina... Ovaj matematički model *ekstrapolira* činjenice uzete iz određene oblasti iskustva, upravo iz oblasti kretanja *u granicama onog reda veličina koji je još uvek dostupan našem posmatranju*... (No) kao što pri neograničenom prostornom deljenju (izvesne) količine vode ne nastaje uvek voda, tako pri neograničenom deljenju kretanja ne nastaje uvek nešto što se može karakterisati kao kretanje" (*ibid.*, *loc. cit.*; *sve podv.*, *M.A.*).

Od beskonačne deljivosti *prostora* ne bi se, dakle, smelo direktno zaključiti na beskonačnu deljivost *rasprostrtih tela*, jer se ova deljivost prostora osniva na *načinu* na koji matematičar postupa, a ne na *iskustvu* o rasprostrtim telima. Taj način je shematski, jer se traga za opštim i nužnim vezama pojedinih karakteristika tela *bez obzira* na njihovu specifičnu veličinu, pa se utoliko govori o *svim mogućim* telima koja *bi imala* pretpostavljene *opšte* i *relativne* karakteristike koje se tiču ekstenzije. Da i ta tela mogu ili ne mogu biti velika jedan bilioniti deo čiode – to *matematičar ne može* da utvrdi. On samo može da kaže nešto o nekim ekstenzivnim osobinama koje bi takvo telo imalo *ako* bi postojalo. Njegovo eventualno postojanje utvrđuje se empirijskim putem, a radikalni empiričar koji se pored svakodnevnog iskustva poziva i na naučni empirizam dozvolio bi, svakako, da to utvrđivanje bude i veoma posredovano. No, istina o postojanju takvih tela u svakom slučaju ne bi bila *apriorna*.

Ako o prostoru i vremenu ne govorimo kao o nečemu što postoji po sebi, onda je delove tela i faze promene potrebno identifikovati – ne samo relativno, kao delove te i te dužine i faze tog i tog trajanja, nego i s obzirom na *neko drugo svojstvo*.

Kako običan jezik tako i naučni jezik pokazuju *„ograničenja skale* primene reči" (*Black 2*, str. 117), i kao što ne možemo bez prenebregavanja ili svesnog ogrešenja o „praktičke pretpotavke" govoriti o „skoku od hiljaditine inča", tako ne možemo govoriti ni o šarenom prostoru od bilionitog dela čiode. Mi *možemo* proširivati značenja reči i pomerati manje ili više implicitna ograničenja skale primene reči, ali tada *moramo biti svesni da to činimo* i zapitati se da li se ono što govorimo odnosi na nešto realno, i da li reči time ne gube empirijsko značenje. Za *staccato* trkača je možda *empirijski nemoguće* da se zaustavlja onako često kako mi to tražimo, a možda ni Zevs, ako postoji, ne može da snižava perceptivni prag onoliko koliko mi to zahtevamo. Opravdanost ograničenja skale primene reči bar u nekim slučajevima pokazuje da *samo iskustvo može* dovesti u pitanje beskonačnu deljivost. I ako – onako kako su to još fizički atomisti preporučivali a neki se veliki matematičari, kao Hilbert i Bernajs, s tim složili – odbijemo da prihvatimo matematičara kao krunskog svedoka jer ni prostor ni vreme ne moramo shvatiti subzistentno, možemo naše trkače osloboditi „prokletstva izvršavanja beskonačno mnogo *zadataka*", i umesto ovih čudnih „zadataka" prepustiti Ahilu da izvrši svoj običan i prost zadatak, „da uhvati kornjaču radosno, u blaženom nepoznavanju matematičareve spremnosti da besmrtnu trku predstavi formulama čija se složenost beskonačno povećava" (*Black 2*, str. 126).

64. Teškoće u pozivanju na običan jezik i naučni empirizam

Za razliku od Barklija, oni koji se u svojim radikalnim empirističkim argumentima pozivaju na običan jezik i naučni empirizam ne uništavaju identitet stvari s obzirom na opažanja različitih subjekata, različitim čulima, s različitih mesta i rastojanja, u različitim vremenima. Staza kojom Ahil juri kornjaču ostaje jedna ista staza za sve vreme trke, ona je jedna ista staza i za kornjaču i za Ahila, za njihove noge i naše oči. Otkriveni, prethodno skriveni, delovi te staze mogu, *bez eufemizma*, biti delovi *jedne iste staze*. Isto tako, ako Ahil trči *staccato*, onda su pauze pauze u jednom istom kretanju.

No, ovaj „nerevizionistički" empirizam je ipak dovoljno radikalan da bi doveo u pitanje beskonačnu deljivost i time predupredio našu konstrukciju aporija. Iako se skriveni delovi sa skrivenim svojstvima *stvarno mogu* otkrivati, ne znači da se oni *uvek moraju moći* otkrivati. Opravdanost ograničenja u primeni pojedinih reči da bi se očuvalo njihovo empirijsko značenje, kao što to jasno pokazuje primer s bojom, dovodi u pitanje „generalizaciju i ekstrapolaciju" kojima bi se otvorio put beskonačnoj deobi. Ako, pak, geometrija nije empirijska nauka i ako njeni aksiomi poput aksioma o neograničenoj deljivosti počivaju na specifičnom načinu njenog shematskog postupanja, kako to misli Barkli, i nemaju empirijsko značenje, onda bi se svaka od naših varijacija aporija koja bi se koristila beskonačnom deljivošću osnivala samo na jednom postulatu, a ne na „zdravorazumskim istinama

o prostoru, vremenu, materiji i kretanju" (*Black 2*, str. 120–121) zasnovanim na svakodnevnom ili naučnom iskustvu.

Blekov radikalni empirizam ima sasvim jasnu prednost u odnosu na geometrijski ili kinematički atomizam koji bi se osnivao na kvantizaciji vremena, pošto ne dozvoljava *reductio ad absurdum* korišćenjem francuskih varijacija *Stadiona* (up. §§ 50, 52). U odnosu na fizički atomizam njegova prednost je u tome što ima odgovor i na kinematičke aporije (up. § 47)

Mada radikalni empiričar može lako skliznuti u fizički, geometrijski ili kinematički atomizam, što mislim da pokazuje i sam Džejmsov „slučaj", glavni argumenti radikalnog empirizma *ne impliciraju* neki od ovih atomizama. Radikalni empirizam se zgodno može spojiti sa finitizmom u užem smislu (vidi §§ 53, 57) koji, kao što smo videli, ne implicira neki od onih atomizama. Verovatno nije slučajno što je Blek, koji je bio finitista, posle kritika koje su ga uzdrmale u njegovoj kritici inifinitizma, potkrepljivao svoje finitističke teze radikalno-empirističkim argumentima.

Način na koji radikalni empiričar može da pokaže kako bi izgledalo ograničenje deobe *bez* izlaganja teškoćama *Stadiona* u osnovi je onaj isti način kojim psihologija percepcije *de facto* spasava Barklija (vidi gore, § 61, str. 145). Dovoljno je, naime, da se u jednom trenutku ukinu pretpostavke koje omogućuju dalji identitet onih entiteta koji su neophodni u konstrukciji aporija.

Pri spasavanju Barklija to se može postići pozivanjem na efekte reorganizacije draži u novu konfiguraciju, u odbrani Bleka ukazivanjem na razne činjenice u mikrofizici ili fizici uopšte. Da bi lopta mogla da odskoči beskonačno mnogo puta pre nego što se zaustavi, ona bi morala biti toliko elastična da više ne bi bila telo koje bi se moglo konstruisati po zakonima postojeće fizike. Ako *staccato* trkač treba da bude slobodni elektron, njegovo zaustavljanje se nečim mora ostvariti – on se neće zaustaviti sam od sebe – a to zaustavljanje se, recimo, ne može ostvariti sudarom sa pozitronom, jer će doći do anihilacije čestica u γ-zračenju, posle čega neće više biti elektrona koji treba da „skače". Pitanje koje nam radikalni empiričar postavlja uvek je istog tipa: on nas pita o *praktičkim empirijskim pretpostavkama* koje moraju biti zadovoljene da bi se očuvao *identitet* i učesnika u trci i same trke. Jer, kako to rezimira Bernard Pič, „moramo pažljivo razmotriti pretpostavke i 'praktičke implikacije' bilo kojeg tvrđenja, kao i njegov aktualni opisni sadržaj", ako hoćemo da izbegnemo praktičke protivrečnosti (*Peach*, str. 49). A „praktička neprotivrečnost je osnovna, logička neprotivrečnost je nešto izvedeno" (*ibid.*, str. 43).

Možda bi najsuptilnija verzija radikalnog empirizma bila ona koja ne bi tražila utočište u prihvatanju postojanja, ili barem u neizvesnosti oko postojanja, apsolutno nedeljivih entiteta kakvi bi bili fizički atomi, ili prostorna, vremenska ili kinematička *minima*, već u načelnom dovođenju u pitanje *empirijskih pretpostavki* pod kojima bi se deoba mogla odvijati.

Ako čestica, recimo, posle anihilacije prestane da se ponaša kao čestica, onda nam to isto toliko može zapretiti dalju konstrukciju aporije koliko i činjenica da je energetsko zračenje kvantizovano (što je bilo veliko Plankovo *otkriće* u jednoj *empirijskoj* nauci – vidi *Heisenberg 1*, str. 490). Nije neophodno uvesti apsolutnu nedeljivost, dovoljno je verovati da se deobom u nekoj tački *narušavaju uslovi* za dalju deobu *iste* stvari ili *istog* procesa. Ako u jednom trenutku *staccato* proces biva onemogućen jer više nema onoga što, ili onoga koji, treba da „skače", onda to isto toliko onemogućava konstrukciju *staccato* verzije aporije koliko i činjenica da se zbog neke reorganizacije draži u novu konfiguraciju ne može neograničeno deliti neka crvena mrlja koju vidimo (up. § 61, str. 280).

U traženju slabosti ovakvog radikalnog empirizma još jednom ćemo se rukovoditi maksimom Zlonamernika da se u svakoj vrlini krije neka mana. Radikalnim empirističkim argumentima

dovedena je u pitanje beskonačna deljivost, pošto smo se u *raznim* slučajevima osvedočili da postoje *praktička ograničenja skale primene nekih termina*, koja su dovela u pitanje opravdanost generalizacije i ekstrapolacije, koje su neophodne da bismo se uverili da je moguće neograničeno produžavanje deobe. Ali, time je mogućnost deobe *samo dovedena u pitanje*. Ograničenja na skali primene nekih termina, kao što su termini za boje, ne dokazuje da ograničenja *moraju svuda i uvek* postojati. To što je za konstrukciju *staccato* verzije nemoguće koristiti sudare nekih mikročestica ne znači da je *staccato* kretanje apsolutno nemoguće. Radikalno-empirističkim argumentima nije dokazana *nemogućnost postojanja* entiteta za koje bi konstrukcija aporije bila moguća, iako se *tim argumentima* s pravom *dovodi u pitanje* tvrdnja o njihovom *postojanju*.

Prihvatimo, mada mislim da je to u pogledu nekih reči sumnjivo, da koristeći se običnim i naučnim jezikom *de facto* ne možemo konstruisati naše aporije bez ukidanja ograničenja u pogledu dužine na skali primene pojedinih termina i da ih *u tom smislu* ne možemo operacionalizovati. Ali mi nemamo dokaz da ukidanje ovih ograničenja nužno dovodi do nečeg nemogućeg s obzirom na *svako eventualno naučno otkriće*, mi nemamo dokaz da za reči kao „pomicaj" ili „zaustavljanje" *nužno* postoji *jedno takvo* ograničenje u pogledu *svakog* „skrivenog" dela tela. Jedna situacija bez ograničenja je *zamisliva kao empirijski moguća* i za *tu* situaciju je moguće konstruisati aporije koje proizlaze iz beskonačne deljivosti. Odgovor koji *u tom slučaju* treba dati svakako nije odgovor radikalnog empiričara. Radikalni empiričar govori o onome što je *možda*, ili *verovatno*, slučaj, i što bi, *ako je* to zaista slučaj, *ukinulo* naše teškoće. Mi govorimo o onome što je možda *vrlo malo verovatno*, ali što kao takvo zahteva *drugačiji* odgovor. Dok će Ahil u blaženom neznanju radosno uhvatiti kornjaču bez obzira na našu matematičku konstrukciju, mi ćemo ostati nezadovoljni odgovorom koji nam ukazuje na to da situacija o kojoj govorimo verovatno nije empirijski moguća. Jer, nama je dovoljno da je *zamislivo* da je ona *empirijski moguća*. Ako u tu situaciju nećemo doći, ne znači da ne razumemo u čemu bi se problem sastojao. Postoji razlog da nastavimo da tragamo za rešenjem *tog* problema.

Verujem da ima *zamislivih* situacija koje nam izgledaju paradoksalne ili nas zbunjuju zato što po svaku cenu hoćemo da ih opišemo *uobičajenim* terminima iz naše svakodnevice, ali ne mislim da je *staccato* ili *legato* verzija Ahilovog i Zevsovog trčanja jedna takva situacija.[1] Pitanje o tome koliko se puta *staccato* trkač zaustavio, ili koliko je deonica puta Zevs izbrojao, izgleda dobro definisano u *zamišljenoj* situaciji, pod uslovima koje smo naveli, a da zbunjenost *ne proizlazi* iz toga što se radi o dužinama od hiljaditine inča, i mnogo manjim, i što su zbog toga ukinuta neka ograničenja na skali primene pojedinih uobičajenih reči. Mislim da najviše što radikalni empiričar koji se poziva na svakodnevno i naučno iskustvo i svakodnevni i naučni jezik može da učini jeste da nas *upozori* da je to *možda de facto neostvariva situacija* upravo zbog nezadovoljivosti nekih *uslova empirijskog reda*. To nije malo, i može nam biti vrlo poučno, ali deluje nedovoljno utoliko što se ne pokazuje da ti uslovi *nužno* ne mogu biti zadovoljeni. Možda empiričar može pomoći Ahilu u njegovom *legato trčanju*, ali ne i onima koji ipak nastavljaju da se bave logičkim zavrzlamama *Zevsovog legato brojanja*.

E. INDEFINITIZAM

65. Neograničena brojnost mogućih i ograničenost broja stvarnih delova celine

Polazeći od jednog mesta u *Kritici čistog uma*, gde Kant govori o regresu koji se počev od jednog člana nekog niza odvija u „neodređenu daljinu" i gde preporučuje da se ovaj regres karakteriše kao regres *in indefinitum* a ne *in infinitum* (*Kant 1*, str. 351), označićemo imenom *indefinitizam* svako stanovište po kojem se iz zenonovskih teškoća izbavljamo tako što tvrdimo da – iako brojnost delova ili faza relevantnih celina nije ograničena time što bi morao postojati najveći broj *mogućih* delova ili faza, broj delova ili faza ovih celina *stvarno uvek mora* biti konačan. Kao što iz izvesne količine bronze možemo izlivati kipove najrazličitijih oblika a da jedan kip ipak nikad ne može predstavljati i Sokrata i Platona, tako se, rekli bi indefinitisti, i celina u načelu može sastojati od najrazličitijeg i po volji uvek sve većeg broja delova, ali se nikad ne može sastojati od različitog broja dalje nepodeljenih, ili pravih, delova u isto vreme; a jedan broj, broj delova od kojih se *određena* celina sastoji, jedan je *određen* konačan broj.

Razlika između *indefinitističke* teze i *pozitivne finitističke* (vidi § 57) može na prvi pogled delovati previše suptilno, ali ona može biti i vrlo značajna. Finitista ne samo što dopušta da se *u isto vreme* govori o različitom broju delova ili faza jednog istog tela ili jednog istog procesa, već je to za njega *nužno* tako, s obzirom da su delovi uvek *delovi određene vrste*, i, osim toga, za njega je *važno jedino to* što uvek ima samo konačno mnogo delova neke (bilo koje) vrste. Indefinitista, iako bez sumnje može da prihvati da se o delovima govori i onako kako to čini finitista, dopušta da se o delovima govori i nespecifikovano, što znači da priznaje i neki smisao u kojem se i *apsolutno*, a ne samo relativno s obzirom na vrstu, može reći koliko delova ima neko telo i iz koliko se faza sastoji neki proces.

66. *Primarna značenja, načini postojanja i aporija celine i delova*

Još iz doba ranije kritike pluralizma (vidi gore, § 32) potiče „aporija dela i celine", kako je imenuje Aristotel u *Fizici* (ἔχει δ' ἀπορίαν περὶ τοῦ μέρους καὶ τοῦ ὅλου) (*Aristotle 21*, 185 b 11)[1]. Da li prednost treba dati mnoštvu, ukoliko delovi pronađeni deobom postoje samostalno, ili jedinstvu, jer su delovi delovi celine? Pitanje se može postaviti i s obzirom na eventualne delove onoga što je kontinuirano (συνεχές), i s obzirom na delove onoga što nije kontinuirano (καὶ περὶ τῶν μερῶν τῶν μὴ συνεχῶν) (*ibid.*, 185 b 14), čiji su delovi, naime, budući raznovrsni, kontigualni (up. gore, § 16).

U spisu *O sofističkim pobijanjima* Aristotel, kao primer odgovora na pitanje da li „biće" ili „jedno" svuda znače isto, navodi

kao rešenje protiv Zenonovog i Parmenidovog argumenta odgovor onih koji kažu da se o biću i jednom govori na razne načine (οἱ δὲ τὸν Ζήνωνος λόγον καὶ Παρμενίδου λύουσι διὰ τὸ πολλαχῶς φάναι τὸ ἓν λέγεσθαι καὶ τὸ ὄν) (*Aristotle 8*, 182 b 24–26). Ovaj odgovor je čisto finitistički (up. § 57). S obzirom da nam Aristotel često skreće pažnju na činjenicu da je moguće na višestruk način govoriti o nečemu (πολλαχῶς λεγόμενα) (vidi, na primer, *Aristotle 23*, 110 b 16, *Aristotle 1*, 1003 a 33, 1004 a 22), mogli bismo pretpostaviti da je to i njegov odgovor Elejcima.

Već na početku *Kategorija* Aristotel ukazuje na postojanje homonima (ὁμώνυμα) i sinonima (συνώνυμα) (*Aristotle 18*, 1 a 1–8), stvari koje su samo isto imenovane a imaju različitu definiciju suštine (λόγος τῆς οὐσίας)[2] i stvari koje su – iako iste s obzirom na suštinsko određenje, različito imenovane s obzirom na specifične razlike. Kao primer za prvo Aristotel navodi suštinsku razliku između živog čoveka i portreta, koju kao da poništava isti naziv, a kao primer za drugo razliku između čoveka i vola, koji su – i jedan i drugi živa bića. Nije li i spor oko jedinstvenosti i mnoštvenosti i kontinuiranih i diskontinuiranih stvari ili bića samo verbalni spor koji proizilazi iz *činjenice* (vidi *Aristotle 1*, 1003 a 33, 1004 a 22) da se i o biću i o jednom govori na višestruk način? Nije li dilema u koju nas teraju „unitaristi" i „separatisti" lažna?

Iako je ukazivanje na πολλαχῶς λεγόμενα smatrao neophodnim preduslovom za rešenje elejskih teškoća, Aristotel to još nije smatrao dovoljnim.

U završnim razmatranjima o Zenonovom argumentu u poslednjoj knjizi *Fizike* (263 a 4 i dalje) Aristotel priznaje da su njegova ranija razmatranja o kretanju (u knjizi Z) dovoljna kao odgovor na *postavljeno pitanje* (ἡ λύσις πρὸς μὲν τὸν ἐρωτῶντα ἱκανῶς ἔχει) ali da to nije dovoljno za (samu) stvar i istinu (o njoj) (πρὸς δὲ τὸ πρᾶγμα καὶ τὴν ἀλήθειαν οὐχ ἱκανῶς) (*Aristotle 22*, 263 a 15–18). U ranijim razmatranjima (*ibid.*, 233 a 21 i 239 b 5), naime, Aristotel je otkrio *paralogizam* u Zenonovom argumentu, koji treba da se sastoji u tome što se o ograničenosti vremena u kojem se kretanje obavlja ne govori u istom smislu u kojem se govori o neograničenosti puta koji se prelazi. Sada, međutim, on priznaje da ukazivanje na ovu razliku u smislu nije dovoljno da se reši poblem zbog pojave beskonačnosti, pošto se možemo ograničiti na onaj jedan smisao u kojem je i vreme beskonačno budući da je beskonačno deljivo (ἔχει γὰρ ὁ χρόνος ἀπείρους διαιρέσεις) (vidi *ibid.*, 263 a 20–23). Otkriće paralogizma preko ukazivanja na višesmislenost u govorenju o jedinstvenosti, mnoštvenosti i ograničenosti, dovoljno je, dakle, kao odgovor *ad hominem*, ali problem s beskonačnošću ostaje.

Aristotel je došao do zaključka da bi teorija značenja koja bi se iscrpljivala u podeli reči na homonime i sinonime i konstataciji da postoje slučajevi πολλαχῶς λεγόμενα bila nedovoljna da se reši problem o kojem je reč. Na njegovu sreću, on se faktički već dugo bio služio jednom razrađenijom teorijom, teorijom o „primarnim značenjima“[3].

Već u *Eudemovoj etici*, govoreći o tri vida prijateljstva (τρία φιλίας εἴδη), Aristotel kaže da se o svima njima „govori polazeći od jednog određenog kao primarnog (πρὸς μίαν γάρ τινα λέγονται καὶ πρώτην)“ (*Aristotle 19*, 1236 a 16–18). Praveći analogiju sa izrazom „lekarski“ (ἰατρικόν), on ukazuje na to da iako se govori i o „lekarskoj duši“, i o „lekarskoj ruci“, i o „lekarskom instrumentu“, i o „lekarskoj intervenciji“, postoji primarna upotreba a to je ona „čija je definicija u svima (drugima) prisutna (οὗ ὁ λόγος ἐν πᾶσιν ὑπάρχει)“ (*ibid.*, 1236 a 21). Tako je, na primer, „lekarski instrument“ onaj instrument kojeg lekar koristi ili bi ga mogao koristiti (*ibid.*, *loc. cit.*). To šta je lekarski instrument ne može se odrediti bez pozivanja na neke karakteristike i namere čoveka koji je lekar, dok obrnuto nije slučaj. Aristotel za primarnu upotrebu koristi i termin κυρίως (prava, glavna) (*ibid.*, *loc. cit.*).

Da li je nužno da za svaku reč ili izraz postoji primarna upotreba? Sam Aristotel u svojim mlađim danima nije verovao da tako nešto postoji kada je u pitanju „dobro“. On eksplicitno kaže u *Eudemovoj etidi* (*ibid.*, 1218 a 34–35) da se politika (kao nauka) bavi posebnim dobrom (ἴδιον ἀγαθόν) i da joj nije od koristi da se bavi nekim dobrom po sebi, pošto ono ne postoji (οὐκ ἔστιν αὐτό τι (τὸ?) ἀγαθόν). Svakako, ovo se može shvatiti kao direktno obraćanje Platonu i Akademičarima, ali treba imati u vidu da je to *ceo* zaključak posle rasprave o višesmislenosti „dobra“ „o kojem se na isto tako mnogo načina govori kao i o biću (πολλαχῶς γὰρ λέγεται καὶ ἰσαχῶς τῷ ὄντι τὸ ἀγαθόν)“ (*ibid.*, 1217 b 27). Aristotel ničim ne ukazuje na neko eventualno primarno značenje ovih reči.

Oven je verovatno u pravu kada, u znamenitoj studiji o logici i metafizici u nekim ranijim Aristotelovim delima, konstatuje da je Aristotel tada, u polemici sa Akademičarima, terao svoje protivnike u ogoljenu dilemu „homonimnost – sinonimnost“[4] i da u polemičkom žaru nije ni ispitivao mogućnost da na „dobro“ i „biće“ primeni teoriju o primarnim značenjima (*Owen 4*, str. 181–182)[5], koju je *de facto* sam već koristio[6].

Suprotno očekivanjima onoga ko je upoznat s knjigom Γ *Metafizike*, u *Eudemovoj etici* se kaže da „ne postoji jedna nauka o biću, kao ni o dobru (οὐδὲ ἐπιστήμη ἐστὶ μία οὔτε τοῦ ὄντος οὔτε τοῦ ἀγαθοῦ)“ (*Aristotle 19*, 1217 b 35). Ako ovome dodamo jedno mesto iz *Druge analitike*, gde se govori o načelima (ἀρχαί) nauka i gde se kaže da je „ono što je zajedničko u pojedinim naukama zajedničko samo po analogiji (τὰ μὲν ἴδια ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ δὲ κοινά, κοινὰ δὲ κατ᾽ ἀναλογίαν) (*Aristotle 13*, 76 a 48), biće nam jasno koliko je teorija o primarnim značenjima (koja je kasnije postala osnov mogućnosti „prve filozofije“) bila u to vreme samo stvar sporadične primene.

U *Nikomahovoj etici*, međutim, Aristotel posle kritike teorije o postojanju jednog dobra po sebi kao ideje dobra i navođenja najrazličitijih upotreba reči „dobro“ (*Aristotle 20*, 1096 b 9–26) ipak postavlja pitanje da li se različite stvari nazivaju dobrim *samo slučajno*, to jest da li su „samo slučajno homonimi“ (ἀπὸ τύχης ὁμωνύμοις) (*ibid.*, 1096 b 27), i navodeći moguće odgovore on ne pominje jedino slučajeve gde se različite stvari nazivaju dobrim samo *po analogiji* (κατ᾽ ἀναλογίαν) (*ibid.*, 1096 b 29), već pominje i mogućnost da se to čini *na osnovu jednog* dobra, to jest jedne primarne upotrebe (ἀφ᾽ ἑνός) (*ibid.*, 1096 b 27). Možda su komentatori prebrzo zaključili da je Aristotelovo vlastito rešenje rešenje po analogiji[7].

Kad je reč o *biću*, to jest o onome što postoji, Aristotel je u *Metafizici* došao do toga da *nedvosmisleno*, ne u formi razmišljanja o mogućnostima, tvrdi da se, doduše, „o biću govori višestruko (τὸ δὲ ὂν λέγεται μὲν πολλαχῶς)", „ali pošav od jednog (osnovnog značenja) i neke određene karakteristike (ἀλλ᾽ πρὸς ἓν καὶ μίαν τινὰ φύσιν)", „a ne (samo) homonimno (καὶ οὐχ ὁμωνύμως)" (*Aristotle 1*, 1003 a 33). Zato, između ostalog, i „postoji nauka koja se bavi bićem kao bićem (ἔστιν ἐπιστήμη τις ἣ θεωρεῖ τὸ ὂν ᾗ ὄν)" (*ibid.*, 1003 a 21), nauka koja nije istovetna ni s jednom od pojedinačnih nauka, koje se onim što postoji bave s obzirom na ostale, za njih specifične, a inače akcidentalne odredbe (περὶ τούτου θεωροῦσι τὸ συμβεβηκός) (*ibid.*, 1003 a 26).

Ovu ideju o postojanju primarnih značenja i kad se radi o „postojanju" koristio je Aristotel u mnogim slučajevima, a nas zanima kako ju je koristio u raspravljanju pitanja o prioritetnosti celine ili delova u knjizi Z *Metafizike.*

U skladu sa ostalim slučajevima u kojima govorimo o primarnim značenjima, o primarno postojećim entitetima govori se u slučaju da se na postojanje tih entiteta moramo pozivati kad god hoćemo da govorimo o postojanju drugih entiteta, odnosno onda kada svako govorenje o postojanju nečega nužno podrazumea i postojanje tih entiteta. Opšti naziv za takvu vrstu entiteta koji Aristotel upotrebljava je οὐσία[8]. On usvaja ovaj naziv zato što se, kako kaže, opšte prihvata da glavne karakteristike onoga što se tako naziva predstavljaju *odeljivost*, ili *samostalnost* (τὸ χωριστόν), i *individualnost u prevashodnom smislu* (τὸ τόδε τι) koja omogućava da se nespecifikovano kaže τόδε τι („ovo" kao „ova određena pojedinačna stvar") (*Aristotle 1*, 1029 a 27), kao kad pokazujući na konja kažemo „ovo je konj" i pri tom sa „ovo" ne referiramo na njegovu boju, težinu, mesto, stanje i slično (vidi *Aristotle 18*, 1 a 20 a dalje, 1 b 10, 2 a 34).

Kada pokazujući na konja kažemo „ovo", ne mislimo pri tom ni samo na vrstu stvari (γένος) (*ibid.*, 2 b 15), ili suštinu (τὸ τὶ ἦν εἶναι) (vidi *Aristotle 1*, 1029 b 13 – 1029 b 23) koju bismo možda mogli izraziti definicijom (λόγος τῆς οὐσίας), već na konja kao *pojedinačnog, materijalizovanog konja* (*ibid.*, 1035 b 28–31).

Karakteristiku odeljivosti, ili samostalnosti (τὸ χωριστόν), supstancije s obzirom na ostale kategorije možemo ovako razjasniti. Da bismo govorili o određenim bojama, položajima ili razdaljinama, moramo govoriti o *pojedinačnim stvarima određene vrste* koje su tako i tako obojene, nalaze se tu i tu ili su jedna od druge toliko i toliko udaljene. Te stvari pak *ne moraju* biti baš te i te boje, biti baš tu i tu, biti baš toliko i toliko međusobno udaljene. Svako govorenje o postojanju određenih svojstava, relacija, mesta, stanja, i ostalih entiteta o čijem se postojanju inače govori (vidi *Aristotle 1*, 1028 a 10 i dalje), nužno podrazumeva postojanje pojedinačnih stvari određene vrste, dok obrnuto nije slučaj.

Prvenstveno s obzirom na *postojanje* entiteta o kojima je reč ne znači i prioritet s obzirom na njihovo *definisanje.* Ne tvrdi se da o bojama moramo govoriti kao bojama *stvari,* već da *postojanje* određenog belog podrazumeva i postojanje pojedinačne stvari koja je bela. Ta ista stvar može postojati a da ne bude bela, dok to određeno belo ne može postojati a da ne postoji ta stvar. To se najlakše uočava u *promeni* (μεταβολή) (vidi *ibid.*, 1010 a 15 i dalje). Jedino stvar kao supstancija može da ostane ista menjajući se.[9]

To što stvari mogu menjati svojstva, međusobne položaje, stanja ili mesta ne prestajući da postoje, ne znači da supstanciju treba shvatiti kao nešto što se dobija kada se apstrahuje svaki kvalitet, kvantitet, stanje i sve ostalo. Aristotel supstanciju nije shvatio kao supstrat koji bi kao nosač akcidensa bio bez ikakvih karakteristika. Mada takvu mogućnost razmatra, on je eksplicitno odbacuje. Supstancija nije supstrat (ὑποκείμενον) kao čist materijal (ὕλη) (vidi *Aristotle 1*, 1028 b 36, 1029 a 2), iz razumljivih razloga: ako takav supstrat ili takav materijal ne bi baš bili puko ništa, kako je to smatrao Platon (vidi *Plato*

12, 52 B–D)[10], ono sigurno ne bi imali karakteristike supstancije τὸ χωριστόν i τὸ τόδε τι (vidi *Aristotle 1*, 1029 a 27–30). Samo nešto što ima određene karakteristike može imati potrebnu individualnost da bi moglo biti odeljivo ili ostajati isto menjajući se. Zato je supstancija *pojedinačna stvar određene vrste*.

Eventualne nematerijalne supstancije, kao što je Bog, kojim se bavi *teologika* (θεολογική) (*ibid.*, 1026 a 19) nas ovde ne zanimaju. No trenutno ostavljamo po strani i problem eventualnog postojanja nematerijalnih supstancija koje bi mogle biti predmet *matematike* (μαθηματική) (*ibid.*, 1026 a 7). Zanimaju nas, pre svega, supstancije kojima se bavi *fizika* (φυσική), koje smo sve vreme i imali u vidu. Ako se neki delovi matematike i bave stvarima koje su, iako nepromenljive, prisutne u materiji (ἐν ὕλῃ) (*ibid.*, 1026 a 15–16), a takvi delovi bi mogli biti geometrija i astronomija (γεωμετρία καὶ ἀστρολογία) (*ibid.*, 1026 a 26), ono je ipak fizika nauka „o stvarima koje iako odeljive nisu nepromenljive (περὶ χωριστὰ μὲν ἀλλ' οὐκ ἀκίνητα)" (*ibid.*, 1026 a 13).

Kao primere za to šta se sve smatra fizičkim supstancijama Aristotel navodi životinje, biljke i njihove delove (τὰ μόρια αὐτῶν), zatim fizička tela (τὰ φυσικὰ σώματα) kao što su vatra, voda, zemlja i njihove delove i ono što se od njih sastoji (ὅσα ἢ μόρια τούτων ἢ ἐκ τούτων ἐστίν) (*ibid.*, 1028 b 9–12). Naš je zadatak upravo da ispitamo da li su delovi ovih supstancija supstancije u istom smislu u kojem je to supstancija čiji su ti delovi delovi i da u vezi s tim odredimo prioritete postojanja s obzirom na celinu i delove.

S obzirom na to da se i o „prioritetu" govori na višestruk način (πολλαχῶς μὲν οὖν λέγεται τὸ πρῶτον) (*Aristotle 1*, 1028 a 31–32), kao i o delu (ἢ πολλαχῶς λέγεται τὸ μέρος) (*ibid.*, 1034 b 32), moramo ići od slučaja do slučaja, i biti vrlo oprezni, kada hoćemo da ustanovimo prioritetnost koja nas trenutno zanima.

Pošto je životinja (živo biće)[11] onaj fizički entitet za koji se nesumnjivo može reći da je οὐσία, pođimo od odnosa životinje i njenih delova. Deo koji Aristotel uzima kao primer je prst (δάκτυλος). S obzirom na postojanje, životinja ima prvenstvo nad prstom, znači celina ima prvenstvo nad delom, jer prst ne

može postojati odeljeno, samostalno (οὐδὲ γὰρ εἶναι δύναται χωριζόμενα), utoliko što mrtav prst nije isto što i živi prst; kao mrtav on je prst samo kao homonim (ὁμώνυμος ὁ τεθνεώς) (*ibid.*, 1035 b 25). Nije ovde reč o tome da čovek može nastaviti da živi i kad mu odseku prst, ali ne i kad mu izvade srce, dok prst ne može živeti sam za sebe – kao ni srce – jer bi to samo značilo da se neki delovi mogu odstranjivati a neki ne. Treba posmatrati celinu, znači čoveka sa prstima i srcem, i izdvojene prst i srce, pa videti da prst i srce *ne postoje na isti način* kao čovek, jer samostalni oni *ne samo* što više nisu delovi celine, već *van celine* više *nemaju karakteristike* koje su unutar celine imali i posmatrani sami za sebe.

Ali nije celina uvek prvenstvena na ovaj način. Ne samo što bi određenje nekog sloga (λόγος τῆς συλλαβῆς) sadržavalo određenje slova, to jest elementa (λόγος τῶν στοιχείων) (*ibid.*, 1035 a 9–11), već bi elementi ostali nepromenjeni i ne budući elementi celine. Ako posmatramo – ne organske, već *kontingentne celine* (ἁπτόμενα) (vidi *Aristotle 22*, 226 b 23), celine čiji su delovi kontigualni i samo akcedentalno (κατὰ συμβεβηκός) zajedno, videćemo da delovi ništa manje nisu samostalni od celine. Štaviše, ako su samostalni jedan u odnosu na drugi, onda su i samostalniji, jer bi ostali to što jesu i kad bi se celina rasturila, to jest kad celine više ne bi bilo. Kad cenzori rasture slog u štampariji, uništili su tekst ali ne i slova. To je način na koji su atomisti shvatali atome i njihove konglomerate (up., na primer, *Epicurus* § 39 – § 41); atomi imaju prioritet s obzirom na postojanje.

Da li osim organskih celina, poput čoveka, i kontingentnih, poput gomile pruća, ima još nekih celina; postoji li naime neki treći način odnošenja celine i delova? Postoji, i to onaj najsporniji i za nas najvažniji. Postoje gliste i homogene i kontinuirane stvari i njihovi delovi. Preseći glistu na pola nije isto što i odseći čoveku prst. Prst je posle odsecanja mrtav, a glista živi u dva dela; „neke životinje žive i kad se podele (διὰ ἔνια ζῷα διαιρούμενα ζῇ)" (*Aristotle 1*, 1040 b 13). Nije li možda bolje reći da posle presecanja ne živi glista već gliste? Nisu li tada dve?

Ova teškoća u izražavanju ima svoj osnov u *načinu postojanja* odsečenih delova gliste. Dok je, s jedne strane, prst kao deo tela na neki način individuiran kao deo celine ali ne može postojati samostalno, dok su, s druge strane, delovi kontingentne celine individuirani već kao delovi celine i kao takvi mogu nastaviti da postoje samostalno, dve novonastale gliste postoje samostalno iako nisu bile individuirani delovi one prethodne – pre rasecanja jedne – gliste. Ako se kod nerasečene gliste govori o delovima koji mogu postojati samostalno, onda se ne govori o *već* samostalnim delovima (kao kod delova kontingentnih celina), već se o njihovom samostalnom postojanju govori samo s obzirom na *mogućnost* da postoje samostalno. *Dok* su po prirodi (nešto što je) jedno i kontinuirano (ὅταν ᾖ ἓν καὶ συνεχὲς φύσει) *samo je moguće* da će postojati (ὅμως δυνάμει πάντ' ἔσται) (*ibid.*, 1040 b 14–15).

Isto što je ovde rekao za delove glista, i drugih sličnih organskih jedinstava, Aristotel u *Fizici* kaže za delove svih homogenih i kontinuiranih veličina (vidi, na primer, za kretanje i delove promene ili kretanja *Aristotle 21*, 200 b 25 i dalje, *Aristotle 22*, 228 a 24 i dalje). Tako je, na primer, akcidentalna karakteristika linije da ima polovine kao delove, i to čak neodređeno mnogo polovina (συμβέβηκε ἃ τῇ γραμμῇ ἄπειρα ἡμίσεα εἶναι) (*Aristotle 22*, 236 b 7).

Određenje mnoštvenosti koju možemo pripisati jednom bronzanom krugu samo je akcidentalno određenje s obzirom na moguće deljenje. Takav krug je deljiv, ali bismo mogli reći da *aktuelno ima delove* jedino *ako ne bi bio* homogeno kontinuiran.

Govoreći o nastajanju (γένεσις) putem stvaranja (ποίησις) u smislu oblikovanja materije (vidi *Aristotle 1*, 1032 b 15 i dalje), Aristotel govori o delu ili delovima materije iz kojih je predmet nastao. Ako od

polovine velikog bronzanog kruga izlijemo kip, onda je kip nastao od *polovine bronzanog kruga*. Ali Aristotel želi da kaže da je ta polovina samo *potencijalno* bila *deo* bronzanog kruga, deo, između ostalog, i zato što je moguće tako izliti ovaj kip; kip nije nastao ni iz čega (vidi, takođe *Aristotle 21*, 191 a 23 i dalje). Ali kip nije nastao ni iz ničega samostalno postojećeg, jer je materijal, iz kojeg je kasnije kip izliven, bio tada *lišen samostalnog obličja*, pošto je bronzani krug bio ono što je jedno i kontinuirano (ἓν καὶ συνεχές). Ovu lišenost (στέρησις) Aristotel navodi kao glavnu karakteristiku neoblikovane materije (ὕλη), odnosno njenih homogenih i kontinualnih delova (vidi *Aristotle 1*, 1033 a 9). Oni nisu apsolutno nepostojeći, nisu nebiće – *kao* nebiće (τὸ ᾗ μὴ ὄν) (*Aristotle 21*, 191 b 9), ništa ne nastaje iz ničega. Ali homogeni i kontinuirani delovi materije nisu samostalno postojeći; materija, kao što smo već videli, nije οὐσία. Zbog ovoga čak ni vodu, zemlju, i ostale elemente, kod kojih smo videli da se na njih može primeniti reč „supstancija", ipak ne treba tako nazivati *ukoliko* se posmatraju *samo* kao materijal, a ne kao kako-tako oblikovani materijal (*Aristotle 1*, 1040 b 8), kad zadobijaju karakteristiku individuiranosti. Šta bi značilo govoriti o brojanju voda? Čaše vode, ili reke, svakako možemo izbrojati.

Prema Parmenidu, ono jedino o čemu se smisleno može govoriti bilo je jedno, homogeno, nedeljivo, kontinuirano biće. Po Aristotelu, za sve što postoji kao homogeno i kontinuirano *pre svega se kaže da je jedinstveno*, jedinstveno s obzirom na *primarno značenje „bića"* – koje se odnosi na supstanciju – i *primarno značenje „jednog"* – koje se isto tako odnosi na supstanciju (*Aristotle 1*, 1016 b 3–14). No sve to može biti mnoštveno na *druge načine* i, osim toga, *je deljivo.*

67. Neodređenost i potencijalna beskonačnost

Posmatrajući jednu neživu, na određen način oblikovanu – i time i ograničenu – stvar koja je homogena i kontinuirana, možemo, shodno svemu prethodnom, reći da je ona *pre svega* jedinstvena; jedinstvena, s obzirom na primarna značenja τὸ ὄν i ἕν, jedinstvena kao supstancija. Ako za tu istu stvar kažemo da je mnoštvena, onda to može biti tačno ili s obzirom na *neku drugu kategoriju*, zato što joj se mogu pripisivati različiti atributi – ona može biti okrugla, siva, teška itd. – ili, ako hoćemo da se držimo kategorije supstancije, onda je to zato što deobom od nje, namesto nje, *možemo dobiti više supstancija*.

Paradoks predikacije rešava se, dakle, ukazivanjem na *višestrukost* upotrebe reči „biće" i „jedno", a da pri tom ipak stvar može ostati *prevashodno jedinstvena*.

Ako je stvar koju posmatramo supstancijalno jedinstvena, onda ona *u istom smislu* može biti mnoštvena samo *potencijalno*, s obzirom na okolnost, naime, da bi od nje deobom moglo nastati više samostalnih individuiranih stvari. Ona je u tom smislu na neprotivrečan način *i* dvostruka, *i* trostruka, *i* četvorostruka, jer se može podeliti *i* na dva, *i* na tri, *i* na četiri dela. Ono što bi uzeto kao aktualno bilo protivrečno, kao potencijalno ne mora biti takvo, „pošto u pogledu mogućnosti ista stvar može u isto vreme da bude jedno i nešto drugo, tome suprotno, dok stvarno to nije moguće (δύναμει μὲν γὰρ ἐνδέχεται ἅμα ταὐτὸ εἶναι τὰ ἐναντία ἐντελεχείᾳ δ' οὔ)" (*Aristotle 1*, 1009 a 35). Ako je bronza izlivena tako da predstavlja Platona, onda ona stvarno ne predstavlja Sokrata, ali ona bi mogla biti izlivena tako da predstavlja upravo Sokrata. Ali ne *samo* Sokrata. Potencijalno, ona bi mogla da predstavlja Alkibijada i Agatona. Naravno, opet ne u isto vrme; stvarnost je surova.

Strogo govoreći, ne samo što Platon ne može *biti* Sokrat, niti Alkibijad Agaton, već Platon ne može ni *postati* Sokrat, niti Alkibijad Agaton. Bronza kao bronza je ta koja se može preoblikovati, a ne Platonov kip kao supstancija. Upravo na ovu razliku ukazuje Aristotel kad objašnjava kako upotrebljava τὸ ᾗ ("kao") (vidi *Aristotle 21*, 201 a 29). Bronza *kao* brozna (χαλκὸς ᾗ χαλκός) je materija (ὕλη), a ne

supstancija (οὐσία), ona kao takva nikad ne postoji samostalno i zato materija kao takva, posmatrana po sebi, kao što smo videli, iako nije apsolutno ništa – nije naime nebiće – *kao* nebiće (τὸ ᾗ μὴ ὄν) – postoji ipak samo potencijalno, stvarno postoji tek kao ovako ili onako oblikovana (vidi *Aristotle 1*, 1042 b 9). *Nihil privativum* nije supstancija, mada nije ni *nihil negativum*.

Zahvaljujući materiji, dakle, namesto jedne fizičke supstancije možemo deobom dobiti više njih, i ako materija nije uništiva, fizičke supstancije su propadljive *upravo* zahvaljujući svojoj materijalnosti.[1]

Ali sad, prvo, *koliko* likova možemo dobiti preoblikovanjem bronze? Drugo, *koliko* supstancija možemo dobiti deobom jedne homogene kontinuirane stvari?

Ako na oba pitanja odgovorimo sa: „beskonačno mnogo", ono ipak ovaj odgovor ne mora u oba slučaja značiti isto. U slučaju preoblikovanja bronze verovatno je da odgovorom želimo da kažemo da *broj preoblikovanja* nije ograničen, a ne da će se preoblikovanjem ikada ostvariti *beskonačno mnogo likova*. U drugom slučaju, pak, nije jasno da li želimo da kažemo samo da ne postoji neki određeni najveći broj supstancija koje se mogu dobiti deobom, jer se deoba može uvek nastaviti, ili želimo da kažemo nešto jače, da se izvesnom deobom može u jednom trenutku dobiti beskonačno mnogo supstancija.

Mada se na to ne ukazuje, Aristotel je odgovorom na poslednju dilemu faktički uveo u igru ne samo pojam *potencijalne* beskonačnosti, već i razliku između *kategorematske* i *sinkategorematske*, prave i neprave beskonačnosti. Da bismo se u to uverili moramo ispitati kako razna značenja „beskonačnog", tako i razna značenja „mogućeg".

Kad Aristotel kaže da „ono što je beskonačno postoji potencijalno (δυνάμει εἶναι τὸ ἄπειρον)" (*Aristotle 21*, 206 a 18), on odmah naglašava da tu potencijalnost ne treba shvatiti u smislu u kojem se govori o nekom mogućem kipu (koji bi nastao preoblikovanjem bronze)[2], jer dok bi kip *mogao i stvarno postojati*, ono što je beskonačno *nikad ne može biti aktualno* (οὕτω καὶ ἄπειρόν τι ὃ ἔσται ἐνεργείᾳ) (*ibid.*, 206 a 20). Ali Aristotel *operiše pojmom* aktualne beskonačnosti (vidi *ibid.*, 206 b 23–24, 206 b 35, 207 a 2). *Ukoliko bismo* namesto jedne supstancije nekom deobom mogli dobiti beskonačno mnogo supstancija, onda *bi*, i ako se to nikad ne ostvari, potencijalnost beskonačnosti trebalo shvatiti *u smislu u kojem* se govori o mogućem kipu *bez obzira* da li će se on ikad izliti. Aristotel misli da poseduje *nezavisan dokaz* protiv te mogućnosti (vidi *Aristotle 3*, 316 a 15 i dalje).

S tim dokazom smo se sreli govoreći o atomizmu (§ 45). To je, naime, dokaz koji su možda još rani atomisti koristili kao apagoški dokaz za postojanje atoma, no Aristotel ga, vidimo, koristi u druge svrhe. Ako smo jednovremenim bisekcijama čiji broj nije ograničen dobili tela s veličinom (μέγεθος), onda je to i protivno pretpostavci da nema nedeljivih tela (veličina) ili pretpostavci da je deoba kompletna (*Aristotle 3*, 316 a 25).

Ako bismo deobom dobili samo tačke (koje nemaju veličinu), onda bi to značilo da se prvobitno telo može ponovo sastaviti iz tačaka (ἐκ στιγμῶν), nečega što je bez veličine, i u tom smislu „iz ničega" (ἐκ μηδενός) (*ibid.*, 316 a 27). Protiv ovoga Aristotel ne koristi samo Zenonov aksiom, već i okolnost da se tačke ne mogu ni kontinualno ni kontigualno dodirivati, niti uopšte biti bar potencijalno konsekutivne (ἐφεξῆς) u smislu postojanja najbliže moguće (naredne) tačke u odnosu na datu tačku.

Pošto dokaz treba da predstavlja *reductio ad absurdum* neke od pretpostavki, ostaje da odbacimo *neku* od njih. Atomisti i možda neki Akademičari (vidi § 48), odbacili su pretpostavku o deljivosti svih tela ili veličina (vidi *Aristotle 3*, 316 b 15), a Aristotel odbacuje *pretpostavku o mogućnosti sprovođenja deobe do kraja*. Sveopšta deljivost tela i veličina postoji samo utoliko što je moguća *bilo gde* (ὅτι μία ὁπηοῦν ἐστί), ali je ne možemo sprovesti

skroz (οὐ πάντῃ) (*ibid.*, 317 a 8–10). Ne postoji veličina koju ne možemo deliti, pošto deobu možemo svuda i uvek vršiti; ali deobu ne možemo ni završiti, ni jednovremeno skroz sprovesti. Tako je „kontinuum deljiv (samo) na delove koji su uvek dalje deljivi (συνεχὲς διαιρετὸν εἰς ἀεὶ διαιρετά) (*Aristotle 22*, 231 b 16).

Sada smo potpuno spremni da izvedemo zaključke koji karakterišu Aristotelov *indefinitizam*. Jedno homogeno kontinuirano telo (veličina) *de facto* je *jedinstveno*, a *potencijalno mnoštveno*. Ono je potencijalno dvostruko, trostruko i, uopšte, *n*-tostruko, u tom smislu što bi *moglo biti de facto* dvostruko, trostruko i, uopšte *n*-tostruko. No u *tom smislu* ono *nije potencijalno beskonačno*. Ono je potencijalno beskonačno jedino u smislu *neodređenosti* broja mogućih delova.

Tako Aristotelov indefinitizam možemo karakterisati ili pomoću *dve vrste beskonačnosti*, ili pomoću *dva smisla potencijalnosti*. Možemo reći da je beskonačnost u kategorematskom smislu nemoguća, a sinkategorematska beskonačnost, karakterisana odsustvom gornje granice u nekom izboru ili procesu[3], moguća; ili možemo reći da beskonačnost nije moguća u smislu u kojem je moguće ono što stvarno može postojati makar i nikad ne postojalo, ali je moguća u jedom drugom smislu, u smislu mogućnosti neograničenog nastajanja. U *prvom* slučaju razlikujemo beskonačnosti prema tome da li se radi o neograničenosti broja stvari koje postoje ili nefiksiranosti broja stvari koje nastaju ili mogu nastati, u *drugom* slučaju razlikujemo mogućnost postojanja od mogućnosti nastajanja.

Vrlo je važno to što Aristotel *neće* da kaže samo da je jedna veličina, jedno kontinuirano telo, *de facto* jedinstveno, a da je potencijalo beskonačno mnoštveno u smislu beskonačnosti mogućih delova. On je *antiinfinitista u jakom finitističkom smislu* u kojem se tvrdi da je *nemoguće u bilo kojem smislu* reći da se neka celina sastoji od beskonačno mnogo delova.

Postojanje primarnih značenja reči τὸ ὄν i ἕν dvostruko je, dakle, značajno. *Prvo,* ono omogućuje da se *fiksira prva jedinica* kao κυρίως ἕν i u svakom trenutku *nespecifikovano* (ἁπλῶς) (za značenje ἁπλῶς vidi *Aristotle 3,* 317 b 7) govori o broju stvarnih delova. To je ono što *finitista u užem smislu* (§ 57) *ne čini* i *odbija da čini.* Aristotel može da govori o *određenom* broju *stvarnih* delova *kao* delova.

Drugo, postojanje primarnih značenja reči τὸ ὄν i ἕν obezbeđuje u nekim slučajevima ontološku prednost *celini,* specijalno *kontinuumu,* nad delovima, što tek omogućava da se govori o *neodređenom* broju *mogućih delova,* utoliko, naime, što ono što je *neaktuelizovano može biti neodređeno.*

68. Način postojanja geometrijskih objekata

Određivanje prvenstva u odnosu fizičkih supstancija i geometrijskih objekata s obzirom na primarno značenje τὸ ὄν Aristotel izvodi na isti način na koji je to činio u slučaju celine i delova.

Pošto čisti geometrijski oblici, shvaćeni kao granice, ne mogu postojati samostalno, dok fizičke supstancije kao i konkretna jedinstva materije i oblika (vidi *Aristotle 1,* 1036 b 21 i dalje) mogu, tela imaju ontološko prvenstvo u odnosu na površine, linije i tačke. To ne znači da materija (ὕλη) ima ontološko prvenstvo (*ibid.,* 1042 b 9 i dalje); ne porede se *geometrijski oblici s materijalom već s fizičkim telom* kao *oblikovanom materijom.*

Videli smo da je neka stvar logički prethodeća (πρῶτον λόγῳ) u odnosu na neku drugu stvar, ako sama mogućnost da se govori ili razume onaj koji govori o potonjoj podrazumeva mogućnost razumevanja izjava koje bi se odnosile na prvu dok obrnuto nije slučaj.

Govoreći u *Drugoj analitici* o izrazu „po sebi pripadati" (καθ' αὑτὸ ὑπάρχειν) (*Aristotle 13,* 73 a 35), Aristotel upravo u smislu ovog logičkog prethođenja daje prvenstvo tački u odnosu na liniju, baš kao i liniji u odnosu na trougao, „jer se supstancija potonjih sastoji iz prethodnih i govoriti o tome šta su potonji podrazumeva prethodne (ἡ γὰρ οὐσία αὐτῶν ἐκ τούτων ἐστὶ καὶ ἐν τῷ λόγῳ τῷ λέγοντι ἐνυπάρχει)" (*ibid.,* 73 a 36–38). Aristotel je na ovom mestu očigledno imao u vidu onu matematičku definiciju linije u kojoj se linija definiše preko tačaka kao njenih konstituenata, koju će kasnije odbaciti.

U *Topici* Aristotel govori o jednoj drugačijoj definiciji tačke, u kojoj je *linija* ono što je logički prethodeće (*Aristotle 23,* 141 b 15). To je definicija u kojoj se tačka (στιγμή) određuje kao granica (πέρας) linije. Linija (γραμμή) određuje se pak kao granica površine, a površina (ἐπίπεδον) kao granica tela (*ibid.,* 141 b 21–23). U ovim definicijama je telo (στερεόν) ono što je logički prvo, a tačka ono što je poslednje.[1]

Za razliku od situacije u primeru s lekarom i lekarskim nožem u slučaju osnovnih geometrijskih objekata pojavljuju se, s obzirom na različite definicije, dva *suprotna reda logičkog sledovanja.* Cela stvar se komplikuje raspravom koja je vođena u Akademiji – a koju smo pominjali govoreći o geometrijskom atomizmu (§ 48) – oko toga da li niži rodovi mogu sadržavati više, da li figura može sadržavati tačke i u kojem smislu su tačke počeci, ili načela (ἀρχαί), linije (vidi *Aristotle 1,* 992 a 10 i dalje).

Aristotelov definitivni, eksplicitni odgovor u knjizi M *Metafizike* je da se telo (τὸ σῶμα) ne može sastaviti iz linija, površina i tačaka (οὐθὲν γὰρ ἐκ γραμμῶν οὐδ' ἐπιπέδων οὐδὲ στιγμῶν φαίνεται συνίστασθαι δυνάμενον) (*ibid.,* 1077 a 34–35), a i cela rasprava u *Fizici* o kontinuitetu i dodirivanju (*Aristotle 22,* 226 b 18 i dalje) usmerena je protiv one definicije koja je tačke pominjala kao konstituente linije, ili linije i površine kao konstituente površina, odnosno tela. Da li bi, uprkos tome, govorenje o „nižim rodovima" ipak u nekom smislu podrazumevalo „više"? Na koji način bi, eventualno, *definicija* tela sadržavala pojam površine?

Nije nam, naravno, teško da pogodimo u kojem bi smislu to bilo tako. Telo nije samo materijal, ono je kao *fizička supstancija* oblikovani materijal. Spoljašnji oblik tela je pak njegova površina.

Slično ovome, kad kaže „linija" (γραμμή) Aristotel ne misli na ono što bismo mi nazvali pravom, već ili na duž ili na neku drugu *ograničenu* liniju. Ograničena linija, pak, ima početak i kraj. Početak i kraj linije su, pak, tačke.

Pošto pojam linije (kao ograničene) podrazumeva pojam tačke, a pošto se tačka, eventualno, može definisati kao nešto nedeljivo (ἀδιαίρετον), ili nešto bez veličine – a isto tako i linija i površina, samo u drugom smislu (*Aristole 1*, 1001 b 11–14) – Aristotel dozvoljava da logički redosled ide od tačke ka telu (*ibid.*, 1077 a 36 – 1077 b 1).

Dozvoljavanje ovakvog logičkog prioriteta, međutim, ne znači, kao što smo naglašavali, priznavanje odgovarajućeg *ontološkog* prioriteta. „Nisu uvek stvari koje su logički primarne primarne i kao supstancije (οὐ πάντα ὅσα τῷ λόγῳ πρότερα καὶ τῇ οὐσίᾳ πρότερα)" (*ibid.*, 1077 b 1). „Belo" je *prethodeće* „belcu" *u smislu definicije* belih ljudi kao rase. Ali „belo" *nije uopšte supstancija* u smislu samostalnog i individuiranog postojanja i svako *određeno belo* je kvalitet neke stvari koja je supstancija (*ibid.*, 1077 b 6–7).

Aristotel je zaključio da matematički objekti nemaju ontološku prednost u odnosu na fizička tela i to je izrazio na pomalo čudan način, rekavši da matematičke supstancije „nisu više supstancije nego što su to tela koja opažamo niti su u pogledu postojanja primarnije od njih (ὅτι μὲν οὖν οὔτε οὐσίαι μᾶλλον τῶν σωμάτων εἰσὶν οὔτε πρότερα τῷ εἶναι τῶν αἰσθητῶν)" (*ibid.*, 1077 b 12–13). Čudno može da deluje ovo poređenje u pogledu supstancijalnosti, ali sve što se želi reći je da se, zbog toga što se entiteti viših dimenzija ne sastoje od entiteta nižih dimenzija, matematičkim objektima ne može podariti nezavisna supstancijalnost.

I ako dozvolimo da se govori o geometrijskim *supstancijama*, ove supstancije postoje kao *spoljašnji oblici i granice fizičkih*, te kad govorimo o postojanju nekog kruga, recimo, moramo podrazumevati postojanje neke *fizičke supstancije kružnog oblika*.

Ako pred sobom imamo jedno homogeno kontinuirano telo, onda *ne možemo* reći da unutar njega postoje tačke, linije ili

površine. Možemo samo govoriti o *mogućim* tačkama, linijama i površinama *s obzirom* na *moguće deobe* kojima bi se oni aktualizovali. I sad, kako je, kao što smo videli, broj mogućih delova neodređen ali ne beskonačan u smislu kategorematske beskonačnosti, to je i broj mogućih tačaka, linija i površina isto tako samo *neodređen*, ne i beskonačan u kategorematskom smislu.

69. Prvo indefinitističko rešenje kinematičkih aporija

Kad govorimo o kretanju (κίνησις) govorimo o kretanju tela. Ali, kao što smo videli (§ 66), tela mogu da budu celine različite vrste, koje su na razliite načine manje ili više jedinstvene. Možemo govoriti o kretanju Ahila, kretanju vojske, ili kretanju jednog atoma. Kako ćemo da izvršimo individuaciju kretanja da bismo govorili o *jednom određenom kretanju*, to zavisi od više činilaca; „na višestruk način se govori o kretanju kao jednom kretanju, jer se o (samom) jednom govori na višestruk način (μία δὲ κίνησις λέγεται πολλαχῶς τὸ γὰρ ἓν πολλαχῶς λέγομεν)" (*Aristotle 22*, 227 b 3).

Prvi od činilaca je individuacija tela o čijem kretanju želimo da govorimo. U prevashodnom smislu govorićemo o kretanju prvih supstancija.

No kako je kretanje promena položaja u odnosu na druga tela, to individuacija kretanja može zavisiti i od individuacije *onoga u odnosu na šta* se telo koje se kreće kreće. Razdaljina (μῆκος) koju telo prelazi pokrivena je raznim telima i/ili njihovim delovima i može biti ne samo različito izdeljena već je na neograničeno mnogo načina deljiva (τὸ μῆκος διαιρετόν) (*ibid.*, 235 a 34). Zato se *i kretanje* tela koje prelazi tu razdaljinu može posmatrati kao *sastavljeno iz delova*, ili pak *deljivo*, prema stvarnim, odnosno mogućim delovima tela duž kojih se telo kreće.

Najzad, sâmo kretanje o kojem se govori može biti kontinuirano (συνεχές) ili prekidano (*ibid.*, 228 a 20), može naime da se odvija *u jednom vremenu* (ἐν ἑνὶ χρόνῳ) (*ibid.*, 228 b 2), kao što može da se odvija u više diskretnih vremenskih intervala. Ono može biti jednoobrazno (ὁμαλή) ili nejednoobrazno (ἀνώμαλος) (*ibid.*, 228 b 16), to jest iako neprekidano intervalima mirovanja ipak *po formi* (κατ' εἶδος) nekontinuirano, sastavljeno iz kontigualnih faza (*ibid.*, 229 a 3). Pošto se *diskontinuirano* kao i *nejednoobrazno* kretanje može, poput kontingentnih celina, podeliti na kontinuirane i jednoobrazne faze, to je neprekidno i jednoobrazno kretanje *u većem stepenu* (μᾶλλον) jedinstveno (*ibid.*, 228 a 21, 228 b 1–3, 228 b 16–19, 229 a 6) nego prekidano i nejednoobrazno.

Kretanje jednog istog tela može biti kontinuirano i jednoobrazno s obzirom na jedno telo a diskontinuirano i nejednoobrazno s obzirom na neko drugo telo, kao što i brzina može da varira zavisno od izbora referencijalnog tela. Ako postoje tela za koja bi trebalo reći da su apsolutno, znači po sebi, nepokretna, a Aristotel misli da postoje (vidi *Aristotle 21*, 212 a 21–24), onda bi kretanje koje bi bilo kontinuirano i jednoobrazno u odnosu na ta tela bilo jedinstvenije od kretanja koje je kontinuirano i jednoobrazno samo u odnosu na neka tela koja se sama kreću u odnosu na po sebi nepokretna tela.

Vreme posmatrano po sebi nije izdeljeno, već je to samo s obzirom na neku promenu ili kretanje (μεταβολὴ καὶ κίνησις)[1] koji su diskontinuirani ili nejednoobrazni. Ali, vreme je, naravno, neograničeno deljivo jer su i kretanje i svaka promena deljivi (vidi *Aristotle 22*, 235 a 36). Deljivost kretanja pak počiva, kao što smo videli, i na deljivosti tela. Tako se kretanje čija brzina nije ravnomerna i koje nije jednako ubrzano može podeliti na faze podelom na delove tela duž kojih se telo o čijem se kretanju govori kreće, a duž kojih se ne kreće neravnomerno već ravnomernom brzinom ili jednako ubrzano (*ibid.*, 228 b 19 i dalje, 237 b 34 i dalje).

Trenutak (νῦν), poput tačke, aktuelizuje se samo kao granica (πέρας) prošlog i budućeg vremena, a inače, bez ove razlike, ukoliko vreme posmatramo kao kontinuum, trenutak deli vreme samo potencijalno (τὸ νῦν τὸ μὲν τοῦ χρόνου διαίρεσις κατὰ δύναμιν) (*Aristotle 21*, 222 a 18).

Preći neki put ne znači savladati beskonačnost korak po korak, jer se svako pređeno rastojanje sastoji iz određeno mnogo stvarnih i samo neodređeno mnogo mogućih podrastojanja i ne iz beskonačno mnogo njih u kategorematskom smislu. A *fortiori*, misli Aristotel, neprekinutim kretanjem se svako dato ograničeno rastojanje (διάστημα πεπερασμένον) (*Aristotle 22*, 237 a 35) *mora* preći u ograničenom vremenu, to jest vremenu za koje će se u jednom trenutku moći reći da je proteklo, bez obzira da li se radi o kretanju ravnomernom brzinom (ἰσοταχῶς) ili ne (*ibid.*, *loc. cit.*), jer i nejednoobrazno kretanje se sastoji iz samo neodređeno mnogo mogućih faza koje se međusobno razlikuju (up. *Aristotle 22*, 228 a 19 i dalje).

U prilog poslednjoj tvrdnji, da se naime svako ograničeno rastojanje mora neprekinutim kretanjem preći u ograničenom vremenu, Aristotel navodi jedan sumnjivi *reductio ad absurdum* (*ibid.*, 237 b 34 i dalje). Ako bi AB trebalo da bude rastojanje koje neko telo, koje se kreće od A ka B neprekidnim kretanjem, navodno ne može savladati u ograničenom vremenu, onda treba prvo izabrati neko rastojanje AE koje *će* biti pređeno u nekom ograničenom vremenu. Zatim, na rastojanje EB treba primeniti isti postupak. Kako je mogućih rastojanja do kraja puta uvek samo neodređeno mnogo, a ne beskonačno mnogo, to će i rastojanja poput rastojanja AE biti toliko. Kako se radi o rastojanjima koja se prelaze u ograničenom vremenu, to će telo morati stići u B posle izvesnog neodređeno dugog ali ograničenog vremena.

Ovaj dokaz ćemo imati prilike da komentarišemo. No u svakom slučaju, ako se trkač kreće kontinuirano i ravnomernom brzinom, on će na kraj stadiona stići u ograničenom vremenu ako je jedini način deobe kretanja, pa onda i vremena, stvarna ili moguća izdeljenost puta duž kojeg se on kreće i ako je broj stvarnih delova puta konačan a broj mogućih delova samo neodređeno veliki, ne i beskonačan. Tako će i Ahil stići kornjaču.

Rešenje *Strele* u osnovi je isto kao ono koje su kasnije razradili finitisti (§ 58). „U trenutku nema ni kretanja ni mirovanja (οὔτε...κινεῖσθαι οὔτε ἠρεμεῖν ἔστιν ἐν τῷ νῦν)" (*Aristotle 22*, 239 b 1; vidi takođe *ibid.*, 234 a 24, 234 a 33), ako je trenutak samo granica između dva vremenska perioda u kojem je telo bilo u dva različita stanja, jer u tom trenutku nije ni u jednom od ta dva stanja. No, kao što smo videli, vreme se ni ne sastoji iz nedeljivih trenutaka (οὐ σύγκειται ὁ χρόνος ἐκ τῶν νῦν τῶν ἀδιαιρέτων) (*Aristotle 22*, 239 b 8) i zato o kretanju i nekretanju tela i ne treba govoriti na osnovu njegovog položaja u nekim mogućim i aktualizovanim trenucima, već na osnovu njegovog položaja *u međuvremenu.*

Položaj tela u međuvremenu odnosi se na njegov odnos prema drugim telima, i to pre svega, za Aristotela, na njegov odnos prema telima koja po sebi miruju.[2] Ovaj odnos izražen je sa κατά τι u rečenici u kojoj se kaže da je nemoguće (ἀδύνατον) da telo koje se kreće (τὸ κινούμενον) ikada bude u striktnom, prevashodnom smislu (πρῶτον) baš tu ili tamo, to jest u potpuno određenom odnosu prema telu u odnosu na koje se kreće (ἀδύνατον τότε κατά τι εἶναι πρῶτον τὸ κινούμενον) (*Aristotle 22*, 239 a 25), pošto sve što se kreće u nekom vremenu (ἐπεὶ δὲ πᾶν τὸ κινούμενον ἐν χρόνῳ κινεῖται) upravo *menja* svoj položaj (ἔκ τινος εἴς τι μεταβάλλει) (*ibid.*, 239 a 23) i nije u jednom

fiksiranom, i utoliko u primarnom smislu određenom odnosu prema telima u odnosu na koja se kreće.

Ako se posmatra *po sebi* (καθ' αὑτό) ili prema veličini u odnosu na koju miruje, telo (kruto telo) koje se kreće onoliko je koliko je, jedne je iste veličine. Ali, u isto vreme, posmatrano *prema telima u odnosu na koja se kreće* (κατὰ συμβεβηκός) ono u međuvremenu *nije u potpuno određenom odnosu*, bar ne u *primarnom smislu* određenosti, i *utoliko*, posmatrano *u tom odnosu*, ono *nije* fiksirane veličine. Ukoliko o mestu (τόπος) govorimo kao o jednom zajedničkom mestu (τόπος ὁ μὲν κοινός) (*Aristotle 21*, 209 a 32) svih tela, onda se za tela koja se kreću relativno prema telima koja akcidentalno miruju, odnosno apsolutno prema onima koja po sebi miruju (*ibid.*, 212 a 21), može reći da ne zauzimaju prostor njima jednak.

Jasan je odgovor na *Stadion*. Telo ne mora biti u istom odnosu prema dvama telima, ono se u odnosu na jedno može kretati brže nego u odnosu na drugo, kao što se u odnosu na jedno može kretati kontinuirano i ravnomerno a u odnosu na drugo diskontinuirano i neravnomerno. Zato će u takvom slučaju i put koje je prešlo krećući se biti različit ako se meri alternativno; *pređeni* put nije nešto po sebi postojeće, već je put *pređen jednim određenim kretanjem*, kretanjem koje je, kako smo videli, individuirano i odnosom prema telu *u odnosu na koje* se telo kreće. Što važi za put, svakako važi i za vreme. Određenje puta u *primarnom smislu* bilo bi određenje u odnosu na *po sebi nepokretna tela*, prema kojima je određen τόπος ὁ μὲν κοινός, kao što je određenje vremena u *primarnom smislu* određenje u odnosu na neko *uniformno kretanje* u odnosu na po sebi nepokretna tela (vidi *Aristotle 21*, 220 b 15 i dalje, 223 b 12–20, 223 b 21 i dalje).

70. Nemogućnost beskonačnosti stvarnih i beskonačnost mogućih delova

Dok je Aristotel bio antiinfinitista ne samo kao indefinitista – jer je dopuštao da se kontinuum može razložiti na koliko god se želi mnogo, ali uvek samo konačno mnogo delova – već i antiinfinitista u jednom jačem smislu – utoliko naime što nije dopuštao ne samo aktualnost beskonačnosti već ni beskonačnost mogućih delova – Kant je, govoreći o čistom prostoru i čistom vremenu kao formama u kojima se svi fenomeni pojavljuju, *poricao* mogućnost aktuelizacije beskonačnog broja mogućih delova, ali je *dopuštao* da se govori o beskonačnosti mogućih delova. Ako za sve što se javlja u prostoru i vremenu važi ono što važi za prostor i vreme (vidi *Kant 1*, str. 68, 188–189, 218, 224, 229–300, 306–307, 338–342), onda je moguće govoriti i o beskonačnosti mogućih delova tela. Ova razlika između Aristotelovog i Kantovog indefinitizma je ne samo vrlo zanimljiva, već je, kao što ćemo videti (u §113), značajna prilikom razlikovanja fizičkog i čistog matematičkog prostora.

Prednost celilne nad mogućim ili stvarnim delovima Aristotel je obezbedio učenjem o supstanciji kao onome o čemu se pre svega govori kao o postojećem. Kant do te prednosti dolazi – ne učenjem o supstanciji, već ispitivanjem formi u kojima se neko telo kao „supstancija u pojavi" (*Kant 1*, str. 359) nužno javlja.

Kant razlikuje dve vrste celine, *compositum reale* i *compositum ideale* (ili *totum*) (*ibid.*, str. 304). *Compositum reale* odgovara kontingentnoj celini kod Aristotela, to je celina koja je sastavljena od delova koji joj prethode. *Compositum ideale* je celina, kakvu upravo predstavlja prostor, koja se *može razlagati* na delove, ali koja se *ne sastoji* iz delova (up. *ibid.*, str. 304).

Činjenicu da ne postoji elementarni, nedeljivi deo prostora[1] Kant koristi kao dvostruki razlog protiv uverenja da je prostor *compositum reale*. Pre svega, ako je prostor jednoobrazan u tom smislu što su svi

mogući delovi deljivi i svi utoliko jednako složeni, onda su ovi delovi s obzirom na tu karakteristiku svi jednako nepogodni da budu apsolutno prethodeći delovi celine (*ibid.*, *loc. cit.*); njihova eventualna prednost može biti samo relativna, kao prednost užeg dela u odnosu na obuhvatniji. Ali, osim toga, ne vidi se zašto dati i ovu relativnu prednost užim delovima, jer ako je *svaki mogući* prostor složen, kao razloživ, onda je prostor *uvek* celina, naime i delovi koji bi trebalo da *prethode* celini bili bi *celine*, pa to sugeriše da bi upravo celini, odnosno jedinstvenosti, trebalo dati prednost; složenost je *suštinska* karakteristika prostora.

No ako je složenost bila karakteristika prostora, ne moraju li delovi neke celine biti *ravnopravni* s tom celinom? Odgovor je da oni *jesu* ravnopravni *utoliko što* su nužno zajedno s celinom dati – u „datoj celini nalaze se kao agregati svi članovi (delovi) ... do kojih beskonačna regresija dospeva" (*ibid.*, str. 358) – ali delovi su opet sami jedinstveni kao *celine* i *utoliko* je, *posmatrano s obzirom na svaki od njih*, celina ono što prethodi. U smislu u kojem je *ijedan* deo prostora celina, to jest u smislu u kojem se *uopšte može* govoriti o celini i delovima prostora, *svaki* prostor je celina.

Sve ovo postaje još jasnije kada se pitanje o delovima i celini konkretizuje kao pitanje *o broju* delova nekog određenog, ograničenog prostora (up. *ibid.*, str. 359–360). Pošto delovi ne prethode i pošto se zbog toga ne može reći da se prostor sastoji iz delova, nekom određenom prostoru se s pravom može korespondirati broj 1. Ali, to isto važi i za, uzmimo, polovinu tog prostora – i toj se polovini *kao jednom određenom prostoru* s pravom može korespondirati broj 1. Tada se, *kao posledica*, dobija da je prvobitni prostor *dvostruk*, to jest po implikaciji mu se korespondira broj 2. Ali to što se *akcidentalno*, posledično u odnosu na jedno *drugo* određenje, ovom prostoru pripisuje broj 2, ne dovodi u pitanje prvobitnu jedinstvenost tog prostora. Delovi prostora *bili bi* ravnopravni s prostorom kao celinom ako i samo ako se svakom prostoru ravnopravno može korespondirati broj 1. Ali upravo ako je *to* slučaj, svaki prostor je *pre svega* jedinstven, a onda, posmatran s obzirom na druge prostore, dvostruk, trostruk ili četvorostruk, ili uopšte koliko god se hoće mnogostruk.

Da li se određenom prostoru, kojem se, osim jedinice, mogu na osnovu deobe redom pripisivati i brojevi 2, 3, 4, ..., može pripisati i eventualni *beskonačni broj*? Iako Kant prihvata da se članovi (delovi) do kojih se dolazi razlaganjem – čak i one celine koja je samo *compositum ideale* (*Kant 1*, str. 304) – u njoj *već nalaze*, i zato govori o tome da ih deobom *susrećemo (antreffen) (ibid.*, str. 352), on ne misli da nam to daje za pavo da određeni prostor kao *compositum ideale* karakterišemo kao beskonačno mnogostruk. Iako je delova koje razlaganjem pronalazimo beskonačno mnogo, oni ipak *tek njime* bivaju *delovi* celine, jer joj, za razliku od delova celine koja bi bila *compositum reale*, *po sebi* posmatrano ne prethode. Određeni prostor mogao bi da se karakteriše kao beskonačno mnogostruk tek ako bi se mogao *razložiti* na bezbroj delova; „delovi bivaju dati i određeni jedino na osnovu (pot)podele" (*ibid.*, *loc. cit.*). Kako „celina nije po sebi već podeljena" i kako je samo *„moguće ići u beskonačnost" (ibid.*, *loc. cit.*) a da se „regresija u razlaganju ... nikada ne sme smatrati apsolutno završenom" (*ibid.*, str. 360), to se prostor ne sme karakterisati kao beskonačno mnoštven. To onda važi i za svako telo: „ono je deljivo u beskonačnost a da se ipak zato ne sastoji iz beskonačno mnogo delova" (*ibid.*, str. 358).

Tako proizilazi da je s obzirom na pitanje o *aktualnosti* beskonačnosti *svejedno* da li se radi o broju koraka pri koračanju, gde se krećemo *in indefinitum* jer koraci tek *nastaju* koračanjem, ili o broju delova prostora ili tela, koje je takođe *compositum ideale* kao *totum substantiale phaenomenon (ibid.*, str. 305), jer iako delovi, ako se posmatraju *po sebi* a ne samo *kao* delovi, ne nastaju razlaganjem, oni *kao delovi* nastaju *tek njime.* Kretanje *in infinitum*, kao proces kojim delovi kao nešto po sebi postaju *delovi prostora* (ili tela), istovetno je bar utoliko sa kretanjem *in indefinitum.* Ono do čega nam je stalo, tamo koraci, ovde delovi kao delovi određenog prostora (ili tela), u oba slučaja nastaje *tek*

progresom (ili regresom). Ova istovetnost opravdava naziv *indefinitizam* s obirom na problem kojim se bavimo.

Za Kanta, dakle, delova *koje susrećemo* ima *beskonačno mnogo*, i utoliko je *potencijalnih* delova *beskonačno mnogo*, mada se zahvaljujući sukcesivnosti deobe oni nikad *qua* delovi ne aktualizuju.

Imajući u vidu Aristotelov dokaz protiv beskonačnosti mogućih delova, možemo zapitati Kanta šta bi se dogodilo kada bi deoba bila *simultana* (up. § 67). Ne bi li se njome aktualizovalo beskonačno mnogo delova? Ako je potencijalnih delova beskonačno mnogo i ako određen prostor treba da ne može nikad da bude beskonačno mnoštven, onda bi jedini odgovor bio da je simultana deoba *zbog nečeg* nemoguća. Ali *razlog* bi morao biti *različit* od onog kojeg navodi Aristotel, jer Aristotel je iz *apsurdnosti posledica* zaključio da *ni potencijalnih* delova nema beskonačno mnogo.

Ako Kant dopušta da se deljenje sukcesivno vrši dokle god se želi (*Kant 1*, str. 359–360), onda on očigledno apstrahuje od „tehničkih teškoća". Kant nije radikalni empiričar (up. gore, §§ 60, 73); transcendentalni argumeti koje koristi su argumenti u kojima se pozivamo na *moguće* iskustvo[2] i zato možemo reći da se neko telo sastoji iz milijardu delića; možemo, naime, zamisliti da smo ga izdelili na milijardu delova od kojih je svaki predmet nekog mogućeg iskustva. Kakvu bi razliku donela pretpostavka da smo deobu izvršili *simultano*? U svakodnevnom iskustvu znamo za slučajeve jednovremene deobe na tri ili četiri dela; možemo to čak direktno opaziti. Nije li simultana deoba na milijardu delića za nas isto toliko „tehnički" nemoguća a transcendentalno moguća koliko i sukcesivna?

Ako bi Kant dopustio da je simultana deoba na konačno mnogo delova isto toliko moguća koliko i sukcesivna, onda bi morao da nađe neki *specifičan* razlog za nemogućnost simultanog razlaganja na beskonačno mnogo delova, jer, koliko je do njega, razlaganje na beskonačno mnogo delova ne može se postići sukcesivnom deobom – *ne* zbog *ograničenosti broja mogućih* delova, *već* zbog *sukcesivnosti deobe.*

Odgovor bi možda mogao da se da preko jedne analogije. U načelu je moguće imati napravu koja bi dato telo sukcesivno delila u beskonačnost, ali nemoguće je imati spravu koja bi ga simultano podelila na beskonačno mnogo delova, jer bi sama ta sprava morala prethodo da bude beskonačno izdeljena, a ovo bi moralo da se ostvari sukcesivnom deobom. U osnovi svake simultane deobe morala bi ležati sukcesivna.

Nije teško videti koliko su sumnjive pretpostavke koje ova analogija krije. Da li su različite i odvojene stvari nastale iz nečeg neodređenog (ἄπειρον) i jedinstvenog, kako je to govorio Anaksimandar (vidi *Simplicius 2*, 24. 17)? Da li se diferencijacija događala u vremenu, sukcesivno? Nije li sprava za simultanu deobu mogla biti oduvek tu? Ili – ako analogiju vratimo u transcendentalni okvir – opažamo li mi razlike (delove) na telima uvek najpre sukcesivno polazeći od neke neizdiferencirane jedinice? Da li je u osnovi opažanja simultane dobe opažanje sukcesivnog deljenja?

Prekidamo na ovom mestu dalju raspravu o mogućim Kantovim manevrima. Već sâmo postojanje teškoće vezane za simultanu deobu dovoljno karakteristično pokazuje razliku između Aristotelovog i Kantovog pojma potencijalne beskonačnosti i biće nam kasnije veoma poučno.

Bez obzira na to što Aristotel ne dopušta, a Kant dopušta da se govori o beskonačnom broju potencijalnih delova tela, ono što i Kanta čini indefinitistom jeste tvrdnja da se, s jedne strane, ne može navesti neki određeni najveći broj delova iz kojih se neko telo može sastojati, dok se, s druge trane, za to isto telo ipak uvek može reći jedino da se sastoji iz konačno mnogo delova.

Kant je Zenona smatrao „suptilnim dijalektičarem“, braneći ga od onih koji su ga tretirali kao „drskog sofistu“ koji navodno pristaje da „potpuno odriče dva protivrečna stava, što je besmisleno“ (*Kant 1*, str. 345). Kant, naime, misli da je Zenon u stvari pobijao one stavove koji su samo *prividno*, to jest na prvi pogled protivrečni. Kant prihvata da za stavove koji su međusobno protivrečni važi zakon isključenja trećeg ($A \vee \neg A$) i suprotnost koju A i $\neg A$ izražavaju naziva *analitičkom* suprotnošću (*ibid.*, str. 346–347). No, mnogi su stavovi međusobno protivrečni samo *pod nekim uslovom (ibid., loc. cit.)*. Iskoristimo kao primer čuveno sofističko pitanje „Da li si prestao da tučeš svoga oca?“. Odgovor „Jesam“ i odgovor „Nisam“ predstavlja jedine, međusobno protivrečne, odgovore samo pod uslovom da je onaj kome je pitanje upućeno tukao svog oca. Ali pošto taj uslov nije nužno, ili uvek, zadovoljen, to u onim slučajevima u kojima nije zadovoljen ne važi ni *tertium non datur*, i *zato* oba navedena odgovora mogu biti lažna. Suprotnost stavova koji su zbog *previđenog* nezadovoljenog, ili ne nužno zadovoljenog, uslova samo prividno protivrečno, ili *prividno bezuslovno* protivrečni, Kant naziva *dijalektičkom suprotnošću (ibid., loc. cit.)*.

Zasluga je dijalektičara u filozofiji u tome što nam otkrivaju da su neke suprotnosti za koje mislimo da su analitičke u stvari dijalektičke. Oni to čine, kao što je to po Kantovom mišljenju činio Zenon, naterujući nas da potvrdimo ili poreknemo oba od dva prividno protivrečna stava.[3]

71. Kinematički monizam

Kako se kinematički atomizam odnosi prema fizičkom, odnosno geometrijskom atomizmu, tako se teorija koju ćemo zvati *kinematički monizam* odnosi prema Kantovom indefinitizmu. I kinematički monizam, kao i kinematički atomizam, napušta „veliku analogiju između prostora i vremena“ (up § 51). Tako je, poput Vajtheda (vidi *Whitehead 2*, str. 107), Bergson različito tretirao jedinstvo nekog predmeta, koje je prostorno, i jedinstvo neke promene, koje je vremensko, utoliko što prvo može opstati i kad se aktualno izvrši određeno razlaganje, dok za drugo to ne važi.

Kao i Vajthed,[1] Bergson je prihvatio takozvano matematičko rešenje Zenonovih nekinematičkih aporija, dopuštajući da se kaže da se neka ograničena veličina sastoji iz beskonačno mnogo intervala (*Bergson 2*, str. 337, nap. 1). Tako se, na primer, rastojanje između početne i krajnje tačke Ahilovog puta može predstaviti redom $a(1+1/n+1/n^2+1/n^3+\ldots)$, gde je a početno rastojanje Ahila i kornjače, a n relativni odnos njihovih brzina (*ibid., loc. cit.*). Ako je $n>1$, recimo $n=2$ (što znači da se Ahil kreće dvostruko brže od kornjače), onda je suma beskonačno mnogo članova geomerijske progresije neko konačno rastojanje; u datom slučaju ono iznosi $2a$. Bergsonu je, kao i mnogim matematičarima, bilo dovoljno to što bi svako rastojanje koje bi bilo manje od $2a$ bilo premašeno nekom parcijalnom sumom, to jest zbirom izvesnog konačnog broja članova niza, i to što nijedna parcijalna suma ne može biti veća od $2a$, pa da prihvati da je suma članova celog beskonačnog niza *upravo* $2a$.

Bergson nije video nikakvu protivrečnost u tome što se dopušta da beskonačni niz intervala bude *simultano* dat; kada brojimo intervale određene datom geometrijskom progresjom, brojimo intervale koji su već tu (čak je i Kant to dopuštao, mada, kao što smo videli, nije doopuštao da se o njima govori kao delovima iz kojih se celo rastojanje *sastoji* ako se posmatraju po sebi, van nekog našeg razlaganja). No, što važi za beskonačnost članova koji su dati simultano, *ne važi* za navodnu beskonačnost čiji bi članovi bili dati *sukcesivno*. „Matematika ... se bavi i može da se bavi jedino dužinama" (*Bergson 2*, str. 337, nap. 1). Savladati beskonačnost korak po korak za Bergsona je nemoguće; beskonačni niz akata *znači upravo* da ima akata koji još treba da se izvrše.

Rešenje *Ahila* kao aporije nedostižosti određeno je prethodnim rešenjem glavne aporije nekretanja, a to je *Strela* (up. ranije, § 38 c).

Imajući za sobom fancusku interpretaciju *Stadiona*, Bergson je odbacio svaki atomizam.[2] Ali, *jedinstvo kretanja ne mora* se uvoditi *kvantizacijom* vremena, ili promene, ono se može izvoditi iz same *prirode kretanja*.

Bergson, poput Aristotela, odbacuje pre svega bilo eksplicitnu bilo prećutnu prepostavku da se leteća strela tokom kretanja nalazi u različitim određenim položajima „Strela nikada *nije* ni u jednoj tački (*en aucun point*) svoje putanje" (*Bergson 2*, str. 334). Najviše što bismo mogli reći je „da bi ona tamo mogla biti (*qu' elle pourrait y être*)" (*ibid., loc. cit.*), naime, da bi ona u nekom određenom položaju mogla biti *kada bi* se tamo zaustavila. Kretanje je, za razliku od linije, jednostavno (*simple*) i nerazloživo (*indecomposable*) (*ibid., loc. cit.*) i ako jedno neprekinuto (Aristotel bi dodao: i jednoobrazno) kretanje tretiramo kao sastavljeno iz dva dela, mi se *ogrešujemo o pretpostavku* da je ono onakvo kakvo je, a to znači jedno jednostavno kretanje (*ibid., loc. cit.*).

Izgleda da je jedina razlika između Aristotela i Bergsona u tome što Bergson uvodi disanalogiju između linije i jedinstvenog neprekinutog kretanja, utoliko što misli da kretanje možemo razložiti i tretirati kao sastavljeno iz delova *jedino* ako se ogrešimo o *samu polaznu pretpostavku* o tome kakvo je ono, dok kod linije to navodno ne bi bilo slučaj. Linija bi – a onda, naravno, i telo – trebalo da može da bude *i* jedinstvena, *i* mnogostruka; kretanje bi moralo da bude *ili* jedinstveno, *ili* mnogostruko.

„Kinematografski karakter našeg znanja" (*ibid.*, str. 331), koji proističe iz načina na koji intelekt pristupa stvarima i koji je navodno još kod Grka došao do izražaja u jeziku (*ibid.*, str. 339), onemogućavao je, prema Bergsonu, da se shvati prava priroda svake promene, pa i kretanja, iako je sama „kinematografska metoda jedina praktična" (*ibid.*, str. 332). Za pravljenje filma je svakako zgodno razložiti trku Ahila i kornjače na veći broj međupoložaja; naša percepcija je sama za to prilagođena (*ibid.*, str. 331). Ali Ahil se *ne kreće kao na filmu.* On nije prvo ovde, zatim onde, pa tamo – on ni u jednom trenutku *ne miruje*, i on jureći kornjaču ne mora da *bude* u položaju u kojem je ona prethodno bila. Uostalom, i ona samo pre početka trke jeste u jednom određenom položaju. Ahil nema pred sobom zadatak da načini beskonačni broj koraka koji mu nameće matematička konstrukcija koja deli *putanju* trke (*ibid.*, str. 337). Deliti putanju je moguće; deliti jedno jedinstveno kretanje je nemoguće bez ukidanja same pretpostavke o prirodi tog kretanja.

Bergsonov *indefinitizam* u pogledu kretanja ogleda se u tome što kretanje nije nedeljivo u tom smislu da ne bi moglo biti prekinuto. Kinematički monizam *nije* kinematički atomizam i utoliko se ne može svesti na apsurd pomoću neke francuske varijacije *Stadiona*. Broj potencijalnih delova jednog neprekinutog kretanja je čak beskonačan, ali svaka aktualizacija nekog od njih odmah narušava jedinstvenost samog kretanja. Za kretanje važi da je *ili* jedinstveno, *ili* dvostruko, *ili* trostruko, *ili* ... *n*-trostruko, gde je svako od ovih „*ili*" ekskluzivno. Iako je potencijalnih delova kretanja *beskonačno*, svako kretanje se sastoji iz *tačno određenog* broja aktualnih delova.

72. Operacionalizacija indefinitističke teze

Vrlo zgodnu operacionalizaciju indefinitističke teze dali su Hinton i Martin (vidi *Hinton and Martin*), opisujući dva na prvi pogled veoma slična zadatka od kojih bi, međutim, jedan trebalo da je veoma jednostavno a drugi nemoguće izvršiti.

Prvi, jednostavni zadatak je zadatak koji izvršava Ahil kad stiže kornjaču. No, izvršivši taj zadatak Ahil je *eo ipso* izvršio i beskonačni broj *mogućih* zadataka, jer postoji beskonačna „serija striktnih implikacija" (*ibid.*, str. 59) čiji je zajednički antecedens tvrdnja da je Ahil stigao na cilj, to jest dosegnuo neku tačku, a

čiji su konsekvensi redom tvrdnje da je on prešao polovinu puta, četvrtinu puta, osminu puta, i tako dalje. „Preći polovinu puta", „preći četvrtinu puta", „preći osminu puta", itd., predstavlja niz zadataka koji se Ahilu *mogu postaviti* a koje je on *obavio samim tim* što je stigao na cilj svoga puta.

Zbog pomenute serije striktnih implikacija „prirodno" smo navedeni (*ibid.*, str. 68) da pomislimo da je Ahil *mogao* da izvrši, ili da je *de facto* i izvršio, ili čak *morao* da izvrši, beskonačni niz zadataka korak po korak. No, prema Hintonu i Martinu, ništa od toga nije niti može biti slučaj (*ibid.*, str. 64).

Dihotomija pretvara pomenutu seriju striktnih implikacija u seriju kafkijanskih zabrana, zbog kojih se trkač ne može ni pokrenuti, jer se od njega zahteva da nijednu tačku naznačene putanje ne dosegne pre nego što dosegne tačku na polovini puta do nje. Ako dosegnuće treba da se potvrdi bar nekim, ma kako kratkim, zadržavanjem u „tački koja je na pola puta", onda je zaista očigledno da se trkač ne može maknuti, jer bilo koji, ma koliko mali, prvi pomicaj znači *preskakanje* tačke koja je na pola puta do dosegnute. No stvar slično stoji i ako se ne radi o *staccato* već o *legato* kretanju, ali takvom u kojem se „pomicaji" mogu brojati.

Ako se, pak, kao u *Ahilu*, trkaču dopusti da krene, ali mu se zatim rekurzivno definišu naređenja da posle dosegnuća polovine puta dosegne redom: 3/4, 7/8, itd. puta, onda „on ne može i slediti ova naređenja i dobiti trku" (*ibid.*, str. 59).

Hinton i Martin, dakle, misle da je očigledno da Ahil *staccato* ne može stići na cilj, no oni misle da je isto tako nemoguće stići na cilj uz *legato* brojanje (up. gore § 21). Ako bi objekat koji se kreće posle pređene polovine puta trebalo da ispusti svetlosni signal, ili prosto zasija, i zatim, pošto se ugasi na pola puta do 3/4 puta, opet zasija posle pređenih 3/4 puta, i tako redom (*Hinton and Martin*, str. 62), on bi do kraja puta trebalo da se beskonačno mnogo puta upali i ugasi. Poput Tomsona, i Hinton i Martin misle da je njegova (Tomsonova) lampa nemoguća stvar.

Ali, na sreću, misle Hinton i Martin, Ahilovo uobičajeno kretanje i izvršenje onog jedinstvenog zadatka *ne znači* izvršenje beskonačno mnogo prethodnih, „...Beskonačna serija striktnih implikacija ne obezbeđuje razloge da se zaključi da se objekat pokorava ili mora pokoravati onim naređenjima" (*ibid.*, str. 60). Dilema u koju nas tera analogija s Tomsonovom lampom, po kojoj bi Ahilu *ili* bilo nemoguće da stigne na cilj, *ili* bi stigavši izvršio beskonačni broj diskretnih konsekutivnih akata (*ibid.*, str. 62), predstavlja navodno lažnu dilemu. Odbacujući i Blekov finitizam i infinitizam Tejlora i Vejtlinga (*ibid.*, *loc. cit.*), Hinton i Martin nalaze izlaz u *indefinitizmu*. Serija striktnih implikacija predstavlja osnovu za beskonačni niz *mogućih* ili *formulabilnih* zadataka, koji bi bili izvršeni Ahilovim izvršenjem njegovog jednostavnog zadatka – stizanjem na cilj – ali Ahil ne mora izvršiti beskonačno mnogo (recimo rekurzivno definisanih zadataka) *da bi* stigao na cilj.

> Mislim da u izvesnim delovima filozofije delanja, onim koji se bave ispitivanjem odnosa osnovnijih i manje osnovnih radnji, možemo naći zgodne primere koji ističu sličnu poentu koju ovde ističu Hinton i Martin. Ako se glasa dizanjem ruke, onda sam, kada sam glasao, *eo ipso* izvršio i zadatak koji mi je neko mogao postaviti rekavši „Digni ruku!" (za uobičajeno određenje osnovne radnje vidi *Danto*). Nije teško formulisati još naredbi za koje bi važilo da sam ih izvršio samim tim što sam glasao onako kako se uobičajeno glasa. Može se činiti da postoji razlika između primera sa glasanjem koje implicira dizanje ruke i Ahilovog dostignuća kornjače koje implicira prelazak polovine puta, jer glasanje *vremenski koincidira* s dizanjem ruke, dok u slučaju dostignuća kornjače i prelaska polovine puta to nije slučaj. No, pre svega, pitanje je koliko dizanje ruke i glasanje vremenski koincidiraju. Ruka se može dići ili dizati polako, ona se takoreći može dizati i dizati, dok ne bi bilo adekvatno reći to za glasanje koje je na taj način obavljeno. Brzo glasati ne znači brzo dići ruku, mada brzo dići ruku može da znači glasati odlučno, a upotrebiti „glasati" kao trajni glagol u slučaju u kojem je neko ruku vrlo polako dizao – sasvim je neprikladno. No, *bez obzira* na *sličnosti* i *razlike*, *analogije* i *disanalogije*, koje možemo pronaći između primera sa glasanjem koje se obavlja dizanjem ruke, i koje ga utoliko implicira, i Ahilovog dostignuća kornjače koje implicira prelazak polovine puta, postoji nesporna sličnost među poentama za kojima primeri idu. Ako obavljanje neke manje osnovne radnje implicira obavljanje osnovnije, onda to ipak ne znači da se obavljanje te manje osnovne radnje izvodi obavljanjem osnovne i *još* neke druge radnje. Hinton i Martin žele da kažu da – iako dostignuće kornjače implicira prelazak polovine puta, i polovine preostale polovine, i tako dalje, to ipak ne znači da se dostignuće kornjače obavlja *nizom radnji* – prelaskom prve polovine puta, zatim naredne četvrtine, pa osmine puta i tako dalje.

Obično kretanje ne bi, dakle, bilo savladavanje beskonačnosti korak po korak, i naša *staccato* i naša *legato* verzija ne bi, prema Hintonu i Martinu, odgovarale onome što se stvarno dešava kad Ahil trči. „Proći kroz beskonačnu seriju prostora" je dvosmislen izraz (*Hinton and Martin*, str. 63–64). Ako to znači „proći kroz seriju prostora koji su deljivi u beskonačnost", onda je proći kroz beskonačnu seriju prostora *moguće*. Ako to znači „*deleći* prostor na taj način (to jest u beskonačnost – *M. A.*) približavati se cilju kao granici", onda je proći kroz beskonačnu seriju prostora *nemoguće* (*ibid.*, *loc. cit.*).

73. Status beskonačnosti i ograničenje važenja principa isključenja trećeg u intuicionističkoj matematici

Da li se unutar niza decimala broja π nalazi niz 0123456789? Odgovor na ovo pitanje mogao bi da glasi: mi to ne znamo, pošto se u nizu dosad izračunatih decimala niz 0123456789 ne pojavljuje, a ne raspolažemo nikakvim metodom kojim bismo mogli utvrditi da li će se on u daljoj decimalnoj ekspanziji pojaviti ili neće.

Ovakav odgovor kao da pretpostavlja da je postavljeno pitanje legitimno uprkos tome što – ne samo *zasad* ne možemo na njega da odgovorimo, već možda *nikad* na njega nećemo moći odgovoriti, ako bi, naime, za to bilo potrebno pregledati beskonačno mnogo decimala. Pošto se radi o nizu koji nije konačan moguće je da u izračunavanju decimala, *ma kako daleko išli, nikad ne naiđemo* na niz 0123456789, a da ipak, i pored toga, *uvek ostane moguće da ćemo* na njega naići. Moguće je, dakle, da postavljeni problem bude za nas „*suštinski nerešiv*" (up. *Brouwer 6*, str. 376 u *Brouwer 2*, str. 411, *Heyting 1*, str. 49).

Iako je, dakle – zbog otvorenosti niza s desne strane i odsustva metoda kojim bismo bez pojedinačnih izračunavanja decimala mogli da utvrdimo da li se niz od deset decimala o kojem je reč javlja u decimalnoj ekspanziji broja π – moguće da postavljeni problem bude čak *suštinski nerešiv*, matematičari pre Brauera nisu dovodili u pitanje primenu *principa isključenja trećeg* u ovakvim i ostalim sličnim slučajevima, pretpostavljali su, naime, da i ovde mora važiti da je jedan od dva međusobno protivrečna odgovora istinit a drugi lažan.

Uz intuicionističko ograničavanje primenljivosti principa isključenja trećeg vezana je, iskazano rečima Hermana Vajla (vidi *Weyl 3*), „nova kriza osnova matematike". Još jednom, posle više od dva milenijuma, krivci su bili iracionalni brojevi i sporni status beskonačnosti.

Kako tačno izgleda opravdanje za odricanje od principa isključenja trećeg u slučajevima poput navedenog? Izgleda da svi intuicionisti nemaju o tome potpuno isto mišljenje. Dok su kasnija objašnjenja, kao što je Hejtingovo, formalnija i više vezana za formalne strane matematičkog dokaza (vidi *Heyting 1*, str. 47–49), izvorno Brauerovo možda više filozofski intrigira, jer je

neposrednije i očiglednije vezano uz sporan status beskonačnosti. Različita objašnjenja ne moraju, naravno, da se isključuju, i u samoj praksi intuicionističke matematike oni ne proizvode različite posledice.

Da bismo bolje razumeli Hejtingovo razmišljanje, pođimo od jednog starog, dobro poznatog primera spornosti principa isključenja trećeg. Aristotel je mislio (vidi *Aristotle 5*, 18 a 33 i dalje, 19 a 8 i dalje) da za (neke) tvrdnje o *budućim* događajima ovaj princip ne važi. Posmatrajmo sistem S sastavljen od dva elementa e_1 i e_2, koji mogu da budu u odnosima R_1 i R_2, i to tako da kad su u odnosu R_1 ne mogu biti u odnosu R_2 i obrnuto, a da pri tom uvek moraju biti u jednom od ta dva odnosa; recimo, moraju se voleti ili mrzeti ali se ne mogu i voleti i mrzeti u isto vreme. Pretpostavimo da e_1 i e_2 menjaju odnose potpuno proizvoljno, ili, što je isto, da sistem ne sadrži nikakav zakon po kojem bi bilo određeno koliko će oni biti u jednom od dva odnosa. Šta reći o iskazu da će u izvesnom fiksiranom budućem vremenu e_1 i e_2 biti u odnosu R_1? Da li, naime, za ovaj iskaz važi da je ili istinit ili lažan? Ako navedeni iskaz označimo sa p a njegovu negaciju sa $\neg p$, da li onda možemo tvrditi $p \vee \neg p$?

Razlog iz kojeg izgleda da možemo tvrditi $p \vee \neg p$ sadržan je u okolnostima da će u vremenu o kojem je reč e_1 i e_2 nužno biti u jednom od dva odnosa, R_1 ili R_2. Ali, istiniti iskaz izrečen u tom vremenu neće biti ni p ni $\neg p$, prosto zato što su p i $\neg p$ iskazi *u budućem* vremenu, dok će taj iskaz biti iskaz *u sadašnjem* vremenu. Zato ne možemo *bez daljeg* tvrditi $p \vee \neg p$ pozivajući se na to da će u vremenu o kojem je reč e_1 i e_2 biti u jednom i samo jednom od dva odnosa, R_1 ili R_2. Ako $e_1R_1e_2$ znači da su e_1 i e_2 u odnosu R_1, a $e_1R_2e_2$ da su u odnosu R_2 i ako $[t_n]$ čitamo: „u trenutku t_n", onda $[t_n]\ (e_1R_1e_2 \vee e_1R_2e_2)$ ne mora biti ekvivalentno sa $[t_n]\ (e_1R_1e_2) \vee [t_n](e_1R_2e_2)$. Prvo je sasvim nesporno, ali drugo nije. U slučaju nedeterminisanog sistema S, možemo za prvo prihvatiti važenje principa isključenja trećeg a za drugo ne prihvatiti, pošto *u sadašnjem trenutku ne postoji ništa* što bi $[t_n](e_1R_1e_2)$, ili $[t_n](e_1R_2e_2)$, učinilo istinitim, ili lažnim.

Činjenica da, s jedne strane, savršeno razumemo iskaz $[t_n](e_1R_1e_2)$, dok, s druge strane, ne postoji ništa što bi ga učinilo istinitim ili lažnim, može nas navesti da, suprotno Fregeu, kažemo da nije nužno da iskaz bude istinit ili lažan. Možemo štaviše iskoristiti ideju o „asertoričkoj snazi"[1] i učiniti ono što je učinio Hejting. Sledeći Huserla (vidi *Heyting 1*, str. 47), on je iskaz odredio preko razumevanja i namere, a tek je tvrdnji, što znači iskazu upotrebljenom sa asertoričkom snagom, priznao status istinitosti ili lažnosti. Ako kao znak za „tvrđenje" prihvatimo uobičajeno „$\vdash$" (upravo Fregeov znak), onda možemo reći da je tek $\vdash p$ ono što može da bude istinito ili lažno (vidi *Frege 1*, str. 111–112, *Heyting*, str. 48).

Ako neko izgovori iskaz $[t_n](e_1 R_1 e_2)$ s asertoričkom snagom, to jest tako da *tvrdi*, onda mu s pravom možemo reći da on to čini uprkos tome što nije zadovoljen jedan od prethodnih uslova za valjano izvršenje ilokucionog akta tvrđenja koje navodi Serl (vidi *Searle*, str. 66). On, naime, nema i, štaviše, zna da u principu ne može ni imati nikakvih razloga da tvrdi iskaz o kojem je reč. Ako se pak ne može valjano tvrditi ni p ni $\neg$p, onda se ne može valjano tvrditi ni p$\vee\neg$p (iako se valjano može tvrditi $[t_n](\mathrm{e_1 R_1 e_2} \vee \mathrm{e_1 R_2 e_2})$). Serl je sledio fregeovsku tradiciju, po kojoj je *iskazni sadržaj* tvrđenja ono što je istinito ili lažno. Hejting je, sledeći Brauerove ideje, takoreći vitgenštajnovski pre Vitgenštajna vezao istinitost i lažnost uz određenu *upotrebu* iskaza.

Hejting je to učinio razmatrajući specifično matematičke iskaze i matematička tvrđenja. Ojlerova konstanta C je broj kojem teži izraz $(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n)\text{-}\ln n$ kad $n \rightarrow +\infty$. Decimalna ekspanzija broja $C = 0{,}577216\ldots$ određuje intervale unutar kojih se vrednost izraza nalazi kad n nastavlja da raste. Tako, posle izračunatog prvog decimala mi znamo da se C mora nalaziti u intervalu [0,5, 0,6], posle izračunatog drugog decimala u intervalu [0,57, 0,58] itd. Pretpostavimo da se izvesna racionalna vrednost A stalno održava unutar ovih intervala i formirajmo na osnovu toga iskaz $C = A$, koji bez sumnje razumemo. Ovaj iskaz, označimo ga upravo sa p, može da izražava naša *očekivanja* (up. *Heyting 1*, str. 48) da će se A *uvek* održavati unutar intervala koje određuje decimalna ekspanzija broja C. S pravom se može reći: „*Očekujem* da će se A uvek održavati unutar intervala koje određuje decimalna ekspanzija od C", ali se ne može tvrditi ni p, ni $\neg p$, stoga ni $p \vee \neg p$.

Radi daljeg razjašnjenja Hejting je privremeno uveo znak „+" koji treba da označava jednu naročitu funkciju, naime „dokazivost". „$+p$" znači „p je dokazivo". Sad su tvrdnje $\vdash p$ i $\vdash +p$ ekvivalentne, ako se

ovde, prilagođeno matematičkom kontekstu, pridržavamo Serlovog pravila (*Searle*, str. 66), koje, između ostalih, garantuje valjanost ilokucionog akta tvrđenja. U matematici bi, naime, tvrditi p značilo da posedujemo dokaz za p. Tako $\vdash p$ implicira $\vdash +p$. S druge strane, $\vdash +p$ svakako implicira $\vdash p$.

No, $\vdash \neg p$ i $\vdash \neg +p$ nisu ekvivalentne tvrdnje. Iz toga što znamo da se p ne može dokazati, ne smemo zaključiti da je tvrdnja $\vdash p$ lažna, odnosno tvrdnja $\vdash \neg p$ istinita. Takav je upravo slučaj i kod tvrdnje da se niz 0123456789 nalazi unutar niza decimala broja π, i kod prethodne tvrdnje $C = A$. Zbog beskonačnog niza, to jest njegove otvorenosti s jedne strane, moguće je da očekivanja da naiđemo na niz 0123456789 i da A nastavi da se održava unutar intervala gde pada C – nikad ne budu izneverena. Upravo to znači da je *moguće* da je problem suštinski nerešiv.

U slučaju u kojem bismo jednovremeno mogli da tvrdimo $\vdash \neg p$ i $\vdash \neg\neg p$ znali bismo da problem *jeste* suštinski nerešiv (up. *Heyting 1*, str. 49). Iako bi, naime, bilo protivrečno tvrditi $\neg p$, zbog čega bi važilo $\vdash \neg\neg p$, ipak bi p bilo nedokazivo, naime bilo bi $\vdash \neg +p$. I zato tu ne bi važilo $\vdash \neg\neg p \rightarrow p$.

„+" se može izbaciti ako se u matematici *ograničimo* na iskaze koji zahtevaju konstrukciju, i tada se tačno dobija *sistem logike izveden iz metoda intuicionističke matematike*, u kojem ne važi bezuslovno ni princip isključenja trećeg, ni princp afirmacije dvostrukom negacijom, ni kontrapozicija. „Logika je zavisna od matematike" (*Heyting 1*, str. 48).

Kada bi niz decimala broja π bio konačan, Brauer bi prihvatio zaključivanje od $\neg\neg p$ na p (vidi *Brouwer 11* u *Brouwer 2*, str. 109 i *Brouwer 5*, str. 14 u *Brouwer 2*, str. 510). Utvrditi da se unutar nekog određenog konačnog niza niz 0123456789 ne može ne nalaziti, svakako povlači za sobom da se on tamo mora nalaziti. Isto, naravno, važi i za *bilo koji određeni* deo niza decimala broja π. Ali, po Braueru, iz toga što je ovo zaključivanje valjano kad je u pitanju bilo koji određeni konačni niz iz decimalne ekspanzije broja π, ne sledi da je ono valjano i kada se o nizu decimala govori uopšteno, nespecifikovano.

Brauer prihvata da i niz koji *nije konačan* može neki put biti *određen tako* da važe sporni principi, princip isključenja trećeg ($A \vee \neg A$), afirmacija dvostrukom negacijom ($\neg\neg A \to A$) i kontrapozicija ($\neg B \to \neg A \to . A \to B$). Niz prirodnih brojeva nije konačan, ali i kad o njemu govorimo uopšteno, nespecifikovano, možemo reći da je *svaki* od članova niza ili paran ili neparan. To možemo reći zato što je *konstrukcija* niza takva da se svojstvo „biti paran ili neparan" *rekurzivno održava. Zakon* konstrukcije nam jamči da *će* svaki *novi* član niza biti paran ili neparan, i utolilko se može s pravom tvrditi „svaki je paran ili neparan", i ako to znači „*svaki mogući,* ili *svaki budući,* je paran ili neparan". Ovo odgovara slučajevima u kojima su iskazi o budućnosti formirani unutar jednog determinisanog sistema. Iako se *svi* budući događaji *neće* dogoditi, jer buduće vreme neće isteći, ipak je *svaki* predodređen. Svaki dokaz izveden matematičkom indukcijom omogućava tvrđenje zaključka o *svakom* članu niza, bez obzira da li je ovaj konačan ili nije.

Ali, to što u *takvim* slučajevima možemo nešto reći i zaključiti o *svakom* članu niza i kad ovaj posmatramo nespecifikovano, ne znači da Brauer dopušta da se govori *kolektivno* o *svim* članovima (vidi *Brouwer 5*, str. 141–142 u *Brouwer 2*, str. 510–511), ili o nizu kao *celini*. Niz prirodnih brojeva nije, po Braueru, nešto *po sebi dato*, on je, poput budućih događaja, nešto *nastajuće*, samo što je dat i *zakon nastajanja*, koji omogućava da se o nekim svojstvima govori nespecifikovano (vidi *Brouwer 9*, str. 3 u *Brouwer 2*, str. 524, *Brouwer 10*, str. 114 u *Brouwer 2*, str. 552).

Da bismo primenili sporne logičke principe na nizove poput niza koji čini decimalna ekspanzija broja π – nizove koji nisu niti konačni, niti smo u posedu zakona koji bi omogućavao primenu matematičke indukcije – morali bismo ove nizove tretirati

kao *po sebi date*, to jest o njima bismo morali govoriti kao o *gotovim* množinama. Kada bi π-mašina (vidi gore, § 23) zaista mogla da ispiše *sve* decimale broja π, onda bismo smeli reći da se među njima *ili* nalazi *ili* ne nalazi niz 0123456789, samo da *mi* to ne znamo. Ali Brauer, svakako, ne bi rekao da je to moguće. Osnov za izgradnju celokupne intuicionističke i konstruktivističke matematike i logike predstavlja pridržavanje *indefinitističkog shvatanja beskonačnosti*, poput onog kojeg su razvili Aristotel i Kant (vidi §§ 67, 70).

Razmotrimo sporan status beskonačne decimalne ekspanzije broja π u njegovoj *geometrijskoj* interpretaciji.

Broj π izražava odnos između prečnika i obima kruga, odnos između dve linije određene dužine. S jedne strane se, kao za odnos dijagonale i stranice kvadrata, kaže da je taj odnos odnos *nesamerljivosti*, u *negativnoj* formulaciji se, naime, tvrdi da se te dve dužine *ne mogu* izmeriti nijednom zajedničkom merom. No s druge strane se, u *pozitivnoj* formulaciji, tvrdi da je taj odnos upravo π. Da li se u pozitivnoj formulaciji tvrdi nešto *više* nego u negativnoj ili se samo na *skraćen*, ili *eliptičan*, način ponavlja tvrdnja o nesamerljivosti? Pitano na drugi način, da li su dve duži za koje se kaže da su nesamerljive nesamerljive *simpliciter*, ili su nesamerljive samo u konačnom broju koraka a samerljive u beskonačno mnogo koraka?

Intuicionisti ne prave razliku između samerljivosti *simpliciter* i samerljivosti u konačnom broju koraka, pošto samerljivost u beskonačno mnogo koraka za njih *doslovno* ne znači ništa; to za njih može da bude samo eufemizam kojim se govori o uvek sve većoj aproksimaciji u sameravanjima. Kad broj koraka neograničeno raste, ostatak se, pri sameravanju, neograničeno smanjuje. Nema *beskonačne tačke* u kojoj bi se nadovezivanjem u konačnom broju koraka nesamerljivih duži najzad njihove krajnje tačke dovele do poklapanja; svaka tačka je *neka određena tačka* i time konačno udaljena od početka. Isto tako nema beskonačno male duži, infinitezimale, koja bi bila zajednička mera za dve nesamerljive duži. Beskonačnost nije aktualna; govoriti o beskonačnosti znači uvek samo govoriti o *procesu neograničene aproksimacije.*

Ako se o beskonačnosti ne može govoriti u statičkom, svojstvenom ili kategorematskom smislu, onda se jedan niz koji je beskonačan samo u dinamičkom smislu, u smislu neograničenog *nastajanja*, ne može nespecifikovano posmatrati kao dat. Za razliku od Hejtinga, Brauer u opravdanju ograničavanja spornih logičkih principa nije ostao u domenu pitanja *dokazivosti* i nije insistirao na razlici između *iskaza* i *tvrđenja* iskaza. On je, slično Kantu, nastojao da pokaže da je *pojam beskonačnosti* takav da u slučaju *nekih* pitanja o *nekim* beskonačnim vrstama matematičkih entiteta nije zadovoljen uslov koji bi, rečeno Kantovim rečima (vidi *Kant 1*, str. 346–347), *suprotnosti* učinio *analitičkim*, pošto bi, kao u slučaju niza decimala broja π, taj uslov bio da se niz smatra gotovim a ne nastajućim. Za neka od nespecifikovanih pitanja o takvim beskonačnim nizovima ne mora važiti da se na njih može odgovoriti da „da“ *ili* „ne“, prosto zato što se sami takvi nizovi kao nastajući ne mogu posmatrati kao i beskonačni i određeni *u isto vreme.*

No, iako se π ne može *pozitivno* odrediti beskonačnim nizom intervala određenih decimalnom ekspanzijom, jer ovaj niz ne može prosto biti dat, on se možda ipak može *negativno odrediti* tim nzom kao *nastajućim.*

Ako nam je decimalna ekspanzija nekog broja poput broja π poznata do h-tog decimala, onda možemo reći da je time određen interval $[m/10^h, (m+1)/10^h]$, (gde je m nenegativan ceo broj) unutar kojeg se nalazi broj o kojem je reč. Niz ovako određenih intervala, od kojih je svaki naredni uključen u prethodni i čije su krajnje tačke racionalni brojevi – koji se opet određenim operacijama mogu svesti na prirodne (vidi *Weyl 3*, str. 71) – *negativno* određuje izvestan realni broj, poput broja π, kao broj koji će uvek padati unutar novih i novih intervala, u našem slučaju intervala $[m/10^h, (m+1)/10^h]$, ma koliko se niz produžavao (*Weyl 3*, str. 49).

74. Intuicionistička definicija realnog broja

Razmatranje filozofski najzanimljivijih posledica indefinitističkog tretiranja beskonačnosti u matematici počećemo poređenjem određenja iracionalnog realnog broja Dedekindovim presekom (vidi *Dedekind 2*, str. 23–26) i određenja realnog broja koje se koristi intuicionističkom konstrukcijom niza intervala koja se nikad ne završava.

Sve tačke prave nisu obuhvaćene skupom takozvanih racionalnih tačaka, tačaka kojima odgovaraju racionalni brojevi. Preostale tačke su po Dedekindu (i Kantoru) iracionalne (transcendentne) tačke kojima se korespondiraju iracionalni (transcendentni) brojevi. Iracionalne realne brojeve Dedekind *definiše* preko *skupa racionalnih* korišćenjem *relacije poretka* „<“, odnosno „>“. On je pretpostavljao da neki iracionalni broj α deli relacijom poretka uređeni skup racionalnih brojeva na dva podskupa, koji se zato definišu svojstvima „biti manji od α“ i „biti veći od α“. Ovi podskupovi, za uzvrat, mogu da *definišu jedan i samo jedan* broj α takav da za sve elemente prvog od dva skupa važi da su manji, a za sve elemente drugog da su veći od α (vidi § 92).

Intuicionistička definicija realnog broja ne polazi od nekog navodno *datog uređenog skupa* racionalnih brojeva, već *konstruiše* niz *intervala* koji su u svakom koraku određeni nekim *zakonom* koji se tiče racionalnih, odnosno prirodnih brojeva (vidi *Brouwer 4*, str. 6 u *Brouwer 2*, str. 434, *Brouwer 5*, str. 142 u *Brouwer 2*, str. 511, *Weyl 3*, str. 71), koji određuje krajnje tačke intervala. Za intuicioniste prava *nije skup tačaka*, već se određenom konstrukcijom na pravoj mogu *birati* određene tačke, koje onda definišu određene intervale. Niz *izbora* određuje niz *intervala*, ali ovaj niz nikada nije završen i zato nema smisla govoriti o *datom* beskonačnom skupu intervala, odnosno racionalnih (odnosno prirodnih) brojeva kojima su *definitivno isključeni svi* brojevi, odnosno *sve* tačke *sem* broja α i njemu odgovarajuće tačke.

Upravo ova poslednja okolnost omogućava Hejtingu da ne samo dopusti da ne znamo da li je Ojlerova konstanta C jednaka nekom racionalnom broju A, već da sasvim eksplicitno kaže (vidi *Heyting 1*, str. 45–46) da ne prihvata da $a=b$ može da važi samo ako se a i b odnose na jedan i isti matematički objekt. Ako neka definicija ne omogućava da se a i b konstruktivno razdvoje, onda se, *bez obzira* da li se po *nekoj drugoj konstrukciji* možda razlikuju, barem mora dopustiti mogućnost da bude $a=b$, kao što bi to bio slučaj sa Ojlerovom konstantom C i racionalnim brojem A koji bi se stalno održavao u, sve užem, intervalu u koje pada C (vidi gore, str. 336). To je Hejtingova intuicionistička verzija Lajbnicovog principa *identitas indiscernibilium*.

Ako bismo o jednakosti hteli da govorimo *samo u slučajevima* u kojima se – bez obzira o kojem se ilokucionom aktu radi, o tvrđenju, o pretpostavljanju, o očekivanju – obavezujemo i na pretpostavku o striktnom identitetu objekata među kojima relacija jednakosti važi, tako da se, na primer, sme *tvrditi* $\vdash a=b$ samo ako *znamo* da se a i b odnose na jedan isti objekat – ako, dakle, za $\vdash a=b$ ne bi bila dovoljna samo nerazlučivost s obzirom na izvesnu konstrukciju ili *de facto* izvedenu kalkulaciju (do određenog decimala) – onda za razmatranu relaciju koja bi važila među realnim brojevima koji bi bili određeni bilo kojim nizom sve užih intervala možemo uvesti *poseban naziv*. Intuicionisti govore o relaciji *koincidiranja*, „padanja zajedno" (*Zusammenfallen*) (vidi *Weyl 3*, str. 72). No pošto je za one brojeve koji nisu jednoznačno

određeni koincidiranje jedina relacija koja odgovara jednakosti, utoliko što je refleksivna, simetrična i tranzitivna, možemo ipak zadržati znak „=". Relacija suprotna ovoj ne bi bila obična relacija nejednakosti, već relacija „ležati odeljeno od" (*getrennt liegen, lie apart from*) označena sa #.

Realne brojeve a i b možemo intuicionistički odrediti Košijevim nizom racionalnih brojeva $\{a_n\}$ – nizom takvim da za svaki prirodan broj k možemo naći prirodni broj $n=n(k)$ takav da je $|a_{n+p}-a_n|>1/k$ za svaki broj p – odnosno sličnim Košijevim nizom $\{b_n\}$. $a\#b$ će biti jače od uobičajenog $a\neq b$ utoliko što će zahtevati da se *navedu* brojevi n i k takvi da $|a_{n+p}-b_{n+p}|>1/k$ za svako p, jer dva broja mogu koincidirati, padati permanentno unutar istog intervala (kao što je to slučaj u primeru sa Ojlerovom konstantom C i racionalnim brojem A) samo zato što navedenim nizom nije obezbeđeno isključenje svih brojeva (tačaka), sem jednog (jedne).

Ako *razlikujemo koincidiranje od jednakosti* (u striktnom smislu), odnosno *odeljenost od nejednakosti*, tako što kažemo da dva realna broja mogu koincidirati i samo zato što u odnosu na izvesnu konsrukciju ne mogu efektivno da se razdvoje, onda se može očekivati da je i sam *identitet* nekog realnog broja *sa samim sobom* nešto što se samo *pod određenim uslovima* može tvrditi, a ne nešto bezuslovno, kao što je, komplementarno tome, što ćemo uskoro videti, *poredak* među realnim brojevima tada moguć samo kao *virtualan*.

Postoje beskonačni konvergentni nizovi koji kad se posmatraju kao „generatori realnih brojeva" određuju *jedan i samo jedan realni* broj a tako da važi i da je $a=a$ i da je za svaki racionalni broj b ekskluzivno ili $a=b$ ili $a\#b$ (time i $a\neq b$). *Takav je*, na primer, *niz* $\{a_n\}=-1/2, 1/4, -1/8, 1/16,..., (-1/2)^n, ...$ $(n=1, 2, 3, ...)$. On, naime, određuje broj $a=0$ i za ma koji racionalni broj važi da je ovom broju ili (striktno) jednak ili od njega odeljiv (i različit). Posmatrajmo, međutim, niz vrlo sličan prethodnom; uzmimo da je uvek $r_n = -(1/2)^n$ osim ako je $n > k_1$, u tom slučaju neka bude $r_n = -(1/2)^{k_1}$, a k_1 neka je redni broj decimale iz decimalne ekspanzije broja π gde se prvi put javila nula ispred niza cifara 123456789 (up. *Brouwer 12*, str. 3 u *Brouwer 2*, str. 270). Kada bismo, protivčinjenički, mogli da posmatramo beskonačni niz decimala iz decimalne ekspanzije broja π kao *dat*, tada bismo mogli da govorimo o tome da se niz 0123456789 u njemu javlja ili ne javlja i tada bi u slučaju da se ne javlja, broj određen nizom $\{r_n\}$ bio nula, a u slučaju da se javlja, neograničeno mnogo članova niza $\{r_n\}$ bi padalo zajedno s leve strane od nule ako bi k_l bio neparan, dok bi neograničeno mnogo njih padalo zajedno s desne strane nule ako bi k_l bio paran broj. Pošto, međutim, o nizu decimala broja π ne možemo nespecifikovano govoriti kao o datom beskonačnom nizu, tô ne možemo tvrditi ni da niz $\{r_n\}$ određuje broj r za koji bi važilo $r=0 \vee r<0 \vee r>0$. Utoliko Brauer ne dozvoljava da se u ovom slučaju tvrdi $r=r$, jer bi to zahtevalo da možemo tvrditi $r=0 \vee r<0 \vee r>0$ zajedno sa tim da je ta tvrdnja neprotivrečna (vidi *Brouwer 8*, str. 4 u *Brouwer 2*, str. 505).

Ako bismo kao nužan uslov za uvođenje realnih brojeva postavili *mogućnost da tvrdimo* njihov identitet u prethodnom smislu, onda ne bismo mogli da tvrdimo da nizovi poput prethodnog niza $\{r_n\}$ predstavljaju „generatore realnih brojeva“.[1] Ako, suprotno tome, nizove poput niza $\{r_n\}$ smatramo za generatore realnih brojeva, onda za realne brojeve ne bi uvek važilo striktno $r=r$; za neke od njih mesto među racionalnim brojevima ne bi bilo fiksirano.

Ako smo dopustili mogućnost postojanja suštinski nerešivih matematičkih problema, onda se za mnoge teoreme klasične aritmetike realnih brojeva, koje se intuicionistički posmatrano neopravdano koriste principom isključenja trećeg, može utvrditi da ne stoje (vidi *Brouwer 12*, str. 5 i dalje u *Brouwer 2*, str. 272 i

dalje i *Brouwer 7* u *Brouwer 2*, str. 517), korišćenjem metoda poput onog koji smo koristili u kostrukciji broja $r = \{r_n\}$. Treba samo iskoristiti neko svojstvo poput svojstva koje ima nula kao član niza 0123456789 eventualno pripadnog decimalnoj ekspanziji broja π, a koje svojstvo Brauer naziva „letećim svojstvom“ (*fliegende Eigenschaft*) (*Brouwer 10*, str. 114 u *Brouwer 2*, str. 551, *Brouwer 5*, str. 141 u *Brouwer 2*, str. 510) i na zgodan način konstruisati neki „fluktuirajući broj“ (*Pendelzahl*) (up. *Brouwer 12*, str. 3 u *Brouwer 2*, str. 270 i *Brouwer 4*, str. 3, 7 i dalje u *Brouwer 2*, str. 431, 435 i dalje) poput malopređašnjeg broja $r = \{r_n\}$.

Polazeći u svakoj konstrukciji od prirodnih brojeva, leteće svojstvo f možemo definisati kao hipotetičko svojstvo prirodnih brojeva koje zadovoljava sledeće uslove:

1. za svaki dati prirodni broj se može odlučiti ili da svojstvo f poseduje, ili da ga ne može posedovati;
2. nema poznatog metoda za izračunavanje prirodnog broja koji bi posedovao f;
3. za pretpostavku da postoji prirodni broj koji bi svojstvo f posedovao ne zna se da vodi protivrečnosti.

Van Dancig (vidi *van Dantzig*, str. 351 i dalje) je Brauerov metod pokušavao da formalizuje na sledeći način: neka ω_i ($i=1, 2, \ldots$) označava za svako i neki konačan skup matematičkih dedukcija. Neka je niz (ω_i) označen sa Ω, neka je $\sigma_n = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i$, a p neki matematički iskaz. Neka generator realnog broja a zavisi od Ω: $a(\Omega) = a_n(\Omega)$. Ako u σ_n nema dedukcije ni za $\neg p$ ni za $\neg\neg$p, onda neka bude $a_n(\Omega) = 2^{-n}$. Ako σ_n sadrži dedukciju za $\neg p$ ili $\neg\neg p$ i ako je m poslednji broj takav da σ_m sadrži dedukciju za $\neg p$ ili $\neg\neg p$, onda neka je $a_n(\Omega) = 2^{-m}$.

I mnoge „stare, čvrsto konsolidovane teorije u oblasti matematike beskonačnosti“ sadrže značajne teoreme koje se u stvari zasnivaju na, intuicionistički posmatrano, nedopustivom korišćenju principa isključenja trećeg. Navešću, na primer, intuicionističko pobijanje jedne verzije Bolcano-Vajerštrasovog stava. Bolcano-Vajerštrasov stav tvrdi da svaki ograničeni beskonačni niz realnih brojeva (tačaka) ima bar jednu tačku nagomilavanja, odnosno, u inverznom obliku u kojem ćemo ga pobijati, da je svaki ograničen niz realnih brojeva bez tačke nagomilavanja ograničen po broju članova (vidi *Brouwer 12*, str. 4 u *Brouwer 2*, str. 271, *Brouwer 7* u *Brouwer 2*, str. 516, *Heyting 2*, str. 119). – Neka je p iskaz koji nije testiran, a to znači da ni $\neg p$ ni $\neg\neg p$ nije dokazano. Neka je $\{b_n\}$ niz racionalnih brojeva takav da dok p nije testirano uzimamo $b_n = 2^{-n}$, a ako p bude testirano između b_m i b_{m+1} uzimamo $b_{m+2} = 2^{-m}$ i dalje uvek tako. Neka je S vrsta komponenata b_n toga niza. Pretpostavimo sad da je c tačka nagomilaanja za S. Jasno je da c nije manje od nule, ali takođe ni veće od nule, jer bi inače S bilo konačno. Tako bi trebalo da bude $c = 0$, ali to implicira da p ne može nikad da bude testirano, što je protivrečno. No opet, ako bi S bilo ograničeno po broju, moralo bi se znati za m takvo da p bude testirano pre izbora b_{m+1}, što nije slučaj.

Brauer je naveo čitav niz raznovrsnih kontraprimera za poznatu teoremu kojom se tvrdi da neoscilirajući beskonačni niz mora biti i negativno-konvergentan, i ograničen, i pozitivno-konvergentan (*Brouwer 12*, str. 5 i dalje u *Brouwer 2*, str. 272 i dalje).

Za nas je naročito zanimljiva posledica koju možemo izvesti iz konstrukcije broja $r = \{r_n\}$, koja se tiče klasičnog Dedekind-Kantorovog shvatanja kontinuuma kao uređenog skupa tačaka. Ako relacija „<" definisana na podskupu Dekartovog proizvoda $S \times S$ neke vrste S matematičkih entiteta *parcijalno uređuje* S kad važi:

(1) $a < b \rightarrow \neg (a > b) \wedge \neg (a = b)$

(2) $a = b \wedge b < c \rightarrow a < c$

(3) $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$

(4) $a < b \wedge b = c \rightarrow a < c$

onda je za *uređenje* S potrebno još da važi:

(5) $a = b \vee a < b \vee a > b$.

Videli smo, međutim, da za sve realne brojeve (5) ne važi na osnovu intuicionističkih standarda (vidi *ibid.*, str. 3 (str. 270)), i to je jedna od mnogih posledica razlike između intuicionističke definicije realnog broja i definicije preko Dedekindovog preseka.

Osim uređenosti, za kontinuum realnih brojeva klasično važi još i da je on *diskretan*, naime, da za svaka dva elementa važi da su ili jednaki ili nejednaki. No, za broj $1/2+p_f$, gde je p_f fluktuirajući dualni broj nekog letećeg svojstva f, niti važi da je jednak niti da je različit od 1/2 (vidi *Brouwer 4*, str. 7 u *Brouwer 2*, str. 435).

Realni brojevi po intuicionističkim standardima ne predstavljaju ni vrstu čiji su elementi *u sebi gusti (in sich dicht)*, što znači da ne važi da je svaki element granični element rastućeg osnovnog niza a_1, a_2, ... $(a_1 < a_2 ... < a)$ – tako da za svako $b < a$ postoji $a_n > b$ – ili opadajućeg a_1, a_2, ... $(a_1 > a_2 ... > a)$ – tako da za svako $b > a$ postoji $a_n < b$ (za dokaz vidi *ibid.*, str. 9 (str. 437)).

Ni *odvojivost u sebi (Separabilität in sich)* ne važi za realne brojeve po intuicionističkim standardima, naime, ne može se navesti nijedan osnovni niz takav da se između bilo koja dva realna broja nalazi jedan element niza (za dokaz vidi *ibid.*, str. 10 (str. 438)).

Za klasično shvaćen kontinuum kao skup realnih brojeva trebalo bi da važi i svojstvo *zavisnosti (Zusammenhang)*, to jest trebalo bi da pri svakoj podeli skupa na dva podskupa α i β, gde elementi iz α prethodne elementima iz β, ili α sadrži poslednji a β ne sadrži prvi element, ili β sadrži prvi a α ne sadrži poslednji. I ovde se, međutim, lako, podesnim korišćenjem letećeg svojstva može pokazati da to ne važi po intuicionističkim standardima (vidi *ibid.*, str. 10–11 (str. 438–439)).

Skup realnih brojeva je ne samo u sebi gust već je i *svuda* gust (*überall dicht)*, no ovo svojstvo, naravno, ne važi za intuicionistički definisane realne brojeve, jer ne važi da se između svaka dva elementa a i b može umetnuti element c tako da bude ili

$a<c<b$ ili $a>c>b$ (*ibid.*, str. 11–12, (str. 439–440)), prosto zato što za svaka dva različita elementa a i b ne važi $a<b \vee a>b$.

Najzad, skup realnih brojeva ne može biti ni *kompaktan*, naime, beskonačni niz intervala takvih da je svaki naredni sadržan u prethodnom ne sadrži element zajednički svima (*ibid.*, str. 12 (str. 440)).

75. Shvatanje kontinuuma u intuicionističkoj matematici

Mada se Brauer poziva na Kanta[1], ipak je sasvim zanemareno istraživanje čitavog niza sličnosti između starih indefinitističkih teorija i – ne samo *filozofskih osnova*, već i mnogih *posledica* razvijene intuicionističke matematike.

Postoji čitav jedan splet indefinitističkih ideja čija je povezanost takva da sličnost o kojoj je reč *zbog toga*, zbog same stvari, ne može biti slučajna čak i tamo gde direktnog uticaja nema.

Nije slučajno što je upravo Aristotel, koga smo upznali kao vodećeg starog indefinitistu, ograničio važenje principa isključenja trećeg u slučaju nekih iskaza o budućnosti. Niz događaja, ako nije predestiniran, predstavlja jedan otvoreni nastajući niz koji nije ni konačan ni dat kao beskonačan, te se o prisustvu i odsustvu nekih budućih članova u tom nizu ne može suditi sa „da" ili „ne".

Brauer je načinio prirodan korak dalje: ne samo što je beskonačnost tretirao dinamički, kao nastajuću, već je dokazivao da vrste matematičkih entiteta ne mogu uvek da se podele ekskluzivno na konačne i beskonačne u ovom smislu. Ako formiramo „vrstu od vrsti" (up *Brouwer 12*, str. 3–4 u *Brouwer 2*, str. 270–271) matematičkih entiteta tako što članovi te vrste bivaju birani među članovima niže vrste o čijem se prisustvu ili odsustvu ne može suditi sa „da" ili „ne", onda je jasno da ta viša vrsta

nije ni konačna ni beskonačna (ni u sinkategorematskom smislu). Možemo iskoristiti jedan raniji primer. Za vrstu celih pozitivih brojeva k_1, k_2, ..., k_n,... koji predstavljaju redne brojeve decimala iz decimalne ekspanzije broja π gde se nula ispred 123456789 javlja prvi, drugi, ..., n-ti,... put, ne može se tvrditi da je konačna ili beskonačna.

I Aristotel i Kant shvatali su tačku kao granicu, a ne kao element nekog skupa do kojeg bi se moglo doći beskonačnim razlaganjem. To isto misli i Brauer; ako je nekim konvergentnim beskonačnim nizom, ili Košijevim nizom $\{a_n\}$, u smislu u kojem je on generator realnog broja (vidi § 74), jednoznačno određen broj a, onda to *nije* tako zato što su nizom $\{a_n\}$ kao završenim beskonačnim nizom *aktualno isključene sve* realne tačke sem jedne, *već* zato što je *zakon* po kojem se članovi niza $\{a_n\}$ biraju takav da *znamo* da za *svaki* prirodni broj k možemo naći prirodan *broj* $n=n(k)$ takav da bude $|a_{n+p}-a_n|<1/k$ za svaki prirodni broj p. Ako pak *nema* jednog takvog zakona, onda, kao što smo videli u gornjoj konstrukciji broja $r=\{r_n\}$ (§ 74), ni broj r nije jednoznačno određen, i zato i ne važi $r=r$, bar striktno uzev.

Poslednji rezultat koji uslovljava identitet realnih brojeva u savršenom je skladu sa Aristotelovim shvatanjem načina postojanja matematičkih objekata. Videli smo da tačke ne postoje samostalno, po sebi (vidi § 68), i utoliko ukoliko je njihovo *postojanje* uslovljeno nekom datom razdeobom uslovljen je i njihov *identitet*. Ako nizom $\{r_n\}$ nije postignuto da za svako k postoji $n=n(k)$ takvo da bude $|a_{n+p}-a_n|<1/k$ za svako p, onda to, bar intuitivno gledano, znači da zakonom po kojem niz nastaje nisu fiksirani intervali koje bi traženi broj (tačka) razgraničavao.

Da se linija kao kontinuum ne može shvatiti kao skup tačaka, to je, kao što smo videli, praktično dokazivao još Zenon, a kao teoriju o različitim rodovima razvio verovatno već Platon (vidi § 48). Raznolike dokaze za to dao je Aristotel (na primer, *Aristotle 22*, 226 b 18 i dalje). No u devetnaestom veku postalo je na kraju već opšteprihvaćeno da skup tačaka može tvoriti kontinuum, samo ako se skup racionalnih realnih tačaka, to jest tačaka kojima su korespondirani racionalni realni brojevi – skup kardinalnosti $\aleph_0$ – dopuni skupom iracionalnih realnih tačaka, to jest tačkama koje su korespondirane iracionalnim brojevima određenim Dedekindovim presekom ili Kantorovim konvergentnim nizovima racionalnih brojeva. Kao da je problem bio samo u tome da je racionalnih tačaka *suviše malo*, iako ih je beskonačno mnogo, i da ostaje jedino da se „rupe" popune (vidi *Dedekind 2*, str. 22) iracionalnim tačkama, pa da se pomoću beskonačnog skupa više kardinalnosti ($2^{\aleph_0}$) navodno ipak postigne μετάβασις εἰς ἄλλο γένος i tako reši Platonov problem sadržanosti viših rodova u nižim, čime bi bio negiran Zenonov aksiom (vidi dole, §§ 93, 94). Skup realnih brojeva ne bi doduše bio *dobro uređen*, ne bi svaki element imao neposrednog sledbenika, ali bi bio *uređen, diskretan, u sebi gust, svuda gust, kompaktan*, elementi bi bili *odvojivi u sebi* i *zavisni*.

Brauer je izveo posledice kojima je, prirodno sledeći indefinističke ideje, vaskrsao Platonovo i Aristotelovo shvatanje, i to ne samo time što je doveo u pitanje hipotezu po kojoj skupovima kardinalnosti $\aleph_0$ sleduju skupovi kardinalnosti $2^{\aleph_0}$. Nije naime jedini problem u iracionalnim brojevima i pitanju da li oni mogu dovoljno dobro „popuniti rupe". Ako i izostavimo iracionalne brojeve kao „nedovršene elemente" definisane preko beskonačnih konvergentnih nizova racionalnih (vidi *Brouwer 4*, str. 5 u *Brouwer 2*, str. 433) i ako uzmemo u obzir samo „gotove" (*fertige*) racionalne brojeve i posmatramo ih u takozvanom jediničnom kontinuumu kao sistem konačnih dualnih ili decimalnih razlomaka, ako, dakle, uzmemo u obzir jedan takav „redukovan kontinuum" (*ibid.*, str. 4 (str. 432)), nećemo dobiti skup koji bi bio diskretan, uređen, u sebi gust itd. (*ibid.*, str. 7 i dalje (str. 435 i dalje). Za taj skup se inače uzimalo da se čak može *dobro urediti*, jer je iste kardinalnosti kao i skup prirodnih brojeva. No, po intuicionističkim standardima, za uređenje „redukovanog kontinuuma" morala bi se prihvatiti rešivost bar onih matematičkih problema koji pripadaju izvesnoj vrlo opštoj kategoriji (vidi *Brouwer 4*, str. 8 u *Brouwer 2*, str. 436, nap. 6). Oni se ne bi ticali nizova poput niza decimala broja π, ali bi se ticali *egzistencijalnih iskaza o prirodnim brojevima*. Jednostavan i poznat primer je takozvana Goldbahova hipoteza, po kojoj se svaki složen broj može predstaviti kao zbir dva prosta broja. Ako skup prirodnih brojeva nije dovršen, kao što prema intuicionistima nije, ako ne znamo, kao što ne znamo, ni za jedan složen broj koji nije predstavljiv kao zbir dva prosta broja, ali isto tako nemamo metodu kojom bi se pokazalo da je isključena mogućnost da se neki složen broj (nepredstavljiv kao zbir dva prosta) javi prilikom proizvoljno dugog produžavanja niza prirodnih brojeva, onda *na osnovu te činjenice* možemo definisiti izvesno leteće svojstvo f i odgovarajući fluktuirajući broj p_f koji će značiti da je i „redukovani kontinuum" neuređen i da nema ostala navedena svojstva klasično shvaćenog kontunuuma.

Tako se pokazuje da je srodnost intuicionističke matematike sa starim indefinitističkim teorijama i ovde mnogo dublja, da se ne tiče samo problema iracionalnih brojeva i hipoteze kontinuuma već i načina postojanja brojeva, odnosno tačaka uopšte, a što prozilazi iz shvatanja beskonačnosti. *Može* se tvrditi da je svaki prirodni broj paran ili neparan *zato što* smo u posedu *zakona* koji nam omogućava *potpunu indukciju* – postoji dokaz da se svojstvo o kojem je reč rekurzivno odražava *u svakom novom* koraku – ali to *ne znači* da time govorimo kolektivno o *svim* članovima nastajućeg niza, odnosno o skupu svih prirodnih brojeva. Peano-mašina (vidi § 23) ne može ispisati *sve* prirodne brojeve, među kojima bi se nalazili, ili ne bi nalazili, x, y, z, i $n > 2$ takvi da $x^n + y^n = z^n$, da bi time Fermaovu teoremu učinila istinitom, ili lažnom, *isto toliko* koliko ni π-mašina ne može ispisati *sve* decimale iz decimalne ekspanzije broja π da bi time učinila istinitom, ili lažnom, tvrdnju da se unutar tog niza nalazi niz 0123456789. A ako niz prirodnih brojeva nije završen, nisu ni racionalne tačke *već sve tu*, da bi onda bile uređene (ili čak dobro uređene). Kao što su tačke samo virtualne kad njihova egzistencija zavisi od aktualizacije nekim izborom, tako je i njihov poredak samo virtualan.

Da bismo dobili relaciju koja *virtualno uređuje* neki „skup" i kojom „skup" realnih brojeva može biti virtualno uređen, treba odbaciti jako pravilo

$a = b \vee a < b \vee a > b$

i zameniti ga dvama slabijima:

$\neg(a < b) \wedge \neg\, (a > b) \rightarrow a = b$

i

$\neg(a < b) \wedge \neg\, (a = b) \rightarrow a > b$

Brauer je relaciju uređenja ranije označenu sa „<" označio sa „$<\circ$", a sa „<" je označio relaciju virtualnog uređenja, jer će ona biti „osnovna relacija virtualnog poretka u kontinuumu" (vidi *Brouwer 8* u *Brouwer 2*, str. 504–505)[2]. $\circ>$ je inverzno od $<\circ$: $a \circ> b \leftrightarrow b <\circ a$

Relacija virtualnog uređenja („<") kao slabija od relacije uređenja („$<\circ$") može se preko ove *definisati negativno*:

$a < b \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \neg\,(a \circ> b) \wedge \neg\,(a = b)$[3]

Lako je videti da je

$\neg\,(a < b) \leftrightarrow (a <\circ b)$,

ali da nije

$(a < b) \leftrightarrow \neg(a <\circ b)$,

već samo

$(a < b) \leftrightarrow \neg\neg\,(a <\circ b)$.

Moramo moći da tvrdimo da je $\neg(a <\circ b)$ protivrečno da bismo mogli da tvrdimo $(a < b)$, kao što, s druge strane, nismo mogli da tvrdimo $r = r$ za broj koji smo hteli da odredimo nizom $\{r_n\}$

(§ 74), zato što uz $r \leq 0 \vee r \geq 0$ nismo mogli da tvrdimo da je $\neg(r \leq 0 \vee r \geq 0)$ protivrečno. $a \neq 0$ značilo bi da je $a < 0$ ili $a > 0$ i da se može tvrditi da je to neprotivrečno. $a \geq 0$ bi značilo da je ili $a = 0$ ili $a \circ> 0$ i da se može tvrditi da je to neprotivrečno (vidi *Brouwer 8* u *Brouwer 2*, str. 505). To je odnos *istine* prema *neprotivrečnosti* s obzirom na *identitet i poredak tačaka u kontinuumu*.

Pogledajmo, konačno, kako se matematički kontinuum može *pozitivno* odrediti u skladu sa filozofskim pretpostavkama koje usvaja intuicionistička matematika.

Homer je upotrebljavao reč συνεχές da označi neposredno nadovezivanje *dve raznovrsne* stvari, kao što su dan i noć, a Parmenid je verovatno prvi time karakterisao nešto što je *jedno* i *homogeno* (vidi § 32). Kod Aristotela se vidi veza između ove dve upotrebe utoliko što se συνεχές upotrebljava i da označi neposrdno nadovezivanje dve stvari (kraj jedne je početak druge) (*Aristotle 22*, 227 a 10–17) i da se karakteriše nešto što je jedinstveno i homogeno utoliko što se *potencijalni* delovi onoga što je homogeno neposredno jedan na drugi nadovezuju (na primer, *Aristotle 21*, 200 b 26, *Aristotle 22*, 263 b 8). Za delove onoga što je homogeno važilo bi isto što i za Homerove dane i noći samo što, pošto ovi delovi nisu raznovrsni, ne možemo da ih smatramo aktualnim već potencijalnim. Ono što je homogeno i nepodeljeno, kontinuirano je, dakle, utoliko što bi se pri svakoj, protivčinjenički zamišljenoj, raznovrsnosti delova, ovi jedan na drugi nadovezivali. Upravo je zato ono što je aktualno nepodeljeno i homogeno – u prevashodnom smislu jedinstveno.

Ovo su intuicionisti potpuno usvojili (vidi *Weyl 3*, str. 77). Jedinična duž [0, 1] je *pre svega jedinstvena*, aktualno nepodeljena, i samo je *potencijalno mnoštvena*; ona nije *nikakav skup*. No ona je deljiva, i ako se deoba sprovede tako da je jednoznačno određena, onda se delovi nadovezuju. Prirodni broj 1 označava jedinstvenost, 2 dvostrukost, 3 trostrukost itd., ali, isto tako, ovi brojevi mogu da se iskoriste da označe određene *akte*, recimo određene mentalne akte (vidi *Brouwer 5*, str. 141 u *Brouwer 2*, str. 510, *Brouwer 9*, str. 2 u *Brouwer 2*, str. 523), tako da ako 1 označava prvi izbor nečeg nepodeljenog, 2 može da označi dupliranje ili deobu na dva dela, 3 tripliranje ili deobu na tri dela itd. Ako pođemo od jedinstvenosti, ali *ne* kao elementa skupa *već* kao onoga što je homogeno i kontinuirano u Aristotelovom smislu, onda brojem 1/2 možemo označiti *deobu* na dva dela po *određenom zakonu*. Taj zakon nam je dat u aritmetičkoj formi razlomkom 1/2. Ali, jedinična duž [0, 1] se može *podeliti* i po nekom *drugom* zakonu, takav je recimo zakon dat u formi razlomka 1/3. Jednostavno, možemo slobodno, na razne načine, koristiti prirodne brojeve da vršimo raznolike deobe. *Niz deoba* koji bi se *neograničeno produžavao* i koji unapred *ne bi bio predodređen nikakvim zakonom* predstavljao bi u *svakom koraku skup* racionalnih brojeva kojim su *aktualno određeni* delovi, intervali polazne jedinične duži.

U svakom trenutku, *posle svakog koraka* u nizu slobodnih izbora, možemo nekim *ograničenjem predodrediti* dalje izbore, tako da možemo dobiti, ako želimo, i određeni Košijev niz kao generator nekog određenog realnog broja. Tako nizom slobodnih izbora u *„medijumu slobodnog nastajanja"* (*Medium des freien Werdens*), koji se, intuitivno, može shvatiti kao kontinuum, (*Weyl 3*, str. 50) nastaju delovi koji i sami predstavljaju medijum slobodnog nastajanja, gde u svakom trenutku možemo određenim ograničenjima dobiti neki određeni generator realnog broja.

Pošto po indefinitističkim pretpostavkama koje intuicionisti usvajaju ne možemo govoriti o *skupu po sebi datih realnih* brojeva, jer ovi *samo mogu* i *tek treba* da nastanu, to je, umesto da ih skupimo pošto ih prethodno generišemo raznolikim zakonima – koje sve ne možemo specifikovati – zgodnije da ih odredimo kao *matematičke entitete određene nizom neograničenog broja slobodnih izbora*, gde izbor u *svakom koraku* može biti podvrgnut

ograničenjima koja mogu i potpuno *predodrediti* dalje izbore (vidi *Brouwer 5*, str. 143 u *Brouwer 2*, str. 512).

Ukoliko ove entitete posmatramo *s obzirom na njihovu završenost i datost* u *svakom konačnom* nizu koraka, oni su *skupovi* koji se sastoje *redom* od: jednog, dva, tri,..., *n*,... elemenata. No, s obzirom na to da nemaju definitivno fiksirani broj elemenata, oni se u stvari *šire*, i Brauer ih i naziva entitetima *koji se šire* (*"spreiding"* na holandskom, *„spread"* na engleskom, *„déploiment"* na francuskom). Kako su ovi matematički entiteti *in statu nascendi* (*Weyl 2*, str. 52), oni se ne mogu posmatrati *kao dati*, već kao potencijalno *odredivi* novim izborima; Brauer ih određuje *zajedničkim svojstvom*, i utoliko su oni *vrste*. Vrste se od skupova razlikuju po tome što njihovi elementi ne mogu biti definitivno dati, već su samo definisani nekim svojstvom, kao što su, u ovom slučaju, to entiteti koji „mogu nastati nizom slobodnih izbora" (gde se sloboda može u svakom trenutku manje ili više ograničiti) (*Brouwer* str. 142 u *Brouwer 2*, str. 511). Ovi matematički entiteti, *kao vrste* a *ne kao skupovi*, predstavljaju *kontinuum*: *„intuicionistički kontinuum* je vrsta *manje ili više slobodno nastajućih* konvergentnih nizova racionalnih brojeva" (*ibid.*, *loc. cit.*).

Tako je intuicionistički kontinuum *intuitivno* gledano *medijum slobodnog nastajanja*, a *formalno* je on *definišuće svojstvo vrste matematičkih entiteta koji mogu nastati određenim postupkom* (za intuicionističko definisanje vrste vidi *ibid.*, *loc. cit.* i *Heyting 2*, str. 37). Ako ti entiteti samo kao *vrsta* predstavljaju kontinuum, onda kontinuum nije *skup*; *„in concreto* proces podela i potpodela može da se izvrši samo do određene tačke" (*Weyl 2*, str. 53). No entiteti koji se šire (*spreiding*), realni brojevi kao vrsta, ne samo što *nisu* isto što i skup (*Menge*)[4] u klasičnom smislu, već se *uvek* dalje mogu širiti. Tako je zadržan Platonov stav da je s obzirom na matematičke etitete različitog roda nemoguć μετάβασις εἰς ἄλλο γένος.

Kontinuum kao vrsta matematičkih entiteta definisan beskonačnim manje-više slobodno nastajućim nizom može se urediti samo virtualno (vidi *Heyting 2*, str. 106–107, *Brouwer 8*, str. 357–358 u *Brouwer 2*, str. 504–505), a ostala svojstva, kao što su gustoća, zavisnost, odvojivost, kompaktnost itd., mogu se na odgovarajući način redefinisati tako da važe za virtualno uređeni kontinuum (vidi *Brouwer 4*, str. 8 i dalje u *Brouwer 2*, str. 436 i dalje).

Entiteti koji se šire mogu u svakom trenutku tvoriti samo *sito (fan)*[5]. Sito je uži pojam jer je definisano kao *ograničeno raširenje* (*Brouwer 5*, str. 143 u *Brouwer 2*, str. 512, *Brouwer 9*, str. 79 u *Brouwer 2*, str. 528–530, *Heyting 2*, str. 42).

Da bismo korak po korak videli kako se od sita intuicionistički može doći do kontinuuma polazeći samo od *akata* udvostručavanja, utrostručavanja i tako dalje, kojim nastaju prirodni brojevi, uvešćemo nekoliko posrednih pojmova.

Čvor n-tog reda je niz od n prirodnih brojeva ($n \geq 1$), koji predstavljaju *konstituente* ili *indekse* čvora.

Čvor p' reda $n + m$ ($m \geq 1$) je m-ti *potomak* čvora p reda n, a p m-ti predak od p', ako je p početni segment od p'. Za $m = 1$, p' je neposredni potomak od p, a p neposredni predak od p'.

Konačni niz čvorova sastavljen od čvorova p_1 prvog reda, njegovog neposrednog potomka p_2, ovom sledujućeg neposrednog potomka p_3... i tako dalje sve do neposrednog potomka čvora p_{n-1}, naime do p_n, predstavlja *stablo (rod) n-tog* reda.

Do sada smo imali posla samo sa nekim konačnim domenima, koji se uvek, u svakom trenutku, mogu posmatrati kao skupovi i za koje važi princip isključenja trećeg. Na toj osnovi bi mogla biti izgrađena finitistička matematika, čiji elementi nikad ne bi imali svojstva kontinuuma.

Da bismo dobili *indefinitističke* entitete koji se kao vrsta *šire*, a čiji će elementi imati svojstvo *virtualno uređenog kontinuuma*, uvodimo *neograničeno dugačak*, ne nužno predodređen *niz čvorova* koji se sastoji od čvora p_1 prvog reda, njegovog neposrednog potomka p_2,

sledećeg neposrednog potomka p_3 i tako dalje *ad infinitum*. Taj niz čvorova predstavlja *strelu*.

Strela se razvija *potpuno slobodno*, ali u svakom trenutku, kod svakog p_v može se uvesti neko *ograničenje*, koje se može pojačavati tako da nekim zakonom *dalji čvorovi* budu *fiksirani unapred*, čime se dobija *oštra strela*. To nam upravo omogućava da *u svakom trenutku definišemo neki određeni generator realnog broja*.

Ako ne posmatramo *određenu* strelu već uzmemo u obzir samo *svojstva* srele koja joj nužno moraju pripadati, ne *određeni* slobodni izbor već *činjenicu* da je izbor slobodan, možemo definisati *vrste strela* (zbog indefinitističkih pretpostavki svakako nije moguće govoriti o skupovima strela).

Neka vrsta čvorova K sadrži (1) među čvorovima prvog reda: ili sve prirodne brojeve, ili one i samo one prirodne brojeve koji ne prelaze određeni prirodni broj m_o; (2) za svako $n > 1$ od čvorova reda $n + 1$ koji su neposredni potomci čvora p koji je n-tog reda i pripada K: ili sve od njih, ili samo one čiji $(n + 1)$-vi konstituent zajedno sa onima od p ne prelaze neki određeni prirodni broj m_p.

Sad je vrsta čvorova K *pravac raširenja* a *vrsta $w(K)$* strelâ koje se sastoje od čvorova iz K *raširenja* (entitet koji se širi).

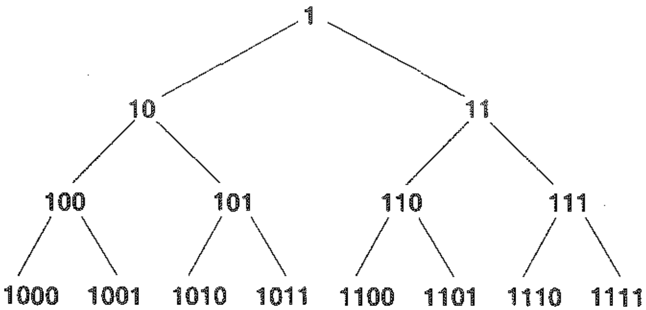
Ako je između gornjih (1) i (2) uvek izabrano (2), onda je odgovarajući pravac raširenja *pravac sita* a odgovarajući entitet koji se širi *uvek*, u svakom trenutku, sito.

Vrsta strela *$w(K)$* definisana je zakonom *$W(K)$* koji je dat u (2) i on predstavlja *ključ sita*.

Teorema sita glasi: ako se svakoj streli nekog sita F pripiše neki prirodni broj $\mu(\alpha)$, onda se može navesti prirodni broj s takav da, za bilo koje α, $\mu(\alpha)$, bude potpuno određeno s-tim čvorom iz α.

Odatle se može izvesti da se za $\mu(\alpha)$ može navesti konačan maksimum.

Za ilustraciju entiteta koji se širi i koji je u svakom trenutku sito pogledajmo sledeći jednostavan primer.



Neka vrh (1) bude, intuitivno, shvaćen kao jedinični kontinuum koji će predstavljati medijum slobodnog nastajanja (up. *Weyl 2*, str. 52–53). Proces dihotomija odvija se nizom slobodnih izbora, ničim, naime, nije predodređen niz prirodnih brojeva i odgovarajući zakon po kojem se podela vrši; podelu je moguće izvršiti u bilo kojoj tački. Jedino ograničenje je ono koje nameće prethodno izvršen izbor, jer neke su tačke već aktualizovane. 10 označava levi deo u prvoj podeli, 11 desni, i uopšte, pojava nule označava da se radi o levom delu prethodno podeljenog dela, a pojava jedinice da se radi o desnom. Lako je u svakom slučaju otkriti red i mesto za svaki čvor. Pošto se niz čvorova beskonačno produžava, reč je o streli. U svakom trenutku, u svakoj tački, možemo nekim zakonom uvesti ograničenje za dalje izbore, tako na primer, 1010 i 1011 ne moraju da su izabrani slobodno. Od tog časa može početi niz kojim se generiše neki određeni realni broj. Strela najzad može postati oštra strela.

Neformalno, vrh je homogeni jedinični kontinuum, u kojem se podele vrše, dok je strogo uzev kontinuiranost svojstvo entiteta koji se širi kao strela, ili oštra strela, predstavljajući uvek, u svakom trenutku, sito.

Intuicionistički dvodimenzionalni, trodimenzionalni, i uopšte n-dimenzionalni, kartezijanski prostor može se shvatiti kao vrsta manje-više slobodno nastajućih konvergentnih beskonačnih nizova, dvodimenzionalnih, trodimenzionalnih, i uopšte n-dimenzionalnih, rešetki (*grids*), (vidi *Brouwer 5*, str. 144, u *Brouwer 2*, str. 513).

Videli smo da je Aristotel indefinitista u jednom jakom antiinfinitističkom smislu, koji ne dozvoljava čak ni da se kaže da se jedna kontinuirana veličina sastoji iz beskonačno mnogo mogućih delova ako se beskonačnost shvati u kategorematskom smislu; neodređenost broja mogućih delova ne znači za Aristotela pravu beskonačnost mogućih delova.

Videli smo, takođe, da je u skladu s ovim Aristotel u *Fizici* (*Aristotle 22*, 237 b 34 i dalje) izveo dokaz da se neprekinutim kretanjem konačan put mora preći u konačnom vremenu. Da je zaključak ovog dokaza neprihvatljiv lako je videti iz kontraprimera sa trkačem koji zakonomerno usporava (vidi § 22), prelazeći polovinu puta za jedan sat, sledeću četvrtinu za dva sata i tako dalje. Ovaj trkač konačni put od jednog kilometra neće *nikad* preći iako se kreće neprekinutim kretanjem.

U kontraprimeru se koristimo Kantorovom idejom o preslikavanju skupova 1–1 da bismo utvrdili njihovu ekvipotentnost (*Cantor 8*, str. 152 i *Cantor 1*, §§ 1, 2). Da je broj mogućih delova određen datom konstrukcijom neki konačan broj, bio bi u tom slučaju i broj sati konačan. Međutim, niz 1/2, 3/4, 7/8, ... nije konačan.

Kontraprimer sa trkačem koji usporava može se iskoristiti kao osnova da se postavi fatalno pitanje svakom ko se zadovoljava indefinitističkim rešenjem bilo aristotelovskog, bilo kantovskog ili bergsonovskog tipa. (Ovaj drugi tip rešenja priznaje beskonačnost mogućih delova puta, ili neke druge ograničene kontinuirane veličine, kao što je kretanje).

Staccato trkač (§ 20) *aktualizuje* ne samo tačke na putu u kojima se odmara, već je i sâmo njegovo kretanje diskontinuirano; ono se, baš kao i rad Blekovih transportnih mašina i rad Tomsonove lampe, sastoji iz akata koji su *sukcesivni i strogo diskretni*

(§ 23). Ako je, po Kantu, broj mogućih delova puta beskonačan, dok, po Bergsonu, koji je samo kinematički monist, može biti čak beskonačno aktualnih delova puta, onda *staccato* trkač koji, da bi stigao na cilj, mora preći *beskonačno mnogo stvarnih delova puta* ako se kreće po propisanom zakonu, treba da učini ono što je po Kantu nemoguće, i, isto tako, da bi stigao na cilj, mora *beskonačno puta da se zaustavi*, što i po Bergsonu treba da je nemoguće. Reći da trkač tako ne može stići na cilj kratkotrajna je uteha, jer sledi pitanje: a *gde* je on po isteku jednog sata?

Čudnovato je što su Hinton i Martin, koji su izvršili operacionalizaciju indefinitističke teze (§ 73) upravo da bi ukazali na *disanalogiju* između *legato* i *staccato* kretanja, *zaboravili* da reše problem *staccato* verzije. To se isto dogodilo i Hermanu Vajlu kada je branio indefinitističke pretpostavke intuicionizma, prvi konstruišući mašinu koja bi navodno trebalo da u konačnom vremenu obavlja super-zadatke (§ 59).

Nezgodno pitanje na koje indefinitisti ne odgovaraju, ili ne mogu da odgovore, postavljeno je u okviru jedne od verzije *kinematičkih aporija* i kao takvo jednako dovodi u pitanje Aristotelov indefinitizam jakog antiinfinitističkog tipa, Kantov indefinitizam i Bergsonov kinematički monizam. Postavićemo, međutim, i jedno pitanje iz domena *statičke aporetike* onima koji poput Hermana Vajla misle da je shvatanje kontinuuma u intuicionističkoj matematici u savršenom skladu sa našim intuicijama (vidi *Weyl 2*, str. 53–54), gde je kontinuum „medijum slobodnog nastajanja" (*Weyl 3*, str. 50), i da je „besmisleno posmatrati kontinuum kao završeno biće (*Fertigseiendes*)" (*ibid.*, str. 73). Vajl očigledno misli da nam u vezi sa ograničenim kontinuiranim veličinama pojam aktualne svojstvene beskonačnosti nije potreban, već da nam je dovoljan pojam *nastajuće* beskonačnosti.

Neka je dat nastajući beskonačni niz predodređen zakonom L_n (zakonom nastajanja, koji utoliko predstavlja Brauerovu oštru

strelu – vidi gore, str. 357), ilustrovan nizom „čvorova" kao dihotomija jediničnog kontinuuma kao „medijuma slobodnog nastajanja" (vidi sl. na str. 358). Pretpostavimo da smo *otkrili* da se u svakoj tački dosad izvršene podele razgraničavaju dva različita svojstva iz konačnog skupa svojstava istog reda, kao, recimo, dve boje. Da li bi bilo protivrečno formirati zakon L_p (zakon postojanja) koji bi tvrdio da će se u svakoj tački podele određenoj zakonom L_n naći razgraničavajuća tačka dvaju svojstava iz polaznog skupa? Nezavisno od toga da li bi L_p zaista predstavljao prirodni zakon ili ne, izgleda neprotivrečno dopustiti da bi ga mogao predstavljati. Ako L_p važi, koliko je svojstava (boja) smešteno u jediničnom kontinuumu koji se deli nizom predodređenim zakonom L_n?

Odlučujuća razlika između L_n i L_p je u tome što je L_n *matematički* zakon kojim je predodređen niz izbora – koje je Brauer kantovski povezivao sa našom mentalnom aktivnošću – zbog čega se ne mora pretpostaviti postojanje *po sebi* članova toga niza (vidi *Weyl 2*, str. 52–54), i ako koraka nema bez koračanja, onda nam zaista nije potreban pojam aktualne svojstvene beskonačnosti; dovoljan nam je pojam neograničenog produžavanja niza. L_p je pak *prirodni* zakon, *formiran*, između ostalog, uz pomoć L_n, i njime se predviđa da će *de facto* svaki budući izbor izvršen prema L_n biti izbor tačke razgraničenja dva različita svojstva (boje) iz poznatog konačnog skupa svojstava. Ovaj zakon govori o tome šta *će biti* slučaj, ali se za razliku od iskaza o nedeterminisanoj budućnosti – ili uostalom o determinisanoj, no koja svakako cela ne može isteći – odnosi na nešto za šta se pretpostavlja da zavisi od nečega što *sada jeste slučaj* i što je time određeno. L_p ne mora podlegati standardima intuicionističke matematike, jer je njegov smisao takav da ono o čemu on govori *po pretpostavci* postoji po sebi.

Mogućnost da matematičkom zakonu L_n korespondiramo mogući zakon L_p dopušta nam da nastajućim, nikad završenim *nizovima* brojeva ili tačaka korespondiramo *skupove* po sebi postojećih tačaka i time i intervala. Ako nastajući niz nije konačan onda ni skup ovih tačaka, ili intervala, nije konačan. Ali, za razliku od niza koji – i ako nije konačan, kao nastajući nije ni beskonačan u kategorematskom smislu, skup ovih tačaka ili intervala, ako nije konačan, jeste *aktuelno svojstveno beskonačan*.

Izgleda, dakle, da se ne možemo lako osloboditi infinitističkih pretpostavki kada se od intuicionističke matematičke konstrukcije koja se odnosi na čist homogen kontinuum (kao prostor i vreme) spustimo u šaroliki svet koji je u prostoru dat.

Tako za indefinitizam postoje problemi i iz kinematičke i iz statičke aporetike.

F. INFINITIZAM

77. Dve varijante infinitizma

Strategija svih dosad razmatranih pokušaja da se izađe iz zenonovskih teškoća sastojala se u tome da se nađu razlozi kojima bi se, na ovaj ili onaj način, izbeglo priznavanje aktualnosti beskonačnosti u spornim slučajevima. Tako se nije prihvatalo da se linija sastoji iz tačaka, kojih bi bilo beskonačno mnogo, da se stvari sastoje iz beskonačno mnogo delova, da leteća strela tokom svog leta mora biti u beskonačno mnogo različitih položaja, da Ahil da bi stigao kornjaču mora savladati beskonačnost korak po korak.

Infinitizam će predstavljati opšti naziv za svaku tezu ili stanovište kojima se u pojedinim ili svim spornim slučajevima dopušta aktualnost beskonačnosti u kategorematskom smislu. Tako će, recimo, stanovište po kojem duž kao linearni kontinuum predstavlja agregat tačaka kao nerasprostrtih elemenata kojih je neprebrojivo beskonačno biti infinitističko, kao što će to bii i stanovište po kojem se duž sastoji iz beskonačno mnogo infinitezimala.

Slično tome, infinitističkom ćemo nazvati tvrdnju da Ahil, jureći kornjaču, može savladati beskonačnost korak po korak i da će on postići svoj cilj tako što će preći u konačnom vremenu put koji se sastoji iz beskonačno mnogo delova.

Zbog ovakve opštosti naziva „infinitizam", neke će infinitističke teze biti spojive sa nekim drugim neinfinitističkim. Tako je, na primer, Bergsonovo rešenje kinematičkih aporija indefinitističko zbog teorije kinematičkog monizma, ali su njegova, sa tim spojiva, shvatanja vezana za prostorne veličine – infinistička (up. gore, § 71).

Infinitističke teze grupisaćemo i razmatrati prema tome da li u sebi uključuju ili ne uključuju pojam neke vrste infinitezimala.

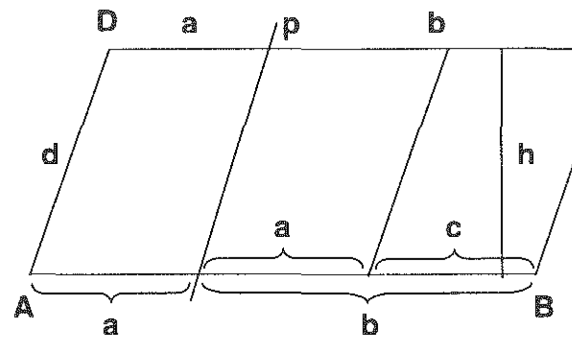
I. Infinitizam sa infinitezimalama

78. Antiinfinitistički karakter grčke matematike i potreba za infinitezimalama

Ako infinitezimale odredimo prema tome kako su one shvatane u periodu razvijenog infinitezimalnog metoda, kao veličine koje su beskonačno mnogo puta manje od nama dostupnih ograničenih veličina, onda – ne samo što nemamo evidencije o tome da je iko u antičkom periodu prihvatao takve, beskonačno male veličine, već imamo razloga da verujemo da pojam infinitezimala nije tada bio ni obrazovan ili, barem, da je bio izbegavan.

Što se tiče razvijene grčke matematike oličene u Eudoksu, Euklidu i Arhimedu, ona je dosledno i strogo finitistička u metodu i indefinitistička u osnovnim pretpostavkama, i odmah ćemo videti kako su se grčki matematičari finitističkim metodom nosili s problemima zbog kojih su kasnije uvođene infinitezimale.

Za nas je danas vrlo lako da utvrdimo da ako neki paralelogram, uzmimo romboid ABCD (vidi sliku), podelimo na dva romboida pravom *p* paralenom nekoj od stranica, onda odnos, u našem slučaju odnos stranica *a* i *b*, tako dobijenih romboida mora biti jednak odnosu njihovih površina *nezavisno od toga* u kojim tačkama prava *p* seče stranice romboida. To tako mora biti, reći ćemo, jer $a:b=ah:bh$ (gde je *h* visina). Ali, za grčke matematičare je posle otkrića nesamerljivosti nastao pravi problem oko formulacije ove teoreme u opštem slučaju, što se vidi na jednom mestu u Aristotelovoj *Topici (Aristotle 23,* 158 b 24–35). Teškoća je u tome što *a* i *b* mogu biti *nesamerljive* veličine, to jest ne biti ni u kakvom odredivom konačnom odnosu. Pitagorejski λόγος (odnos) postao je u nekim slučajevima ἄλογος.



Jedan od načina da se reši problem nesamerljivosti između *a* i *b* svakako jeste uvođenje *beskonačno male zajedničke mere* za *a* i *b*, ili, što je tome analogno, *beskonačno velike zajedničke mere: a* i *b* bi ipak postali samerljivi, ali u *beskonačnosti.* No, kao što smo videli, infinitizam nije bio u skladu s grčkim načinom mišljenja, pa zato nije došlo do uvođenja, ili barem nije došlo do prihvatanja, *navedenog proširenja pojma* samerljivosti; *a* i *b* su ostali *nesamerljivi.*

Ali, Grci su osećali da teoreme poput malopređašnje moraju ipak imati opšte važenje; problem je samo bio u tome, kako kaže Aristotel, da se nađe zgodna definicija (ὁρισμός) (*ibid.*, 158 b 25, 158 b 35) kojom bi se mogao precizirati smisao tvrdnje da linija paralelna stranici paralelograma „slično deli" (ὁμοίως διαιρεῖ) (*ibid.*, 158 b 32) i liniju i celu oblast, to jest površinu.

Ingeniozno rešenje koje navodi Aristotel, a koje verovatno potiče ili od Hipokrata sa Hiosa ili od nekog matematičara iz njegove generacije (vidi *von Fritz*, str. 408, nap. 84), čisto je *gemetrijsko, finitističko po metodu* i *indefinitističko u pretpostavkama o prirodi kontinuiranih veličina.* Ako a i b nisu u direktno odredivom odnosu koji bi bio izraziv (ῥητός), oni ipak mogu stajati u istom odnosu (τοῦ αὐτοῦ λόγου) (*Aristotle 23*, 158 b 35) kao neke druge veličine čiji je odnos takođe neodrediv ili neizraziv (ἄρητός). Dakle, izraz ἄλογος zamenjen je sa ἄρητός i tako su i nesamerljive veličine stupile u odnos. Ako je a nesamerljivo sa b, onda je $a{:}b$ neizrazivo; $a{:}b$ nije nikakav broj, čak ni *numerus surdus*, kako će to kasnije reći Leonardo iz Pize (vidi *Boyer*, str. 97), ali $a:b=ah:bh$ *može* biti izrazivo. Upravo ovu izrazivost omogućuje definicija istog odnosa, odnosno proporcije (ὁρισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου) (*Aristotle 23*, 158 b 32–35), za kojom se u datom slučaju tragalo: linije i oblasti (χωρία), o kojima je reč, u istom su odnosu (τοῦ αὐτοῦ λόγου) jer su podložne jednakom odgovarajućem umanjivanju (αὐτὴν ἀνταναίρεσις ἔχει) (*ibid., loc. cit.*). Ako se, otprilike kao na malopređašnjoj slici, a u b sadrži samo jedanput, uz neki ostatak c, onda se i romboid čije su stranice a i d sadrži upravo jednaput u romboidu čije su stranice b i d, uz ostatak, koji čini romboid sa stranicama c i d. No, ako se dalje, c sadrži u AB, ili AB-c, n puta, onda se i romboid sa stranicama c i d sadrži u romboidu sa stranicama $a+b$ i d, ili $a+b-c$ i d, upravo n puta. I tako dalje *in indefinitum.* Mada produženjem postupka *nikad nećemo* doći u situaciju da ostatak

iščezne – beskonačnost postupka je samo *potencijalna* – *uvek* će, koliko god daleko išli, *ostatak linije* biti sadržan u AB isto onoliko puta koliko i ostatak *romboida* u romboidu sa stranicama $a+b$ i d.

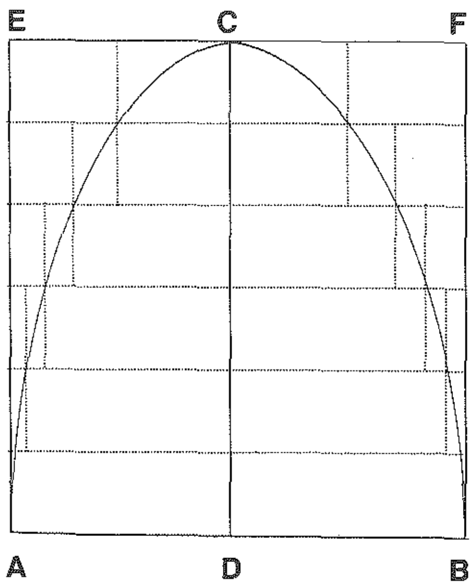
Logično proširenje navedene definicije dao je Eudoks i ona je kao takva ušla u Euklidove *Elemente* (vidi *Euclid*, knj. 5, stav 5, str. 84). Ovom definicijom je na *geometrijski* način izražena istina koju mi lako izražavamo aritmetički: ako u proporciji $a:b=c:d$ bilo oba brojioca bilo oba imenioca pomnožimo istim brojem, jednakost će biti očuvana. To očuvanje jednakosti je dovoljno da se tvrdi da su a i b u istom odnosu (τοῦ αὐτοῦ λόγου) kao i c i d, makar a i b i/ili c i d bili međusobno *nesamerljive veličine*, odnosno, *mi* bismo rekli, makar a/b i/ili c/d bili *iracionalni* brojevi.

Prema Eudoksovoj definiciji *može* se reći da su dva kruga u istom odnosu kao dva kvadrata, *iako* su površine kruga i kvadrata nesamerljie. Isto tako se može reći da su *neki krug* i *neki kdvadrat* u *istom odnosu kao* neki *drugi krug* i neki *drugi kvadrat, iako* je i prvi odnos kao i drugi odnos odnos nesamerljivosti.

Eudoksova definicija predstavlja osnovu metoda za izračunavanje površina kurvilinearnih oblasti i zapremina oblih tela, metoda koji je poznat kao metod *ekshaustije* (iscrpljivanja). Sam naziv metoda može da zavede na krivi trag, jer je prvi put bio upotrebljen u sedamnaestom veku u drugačijem kontekstu od strane Grigorija od Sv. Vićenca (u njegovom *Opus geometricum* – vidi *Boyer*, str. 34, 136). Upisivanje poligona sa sve većim brojem stranica u krug, ili u neku drugu kurvilinearnu oblast, koje su primenjivali još Antifon i Brison (vidi *Aristotle 21*, 185 a 14 i dalje, *Aristotle 13*, 75 b 41 i dalje, *Simplicius 2*, 54. 20 i dalje), nikad, *ni na vrhuncu grčke matematike*, nije shvatano kao postupak kojim bi se *makar u načelu* mogla *doslovno iscrpsti* data kurvilinearna oblast. To nije smatrano nemogućim samo zato što je *postupak* bilo nemoguće sprovesti, što je naime beskonačnost nemoguće *savladati* korak po korak, nego beskonačnost *ni statički* nije prihvatana u kategorematskom smislu. Krug *nije* bio poligon sa beskonačnim brojem stranica, kao što nesamerljive veličine *nisu* bile veličine koje su samerljive beskonačno malom merom.

Grčki metod ekshaustije bi bilo adekvatnije zvati metodom *aproksimacije*, jer se razlika između dveju površina ili zapremina koje treba uporediti uvek samo činila *sve manjom*, to jest manjom od bilo koje unapred fiksirane razlike, da bi se indirektno, apagoški, *svođenjem na apsurd*, odredila površina date oblasti ili zapremina datog tela.

Pogledajmo jedan tipičan Arhimedov dokaz u kojem je primenjen takozvani metod ekshaustije i karakteristični dvostruki *reductio ad absurdum* (*Archimedes 1*, stav 19, str. 468–469).



Neka je dat paraboloidni isečak koji bi se mogao dobiti rotacijom odsečaka parabole ACB oko ose CD (vidi sliku). U kakvom su odnosu ovaj paraboloidni isečak i valjak tako opisan oko njega da s njim ima i zajedničku osnovu i zajedničku osu?

Presecimo paraboloid, pa time i valjak, dvema ravnima paralelnim osnovi valjka tako da njima osa bude podeljena na tri jednaka dela. Obrazujmo zatim pet valjaka, tri opisana oko paraboloida i dva upisana u njega, tako da visina svakog bude upravo po jedna trećina ose, a gde su donje osnove opisanih valjaka redom: donja osnova početnog, površina određena presekom prve ravni i paraboloida, te površina određena presekom druge ravni i paraboloida – i gde ove poslednje dve površine ujedno predstavljaju gornje osnove upisanih valjaka.

Lako je pokazati da se početni valjak odnosi prema telu koje čine tri valjka opisana oko paraboloida kao trostruka dužina cele ose prema šestostrukoj dužini visine svakog od upisanih valjaka, što bi današnjim matematičkim simbolizmom bilo izraženo kao: $3 \cdot 3h : (h + 2\,h + 3\,h)$ (gde je h visina o kojoj je reč), dok se isti početni valjak prema telu koje čine upisani valjci odnosi kao trostruka dužina cele ose prema trostrukoj dužini visine h, kao $3 \cdot 3\,h : (h + 2h)$.

Ako bi valjak bio podeljen na četiri jednaka dela ravnima paralenim osnovi, tako da osa iznosi $4h$ i potom slično kao malopre biti formirani opisani i upisani valjci, onda bi odnos valjka prema telu koje čine opisani valjci bio $4 \cdot 4h : (h + 2h + 3h + 4h)$, a prema telu koje čine upisani $4 \cdot 4h : (h + 2h + 3h)$.

U opštem slučaju, ako bi valjak bio podeljen na n delova, odnosi o kojima je reč bi bili – izraženo današnjim načinom pisanja – $n \cdot nh : (h + 2h + \ldots + nh)$, odnosno $n \cdot nh : (h + 2h + \ldots + (n-1)\,h)$.

Sada nastupa značajan trenutak u dokazu, koji nas zanima. Na *koliko god* delova podelili osu CD, odnosno *koliko god* valjaka upisali i opisali oko paraboloidnog isečka, *nećemo do kraja iscrpsti* oblasti razlike između prve upisane figure i paraboloidnog isečka, odnosno njega i prve upisane figure. Broj opisanih ili upisanih valjaka uvek je konačan, *ma koliko veliki bio*, pa i razlika uvek postoji, *ma koliko mala bila*. Arhimed *ne* upisuje i opisuje valjke s namerom da oblasti o kojima je reč iscrpi i time *poništi* razlike između valjaka i paraboloidnog isečka, već to *čini* da bi *pripremio* teren za karakteristični *dvostruki reductio ad absurdum* kojim će tačno odrediti traženi odnos između

početnog valjka i paraboloidnog isečka. Arhimed samo hoće da *indirektno uporedi* ono što *direktno ne može*. On *može* da upoređuje odnos početnog valjka i opisanih i upisanih valjaka, ma koliko ovih da je. Uvek je
$n\cdot nh:(h+\ldots+nh)<2:1$ i $n\cdot nh:(h+2h+\ldots+(n-1)h)>2:1$.

Upravo zato što se usvaja da se opisivanjem i upisivanjem *ne mogu iscrpsti* razlike između valjka i paraboloidnog isečka, može Arhimed da dokaže dvostrukim svođenjem na apsurd da početni valjak mora biti tačno dvostruko veći od paraboloidnog isečka. Kada bi, naime, taj odnos bio veći od 2:1, onda bi se dovoljno velikim *n* mogla poništiti razlika između upisanih valjaka i paraboloidnog isečka, a kada bi bio manji od 2:1, onda bi se opet nekim dovoljno velikim *n* mogla poništiti razlika između opisanih valjaka i paraboloidnog isečka. Odnos valjka i paraboloidnog isečka je tačno 2:1 zato što *ove razlike uvek postoje,* iako se mogu učiniti manjim od svake unapred fiksirane.

Finitizam Arhimedovog metoda zasniva se na pretpostavci da broj upisanih ili opisanih figura uvek mora biti *konačan* i da zato uvek mora postojati i *razlika* između oblasti figura dobijenih upisivanjem i opisivanjem i početne figure, gde se razlika uvek kao *ostatak* mora *dodati* da bi se početna oblast *iscrpla*, a aristotelijanske *indefinitističke* pretpostavke o prirodi kontinuiranih veličina ogledaju se u tome što broj figura koje se mogu upisati ili opisati *nije određen*.

Kriterijumi *strogosti dokazivanja* menjaju se vremenom. Nekom bi mogla da smeta indirektnost Arhimedovog dokazivanja, nekom odsustvo formalizma, nekom geometrizovanje ili pozivanje na intuiciju o prirodi kontinuuma (vidi, na primer, *Boyer*, str. 8–9, 36–38, 42–45, 47–48, 52–53, 179). Imajući u vidu prethodni razvoj grčke filozofije i matematike, od Zenonovih aporija i otkrića nesamerljivosti pa nadalje, jasno je zašto je glavna Arhimedova briga bila da se pojava beskonačnosti izbegne po svaku cenu.

79. Arhimedov aksiom i heuristička upotreba infinitezimala

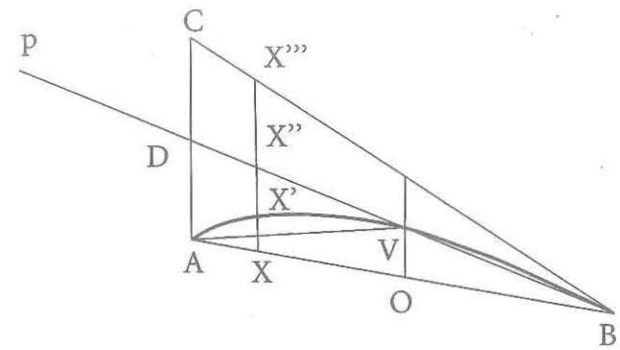
Hrišćanski se Bog razlikuje od grčkih bogova po mnogo čemu. On nije samo besmrtan i njegov se život ne može poput Zevsovog izraziti pojmom potencijalne beskonačnosti; on je večan. I njegova su mudrost, moć i dobrota beskrajni. U vezi s njim ima mnogo misterija, koje mogu izgledati i kao paradoksi. Bog je zato, kako kaže Lajbnic (u belešci za pismo de Bosu), „sama beskonačnost“ i to u *„hiperkategorematskom smislu“* (*Leibniz 2* i *27*, G, II, 314).[1] Nije čudo što su hrišćanski matematičari, natkriljeni jednim takvim bogom, postali mnogo prijemčiviji na pojam beskonačnosti uopšte i što su na kraju krajeva, kao Božju predilekciju u prirodi, priznali i beskonačno velike i beskonačno male veličine.

Kao što smo već pomenuli, razliku između beskonačnosti u sinkategorematskom smislu i prave, aktualne, prezentne beskonačnosti, beskonačnosti u kategorematskom smislu, uveo je eksplicitno, tim terminima, čovek koji će postati papa Jovan XXI, Petrus Hispanus u svojim *Sumulae logicales.* Grigorije od Riminija je požurio da ustvrdi da nema nikakve samoprotivrečnosti u pojmu aktualne beskonačnosti (vidi *Boyer*, str. 69). Kardinal Nikola Kuzanski, „božanski Kuzanski“, kako ga naziva Kepler, definisao je *beskonačno veliko* kao ono što ne može biti veće, ili što se ne može načiniti većim, a *beskonačno malo* kao ono što se ne može načiniti manjim, prihvatajući njihovu aktualnost, uprkos tome što im se konačne inteligencije mogu samo približavati (vidi *Cohn*, str. 87). Beskonačnost je tako postala *terminus ad quem*, a krug je mogao biti svrstan u poligone s beskonačno mnogo stranica. Za Keplera, odnos kruga i kvadrata odgovara odnosu Boga i čoveka, ili Boga i njegovog dela (vidi *Boyer*, str. 107). Onome što je pojmovno nedokučivo (pomoću „raciocinacije“) priroda nas uči istinktom u geometriji (*ibid.*, *loc. cit.*). I Paskal je kasnije svoj način upotrebe infinitezimala, koji je, kako se kritičarima činilo, bio opterećen paradoksima, opravdavao pozivanjem na „*l'ésprit de funesse*", ono što je, kao i „logika srca", iznad običnog mišljenja, kao Delo milosti iznad razuma (vidi „De l'ésprit geometrique" u *Pascal*, str. 269 i dalje).

No, iako su hrišćanski matematičari, naviknuti na misterije i nedokučivosti, sa hrišćanskim nebom nad sobom umesto Olimpa, postali *prijemčiviji* na pojam beskonačnosti, bliže objašnjenje nastanka infinitezimalnog metoda treba tražiti u samoj matematičkoj *praksi*. Pojmovi se uvode – ako ovo što ću reći ne zvuči suviše bogohulno – ne zato što smo na njih prijemčivi, već zato što su nam potrebni. Odbojnost ili prijemčivost pre objašnjavaju oklevanje ili hitrinu s kojom smo ih uveli. Toričeli, koji je sam mnoge dokaze izvodio uz pomoć „nedeljivih (veličina)", ali koje su shvatane kao infinitezimale, bio je uveren, imajući u vidu metod koji je koristio „Arhimed sedamnaestog veka", Luka Valerio, da su i Grci morali koristiti „metod nedeljivih", odnosno infinitezimalni metod, za otkriće teških teorema, samo da su dokaze davali u drukčijoj formi da bi „sačuvali tajnu svog metoda ili oduzeli šansu zavidiljivima da ih omalovaže iznalaženjem protivrečnosti" (navedeno prema *Boyer*, str. 124). Karakteristično je da se Toričelijevo uverenje osniva na uviđanju *plodnosti metoda* s obzirom na *otkrivanje* novih teorema, nezavisno od strogosti, ili čak *uprkos nestrogosti takvih matematičkih dokaza.*[2]

Koliko bi Toričeli mogao biti u pravu u pogledu tvrdnje da su Grci morali koristiti infinitezimalni metod, može se proceniti na primeru tek 1905. godine otkrivenog Arhimedovog spisa upućenog Eratostenu (vidi *Archimedes 1*, stav 1, str. 571, *Heiberg und Zeuthen*, str. 325).[3] Tu je na delu izvesni *heuristički* metod koji se razlikuje od karakterističnog Arhimedovog apagoškog dokaza (up. § 78). Mada u ovom heurističkom dokazu nema pomena infinitezimala, moglo bi se činiti da je ovaj pojam u njemu

prećutno sadržan, bar utoliko što dokaz *ne možemo razumeti ako* nemamo u vidu nekakav pojam infinitezimala.



Arhimed dokazuje, ili, bolje reći, *otkriva*, služeći se poznatim zakonom poluge, da isečak parabole (na slici je to AVB) stoji u odnosu 4:3 s trouglom s kojim ima zajedničku osnovicu, a čije je treće teme verteks paraboličnog isečka (to je na slici trougao AVB), gde je verteks tačka na paraboli najudaljenija od osnovice.

Ako je BC tangenta parabole u B, AO = OB, BD = DP, AC||OV i XX'''||OV, gde je X proizvoljno izabrana tačka na duži AB, onda je, s obzirom na poznata svojstva parabole, XX''' : XX' = AB : AX = BD : DX'' = DP : DX''.

S obzirom da je XX''=X''X''', to bi, po zakonu poluge s osloncem u D, XX''' bilo u ravnoteži sa XX' kada bi se XX' prebacilo u tačku P i to tako da mu P bude središte. No kako je tačka X *proizvoljno izabrana*, zaključak ne zavisi od položaja XX''' u trouglu ABC, i – to je ono što je u čitavom dokazu najvažnije – važiće za *sve* linije XX''', odnosno XX' trougla ABC, odnosno paraboličnog isečka AVB. Arhimed, naime, zaključuje da će čitav trougao ABC biti u ravnoteži s paraboličnim isečkom AVB ako se ovaj postavi u P tako da mu je težište u P a trougao ABC se osloni težištem, u položaju u kojem se nalazi, na krak poluge DB. Ako pretpostavimo kao poznato da je težište trougla udaljeno (1/3) DB od D, to će, po zakonu poluge, parabolični isečak AVB znositi 1/3 trougla ABC, jer je težište na kraku DB udaljeno od D 1/3 rastojanja DP, kad su trougao ABC i parabolični isečak AVB u ravnoteži. Odatle je lako zaključiti da parabolični isečak AVB iznosi 4/3 trougla AVB.

Da bi došao do željenog zaključka, Arhimed je morao da tretira trougao ABC kao *sastavljen od* linija XX''', gde je X proizvoljno izabrana tačka na AB, a parabolični isečak AVB kao *sastavljen od* linija XX' ,jer je samo tako mogao preći od zaključka o ravnoteži XX''' i XX' na zaključak o ravnoteži *trougla* ABC i *paraboličnog isečka* AVB.

Ali, kako je Arhimed smeo da tretira *površine* kao *sastavljene od linija*? Toričeli bi, možda, sa zadovoljstvom primetio da, s jedne strane, te linije za Arhimeda ne mogu biti obične geometrijske linije bez ikakve debljine – jer je Arhimed usvojio Zenonov, od Aristotela i cele grčke matematike preuzet, aksiom da iz linija koje se pružaju samo u jednom pravcu ne mogu nastati površine, baš kao što se linija ne može sastaviti iz tačaka – dok, s druge strane, Arhimed nije bio ni Epikurejac – kao što cela razvijena grčka matematika nije bila epikurejska – eda bi površine, kao i linije iz kojih one treba da se sastoje, smatrao sastavljenim od minimalnih, no konačno puta manjih jedinica – *topona*. Dakle, rekao bi možda Toričeli, Arhimed je bar u ovakvim *heurističkim* dokazima morao pretpostavljati da se *površine sastoje iz beskonačno mnogo beskonačno tankih linija*.

Ovakav zaključak je, međutim, ne samo previše smeo, već verovatno postoji dobar razlog da ga nikako ne izvedemo. Koliko god je tačno da je Arhimed *prihvatao* pomenuti Zenonov aksiom i da *nije prihvatao* Epikurov geometrijski atomizam, tačno je i da je *prihvatao aksiom*, koji, uostalom, nosi upravo njegovo ime iako je verovatno ranijeg porekla (vidi *Hahn* 3, str. 102, nap. 18), *da se svake dve veličine mogu upoređivati utoliko što se izvesnim konačnim umnoškom manje veća može dosegnuti ili prevazići.*

Ali, i ako Arhimed nije koristio pojam infinitezimala, ima nečeg neospornog u Toričelijevoj sumnji. Izgleda, naime, da – pošto

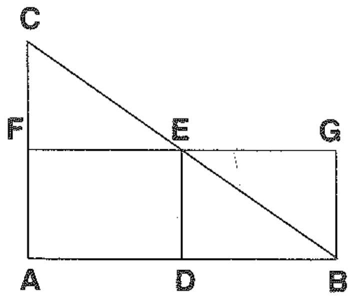
se prelaz od ravnoteže XX''' i XX', za proizvoljno izabrano X, na ravnotežu trougla ABC i paraboličnog isečka AVB, može *opravdati* jedino ako se ABC, odnosno AVB tretiraju kao *sastavljeni od* XX''', odnosno XX', to *ili* moramo negirati Zenonov aksiom, *ili* prihatiti Epikurov atomizam, *ili* uvesti infinitezimale – *ako* hoćemo da čitav postupak tretiramo kao *dokaz.*

Arhimed, međutim, opisani postupak uopšte *nije tretirao* kao *dokaz*, pošto on nije bio u skladu sa Euklidovim rigorima. On *dokaz* teoreme daje *čisto geometrijski*, karakterističnim *svođenjem na apsurd.* Posle stava 1, gde je utvrdio koliki je odnos između trougla i paraboličnog isečka o kojem je reč, on naglašava da „onim što je rečeno to nije dokazano, već da samo ukazuje da je zaključak ispravan". Za geometrijski dokaz, potom, kaže da ga je već objavio (*Arhimedes 1*, str. 572, *Heiberg und Zeuthen*, str. 326). Ako je Arhimed ovde zakon poluge koristio *samo* u heurističke svrhe, a *ne* u svrhe dokazivanja, on nije bio obavezan da da *opravdanje* za prelaz od ravnoteže XX''' i XX' na ravnotežu trougla ABC i isečka AVB, i *utoliko* ga nije morala mučiti nikakva trilema poput gornje.

80. Infinitezimale kao sastavni deo dokaznog postupka

Celo prethodno razmatranje može da razjasni *prvobitnu motivaciju* za uvođenje infinitezimala. Izražavajući se pomalo paradoksalno, možemo reći da je infinitezimalni *metod* nastao *pre* uvođenja samih infinitezimala. Infinitezimale su uvedene da bi se dala *legitimnost* zaključivanju poput onoga koje je koristio Arhimed u razmotrenom slučaju. Time je *heuristički metod* mogao postati *metod dokazivanja.* Uz hrišćansku prijemčivost na pojam beskonačnosti taj korak nije bilo teško načiniti.

U četrnaestom veku, Orezmo je geometrijski *dokazivao* jednu kinematičku tvrdnju, služeći se dijagramom koji se u jedva izmenjenom obliku nalazi kasnije kod Galileja (up. *Wieleitner 1*, str. 109–210 i *Galilei*, str. 208). Ako je ubrzanje nekog tela jednoobrazno (*velocitatio uniformis*), onda je rastojanje koje telo pređe od trenutka kada se pokrene pa do izvesnog kasnijeg trenutka jednako rastojanju koje bi prešlo neko drugo telo koje bi se u istom vremenu kretalo ravnomernom brzinom (*velocitas uniformis*) dvostruko manjom od krajnje brzine kretanja prvog tela. Orezmo je to dokazivao pozivajući se na podudarnosti trouglova CFE i BGE (vidi sliku).

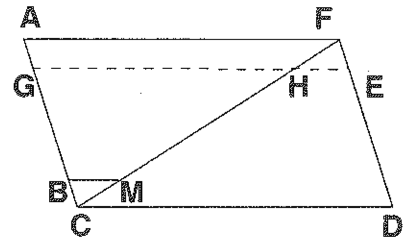


Širinu (*latitudo*) možemo shvatiti kao današnju ordinatu, a dužinu (*longitudo*) kao apscisu. Kod tela koje se kreće jednakom brzinom odnos vremena i puta koje prelazi, a koji je predstavljen širinom, ne menja se tokom vremena, zato je FGIIAB, dok se kod tela koje se kreće jednako ubrzano taj odnos menja, iznosi recimo DE na pola puta, a AC na kraju, ali pošto se odnos konstantno menja, BC je prava linija. Kod tela koje bi se kretalo nejednako ubrzano (čija bi brzina bila *velocitas difformiter difformis*) taj odnos bi se menjao i mogao bi biti različito predstavljen, već zavisno od toga kako se menja; mogao bi, recimo, biti predstavljen parabolom.

Ali, kako se željeni zaključak može izvesti iz podudarnosti trouglova CFE i BGE? Potrebno je i dovoljno pretpostaviti da je ukupan put koji tela prelaze predstavljen površinama ABGF, odnosno ABC, koje bi predstavljale zbir puteva, odnosno širina (*latitudines*), koji su pređeni u svakom trenutku, gde je trenutak predstavljen tačkom na liniji AB. No tu bi sad Aristotel tvrdio da brzine u trenutku nema, pošto u trenutku nema ni kretanja. Ni kod Orezma, slično kao ni kod

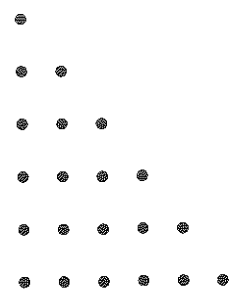
Arhimeda, nema odgovora na pitanje o tome šta *opravdava* zaključivanje na osnovu podudarnosti površina, ali način da se problem reši *jeste* da se analogno geometrijskim uvedu vremenske ili kinematičke infinitezimale, i to je ono što eksplicitno nalazimo kod Galileja (vidi, na primer, „Uvod u dve nove nauke“ u *Galilei*, str. 76 i dalje). *Momentum* je naziv za infinitezimalni vremenski priraštaj, a *conatus* za infinitezimalni priraštaj kretanja.[1]

Pogledajmo nekoliko primera gde autori *eksplicitno* koriste infinititezimale, a infinitezimalni metod kao metod *dokazivanja*.



Kavaljeri je dokazivao (u spisu *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* – vidi *Boyer*, str. 118) da je paralelogram (romboid) ACDF (vidi sliku) dijagonalom CF podeljen na dva trougla čija je površina jednaka polovini palalelograma tako što je iz podudarnosti trouglova CMB i FHE (CM=FH, BMIIHE) zaključio da je BM=HE, a zatim je, posmatrajući tačke M i H kao korelativno ali proizvoljno izabrane, zaključio da je zbir linija koje skupa čine trougao ACF, odnoso DCF, jednak. Rezultat izražava teoremu koja bi se Lajbnicovom notacijom napisala ovako: $\int_a^0 x\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$. O sumi linija može se govoriti, po Kavaljeriju, ako se one smatraju *nedeljivim infinitezimalnim elementima*, elementima čija je veličina tako mala da ih mora biti beskonačno mnogo da bi činili površinu, ali koji imaju ipak neku veličinu koja se razlikuje od nule (vidi *ibid.*, str. 118). Kavaljeri je teoremu lajbnicovski predstavljenu sa $\int_a^0 x\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$ donekle generalisao dobivši da je $\int_a^0 x^2\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$; $\int_a^0 x^3\mathrm{d}x = \frac{a^4}{4}$ i $\int_a^0 x^4\mathrm{d}x = \frac{a^5}{5}$.

Roberval je (*ibid.*, str. 143) istu teoremu dokazivao slažući elemente – koje će tretirati kao infinitezimale – onako kako su Pitagorejci slagali oblutke (up. *Simplicius 2*, 455. 20 i *Kirk and Raven*, str. 245).

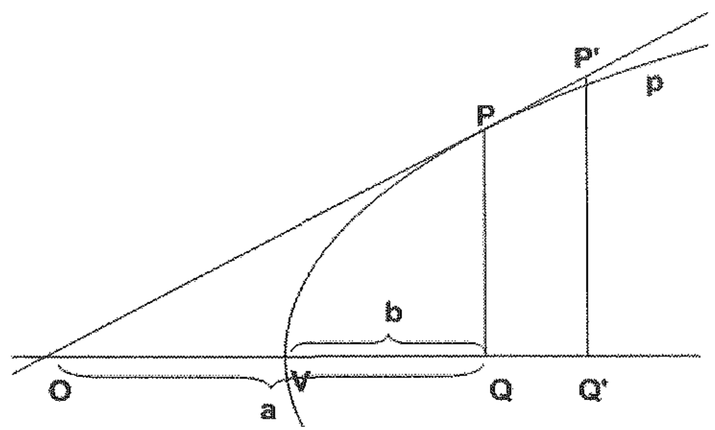


Posmatrano odozgo na dole, trougao čija stranica ima 4 elementa sadrži ukupno 10 elemenata, a $10 = \frac{1}{2}(4)^2 + \frac{1}{2}(4)$, trougao čija stranica ima 5 ovakvih elemenata ima ukupno 15 takvih elemenata, a $15 = \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(5)$, trougao čija stranica ima 6 elemenata ima ih ukupno 21, a $21 = \frac{1}{2}(6)^2 + \frac{1}{2}(6)$.

Otkrivši tako *zakon* kojim će se broj elemenata naći, Roberval konstatuje da se drugi sabirak smanjuje s povećanjem broja elemenata koji čine stranicu i to tako da on „ne ulazi u razmatranje" ako je broj elemenata beskonačan. Tako je, lajbnicovski napisano, $\int_a^0 x dx = \frac{a^2}{2}$.

Dve su stvari značajne u Robervalovom dokazu. Prvo, drugi sabirak se smanjuje i *može se zanemarivati*, i drugo, on se može zanemariti *ako* je broj elemenata *beskonačan*. Drugim rečima, drugi sabirak se sme zanemariti, ali *ne* posmatran *po sebi, već* jedino *u odnosu na beskonačno mnogo elemenata*. Konačan broj elemenata smemo zanemarivati samo ako ih posmatramo kao *infinitezimale*, jer kao što je Kavaljeri pretpostavljao, da bi infinitezimale dale ikakvu konačnu veličinu, njih mora biti beskonačno.[2]

Ispitajmo sad detaljno jedan poznati primer u kojem se jasno vidi kako su infinitezimale prestale da budu „luksuz" koji daje legitimnost proceduri koja pretenduje na to da bude dokaz, postajući neophodni element samog dokaznog postupka. Ferma je koristio infinitezimale kao „iščezavajuće veličine" za tačno određivanje položaja tangente parabole u bilo kojoj njenoj tački (vidi „Methodus ad disquirendam maximam et minimam" u *Fermat*, str. 134–136), što je u algoritamskoj proceduri Njutna i Lajbnica zadatak inverzan zadatku izračunavanja površina; diferenciranje je operacija inverzna integriranju kao što je oduzimanje operacija inverzna sabiranju.



Neka je data parabola *p* (vidi sliku), neka je V njeno teme, a P proizvoljno izabrana tačka u kojoj treba konstruisati tengentu. Ferma *dokazuje* da treba samo spustiti normalu PQ i zatim odrediti tačku O tako da je OV = VQ, pa će prava određena tačkama O i P biti tangenta parabole u P. Ako OQ označimo sa *a*, a VQ sa *b*, onda *a* = 2*b*. Ta formula je univerzalni ključ za konstrukciju tangente parabole u bilo kojoj tački.

Ferma *dokazuje* da mora biti $a = 2b$ tako što prvo, na osnovu „specifičnog svojstva" parabole formira nejednakost $b/(b+E) > a^2/(a+E)^2$, gde je $E = QQ'$ a Q' bilo koja tačka na osi parabole. Parabola, naime, po *zakonu* kojim je definisana, u delu PP' skreće *brže* nego što je potrebno da bi bilo $b/(b+E) = a^2/(a+E)^2$. Ali, i tu počinje zanimljiv deo dokaza, ako pustimo da se tačka Q' približuje tački Q, to jest da E „iščezava", nejednakost $b/(b+E) > a^2/(a+E)^2$ se sve više bliži jednakosti; tačka P' se može pratički posmatrati kao da je i na paraboli i na tangenti. Nejednakost, kaže Ferma, postaje *adaequalitas* (*Fermat*, str. 135), to jest *pseudojednakost*, odnosno nejednakost koja je *skoro jednakost*, nejednakost koja „treba da" postane jednakost. Lajbnic će kasnije definisati tangentu kao „liniju koja povezuje tačke na krivoj koje su (jedna drugoj) beskonačno blizu" (*Leibniz 24*, V, str. 220) i isto će, kao i Ferma, osim „jednakosti u strogom smislu", govoriti o „jednakosti koja spada u vrstu nejednakosti" (*Leibniz 3*, str. 546) kao što se „beskonačno malo kretanje može izjednačiti s mirovanjem" (*Leibniz 29*, str. 447). Imajući u vidu da u savremenoj nestandardnoj analizi (vidi dole, § 86) $a \simeq b$ znači da su a i b beskonačno blizu, a da je to tako upravo u slučajevima koje je Lajbnic nazivao „jednakošću koja spada u vrstu nejednakosti", možemo i za Fermaov *adaequalitas* upotrebiti znak „$\simeq$", i tako će u slučaju o kojem govori Ferma biti $b/(b+E) \simeq a^2/(a+E)^2$.

Ako imenilac desne strane ovog *adaequalitas* razvijemo po binomnoj formuli, dobićemo $b/(b+E) \simeq a^2/(a^2+2aE+E^2)$, a odatle, dozvoljavajući množenje unutrašnjih, odnosno spoljašnjih članova proporcije, i uobičajene radnje potiranja i skraćivanja kao da se radi o jednakosti u strogom smislu: $a^2E \simeq 2abE$, odnosno $a^2 \simeq b(2a+E)$.

Sad dolazi poslednji zanimljiv korak u dokazu. Ferma dopušta da E *potpuno iščezne*, da se tačke Q i Q', odnosno P i P', *doslovno poklope*, i dobija od *adaequalitas* jednakost $a = 2b$ (Q.E.D.).

Možda nigde nije tako lako, kao u ovom jednostavnom Fermaovom dokazu, sagledati – kako svu *efikasnost* metoda koji se koristi infinitezimalama, tako i njegovu *dubioznost*. Ceo dokaz, inače, liči na jedan Njutnov dokaz kvadrature (up. *Newton 5*, str. 334, 339 i dalje), koji je Barkli ubedljivo kritikovao (*Berkeley 4*, str. 42 i dalje), ali je Fermaov dokaz u izvesnom smislu čistiji, jer se otvoreno koristi pojmom *adaequalitas*.

U Fermaovom dokazu se vidi *nezaobilaznost* infinitezimala kao *iščezavajućih veličina*. Tajna celog dokaza je u veličini E. E postaje, kako bi rekao Barkli (*ibid.*, str. 44), „duh iščezlog („preminulog" – *departed*) kvantiteta". *E je neophodno prisutno* sve do poslednjeg časa, a tada je *neophodno da iščezne*. Ako ga od početka pa do samog kraja dokaza ne bi bilo, ne bismo mogli da formiramo početnu nejednakost, niti bismo mogli da dobijemo $a^2 > b(2a+E)$, odnosno $a^2 \simeq b(2a+E)$. Ako pak E na kraju ne iščezne potpuno, nećemo dobiti jednakost $a^2 = 2ab$, odnosno $a = 2b$.

Trenutno se nećemo baviti raznovrsnim *odbranama* ili *napadima* na ovakve tajanstvene ali plemenite duhove, koji su u *jednom istom dokazu* i prisutni i odsutni, prema potrebi. Zasad samo razmatramo funkcionisanje *metoda*, i u tom kontekstu je dovoljno sagledati nezaobilaznu ulogu veličina s Janusovim likom, veličina koje su *kao* veličine veće od nule i koje *kao takve* služe u kalkulaciji, ali koje su opet i takve da se, iz ovog ili onog razloga, u izvesnim slučajevima, ili pod određenim uslovima, *smeju zanemariti*. Dvostruko funkcionisanje E – njegovo prisustvo i njegovo iščezavanje – *neophodan* je deo procedure.

Što se tiče samog infinitezimalnog *metoda* posmatranog kao *modus operandi*, zasluga Njutna i Lajbnica je u tome što su jasno uvideli *inverznost* operacija koje i danas lajbnicovski zovemo „diferenciranje" i „integriranje" – što u kinematičkoj interpretaciji znači određivanje trenutne brzine promene i ukupne količine promene, a u geometrijskoj, pre svega određivanje položaja tangente krive i površine njom određene kurvilinearne oblasti – i što su onda stvorili *algoritam* kojim se ove operacije u opštem slučaju mogu izvoditi.

Mnogo otkrića do kojih se s mukom došlo deluju kasnije krajnje jednostavno. Po Lajbnicovom vlastitom priznanju (*Boyer*, str. 203) glavnu ulogu u stvaranju njegovog diferencijalnog računa odigrao je Paskalov trougao (vidi „Potestatum numericarum summa" u *Pascal 1*, III, str. 346 i dalje). Baveći se „karakterističnim trouglom", trouglom koji će kasnije biti poznat kao diferencijalni trougao, preko kojeg se određuje koeficijent pravca tangente, Lajbnic je mogao uočiti sličnost između Paskalovog aritmetičkog trougla

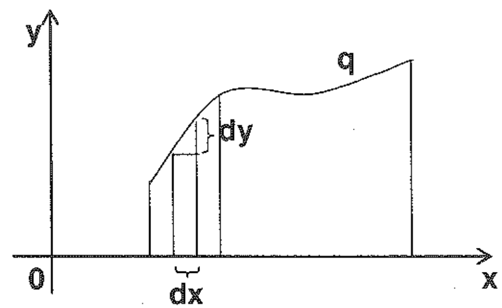
1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...	
1	3	6	10	...		
1	4	10	...			
1	5	...				
1	...					

i takozvanog harmonijskog trougla

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
1/2	1/6	1/12	1/20	1/30	...	
1/3	1/12	1/30	1/60	...		
1/4	1/20	1/60	...			
1/5	1/30	...				
1/6	...					

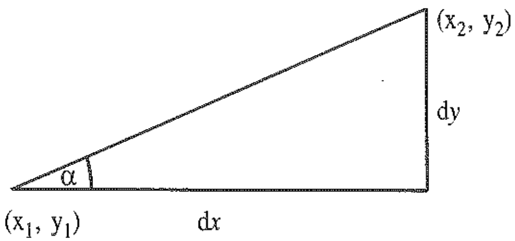
U Paskalovom trouglu, ako izuzmemo prvu, u svakoj horizontalnoj (ili kosoj) liniji s leve na desno redom su dati brojevi koji čine *zbir* brojeva u prvoj višoj (ii prvoj levoj kosoj) liniji do date tačke. Inverzno tome, svaki broj u svakoj liniji, ako se posmatra s obzirom na prvu nižu (ili prvu desnu), daje ujedno *razliku* brojeva između kojih se nalazi. Dakle, svaki broj predstavlja i *zbir* i *razliku* (izuzev brojeva u prvom redu koji, naravno, predstavljaju samo razlike) i to tako da krećući se na desno i na dole dobijamo zbirove, zbirove zbirova, ... i tako redom, a krećući se na gore i na levo razlike, razlike razlika, ... i tako redom. U harmonijskom trouglu situacija je *tačno* obrnuta u pogledu smera kretanja, i *utoliko slična*. Ali, dok je u aritmetičkom trouglu najmanja razlika 1, a zbirovi zbirova su sve veći, u harmonijskom trouglu je najveći zbir 1, a razlike razlika su sve manje. U harmonijskom trouglu se jedan konačan zbir može tretirati kao zbir neodređeno mnogo sabiraka, gde razlika između njih postaje sve manja. Ne bi li u slučaju da je sabiraka beskonačno mnogo bilo onih među kojima bi razlika bila beskonačno mala?

Uvideviši inverznost ovakvih operacija, uvodeći u igru infinitezimale i držeći se pravila *datis ordinatis, etiam quaesita sunt ordinata* (vidi *Leibniz 4*, str. 351, *Leibniz 29*, str. 447), Lajbnic se našao takoreći licem u lice sa diferencijalnim i integralnim računom.



Ako je dat zakon neke krive, uzmimo krive q (vidi sliku), svakoj razlici dve vrednosti nezavisno promenljive x odgovara, shodno pravilu *datis ordinatis, etiam quaesita sunt ordinata*, određena razlika vrednosti zavisno promenljive y. Držeći se jedne Lajbnicove kasnije notacije,[3] označićemo bilo koju razliku vrednosti nezavisno promenljive x_1 i x_2 sa (d)x, a razliku zavisno promenljve y, y_1 i y_2 sa (d)y. Ako je razlika vrednosti nezavisno promenljive *beskonačno mala* – označićemo je sa dx – toj razlici odgovara izvesna beskonačno mala razlika, dy. dx ne mora biti jednako dy, kao što (d)x ne mora biti jednako (d)y. Lajbnic je jasno uvideo da *operativnost* infinitezimalnog metoda zahteva da infinitezimale imaju *ista svojstva* kao i konačne veličine *s obzirom na međusobno upoređivanje*, to jest da moraju moći biti veće, manje ili jednake među sobom, čime je, kao što ćemo kasnije videti, ujedno učinjen odlučujući korak u pročišćavanju samog pojma infinitezimala, koji je često, kao kod Kavaljerija, bio nejasno povezivan s nedeljivošću.

Ako tangenta „povezuje tačke na krivoj koje su (jedna drugoj) beskonačno blizu" (*Leibniz 24*) – označimo ih sa (x_1, y_1) i (x_2, y_2) – onda dy/dx daje tangens ugla u beskonačno malom „karakterističnom trouglu", tg α = dy/dx (vidi sliku), koji predstavlja



koeficijent pravca te tangente. Tangenta *ne* dodiruje krivu u nekoj aristotelovskoj, odnosno euklidovskoj tački, *nego* u *monadi* koju je Lajbnic jedno vreme zvao „tačkom s veličinom".[4] Tangenta i kriva imaju jedan beskonačno mali zajednički deo. Tako ujedno kriva postaje poligon s beskonačno mnogo stranica.

Pošto je x nezavisno promenljiva, možemo uzeti da je dx uvek isto, dy, međutim, zavisi od zakona kojim su uređene vrednosti zavisno promenljive u zavisnosti od vrednosti nezavisno promenljve (*datis ordinatis, etiam quaesita sunt ordinata*). To znači da za određivanje koeficijenta pravca tangente odlučujuću ulogu igra određivanje dy.

Kod stalnog dx, y_1dx predstavlja površinu beskonačno tankog pravougaonika, odnosno pravougaonika čija je jedna stranica y_1 promenljive y, a druga stranica je beskonačno mala razlika dx. Ako saberemo *beskonačno mnogo* ovih *beskonačno tankih pravougaonika* u nekom intervalu $[a, b]$, $a = x_1$, $b = x_n$, dobićemo površinu koja se od površine pod krivom $y = f(x)$ u intervalu $[a, b]$ razlikuje za zbir beskonačno malih trouglova, trouglova čije su stranice dx i dy, gde se dy po zakonu $f(x)$ menja u zavisnosti od vrednosti koje x uzima. Ali, površine trouglova dxdy/2 „neuporedivo su manje", ili *beskonačno male* u poređenju sa površinama pravougaonika, naime, kaže Lajbnic,[5] dxdy je beskonačno malo u poređenju sa ydx, tako da je dobijena površina u stvari površina pod krivom u intervalu $[a, b]$, što je simbolički označeno sa $\int_a^b y\mathrm{d}x$. $\int$, dakle, označava sumu ili integral, ydx (ili $f(x)$dx) označava površine pravougaonika sa stranicama y i dx, $\int y$dx znači da se radi o sumi pravougaonika za sve vrednosti y koje se menjaju kako se vrednosti x menjaju za dx, a $\int_a^b$ označava interval u kojem se sumacija vrši, što znači da se radi o *određenom* integralu.

Ako je dato $\int_a^b y\mathrm{d}x$ i $y = f(x)$, može se odrediti dy za svako $x_n - x_{n-1} = \mathrm{d}x$ i time dobiti koeficijent pravca – tg α = dy/dx – tangente koja spaja tačke x_n i x_{n-1} koje su *beskonačno blizu*. To je *diferenciranje* funkcije.

Obrnuto, ako je dat zakon kojim se izračunava koeficijent pravca tangente neke krive u svakoj tački, ili, bolje rečeno, koeficijent pravca za svake dve tačke koje su „beskonačno blizu" na nekoj krivoj, moguće je, na osnovu toga, izračunati površinu te krive u *bilo kojem* intervalu, to jest odrediti $\int f(x)$dx. To je *integri-*

ranje, a integral je *neodređen* sve dok se ne postave *granice*, to jest dok se ne odredi *interval* u kojem se vrednosti nezavisno promenljive kreću.

Sholastičari su (vidi gore, § 80, str. 376–7) razlikovali *velocitas uniformis*, *velocitatio uniformis* kao *velocitas uniformiter difformis* i *velocitatio difformis* kao *velocitas difformiter difformis*. Ravnomerno kretanje, *velocitas uniformis*, kod Lajbnica bi bilo predstavljeno pravom linijom, što znači da se dy/dx ne menja od trenutka do trenutka, ili od tačke do tačke. *Velocitatio difformis*, jednako ubrzano kretanje, moglo bi biti predstavljeno, recimo, parabolom kod koje se dy/dx zakonomerno menja od tačke do tačke. Kako bi bilo predstavljeno nejednako ubrzano kretanje, kretanje kod kojeg se brzina neravnomerno menja, kretanje čija je brzina *difformiter difformis*? To kretanje bi bilo predstavljeno krivom kod koje promena količnika dy/dx *nije određena jednim zakonom*, što znači da se moraju uvesti u igru i *razlike drugog reda*. Ako dx držimo stalnim, moramo diferencirati dy u tački u kojoj se *brzina promene menja*, čime ćemo dobiti ddy ili d^2y. Tako je Lajbnic prirodno uveo u igru razlike (diferencijale) višeg reda (vidi *Leibniz 24*, V, str. 325) – u opštem slučaju to su d^nx ili d^ny – što je bilo *u skladu* sa mogućnošću *poređenja infinitezimala*, koje *nisu* nedeljive (to je Lajbnic imao u vidu već 1671, govoreći o „tačkama s veličinom čiji su delovi bez *rastojanja (indistantes)*" – vidi *Leibniz 5*, str. 149; vidi takođe, *Leibniz 31*). Funkcija kojom je izražena promena odnosa dy/dx sama je *diferencijabilna*. To u načelu važi za svaku funkciju kojom je izražena promena količnika d^ny/d^mx, ili, ako dx držimo stalnim, d^ny/dx.

Nećemo se u ovom trenutku baviti Njutnovim *metodom fluksije*, koji je u osnovi isti kao Lajbnicov metod, jer su infinitezimale kod Njutna manje otvoreno uvedene, i često su, kao što ćemo videti, izbegavane ili prikrivene kao samo kinematičke. Jedino što ovde možemo primetiti to je – da je kod Njutna osnovna operacija izračunavanje ukupne promene na osnovu stepena promena (vidi *Newton 4*, str. 28), što odgovara Lajbnicovom integriranju, dok je kod Lajbnica osnovna operacija uvek bila tome inverzna operacija, naime diferenciranje (vidi *Petronijevics 2*). Zato je prirodno *neodređeni integral* zvati *Njutnovim integralom* pošto je integracija neodređena dok se ne postave granice u okviru kojih se promena posmatra, dok je *određeni integral*, iz sličnog razloga, prirodno zvati *Lajbnicovim integralom* (vidi *Boyer*, str. 206).

81. Geometrijske infinitezimale

Videli smo da je prvobitna motivacija za uvođenje infinitezimala mogla biti želja da se podari *status strogog dokaza* izvesnom metodu koji je u heurističke svrhe koristio još Arhimed. Videli smo, međutim, da se izvesne veličine, kao Fermaovo *E*, pojavlju-ju *u samoj proceduri* dokazivanja a da nemaju status običnih konačnih veličina već „iščezavajućih veličina" koje čas jesu čas nisu tu. Sličnu su ulogu igrale veličine „*a*" i „*e*" koje je koristio Njutnov učitelj Isak Barou (vidi *Barrow*, str. 119–120), ili „*0*" Džejmsa Gregorija, od koga je Njutn i preuzeo oznaku „*0*" za priraštaj funkcije, koji je prvobitno tretirao kao beskonačno mali.[1] Lajbnicovi dx i dy, bez kojih celog algoritma diferenciranja i integriranja ne bi bilo, eksplicitno su uvedeni kao *infinitezimale*.

Nisu, međutim, svi oni koji su upotrebljavali razne varijante infinitezimalnog metoda, pri tom se koristeći raznim vrstama infinitezimala, verovali i u njihovo realno postojanje. Kao što ćemo imati prilike da vidimo, nema značajnijeg i boljeg primera za to od samog Lajbnica u kasnijem periodu njegovog života. Njutn je, pak, maltene od samog početka nastojao da izbegne bar geometrijske infinitezimale.

Odbijanje da se infinitezimalama prizna status realnog postojanja rezultat je mnoštva teškoća koje nastaju kad im se takvo postojanje prizna, a verovatno su te teškoće najveće upravo u slučaju geometrijskih infinitezimala, jer se tu, pored svega, javlja i problem njihovog oblika.

Ako je tačno da je metod koji će biti nazvan inifinitezimalnim nastao pre uvođenja samih infinitezimala i da je uvođenje infinitezimala bilo diktirano pre svega samom matematičkom praksom, onda je, uz uvođenje infinitezimala s uverenjem u njihovo realno postojanje, trebalo pre svega očuvati efikasnost funkcionisanja samog metoda; infinitezimale su, naime, morale imati sva svojstva neophodna za tu efikasnost. S druge strane, trebalo je izbeći razne protivrečnosti koje mogu nastati ili se mogu otkriti upoređivanjem tih svojstava među sobom, kao i upoređivanjem sa svojstvima drugih veličina koje su ostajale u igri. Tako se pojam realnih infinitezimala od samog početka našao uklješten između dva niza zahteva – za efikasnošću i za neprotivrečnošću.

Što se tiče geometrijskih infinitezimala, glavna pitanja vezana za pretpostavku njihovog realnog postojanja tiču se njihove *deljivosti ili nedeljivosti*, njihovog *oblika* i *veličine*. Kod veličine se pitanje postavlja kako s obzirom na njihov međusobni odnos tako s obzirom na njihov odnos prema uobičajenim konačnim veličinama. U vezi s tim nastaje i problem *opravdanosti njihovog zanemarivanja* u nekim tačkama dokaza i problem *dosezivosti*, odnosno pitanje važenja Arhimedovog aksioma.

Neka je kriva određena funkcijom $y=f(x)$. Koeficijent pravca sečice određen je odnosom $(d)y/(d)x$, gde je $(d)x=x_n-x_{n-1}$, $(d)y=f(x_{n-1}+(d)x)-f(x_{n-1})$, a x_n-x_{n-1}, neko uobičajeno konačno rastojanje. Ako bismo hteli da odredimo koeficijent pravca tangente pomoću nekog sličnog odnosa, ne bi smelo da bude $(d)x=(d)y=0$, jer nam $(d)y/(d)x=0/0$ ne bi ništa donelo, ako bi išta značilo. No $(d)x$ i $(d)y$ ne bi smeli da budu ni neka uobičajena

konačna rastojanja, jer tada bismo umesto koeficijenta pravca tangente dobili ponovo koeficijent pravca sečice. Jedino što ostaje, kako izgleda, jeste da se odnos $(d)y/(d)x \neq 0/0$ *očuva tako* da $(d)x$ i $(d)y$ postanu rastojanja dx i dy tačaka koje su *dovoljno blizu* da prava *ne uspe da se odvoji od krive i postane sečica*, to jest da x_n i x_{n-1} kao i $f(x_n)$ i $f(x_{n-1})$ budu *beskonačno blizu*. Ali *oni sami* tada *ne smeju* biti uporedivi sa konačnim rastojanjima, mada *među sobom* treba da budu uporedivi. No time, takođe, kriva delom koji joj je zajednički sa tangentom postaje prava, jer za beskonačno mala rastojanja može postojati razlika u veličini koja ne implicira razliku u obliku; hipotenuza trougla čije su stranice dy i dx je veća od dy i dx i ako je *i* kriva *i* prava, ili *ni* kriva *ni* prava.

Ako *doslovno* shvatimo celu teoriju o krivom koje postaje pravo kod veličina koje su beskonačno male u tom smislu što se međusobno po veličini mogu upoređivati a da su neuporedive, to jest beskonačno male, u odnosu na neke druge veličine, pored ostalog u odnosu na uobičajene veličine – dobićemo teoriju *geometrijskih infinitezimala*.

Ima mnogo teškoća u jednom takvom „premošćivanju jaza" između pravog i krivog, za kojim su eksplicitno išili Stifel, Vjet, Kepler, Grigorije od Sv. Vinćenca (vidi *Boyer*, str. 93, 107), Isak Barou[2] i svi ostali koji su krug doslovno shvatali kao poligon sa beskonačno mnogo stranica. Lajbnic je te teškoće sve više uviđao i na kraju je, kao što ćemo imati prilike da vidimo, prestao da veruje u realno postojanje inifinitezimala i, prestavši da bude infinitista, postao indefinitista, shvatajući infinitezimalni metod kao metod aproksimacije.

Cela zamisao o geometrijskim infinitezimalama podleže neugodnoj imanentnoj kritici sa stanovišta samog metoda. Ako je diferencijalni trougao trougao čija je hipotenuza beskonačno mali deo krive, zašto ipak ne bi mogla postojati linija koja spaja krajeve hipotenuze a prolazi kroz unutrašnjost trougla? Zar to ne bi mogla biti kriva i zar time hipotenuza ne bi postala sečica? S druge strane, zar ne bi ta ista hipotenuza mogla biti tangenta neke krive koja se brže uspinje od date krive? Nije li Lajbnic govoreći o diferencijama višeg reda upravo to priznavao, dopuštajući da se u trenutku menja ne samo brzina već i ubrzanje, odnosno uspon krive? Ako je diferencijalni trougao uopšte trougao, a on, videli smo, treba da bude trougao, kako izbeći ovakva pitanja? Nije li ipak hipotenuza diferencijalnog trougla, iako kod funkcije tipa $y = ax + b$ prava, kriva u tolikim drugim slučajevima? Postavljajući ovakva pitanja, moramo se setiti pseudoaristotelovog spisa *O nedeljivim linijama* (vidi § 50), gde je autor sličnim pitanjima dovodio u teškoće zagovornike teorije o nedeljivim linijama.

Lajbnic je vremenom sve češće odnos konačnih i beskonačno malih veličina izražavao pomoću *neuporedivosti* (kao u pismu Varinjonu – *Leibniz 22*) – ali ne više neuporedivosti u smislu negacije Arhimedovog aksioma, već neuporedivosti koja se odnosi samo na dovoljno veliku *razliku u redu veličina*, a koja čini mogućim da se *pravo praktički izjednači sa krivim*, da se *praktički neuporedivo mala veličina zanemari* i tako dalje; greška se može uvek učiniti *manjom od svake koja se smatra relevantnom*, i u *okvirima aproksimacije* se mogu vršiti izjednačavanja i zanemarivanja o kojima je reč.

Ako se neuporedivost, međutim, uzme u smislu u kojem teorija geometrijskih infinitezimala to zahteva, a to znači *doslovno infinitistički*, onda se mora *negirati Arhimedov aksiom*. Neuporedivost konačnog i besknačnog indicirao je u četrnaestom veku Suiset, poznat kao Kalkulator (vidi *Boyer*, str. 69–70), tvrdeći da se „sofizmi vezani za beskonačnost mogu lako otkloniti ako se prizna da konačni delovi ne stoje ni u kakvom odnosu prema beskonačnoj celini".[3] Pred infinitistima uopšte, pa i pred zagovornicima realnog postojanja geometrijskih infinitezimala, stajao je zadatak da smisao ove neuporedivosti bliže odrede.

Galilej je radikalno tvrdio (*Galilei*, str. 82) da za „atribute 'veće', 'manje' i 'jednako' nema mesta ni u poređenju beskonačnih kvantiteta među sobom, ni u poređenju beskonačnih i konačnih kvantiteta".[4]

Ali, kao što smo videli, za primenu infinitezimalnog metoda je bilo *potrebno* da se infinitezimale *mogu* porediti. No ako bismo, imajući to za cilj, infinitizam zastupali u obliku u kojem je to u sedamnaestom veku, pre Lajbnica, činio Grigorije od Sv. Vinćenca u svom *Opus geometricum* (vidi *Boyer*, str. 135), koji je reč „ekshaustija" shvatio *doslovno*[5] i koji je do beskonačno malih upisanih paralelepipeda „dolazio" *postupnim umanjivanjem početnog*, javio bi se neugodan problem u vezi sa takozvanom Bernulijevom greškom, na koji je Bernuliju ukazao Lajbnic, kada je već odustao od infinitizma (*Leibniz 17*, str. 514).

Johan Bernuli je verovao, kao što smo videli (§ 55, str. 254), da postoji beskonačni redni broj (∞-ni). Ali kako stići do transfinitnog rednog broja, ako se svojstvo konačnosti brojanjem rekurzivno održava? Nije trenutno toliko važno pitanje o jedinstvenosti navodnog beskonačnog broja, koliko pitanje: koji je u *nizu paralelepipeda* Grigorija od Sv. Vinćenca, koji postaju sve manji, *prvi beskonačno mali*? Ako se do tog paralelepipeda može *postupno doći*, onda beskonačno male veličine i konačne veličine postaju međusobno uporedive. Ako takav prvi besknačno mali paralelepiped ne postoji, *kako* se onda kretanjem kroz niz paralepipeda *uopšte može naići* na beskonačno mali paralelepiped?

Eksplicitan i u formalnom smislu koherentan, mada ne i intuitivan, odgovor na ovo pitanje daće tek savremena nestandardna analiza, time što će *sasvim razdvojiti konačne prirodne brojeve* od *transfinitnih brojeva*: nizom konačnih brojeva *ne stiže se* do transfinitnih i *ne postoji* najmanji ili prvi transfinitni broj.

Tek uvođenjem *jaza* između konačnih i transfinitinih brojeva može se koherentno opravdati *zanemarivanje* beskonačno malih veličina za koje smo videli da predstavlja toliko značajan korak u infinitezimalnom metodu. Razlika dva tako uvedena transfinitna broja *može* biti manja od *svake* razlike dva konačna broja, *nezavisno* od toga što ne postoji ni najmanja konačna razlika. Ali tada – protivno prvobitnoj Lajbnicovoj ideji infinitizma à la Grigorije od Sv. Vinćenca – razlika među konačnim veličinama koje se smanjuju *nikad nije* beskonačno mala, makar članova bilo neograničeno mnogo. Ako nas vera u postojanje beskonačnih *skupova* ne obavezuje na prihvatanje beskonačnih rednih brojeva (§ 7), onda nas ni eventualno postojanje *razlika* koje se neograničeno smanjuju ne obavezuje na prihvatanje postojanja *beskonačno male razlike*. Štaviše, rekurzivno održavanje svojstva konačnosti zahteva da se postojanje beskonačnog rednog broja i beskonačno male razlike *unutar* ovakvih skupova *negira* i da se *transfinitni brojevi* i *infinitezimale* uvedu *nezavisno*.

Nemoćni da se nose s neugodnim pitanjima vezanim za deljivost, oblik, veličinu i upoređivanje geometrijskih infinitezimala kako među sobom tako i s konačnim veličinama, i posebno, što će naročito biti vidljivo kod Njutna (vidi dole, § 83), s problemom njihovog zanemarivanja u nekim ključnim tačkama dokaza, teoretičari su raznim načinima počeli da ih prikivaju ili da ih opravdavaju raznolikim strategijama koje ih ne bi obavezivale na prihvatanje njihovog realnog postojanja. Broj zagovornika realnog postojanja geometrijskih infinitezimala se smanjivao (vidi *Boyer*, gl. 6), a dvojica slavnih pobornika realnih infinitezimala i infinitizma uopšte, Kepler i Paskal, sledeći liniju „božanskog Kuzanskog", gledali su na beskonačno velike i beskonačno male veličine kao na božansku misteriju.

Razmatranje aritmetičkih infinitezimala poslužiće nam da jasno vidimo kako se matematika može razvijati kad se oslobodi vezanosti za određen model.

Ustanovili smo da su Zenonovi dokazi protiv mnoštva mogli, između ostalog, biti upravljeni i protiv pitagorejske ideje o korespondenciji brojeva i prostornih veličina, budući da su bili upereni protiv mogućnosti postojanja κυρίως ἕν. Otkriće nesamerljivosti, koje je, po svoj prilici (§ 29), kasnijeg datuma, uzdrmalo je uobičajenu proceduru višestruke aplikacije jedne prostorne veličine u cilju pronalaženja numeričkog odnosa između nje i neke druge veličine, površine ili zapremine. Zbog toga je, kao što smo videli, ceo period zrele grčke matematike protekao u razvijanju čisto geometrijskih metoda.

Razvoja aritmetike u tom periodu gotovo da nije bilo. Odnos dijagonale kvadrata i njegove stranice nije predstavljao više problem, jer se posmatrao čisto geometrijski. Dijagonala i stranica bile su jednostavno nesamerljive. Indirektno se njihov odnos mogao porediti sa nekim drugim odnosom, ali to nije značilo poređenje *dva broja*. Ako su dijagonala kvadrata i njegova stranica dve realne veličine, ne znači da se ono što mi označavamo sa $\sqrt{2}$ odnosi na neku realnu veličinu. $\sqrt{2}$ bi, ako se baš želi uvesti, moglo biti znak za jedan nesamerljivi odnos, odnos koji ne može biti oposredovan nikakvom *trećom* veličinom i kojem zato *ne odgovara* nikakav *broj*.

Slično ovome, nije bilo ni negativnih brojeva. „Pet konja" nešto znači, odnosi se na konje kojih je pet (up. *Aristotle 21*, 219 b 3–10, 220 a 21–26, 220 b 10–14, 220 b 20–23). Ali „(–5) konja" ne mora značiti ništa. Kojih je to konja (–5)? Kao što $\sqrt{4}$ jeste broj jer *operacija* korenovanja tu daje *broj* kao rezultat, dok to nije slučaj s $\sqrt{2}$, tako 5–4 jeste, a 4–5 nije, to jest ne daje broj. Ne moraju aritmetičke operacije biti uvek izvodljive. Savremenim načinom izraženo, možemo reći da su Grci dopuštali samo one operacije kojima se nije izlazilo iz skupa elemenata, ili vrste entiteta, na koje se one *prvobitno* primenjuju.

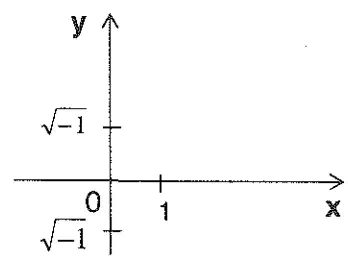
Današnji oslobođeni matematičar može se podsmehnuti grčkoj naivnosti i nemogućnosti apstraktnog shvatanja broja. Apstraktnost u shvatanju broja kod Grka ogleda se jedino u tome što je broj tuceta konja i broj tuceta ljudi *jedan isti broj*, dok se ljudi (kojih je sto, ipak) razlikuju od konja (kojih je sto) (*Aristotle 21*, 220 b 11). No, makar koliko bilo tačno da je proširenje pojma broja i ponovno osamostaljenje aritmetike, ili, bolje reći, algebre, vodilo kako neslućenom razvoju matematike tako i mnogim praktičnim rezultatima, za rešavanje *filozofskih* problema *konkretnost, restriktivnost* i *intuitivnost* grčkog metoda mogu biti nezamenljivo poučni jer se tu nijednog časa ne gubi iz vida *značenje*, ili bolje, *razumljivost* termina i iskaza koji se upotrebljavaju. Hteli ne hteli, u filozofiji, pa i u filozofiji matematike, imamo posla upravo sa razumevanjem i analizom značenja raznih reči, izraza ili tvrdnji. Ako se pojam broja proširi, onda to proširenje treba propratiti ukazivanjem na nove *kontekste* u kojima njihova upotreba biva razumljiva, ili priznati da se oni uvode čisto *formalno* i onda na neki *drugi način*, a ne pozivanjem na razumevanje, *opravdati* njihovo uvođenje.

Leonardo iz Pize je $\sqrt{2}$ zvao brojem (vidi *Boyer*, str. 97), ali glupim brojem (*numerus surdus*). Slično tome su u šesnaestom veku negativni brojevi zvani *numeri falsi* (lažni brojevi), ili *numeri ficti* (fiktivni brojevi) (vidi *ibid., loc. cit.*). Koreni iz negativnih brojeva su nazvani *imaginarnim brojevima.*

Svi ovi brojevi su imali *prelazni status*. Najlepše se to vidi kod Lajbnica (*Leibniz 22*, str. 544), koji priznaje da imaginarni brojevi, iako *imaginarni*, imaju neki *fundamentum in re*, jer $\sqrt{1+\sqrt{-3}} - \sqrt{1-\sqrt{-3}}$ daje rezultat $\sqrt{6}$.

Kod negativnih brojeva stvar samo na prvi pogled stoji bolje. Mi „–5" možemo da shvatimo lako uz pomoć primera sa dugovanjem. Ali za razliku od pet konja koje imam, gde se „5" odnosi na nešto što realno postoji, „(–5) konja" se ipak ne odnosi ni na šta što postoji, već samo znači, otprilike, da ću – *kad budem imao* pet konja, njih moći ili morati da vratim. Ako sam dužan pet konja, nabavim deset i vratim dug, imaću pet konja. To se može napisati kao „(–5) konja + 10 konja = 5 konja". Slično kao u prethodnom Lajbnicovom primeru, i ovde izgleda da „–5" ima *fundamentum in re* zato što je rezultat cele operacije „5", koje se odnosi na pet postojećih konja. Ali ovde „igra dugovanja" *daje objašnjenje* otkuda to. Neko bi objašnjenje trebalo dati i za iracionalne i imaginarne brojeve.

Za iracionalne brojeve može se, naravno, ponuditi geometrijska interpretacija, ali ne tako što će se tražiti zajednička mera ili geometrijska veličina koja odgovara odnosu dve nesamerljive veličine. Može se naprosto uzeti da se iracionalni broj odnosi na *jednu od dve* nesamerljive veličine. Ako je stranica kvadrata 1, $\sqrt{2}$ se odnosi na *samu dijagonalu*. Slično tome se $\sqrt{-1}$ može odnositi na velčinu na ordinati koja je ista kao veličina duži [0,1] na apscisnoj osi (vidi sliku). Operacijom korenovanja negativnih brojeva dobijaju se određenom „igrom usmeravanja veličina" – da to tako nazovemo – veličine koje su realne, ali koje su smeštene na pravoj *drugačije usmerenoj* od prvobitne. U kontekstu ove igre $\sqrt{-1}$ dobija realno značenje.



Matematičari veoma dugo nisu imali interpretacije za „glupe", „fiktivne" i „imaginarne" brojeve. Zato im je bio dobrodošao izum Nemorarijusa i Vjeta (vidi *Boyer*, str. 98), prema kojem su u matematiku uvedena *slova* kao oznake za apstraktne veličine. Konsonanti su kod Vjeta mogli da se odnose na bilo koju poznatu a vokali na nepoznatu veličinu. To su, dakle, bile algebarske oznake za konstante i tako se pojavila razlika između aritmetike, shvaćene kao *logistica numerosa*, i algebre, shvaćene kao *logistica speciosa* (*ibid.*, *loc. cit.*). I sad su „glupi", „fiktivni" i „imaginarni" brojevi mogli lepo da uđu u kalkulaciju kroz opšte algebarske formule i omoguće dobijanje raznovrsnih rešenja poput onog gornjeg kojeg navodi Lajbnic. Važno je bilo da se u *aritmetičkom rezultatu* ne pojave ovi brojevi. Tako je upravo Njutnov učitelj Barou tvrdio da su „glupi brojevi neobjašnjivi" i da „nemaju vlastitu vrednost, te da treba da budu prognani iz matematike u drugu nauku, naime algebru" (citirano prema *Boyer*, str. 179).

Ovakvim shvatanjem bio je otvoren put i slobodnom korišćenju *aritmetičkih infinitezimala*, ali njih je trebalo, pre svega, nekako *uvesti u igru*. Ni to nije bilo lako.

Posle Zenona teško je bilo verovati u κυρίως ἕν kad su u pitanju geometrijske veličine, pa je zato i jedinica shvatana *neodređeno*, kao *broj koji jeste najmanji*, ali koji se može *primeniti u različitim slučajevima*. Indefinitizam, kako smo ga definisali, razlikuje se od finitizma u pozitivnom smislu (up. § 65 i §§ 53, 57) po tome što finitizam zahteva da se jedinica uvek nekako fiksira. Tek kad je jedinica, kao kod Dekarta i Fermaa (više o tome vidi u *Wallner*, str. 119), počela da se tretira kao *konstanta* – koja doduše može da se raznoliko primeni – ona je *prestala* da bude *najmanji broj*. Ako jedinica nije određena ali nije ni konstanta, onda deobom na dva dela nečega što je jedno – *delovi* postaju jedinice. Ako je pak jedinica *konstanta*, mada ne apsolutno već u smislu *opšteg algebarskog broja* – kao nešto definitivno *kad* se odredi

mada *ne* i jednoznačno odredivo – onda se deobom jedinice dobijaju dve *polovine* koje su od nje manje, tako da je $1/2 < 1$. Iako ova nejednakost nama deluje trivijalno, ona u stvari nije ni malo trivijalna, jer zahteva da se shvati da jedinica *mora biti neodređena konstanta* poput *opšteg algebarskog broja* – da bi se objasnilo *zašto* polovine *ne postaju* jedinice a prethodna jedinica dvostrukost.

Ferma je zato, izgleda, bio *prvi koji je eksplicitno* mogao da govori o *numeričkim* infinitezimalama. Za Paskala su (*Pascal*, str. 268–269) beskonačno veliko i beskonačno malo bili komplementarni, kao što su komplementarni 100 000 i 1/100 000. Za Fermaa je 1/100 000 moglo biti jedan broj, a ne samo odnos u kojem se jedinici može pripisati veličina od 100 000 jedinica dobijenih njenom deobom. Tačno je da je $(1/100\,000) \cdot 100\,000 = 1$, ali je tačno i da je *broj* $1/100\,000 < 1$.

Ipak, nijedan od razlomaka čiji je imenilac beskonačni broj nije infinitezimala. Da bi to postao, imenilac mora biti *beskonačni broj*. Taj beskonačni broj (*numerus infinitus*) Valis je označio sa ∞,[1] čime je *kategorematska beskonačnost* konačno ušla i u aritmetiku. $1/\infty$ je bila *infinitezimala*.

U *Aritmetica infinitorum* Valis koristi ∞ kao svaki drugi znak za brojeve. Tako je, na primer, površina trougla s visinom h i osnovicom a jednaka $\frac{1}{2}ah$, jer je $\frac{1}{\infty}ah \cdot \frac{\infty}{2} = \frac{1}{2}ah$. $1/\infty$ je inače, za Valisa, u geometrijskoj interpretaciji „jedva nešto drugo od linije" (navedeno prema *Boyer*, str. 171), no dovoljno različito da može biti konstituent trougla ako se *umnoži beskonačan broj puta*.

Valis je dobio rezultat koji bismo lajbnicovski napisali kao $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ – čisto *aritmetičkim* razmatranjem. $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}; \frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}; \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2}; \ldots;$ kako je rezultat za svaki konačan broj termina jednak $\frac{1}{2}$, Valis zaključuje da je to tako *i za beskonačan broj* termina.

Da bi aritmetički dobio rezultat lajbnicovski napisan kao $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, Valis je pored uvođenja u igru beskonačnog broja termina morao da primeni i poznato *zanemarivanje*, ovde zanemarivanje *aritmetičkih* beskonačno malih veličina.

$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; $\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$; $\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$; ...; što je broj termina veći, rezultat je bliži $\frac{1}{3}$. Ako je broj termina beskonačan, drugi sabirak je beskonačno mali i tako se dobija rezultat $\frac{1}{3}$. Valis je slično dobio rezultate $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$, $\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$, $\int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$.

Očigledno je Valis, kad je ∞ tretirao kao broj među prirodnim brojevima ovaj, kao kasnije Johan Bernuli (vidi *Leibniz 24*, III, str. 563) i za njim Fontenjel (više o tome vidi u *Petronijević 4*), smatrao *beskonačnim rednim brojem*. No on je ∞ tretirao i kao *sumu* konačnih brojeva kojih je beskonačno. Valis, svakako, nije pravio razliku između *transfinitnog broja* ∞ koji treba da se javlja *u nizu* prirodnih brojeva i *Kantorovog broja* ω koji je *ordinalni broj skupa* prirodnih brojeva (*Cantor 7*, str. 115).

U vezi sa *brojem* 1/∞ kao *infinitezimalom* mogu se postaviti razna pitanja, od kojih su neka analogna pitanjima vezanim za geometrijske infinitezimale. Da li se do brojeva ∞ i 1/∞ dolazi *postupno*, aritmetičkom ili geometrijskom progresijom, da li je ∞, odnosno 1/∞, *jedinstveni* beskonačno veliki, odnosno beskonačno mali broj, i, ako nije, *kako upoređivati* beskonačno male brojeve? Razlika u odnosu na pitanja vezana za geometrijske infinitezimale je u tome što je stvar formalnija i što se teškoće mogu otklanjati formalno.

Fontenjel je smatrao da je ∞ *poslednji* član beskonačnog niza 0,1,2,3,..., ali je priznavao da je način na koji se *stiže* do beskonačnog *neshvatljiv* (u *Elements de la géométrie de l'infini*).No kako je Fontenjel mislio da je ∞ prvi takav broj, to je način na koji se do beskonačnosti stiže ne samo neshvatljiv, već dostignuće izgleda nemoguće, ako se ima u vidu da se svojstvo konačnosti rekurzivno održava (vidi § 3).

No, iako je ∞ poslednji član u *nizu* brojeva 0, 1, 2, ..., za Fontenjela to nije značilo da od njega nema većeg; on je dopuštao, na primer, da je $\infty \cdot \infty^{\infty-1} = \infty^{\infty}$. Brojevi 0, 1, 2, ..., ∞ predstavljaju tako *osnovni* skup, a onda se pomoću njih generišu novi brojevi. Tako je $1/\infty^{\infty} < 1/\infty$.

dy i dx su reda 1/∞, ali oni mogu da se upoređuju i Ojler će upoređivati beskonačne brojeve kao infinitezimale, samo što će, kao što ćemo videti, sve to biti specifično interpretirano, naime, *dinamički* vezano uz pojam *funkcije*. Za njega će a/dx^2 biti beskonačnost drugog reda. Odnos 0/0 koji se dobija za dy/dx je *neodređen*, a dy i dx, kao i diferencijali višeg reda, služe da se on *odredi*. Iako uzimamo da je $dx = 0$, $a/dx < a/dx^2$, jer deljenje nulom *nije određeno nezavisno od funkcije* o čijem se diferenciranju radi.

Za kratko vreme, dakle, matematičari su novim brojem ∞, i njemu komplementarnim 1/∞, počeli krajnje slobodno da se koriste. Osnovna karakteristika ovih brojeva kod Valisa, Bernulija i Fontenjela bila je da su poslednji članovi niza aritmetičke, odnosno geometrijske progresije u kojima se pojavljuju konačni brojevi. A za Fontenjela ∞ i 1/∞ čine osnovu za generisanje i još novih beskonačno velikih i beskonačno malih brojeva.

83. Kinematičke infinitezimale

Lajbnic je, barem u početku, galilejski pojam *momentum* i Hobsov pojam *conatus* (vidi *Leibniz 31*) prihvatao kao analogne za geometrijske infinitezimale, koji su se odnosili na beskonačno male priraštaje vremena i kretanja, odnosno na „začetke" vremenskih intervala i određenih kretanja.

Ako bismo rane Lajbnicove ideje izrazili uz pomoć kasnije nastalog diferencijalnog integralnog računa, kao što je to sam Lajbnic učinio u svojoj *Dinamici* (*Leibniz 24*, VI, str. 281–514), ili u skraćenom obliku u spisu *Specimen dynamicum* (1695) (*Leibniz 29*, str. 437), onda je konatus $v = ds/dt$, gde je t vreme, s put, t nezavisno promenljiva, a ds/dt interpretirano kao što smo već videli u § 80. Konatus je, dakle, beskonačno mali put ds pređen u beskonačno malom vremenu dt posmatrano čisto foronomički, to jest nezavisno od mase tela.

Za razliku od čisto foronomičkog pojma *conatus*, koji je uveo Hobs, *impetus* je već pre toga shvatan kao impuls u tenutku ali ne aristotelovski, već infinitezimalistički shvaćenom. Faktički pojmom trenutne brzine u tom smislu operišu već Toričeli i Roberval (vidi *Boyer*, str. 177). *Impetus* je dinamički pojam koji označava količinu trenutnog kretanja tela s izvesnom masom m, to jest kretanja obavljenog za dt, i pošto se tu uzima u obzir i masa m, to je *impuls* $mv = m(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)$. Da bi se dobila ukupna količina kretanja tela mase m koje prelazi put s tokom nekog perioda $[0, t]$ treba izvršiti integraciju svih trenutnih količina kretanja, što znači: $m\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = ms$.

Njutn je međutim, već vrlo rano počeo da izbegava geometrijske infinitezimale, verovatno iz opravdanih razloga (vidi § 81), i mislio je da se svi ciljevi *calculusa* mogu postići i ako se ograničimo samo na *momente*, koji su u stvari kinematičke infinitezimale, pri čemu bi se izbegle mnoge teškoće vezane za činjenicu da prostor i odgovarajući prostorni entiteti, pa i eventualne prostorne infinitezimale, nisu jednodimenzionalni. Njutnova teorija fluksije je infinitezimalistički analogon kinematičkom atomizmu i kinematičkom monizmu (§§ 51, 71).

Teškoće teorija koje bi prihvatale samo vremenske, odnosno kinematičke infinitezimale, lako je sagledati ako se imaju u vidu, s jedne strane, teškoće kinematičkog atomizma i, s druge strane, teškoće teorije geometrijskih infinitezimala. Zanimljivije bi, međutim, moglo biti to što je sam Njutn vremenom uvideo da mu kinematičke inifinitezimale ne mogu omogućiti da promenu posmatra *in statu nascendi* i što je, ne priznajući to(!), počeo da se koristi *alternativnom* teorijom, teorijom koja će matematičare

odvesti definisanju osnovnih pojmova infinitezimalnog računa preko pojma granične vrednosti, što je na klasičan način izvedeno kod Košija. Sledeća epizoda namenjena je čitaocu koga to zanima.

Mislim da postoje tri glavne linije koje nas vode Njutnovoj teoriji fluksije: antička teorija o nastanku linije kretanjem tačke, tradicija rešavanja geometrijskih problema uz pomoć kinematike – što ćemo razmotriti na primeru Toričelijevog metoda rešavanja problema tangente – i teorija „iščezavajućih kvantiteta" koju smo sreli kod Fermaa, a koju je Njutn mogao direktno preuzeti od svoga učitelja Baroua.

Teško je s pouzdanošću reći kada je nastala grčka teorija fluksije. U spisu *O duši* Aristotel neodređeno navodi da „oni kažu (φασί) da linija koja se kreće (κινηθέν) stvara površinu, a tačka koja se kreće liniju" (*Aristotle 11*, 409 a 3). No budući da Aristotel to navodi u kontekstu u kojem razmatra teoriju o kojoj je duša „broj koji se sam od sebe kreće" a naglašava da je „tačka jedinica koja ima položaj" (*ibid.*, 408 b 34, 409 a 6), i da nezavisno možemo utvrditi da je takvu teoriju zastupao Ksenokrat (vidi *Guthrie 1*, str. 263), možemo zaključiti da je teoriju fluksije o kojoj je reč – ako ne stvorio, ono barem zastupao Ksenokrat. Prokle, opisujući ovu teoriju gotovo istovetnim rečima (vidi *ibid.*, str. 262–263), kaže da je to shema kasnijih Pitagorejaca, koja se razlikuje od sheme ranijih.

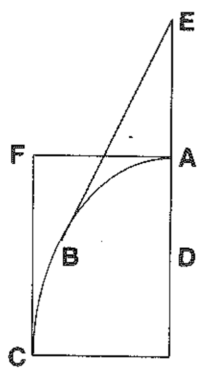
Za nas je mnogo zanimljivie i značajnije da otkrijemo eventualnu *motivaciju* za formiranje teorije fluksije nego da odlučimo da li je ona pitagorejskog ili platonskog porekla. No i tu trenutak njenog nastanka igra značajnu ulogu. Važno je, naime, to što je ta teorija, ako je i pitagorejska, teorija *kasnijih* Pitagorejaca, *različita* od učenja ranijih, i što tako verovatno predstavlja neki pokušaj da se poboljša prethodno nastala doktrina, koja je bila nečim poljuljana.

Budući da se u teoriji fluksije radi o *nastanku* linije, površine i, prema Proklu, tela, poboljšanje se najverovatnije ticalo upravo *odnosa* tačaka, linija, površina i tela. Zenonovi dokazi su bili, između ostalog, upereni i protiv mogućnosti konstituisanja linija iz tačaka kao nečega bez veličine, bez obzira da li je takvo shvatanje neko pre Zenona uopšte zastupao. Otkriće nesamerljivosti učinilo je problematičnim konstituisanje linije iz konačnog broja tačaka s veličinom o kojem govori Pitagorejac Ekfant iz Sirakuze (*DK*, 51 1). Rejvn smatra (*Raven*, str. 109) da je teorija fluksije odgovor na Zenonovu kritiku, Kornford (*Cornford* 4, str. 12) pripisuje uticaj i otkriću nesamerljivosti, dok Oven (*Owen* 6, str. 214) podsticaj za njeno formiranje vidi isključivo u otkriću nesamerljivosti.

Nezavisno od toga ko je u pravu, Rejvn, Kornford ili Oven, jasno je da teorija fluksije rešava na izvestan način pitanje odnosa među geometrijskim entitetima. Kad bismo znali kako je shvaćena tačka koja se kreće, mogli bismo znati i kolika je bila uloga Zenonovog aksioma. Ako se, naime, tačka shvati u aristotelovskom smislu, onda se njenim kretanjem rešava upravo problem stvaranja „iz ničega". Ako *skup* tačaka *ne može* dati lilniju, *kretanje* tačke, izgleda, *može*. Kretanje ima svojstvo aristotelovski shvaćenog kontinuuma i kao takvo omogućuje da se izvrši μετάβασις εἰς ἄλλο γένος. Ova okolnost ima svoje *operacionalno značenje*, kao što ćemo imati prilike da vidimo u završnom, četvrtom delu: položaj broja π na realnoj brojnoj osi ne može se *savršeno tačno* odrediti čisto geometrijski ni načelno, ali kinematički može.

Nekih dvadesetak vekova posle nastanka antičke teorije fluksije Njutn je uveo svoje fluksije da bi opravdao izvesna zaključivanja u geometrijskim dokazima, da bi, naime, omogućio kvantitetu „*0*" da iščezava i konačno iščezne; jedna kinematička varijacija na geometrijsku temu.

Toričelijev metod (vidi *Boyer*, str. 132) određivanja položaja tangente pokazuje ne samo vezu između trenutne brzine tela koje se ubrzano kreće i koeficijenta pravca tangente krive u nekoj tački, već pokazuje kako se kinematika može koristiti u geometriji baš zato što se linije, pa i krive linije, izgleda mogu *doslovno shvatiti* kao *tragovi* tačaka koje se ovako ili onako kreću.



Kubna parabola (na slici ABC) se može dobiti kao trag projektila čije je kretanje složeno kretanje koje proizlazi iz dva kretanja: horizontalnog, čija je brzina konstantna, i vertikalnog, čija brzina varira s kvadratom vremena; na slici su to kretanje od A ka F i kretanje od A ka D. Sada je tangenta u tački B određena trouglom BDE, gde je, zbog odnosa brzina vertikalnog i horizontalnog kretanja, ED = 3AD. Jasno je da u *funkciji* kojom mi predstavljamo parabolu prelaženje promenljive x po vrednostima na x-osi može da se shvati *doslovno* kao *crtanje* x-ose, prelaženje promenljive y po vrednostima na y-osi *doslovno* kao *crtanje* y-ose, dok parabola *doslovno* proizlazi iz odnosa koji je određen zakonitom vezom među promeljivama, odnosno *zakonitim odnosom brzina crtanja* x-ose i y-ose.

Barou je smatrao da „vreme ima mnogo sličnosti s linijom" (*Barow*, str. 37), ali je video i neke prednosti koje bi se mogle izvući iz disanalogija, zbog toga što vreme *protiče*, i to „protiče konstantnim tokom" (*ibid.*, str. 38). Očigledno je vreme Barouu moglo da posluži kao nezavisno promenljiva, dok, s druge strane, brzina može da postane zavisno promenljiva time što „svakom trenutku vremena ... odgovara neki stepen brzine" (*ibid.*, str. 39). Trenutak pak može da bude koliko god se hoće mali, jer vreme teče pa se razlike i povećavaju i smanjuju, nisu konstantne. Barou je uveo slova „*a*" i „*e*" kao oznake za veličine koje se, poput *Fermaovog* „*E*" mogu po potrebi zanemariti (vidi, na primer, *ibid.*, str. 120) na strani nezavisno, odnosno zavisno promenljive. Kinematička interpretacija omogućila je zatim Njutnu da iščezavanje kvantiteta u metodu fluksije *doslovno* shvati.

Ako kriva može nastati kretanjem tačke, kako je to još neki Grk smislio, ako oblik krive može doslovno zavisiti od brzine nekog kretanja, kako se to vidi iz Toričelijevog primera, i ako se vreme nastajanja može pratiti sve do momenta doslovnog iščezavanja, kako je to implicirano vezom između uloge vremena i upotrebe veličina „*a*" i „*e*" kod Baroua, onda se, izgleda, najrelevantnija osobina krive, a to je pravac tangente u svakoj tački, može odrediti ako se kriva posmatra u *stanju nastajanja (in statu nascendi)* i ako se *promena brzine (incrementum* ili *decrementum)* posmatra u vremenu koje iščezava. To je osnovna ideja Njutnovog metoda fluksije.

Za njutnovski shvaćeno vreme se može reći da je izohrono, to jest svuda isto, ono, kako se Barou izrazio, „protiče istim tokom". Brzina, pak, kojom razni kvantiteti nastaju, može biti ne samo različita, različita od slučaja do slučaja, već i promenljiva. Kvantitete u nastajanju Njutn je zvao *fluksijama*, a nastale kvantitete *fluentama* (*Newton 4*, str. 72). Ako je x fluenta, fluksija je označena sa $\dot{x}$. No kako se brzina nastanka može menjati i menjati, to se može govoriti o fluksiji fluksije kao nastajućem kvantitetu nastajućeg kvaniteta, fluksiji fluksije fluksije, itd. (vidi *Newton 5*, str. 338). Dakle, kao što Lajbnic govori o razlikama (diferencijalima) višeg reda, tako Njutn govori o fluksijama višeg reda; one su označene redom sa $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, itd. Ako se sâmo x posmatra kao fluksija, onda je njegova fluenta $\overset{|}{x}$, fluenta ove fluente $\overset{||}{x}$, itd. (*ibid.*, *loc. cit.*).

Momentum je zajednički naziv za *incrementum* i *decrementum* (vidi *Newton 2*, I, knj. 2, odelj. II, lema 2, str. 364–365). *Incrementum* je trenutni priraštaj u brzini, dakle povećanje brzine u trenutku u kojem se posmatra (ovaj trenutak može biti izohronični priraštaj vremena kao infinitezimala), *decrementum* je trenutno smanjenje brzine.

Osnovni zadatak je da se nađe fluksija ako je data fluenta i obrnuto; to su postupci koji odgovaraju Lajbnicovom diferenciranju i integriranju, samo bi kod Njutna integral, kao što smo videli, bio neodređen, jer se stvar prvobitno posmatra *u nastajanju*.

Ako je $x + 0$ priraštaj 0 nezavisnoj promenljivoj x, dakle vremenu, onda, ako je funkcija, recimo, x^n, njen priraštaj iznosi $(x + 0)^n$. Kako dobiti trenutni stepen promene, to jest funkciju koja će nam omogućiti određivanje koeficijenta pravca tangente? Treba odrediti *fluksiju*, posmatrati fluentu x^n *in statu nascendi*.

Ako $(x + 0)^n$ (Njutn piše $\overline{x+0}|^n$) razvijemo po binomnoj formuli, dobićemo $x^n + n0x^{n-1} + \frac{nn-n}{2}\, 00x^{n-2} + \&c.$ Ako se sad uporede priraštaji za x, koji iznosi 0, i za x^n, koji iznosi $n0x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} 00x^{n-2} +$ ... dobija se odnos $\dfrac{0}{n0x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} 00x^{n-2} + \dots} = \dfrac{1}{nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2} 0x^{n-2} + \dots}$

U ranom spisu *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas (O analizi pomoću jednakosti s beskonačnim brojem termina)*, napisanom 1669. godine, objavljenom 1711, Njutn još ne daje opravdanje zanemarivanja termina koji sadrže 0, dok u spisu *Methodus fluksionum et serierum infinitarum* (*Metod fluksija i beskonačnih redova*)

iz 1671, objavljenom tek 1736, 0 posmatra kao beskonačno mali interval (up. Newton 4, str. 80, gde se članovi koji sadrže 0 nazivaju *additamenta infinite parva*), dakle kao *vremensku infinitezimalu* kojoj na strani funkcije odgovara *kinematička infinitezimala*. U spisu *De quadratura curvarum (O kvadraturi krivih)* iz 1676, objavljenom 1704, on daje definitivno obrazloženje, koje će se pojaviti i u *Principia mathematica philosophiae naturalis (Matematički principi prirodne filozofije* iz 1687. Naime, pošto je formirao odnos $\dfrac{1}{nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2} 0x^{n-2} + \dots}$

Njutn pušta da 0 iščezava i *doslovno* iščezne, čime dobija *poslednji odnos (ultima ratio)* (videti *Newton 2*, I, knj. 1, odelj. 1, lema 1, str. 73 i knj. 1, odeljak 1, sholijum za lemu 41, str. 87) „iščezavajućih priraštaja“ (*evenescanta incrementa*): $\dfrac{1}{nx^{n-1}}$

Sad počinju teškoće. Da je Njutn našao način da nas uveri da priraštaji *mogu* da iščeznu, to mu se mora priznati, jer se stvar razmatra *in statu nascendi*, reč je o *vremenu* i *kretanju*, o razlikama koje iščezavaju ili se povećavaju, već prema tome kako se stvar posmatra. Ali, dve stvari su sporne. Prva se tiče ogrešenja *u dokazu* o *Barklijevu lemu*, koju je ovaj posebno spremio za testiranje metoda fluksije, druga se tiče problematičnosti samog *pojma* prvih i poslednjih odnosa (*rationes primae et ultimae*).

Barklijeva lema iz *Analista* (*Berkeley 4*, str. 25), kojom se on obraća „neverniku matematičaru“, glasi ovako: „Ako se, s namerom da se bilo kakav stav dokaže, pretpostavi nešto pomoću čega se dođe do nečeg drugog, pa se posle sama pretpotavka razori ili odbaci nekom suprotnom pretpostavkom, onda, u tom slučaju, i sve do čega se stiglo i svaka posledica toga moraju takođe biti razoreni ili odbačeni i od tada se više ne mogu pretpostavljati ili upotrebljavati u dokazivanju“. Logičari bi celu stvar sumirali lapidarno: *ex falsi – quodlibet*.

Što se tiče Njutnovih dokaza u *De analysi* i u *Methodus fluxionum*, tu izgleda da Barklijev prigovor stoji, jer dokazi su istovetni sa Fermaovim dokazom koji smo ranije razmotrili (§ 80). Kao i za Fermaovo *E*, tako se u Njutnovim dokazima za 0 prvo pretpostavi da ima neku veličinu, makar koliko malu, i formula se razvija po binomnom obrascu, a onda se 0 zanemaruje kao nešto što je infinitezimala, ili kao nešto što iščezava ili što je ništa (*evanescere sive esse nihil*) (*Newton 1*, str. 242). Nije tu u pitanju mogućnost da *0* iščezne, za to, barem, u *Methodus fluxionum*, Njutn ima objašnjenje. Nezgoda je u tome što ne možemo u *istom trenutku*, to jest u istom dokazu, pretpostaviti da *0 iščezava* i da je *iščezlo*. Najviše što se može učiniti je da se *0* ostavi *beskonačno malim* i *zbog toga* zanemare članovi koji ga sadrže, ali sam Njutn je u matematici jako držao do akribije (ἀκρίβεια), on nije, kao jedno vreme Lajbnic (vidi dole, § 85), smatrao da se s obzirom na razliku u redu veličina nešto sme zanemarivati; on, uostalom, nije ni imao neku razvijenu teoriju infinitezimala kojom bi se to pravdalo. U *De quadratura curvarum* on će kategorički reći: „*In rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi*" (*Newton 5*, str. 334).

Ali, u spisu *De quadratura curvarum*, koji je uostalom – iako napisan posle *De analysi* i *Methodus fluxionum*, pre njih objavljen (1704), Njutn u dokazu *izbegava infinitezimale* a da se u isto vreme, kako izgleda, *ne izlaže*, bar ne neposredno, razornom dejstvu kasnije formulisane Barklijeve leme. U *De quadratura curvarum* ne pretpostavlja Njutn *u istom trenutku*, ili *u istom dokazu*, i da *0* iščezava i da je iščezlo. On uzima u prvom trenutku da *0 ima izvesnu veličinu* – u *Principia* će čak reći da se za priraštaj u brzini *ne mora* uzeti *momentum*, to jest *trenutni priraštaj*, već se može uzeti „bilo koji konačni kvantitet" (vidi *Newton 2*, I, knj. 1, odelj. 1, sholijum za lemu 11, str. 88) – i onda formira *odnos* između priraštaja (vremena i brzine), koji u navedenom primeru iznosi $\dfrac{1}{nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}\,0x^{n-2} + \ldots}$

Sada se jasno vidi da odnos o kojem je reč zavisi od *0*, to jest da je on *različit* zavisno od *veličine 0*. To je *sve* što se želelo postići uvođenjem priraštaja *0* koji ima izvesnu veličinu.

Sasvim *druga* stvar je pustiti da se *odnos menja* time što se *0* posmatra – ne kao konstantno, već kao *promenljivo*. *0* sad može da se *smanjuje*, i ovo smanjivanje *nije* više deo prethodnog dokaza, to je posmatranje *same promene odnosa promenom 0*. Ako smo bili uzeli da je priraštaj *0* = 5, onda smo dobili jedan *određeni* odnos. Ne pretpostavljamo međusobno nespojive stvari ako „*0*" *kasnije* počnemo da tretiramo kao *promenljivu* koja prelazi preko *različitih* vrednosti, jer promenljiva je promenljiva upravo zato što *prelazi preko različitih vrednosti*, odnosno *0 doslovno* teče kao vreme, jer je *0* priraštaj *vremena*.

Ako je na ovaj način izbegnuta obaveza da se *0 fiksira* i ako *0* može da se *smanjuje* menjajući odnos o kojem je reč bez ogrešenja o Barklijevu lemu, onda se o ovu lemu nećemo ogrešiti i ako dopustimo da *0* uzme vrednost 0. Što se samog *dokaza* tiče, sve teče *lege artis*, ali šta izražava *rezultat* $\frac{1}{nx^{n-1}}$, koji se dobija kad *0* uzme vrednost 0?

Njutn kaže da je rezultat *poslednji odnos (ultima ratio)* ili *prvi odnos (prima ratio)*, već prema tome kako se gleda, s koje strane promenljiva *x* prilazi vrednosti za koju *0* biva 0, da li film – da upotrebimo tu sliku – gledamo direktno ili ga motamo unazad. Ali *čega* je taj poslednji ili prvi odnos odnos? Da li je to odnos vremenskog priraštaja prema priraštaju brzine? Ako jeste, a *0* = 0, onda je taj odnos 0/0; bez priraštaja vremena nema ni povećanja (*incrementum*) ni smanjenja (*decrementum*) brzine, to jest nema momenta (*momentum*). Šta onda, ako ne odnos priraštaja, izražava odnos $\frac{1}{nx^{n-1}}$?

Ovo je trenutak da na scenu ponovo stupe infinitezimale, ali ne geometrijske, jer je njih Njutn s mnogo razloga izbegavao i na kraju definitivno prognao iz geometrije (*volui ostendere quod in methodo fluxionum non opus sit firuras infinite parvas in geometriam inducere*) (*Newton 5*, str. 338), već *kinematičke*.

Zašto je Njutn do kraja koristio „*momentum*", galilejski termin (vidi, na primer, *Newton 2*, I, knj. 2, odelj. 2, lema 2, str. 364), da označi trenutnu promenu (*incrementum* ili *decrementum*) brzine? Prvi ili poslednji odnos kao *odnos (ratio)* morao se ticati *priraštaja*, koji kao takvi *nisu striktno jednaki nuli* (bilo pozitivno kao *incrementum*, bilo negativno kao *decrementum*), ali se kao *prvi*, odnosno *poslednji*, ticao *trenutnih* priraštaja.

U spisu *Odbrana slobodnog mišljenja u matematici* i u jednom pismu, zajedno s tim objavljenim, 1735. godine (u kojima odgovara Džejmsu Džurinu i navodi „razloge za neodgovaranje gospodinu Valtonu" – *Berkeley 1* i *3*), Barkli inkonzistentnost metoda fluksije nastoji da dokaže, pored ostalog, pozivanjem na same Njutnove reči, stavljajući njegove branitelje pred sledeću trilemu: *momentum* je ili konačni kvantitet, ili infinitezimala, ili puka granica (najjasnije u *Berkeley 3*, str. 113). Protiv prve mogućnosti govore mnoga mesta iz *Principia*, kao recimo „*Cave intelligas quantitates magnitudine determinates,* *sed cogita semper dinamiendas sine limite*" (*Newton 2*, I, knj. 1, odelj. 1, sholijum za lemu 11, str. 88); nikakvih nedeljivih veličina, dakle, nema. Protiv druge mogućnosti Barkli navodi mesto iz *De quadratura curvarum* s kojim smo se sreli maločas, gde se odbacuju beskonačno male figure. Protiv treće mogućnosti navodi mesto iz *Principia* gde se govori o deobi momenata: „*Ubi de letaribus A et B deerant momentorum dimidia*, ..." (*ibid.*, I, knj. 2, odelj. 2, lema 2, str. 364).

Njutnovi branitelji se nisu baš najbolje snalazili, međutim, *nijedno* od navedenih mesta ne isključuje, strogo govoreći, kinematičke infinitezimale. *Momentum* je kinematički pojam *par excellence*, on se ne odnosi na *nastale* kvantitete, na geometrijske figure, već na *fluksije*.

Da Njutn nije prihvatao nikakve nedeljive entitete, ni u geometriji ni u kinematici, to je izvesno. S druge strane, odnos priraštaja kao prvi ili poslednji odnos nije mogao biti odnos „pukih granica", što možemo videti kad se zapitamo na šta se $\frac{1}{nx^{n-1}}$ odnosi, bez obzira što je, kao što ćemo videti, Njutn i to pokušao u *Principia*, kad o samom poslednjem odnosu govori kao o granici (*ibid.*, I, knj. 1, odelj. 1, sholijum za lemu 11, str. 88). Ali, odnos bi mogao biti odnos *trenutka* kao *vremenske infinitezimale* prema *momentu* kao *kinematičkoj infinitezimali*, a da to ne znači da je bilo koji nastali *trag*, bilo koja *geometrijska* veličina, beskonačno mala – čime se ne protivreči navedenom mestu iz *De quadratura*.

Ako smo Njutna spasli od otvorene protivrečnosti, ne znači da će cela njegova stvar zadugo dobro stajati. Stigli smo do trenutka koji nas najviše zanima, do trenutka narušavanja „velike analogije prostora i vremena". Ispitajmo odnos *traga* prema *kinematičkim* i *vremenskim infinitezimalama*.

Što se tiče vremenskih trenutaka, oni se mogu uzeti kao koliko god je potrebno mali i međusobno jednaki, jer se radi o *nezavisnom* toku, kao što je to uzimao i Barou i kao što i kod Lajbnica dx uvek možemo uzimati kao isto. Drugim rečima, rasprava o odnosu fluksija i fluenti može se učiniti trivijalno nezavisnom od priraštaja vremena. Glavni je odnos odnos *momenta fluksije* i *traga*.

Kakav se trag dobija momentom kao nascentnim kvantitetom? Budući da prostornih infinitezimala nema, ostaje da momentom nastaje konačna prostorna veličina, ili, eventualno, da ne nastaje nikakva veličina, da momentu odgovara aristotelovska tačka. Ovo poslednje nas, međutim, nikud ne bi odvelo, pošto se se do devetnaestog veka bespogovorno usvaja Zenonov aksiom da se iz takvih tačaka ne može ništa sastaviti i *upravo se zato* i pribegava pojmu fluksije. I zaista, prema očekivanju, Njutn prihvata *jedinu preostalu opciju*, naime, da momentom nastaju konačne veličine: „Konačne čestice nisu momenti, ali jesu kvantiteti nastali pomoću momenata. Mi momente shvatamo kao upravo nascentne principe konačnih veličina" (*ibid.*, I, knj. 1, odelj. 1, sholijum za lemu 11, str. 87).

Dakle, za razliku od Lajbnica, koji je konatusima korespondirao tačke s veličinom, Njutn, narušavajući „veliku analogiju", *momentima* korespondira *obične konačne prostorne veličine. U zavisnosti* od toga *koliki* je *incrementum*, odnosno *decrementum*, momentom nastaju *različiti* oblici. Kvadratna i kubna parabola, recimo, razlikuju se u usponu, a taj uspon se metodom fluksije razlikuje prema tome koliki je u svakom od trenutaka *incrementum* brzine kojom parabole nastaju, odnosno, koliki je moment fluksije.

Ali, ako su nastale veličine obične konačne veličine, kako je to Njutn želeo, ne možemo li njihovom deobom dobijati sve nove i nove tačke u kojima se koeficijenti pravaca tangenti razlikuju? Kako ćemo koeficijente pravaca tangenti u raznim tačkama određivati preko momenata fluksije, odnosno preko odnosa priraštaja fluksije prema vremenskom priraštaju, ako momentu ne odgovara jedna tačka već čitav jedan *luk* koji se može beskonačno deliti?

Njutn je „poslednju brzinu" (*ultima velocitas*), kao trenutnu brzinu na nekom mestu, odredio kao „brzinu kojom se telo kreće, ne pre nego što stigne na to mesto niti posle toga, već kao brzinu u samom trenutku stizanja..." (*ibid.*, I, knj. 1, odelj. 1, sholijum za lemu 11, str. 87). No, ako trenutak nije Aristotelovo νῦν, koje odgovara tački, a moment ravan nuli, trenutnom brzinom telo prelazi neki put i to, pošto prostornih infinitezimala nema, neki konačno dugačak put. Sad, analogno načinu kojim smo pobijali kinematički atomizam, možemo zamisliti prepreku na putu zahvaljujući kojoj se *poslednja* brzina na pola puta *menja*. Ona se može menjati i na polovini polovine puta, polovini ove polovine itd. Ali *menjala se ona ili ne menjala*, koeficijent pravca tangente se kod mnogih krivih u svim tačkama *menja* i nikakva mu *poslednja brzina* u navedenom smislu *ne odgovara* kao pandan *in statu nascendi*.

Uviđajući teškoće teorije kinematičkih infinitezimala, Njutn je na nekim mestima *poslednje odnose* shvatao kao „granice kojima stalno konvergiraju odnosi kvantiteta koji se smanjuju bez kraja" (*ibid.*, I, knj. 1, odelj. 1, sholijum za lemu 11, str. 88). Ali tada, kako sam kaže, ti odnosi više nisu „pravi odnosi" (*ibid., loc. cit.*). $\frac{1}{nx^{n-1}}$ ne bi više bio bio pravi odnos. Šta $\frac{1}{nx^{n-1}}$ predstavlja? „Poslednji odnosi u kojima kvantiteti iščezavaju nisu, strogo govoreći, odnosi poslednjih kvantiteta..." (*ibid., loc. cit.*). No ne samo to, vidimo da oni više uopšte nisu pravi odnosi.

Tako se Njutn ponovo približio shvatanju granice kao nečega što po rodu ne pripada onome što ograničava. Njutnova teorija fluksije ipak *nije koherentna*. Dok je poslednji odnos uistinu odnos – metod fluksije podrazumeva *kinematičke infinitezimale*. Kad zbog teškoća koje nastaju narušavanjem „velike analogije", odnosno teškoća oko korespondencije momenata i nastalih prostornih veličina, momenti postanu „preveliki", što je Lajbnic imao u vidu 1671. godine (*Leibniz 31*) – onda poslednji odnosi moraju prestati da budu „pravi odnosi".

84. Statičko i dinamičko shvatanje infinitezimala

Statičkim infinitezimalama zvaćemo sve određene veličine – aritmetičke, geometrijske ili kinematičke – koje su, po definiciji, manje od svih uobičajenih konačnih veličina. Tako je kod Valisa, Bernulija i Fontenjela $1/\infty$ statička aritmetička infinitezimala, jer je ∞ beskonačni broj i to određeni beskonačni broj – kod Fontenjela je recimo on različit od ∞^∞ – pa je $1/\infty^\infty$ isto tako određeni beskonačno mali broj. Stranice poligona koji čini krug Stifela, Vjeta ili Keplera predstavljaju statičke geometrijske infinitezimale, jer su to određene veličine beskonačno puta manje od svih konačnih geometrijskih veličina. Slično tome je svaki određeni

beskonačno mali trenutak statička infinitezimala, kao i moment ili konatus kod Galileja, Hobsa, Njutna ili Lajbnica.

Nasuprot statičkim infinitezimalama, čiji je pojam u osnovi jednostavno određen – bez obzira koliko se ovakve infinitezimale razlikovale od autora do autora s obzirom na njihovu jedinstvenost ili nejedinstvenost, nedeljivost ili deljivost, međusobnu uporedivost, ili razlučivost ili nerazlučivost po obliku – dinamičke infinitezimale su zagonetnije. Dinamička infinitezimala bi bila Fermaovo *E*, ali bi, što se jasno vidi iz kasnijih interpretacija, to moglo biti i Njutnovo *0* kao „leteći kvantitet" koji je „neodrediv" (kako se izrazio Njutnov branitelj Džurin (Jurin) u polemici s Barklijem, u spisu *The Minute mathematician* – vidi *Boyer*, str. 229). *Dinamičku* infinitezimalu je možda najzgodnije definisati kao *veličinu*, bilo koje vrste, koja *se smanjuje* tako da *postaje manja od bilo koje date* veličine odgovarajuće vrste.

Dinamički shvaćene infinitezimale ne treba mešati sa kinematičkim. Određeni vremenski interval i konatus mogu biti vremenska, odnosno kinematička infinitezimala, a da ipak, budući *određeni*, budu statičke infinitezimale. S druge strane, geometrijske infinitezimale se mogu shvatiti dinamički, ako su, naime, *samo ime* neke *naše promenljive* koja prelazi preko skupa geometrijskih veličina koje se smanjuju ispod svake unapred date veličine.

Pojam dinamičkih infinitezimala potreban nam je zato što se posle Lajbnica i Njutna infinitezimale sve češće tako shvataju, čime se, kao što ćemo odmah videti, *infinitizam* u stvari *potiskuje*, jer se i *beskonačnost dinamički shvaćenih infinitezimala* može na odgovarajući način interpretirati u dinamičkom i *sinkategorematskom smislu*, dakle *indefinitistički*. S tim je u vezi, naravno, to što više ne bi bilo reči ni o negaciji Arhimedovog aksioma.

Ovim putem prevazilaženja infinitizma pošli su već sami Lajbnic i Njutn, samo su kod Njutna stvari pomešane, jer on nije eksplicitno govorio o dva različita shvatanja (vidi gore,

§ 83 str. 403–410). Kada o prvom i poslednjem odnosu govori pozivajući se na momente, ne ograđujući se izjavom da se ne radi o „pravom odnosu", onda su tu momenti statički shvaćene kinematičke infinitezimale a Njutn je kinematički infinitista, mada on uopšte nema razvijenu teoriju infinitezimala. Kada, međutim, prvi i poslednji odnos interpretira kao granicu, tvrdeći da tada odnos više i nije „pravi odnos" i poziva se pri tom isključivo na „iščezavajuće kvantitete", onda ovi kvantiteti postaju *dinamički shvaćene infinitezimale; 0* i svi članovi beskonačnog reda u kojem se ono javlja postaju „leteći kvantiteti", koji se ne mogu fiksirati i koji postaju manji od svake fiksirane veličine.

Lajbnic je, za razliku od Njutna, sve vreme bio „samosvesniji", svestan, naime, da se njegova vlastita shvatanja menjaju. Dok je u početku infinitezimale shvatao *statički* uviđajući obe najvažnije stvari, da to, naime, znači *negaciju Arhimedovog aksioma* i da infinitezimale treba da budu međusobno uporedive po veličini (vidi, na primer, *Leibniz 31*, str. 141), kasnije je sasvim eksplicitno odbacio infinitizam i beskonačnost prihvatio *isključivo u sinkategorematskom smislu* (izuzetak je Bog, koji je beskonačnost u hiperkategorematskom smislu (*Leibniz 16*, str. 511, *Leibniz 17*, str. 514, *Leibniz 22*, str. 543), da bi, na kraju, infinitezimale tretirao kao „korisne fikcije" (praktično već u pismu Varinjonu 1702, a eksplicitno u pismu Danžikuru (Dangicourt), od 11. septembra 1716).

Lajbnicova je zasluga što je *razdvojio* dva shvatanja, statičko i dinamičko, koja su pre toga, kao uostalom i kod Njutna, bila *zbrkana.* Samo tom zbrkom se može objasniti okolnost da mnogi autori govoreći o infinitezimalama na statički način nisu u isto vreme jasno uvideli da je tada *neophodno negirati Arhimedov aksiom.* Pogledajmo to na primeru Grigorija od Sv. Vinćenca.

Videli smo da je Grigorije prvi upotrebljavao reč „ekshaustija" i da ju je upotrebljavao u *doslovnom* smislu. Upisani paralelepipedi čija se veličina smanjuje geometrijskom progresijom, po njemu, doslovno iscrpljuju telo u koje su upisani kada ih je beskonačno. Tako se ujedno „premošćuje jaz" između pravog i krivog i Grigorije je tvrdio da je izvršio „kvadraturu kruga" (vidi *Boyer*, str. 138). Ovo opet treba uzeti *doslovno*, jer je krug, u duhu Stifela, Vjeta i Keplera, *definisan* kao poligon s beskonačno mnogo stranica.

Upisanih figura je beskonačno mnogo i veličina koja je iscrpljena „jednaka je veličini cele progresije ... produžene do beskonačnosti ...".[1] Ako bismo stvar izrazili aritmetički, po Grigoriju bi, recimo, bilo $1 + 1/2 + 1/4 + ... + 1/2^{n-1} + ... = 2$, gde je, s jedne strane, broj članova aktualno beskonačan a ne neodređeno veliki ili sve veći i veći, dok, s druge strane, postoji beskonačno mali član (ili članovi?). Infinitizam se ovde povezuje sa statički shvaćenim infinitezimalama.

No Grigorije je, s druge strane, razmišljao i dinamički, osećajući da – koliko god produžavali niz, ne možemo razliku date figure i upisanih figura učiniti beskonačno malom, već, kako je govorio Luka Valerio, uvek samo „manjom od date oblasti" (*minus superficie proposita*) (u spisu *De centro gravitatis* – vidi *Boyer*, str. 105, nap. 28). Zaista, koji je to interval $[1/2^{n-1}, 1/2^n]$ manji od svih drugih, konačnih intervala? Grigorije ovde definiše kraj (*terminus*) progresije kao nešto što „progresija ne dostiže iako se produžava beskonačno, već mu se samo može približavati više no što je određeno bilo kojim datim intervalom" (citirano prema *Boyer*, str. 137).

Grigorije, dakle, meša dva različita shvatanja, shvatanje po kojem je $1 + 1/2 + 1/4 + ... + 1/2^{n-1} + ... = 2$ gde se među članovima reda nalazi infinitezimala i shvatanje po kojem je 2 granica kojoj se niz $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, ..., 1\frac{2^n-1}{2^n}, ...$ približava do ispod svake date razlike. Čudno, ali on tvrdi da je to „ista stvar" (vidi *ibid., loc. cit.*).

Fiksirane veličine, međutim, *nisu* isto što i *promenljive veličine*. Statičke infinitezimale *nisu isto* što i dinamičke, a približavanje do ispod svake date razlike *nije isto* što i dosegnuće.

Ako tvrdimo da beskonačno veliki broj mora postojati već *samim tim što skup* prirodnih brojeva nije konačan, onda, bez obzira kako shvatamo skup prirodnih brojeva, pravimo Bernulijevu grešku (up. § 55). Beskonačni redni broj možemo uvesti, kao što je to učinio Kantor (*Cantor 6*, str. 419), uvodeći ω kao prvi ordinalni broj beskonačnog skupa, ali taj broj onda *nije više element skupa* čiji je ordinalni broj. ω nije poslednji član u nizu 1, 2, 3, ..., niti prvi beskonačni broj u *tom nizu*. Da dopuštanje beskonačnog skupa ne zahteva prihvatanje beskonačno velikog broja, to je, videli smo, Lajbnic znao (up. *Leibniz 24*, III, str. 536 i *Cantor 7*, str. 115, *Cantor 1*, str. 325, *Cantor 9*, str. 195).

Zbrka oko statički i dinamički shvaćenih infinitezimala u neposrednoj je vezi sa ovom zbirkom oko beskonačno velikog broja i beskonačnih skupova. Ako prihvatimo da je skup prirodnih brojeva beskonačan – prihvatamo da $\forall m \exists n(n > m)$, ali ne nužno i da $\exists n \forall m(n > m)$ (vidi § 6). Slično tome, ako prihvatimo da je niz 1/2, 1/4, ... beskonačan – prihvatamo da $\forall m \exists n(1/2^n < 1/2^m)$ ali ne nužno i da $\exists n \forall m\ (1/2^n < 1/2^m)$.

Ako infinitezimale shvatimo isključivo statički, onda iz prihvatanja postojanja iščezavajućih kvantiteta i iz činjenice da $\forall m \exists n(1/2^n < 1/2^m)$, gde su $1/2^m$ i $1/2^n$ vrednosti promenljive kojom je označen neki iščezavajući kvantitet, recimo Njutnovo *0*, još *ne sledi* postojanje infinitezimala. Ako, s druge strane, same ove iščezavajuće kvantitete shvatimo dinamički kao infinitezimale, utoliko što $\forall m \exists n(1/2^n < 1/2^m)$, gde su $1/2^n$ i $1/2^m$ vrednosti promenljive kojom je neki takav kvantitet označen, onda, naravno, *eo ipso*, tvrdimo i da postoje infinitezimale. Slično tome, ako beskonačno veliko shvatimo statički, kao transfinitni broj, ili kao nešto što njemu odgovara, onda iz činjenice postojanja narastajućih kvantiteta i iz činjenice da $\forall m \exists n(n > m)$, gde su m i n vrednosti promenljive kojom je neki narastajući kvantitet označen, *ne sledi* postojanje beskonačno velikog, odnosno postojanje transfinitnog broja. Ako beskonačno veliko shvatimo dinamički, kao narastajući kvantitet takav da $\forall m \exists n(n > m)$, gde su m i n vrednosti promenljive kojom je neki takav kvantitet označen, onda *eo ipso* prihvatamo i egzistenciju beskonačno velikog.

Shvatajući infinitezimale dinamički, Ojler je smatrao da one nisu nikakve misterije. Iščezavajući kvantitet je prosto kvantitet koji će postajući sve manji i manji, manji od bilo koje date veličine, postati na kraju nula – i to je sve (*Euler 2*, § 83, str. 69). Odbijajući bilo kakav *atomizam* i bilo kakve *statički shvaćene infinitezimale*, Ojler je kao poslednju vrednost za iščezavajuće kvantitete dx i dy, gde su dx i dy, dakle, postali *promenljive*, jednostavno uzimao *nulu* (*ibid.*, § 86, str. 70). Tada dy/dx postaje 0, ali 0/0 je *neodređeno* utoliko što se do nule može doći *različitim putevima*, odnosno dy/dx se može *različito menjati* kad se dx i dy približavaju nuli; odnos se, na primer, brže menja kod funkcije $y = x^3$ nego kod funkcije $y = x^2$; kod funkcije $y = x$ on se uopšte ne menja. Ispitivati ovaj *način menjanja odnosa* u približavanju graničnom odnosu 0/0 po Ojleru je zadatak infinitezimalnog računa. *Calculus* je heuristička procedura za pronalaženje vrednosti izraza 0/0, i glavni zadatak analize uopšte čini *ispitivanje međuzavisnosti veličina koje teže granicama*. Granični odnos *po sebi* je *neodređen*. I $a/0$ je neodređeno, jer nije svejedno da li je nula vrednost za dx ili dx^2; a/dx^2 je beskonačno *višeg reda* nego a/dx (*ibid.*, § 97, str. 75). Dinamičko shvatanje infinitezimala zahteva da se granični odnosi posmatraju *u zavisnosti od toga kako se funkcijski povezani kvantiteti približavaju granici*.

Sa ovako shvaćenim zadatkom infinitezimalnog računa sjajno se slaže definicija trenutne brzine koju je dao Mak Loren u *Raspravi o fluksijama*: „Brzina promenljivog kretanja u bilo kojem datom trenutku nije merljiva prostorom stvarno pređenim posle tog trenutka u nekom datom vremenu, već prostorom koji bi bio pređen da je kretanje jednoobrazno nastavljeno posle tog trenutka" (citirano prema *Boyer*, str. 233). U trenutku je brzina, naime, uvek striktno uzev jednaka nuli, ali ako uzmemo u obzir *način* na koji se odnos – promena brzine u vremenu – menjao do *izvesnog* trenutka, onda možemo da zaključimo kako *bi se* kretanje nastavilo *ako* se brzina *više ne bi menjala*. Tenutna brzina je *potencijalna brzina*, brzina kojom bi telo nastavilo da se kreće shodno promeni odnosa iščezavajućih kvantiteta.

Verovatno bi ovim i Aristotel bio zadovoljan. Tenutna brzina je potencijalna brzina, ona je nezavisna od toga šta će se dalje *stvarno* dešavati, ona je *„slika" prethodnog kretanja*, odnosno *dotadašnjg načina promene brzine* kretanja. *Zato* je 0/0 neodređeno. Iz samog odnosa 0/0, uzetog po sebi, ne vidi se dotadašnji način promene odnosa.

Dinamičko shvatanje infinitezimala omogućilo je, kao što ćemo videti, da se u Košijevoj teoriji izvoda kao granične vrednosti – a ne odnosa statičkih infinitezimala d*y* i d*x* – s punom svešću vaspostavi indefinitizam.

85. Statički shvaćene infinitezimale kao korisne fikcije

Jedan od najlepših primera filozofske samokritike predstavlja Lajbnicovo odustajanje od infinitizma. U korespondenciji s Johanom Bernulijem 1698–1699. (vidi *Leibniz 16* i *17*), on je, uviđajući sve teškoće vezane za statičko shvatanje infinitezimala, konačno obznanio da mu „izgleda da ne samo što mi ne možemo do njih prodreti, već da njih u prirodi nema, da one nisu moguće". Upravo u istom pismu (*Leibniz 16*, str. 511) on tvrdi, suprotno

Bernuliju, da „ako je dato beskonačno mnogo termina *ne sledi (podv. M. A.)* da mora postojati beskonačno mali,... i da možemo zamisliti beskonačni red koji se sastoji iz konačnih termina uređenih po opadajućoj geometrijskoj progresiji".

No, to što u beskonačnom redu čiji su članovi uređeni po opadajućoj geometrijskoj progresiji *ne mora eo ipso* biti beskonačno male razlike između članova i što, štaviše, Lajbnic, očigledno zbog raznih teškoća, poriče i *mogućnost* da ovakvih razlika uopšte bude, ne znači da se *dinamički* posmatrano razlika ne može činiti sve manjom i manjom, *manjom od bilo koje date razlike.* Imajući u vidu ovu „razliku..., u aktu iščezavanja", promenlljivi kvantitet koji smo gore označili kao *dinamičku infinitezimalu*, Lajbnic je 1702. godine u pismu upućenom Varinjonu i Pinsonu opravdavao „jezik beskonačnog i infinitezimala" (*Leibniz 3*, str. 546) gde se, na primer, „uzima da je krug pravilni poligon s beskonačnim brojem stranica".

Još 1695, u odgovoru na Niventejtovu kritiku, Lajbnic u *Acta eruditorum (Leibniz 28)* ukazuje na „suvišnu preciznost" kritike i poziva se na to da „infinitezimale" ne „označavaju ništa drugo do kvantitete velike ili male toliko koliko se želi". U navedenom pismu Varinjonu 1709. godine on pomoću *analogija* sasvim jasno objašnjava ulogu *statički shvaćenih infinitezimala* kao „nečeg *idealnog* čega u prirodi nema", ali „što ipak vlada realnim" (*Leibniz 22*, str. 544).

Varinjon se u prethodnom pismu Lajbnicu, iz 1701, brine zbog glasina (iza kojih, kaže, stoji opat Galoa) po kojima je Lajbnic navodno izjavio da se izrazi „diferencijal" ili „infinitezimala" odnose na „doduše vrlo male ali ipak konstantne i određene veličine, kakve priliče, na primer, Zemlji u odnosu na nebeski svod ili zrncu peska u odnosu na Zemlju", dok je on, Varinjon, *„kao beskonačno malo* ili kao *diferencijal* neke veličine označio ono s obzirom na šta je ta veličina neiscrpna" (u pismu od 28. novembra 1701). Varinjon, dakle, infinitezimale shvata *doslovno, realno* i *statički* i brine se da ih Lajbnic možda ne uzima *nedoslovno* ili kao *nerealne*. Lajbnic u odgovoru prhvata analogije koje se pominju i ne demantuje „glasine", već samo objašnjava smisao analogija, iz kojih se objašnjenja vidi da on infinitezimale ili shvata dinamički, ili ih, kad ih uzima statički, dopušta samo *komparativno* s obzirom na željeni stepen aproksimacije, i ne doslovno.

„Neuporedivo male veličine", kaže Lajbnic, „nipošto nisu konstantne i određene, nego im, štaviše, budući da se mogu uzeti tako male kako se samo želi, u geometrijskim razmatranjima pripada ista uloga kao i beskonačnostima u strogom smislu. Ako bi, naime, neki protivnik hteo odreći valjanost našim teoremama (*dokazanim infinitezimalnom metodom – M. A.*), onda naš račun pokazuje da je greška manja od bilo koje date veličine, jer je u našoj moći da u tu svrhu dovoljno smanjujemo neuporedivo malo – ono se, naime, uvek može uzimati tako malo kako se želi" (*Leibniz 22*, str. 543).

Nigde se ne vidi jasnije nego ovde kakva može biti korist od *infinitezimala kao fikcija*. Ako govorimo o veličinama izvesnog reda, kao što je, recimo, red veličine Zemlje, onda možemo zanemariti greške na nivou veličine zrna peska i sve razlike na tom nivou – do veličine zrna peska – možemo tretirati *kao beskonačno male*. Ako u nekoj kalkulaciji te greške ne možemo zanemariti, onda se možemo spuštati još dalje, prihvatajući aproksimaciju na nižem nivou. I tako dalje, bez kraja. Unutar *izvesnih* granica aproksimacije pravo i krivo *mogu* biti *isto*, a da u nekim *drugim* granicama aproksimacije to *ne bude* tako; dy/dx, gde dx i dy posmatramo statički, izražava odnos onih veličina koje *mogu biti zanemarene*, i utoliko što to tako samo *može* biti, dy/dx ostaje *odnos* kao i $(d)y/(d)x$, dakle, isto što i svaki konačan odnos. Ali *ti isti* dy i dx, kao *zanemarljive* veličine *unutar izvesnih granica aproksimacije*, predstavljaju *infinitezimale*, dok odnos dy/dx izražava,

recimo, koeficijent pravca tangente koja spaja tačke koje su *s obzirom na te granice aproksimacije nerazlučive*, to jest bez odstojanja (*indistantes*). Luk krive i tangenta koji obuhvataju *te* tačke nerazlučivi su unutar ovih granica i *utoliko* krivo postaje pravo.

Ako izračunavamo površinu pod nekom krivom u intervalu $[a, b]$, onda se u $\int_a^b f(x)dx$ pojavljuje dx koje se može učiniti manjim od svake date veličine, i *utoliko greška zbog zanemarivanja* manjom od svake unapred date greške. *Koliko god* protivnik *povećavao preciznost* ne može nas onemogućiti da *ispravimo grešku*.

Po sebi neuporedive ili nedostižne veličine za Lajbnica *više ne postoje*, utoliko u prirodi nema infinitezimala shvaćenih doslovno i statički i utoliko Lajbnic *ne negira Arhimedov aksiom*. No, infinitezimale možemo shvatiti i *dinamički*, kao što se to čini u malopređašnjem citatu, a *statički shvaćene infinitezimale* zadržati kao *korisne fikcije (fictions utiles)*, kao *komparativno dovoljno male veličine s obzirom na neke prethodno određene granice preciznosti.*

86. Statičke infinitezimale u savremenoj nestandardnoj matematičkoj analizi

Kao što ćemo imati prilike da vidimo u kratkom pregledu formiranja standardne analize, statički shvaćene infinitezimale su i posle Njutna i Lajbnica bile u igri, ali je postojala opšta i vrlo izražena tendencija da se one izbegnu i da se zadrže isključivo dinamički shvaćene infinitezimale. To je vidljivo upravo na najznačajnijem mestu kod Košija, čija je definicija izvoda kao osnova celog infinitezimalnog računa data unutar teorije granične vrednosti koja je indefinitistička i u kojoj se infinitezimale pojavljuju samo u dinamičkom smislu.

S Bolcanom, Vajerštrasom, Dedekindom i Kantorom i svim onim što potom sledi matematička analiza je utemeljena na teoriji skupova ili teoriji realnih brojeva u kojima se krenulo – ne putem odbacivanja Arhimedovog, već putem odbacivanja Zenonovog aksioma, i tako je, kao što ćemo videti, nastupila era infinitizma bez infinitezimala, u kojoj su ove postale isključivo istorijska vrednost koja se pominje u udžbenicima i koja je sačuvana u nazivu „infinitezimalni račun". Bez obzira da li su beskonačnosti shvatane platonistički, kao aktualno postojeće, ili su tretirane fomalistički, kao u Hilbertovom programu, bez obzira da li je teorija brojeva zasnivana logistički, da li na teoriji skupova ili bez nje – uopšte, bez obzira na čitav niz raznovrsnih programa, za infinitezimale više nije bilo mesta.

Šezdesetih godina našeg veka pominjanje infinitezimala bi, verovatno, kod svakog iole obrazovanijeg matematičara izazvalo asocijacije na naivnost ili prošlost, a onda je u predavanjima Abrahama Robinsona, potom i u knjizi *Nestandardna analiza*[1] iz 1966. godine, na scenu stupio nov način matematičke analize, u kojoj su glavnu ulogu ponovo zaigrale upravo infinitezimale i to statički shvaćene. Ovaj način analize je uzeo bar toliko maha[2] da se može reći da su naivni oni koji misle da u matematici ima definitivno pokopanih teorija.

Sredstva razvijene matematičke logike, posebno teorija tipova, teorija modela i teorema kompaktnosti, omogućila su Robinsonu da sa lakoćom napravi proširenje (*enlargement*) modela N standardne aritmetike do strukture $^*N$ koja sadrži i beskonačne prirodne brojeve, kao i polja R realnih brojeva do polja $^*R$ koje sadrži i infinitezimale.

Strukture *prvog reda* su strukture u kojma se na uobičajen način interpretira jezik prvog reda, jezik koji sadrži samo individualne promenljive, ne i promenljive koje bi prelazile preko takvih entiteta kao što su skupovi, svojstva, relacije, funkcije i slično.

Shodno Kvajnovoj devizi (vidi *Quine 2*), u ontologiji ovakvih struktura primarno se priznaju samo individue (pojedinačnosti) na koje se može referirati bez referiranja na bilo šta drugo, dok se svi drugi entiteti, kao skupovi, relacije, svojstva itd., potom određuju *ekstenzionalno*, kao skupovi ovih individua, nizovi ovih individua određene dužine itd. Obično se prvo formira Dekartov proizvod skupova, a onda se na njemu definišu relacije kao uređene n-torke elemenata skupova, svojstva kao relacije dužine jedan, funkcije kao relacije određenog tipa – recimo, funkcija $y=f(x_1,...,x_n)$ je relacija R $(x_1, ..., x_n, y)$ takva da $R(x_1,...,x_n,y)$ važi ako i samo ako je y jednako $f(x_1,...,x_n)$, itd.

No već kod ovakvih struktura se u teoriji modela, specijalno u teoriji ultraprodukata (vidi *A. Robinson 1*, 2.1. i 2.2.), formira njihov skup $Q = \{M_v\}$ (gde je v prelazi preko nepraznog skupa indeksâ) i pretpostavlja se da su strukture $M_1, M_2, ...$ iz ovog skupa *slične* u tom smislu što su na njima definisane *iste* relacije. Trenutno je za nas značajno to što ove relacije *nisu* iste u *ekstenzonalnom pogledu* već su iste utoliko što mogu predstavljati *interpretacije istih formula* nekog formalnog jezika prvog reda. To će omogućiti da se uvede pojam proširenja neke strukture M u $^*M$ tako da formule koje su bile dopustive i zadovoljene u M budu dopustive i zadovoljene i u $^*M$, ali *ne nužno jedino tako* što se na mesta promenljivih u formulama stave konstante kao imena za individue strukture M, i neki put *upravo ne tako*. Videćemo baš na primeru interpretacije Arhimedovog aksioma šta to znači.

Za neprotivrečno proširenje strukture centralni značaj ima takozvani *princip konačnosti*, koji je kao teoremu, pod imenom „*teorema kompaktnosti*", za predikatski račun prvog reda dokazao Maljcev 1936. godine (vidi *Malcev*). Teoremom se tvrdi da je neki skup rečenica predikatskog računa neprotivrečan, a to znači da ima model, ako je svaki konačan podskup tog skupa neprotivrečan. Znači, ako neki jezik prvog reda hoćemo da interpretiramo u nekom beskonačnom modelu, eventualnu protivrečnost moramo detektovati u *nekom konačnom segmentu* interpretacije.

Kako se u nekim interesantnim delovima matematike, pa i u teoriji realnih brojeva, vrši kvantifikovanje skupova – kao u aksiomu indukcije recimo, gde se pominju „svi podskupovi prirodnih brojeva", ili u takozvanom Dedekindovom aksiomu, gde se govori o uređenim parovima skupa realnih brojeva – Robinson želi da standardne strukture N i R tretira kao strukture *višeg reda.* To znači da će pored individua koje su entiteti nultog tipa morati da se pojave i entiteti tipa $\tau_1, ..., \tau_n$ (n je ceo pozitivan broj) (*A. Robinson 1*, str. 20). Tako će model M postati skup $\{B_\tau\}$ takav da za neki (neprazan) skup individua A, svaki B_τ predstavlja podskup od A_τ, dok je uvek $B_0 = A_0 = A$, gde je B_0 i A_0 označavaju skupove entiteta nultog tipa, to jest individua.

Značajno je uočiti da ako je model $\{B_\tau\}$ struktura određena na nekom skupu individua $A{=}A_0$, onda *sve* individue predstavljaju individue strukture $\{B_\tau\}$, to jest $B_0 = A_0 = A$, ali to *ne važi* nužno za entitete tipa $\tau \neq 0$. Ako $B_\tau = A_\tau$ za svako τ, onda se struktura $M = \{B_\tau\}$ naziva *puna (full)* struktura.

Razlika *punih* i *nepunih* struktura izvanredno je značajna kod *proširenja* neke strukture M višeg reda do neke strukture $^*M$ koja *osim* individua iz M obuhvata i *nove* individue. Ako je neki formalizovani jezik višeg reda interpretiran u M i ako je neka rečenica u kojoj se pojavljuju entiteti tipa $\tau = 0$ dopustiva i istinita u M, ona će kod proširenja M u $^*M$ takođe biti dopustiva i istinita, ali $^*M$ *ne mora biti puna struktura,* što znači da formula kojom je rečenica izražena, a koja sadrži, recimo, n-torke sa simbolima tipa τ ($\tau \neq 0$), iako zadovoljena za sve n-torke iz M *ne mora biti zadovoljena* za sve moguće n-torke iz $^*A$, jer B_τ može biti *pravi* podskup od A_τ, to jest kartezijanski proizvod $B_{\tau_1} \times B_{\tau_2} \times ... \times B_{\tau_n}$ može biti *pravi podskup* od $A_{\tau_1} \times A_{\tau_2} \times A_{\tau_n}$.

Relacije tipa v osnovane na $^*A$ koje pripadaju $^*B_\tau$, *unutrašnje* su ako $^*B_\tau \subset A_\tau$, a onda postoje i relacije tog tipa koje pripadaju samo razlici $^*A_\tau - {}^*B_\tau$, koje se nazivaju *spoljašnje* (*ibid.*, str. 42). To važi i za funkcije i za sve ostale entitete iz M, odnosno $^*M$. Rečenica koja počinje sa „za svaki entitet tipa τ..." istinita u M i $^*M$, može neki put u $^*M$ biti istinita samo ako se interpretira *s obzirom na unutrašnje* entitete iz $^*M$.

Teorema kompaktnosti proširena je i na jezike višeg reda. To je učinio Henkin 1950. godine (vidi *Henkin*).

Da bi se od uobičajene strukture N, koja predstavlja standardni model aritmetike, dobila struktura $^*N$ sa *beskonačnim prirodnim brojevima, dovoljno je* skup individua iz N proširiti individuama, odnosno brojevima za koje važi da su veći od svih prirodnih brojeva iz N. Sve ostalo *rešeno je automatski* na osnovu prethodnih opštih rezultata koji se tiču proširenja struktura višeg reda. Svaki matematički pojam koji ima značenje u N ima značenje i u $^*N$, ali, kao što ćemo odmah videti, $^*N$ *nije puna struktura,* što znači da rečenice koje su istinite u N a koje se odnose na skupove, relacije, funkcije itd. treba interpretirati kao da se odnose na *unutrašnje* skupove, relacije, funkcije, itd. To ne važi za individue, odnosno brojeve, pošto se „svi brojevi" uvek odnosi na *sve brojeve,* pre proširenja na sve brojeve iz N, posle proširenja na sve brojeve iz $^*N$.

Da bismo videli šta to znači da svaki matematički pojam koji ima značenje u N ima značenje i u $^*N$, dovoljno je razmotriti operacije – shvaćene kao relacije – sabiranja i množenja, ili relaciju poretka $\leq$. Iako, naravno, sve relacije u N i $^*N$ *nisu koekstenzivne,* ipak su one *intenzionalno* gledano *iste,* što smo gore izrazili tako što smo se pozvali na *iste* formule koje su interpretirane u *različitim* strukturama – ovde su to strukture N i $^*N$. I beskonačni brojevi se mogu sabirati i množiti, i oni se mogu upoređivati. To je ono što je Lajbnic imao u vidu kada je, govoreći o infinitezimalama, tražio da *sve što važi za konačne veličine važi i za infinitezimale.*

No, pri svemu ovome, rekli smo da struktura $^*N$ *nije puna struktura*, što znači da se *ne mogu bez ograničenja* interpretirati rečenice koje govore o tipovima koji *nisu nulti*. Šta to znači, lako je videti na primeru. Svaki neprazan skup iz N ima najmanji element, ali to *ne važi* za svaki neprazni skup iz $^*N$. Ako je a transfinitno, onda je $a \neq 0$, pa je $a = b + 1$, no b ne može biti konačno, jer bi tada i a bilo konačno, pa je transfinitno b manje od a. Ne postoji najmanji beskonačan broj. Zato je skup beskonačnih brojeva *spoljašnji*, pošto je rečenica koja govori o postojanju najmanjeg elementa, istinita u N – istinita i u $^*N$ ako se *isključe* skupovi kao što je skup svih beskonačnih brojeva.

Ovaj primer pokazuje u čemu se satoji *trik* koji omogućuje da se *uvek bez protivrečnosti očuva istinitost rečenica u* $^*N$ *koje su istinite u* N. Jednostavno, struktura $^*N$ nije puna struktura, pa se rečenice poput naše rečenice o skupovima s najmanjim elementom ne interpretiraju na skupu svih skupova iz $^*N$, već se neki skupovi isključuju kao spoljašnji.

Ne održava se istinitost rečenice uvek restrikcijom, neki put rečenica, naizgled paradoksalno, ostaje istinita ako se univerzalno kvantifikovana rečenica koja govori o entitetima nekog tipa ($\tau \neq 0$) na koje se kvantifikator odnosi interpretira tako da se odnosi na *sve moguće entitete tog tipa* iz $^*N$! To je upravo slučaj sa Arhimedovim aksiomom i utoliko bi moglo izgledati da u ovakvoj nestandardnoj aritmetici Arhimedov aksiom i dalje važi.

Arhimedov aksiom tvrdi, interpretiran u strukturi N, da za svaki par prirodnih brojeva a i b takvih da $0 < a < b$, postoji prirodani broj n takav da je $b < na$. Ako tu rečenicu interpretiramo u $^*N$ tako da se odnosi na sve moguće parove a i b brojeva iz $^*N$ ($0 < a < b$), onda je rečenica istinita, jer i ako je a konačno a b

transfinitno, n može biti dovoljno veliki beskonačni broj tako da bude $b < na$.

Ali, Arhimedov aksiom je očuvan na ovaj način *krajnje formalno*, i ako uzmemo u obzir *intenciju* s kojom je on prvobitno formulisan, onda ćemo shvatiti da je proširenjem N u $^*N$ on u stvari negiran.[3] Arhimedov aksiom se odnosi na *dosezivost*, a ona je uvek podrazumevala *konačan* broj koraka, tako da n ne može biti beskonačan broj. Tako, ako je a konačan a b beskonačan broj, onda nikad ne važi da je $b < a + a + a + \ldots + a$ (n puta). Stvar je u tome što se ova intencija *ne vidi* u formulaciji rečenice za model N, pošto u N i nema beskonačnih brojeva da bi trebalo uvoditi kvalifikaciju da n treba da je konačno; poučan primer da se vidi kako bi se tek *reformulacijom* moglo u $^*N$ ostvariti *značenje intendirano* u formulaciji za N.

Prelazimo na nestandardni model analize $^*R$, u kojem se kao posledica proširenja N u $^*N$ pojavljuju *infinitezimale*.

$^*R$ je uređeno polje kao i R, ali $^*R$ kao i $^*N$ nije puna struktura. Među brojevima iz $^*R$ *konačni* su oni za koje postoji *standardni* realni broj m, znači $m \in R$, takav da je $|a| \leq m$, gde je za svako x apsolutna vrednost $|x|$ standardna funkcija u $^*R$ koja je proširenje odgovarajuće standardne funkcije iz R. *U ovom smislu* su i infinitezimale konačni brojevi i zajedno su sa standardnim brojevima suprotstavljene beskonačnim (transfinitnim) brojevima. Svaki broj a za koji prethodni uslov koji se odnosi na postojanje standardnog m takvog da $|a| \leq m$ nije zadovoljen – *beskonačan je.*

Infinitezimalu kao broj $a \in {}^*R$ lako je definisati: a je infinitezimala ako je $|a| \leq m$ za sve pozitivne brojeve m iz R (tako je i nula infinitezimala, ali se ona po volji može isključiti) Broj r iz $^*R$ je infinitezimala ako i samo ako je $1/r$ beskonačni broj.

U $^*R$ je lako uvesti relaciju *beskonačne blizine* brojeva koja je Lajbnicu toliko bila potrebna. Prosto, ako je razlika $a - b$

infinitezimala, onda je b *beskonačno blizu* a, ili: $a \simeq b$. „$\simeq$" je Fermaov *adaequalitas*, samo u eksplicitno *statičkom* smislu, jer su a i b *konstante* i odnose se na *fiksirane* brojeve, a ne na iščezavajuće kvantitete.

Dok je u standardnoj analizi, uz hipotezu kontinuuma, prava shvaćena kao skup euklidskih tačaka kojih ima $2^{\aleph_0}$, koje su obostrano jednoznačno korespondirane elementima polja realnih brojeva R, u nestandardnoj analizi se pored euklidskih tačaka *mogu definisati* i „tačke s veličinom" o kojima su govorili Galilej i Lajbnic (*Galilei*, str. 82, *Leibniz 31*, str. 139–141), za koje bi se moglo reći da kao virtualni entiteti tvore kontinuum, to jest pravu, kako je to mislio Lajbnic.[4]

Da bi se definisale monade i potom kontinuum koji bi ih sadržavao, i ne bi bio samo skup standardnih tačaka, dovoljno je prethodno dokazati da se svaka klasa ekvivalencije[5] A iz modula skupa konačnih brojeva M_0 iz $^*R$ i skupa infinitezimala M_1 može preslikati na standardni realni broj koji je u njoj sadržan, čime se obezbeđuje *izomorfizam* između količnika M_0/M_1 i polja standardnih realnih brojeva.

Umesto samog dokaza, koji nije komplikovan (vidi A. *Robinson 1*, str. 56), pozabavićemo se odmah tumačenjem onoga što on sadrži.

Govoreći o klasi ekvivalencije iz M_0 moduo M_1 govorimo o modulima $|r_1 - r_2|$, gde su r_1 i r_2 članovi skupa svih konačnih brojeva iz $^*R$, a moduli treba da pripadaju skupu infinitezimala M_1. Lako je videti da ne mogu i r_1 i r_2 biti (različiti) standardni realni brojevi, jer tada $|r_1 - r_2|$ ne bi bila infinitezimala. Ne može se odmah, bez dokaza, uvideti zašto mora postojati bar jedan standardni realni broj koji se pojavljuje u klasi ekvivalencije o kojoj je reč, ali je jasno da je to u vezi sa Dedekindovim presekom (vidi *Dedekind 2*, § 4), jer nam on omogućava da proizvedemo standardni

realni broj r *dovoljno blizu* proizvoljnom nestandardnom broju a iz klase ekvivalencije A, tako da a-r bude infinitezimala.

Ako svaka klasa ekvivalencije A sadrži standardni broj r, onda to govori nešto zanimljivo o *„gustini"* standardnih realnih brojeva, odnosno standardnih realnih tačaka. S jedne strane, ovaj je skup, iako s obzirom na R „svuda gust",[6] ipak moguće „obogatiti" *novim* međubrojevima, a onda se možemo pitati da li to znači i „popunjavanje" prave novim tačkama – tako što se R proširi u $^*R$ – ali, s druge strane, ovi novi brojevi, odnosno eventualne nove tačke, ipak ne mogu samostalno sačinjavati neki kontinuirani deo polja $^*R$, odnosno odgovarajuće prave, jer je R ipak dovoljno gusto da se u svakoj klasi ekvivalencije M_0 moduo M_1 nalazi jedan standardni realni broj. Za svaki nestandardni broj – odnosno njemu odgovarajuću tačku – koji je konačan, postoji jedinstveno određen standardni realni broj koji mu je beskonačno blizu. Ovo savršeno odgovara načinu na koji je Lajbnic shvatao *odnos* između monade, odnosno delova monade, i euklidski shvaćenih tačaka (*Leibniz 5*, str. 149, *Leibniz 4*, str. 351–352, *Leibniz 12*, str. 535–536). Monade kao jedinice imaju, s jedne strane, osobine tačaka, što u nestandardnoj analizi odgovara činjenici da za svaki nestandardni konačni broj postoji jedinstveni standardni broj (tačka) koji mu je beskonačno blizu, dok, s druge strane, iako monada, budući da nije euklidska tačka, ima delove, ovi delovi monada nisu samostalni[7], što u nestandardnoj analizi odgovara činjenici da mora postojati *standardni deo* r unutar svakog beskonačno malog rastojanja pošav od bilo kojeg nestandardnog a, $r = \mathrm{st}(a)$, ili kraće $r = {}^0a$ (A. *Robinson 1*, str. 57), koji predstavlja jezgro od kojeg je a u izvesnom smislu neodvojivo; formalno izraženo r *nužno pripada* klasi ekvivalencije iz M_0 moduo M_1 kojoj i a pripada.

S obzirom na ovakav odnos „delova monade", *monada* se sad može jednostavno *definisati* kao skup realnih brojeva iz $^*R$ koji su beskonačno blizu nekom konačnom broju a i to neka je označeno sa $\mu(a)$. $\mu(a)$ je klasa ekvivalencije od a u $^*R$ moduo M_1.

Da li zbilja konačni segmenti prave shvaćene na način nestandardne analize sadrže „više“ tačaka nego što bi to bio slučaj u standardnom shvatanju? Mislim da ni ovo pitanje nije nedvosmisleno, kao što nije bilo nedvosmisleno ni pitanje o tome da li je u modelu $^*N$ negiran Arhimedov aksiom.

Ako je r standardni realni broj a a infinitezimala, i ako broju $b = r + a$ odgovara neka tačka na pravoj, onda očigledno „nestandardna prava“ ima više tačaka nego „standardna“, je tački kojoj odgovara broj b ne odgovara nijedan standardni realni broj.

Međutim, nisu sve tačke nestandardne prave ravnopravne, nestandardna prava je, da se slikovito izrazim, šarena. Dok je standardni deo r monade $\mu(r)$ samostalna tačka, jer čini jedinstveno jezgro monade kao klase ekvivalencije, tačka $b = r + a$ čini „nesamostalnu“ tačku monade utoliko što je u skupu tačaka koje su beskonačno blizu tački b vezana za r kao standardni deo, $r = {}^0b$. Tako svaki konačni segment nestandardne prave sadrži onoliko „samostalnih“ tačaka koje čine jezgro monade koliko odgovarajući segment standardne prave sadrži standardnih tačaka.

Lajbnic je prihvatao da tačke ne mogu konstituisati liniju kao kontinuum „ako se nešto ne doda“ (*Leibniz 8*, str. 600, *Leibniz 9*, str. 602). U nestandardnoj analizi za pravu se može reći da se sastoji iz standardnih realnih euklidskih tačaka koje su povezane, užljebljene u kontinuum, nestandardnim tačkama koje su im beskonačno blizu.

Rekli smo da ako monade shvatimo kao „tačke s veličinom“, onda bi se moglo kazati da one čine kontinuum samo kao virtualni entiteti, a ne kao skup ili agregat, što sve takođe odgovara Lajbnicovim zahtevima (*Leibniz 6*, str. 360). Jasno je, naime, da monade nisu strogo razdvojene kao samostalni aktualni entiteti, jer one predstavljaju klase ekvivalencije sa istim ili različitim

standardnim delovima. Monada $\mu(r)$, gde je r standardni realni broj, iako je različita od monade $\mu(b)$, gde je $b = r + a$, i gde je a infinitezimala, ipak s ovom ima zajedničko jezgro koje čini standardni deo od b, naime $r = {}^0b$.

Infinitezimale su u nestandardnoj analizi shvaćene *statički* i zato „šarenilo“ prave i kontinuiranih veličina uopšte, koje se ogleda u *neravnopravnosti* standardnih i nestandardnih tačaka, omogućava da se u analizi *statički* tretiraju i oni slučajevi koji bi se u Košijevoj analizi tretirali *dinamički*. Za čitaoca koga to zanima, razmotrićemo slučajeve konvergencije nizova, kontinuiteta funkcije, diferenciranja i integriranja.

Neka je $\{S_n\}$, ili prosto S_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, standardni beskonačni niz a S kao standardni realni broj granica ovog niza unutar R, naime $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. U Košijevoj interpretaciji to znači da razlika između članova niza S_n i S pada ispod bilo koje date vrednosti kad n *teži* beskonačnosti. Razlika između članova niza i granice S predstavlja, dakle, *dinamičku infinitezimalu* – evascentni kvantitet – koji se *smanjuje* kad se n povećava. Odnos smanjivanja razlike i povećavanja n mora se *funkcijski* izraziti pomoću promenljivih, da bi se formula $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ učinila smislenom.

U nestandardnoj analizi, u kojoj n može biti i *beskonačan broj*, a razlika $S - S_n$ beskonačno mala, cela se priča o S kao granici može ispričati *statički*, bez znaka „$\to$“, koji čitamo kao „teži“, i razumeti *bez* uvođenja u igru *promenljivih* koje bi *funkcijski vezivale* povećavanje n i smanjivanje razlike $S - S_n$. Prosto, S je granica za S_n ako i samo ako važi $S_n \simeq S$ (znači, ako je S_n beskonačno blizu S) za sve transfinitne indekse n.

U $^*R$ se može dokazati kao *teorema* tvrdnja da važi $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ u klasičnom smislu ako i samo ako važi $S_n \simeq S$ za sve beskonačne indekse. Slično ovome, može se dokazati da je teorema standardne analize kojom se tvrdi da niz S_n konvergira ako i samo ako je $\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} (S_n - S_m) = 0$ ekvivalentna teoremi kojom se tvrdi da odgovarajući niz S_n konvergira u $*R$ ako i samo ako važi $S_n \simeq S_m$ za sve beskonačne indekse n i m (vidi *A. Robinson 1*, str. 63).

Štaviše, pošto je dokaz teoreme poput ove poslednje *nezavisan* od standardne definicije granica niza, granica S niza S_n se upravo *može definisati* uvođenjem uslova $S \simeq S_n$ za sve beskonačne n, to jest granica se može definisati *čisto statički*. To je moguće zato što postoje beskonačni članovi niza S_n koji se nalaze *unutar monade* $\mu(S)$ čije je jezgro kao standardni deo upravo S. Treba uočiti da je S kao granica *standardni broj* (ili tačka), dok su članovi niza S_n za beskonačne n, iako statički shvaćeni, to jest fiksirani, *nestandardni*. To je *zamena* za *približavanje* članova niza granici u Košijevoj interpretaciji.

I kontinuitet funkcije $f(x)$ u standardnoj tački x_0, $a < x_0 < b$, može se definisati *statički*, tako što se umesto *ponašanja* funkcje u okolini x_0, što je standardni Košijev dinamički pojam, monada od x_0, $\mu(x_0)$, preslika u monadu od $f(x_0)$, $\mu(f(x_0))$. Nestandardne tačke iz monada koje su beskonačno blizu (*indistantes*, kako bi rekao Lajbnic) tački x_0, odnosno $f(x_0)$, tvore kontinuum, i zato je za kontinuitet nužno i dovoljno da postoji *preslikavanje monada*, to jest funkcija $f(x)$ je kontinuirana u standardnoj tački x_0, $a < x_0 < b$, ako i samo ako važi $f(x) \simeq f(x_0)$ za sve $x \simeq x_0$.

I ostale klasične teoreme moguće je formulisati preko statički shvaćenih infinitezimala. Mi ćemo pogledati kako izgleda definicija izvoda.

Koši je *izvod* funkcije $f(x)$ u x_0 shvatio ne više kao neki njutnovski poslednji odnos, već kao broj koji predstavlja granicu odnosa $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kad se x neograničeno *približava* x_0 (vidi dole, § 91). U nestandardnoj analizi odnos $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je moguće posmatrati *u monadi* $\mu(x_0)$, tako da se *izvod* može *statički definisati* kao broj beskonačno blizu iznosu odnosa $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ u monadi $\mu(x_0)$ za sve $x \neq x_0$.

To je ono što je Lajbnic prvobitno želeo, jer je sad izvod $f'(x_0)$ funkcije $f(x)$ u x_0 beskonačno blizu odnosu diferencijala dy/dx ($dy/dx \simeq f'(x)$), ako je $f(x)$ standardna funkcija uopšte diferencijablina u x_0, $a < x_0 < b$.

n-ti izvod je $f^{(n)}(x) \simeq \frac{d^n y}{dx^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ (gde je dx^n isto što i $(dx)^n$).

Pogledajmo još kako se *statički* definiše *integriranje*. Neka je standardna funkcija $f(x)$ kontinuirana u inervalu $a \leq x \leq b$, gde su a i b standardni i $a < b$. Najpre treba izvršiti *finu particiju* intervala $[a, b]$, što je uz postojanje infinitezimala *moguće strogo odrediti* kao niz $\{x_0, x_1, \ldots, x_\omega\}$, gde je $\omega \in *N$, tako da bude $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_\omega = b$, a $x_j - x_{j-1}$ bude infinitezimala za $j = 1, 2, \ldots, \omega$.

Ova particija može da bude *unutrašnja* (u definisanom smislu – vidi str. 423) i neka je označena sa π. Neka je $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\omega$ unutrašnji niz takav da $x_j \leq \xi_{j+1} \leq x_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, \omega - 1$.

Sad možemo dobiti lajbnicovske pravougaonike (vidi gore, str. 384) *kod kojih je po jedna stranica beskonačno mala, jer je predstavljena sa* $x_j - x_{j-1}$, *dok je druga stranica* $f(\xi_j)$. Treba samo napraviti sumu svih pravougaonika u intervalu koji je izdeljen finom particijom i dobićemo $\int_a^b f(x)dx$, naime, $S(\pi, \xi) = \sum_{j=1}^{\omega} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ predstavlja *proširenje* u $*R$ sume $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ i može se dokazati $\int_a^b f(x)dx \simeq S(\pi, \xi)$ (vidi *A. Robinson 1*, str. 72), odnosno definisati $\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} {}^{\circ}S(\pi, \xi)$.

Možda se upravo ovde, u integriranju, vide vrline statičkog pristupa infinitezimalama, jer je intuitivno gledano *suma statički pojam*[8] i potrebni su nam *gotovi elementi*, lajbnicovski pravougaonici, za sumaciju. No tu se ujedno vidi i značaj „šarenila“ nestandardnog prostora i okolnosti da svaka monada ima jedan i samo jedan standardni deo. Naime, zahvaljujući tome rastojanja određena finom particijom π mogu da budu *beskonačno mala* tako da tvore jednu stranicu pravougaonika koji ulazi u *sumaciju* a da pri tom *ipak* u klasu ekvivalencije u koju spada moduo njihove razlike ulazi *samo jedna* standardna vrednost za x koju uzima funkcija $f(x)$, a čija *vrednost* $f(\xi_j)$ predstavlja drugu stranicu *pravougaonika*.

Kada sučeljavamo teorije infinitezimala sa Zenonovim dokazima protiv mnoštva, onda, pošto se bavimo infinitizmom, infinitezimale treba uzimati doslovno i statički, ne dinamički i ne samo u sklopu nekog heurističkog metoda ili formalnog sistema.

U okviru aristotelovsko-euklidovskog stvaranja tačaka Zenonov aksiom *ex nihilo nihil* praktički nije osporavan do druge polovine devetnaestog veka, do radova Vajerštrasa, Dedekinda i Kantora. Ako se linija shvatala kao sastavljena iz tačaka, onda su te tačke, kao kod Toričelija (vidi *Boyer*, str. 134) ili ranog Lajbnica (*Leibniz 31*, str. 141), imale izvesnu, makar infinitezimalnu, veličinu.

U nestandardnoj analizi sudbina Zenonovog aksioma suprotna je, u izvesnom smislu, sudbini Arhimedovog. Videli smo da Arhimedov aksiom u $^*R$ nije negiran utoliko što je rečenica kojom je on izražen u R istinita i u $^*R$, ali da je s obzirom na intendirano značenje on u stvari negiran. Mislim da je, nasuprot tome, Zenonov aksiom s obzirom na intendirano značenje u jednom relevantnom smislu sačuvan, iako se može formulisati rečenica istina u R, koja je istinita i u $^*R$, kojom se on negira.

Shodno standardnoj topološkoj definiciji jednodimenzionalnog linearnog kontinuuma koja se osniva na teoriji skupova (vidi *Menger*, str. 118–130), za svaki segment prave se može reći da predstavlja „uniju nerasprostrtih jediničnih skupova tačaka“. S obzirom na to da su jedinični sklupovi tačaka u stvari tačke, da su te tačke nuladimenzionalne i da je unija kao skup takvih skupova u stvari skup takvih tačaka, u R je Zenonov aksiom negiran. No, rečenica kojom je izražena standardna topološka definicija linearnog kontinuuma istinita je i u $^*R$, samo jedinični skupovi tačaka nisu više jedinični skupovi standardnih, već i standardnih i nestandardnih tačaka. Utoliko je Zenonov aksiom negiran i u $^*R$.

Ali, između standardnih i nestandardnih tačaka postoji značajna razlika, zbog koje bi se, izgleda, moglo reći da s obzirom na svoje prvobitno intendirano značenje Zenonov aksiom u $^*R$ u stvari nije negiran. Indirektnu potvrdu za to nalazimo kod Lajbnica, koji je stalno, svesno i eksplicitno (*Leibniz 8*, str. 600, *Leibniz 19*, str. 656) usvajao da se kontinuum ne može sastaviti iz euklidskih tačaka i utoliko se držao intendiranog značenja Zenonovog aksioma, dok je, s druge strane, već u pokušajima iz 1671. godine (*Leibniz 31*), priznavao da tačke s veličinom (koje su kasnije postale monade) imaju delove, samo nesamostalne jer su oni jedni drugima beskonačno blizu, to jest bez rastojanja (*indistantes*).

U ovom trenutku je ključna razlika između standardnih i nestandardnih tačaka razlika u pogledu njihove *samostalnosti*. Ako neku posmatranu pravu tretiramo kao model za $^*R$, onda standardnim brojevima nećemo moći da iscrpimo sve tačke te prave, ali s druge strane, nećemo na njoj moći da fiksiramo nijednu nestandardnu tačku! Ako je fiksirana neka standardna tačka r i ako treba da fiksiramo bilo koju tačku različitu od r, ona će biti standardna, jer je svaka fiksirana tačka konačno udaljena od r. Ako je pak dat nestandardni broj a i ako treba da ga „pronađemo“ na datoj pravoj, najviše što ćemo učiniti jeste da ćemo pronaći $r={}^{\circ}a$, to jest standardni deo monade kojoj a pripada. Slikovito govoreći, možemo reći da je nestandardna prava ne samo „šarena“ već i „neravna“, tako da kad god hoćemo da nabodemo nestandardnu tačku nužno skliznemo na dno jame u kojoj se nalazi standardna. U ovom, vrlo *specifičnom* smislu, za nestandardni prostor ne važi da je izotropan.

Ako se u Zenonovom aksiomu, pa onda i u njegovoj negaciji, podrazumeva uslov o samostalnosti entiteta niže dimenzije iz kojih se može, odnosno ne može, sastaviti entitet više dimenzije, i ako samostalnost uzmemo u najslabijem smislu, u smislu u kojem se tačke na pravoj mogu bar fiksirati, onda pod tim uslovom i u tom smislu nestandardna prava ne može da se sastavi iz tačaka, jer su u tom smislu samo standardne tačke samostalne, pa je moguće dati i *reformulaciju* Zenonovog aksioma u $^*R$ kojom bi on ostao očuvan.

Što se tiče pitanja o pravoj jedinici, očigledno je da je infinitezimala po definiciji κυρίως ἕν *ako* je, kao kod ranijih infinitista, prosto nedeljiva. No lako je videti da se teškoće odgovarajućih atomizama kojima smo se bavili ne smanjuju time što bi nedeljivi entiteti, pored toga što su nedeljivi, bili još i beskonačno mali. Osim toga, videli smo koliko je sa stanovišta samog infinitezimalnog metoda neophodno da i infinitezimale budu deljive. Pitanje o κυρίως ἕν postaje zanimljivo u razvijenoj teoriji geometrijskih infinitezimala kod Lajbnica i u nestandardnoj analizi.

Prostor sam po sebi, kao i vreme, bili su za Lajbnica samo mogućnosti (vidi *Leibniz 11*, str. 519, *Leibniz 12*, str. 535–536, *Leibniz 19*, str. 565, *Leibniz 32*, str. 25–26), što je on najslikovitije izrazio tvrdnjom da bi oni bili samo Božje ideje, kao puke mogućnosti, kada bi postojao jedino Bog (vidi *Leibniz 32*, Peto pismo Klarku, 106 *ad* 41). Za takav prostor mogućnosti svakako važi da je izotropan, po principu *identitas indiscernibilium*, i u njemu se može govoriti samo o euklidskim tačkama. No *realna* se razlika uvodi nekim određenim „zakonom kontinualne serije" (*Leibniz* 6, str. 360), $y = f(x)$; tako se $y = x^2$ razlikuje od $y = x^3$ i to, prema Lajbnicu, i *konstituentnim jedinicama*. Iz euklidskih tačaka se linija ne može sastaviti – po Zenonovom aksiomu – pa ostaje da su tačke s veličinom, koje su beskonačno male, *različite* u *različitim* slučajevima. Beskonačno mali delovi koji konstituišu strmiju parabolu razlikuju se od beskonačno malih delova koji konstituišu mirniju. Beskonačan broj *određenih* tačaka s veličinom tvori određenu liniju; zatim se analogno stvar proširuje na *određene* površine i *određena* tela. U kojem smislu bi ove tačke mogle biti κυρίως ἕν?

Svestan da u pogledu oblika i uporedivosti infinitezimale moraju imati sve osobine običnih konačnih veličina, Lajbnic nije izjednačavao infinitezimale s pravim jedinicama i princip individuacije za prave jedinice prostora nije tražio u nedeljivosti.[1] Ne mogavši da nađe neki takav zadovoljavajući princip, Lajbnic je na kraju zadržao monade kao prave jedinice svoje metafizike, ali ih više nije smatrao konstituentama složenih, prostornih supstancija (vidi, naročito *Leibniz 9*, str. 602) i u učenju o „fenomenima" u prostoru priklonio se, kao što smo videli, indefinitizmu (vidi naročito pisma de Volderu – *Leibniz 12*, str. 535–536, *Leibniz 13*, str. 539), pozivajući se na Demokritovu razliku νόμῳ-φύσει (u pismu de Volderu od 20. juna 1673 – G., II, 248–253); nijedna prostorna jedinica nije jedinica φύσει, već samo νόμῳ.

Za razliku od Lajbnicovog negativnog rezultata potrage za principima individuacije monada kao pravih prostornih jedinica, u nestandardnoj analizi smo se sreli sa definicijom monade koja prirodno sledi Lajbnicove ideje a pruža mogućnosti, kako izgleda, da se na izvestan način opravda njen status prave jedinice.

Monada $\mu(a)$ je klasa ekvivalencije od a u $^*R$ moduo M_1, gde je M_1 *potprsten* (vidi *A. Robinson 1*, str. 56–57) prstena M_0 konačnih brojeva iz R, odnosno monada $\mu(a)$ je skup svih realnih brojeva iz $^*R$ koji su beskonačno blizu a. Poenta ove definicije je u tome što skup euklidskih tačaka koje tvore κυρίως ἕν vezuje s jedne strane, za *određenu euklidsku tačku a*, dok s druge strane, taj skup *ograničava beskonačnom blizinom* toj tački. Donja granica određena je euklidskom tačkom i tu se, izvesno, niže ne može ići. Gornja granica određena je beskonačnom blizinom i, pod pretpostavkom da je taj pojam kontrastiran konačnoj udaljenosti, koja važi za standardne tačke, i to je dovoljno fiksiran graničnik. U tom smislu monada je dovoljno dobro određeno κυρίως ἕν.

a u $\mu(a)$ ne mora biti standardno, ali $\mu(a)$ ima nužno jedan i samo jedan standardni deo. U izboru monada na datoj pravoj mi možemo poći i od standardnih tačaka, ali ćemo uvek zahvatiti jednu i samo jednu samostalnu tačku, tačku koju ćemo ili direktno „nabosti" ili ćemo u nju nužno „skliznuti". Monade $\mu(a)$ i $\mu(b)$ se mogu razlikovati po tome što je $a \neq b$, a da ipak imaju zajedničko samostalno jezgro, to jest standardni deo. Tako monada nije samo *definicionalno* dobro fiksirana izborom neke euklidske tačke, već ona *nezavisno* od toga ima svoje jezgro koje je čini „pravom jedinicom".

Kakvog su oblika monade? Ograničimo se na nestandardni dvodimenzionalni euklidski prostor, koji je nearhimedovski u smislu u kojem smo videli da je Arhimedov aksiom negiran u $^*R$. Standardni euklidski arhimedovski dvodimenzionalni prostor je izotropan, a tačke, koje su u njemu prave jedinice, nerasprostrte su i nemaju nikakav oblik, pa, sledstveno tome, nikakvo uvođenje nekog zakona, zakona neke „kontinualne serije" $y = f(x)$, kako ga naziva Lajbnic (*Leibniz* 6, str. 360), ne može uticati na promenu njegove mikrostrukture. No, Lajbnic je, kao što smo videli, mislio da se stvar menja u slučaju „tačaka sa veličinom" kad se uvedu zakoni tipa $y = f(x)$; takve „tačke" se, naime, međusobno mogu razlikovati kako s obzirom na *različite vrednosti* koordinata iste kontinualne serije tako i s obzirom na *različite zakone* kontinualnih serija. Mislim da se i ova Lajbnicova ideja može operacionalizovati u nestandardnoj analizi, jer se monade uvođenjem nekog zakona mogu razlikovati po veličini, pa se onda, u izvesnom smislu, može menjati i *oblik* monada, bilo tako što se time mogu razlikovati beskonačno male okoline *različitih* standardnih tačaka neke krive bilo tako što se monade s *istim* standardnim delom kao jezgrom mogu razlikovati s obzirom na različite zakone kontinualnih serija. Neka je, na primer, zakon kontinualne serije određen kao $y = x^2$. Uspon ove kive različit je u različitim tačkama a to znači da se $\mu(y_1)$ i $\mu(y_2)$ mogu razlikovati dok se $\mu(x_1)$ i $\mu(x_2)$ ne razlikuju; dy/dx, naime, *nije isto* u oba slučaja iako dx uzimamo kao *uvek isto*. Time se uvodi i izvesna razlika u obliku utoliko što je u slučaju krive $y = x^2$ monada sa standardnim delom (1, 1) *manje izdužena* nagore, da tako kažemo, nego monada sa standardnim delom (2, 2).

U skladu je s Lajbnicovim mišljenjem da bi postor i vreme bili samo Božje ideje kad bi samo Bog postojao – jer oni kao polje mogućnosti nemaju realnosti po sebi – to što ni monade *bez nekog zakona* kontinualne serije ne bi trebalo da imaju oblik. *Jedna jedina monada po sebi ne može imati oblik,* ona može *steći oblik* samo nekom *realnom razlikom* koja je izražena nekim *principom individuacije,* a ovaj je uvek dat nekim *zakonom kontinualne serije* $y = f(x)$.

Osim toga što je tvrdio da se od nečega što je bez veličine ne može sačiniti ništa što bi imalo veličinu i što je poricao postojanje prave jedinice (koja bi eventualno bila konstituent mnoštva), Zenon je, videli smo, tvrdio da je nemoguće da se neki ograničen predmet sastoji od beskonačno mnogo delova. Problem prekrivanja konačnog rastojanja beskonačnim skupom manjih i/ili beskonačno malih – infinitizam sa infinitezimalama ne rešava ni u jednoj varijanti.

Stara formula kojom se konačno rastojanje konstituiše iz beskonačno mnogo beskonačno malih rastojanja liči na ono što je Vitrou (*Whitrow 1*, str. 205 i dalje), sledeći ironičnu Barklijevu primedbu (up. *Berkeley 4*, str. 33, 39) i ozbiljnu Lagranžovu teoriju (vidi *Boyer*, str. 251), nazivao „*kompenzacijom fikcija*". Jedna fikcija, što bi ovde bila infinitezimala, postaje konstituent konačnih razdaljina uz pomoć druge. Pošto, naime, nijedan konačan skup infinitezimala ne može dati nikakvu konačnu veličinu, uzima se da to ostvaruje njih beskonačno mnogo.

Ako, međutim, ovu staru formulu pokušamo da razumemo *doslovno*, javiće se niz teškoća koje su takoreći sažetak svih glavnih teškoća teorije infinitezimala doslovno shvaćenih.

Ako bi neko rastojanje AS trebalo da se prekrije nizom S_n čija je granica S i koji osim konačnih sadrži i transfinitne indekse (za koje je $S_n \simeq S$), onda je teškoća pre svega u tome što, ukoliko ne načinimo „Bernulijevu grešku", postoji zenonovska „rupa" između članova s konačnim i članova s transfinitnim indeksima. Ako se problem *pomeri* tako da se govori samo o infinitezimalama kao konstituentama, onda se pojavljuje „rupa" između infinitezimala koje se s leve strane nižu na desno i infinitezimala koje se s desne strane nižu na levo. Lako je videti da se izborom novih tačaka na rastojanju o kojem je reč broj „rupa" može neograničeno povećavati.

Mogući odgovor da Zenonov argument predstavlja *petitio principii*, pošto se jedinstvenost predmeta ili nekog konačnog rastojanja *po definiciji* razlikuje od uobičajeno shvaćene jedinstvenosti upravo time što ga konstituenti ne mogu postupno sukcesivno iscrpsti jer *po definiciji* postoji jaz između konačnih i beskonačnih članova niza ili raznih beskonačnih nizova infinitezimala, predstavlja primer za onu vrstu odgovora koji se teškoća oslobađaju tako što se definicionalnim *fiat* ukinu nezgodna pitanja i zanemare uslovi za primenu definicije na koje se argumentima ukazuje.

U pokušajima rešenja koji bi se pozivali na Lajbnica i nestandardnu analizu mogla bi se prenebregnuti pitanja o konstituisanju rastojanja pomoću infinitezimala, jer prave jedinice su tek *monade*.

No koliko god standardne tačke bile samostalnije od nestandardnih, one su i dalje, bar u nestandardnoj analizi, u jednom relevantnom smislu nesamostalne, koji onemogućava da se monade slažu u kontinuum. Naime, kao što *R* nije dobro uređeno, nije dobro uređen ni skup standardnih tačaka u $^*R$. I dalje ne postoji najmanje konačno rastojanje ili prva naredna standardna tačka. Ova nesamostalnost standardnih tačaka u frapantnom je

nesaglasju s pokušajem da se monada shvati kao κυρίως ἕν, koje, makar koliko neuobičajeno i promenljivo po veličini, treba da ima čvrsto jezgro.

Vrlina nestandardnog modela prave je u tome što bar standardne tačke, tačke koje su samostalne utoliko što se mogu izabrati i fiksirati, ulaze u konstituciju prave kao razdvojene, utoliko što one nisu *indistantes*, a geometrijski dodirivanje tačaka upravo ne treba da je definisano (vidi gore, § 16). No, ostavljajući po strani pitanje međusobnog odnosa *nestandardnih* tačaka, teškoću stvara pitanje kako jedna *standardna* tačka prave u čijoj se beskonačno maloj okolini ne nalazi nijedna standardna i koja je utoliko *izolovana* može da nema, ili štaviše ne sme da ima, na svojoj desnoj ili levoj strani prvu sledeću.

Može se, naravno, naći neki model kao primer koji bi tu situaciju objašnjavao. Možda se ne možemo, iz nekog razloga, nikad toliko malo pokrenuti da bismo stigli do prve sledeće tačke. Ali, ako model treba da bude *infinitistički*, a *ne indefinitistički*, onda takvo razjašnjenje ne zadovoljava, jer nije u pitanju naša mogućnost ili nemogućnost da se dovoljno malo pomerimo, već se pitamo kako *de re* tačke koje *nisu indistantes* mogu nemati neposrednu prethodnicu ili naslednicu.

88. Teorije infinitezimala i kinematičke aporije

Kao i u svim dosadašnjim slučajevima, i teorije infinitezimala se najoperativnije testiraju na kinematičkim aporijama.

Niz rastojanja koje Ahil prelazi a Zevs broji sada je neki konvergentni niz S_n s ciljem kao granicom toga niza, no sad bi indeksi *n* navodno trebalo da budu i transfinitni brojevi iz $^*N$.

Vitrou, shodno svojoj teoriji „kompenzacije logičkih fikcija", smatra „beskonačnu brzinu sukcesije akata" kompenzirajućom fikcijom za fikciju „kompletirane beskonačnosti sukcesivnih akata" (*Whitrow 1*, str. 151). Vitrou doslovno kaže da Ahil, a u našoj verziji bi to bio Zevs, taj „beskonačni broj sukcesivnih akata obavlja beskonačnom brzinom *u granici*" (*podv. M. A.*), to znači kada se primakne „beskonačno blizu cilju" (*ibid.*, *loc. cit.*). Drugim rečima, Zevs članove niza S_n koji su beskonačno blilzu cilju mora izbrojati beskonačnom brzinom, a to po Vitrouu znači da su „ti akti simultani" (*ibid.*, *loc.cit.*) i upravo *time* treba da se kompenzira čista samoprotivrečnost koju sadrži pojam „beskonačnosti savladane korak po korak".

Grinbaum je Vitrouu odgovorio da „neograničenost povećava *frekvencije* koraka (akata) ne oduzima ni jotu njihovoj vremenskoj sukcesivnosti" (*Grünbaum 3*, str. 111) i da u slučaju da pojam „kompletirane beskonačnosti sukcesivnih akata" predstavlja samoprotivrečnost, navodna „beskonačna brzina" ne bi bila nikakva „kompenzirajuća fikcija" (*ibid.*, str. 112).

Vitrou bi mogao da odgovori da su akti o kojima je reč simultani jer se ne obavljaju u *konačnom* vremenskom intervalu. No ukoliko bi priznao postojanje vremenskih infinitezimala, koje su vremenski sukcesivne, akti bi ipak bili sukcesivni, mada na mikronivou. Tako Vitrouu ostaje da ne prihvati postojanje vremenskih infinitezimala. Beskonačni broj akata kao prebrojavanje rastojanja koja su beskonačno blizu cilju (granici) bio bi obavljen u trenutku shvaćenom kao Aristotelovo νῦν! To je odgovor i svakako teška fikcija, pogledajmo samo da li je bar dovoljno kompenzirajuća.

Ako uzmemo, za volju argumentacije, da je „kompenzacijom fiksija" rešen problem brojanja članova niza S_n s transfinitnim indeksima, Ostaje problem prebrojavanja članova s konačnim indeksima. Kako će se Zevs domoći članova s transfinitnim

indeksima kada ni članova s konačnim indeksima nije konačno mnogo? Možda je njemu dozvoljeno da načini „Bernulijevu grešku" i tako premosti jaz između članova s konačnim i članova s beskonačnim indeksima, ali to nije dozvoljeno nama kad koćemo da opišemo i razumemo izvršenje njegovog zadatka. Tek se ovde, u kinematičkim aporijama vidi koliko problem ne može da se reši *pomeranjem*. Problem konstitucije nekog konačnog rastojanja iz beskonačno mnogo manjih konačnih rastojanja još i može da se bar pomeri, ako ne i reši, time što se kaže da o konstituciji treba govoriti na nižem nivou, ali operacionalizovani problem poput Zevsovog zadatka da prebroji deonice Ahilovog puta koje su određene nizom S_n *ne može se ni pomeriti*; on se mora rešiti, ako se uopšte može rešiti, *imanentno*. Videćemo da ovo nije samo pouka iz razmatranja pokušaja rešenja preko nestandardne analize, već i preko standardne.

89. Glavne teškoće rešenja pomoću infinitezimala

Izražavajući se figurativno, možemo reći da nijedna teorija nije bila toliko samokritična kao teorija infinitezimala. Ako ju je u Antici uopšte bilo, živela je poluzvanično, možda više kao deo heurističkog metoda, kako je to verovao Toričeli, nego kao samostalna teorija. U hrišćanskoj eri su teoriju geometrijskih infinitezimala smelo zastupali ljudi skloni misticizmu, kao Kepler i Paskal, dok su u isto vreme mnogi majstori infinitezimalnog metoda, kao Kavaljeri, bili zadovoljni metodom kao „pragmatičkim izumom", smatrajući infinitezimale za „pomoćne pojmove koji se ne pojavljuju u zaključcima teorema (*Boyer*, str. 117) i nisu se mnogo zanimali za logičke osnove celog postupka. Glavni ljudi infinitezimalnog računa, Lajbnic i Njutn, odustali su na kraju od infinitizma, Lajbnic odlučnije, priklanjajući se eksplicitno indefinitizmu i smatrajući infinitezimale za „korisne fikcije", Njutn, koji je od početka u teoriji fluksije izbegavao geometrijske infinitezimale na račun kinematičkih, interpretirajući često ove poslednje na dinamički način, što je zatim činjeno i u narednom periodu neodlučnosti sve do rigorozne Košijeve indefinitističke definicije izvoda. Kraj dvetnaestog veka, posle Vajerštrasa, Dedekinda i Kantora, mogao je biti i definitivni kraj teorije infinitezimala da se nedavno nije rodila nestandardna matematička analiza kao formalno proširenje polja realnih brojeva *R* u nestandardno polje ***R*, što je opet tek trebalo filozofski intepretirati da bi se moglo govoriti o nekoj teoriji infinitezimala.

No makar koliko teorije infinitezimala bile „samokritične", infinitezimale su dugo živele svoj život, jer su, do negacije Zenonovog aksioma u devetnaestom veku, igrale nezamenljivu dvojaku ulogu, s jedne strane ulogu tačaka kao dovoljno male, a s druge strane ulogu konstituentnih elemenata kao nešto što pak, za razliku od euklidskih tačaka, ima veličinu.

Prividno paradoksalni spoj činjenice da se nijedna teorija infinitezimala nikad za duže nije ustoličila kao jedna infinitistička teorija koja bi konkurisala indefinitizmu i činjenice da su infinitezimale bile veoma eksploatisane doveo je do toga da smo morali toliko da se bavimo infinitezimalama, jer je i toliko stvari u matematici nastalo u vezi s njima, dok su, s druge strane, prava retkost filozofi koji su se zadovoljavali verzijom infinitizma sa infinitezimalama pri rešavanju najneugodnijih i najoperativnijih Zenonovih problema – njegovih kinematičkih aporija. Čak i ljudi kao Vitrou (vidi *Whitrow 1*, str. 146-152), koji su teoriju infinitezimala blisko povezivali sa rešenjem *Ahila*, nisu takvo rešenje uzimali doslovno, već su usvajali staru teoriju o „kompenzaciji fikcija".

Tako storija o infinitezimalama poučno pokazuje kako se s mnogim teškoćama koje se javljaju u matematičkoj praksi matematičari mogu uspešno nositi nezavisno od togá koliko je filozofski utemeljena ta njihova praksa.

Iako retko zastupano *kao eksplicitno rešenje*, rešenje pomoću infinitezimala sa svim svojim slabostima za nas je veoma poučno još na jedan način. U njemu se, naime, stiču *karakteristične* teškoće u pokušajima rešavanja naših problema, s kojima smo se sreli i s kojima ćemo se sretati, a koje ćemo sad ukratko rezimirati.

Ako se infinitezimale shvate kao prosto nedeljive veličine, onda su teškoće vezane za oblik, kao i teškoće „stadionskih varijacija" vezanih za upoređivanje, istovetne s teškoćama geometrijskog atomizma (up. § 50).

Ako se usvoje samo vremenske i kinematičke infinitezimale, onda se zbog narušavanja „velike analogije" javljaju teškoće analogne teškoćama kinematičkog atomizma (up. § 52).

Ako geometrijske infinitezimale nisu nedeljive, onda se, pre svega, postavlja pitanje *njihove* konstitucije, što znači da je problem sa konačnih veličina *pomeren* stepenicu niže.

Mnogi se problemi tiču konstitucije konačnih veličina iz beskonačno malih po staroj formuli po kojoj se konačne veličine sastoje iz beskonačno mnogo beskonačno malih veličina. Pošto je, naime, uvođenjem beskonačno mallih veličina negiran Arhimedov aksiom u jednom relevantnom smislu, niz infinitezimala koji treba da konstituiše neku konačnu veličinu mora sadržavati članove čiji su indeksi transfinitni i, ako ne načinimo Bernulijevu grešku pojaviće se zenonovske „rupe" koje narušavaju jedinstvenost predmeta.

Ako konačne veličine, poput dela prave, treba da konstituišu monade sa standardnim jezgrom, kako je to definisano u nestandardnoj analizi, onda se javljaju teškoće vezane za nemogućnost dobrog uređenja takvih monada, koja nije u skladu sa infinitistički shvaćenom izolovanošću i samostalnošću njihovih jezgara.

Najzad, najveće nevolje izaziva opet neka od verzija *Ahila* u kojoj problem jednostavno *ne može ni da se pomeri* a da se ne načini Bernulijeva greška, zbog čega je onemogućen svaki prelaz na „mikrostrukturu“; tu problem *nužno* ostaje *imanentan.*

II. Infinitizam bez infinitezimala

90. Dve teze infinitizma bez infinitezimala

Postoje dve, međusobno ne nužno zavisne, teze infinitizma bez infinitezimala koje se najdirektnije odnose na sve Zenonove dokaze protiv mnoštva; prva spada u topologiju, druga u metričku geometriju.

Prva, topološka teza, koja izvorno nije formulisana u okviru topologije, ili analize mesta (*analysis situs*)[1], predstavlja otvorenu negaciju onoga što je u zenonovskom nasleđu bilo najnespornije, a što po Aristotelu nazivamo Zenonovim aksiomom, i što direktno nije ni osporavano do devetnaestog veka. Tada su u radovima Bolcana (vidi *Bolzano*, §§ 19, 20, str. 26–30), Vajerštrasa (v. o tome *Cantor 2*, str. 114, *Cantor 9*,str. 185, *Cantor 9*, str. 149), Dedikinda (up. *Dedekind 3*, § 6, str. 54 i *Dedekind 2*, § 4, str. 23–26) i Kantora (vidi naročito *Cantor 7*, str. 373–374) stupili na scenu dovoljno „veliki“ skupovi kojima je trebalo da se omogući da se i od entiteta bez dimenzija, od nuladimenzionalnih entiteta poput euklidskih tačaka, konstituišu entiteti viših dimenzija, poput prave kao linearnog kontinuuma. Shodno Kantorovoj hipotezi za to je bilo dovoljno da skup o kojem je reč bude prvi neprebrojivi beskonačni skup, skup kardinalnosti $2^{\aleph_0}$. Pojava

dovoljno „velikih“ skupova trebalo je da znači i kraj infinitezimala; kad se prava konstituiše iz tačaka, infinitezimale više nisu neophodne i sva rastojanja, kako izgleda, mogu ostati konačna.

Druga, metrička teza, predstavlja negaciju Zenonovog zaključka da se ni u kojem smislu jedinstveno konačno rastojanje ne može konstituisati iz beskonačno mnogo manjih. Poricanje ovog Zenonovog zaključka, za razliku od sudbine njegovog aksioma, nije sveža stvar i, kao što smo videli (§ 87), već je ostvareno u teorijama infinitezimala. No u infinitizmu bez infinitezimala ono se ostvaruje bez negacije Arhimedovog aksioma. Prosto se tvrdi da pojedini beskonačni redovi čiji su članovi konačne veličine, kao što je red $1 + 1/2 + 1/4 + ... + 1/2^{n-1} + ...$, imaju konačnu sumu, što bi u slučaju navedenog reda bilo 2. U periodu kada su infinitezimale bile svakodnevna stvar ova teza je često brkana sa tvrdnjom da jedan beskonačni red poput prethodnog ima konačnu sumu ali i „beskonačne“ članove, o jest članove beskonačno male veličine. Kod Lajbnica postoje *obe* tvrdnje, ali one *nisu* pobrkane (up *Leibniz 22*, str. 543, *Leibniz 3*, str. 546 i *Leibniz 31*, str. 149).

Metričku tezu, po kojoj neko konačno rastojanje, ili broj, može biti suma nekog beskonačnog *reda*, ne treba brkati ni sa, naoko vrlo sličnom, tvrdnjom da beskonačni *niz*, kao što je niz $1, 1^1/_2, 1^3/_4, ...$ ima *granicu* koja je neki konačni broj, u ovom slučaju 2, koji je, inače, navodno *suma* beskonačnog reda s članovima 1, 1/2, 1/4, ... Tvrdnja o granici niza se može shvatiti indefinitistički bez infinitističkih obaveza, dok je teza o postojanju sume beskonačnog reda infinitistička *par exellence.*

Metrička teza infinitizma bez infinitezimala ima svoj operativni analogon u tezi da je, bar u nekim slučajevima, u slučajevima gde je zadovoljen, pored ostalog, i uslov konvergencije, moguće savladati beskonačnost korak po korak (up. gore, § 3) i to bi onda trebalo da bude odgovor na najnezgodniju kinematičku verziju *Ahila.*

91. Indefinitistička definicija izvoda i integrala i teškoće oko kontinuitea, diferencijabilnosti i konvergencije

Imajući u vidu razvoj matematike u Francuskoj[1] koji je vodio Košijevoj indefinitističkoj definiciji izvoda kao osnovnog pojma integralnog i diferencijalnog računa, pažnju treba obratiti na Dalamberovu definiciju granice, koja sledi Njutnova dinamička shvatanja iščezavajućih kvantiteta.

Dalamber je eksplicitno tvrdio da je „teorija granice osnova prave metafizike diferencijalnog računa" (vidi „Limite" u *d'Alembert*). „Kaže se da je jedna veličina *granica* druge kad se ova druga može približavati prvoj više nego što (iznosi neka data veličina, koliko god da se pretpostavi da je mala, a da ipak veličina koja se približava ne može nikad premašiti onu kojoj se približava, tako da se razlika jednog takvog kvantiteta i njegove *granice* apsolutno ne može naznačiti" (*ibid.*). No, Dalamber dodaje da „granica nikad ne koincidira, ne postaje nikad jednaka, s kvantitetom kojeg je granica..." (*ibid.*).

Sasvim je jasno da ono što Dalamber zahteva može da važi samo donde dok se radi o veličinama koje se menjaju, ili se barem jedna od njih menja, jer samo je tada moguće da veličine ne koincidiraju a da se razlika ne može odrediti. Dalamber ne govori o *vrednostima promenljive*, već o samim *promenljivim kvantitetima*.

Kod Dalambera je razlilka između doslovno shvaćene sume nekog beskonačnog reda i granice niza koji tvore članovi tog reda jasna, i ako se suma definiše preko granice (vidi „Exhaustion" i „Différentiel" u *d'Alembert*), onda nju ne treba shvatiti statički, kao doslovni zbir beskonačno mnogo članova, već dinamički, kao *približavanje* parcijalnih suma granici koja se ne može dosegnuti.

Za razliku od Njutna (upr. gore, str. 227–230), kod Dalambera granica odnosa dvaju iščezavajućih kvantiteta mužno ne bi mogla predstavljati odnos ni u kojem smislu, pošto se granica *ne dostiže*, već se njoj samo *teži*. Pozitivno je to iskazao Luilier; on je, preuzimajući termin i oznaku od Lagranža (vidi *Boyer*, str. 253), *izvod* $f'(x)$ funkcije $f(x)$ definisao kao *jedan broj* koji predstavlja granicu odnosa dva kvantiteta a sâm nije njihov odnos.

Današnja udžbenička definicija izvoda izražena preko granične vrednosti ne sadrži u sebi pojam infinitezimala, a ona se inače standardno smatra Košijevom, mada se u sličnom obliku nalazi i kod Bolcana (vidi *Bolzano*, § 37, str. 64–71; o napuštanju infinitezimala vidi *ibid.*, § 35, str. 59–60). No, u Košijevoj definiciji infinitezimale se *pominju*. Da li je uobičajeno mišljenje, po kojem standardnu definiciju izvoda treba pripisati Košiju, pogrešno, ili su već kod Košija infinitezimale suvišak, ili možda, kako bi rekao Dalamber, „skraćeni način izražavanja" (vidi „Différentiel" u *d'Alembert*)? Pokušaću da objasnim ukoliko je i u kojem tačno smislu uobičajeno mišljenje ispravno, a zašto su ipak Košiju bile potrebne infinitezimale, iako dinamički shvaćene.

Lajbnicov učenik markiz de Lopital definisao je na samom početku svoje *Analize beskonačno malog*[2] diferencijal (*différence* u njegovoj terminologiji) kao „beskonačno mali deo čiji se promenljivi kvantitet kontinuirano povećava ili smanjuje". Za razliku od ove definicije, o kojoj su infinitezimale shvaćene statički jer se promenljivi kvantitet (*quantité variable*) definiše preko beskonačno malog *dela (portion infiniment petite)*, Koši, obrnuto, infinitezimale definiše dinamički, preko promenljivog kvantiteta, (vidi „Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique", prvi deo: Analyse algébrique, u *Cauchy*, ser. 2, tom 4), a eksplicitno izjavljuje da „beskonačno mali kvantiteti ne treba da e dopuste u konačnim jednakostima, gde njihovo prisustvo postaje besciljno i nekorisno" ("Exercices d'analyse et de physique mathématique – Memoire sur l'analyse infinitésimale", str. 13 u *Cauchy*, ser. 2, tom 13).

Δx i Δy koji se pojavljuju u standardnim udžbeničkim definicijama izvoda kao priraštaji od x i od y kod Košija su infinitezimale kao promenljivi kvantiteti koji postaju manji od svake date, fiksirane veličine. Dok se u današnjim definicijama iozvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ definiše prosto kao granica odnosa $\Delta y/\Delta x$ kad Δx teži nuli (kad god ta granica postoji), u Košijevoj definiciji se *prethodno* naglašava da kao „posledica (pretpostavljene) kontinuiranosti funkcije $y = f(x)$ između neke dve date granice", zbog čega „beskonačno mala promena promenljive" proizvodi „beskonačno malu promenu same funkcije", i „odnos razlika $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} (\Delta x = i)$ postaje beskonačno mali kvantitet" i *tek se potom* definiše izvod kao granica kojoj taj odnos konvergira kad se i približava nuli (vidi „Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal" u *Cauchy*, ser. 2, tom 4).

Razlog iz kojeg mislim da bi se opravdano moglo reći da je današnja standardna definicija izvoda u stvari Košijeva sastoji se iz nekoliko komponenata: izvod se definiše kao granica i to kao granica odnosa ($\Delta y/\Delta x$) koja sama nije odnos, nije ni Lajbnicovo dy/dx, ni Ojlerovo 0/0, već prosto broj; beskonačno male veličine kao *određene* veličine koje bi bile manje od svih konačnih veličina ne samo što nisu neophodne nego su eksplicitno isključene; najzad, diferencijal i integral se definišu preko izvoda kao osnovnog pojma računa.

Ono što se, međutim, previđa, ili može da se previdi, jeste da su Košiju *potrebne dinamički shvaćene infinitezimale* jer su njegove osnovne pretpostavke *indefinitističke*, dok se pod *infinitističkim* pretpostavkama današnje standardne analize one ne mogu izostaviti, a to je upravo ono što nas trenutno zanima.

Neka je $f(x)$ funkcija definisana u otvorenom intervalu (0, 1), a a njen izvod u x_0, to jest $f'(x_0) = a$, što znači da je

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$. Iako se u poslednjoj formuli pojavljuje dinamički pojam „teženja" naime $x \to x_0$, današnji matematičar može da izvrši Vajerštrasov prevod ovog termina na „statički" jezik korišćenjem takozvane ε,δ-tehnike, čime i *limes* prestaje da bude granica nekog približavanja, postajući statički shvaćen graničnik jednog datog skupa. Naime, današnji matematičar može da kaže da $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ operativno znači da za bilo koji pozitivan broj ε postoji pozitivan broj δ takav da je $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| <$ å za sve x u intervalu (0, 1) za koje je $0 < |x - x_0| < \delta$, jer je izraz „za sve x u intervalu (0, 1)" definisan tako da se može shvatiti doslovno, naime, pretpostavlja se da se interval (0, 1) *sastoji iz* numeričkih vrednosti koje x prelazeći preko njih uzima, odnosno, u geometrijskoj interpretaciji, taj interval se *sastoji* iz tačaka.

Umesto ε,δ-tehnike, kojom se „teženje" infinitistički prevodi, kod Košija se teženje shvata *doslovno* i zato su njemu *potrebne* dinamički shvaćene infinitezimale, da bi njima obezbedio kontinuitet u intervalu u kojem se promena dešava, pošto se za njega interval *ne sastoji* iz vrednosti koje promenljiva uzima, odnosno iz tačaka.

Koši *ne osniva* pojam promenljive koja se nekoj granici približava na pojmu funkcije, kao da su vrednosti, ili, u interpretaciji, tačke, preegzistentne, već je promenljiva *osnovni pojam*, koji se odnosi, kao kod Njutna, na kvantitet koji se menja (*quantité variable*) (up. *Newton 2*, I, knj. 2, odelj. 2, lema 2, str. 365). Drugim rečima, promena x-a se ne definiše preko toga što x uzima različite numeričke vrednosti ili tako što se namesto x stavljaju različite konstante, već se, obrnuto, razlika u vrednostima shvata kao *posledica* promene x-a. Sam promenljivi kvantitet promenom „treba da primi ... više različitih vrednosti ... (*devant recevoir ... plusieurs valeurs differentes...*)" (prema „Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique": Analyse algébrique, *Cauchy*, ser. 2, tom

4). Izraženo na treći mogući način, x je kod Košija u stvari konstanta (!), ali konstanta koja se odnosi na kvantitet *koji se menja*, za razliku od drugih, uobičajenih konstanti, koje se odnose na fiksirane, *nepromenljive* kvantitete.

Kontinuitet ili diskontinuitet funkcije u nekom intervalu određuje se preko karaktera promene koja je po zakonu funkcije zavisna od promene nezavisno promenljive u odgovarajućem intervalu. Neophodno je da se promena tretira kao *neodređeno mala* tako da može postati manja od bilo koje pethodno određene. „Funkcija $f(x)$ je kontinuirana u odnosu na x unutar datih granica, ako unutar njih beskonačno malo povećanje promenljive uvek proizvodi beskonačno malo povećanje same funkcije" ("Mémoire sur l'analyse infinitésimale", str. 22–23 u *Cauchy*, ser. 2, tom 13). Bilo indefinitistički bilo infinitistički, funkcija je diskontinuirana u x_0 ako ne postoje pozitivni brojevi α i/ili β takvi da je $|f(x_0 - \alpha) - f(x_0)|$ i/ili $|f(x_0 + \beta) - f(x_0)|$ razlika manja od izvesne određene razlike.

Ista stvar važi i za veličine koje su funkcijski zavisne od drugih funkcija, i tako redom. Abel je pronašao danas klasičan i jednostavan kontraprimer (objavljen u *Journal für die reine und angewandte Mathematik 1*, str. 311–339 – vidi „Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaires, entre des limites données" u *Cauchy*, ser. 1, tom 12) za jednu Košijevu teoremu, teoremu u kojoj se tvrdi da je suma konvergentnog reda kontinuiranih funkcija kontinuirana. Suma reda sin x + 1/2 sin $2x$ + 1/3 sin $3x$ + ... diskontinuirana je u tački $x = 0$, pošto je ona jednaka nuli za $x=0$, dok za $-\pi < x < 0$ iznosi $(-1/2)(\pi + x)$, a za $0 < x < \pi$ iznosi $(1/2)(\pi - x)$. Koši je teoremu ispravio tako što ju je dopunio uslovom da u redu kontinuiranih funkcija $u_0, u_1, u_2 ..., u_n, u_{n+1}, ...$, u datim granicama za x, mora, da bi suma bila *kontinuirana*, $u_n + u_{n+1} + ... + u_{n'-1}$, „postajati uvek beskonačno malo (*infiniment petite*) za beskonačno velike vrednosti (*valeurs infiniment grandes*) celih brojeva n i $n' > n$." Važno je imati na umu da ovde *infiniment petite* znači u stvari *neodređeno malo*, a *infiniment grande neodređeno veliko*, to jest beskonačno malo i beskonačno veliko se shvataju isključivo dinamički, naime jedna se veličina neodređeno, bez kraja smanjuje neograničenim povećanjem druge. Vidi se, dakle, s jedne strane, da kontinuirane veličine *ne tvori skup određenih, statički shvaćenih infinitezimala*, ali se, s druge strane, čak jasnije, vidi da ih još *ne tvore ni preegzistentne vrednosti promenljive* koja bi se određivala kao *funkcija na datom skupu tih vrednosti*, ili tačaka, to jest *kontinuum ne tvore tačke.*[3]

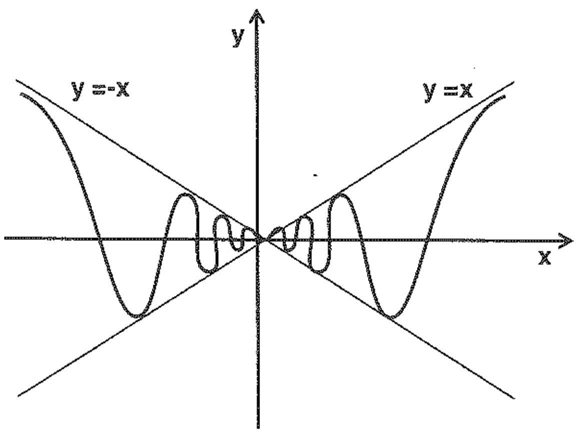
Navedeno mesto koje se odnosi na kontinuitet funkcije može se, u načelu, shvatiti na dva načina; ili kao da se preko kinematičih infinitezimala *definiše* kontinuitet, ili kao da se kontinuitet *testira* peko dinamički shvaćenih infinitezimala. Sve ukazuje da kod Košija to treba shvatiti na ovaj drugi način. Razlike između Košijevog korišćenja dinamički shvaćenih infinitezimala i Vajerštrasovog korišćenja ε,δ-tehnike i nema s *operativne* tačke gledišta; razlika je u fundamentalnom *opravdanju* odgovarajućih definicija. Koši bi se morao pozivati na zakon kontinuieta, gde je kontinuitet nešto *sui generis*, dok bi se Vajerštras pozivao na *strukturu* kontinuuma, koji treba da se *sastoji iz skupa numeričkih vrednosti*, ili, u geometrijskoj interpretaciji, iz *tačaka*.

No, prihvaćeni *test kontinuiteta* stvara teškoće indefinitističkom *shvatanju kontinuiteta* koje se upravo mogu koristiti kao razlog u prilog *infinitističkom redefinisanju* ovog pojma. To se najbolje može videti na primeru funkcija koje su prekidne u *jednoj* tački.

Ako funkcija može biti diskontinuirana samo zato što vrednost u jednoj tački, recimo $f(x_0)$, nije, shodno navedenom testu kontinuiteta preko infinitezimala, *povezana* sa vrednostima u neodređeno maloj okolini, ona bar ponekad može postati kontinuirana ako joj se vredost u x_0 *drugačije* odredi. To znači da od *prisustva* ili *odsustva jedne vrednosti*, odnosno *jedne tačke* može zavisiti kontinuitet funkcije, odnosno linije ukoliko se ona njome grafički prikaže. Kako, međutim, prisustvo ili odsustvo jednog nuladimenzionalnog entiteta može uticati na kontinuitet entiteta više dimenzije, ako je tačka samo *granica* dva intervala i ako je utoliko *nesamostalna*? Ne dovodi li se navedenim indefinitističkim testom kontinuiteta u pitanje kako indefinitističko shvatanje tačke kao granice, tako i Zenonov aksiom?

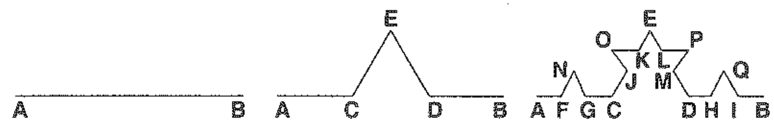
Kriza naše intuicije kada su u pitanju ovakve prekidne funkcije dovela je do njenog odbacivanja kao osnove za definisanje kontinuiteta. Još je jedan slučaj ukazivao u tom pravcu: to je slučaj krivih bez tangenti, čije je postojanje otkrio Vajerštras[4].

Kako shvatiti i najjednostavniji slučaj, da kriva nema tangentu u *jednoj*, određenoj tački? Pokušajmo da stvar razumemo geometrijski. Neka je data talasna kriva $y = x \sin 1/x$ (vidi sliku). Vrhovi i dolje ove krive dodiruju pravu $y = x$ i $y = -x$, a frekvencija se neograničeno povećava s približavanjem koordinatnom početku, dok se amplituda neograničeno smanjuje. Broj talasa počev od bilo kojeg talasa pa do koordinatnog početka nije konačan. Kriva ne može imati definisanu vrednost za $x = 0$, a uspon tangente se na krivoj naizmenično menja od 0 do 1, odnosno od 0 do -1, već prema tome da li kriva seče x-osu ili se od nje udaljava dodirujući najzad ili pravu $y = x$ ili pravu $y = -x$. S približavanjem tački (0, 0) prosečni uspon oscilira između 1 i -1 i ne može se govoriti o graničnoj vrednosti kojoj on teži.



Ako bismo krivu tako dodefinisali da za $x = 0$ bude $y = 0$, opet, geometrijski izraženo, tangente u tački (0, 0) nema, jer se ni na desno ni na levo kriva niti najpre penje, niti najpre spušta, a naravno, ne kreće se ni horizontalno!

Fon Koh je, inspirisan Kantorovim ternarnim skupom (vidi dole, § 93), konstruisao vrlo ilustrativan primer matematičke krive bez ijedne tangente, kakvu je prvi algebarski definisao Vajerštras. Nad oduzetom trećinom (C, D) jedinične duži [A, B] (vidi sliku) konstruišimo dve stranice jednakostraničnog trougla CED.



Uklonimo zatim, u Kantorovom stilu, srednje trećine FG i HI preostalih duži AC i DB i srednje trećine duži CE i ED konstruišući nad svim uklonjenim trećinama po dve stranice jednakostraničnih trouglova FNG, JOK, LPM i HQI. Uklanjajući nad svim dobijenim dužima srednje trećine i konstruišući nad njima stranice jednakostraničnih trouglova dobijamo nove duži, primenimo zatim nad njima isti postupak i produžimo potom tako u beskonačnost. Kriva koja bi trebalo da predstavlja graničnu liniju kojoj se novodobijene duži približavaju, odnosno linija koju čine novodobijene tačke N, O, E, P, Q, ..., ne bi bila nigde diferencijabilna, jer, zbog sve bližih sečica različitih pravaca, prava koja bi trebalo da bude tangenta ni u jednoj tački među tačkama N, O, E, P, Q, ... ne bi imala definisan pravac.

Pored navedenih teškoća vezanih za kontinuitet i diferencijabilnost, koje su vodile infinitističkoj redefiniciji Košijevih indefinitističkih definicija, poseban problem stvaraju *uslovi* koji treba da *određuju*, ili bar *opravdaju*, tvrdnju o postojanju ili nepostojanju *jedinstvene granice* nekog Košijevog niza. I indefinitistički i infinitistički, iracionalni brojevi, odnosno iracionalne tačke, mogu se određivati konvergentnim nizovima racionalnih brojeva. U svakom slučaju tačka koja se određuje treba da bude jedinstvena. No, kako možemo znati da niz racionalnih brojeva određenih korenovanjem broja 2 konvergira jedinstvenoj granici?

Videćemo sad kako su Vajerštras, Dedekind i Kantor okušali da sve ove probleme reše negacijom Zenonovog aksioma, mada nisu bili do kraja svesni da su to učinili prosto aksiomatski, a ne navodnim strogim dokazom.

92. *Infinitistička definicija iracionalnog broja, Dedekindov presek i Dedekind-Kantorov aksiom*

Na vrhuncu grčke matematike problem nesamerljivosti je, kao što smo videli, tretiran čisto geometrijski. Dve geometrijske veličine *a* i *b* nesamerljive su ako nemaju zajedničku meru, a *a:b* *nije* uopšte broj.

Sasvim suprotno ovom, čisto geometrijskom tretiranju problema, Vajerštras je problem koji se tiče $\sqrt{2}$ tretirao čisto *aritmetički* i prvi je u stvari definisao iracionalni broj kao broj s beskonačno mnogo decimala koje se, kako znamo, nepredividivo nižu.

Makar koliko Vajerštrasova definicija danas mogla delovati prirodno, ona je, kad se o njoj bolje razmisli, neobična i morala je delovati neobično matematičarima odgojenim u indefinitističkoj tradiciji. Indefinitistički definisan iracionalni broj je do tada bio granična vrednost jednog konvergentnog niza, gde uslovi konvergencije u datom slučaju nisu mogli striktno da se primene, ali je zato bar intuitivno bilo jasno šta se želelo tvrditi. Želelo se, naime, reći da se izračunavanjem decimala $\sqrt{2}$ određuje niz brojeva – koji se geometrijski mogu interpretirati kao tačke – koji

se neograničeno približavaju jednoj, po pretpostavci jedinstvenoj granici, koja bi upravo trebalo da predstavlja dati iracionalni broj (ili tačku). Ta granica *nije* član niza koji se dobija korenovanjem i niz je dinamički mogao da se interpretira preko sve većeg *približavanja* toj granici. Kod Vajerštrasa je, međutim $\sqrt{2}$ sâm taj beskonačni niz.

Vajerštras je svesno napustio i geometrijske i kinematičke intuicije i ceo *calculus* nastojao da izrazi samo preko brojeva (vidi *Boyer*, str. 285). Iracionalni brojevi su složeni brojevi i to *beskonačno složeni brojevi*. Složeni brojevi su agregati jedinica različitih vrsta; tako je, na primer, racionalni broj 1,41 broj složen od jedne jedinice vrste kojoj pripadaju svi prirodni brojevi, četiri jedinice druge vrste kojoj pripadaju svi pravi razlomci s imeniocem 10, a koji su sami složeni i mogu se razložiti na proste sastojke, i jedne jedinice treće vrste kojoj pripadaju svi pravi razlomci s imeniocem 100, koji se takođe mogu razložiti na proste sastojke. Lako je videti poentu Vajerštrasovog određenja razlike između racionalnih i iracionalnih brojeva. Racionalni brojei se mogu napisati kao složeni iz *konačno* mnogo jedinica konačno mnogo različitih vrsta brojeva koji nisu složeni, dok su iracionalni brojevi *nužno beskonačno složeni*. To je tipična aritmetička infinitistička definicija iracionalnog broja.

Vajerštras nije morao da se brine oko toga da li postoji neka *spoljašnja* granica nekog beskonačnog niza poput gornjeg, jer je dovoljno da niz bude *u sebi*, to jest *imanentno* konvergentan. Preko pojma imanentne konvergentnosti može se objasniti i kako funkcija može biti ograničena u nekom intervalu tako da njene vrednosti konvergiraju prema poslednjoj tački tog intervala a da *nema* vrednost, to jest da je diskontinuirana, u toj tački.

Pitanje konvergencije Vajerštras je učinio *nezavisnim* od toliko diskutovanog pitanja da li funkcija može dostići granicu; funkcija i može i ne mora imati vrednost u graničnoj tački.

U svom čisto aritmetičkom zasnivanju *calculusa* Vajerštras je i sâm pojam promenljive oslobodio kinematičkih intuicija i u stvari zasnovao *statičku teoriju promene*, koju je Rasel smatrao direktnim odgovorom na Zenonovu *Strelu* (vidi *Russell 5*, str. 347 i dalje). Promenljiva više nije *promenljivi kvantitet*, kao kod Košija, koji promenom „prima" različite vrednosti, već je promenljiva nešto *radikalno različito* od konstante; konstante se, naime, odnose na različite numeričke vrednosti, dok je promenljiva *x samo slovo* koje se može odnositi *na bilo koju* od numeričkih vrednosti iz njihove preegzistentne kolekcije (up. *Russell 5*, str. 348, 350, 351–352). Možemo reći da je za Vajerštrasa pojam promene *svodiv* na skup statičkih stanja i da se *zato* „*x*" ne odnosi ni na šta *odeđeno* i po sebi realno, već samo može da se odnosi na bilo šta od onoga što je preegzistentno, a to su numeričke vrednosti. Promenljiva zato, može se reći, nije nešto što stvarno prelazi preko različitih ili svih vrednosti, već je naziv za *disjunkciju* numeričkih vrednosti iz skupa na kojem je definisana. Promenljiva je u krajnjoj liniji jedna *logička funkcija*.

Kada je promenljiva definisana kao *logička funkcija na skupu preegzistentnih numeričkih vrednosti*, onda je moguće reći da je L granica funkcije $f(x)$ u nekoj tački x_0 ako je zadovoljen uslov da je za proizvoljno mali pozitivan broj ε moguće naći drugi pozitivan broj δ takav da kad se vrednosti x razlikuju od x_0 manje od δ, vrednost $f(x)$ biva razlilčita od L za manje od ε. Ali L, kao što smo videli, može postojati i ako ne postoji vrednost funkcije za $x=x_0$.

Za definiciju kontinuiteta i diferencijabilnosti nije potreban nikakav *pomicaj*, kao kod Košija, i zato nije moguće postaviti nezgodna pitanja koja smo gore postavili kada smo, recimo, pitali o prirodi pomicaja iz tačke (0, 0) funkcije $y=x \sin 1/x$ dodefinisane tako da je za $x=0$ $y=0$, a koja u toj tački nije diferencijabilna, odnosno nema tangentu. Kontinuitet funkcije, odnosno odgovarajuće krive u toj tački određivali smo preko beskonačno male

promene koja, međutim, nije mogla biti ni pomicaj na gore ni pomicaj na dole, ni koso ni horizontalno. Kod Košija je, naime, moguće *konstatovati* da u skladu sa *njegovim definicijama* postoji funkcija diskontinuirana u jednoj tački, ili funkcija kontinuirana a nediferencijabilna, ali nije jasno kako to *shvatiti* u skladu sa njegovim indefinitistikim pretpostavkama. Kod Vajerštrasa pozivanja na kinematičke ili dinamičke pojmove nema i teškoća se, barem formalno, otklanja.

Teškoće bi počele tek onda kada bismo celu priču ipak poželeli da ispričamo *geometrijski*.

Beskonačni niz 1, 1,4, 1,41, 1,414, ... koji treba da predstavlja $\sqrt{2}$ možemo interpretirati ili metrički, kao niz intervala s levom početnom tačkom kojoj odgovara nula dok krajnje tačke obostrano jednozačno odgovaraju vrednostima 1, 1,4, 1,41, 1,414, ..., ili, prosto i uobičajeno, kao niz tačaka prave kojima se navedene numeričke vrednosti biunivoko korespondiraju. Koju god od ove dve mogućnosti da izaberemo, možemo postaviti neugodno pitanje: koji to određeni interval, odnosno tačka, odgovara broju $\sqrt{2}$?

Teškoća je u tome što *svakom* članu niza odgovara racionalna tačka na pravoj. Jedini odgovor koji bi omogućio pojavu iracionalne tačke bilo bi priznanje postojanja *beskonačnog člana* niza. Čarls Sanders Pers je pogrešno pripisao Kantoru verovanje u postojanje decimale beskonačnog rednog broja ω (vidi *Peirce*, str. 121); verovanje da prihvatanje beskonačnog skupa to implicira predstavlja, međutim, Bernulijevu grešku (vidi § 55). No, svakako, mi možemo *uvesti* transfinitne prirodne brojeve, kao što je to učinjeno u nestandardnoj analizi, čime se može uveti i transfinitna vrsta Vajerštrasovih brojeva koji konstituišu složene brojeve. Međutim, ni u jednoj varijanti se ne prihvata da postoji *poslednji član* beskonačnog niza i zato se ne vidi kako bismo mogli da izvršimo korespondiranje neke određene tačke prave nekom članu niza 1, 1,4, 1,41, 1,414, ...

Dedekind je, verovatno imajući u vidu ovu teškoću, iracionalne brojeve ponovo učinio *transcendentnim graničnicima*, ali je, kao što ćemo odmah videti, potpuno zadržao Vajerštrasov aritmetički, statičko-infinitistički pristup. $\sqrt{2}$ nije beskonačno složen broj, to jest decimalni broj s beskonačno mnogo decimala, već je $\sqrt{2}$ transcendentni graničnik koji odeljuje dva skupa racionalnih brojeva, gde jednom od tih skupova pripada i niz racionalnih brojeva određen decimalnom ekspanzijom kvadratnog korena iz 2. Mnogo različitih imanentno konvergentnih nizova mogu konvergirati istom transcendentnom graničniku. Niz decimala broja $\sqrt{2}$ jedan je od načina na koji se taj graničnik može *odrediti*. To što je $\sqrt{2}$ tako *određen*, ne znači, međutim, da *je* $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$

Polazeći od zahteva da „aritmetika bude razvijena iz same sebe" (*Dedekind 2*, str. 22), Dedekind razmatra istorijat i razloge za proširenje pojma broja, odnosno proširenje „brojnog tela" (*ibid.*, str. 19). Na skupu prirodnih brojeva operacije sabiranja i množenja su neograničeno izvodljive, što znači da je, izraženo Dedekindovim rečima, skup prirodnih brojeva „potpun i zatvoren s obzirom na ove operacije" (*ibid.*, *loc. cit.*). On, međutim, nije potpun i zatvoren s obzirom na inverzne operacije, naime oduzimanje i deljenje, zbog čega je proširen negativnim brojevima i razlomcima do skupa racionalnih brojeva, na kojem su neograničeno izvodljive sve četiri osnovne operacije. No iako potpun i zatvoren s obzirom na ove operacije, on nije potpun i zatvoren u odosu na operaciju koja je inverzna stepenovanju, to jest s obzirom na korenovanje. Tako, na primer, $\sqrt{-1}$ i $\sqrt{2}$ ne pripadaju skupu racionalnih brojeva. Da bi operacija korenovanja negativnih brojeva bila izvodljiva uvedeni su imaginarni brojevi. Upravo ovo proširenje Dedekind navodi kao najtipičniji primer razvijanja aritmetike iz same sebe (*ibid.*, str. 22), pošto imaginarni brojevi *dugo nisu* bili povezivani sa „nearitmetičkim predstavama"

(*ibid.*, *loc. cit.*). Videli smo kakvu su geometrijsku interpretaciju oni kasnije doživeli (§ 82).

Da bi operacija korenovanja izvesnih pozitivnih brojeva, kakav je broj 2, bila uvek izvodljiva, potrebno je opet uvesti nove brojeve. Ovi brojevi dugo nisu priznavani kao brojevi, no *ako već hoćemo* da im priznamo status brojeva, onda se može *dokazati* da bi oni morali imati jednu karakterističnu osobinu, *pod pretpostavkom* da je svaki od njih jedinstven i da se dopusti da se upoređuju s racionalnim brojevima po veličini: iracionalni broj deliće skup racionalnih brojeva na skup onih koji su od njega manji i skup onih koji su od njega veći[1].

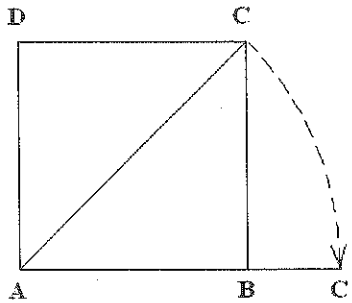
Na osnovu ove osobine definiše Dedekind iracionalne brojeve kao *jedinstvene transcendentne razgraničavače* u skupu racionalnih brojeva (vidi *Dedekind 2*, str. 24–25), što znači da svaki racionalni broj proizvodi jedinstven presek skupa racionalnih brojeva. Definicija se čita tako da *definiens* predstavljaju razgraničeni skupovi brojeva, a *definiendum* jedinstveni, njima nepripadajući, razgraničavač, to jest iracionalni broj.

Dedekind ne naglašava, ili toga možda uopšte i nije svestan, da opravdanje za ovakvu definiciju čini *pretpostavka o dvostrukom* aspektu jedinstvenosti broja koji treba da izvrši traženo razgraničenje: i iracionalni broj treba da proizvodi jedinstveni presek, i razdvojeni skupovi treba da određuju jedinstveni razgraničavač. *Samo* ako se u definiciji, bez obzira u kojem pravcu se čita, to pretpostavlja, može Dedekind da *dokaže* uređenost skupa realnih brojeva (vidi *ibid.*, str. 25-26).

Da ovi uslovi jedinstvenosti, neophodni u Dedekindovoj definiciji, nisu sasvim neproblematični, videćemo na primeru dve sporne stvari.

Pogledajmo srodan slučaj, $\sqrt{-1}$. Desilo se čak i Hilbertu da je uveo imaginarnu jedinicu i kao $\sqrt{-1}$, pišući $i = \sqrt{-1}$ (*Hilbert 2*, str. 174), izbacujući time nehotice iz igre cela dva kvadranta kompleksne ravni pri uobičajenoj interpretaciji kompleksnih brojeva. Uvesti *i* kao jedinstven imaginaran broj koji je određen kvadratnim korenom iz – 1 nije *sâmo po sebi* pogrešno, ali je u svim dosadašnjim teorijama – *i* takođe $\sqrt{-1}$, što znači da je $\sqrt{-1} = \pm i$, to jest da se *i ne može uvesti* kao jedinstveni $\sqrt{-1}$.

Da li je *pozitivna* vrednost $\sqrt{2}$ *jedinstveni* broj? Mada ga Dedekind tamo ne traži, razlog iz kojeg bi to trebalo da bude tako može se naći u *geometriji*. Rotacijom u ravni krajnje tačke C dijagonale jediničnog kvadrata ABCD oko naspramnog temena A (vidi sliku) može se na pravoj na kojoj leži stranica AB odrediti *jedinstvena* tačka. Ako tački B odgovara broj 1 utoliko što se uzima da je metrički AB = 1, prirodno je uzeti da C' odgovara pozitivnoj vrednosti $\sqrt{2}$.



Uslov koji se tiče drugog aspekta jedinstvenosti, prema kojem su levi ili desni od skupova racionalnih brojeva koji su razdvojeni iracionalnim brojem, kakav je $\sqrt{2}$, *samo njime* odredivi, izgleda sporniji i to je okolnost kojom bi mogli da se koriste intuicionisti. Nije reč o tome da suprotno izgleda verovatnije, već o tome da se ne samo skup racionalnih i iracionalnih brojeva ne može dobro urediti (*Cantor 8*, § 2, *Cantor 1*, §§ 14, 15), nego se ni skup racionalnih brojeva, koji se inače može dobro urediti Kantorovim dijagonalnim postupkom (vidi dole, § 93), *ne može dobro urediti po veličini;* ne postoji, naime, prvi po veličini sledujući

racionalni broj u odnosu na neki dati racionalni broj. Šta nam u takvoj situaciji ukazuje da $\sqrt{2}$ dovoljno dobro fiksira levi i desni skup kad su intervali po izuzeću $\sqrt{2}$ otvoreni, pa ne možemo pronaći ni najveći racionalni broj levog ni najmanji racionalni broj desnog skupa? Ovaj problem je, kao što ćemo odmah videti, u vezi sa Kantorovim problemom kontinuuma, ako se ovaj s Gedelom (*Gödel*, str. 258) i formuliše najopštije kao pitanje: koliko tačaka ima na euklidskoj pravoj?

Dedekind je stavom koji nosi njegovo i Kantorovo ime (vidi *Waismann 2*, str. 214) izvršio biunivoko korespondiranje skupa realnih brojeva i prave (*Dedekind 2*, str. 21–22), čime je stvorena mogućnost da se kontinuirani jednodimenzionalni entitet kao što je prava definiše kao „savršeni svuda gusti" *skup* „realnih" nuladimenzionalnih tačaka, što je učinio Kantor.

93. Prostor kao skup tačaka

Kantorova strategija u definisanju realnih brojeva sadrži vrline i Vajerštrasove i Dedekindove definicije iracionalnih brojeva, a da pri tom, bar u prvom koraku, izbegava teškoće na koje smo ukazali u vezi sa ovim definicijama. Kantor ne korespondira *neposredno* tačke racionalnim brojevima, eda bi se onda mogao pojaviti poseban problem korespondencije iracionalnih brojeva i tačaka prave, već *sve* realne brojeve, i racionalne i transcendentne, kako on naziva one koji nisu racionalni, definiše *na isti način,* služeći se, kao Vajerštras, *imanentnom* konvergencijom nizova, da bi *tek onda* biunivoko korespondirao tačke prave i realne brojeve, izbegavajući – kako pitanje o beskonačnom članu složenog broja kojem iracionalna tačka treba da je korespondirana, tako i problem lažnog kruga koji bi mogla sadržavati definicija iracionalnog broja kao *jedinstvenog* razgraničavača za koji se pri tom prećutno pretpostavlja da *jedini* može da igra tu ulogu (vidi *Cantor 9*, str. 184 i dalje; vidi takođe, *Weyl 1*).

Realni brojevi, bilo da su racionalni ili transcendentni, definisani su konvergentnim nizom racionalnih brojeva (ne racionalnih realnih, već racionalnih!) s tim što *različiti* nizovi, različiti utoliko što imaju različite članove, mogu biti *isti* s obzirom na to da načinom konvergencije definišu isti realni broj. Neki realni broj može se utoliko, *predstaviti* pomoću neograničeno mnogo nizova.

Niz $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$... je *nulti niz*, ako za svako ε postoji N tako da je $|a_n| < \varepsilon$ pod uslovom da je $n > N$. Niz $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$je *pozitivan*, ako postoji pozitivan racionalni broj r takav da skoro svi članovi (znači, ne konačno mnogo njih) leže desno od r. Niz će biti *negativan* ako potoji negativni racionalni broj s takav da skoro svi članovi leže levo od s (*ibid.*, str. 186).

Lako je pokazati da su svojstva nultosti, pozitivnosti i negativnosti niza inkopatibilna i da čine iscrpnu disjunkciju (*ibid.*, *loc. cit.*), tako da je svaki konvergentni niz ili nulti, ili pozitivan, ili negativan.

Dva konvergentna niza koji definišu realni broj Kantor smatra jednakim s obzirom na broj koji definišu, $\{a_n\} = \{b_n\}$, ako imaju zajedničku graničnu vrednost, koja se određuje imanentnim kriterijumima konvergencije (*ibid.*, str. 187–188). Beskonačno mnogo nizova mogu u tom smislu biti jednaki, i određeni realni broj predstavlja utoliko skup svih međusobno jednakih konvergentnh nizova, a da li će taj realni broj biti racionalan ili transcendentan zavisi samo od prirode konvergiranja; kod iracionalnih brojeva, na primer, kao što smo videli, ne postoji rekurzivno određenje članova nizova koji ga predstavljaju.

Kantor dokazuje da su formalna svojstva, relacije i operacije za jednake nizove nezavisni od izbora niza iz skupa jednakih nizova (*ibid.*, str. 188–190) i to mu omogućuje da sa realnim

brojevima definisanim nizovima postupa kao sa „običnim" brojevima, s tim što dokazuje da se skup realnih brojeva, iako uređen, ne može dobro urediti (*ibid.*, str. 143).

Za Dedekinda je skup realnih brojeva skup racionalnih i iracionalnih brojeva, za Kantora je skup realnih brojeva skup svih konvergentnih nizova racionalnih brojeva.

Kantorov napor bio je usmeren na to da, polazeći od pojma skupa, u redu definisanja, jednoznačno, i ne čineći *circulus vitiosus*, odredi skup realnih brojeva koji se obostrano jednoznačno mogu korespondirati svim tačkama prave, a na način koji ničim *ne implicira* odgovor na pitanje o transcendentnom graničniku.

Svi skupovi između čijih elemenata se može uspostaviti biunivoka korespondencija su ekvipotentni[1], a različiti prirodni brojevi izražavaju različite moći ekvivalentnih konačnih skupova i sami se ekstenzionalno mogu definisati kao skupovi ekvipotentnih skupova (vidi *Russell 3*, str. 202–204). Tako, na primer, skup svih petočlanih skupova može predstavljati prirodni broj 5. Definišući poznate operacije na ovim skupovima mogu se definisati racionalni brojevi (vidi, na primer *Dedekind 2*, § 1), a preko nizova kao dobro uređenih skupova ovih brojeva definiše Kantor, kao što smo videli, realne brojeve. Skup realnih brojeva on tad biunivoko korespondira tačkama prave i time je ceo proces definisanja završen.

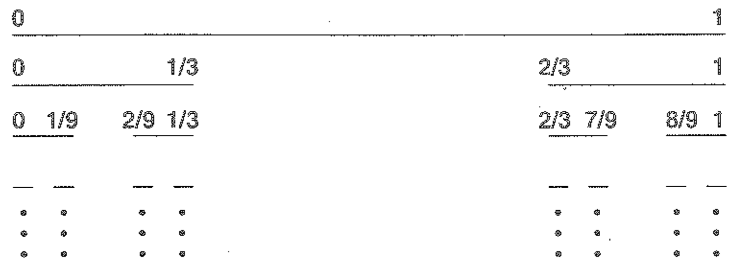
Uprkos mogućem formalnom savršenstvu njegovih definicija, koje se, bez lažnog kruga, mogu nadgraditi na teoriju skupova, Kantoru se mogu postaviti pitanja koja odgovaraju pitanjima o jedinstvenom transcendentnom graničniku skupa racionalnih tačaka. Ako Kantora ne možemo pitati da li je realni broj $\sqrt{2}$ jedini broj koji jednoznačno određuje niz realnih tačaka koje odgovaraju realnim racionalnim brojevima koji, kao realni, odgovaraju racionalnim brojevima 1, 1,4, 1,41, ..., možemo ga pitati o uslovima na osnovu kojih je niz 1, 1,4, 1,41, ... konvergentan. To ćemo uskoro i učiniti.

Kantorova definicija linearnog kontinuuma u skladu je sa Dedekindovim određenjem „suštine kontinuiteta“: „Ako se sve tačke prave podele u dve klase, tako da svaka tačka jedne klase leži levo od svake tačke druge klase, tada postoji jedna i samo jedna tačka koja proizvodi tu podelu svih tačaka u dve klase, to rasecanje prave na dva dela“ (*ibid.*, str. 22).

Rekli smo da je Kantorova definicija kontinuuma *u skladu* sa Dedekindovim određenjem *suštine kontinuiteta* zato što se u oba slučaja tačke shvataju kao jedinstveni graničnici ili razgraničavači skupova tačaka, no očigledno je da Dedekind ističe samo *nužan* uslov kontinuiranosti prave, a tek je kod Kantora sama prava eksplicitno *definisana* kao *skup* svih realnih tačaka. Kao što ćemo videti, Dedekindov nužni uslov ne obavezuje, bar u izvesnom smislu, da se sama prava shvati kao skup tačaka i zato može biti značajno da li se samo prava za koju se već pretpostavlja da je kontinuirana *karakteriše* i preko izvesne osobine zajedničke za *podelu bilo kojom* tačkom, ili se ona sama još *definiše* kao skup tačaka koje imaju tu osobinu.

Poslednje određenje nije dovoljno. Sve Kantorove realne tačke su graničnici kao „tačke akumulacije“, i ako ih pokupimo sve u skup koji osim njih ne sadrži nikakve druge elemente, dobijamo skup koji je Kantor zvao „saršenim“ (vidi *Cantor 3* i *Cantor 9*, str. 193–194). Savršen skup je skup koji koincidira sa skupom vlastitih tačaka akumulacije. Međutim, ako skup svih realnih tačaka i čini kontinuum, ne mora da znači da *svaki* savršeni skup čini kontinuum, to jest da je savršenost *dovoljan* uslov za kontinuitet, bar kako bismo intuitivno svi, pa i sam Kantor, želeli ovaj da shvatimo. I Kantor je upravo otkrio u kojem smislu, po njegovim vlastitim pretpostavkama, taj uslov *nije* dovoljan.

Pođimo od jediničnog intervala [0, 1] i otklonimo mu srednju trećinu tako da ostanu dva zatvorena intervala, [0, 1/3] i [2/3, 1], kao na slici:



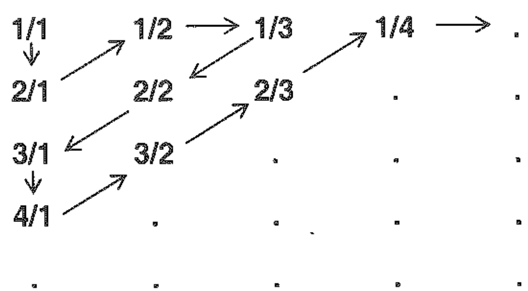
Produžimo postupak u istom smislu dalje, i to neograničeno, tako što uvek otklonimo srednju tećinu preostalih inervala ostavljajući krajnje tačke preostalih intervala. Dužina otklonjenih inervala je $1/3 + 2/9 + 4/27 + 8/81 + \ldots + 2^{n-1}/3^{n} + \ldots$. Kantor infinitistički uzima da je beskonačni zbir ovih intervala jednak jedinici, a preostali skup je diskontinuiran skup, skup čija je mera zbog toga ravna nuli[2]. Skup je diskontinuum utoliko što se za bilo koje dve od preostalih tačaka može tačno ukazati na bar jedan interval koji je između njih otklonjen. No iako iz ovog razloga diskontinuiran, preostali skup je savršen, je su pri svakom otklanjanju intervala ostavljene krajnje tačke, koje su zato uvek dalje predstavljale tačke akumulacije, a skup se samo iz njih sastoji jer se otklonjeni intervali ne mogu sresti.

Ovaj zenonovski kontraprimer, koji je sâm smislio, morao je Kantora razočarati, jer je za definiciju kontinuuma ponovo morao uvesti i stari uslov *gustine*: skup svih realnih brojeva čini linearni kontinuum zato što je *savršen* i *svuda gust* (za definiciju posvudne gustoće vidi *Cantor 9*, str. 140–141).

Koliko je tačaka potrebno da bi se dobio neki savršen i svuda gusti skup? Nije dovoljno odgovoriti da ih je potrebno beskonačno mnogo, jer Kantor u skladu sa svojom teorijom ekvipotencije i skupova može *upoređivati* beskonačne skupove tako da se elementi nekih mogu a nekih ne mogu dovesti u korespondenciju 1–1.

Skup prirodnih brojeva ekvipotentan je sa bilo kojim svojim beskonačnim pravim podskupom, jer se ispod niza 1, 2, 3, ... mogu potpisivati po veličini elementi bilo kojeg takvog podskupa, čime se omogućuje traženo preslikavanje 1-1. Ovu osobinu, naime mogućnost ovakvog preslikavanja nekog skupa na neki njegov pravi podskup, koji je nazivao „sličnošću", iskoristio je Dedekind za definiciju beskonačnosti skupa, ili, kako on kaže, „sistema", jer je ta osobina i nužan i dovoljan uslov beskonačnosti: „Sistem *S* je *beskonačan* ako je sličan nekom svom pravom delu; u protivnom slučaju, *S* je *konačan* sistem" (*Dedekind 3*, str. 52).

Sličnim postupkom se može dokazati ekvipotentnost skupa prirodnih i skupa negativnih celih, ili svih celih brojeva. Za dokaz ekvipotentnosti skupa racionalnih (najpre pozitivnih racionalnih brojeva sa skupom prirodnih potreban je, međutim, naročiti postupak poznat kao dijagonalni postupak. Potrebno je, naime, imati način da se elementi skupa racionalnih brojeva skupe sukcesivno, jedan po jedan, takvim redom da je mesto svakog rekurzivno određeno. To će biti postignuto ako se racionalni brojevi poređaju kao na slici:



U prvom redu treba da su svi racionalni brojevi sa brojiocem 1, a imeniocima redom 1, 2, 3, 4, ..., u drugom s brojiocem 2 a imeniocima kao prethodno i tako dalje. Brojeve treba kupiti kako je indicirano strelicama.

Kako je svaki od realnih racionalnih brojeva uvek određen nekim nizom iz skupa jednakih konvergentnih nizova racionalnih brojeva čiji se elementi mogu rekurzivno odrediti, to je i skup realnih racionalnih brojeva, a time i tačaka, ekvivalentan sa skupom prirodnih brojeva; njegova je kardinalnost $\aleph_0$.

Što važi za realne racionalne, važi i za sve algebarske brojeve, brojeve koji zadovoljavaju algebarsku jednačinu $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ (*Cantor 8*, str. 115–118).

Pošto Kantorov skup realnih brojeva kojima su korespondirane realne tačke prave ne čine, kako bi to bilo kod Dedekinda, racionalni i iracionalni brojevi, već nizovi racionalnih brojeva, to je, ako bi trebalo pokazati da je broj realnih tačaka veći od $\aleph_0$, nužno i dovoljno pokazati da postoji niz koji nije jednak nijednom od nizova iz dobro uređenog skupa nizova kojima su predstavljeni algebarski realni brojevi (videti *Cantor*, str. 123)

Kantorovo otkriće jednog takvog niza, koje, naravno, opet sadrži infinitističku pretpostavku, vrlo je jednostavno i u isto vreme ingeniozno. Napravimo dobro uređeni skup svih dobro uređenih skupova nizova kojima mogu biti predstavljeni realni algebarski brojevi jediničnog intervala [0, 1]. Tada je traženi niz niz čiji se prvi član razlikuje od prvog člana iz ovih nizova, drugi od drugog, treći od trećeg, n-ti od n-tog člana niza iz ovih nizova, i tako dalje. Tako dobijeni niz se ne nalazi na spisku svih nizova kojima su bili predstavljeni algebarski brojevi iz jediničnog intervala [0, 1], te je njime predstavljen neki novi realni broj (tačka), koji Kantor naziva transcendentnim, jer je to broj koji prevazilazi *moć algebre*.

Broj novih nizova, to jest nizova koji nisu bili na spisku, iznosi 2^n za prvih n nizova, a za njih $\aleph_0$ iznosi $2^{\aleph_0}$. Tako je kardinalni broj svih mogućih nizova kojima se mogu predstaviti realni brojevi, i realni algebarski i transcendentni, $2^{\aleph_0}$. $2^{\aleph_0}$ je, dakle, kardinalni broj jediničnog linearnog kontinuuma ako se ovaj definiše kao skup svih realnih tačaka između 0 i 1. No, kako je moguće preslikavanje 1-1 između ovog jediničnog intervala i cele prave, to je kardinalni broj skupa svih tačaka prave takođe $2^{\aleph_0}$.

Pokazaćemo još samo zbog čega je i kardinalni broj skupa tačaka malopređašnjeg diskontinuuma dobijenog otklanjanjem srednjih trećina intervala iz intervala [0, 1] takođe $2^{\aleph_0}$ i zbog čega je to slučaj i sa skupom svih tačaka jedinične kocke (up. *Cantor 4*, str. 122 i dalje), kocke predstavljene u trodimenzonalnom euklidskom prostoru.

Za označavanje realnih tačaka iz intervala [0, 1] iskoristimo ternarnu notaciju, notaciju koja sadrži samo cifre „0", „1" i „2". $2^{\aleph_0}$ beskonačnih nizova ovih cifara predstavljaju sve realne tačke intervala, ali uzmimo da svi nizovi koji imaju 0 na prvom mestu predstavljaju tačke prve trećine, svi nizovi koji imaju 2 na prvom mestu tačke poslednje trećine, a nizovi koji imaju 1 na prvom mestu tačke srednje trećine intervala. Dakle, u prvom otklanjanju biće otklonjene realne tačke predstavljene nizovima koji kao prvi član imaju 1. Neka nizovi koji imaju 1 kao drugi član određuju tačke srednje trećine prve trećine i poslednje trećine intervala, nizovi koji 1 imaju kao treći član srednje trećine prve i poslednje devetine intervala itd. Tako će posle sprovedenog uklanjanja biti otklonjene sve tačke određene nizovima koji sadrže cifru „1". No, kako su preostale tačke predstavljene svim mogućim nizovima koji sadrže dve cifre, to se one mogu dovesti u korespondenciju 1-1 sa realnim tačkama jediničnog kontinuuma predstavljenim binarnom notacijom. Dakle, i dobijeni jedinični *diskontinuum* ima $2^{\aleph_0}$ tačaka kao i jedinični *kontinuum*.

Neka je izvesna realna tačka iz jediničnog kontinuuma [0, 1] određena nizom racionalnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Korespondirajmo joj tačku u trodimenzionalnom euklidskom prostoru tako što će vrednosti koordinate na x-osi biti određena nizom $a_1, a_4, a_7, \ldots, a_{3k-2}, \ldots$, vrednost koordinate na y-osi nizom $a_2, a_5, a_8, \ldots, a_{3k-1}, \ldots$, a vrednost koordinate na z-osi nizom $a_3, a_6, a_9, \ldots, a_{3k}, \ldots (k = 1, 2, \ldots)$. Ako ovaj potupak izvedemo kod svake od realnih tačaka iz inervala [0, 1], ostvarićemo biunivoku korespondenciju između realnih tačaka jediničnog linearnog kontinuuma i tačaka jedinične kocke u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, čime je utvrđeno da je broj tačaka koje čine tu jediničnu kocku takođe $2^{\aleph_0}$.

Nije teško videti da se isti dokaz može izvesti i ako je prostor n-dimenzionalan, to jest ako su tačke određene sa n koordinata, i da je dokaz moguće proširiti na ceo beskonačan prostor.

Ceo beskonačan prostor ima $2^{\aleph_0}$ tačaka, koliko ih ima i malopređašnji jedinični diskontinuum.

94. Kantorov kontinuum kao skup tačaka i Zenonov aksiom

Kantor je sasvim izvesno mislio da njegovi rezultati negiraju Zenonov aksiom, pošto je u zaključku predavanja „O različitim teorijama iz teorije skupova tačaka" (*Cantor 10*), gde govori o značaju ovih teorema za „*matematičku fiziku*", tvrdio kako se njima prevazilazi uobičajena dilema indefinitizam – atomizam, jer niti u pogledu „*poslednjih* elemenata materije vlada potpuna neodređenost" niti su poslednji elementi materije „atomi koji zauzimaju doduše *vrlo mali*, ali ipak *ne sasvim zanemarujući* sadržaj prostora"; „poslednji ili stvarno *jedinsveni* elementi materije su *aktualno beskonačni po broju*" i „*prostorno uopšte* nisu *rasprostrti* već su *strogo punktuelni*" (*ibid.*, str. 275).

Kantorova teorija skupova i njena primena u teoriji brojeva i geometriji tretirani su na različite načine, između ostalog i čisto formalno aksiomatski,[1] ali su mnogi filozofi, od Tanerija (*Tannery 2*, str. 403–410) i Rasela (*Russell 3*, str. 146–149, 151–152) do

Grinbauma (*Grünbaum 1*, str. 302–304, *Grünbaum 5*, str. 184–186) i Salmona (*Salmon*, str. 52 i dalje), sledili Kantora i u ovoj tački, gde on svoju teoriju kontinuuma interpretira kao *doslovni adekvatni opis* osnovne strukture materije. To je aspekt Kantorove teorije kao *infinitističke teorije bez infinitezimala* kojim se Zenonov aksiom doslovno negira. Iz *nerasprostrtih nuladimenzionalnih* tačaka, kao jediničnih skupova, *može se*, po Kantoru i njegovim filozofskim sledbenicima, *sastaviti uniranjem* najpre prava kao *linearni jednodimenzionalni kontinuum*, a zatim i ceo *beskonačni n-dimenzionalni prostor*. Za to je potrebno $2^{\aleph_0}$ tačaka složenih gusto po određenim topološkim zakonima.

Videli smo *kako* je određen kardinalni broj $2^{\aleph_0}$, a gustina se i u topologiji izrađenoj na teoriji skupova definiše klasično, po uzoru na Vajerštrasovu ε,δ-tehniku (vidi *Bourbaki*, § 1). Pošto se, najpre, definišu „otvoreni skupovi" koji odgovaraju uobičajenim „otvorenim intervalima", definiše se „okolina" jediničnog skupa $\{x\}$ koja odgovara uobičajenoj okolini neke numeričke vrednosti ili tačke u analitičkoj geometriji. Nužan i dovoljan uslov da neki skup ujedno predstavlja „okolinu" svakog od svojih jediničnih elemenata, to jest tačaka, jeste da je otvoren. Ako je izvesna okolina nekog jediničnog skupa takva da joj se ne može dodati nijedan novi jedinični skup, onda se kaže da je ona gusta. Kontinuitet u tački se opet definiše preko toga kakva je po gustini proizvoljno mala okolina te tačke, koja se sastoji iz tačaka kao jediničnih skupova.

Ostaje samo još da razjasnimo topološku definiciju *dimenzije* peko pojma „granice skupa", što onda ujedno jednosmisleno određuje mogućnost ili nemogućnost uzajamnog topološkog preslikavanja različitih *n*-dimenzionalnih tela, koje se naziva homeomorfizam.

Dedekind je smatrao „očiglednim" (vidi *Dedekind*, str. 22) da dva dela prave *možemo* razdvojiti tačkom. Mi tačku smatramo

entitetom bez dimenzija, to jest nuladimenzionalnim entitetom, a pravu jednodimenzionalnim entitetom. To bi značilo da, bar u ovom slučaju, jednim entitetom niže dimenzije možemo razdvojiti koja god hoćemo dva dela entiteta neposredno više dimenzije. Ovu okolnost iskoristimo je Brauer da, generalizujući zaključivanje pod istim odgovarajućim pretpostavkama, definiše deimenzionalnost relativno, preko *odnosa entiteta s obzirom na odeljivanje*. Neka figura je *n*-dimenzionalna ako za odeljivanje bilo kojeg njenog dela od ostatka može biti neophodno koristiti se granicom kao „zidom dimenzije *n*-1".[2] Videćemo odmah šta to znači.

„Granična tačka skupa *S*" se lako definše preko uslova da svaka njena okolina sadrži najmanje jednu tačku koja je u *S* i jednu koja nije. Sama granična tačka može ali ne mora pripadati *S*. „Granica" ili „zid" skupa *S* kojim ćemo vršiti „odeljivanje" definiše se kao skup svih graničnih tačaka skupa *S*. Granica, odnosno zid, može biti prazan skup; to je tako u slučaju kad je skup o čijoj je granici reč izolovana tačka, to jest izolovani jedinični skup.

Neki prostor je nuladimenzionalan ako je njegova svaka moguća granica prazan skup, a to je slučaj sa Kantorovim diskontinuumom (vidi *Grünbaum 1*, str. 294) koji se sastoji iz $2^{\aleph_0}$ tačaka, ali izolovanih.

Važno je primetiti da se u ovakvim topološkim razmatranjima nigde ne pominje „dužina". Topološko razmatranje pitanja odnosa tačke i linije, linije i površine i površine i tela, kao razmatranje razlika u pogledu *dimenzija*, tiče se samo *odnosa* jednih i drugih *s obzirom* na mogućost razgraničenja delova.

U topološkim razmatranjima nigde se ne pojavljuje ni oblik *qua* oblik, pa zato nije čudo što su s čisto topološke tačke gledišta lopta i kocka ekvivalentne. Za *homeomorfizam* kao topološko preslikavanje prostora na prostor nužno je da je moguće uspostaviti korespondenciju između tačaka prostora koji predstavlja original i prostora koji predstavlja sliku, što znači da skupovi moraju biti jednake kardinalnosti. No potrebno je, još, da preslikavanje bude bikontinualno, to jest za bilo koju tačku p originalnog prostora i bilo koju okolinu n' njene slike p' mora postojati okolina n tačke p takva da slike tačaka iz ove okoline leže unutar izabrane okoline n' tačke p' i obratno.

Sad vidimo u kojem su sve pogledu „slični" a u kojem pak „različiti" takvi entiteti kao što je skup racionalnih realnih tačaka prave, jedinični Kantorov diskontinuum, jedinični kontinuum, jedinična kocka, lopta i torus, kada se posmatraju *samo* s obzirom na svoju tačkastu strukturu. Skup racionalnih realnih tačaka, skup iracionalnih realnih tačaka i Kantorov diskontinuum slični su s obzirom na dimenzionalnost – svi su nuladimenzonalni, ali se razlikuju po kardinalnom broju. Od nuladimenzionalnih skupova skupovi kardinalnosti $2^{\aleph_0}$ slični su po kardinalnosti ostalim pomenutim skupovima, ali se od njih razlikuju u pogledu dimenzije. Od ovih su pak kocka i lopta „slični" s obzirom na homeomorfizam, ali se po tome torus od njih razlikuje.

95. *Topološka infinitistička teza i jedna indefinitistička reinterpretacija Kantorove definicije realnog broja*

Pod topološkom infinitističkom tezom podrazumevaćemo ovde isključivo Kantorovu filozofsku, ne formalistički shvaćenu tezu kojom se tvrdi da se prostor, ili materija kao ispunjeni prostor, sa svim razmotrenim topološkim osobinama, *doslovno sastoji, bez ostatka*, iz nerasprostrtih tačaka, tako da se može ontološki i definisati kao skup tačaka.

U filozofskom procenjivanju ove teze poćićemo od užeg, naizgled čisto matematičkog pitanja o kriteirjumima konvergencije nizova racionalnih brojeva koji treba da određuju realni broj,

odnosno, po Dedekind-Kantorovom aksiomu, i realnu tačku, da bismo iza tog problema otkrili stara pitanja o prirodi beskonačnosti i o načinu postojanja tačaka, što će nas na kraju odvesti do pitanja o „doslovnom smislu" tvrdnje da se kontinuum sastoji iz tačaka.

I prekantorski indefinitisti, kao što je Koši, i postkantorski kritičari infinitizma na čelu sa Brauerom *prihvataju* da je niz $1/2, 3/4, 7/8, \ldots, (2^n-1)/2^n, \ldots$ konvergentan i da se kao takav može iskoristiti za *određenje* jednog realnog broja – tačke – u ovom slučaju broja 1. Takav niz, videli smo, intuicionisti i nazivaju Košijevim nizom. No za niz koji čini decimalna ekspanzija Ojlerove konstante C intuicionisti, kao što smo videli, ne bi dozvolili da se tvrdi da je *ili* konvergentan, *ili* nekonvergentan. Odsustvo *kriterijuma* na osnovu kojih bi se moglo tvrditi da je jedan takav niz konvergentan predstavlja za njih osnovu za odbacivanje shvatanja po kojem je kontinuum skup tačaka, jer se samo iz tačaka određenih nizovima poput niza $1/2, 3/4, \ldots, (2^n-1)/2^n, \ldots$ kontinuum svakako ne može sačiniti.

Gde je sudijsko mesto sa kojeg bismo presudili u ovom sporu. Nije ga lako pronaći, a što je najvažnije, ono sâmo može da bude zavisno od naših različitih *ciljeva*. Kao što je Dedekind *postulirao* da je $\sqrt{2}$ jedinstveni transcendentni razgraničavač dva skupa racionalnih brojeva, tako Kantor može *postulirati* da su svi sporni nizovi konvergentni, i pod okriljem Hilbertovog formalizma (vidi *Hilbert 2*, str. 176 i dalje) matematičari bi mogli da se uzdaju u to da nas „niko neće isterati iz raja u koji nas je on (Kantor) uveo" (*ibid.*, str. 170). Ali to je matematički raj i filozof se, imajući i neke nematematičke sklonosti, može u njemu osećati nelagodno. On može, kao što kaže Gedel (*Gödel*, str. 262–264), težiti da otkrije kako stvari *zaista* stoje, bez obzira na to da li su matematički ugodne, i kao prvi korak ka tome on može rešiti da *dopusti* diskusiju o kriterijumima konvergencije.

Oko niza 1/2, 3/4, ..., $(2^n-1)/2^n$,... svi se slažu zato što su njegovi članovi određeni rekurzivno i što nam to omogućava da s pouzdanošću *konstatujemo* kako bi bilo koji broj manji od 1 koji bi neko fiksirao mogao biti nadmašen nekim određenim članom niza, a da to ne važi upravo tek za broj 1 kao najmanji takav broj: 1 je granica toga niza. To već kod niza koji predstavlja decimalnu ekspanziju broja $\sqrt{2}$ nije slučaj. Zašto se, s jedne strane, opredeljujemo za to da taj niz jeste konvergentan, ako se tako opredelimo, i da li, s druge strane, ako stvar ostavimo otvorenu to činimo isključivo *iz neznanja* o tome šta je od dve moguće stvari slučaj ili dopuštamo da niz *de facto*, nezavisno od našeg znanja ili neznanja o tome, niti konvergira niti ne konvergira?

Razlog koji bar *prima facie* ide u prilog Kontorovom opredeljenju može se, kao i u slučaju opravdanja Dedekindovog postuliranja jedinstvenog graničnika, naći u geometriji. Ako 1, 1,4, 1,41, 1,414, ... predstavlja niz čiji se članovi dobijaju izračunavanjem $\sqrt{2}$ i ako je geometrijski tačka $\sqrt{2}$ egzaktno i jedinstveno odrediva, onda može delovati prirodno da se pretpostavi da je navedeni niz koji čini decimalnu ekspanziju broja $\sqrt{2}$ konvergentan, da konvergira jedinstvenom broju koji odgovara jedinstveno određenoj tački. Ako se pozovemo na geometriju, onda se bar izbegava mogući *circulus vitiosus* u definisanju iracionalnog broja na koji ukazuje Vajl (vidi *Weyl 1*, takođe *Cantor 9*, § 9); ne opravdava se, naime, jedinsvenot novog iracionalnog broja konvergencijom niza čija se konveregencija opravdava jedinstvenošću tog broja, već se konvergencija opravdava jedinstvenošću *tačke* kojoj treba da odgovara broj za koji se veruje da ga niz predstavlja.

No, s druge strane posmatrano, može izgledati da upravo geometrija pre ide u prilog Braueru. To je slučaj kada se zapitamo o geometrijskom značenju samog konvergiranja. Geometrijski gledano, odsustvo krajnje tačke jednog navodno aktualnog niza koji u isto vreme treba da ima jedinstvenu granicu teško je razumeti,

dok je konvergenciju indefinitistički ili dinamički veoma lako predstaviti preko *sve većeg približavanja* izvesnoj tački. Ako se čak beskonačni niz koji treba da je konvergentan shvati kao samo potencijalno beskonačan, onda, kako izgleda, uslovi konvergencije *moraju* biti određeni nekim rekurzivnim načinom, jer upravo *zakon* kojim je taj način određen predstavlja ono što vrši isključivanje svake moguće tačke sem granične. Ako niz tačaka, ili intervala koji se smanjuju, nije ni dat ni predodređen nekim rekurzivnim putem, onda možda konvergencije nema *ni u kojem smislu*, ne samo u smislu u kojem mi ne znamo da je niz konvergentan, već ni u smislu u kojem niz možda *de facto* niti konvergira niti ne konvergira.

Jedinstvenost tačke na brojnoj osi dobijene opisanom rotacijom dijagonale jediničnog kvadrata (str. 262) ne deluje kao inkopatibilna sa nemogućnošću da se broj koji treba da joj odgovara predstavi konvergentnim nizom racionalnih brojeva ako se svaki niz tretira kao nastajući, pošto interval koji se smanjuje uvek sadrži dovoljno tačaka da *ne preostane samo* granična *ako* ostale već *a priori* nisu isključene nekim zakonom.

Mislim da, za razliku od Dedekindovog kontinuuma, koji se sastoji od racionalnih i iracionalnih tačaka, Kantorov kontinuum realnih tačaka određenih preko nizova racionalnih brojeva, gde *racionalni* brojevi i *racionalni realni* brojevi *nisu ista stvar*, ipak omogućava da se izvuku koristi iz geometrijskog opravdanja a da se izbegne problem odsustva poslednjeg člana. Niz racionalnih brojeva *nije* kod Kantora niz racionalnih realnih tačaka i zato je moguća *indefinitistička reinterpretacija* po kojoj tretiranje beskonačnog niza racionalnih brojeva kao *datog* ne implicira neposredno aktualnost racionalnih tačaka koje bi članovima odgovarale.

Makar koliko se decimale iz decimalne ekspanzije brojeva kakav je $\sqrt{2}$ nizale *nepredvidivo*, one se ipak s obzirom na decimalni *način pisanja*, ili, *način* na koji članove određujemo, *ne nižu* *proizvoljno*. Ovakav niz decimala se može tretirati kao *dat utoliko što* je za svako *zadato* mesto cifra *predodređena*. Iako nismo u posedu zakona koji bi nam rekurzivno obezbedio da odredimo na kojem se mestu koja cifra nalazi, ipak se *de facto* na *i*-tom mestu pronalazi *jedna* određena od *deset mogućih* cifara. I sad, na osnovu geometrijske vere u jedinstvenost iracionalnog graničnika kojem iracionalni realni broj treba da odgovara možemo *pretpostaviti* da ćemo za svaku *unapred fiksiranu* levu tačku različitu od date *naći* dovoljno dugačak niz decimala kojim će broj koji odgovara fiksiranoj tački biti nadmašen, uzimajući da je *u tom smislu* sporni niz konvergentan, *ne tražeći* da zbog toga bude aktuelna beskonačnost realnih tačaka koje bi odgovarale članovima toga niza, pošto je niz dat samo s obzirom na predodređenost cifara u njegovom ispisivanju, ne i kao beskonačni niz datih realnih brojeva-tačaka.

Dovoljno je, dakle, da niz bude *s obzirom na način izračunavanja* članova *neproizvoljan* i da *pretpostavimo* da će *svaka izabrana realna* tačka levo od one koja treba da odgovara broju koji niz o kojem je reč treba da predstavlja biti nadmašena nekim određenim dovoljno dugačkim produženjem niza, pa da *iz istog razloga* iz kojeg niz 1/2, 3/4, ..., $(2^n-1)/2^n$, ... tretiramo kao konvergentan – i dati niz smatramo konvergentnim.

Ako konvegenciju nizova shvatimo na ovaj način, i prihvatajući Kantorovu ideju, realne brojeve, a time i tačke, predstavimo konvergentnim nizovima racionalnih brojeva, *ne moramo* prihvatiti i aktualnost beskonačnosti tačaka koje odgovaraju racionalnim brojevima koji se javljaju u takvim nizovima samo zato što oni sami mogu postati racionalni *realni* brojevi ako ih predstavimo nekim drugim konvergentnim nizom. Datost beskonačnog niza za koji se prihvata da je konvergentan, bilo zbog toga što to *znamo* na osnovu rekurzivnog određenja članova bilo zbog toga što to (iz malopređašnjih razloga) *pretpostavljamo, efektivno jedino znači* da znamo ili pretpostavljamo da ćemo dovoljnim produžavanjem niza nadmašiti svaki broj koji odgovara bilo kojoj prethodno fiksiranoj tački koja leži levo od tačke koja nizom treba da je predstavljena. Ako na osnovu nekog zakona, *rekurzivne definicije* ili *pretpostavke, znam* ili *očekujem* da mogu skočiti dalje od svakog prethodno zadatog rastojanja, ne znači da mogu, ili da s razlogom mogu očekivati da mogu da skočim beskonačan broj puta, ili beskonačno daleko. Mogućnost obaranja svetskih rekorda je u svim skokovima otvorena, to jest neograničena, iako se *ne pretpostavlja* da će skokovi ikada biti duži, ili viši, od izvesnih veličina koje već sada možemo naznačiti. Poznavajući ograničenja svojih stvorenja, Bog bi mogao navesti i *najmanje takve veličine* ostavljajući smrtnicima da se *neograničeno indefinitistički nadmeću*, približavajući se *jedinstvenoj granici*.

Razlog iz kojeg bi *datost beskonačnosti konvergentnog* niza trebalo shvatiti na ovaj način – dakle samo preko datosti zakona približavanja ili pretpostavke o tome da određeni način izračunavanja približavanja to zamenjuje, što je zapravo *indefinitističko* shvatanje – počiva na činjenici da je *svaki* član niza udaljen od granične vrednosti i da ima sledbenika, pa je konvergiranje vrlo lako shvatiti dinamički, kao približavanje, ili potencijalno, kao mogućnost sve većeg približavanja, dok se, s druge strane, pod infinitističkom pretpostavkom datosti beskonačnog niza tačaka koje odgovaraju racionalnim brojevima koji su članovi konvegentnog niza ne vidi šta bi moglo da znači da pošavši od granične tačke prema nizu ne nailazimo ni na kakvu određenu tačku određenog niza iako su te tačke tradicionalno geometrijski uvek diskretne, ne dodiruju se ni međusobno, niti dodiruju graničnu tačku. Odsustvo poslednje tačke u nizu, gledano iz jednog smera, odnosno prve gledano iz suprotnog, indefinitistički je lako shvatiti, a infinitistički je nerazumljivo.

Sada možemo postaviti *prvo* od dva centralna pitanja koja se tiču infinitističke topološke teze: šta opravdava Dedekind-Kantorov aksiom, odnosno uverenje da je preslikavanjem realnih brojeva na tačke prave zaista uspostavljena biunivoka korespondencija, da je preslikavanje preslikavanje 1–1 i *na* skup svih mogućih, a ne 1–1 i *u* skup svih mogućih tačaka prave; pitano na drugi načnin, da li svakoj od tačaka koje se mogu geometrijski fiksirati odgovara nužno jedan i samo jedan realni broj?

Neko će reći da aksiom ne traži opravdanje. To je za neke aksiome tačno, i to pod pretpostavkom izvesnih matematičkih ciljeva može biti tačno i za Dedekind-Kantorov aksiom, ali mi se trenuto bavimo ispitivanjem u kojem je neophodno bar opravdati netraženje opravdanja, ako se opravdanje ili dokazi za neopravdanost i ne mogu dati.

Dedekind, koji je pretpostavio da je svaka iracionalna tačka jedinstven iracionalni razgraničavač dva *skupa* brojeva, automatski je dobio kao rezultat da se svaki od njih može predstaviti nekim Vajerštrasovim nizom i utoliko je aksiom o biunivokoj korespondenciji realnih brojeva i tačaka prave ekvialentan takvoj pretpostavci. No videli smo kako je drugi od njegovih uslova, inače prećutan, jak i kako je nemogućnost da se skup racionalnih brojeva dobro uredi po veličini razlog što nam se problem opravdanosti jednog takvog uslova čini načelno i beznadežno nerešiv.

Kantor nije iracionalne tačke definisao preko skupova svih ostalih realnih tačaka i očigledno je aksiom o korespondenciji realnih brojeva i tačaka prave zasnivao na prethodnoj infinitističkoj pretpostavci da je svaki beskonačni niz koji predstavlja bilo koju decimalnu ekspanziju aktualno beskonačan i konvergentan. Na tome je zasnovan i njegov dokaz da realnih brojeva, odnosno tačaka, prave, ima $2^{\aleph_0}$, jer on pretpostavlja doslovnu datost svih beskonačnih nizova koji tvore dobro uređeni skup nizova kojima su predstavljeni svi realni racionalni brojevi (vidi *Cantor 9*, str. 184 i dalje).

Dokaz da je tačaka na pravoj $2^{\aleph_0}$ počiva, dakle, ili na Dedekindovoj pretpostavci o svakoj iracionalnoj tački kao jedinstvenom iracionalnom razgraničavaču dva skupa racionalnih tačaka, ili na Kantorovoj pretpostavci o konvergentnosti svih beskonačnih nizova racionalnih brojeva koji predstavljaju bilo koju decimalnu ekspanziju a na osnovu datosti (kao ispisanosti) beskonačnog niza cifara. Na slabijim, indefinitističkim osnovama konvergencije taj dokaz se ne može dati.

Na ovom mestu se dobro može sagledati u kakvoj je vezi razlika između intuicionističke i neintuicionističke matematike s obzirom na dodeljivanje tačaka prave brojevima sa pretpostavkama o prirodi i načinu postojanja geometrijskih entiteta.

Intuicionistička interpretacija beskonačnosti *u skladu je* s okolnošću da se prema indefinitističkim pretpostavkama nijedan geometrijski interval ne može iscrpsti aktualizacijom međutačaka i da baš zato i *ne postoji* najbliža moguća tačka graničnoj tački niza. Na pravoj uvek *mora biti još* neaktualizovanih tačaka i pitanja korespondencije brojeva i tačaka uvek je u vezi s *aktualizacijom* i s *načinom* aktualizacije tačaka. Potencijalna beskonačnost niza odgovara potencijalnosti tačaka.

Po intuicionistima se *mogu* pronaći tačke koje su aktuelizovane čisto *geometrijski* a koje se *ne mogu* predstaviti konvergentnim nizom, to jest *aritmetički*. Ako bismo, međutim, pretpostavili, kao gore, da se *i takve* tačke uvek mogu predstaviti nekim konvergentnim nizom racionalnih brojeva *uprkos* odsustvu zakona za rekurzivno određivanje članova toga niza, onda bismo se sasvim približili opravdanju Dedekindove i Kantorove ideje o biunivokoj korespondenciji brojeva i tačaka prave, *samo bi* nedostajala njihova pretpostavka da su sve te tačke i svi ti brojevi dati, odnosno da je moguće da sve te tačke budu aktualizovane jednovremeno.

Zar ne možemo reći da bi u slučaju da *prihvatimo pretpostavku* o tome da se *bilo koja* tačka može predstaviti konvergentnim nizom racionalnih brojeva razlika između indefinitizma i Kantorovog infinitizma postala *irelevantna s matematičke tačke gledišta* utoliko što ne bi bilo razlike u matematičkim posledicama? Nismo li zaista došli do tačke u kojoj se razlika između indefinitizma i infinitizma više ne bi ogledala u matematičkim *rezultatima*, već još jedno u *zasnivanju* teorije? To pre svega zavisi od odgovora na pitanje da li se možemo koristiti *protivčinjeničkom pretpostavkom* da bi jedan intuicionista *prihvatio* da se bilo kojoj geometrijskoj fiksiranoj tački može dodeliti tačno jedan realni broj predstavljen kantorovskim skupom nizova racionalnih brojeva, *zadržavajući* pri tom svoje shvatanje beskonačnosti po kojem je svaki beskonačni niz nužno nezavršen.

Sve što ja zasad želim da tvrdim povodom ovakvog pitanja, a što sledi iz ponuđene, strogo indefinitističke redefinicije pojma konvergencije, jeste da *nije u neskladu* sa indefinitističkim pretpostavkama da se *pretpostavi* da *bilo koja* geometrijski fiksirana tačka *može* biti predstavljena jednim *nedovršenim* nizom racionalnih brojeva, *bez obzira na to* da li su njegovi članovi rekurzivno odredivi. *Neproizvoljnost* bilo kojeg člana svakog niza kojim bi neka proizvoljna iracionalna geometrijski fiksirana tačka trebalo da bude aritmetički određena zajemčena je već decimalnim načinom predstavljanja. Niz kojim želimo da predstavimo broj π ne možemo *tim načinom* pisanja drukčije započeti nego sa 3,14... Jedino izgleda neizvesno, i zbog toga se, kako izgleda, radi o *pretpostavci*, hoćemo li bilo koju tačku koja je fiksirana dovoljno blizu datoj nadmašiti u konačnom broju koraka neograničenim produžavanjem niza, to jest hoćemo li datim načinom pisanja niza koji ispisujemo isključiti u izvesnom konačnom broju koraka svaku neželjenu, prethodno fiksiranu tačku. Ne tvrdeći – niti to *mora biti* slučaj niti da to *jeste* slučaj niti da *možemo znati* šta je

slučaj, možemo zasad reći samo da nije u neskladu s opštim indefinitističkim pretpostavkama da se i to pretpostavi.

96. Teškoće topološke infinitističke teze i rezultati koji se mogu indefinitistički reinterpretirati

Indefinitistička verzija Kantorove definicije realnih brojeva, ako se prihvati, možda nema neposredno matematički značajne posledice, ali ima značajne posledice u filozofskom zasnivanju matematike. Kantorova teorija realnih brojeva koji su obostrano jednoznačno korespondirani tačkama linearnog kontinuuma nazvana je matematičkim *platonizmom* (*Bernays*, str. 55), zbog prihvatanja infinitističkih tvrdnji o egzistenciji dovršenih beskonačnih nizova koji određuju beskonačne skupove realnih brojeva-tačaka, koji opet bez ostatka tvore linearni kontinuum i ceo n-dimenzionalni euklidski prostor. No ako je tačno da Kantorova definicija realnog broja-tačke nije nužno u neskladu s indefinitističkim pretpostavkama i ako je tačno da nam za nju nisu neophodni beskonačni skupovi, onda bi možda neki, ili čak svi, Kantorovi platonistički rezultati mogli da se reinterpretiraju indefinitistički i bilo bi potrebno razmatrati posebne razloge u korist ove ili one interpretacije.

Prvo od dva centralna pitanja koja se odnose na infinitističku topološku tezu ticalo se opravdanosti prihvatanja tvrdnje da se u preslikavanju realnih brojeva na tačke prave radi o preslikavanju 1–1 i *na*, a ne 1–1 i *u* skup svih tačaka koje se uopšte geometrijski mogu fiksirati na pravoj. Ako sada *neopredeljeno*, infinitistički ili indefinitistički, pretpostavimo da se svaka geometrijski fiksirana tačka zaista može predstaviti jednim neproizvoljnim beskonačnim nizom racionalnih, odnosno celih brojeva, ostaje da odgovorimo na *drugo* od dva centralna pitanja: da li se na osnovu prihvaćenog izomorfizma može opravdano zaključiti da se prava *sastoji samo iz* realnih tačaka. Iako slično prethodnom, ovo pitanje nije više pitanje o opravdanosti uvođenja Dedekind-Kantorovog aksioma.

Pre svega, prava se osim iz tačaka koje se mogu geometrijski fiksirati i onda predstaviti pomoću nizova racionalnih brojeva može sastojati iz *još nečega* što nisu tačke koje se mogu geometrijski fiksirati i što ne odgovara nijednom realnom broju. Realne tačke možda ne tvore kontinuum bez ostatka, možda su „užljebljene" nečim trećim. Videli smo na primeru nestandardne analize da se skup realnih standardnih tačaka, koji odgovara polju realnih brojeva *R*, *proširuje* do strukture **R* koja sadrži *i* nestandardne tačke, koje se geometrijski *ne mogu* fiksirati.

Ali i bez pretpostavke o tačkama koje se ne mogu geometrijski fiksirati i pretpostavke o „žljebovima" između tačaka koje se geometrijski mogu fiksirati, *ne moramo se samim prihvatanjem kantorovske definicije realnog broja i aksioma o njihovom preslikavanju 1–1 na skup tačaka koje se geometrijski mogu fiksirati obavezati i na prihvatanje topološke infinitističke teze,* po kojoj se *prava bez ostatka sastoji iz tačaka.* Pod indefinitističkom reinterpretacijom te definicije ne mora biti opravdan zaključak *ab posse ad esse* svih tačaka koje se uopšte mogu fiksirati.

Uzmimo kao primer određenje realnog racionalnog broja-tačke – primer nesporan i za intuicionistu. Tim nizom je tačka jednoznačno određena, ali *ne* tako što su njime kao dovršenim isključene *sve* tačke *intervala* kojeg je ona granica; njime nisu isključene ni *sve* racionalne tačke, jer one ne mogu sve ni biti date, odnosno aktualizovane, već je njime isključena *bilo koja* tačka koja *bi mogla* biti aktualizovana u tom intervalu zahvaljujući jednom zakonu. Niz je *nužno nedovršen,* ali ipak određuje graničnu tačku intervala *jednoznačno.* Ako je tačka *samo granica* dva intervala, onda

intervala uvek *mora biti* da bi nje bilo, ali se interval, ili intervali, mogu neproizvoljno smanjivati tako da znamo, kao u ovom slučaju, koji prhvataju intuicionisti, ili pretpostavljamo, kao u slučaju iracionalnih tačaka, da će bilo koja aktualizovana tačka biti isključena dovoljnim produžavanjem niza. No produženje nikad ne može, po indefinitističkim pretpostavkama, dovesti do dosezanja granične tačke ili isključenja beskonačnog skupa aktualizovanih tačaka; *svaki član* beskonačnog konvergentnog niza ipak mora biti udaljen od granične tačke, a *svi* ne mogu biti dati.

Rasel je tačke definisao kao „konstrukte" koji su granice osnovnih materijalnih elemenata neke konačne ekstenzije, a onda je kontinuum bez ostatka definisao kao skup tačaka sa svojstvom gustine (*Russell 3*, str. 147, 132). Grinbaum dodaje, s pravom, da bi bilo neophodno dodati da taj skup mora biti neprebrojivo beskonačan (*Grünbaum 1*, str. 303), ali se mi svejedno možemo zapitati o opravdanosti Raselovog i Grinbaumovog koraka. Ako je tačka samo granica intervala, ona se ne može osamostaliti eda bi se tretirala kao konstituent intervala.

Protiv infinitističke topološke teze govori, videli smo, i činjenica da *ne postoje dve susedne* tačke ne samo skupa realnih već ni skupa racionalnih brojeva, koji se može dobro urediti ali ne po veličini.

Najzad, sâmo prihvatanje definicije realnih brojeva u stilu Kantora ne mora da znači negiranje Zenonovog aksioma, bar utoliko što se ta definicija može *reinterpretirati* indefinitistički. Prava može biti *geometrijsko mesto tačaka,* kako je to govorio Lajbnic (vidi *Leibniz 7*, str. 251–253), od kojih se *svaka izabrana* može, po pretpostavci, predstaviti nekim konvergentnim nizom racionalnih brojeva, a da to ipak ne znači da se ona *sastoji iz tačaka,* prosto zato što sve one *ne mogu* biti aktualizovane. Ako bismo odredili način, bacanja kocke recimo, na osnovu kojeg bismo za svaku izabranu tačku mogli da kažemo da je ili plava ili crvena, ne bi trebalo da zaključimo da se prava sastoji iz plavih i crvenih tačaka, iako će svaka fiksirana tačka biti crvena ili plava. Ako je svaka izabrana tačka na pravoj racionalna ili iracionalna, ne znači da je prava *skup* racionalnih i iracionalnih tačaka.[1]

Ako je tačno da je za negaciju Zenonovog aksioma potrebno nešto *više* od činjenice da se izabrane tačke na pravoj mogu jednoznačno predstaviti nizovima racionalnih brojeva, onda on ne bi morao biti negiran jednom kantorovskom definicijom realnog broja, odnosno tačke, pošto se ova definicija može interpretirati i indefinitistički. *Utoliko* nije spor Kantora i indefinitista oko realnih brojeva *nužno* i spor oko Zenonovog aksioma. Da bismo *na delu*, a ne samo u uverenju ili proklamaciji, *videli negaciju Zenonovog aksioma*, morali bismo ipak pronaći neke *rezultate* do kojih je došao Kantor shvatajući svoje definicije infinitistički, a koji se *ne bi mogli reinterpretirati indefinitistički.*

Kantorov rezultat o ekvivalentnosti jedinične duži bilo koje veličine i čitavog n-dimenzionalnog euklidskog arhimedovskog prostora opet ne mora da se interpretira infinitistički. Lajbnic se na jednom mestu (*Leibniz 27*, I, str. 338), dokazujući nepostojanje beskonačnosti u kategorematskom smislu, odnosno nepostojanje beskonačnih ordinala, pozivao na „paradoksalnu" posledicu koja bi sledila iz suprotne pretpostavke; celina bi, naime, bila veća od dela. Dokaz za to je pružilo upravo preslikavanje prirodnih brojeva na parne (*ibid.*, *loc. cit.*). Na sličan „paradoks" ukazuje Galilej u *Dijalogu o dve nove nauke* (*Galilei*, str. 77–78) i Bolcano u *Paradoksima beskonačnog* (*Bolzano*, § 21, str. 30–31).

Ako beskonačne skupove prirodnih brojeva i parnih prirodnih brojeva smatramo uređenim ali nužno nedovršenim nizovima utoliko što tu ne postoji poslednji element, onda je ekvivalentnost ova dva skupa u jednom smislu sasvim razumljiva i neparadoksalna. Irelevantno je što je kod niza parnih preskočen svaki drugi element prvog niza, kad se on može dovoljno produžiti,

zbog neograničenosti s desne strane, tako da ispod svakog napisanog prirodnog broja možemo, držeći se redosleda, napisati jedan i samo jedan njemu odgovarajući parni. Kod prebrojivih beskonačnih skupova, bar je to sigurno, preskakanje jednog, dva, ili bilo koliko konačno mnogo elemenata, neće uništiti njihovu beskonačnost i *po tome* će, kao što stoji u Dedekindovoj definiciji (*Dedekind 3*, str. 52), preostali podskup biti ekvivalentan skupu iz kojeg su ti elementi izostavljeni. Ta osobina se katkad naziva „refleksivnost" (*Russell 3*, str. 190), a lako ju je razumeti na osnovu nedovršenosti skupa prirodnih brojeva.

Ista ova *neiscrpnost* niza prirodnih brojeva omogućava razna Kantorova preslikavanja jedinične duži (vidi gore, § 93) i jedno takvo preslikavanje ne mora da ukazuje ni na šta dalje. Ako prirodne brojeve *proizvodimo rekurzivno u neograničenim količinama*, onda je, pre svega, *svejedno* hoćemo li tačku predstavljati kao tačku na liniji ili kao tačku u n-dimenzionalnom prostoru, hoćemo li je predstaviti jednim konvergentnim nizom ili sa n konvergentnih nizova. Ekvivalentnost jedinične duži i n-dimenzionalnog prostora ne znači ništa više od toga do da ova dva predstavljanja mogu ići uporedo, 1–1. Ako bi tačke koje na liniji možemo fiksirati bile plave *ili* crvene, a i tačke celog prostora isto tako, i to *samo zavisno* od načina fiksiranja, koji može biti potpuno nezavisan od nekakve prirode linije ili prostora – recimo tačke fiksirane ponedeljkom, sredom i petkom su plave, ostalim danima crvene – onda bi bilo moguće da naizmeničnim biranjem *svakoj* plavoj tački na liniji dodelimo *jednu i samo jednu* plavu tačku u prostoru i obrnuto, a isto tako i svakoj crvenoj crvenu. No očigledno linija i prostor se ne bi *samo zbog toga* morali *sastojati* iz plavih i crvenih tačaka koje bi sve jednovremeno mogle biti aktualizovane – za to bi bilo potrebno da se *simultano mogu fiksirati svi* parovi tačaka tako da se *nijedna* tačka posle toga *više ne može* fiksirati – i *utoliko* ne bi linija morala biti *jednaka* celom prostoru. Ceo postupak nema nikakve veze s *veličinom* i *jednakošću*, već samo sa *uzajamnom korespondencijom dva knjigovodstva*. Mehanizam kojim se pak služimo uobičajeno jeste zakonomerna proizvodnja cifara u neograničenim količinama.

97. Teškoće topološke infinitističke teze i neprevodivi infinitistički rezultati

Za razliku od Kantorovih preslikavanja o kojima smo upravo govorili, *postoje rezultati* koji se indefinitistički *ne mogu* reinterpretirati.

Kantorov diskontinuum (vidi gore, § 93), kao savršeni skup kardinalnosti $2^{\aleph_0}$, dobijen je na osnovu pretpostavke da je beskonačni proces vađenja središnjih trećina *završen*, tako da nigde nije preostao nijedan interval koji bi bio svuda gust. Komplementarno tome, Kantor diskontinuitet linearnog kontinuuma *u jednoj tački* pihvata *doslovno*, kao *otklanjanje jedne i samo jedne* tačke iz skupa realnih tačaka koje kontinuum *tvore*.

Tek dopuštanje ovakvih slučajeva koji, kao što smo videli (u § 91), *za indefinititiste predstavljaju problem*, neizbežno zahteva da se *negira i Zenonov aksiom*. Realne tačke, iako predstavljene nizovima racionalnih brojeva, tu su već dovoljno *samostalne* da se kao jedinični skupovi mogu otklanjati *praveći rupe* u kontinuumu, ili da naprotiv, kao u slučaju diskontinuiranog ternarnog skupa, *opstaju samostalne*. One su tako *zaista* postale entiteti koji, iako nuladimenzionalni, zajedno, u dovoljno velikom broju, i guste mogu *sačinjavati* čitav *n*-dimenzionalni prostor.

Kako doslovno razumeti otvorenost intervala skupa realnih tačaka jednog linearnog kontinuuma koji nastaju vađenjem jedne realne tačke kao jediničnog skupa ili, s druge trane, samostalno postojanje tačaka diskontinuuma?

Očigledno je da ništa ne možemo učiniti sa starom definicijom tačke kao granice dva intervala, kao što više ništa ne možemo učiniti ni sa definicijom linije kao forme razgraničenja dve površine (vidi § 12), pošto shodno tim definicijama ni tačke ni linije ne bi mogle postojati samostalno niti, komplementarno tome, mogu jedna po jedna biti otklanjane da bi pravile „rupe". Vitgenštajn je ukazivanjem na ovu okolnost dovodio u pitanje smislenost doslovne interpretacije infinitističke teze o liniji kao skupu tačaka (*Wittgenstein 1*, IV 30–39, str. 148–153).

Možemo li nacrtati duž bez krajnje tačke? Može li površina kao ograničena površ biti bez linije koja je razgraničava od druge površine? Može li ograničeno telo biti bez granične površine? Možemo li, s druge strane, izbrisati neku duž *tako* da preostane samo jedna tačka?

Rasel je, kao i kasniji infinitisti, hrabro tvrdio da se čitav problem oko Zenonovog aksioma, koji je u kinematičkom vidu predstavljen jednom od rogova dileme *Strele*, rešava time što se prihvati da u kontinuumu kao skupu tačaka nema sukcesivnih elemenata (*Russell 5*, str. 353–354). Kada matematičar kaže da se skup realnih brojeva ne može dobro urediti, to je jedna, a kada to kaže filozof, onda je to druga stvar. Matematičar na svoj posao može gledati na razne načine, može, recimo, na njega gledati formalistički i kao Hilbert, koji je inače bio radikalni empiričar (vidi gore, str. 291), prihvatiti i samu beskonačnost u idealnom, ne i realnom smislu (vidi *Hilbert 2*, str. 162 i dalje). filozof se, međutim, mora više brinuti za *realno značenje*, odnosno *uslove primene* svojih definicija (vidi diskusiju u § 56).

Postojanje kontinuiranih nediferencijabilnih funkcija, koje su takođe predstavljale problem za indefinitističku interprtaciju, infinitizam rešava na analogan negativan način. *Odsustvo* prve naredne tačke na krivoj $y = x \sin 1/x$ u odnosu na dodefinisanu vrednost $f(x_0) = 0$ za $x_0 = 0$ čini mogućim da se prenebregne pitanje o pravcu krive pošav od tačke (x_0, y_0) i time objasni mogućnost njene nediferencijabilnosti u toj tački. Ako već *po definiciji* postoje duži bez krajnjih tačaka, zašto onda ne bi postojale duži koje u graničnu tačku ne stižu niotkuda, *ni iz jednog* pravca? Ili, zašto ne bi na kraju krajeva postojala kriva poput Vajerštrasove, koja se *uopšte* ne može nacrtati *jer ni u jednu tačku* ne stiže *ni iz jednog pravca*!?

Infinitistički se problem konvergencije, kontinuiteta i diferencijabilnosti rešava po visoku cenu, za neke možda previsoku; tačke, linije, površine i tela *prestaju da budu ono što smo verovali da jesu*, postajući idealni korelati neprebrojivog beskonačnog carstva brojeva.

Ako se već jednom sve to proguta, onda deluje razumno da se i problem kontinuuma realnih brojeva *svede*, kako predlaže Gedel (vidi *Gödel*, str. 261), na pitanje odnosa aksioma teorije skupova na kojima se teorija realnih brojeva može zasnovati i hipoteze da je prvi kardinalni broj koji sledi iza $\aleph_0$ upravo kardinalni broj skupa realnih brojeva, naime $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Rezultat Pola Koena[1], da se hipoteza ne može dokazati iz Nojman-Bernajsovih aksioma teorije skupova i da za širi obim kardinalnih brojeva $\aleph_\tau$ jednakost $2^{\aleph_0} = \aleph_\tau$ predstavlja neprotivrečno proširenje sistema ne implicirajući nijednu novu teoremu u teoriji brojeva, matematički je značajan rezultat, ali teško da ima značajne filozofske posledice. Teško je, naime, videti šta nam to novo govori o prostoru, ili zašto bi to eventualno trebalo da nas čudi, ili zašto je to možda trebalo očekivati.

Filozofski bi moglo biti značajno da se utvrdi da li je rešiv problem konvergencije nizova kojima se predstavljaju brojevi koji treba da odgovaraju transcendentnim realnim tačkama – naravno u navedenom neutralnom smislu konvergencije iz § 95 – jer bi u slučaju pozitivnog odgovora mogli da preciziramo *bar jedan smisao* u kojem bismo *smeli* da kažemo da je svaka tačka

koju nekim geometrijskim načinom možemo fiksirati i aritmetički jednoznačno predstaviva, utoliko naime što bismo znali način da se toj tački neograničeno približavamo makar taj način i ne bio rekurzivno određen, zahvaljujući čemu bismo mogli isključiti bilo koju prethodno fiksiranu tačku intervala.

98. Metrička infinitistička teza

Interval (a, b) ili [a, b], gde je a=b i gde su a i b realni brojevi, naziva se degenerisanim intervalom. Realna tačka je degenerisani interval, interval čija je dužina jednaka nuli. Metričkom infinitističkom tezom se tvrdi da se jedan konačni, nedegenerisani interval [a, b], gde su a i b realni brojevi-tačke i $a \neq b$, koji je poluotvoren s desne strane, može sastojati iz beskonačno mnogo nedegenerisanih intervala koji se ne preklapaju. Ova teza protivreči Zenonovom dokazu u kojem se zaključuje da se konačna veličina ne može sastojati iz beskonačno mnogo delova (*DK*, B 1).

Beskonačni red $1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n + ...$ infinitistički interpretirano doslovno pokriva interval [0, 1]; aritmetički zbir intervala $i_1 + i_2 + ... + i_n + ...$, gde $i_1 = [0, 1/2)$, $i_2 = [1/2, 3/4)$, ..., $i_n = \left[(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n-1)/2^n\right)$, ..., i čija je pojedinačna dužina $L(i_1) = 1/2$, $L(i_2) = 1/4$, ..., $L(i_n) = 1/2^n$ ... i ukupna dužina $L(i) = L(i_1) + L(i_2) + ... + L(i_n) + ...$, daje interval $i = [0, 1)$ čija je dužina $L(i) = 1$. Dužina intervala [0,1) jednaka je dužini intervala [0, 1]; razlika između ova dva intervala sastoji se samo u tome što prvi ne sadrži dok drugi sadrži tačku koja odgovara realnom broju 1 (a koja je degenerisani interval dužine nula).

Kantorov diskontinuirani skup tačaka koji je dobijen isključivanjem otvorenih intervala čija je dužina redom $L(i_1) = 1/3$, $L(i_2) = 2/9$, $L(i_3) = 4/27$, ..., $L(i_n) = 2^{n-1}/3^n$, ..., nuladimenzionalan je jer ne sadrži nijedan nedegenerisani interval, dok je dužina isključenih intervala, koji su jednodimenzionalni, jednaka jedinici!

Veličina intervala na linearnom kontinuumu ne zavisi, dakle, od toga što je kardinalni broj tačaka koje ga tvore $2^{\aleph_0}$, kao što je jednodimenzionalnost linearnog kontinuuma nezavisna od veličine intervala. *Veličina* jediničnog intervala zavisi od merne jedinice koju smo *izabrali*, odnosno od toga kojim smo tačkama linearnog kontinuuma korespondirali realne brojeve 0 i 1.

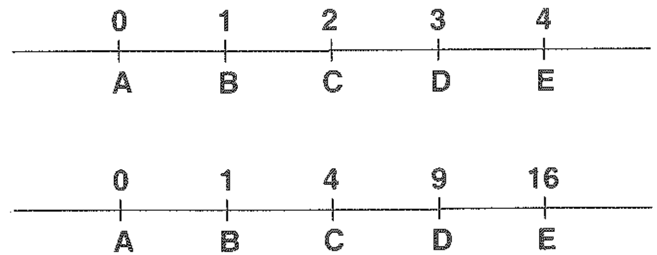
Uobičajenim načinom se pojam intervala može generalisati tako da bude definisan za *n*-dimenzionalni prostor. Jedina razlika između intervala na linearnom kontinuumu i u *n*-dimenzionalnom prostoru je razlika u broju realnih koordinata pomoću kojih su realne tačke određene. I u takvom prostoru ima degenerisanih i nedegenerisanih intervala, i tamo veličina intervala zavisi isključivo od *izbora* merne jedinice, odnosno od toga *kojim* smo tačkama pripisali koje realne brojeve predstavljene sa *n* beskonačnih konvergentnih nizova.

Prostor je, dakle, *„metrički amorfan"* (vidi *Grünbaum 4*, gl. 16) u tom smislu što nema nikakvu *unutrašnju metriku*, njegova unutrašnja struktura *ne nameće* nikakve određene relacije rastojanja. Relacije rastojanja zavise isključivo od načina na koji mi tačkama korespondiramo koordinate.

Neki infinitisti (vidi, na primer, *Salmon*, str. 70) smatraju da metrička amorfnost prostora, zbog koje se krajnje tačke za jediničnu duž mogu proizvoljno izabrati, implicira da se *na jednoj istoj brojnoj osi* sa fiksiranim tačkama 0 i 1 tačke koje odgovaraju brojevima 2, 3, 4, ... mogu s pravom preznačavati, na primer u tačke 4, 9, 16, ... (kao na slici na str. 491), pošto odsustvo intrinsične metrike prostora dozvoljava da se pored jedinice mere i *„metričko pravilo"* (*ibid., loc. cit.*) prenosa osnovne jedinice duži proizvoljno izabere. Jedini uslov koji sigurno mora biti ispunjen

jeste da, kod uobičajenog pisanja s leva na desno, od dve različite tačke desnoj bude pripisan veći broj.

Ako pomoću neke merne motke fiksiramo jediničnu duž [0, 1] i onda tu motku prislonimo uz liniju koja treba da postane brojna osa tako da levi kraj bude u tački 1, *ne moramo* tački koja odgovara desnom kraju motke pripisati broj 2. Možemo pretpostaviti, na primer, da su izvesne sile (*ibid.*, str. 61) u tom delu prostora proizvele, skraćenje ili produženje motke. Po Kripkeu (*Kripke*, str. 54 i dalje), a protivno Vitgentšajnu (*Wittgenstein 3*, § 50), ne bi bilo nužno istinito da je sve što je izmereno osnovnom



mernom motkom kojom merimo dužnu u metrima i što je njoj jednako – dugačko jedan metar. Konvencija po kojoj je standardni metar dugačak jedan metar nije po Kripkeu nezavisna od izvesnih empirijskih pretpostavki i izvesnih empirijskih saznanja. Ta motka nije ta motka samo ako je dugačka jedan metar, jer „biti dugačak 1 m" nije esencijalno svojstvo jedne motke, budući da mi nju samo koristimo za *fiksiranje reference* za jednu određenu dužinu (*Kipke*, str. 50). Moglo bi se desiti da je motka dugačka 1 m samo na određenom mestu u prostoru ili u određenom trenutku. Mi naravno, možemo *ugovoriti* da će svuda i uvek sve što je njome mereno biti dugačko 1 m, ali to je samo jedno, doduše vrlo zgodno, ali ipak *jedno metričko pravilo.*

Da li su sa stanovišta *teorije značenja* u pravu oni koji misle da je standardna merna motka za metre nužno dugačka 1 m, jer je merna, ili oni koji misle da to što je to tako može da zavisi od izvesnih znanja i prtpostavki o nepostojanju skraćenja ili produženja zavisno od mesta ili vremenskog trenutka? Da li se pitanje o postojanju ili nepostojanju skraćenja ili produženja može ili ne može empirijski razrešiti? Koliko je i to stvar neke konvencije?[1] Odgovor na sva ova pitanja se *ne može* tražiti u nekoj intrinsičnoj prirodi prostora. *U samoj prirodi prostora nema* ničeg što bi se opiralo navedenom preznačavanju dvojke u četvorku, trojke u devetku, i tako dalje, ili nekom sličnom preznačavanju.

99. Teškoće metričke infinitističke teze

Posmatrajmo beskonačni niz nedegenerisanih intervala $[0, 1/2), [1/2, 3/4), \ldots, [(2^{n-1} - 1)/2^{n-1}, (2^n - 1)/2^n), \ldots$, koji se ne preklapaju i čija veličina konvergira nuli. Prema infinitističkoj metričkoj tezi zbir ovih intervala trebalo bi da bude jednak poluotvorenom intervalu [0, 1) koji je po veličini jednak zatvorenom intervalu [0, 1], razlikujući se od njega samo po tome što ne sadrži graničnu tačku koja odgovara realnom broju 1.

Preznačimo, koristeći se metričkom amorfnošću prostora, tačke 1/2, 3/4, 7/8, ... u tačke 2, 3, 4, ..., što odgovara brojevima koje intervalima niza dodeljuje Zevs prilikom brojanja (vidi § 21). Sada malopređašnji zbir intervala više *neće* tvoriti nikakav konačni interval i novodobijeni interval se *neće* razlikovati od bivšeg intervala [0, 1] *samo po tome* što ne sadrži jednu tačku. Veličina intervala više *neće konvergirati nuli*, jer niz 1, 2, 3, ..., *n*, ... nije konvergentan.

Jedna konačna prostorna razdaljina postala je beskonačna *samo* zahvaljujući drugačijem označavanju tačaka, koje je, osim uslova da uvek desni broj bude veći od levog, potpuno proizvoljno. Osim toga, jedna granična tačka *prestala je* da bude granična tačka.

Da li je razdaljina po sebi konačna *ili* beskonačna, ili je konačna *i* beskonačna, ili možda po sebi nije *ni* konačna *ni* beskonačna? Što god odgovorili, Zenonu uvek stoji na raspolaganju mogućnost da razdaljinu koja je proglašena konačnom preznačavanjem učini beskonačnom. Dužina intervala [0, 1] koja se nije razlikovala od dužine jednog beskonačnog niza intervala, jer je jedinu razliku činila granična tačka koja je degenerisani interval dužine nula, počinje da se razlikuje od dužine tog niza, jer bivša granična tačka više nije granična tačka. Jedan isti prostorni interval mogao bi biti i konačno i beskonačno veliki, imati konačno udaljenu krajnju tačku koja bi isto tako mogla biti i beskonačno udaljena i ne biti granica beskonačnog niza intervala čiji je zbir prethodno po dužini bio jednak intervalu o kojem je reč, dužina L(*i*) bi mogla biti jednaka jedinici ili biti beskonačna – sve to zavisno od *načina pisanja*. Štaviše, razlika između konačnosti i beskonačnosti bila bi *isključivo* razlika u načinu pisanja. U svakom slučaju Zenon bi bio u pravu tvrdeći da se svaki *prima facie* konačni deo prostora može ispostaviti kao beskonačan.

Možda bi se moglo reći da najviše što možemo učiniti jeste da se pouzdamo u *fizičku* teoriju, jer odgovor na pitanje o konačnosti i beskonačnosti u krajnjoj liniji *zavisi* od *fizičke prirode* sveta, a ne od prirode prostora. Time se, međutim, priznaje nedovoljnost infinitizma zasnovanog na čisto matematičkoj teoriji prostora.

Nezavisno od teškoća vezanih za metričku amorfnost prostora, metrička infinitistička teza sadrži teškoće s kojima smo se sreli u finitističkoj kritici infinitizma (vidi § 55), a koje su vezane za činjenicu otvorenosti intervala koji članovi beskonačnog niza intervala treba da tvore. Ove su teškoće analogne teškoćama topološke infinitističke teze, samo su *očiglednije*.

Neka je dat beskonačni niz nedegenerisanih intervala koji se ne preklapaju, čija dužina konvergira nuli, samo neka su, za razliku od malopređašnjeg primera, oni poluotvoreni s leve strane. Uzmimo tako umesto niza $\left[0, 1/2\right), \left[1/2, 3/4\right), ..., \left[(2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^{n}-1)/2^{n}\right)$, ..., niz $\left(0, 1/2\right], \left(1/2, 3/4\right], ..., \left((2^{n-1}-1)/2^{n-1}, (2^{n}-1)/2^{n}\right]$, ... Da li je interval koji tvori zbir ovog niza intervala jednak intervalu (0, 1) ili intervalu (0, 1]? Njegova dužina, svakako treba da je jednaka dužini intervala [0, 1].

Pre svega, pošto u varijanti infinitizma koju razmatramo nema infinitezimala, odnosno pošto n nikad nije transfinitno, nijedan od intervala iz beskonačnog niza nije degenerisan. Lako je videti da dati niz ne može stvarno tvoriti interval (0, 1], jer bi tada morao postojati neki interval $\left((2^{n-1}-1)/2^{n-1}, 1\right]$, što je nemoguće, jer nikad ne može biti $(2^{n-1})/2^{n}$ jednako 1. Ako pak beskonačni niz tvori interval (0, 1), onda se ili granična tačka 1 intervala (0, 1] dodiruje s desnom graničnom tačkom nekog iz beskonačnog niza interala, ili ne postoji poslednji član niza intervala. Prvo ne može biti slučaj iz više razloga (vidi § 16 i *Arsenijević 1*), pa ostaje da je drugo slučaj. No sasvim je nejasno šta bi infinitistički interpretirano moglo da znači da u nizu *sukcesivnih, s desne strane zatvorenih, nedegenerisanih intervala* koji se *ne preklapaju – nema poslednjeg*, a da se *u isto vreme* oni od intervala (0, 1] razlikuju *samo po isključenosti* tačke koja odgovara broju 1.

Ova poslednja teškoća metričke infinitističke teze, koja ima analogon u topološkoj infinitističkoj tezi, postaje *još očiglednija* i sasvim operativno ustanovljiva preko drugog analogona, analogona u kinematičkoj infinitističkoj tezi.

100. Kinematička infinitistička teza

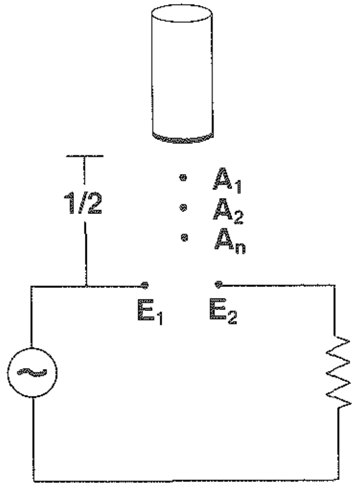
Kinematičkom infinitističkom tezom, koju smo u § 56 razmatrali baveći se dinamičkim infinitizmom, tvrdi se da je beskonačnost moguće savladati korak po korak, da *staccato* trkač u beskonačno mnogo pomicaja i sa beskonačno mnogo zaustavljanja u konačnom vremenu može stići na cilj (vidi § 56), da se Tomsonova lampa može upaliti i ugasiti beskonačan broj puta u roku od dva minuta (vidi §§ 23, 56), da Vajlova mašina i Blekove transportne mašine mogu obaviti super-zadatak. U našoj verziji *legato* brojanja (§ 21) to bi značilo da Zevs stiže na cilj zajedno sa Ahilom izbrojavši na putu $\aleph_0$ rastojanja, što znači da bi i Peano-mašina mogla ispisati beskonačno mnogo prirodnih brojeva, a π-mašina beskonačno mnogo decimala iz decimalne ekspanzije broja π.

Mada su kinematičku infinitističku tezu branili mnogi filozofi u dvadesetom veku (vidi § 3), najeksplicitnije, najkategoričnije, najrazrađenije i razmatranu na gotovo svim spornim primerima branio ju je Adolf Grinbaum (vidi *Grünbaum 3*, §§ 4, 5).

Razmatrajući isključivo prostorno-vremenske i kinematičke uslove i prihvatajući Kantorovu teoriju kontinuuma i kao teoriju prostora i kao teoriju vremena kao linearnog kontinuuma, Grinbaum zaključuje da su jedini opšti neophodni uslovi izvesni uslovi konvergencije.

Kod π-mašine, na primer, s čisto kinematičke tačke gledišta postoje dva uslova za uspešno izvršenje njenog super-zadatka koje Grinbaum navodi (*ibid.*, str. 87). Prvi je da dužina vremena u kojem se decimale ispisuju konvergira nuli, drugi je da širina cifara konvergira nuli.

U slučaju Tomsonove lampe, pored uslova konvergencije koji se tiču smanjenja vremenskih intervala paljenja i gašenja a koji su dati u samom zadatku (§ 23), mogu da se navedu i drugi specifični uslovi konvergencije u zavisnosti od toga na koji način predstavimo uspostavljanje i prekidanje strujnog kola. Ako se, otprilike kao na slici, strujno kolo uspostavlja dodirom donje osnove



prekidača s tačkama E_1 i E_2 a prekida pomicanjem prekidača naviše onda rastojanja osnove u najvišem položaju prekidača posle prekidanja strujnog kola od tačaka E_1 i E_2 moraju da se smanjuju težeći nuli. Ako je, na primer, lampa u početnom stanju ugašena i ako rastojanje osnove prekidača od tačaka E_1 i E_2 iznosi 1/2, onda se sledeća najveća rastojanja $A_1, A_2, ..., A_n$ mogu nizati geometrijskom progresijom 1/8, 1/32, 1/128, ..., $1/2^{2n+1}$ ($n = 1, 2, 3, ...$). Ukupna razdaljina koju prekidač treba da pređe spuštajući se na dole, Ld, iznosi

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} 1/2^{2n+1} = 4/6$$

a penjući se odozdo na gore rastojanje, Lg, iznosi

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} 1/2^{2n+1} = 1/6$$

To bi značilo da je posle beskonačno mnogo pomicanja prekidač prešao put

$$Ld + Lg = 5/6$$

Zanimljivo je Grinbaumovo tvrđenje (*Grünbaum* 3, str. 99) da će, pod pretpostavkom da se vremenski intervali smanjuju odgovarajućom geometrijskom progresijom, lampa po završetku paljenja i gašenja biti *upaljena* iako granični vremenski trenutak nije uključen u niz u kojem se opisano paljenje i gašenje dešava. Ali to *nije* tako zbog toga što znamo da je poslednji pomicaj bio odozgo na dole, već zbog navedenih uslova konvergencije. Ako bi se opis uspostavljanja i prekidanja strujnog kola promenio naizgled neznatno, onako kako je to predložio Alen Dženis (vidi *ibid.*, str. 101, nap. 64), pa bi prekidač uvek došavši odozgo uspostavio strujno kolo a zatim nastavio dalje u istom smeru da bi tačkama E_1 i E_2 prišao odozdo prekidajući strujno kolo time što bi, recimo, krećući se naviše na sebe automatski navlačio izolator, onda bez obzira na konvergiranja pozitivnih (gornjih) i negativnih (donjih) rastojanja nuli, ne bi moglo da se odgovori da li je po prestanku rada lampa upaljena ili ugašena, pošto bi to moralo da zavisi od toga *odakle* je prekidač došao u završni položaj. No Grinbaum, sledeći Dženisovu ideju, ne tvrdi samo da je na to nemoguće odgovoriti, već da sad čitav opis takvog paljenja i gašenja postaje *nemoguć* (*ibid.*, str. 101), pošto u beskonačnom broju pomicanja nužno nema poslednjeg, pa lampa, u slučaju da ceo mehanizam po prestanku rada ostane neoštećen, ne bi bila *niti* upaljena *niti* ugašena. Tako Dženisovi uslovi, neznatno različiti od Grinbaumovih, čine navodno ceo Tomsonov proces kinematički nemogućim.

Za razliku od Dženisovih uslova, koji proces kao celinu čine nemogućim zbog posledice po kojoj bi lampa morala ne biti ni upaljena ni ugašena, slični uslovi dati u opisu igre Blekovih mašina „Beta“ i „Gama“ navodno ne čine okončanje beskonačnog procesa nemogućim. Ako se pri prebacivanju klikera u levi i desni svemir udaljenost klikera od granice levog i desnog svemira smanjuje težeći nuli, onda će po isteku četiri minuta centar mase klikera biti na graničnoj liniji (*ibid*., str. 103). Odsustvo poslednjeg pomicaja ovde Grinbaumu ne stvara teškoće, *jer ništa ne zavisi* od smera iz kojeg kliker prispeva, dok u Dženisovom opisu rada Tomsonove lampe od toga zavisi da li je lampa upaljena ili ugašena.

101. Teškoće kinematičke infinitističke teze

Teškoćama kinematičke infinitističke teze bavili smo se opširno prilikom opravdavanja opšte negativne teze finitizma (§ 56). Sada ćemo samo uporediti Dženisove kinematičke uslove koji, prema Grinbaumu, izvršenje super-zadatka Tomsonove lampe čine nemogućim sa sličnim uslovima koji izvršenje super-zadatka Blekove „Bete“ i „Game“ navodno čine mogućim, da bismo još jedanput, prateći rezonovanje samih infinitista, videli koliko su čudni spoljašnji uslovi pod kojima se primenjuje definicija okončanog beskonačnog procesa kao serije diskretnih akata bez poslednjeg člana.

Situacija u kojoj prekidač osciluje oko prolaza E_1E_2 (vidi sliku na str. 496), svakako liči na situaciju u kojoj kliker kojim se „Beta“ i „Gama“ igraju osciluje oko granice levog i desnog svemira. Jedina razlika koja se u celom opisu ispostavlja kao relevantna sastoji se u tome što kretanje prekidača uspostavlja i prekida

strujno kolo u zavisnosti od toga odakle prekidač dolazi, dok se razlika u pravcu prilaženja klikera graničnoj liniji ne odražava ni na šta što bi je moglo registrovati. I sad bi naivan čovek mogao očekivati da će iz nemogućnosti okončanja Tomsonovog procesa, koju priznaje, Grinbaum zaključiti da je i izvršenje zadatka „Bete“ i „Game“ nemoguće. No, matematički infinitistički duh postupa obrnuto! Ne zaključuje Grinbaum da je nemoguće da prekidač i kliker ne dođu u završni položaj niotkud, ni odozgo ni odozdo, ni s leva ni s desna, već on samo traži da se dolaženje do prolaza, odnosno granice, *ničim ne registruje – da ne bismo mogli ukazati na protivrečnosti*. Kad kretanje prekidača ne bi proizvodilo paljenje i gašenje – ceo bi beskonačni proces bilo moguće okončati. Ako nema svedoka – nema ni protivrečnosti.

Grinbaum je najhrabrije, najdoslednije i najdoslovnije primenio definiciju otvorenog intervala i u kinematici. Tako smo pored duži bez kraja dobili i klikere koji stižu niotkud. Dovoljno je da nema signala ili svedoka pa da možemo slobodno primeniti definicionalni *fiat*. Cena rešenja je možda za nekog visoka, a ispitaćemo odmah nije li i najviše poznata.

G. POZITIVNA DIJALEKTIKA

102. Ograničenje važenja principa neprotivrečnosit

Svi dosad razmatrani – inače međusobno vrlo različiti – stavovi prema Zenonovim dokazima protiv mnoštva i kretanja imali su bar jednu zajedničku crtu: svi su pretpostavljali važenje principa neprotivrečnosti u jednom sasvim opštem smislu, bez obzira na to kako se taj princip inače tačnije specifikovao. Ta zajednička crta sadržana je u pretpostavci o neprihvatljivosti istovremenog tvrđenja da su mnoštvo i kretanje stvarni i tvrđenja da su pojmovi mnoštva i kretanja samoprotivrečni, ili da neke od njihovih relevantnih odredaba mogu da se razviju tako da omoguće formulisanje međusobno protivrečnih iskaza. Zbog toga su oni koji su rezultat Zenonove dijalektike potpuno prihvatili – ili bili ontološki nihilisti, ili su rezultat shvatali kao pokazatelj naše intelektualne nemoći da shvatimo mnoštveni svet i kretanje u njemu, ili su mnoštvenost i kretanje proglasili prividom iza kojeg se krije „prava stvarnost" (vidi § 41). Sada nam ostaje da se zapitamo nije li Hegel sve nadmašio na čudnovatoj aukciji kojoj

prisustvujemo, ponudivši da rešenje plati po ceni većoj od svih ponuđenih, a možda i svih zamislivih – odricanjem od zahteva za uvažavanje principa neprotivrečnosti.

Ima u Hegelovim spisima mnogih mesta koja u ljubiteljima spektakla bude nadu. Tako, na primer, na reprezentativnom mestu u *Logici* koja sačinjava prvi deo *Enciklopedije filozofskih nauka (Hegel 1*, § 119, str. 127–129) nalazimo ironične izjave o zaboravnosti onih koji se pridržavaju principa neprotivrečnosti ne shvatajući da pridržavajući se tog načela sami srljaju u protivrečnost ako se pridržavaju i ostalih formalnih logičkih zakona. A princip neprotivrečnosti Hegel tu upravo tumači u maločas navedenom smislu: „*Pojam* kojem od dva protivrečna obeležja ne pripada nijedno, ili mu pripadaju oba, proglašava se logički neispravnim..." (kao, na primer, „četvorouglast krug") (*ibid.*, str. 129). Jasno je da ovakvi pojmovi uvek omogućavaju i formiranje međusobno protivrečnih iskaza, pa time Hegel u stvari ismeva načelo koje bismo danas napisali kao $\neg(A \wedge \neg A)$.

Ako pogledamo kako stvari stoje u slučaju koji nas zanima, a to je „slučaj Zenon", i tu možemo naći rečenice koje su sasvim u duhu prethodne najave. Na *Predavanjima o istoriji filozofije* saznajemo da „kretati se (međutim) znači biti na ovom mestu i u isto vreme ne biti na njemu, dakle, biti u isto vreme na dva (mesta)" (*Hegel 3*, I, str. 314). Zenon je dobio veliku pohvalu što je „ukazao na ono što je protivrečno" (*ibid.*, str. 317), a za Kantove antinomije se kaže da „nisu ništa drugo do ono što je Zenon već tu sačinio" (*ibid., loc. cit.*). Kako ne treba ni dokazivati da kretanje za Hegela nije prividno, to znači da je stvarno i ono što sadrži odredbe na osnovu kojih se mogu formirati međusobno protivrečni iskazi!

Ako ova i njima slična mesta shvatimo ozbiljno i doslovno, ne tražeći olakšavajuće okolnosti u kontekstu ili na drukčijim mestima, teško da možemo dalje pregovarati o Hegelovoj ceni. Ostaje nam, verovatno, samo da mu zahvalimo i da ga pozdravimo citirajući usput Aristotela: „Neki zaista zahtevaju da se dokazuje čak i ovo načelo (načelo protivrečnosti – *M.A.*), ali to je zbog toga što su neobrazovani (δι' ἀπαιδευσίαν), jer stvarno je neobrazovanost ne znati šta zahteva a šta ne zahteva dokazivanje... Ako ima ičega što ne zahteva dokazivanje, neka nam kažu za koje to načelo (ἀρχή) više važi nego za ovo" (vidi *Aristotle 1*, 1006 a 6–12). Aristotel je blag jer ne govori o onima koji princip neprotivrečnosti ne prihvataju već o onima koji za njega traže dokaz. A „dokaz" – u Aristotelovom smislu naravno pod znacima navoda – može predstavljati samo ukazivanje na posledice odricanja od tog principa, kao što je, recimo, prekid komunikacije (verovatno i sa samim sobom). „Dokaz" koji daje Aristotel ovde preskačemo. No da ne bi bilo zabune, evo i Aristotelove formulacije načela neprotivrečnosti: „Nemoguće je (ἀδύνατον) da ujedno (ἅμα) isto (αὐτό) pripada (ὑπάρχειν) i ne pripada jednom te istom (τῷ αὐτῷ) i na isti način (καὶ κατὰ τὸ αὐτό)" (*ibid.*, 1005 b 19–20).

Dobronamerni čitalac Hegela mogao bi pomisliti da on u stvari ukazuje na ograničavajuće uslove za primenu principa neprotivrečnosti koji su sadržani u Aristotelovoj definiciji. I Aristotel, shodno svojoj teoriji značenja, u kojoj centralnu ulogu igra pretpostavka o πολλαχῶς λεγόμενα, priznaje da jedno isto (τὸ αὐτό) može ujedno (ἅμα) biti i ne biti (εἶναι καὶ ὂν καὶ μὴ ὄν) ali uz uslov da to ne bude na isti način, odnosno u istom smislu (ἀλλ' οὐ κατὰ ταὐτό) (*ibid.*, 1009 a 34–35). No Hegel, govoreći o „refleksiji otuđenoj od sebe", prigovara upravo takvom načinu izbegavanja protivrečnosti kojim se „*istovremeno važenje* dva predikata drži odvojeno pomoću reči *ukoliko... utoliko...*" tako da bi, na primer, dve stvari bile „prema jednoj *strani* i (u jednom) *pogledu jednake*, a prema drugoj strani i (u) drugom pogledu nejednake" (*Hegel 1*, § 119, str. 128–129, § 117, str. 127).

Posle ovako otvorene izjave stvar deluje beznadežno. Međutim, ima kod Hegela i mnogo izjava u kojima se govori o „razrešenju protivrečnosti" i o neophodnosti toga razrešenja, a da se kao rešenje ne prihvata uzimanje oba od dva međusobno protivrečna tvrđenja za tačna. Tako se, na primer, u takozvanoj *Velikoj logici* govori upravo o „razrešenju protivrečnosti" između tvrđenja o konačnosti i tvrđenja o beskonačnosti onoga što jeste, koje se ne sme sastojati „u priznavanju *podjednake* tačnosti i *podjednake* netačnosti obeju tvrdnji", jer bi „to predstavljalo samo drugi oblik protivrečnosti koja i dalje ostaje..." (*Hegel 4*, I, str. 141).

Ključ za izlaz iz ove čudne situacije, u kojoj se princip neprotivrečnosti s jedne strane *ismeva* kao izraz „refleksije otuđene od sebe", dok se s druge strane *zahteva* „razrešenje protivrečnosti", nalazi se u specifičnom nearistotelijanskom ograničavanju važenja samog tog principa, koje je sažeto u čuvenoj formuli: „ono što je istinito je celina (*das Wahre ist das Ganze*)" (*Hegel 2*, str. 21). Zahtev za neprotivrečnošću se *mora* uvažavati, ali se neprotivrečnost *može* ostvariti samo u jednom celovitom, dovršenom naučnom sistemu (*ibid.*, str. 12 i dalje).

Suprotno teoremi kompaktnosti (vidi gore § 86), kojom se iz neprotivrečnosti svih konačnih podskupova rečenica jednog sistema zaključuje na neprotivrečnost celog, makar i beskonačnog, sistema, Hegelu je jemstvo za razrešene protivrečnosti bilo kojeg *dela* sistema – neprotivrečnost *celog* sistema. I *a fortiori*, svaki pravi deo sistema *nužno* sadrži u sebi neku protivrečnost ako se izoluje (up. *Hegel 1*, §§ 11–18, str. 44–51), to jest ako se posmatra van celog sistema.

Ovo obrtanje je naizgled vrlo mistično i kao takvo neka bude utočište onima kojima nikad nije dosta dubokoumnosti. Mi ćemo, međutim, pokušati da Hegelovu ideju operacionalizujemo, polazeći od njegovog prvog i glavnog primera iz *Logike (ibid.*, §§ 84–88, str. 105–110), držeći se njegove vlastite analize.

Ako bi nam neko rekao da je ono što jeste u stvari ipak ništa, svakako bismo se začudili, jer se ono što jeste *razlikuje* od ništavila upravo po tome što jeste. No, s druge strane, ako bi nam neko zabranio da navedemo bilo kakve *bliže* odredbe toga što jeste, mi to što jeste *ne bismo mogli razlikovati od ništavila.* Po principu *identitas indiscernibilium*, ono što jeste i ono što nije, to jest biće (*das Sein*) i ništa (*das Nichts*) bili bi jedna ista stvar, i to je, po Hegelu, Ahilova peta elejske ontologije (*Hegel 3*, I, str. 301). Dakle, ili moramo navesti neku *dodatnu* odredbu koja nam omogućava da razlikujemo biće od ničega, ili se razlika između onoga što jeste i onoga što nije *gubi.*

Ovaj primer dovoljan je da se razreši misterija oko principa neprotivrečnosti. Ne želi da kaže da *u cilju* tog razlikovanja moramo navesti *još neke odredbe* onoga što jeste osim odredbe *da jeste.* Ako se držimo Lajbnicovog zakona o identitetu onoga što se ne može razlikovati i ako razliku hoćemo da pravimo bez dodatnih odredbi, zapadamo u *protivrečnost* utoliko što tada ne možemo *razlikovati* ono za šta *tvrdimo* da se razlikuje.

Generališući na osnovu ovog primera, možemo reći da uvek moramo navesti bar onoliko odredaba koliko je neophodno da bismo uspešno i bez protivrečnosti razlikovali ono što želimo da razlikujemo. Ovo pravilo deluje sasvim prihvatljivo i to je ono što je kod Hegela poučno, i ako nije novo, bez obzira što malopređašnja formulacija može delovati preskromno za mnoge hegelijance i bez obzira na to kako je sam Hegel na ovo pravilo gledao gradeći svoj sistem. Hegel je u primeni ovog pravila postupao dosta „tvrdo“, misleći da se nova određenja nižu jedno za drugim s nužnošću i da se tu radi o onom što dodatnim odredbama ne samo želimo da razlikujemo, već o onome što se nužno mora razlikovati. U svakom slučaju, on je verovao da je njegov sistem *dovršen* u tom smislu da je dovoljno bogat da omogućuje da *bez protivrečnosti* možemo razlikovati sve što treba razlikovati. Zato su oni

koji u dovršenosti Hegelovog sistema vide navodno nesaglasje s njegovom dijalektičkom metodom, ili suštinom, u stvari antihegelijanci, pošto dovode u pitanje osnovu celog Hegelovog dijalektičkog poduhvata. Dovršenost, bez obzira kako je ostvarena, u svakom je slučaju nužan uslov razrešenosti svih protivrečja koja treba razrešiti.

No, naravno, iz toga što je *ceo* sistem potreban da bismo bez *ikakve* protivrečnosti razlikovali *sve što treba* razlikovati, ili, u blažoj varijanti, *sve što želimo* razlikovati, *ne sledi* da je ceo sistem potreban da bismo bez neposredne protivrečnosti razlikovali *ponešto* od onoga što treba ili što želimo razlikovati. Hegelovo neprihvatanje važenja principa neprotivrečnosti uvek je ograničeno do na *određene* tvrdnje *s obzirom* na *određeni* skup ili niz odredaba. S obzirom na neki dati niz odredaba $d_1, ..., d_n$, moguće je izvesti protivrečnosti za određene $p_1, ..., p_m$, naime $p_1 \wedge \neg p_1$ ili $p_2 \wedge \neg p_2$ ... ili $p_i \wedge \neg p_i$ ($i = 1, 2, ..., m$). Izvesnim produženjem niza $d_1, ..., d_n$ dedukcija protivrečnosti treba da prestane da bude moguća.

Možemo zaključiti da se *negativna* strana dijalektike (up. *Hegel 1*, § 48, str. 72–73, § 74, str. 98) sastoji u otkrivanju protivrečnosti između zahteva za razlikovanjem onoga što treba razlikovati i nemogućnosti da se to učini bez samoprotivrečnosti s obzirom na neki dati niz odredaba. No, (negativna) dijalektika ima i „*pozitivan* rezultat“ (*ibid.*, § 82, str. 103), jer je ona samo „negacija izvesnih određenja koja su u rezultatu sadržana“, što treba da omogući prevazilaženje (*Aufhebung*) protivrečnosti uz pomoć novih određenja.

Ako smo na kraju zaključili da Hegel samo na specifičan način ograničava princip protivrečnosti ne odričući ga se, ostaje nam da vidimo kako se pozitivno-dijalektički rešavaju teškoće s kojima se mi nosimo.

103. Pozitivno-dijalektički odgovor na dokaze protiv mnoštva i kinematičke aporije

Reductio ad absurdum pluralističke hipoteze koji izvodi Zenon moguć je, po Hegelu, samo u slučaju da se odredbe onoga što jeste *ograniče* na niz odredaba kvaliteta i kvantiteta (vidi *Hegel 1*, § 86–106, str. 106–120); utoliko Hegel i prihvata rezultat Zenonove negativne dijalektike (*ibid.*, § 104, str. 119–120). No taj rezultat omogućuje i pozitivni obrt. Ako se odredbe kvaliteta i kvantiteta *proširе* odredbom *mere*, koja predstavlja i dovršenje nauke o biću (*ibid.*, §§ 107–111, str. 120–122), onda protivrečja neophodna za *reductio* o kojem je reč više ne postoje – ona su *prevaziđena*.

„Antinomija prostora, vremena ili materije u pogledu njihove deljivosti u beskonačnost, ili pak njihovog sastojanja od nedeljivih delova, nije ništa drugo nego potvrđivanje kvantiteta jedanput kao kontinuiranog, drugi put kao diskretnog" (*ibid.*, § 100, str. 117). Prostor po sebi, vreme po sebi ili materija po sebi nisu ni za Hegela, kao ni za Kanta, pre kontinuirane nego diskretne veličine, niti su pre diskretne nego kontinuirane. U njima zato ne postoji κυρίως ἕν (vidi primedbu uz § 104 u *Hegel 1*, str. 119–120) i jedan ograničen prostor se sastoji iz neodređeno mnogo delova. Izbor broja delova znači ujedno i zbor izvesnih površina, kao granica, kao što izbor duži na pravoj znači i izbor dve krajnje tačke. Tako su osim odredaba kontinuiranosti i diskretnosti suprotstavljene i odredbe kontinuiranosti i punktualiteta (vidi *ibid.*, § 256, str. 207–209).

Ako želimo da tvrdimo da prostor ne može biti jedinsven i mnoštven u isto vreme, ili ako želimo da tvrdimo da kao mnoštven mora imati određeni broj delova, ili kao punktualan određeni broj tačaka, onda to, posmatrajući prostor kao takav, ne možemo s pravom učiniti i utoliko postoji nesaglasnost između

tog zahteva i mogućnosti koje nam pružaju odredbe koje su na raspolaganju. Isto važi i za vreme i materiju.

Uvođenjem u igru *mere* kao „kvalitativnog kvantuma" (*ibid.*, § 107, str. 120), to jest kao „kvantuma uz koji je vezano neko određeno postojanje (*Dasein*) ili kvalitet", stvar se menja, jer tada se može odgovoriti na pitanje o broju koji treba korespondirati izvesnom prostoru.

No i „mera je samo *relativni indentitet*" kvantiteta i kvaliteta (*ibid.*, § 110, str. 121). Zaista, kao i prostor, vreme i materija, stvari kao stvari, bez bliže odredbe, nisu ni jedinstvene ni mnoštvene – to je ono na čemu je kasnije insistirao Frege, a za njim finitisti Blek i Švajder (vidi gore, § 57); ne može se odgovoriti na pitanje „koliko stvari ima u ovoj sobi?" ako se pri tom nemaju u vidu stvari *određene vrste*. Ako su brojevi svojstva, rekao bi Frege, oni su svojstva opštih, vrsnih termina ili opisa, a ne stvari (*Frege 4*, § 42, *Frege 2*, § 29, str. 39–41 i § 42).

Hegel, Frege i Gič došli su različitim putevima do sličnog rezultata. Pošto je identitet stvari relativan, to jest zavisan od opšteg pojma koji omogućava brojanje, ontološka pluralistička hipoteza je neodrživa *ako* treba da je interpretiramo *samo matematičkim terminima* koji se odnose na čist prostor ili vreme, ili ako se koristimo samo neodeđenim pojmom materije ili stvari. Hegelova tvrdnja da je „svaka prava filozofija idealizam" (*Hegel 1*, § 95, str. 114) može se lako razumeti preko ovog slučaja, a on je upravo i izriče govoreći o antinomijama vezanim uz *kvantitet*. Za svet možemo reći da je *mnoštven* samo ukoliko u njemu ima *raznovrsnih* stvari, a tek preko suštinskih određenja, na koja se odnosi *nauka o suštini* (*Hegel 1*, §§ 112–159), omogućen je pojam konkretne pojedinačne stvari kao *pojedinačne stvari određene vrste*. Mnoštvo je realno koliko je realan i pojam koji se instancira u raznovrsnim stvarima.

Hegelovo dijalektičko rešenje ispostavlja se, dakle, kao pozitivno finitističko (up. gore, § 57). Ono što Hegel naziva „lošom beskonačnošću" (*Hegel 3*, I, str. 438, *Hegel 1*, § 94, str. 112, *Hegel 4*, I, str. 140) u stvari je beskonačnost u sinkategorematskom smislu (up. *Cantor 6*, str. 373), koja može da se javi samo u slučajevima nedostatka odredbi koje bi preko „relativnog identiteta kvantiteta i kvaliteta" onemogućile beskonačni progres ili regres. „Kvantum se *može* do beskonačnosti povećavati ili umanjivati" i „beskonačni kvantitativni *progres* takođe je besmisleno ponavljanje jednog te istog protivrečja koje je kvantum uopšte i postavljen u svojoj određenosti – stepen. O suvišnosti da se to protivrečje izrazi u formi beskonačnog progresa kaže s pravom *Zenon* kod Aristotela: kazati što jedanput i kazivati to *uvek* isto je" (*Hegel 1*, § 104, str. 119-120). Bez mere svaki kvantum je neizmeran i otuda ispravnost Zenonovog zaključka da se *jedan konačan* predmet ispostavlja kao u sebi *beskonačan*, to jest *nejedinstven* (u *DK* B 1).

Ono što Hegel naziva „istinskom beskonačnošću" (*Hegel 4*, I, str. 140) samo je neobičan način da se izrazi *prevaziđenost* zenonovskih protivrečnosti koje se javljaju u slučaju čisto kvantitativnih određenja prostora, vremena, materije ili kretanja. Videli smo da se „rešenje (ove) protivrečnosti ne sastoji u priznavanju *podjednake tačnosti* obema tvrđenjima" (*ibid.*, str. 141), tvrđenju o konačnosti i tvrđenju o beskonačnosti nekog kvantuma. Rešenje se sastoji „u *idealitetu* ta dva tvrđenja u kojem ona u svojoj razlici kao uzajamne negacije predstavljaju samo *momente*..." (*ibid.*, str. 141–142). To, kada se shvati konkretno, znači da je predmet *jedinstven* utoliko što je predmet *određene vrste* – dakle, *po pojmu* – a *konačan* zato što se, kako je tvrdio i Aristotel, može sastojati samo iz konačno mnogo delova *određene vrste*. On je pak beskonačan utoliko što zauzima izvesni *prostor* koji se *kao takav ne sastoji* iz određeno mnogo delova. Konačnost i „rđava beskonačnost" *razlikuju se na neprotivrečan način* preko pojma *konkretne pojedinačne stvari određene vrste*, koji u sebi sadrži i kvantitativne odredbe. Bez tog pojma ne može postojati κυρίως ἕν, jer se bez njega svakom kvantumu mogu pripisivati međusobno protivrečna određenja.

Mesto na kojem se neko telo nalazi je jedno od određenja koje isto prostorno ne može biti jednoznačno, a isto važi i za delove vremena u kojem se telo kreće ako se to vreme posmatra kao čisto kvantitativna veličina. Zato je moguće da telo koje se kreće „bude i ne bude na istom mestu" ili „bude jednovremeno na dva" (s navedenim mestom u *Hegel 3*, I, str. 114 uporedi *Hegel*

1, § 48, str. 72 i § 81, str. 103). Hegelovo rešenje kinematičkih aporija potpuno je aristotelijansko, što on i priznaje (*Hegel 3*, I, str. 308). Novo je samo to što se *odsustvo jednoznačne određenosti* koju sadrži indefinitistika interpretacija smatra *protivrečnošću*, očigledno zbog nesaglasnosti te neodređenosti sa *zahtevom* za odeđenošću koji nameću kvalitativna određenja (*Hegel 1*, § 82, str. 103–104).

Ako se jedno određeno telo nalazi na nekom mestu, onda izgleda da je to mesto jedno određeno mesto *nezavisno* od toga što se to telo na njemu nalazi, jer se ono na njemu ne mora nalaziti. Međutim, *identitet* određenog tela zavisan je od njegovog *pojma*, pa je zato i mesto određeno tek pomoću *tog* tela kao i *ostalih* tela s kojima je to telo u odnosu koji se naziva prostornim. Kretanje je promena odnosa među telima, pa ako mesta fiksiramo kao strogo određena stanjem *pre kretanja*, onda kretati se znači biti i ne biti na istom mestu. To nije samo odgovor na *Strelu* već i na *Stadion*, koji je usmeren protiv pretpostavke o fiksiranim mestima (vidi dole, § 118).

U *Dihotomiji* i *Ahilu* pojavljuje se „loša beskonačnost". No, kao što smo videli razmatrajući pozitivnu tezu finitizma, iz toga što se prostor koji će Ahil preći jureći kornjaču može deliti u beskonačnost ne bi trebalo da sledi da se put ili Ahilovo kretanje sastoji iz beskonačno mnogo delova.

104. Teškoće pozitivno-dijalektičkog rešenja

Vrlo je značano uočiti da se Hegelovo ograničenje važenja principa neprotivrečnosti, koje se uvek odnosi na *određene* tvrdnje $p_1, ..., p_m$ s obzirom na izvesni niz odredbi $d_1, ..., d_n$, a koje implicira zahtev za jednim *dovršenim* nizom određenja s obzirom na koje ne bi bilo moguće formulisati protivrečne iskaze, može bez teškoća *dopuniti* jednim pravilom koje bi omogućavalo da se u bilo kojem segmentu $d_1, \ldots, d_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ *izbegne* protivrečnost i time ujedno ponovo uspostavi prethodno prihvatana univerzalnost načela neprotivrečnosti. Tim pravilom bi se, dosledno slojevitoj dijalektičkoj konstrukciji, niz dopustivih iskaza $p_1, \ldots, p_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *ograničavao* do na izvestan niz odredaba $d_1, \ldots, d_j$ $(j =1, 2, \ldots)$ *tako da* mogućnost konstrukcije protivrečnih iskaza bude isključena.

Umesto da kažemo da se ono što jeste razlikuje od ničega ali da to ujedno i nije slučaj, možemo jednostavno reći da se dve stvari ne razlikuju ako nema nikakvih bližih određenja osim samih određenja *bića*, d_1, i ničega, d_2, dok se uz bliža određenja počinju razlikovati, zbog čega iskaz o razlici bića i ničega nije ni dopušten uz samo dva navedena određenja (d_1 i d_2). Umesto da se zakon identiteta ograniči (između ostalog) zbog toga što je njegovo prihvatanje u protivrečnosti s formom u kojoj je izražen – naime kao $\forall x(x = x)$ – jer se levo i desno x uz znak jednakosti razlikuju, možemo jednostavno uvesti razliku *type-token* kao nužan uslov formulabilnosti samog zakona i time, uz prihvatanje, recimo, još i stratifikovanog jezika teorije tipova izbeći protivrečnost (vidi *Knjazev-Adamović*, str. 44–45). Umesto da tvrdimo da su iskazi o identitetu trivijalno neinformativni utoliko što moraju imati oblik „*a* je *a*", pošto „*a* je *b*" ne bi, zbog razlike *a* i *b*, bio iskaz o identitetu (kako to čini Hegel – viti *Hegel 1*, § 115, str. 126), možemo reći da „*a* je *b*" jeste iskaz o identitetu uz neke *dodatne* odredbe, recimo uz fregeovsko razlikovanje značenja (*Sinn*) i reference (*Bedeutung*) (vidi *Frege 5*), dok je bez neke takve dodatne razlike nemoguć. I tako, najzad, na sličan način, umesto da tvrdimo da su pojmovi prostora i vremena kao čista kvantitativna određenja samoprotivrečni zbog mogućnosti formulisanja protivrečnih iskaza kojima im se na razne načine korespondiraju brojevi, možemo reći da *odsustvo odredbe* κυρίως ἕν, čini korespondiranje *proizvoljnim*, i utoliko iskaze o kojima je reč međusobno *neprotivrečnim*.

Ovakva mogućnost otklanjanja protivrečnosti *u svakom segmentu niza odredbi* pokazuje nam da svako od *Hegelovih transcendirajućih* razrešenja protivrečnosti, putem njihovog prevazilaženja uz pomoć novih odredaba, *može* da se *reinterpretira* tako da postane *imanentno*, naime tako da novi *nivoi* u dijalektičkoj konstrukciji prestanu da budu neophodni za neposredno otklanjanje protivrečnosti. Imanentna rešenja pak ne impliciraju postojanje transcendentne reinterpretacije.

Hegelovo dijalektičko rešenje ispostavilo se kao finitističko u jakom antiinfinitističkom smislu (up. § 70). Utoliko ono vodi u one iste teškoće finitizma s kojima smo se sreli. Koliko je deonica puta Zevs izbrojao sigavši s Ahilom na cilj (*legato* verzija iz § 21)? Šta tu nije u redu s pitanjem? Kako prevazilaženje samo kvantitativno shvaćene konačnosti i beskonačnosti kao „rđave beskonačnosti" pomoću „relativnog identiteta kvantiteta i kvaliteta" i „istinske beskonačnosti pojma" može da nam pomogne da odgovorimo na ovo pitanje, ili da eventualno damo obrazloženje njegove neadekvatnosti? Da li je Zevs izbrojao beskonačno mnogo deonica? Ne, jer bi to bio „rđavi infinitizam". Možda bi, u duhu finitizma, trebalo da ih je izbrojao konačno mnogo? Ali koliko to konačno mnogo, ako se rastojanja smanjuju po geometrijskoj progresiji? Ako se kaže da ih nije izbrojao *ni* konačno *ni* beskonačno mnogo, ili *i* konačno *i* beskonačno mnogo, onda to više nije nikakvo dijalektičko rešenje, već najbanalnije protivrečje, to jest apsurd.

Da dijalektička transcendirajuća rešenja ne bi bila obična apsurdnost, mora postojati *imanentistička reinterpretacija* svakog navodnog rešenja. U slučaju naše glavne teškoće ne vidi se kako bi se ona izvela.

Hegelov dijalektički poduhvat kojim se daje za pravo međusobno suprotstavljenim tvrdnjama ili učenjima, u čemu on sledi Platona, Aristotela i sve ostale koji su ove u tome pokušali da slede, dvostruko nam može biti poučan. Ukazujući, možda, na prvi trag, on ujedno pokazuje koliko su apstraktne sheme transcendirajuće dijalektičke sinteze vredne samo ukoliko se mogu *operacionalizovati* i *imanentistički reinterpretirati*. Problem je, iako surov, jednostavan. I rešenje mora biti takvo.

ISHOD

„Nur eine Waffe taugt:
die Wunde schließt
der Speer nur, der sie schlug."

105. Jesu li svi poraženi?

Možemo reći da su unekoliko svi učesnici *Gigantomahije* poraženi, utoliko, naime, što smo u svakom od razmotrenih odgovora pronašli neku slabu tačku koja ih je činila nezadovoljavajućim. No te slabe tačke se po tipu veoma razlikuju od odgovora do odgovora, pa se, u skladu s tim, mogu razlikovati i naša nezadovoljstva.

Osim odgovora koji bi morali da se završe eksplicitnim „*credo quia absurdum est*" (§ 41, 42), najneprihvatljiviji su, svakako, oni odgovori koji su dati unutar učenja za koja se može pokazati da su u sebi protivrečna. Kao što smo videli, to je slučaj s geometrijskim i kinematičkim atomizmom, koji podležu svođenju na apsurd pomoću odgovarajućih francuskih varijacija *Stadiona* (§ 50, § 52).

Nisu mnogo prihvatljiviji odgovori koji svođenje na apsurd izbegavaju pomoću zvesnih *ad hoc* ograničenja u cilju sprovođenja definicionalnog *fiat*. Takvo postupanje je karakteristično za infinitiste (vidi, recimo, § 56), a verovatno najdrastičniji primer predstavlja Grinbaumovo razlikovanje Dženisovih kinematičkih uslova za izvršenje zadatka Blekovih „Bete" i „Game" da bi se time na neprotivrečan način obezbedilo odsustvo poslednjeg člana u beskonačnom nizu oscilacija (§ 100). Uostalom, kao ovde infinitizam, i geometrijski i kinematički atomizam bi se mogli spasti *ad hoc* ograničenjima, tako što bi se *po definiciji* isključili baš oni slučajevi koji su omogućavali *reductio ad absurdum*; zabrani se, na primer, da dva tela uopšte krenu jedno prema drugom ako bi trebalo da se sudare na pola *hronona* (vidi § 50, § 52).

Sa strategijom ili, možda tačnije, taktikom pomeranja problema sreli smo se, u najkarakterističnijem vidu, baveći se teorijom infinitezimala. No nigde se bolje ne vidi nego u Ahilovom *staccato* trčanju ili Zevsovom *legato* brojanju koliko se problem *ne može* s uspehom pomeriti (§ 88). Deonice Ahilovog puta posle kojih se on zaustavlja, ili koje Zevs broji, nisu infinitezimale; vremenski intervali kretanja i zadržavanja pri *staccato* kretanju takođe nisu infinitezimale. Nezavisno od novih problema koji nastaju na mikronivou na koji se prvobitni problem želeo preneti, teškoća zahteva i imanentno razrešenje.

U vrlo neobičnu situaciju nas dovode oni odgovori na zenonovske teškoće koji nam, iako ne vrše pomeranje problema, ne omogućuju da odgovorimo na naše glavno pitanje: „koliko puta se Ahil zaustavio u svom *staccato* kretanju, odnosno koliko je deonica Zevs izbrojao u svom *legato* brojanju?", a da nam, u isto vreme, ne pokazuju ni zašto se jedno takvo pitanje ne bi moglo s pravom postaviti. To je slučaj s fizičkim atomizmom, finitizmom, indefinitizmom i pozitivno-dijalektičkim rešenjem. Teško je oteti se utisku da je, bar u slučaju fizičkog atomizma i pozitivne dijalektike, nedostatak odgovora u ovim „odgovorima", koji su inače u mnogo čemu drugom vrlo razrađeni, prosto posledica nesuočenosti s najneprijatnijom verzijom problema. Odustvo odgovora teško je objasniti u slučajevima savremenog finitizma (*Black 1* i 2, *Schwayder*) i savremenog indefinitizma (*Weyl 2*, str. 42, *Hinton and Martin*). Tu kao da više nije reč o prostoj nesvesnosti već o potiskivanju.

Ontološki nihilizam, subjektivni idealizam i Bredlijeva filozofija Apsoluta (§ 41, § 61) zaista otklanjaju naše teškoće time što ukidaju postojanje i/ili identitet samih entiteta povodom kojih su teškoće nastale. Ali, ne samo što je ta ocena za mnoge od nas neprihvatljivo visoka, već je i „revizionistički zahvat" izvršen na nezgodnom mestu, pošto se na „obična" pitanja o broju „koraka" u „lažnom svetu" i dalje može uspešno odgovarati taman dotle dok Ahil *staccato* ne pojuri kornjaču (§ 42, § 62).

Teškoće se, doduše, mogu otkloniti radikalnim empirističkim ustručavanjem da se uopšte raspravlja o poblemima za čije je formulisanje neophodno rastezanje upotrebe uobičajenih ili naučnih termina preko granica njihove empirijski uslovljene upotrebe, zbog toga što upotreba van tih granica može biti neopravdana (§ 63). Nezgodno je to što se problem i postavlja tek kad se pretpostavi da je „rastezanje" opravdano i što, utoliko, problem pod tom pretpostavkom treba i rešiti. Za definiivno isključenje te prepostavke nije dovoljno ukazati na neke slučajeve neopravdanog „rastezanja" (§ 64).

Skeptička rezignacija (§ 41) je pošten stav, ali nije i zadovoljavajući. Iako je dostojanstvenije priznati poraz nego ga zataškavati, priznanje, svakako, nije i rešenje problema. Nerešen problem nije isto što i nerešiv problem. Proglasiti pak neki problem nerešivim bilo bi nedopustivo bez obrazloženja iz kojeg bi se videlo da je sam zahtev za rešivošću neopravdan s obzirom na date uslove zadatka. Ako šahovski problem prosto nismo rešili, nećemo biti zadovoljni, dok ako pokažemo kako je nerešiv, možemo zadovoljno konstatovati da je pogrešio ili autor problema ili slagač u novinama koje su problem prenele.

Pustimo da se bojište ohladi i vratimo se problemu čista srca, predstavljajući ga u svedenom obliku, u formi silogizma sa dve premise.

Sažmimo *staccato* verziju ovako:

A. Ahilovo kretanje stazom AB = [0, 1] je takvo da posle (izvesnog) mirovanja u tački A – u stanju označenom sa $\mathcal{A}_0$ (gde je A tačka dodira Ahilovog nosa sa oblašću kojom treba da se kreće) – Ahil pređe za 1/2 h polovinu puta do B (sada je tačka korespondirana broju 1/2 tačka dodira Ahilovog nosa s oblašću kojom Ahil još treba da se kreće) i tu se – u stanju $\mathcal{A}_1$ – odmara 1/2 h, zatim se za 1/4 h pomeri do tačke korespondirane broju 3/4 gde se – u stanju $\mathcal{A}_2$ – odmara 1/4 h, i tako dalje ..., Ahil se uvek od tačke $(2^n–1)/2^n$ pomeri do tačke $(2^{n+1} - 1)/2^{n+1}$ za $1/2^{n+1}$ h i tamo odmara $1/2^{n+1}$)h ($n = 0, 1, 2, ...$).

B. Kad sat pokaže da su 2 h istekla, trka se smatra završenom i Ahil se definitivno zaustavlja

---

C (zaključak). Za 2 h Ahil se zaustavio beskonačno mnogo puta.

Odgovarajuća *legato* verzija glasila bi ovako:

A'. Za vreme najobičnijeg *legato* kretanja putem AB = [0, 1] km ravnomernom brzinom od 1/2 km/h, Zevs broji, nikako ne odustajući, rastojanja $[(2^n-1)/2^n, (2^{n+1}–1)/2^{n+1}]$, puta AB ($n = 0, 1, 2, ...$).

B'. Kad sat pokaže da su 2 h istekla Zevs, stigavši na cilj, prestaje s brojanjem.

C' (zaljučak). Za 2 h Zevs je izbrojao beskonačno mnogo deonica $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB.

Ako izuzmemo „odgovore" koji su ostali bez odgovora, može se reći da bi prema ostalim teorijama koje smo razmatrali u *Gigantomahiji* trebalo *ili* odbaciti bar neku od premisa *A*, *B*, odnosno *A'*, *B'*, *ili* prihvatiti da su Ahil i Zevs stigli u B zaustavivši se beskonačno mnogo ($\aleph_0$) puta, odnosno izbrojavši beskonačno mnogo ($\aleph_0$) deonica $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$, puta AB; da zaključci *C* i *C'* slede iz premisa *A* i *B*, odnosno *A'* i *B'*, to nije bilo sporno.

Zenon bi u prvom koraku odbacio premise *B* i *B'*, ne prihvatajući da Ahil i Zevs mogu stići na cilj, a u drugom koraku i premise *A* i *A'*, poričući postojanje kretanja. To bi učinili i svi ostali koji su prihvatili rezultat negativne dijalektike, smatrajući, u isto vreme, da se pod pretpostavkom postojanja kretanja premise poput premisa *A* i *A'* ne mogu osporiti.

Geometrijski i kinematički atomisti kao i radikalni empiričari napali bi premise A i *A'*, pošto bi prethodno na različite načine ograničili pretpostavljenu geometrijsku progresiju.

Infinitisti bi prihvatili zaključke, u kojima se pojavljuje $\aleph_0$, tvrdeći da nisu paradoksalni.

O tome šta bi odgovorili stari fizički atomisti ne možemo ništa reći, ali nije teško videti šta bi trebalo da odgovore indefinitisti, finitisti i pozitivni dijalektičari. Ne priznajući aktualnost beskonačnosti u kategorematskom smislu, oni bi morali da odbace premise *A* i *A'*. No, za razliku od geometrijskih i kinematičkih atomista i radikalnih empiričara, iz njihovih se teorija ne vidi čime bi to opravdali.

Pretpostavljam da ćemo se, s jedne strane, svi složiti da ako tvrdimo premise *A* i *B*, odnosno *A'* i *B'*, ne možemo izbeći da se u zaključcima *C* i *C'* pojavi aktualna beskonačnost (kardinalnosti $\aleph_0$). S druge strane, iz razloga s kojima smo se sreli u kritici infinitizma, to je teško prihvatiti. Da li tada zaista nema drugog nego da se proglasi nemogućim ili ono što se tvrdi premisama A i *A'*, ili ono što se tvrdi premisama *B* i *B'*?

Izgleda da ipak nismo prinuđeni na taj, dosad sveopšte prihvaćeni potez, jer nam na raspolaganju stoji skrivena, ali u stvari jednostavna i prirodna alternativa.

Šta ako stvari tako stoje da je *moguće* da *bilo koja* od premisa *A, B, A', B'* bude istinita, a da premise *A* i *B*, odnosno *A'* i *B'*, *ne mogu zajedno* biti istinite, jer su *nesaodržive*?

Premise *A* i *A'* deluju plauzibilno utoliko što nema ničega što bi Ahilovo zaustavljanje, odnosno Zevsovo brojanje, učinilo logički nemogućim. Ako $f(\mathcal{A}_k)$, na primer, znači da se Ahil tokom 2 h zaustavio *k* puta, onda možemo potvrditi $\forall k \Diamond f(\mathcal{A}_k)$. Ali, $\Diamond \forall k f(\mathcal{A}_k)$ *ne sledi* iz $\forall k \Diamond f(\mathcal{A}_k)$. Mi smo navedeni na $\Diamond \forall k f(\mathcal{A}_k)$ zahvaljujući premisi *B*, a pošto to da će 2 h isteći deluje trivijalno istinito, navedeni smo i na neželjeni zaključak *C* u kojem se pojavljuje $\aleph_0$ zaustavljanja. Međutim, možda je i *B*, takođe, *samo kontingentno istinito*, kao i *A*. *A* i *B* bi tada bile tvrdnje kontingentno istinite, ali takve da kad je jedna istinita druga *nužno* biva *lažna*.

A deluje *saodrživo* sa *B* zato što nema ničega što bi *a priori* ograničilo broj Ahilovih zaustavljanja, a čini se da ne možemo objasniti *kako* bi *B* moglo učiniti broj zaustavljanja *određenim konačnim* brojem ako $\forall k \Diamond f(\mathcal{A}_k)$. No $\forall k \Diamond f(\mathcal{A}_k)$ važi samo za vreme od [0, 2) h, ne i pošto dva sata isteknu.

107. Nesaodrživost iskaza u logičkim sistemima s relevantnom implikacijom i intenzionalnom konjunkcijom

Ako bismo ponuđeno rešenje *staccato* i *legato* verzije Ahila, u kojem se premise *A* i *B*, odnosno *A'* i *B'* (iz § 106) smatraju nesaodrživim, hteli formalno da predstavimo, bio bi nam potreban neki logički sistem sa *relevantnom implikacijom* i *intenzionalnom konjunkcijom*; materijalna implikacija, striktna implikacija i uobičaljeno shvaćena konjunkcija tu nam više ne bi bile dovoljne.[1]

Ako se uobičajenom iskaznom računu dodaju modalni operatori $\Diamond$ („moguće") i $\Box$ („nužno"), onda, bez obzira na to koji od poznatih sistema modalne logike izabrali, mi želimo da tvrdimo $\Diamond A$, $\Diamond B$, $\Diamond A'$, $\Diamond B'$ (gde su *A, B, A'* i *B'* premise silogizama iz § 106). To da istinitost prve od premisa nužno povlači za sobom neistinitost druge premise iz odgovarajućeg silogizma, izrazili bismo formulama $\Box(A \rightarrow \neg B)$ i $\Box(B \rightarrow \neg A)$, odnosno $\Box(A' \rightarrow \neg B')$ i $\Box(B' \rightarrow \neg A')$. Ali, neželjene zaključke *C* i *C'*, u kojima se pojavljuje $\aleph_0$, ne bismo mogli da izbegnemo, pošto bi oni sledili iz skupa hipoteza $\{A, B\}$, odnosno $\{A', B'\}$, budući da su, na osnovu prethodnih formula, ti skupovi hipoteza protivrečni, a *ex falsi – quodlibet!*

Mi želimo da kažemo da *posle dodavanja* hipoteze *B* hipotezi *A* (odnosno hipoteze *B'* hipotezi *A'*) prethodno uvedena hipoteza *A* (odnosno *A'*) *više ne sme* da se tvrdi jer su *A* i *B* (odnosno *A'* i *B'*) nesaodržive pretpostavke, a to je *formalno* moguće reći *jedino* u sistemima s relevantnom implikacijom (i intenzionalnom konjunkcijom, koja se u takve sisteme lako uvodi), jer *samo tamo* $A, B \vdash A$ (odnosno $A', B' \vdash A'$) ne mora da važi, iako $A \vdash A$ (odnosno $A' \vdash A'$) važi uvek.

S obzirom na naše svrhe, materijalna implikacija je taman toliko impikacija koliko je polna bolest poznata kao kalifornijski cvet – cvet. A→. B→A je svojevremeno s pravom proglašeno *arhetipom* ogrešenja o relevanciju (vidi *Anderson and Belnap*, str. 30), jer u interpretaciji to znači da – ako se A već tvrdi, onda se sme tvrditi na osnovu *bilo kojeg iskaza!*

Aksiomi uobičajenog iskaznog računa kao i pravila izvođenja izabrani su tako da, *u interpretaciji*, postojanje implikacije između A i B, odnosno istinitost formule $A \rightarrow B$, zavisi isključivo od istinitosti ili neistinitosti A i B, tako da se implikacija može i shvatiti kao logička funkcija na skupu istinosnih vrednosti, koji predstavlja domen interpretacije iskaza. U sistemima *relevantne logike*, međutim, aksiomi i pravila izvođenja biraju se tako da se ispostavi da implikacija između A i B postoji ako i samo ako je za istinitost B nužno da postoji dokaz za B iz hipoteze A; tada B relevantno sledi iz A. Tako $B \rightarrow. A \rightarrow A$ nije teorema u sistemu s relevantnom implikacijom, jer je $A \rightarrow A$ aksiom, odnosno tautologija, i istinito je *nezavisno* od bilo kakve hipoteze, pa je utoliko B irelevantno za dokaz $A \rightarrow A$.

Teorema dedukcije koja treba da nam omogući zamenu relevantnog sledovanja iz hipoteza (označimo ga uobičajenim Frege-ovim „$\vdash$") relevantnom implikacijom (i tu ćemo zadržati „$\rightarrow$") mora sadržavati ograničenje koje uobičajena teorema dedukcije ne sadrži. Naime, tek ako postoji dokaz za B iz hipoteza $A_1, ..., A_n$ *u kojem svi* $A_1, ..., A_n$ *moraju biti upotrebljeni* da bi se došlo do B, postoji dokaz za $A_n \rightarrow B$ iz $A_1, ..., A_{n-1}$ koji zadovoljava iste uslove (*Anderson and Belnap*, str. 21).

U običnom iskaznom računu $A \wedge B \rightarrow C$ je ekvivalentno sa $A \rightarrow. B \rightarrow C$, pošto su oba složena iskaza lažna ako i samo ako su A i B istiniti a C lažno. Ako „$\wedge$" interpretiramo na uobičajen način, u relevantnim sistemima ova ekvivalencija više ne važi, pošto $A \wedge B \rightarrow C$ može da stoji i ako je neki od konjunkta irelevantan za dokaz C iz hipoteze A i B, dok se $A \rightarrow. B \rightarrow C$ mora dobiti primenom teoreme dedukcije na dokaz iz hipoteza, $A, B \vdash C$ u kojem *obe* hipoteze moraju biti upotrebljene. Ova asimetričnost nas

prirodno vuče ka relaciji koja bi se razlikovala od uobičajene ekstenzionalne konjunkcije i koja bi kao *intenzionalna konjunkcija* (vidi *Meyer 3)* bila pandan relevantnoj implikaciji. Za zaključke izvedene iz takve konjunkcije tražila bi se *relevantnost oba konjunkta*.

Intenzionalna konjunkcija, koju ćemo označiti sa „$\circ$", može se u sistem s relevantnom implikacijom uvesti ili po definiciji uz pomoć uobičajeno shvaćene negacije: $A \circ B \overset{def}{=} \neg(A \rightarrow \neg B)$, ili kao primitivna relacija, pomoću dva nova aksioma koja se pridruže postojećim aksiomima za implikaciju[2] tako da se dobija da $(A \rightarrow. B \rightarrow C) \leftrightarrows A \circ B \rightarrow C$ (gde je $\leftrightarrows$ relevantna ekvivalencija koja se shvata, na uobičajen način, kao relevantna implikacija u oba smera).

Sada, s jedne strane, ne samo što $A \rightarrow. B \rightarrow C$ važi samo ako postoji dokaz za C iz hipoteza A i B, već i $A \circ B \rightarrow C$ važi samo ako postoji dokaz za C iz hipoteza A i B. No, s druge strane – i to je ono što je za nas najvažnije – *dokaz za C iz hipoteza A i B postoji samo ako važi intenzionalna konjunkcija* $A \circ B$, ako su, naime, hipoteze *relevantno neprotivrečne*[3], ili, upotrebljavajući izraz Nelzona Gudmana, *saodržive (cotenable)* (vidi raspravu o protivčinjeničkim kondicionalima u *Goodman*).

Šta znači zahtev za saodrživošću hipoteza najbolje se vidi iz činjenice što $A \circ B \rightarrow A$ *nije teorema* u sistemu s relevantnom implikacijom i intenzionalnom konjunkcijom i što se intenzionalna konjunkcija po tome najkarakterističnije razlikuje od ekstenzionalne[4]. Ako našoj hipotezi A iz § 106, iz koje, svakako, možemo izvesti A, *dodamo* hipotezu B, onda A ne mora biti više dokazivo, i to, sad možemo reći, ne samo zbog irelevantnosti B za dokaz za A, već zbog *nesaodrživosti* hipoteza A i B. Ako je to slučaj sa dokazom za sâmo A iz hipoteza A i B, to *a fortiori* važi za dokaz za C iz A i B.

Ako su iskazi A i *B kontingentni, onda smemo* pretpostaviti da je A istinito, baš kao što *smemo* pretpostaviti da je *B* istinito. No, možemo lako biti zavedeni – ceo istorijat *Ahila* liči na jedno takvo zavođenje – da pomislimo da smemo pretpostaviti da su *i A i B* istiniti.

108. Rešenje glavne teškoće i novi pogled na Gigantomahiju

Ako nas, s jedne strane, nezadovoljstvo svim pokušajima rešenja glavne teškoće s kojima smo se sreli u *Gigantomahiji* nagoni na pretpostavku da su premise spornog zaključka, iako kontingentno (ne)istinite, nesaodržive, onda nam, s druge strane, usvajanje ove pretpostavke o nesaodrživosti treba da omogući da tačno sagledamo kako *izvor teškoća* u svakom od razmotrenih pokušaja, tako i *aspekt* njihove eventualne *plauzibilnosti* pod *određenim uslovima*, uz *određene specifikacije* ili *reformulacije.*

Pre svega, ako je tačno da su premise *A* i *B* (iz § 106) *staccato* verzije nesaodržive, onda bi, pod pretpostavkom da važi *A*, Zenon morao biti u pravu kada zaključuje da *Ahil* neće nikad stići na cilj, to jest da neće nikad stići kornjaču. Ovaj zaključak ne mora delovati ni malo paradoksalno ako uočimo da istinitost hipoteze *A* implicira da se Ahil *još uvek* zaustavlja, i da se *A* ne sme iskazati u strogo prošlom vremenu. Ako, naime, hoćemo da nam se Ahil *uvek*, posle *svakog* rastojanja $[(2^n-1)/2^n, (2^{n+1}-1)/2^{n+1}]$ zaustavi, onda vreme od 2 h, u kojem se on kreće i zaustavlja, mora biti vreme [0, 2) h; Ahil se *kretao* i *kreće se, zaustavljao se* i *zaustavlja se.* Pod hipotezom *A vreme* od 2 h je *neiscrpno* i trenutak kada bi Ahil, po uobičajenoj matematičko-fizičkoj kalkulaciji, trebalo da dostigne kornjaču nikad neće nastupiti – on je *transcendentan.*

Razlog iz kojeg nam *ispravan* zaključak da Ahil pod hipotezom *A nikad* neće stići na cilj *izgleda* paradoksalan u stvari je sasvim trivijalan. *Mi* ne pratimo Ahilova kretanja i zaustavljanja, i *za nas* vreme od 2 h *može* isteći – i *isteći će*, ako prethodno ne umremo. Ako pak vreme od 2 h istekne, onda postaje istinita hipoteza *B*, koja je nesaodrživa sa *A*; utoliko je negirana pretpostavka da je *A* istinito. Za *Zevsa*, međutim, koji bi Ahilovo kretanje pratio, i koji to u *legato* verziji i čini brojeći deonice $[(2^n-1)/2^n, (2^{n+1}-1)/2^{n+1}]$ puta AB, vreme od 2 h *neće isteći, ako* on neograničeno nastavlja s brojanjem snižavajući neograničeno perceptivni i aperceptivni prag, bez obzira što je, za razliku od nas, *besmrtan.*

U svakodnevnom govoru „*x* se *nikad* neće dogoditi" *implicira* „nećete doživeti *x* makar čekali i duže od dva sata"*, ali to je tako *zato što*, zbog *nemogućnosti* neograničenog snižavanja perceptivnog i aperceptivnog praga, *za nas* dva sata *moraju* isteći ako ne umremo u međuvremenu. Za Besmrtnog, međutim, *upravo ta implikacija ne mora da važi*, i to *odstupa* od „svakodnevnog smisla" iskaza „*x* se nikad neće dogoditi" taman onoliko koliko Zevsovo iskustvo u tom slučaju odstupa od našeg. Zevs ne može i neograničeno nastavljati da broji deonice $[(2^n-1)/2^n, (2^{n+1}-1)/2^{n+1}]$ puta AB i prisustvovati hvatanju kornjače; „makar čekao i duže od 2 sata" za Zevsa tada zvuči cinično, zato što 2 sata *tako neće* isteći. Ahil, pak, ako mu je sposobnost sve češćeg i sve kraćeg zaustavljanja opisanog premisom *A staccato* verzije uopšte od Boga data, može izabrati hoće li živeti s njim, u vremenu [0, 2) h, ili s nama, i od tog njegovog *izbora* zavisi hoće li stići kornjaču.

Pošto je *A* kontingentno istinito i pošto uz istinitost *A* (iz § 106) *B* ne može biti istinito, Čarli Brod nije u pravu kad za stav „ono što transcendira svaku iz beskonačne serije tačaka mora biti beskonačno udaljeno od prve tačke iz serije" kaže da je *potpuno*

* Na ovu okolnost mi je skrenuo pažnju moj prijatelj Mane Hajdin.

lažan (*utterly false*), smatrajući ga izvorom neprihvatljivog zaključka da se Ahil i kornjača neće *nikad* susteći ni u jednoj tački (*Broad*, str. 319). Uz istinitost premisa *A* i *A'* (iz § 106) to jest u okolnostima u kojima beskonačna serija intervala, odnosno tačaka, jedino i može „oživeti" (vidi dole, §§ 111–113), navedeni stav je *potpuno* istinit. *Tu* ništa ne pomaže *razlikovanje* između „svaki" i „svi" na koje ukazuje Henri Bredford Smit kad tvrdi „iz toga što Ahil mora proći kroz svaki termin beskonačne serije da bi stigao do granice ne sledi da mora proći kroz *sve* da bi dosegao granicu" (*Smith*, str. 37), pošto u uslovima u kojima je serija beskonačna Ahil upravo ne može stići do granice ako seriju mora savladati korak po korak.

No, dok bi Zenon bio u pravu kad bi tvrdio da ni Ahil ni Zevs neće stići na cilj pod pretpostavkom da važi *A*, odnosno *A'*, on više ne bi morao biti u pravu ako bi nemogućnost dostignuća cilja tvrdio univerzalno, *bez ograničenja* hipotezama poput *A* i *A'*. Ako su 2 h istekla, i ako Ahil i Zevs smer i brzinu kretanja nisu menjali, onda su oni *stigli* na cilj. Samo, ako je tačno da su *A* i *B*, odnosno *A'* i *B'* nesaodrživi, onda to znači da je Ahil posle nekog rastojanja $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ prestao da se zaustavlja, a Zevs posle neke deonice $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ prestao da broji.

Dakle, ako usvojimo pretpotavku o nesaodrživosti *A* i *B*, odnosno *A'* i *B'*, onda je jasno i kako Zenon nas vodi u teškoće i čime mu mi možemo uzvratiti. Mi smo zapali u teškoće tako što smo pretpostavili da su *A* i *A'* istiniti, i stigli do paradoksalnih *C* i *C'* zahvaljujući lakovernom dodavanju hipoteza *B* i *B'* uz *A* i *A'*. Zenona pak možemo dovesti u teškoće prosto tako što, zahvaljujući odsustvu ograničenja u njegovoj tvrdnji o nemogućnosti dosegnuća cilja, pustimo da vreme od 2 h istekne.

Kad bi, međutim, Zenon svoju tezu o nedostižnosti formulisao uz eksplicitno odgovarajuće ograničenje, onda nas više ne bi dovodio u teškoće, jer bi cilj zaista postao nedostižan, ali isto

tako ni mi ne bismo mogli, poput Antistena (vidi gore, § 41) izvršenjem zadatka pokazati da je cilj dostižan, pošto *B* i *B' doslovno* ne mogu biti istiniti ako su istiniti *A* i *A'*.

Neko može poželeti da forsira ideju o saodrživosti *A'* i *B'* insistiranjem na mogućnosti sprovođenja Zevsove kapriciozne odluke da *ni po koju cenu* ne odustane od brojanja deonica, uz istovremeno ukazivanje da je 2 h *de facto* isteklo. No zamka je u tome što je i *u načelu nemoguće* i *biti svedok* Zevsovog inaćenja i *dočekati* Zevsa na cilju, a *upravo bi to bilo potrebno* da bismo se uverili u saodrživost *A'* i *B'*. Zevsov kapric vezan je za *vreme unutar* 2 h, i unutar tog vremena on može ostati kapriciozan. No *to* vreme, vreme od [0, 2) h, *neće* isteći. Dočekati, pak, Zevsa znači pustiti da 2 h *isteknu*; to je jedno *drugo* vreme, ne samo vreme brojanja i praćenja tog brojanja. Zevs se može inatiti unutar jednog vremena, vremena od [0, 2) h, i tada mu to uvek *i polazi za rukom*; no zato *na cilj ne stiže*. Ne znači da Zevs *mora* prestati da se inati zato što *je morao* prestati da se inati *ako* je stigao na cilj. Ne postoji neko vreme koje bi bilo i vreme od [0, 2) h i vreme od [0, 2] h, a vreme od [0, 2) h *nije* vreme od [0, 2] h kao što ni vreme od [0, 2] h *nije* vreme od [0, 2) h. Vreme [0, 2) je vreme od 2 h koje još *nije isteklo, vreme* [0, 2] h je vreme od 2 h koje *je* isteklo. Ono što je moguće u jednom vremenu nije moguće u drugom i obratno: u vremenu od [0, 2) h *moguće je* inatiti se *neograničeno*, ali u njemu *nije moguće* i stići na cilj; *da bi* se stiglo na cilj, nužno je *prestati* s inaćenjem.

Ako prihvatimo da je zenonovski zaključak da Ahil i Zevs ne mogu stići na cilj ispravan, ali uz pomenuta ograničenja, onda se, zahvaljujući tim ograničenjima ne može izvesti zaključak o paradokslanosti kretanja koji univerzalizacijom (vidi § 24) izvode skeptičari, ontološki nihilisti i svi oni koji kretanje proglašavaju prividom ili pukom pojavom iza koje se krije prava stvarnost. No, s druge strane, svi negativni dijalektičari bi bili u pravu, pre svega, u sporu sa infinitistima, koji žele da premise A i B, odnosno A' i B' tvrde istovemeno, pozivajući se na mogućnost uvek novog i novog zaustavljanja ili brojanja s jedne, a na „trivijalnu" činjenicu dosezivosti cilja s druge strane. „Trivijalna" činjenica da je cilj udaljen 1 km moguće dosegnuti brzinom kretanja od 1/2 km/h prestaje da bude trivijalna zahvaljujući postojanju izvesnih ograničenja, i to *realno mogućih* ograničenja, kojima se cilj i pri toj brzini može učiniti nedostižnim. Ako se uverenje o dosezivosti cilja odražava i pod tim ograničenjima, onda upravo negativna dijalektika pomaže da se ono poljulja, ukazivanjem na paradoksalne posledice navodnog dostignuća.

Negativni dijalektičari u izvesnom smislu mogu biti u prednosti i u odnosu na sve one koji su u svojim „odgovorima" ostali bez odgovora, bar utoliko, naime, što vide jednu stvarnu teškoću koju njihovi oponenti, iz ovog ili onog razloga, previđaju.

Pozitivno-dijalektički „odgovor" ostao je bez odgovora na glavno pitanje, ali se teza da kretanja može stvarno biti i ako se ono na određenom nivou pokazuje kao protivrečno, jer se dodatnim odredbama protivrečna određenja mogu učiniti momentima, u svojoj apstraktnosti može prihvatiti kao tačna. Moglo bi čak da se kaže da Ahil i Zevs krećući se *neometano* brzinom od 1/2 km/h *i mogu i ne mogu* stići na cilj udaljen 1 km, utoliko, naime, što tvrdnja o dosezivosti mora da se *dospecifikuje*, iako je svakako problem bio upravo u tome da se odredi *kada*, pod *kojim* to uslovima ili specifičnim hipotezama Ahil i Zevs *mogu*, pod *kojim* pak *ne mogu* da stignu na cilj, i da se pokaže da se protivrečnost ukida ako se prihvati da su *dodatne hipoteze* koje omogućuju, odnosno onemogućuju izvršenje namere – *nesaodržive*.

I finitisti su ostali bez odgovora na glavno pitanje, ali su u pravu kad tvrde da se na cilj može stići samo u konačnom broju koraka, to jest posle konačno mnogo zaustavljanja, odnosno posle konačno mnogo izbrojanih deonica puta. *Ako* je Ahil stigao

na cilj u *staccato* verziji, on se prethodno zaustavio konačan broj puta; *ako* je Zevs stigao na cilj u *legato* verziji, on je izbrojao konačno mnogo deonica $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB.

Kinematički atomisti bi bili u pravu ako bi samo tvrdili da je u nizu Ahilovih pomicaja, kojima je stigao do cilja, predstavljenih geometrijskom progresijom iz A, nužno morao postojati bar jedan najmanji, *pošto* je Ahil stigao na cilj. To je ili pomicaj izveden u nekom intervalu $[(2^k - 1)/2^k, (2^{k+1} - 1)/2^{k+1}]$ h koji je manji od svih intervala u kojima su izvedeni prethodni pomicaji kao i od intervala u kojima je izveden poslednji pomicaj $[(2^{k+1} - 1)/2^{k+1}, 2]$ a gde je k najveće n posle kojeg se Ahil zaustavio pre nego što je stigao na cilj, ili je to pomicaj izveden u nekom intervalu $[(2^{n+1} - 1)/2^{n+1}, 2]$ h, kojim se Ahil konačno dočepao cilja, ili su eventualno vremenski intervali $[(2^k - 1)/2^k, (2^{k+1} - 1)/2^{k+1}]$ h i $[(2^{k+1} - 1)/2^{k+1}, 2]$ h međusobno jednaki a manji od svih prethodnih. No, iako je najmanji pomicaj morao postojati *ako* je Ahil stigao na cilj, zbog čega bi kinematički atomizam bio prihvatljiv kada bi se odnosio samo na *načinjene* pomicaje, ne znači da *budući* vremenski intervali ne mogu bivati *sve manji*, i to *neograničeno*. Kinematiči atomizam uveden je s namerom da se učini ostvarivim ono za šta smo se uverili da pod određenim pretpostavkama *ne mora* biti ostvarivo; utoliko kinematički atomizam nije neophodan da bi se rešila glavna teškoća, jer su premise A ili A' istinite, cilj zaista ostaje nedostižan.

Radikalno-empirističke zabrane da se neograničeno rastežu granice empirijski uslovljene upotrebe uobičajenih ili naučnih termina, čime se u stvari napadaju premise A i A' spornih zaključaka, opravdane su *utoliko što* je naš svakodnevni i naučni svet svet u kojem premise B i B' bivaju *zadovoljene*, pa je tako *empirijski neizbežna* neistinitost premisa A i A', ako su one nesaodržive sa B, odnosno B'. No radikalni empiričari nisu do tih zabrana došli uz pozivanje na nesaodrživost premisa i zato su njihove zabrane prejake. Oni nam brane da dopustimo da se čak i Zevsu neograničeno snižava perceptivni i aperceptivni prag i time ukidaju problem pre nego što je on i formulisan. Problem, međutim, može da se reši bez ikakvih prejakih ograničenja, čiju je univerzalnost teško pravdati na uverljiv način. Možemo sasvim lepo dopustiti da u zamislivom svetu bogova hipoteza *A'* bude zadovoljena i rešiti problem *logičkim sredstvima*, bez suvišnih empirističkih ograničenja; samo pri tom ne smemo zaboraviti da su logička sredstva logička sredstva i da onda ni bogovi nisu apsolutno svemoćni, već da neki put jednu nadljudsku prednost moraju platiti nekim, možda neočekivanim, nedostatkom. Kao što svemoćni hrišćanski Bog ne bi mogao dokazati svoju svemoć time što bi stvorio kamen koji *niko* ne bi mogao podići a da pri tom svoj zadatak ne ograniči – isključujući sebe iz skupa onih koji to ne mogu učiniti, jer bi inače i sam ostao nemoćan pred tim kamenom – tako ni Zevs ne može neograničeno brojati deonice $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta koji Ahil prelazi jureći kornjaču a da pri tom sebi ne uskrati zadovoljstvo da prisustvuje konačnom hvatanju kornjače.

Za Zevsa se, ako ne odustane od brojanja, put od svega 1 km ispostavlja kao beskonačno dug i on tako doslovno nikad neće stići na cilj. Tako bi i infinitisti bili u pravu ako bi samo tvrdili da se, uz kretanje od 1/2 km/h put od 1 km može ispostaviti kao beskonačan, prosto zato što je novih deonica neogrančeno mnogo. Ali onda kada se put od 1 km ispostavlja kao *beskonačan*, on se ujedno *ne može ni savladati*. On nije i konačan i beskonačan *u isto vreme i u istom smislu*. Zahvaljujući nesaodrživosti premisa *A* i *B*, odnosno *A'* i *B'*, određenja konačnosti i beskonačnosti su *inkopatibilna*. Prihvatljivu stranu infinitizma čini to što premise *A* i *A' mogu da budu* istinite, ali ne i tvrdnja da i zaključci *C* i *C' mogu biti* istiniti. Na sreću, *C* i *C' ne slede* iz *A*, odnosno *A'*, neposredno, već tek uz pomoć *B*, odnosno *B'*. A kao što smo vdeli, razlog iz kojeg

su svi antiinfinitistički pokušaji bili usmereni protiv *A* i *A'* leži u našoj „prevelikoj" moći, zbog koje nikako nismo skloni da poverujemo Zenonu da kornjača može ostati neuhvaćena. No upravo uz Zenonovu pomoć možemo infinitistima ostaviti njihove prve premise, mada im osporavamo zaključke time što im pod pretpostavkama *A* i *A'* uskraćujemo *B*, odnosno *B'*.

Kao što se Ahilu i Zevsu put pokazuje kao beskonačan samo u vremenu [0, 2) h, dok važi *A* i *A'*, tako i beskonačnu malenost deonica puta možemo prihvatiti samo u dinamičkom smislu (u smislu u kojem je to učinjeno u § 84). Rastojanje Ahila i Zevsa od cilja može se neograničeno smanjivati i kao takvo *ono u svom smanjivanju* može biti infinitezimala, jer *postaje manje* od *bilo kojeg fiksiranog* rastojanja. Ali ono je samo u tom dinamičkom i relativnom smislu infinitezimala; kad god, i čim, bi se fiksiralo, ono bi postalo određeno konačno rastojanje. Fiksirana rastojanja *su* konačna i zato Ahil i Zevs *nisu* nikad beskonačno blizu cilja i kad mu se *neograničeno približavaju*.

Indefinitizam, iako spada u grupu „odgovora" koji su ostali bez odgovora, sadrži čitav niz tvrdnji koje su u bliskoj vezi sa rešenjem preko nesaodrživosti premisa spornih zaključaka. Ako broj deonica puta nije određen, on može *biti* bilo koji broj, ali on može i *postajati* sve veći. No dok postaje sve veći – on nije određen; a kad je određen – on ne može postajati sve veći. Treba samo hrabro, uz Zenonovu pomoć, dopustiti da on može ne postati definitivno određen, pa da se obe premise spornog zaključka učine kontingentno istinitim i nesaodrživim. I indefinitisti su odustajali kod tog koraka i zato su ostali bez odgovora na najteže pitanje, pitanje o broju zaustavljanja ili broju izbrojanih deonica po dostignuću kornjače; pošto je *post factum* taj broj određen, nije moguće reći da je neodređen, a nije dovoljno reći da je konačan.

Postajati i postati nije isto, kao što nije isto kretati se ka cilju i kretati se pa stići na cilj. Da izađemo iz naših teškoća pomogao nam je onaj koji nas je u nevolju i doveo, jer je (čak) Zevsova nemoć da ne odustajući od brojanja stigne do bliskog cilja najobičnijim *legato* kretanjem omogućila zamenu raznih protivrečnosti nesaodrživošću odgovarajućih iskaza i inkompatibilnošću odgovarajućih pojmova.

„Samo jedno oružje vredi:
ranu isceljuje samo
koplje koje ju je stvorilo".

POSLEDICE

„Die Stund' ist da.
Gestatte, Herr,
daß dein Knecht dich geleite!"

109. Rešenje staccato i legato verzije Ahila kao model za rešavanje ostalih verzija

Rešenje *staccato* i *legato* verzije preko nesaodrživosti hipoteza (§§ 106, 107) može nam poslužiti kao model za rešenje *izvorne* verzije *Ahila*, u kojoj Ahil najnormalnije, bez zaustavljanja, juri kornjaču ravnomernom brzinom. *Ako* smo, naime, prihvatili da Zevs nikad neće stići na cilj *ako* ne odustane od brojanja, onda moramo prihvatiti da ni Ahil nikad neće stići kornjaču *ako* se njegovo prelaženje puta AB shvati po analogiji sa Zevsovim neograničenim brojanjem deonica $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB. Taj Zenonov zaključak prestaje da bude paradoksalan ako uočimo da analogija između Zevsovog i Ahilovog prelaženja puta AB može postojati samo *unutar* vremena od 2 h, koje je ipak *dovoljno dugo* da trenutak u kojem bi Ahil, po matematičkoj kalkulaciji, navodno stigao kornjaču – ostane *transcendentan*.

Ako, pak, Ahil *de facto* stigne kornjaču, onda je *samim tim* morala biti *narušena analogija* sa Zevsovim neograničenim brojanjem i zato se ne sme *iz te analogije* izvesti zaključak da je Ahil prešao beskonačno mnogo deonica $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB.

Pogledajmo da li se sad iz ovoga može izvući neki „tvrđi" filozofski zaključak. Ako prihvatimo da Ahil može stići kornjaču samo u slučaju da je analogija između njegovog prelaženja deonica $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB i Zevsovog neograničenog brojanja ovih deonica neodrživa, onda to znači ili da je analogija između prelaženja deonica puta i brojanja *uopšte* neodrživa, ili da je ona *negde u toku* kretanja i brojanja morala biti narušena.

Indefinitisti prihvataju odmah prvi rog dileme[1], ali je dovoljno prihvatiti drugi, koji je slabiji. Problem tačnog određenja *mesta* i *trenutka* u kojem se analogija narušava proističe iz uverenja da to mora biti odredivo *a priori* i da je Ahil, koji je stigao na cilj, *taj* koji je morao analogiju negde narušiti ako je ona već narušena. No, ako činjenica da je Ahil stigao kornjaču znači, između ostalog, i da je vreme od 2 h isteklo, i ako su premise A' i B' iz *legato* verzije *nesaodržive*, onda je Zevs *taj* koji je analogiju negde morao narušiti, a *gde* ju je narušio *empirijsko* je pitanje.

Uopšte, *bilo koja* analogija kojom se dovodi u obostrano jednoznačnu vezu *prelaženje* deonica $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB brzinom od 1/2 km/h i *izvršenje nekih* sukcesivnih akata poput brojanja ograničava nas na vreme manje od 2 h, koje je, s jedne strane, dovoljno dugačko da broj akata bude neograničen, a, s druge strane, nedovoljno da se stigne na cilj. Zato je nemoguće savladati beskonačnost korak po korak. U periodu [0, 2] h, dok je Ahil jurio i najzad stigao kornjaču, *mogli su se obavljati* procesi s neograničeno mnogo sukcesivnih akata, ali za to vreme *nije moglo biti izvršeno* beskonačno mnogo akata.

Ako stvari ovako stoje, onda možemo da izvedemo, na prvi pogled čudan i smeo, zaključak da između trkača koji usporava (iz § 22), prelazeći deonice $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB za $[n, n + 1]$ h, i Ahila koji te deonice prelazi u vremenu od $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ h *nema razlike* s obzirom na

mogućnost dostignuća krajnje tačke puta – ako prelaženju navedenih deonica obostrano jednoznačno odgovaraju različiti sukcesivni akti nekog procesa poput brojanja. U *oba* slučaja cilj je *nedostižan*.[2]

Paradoksalnost i ovog smelog zaključka iščezava ako se ponovo podsetimo da je vreme od 2 h isto toliko neiscrpno koliko i vreme od beskonačno mnogo sati u slučaju da se meri nizom sukcesivnih akata koji se smenjuju geometrijskom progresijom, i da je zato trenutak isteka 2 h isto toliko transcendentan s obzirom na dati niz sukcesivnih akata koliko i trenutak udaljen beskonačno mnogo sati od početnog.

Razlika između trkača koji usporava i Ahila s obzirom na dosezivnost cilja nije u *istinitosti*, odnosno *neistinitosti* hipoteza o isteku vremena od 2 h, odnosno vremena od beskonačno mnogo sati, već u *modalnom statusu* ovih *hipoteza*. Hipoteza o isteku 2 h *nužno* je neistinita *ako* se tvrdi *pod uslovom* prethodnog, ničim ometanog vršenja neograničenog broja sukcesivnih akata, jer je s ovim uslovom *nesaodrživa*, ali ona je *bez tog uslova*, sama po sebi, *kontingentno* istinita ili neistinita. Za razliku od nje, hipoteza o nastupu vremena udaljenog beskonačno mnogo budućih sati od sadašnjeg trenutka nužno je neistinita – ne *samo* pod uslovom prethodnog neometanog vršenja neograničenog broja sukcesivnih akata, već i *sama po sebi*, pošto je tako formulisana da je *ex vii terminorum* isključena mogućnost isteka vremena koje prethodi vremenu o kojem hipoteza govori.

Ako je tačno da se svaki budući trenutak koji je pod nekim opisom konačno udaljen od sadašnjeg može učiniti transcendentnim ili beskonačno udaljenim pod izvesnim alternativnim opisom, ne znači da se i obrnuto, svaki transcendentni trenutak, pa i trenutak koji bi trebalo da nastupi istekom beskonačno mnogo sati, može nekim opisom učiniti konačno udaljenim. Vreme od 2 h *može* se učiniti neiscrpnim kad se pod nekim uslovom ispostavi kao vreme od [0, 2) h, ali se vremenski interval od beskonačno mnogo sati koji je otvoren s desne strane *ne može* učiniti zatvorenim s obe strane.

S obzirom na dosezivnost cilja, trkač koji ubrzava (iz § 22) prelazeći 1 km za 1/2 h, narednih 2 km za 1/4 h, uopšte 2^n km za $1/2^n$ h, nalazi se u istoj situaciji u kojoj se nalaze trkač koji usporava i Ahil koji kornjaču juri zajedno sa Zevsom koji broji deonice $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ njegovog puta, ako, imajući u vidu zakon ubrzavanja, cilj trkača koji ubrzava odredimo kao izvesno mesto udaljeno beskonačno mnogo kilometara od početka. Uz brojanje deonica $[2^n, 2^{n+1}]$ ni on ne može stići na cilj, jer vreme u kojem ubrzava, stižući dalje od svake unapred fiksirane tačke, neće isteći, da bi ga odvelo dalje od bilo koje konačno kilometara udaljene tačke. No dok trkač koji usporava i Ahil koji trči normalno, iako ne pod datim uslovima, mogu *inače* stići na cilj – trkač koji usporava ako prestane da usporava, Ahil ako se prekinu korespoondentni nizovi sukcesivnih akata poput Zevsovog brojanja koji predstavljaju „časovnike“ po kojima 2 h neće isteći – dosezivost cilja koji smo odredili trkaču koji ubrzava zavisi pre svega od toga da li uopšte postoji mesto udaljeno beskonačno mnogo kilometara od trkača. Ako takvo mesto postoji, ono ne pripada *ovom* svetu, utoliko što ničim ovosvetskim kao merom ne može biti dosegnuto – ono, ako postoji, *nije povezano* ni sa čim u ovom svetu, pošto između konačnih i transfinitnih članova iz $^*N$ (vidi § 86) postoji jaz. Način na koji bi trkač, pa bio on i sam Bog, stigao do Drugog sveta – za nas je neshvatljiv; no to sigurno ne može biti postupno; ni Bog ne može savladati beskonačnost korak po korak (up. § 3).

Tomsonova lampa se *može* neograničeno paliti i gasiti u okviru svojih dva minuta, ali ta dva minuta, dok se ona pali i gasi predviđenom zakonomernošću, *neće* isteći. *Ukoliko* ta dva minuta *treba* da isteknu, da bismo mogli da *postavimo pitanje* da li je lampa po njihovom isteku upaljena ili ugašena, ona mora prestati da se pali i gasi posle nekog, bilo kojeg paljenja ili gašenja, i tako će po isteku dva minuta biti upaljena ako je prestala s gašenjem i paljenjem posle nekog paljenja, a biće ugašena ako je prestala s paljenjem i gašenjem posle nekog gašenja.

Vreme u okviru kojeg se Blekova „Beta“ i „Gama“ igraju klikerom (§ 23, str. 107) *neće* isteći ako one svoju igru neograničeno produžavaju. Ukoliko njihova igra *treba* da se okonča, ili, što je isto, ukoliko vreme u kojem se one igraju shodno propisanom zakonu *treba* da istekne, ili „Beta“ u nekom, bilo kojem trenutku kad treba da prebaci kliker u desni deo svemira od toga mora da odustane, ili to mora da učini „Gama“ u nekom, bilo kojem trenutku kad treba da prebaci kliker u levi deo svemira. Od toga koja je od njih odustala zavisi da li je kliker po isteku četiri minuta u levom ili desnom svemiru.

π-mašina ne može ispisati beskonačno mnogo decimala iz decimalne ekspanzije broja π, kao što ni Peano-mašina ne može ispisati beskonačno mnogo prirodnih brojeva (§ 23, str. 107–109). Vreme u kojem one ispisuju cifre koje treba da ispišu, iako naizgled kratko – neiscrpno je.

110. Rešenje Dihotomije

Imajući na umu rešenje *Ahila*, možemo lako zaključiti da dok trajanska muva (§ 24) ne prestane da leti napred-nazad između Ahila i kornjače – Ahil neće stići kornjaču. Cik-cak let trojanske muve jedan je od procesa koji se prethodno moraju okončati da bi vreme u kojem Ahil treba da stigne kornjaču isteklo. Da bi Ahil stigao kornjaču, pod opštom pretpostavkom da trojanska muva, čija je brzina veća od Ahilove, uvek ostane ili između kornjače i

Ahila ili bude tamo gde je bar neko od ovo dvoje, muva mora ili stigavši do kornjače prestati da ide Ahilu u susret nastavljajući kretanje zajedno s kornjačom – čekajući da ih Ahil stigne – ili stigavši do Ahila s njim zajedno krenuti za kornjačom.

Ako opšta pretpostavka o položaju muve treba da bude zadovoljena i dalje, pošto je Ahil stigao kornjaču – odnosno pošto je Ahil stigao muvu i kornjaču i pošto su Ahil i muva stigli kornjaču – muva mora bar izvesno, ma koliko kratko vreme – *ili* nastaviti kornjačinom brzinom da bi tek pošto je Ahil izmakao mogla da poleti brže prema njemu, *ili* nastaviti Ahilovom brzinom bar izvesno, ma koliko kratko vreme, da bi potom mogla da se uputi nazad kornjači.

Muva, ako je Ahil pretekao kornjaču, mora bar izvesno kratko vreme da se kreće paralelno s Ahilom ili paralelno s kornjačom. Vesli Salmon je u pravu kad tvrdi da „postoje alternativni načini da se reši zadatak" (*Salmon*, str. 51), ali nije u pravu kad misli da muva može rešiti super-zadatak (*ibid.*, str. 50–51). Alternativni načini postoje zbog toga što muva može birati da li će jedno vreme ići s Ahilom ili s kornjačom, i može birati koliko će to trajati, ali ona, pod pretpostavkom da je Ahil stigao ili prestigao kornjaču, nije mogla ne ići bar neko vreme zajedno s nekim od njih.

Zadatak muve da *ne* pretekne Ahila rešava se tako što ga ona ili *pusti* da malo izmakne, ili *krene s njim* pa se bilo kad okrene. Iz toga što je u slučaju *bilo koje* prednosti koju Ahil stekne nad kornjačom muva *već* mogla da leti cik-cak između Ahila i kornjače *ne sledi* da je ona sve vreme mogla obavljati zadatak neometano, pa i počev od trenutka kad je Ahil stigao kornjaču.

Iz toga što se ne može *a priori* odrediti *minimalni* prvi pomicaj *ne sledi* da nije postojao *prvi* pomicaj. To je rešenje operacionalizovane verzije *Dihotomije*.

Možemo u svakoj novoj trci uvesti novu trajansku muvu koja se, po uslovima zadatka, kreće brže od prethodnih i oscilira

između Ahila i kornjače. Da bi posle Ahilovog dostignuća kornjače nastavile s oscilovanjem, *sve* muve moraju pustiti Ahila da stekne izvesnu prednost, i na tu istinu ne utiče okolnost što je u slučaju bilo koje prednosti dovoljno brza muva *već mogla* više puta oscilovati *da je* ranije krenula od kornjače Ahilu, ili od njega kornjači, jer je i ona morala krenuti u nekom trenutku u kojem je Ahil *već imao* prednost u odnosu na kornjaču.

Makar koliko brzu muvu da uključimo u igru, možemo naći vremenski trenutak kad je Ahil bio u prednosti a najbrža muva u broju oscilacija nije imala nikakvu prednost nad sporijim muvama. Ako najbržoj muvi dozvolimo da se kreće brzo koliko god želi ali u isto vreme zahtevamo da u bilo kojem trenutku koji možemo fiksirati ona već bude u prednosti nad sporijim muvama u broju oscilacija, ona zadatak *ne može* izvršiti. Uvek možemo izabrati trenutak zahvaljujući kojem se ispostavlja da je muva trebalo da krene u oscilovanje pre nego što je *de facto* krenula. A ako, imajući ovu *mogućnost* u vidu, muva, da bi rešila zadatak, pokuša da počne s oscilovanjem dovoljno rano – neće uspeti, jer ne postoji *najmanja moguća* prednost koju Ahil može steći. Muva, naravno, može početi s oscilovanjem pre ili kasnije i utoliko uvek dovoljno rano da ostvari prednost nad ostalim muvama s obzirom na neki *unapred* određeni trenutak, ali ona ne može početi s oscilovanjem ako treba da se taj uslov ispostavi kao zadovoljen za bilo koji *naknadno* određen trenutak (up. §§ 5, 6). Taj uslov muva ne može ispuniti, i *ako bi* ona mogla da se pokrene *samo ako* ispuni taj uslov, ona se *ne bi mogla pokrenuti*. Upravo je takav uslov trkaču postavljen u uobičajeno interpretiranoj *Dihotomiji*, uz *ispravan* zaključak da se (tako) trkač ne može ni pokrenuti.

Kao što Zevs s Ahilom *doslovno* ne može stići na cilj ako ne odustane od brojanja deonica $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ Ahilovog puta, tako se muva isto tako *doslovno* ne bi mogla pokrenuti ako bi morala oscilovati u svakoj mogućoj deonici

$[1/2^n, 1/2^{n+1}]$ nekog rastojanja koje čini prednost koju je Ahil stekao nad kornjačom pošto ju je pretekao. Pokoravajući se Zenonovim naređenjima u toku trke, odnosno zabranama na početku trke, nemoguće je stići kornjaču, odnosno uopšte se pokrenuti. No dok je kornjaču moguće juriti i ne stići je i po „časovnicima" koje predstavljaju neki *realni* korespondentni nizovi sukcesivnih akata, a po kojima je vreme od 2 h neiscrpno, u slučaju muve koja treba da se „odlepi" od kornjače neograničeno mnogo takvih *realnih* „časovnika" ne može biti, jer svaki od mogućih procesa iz niza korespondentnih sukcesivnih akata mora *sam* početi s radom, ostavljajući time, *nužno*, vreme pre nekog intervala $[1/2^n, 1/2^{n+1}]$ *slobodnim* od ograničavajućih zahteva za oscilovanjem. Zahvaljujući *takvom slobodnom vremenu* moguće je pokrenuti se.

111. Rešenje Ahila i Dihotomije kao model za rešavanje metričkih aporija

Imajući u vidu razliku između metričke i topološke infinitističke teze (§ 90), sve zenonovske teškoće vezane za konstituciju prostora ili vremena koje se ne tiču neposredno Zenonovog aksioma možemo podvesti pod opšti naziv *metričke aporije.*

Glavna teškoća u svim verzijama *Ahila* odnosila se na *savladavanje* beskonačnosti korak po korak. U *metričkim aporijama* se problem *ne javlja u tom vidu*, utoliko što je, umesto koraka koji slede jedan za drugim, reč o delovima koji koegzistiraju, to jest postoje jednovremeno.

Kao što smo videli, rešavajući našu prvu aporiju „spoljašnje kosmičke beskonačnosti" (§§ 4–7), ima problema vezanih za *nizove sukcesivnih akata* koji se ne mogu analogno formulisati za

skupove stvari. Tako, na primer, pošto je sukcesivnost koraka jedno od suštinskih obeležja koračanja, ne možemo izbeći pitanje o prelazu od konačnosti ka beskonačnosti kada se bavimo problemom mogućnosti izvršenja beskonačnog niza akata. Svojstvo konačnosti se rekurzivno održava u nastupanju svakog novog koraka, koji, između ostalog, ne bi mogao *postojati* da prethodni nije *prestao* da postoji. Nasuprot koracima iz niza koraka, stvari iz skupa stvari su „*ravnodušne*" prema tome koji im redni broj dodelimo, one su s te strane u svom postojanju „*ravnodušne*" i *jedne prema drugima.* To što mi ne možemo izbrojati elemente jednog beskonačnog skupa ne čini njega manje beskonačnim, ako bi *inače* bilo moguće da on bude beskonačan, no to što mi ne možemo načiniti beskonačno mnogo koraka svakako čini niz koraka *nužno* konačnim, jer koraci postoje samo ako su načinjeni.

Ako su stvari iz nekog skupa stvari u ovom smislu „ravnodušne" jedne prema drugima, nije li, onda, kad je reč o mogućnosti da ih bude beskonačno, irelevantno da li se radi o svemiru ili nekom ograničenom predmetu; nije li, naime, disanalogija između stvari, koje postoje u prostoru, i koraka, koji su smešteni u vremenu, dovoljna da omogući da i u slučaju da je reč o delovima nekog *ograničenog* predmeta ovih bude beskonačno, uprkos nemogućnosti da se *izbroje*?

Činjenica metričke amorfnosti prostora (vidi § 98) sugeriše nam pozitivan odgovor na ovo pitanje. Ako već intervale $\left[0, 1/2\right]$, $\left(1/2, 3/4\right]$, $\left(3/4, 7/8\right]$, ..., $\left((2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}\right]$, ... smemo preznačiti u intervale $[0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$, ..., $(n, n+1]$, ... i ako intervala s opštim članom $(n, n+1]$ može biti beskonačno mnogo, onda i intervala s opštim članom $\left((2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}\right]$ treba da može da bude beskonačno mnogo.

Kao da nas i projektivna geometrija vodi istom rezultatu. Intervali s opštim članom $(n, n+1]$ i intervali s opštim članom $\left((2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}\right]$ koji su nekim metričkim pravilom fiksirani kao metrički različiti ne razlikuju se sa stanovišta određenih projektivnih transformacija kojima se dati intervali jedinične duži preslikavaju na intervale poluprave.

Pretpostavimo tako da se kvadrat ABCD sastoji iz beskonačno mnogo žutih i crvenih pravougaonika koji se naizmenično smenjuju kao raznobojna prostranstva iz § 19 kroz koja Ahil jezdi: leva polovina kvadrata žuta, četvrtina koja se s ovom polovinom graniči crvena, osmina koja se s ovom četvrtinom graniči opet žuta itd.

To što ni mi ni Zevs ne možemo brojeći ove pravougaonike s leva na desno stići do desnog kraja kvadrata možda sâmo po sebi ne bi moralo da znači da njih ne može biti beskonačno mnogo. *Koliko god* daleko odmakao u brojanju, pred Zevsom može biti *još* novih pravougaonika. Nije li tako za Zevsa kvadrat ABCD *neizmeran*, baš kao što bi tvrdio Zenon (*DK*, B 1)?

Iako, kad se stvar *ovako* posmatra, izgleda da bi Zenon bio u pravu kad bi tvrdio da raznobojnih pravougaonika unutar datog kvadrata može biti beskonačno mnogo, argumenti protiv statičkog infinitizma koje smo razmatrali u §§ 54, 55 uveravaju nas u suprotno. Zahtevajmo da Zevs raznobojne pravougaonike istog onog kvadrata do čijeg kraja navodno nije mogao stići brojeći s leva na desno broji s desna na levo i zapitajmo ga da li je prvi pravougaonik žut ili crven. U standardnoj analizi, intervali $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ su konačne veličine i, shodno tome, koliki god da je prvi pravougaonik s desne strane čija je jedna stranica jedan takav interval, u ostatku više *nema mesta* za beskonačno mnogo pravougaonika sa stranicom $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$.

Kad kvadrat gledamo *s leva na desno* izgleda da *ima* dovoljno mesta za beskonačno mnogo pravougaonika: kad *taj isti* kvadrat gledamo *s desna na levo*, izgleda da mesta nema.

Ipak, dakle, metričke teškoće nisu toliko različite od *Ahila* i *Dihotomije* da iz njih ne bismo morali i mogli izaći koristeći se modelom rešenja ovih kinematičkih aporija.

Ako bi Zevs *sukcesivno* slagao kvadrat od žutih i crvenih pravougaonika po prepisnom zakonu (geometrijskoj progresiji), onda bi *uvek bilo mesta* za nove i nove pravougaonike. Ako bi, međutim, trebalo da po geometrijskoj progresiji pravougaonike složi u kvadrat *odjednom*, on – zbog toga što geometrijska progresija nema poslednji član a za beskonačno mnogo pravougaonika nema dovoljno mesta – zadatak ne bi mogao da izvrši, iako bi mogao da složi kvadrat od pravougaonika od kojih *svi sem jednog* odgovaraju datom zakonu. Zevs bi kvadrat morao da sastavi od *konačno* mnogo pravougaonika, od kojih bi prvi s desne strane mogao da bude bilo žut bilo crven a čija bi veličina zavisila od broja ostalih, po zakonu složenih pravougaonika. Taj, prvi s desna, pravougaonik imao bi, naime, stranicu $[(2^n-1)/2^n, 1]$, gde njena veličina zavisi od veličine n.

Mogućnost da se *uvek*, pri *svakom* novom slaganju kvadrata stavi više pravougaonika nego što ih je prethodno bilo, odnosno više od bilo kojeg određenog broja, ne implicira da ima dovoljno mesta za beskonačno mnogo pravougaonika, kao što u kinematičkim aporijama mogućnost da Zevs *neograničeno broji* deonice $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta koji prelazi *ne implicira* da je *moguće* da ih *izbroji beskonačno mnogo*, ili da ih je *morao* izbrojati beskonačno ako je stigao na cilj.

Kad smo u § 10 nizali mikrokosmičke stanice po geometrijskoj progresiji tako da između stanica i uvek bude razmaka, i da one uvek imaju neku veličinu, poverovali smo da njih na ograničenom prostoru može biti beskonačno mnogo *zato što* smo ih posmatrali *dinamički*, s jednog kraja ka drugom, geometrijskom progresijom nedostižnom kraju. Sada vidimo da za beskonačno mnogo njih nema dovoljno mesta, ako one treba da postoje *jednovremeno*. Prihvatanje dinamičkog shvatanja beskonačnosti *ne implicira* infinitizam u smislu u kojem smo ga definisali (§ 77) i sada vidimo koliko je odsustvo te implikacije značajno. Kada smo pobijali *dinamički infinitizam* (§ 56) mi nismo argumentisali protiv *dinamički shvaćene beskonačnosti* (up. str. 254), već protiv teorije po kojoj je moguće *dovršenje procesa sa beskonačno mnogo akata*, što je, u stvari, *kinematička teza infinitizma* (§ 100). Sada, rešavajući metričke aporije po modelu rešenja *Ahila* i *Dihotomije*, odbacujući i *statički infinitizam* (§ 55), prihvatamo da na ograničenom prostoru ima dovoljno mesta za neograničeno mnogo raznovrsnih delova samo ako se oni aktualizuju *postepeno*, ne čineći *ni u jednom času beskonačnu množinu*.

Pri *brojanju* deonica puta imamo razloga (vidi §§ 3, 8, 56) da odbacimo mogućnost da beskonačnost bude savladana bez obzira na to da li se veličina deonica smanjuje tako da teži nuli ili ne. U slučaju hipoteze o *jednovremenoj datosti* beskonačno mnogo deonica pitanje *konvergencije postaje relevantno*. Nijedan se *određeni* kvadrat ne samo *de facto* ne sastoji od beskonačno mnogo raznovrsnih pravougaonika, već se *ne može ni u načelu* od njih sastojati; ne iz razloga koji bi navodili radikalni empiričari (§ 60), već zbog *nedostatka mesta*.

Samo se u *čistoj matematici* intervali niza [0, 1/2], [1/2, 3/4], ..., $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ i niza [0, 1], [1, 2], ..., $[n, n + 1]$ smeju uzajamno preznačavati, jer oni tamo *nisu* stranice raznobojnih pravougaonika, niti nekakvih drugih raznovrsnih pravougaonika. *Samo* zahvaljujući tome što matematika *ne govori* o *određenom* kvadratu, pravougaonika unutar tog kvadrata nije konačno mnogo; *samo* je matematički prostor *metrički amorfan*, jer zbog ove neodređenosti dopušta pomenuto preznačavanje intervala *bez obzira* na postojanje ili nepostojanje konvergencije.

Dok god prihvatamo da o pravougaonicima čija je jedna stranica određena isključivo matematički – kao interval iz jednog

beskonačnog niza – govorimo kao o *delovima* kvadrata, ne možemo izbeći Zenonove zaključke koji su vezani za metričke aporije (§ 36). Tek kad – zahvaljujući uviđanju da za *beskonačno mnogo raznobojnih i uopšte raznorodnih pravougaonika* koji bi *jednovremeno* trebalo da budu složeni po propisanom zakonu *nema dovoljno mesta – odbacimo prećutnu premisu* po kojoj delovi deobom (po geometrijskoj progresiji) ne nastaju već se njome samo otkrivaju (vidi § 36), tek se onda možemo osloboditi one beskonačnosti koja je navodno određen i ograničen predmet činila nejedinstvenim i neizmerno velikim (§ 35 a), g), § 36). *Određeni, dati* kvadrat *ne može* se – uz prihvatanje Arhimedovog aksioma – sastojati od beskonačno mnogo raznobojnih pravougaonika složenih po geometrijskoj progresiji, i *kao takav* on je jedinsven i ograničeno veliki; matematički kvadrat, pak, *nije uopšte* određeni, dati kvadrat, pa on zato *kao takav* ne sadrži određenu množinu pravougaonika.

U *staccato* i *legato* verziji *Ahila* premise *A* i *A'* (iz § 106) su *mogle* biti stvarno istinite jer vreme od 2 h može isticati i isticati tako da se intervali neograničeno smanjuju a da vremenski period koji bi trebalo da nastupi po isteku dva časa nikad ne nastupi. Premise koje bi u metričkoj aporiji odgovarale ovim premisama nikad *ne mogu* stvarno biti istinite, jer se broj intervala *ne može povećavati* ako su već *po pretpostavci* svi intervali *dati*. Broj se, svakako, može povećavati *od slaganja do slaganja*, ili tokom Zevsovog *odlučivanja* iz koliko pravougaonika da sastavi kvadrat; no čim je kvadrat dat, dat je i broj pravougaonika.

Pod pretpostavljenim uslovom konvergencije, kinematičke hipoteze *A* i *A' mogu* biti istinite zahvaljujući *sukcesivnosti* koraka, iako su nesaodržive sa *B* i *B'*, ali analogan slučaj u statičkoj metričkoj verziji *ne postoji*, baš kao što ne postoji ni u *Dihotomiji*. Zevs *može, izvršavajući* zadatak, da *odlaže* svoje prispeće na cilj, ali njegova podanica muva *ne može* krenuti za Ahilom ranije nego što je pošla, iako je *mogla* ranije poći. Pri slaganju kvadrata i sam Zevs doživljava sudbinu svoje podanice: po obavljenom poslu, pravougaonika ne može biti više nego što ih je, iako je Zevs *mogao* ubaciti više pravougaonika nego što ih je *de facto* stavio.

Uz standardno prihvatanje Arhimedovog aksioma, akltualiozovanih intervala $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ je nužno konačno mnogo i utoliko, kao što vidimo, jedinični kvadrat nije dovoljno prostran da se u njega smesti beskonačno mnogo pravougaonika čije su stranice intervali s opštim članom $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$, iako je dovoljno prostran da se u njega smesti koliko god želimo konačno mnogo pravougaonika.

Lako je videti da ono što važi za niz intervala s opštim članom $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ važi i za *svaki* niz intervala koji se zakonito smanjuju težeći nuli, tako da se *nijedan* kvadrat *ni po kojem* zakonu ne može sastaviti iz beskonačno mnogo pravougaonika.

Da li se nešto menja ako za određivanje intervala umesto nizova za koje znamo da su konvergentni koristimo članove niza decimala ekspanzije brojeva $\sqrt{2}$ ili π, tako da stranice žutih i cr venih pravougaonika budu redom $[0, 1]$, $[1, 1\frac{4}{10}]$, $[1\frac{4}{10}]$, $[1\frac{41}{10^2}]$..., odnosno $[0, 3]$, $[3, 3\frac{1}{10}]$, $[3\frac{1}{10}, 3\frac{14}{10^2}]$ ... ? Razlog iz kojeg nam se može činiti da ovaj niz pruža bolje izglede da žutih i crvenih pravougaonika bude beskonačno mnogo počiva isključivo na našem nepoznavanju bilo kakvog rekurzivnog zakona po kojem bi se nizale cifre iz decimala ekspanzije brojeva $\sqrt{2}$, odnosno π, zbog čega nam desni kraj kvadrata koji treba složiti ostaje „zamagljen". Da bismo, naime, dokazali da žutih i crvenih pravougaonika mora da bude konačno mnogo, morali bismo i u ovakvim slučajevima pokazati da *ma koliki* da je prvi žuti ili crveni pravougaonik s desne strane, broj ostalih mora biti konačan. To, međutim, ne možemo pokazati upravo zato što intervali nisu rekurzivno

određeni, te bi se za *svaki* mogući žuti ili crveni pravougaonik koji bi bio prvi s desna morao tražiti *poseban* dokaz, a broj mogućnosti nije ogrančen.

Ako *pretpostavimo* – kao u klasičnoj matematici (vidi §§ 92–93) – da se niz intervala određen decimalnom ekspanijom broja $\sqrt{2}$ ne razlikuje od niza s opštim članom $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ s obzirom na konvergentnost, *onda* ono što smo pokazali u slučaju potonjeg niza važi i za prethodni iako se *ne može načelno dokazati:* koliki god da je žuti ili crveni pravougaonik počev od pretpostavljenog jedinstvenog graničnika na levo, važi da je broj preostalih pravougaonika određen i konačan.

Ako, pak, *pretpostavimo* da niz određen decimalnom ekspanzijom broja $\sqrt{2}$ *nije* konvergentan kao što je to niz $1/2$, $3/4$, ..., $(2^n - 1)/2^n$,... – što se u intuicionističkoj matematici doduše ne pretpostavlja ali se, po intuicionističkim standardima, ne može ni isključiti (vidi § 74) – *onda* ne postoji jedinstveni graničnik toga niza u smislu u kojem smo to odredili u § 95. U geometrijskoj interpretaciji to bi značilo da se tački dobijenoj rotacijom dijagonale jediničnog kvadrata, ako ona treba da odgovara broju $\sqrt{2}$ (vidi sliku na str. 460), ne možemo približiti *koliko god želimo* uz pomoć razlomka sa slobodno izabranim brojiocem i imeniocem 10^n, gde je i n slobodno birano. Ovo bi, pak, značilo da postoji interval dovoljno mali da se u njemu ne bi mogao naći kraj nijednog od žutih ili crvenih pravougaonika čija je stranica $[m/10^n, k/10^{n+1}]$ za bilo koje m, n, k. Takav bi interval, međutim, morao biti beskonačno mali – to ćemo odmah pokazati – što znači da bismo morali *odbaciti i Arhimedov aksiom.* Naime, unutar tog dovoljno malog intervala *ne bi smelo biti racionalnih tačaka*, jer se one uvek mogu dostići pogodnim izborom m, n, k, a da je takav mali interval *bez racionalnih tačaka* nužno beskonačno mali, u to se lako možemo uveriti tako što, *zadržavajući stranicu kvadrata kao jedinicu mere, prebacimo koordinatni početak u* *tačku dobijenu rotacijom dijagonale.* Tada bar *jedna* od krajnjih tačaka intervala o kojem je reč postaje *racionalna*, pa joj druga mora biti beskonačno blizu, jer bi inače između njih moralo biti racionalna tačka *s obzirom na zadržanu jedinicu mere*, a tada bi moralo biti i mesta za neki od žutih ili crvenih pravougaonika čija je manja stranica određena nekim racionalnim brojevima m, n, k, *s obzirom na istu jednicu mere*, što smo pretpostavili da nije slučaj.

Što važi za $\sqrt{2}$ važi i za ostale iracionalne brojeve čije se mesto na brojnoj osi može bar načelno savršeno tačno i jednoznačno odrediti nekim nearitmetičkim putem. Videćemo, u § 124, da mesto broja π, koje se geometrijski ne može tako odrediti, može u načelu da se savršeno tačno i jednoznačno odredi izvesnim kinematičkim putem, tako da i za π važi što i za $\sqrt{2}$.

Ovom neočekivanom *vezom između pretpostavki o konvergenciji* nizova iz decimala ekspanzije brojeva kao što su $\sqrt{2}$ i π i *prihvatanja ili neprihvatanja Arhimedovog aksioma*, možemo, uz ponuđenu indefinitističku reinterpretaciju kantorovskih definicija realnih brojeva (§ 95), naterati intuicioniste da bar u slučajevima u kojima su mesta na brojnoj osi jednoznačno fiksirana priznaju da sporne nizove o kojima je reč ne smatraju konvergentnim *isključivio zato* što nisu u posedu rekurzivnog zakona nizanja članova, jer bi *inače*, ako bi imali u vidu *neki drugi* razlog, morali da negiraju Arhimedov aksiom i prihvate postojanje infinitezimala.

Ako, dakle, prihvatajući Arhimedov aksiom prihvatimo i da je niz čiji opšti član $m/10^n$ ima uvek rekurzivno predodređeni imenilac dok je m za svako n zavisno od prethodno fiksirane tačke kao granice i time jednoznačno određeno ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) – konvergentan nezavisno od postojanja ili nepostojanja kompletne rekurzivne određenosti članova prosto zbog toga što se svaka slobodno izabrana tačka levo od fiksiranog graničnika može nadmašiti nekim m i dovoljno velikim n, onda, kao što vidimo, *možemo pokazati* da i broj žutih i crvenih pravougaonika u kvadratu

čija je jedna stranica $[0,\sqrt{2}]$, ili $[0, \pi]$, *mora uvek biti konačan.* Zbog toga je toliko značajna razlika između tri načina definisanja realnog broja o kojima govori Kantor (vidi *Cantor 9*, § 9, str. 183–190), njegovog, Vajerštrasovog i Dedekindovog – kojima smo se bavili u §§ 92, 93 i na osnovu čega smo u § 95 izvršili pogodno indefinitističko redefinisanje Kantorovih konvergentnih nizova koji određuju realne tačke. Jedan takav niz – to smo videli – *ne mora* biti aktualno beskonačan da bi određivao realnu tačku, no sad vidimo da on uz standardno prihvatanje Arhimedovog aksioma ni *ne može* biti takav ako njegovim članovima treba da odgovaraju realne tačke kao tačke razgraničenja žutih i crvenih pravougaonika čije su stranice naizmenično intervali $[m/10^n, k/10^{n+1}]$.

Ako ne prihvatimo postojanje neuporedivo malih figura, svaka se ograničena figura može sastojati iz samo konačno mnogo manjih, a slično tome se sada i *svako ograničeno telo može sastojati samo iz konačno mnogo delova.*

Sad vidimo kako bi Empedokle, *ako* je uslovio deljenje heterogenošću pri uzajamnom umetanju korena, što je moguće (up. gore, str. 178), mogao – dokazujući da je svaka određena deoba, bilo sukcesivna bilo simultana, uvek izvršena do *određene* tačke – onemogućiti izvođenje Zenonovog zaključka u B 1, utoliko što je, kao što smo videli (§ 35 g, § 36), u B 1 neophodno napraviti prelaz od dinamičke beskonačnosti ka statičkoj beskonačnosti delova. Međutim, „čvrsto jezgro“ Anaksagorine fizike, sadržano u fragmentu 59 B 3 (vidi gore, § 34) bilo bi razoreno, pošto je Anaksagora tvrdio upravo ono za šta smo otkrili da je nemoguće, da naime ograničeni prostor sadrži (ili bar može da sadrži) *beskonačno mnogo heterogenih semena.* U tom svetlu se možemo setiti zaključka iz § 37 da su se sačuvani Zenonovi dokazi protiv mnoštva, osim na Pitagorejce, mogli još odnositi na Anaksagoru.

112. Rešenje metričkih aporija kao osnov za određivanje broja tačaka nekog prostora

Ako su tačke granice linija, linije granice ili forme razgraničenja površina, površine granice ili forme razgraničenja tela – a postavljajući problem u *Aporetici* mi smo ih tako shvatili (§§ 11–17) – i ako – kao što smo se uverili u § 111 – svaka duž, ograničena površina ili ograničeno telo mogu sadržavati samo ograničeni broj heterogenih neinfinitezimalnih intervala, površina ili telesnih delova, onda oni mogu sadržavati samo *ograničeni* broj aktualizovanih tačaka, linija i površina, a koliki je taj broj u nekom pojedinom slučaju – *empirijsko* je pitanje.

Imajući ovo u vidu, možemo rešiti problem koji smo bili formulisali s namerom da indefinitiste dovedemo u teškoće (§ 76), korespondirajući zakonu nastajanja L_n (niza koji predstavlja Brauerovu oštru strelu – vidi str. 341) zakon L_p kojim se tvrdi da će se u svakoj tački podele određenoj zakonom L_n naći razgraničavajuća tačka dvaju svojstava iz nekog poznatog (konačnog) skupa, recimo baš žute i crvene boje.

Pitali smo se nije li neprotivrečno pretpostaviti da je svaka tačka predodređena zakonom nastajućeg niza *već* aktualizovana zakonom L_p i koliko bi onda jedinični kontinuum u kojem se niz dihotomija obavlja imao tačaka. Pošto smo sad utvrdili da se, uz usvajanje Arhimedovog aksioma, jedinična duž može sastojati samo iz *konačnog* broja (nedegenerisanih, heterogenih) intervala i da je taj broj *de facto* uvek *određen*, možemo, na zadovoljstvo indefinitista, reći da uspešna korespondencija između zakona L_n i L_p *nije* moguća. *Već* aktualizovanih tačaka je određeno mnogo, dok je tačaka koje se *mogu* ili koje *će* se aktualizovati deobom prema zakonu L_n *neograničeno* mnogo. Kao što Zevs može *neograničeno* brojati deonice $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB, a da na cilj može stići samo ako ih izbroji *određeno mnogo*, tako je broj

tačaka koje se mogu aktualizovati neograničen a broj već aktualizovanih konačan.

Ako bismo dihotomije hteli da obavimo simultano, kao u Aristotelovom primeru iz spisa *O nastajanju i propadanju* (vidi gore, str. 215, 311–313), opet ne bismo mogli dobiti beskonačno mnogo tačaka, iako bismo mogli uvek dobiti više nego što neko odredi. To što nam se čini da na jednoj jediničnoj duži ima mesta za beskonačno mnogo tačaka počiva upravo na tome što ovih, *s jedne strane*, možemo uvek dobiti više nego što je rečeno, dok je, *s druge strane*, ono što činimo *već moglo* biti učinjeno. Dok god, *odlučujući*, *povećavamo* broj podela, *akt deljenja* nije još izvršen. Čim je podela izvršena, broj se više *za tu podelu* ne može povećavati. Da je veći broj podela *mogao* biti napravljen – tačno je; ali on *de facto* nije napravljen. Ako je to već neko drugi učinio, onda je, svejedno, taj broj podela opet određeni broj podela.

To što se mnogima, kao Rosu (*Ross 2*, str. 74–75), čini da tačke do kojih dolazimo deobom moraju biti *preegzistentne*, takođe počiva na pretpostavci da je deoba *već* izvršena tamo gde *je mogla* biti izvršena. No, ako pokušamo da po nekom, *bilo kojem* zakonu složimo kvadrat od beskonačno mnogo pravougaonika, videćemo da svaki, makar koliko mali pravougaonik, odmah *ograničava* broj ostalih, i to na *određeni* broj.

Matematičari, čiji je svet lišen boja i sličnih „nižih" svojstava, tradicionalno nisu pravili razliku između *mogućih* i *aktualizovanih* tačaka i *jedino* je zato za njih prostor mogao – u devetnaestom veku – postati skup tačaka. Koliko čisti prostor nije fizički prostor, toliko ni tačke koje ga navodno sačinjavaju nisu ničim aktualizovane. Ali i u *standardnoj matematici* su $\vdash \forall\varepsilon\exists n(1-\varepsilon<(2^n-1)/2^n)$ i $\vdash \forall n\exists\varepsilon(1-\varepsilon>(2^n-1)/2^n)$ teoreme *samo zato* što u prvoj u svakoj zameni moramo najpre fiksirati ε, dok u drugoj moramo prvo fiksirati n, te tako, *tim aktom, neograničeni broj mogućnosti svodimo na određeni broj realizacija.*

Navedene teoreme imaju *modalni* status iako ih matematičari standardno tako ne čitaju. Za svako *prethodno izabrano* ε *možemo pronaći* takvo *n* da tvrđenje iz prve teoreme bude tačno, dok za svako *prethodno izabrano n možemo naći* takvo ε da tvrđenje druge bude tačno. Matematički niz 1/2, 3/4, ..., $(2^n - 1)/2^n$, ... nije *ni* konačan *ni* beskonačan, već je „otvoren" da ga, *od slučaja do slučaja, ovako ili onako,* odredimo.

Lako zaboravljamo da u svakom *pojedinom* slučaju, s obzirom na *bilo koji* način aktualizacije, postoji *određeno najveće n* i *određeno najmanje* ε za koje važi $1-\varepsilon<(2^n-1)/2^n$.

113. Rešenje topoloških aporija i razlika između fizičkog i klasičnog matematičkog prostora

Topološkim aporijama ćemo zvati sve teškoće koje su vezane za neki vid *negacije* Zenonovog aksioma, s obzirom na to da on deluje *prihvatljivo* (up. §§ 96, 97). Pri tom ćemo imati u vidu kako slučajeve koje dozvoljavaju indefinitističku reinterpretaciju (§ 96), tako i one rezultate koji se moraju shvatiti infinitistički (§ 97).

U § 112 smo zaključili da na svakom ograničenom prostoru ima dovoljno mesta za proizvoljno veliki ali nužno konačan broj tačaka, lilnija i površina, ako se ove shvate na način na koji smo ih uveli u *Aporetici*. Da li se topološkom infinitističkom tezom tvrdi nešto što tom našem zaključku protivreči, ili se, možda, tačke, linije i površine kako ih shvataju infinitisti ipak razlikuju od onih koje smo mi imali u vidu, tako da protivrečnosti ne može da bude?

Tačke kako smo ih mi shvatili *nemaju* nikakvu *veličinu*, kao što linije *nemaju širinu* ni površine *debljinu*, i utoliko su one *geometrijske* (vidi §§ 12–17); utoliko ni naša tvrdnja da za njih beskonačno na ograničenom prostoru nema dovoljno mesta nije ni

u kakvoj vezi sa razlozima koje je za sličnu tezu naveo Vizdom (vidi gore, § 47, str. 224). Ali, ako su sve tačke, linije i površine koje smo mi imali u vidu geometrijske i utoliko one koje i matematičar infinitista ima u vidu, ne znači da su i obrnuto – sve tačke o kojima govori matematičar infinitista takve da odgovaraju našem određenju.

Govoreći o geometrijskim objektima kao granicama delova (ili površina), govorili smo, na primer, o granici raznobojnih prostranstava (§ 13) ili granici raznobojnih površina (§ 12). Međutim, matematičari uopšte, pa i matematičari infinitisti, apstrahuju od *kvalitativnih razlika*, pa su kod njih granice granice delova prostora koji se samo kontinualno, ne i kontigualno, dodiruju (vidi § 16), a upravo je, s obzirom na naše zaključke iz §§ 111–112, razlika između aktualizovanih i samo potencijalnih granica – znači, razlika između granica pri kontigualno-kontinualnom i pri samo kontinualnom dodirivanju – *presudna* za rešenje svih aporija unutrašnje beskonačnosti: aktualizovanih granica mora uvek biti *određeno (konačno) mnogo,* iako je *broj mogućih granica neograničen.* U toj razlici se, izgleda, krije rešenje svih zenonovskih metričkih i topoloških misterija beskonačnosti – koju smo uočili zahvaljujući prihvatanju *nesaodrživosti* premisa *staccato* i *legato* verzije *Ahila* – a ona je ujedno ključna za razlikovanje fizičkog i matematičkog prostora.

Shematičnost u matematičarskom pristupu prostoru zaista jeste osnov za konstrukciju Zenonovih aporija, ali to nije shematičnost o kojoj su, kao izvoru paradoksâ, govorili radikalni empiričari Džordž Barkli, David Hilbert i Maks Blek (up. gore. str. 291). Nije problem u tome što matematičari zanemaruju značaj *veličine* – tako da im je svejedno da li je reč o liniji dugoj dva inča ili o liniji veličine jednog bilionitog dela čiode – već u tome što ne uzimaju u obzir razliku između *određenog tela*, ako kao *određeno* ima *određen konačan* broj delova koji su u sebi homogeni i kontinuirani i utoliko u prevashodnom smislu jedinstveni (up. § 66) i *prostora koje to telo zauzima*, koji je za njih, kao subzistirajući, homogen i kontinuiran i čiji broj delova *nije ograničen.*

Imajući u vidu značaj prethodne razlike, zanimljivo je da izvorne Euklidove formulacije nisu toliko zavodljive, jer se uvek odnose na ono što *treba*, ili što *može*, biti proizvedeno (vidi *Euclid*), dok moderne formulacije, kako s pravom konstatuje Adams, „u najmanju ruku izbegavaju modalitete i nikakvi se problemi iz modalne logike ne pojavljuju pri analizi deduktivnih odnosa između iskaza“ (*Adams*, str. 406). Tačka više nije objekat koji treba proizvesti, već je po sebi postojeći, primitivni objekat u jednom deduktivnom sistemu (vidi, na primer, *Hilbert 1*, gl. 1).

Pošto se matematičari bave čistim prostorom, prostorom bez fizičkih tela koja imaju fizička svojstva (vidi § 15), nije nerazumljivo zašto se za njih na kraju izgubila razlika između tačaka, linija i površina kao stvarnih i kao samo mogućih granica. Gde god uoče situaciju u kojoj se *može proizvoditi neograničeno mnogo tačaka*, oni odmah govore i o *datosti beskonačno mnogo tačaka*, zaboravljajući, ili, u najboljem slučaju, svesno ignorišući, činjenicu da u nekim od tih situacija *po njihovim vlastitim pretpostavkama doslovno nema dovoljno mesta* za jednovremenu aktualizaciju beskonačno mnogo tačaka, makar aktualizaciju vršio i sam Zevs. Pri tom nije reč samo o tome da matematičari *tačke* tretiraju kao samostalna preegzistentna bića, pošto oni *isto tako* postupaju u slučaju *intervala* čije bi granice tačke mogle da predstavljaju. Iako smo, naime, rešavajući metričke aporije, videli da intervala $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ može *de facto* biti uvek samo konačno mnogo, matematičari standardno uzimaju da ih je beskonačno mnogo, *samo zato što* maksimalni broj ne može da se fiksira; uvek je, naime, moguće *ubacivati* nove i nove intervale ili *odlučiti* da ih se ubaci više nego što je prethodno bilo odlučeno.

Možda najbolju ilustraciju načina na koji matematičari lako priznaju egzistenciju svojim objektima, praveći korak *ab posse ad esse*, predstavljaju duži bez kraja, to jest otvoreni intervali. Iako u geometriji koja još nije izgubila vezu sa fizičkim svetom, i koju smo mi sve vreme imali u vidu (up. § 15), takvi entiteti ne postoje, matematičari su, tretirajući tačke kao osamostaljena bića a ne samo kao granice intervala, počeli s njima *svuda* da postupaju *kao da* one stvarno imaju sve osobine samostalnih bića. Tako oni „uklanjajući“ samo krajnju tačku na duži dobijaju *duž bez kraja*, jer se o prvoj mogućoj tački do krajnje ne može govoriti, pošto se tačke ne dodiruju; iako se tačke ne dodiruju, one se uvek mogu pronalaziti *sve bliže* „uklonjenoj“ krajnjoj tački, pa pošto to u *matematičkom kontekstu* znači da su one *već bile tamo*, matematičar uzima da je cela duž *do kraja* prekrivena tačkama. Tako je *ceo interval bez krajnje tačke očuvan* zahvaljujući dvostrukom načinu posmatranja: tačke su raspoređene sve do samog kraja jer se mogu pronalaziti neograničeno blizu krajnjoj tački, ali, ipak, kad se krajnja tačka „ukloni“ nove *krajnje tačke nema*, jer svaka tačka mora *i da je udaljena* od granične. Ova *dva* načina posmatranja su *nekompatibilna* i *mogu opstati zajedno samo* u *modalnoj* interpretaciji. *De facto* otvoreni interval *ne može* postojati i samo krajnja tačka se *ne može* ukloniti, jer postoji samo kao granica dva intervala.

Stiven Kerner (vidi *Körner*) je razvio Lajbnicovu ideju identifikacije objekata kroz moguće svetove, pri čemu se *sva* svojstva objekata *mogu* menjati od sveta do sveta a da se *ipak* svuda govori o *istom* objektu, bilo zahvaljujući stalnom referiranju na objekt jednog aktualnog sveta kojeg svi mogu s obzirom na različite svrhe da predstavljaju, bilo zahvaljujući mogućnosti da oni s obzirom na različite svrhe jedan drugog mogu da predstavljaju čak bez referiranja na neki realni objekt kao povlašćeni.

U aktualnom svetu je Sekst Tarkvinije napustivši Jupiterov hram u Dodoni otišao u Rim, gde je vodio grešan život. No on je mogao otići u Korint, kao što je mogao otići u Trakiju, i živeti tamo časno, kao u poznatom primeru iz Lajbnicove *Teodiceje*. Sekst koji je otišao u Rim „nesamerljiv“ je, kako bi rekao Kerner (*Körner*, str. 233), i sa Sekstom koji je u mogućem svetu otišao u Korint i sa Sekstom koji je u mogućem svetu otišao u Trakiju, kao što su i ova dvojica međusobno nesamerljivi. Oni su svi međusobno nesamerljivi, jer bi tri opisa *uzeta zajedno* dala *protivrečan* opis *za samo jedan* od mogućih svetova. No u određene svrhe, mi ove nesamerljive Sekste možemo zamenjivati. Čak ako je ovakvih Seksta toliko mnogo da se ne može uočiti nijedno suštinsko zajedničko svojstvo koje bi im pripadalo, oni po različitim osobinama mogu biti u ovom ili onom pogledu slični tako da za različite svrhe jedan drugog mogu da predstavljaju. Ne podarujući povlašćeni status Sekstu koji je otišao u Rim, možemo prosto govoriti o Sekstu koji bi mogao otići u Rim, otići u Korint, otići u Trakiju, voditi grešan ili častan život. *Taj* Sekst *nije* Sekst ni iz jednog mogućeg sveta, već je takoreći *suprasvetski*, on je Sekst koji *samo može biti* ovaj ili onaj Sekst iz ovog ili onog sveta.

Kad su matematičari već jednom počeli moguće da tretiraju kao stvarno bez obzira na eventualne inkompatibilnosti, njima je prostor mogao ličiti na skup svih tačaka koje bi se mogle aktualizovati mogućim deobama. I, pošto se tačke uvek novim alternativnim deobama mogu svuda pronalaziti, koliko god se želi blizu bilo kojoj već datoj tački, za neke matematičare se prostor *sastoji* iz tačaka. No, kao što *nema* stvarno otvorenih intervala, ako i realni prostor *nije* sastavljen iz tačaka, već iz delova koji na ovaj ili onaj način aktualizuju *neku određenu* od mogućih raspodela tačaka i *sigurno ne sve moguće*, jer takav skup nije realno moguć. Tačke, linije i površine su granice, a ono što ih čini granicama ne može se od njih sastojati.

Iako su Dedekind-Kantorov aksiom i Kantorova teza o kontinuumu kao neprebojivom beskonačnom skupu tačaka prvobitno

shvatani kao negacija Zenonovog aksioma (vidi naročito *Cantor 10*, str. 275), oni mogu da se protumače i drukčije. Shvatiti ih kao negaciju Zenonovog aksioma značilo bi – ili tačke jednostavno tretirati kao samostalno postojeće entitete iz kojih se *slaganjem* može dobiti neki deo fizičkog prostora, ili, suptilnije, pretpostaviti da, pošto nijedan određeni deo fizičkog prostora nije nedeljiv, jednovremeno ostvarivanje svih mogućih deoba znači *de facto* njegovo *razlaganje* u skup tačaka. No, pošto smo videli u kojem smislu je korak od mogućnosti beskonačnog deljenja ka mogućnosti beskonačne izdeljenosti neopravdan i u slučaju najjednostavnijih rekurzivnih zakona deobe fizičkog prostora, možemo, intepretirajući Kantorovu tezu, umesto realnog fizičkog prostora uvesti apstraktni matematički prostor – *ne* kao fizički prostor u kojem je fizičkih osobina nestalo *zato što* su izvršene sve moguće deobe, *već* kao prostor koji poput suprasvetskog Seksta predstavlja samo *polje mogućih deoba*, gde su elementi granice ovih mogućih deoba.

Kod ovako shvaćenog matematičkog prostora postaje irelevantno to što pretpostavka neke određene izdeljenosti *de facto* isključuje neku drugu, kao što bi, recimo, izdeljenost na *n* delova *de facto* isključivala izdeljenost na *n*+1 deo, i *a fortiori*, postaje irelevantno to što se deoba na beskonačno mnogo delova ne može bez protivrečnosti *de facto* ostvariti u slučaju ograničenog prostora. Dovoljno je to što se deoba *može vršiti neograničeno* pa da se, pošto se radi o *polju mogućnosti* čiji su elementi *moguće* tačke deobe, prihvati *beskonačnost* tačaka. Tačaka ima gde god se mogu aktualizovati, i pošto nema oblasti u kojoj to nije moguće činiti, *nema nepunktualnog* dela *matematičkog* prostora; on je *u tom smislu* „skup“ tačaka.

Možemo, dakle, opravdano govoriti o skupu *mogućih* svetova koje razmatramo, a koji sadržavaju iste ili različite objekte, ako ne previdimo, ili ne zaboravimo, da opisi *čak istih* objekata mogu biti *nesamerljivi* u tom smislu što bi bili protivrečni u nekom *realnom* svetu. Tako možemo govoriti o prostoru kao *polju mogućnosti* svih deoba čiji su elementi moguće granice tih deoba, ako ne zaboravimo da to ne znači da su sve deobe samerljive u tom smislu da bi mogle biti ostvarene u jednom realnom prostoru. Matematički prostor može biti skup tačaka a da to ne znači – ne samo da realni prostor *ne mora* samim tim to biti, već da to ne znači da bi on to uopšte *mogao da bude*.

Kad govorimo o matematičkom prostoru mi obično *polazimo* od nekog fizičkog prostora. Elemente *matematičkog* prostora možemo odrediti preko *mogućih* deoba *realnog* prostora *po nekom zakonu*, ali tako da ne zahtevamo da deoba po tom zakonu može da bude *ostvarena*, već samo da se *može* po njemu *neograničeno vršiti*. U tom smislu smo i redefinisali infinitističku definiciju konvergencije (u § 95), tako da može da posluži da se polaženjem od *realnog* prostora definišu tačke kao elementi *matematičkog* prostora. Ceo Kantorov problem kontinuuma se *može* shvatiti kao pokušaj da se aritmetičkim sredstvima odrede sve tačke (kao granice) u prostoru kao zajedničkom polju mogućih deoba.

Anri Poenkare je bio jedan od prvih velikih matematičara koji, je nasuprot Kantoru, tvrdio ne samo da je „istinski matematički kontinuum stvar sasvim različita od kontinuuma fizičara i metafizičara" (*Poincare*, str. 27), već i da se za to „šta matematičari smatraju kontinuumom ne treba obraćati (ni) geometriji" (*ibid.*, str. 26), pošto je „sposobnost stvaranja simbola ono što je omogućilo konstruisanje matematičkog kontinuuma, koji nije ništa drugo nego jedan naročiti sistem simbola", gde je jedino ograničenje „izbegavane svake protivrečnosti" (*ibid.*, str. 32).

Ako, dakle, geometrijske objekte shvatimo onako kako smo ih uveli u *Aporetici* i dozvolimo da postoje samo kao granice *fizičkih* tela i njihovih heterogenih delova (površina i ivica), ako osim toga dozvolimo da geometrijska tela postoje samo utoliko što su fizička tela *i* geometrijska (§ 15), ali ne i po sebi (§§ 17, 68) – zbog čega se

njihovi delovi mogu dodirivati i kontigualno-kontinualno ali ne i samo kontinualno (§ 16) – onda matematički prostor ne samo što nije realan kao polje mogućnosti različitih aktualizacija, već kao skup svih mogućih aktualizacija nije *ni moguć* na način na koji je skup svih mogućih pobednika nekog šahovskog turnira nešto moguće pošto svi igrači *mogu* na kraju imati jednak broj poena. Utoliko bi Aristotel bio u pravu u „sporu" sa Kantom oko beskonačnosti mogućih delova (§§ 67, 70), jer skup mogućih delova nije beskonačan ako to podrazumeva da bi trebalo da je u načelu moguć. Ali, o prostoru se *može* govoriti u modalnom kontekstu i onako kako smo videli da to čine matematičari, i to odgovara Kantovom a ne Aristotelovom indefinitizmu. Kao što se pojam kontigviteta ne samo *ne razmatra* u matematici već se *prenebregava* činjenica da se dodir koji se definiše u geometriji realno uvek ostvaruje preko kontigualnog dodirivanja, tako se i o granicama govori ne samo bez obzira na pojam heterogeniteta, već se prenebregava da su granice unutar onoga što je homogeno (i kontinuirano) *samo* moguće (§§ 66, 68, 70, 75) i to *tako* da se njih beskonačno mnogo ne može aktualizovati jednovremeno. Mi ne moramo zahtevati od matematičara da ne postupa onako kako postupa, ali shodno *imanentističkom pravilu* kojim smo, suprotno Hegelu, tražili da se dopustivi iskazi ograniče s obzirom na navedene odredbe tako da mogućnost konstrukcije protivrečnih iskaza bude isključena (§ 104), moramo *ograničiti* važenje matematičarevih tvrdnji – *da bi mogle biti istinite*. Ako za beskonačno mnogo realnih delova, i utoliko i beskonačno mnogo realnih granica, nema dovoljno mesta na nekom ograničenom prostoru, onda matematički prostor ne samo što nije *realan*, nego on nije ni *realno moguć*, iako je broj mogućih delova, i utoliko i broj mogućih granica, neograničen.

Rasel je odgovarajući Zenonu, sledio Vajerštrasovu statičku teoriju promene (*Russell 5*, str. 347 – vidi ranije, § 92) i prihvatio je da je strela koja je letela mirovala u svim trenucima a ipak se pomerila s mesta na mesto, pošto kretati se prosto treba da *znači* biti u različitim trenucima u različitim položajima ili tačkama putanje. U svim trenucima i svim tačkama strela je mirovala, ali, ukoliko se kretala bez zastajanja, ona ni u jednoj tački nije bila duže od jednog trenutka.

Rasel je, naravno, u pravu kad tvrdi da strela, ukoliko se kretala bez prekida, ni u jednoj tački nje mogla biti duže od jednog trenutka, ali njegova definicija kretanja stavlja kola ispred konja; realno vreme u kojem se strela kretala nije sastavljeno iz trenutaka.

Vreme je skup trenutaka taman toliko koliko je prostor skup tačaka. Isto su, naime, trenuci samo granice dva vremenska intervala, oni se, ipak, u pricipu mogu na ovaj ili onaj način aktualizovati koliko god se želi blisko bilo kojem već određenom trenutku i zato je i matematičko vreme, poput suprasvetskog Seksta koji nije išao *ni* u Rim *ni* u Korint *ni* u Trakiju ali je mogao ići *bilo* u Rim *bilo* u Korint *bilo* u Trakiju (vidi § 113, str. 557), vreme u kojem doduše nijedna raspodela trenutaka *nije* aktualizovana ali je ipak bilo koja *mogla biti* aktualizovana. No kao što realni Sekst nije mogao ići *i* u Rim, *i* u Korint, *i* u Trakiju, tako i realno vreme nije skup trenutaka.

Trenuci se mogu aktualizovati na razne načine, a najočigledni-je sudarom. No, telo koje se kreće moglo se sudariti samo konačan broj puta pre nego što je stiglo na cilj, kao što je moglo preći preko samo konačno mnogo raznobojnih površina koje, recimo, poput dirki klavira ispuštaju tonove dok se preko njih prelazi da bi se smenom tonova aktualizovali trenuci. Koji god način proizvođenja trenutaka da je izabran, zbio se *konačan broj događaja* ako je telo *stiglo* na cilj, a ako taj broj treba da je *neograničen*, onda je nužno da telo *još nije stiglo* na cilj.

Ispravnost izvesnog protivčinjeničnog kondicionala kojim se tvrdi da bi telo koje se kreće izvesnom brzinom posle izvesnog vremena bilo u tom i tom položaju da se sudarilo s nekim telom *ne implicira* da je ono u to vreme bilo u tom položaju u kojem bi se s tim drugim telom sudarilo da se sudarilo. Razlog iz kojeg smo ipak skloni da od prvog kondicionala neosetno skliznemo ka drugom iskazu, u kojem se o bivanju tela u određenom trenutku govori kategorički, leži, verovatno, u tome što matematički možemo tačno izračunati *kada* ono u taj položaj dospeva, i, uopšte, što za svaki dati *položaj* možemo jednoznačno odrediti *trenutak* i obratno. Ali, *čim bismo pokušali* da koristeći zakon kretanja sastavimo ma i najkraće kretanje tela „kinematografski", videli bismo kolika je razlika između mogućih položaja pri mogućim sudarima i stvarnih položaja u kojima bi se tela mogla sudariti. Ne bismo, na primer, umeli da odredimo prethodni položaj, to jest položaj neposredno pre sudara, niti bismo uopšte, na bilo koji način, mogli da odredimo tačke koje treba da budu tačke beskonačno mnogo sudara. Iako, kao što je Alen Vajt jednostavno pokazao (vidi *White*, str. 23), mnogi filozofi greše kad misle da izjave o tome da se nešto moglo dogoditi bar sugerišu da se to nije dogodilo, pošto sam mogao izjaviti da je ubica mogao ući na zadnja vrata upravo podozrevajući da je on to i učinio, ipak ne treba zaboraviti da to što je nešto moglo biti slučaj sigurno ne znači da je to i bio slučaj. Telo je moglo biti u tom i tom položaju tada i tada, ali da bi bilo ispravno reći da je ono tada tamo bilo nešto je poput sudara moralo i da se *dogodi* kao što bi to učinilo stvarnim, jer, kao što, sasvim neočekivano, klasični matematički prostor još nije realan jer na ograničenom prostoru nema dovoljno mesta za beskonačno mnogo tačaka, tako i matematičko vreme još nije realno vreme. Posedovanje *zakona uzajamnog koreliranja* tačaka i trenutka koji su samo granice još uvek ne znači da se prostor sastoji iz tačaka a vreme iz trenutaka. King je, „pišući fus-note" (vidi *King*, str. 670) za Aritotelovo rešenje *Strele*, koju je smatrao glavnom kinematičkom aporijom (vidi *ibid.*, str. 657), zaključio da se Raselova teorija po kojoj se „kretanje u prostornovremenskom kontinuumu jednostavno sastoji u bivanju u različitim položajima *u* različitim vremenima" može održati ako se savlada „sklonost da se o ovom prostornovremenskom kontinuumu misli kao o jednom apsolutnom i preegzistentnom okviru unutar kojeg se nastajanje odvija" (*ibid.*, str. 669), bolonjsku kobasicu ne možete pojesti tako što ćete jesti dvodimenzionalne „kriške" ("*slices*") koje nastaju sečenjem kobasice (*ibid.*, str. 661).

Usvajajući Raselovu tvrdnju da telo koje se kontinuirano kreće ni u jednom položaju ne može biti duže od jednog trenutka, Aristotelovu tvrdnju da se *sensu sticto* telo u trenutku niti kreće niti u njemu miruje (*Aristotle 22*, 239 b 2), kao i Bergsonov zaključak da se kretanje tela ne može složiti „kinematografski" (*Bergson 2*, str. 331–332), i dozvoljavajući, s Maksom Blekom (*Black 2*, str. 142–143), da se o kretanju ili mirovanju u trenutku može govoriti, ali samo u „izvedenom smislu" u kojem Oven (*Owen 6*, str. 220) govori i o crvenoj tački (zbog situacije u „okolini" tačke), navedeni smo da zaključimo kako kretati se kontinuirano tokom nekog vremena ipak *pre svega znači* zauzimati prostor veći od sebe, i to u svakom realnom vremenskom podintervalu toga vremena. Ali, za razliku od atomista koji tvrde da je broj ovih vremenskih podintervala ili potprostora konačan zato što postoje apsolutno minimalni delovi, indefinitista koji tvrde da je njihov broj prosto neodređen, radikalnih empiričara koji tvrde da je on uslovljen granicama empirijski dozvoljene upotrebe pojedinih termina, finitista i pozitivnih dijalektičara koji usvajaju da je broj o kojem je reč konačan zbog relativnosti identiteta i infinitista koji tvrde da je on beskonačan, mi zahvaljujući

sprovedenom svođenju na apsurd smemo da tvrdimo da on, s *jedne* strane, *mora* biti *de facto* konačan, iako, s *druge* strane, on *može biti* neograničeno veliki, čak toliko veliki da telo ne može prevaliti ni put relativno kratak s obzirom na brzinu kretanja!

U matematičkom vremenu i maematičkom prostoru broj podintervala i potprostora jeste beskonačan, jer je uvek reč o *mogućim* delovima i intervalima; no broj realnih delova ili događaja može biti neograničen samo *tokom* procesa kretanja ili *tokom* odlučivanja. Mi, ponovo, aporiju ne rešavamo nikakvom stipulacijom, već samo *ograničavamo* tvrdnje tako da *u svom domenu budu istinite.*

Ako je broj delova u ograničenom matematičkom prostoru i broj intervala u ograničenom matematičkom vremenu *beskonačan* – kao broj mogućih realnih delova i intervala – dok je broj delova u ograničenom realnom prostoru i broj događaja koji se zbio u ograničenom realnom vremenu *konačan*, onda matematički postor i vreme *nisu realni*, već su, poput Seksta koji je svuda mogao otputovati, *suprasvetski.* Aporija nastaje kad matematički prostor i matematičko vreme *bez daljeg* tretiramo kao realne, ili kad realni prostor i vreme *bez daljeg* tretiramo matematički. Dovoljno je da samo neke podskupove delova matematičkog prostora i/ili intervala matematičkog vremena, poput onih određenih zakonom geometrijske progresije s opštim članom $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$, tretiramo kao realne, pa da se izložimo svođenju na apsurd (vidi § 99 i § 111); s druge strane, skup realnih delova nekog ograničenog prostora i skup događaja u nekom ograničenom vremenu nužno su nedovoljno raščlanjeni da bi mogli predstavljati matematički prostor, odnosno matematičko vreme.

Razlika između matematičkog i fizičkog prostora i matematičkog i fizičkog vremena s obzirom na činjenicu da se realni prostor i vreme ne samo ne sastoje iz tačaka, odnosno trenutaka, već da se na ograničenom prostoru i u ograničenom vremenu ne može ni načelno aktualizovati njih beskonačno mnogo, dobila je svoju operacionalizaciju i „ušla u istoriju" tek u dvadesetom veku, preko kvantne mehanike. Ali, budući da značaj ove razlike nikad nije bio filozofski sagledan, ni „revolucija" u mikrofizici – da se izrazim na Kunov način[1] – nije osvetljena iz te perspektive, iako je, osim o eksperimentalnoj i matematičkoj strani, veoma mnogo raspravljano i o filozofskim aspektima „nove fizičke paradigme" (vidi o tome *Jammer*, naročito gl. 3). Mi ćemo celu stvar razmotriti na najkarakterističnijim primerima – interpretaciji Hajzenbergovih relacija neodređenosi i Borovog principa komplementarnosti i takozvanom paradoksu nepotpunosti kopenhagenške interpretacije kvantne mehanike koji su (ne pod tim nazivom) formulisali Ajnštajn, Podolski i Rouzen.

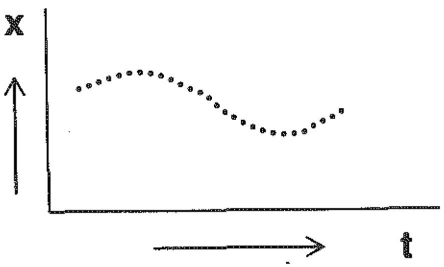
Sistem klasične mehanike je deterministički u tom smislu što nam zakoni kinematike i mehanike uz poznavanje početnih i graničnih uslova nude obostrano jednoznačnu korespondenciju mogućih trenutaka i položaja tela u kretanju koje eksperimentalno možemo konstatovati i to, bar u načelu, ili bez remećenja uslova ili uz tačno određenje karaktera i stepena poremećaja. Zbog takve obostrane korespondencije navedeni smo da kretanje tela tretiramo kao *kretanje u matematičkom prostoru* i o na način na koji je to učinio Rasel (vidi §§ 92, 114), da ga naime *svedemo* na zauzimanje različitih položaja u razllčitim trenucima, gde u svakom trenutku telo ima određenu trenutnu brzinu (vidi §§ 92, 114). Omogućavanje ovakvog svođenja bilo je sve vreme i Ajnštajnov zahtev u pogledu svake potpune fizičke teorije (o opštim

Ajnštajnovim epistemološkim pretpostavkama u vezi s ovim zahtevom vidi u *Reisler*, str. 825–826). Ipak, pojmovna *analiza* kretanja sadržana u rešenju *Strele* pokazuje nam da je uprkos korespondenciji o kojoj je reč položaj tela u kretanju *suštinski neodređen* u jednom značajnom *fizičkom* smislu da bar *utoliko* brzina kojom telo pređe neki put nije funkcija definisana na skupu svih trenutnih brzina. U kvantnoj mehanici razlika između mogućeg i realnog položaja postaje drastično izražena.

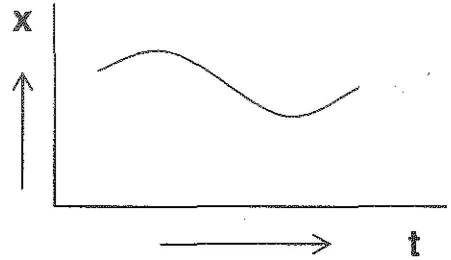
Ako je (čvrsto) telo prešlo put AB ono je – bar u prevashodnom smislu – za vreme kretanja zauzimalo prostor veći od sebe samog u mirovanju. Osim oga, ono se na putu *moglo zaustaviti* neodređeno mnogo puta, ali se ipak *de facto* zaustavilo samo konačno mnogo puta. Isto tako je i broj položaja u kojima je ono *moglo biti* registrovano neodređen (i neograničen), ali je *de facto* registrovano konačan broj puta. Ova okolnost, što je telo, s jedne strane, zauzimalo prostor veći od prostora koje zauzima kad je u mirovanju, dok s druge strane, nužno nije registrovano u beskonačno mnogo položaja iako je broj mogućih položaja u kojima je moglo biti registrovano neograničen, čini njegov položaj tokom kretanja *suštinski neodređenim.* Ova neodređenost odnosi se, dakle, kako na broj položaja u kojima je telo moglo biti registrovano, tako i na neodređenost položaja između *de facto* registrovanih položaja. Ako smo u kretanju tela registrovali petstotina međupoložaja, dobili smo petstojedan interval u kojem je položaj neodređen. Neodređenost je relativisana do na neki interval; interval može biti sve manji, ali ga nužno mora biti dok ima kretanja.

Kao što nam neki beskonačni matematički niz poput geometrijske progresije po kojoj bi trebalo da se iz raznobojnih površina sastavi kvadrat ne obezbeđuje ni načelnu mogućnost da kvadrat bude sastavljen iz beskonačno mnogo površina, a u šta nas definitivno uverava *reductio ad absurdum* te mogućnosti, tako ni Njutnovim matematičkim zakonima kinematike i mehanike, kojima treba da su strogo određeni svi položaji i brzine tela koja se kreću i sudaraju, ne može da se prevaziđe suštinska neodređenost položaja tela u kretanju. Matematički prostor kao skup tačaka pedstavlja polje mogućih granica koje ne mogu sve *ni jednovremeno ni sukcesivno* da se aktualizuju. Zakoni klasične kinematike i klasične mehanike odnose se u stvari na *moguće položaje*, čiji je broj *neodređen*, i *trenutne brzine*, čiji je pojam *derivativan* i *zavisan* od brzine u intervalima koje trenuci razgraničavaju.

Najjednostavniji postupak na osnovu kojeg se vrši kako retrodikcija tako i predikcija položajâ i brzine nekog tela koje se kreće sastoji se u *aktualizovanju različitih trenutnih položaja* da bi se odgovarajući trenuci geometrijski markirali, odnosno obostrano jednoznačno korespondirali izvesnim tačkama na njegovom putu, i da bi se ono kretalo onako kako bi se kretalo i da se trenutni položaji ne registruju. Niz tačaka buduće krive $x(t)$ predstavljaju tačke prostorne putanje tela u kojima su obostrano jednoznačno korespondirani različiti trenuci i različiti položaji (vidi sliku).



Krivom koja se potom dobije interpolacijom predstavljeni su mogući trenutni položaji tela, ali je zbog biunivoke korespondencije *svaki mogući položaj* jednoznačno određen (otprilike kao na sledećoj slici).



Ako se umesto o jednom telu radi o skupu tela koja se kreću i sudaraju poput loptica na bilijarskom stolu, zakonima kinematike moraju se pridodati zakoni sudaranja da bi se postupkom sličnim prethodnom dobila jednoznačna određenja mogućih položaja svih tela.

Trenutna brzina predstavljena je tangentom krive $x(t)$ u tački u kojoj su korespondirani trenutak i položaj o kojima je reč. Brzina se može razlikovati u svakom od mogućih položaja, kao što je geometrijski uspon neke krive različit u svakoj mogućoj tački.

Prosečna brzina nije funkcija na skupu trenutnih brzina utoliko što i odgovarajuća kriva nije skup tačaka *sens stricto*. Strogo govoreći, ako načas ne dozvolimo matematičaru da sve moguće granice tretira kao realne, ne bi trebalo reći da kod parabole $y = x^2$ uspon krive u prvom kvadrantu *raste u svakoj tački*, već da je način razgraničenja površina koje parabolu obrazuju takav da su za *bilo koja* dva rastojanja na paraboli između tačaka (x_m, y_m) i (x_n, y_n), odnosno (x_p, y_p) i (x_q, y_q) – gde su x_m, x_n, x_p, x_q proizvoljno izabrane tačke na x-osi ali tako da $0 \leq x_m < x_p$, $0 < x_n < x_q$ i $x_n - x_m = x_q - x_p$ – uglovi koje obrazuju tangente u tačkama (x_m, y_m) i (x_n, y_n), odnosno (x_p, y_p) i (x_q, y_q) takvi da je ugao koji obrazuju prve dve manji. Naravno, za klasičnog matematičara ceo ovaj način izražavanja predstavlja suvišnu suptilnost koja se odnosi *samo* na *façon de parler*, pošto on ne pravi razliku između mogućih i aktualnih granica. Slično tome bi za klasičnog fizičara bila samo suvišna suptilnost kada bi se umesto tvrdnje da se brzina nekog tela manja u svakom trenutku reklo, recimo, da je brzina takva da bi dva *moguća* sudara u dvama različitim trenucima sa jednim istim telom koje se kreće ravnomernom brzinom proizvela različite *posledice* i u sistemu u kojem učestvuju samo ta dva tela.

Kao što je razlika između dve formulacije o usponu krive irelevantna za platoničarskog infinitistu (o filozofskim osnovama razilaženju među matematičarima u ovoj tački vidi *Bernays*, str. 57, 63 i dalje), ali ne i za intuicionistu[2] koji insistira na konstruktivističkom uslovu za prihvatanje egzistencije matematičkih objekata, tako i razlika između dve formulacije o trenutnim brzinama, koja je irelevantna za klasičnog fizičara, postaje relevantna kad se preselimo na područje *kvantne mehanike*, gde jasno dolazi do izražaja i suštinska neodređenost položaja tela koje se kreće i potencijalni karakter trenutne brzine.

Hajzenberg je u tekstu iz 1927. godine u kojem je prvi put obznanio relacije neodređenosti, koje nose njegovo ime (*Heisenberg 4*), upravo pošao od upoređivanja prethodne dve slike (*ibid.*, str. 173), da bi doveo u pitanje jednoznačnost pojma trenutne brzine. Čak i ako se telo između dva trenutka kreće ravnomernom brzinom i ako se brzina menja samo u tačkama označenim na prvoj slici, to jest odjednom, „svakoj tački pripadaju dve različite brzine" (*ibid.*, *loc. cit.*), jer se svaka tačka može posmatrati i kao poslednja tačka prethodnog i kao prva tačka narednog kretanja. Slično tome je tačka kao tromeđa tri raznobojne površine trobojna. No *sensu stricto* atribut obojenosti ne može pripadati tački (vidi §§ 12, 17), a telu koje se kreće ne može se strogo uzev pripisati nikakva trenutna brzina. Pojam trenutne brzine je derivativan s obzirom na prethodno i/ili buduće kretanje.

Ako je položaj tela u kretanju suštinski neodređen utoliko što, kao što smo videli, telo koje se kreće strogo uzev ima brzinu kad nije u određenom položaju dok je u određenom položaju nema, onda u slučajevima u kojima određenje položaja tela koje se kreće uvek dovodi do promene kinetičke energije pa time i brzine, i eventualno pravca kretanja, nije moguće primeniti opisani jednostavni postupak za određivanje brzine kretanja tela. Ne može se, naime, interpolacijom dobiti kriva koja predstavlja njutnovsku trajektoriju u kojoj su trenuci i trenutni položaji obostrano jednoznačno uređeni, pošto se, zbog diskontinuiranih promena u trenucima određenja položaja, iz poznavanja više trenutnih položaja ne može izvesti jednosmislena informacija o mogućim međupoložajima.

Moglo bi se pomisliti da nam tahometar omogućava *direktno* merenje brzine, ili čak merenje trenutne brzine, utoliko što se konstatovanje položaja igle vrši na isti način na koji se vrši konstatovanje bilo kojeg položaja uopšte. No, kako naglašavaju Park i Margenau, „empirijska procedura kojom se brojevi *a*, *b* ... *povezuju* sa observablama $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..." vrši se u ovom slučaju „*pomoću jedne teorije*" kojom merenje $\mathcal{M}_2$ ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ...) biva *interpretirano*. $\mathcal{M}_2$ ovde izričito nosi indeks 2, da ukaže na razliku „indirektnog" i „direktnog" merenja, označenog sa $\mathcal{M}_1$ (vidi *Park and Margenau 2*, str. 41–42). Koliko je razlika između $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ važna može se sagledati preko „aporije sudara", s kojom ćemo se sresti u § 129.

Čak i kad bi bio poznat put kojim je telo prošlo, bilo bi u principu nebrojeno mnogo mogućnosti da se različitim položajima korespondiraju trenuci određenog vremenskog intervala. I ako u međuvremenu nije bilo diskontinuiranih promena, telo se moglo kretati ravnomernom brzinom, moglo je sve vreme ubrzavati ili sve vreme usporavati. Mogli bismo u najboljem slučaju odrediti prosečnu brzinu, a o trenutnoj brzini u poznatim položajima ne bismo mogli govoriti kao o tangenti krive koja predstavlja trajektoriju. Isto tako ne bismo s pouzdanošću mogli da predvidimo položaje u nekim budućim trenucima.

Hajzenberg je prvobitno do relacija neodređenosti došao matematičkim izvođenjem na osnovu kvantnomehaničkog formalizma, čiji je on sam jedan od tvoraca (vidi *Heisenberg 3*, str. 98, 100, 104). Dok za množenje realnih brojeva važi zakon komutacije, tako da je uvek $ab - ba = 0$, hamiltonovske jednačine kojima je predstavljen kvantnomehanički sistem sadrže imaginarne jedinice, i u slučaju kanonički konjugovanih veličina kakve su p i q, koje se odnose na impuls, odnosno koordinate položaja, zakon komutacije ne važi. Tako pq nije jednako qp, odnosno $pq - qp$ nije ravno nuli, već je $pq - qp = h/2\pi\sqrt{-1}$, $qp - pq = h\sqrt{-1}/2\pi$, gde je h Plankova konstanta dejstva ($=6{,}62\cdot10^{34}$ Js).

Fizički smisao ovih poznatih jednačina Hajzenberg je u tekstu iz 1927. godine nastojao da razjasni konstrukcijom tipičnih kvantnomehaničkih eksperimenata. Iz tih primera trebalo bi da bude jasno kako nekomutativnost takozvanih hermitskih operatora, u ovom slučaju p i q, počiva, s jedne strane, na *inkompatibilnosti* načina njihovog preciznog određenja, zbog čega *jednovremeno* ne mogu biti precizno (*genau*) određeni (*Heisenberg 4*, str. 175, *Heisenberg 2*, str. 367), dok, s druge strane, kod *sukcesivnog* određivanja merenja vrednosti jednog operatora *utiče* na vrednost drugog i obrnuto. Uopšte, ako su p_1 i q_1, srednje greške pri određivanju p, odnosno q, onda je $p_1 q_1 \sim h$ (*Heisenberg 4*, str. 175), odnosno, dinamički izraženo, $\Delta p \Delta q \sim h$. Danas se približnost ($\sim$) precizira tako da se u samom pisanju vidi da je h ili, uopšteno, $\hbar = h/2\pi$ donja granica: $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$. Za *bilo koji* kvantnomehanički sistem i *bilo koje* stanje ψ: $\Delta_\psi q \Delta_\psi p \geq \hbar/2$.

Diskusije o interpretaciji i ulozi ovih relacija koje su značile uvođenje principa neodređenosti u kvantnu mehaniku ne prestaju (pregled tih diskusija od 1974. vidi u *Jammer*, str. 55–84).

U *„ortodoksnoj" interpretaciji* Hajzenberga, Bora i Diraka, koja nas jedino zanima, princip neodređenosti odnosio se pre svega na jednu česticu, na njen položaj i impuls, vreme i energetsku razmenu (vidi *Heisenberg 4*, str. 174–179, *Heisenberg 2*, str. 367, 370, *Bohr 2*, str. 57–73 – s predavanja u Komu 1927 – *Dirac*, str. 623, 641). Ovo svakako nije dovoljno da se karakteriše „ortodoksna" interpretacija, pošto i mnoge „neortodoksne" interpretacije govore o principu neodređenosti u vezi sa pojedinačnim česticama.

Suprotno principu komplementarnosti kopenhagenške interpretacije (vidi § 116) kojim se neodređenost ne povezuje sa slučajnošću ili indeterminizmom, *stohastička interpretacija*, polazeći od formalne analogije između Šredingerove jednačine i jednačina u teoriji Braunovog kretanja, na koju je ukazao sam Šredinger 1931. godine (vidi *Jammer*, str. 418), svodi, u krajnjoj liniji, kvantnu teoriju na teoriju probabilističkih ili stohastičkih procesa.

Prihvatajući *matematičku* stranu slavnog fon Nojmanovog rezultata (vidi *von Neumann*, gl. 4, odelj. 1, 2), da je formalizam kvantne mehanike takav da je čitava teorija kvantne mehanike potpuna u tom smislu što je nemoguće proširenje koje bi uvođenjem skrivenih promenljivih sistem učinilo determinističkim u klasičnom smislu jer bi jedno takvo proširenje došlo u protivrečnost s postulatima kvantnomehaničkog formalizma (vidi *von Neumann*, str. 171–173), Bom (Bohm) je odbacio tvrđenje da nas *iskustvo* prisiljava na upravo ovakav formalizam (up. *Jammer*, str. 270–271 i str. 278–296), razvijajući *teoriju skrivenih promenljivih* koja bi trebalo da zameni, ne dopuni, postojeći sistem kvantne mehanike. Park i Margenau su štaviše tvrdili da nas iskustvo ne samo ne prisiljava da prihvatimo kvantnomehanički formalizam već da nam konstrukcija izvesnih primera, koje oni nazivaju „protivprimerima", ukazuje da su „nekomutativne opservable kompatibilne"! (*Park and Mergenau 2*, str. 33, *Park and Mergenau 1*, str. 239), dodajući da je jedan od šiboleta kvantne doktrine, „nemogućnost izvođenja jednovremenog merenja nekomutativnih observabli" (*Park and Margenau 2*, str. 37) – jednostavno „lažan" (*Park and Margenau 1*, str. 211). Princip neodređenosti trebalo bi da *utoliko* postane „irelevantan" (*ibid., loc. cit.*).

Prema *statističkoj interpretaciji*, koju treba razlikovati od stohastičke, takozvani vektor stanja u kvantnoj mehanici ne opisuje individualni sistem već skup identično pripremljenih sistema. Ovu interpretaciju je, među prvima, najvatrenije braniio Poper (vidi *Popper*, str. 184-185). Kvantna mehanika bi prosto bila nepotpun sistem, što je otpočetka verovao Ajnštajn i na šta je ciljao Ajnštajn-Podolski-Rouzenov argument (vidi § 117), a princip neodređenosti se nikad ne bi odnosio na jednu česticu, jer se statistički zakoni ne primenjuju u takvom slučaju. (Zanimljivo je da je Maks Born (Max Born), koji je inače verovatnoće u kvantnoj mehanici smatrao nečim *sui generis*, u nekim prilikama prihvatao statističku interpretaciju – vidi *Jammer*, str. 441). Inače, glavni fizičar koji je branio ovu interpretaciju je Lande (Landé) (vidi *ibid.*, str. 453 i dalje).

Plankova konstanta predstavlja, dakle, prema Hajzenbergu, približnu donju granicu proizvoda dve nepreciznosti. Tako, „što je tačije određeno mesto, to je nepreciznije određen impuls, i obrnuto".

Ovu Hajzenbergovu formulaciju (*Heisenberg 4*, str. 175) treba pravilno shvatiti, a vrlo ju je lako pogrešno shvatiti jer je lapidarna i *sensu stricto* čak netačna. Tačno je samo, kao što je pokazao Kiršenman (*Kirschenmann*, str. 55), da u „graničnom slučaju" koji Ši i Hefner nazivaju „idealom simultanog merenja" (*She and Heffner*, str. 1105), smanjenje jednog činioca obavezno proizvodi povećanje drugog i obrnuto, kada se, naime, jedan od njih smanjuje ispod relevantne granice težeći nuli, pošto $\Delta_\psi q \to 0$ povlači sa sobom $\Delta_\psi p \to \infty$ i $\Delta_\psi p \to 0$ povlači $\Delta_\psi q \to \infty$. Inače, iz $\Delta_\psi q \cdot \Delta_\psi p \geq \hbar/2$ *se može izvesti da ako* $\Delta_\psi q \leq d$, *onda* $\Delta_\psi p \geq \hbar/2 \cdot 1/d$, *i ako* $\Delta_\psi p \leq g$, *onda* $\Delta_\psi q \geq \hbar/2 \cdot 1/g$ a da to ne obezbeđuje da se $\Delta_\psi p$ i $\Delta_\psi q$ smanjuju i povećavaju uzajamno. Neka je, recimo, kvantnomehanički sistem u nekom stanju ψ_1 takvom da $\Delta\psi_1 q = d_1$; tada je $\Delta\psi_1 p \geq \hbar/2 \cdot 1/d_1$. Neka sistem pređe u stanje ψ_2 takvo da $\Delta\psi_2 q = d_1/100$; tada je $\Delta\psi_2 p \geq 100 \cdot \hbar/2 \cdot 1/d_1$. Sad ne možemo zaključiti da je $\Delta_\psi p$ povećano, zbog čega se $\Delta_\psi q$ smanjilo, jer iz primera ne sledi da $\Delta\psi_2 p > \Delta\psi_1 p$. Samo ako $\Delta_\psi q = a_\psi$, $\Delta_\psi p = b_\psi$,

$\Delta_\psi q \cdot \Delta_\psi p = C_\psi$, gde $C_\psi = a_\psi \cdot b_\psi = const.$, $\Delta_\psi q$ i $\Delta_\psi p$ variraju obrnuto proporcionalno[3].

Prethodni dokazi pokazuju da smo pri interpretaciji principa neodređenosti à la Hajzenberg u domehnu filozofskih misaonih eksperimenata (*Gedankenexperiment*), što nas, s obzirom na našu svrhu, zadovoljava. Ali isti ti dokazi ozbiljno dovode u pitanje praktički relevantnu opštost principa neodređenosti s obzirom na merenje nekomutativnih observabli. U tom smislu ukazivanje Prugovečkog na „sklonost da se ignoriše očigledan empirijski materijal da bi se pokušalo uklapanje fizičke realnosti u pretpostavljenu teorijsku sliku i formalizam" (*Prugovečki 2*, str. 2193) predstavlja više opomenu za praksu, a tek posredno za filozofiju kvantne mehanike. Imajući u vidu eksperimentalne situacije u kojima se simultano meri više observabli, Prugovački je za određena merenja inkompatibilnih observabli uveo takozvane *fuzzy*-verovatnoće (vidi *Prugovečki 1*, str. 15). Iz sličnih razloga drugačije formalizme merenja razvili su i drugi (vidi *Krips 2*, *She and Heffner*).

Razmotrimo kvantnomehanički eksperiment koji je Hajzenberg naveo u ilustraciji svoje interpretacije relacija neodređenosti. Neka se *položaj* slobodnog elektrona određuje uz pomoć mikroskopa sa γ-zračenjem (*Heisenberg 4*, str. 174). Svetlost se sudara s elektronom, reflektuje se ili skreće, prolazi kroz sočiva mikroskopa skrećući još jednom, da bi najzad stigla do našeg oka. U trenutku sudara svetlosti s elektronom impuls elektrona se menja (*Heisenberg 1*, str. 491), u šta nas uverava efekat koji je otkrio Kompton 1923. godine (o Komptonovom efektu i njegovim različitim interpretacijama vidi *de Broglie 3*, str. 107 i dalje). Prilikom sudara s nekom česticom talasna dužina svetlosti se menja, upadna svetlost je manje talasne dužine od rasute. Položaj elektrona je tim preciznije određen što je talasna dužina upadne svetlosti manja, ali tim je promena impulsa, shodno Komptonovom efektu, veća (*Heisenberg 4*, str. 175).

Pri određenju *brzine* kretanja slobodnog elektrona možemo se koristiti Doplerovim efektom (*ibid.*, str. 177). Osvetlimo crvenom svetlošću prostor kojim će, prema očekivanju, elektron proći. Prolazak elektrona izazvaće promenu frekvencije rasute svetlosti i zahvaljujući toj promeni možemo odrediti brzinu kretanja elektrona, kao što, uostalom i bez preciznog merenja, prema zvuku, to jest promeni frekvencije zvuka koji prozvode, možemo reći koji se od automobila koji pored nas prolaze kreće brže a koji sporije. Veća promena u istom vremenu ukazuje na veću brzinu.

Određenje brzine slobodnog elektrona uz pomoć Doplerovog efekta uticaće tim manje na njenu promenu, to jest na promenu impulsa, što je talasna dužina korišćene svetlosti veća, jer je tada Komptonov efekat manji, ali će zato određenje pložaja pomoću iste svetlosti biti nepreciznije.

Imajući u vidu Komptonov i Doplerov efekat možemo, dakle, reći da će u opisanom eksperimentu određenje položaja biti tim preciznije što je talasna dužina korišćene svetlosti manja, ali će zato promena impulsa biti veća, dok će pri određenju brzine uticaj na nju biti tim manji što je talasna dužina korišćene svetlosti veća, ali će zato određenje položaja biti nepreciznije.

Moglo bi se navesti još mnogo tipično kvantnomehaničkih eksperimenata koji ilustruju *metričku inkopatibilnost* fizičkih veličina na koje se odnose operatori p i q, a koja odgovara matematičkoj nekomutativnoti ovih operatora. Ako bi se, recimo, registrovanje položaja čestice u mehurastoj komori vršilo zahvaljujući pretvaranju tečnog vodonika u paru koje izaziva prolaženje čestice, došlo bi do neželjene promene njene kinematičke energije, pa time i brzine.

Hajzenberg je naveo više primera koji treba da ilustruju nekomutativnost i nekih drugih operatora. Tako iste relacije koje važe za p i q važe i za operatore E i t, koji se odnose na energiju, odnosno vreme (*ibid.*, *loc.cit.*).

Razmotrimo na Hajzenbergovim primerima *granične* slučajeve preciznosti, odnosno nepreciznosti određenja vrednosti za p, odnosno q, da bismo na najočigledniji način sagledali vezu sa rešenjem *Strele*. Prema poenti *Strele* koju smo prihvatili, kretanje stvarno ne čini niz različitih položaja tela u različitim trenucima, jer je zauzimanje različitih položaja u različitim aktualizovanim trenucima tek posledica kretanja u kojem je položaj tela neodređen. Prilikom određenja p ili q, prvi mogući granični slučaj ticao bi se apsolutne preciznosti u određenju q i potpune neodređenosti p, pri čemu bismo znali samo trenutak (vûv) sudara čestice s kvantom svetlosti ili drugom česticom. Tada o brzini ne bismo znali ništa, jer kretanja u trenutku nema *sensu stricto*, a u derivativnom smislu bi brzina u tom trenutku mogla biti bilo kolika. Drugi granični slučaj bi se odnosio na apsolutnu preciznost u određenju impulsa, odnosno brzine čestice s nekom određenom masom, pri čemu bi bila poznata samo veličina prostora koji čestica u kretanju zauzima tokom nekog određenog vremena.

Pošto u navedenom primeru položaj čestice ipak određujemo sudarom s γ-zracima, čija talasna dužina makar koliko, radi preciznosti, mala ipak nikad nije ravna nuli, to je *eo ipso* postavljena granica neodređenosti za p, jer se za određenje p koristi isto zračenje. S druge strane pak, brzinu određujemo uz pomoć Doplerovog efekta, gde je talasna dužina svetlosti koju koristimo, makar koliko, radi preciznosti, velika ipak konačno velika. Kao što postoje granice u iznenadnoj promeni impulsa koje se očituju u Komptonovom efektu, tako postoje i granice u neodređenosti položaja kad isti talasi koji uz pomoć Doplerovog efekta određuju brzinu služe i za određenje položaja. Zbog ovih granica postoje granice neodređenosti određene formulom $\Delta p \Delta q \geq h$.

Pošto kretanja ima *sensu stricto* samo dok je položaj neodređen, dok u određenom položaju nema *sensu stricto* ni kretanja ni brzine, u situacijama u kojima bismo mogli da odredimo *samo* brzinu, odnosno *samo* položaj, *nužno* bi komplementarni operator ostao *potpuno* neodređen. Ako bismo u takvim slučajevima položaj i brzinu, odnosno brzinu i položaj, određivali *sukcesivno*, onda bi određenje vrednosti druge kanonički konjugovane veličine do momenta – pa time, u derivativnom smislu, i u momentu – prve primene nekog od operatora bilo onemogućeno ako primena operatora *utiče* na tu vrednost. Ako, međutim, nekim postupkom određujemo i položaj i brzinu *simultano*, kao što je to i slučaj kod korišćenja zračenja proizvoljne talasne dužine, onda su i brzina i položaj *nužno* samo relativno određeni, odnosno neodređeni, što je u kvantnoj mehanici *empirijski* uslovljeno do na donju granicu preciznosti $\Delta p \Delta q \geq h$. Razlog za nepreciznost ovde *nije* empirijski već *apriorni*, iako je *granica* (ne)preciznosti određena *empirijski*.

Karakteristično je, i za vezu sa rešenjem *Strele* naročito značajno, da se za razliku od opisanog klasičnog postupka za određivanje brzine kretanja tela (vidi str. 568), prilikom određivanja brzine pomoću Doplerovog efekta brzina *ne određuje posredno*, preko korespondiranja položaja i trenutaka – dakle, ne koristi se Raselova definicija, za koju smo videli da stavlja kola ispred konja – već se brzina određuje preko promene talasne dužine, što, makar koliko bilo posredno u nekom smislu, ipak brzinu meri *direktno* u za nas relevantnom smislu, naime *bez* određivanja položaja u različitim trenucima, pošto se koristi samo promena frekvencije u vremenu.

Ako je, u smislu koji smo odredili, položaj tela koje se kreće suštinski neodređen, nije nikakvo čudo što su postupci merenja u kojima se brzina meri direktno takvi da preciznost u određenju impulsa, odnosno brzine, to jest veličine prostora koje telo određene mase zauzima u nekom vremenu, ide na uštrb preciznosti određenja položaja. *A fortiori*, *akcidentalno* je to što zračenje koje koristimo za određenje brzine *možemo* iskoristiti *i za* određivanje

položaja. *Analiza pojma* kretanja koju smo izvršili na osnovu rešenja topoloških aporija *ne čini* vezu između poznavanja položaja i brzine nekog tela *nužnom* i primeri iz kvantne mehanike samo su *empirijska* ilustracija u kojoj se to ispoljava preko obrnute srazmere u preciznosti njihovog merenja.

116. Neodređenost položaja tela u kretanju i Borov princip komplementarnosti

Videli smo zašto nam, *iz pojmovnih razloga*, poznavanje položaja čestice u različitim trenucima, pod pretpostavkom da određenje tih položaja menja njen impuls, *samo po sebi* ne omogućava da formiramo zakon kojim se korespondiraju međupoložaji i međutrenuci, to jest određuje trajektorija čestice. Poznavanje različitih položaja u različitim trenucima omogućuje nam u najboljem slučaju da odredimo prosečnu brzinu čestice, a sledstveno tome trenutna brzina, čiji je pojam derivativan a koja više nije tangenta krive koja predstavlja trajektoriju, nužno postaje neodređena ne samo u međupoložajima već i u trenucima u kojima je položaj poznat. Ali do sada nije razjašnjeno zbog čega se u kvantnoj mehanici pretpostavlja da se uticaj prilikom određenja položaja *ne može kontrolisati*, zbog čega je naime promena impulsa nekontrolabilna. Zbog čega se, na primer, u opisanom eksperimentu u kojem se položaj čestice određuje pomoću mikroskopa s γ-zračenjem ne poslužimo poznatim de Broljijevim relacijama koje povezuju energiju i frekvenciju, odnosno impuls i talasnu dužinu, da bismo preko promene frekvencije, odnosno talasne dužine svetlosti, odredili razmenu energije, odnosno promenu impulsa elektrona?

Prilikom konstrukcije „misaonih eksperimenata protivu Hajzenbergovog principa neodređenosti" (vidi, na primer, *M. C. Robinson*) često se gubi iz vida značaj *varijacija* u interpretaciji, nezavisno od načelnog priznanja da ima specifičnosti koje donosi kvantnomehanička situacija. Hajzenberg je ponekad prosto tvrdio da „primena reči 'mesto', 'brzina', gubi svaki smisao unutar određenih granica" (*Heisenberg 2*, str. 367), dok je ponekad – kao što kritikujući Robinsona naglašavaju Bijet, Kampilo, Li, Mek Konel, Parizo i Fišer (*Billette, Campillo, Lee, McConnell, Pariseau and Fischer*, str. 2415) – tvrdio kako se *„princip neodređenosti ne odnosi na prošlost"* pošto je „ovo znanje o prošlosti (ionako) čisto spekulativnog karaktera, jer *ne može nikad ... biti upotrebljeno kao inicijalni uslov u bilo kojoj kalkulaciji...*". Na asimetriju između prošlosti i budućnosti, s obzirom na dve relevantne faze u svakom kvantnomehaničkom eksperimentu, *pripremanje stanja* i *merenje*, ukazivali su u kritici Robinsona, odnosno Prugovečkog (*Prugovečki 1*), Balentajn (vidi *Ballentine*, str. 2417) i Margenau i Park (*Magenau and Park*, str. 20–21). Videli smo u kojem smislu bi prva Hajzenbergova tvrdnja, vezana za *smisao* reči „mesto" i „brzina" mogla biti tačna (vidi str. 569), a videćemo odmah u kojim situacijama bi to mogla biti tvrdnja o asimetriji između retrodikcije i predikcije. U § 117 ćemo, u vezi sa Ajnštajn-Podolski-Rouzenovim argumentom, pokušati da ograničimo opštost ovih tvrdnji.

Pre nego što je objavio tekst o relacijama neodređenosti, Hajzneberg je sa Borom vodio duge, ne samo zanimljive već i dramatične razgovore, koji nisu protekli bez suza,[1] u kojima su se Bor i on sporili ne oko mogućnosti matematičkog izvođenja relacija neodređenosti iz formalizma kvantne mehanike, jer to nije bilo sporno, već oko njihove fizičke interpretacije. U trenucima rezignacije Hajzenberg se zadovoljavao time što „posedujemo neprotivrečnu matematičku shemu koja nam govori o svemu što možemo opaziti" (*Heisenberg 3* str. 105). Za neumoljivog Bora

„matematička jasnoća nije predstavljala nikakvu vednost po sebi", jer „potpuno fizičko objašnjenje mora apsolutno prethoditi matematičkoj formulaciji" (*ibid.*, str. 98). U postskriptumu članka iz 1927. godine Hajzenberg je priznao da je ukazivanje na nagle promene (*Diskontinuitäten*) samo po sebi nedovoljno da se razjasni nepreciznost koju matematički izražavaju relacije neodređenosti, da bi potom u cilju potpunijeg objašnjenja ukazao na „novija Borova istraživanja koja će se uskoro pojaviti u radu o pojmovnoj izgradnji kvantne teorije" (*Heisenberg 4*, str. 198).

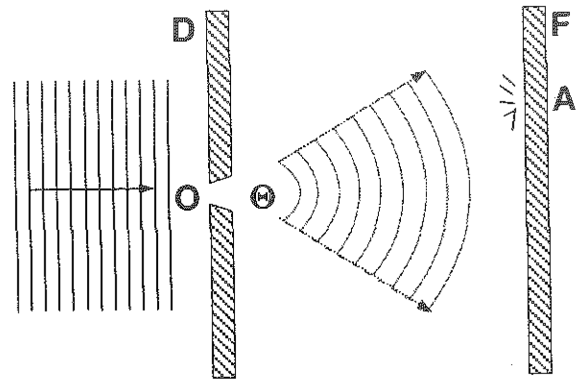
Bor je u svoju inerpretaciju izneo već iste, 1927. godine, na predavanju u Komu (to predavanje ću citirati prema *Bohr 2*, str. 52–91). Osnovu njegove interpretacije čine pojmovi *holizma* kvantnomehaničke eksperimentalne situacije i *individualnosti* kvantnomehaničkih procesa, koji zajedno omogućuju da se formuliše *princip komplementarnosti*. Princip komplementarnosti odnosi se na parove pojmova, kakvi su pre svega pojmovi talasa i čestice, koji su, s jedne strane, *neophodni za adekvatan* opis *jednog istog* kvantnomehaničkog procesa, ali su, s druge strane, *inkopatibilni* u tom smislu što je u principu nemoguće eksperimentalno konstatovati *oba* aspekta nekog procesa na koje se oni odnose, pošto se eksperimenti kojima bi se to postiglo uzajamno isključuju (*Bohr 2*, str. 54–55; vidi takođe kasniju razradu u *Bohr 4*, str. 291, *Bohr 5*, str. 317). Pojedinačne relacije neodređenosti postaju specijalni slučajevi izvodivi iz ovog principa.

Holistički karakter neke eksperimentalne situacije ogleda se u nemogućnosti „oštrog razgraničenja ponašanja atomskih objekata i interakcije sa mernim instrumentima koji služe da se definišu uslovi pod kojima se fenomeni pojavljuju" (*Bohr 1*, str. 39–40). *Individualnost* nekog kvantnomehaničkog procesa ogleda se pak u tome što taj proces uopšte ne bi bio takav kakav jeste, ili, preciznije, ne bi uopšte mogao biti *taj* proces, da je ostvaren neki od eksperimenata koji bi trebalo da pokažu faze tog procesa (vidi *Bohr 1*, str. 34, 90, *Bohr 5*, str. 313), pošto bi zbog holističkog karaktera kvantnomehaničke eksperimentalne situacije svaka takva podela procesa predstavljala interakciju koja bi promenila sklop mogućnosti (*Bohr 1*, str. 40). Ovde se moramo setiti Barklija i, uopšte, načina na koji radikalni empiričari predupređuju konstrukciju zenonovskih aporija (vidi gore, §§ 61–64, naročito str. 280, 294–295).

U sudaru elektrona sa svetlošću nije samo elektron kvantnomehanički objekat, već su to i kvanti svetlosti, to jest fotoni. Praćenje razmene energije i promene impulsa ići će na uštrb preciznosti prostorno-vremenskog opisa same interakcije, dok će prostorno-vremenska lokalizacija sudara zbog neizbežne interakcije sa fiksiranim skalama i časovnicima koji određuju prostorno-vremenski okvir isključiti mogućnost preciznijeg praćenja balansa energije i impulsa.

U de Broljijevim relacijama povezani su energija, E, odnosno impuls, P, sa brojem vibracija, ν, u jedinici vremena, odnosno brojem talasa, σ, po jedinici dužine, naime $E = h\nu$ i $P = h\sigma$ (gde je h Plankova konstanta). Pošto precizno određenje E i P preko brojeva ν i σ zahteva preciznu prostornu-vremensku koordinaciju, koju zbog holističkog karaktera kvantnomehaničke situacije nije moguće ostvariti bez ponovnog uticaja na energiju i impuls, to očigledno nije mogućno koristiti de Broljijeve relacije da bismo preko određenja promene frekvencije i talasne dužine svetlosti koja se sudara sa česticom odredili promenu energije, odnosno impulsa čestice. Svaki novi element u eksperimentalnoj situaciji uvodi novu nekontrolisanu interakciju između kvantnomehaničkih objekata i mernih instrumenata.

Neodređenost trajektorije čestice nije nužno neodeđenost u samo jednom pravcu. Ako se fotoni kreću upravo prema fotografskoj ploči F, što je na sledećoj slici predstavljeno ravnim talasom,



čije širenje zavisi od toga o kojoj se svetlosti radi, i pre no što stignu do ploče prođu kroz otvor O na nekoj dijafragmi D, prilikom prolaska kroz otvor može doći do difrakcije i zato neodređenosti njihovih trajektorija između dijafragme i fotografske ploče neće biti neodređenost koja ima raspon *širine otvora u pravcu prethodnog kretanja*, već će biti neodređenost *u svim pravcima unutar maksimalnog mogućeg ugla difrakcije* Θ, koji, ukoliko pretpostavimo da je otvor kružan, zavisi od njegove veličine, to jst poluprečnika otvora. I ako se radi o jednom jedinom fotonu, njegov položaj pri prolasku kroz otvor biće neodređen na isti način i zato njegovo prispeće na fotografsku ploču očekujemo unutar izvesne zone koja je određena uglom Θ.

Na putu od otvora do fotografske ploče foton je bio u konusnom prostoru čija veličina zavisi od ugla Θ, koji *nije*, dakle, *samo u jednom smeru* veći od veličine fotona u određenom položaju. Zato njegovo kretanje nije više predstavljeno kao „paket ravnih talasa" (up. *ibid.*, st. 42–43), već kao „paket sfernih talasa".

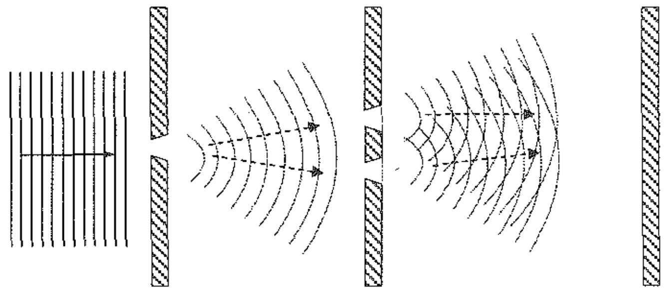
Kretanje fotona, kao i bilo koje mikročestice, predstavljeno je matematički takozvanom talasnom funkcijom ψ, gde rešenja koja daju takozvane vlastite vrednosti u ψ-funkciji (*Eigenwerte*) (vidi *Schrödinger*, § 5, str. 17–18, § 15, str. 54–55, *de Broglie 1*, str.

147 i dalje) predstavljaju moguće položaje čestice u nekom trenutku. ψ-funkcija sadrži, dakle, prostorno-vremenske koordinate x, y, z, t, dakle, $\psi(x, y, z, t)$. No, iako je ψ-funkcijom kretanje čestice posle prolaska kroz otvor dijafragme predstavljeno kao širenje sfernog talasa, koji se naziva Šredingerov talas (*de Broglie 1*, st. 160–161), čestica će se na kraju krajeva naći *na jednom odeđenom mestu* na fotografskoj ploči, recimo na mestu A (vidi prethodnu sliku). Ova okolnost kao da više ističe razliku između klasične i kvantne mehanike nego što to čini neodređenost trajektorije u jednom pravcu. Ovde je prostiranje svetlosti predstavljeno talasom koji se *sferno* širi, a da ipak foton stiže do ekrana kao čestica. Ne ukazuje li to na najdrastičniji način na nepotpunost kvantnomehaničkog sistema i na to da on ipak nekako treba da bude dopunjen? Ne pokazuje li ovaj slučaj definitivno da je cela priča o navodnoj *neodređenosti položaja tela u kretanju* ipak samo eufemizam kojim se izražava nepotpunost *našeg znanja*?

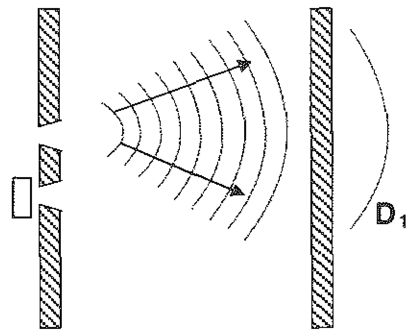
Postavljeno pitanje, svakako, ne deluje sasvim jednoznačno. Preciziraćemo ga prateći rani spor Ajnštajna i Bora oko toga da li je sistem kvantne mehanike u principu dopunjiv ili nije.

Spor je počeo odmah po obznanjivanju relacija neodređenosti i principa komplementarnosti, iste, 1927. godine, na konferenciji fizičara Solveškog instituta u Briselu[2]. „Interpretacija prema kojoj $|\psi|^2$ izražava verovatnoću da se čestica nađe na nekom odeđenom mestu“, rekao je Ajnštajn tada, „pretpostavlja neki sasvim naročiti mehanizam delovanja na daljinu (*un mécanisme d'action à distance tout particulier*) koji sprečava da talas koji se rasprostire kontinuirano proizvede efekat na dva mesta na ekranu“. Ajnštajnu je izgledalo da se „teškoća ne može prevazići ukoliko se opis procesa preko Šredingerovog talasa ne dopuni nekom detaljnom specifikacijom koja bi se odnosila na lokalizaciju čestice tokom njenog prostiranja“.

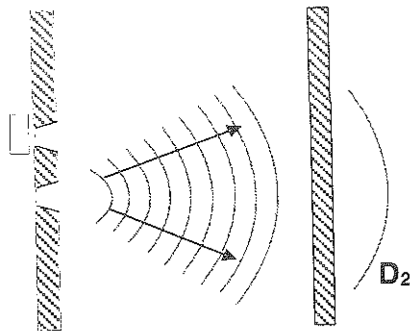
Ajnštajn je, očigledno, podrazumevao da bi znanje o tome kako stvari stoje *u međuvremenu*, naime između trenutka kad svetlost prođe kroz otvor na dijafragmi i trenutka kad padne na ekran, moralo da isključi neke od prethodno dopuštenih mogućnosti. Ako bismo, recimo, između dijafragme i ekrana ubacili novu dijafragmu sa dva otvora (kao na slici), tada bismo u zavisnosti od toga da li je foton prošao kroz gornji ili donji otvor



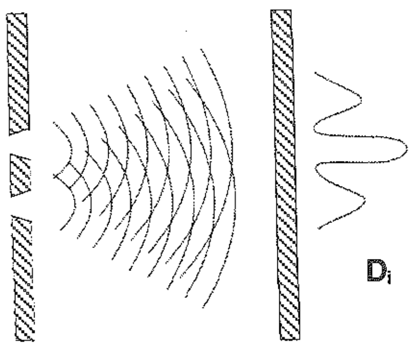
dobili različita očekivanja, to jest različitu distribuciju verovatnoća da se on registruje na izvesnim mestima na ekranu. U slučaju da foton prođe kroz gornji otvor raspodela verovatnoća se može otprilike predstaviti krivom D_1 (vidi sliku), gde veća udaljenost



tačaka krive od ekrana indicira veću verovatnoću da se svetlost registruje na odgovarajućim mestima na ekranu. Slično tome, kriva D_2 predstavlja raspodelu verovatnoća u slučaju da svetlost prođe kroz donji otvor (vidi sledeću sliku). Ukoliko se radi o



snopu fotona koji mogu da prolaze i kroz gornji i kroz donji otvor raspodela verovatnoća, zbog mogućnosti interferencije, bila bi predstavljena krivom D_i (vidi sliku). Distribuciona kriva D_i *nije* zbir distribucionih krivih D_1+D_2.



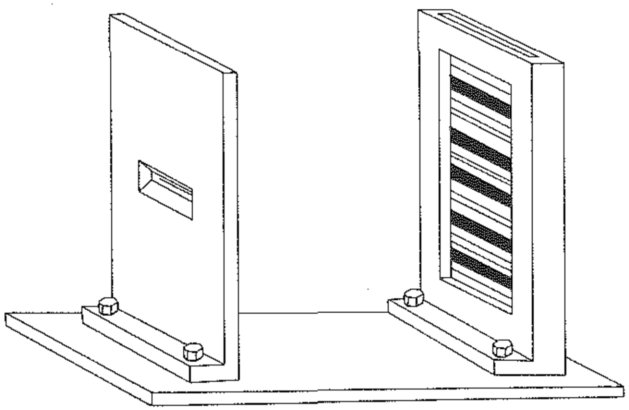
Dakle, u zavisnosti od toga da li se fotoni kreću na *ovaj ili onaj način* morali bismo *shodno samoj Šredingerovoj funkciji* očekivati *različite* rezultate. Zbog toga bi, po Ajnštajnovom mišljenju, opis preko Šredingerovog talasa trebalo da bude dopušten „nekom dodatnom specifikacijom koja bi se odnosila na lokalizaciju čestice tokom njenog prostiranja".

Situacijom u kojoj se „talasno kretanje matematički ne predstavlja jednim ograničenim brojem funkcija sa promenljivom *t*, već takoreći kontinuiranim mnoštvom takvih funkcija" (*Schrödinger*, str. 6) bio je iznenađen i de Brolji, čija je talasna mehanika bila predstavljena klasično, u trodimenzionalnom prostoru ili četvorodimenzionalnom prostorvremenskom kontinuumu (vidi *de Broglie 1*, str. 161–162). *Dopunu* opisa ne bi trebalo tražiti samo ukoliko bi ona bila *u principu nemoguća*. No zbog čega bi to bilo tako ako nam nova i nova umetanja dijafragmi *de facto* otkrivaju *postojanje međupoložaja*, ako je, naime, posle prolaska kroz otvor na prvoj dijafragmi foton morao *krenuti* nekim putem *pre nego* što se našao na određenom mestu na fotografskoj ploči?

Bor je konstrukcijom serije „aparata u pseudorealističkom" ili „poluozbiljnom stilu" (vidi *Bohr 1*, str. 47–49) – gde se više nego igde vidi koliko je Hajzenberg bio u pravu, rekavši za njega da je bio „pre svega filozof" (*Heisenberg 3*, str. 95) – pokazivao na koji način holizam eksperimentalne situacije i individualnost kvantnomehaničkog procesa *i u ovom slučaju* mogu da opravdaju tvrdnju da se radi upravo o *načelnoj nedopunjivosti* sistema kvantne mehanike. „U kvantnoj mehanici nemamo posla sa proizvoljnim odricanjem od detaljnije analize atomskih fenomena, već sa priznanjem da je takva analiza *u principu* isključena" (*Bohr 1*, str. 62, *podvukao sâm Bor*). Samo se u tom slučaju može opravdano prihvatiti princip komplementarnosti kao „racionalna generalizacija samog ideala kauzalnosti" (*Bohr 5*, str. 317). U razmotrenom slučaju pokazuje se komplementarnost *talas-čestica*.

„Specifikacija koja bi se odnosila na lokalizaciju čestice tokom njenog prostiranja" od momenta prolaska kroz otvor na dijafragmi do prispeća na fotografsku ploču mogla bi, bar *prima facie*, da izvrši na dva načina: ili tako što se smer, odnosno impuls, odredi u trenutku samog prolaska kroz otvor, ili pomoću postavljanja „prepreke", odnosno novih dijafragmi sa otvorima u prostoru u kojem se shodno ψ-funkciji širi Šredingerov talas, da bi se time isključivale pojedine mogućnosti.

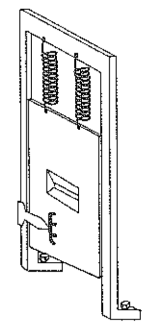
Mogućnosti da smer, odnosno impuls, odredimo u momentu prolaska kroz otvor ostaje mogućnost samo *prima facie* kad se uzme u obzir navedena interpretacija Hajzenbergovih relacija neodređenosti koja se poziva na *holizam* eksperimentalne situacije. Ukoliko bi dijafragma bila čvrsto fiksirana, otprililke kao na sledećoj slici,



ona bi se mogla iskoristiti *samo* za lokalizaciju svetlosti i to tim preciznije što je otvor manji. No što je otvor manji, to je veći ugao Θ koji ograničava prostor u kojem se širi Šredingerov talas. Taj ugao zavisi od poluprečnika otvora i talasne dužine upadne svetlosti, dakle $\Theta \sim 1/\sigma r$, gde je σ broj talasa po jedinici dužine a r poluprečnik otvora. Promena broja talasa po jedinici dužine obrnuto je proporcionalna veličini otvora, dakle $\Delta\sigma \sim 1/r$.

Da bismo nešto saznali o impulsu fotona, čija je promena upravo srazmerna veličini ugla Θ, naime $\Delta p \sim \Theta P$, morali bismo dopustiti da se dijafragma kreće slobodno u odnosu na ostali deo aparature za koju je pričvršćena, otprilike kao na sledećoj slici, da

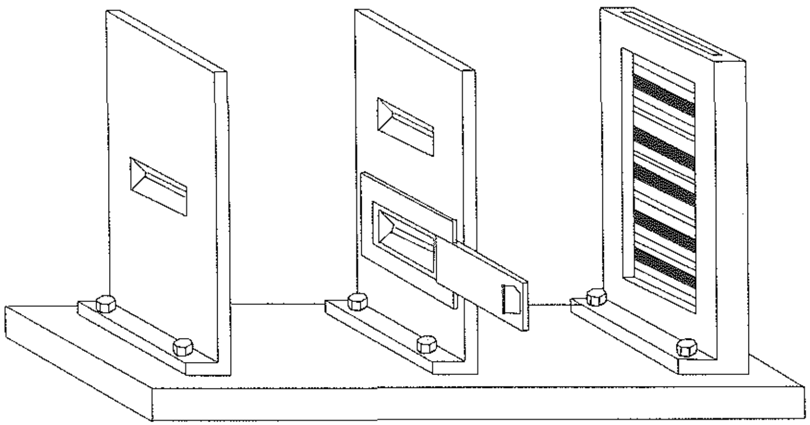
bismo pomoću skale koja je na njoj ucrtana merili transfer impulsa. Iako bi na taj način, pod pretpostavkom da je otvor dovoljno mali, položaj ostao relativno precizno određen *u odnosu na*



dijafragmu, on više ne bi bio precizno određen *u odnosu na celu aparaturu*, pa nam merenje transfera impulsa *sada zbog toga* ne bi moglo poslužiti za trasiranje buduće putanje fotona. Da bismo određenje transfera impulsa što bolje iskoristili za trasiranje putanje fotona, dijafragma bi morala da bude *što labavija*, no tada *smanjenje ugla* Θ – koji oivičuje prostor širenja Šredingerovog talasa *u odnosu na dijafragmu* – ide na uštrb određenja *položaja otvora dijafragme* i zato buduća trajektorija *nije* preciznije određena. Ako je, recimo, zahvaljujući postojanju međudijafragme sa dva dovoljno uska otvora fiksiran ugao između praktički gledano samo *dve* moguće buduće putanje, one koja vodi kroz *gornji* i one koja vodi kroz *donji* otvor, onda razlika tansfera impulsa iznosi $h\sigma\omega$ i bilo koja kontrola, promene impulsa dijafragme usmerena na merenje te razlike iznosiće, shodno relacijama neodređenosti, približno $1/\sigma\omega$, biće, dakle, praćena proporcionalnom nepreciznošću određenosti položaja same dijafragme.

Ako bismo za „specifikaciju koja bi se koristila na lokalizaciju čestice tokom njenog prostiranja“ koristili prepreke u prostoru u kojem se svetlost shodno ψ-funkciji širi, tu bi došla do izražaja *individualnost* procesa o kojima je reč, pošto bi *svaka* promena kanfiguracije prostora *uticala* na tok procesa. Tako bi se, između ostalog, *u zavisnosti od konfiguracije međuprostora* ispoljavali talasni, odnosno čestični aspekti u širenju svetlosti.

Neka je zahvaljujući međudijafragmi sa dva otvora drastično smanjen broj mogućih načina da svetlost stigne do fotografske ploče (vidi sledeću sliku).



Prethodna situacija, naime situacija bez međudijafragme, i sadašnja situacija, situacija sa međudijafragmom, *razlikuju se,* pa se i *zadatak menja.* U sadašnjoj situaciji zonu na fotografskoj ploči na koju će svetlost pasti treba odrediti *u zavisnosti od toga kroz koji od dva otvora* na dijafragrami svetlost prođe. Ali, u opisanoj situaciji to je nemoguće odrediti. Videli smo da se ne može trasirati putanja fotona u trenutku prolaska kroz prvu dijafragmu, a efekte na fotografskoj ploči ne možemo koristiti jer upravo oni treba da budu *prethodno* određeni. Jedini način da se u opisanoj situaciji foton lokalizuje na jednom od dva otvora predstavlja zatvaranje drugog, no tada je, očigledno, situacija *ponovo* promenjena: svetlosti je ostavljena samo jedna mogućnost da krećući se

od prve dijafragme ka fotografskoj ploči prođe kroz drugu dijafragmu, a mogućnost interferencije koja bi govorila u prilog njenom talasnom širenju je isključena. Što se pak tiče daljeg prostiranja, od nove dijafragme do fotografske ploče, ono mora biti predstavljeno na istovetan način na koji je predstavljeno prostiranje u prvobitnoj situaciji, bez međudijafragme.

Kada je otvoren *samo jedan* otvor – svetlost koja stiže na fotografsku ploču prostire se jednosmerno između dve dijafragme. Kada su otvorena *oba* otvora – efekat inerferencije nas uverava da se svetlost širi u raznim pravcima, kao sferni talas, ali su joj zahvaljujući prepreci sa samo dva otvora ostavljene samo dve mogućnosti da prepreku savlada. Okolnost da *nezavisno* od efekta interferencije ne možemo da utvrdimo kakvo je kretanje fotona kad su otvorena oba otvora navodi nas da *uvek* kad su otvorena oba otvora prihvatimo distribuciju verovatnoća prema krivoj D_i (vidi str. 586), a kad je otvoren po jedan, prema D_1, odnosno D_2 (vidi str. 585, 586). Broj otvora može se povećavati, i u svim slučajevima distribucija verovatnoća mora da uključi efekte interfrencije.

Prividni paradoks koji se sastoji u tome da D_i *nije* zbir $D_1 + D_2$, ili u opštem slučaju $D_1 + D_2 + ... + D_n$, da se svetlost između dve dijafragme kreće jednosmerno, poput *čestice*, kad je jedan otvoren otvor, a višesmerno, kao *talas*, čitavim prostorom oivičenim uglom Θ kojim može proći kroz drugu dijafragmu, kad su ovorena dva ili više otvora, razrešen je, dakle, ukazivanjem na *načelnu nemogućnost* da se sledi putanja fotona. Ne izabiru fotoni da krenu ka gornjem otvoru kad je samo on otvoren, a inače i prema donjem kad je i ovaj otvoren, dok se u slučaju kad prepreke nema šire u svim pravcima u postoru ograničenom uglom Θ, nema nikakve „telepatije" ili „nekog naročitog mehanizma delovanja na daljinu", već je *nemoguće u isto vreme* trasirati putanju fotona i pratiti efekte interferencije. Ova okolnost je „logički gledano izuzetno značajna", zaključio je Bor (*Bohr 1*, str. 46),

„pošto jedino to što smo suočeni sa izborom da *ili* trasiramo put čestici, *ili* posmatramo efekte interferencije, omogućava da se izbegne paradoksalni zaključak, koji bi inače bio nužan, da ponašanje elektrona ili fotona treba da zavisi od prisustva otvora na dijafragmi za koji bi se moglo dokazati da čestica kroz njega nije prošla" (*kurziv Borov*).

Izbor koji se pominje u Borovom tekstu nije *„izbor" samih fotona* da se ovako ili onako ponašaju, to nije nikakav „izbor na strani 'prirode'" – da upotrebimo Dirakov izraz – ne radi se o indeterminizmu u tom smislu. Ali, prema navedenoj interpretaciji nije reč ni o našem *nepotpunom poznavanju* odgovarajućih fizičkih procesa eda bi zbog toga probabilizam ušao u igru namesto determinizma klasične mehanike (up. gore, str. 566–569). Naš izbor vodi ispoljavanju *inkopatibilnih* a *komplementarnih* aspekata (fenomena) zbog toga što se kretanje tela fizički *ne može svesti* na niz sukcesivnih stanja, što telo koje se kreće zauzima prostor koji je *veći* od prostora koje ono zauzima u nekom trenutku i što je njegov položaj utoliko *neodređen*, tako da u eksperimentalnim okolnostima koje su *holističke* po karakteru aktualizaciju različitih stanja putem stvaranja različitih fizičkih konfiguracija prostora *eo ipso individualizira* proces na *određen* način. No iako je položaj tela u kretanju u fizičkom smislu neodređen, to *ne znači* da jedan određen položaj ne isključuje drugi. *Suprasvetski* Sekst može ići *i* u Rim *i* u Korint, ali ako je neki *realni* Sekst otišao u Rim, on samim tim *nije* otišao u Korint.

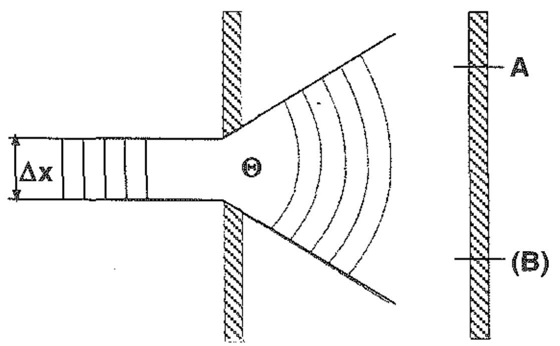
Paket ravnih ili sfernih talasa kojima je predstavljeno širenje svetlosti u diskutovanom primeru ne samo što ne isključuje korpuskularni način predstavljanja i ispoljavanja *te iste svetlosti*, već smo mi u primerima sve vreme fotone i shvatali kao *čestice*.[3] *Neodređenost položaja u jednom ili u više smerova* čini *njihovo kretanje talasom*, a *nema* svetlost *dve* različite *prirode*.

Pre kopenhagenške interpretacije korišćenje i *korpuskularne* i *talasne* slike bilo je uobičajeno kada je svetlost u pitanju, zbog različitih eksperimenata koji su to sugerisali (vidi *Heisenberg 1*, str. 491, *de Broglie 3*, §§ 6–9), ali „slike su bile neujedinjive" jer su „nekritički korišćene" (*Heisenberg 1*, str. 492). Bilo je potrebno „labavljenje klasičnih pojmova" (*ibid., loc. cit.*) da bi se izvršilo njihovo sjedinjavanje. Pre nego što je to izvedeno, de Brolji je 1925. godine talasno-čestični dualizam proširio i na druge kvantnomehaničke objekte (vidi *de Broglie 1*, str. 43–56, *de Broglie 5*, str. 207 i dalje i *de Broglie 2*), pošto se i kod elektrona, na primer, konstatuju efekti interferencije (*de Broglie 5*, str. 208–209)[4]. S matematičke strane gledano, Jordan, Klajn i Vigner su dokazali da su u kvantnomehaničkom formalizmu korpuskularna i talasna teorija *„ekvivalentne*, to jest jedna u drugu prevodive" (*Heisenberg 1*, str. 494), što je Hajzenberga, jednog od tvorca tog formalizma izuzetno zadovoljilo (up. *ibid., loc. cit.* i *Heisenberg 5*, str. 104). „U formalizmu kvantne teorije čestična i talasna slika su samo dva različita pojavna oblika jedne te iste fizičke realnosti" (*Heisenberg 1*, str. 494). Ostalo je bilo još *„samo"* da se „labavljenje klasičnih pojmova" izvede i na *samom pojmovnom nivou*.

U klasičnoj fizici talasna i čestična slika bile su strogo razdvojene i ticale su se *različitih domena* iskustva, bile su, naime, povezivane sa različitim *agregatnim stanjima*. Prostiranje svetlosti dugo je bilo predstavljano kao talasanje etra slilčno talasanju vode. Kad ugledamo brod na pučini možda ćemo se obradovati jer ćemo se uskoro moći da okupamo u talasima koji će zapljusnuti obalu. No talasi u kojima ćemo se okupati, ili kapljice koje će nas poprskati, *nisu* strogo gledano isti koje je brod stvorio. Talasanje je *sukcesivno kretanje različitih delova površine*. Talasi se mogu razlikovati po visini, odnosno amplitudi, brzini prenošenja i dužini. Elektromagnetska teorija svetlosti koristi se u osnovi istom slikom: umesto izgleda površine mora menjaju se elektromagnetske karakteristike delova prostora kojima se elektromagnetsko polje širi (vidi, na primer, *de Broglie 3*, str. 6). Prema *korpuskularnoj slici*, naše oko je nadražio foton koji je pre osam minuta i dvadeset sekundi krenuo sa Sunca prema Zemlji. Prema *talasnoj slici*, pak, naše oko je nadraženo zbog izvesnih karakteristika elektromagnetskog polja koje su izazvane vibracionim prenošenjem (*Zitternbewegung*) koje je pre osam minuta i dvadeset sekundi izazvano na Suncu.

Postojali su, naravno, mnogi zakoni koji su povezivali zbivanja u kojima učestvuju i talasi i čestice; tako je Ajnštajn 1905. godine, razjašnjavajući takozvani fotoelektrični efekat koji je 1887. godine otkrio Herc, povezao energiju (monohromatske) svetlosti kojom se ozrači metal i kinetičku energiju slobodnih elektrona koji napuštaju njegovu površinu: jednostavno $(\frac{1}{2})mv^2 = hv$, gde je m masa čestice, v njena brzina. No tek je u *kopenhagenškoj* interpretaciji *kretanje samih četica* predstavljeno *talasno*.

Ako o kretanju govorimo kao o *menjanju položaja među telima*, onda se *uvek* za vreme takve promene telo *nalazi u prostoru koji je veći od prostora koje zauzima u mirovanju*, ako je prostor kao zajednčko mesto tela o kojima je reč određen njihovim odnosom. Kad kažemo da se foton u kretanju od dijafragme ka fotografskoj ploči nalazi u konusnom prostoru ograničenom uglom difrakcije Θ (vidi sliku), mi mislimo na najmanji prostor



u kojem je interakcija moguća; *to je* prostor u kojem se može aktualizovati neki položaj fotona nekom fizičkom interakcijom. I automobil koji juri ulicom pravo prema nama ne nalazi se u određenom položaju, i on s obzirom na moguće sudare zauzima prostor veći od prostora koji zauzima u mirovanju, samo taj prostor nije konusan. Foton koji se kretao upravno prema dijafragmi i prošao kroz otvor nalazio se – u istom smislu – u prostoru koji je *i s obzirom na širinu* veći od veličine fotona, njegov položaj je i s obzirom na širinu neodređen za neku vrednost Δx (vidi prethodnu sliku), on se, naime, nalazio u cilindričnom prostoru gde je poluprečnik osnove poluprečnik otvora.

I automobil, i foton pre polaska kroz otvor na dijafragmi, i foton po prolasku kroz ovaj otvor nalaze se, krećući se, u jednom *manje-više određenom prostoru*. Bez obzira da li se radi o neodređenosti *samo u pravcu kretanja*, neodređenosti u pravcu kretanja *s izvesnom širinom* Δx ili neodređenosti *u više pravaca*, njihovo se kretanje *uvek* može predstaviti *paketom talasa*, koji će u zavisnosti od toga o kojoj je sve neodređenosti reč biti bez određene talasne dužine, ravni ili sferni.

Kod poznate svetlosti kretanje fotona pre prolaska kroz otvor biće predstavljeno paketom ravnih talasa sa *odeđenom* talasnom dužinom i neodređenošću Δx. Zbog difrakcije i promene impulsa kretanje će po prolasku kroz otvor biti predstavljeno kao širenje sfernih talasa s neodređenom talasnom dužinom.

Kako *uprkos neodređenosti* položaja tela u kretanju bivanje u odeđenom položaju *isključuje* bivanje u nekom drugom položaju, jasno je da ako se foton na ekranu registruje u tački A, on ne može biti registrovan u B (vidi prethodnu sliku); no isto tako, ako vas automobil obori van pešačkog prelaza, teško ćete dokazati da vas je udario na pešačkom prelazu.

Ako je kretanje *snopa* fotona koji prođu kroz otvor na dijafragmi predstavljeno *istim* sfernim talasima kojima je predstavljeno i kretanje *jednog fotona*, ako se, naime svi fotoni *nalaze u konusnom prostoru oivičenom uglom* Θ, onda pri postojanju *dva* otvora na međudijafragmi *dalje* prostiranje svetlosti treba predstaviti s *dva* paketa sfernih talasa i mogućom interferencijom. Ako je na međudijafragmi jedan od dva otvora zatvoren, onda se svetlost koja savlada prepreku – između dve dijafragme *morala* kretati jednosmerno. Realizacija jedne mogućnosti ponovo isključuje mogućnost realizacije jedne druge mogućnosti.

Suštinske razlike između kretanja makroobjekata i kretanja mikroobjekata *nema*. Razlika između jednosmernog kretanja jednog makroobjekta i jednosmernog kretanja jedne mikročestice nije u tome što je navodno položaj jednog makroobjekta tokom kretanja odeđen a položaj mikročestice nije, već se razlika *jedino tiče* preciznosti određenja *mogućih* položaja, to jest položaja mogućih fizičkih interakcija. S druge strane, razlika između neodređenog položaja pri jednosmernom kretanju i neodređenosti posle difrakcije *jedino se tiče karakteristika* prostora u kojem se kretanje odvija; u prvom slučaju on je neodređen u jednom smeru, ili još i u širinu, pa je cilindričan, u drugom je neodređen i zavisno od maksimalno mogućeg ugla difrakcije, pa je konusan.

Sistem klasične mehanike nije deterministički zbog toga što se navodno makroobjekti za razliku od mikroobjekata ne kreću proizvoljno, već zbog toga što se kod makroobjekata i precizno mogu odediti *mogući položaji*, i zato što fizička interakcija kojom se određuju ključni parametri *zanemarljivo utiče* na njihovo ponašanje te se neodređenost može učiniti proizvoljno malom *bez* relevantnog povećanja neodeđenosti komplementarnog parametra. Otuda i dolazi do toga da kretanje makrotela shvatamo kao kretanje u *matematičkom prostoru* – na raselovski način. Uopšte, pošto je granica (ne)preciznosti emprijski određena Plankovom konstantom, i klasična korpuskularna i klasična talasna teorija imaće „asimptotsku valjanost u granicama u kojima je dejstvo na

svakom stepenu analize fenomena veliko u poređenju s elementarnim kvantom“ (*Bohr 5*, str. 313).

Matematički prostor, kao što smo videli, predstavlja polje mogućnosti koje fizički ne mogu sve da budu realizovane, i mi u slučaju mikrofizičkih procesa ostavljamo otvorene sve mogućnosti u talasnoj funkciji sve dok određena eksperimentalna situacija ne isključi neke od njih realizujući neke druge. Holizam eksperimentalne situacije nije neobrazloženi metrocentrički postulat, on se osniva na principijelnoj nemogućnosti da se proces predstavi kao niz sukcesivnih stanja i okolnosti da razlika između mogućih i aktualizovanih stanja ne može da se zanemari u slučajevima u kojima aktualizacija uvodi u igru novi „nekontrolabilni element“, menjajući uslove koji *definišu samu situaciju*.

Park i Margenau tvrde da se u „Novoj kvantnoj teoriji“ više ne može govoriti o tome da elektron „*ima* položaj“, jer je položaj postao „*skrivena observabla*“ (*Park and Margenau 1*, str. 218). Ako ovo i prihvatimo, ne moramo prihvatiti tvrdnje autora da je elektron „odjednom na više mesta“ (*ibid., loc. cit.*), ili da je kvantna fizika samo „teorija o rezultatima merenja“, (*ibid.*, str. 219). Koristeći misaone eksperimente „Stare kvantne teorije“, možemo dokazivati univerzalnost principa komplementarnosti (up. *Bohr 1*, str. 65) pozivajući se, pored ostalog, na „običan jezik“, „terminologiju klasične fizike“ i „običnu logiku“ (*Bohr 5*, str. 315, 317), ukazujući da se i „najelementarniji pojmovi, koji su neizbežni za opis našeg svakodnevnog iskustva, osnivaju na prvobitno neprimećenim pretpostavkama, čije razmatranje, međutim, postaje suštinsko... u širim domenima iskustva“ (*Bohr 4*, str. 289–290). Tu stranu kvantne mehanike, koja „doprinosi opštem filozofskom razjašnjenju pretpostavki koje su u osnovi ljudskog znanja“ (*ibid.*, str. 290), malo je ko, osim samoga Bora, naglašavao. U tom smislu je izuzetak Bergstejnova tvrdnja da je „običan jezik izvor nedvosmislenosti fizičkog opisa“, da je to „najuverljivije provereno preko observacionih uslova u kvantnoj fizici“ i da je „karakteristika komplementarnosti kvantne fizike fundamentalna za običan jezik“ (*Bergstein*, str. 1033-1034). Iako, za razliku od Borove, suviše radikalna, i utoliko netačna, ovakva tvrdnja je osvežavajući antipod rezigniranom zadovoljavanju matematičkim formalizmom, tvrdnji da je kvantna fizika samo teorija o rezultatima merenja, ili prevelikoj impresioniranosti novim neshvatljivim domenom stvarnosti koji je navodno otkrila mikrofizika.

117. Ajnštajn-Podolski-Rouzenov „paradoks"

Uprkos tome što je relativizirao dužine i vremenske intervale, i prostor i vreme nije shvatao kao entitete po sebi nezavisno od stvari i događaja (vidi, na primer, *Einstein 2*, str. 135 i dalje i napomenu za 15. izdanje, str. VI), Ajnštajn nikako nije odustajao od pokušaja da kretanje mikroobjekta predstavi na raselovski način, nastavljajući da smišlja eksperimente kojima bi se omalovažila razlika između samo mogućeg i fizički aktualizovanog stanja sistema, na kojoj počivaju i princip komplementarnosti i tvrdnja o nedopunjivosti sistema kvantne mehanike. Tako je nastao tekst iz 1935. godine koji je Ajnštajn napisao sa saradnicima Podolskim i Rouzenom (vidi *Einstein, Podolsky and Rosen*), oko kojeg ne prestaju da se vode sporovi.

Sporovi se vode na sva tri za fiziku relevantna nivoa: tehničko-eksperimentalnom, formalno-matematičkom i pojmovno-filozofskom. Na realno izvedene eksperimente, kao što su oni koje su izvodili Vu i Šankov (C. S. Wu and I. Shankov, „The angular correlation of scattered annihilation radiation", *Psysical Review* 77, 1950), Koher i Komins (C. A. Kocher and E. D. Commins, „Polarisation of photons emitted in an atomic cascade", *Physical Review Letters* 18, 1967), Klozer, Horn, Šimoni i Holt (J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, „Proposed experiment to test local hidden-variable theories", *Physical Review Letters* 23, 1969), Fridman i Klozer (K. J. Freedman and J. F. Clauser, „Experimental test of local hidden-variable theories", *Physical Review Letters* 28, 1972), Klozer (J. F. Clauser, *Physical Review Letters 36*, 1976) i drugi pozivaju se oni koji, kao

Poper (vidi *Popper*, str. 189), veruju da je „izvorni misaoni eksperiment Ajnštajna, Podolskog i Rouzena... postao realni eksperiment" (*ibid., loc. cit.*), eda bi onda ili dovodili u pitanje pouzdanost rezultata takvih eksperimenata, ili da bi te rezultate navodili kao *empirijski dokaz* u prilog nekoj od strana u sporu (vidi *Jammer*, str. 329–339). Na formalizam u argumentu Ajnštajna, Podolskog i Rouzena naročitu pažnju obraćaju ili oni koji, kao Kuper (vidi *Cooper*), misle da je cela misaona konstrukcija nemoguća zbog matematičke greške koju su Ajnšajn, Podolski i Rouzen načinili, ili oni koji, kao Krips, prihvataju zaključak argumenta, koji inače smatraju paradoksalnim, nastojeći da paradoksalnost otklone stvaranjem odgovarajućeg formalizma (vidi *Krips 3*, str. 149 i *Krips 1*, str. 27, i ekstenziju operatora gustine u *Krips 2*). Najzad, filozofski spor, koji će nas jedino zanimati, tiče se čisto fizičkog opisa situacije s obzirom na principijelnu mogućnost ili nemogućnost jednovremenog ili sukcesivnog preciznog određenja vrednosti za nekomutativne observable.

Da bi fizička teorija bila potpuna, kažu na početku Ajnštajn, Podolski i Rouzen (*Einstein, Podolsky and Rosen*, str. 777), „*svaki element fizičke realnosti mora imati pandan u njoj*". Zanimljiv je, međutim, *kriterijum* fizičke realnosti koji autori teksta nude: „*Ako, ni na koji način ne remeteći sistem, možemo s izvesnošću (verovatnoćom koja je ravna jedinici) predvideti vrednost neke fizičke veličine, onda postoji element fizičke realnosti koji joj odgovara*". Ovaj kriterijum oni smatraju dovoljnim, iako ne nužnim (*ibid.*, str. 778).

Videćemo odmah kako je Bor u izrazu „ni na koji način ne remeteći sistem" otkrio dvosmislenost. Ali nezavisno od toga, navedeni kriterijum, iako na prvi pogled plauzibilan, krije u sebi i onu vekovnu dvosmislenost s kojom smo se stalno sretali, a koja ovde pokriva razliku između mogućih i aktualizovanih položaja i trenutaka. U klasičnoj mehanici, poznajući položaj, smer i brzinu kretanja tela, možemo s obzirom na svaki budući trenutak reći gde će se telo nalaziti. Pa ipak, *ova mogućnost obostrano jednoznačnog korespondiranja* trenutaka i položaja ne podaruje *eo ipso* svim položajima i *fizički realitet*, ne samo zbog slučajeva gde uprkos korespondenciji svi položaji neće biti aktualizovani jer sve buduće vreme ne može da istekne (up. Zevsovo rođendansko dozivanje kosmičkih stanica u §§ 4-7), već i zato što se, kao što smo videli, trenutni položaj *ni u konačnom vremenu* ne mogu ni u principu svi aktualizovati: broj fizičkih procesa koji bi aktualizovao trenutke nužno je konačan *i bez obzira* na postojanje ili nepostojanje interakcije sa telom o kojem je reč.

Mogućnost određenja vrednosti nekog od kanonički konjugovanih operatora *bez uticaja* na sam sistem, to jest definišuće uslove sistema, Ajnštajn, Podolski i Rouzen su dokazivali pomoću „sistema blizanaca“, gde bi se određenje vrednosti u jednom sistemu iskoristilo za izračunavanje odgovarajuće vrednosti u drugom. Ako je takvim postupkom moguće u jednom od sistema odrediti vrednost jednog od kanonički konjugovanih operatora bez uvođenja u igru novog nekontrolabilnog elementa, onda bi prostim određenjem vrednosti drugog u istom trenutku – bila dokazana mogućnost *simultanog* određivanja vrednosti za kanonički konjugovane operatore, što bi značilo i simultanost njihove fizičke realnosti. To bi, međutim, bilo u neskladu s formalizmom kvantne mehanike. Ova bi se posledica – navodno – mogla izbeći jedino ako bi se dopustilo da merenje u jednom sistemu nekako ipak utiče na stanje u drugom, udaljenom sistemu, ali to opet deluje apsurdno.

Imajući u vidu fon Nojmanov matematički dokaz *potpunosti* kvantne mehanike (*von Neumann*, str. 167–173, vidi gore, str. 572–573), važno je tačno razumeti *u kojem se smislu* Ajnštajn-Podolski-Rouzenov argument smatra argumentom *protiv* potpunosti kvantne mehanike i u kojem je smislu to povezano sa navodnom paradoksalnošću opisane situacije pod pretpostavkom potpunosti. Pre svega, kako kritikujući Kripsovo razrešenje „paradoksa“ s pravom ističu Huker (*Hooker 1*, str. 418, 426) i Erlihson (*Erlichson 2*, str. 83), u argumentu nije, niti može biti, reč o *formalnoj* strani i, utoliko, o *imanentnoj* protivrečnosti ili nepotpunosti sistema kvantne mehanike. Imanentno i formalno, kvantna mehanika je neprotivrečan i potpun sistem u fon Nojmanovom smislu. Kuper je to smatrao dovoljnim za pobijanje Ajnštajn-Podolski-Rouzenovog dokaza (vidi *Cooper*, str. 624-625), jer se zahtevana izolacija sistema, ili tačnije, delova sistema, bez obzira na udaljenost, ne može izvesti bez uvođenja barijere u Hilbertov prostor u kojem je predstavljeno kretanje čestica, a uvođenjem te barijere hermitski, ili, kako ga Kuper naziva, „simetrički“ operator koji se odnosi na impuls nije više „smaozdružen“ (*selfadjoint*), odnosno ni po kvantnomehaničkom formalizmu vrednost za obe čestice ne bi bila ista. U osnovi istu primedbu na Ajnštajn-Podolski-Rouzenov argument ponovio je Šarp u prvom koraku svoga pobijanja (vidi *Sharp*, str. 229–230).

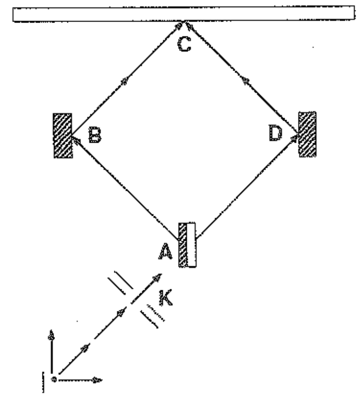
Nepotpunost kvantne mehanike o kojoj govori Ajnštajn-Podolski-Rouzenov argument nije imanentna nepotpunost, već nepotpunost na koju bi, eventualno, ukazivala situacija u kojoj bismo mogli da odredimo tačne vrednosti za nekomutativne observable. Ako bi to, naime, bilo moguće učiniti, onda bi kvantna mehanika bila nepotpuna ne zato što bi mogla biti *dopunjena*, već zato što bi mogla biti *zamenjena* teorijom po kojoj bi jednovremeno određenje položaja i impulsa, ili energetske razmene i vremena, ili ugla i spina, bilo moguće. *Jedina* pretpostavka koju su autori argumenta o nepotpunosti imali u vidu kojom bi se i očuvao kvantnomehanički formalizam i koja bi onemogućila jednovremeno određivanje vrednosti za nekomutativne observable bila je opet pretpostavka nekog naročitog delovanja na daljinu kojom bi merenje u jednom delu sistema uticalo na, to jest remetilo, stanje u drugom, udaljenom delu sistema (vidi *Einstein, Podolsky and Rosen*, str. 779-780). Samo zbog jednog takvog remećenja trebalo bi da je nemoguće zvršiti precizno simultano određenje vrednosti nekomutativnih operatora merenjem jedne observable na jednom, a druge na drugom „blizancu“. Iako je, kao što ćemo videti, Bor odgovorio na Ajnštajn-Podolski-Rouzenov argument *bez pozivanja* na delovanje na daljinu, mnogi su, kao recimo Poper (*Popper*, str. 186–189), jednostavno prešli preko toga i dalje tvrdeći da je delovanje na daljinu jedina opcija za „ortodoksnu interpretaciju“. Zbog navodne neophodnosti te pretpostavke se i verovalo da je „krucijalni eksperiment“ o (ne)potpunosti kvantne mehanike moguć (vidi kraj

§ 116). Kada je pretpostavka o delovanju na daljinu već jednom ušla u igru, postalo je moguće pomeriti poentu izvornog argumenta i zaboraviti da se problem odnosi na *merenje* i u vezi s tim na *predviđanje*, a ne na prosto *izvođenje* zaključaka (na šta je ukazao Brajtnberger – vidi *Breitenberger*, str. 4937-4938): ako znamo da su se dva automobila sudarila pri umerenoj brzini, i ako smo našli jedan, *zaključićemo* da je u blizini i drugi (vidi *ibid., loc. cit.*). U izvornom argumentu Ajnštajna, Podolskog i Rouzena radilo se o mogućnosti ili nemogućnosti jednovremenog merenja brzine ili impulsa i o predviđanju budućeg stanja sistema, a tek je zbog pretpostavke o delovanju na daljinu, pomoću koje, navodno, „blizanci" ostaju „blizanci", situacija koja bi trebalo da odgovara kvantnoj mehanici shvaćena kao zahtev za istovetnim ponašanjem „blizanaca" u istovetnim situacijama, kao što je, recimo, istovetno ponašanje pri nailasku na polupropustljiva ogledala.

Pretpostavimo da se radi o dve čestice koje su izašle iz interakcije kao antičestice, kao elektron i pozitron, recimo. Njihovo kretanje, predstavljeno ψ-funkcijom, sadrži mogućnosti koje se mogu redukovati merenjem: to merenje predstavlja redukciju paketa talasa (*Einstein, Podolsky and Rosen*, str. 779). Pretpostavimo da je u nekom trenutku položaj jedne čestice određen s željenim stepenom preciznosti i da je u istom trenutku određen impuls druge. Ako je tačno da se elektron i pozitron, kao blizanci, razlikuju samo u pogledu elementarnog naelektrisanja, nećemo li s preciznošću sigurno većom od one koja je dopuštena relacijama neodređenosti moći da znamo vrednost vlastitih funkcija nekomutativnih operatora? Nisu li položaj i impuls u istom vremenu određeniji nego što to dopušta navodno potpun kvantno-mehanički formalizam?

Situacija koju su opisali Ajnštajn, Podolski i Rouzen, na koju se često referira kao na Ajnštajn-Podolski-Rouzenov paradoks, rasplamsala je maštu i branitelja i protivnika „ortodoksne interpretacije" do neviđenih razmera. Verovatno je najdalje otplovio de Broljijev doktorant Olivije Kosta de Boregar (vidi *de Beauregard*), koji je odbacio

pretpostavku delovanja na daljinu kao nepotrebnu za očuvanje tvrdnje o neprotivrečnosti, odnosno potpunosti kvantne mehanike, pošto se uticaj merenja u jednom delu sistema, odnosno merenja izvedenog na jednoj iz para čestica, na stanje u drugom delu, odnosno na drugu iz para čestica, može jednostavno objasniti posrednim uticajem izvršenog merenja na izvornu interakciju, koji se obavlja u kontra-vremenu! (*ibid.*, str. 1633–1634). Delovanje u kontra-vremenu lako uklanja paradoksalnost u poznatom primeru sa polupropustljivim ogledalima (vidi sliku).



Neka fotoni izračeni u I s međupauzama prođu kroz kolimator K, kako bi se postigao paralelni snop, i zatim u A naiđu na poluposrebreno ogledalo, gde se mogu odbiti ili kroz njega proći, upućujući se prema B, odnosno D. Neka se u B i D nalaze, po volji eksperimentatora, ili posrebrena, nepropustljiva ogledala, ili detektori svetlosti. Na fotografskoj ploči, u C, možemo pratiti eventualne efekte interferencije. Kada su u B i D ogledala, efekti interferencije u C pokazuju da se svetlost kreće obema putanjama. Kada su u B i D detektori, foton se kreće *ili* jednom *ili* drugom putanjom. Pošto se odluka o postavljanju ogledala ili detektora može doneti *posle* prolaska svetlosti kroz A, jer rastojanja AB i AD mogu da budu dovoljno velika, to se korelacija zaista vrlo jednostavno može objasniti uticajem na zbivanja u prošlosti.

Patnamov učenik Dejvid Šarp (vidi *Sharp*) vaskrsao je princip sveopšte povezanosti da bi dao fizički smisao okolnosti što su relevantne observable iz Ajnštajn-Podolski-Rouzenovog argumenta predstavljene u Hilbertovom prostoru hermitskim operatorima koji su *samozdruženi*. Iako je neki put „moguće aranžirati fizičke sisteme tako da se ponašaju kao izolovani do proizvoljnog stepena aproksimacije, to jest tako da je $V_{1,2}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \approx 0$," to ne znači da je ikada striktno $V_{1,2}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = 0$ (*Sharp*, str. 230–231). „Strogo govoreći, samo ceo sistem ima funkciju stanja; odvojeni 'delovi' sistema neće biti predstavljivi čistim stanjem čak ni posle merenja" (*ibid.*, str. 229). „Traženi paradoksalni rezultat Ajnštajna, Podolskog i Rouzena" ne može se dobiti, jer je upravo u tom „specifičnom kontekstu"... „neodrživa pretpostavka... da se dva dela sistema mogu strogo odvojiti" (*ibid.*, str. 230, 231). Shvatajući holizam kvantnomehaničkih stanja sasvim drugačje nego što je to izvorno učinio Bor, Šarp se, u krajnjoj liniji kao i Jauh (*Jauch*), pozivao na staru formulu po kojoj je celina više od zbira delova (vidi *Hooker 2*, str. 854), pošto je u kvantnoj mehanici „*složeno* stanje nešto više od zbira stanja komponenata" (*ibid.*, *loc. cit.*), ne pokazujući kakvo bi fizičko značenje imala stara dijalektička formula u konkretnoj situaciji. Kritika je s pravom na tome insistirala (vidi *Hooker 3*, str. 227, 230–231 i *Hooker 2*, str. 855–857). Razvijajući dalje učenikovu strategiju (*Putnam 2*) i braneći se od kritike Margenaua i Vignera (*Putnam 1*), profesor Patnam govori o „celom univerzumu" kao kvantnomehaničkom objektu (*Putnam 1*, str. 2–3) i o funkciji stanja takvog objekta, koja se odnosi na navodno izolovan sistem (*S*) i merni sistem (*M*) nezavisno od ostatka univerzuma (*T*). Margenau i Vigner su odgovorili da se, bez obzira na interakciju s mernim instrumentima, u kvantnoj mehanici *de facto* vektorom stanja, ili funkcijom stanja, opisuje stanje „s onu stranu preseka"; posmatrač s mernim instrumentom u to *nije* uključen (*Margenau and Wigner*, str. 7).

Imre Lakatoš, za koga je „kopenhagenška interpretacija" „postala jedna od glavnih standardnih nosilaca filozofskog mračnjaštva" iz kojeg se izrodio „sablažnjiv" savez „subjektivističkog pozitivizma, antilogičke dijalektike i čak filozofije običnog jezika", navodi Ajnštajnove reči protesta protiv „anarhističkog kulta o neshvatljivom haosu" iz pisma Šredingeru od 31. maja 1928: „Hajzenberg-Borova umirujuća filozofija – ili religija? – podešena je tako delikatno da, za sada, obezbeđuje mekani jastuk za istinskog vernika" (*Lakatos*, str. 145). Međutim, u rasplamsalom sporu oko Ajnštajn-Podolski-Rouzenovog „paradoksa" retki su ostali branitelji potpunosti kvantne mehanike koji se, kao recimo, Šlegel, u potrazi za ne samo formalnim već i „fizički plauzibilnim rešenjem" vraćaju Borovom odgovoru (*Schlegel*, str. 458). Glavni tvorac kopenhagenške intepretacije reagovao je sasvim jednostavnim argumentom, koji je verovatno bio suviše jednostavan čak i za vernike, da ne bi tražili komplikovanije argumente.

Bor je pokazao[1] kako opisana situacija ne sadrži ništa značajno novo u odnosu na već diskutovanu situaciju sa jednom česticom ili snopom čestica koje prolaze kroz otvor ili otvore na dijafragmi krećući se ka fotografskoj ploči (§ 116). Ne utiče određenje položaja ili impulsa jedne iz para čestica na ponašanje druge – tu se Bor slaže s Ajnštajnom, Podolskim i Rouzenom – već ono menja *same uslove* koji definišu situaciju (*Bohr 6*, str. 65, *Bohr 3*, str. 700), to jest uslove koji čestice čine parom. Upravo u trenutku određenja položaja ili impulsa jedne i/ili druge čestice, one prestaju da budu blizanci. Ako se za određenje položaja i impulsa koriste dijafragme poput onih sa slika na str. 588–9, onda će u slučaju pričvršćene dijafragme ostati neodređen impuls, odnosno dalja trasa čestice, a u slučaju labave dijafragme neodređenost položaja same dijafragme isključuje mogućnost da se čestice tretiraju kao blizanci.

U kontekstu razloga iz kojih mi razmatramo Ajnštajn-Podolski-Rouzenov argument najvažnije je to što Bor nijednog časa ne dovodi u pitanje opravdanost opisa same situacije, niti poriče mogućnost *posrednog* određenja položaja, odnosno impulsa jedne iz para čestica, već simultani realitet veličina koje odgovaraju nekomutativnim operatorima osporava pozivanjem na promenjeno i nadalje nekontrolisano ponašanje one čestice koja je poslužila u svrhu određenja. Koliko god se može reći da su čestice *do trenutka merenja* bile blizanci, toliko je tačno da su *samim aktom merenja* one to *prestale da budu*, i koliko god se može reći da se radi o simultanom određenju položaja i impulsa s obzirom da je reč o česticama koje su *do trenutka* merenja bile blizanci, toliko se može tvrditi da obe veličine ne mogu imati simultani realitet u slučaju svake čestice utoliko što su upravo *u tom trenutku* čestice prestale da budu blizanci: upravo *od tog trenutka* njihove trajektorije se nekontrolabilno razlikuju. Linija kojom se razgraničavaju dve raznobojne površine nije jednobojna ni u Ovenovom smislu (vidi gore, § 17, str. 100).

Ako čestici čiji smo položaj u nekom trenutku *posredno* odredili na način koji opisuju Ajnštajn, Podolski i Rouzen – a što Bor prihvata kao moguće – umesto impulsa odredimo položaj u nekom kasnijem trenutku, time ćemo, kao što smo videlli (str. 571), odrediti samo njenu *prosečnu* brzinu, za koju je Bor još na predavanju u Komu rekao da je „jedna apstrakcija" iz koje se ne može dobiti „jednosmislena informacija u pogledu pređašnjeg i budućeg ponašanja" (*Bohr 2*, str. 66). No, ako nam poznavanje dva trenutna položaja nije dovoljno za odeđenje trajektorje čestice ako se određenjem u bar jednom od trenutaka menja njen impuls, ne bismo li mogli *proširiti* konsrukciju Ajnštajna, Podolskog i Rouzena tako da *posedno* odredimo dva ili više trenutnih položaja?

Šta ako umesto sa „blizancima" imamo posla sa „trojkama" ili „četvorkama" ili „petorkama"? Ako nam par čestica omogućuje da odredimo jedan trenutni položaj bez nekontrolisane interakcije sa sistemom, ne bi li nam trojke, ili, uopšte, *n*-torke, omogućile da bez nekontrolisane interakcije odredimo dva, odnosno *n*, trenutnih položaja? Ne možemo li zatim interpolacijom dobiti trajektoriju čestice na isti način na koji to činimo i u klasičnoj mehanici? Ne bi li time konačno bila prevaziđena razlika između klasične i kvantnomehaničke situacije?

Fizičari skloniji empirizmu mogli bi sumnajti u mogućnost fizičke realizacije prethodne situacije. Iako se elektron i pozitron, kao „simetrični elektron", ne pominju u tekstu Ajnštajna, Podolskog i Rouzena, oni bi mogli da posluže kao „par" u njihovom misaonom eksperimentu iz 1935 (o teorijskom nastanku „pozitivnog elektrona" vidi *de Broglie 6*, str. 11-14). Dirak je 1928. godine teorijski predvideo postojanje „antimaterije", a već 1932. godine je Karl Andreson otkrio „antičesticu" u kosmičkim zracima. Šta bi nam moglo poslužiti kao trio, kvartet, ili kvintet čestica?

Nas, svakako, zanima *principijelan* odgovor, jer smo sve vreme stvar i izražavali na tom niovu. Primer sličan prethodnom matematički je razvio Hajnc Diter Dombrovski, koji je „odbacio ideju da se simultana merenja moraju izvoditi na jednom istom sistemu" i koji je zato, sledeći fon Nojmana, ueo „veliki skup kopija" (*Dombrowski*, str. 185) da bi simultano merio inkopatibilne observable. Mislim da se mora priznati da bi takvom konstrukcijom – u koju je uključeno više od dve zajedno „rođene" čestice – kvantna mehanika bila maksimalno približena idealu determinizma klasične mehanike. Ostala bi samo jedna disanalogija koja bi operacionalizovala razliku između mogućih i aktualizovanih položaja, odnosno stanja sistema. Ta razlika se, u duhu kopenhagenške interpretacije, sastoji u tome što *nijedan mogući* položaj između dva moguća ili stvarna položaja u kojem se našao neki kvantnomehanički objekat nije mogao da bude konstatovan direktnim eksperimentom a da realizacija eksperimenta, to jest realizacija mogućnosti o kojoj je reč, ne naruši samu korespondenciju trenutaka i položaja prema kojoj je mogući položaj izračunat.

Sličnost između ovakvog odgovora na takozvani paradoks (ne)potpunosti kvantne mehanike i rešenja *Strele* u kojem se tvrdi da je položaj tela u kretanju suštinski neodređen – očigledna je. Oba odgovora počivaju na tome što ispravnost izvesnog protivčinjeničnog kondicionala kojim se tvrdi da bi telo koje se kreće bilo u izvesnom vremenu u izvesnom položaju *da se* nešto dogodilo ili *da se* realizovao izvesni eksperiment *ne implicira* da je telo u vremenu o kojem je reč *bilo* u položaju o kojem je reč. Za razliku od klasične mehanike, u kvantnoj mehanici su uslovi *a priori* tako definisani da uvek važi i *jača tvrdnja*, kojom se prethodni *non sequitur* operacionalizuje: da je realizovan eksperiment kojim *bi se* utvrdilo *da je* telo u vremenu o kojem je reč *bilo* u navedenom položaju, *bila bi narušena pretpostavljena korespondencija* trenutaka i položaja uključujući i onu *u trenutku izricanja* samog protivčinjeničnog kondicionala. Komplementarnost *talas-čestica* sadržana je, barem u diskutovanom primeru (str. 585 i dalje), u sličnoj tvrdnji: ako je zbog otvorenosti oba otvora na drugoj dijafragmi došlo do efekta interferencije, to jest ako se fotoni nisu kretali jednosmerno, onda to znači da *nije mogao biti realizovan eksperiment* kojim bi se u tom trenutku jednoznačno trasirala putanja fotona, jer bi sama realizacija ovog eksperimenta isključivala mogućnost konstatovanog efekta interferencije.

Srodnost između *principa komplementarnosti* i *glavnog rešenja kinematičkih aporija*, koje nam je poslužilo kao *model* za sva kasnija rešenja, najbolje se vidi u neophodnosti razlikovanja *matematičkog* i *fizičkog* prostora i vremena. Kao što u kvantnoj mehanici u prostorno-vremenskim procesima koje želimo da opišemo u matematičkom prostoru i vremenu uzajamno isključenje eksperimenata ukazuje na fizički komplementarne aspekte, tako je *staccato* trkač koji se uvek zaustavlja posle svake deonice $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ puta AB *ipso facto onemogućen* da stigne u B, kao što činjenica da je on stigao u B ukazuje da je on *morao* da se zaustavi konačan broj puta i definitivno isključuje mogućnost da *taj broj u tom slučaju* bude veći nego što jeste.

Dok nas sistem *klasične mehanike*, zahvaljući slučajevima u kojima bez relevantnih remećenja sistema možemo da pratimo slučajeve korespondencije trenutaka i trenutnih položaja, navodi na to da zaboravimo da su trenuci i položaji samo granice i da se realno vreme i realni prostor iz njih ne sastoje, *kvantna mehanika* predstavlja primer sistema u kojem su *uslovi a priori tako određeni* da se razlika između *matematičkog* i *fizičkog* prostora i vremena pokazuje na svoj svojoj jasnoći, pošto jaz između eksperimentano realizovanih i samo mogućih stanja sistema postaje toliko velika da se *realizacije pojedinih međustanja isključuju.* Kvantnomehanička stanja su *diskretna* (up. *Bohr 2*, str. 21, 34–35, 69, 80–82, 87, 109), a *„međustanja"* u fizičkom smislu *suštinski neodređena.*

Imajući u vidu da se *princip neodređenosti* u kvantnoj mehanici ticao kako pitanja primenljivosti reči „mesto" i „brzina" tako i pitanja mogućnosti predikcije i retrodikcije stanja sistema s obzirom na asimetriju prošlost – budućnost (vidi početak § 116), zaključićemo diskusiju o posrednom odeđenju položaja i brzine iz Ajnštajn-Podolski-Rouzenovog argumenta *ograničenjem opštosti* ovog principa s obzirom na *ta pitanja.* Pri posrednom određenju položaja i impulsa, ona čestica iz para, u Ajnštajn-Podolski-Rouzenovoj situaciji – ili trojke, četvroke ili uopšte, *n*-torke, u proširenoj verziji – koja, zahvaljujući karakteru ψ-funkcije omogućava posredno određenje vrednosti kanonički konjugovanih operatora p ili q za drugu, udaljenu česticu – ili čestice – *sama ispada* iz simetrije, prestajući da bude „kopija", jer u kvantnoj mehanici realizacija stanja, u ovom slučaju mogućeg stanja čestice o kojoj je reč, remeti uslove realizacije. To „ispadanje iz igre", a ne neki „naročiti uticaj na daljinu", dovodi do „poremećaja" sistema blizanaca (trojki, četvorki, ... *n*-torki). Ali, s druge strane, pošto delovanja na daljinu *nema* (ni po Ajnštajnu ni po Boru) mogući položaji i brzina udaljenih članova sistema *bili bi* time *precizno određeni* i s obzirom na prošla i s obzirom na buduća stanja. No opet, reč je samo o *mogućim* stanjima, jer realizacija bilo kojeg stanja, po zakonu korespondencije, *isključuje* mogućnost realizacije bilo kojeg međustanja, i obrnuto.

Erlihson se pozivao na „naše opšte ideje o fizičkoj realnosti" (*Erlichson 1*, str. 360) da bi podržao kriterijum realnosti Ajnštajna, Podolskog i Rouzena. Ali, te bi ideje morale da uključe i teškoće koje stvara Zenonova *Strela*, čije rešenje otkriva značaj razlike između matematičkog prostora i matematičkog vremena kao polja mogućnosti koje nužno sve ne mogu biti realizovane i fizičkog prostora i fizičkog vremena koji predstavljaju određene realizacije. „U istoriji nauke ima samo nekoliko događaja koji su u toku jedne generacije imali takve izvanredne posledice kakve je imalo Planckovo otkriće elementarnog kvanta dejstva" (*Bohr 2*, str. 92). Te posledice su i filozofske, ali ne zato što bi filozofija bila nadgradnja nauke, već, kao što vidimo, zbog toga što fizičare dovode u „granične situacije", otkrivajući im značaj izvesnih – u idealnom posmatranju zanemarenih, u realnom postupanju zanemarljivih razlika.

118. Rešenje Stadiona na osnovu razlikovanja matematičkog i fizičkog prostora i matematičkog i fizičkog vremena

Klasični matematički prostor i matematičko vreme su metrički amorfni: tačke koje odgovaraju članovima niza 1, 2, ..., *n*, ... mogu *s pravom* biti preznačene u tačke 1, 1/2, ..., *n*, ... (vidi § 98). Fizički prostor i vreme, a to znači prostor i vreme koji su određeni preko nekih fizičkih svojstava, nisu amorfni, pre svega zato što ograničeni fizički predmet čiji su delovi definisani pomoću nekog fizičkog svojstva pod standardnim matematičkim pretpostavkama *ne može* sadržavati beskonačno mnogo takvih delova (vidi §§ 111, 112) i što ovi delovi zbog toga, iako ih uvek može biti više nego što ih *de facto* ima, *ne mogu* biti predstavljeni nizom kakav je niz [1, 2], [2, 3], ..., [*n*, *n* + 1], ...

No, prethodni *negativni* uslov svakako nije dovoljan za određenje metrike stvarnog fizičkog prostora. Ako kažemo da je deo nekog predmeta, po dužini recimo, jednak polovini tog predmeta, pri tom mislimo da su deo o kojem je reč i preostali deo predmeta *podudarni* u pogledu dužine. Preostaje pitanje da li se upoređivanje

uvek bar u principu može izvršiti, odnosno ne menjaju li možda sami uslovi pod kojima bi se izvršilo upoređenje dužinu delova koji se upoređuju (vidi str. 489–491). U svakom slučaju, *Stadion* je aporija koja se odnosi na prostornu i vremensku metriku u *čisto kinematičkom kontekstu* i utoliko je, verovatno, on uvek *podrazumevao fizičku izotropnost* u pogledu sameravanja veličina predmeta u miru: ὄγκοι su, *po pretpostavci*, čvrsta tela čija se dužina ne menja u zavisnosti od toga *gde* se i *kada* merenje vrši.

Kao što je dužina nekog predmeta koji miruje po sebi neodređena zbog metričke amorfnosti matematičkog prostora i postaje određena tek *u odnosu* na neki drugi predmet koji miruje zahvaljujući mogućem *sameravanju* ta dva premdeta, tako je i dužina pređenog puta po sebi neodređena i postaje određena tek sameravanjem sa nekim predmetom *duž kojeg se telo kretalo*.

Kako pokazuje *Stadion* (vidi str. 193 i dalje), sameravanje sa *dva tela* duž kojih se telo kretalo može dati *dva različita* rezultata. Ako je kretanje tela kretanje u *fizičkom prostoru*, to jest ako se sastoji u menjanju odnosa prema fizičkim telima, onda nije čudno što dužina pređenog puta kao mera te promene ne mora biti ista kod istovremenog menjanja odnosa prema dvama telima. Iako ćemo se osloboditi uverenja da je telo moralo preći neki jednoznačno određeni put, to jest put jednoznačno određene dužine, ako se setimo da je, s jedne strane, čist matematički prostor metrički morfan, dok je, s druge strane, promena odnosa među fizičkim telima uvek promena odnosa *među njima*, tako da promena odnosa prema jednom nije isto što i promena odnosa prema drugom. Udaljujući se od jednog prijatelja možda se približujemo drugom, a pri tom, putujući, ne menjamo odnos prema onom s kojim putujemo. Rešenje aporije se sastoji u tome da *prihvatimo* Zenonov rezultat. Još jednom će oružje koje ranjava biti ono koje i isceljuje.

Ako veličinu promene želimo da odredimo jednoznačno mereći je *dužinom pređenog puta* u odnosu prema različitim telima, desiće nam se, kako to pokazuje *Stadion*, da u tome ne možemo uspeti. Dužina pređenog puta je *relativna* prema telima u odnosu na koja se sama promena odigrava. Možemo zato pokušati da veličinu promene odredimo *dužinom vremena* tokom kojeg se promena dešavala.

I čisto vreme je, međutim, metrički amorfno kao i čist matematički postor. Uz to, dužine vremenskih intervala se ne mogu neposredno upoređivati, već samo *posredno*, preko upoređivanja prostornih dužina (up. *Aristotle 21*, 223 b 12–20); tako je, na primer, neko kretanje trajalo pet minuta ako je za isto vreme velika kazaljka na časovniku savladala rastojanje između dve cifre.

Stadion nam ne otkriva samo relativnost dužine pređenog puta već i relativnost dužine vremenskog intervala. Ako se dužina puta koji je prešlo telo BBBB razlikuje zavisno od toga da li se određuje odnosom prema AAAA ili odnosom prema ΓΓΓΓ (vidi str. 194) i ako se dužina vremenskog intervala tokom kretanja tela BBBB o kojem je reč određuje dužinom pređenog puta, onda i ona neće biti jednoznačno određena, već će zavisiti od izbora tela u odnosu na koje se promena odvija.

Nije Zenon u konstrukciji četvrte kinematičke aporije prevideo ili prenebregao relativnost kretanja – što je tradicionalno mišljenje (vidi *Windelband*, str. 98) – već je, naprotiv, iskoristio ovu relativnost da otkrije nešto mnogo zanimljivije, a to je nejednoznačnost dužina prostornih i vremenskih intervala. Nije zbog relativnosti kretanja relativna samo *brzina* kretanja tela, već to isto važi i za veličinu prostora *u kojem* se kretanje odvijalo i za dužinu vremena *tokom kojeg* se telo kretalo.

Rešenjem *Stadiona* uz pomoć prethodnog razlikovanja matematičkog i fizičkog prostora i matematičkog i fizičkog vremena izbegnut je svaki atomizam, svako pozivanje na atome, *topone* ili *hronone*, protiv kojih je uperena francuska interpretacija *Stadiona* (vidi str. 199).

Mi smo prihvatili Zenonov zaključak da u kinematičkim uslovima poput onih koji su pretpostavljeni u *Stadionu* mora doći do *modifikacije* dužina tela koja se kreću i kad su ona kruta i jedinica mere prethodno definitivno fiksirana, zbog čega nije moguće dati jednoznačan odgovor na pitanje o dužini pređenog puta; prihvatili smo da to isto važi i za dužinu vremena u kojem se promena položaja odigrala. Neobičnost jednog takvog zaključka pokazala se, međutim, tek u savremenoj fizici – posle skoro 24 veka (!) – zato što su i kod Aristotela i u celoj klasičnoj fizici modifikacija dužina prostornih i vremenskih intervala i njihova posledična nejednoznačnost omalovažene bilo zbog manje-više spontanog povlašćivanja izvesnih tela, ili sistema, kao referencijalnih bilo zbog okolnosti što se – iako ne *inter*-sistemski, ono bar *intra*-sistemski jednoznačnost dužina može očuvati, i što je u takozvanim galilejskim sistemima na osnovu numeiričkih vrednosti u jednom lako odrediti vrednost u drugim sistemima.

Arisotel je, kao što smo videli (§ 38 d, str. 191, § 69, str. 320–1), požurio da navede uslove koji će dužine prostornih i vremenskih intervala učiniti jednoznačnim. On je „ukazao" na to da jedno od tela AAAA, BBBB i ΓΓΓΓ (a u krajnjoj liniji stadion) *miruje* (vidi slike na str. 193–194) i da su ostala dva tela prešla put koji je jednoznačno određen dužinom dela stadiona duž kojeg su se kretala, gde je ὄγκος jedinica mere. Slično tome bi, svakako, i vreme trebalo da bude jednoznačno određeno nekim ravnomernim kretanjem u odnosu na telo koje miruje[1].

Aristotelovo „ukazivanje" na telo koje miruje ipak je *više* od običnog ukazivanja. Pre svega, *zbog čega* je jedno od tela AAAA, BBBB i ΓΓΓΓ povlašćeno epitetom mirujućeg? Odgovoriti da je to *očigledno* suviše je kinički (up. Antistenovo pobijanje, § 41, str. 205) i barem u prvom koraku predstavlja ogrešenje o podrazumevano razlikovanje suštinskih i slučajnih karakteristika primera na kojem je argument izložen. Slučajno je, naime, to što jedno od tela AAAA, BBBB i ΓΓΓΓ *stadion*, za koji nama *igleda očigledno* da miruje. Aristotel bi mogao da uzvrati da iako je slučajno to što je u primeru jedno od tela stadion mirujuće telo u odnosu na koje se dužina određuje ipak mora postojati; ali to bi već bio početak dublje diskusije s neizvesnim ishodom, ne više argument „na osnovu očiglednosti".

Aristotel je u drugom kontekstu – raspravljajući o odnosu tela i mesta, analogno raspravi o odnosu promene i vremena – ne osvrćući se na *Stadion*, eksplicirao tvrdnju o postojanju apsolutnog stvarno mirujućeg zajedničkog mesta, odnosno prostora (τόπος ὁ μὲν κοινός) u kojem se nalaze sva tela (ἐν ᾧ ἅπαντα τὰ σώματά ἐστιν) (*Aristotle 21*, 209 a 32–33) i u kojem čak postoje dole i gore – jer je taj zajednički prostor određen apsolutno mirujućim telima kao što su Zemlja i zvezde stajaćice, s tim što je Zemlja dole jer teška tela ka njoj padaju (*ibid.*, 212 a 21–31). Kada se jedinice mere jednom fiksiraju[2], onda je dužina pređenog puta i proteklog vremena jednoznačno određena *u odnosu* na taj τόπος ὁ μὲν κοινός i *u odnosu* na neko ravnomerno kretanje (ὁμαλὴ κίνησις) (up. gore, str. 171).

Jednoznačnost dužina se može tretirati i samo *relativno*, relativno u odnosu na *slobodno izabrani* referencijalni sistem, ali i to nas možda može zadovoljiti: nije neophodno *tvrditi* da *baš ovo* telo među telima AAAA, BBBB i ΓΓΓΓ miruje, a što je za Aristotela bio stadion, dovoljno je *postulirati* da *jedno, bilo koje* od tela AAAA, BBBB i ΓΓΓΓ miruje i iako ćemo *u zavisnosti od toga* da li smo postulirali da miruje AAAA, BBBB ili ΓΓΓΓ dobijati *numerički različite rezultate*, ipak će pod *jednim, bilo kojim* postulatom – dužine biti *jednoznačno* određene.

Mogućnost ovakvog relativnog povlašćivanja jednog tela, odnosno jednog referencijalnog sistema u cilju jednoznačnog određenja prostornih i vremenskih dužina predstavlja osnovu klasičnog *principa relativnosti* galilejsko-njutnovske kinematike (vidi *Galilei*, „Treći dan": Ravnomerno kretanje, teoreme 4-6): koliko god da je tela ili koordinatnih sistema koji se jedni u odnosu na druge translatorno pravolinijski kreću, dužine pređenih puteva i proteklih vremena biće unutar svakog od njih jednoznačno određene, a zakoni kinematike će u ovim sistemima biti invarijantni u pogledu forme. Tako je, na primer, telo BBBB prešlo u odnosu na telo ΓΓΓΓ dvostruko duži put nego što je prešlo u odnosu na telo AAAA, *bez obzira* na to koje je telo izabrano kao mirujuće.

Ako su tela AAAA, BBBB i ΓΓΓΓ iz položaja

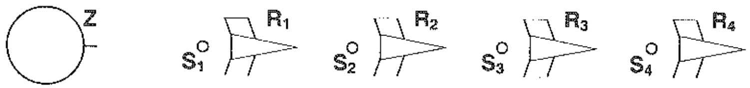
```
          A A A A
      B B B B
                  Γ Γ Γ Γ
```

došla u položaj

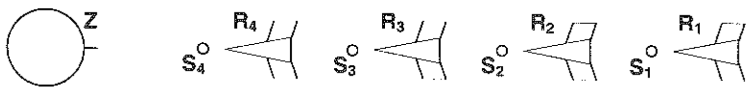
```
      A A A A
      B B B B
         Γ Γ Γ Γ
```

i ako uzmemo da je telo AAAA mirujuće, onda su se tela BBBB i ΓΓΓΓ kretala u *suprotnim* smerovima, *modifikacija dužine je takva* da 2A vrede koliko 4Γ a BBBB i ΓΓΓΓ se *uzajamno relativno skraćuju*. Ako je pak telo ΓΓΓΓ mirujuće, onda se AAAA i BBBB kreću u *istom* smeru, no *modifikacija dužina* je *opet takva* da 2A vrede koliko 4Γ, samo sad se, zato što smo rekli da ΓΓΓΓ miruje, AAAA i BBBB *uzajamno kinematički istežu*. Što važi za modifikacije prostornih intervala u pogledu dužine, važi i za vremenske intervale, jedino su sad skraćenje i „istezanje", to jest skraćenje i produženje, zavisni od smera kretanja tako da kod približavanja dolazi do skraćenja a kod udaljavanja do „istezanja".

Pretpostavimo da se raketa (R) *udaljava* od Zemlje (Z) izvesnom stalnom brzinom i neka R_1, R_2, R_3, R_4 označavaju redom položaje posle 1 s, 2 s, 3 s, 4 s (vidi sliku).



Neka posle svake sekunde s rakete budu emitovani signali – svejedno koje prirode – s_1, s_2, s_3, s_4. *Koje* su to „sekunde“ u kojima se emituju ovi signali? Neka su to sekunde *na časovniku u raketi* R. No, s obzirom da se R udaljuje od Z, signali s_1, s_2, s_3, s_4 *neće* stizati na Zemlju *svake* sekunde *po zemaljskom vremenu*, jer signali do Zemlje *sve duže* putuju s obzirom na emisije u R_1, R_2, R_3 i R_4. Tako će *vremenskim intervalima* među emisijama u R odgovarati *vremenski intervali prijema koji su duži* od 1 s na Z.



Pretpostavimo sad (vidi sliku) da se raketa R *približava* Zemlji (Z) istom brzinom kojom se od nje udaljavala i da se signali s_1, s_2, s_3, s_4 takođe emituju svake sekunde po raketnom satu. Oni, zbog se manjeg rastojanja rakete (R) od Zemlje (Z) stižu na Zemlju u intervalima *kraćim* od 1 s mereno zemaljskim časovnikom i to kraćim onoliko koliko su vremenski intervali prijema bili duži prilikom udaljavanja rakete od Zemlje.

Iako će numerički iznos u rezultatu koji treba da predstavlja dužinu pređenog puta tela BBBB zavisiti od toga da li smo za referencijalno, to jest mirujuće telo izabrali AAAA ili ΓΓΓΓ – kao što će od toga zavisiti i da li će kinematička modifikacija koju

BBBB doživljava biti skraćenje (skraćenje u odnosu na ΓΓΓΓ) ili istezanje (istezanje u odnosu na AAAA) – on *neće zavisiti* od toga *s kojeg tela*, odnosno *iz kojeg sistema* se posmatra, to jest meri. Slično tome, i ako su satovi u vasionskom centru na Zemlji i u raketi bili usaglašeni pre poletanja, za određenje razmaka između signala posle poletanja neće biti svejedno da li se kao centralni časovnik izabere zemaljski ili raketni, to jest da li se uzme da se raketa udaljava od Zemlje ili Zemlja od rakete, ali, kada je to jednom odlučeno, dužina razmaka *neće zavisiti* od toga da li ga merimo sa Zemlje ili iz rakete; u oba slučaja ćemo na isti način „odračunati“ razliku u dužini vremenskog razmaka između signala koja nastaje zbog toga što se ovi ne emituju sa istog mesta.

Kao što smo se jednom pomirili s tim da ne postoji jedinstveno κυρίως ἕν tako se sad možemo pomiriti s tim da pod kinematičkim uslovima dolazi do „skraćivanja“ i „istezanja“ prostornih i vremenskih intervala, ali i umiriti uviđajući da su te dužine jednoznačno odredive iz bilo kojeg sistema kad se jednom fiksira referencialni. Štaviše, ako su nam date vrednosti određene iz jednog referencijalnog sistema, možemo izračunati koliko bi one iznosile u drugom sistemu; ako je u miru A = B= Γ = σ i ako je BBBB prešlo put od 2σ a isto toliko i ΓΓΓΓ samo u suprotnom smeru, znaćemo da je BBBB prešlo put od 4σ gledano iz ΓΓΓΓ; ako znamo kojom se brzinom raketa udaljuje od nas i kojom se brzinom signali kreću prema nama, znaćemo i u kojem su ritmu emitovani po raketnom vremenu, odnosno kako tamo vreme teče, i ako smo u prethodnom dogovoru s onima koji ih emituju, moćićemo tako da proverimo da li tamo sat još uek radi onako kako je radio pre lansiranja, to jest da li bi u slučaju da raketa stoji razmaci između emisija i prijema i dalje bili identični.

Da bismo govorili o apsolutnoj jednoznačnosti dužina prostornih intervala, naravno uz prethodno fiksiranu jedinicu mere, potrebno je apsolutno povlastiti bar jedno telo epitetom apsolutno mirujućeg, onako kako je Aristotel povlastio Zemlju i zvezde stajaćice, ali vidimo da i bez toga možemo dobiti usaglašene rezultate preko relativnih povlašćivanja zahvaljujući intrasistemskoj jednoznačnosti i intersistemskoj prevodivosti.

Za apsolutnu jednoznačnost vremena potrebno je apsolutno povlastiti jedan časovnik, ali mi uobičajeno to ne činimo, već koristimo više, prethodno u miru usaglašenih časovnika, dobijajući jedno nezavisno, opšte, svima zajedničko vreme. To što su sva intrasistemska vremena ista jer su časovnici tako usaglašeni, omogućava nam da ne govorimo o prostorvremenskim koordinatama, već o prostornim koordinatama kojima se vreme dodaje kao *spoljašnji parametar*; zato i uzimamo da su dva događaja u dva sistema jednovremena ako su se desila u istom trenutku po odgovarajućim prethodno usaglašenim časovnicima, a ne u istom trenutku po jednom od časovnika.

Strategija *relativnog povlašćivanja* tela, ili sistema, kao mirujućih, odnosno referencijalnih, trijumfovala je i u klasičnoj *mehanici* i taj trijumf kao da je definitivno omalovažio poentu *Stadiona*: invarijantnost fizičkih zakona odražava se u galilejskim sistemima, sistemima koji se jedan u odnosu na drugi translatorno kreću, pored ostalog i zato što princip relativnosti i *inter*-sistemske prevodivosti važi i pod pretpostavkom *zakona inercije* (vidi *Newton 2*, Aksiomi ili zakoni kretanja, Zakon 1) – što su kinematički referencijalni sistemi ujedno i *inercijalni* sistemi, što se, naime, tela unutar sistema koji se u odnosu na druge sisteme kreće ravnomerno translatorno ponašaju tako kao da sistem o kojem je reč apsolutno miruje!

U vozu (koji se mnogo ne trucka) možemo igrati šah jer se tabla i figure ponašaju *inertno*, ostajući na onom istom metu u odnosu na voz i našeg protivnika u kojem smo ih mi ili naš protivnik ostavili. Ako se putujući dovikujemo sa nekim s kraja na kraj vagona, zvuk će od nas do njega stići za isto vreme za koje će stići

i kad voz stoji u stanici. Ako ispustimo kutiju cigareta, ona će pasti pored nas po pravoj liniji. Voz nije samo jedan kinematički referencijalni sistem, on je i jedan *inercijalni* sistem. Voz jeste u pokretu u odnosu na predeo kroz koji juri, ali stvari se u njemu ponašaju kao kad je u stanici. Galilejski sistemi, uvek samo relativno povlašćeni kao referencijalni, isto su tako povlašćeni kao inercijalni; ako ne mora biti apsolutnog mirovanja jer ne mora nužno postojati τόπος ὁ μὲν κοινός, ne moraju ni sva ponašanja biti inertna u odnosu na *jedan te isti* referencijalni sistem.

Ako prilikom pljačke voza u pokretu dođe do puškaranja i skretničara koji se nije na vreme sklonio pogodi neki zalutali metak ispaljen u smeru kretanja voza, on će u nevino skretničarevo telo uleteti većom brzinom nego što bi to bio slučaj da je bio ispaljen u istom trenutku sa istog odstojanja sa nekog drveta. Metak ispaljen iz voza će isto rastojanje preći za kraće vreme, a za isto vreme će preći veće rastojanje. U odnosu na skretničara kao referencijalno telo brzina metka bi se galilejski izračunala tako što bi se uobičajenoj, poznatoj brzini njegovog kretanja u odnosu na sistem u kojem je ispaljen, a što je ovde voz, *dodala* brzina kojom je voz tutnjao pored skretničara. Da je metak ispaljen u smeru suprotnom smeru kretanja voza, brzinu kretanja voza trebalo bi, naravno, oduzeti od poznate brzine kretanja metka. Ako su voz i tela koja u odnosu na njega miruju određeni Dekartovim koordinatnim sistemom (x, y, z) sa fiksiranom jedinicom mere, ako je skretničarev sistem određen koordinatnim osama x', y', z' sa istom jedinicom mere i ako je vremenska jedinica mere takođe fiksirana i ista za oba sistema, onda je, ukoliko se kretanje jednog sistema, $S(x, y, z, t)$, u odnosu na drugi, $S'(x', y' z' t')$, odvija samo duž ose x, tako da je $y = y'$ i $z = z'$, rastojanje u sistemu S koje je prešao metak ispaljen na mestu (x_0, y_0, z_0) jednako x_0+Vt, a u sistemu S' $x_0+(V \pm v)t$, gde je V brzina metka u S, a v brzina kojom se sistemi S i S' kreću jedan u odnosu na drugi.

Iako pretpostavka o intercijalnim sistemima – pretpostavka da ćete lakše ubiti skretničara, jer ćete dublje prodreti u njegovo telo, ako pucate iz voza koji mu se približava nego sa drveta – nije intuitivno očigledna, mada nije ni kontraintuitivna, iskustvo je dugo išlo na ruku Galileju i Njutnu, pošto je izgledalo da se *sva* tela ponašaju inertno u *bilo kojem* sistemu.

120. Rešenje Stadiona i Lorencove transformacije

Koliko je za umanjivanje značaja opšte pouke *Stadiona* – koji ukazuje na nejednoznačnost dužina prostornih i vremenskih intervala zbog njihovih modifikacija uslovljenih *čisto kinematičkim razlozima* – značajno to što su se galilejski kinematički *referencijalni* sistemi izostavljali i kao *inercijalni*, pokazalo se tek onda kada je otkriveno da se izvesni entiteti – elektromagnetski – ne ponašaju inertno (vidi *Einstein 3*, str. 51).

Među astronomima de Siter je bio prvi koji je uočio neinertno ponašanje svetlosti (vidi *Einstein 2*, str. 17), a od mnogih eksperimenata vršenih u devetnaestom veku – koji su to isto pokazivali – Fizoov je bio proslavljen po razrađenosti i preciznosti (vidi *ibid.*, str. 39–41).

Ako bismo u skretničara pucali iz laserske puške, bilo bi svejedno da li pucamo iz voza koji mu se približava, ili iz voza koji se od njega udaljuje, ili sa nekog drveta – „metak“ će u njegovo telo uleteti istom brzinom i do njega će stići za isto vreme ako su rastojanja u trenutku pucanja ista, kao da smo uvek baš mi „u centru sveta“, poput jedne „Raselove muve“ (*Russell 1*, str. 28–29).

Ako se svetlost kreće brzinom *c*, približno 300 000 km/s, u sistemu *S'* koi se udaljava od sistema *S* izvesnom brzinom *v*, ona bi u sistemu *S*, shodno galilejskim transformacijama, trebalo da se

kreće brznom većom od 300 000 km/s, naime brzinom *c+v*. Protiv toga, međutim, govore svi poznati eksperimenti, sugerišući nam da postuliramo konstantnost brzine svetlosti i njenu nezavisnost od sistemâ. Ako se pak svetlost i u sistemu *S* kreće brzinom od 300 000 km/s, onda je dužina nekog rastojanja koje je svetlost prošla za 1 s i 300 000 km i više od toga, 300 000 km u sistemu *S'* a više od toga u sistemu *S*; komplementarno tome, svetlost je 300 000 km prešla i za 1 s i za kraće vreme, za 1 s u *S'*, za kraće vreme u *S*. Lako je videti da bi u slučaju da se *S* i *S'* kreću jedan prema drugome ogrešenje o galilejske transformacije bilo inverzno.

Jedna ovakva situacija nas ne mora šokirati ako doslovno shvatimo zaključke *Stadiona*, pomirivši se s tim da iz *čisto kinematičkih* razloga može doći do modifikacije dužina prostornih i vremenskih intervala. Ali, uz tradicionalno potcenjivanje značaja takvih zaključaka, činjenice uporno „nisu prihvatane“, čak i onda kada su matematički već bile izvedene transformacije – Lorencove transformacije – koje su zamenile galilejske i koje su omogućavale ne samo da tačno izračunamo koliko bi se rastojanja koja zbog uzajamnog kretanja sistema postaju ista razlikovala *kada bi se* direktno sameravala – odnosno koliko su rastojanja koja bi samerena u miru bila ista različita zbog uzajamnog približavanja ili udaljavanja sistema – već i da usaglasimo lokalna vremena u tim sistemima!

Ako se *S(x, y, z, t)* i *S'(x', y', z' t')* udaljavaju translatorno i ravnomernom brzinom *v* duž *x*-ose, onda je, naravno, $y' = y$ i $z' = z$, dok je $x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ i $t' = (t - (v/c^2)x)/\sqrt{1 + v^2/c^2}$ (što ćemo pokazati u napomeni)[1]. Tako će, na primer, rastojanje [0, 1] na apscisi u sistemu *S'* u *S* iznositi $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ jer je početak u *S* određen kao $0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$, a kraj kao $1 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Nemajući u vidu staru Zenonovu poentu, Lorenc je ove svoje transformacije interpretirao pomoću *specijalne hipoteze*, koja je poznata kao Lorenc-Ficdžeraldova hipoteza (vidi *Lorentz*, I, § 2, str. 4 i dalje)[2], po kojoj kontrakcija ili istezanje nisu *recipročni s obzirom na sisteme S i S'*, već su *doslovne* promene dužine jednog predmeta, tako da bi se pokazale pri zamišljenom protivčinjeničkom *direktnom sameravanju*. Lorencova kontrakcija je *doslovno skaćivanje dužine predmeta u pravcu kretanja* u odnosu na jedinicu mere, u samom sistemu, a ne *samo recipročno* u *S* u odnosu na *S'* i obrnuto, zbog njihovog približavanja ili udaljavanja.

Za ekspoziciju Specijalne teorije relativiteta dovoljni su: opšta *Zenonova poenta iz Stadiona* da bi se prihvatila recipročna modifikacija postornih i vremenskih dužina, *Fizoov*, ili neki sličan, *eksperiment* kao primer za otkazivanje važenja galilejsko-njutnovskog zakona inercije u slučaju elektromagnetskih fenomena i *Lorencove transformacije* kao matematičko sredstvo za tačno izračunavanje prostorno-vremenskih skraćenja i istezanja. Ekspozicija ne bi, dakle, bila apriorna *samo onim delom* u kojem se pozivamo na eksperimente koji govore o neinertnom ponašanju svetlosti i njenoj konstantnoj brzini.

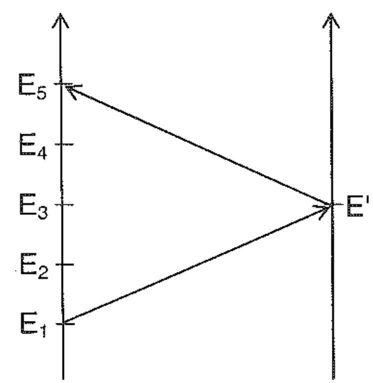
121. Prostor, vreme i prostorvreme

Izvođenje recipročnih modifikacija prostorno-vremenskih dužina iz Lorencovih transformacija, koje je izvršio Ajnštajn (vidi *Einstein 2*, str. 33–37), sâmo po sebi ništa ne *razjašnjava*, jer, kao što je Bor upozoravao Hajzenberga, „potpuno fizičko objašnjenje mora apsolutno prethoditi matematičkoj formulaciji"; Lorencove transformacije samo su sredstvo za egzaktno određivanje kinematičkih modifikacija dužina intervala u slučaju entiteta koji se ne ponašaju inertno, koje moraju biti shvaćene po uzoru na argumentaciju iz *Stadiona*.

U galilejsko-njutnovojskoj mehanici *t* je nezavisno promenljiva, koja, kao što smo videli, ne zavisi od prostornih koordinata, odnosno izbora koordinatnog sistema kojim se mesta u prostoru određuju zato što je svaki galilejski sistem, po pretpostavci, obskrbljen po jednom „kopijom" standardnog časovnika kojim se vreme meri. Vreme je tako spoljašnji parametar, ili – ono je isto u svim sistemima. Ovakvo tretiranje vremena ima svoje opravdanje u svakodnevnom shvatanju i svakodnevnom govoru. Prijatelji razdvojeni hiljadama kilometara mogu u istom trenutku pomisliti jedan na drugog, jer se mogu dogovoriti da to učine i da u tu svrhu koriste precizne satove, ili mogu to učiniti spontano a naknadno utvrditi da se to desilo.

Ako se isključi mogućnost trenutnog delovanja na daljinu, onda se u klasičnoj mehanici jednovremenost dva prostorno razdvojena događaja može jednoznačno odrediti *i prema nemogućnosti njihovog međusobnog uticaja*, pošto bi, zahvaljujući drugom Njutnovom zakonu kretanja, u svim drugim slučajevima uticaj bio moguć: ne postoji gornja granica brzine kretanja, odnosno prenošenje signala.

Ukoliko, međutim, ne postoji brzina veća od brzine prostiranja svetlosti, koje je konstantno i nezavisno od inercijalnog sistema, prethodno određenje jednovremenosti ne bi bilo moguće.



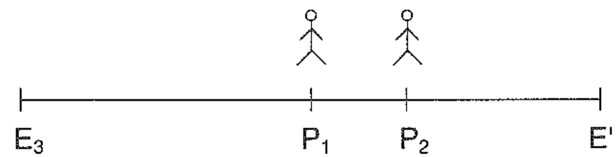
Ako je „svetska linija“ linija koja predstavlja izvestan niz događaja sa izvesnim, u niz poređanim, prostornim i vremenskim koordinatama, i ako leva „svetska linija“ na poznatom dijagramu Minkovskog (up. *Minkowski*, str. 76 i dalje) (vidi sliku) predstavlja vremenski uređen niz događaja među kojima su i događaji E_1, ..., E_5, gde prvi može uticati na drugi, drugi na treći, treći na četvrti i četvrti na peti, i ako E_1 može uticati na događaj E' na desnoj „svetskoj liniji“ i E' može uticati na E_5, ali je prostorno rastojanje događaja E_2, E_3 i E_4 od E' suviše veliko da bi shodno gornjoj graničnoj brzini, brzini svetlosti, bilo dovoljno vremena za međusobni uticaj, onda su i E_2, i E_3, i E_4 „kandidati“ za „događaj istovremen sa E'“.

No to što se u slučaju postojanja gornje granične brzine jednovremenost događaja ne može jednoznačno fizički odrediti na jedan od načina na koji se to u klasičnoj mehanici može učiniti, naime preko nemogućnosti uzajamnog uticaja, još ne znači da se jednovremenost E' sa jednim i samo jednim od događaja koji su predstavljeni na levoj „svetskoj liniji“ ne može *nikako* fizički odrediti, ne znači, naime, da vreme događaja E' mora, kao „lokalno“ (vidi *ibid.*, str. 82), ostati neuporedivo sa vremenima događaja kao što su E_2, E_3 i E_4. Pretpostavimo da se posmatrači nalaze na polovini rastojanja od mesta na kojima se zbivaju E_2, odnosno E_3, odnosno E_4, i E' i da su E_2, E_3, E_4 i E' sevanja munja. Ne bi li posmarači, od slučaja do slučaja, već prema tome koji je od dva signala, levi ili desni, stigao pre, mogli da odrede vremensko mesto događaja E' u odnosu na događaje E_2, E_3 i E_4.

Ajnštajn ukazuje na slučajeve koji treba da dovedu u pitanje mogućnost takvog određenja (vidi *Einstein 2*, str. 25 i dalje). Ako su dva posmatrača bila na pola puta između, recimo, E_3 i E', onda levi i desni bljesak mogu stići jednovremeno do onog koji miruje, a jedan od njih, recimo desni, pre od drugog, odnosno levog, do onog koji se kreće prema E'.

Ajnštajnovo ukazivanje je sasvim načelno. Mi smo videli da se vreme u *opštem* slučaju mora smatrati lokalnim već ako se određuje *iz* različitih galilejskih sistema (vidi § 119) a ne „kopijama“ jednog standardnog časovnika. No takvi slučajevi u klasičnoj mehanici nisu doveli do revizije pojma jednovremenost. Naime, ako u igru uključimo kretanje, odnosno brzinu kretanja posmatrača, lako ćemo odediti i vremensko mesto događaja E_3 i E' jednog u odnosu na drugi. Nezgoda sa Ajnštajnovim primerom je u tome što ne ističe poentu primera za njegovu svrhu, ne pokazuje (nigde u *Einstein 2*, VIII, str. 21-24, *Einstein 3*, I, § 1, str. 38-43) u čemu je razlika između klasičnog i novog tretiranja opisane situacije, u čemu je razlika između *svih ostalih* slučajeva, uključujući slučajeve u kojima je reč o zvučnim signalima, dakle, mehaničkim talasima, i slučajevima u kojima je reč o *elektromagnetnim talasima*, odnosno *svetlosnim* signalima. Posmatrač koji se kreće prema E' će pre *čuti* grom s desne strane baš kao što će pre *videti* munju na desnoj strani.

Tajnu sadržanu u neobičnom ponašanju svetlosti, naime u njenom neinertnom ponašanju, moramo razotkriti vraćajući značaj poenti *Stadiona*.



Pretpostavimo da je osim u E_3 i E' munja sevnula i na polovini puta od E_3 do E' u trenutku kad su se na tom mestu nalazila dva posmatrača, P_1 i P_2 (to je na slici mesto gde se nalazi P_1). Obojica su ostala živa, ali dok se P_1 ukopao u mestu, P_2 je počeo da beži prema mestu gde se desio događaj E'. Kada svetlosni zrak koji je pošao iz E' stigne do P_2 i ponovo ga uplaši (vidi sliku), svetlosni zrak od munje zbog kojeg je P_2 počeo da beži stići će do mesta gde se zbilo E'. No trebalo bi, isto tako, da je svetlosni zrak koji je pošao iz mesta gde se zbilo E' stigao do posmatrača koji se ukopao od straha (na slici je to mesto gde je P_1), jer je zrak koji je odatle pošao dok su P_1 i P_2 bili zajedno stigao do mesta gde se zbilo E'.

Pošto je nemoguće da svetlosti zrak s desna stigne *istovreneno* do posmatrača P_1 i P_2, jer oni više *nisu zajedno*, ostaje nam da prihvatimo da ne treba reći da je svetlosni signal od događaja E' pošao jednovremeno sa signalom koji je pošao od P_1 i P_2, već da, pošto se P_1 i P_2 jedan u odnosu na drugog kreću, P_1 i P_2 imaju *različita lokalna vremena*. No besmisleno je strogo uzev govoriti prosto o razlici u trenutku (ἐν τῷ νῦν), ta razlika može biti eventualo eufemistički način da se izrazi razlika između vremenskih *intervala* u kojima je desni signal stigao do P_1, odnosno P_2. Za P_2 svetlostni zrak je stigao do mesta gde se zbilo E' kada je signal s tog mesta stigao do *njega*, dok je za P_1 signal stigao do mesta gde se zbilo E' kad je signal s tog mesta stigao do *njega* (do P_1). Nije protivrečno reći da je svetlosni zrak krećući se konstantnom brzinom stigao u dva različita trenutka na mesto gde se zbilo E' *ako* se to određuje u odnosu na *dva* posmatrača koja se jedan u odnosu na drugog *kreću*. Neintertno ponašanje svetlosti, pak, zahteva da se to *baš tako određuje*, je se *ista* svetlost *i* u odnosu na jednog *i* u odnosu na drugog *isto* kreće.

Pretpostavimo da je *statičko* rastojanje – rastojanje mereno u miru – od mesta gde su se nalazili P_1 i P_2 i mesta gde se zbilo E' – 299 793 km, koliko tačno iznosi rastojanje koje svetlost pređe za 1 s. Nije protivečno reći da je *isti svetlosni zrak*, krećući se brzinom *c* sigao do mesta gde se E' zbilo *i za* 1 s *i za manje od* 1 s *ako* se vreme određuje u odnosu na *dva* različita posmatrača koji se jedan u odnosu na drugog udaljuju, pa je rastojanje koje je svetlosni zrak imao da pređe u odnosu na P_2 *manje* od rastojanja

koje je imao da pređe u odnosu na P_1, to jest manje od statičkog rastojanja do mesta gde su se P_1 i P_2 zajedno nalazili *pre* sevanja i mesta gde se zbilo E'. S jedne strane, P_1 i P_2 ne mogu biti zajedno ἐν τῷ νῦν *sensu stricto*, s druge strane, oni *nisu* zajedno *posle* emisije svetlosti; *zato* nije protivrečno reći ni da je rastojanje koje je jedan isti zrak prešao, to jest put duž kojeg se kretao, *i* 299 793 km *i* manje od toga, ni da je vreme za koje je stigao do mesta gde se zbilo E' *i* 1 s *i* manje od toga.

Ako je interval koji je za P_2 manji od 1 s za P_1 jednak 1 s onda to znači da za posmatrača P_1 posmatrač P_2 stari sporije nego što P_2 sam za sebe stari. To je *dilatacija vremena*. Ova dilatacija vremena je *uzajamna* utoliko što se – dok se P_2 udaljava od P_1 i P_1 udaljava od P_2, i što gledano od P_2 *na levo* s obzirom na svetlosni zrak koji dolazi od E_3 za P_2 P_1 sporije stari. Mi ovde imamo u vidu čisto *kinematičke efekte* (vidi *Einstein 3*, §§ 1–5), bez obzira na to što je *uzrok* fenomena o kojima je reč neinertno ponašanje svetlosti.

Tek modifikacije vremenskih intervala koje su posledica uzajamnog kretanja objašnajvaju *relativnost jednovremenosti trenutaka*, jer su trenuci granice vremenskih intervala, i zato izvođenje dilatacije iz relativnosti jednovremenosti trenutaka koje je izvršio Ajnštajn (*Einstein 3*, str. 38–43, *Einstein 2*, IX, str. 25–27), znači još jedno stavljanje kola ispred konja. Ako su intervali od 1 s u sistemu posmatrača P_2 duži od 1 s za posmatrača P_1, onda su *zato* otkucaji sekundara koje bi P_1 primao od P_2 *nesinhronizovani* sa otkucajma njegove vlastite sekundare.

U primeru iz § 119 (str. 365-6) sa raketom koja se prvo udaljavala a zatim približavala Zemlji priroda signala nije bila značajna da bi se konstatovalo povećanje, odnosno smanjenje razmaka između poslatih signala kad se oni registruju u drugom sistemu. Sada ćemo – da bismo na istom primeru razjasnili specijalnorelativističku dilataciju vremena i time specifične razloge koji su doveli do toga da se u fizici vreme najzad uvede kao četvrta koordinata – pretpostaviti da su signali svetlosni.

Nastojeći da reši takozvani paradoks blizanaca (koji ćemo razmotriti u § 122), Bergson uopšte nije uzeo u obzir specifičnost elektromagnetnskih fenomena (vidi *Bergson 1*, gl. 4), čime je potpuno zaobišao i specifičnost dilatacije vremena o kojoj je reč u Specijalnoj teoriji relativiteta na osnovu koje je i konstruisan „paradoks blizanaca“. Ali, s druge strane, specijalnorelativistička dilatacija ne poništava opšti značaj smera kretanja i okolnost da svako udaljavanje jednog sistema, bez obzira na tip signala koji ga povezuju s drugim sistemom, izaziva izvesno usporenje vremena gledano iz drugog sistema, dok približavanje izaziva odgovarajuće ubrzanje. Opštu istinu o „rastezanju“ vremena pri udaljavanju sistema treba pažljivo razdvojiti od dodatne, specijalnorelativističke dilatacije.

Svetlosni signal s_1 upućen ka Zemlji sa rakete koja se od Zemlje udaljava (vidi sliku na str. 365), udaljava se od rakete univerzalnom brzinom svetlosti, c, ali se on od fiksiranog mesta sa kojeg je emitovan *takođe* udaljava brzinom c, budući da se, zbog neinertnog ponašanja svetlosti, kreće kao da je emitovan sa rakete koja bi na tom metu mirovala. Na tom mestu *kao fiksiranom* vreme je zemaljsko, dakle, od tog mesta statički posmatranog signal se udaljuje tako što za jednu zemaljsku sekundu pređe rastojanje od 299 793 km. Pošto je za *tu* sekundu raketa već prešla izvestan put, *to je po zemaljskom vremenu na fiksiranom mestu emisije* raketno vreme usporeno, jer bi po raketnom vremenu rastojanje od 299 793 km zajedno sa rastojanjem od fiksiranog mesta do rakete moralo da bude pređeno za *više od* jedne sekunde. to je specijalnorelativistička dilatacija.

Prilikom približavanja rakete Zemlji, signal s_4, po pretpostavci emitovan sa istog fiksiranog mesta sa kojeg je u odlasku emitovan signal s_1, udaljavaće se sa tog mesta – koje *kao fiksirano* ima

zemaljsko vreme – na isti način kao u odlasku, baš kao što će to činiti i raketa, i zato će opet doći do iste specijalnorelativističke dilatacije. Ali, to je dilatacija u odnosu na isto fiksirano mesto, koje *kao statičko u odnosu na Zemlju* ima *zemaljsko vreme*, to *nije* dilatacija vremena u odnosu na *samu Zemlju*. Specijalnorelativistička dilatacija odnosi se, dakle, na usporenje vremena u odnosu na mesto emisije s obzirom na *zajedničko zemaljsko vreme*, to jest vreme koje je (samo) statički posmatrano isto i na Zemlji i na mestu emisije. Nezavisno od *te* dilatacije, signali prilikom približavanja rakete Zemlji na Zemlju stižu ne samo učestalije nego pri odlasku već učestalije nego da su emitovani s jednog istog mesta.

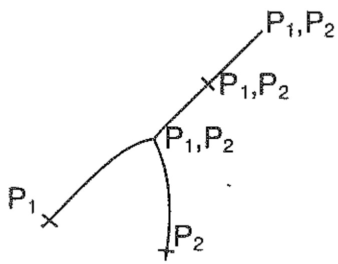
Razlog za uvođenje pojma *lokalnog vremena*, odnosno *posebne vremenske koordinate*, leži upravo u tome što mesto sa kojeg su emitovani signali s_1 (u odlasku) i s_4 (u povratku) ima zemaljsko vreme *samo statički posmatrano*, ali ne i kao mesto emisije signala s rakete *koja se kreće*. S jedne strane, raketa koja se kreće baš zato što se *kreće* ima vremensku koordinatu koja se razlikuje od vremenske koordinate na Zemlji – jer se vremenski intervali kojih je trenutak emisije granica *razlikuju* s obzirom na zemaljsko i raketno vreme – ali, s druge strane, vreme na mestu emisije – koje statički gledano ima zajedničko zemaljsko vreme – počinje da pokazuje *lokalni karakter* kad se kao *tertium comparationis* uzme raketno vreme.

Da raketa na mestu odakle su emitovani s_1 pri odlasku, s_4 pri povratku, *miruje* – ne bi nam bile potrebne Lorencove transformacije. Kad kažemo da je signal emitovan *s jednog mesta i u jednom trenutku*, mi još uvek nismo odredili činioce potrebne za preračunavanje lokalnih vremena iz sistema u sistem pomoću Lorencovih transformacija, jer, kako nas je Aristotel podučio, u trenutku (–ν τῷ νῦν) *sensu stricto* nema ni kretanja ni mirovanja. *Razlika u lokalnom vremenu* nastupa tek kad trenutak o kojem je reč tetiramo kao granicu *različitih* parova intervala.

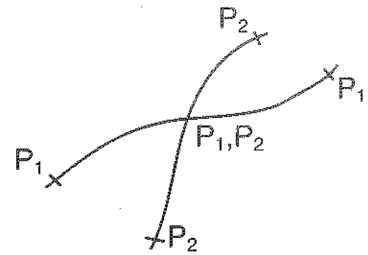
Zbog lokalnosti vremena i *mesto* kao mesto *događanja* mora biti ne samo prostorno već i prostorvremenski određeno i time čitav svet kao *svet događaja* postaje *prostorvremenski*. Taj svet se može nazvati svetom Minkovskog (up. *Minkowski*, str. 83–86)[1]; u svetu Minkovskog osnovni elementi su *događaji* koji su prostorvremenski, a ne stvari u prostoru s kojima se osim toga što su u prostoru i nešto dešava.

Ali i dalje, iako su satovi posmatrača P_1 i P_2 nesinhronizovani u svetu Minkovskog ako se ovi jedan od drugog udaljuju, oni rade *isto utoliko što* ih P_1 i P_2 mogu koristiti da *jednovremeno jedan na drugog pomisle*. Tako možemo govoriti o *dva pojma jednovremenosti* koji se *ne isključuju*.

Pošto ne prihvatamo da *sensu stricto* govorimo o događaju u trenutku (ἐν τῷ νῦν), odnosno u jednoj „svetskoj prostorvremenskoj tački“, mogli bismo jedino da govorimo o *jednovremenosti događaja tokom nekog vremenskog intervala*, odnosno o jednovremenosti na delu neke „svetske linije“. Ako bi se „svetske linije“ Minovskog na kojima P_1 i P_2 žive, a koje su prostorvremenske, *sustekle* u jednoj „svetskoj (prostorvremenskoj) tački“ i ako bi P_1 i P_2 *izvesno vreme proboravili zajedno* (vidi sliku) njihovi u



miru usaglašen časovnici *bi za to vreme na tom mestu*, to jest na istoj „svetskoj liniji“ *pokazivali isto vreme*, a njihove sekundare bi kucale *sinhronizovano*. Ako bi se „svetske linije“ na kojima P_1 i P_2 žive *samo presekle* i ako P_1 i P_2 ne bi na kratko bili zajedno (vidi



sledeću sliku), već bi njihovi položaji koincidirali samo u trenutku (–ν τῷ νῦν), da bi linije zatim produžile u različitim pravcima, njihovi časovnici ne bi imali kad da pokažu sinhronizovanost.

Uzimajući u obzir kinematičke i samo kinematičke činioce, jednom sinhronizovani časovnici će onda i samo onda raditi isto kad se „svetske linije“ tela na kojima se nalaze susteknu ili kad teku paralelno. Njihova sinhronizovanost neće zavisiti od njihove međuistorije, pošto smo u našim misaonim eksperimentima isključili eventualne uticaje *dinamičkh* činilaca, svega onog što bi zbog dejstva raznih sila moglo uticati na rad časovnika; zato i razmatramo samo slučajeve u kojima je brzina približavanja ili udaljavanja stalna, upravo kao u Ajnštajnovim primerima iz 1905, 1911. i 1916. godine (*Einstein 3*, str. 39–40, *Einstein 1*, str. 11–12, *Einstein 2*, str. 25–34).

Imajući u vidu dva pojma jednovremenosti, klasični pojam i pojam Minkovskog, važno je uočiti da su oni *međuzavisni*. Lokalna vremena na svetskim linijama različitih pravaca razlikuju se na tačno *određen* način *s obzirom na* časovnike koji *bi* na istom mestu radili sinhronizovano, kao što se prostorne dužine u izvesnim kinematičkim uslovima na *određen* način modifikuju *s obzirom na* fiksiranu jedinicu mere u odnosu na koju u miru *ne bi* bilo modifikacije.

Ova međuzavisnost statičke i kinematičke relativnosti dužina prostornih i vremenskih intervala, odnosno apsolutne i relativne jednovremenosti, ostala je ne samo neistaknuta kod samog Ajnštajna već je, kao što ćemo videti, on sam u jednom trenutku pobrkao svet koji je u prostoru *i* vremenu sa *prostorvremenskim* svetom Minkovskog.

Naravno, tvrdnja da u dva sistema koji se jedan od dugog udaljavaju ili jedan drugom približavaju časovnici koji su prethodno sinhronizovani rade isto, omogućujući prijateljima da istovremeno jedan na drugog pomisle, ne može direktno fizički da se proveri (utoliko parapsihologija nije svodiva na fiziku) i njeno značenje mora ostati *protivčinjeničko* i shvatljivo preko *kondicionala: kad bi* se sistemi sustekli, časovnici *bi* radili sinhronizovano, iako *de facto*, pod *datim* kinematičkim uslovima, ne pokazuju isto vreme.

S jedne strane, kontrakcija dužina, dilatacija vremena i relativnost jednovremenosti iako *objektivni* utoliko ukoliko su objektivni i kinematički uslovi koji do toga dovode ne isključuju *ispravnost* izvesnih provičinjeničkih kondicionala koji govore o statičkoj jednakosti ili nejednakosti dužina prostornih i vremenskih intervala i o apsolutnoj jednovremenosti ili nejednovremenosti u sistemima koji se jedan u odnosu na drugog kreću. S druge strane, kao što – ako se setimo odgovora u duhu kopenhagenške inerpretacije na navodni Ajnštajn-Podolski-Rouzenov paradoks – ispravnost izvesnog protivčinjeničkog kondicionala kojim se tvrdi *da bi* telo koje se kreće bilo u izvesnom položaju *da se* nešto dogodilo, ili *da se* realizovao izvesni eksperiment, *ne implicira* da je telo u vremenu o kojem je reč *bilo* u položaju o kojem je reč, tako i ispravnost izvesnih kondicionala koji govore o tome *da bi* izvesne dužine bile jednake *kada bi* se direktno samerile, ili izvesni časovnici radili sinhronizovano *kada bi* se nalazili na istom mestu, *ne implicira* da te dužine nisu uzajamno kontrahovane, a časovnici uzajamno retardirani, iz izvesnih kinematičkih razloga.

122. „Paradoks" blizanaca

I ceo vek posle pojave prvog (objavljenog 1905. godine) od nekoliko Ajnštajnovih tekstova o onome što je kasnije nazvano Specijalna teorija relativiteta (STR), još uvek se ne može reći da je STR toliko teorijski razjašnjena da bi svako pitanje o značenju njenih ključnih pojmova i načina na koji objašnjava fenomene nužno poticalo iz pukog neznanja onoga koji pitanje postavlja. Neki skorašnji članci mogu da posluže kao primer za ovo. Citiraću dijagnozu izrečenu u jednom od njih, koja se odnosi na misaoni eksperiment sa dva časovnika koji je Ajnštajn 1911. opisao u članku „Teorija relativiteta" (*Einstein* 1, str. 12ff.), a Lanževen, iste godine, nazvao „Paradoksom blizanaca" (*Langevin*, str. 31): „...Studenti se često pitaju 'zašto' blizanac koji trpi ubrzanje manje stari i 'kada' se događa ekstra starenje blizanca koji je ostao kod kuće. Ova pitanja nisu dobro definisana u naučnom smislu, ali su podstakla raznovrsne analize (od kojih se mnoge mogu naći na stranicama ovog časopisa [*American Journal od Physics*]), koje su dobrim delom korisne dopune pedagogiji Specijalne teorije relativiteta" (*Boughn*, str. 792).

Ja se pridružujem Bunovoj pohvali analiza podstaknutih dvama navedenim pitanjima studenata (vidi, na primer, *Romer* , *Unruh*, *Good*), ali, za razliku od njega, smatram pitanja studenata ne samo savršeno dobro definisanim, i takvim da se na njih direktno može odgovoriti, već i više nego opravdanim s obzirom na veliki varijetet odgovora (ili barem načina na koji je „pravi odgovor" formulisan), pri čemu imam u vidu i odgovore velikih fizičara (uključujući tu i samoga Ajnštajna).

U bavljenju dvama studentskim pitanjima, srešćemo se s više objašnjenja paradoksa koja su barem loše formulisana, ako ne i direktno pogrešna. Nastojanje da se rasprše razne konfuzije koje ti odgovori uzrokuju, ili mogu uzrokovati, glavni je zadatak ovog članka.

a) Čisto foronomički opis paradoksa

Skoro sve rasprave o Paradoksu blizanaca počinju problemom simetrije: kako jedan od blizanaca može na kraju putovanja, kada se sretne s bratom, biti mlađi, ako su *udaljavanje* i *približavanje* simetrični procesi?

Bergson je ovaj problem simetrije rešio na način na koji je Aleksandar Veliki rešio problem

Gordijevog čvora: na kraju putovanja i neće biti starosne razlike medju bizancima, pošto će *relativna* razlika u starenju prilikom udaljavanja biti poništena *inverznom relativnom* razlikom u starenju prilikom približavanja. (vidi Bergson, str. 434ff.).

Standardnu reakciju na Bergsonovo „rešenje" predstavlja ukazivanje na *asimetriju* koja se sastoji u tome što jedan od blizanaca treba da uspori i potom ubrza svoje kretanje, da bi se, krećući se u suprotnom smeru, sreo sa bratom. Problem ovakvog odgovora je u tome što usporavanje i ubrzavanje nisu ni nužni ni dovoljni za objašnjenje fenomena o kojem je reč, kao što ćemo uskoro videti.

Opišimo situaciju čisto foronomički, stipulirajući da „bivati bliži" i „bivati dalji" ne znači, kad su u pitanju **A** i **B** koji bivaju bliži ili dalji jedan od drugog, ni da **A** miruje, ni da **B** miruje, ni da se **A** i **B** kreću u suprotnom smeru, ni da se **A** kreće u isom smeru u kom i **B**, goneći ga, ni **B** u istom smeru u kom i **A**, goneći ga. Neka pri svemu tome ostane neodređeno i to da li samo nije rečeno šta je od svega toga slučaj ili *de re* ni nema smisla reći da je o ovom ili onom slučaju reč.

Pretpostavimo sad da **A** i **B** bivaju najpre bliži jedan drugom, krećući se ravnomernom brzinom, da bi, u trenutku susreta, sinhronizovali svoje časovnike. Ovu sinhronizaciju ne treba razumeti na bilo koji drugi način do da oba časovnika „po garanciji sajdžije" rade isto i da su u trenutku susreta satovi namešteni na

„isto vreme". Kada kasnije **B** sretne kosmičku lutalicu **C**, pošto su prethodno, po pretpostavci, **B** i **C** bivali jedan drugom bliži krećući se jednakom relativnom brzinom, **C** sinhrinizuje svoj sat sa satom **B**-a, na isti način kao što su to prethodno učinili **A** i **B**. Ako je relativna brzina kojom se **B** i **C** kreću jedan prema drugom *veća* od one kojom se jedan u odnosu na drugog kreću **A** i **B**, **C** će se, posle izvesnog vremena, sigurno susresti sa **A**-om. Kako će tada stvar stajati s njihovim satovima? Hoće li se oni ispostaviti sinhronizovanim, ili će sat **A**-a kasniti u odnosu na sat **B**-a, ili će sat **B**-a kasniti u odnosu na sat **A**-a?

b) Prevazilaženje subdeterminisanosti foronomičkog opisa situacije unutar STR

Neodređenost čisto foronomočki opisane situacije sledi iz neodređenosti *smera* kretanja **B**-a i **C**-a. Da li se ta neodređenost može prevazići unutar STR, ako pretpostavimo da imamo posla samo s jednoobraznim kretanjem učesnika u igri?

Neka **A** i **B** budu, pored ostalog, i dva svetlosna izvora, koja, upravo u trenutko susreta, emituju po dva svetlosna zraka, jedan u smeru svog relativnog kretanja, drugi u suprotnom smeru. Neočekivano za njutnovskog fizičara, svaki par zrakova koji se kreću u istom smeru stići će *jednoveremeno* do bilo kojeg zastora koji je postavljen ortogonalno u odnosu na njihovo prostiranje. Ovu činjenicu su prvi put potvrdili eksperimenti Fizoa još 1849. godine (vidi *Einstein*, str. 39–41). Ovakvo ponašanje svetlosti objašnjavaju tri poznate teorije svetlosti na sledeća tri različita načina.

Prema klasičnoj Maksvel-Lorencovoj teoriji, svaki se svetlosni talas prostire istom brzinom *u odnosu na etar*, što znači da se sva četiri svetlosna zraka prostiru jednakom brzinom u odnosu na jednu i istu tačku *apsolutnog prostora* iz koje su emitovana.

Pošto je ovakvo objašnjenje ponašanja svetlosti nespojivo s duboko ukorenjenom idejom klasične fizike, po kojoj su sva inercijalna stanja kretanja ekvivalentna, Ajnštajn je pokušao, u nekom trenutku pre 1905. godine, da modifikuje elektodinamiku na takav način što će pretpostaviti da brzina svetlosti treba da bude uključena u brzinu prostirućeg efekta, što je kasnije, 1908. godine, detaljno elaborirao švajcarski fizičar Ric [Ritz] (cf. *Norton*, str. 58ff.) i što je poznato kao *emisiona teorija*. Prema ovoj teoriji, nemoguće je ukazati na *tačku u prostoru koja je ostavljena iza* izvora svetlosti koji se kreću. Jedino što je moguće reći je da se *svaka dva* od četiri zraka *koja se prostiru u istom smeru* prostiru *istom brzinom*, ali *različitom u odnosu* na **A** i **B**.

Međutim, opsednut misaonim eksperimentom, kojim se navodno bavio još od svoje šesnaeste godine, a koji se tiče mogućnosti da se jedan svetlosni zrak goni sve većom brzinom dok se ne „dostigne" i opazi kao „zamrznut", Ajnštajn je konačno napustio emisionu teoriju iz tri razloga (vidi *Norton*, §5–6), pri čemu je jedan od njih to što emisiona teorija ne samo dozvoljava da se svetlosni zrak stigne i opazi kao zamrznut, već to što ova teorija to čini verovatnim a da se tako nešto ipak ne događa. U STR, tako nešto je učinjeno *nemogućim po definiciji*: *postulirano* je da se svetlost prostire, *u odnosu na bilo koji* izvor, *jednakom brzinom u svim smerovima*, što znači automatski da je svetlosni zrak nemoguće dostići goneći ga.

Ako se svetlost prostire jednakom brzinom u svim smerovima, šta se događa u slučaju u kojem se svetlosni izvori i sami kreću, jedan relativno u odnosu na drugi? Jedini način da se izbegne protivrečnost je da se prihvati da se prostorvremenska metrika, pa time i prostorna i vremenska metrika, razlikuju u odnosu na *referencijalne sisteme* dvaju izvora. To je krucijalna stvar za prevazilaženje *subdeterminisanosti foronomičkog opisa* Paradoksa

časovnika, ali je daleko od očevidnog kako celo objašnjenje treba da izgleda.

Nazovimo svojstvo *šekspirovskim* (prisećajući se čuvenog stiha o ruži), bilo da je ono samo relaciono ili ne-relaciono, ako i samo ako njegovo istinito pripisivanje nečemu nikad ne varira od posmatrača do posmatrača. (cf. *Geach*, str. 139). Na primer, ako je Jovan niži od Petra, on će *biti* niži od Petra nezavisno od toga što nekom posmatraču može *izgledati* suprotno, i on će ostati niži makar mi odlučili da ga smatramo i zovemo višim. U datom kontekstu, svojstva *biti niži od* i *biti viši od* su relaciona, ali *šekspirovska* relaciona svojstva.

Da li je *usmerenost kretanja* šeksprirovsko svojstvo? Prema Dekartovoj metafizici, kretanje je *uvek samo* relativno, pošto je Bog, stvarajući svet permanentno, uvek i krajnji uzrok svake promene u svetu (cf. *Descartes*, II deo, §36, 25, 27). Zato, kao na filmu, ako se položaj između tela promenio, on se *nije* promenio *zato što* se jedno od tela *kretalo* već *zato što* je Bog postavio tela u *drugačije prostorne odnose*. Sledstveno tome, mada su različita *stanja* sveta *stvarna*, *kretanje*, za koje verujemo da je do odgovarajuće razlike dovelo, samo je *pojava*. To je razlog zbog čega je *usmerenost kretanja* za Kartezijance *ne-šekspirovsko* relaciono svojstvo.

U STR je prostiranje svetlosti apsolutno ne samo s obzirom na pretpostavljenu konstantnost njene brzine, koja je nezavisna od kretanja svetlosnog izvora, već i zato što je *usmerenost* kretanja svetlosti *šekspirovsko* svojstvo: prema osnovnom postulatu STR, svetlost se prostire *u onom* smeru u kojem je, goneći je, nemoguće dostići je. Ako su dva tela postavljena na suprotnim stranama duž linije prostiranja svetlosti, svetlost se *nužno prostire u onom smeru* u kojem će se sresti s jednim od tela i *nužno ne* prema drugom telu, s kojim se *ne može* sresti. Ali, kako stvar stoji u odnosu na relativno kretanje samih tela kao aktuelnih ili potencijalnih svetlosnih izvora?

Glavni problem u pokušaju odgovora na prethodno pitanje leži u tome što je, s jedne strane, pretpostavljeno da se svetlost prostire *uvek*, i *u svim smerovima, istom brzinom u odnosu* na *svaki* emitovani svetlosni zrak, dok se, s druge strane, sami svetlosni izvori mogu *kretati*, kako često i čine, *jedan u odnosu na drugi*. Nije li, naime, moguće reći, ili je možda čak nužno zaključiti, da je *usmerenost kretanja dva svetlosna izvora koji se kreću jedan u odnosu na drugi* ipak *ne-šekspirovsko svojstvo*, uprkos činjenici da je usmerenost prostiranja svetlosti šekspirovsko svojstvo?

Za odričan odgovor na prethodno pitanje bilo bi dovoljno pokazati da će, barem u nekim slučajevima, *elektromagnetski efekti* biti *različiti* u zavisnosti od *pretpostavke* o *usmerenosti* kretanja svetlosnih izvora o kojima je reč. I upravo je misaoni eksperiment sa časovnicima taj koji to pokazuje, što je jedna od njegove dve glavne uloge koja se eksplicitno nikad ne pominje! Naime, upravo je taj eksperiment *exemplum crucis*, koji pokazuje da prema STR i kretanje samih svetlosnih izvora mora biti *šekspirovsko svojstvo*, što je dobar razlog da se složimo s Majklom Redhedom da je „termin 'relativnost' dokazivo promašen" kad je reč o STR (*Readhead*, str. 120). Inače, druga važna uloga Paradoksa blizanaca – očigledna i priznata – sastoji se u tome što egzemplifikuje *suštinsku razliku* između STR i drugih dvaju rivalskih teorija time što ukazuje na drastičnu i potpuno neočekivanu posledicu STR koja bi u principu trebalo da bude proverljiva (i na neki način navodno i jeste proverena – vidi, na primer, *Hafele and Keating*).

Ispitajmo do kakvih će elektromagnetskih efekata dovesti dodatna pretpostavka da se, u prethodnom čisto foronomičkom opisu situacije, **B** i **C** kreću u suprotnom smeru, a do kakvih pretpostavka da se kreću u istom smeru.

a) Ako pretpostavimo da se **B** i **C** kreću u suprotnom smeru, prosečna brzina kombinovanog kretanja, sastavljenog od

kretanja **B**-a od susreta s **A**-om do susreta s **C**-om i kretanja **C**-a od susreta s **B**-om do susreta s **A**-om, biće veća od brzine **A**-a od rastanka s **B**-om do susreta s **C**-om, nezavisno od toga da li pretpostavimo da se **A** i **B** kreću u istom ili u suprotnom smeru. Naime, ako se **A** i **B** kreću u istom smeru, **B** se očigledno kreće većom brzinom od **A**-a, pa će, pošto je za **B** i **C** pretpostavljeno da se jedan u odnosu na drugog kreću brzinom koja je veća nego što je brzina kojom se jedan u odnosu na drugog kreću **A** i **B**, put pređen kombinovinim kretanjem **B**-a i **C**-a biti duži od onog koji je prešao **A**, i zato prosečna brzina kombinovanog kretanja **B**-a i **C**-a veća od prosečne brzine **A**-a. Ako se pak **A** i **B** kreću u suprotnom smeru, tada će, ma koliko mala bila brzina **B**-a, **C** to više nego nadoknaditi goneći i na kraju stigavši **A**-a, zbog čega će prosečna brzina kombinovanog kretanja **B**-a i **C**-a ponovo biti veća od brzine **A**-a. Dakle, uzimajući u obzir neminovnost razlike u metrici koja proizlazi iz osnovnog postulata STR, *vreme* proteklo tokom kombinovanog kretanja **B**-a i **C**-a mora u oba slučaja biti *kraće* od *vremena* proteklog tokom kretanja **A**-a, što znači da, ako **A**, **B** i **C** emituju svetlosne signale periodično u istim razmacima koristeći istovetne časovnike sinhronizovane na opisani način, *broj* signala *emitovanih* od strane **B**-a i **C**-a mora biti *veći* od *broja* svetlosnih signala *emitovanih* od strane **A**-a., dok će s *brojem primljenih* signala stvar stajati *obrnuto*.

b) Lako je uveriti se, analognim rezonovanjem, da će ishod biti *obrnut* ako pretpostavimo da se **B** i **C** kreću u *istom* smeru: broj emitovanih signala od strane **A**-a biće manji od broja signala emitovanih od strane **B**-a i **C**-a, dok će u pogledu primljenih signala stvar stajati obrnuto.

Iz *(a)* i *(b)* sledi da će *biti razlike u pogledu elektromagnetskih efekata* koji *zavise isključivo* od toga da li pretpostavimo da se **B** i

C kreću i istom ili suprotnom smeru, što znači da je, prema STR, i *usmeremost kretanja samih svetlosnih izvora šekspirovsko svojstvo* (Q.E.D.).

c) Ajnštajnov izvorni opis Paradoksa časovnika i uloga tačke promene smera kretanja

U svom opisu misaonog eksperimenta s dva časovnika Ajnštajn je pomenuo „brzinu blisku brzini svetlosti" dva puta, prvi put *pretpostavljajući* da se jedan od časovnika „kreće velikom jednoobraznom brzinom (bliskom brzini *c*)" drugi put *izvlačeći zaključak* da će se na kraju ispostaviti da „se položaj kazaljke [na jednom od časovnika] skoro i nije promenio za vreme celog putovanja" i da je, u analognom slučaju jednog organizma, „dugačko putovanje trajalo samo trenutak zato što se ovaj kretao brzinom bliskom brzini svetlosti" (*Einstein* 1, str. 12–13).

Pitanje koje se nameće u vezi sa ovakvim Ajnštajnovim pozivanjem na brzinu blisku brzini svetlosti tiče se potrebe putovanja tamo-amo da bi se *zaključilo* da je sat koji se tako kretao onaj kod koga se položaj kazaljke jedva promenio, kad taj zaključak ne počiva ni na čemu drugom do na činjenici da se (za razliku od drugog časovnika) taj sat kretao brzinom bliskom brzini svetlosti, što je *od samog početka* o njemu i bilo *pretpostavljeno*!

Čovek može doći u iskušenje da pomisli je ceo eksperiment smišljen samo zato da šokira onim što bi na kraju prema STR bio slučaj, pogotovu što je Ajnaštajn ceo opis počeo rečima: „Stvar postaje jos smešnija... " (*ibid.*, *loc. cit.*). Da bi se ta pomisao izbegla bolje je ne ulaziti u to *koji* se časovnik (ili blizanac) *prilikom udaljavanja* kretao brzinom bliskom brzini svetlosti.

Kao drugi razlog protiv toga da se već na početku odredi *koji* se sat (blizanac) kreće brzinom bliskom brzini svetlosti tiče se

opštosti samog misaonog eksperimenta. Ima *beskonačno mnogo* načina na koji se putovanje tamo-amo može ostvariti a da ishod uvek bude *isti* u pogledu toga *koji* se sat na kraju ispostavio sporiji (ili *koji* blizanac mlađi). Ako se setimo naše čisto foronomičke deskripcije situacije, u kojoj je kretanje jednog časovnika (ili blizanca) razloženo na kretanje **B**-a i **C**-a, *jedina neophodna pretpostavka*, da bi putovanje **B**-a i **C**-a bilo kraće, je to da se **B** i **C** kreću u suprotnom smeru. Dakle, Ajnštajnov opis odnosi se na samo jedan, vrlo naročit slučaj.

Treći razlog da se izostavi bilo kakva pretpostavka o inicijalnoj brzini kretanja učesnika u eksperimentu tiče se *nemogućnosti provere* toga šta *de facto* jeste slučaj a koja bi se izvršila *samo za vreme udaljavanja* ili *samo za vreme približavanja*. Kao što ćemo uskoro videti, tek je *promena u frekvenciji* kojom se svetlosni signali primaju ono što omogućava blizancima, ili **A**-u i **C**-u (uz pomoć **B**-a), da izračunaju *odnos* broja signala koji će tokom celog puta biti *emitovani* i *primljeni*. Zato je, sa operacionalne tačke gledišta, neophodno da neko u nekoj tački *promeni smer kretanja*.

U vezi s poslednjim razlogom, treba ipak primetiti da to što prilikom udaljavanja još nije moguće ustanoviti *ko* se kreće brzinom bližom brzini svetlosti *ne znači* da se *razlika u starenju* ne događa već tada (kao što će neka tumačenja s kojima ćemo se sresti pogrešno sugerisati). Ajnštajnova pretpostavka, koja *od početka* uvodi *asimetriju* između časovnika (blizanaca), iako nije *neophodna*, nije ni *pogrešna*.

d) Pozivanje na dinamičke činioce

Sva iz različitih razloga neprihvatljiva tumačenja konačne starosne razlike među blizancima počivaju na pogrešnom razumevanju *uloge promene smera kretanja* jednog od blizanaca.

Na predavanjima o Paradoksu blizanaca, Fejnman je rekao da oni koji misle da je tu reč o stvarnom paradoksu misle tako zato što „veruju da princip relativnosti znači da je *svo kretanje* relativno" (*Feynman*, str. 16–3). Fejnman se loše izrazio. Ono što je u stvari želeo da kaže nije to da neki veruju da je svo kretanje relativno već da je *smer* kretanja *zavisan od posmatrača*, odnosno da je *usmerenost kretanja ne-šekspirovsko svojstvo*. Fejnmanov odgovor ovim kartezijancima je da je blizanac „*koji je osetio ubrzanje*, koji je video stvari kako padaju sa zidova i slično, onaj koji će biti mlađi" (*loc. cit.*). Pošto Fejnman, posle ovakvog ukazivanja na jednu asimetriju među blizancima ne objašnjava njenu *relevantnost* da razliku u starenju, njegovo objašnjenje je nepotpuno. Ali ono može i da zavede na krivi put, pošto usporavanje i ubrzavanje nisu *ni nužni ni dovoljni* za razliku u starenju.

Usporavanje i ubrzavanje *nisu nužni* za pojavu fenomena o kojem je reč, jer je *usmerenost kretanja šekspirovsko svojstvo* prema glavnom postulatu STR, a ovo je dovoljno da objasni razliku u starenju čak i u slučaju da je svo kretanje obuhvaćeno eksperimentom jednoobrazno.

Usporavanje i ubrzavanje jednog od blizanaca *nisu dovoljni* za pojavu fenomena o kojem je reč, jer je blizanac koji menja smer kretanja *mogao pre toga* i *može i dalje* stariti *brže*, u slučaju, naime, da je njegova *relativna brzina* posle promene smera kretanja *nedovoljna* da bi stigao svog brata.

Ukratko, *dinamički činioci*, ako ih i ima, nisu *suštinski* odgovorni za razliku u starenju, već su, u najboljem slučaju, *indikacija* toga *koji* će se od blizanaca ispostaviti mlađim, *pod uslovom* da se kreće dovoljno brzo da će stići svog brata.

Očigledno misleći suprotno ovome, Vajthed je kritikovao „ortodoksne relativiste", tvrdeći da „ubrzavanje i usporavanje (za razliku od jednoobraznog kretanja) predstavljaju suštinsku činjenicu života bilo kojeg tela" (*Whitehead*, str. 41), i da je upravo

„različita istorija" tela hronologa na Zemlji i kosmičkog putnika, odnosno „realna različitost odnosa njihovih tela prema unuverzumu" ono što čini „uzrok njihovog neslaganja u računanju vremena" (*ibid.*, str. 34).

Slično Vajthedu, Rajhenbah se pozivao na „teoriju gravitacije", pokušavajući da objasni zašto će časovnik kosmičkog putnika *U'* kasniti za satom zemaljskog časovnika *U*. Naime, prema njemu, teorija gravitacije „pokazuje kako je specijalna teorija relativiteta primenljiva samo zato što udaljene mase [relativno] fiksiranih zvezda određuju određeno metričko polje", tako da je kašnjenje *U'*-a „efekat kretanja ovih zvezda, koje proizvode gravitaciono polje u trenutku promene smera kretanja" (*Reichenbach*, str. 193).

Da bi se pobilo ovakvo rešenje, dovoljno je zamisliti dva putovanja jedne iste osobe, koja se oba puta koristi istim časovnikom i koja se u svemu oba puta *kreće na isti način* i *okreće na istom mestu*, jedino što je jedno od putovanja produženo (cf. *Mermin*, str. 144). Dva putovanja će proizvesti *različite starosne razlike*, i to samo zbog toga što će *razliku u razlici u starenju* proizvesti sama *dužine puta*.

Konačno, i Ričard je Tolman, najslavniji od Fejnmanovih prethodnika u Kalifornijskom institutu za tehnologiju, tvrdio da zbog mogućnosti simetričnih analiza može „nastati paradoks kad se ponašanje časovnika tretira u skladu s principom specijalne relativnosti, bez obaziranja na opštu teoriju [relativiteta]" (*Tolman*, str. 194), dok se taj paradoks „lako rešava pomoću opšte teorije relativiteta, ako ne zanemarimo stvarni nedostatak simetrije između onoga što se dešava časovniku *A*, koji ni u jednom trenutku nije bio izložen delovanju bilo koje sile, i časovnika *B*, koji je bio izložen sukcesivnom delovanju sila F_1, F_2 i F_3, u trenutku promene relativnog kretanja časovnika" (*ibid.*, str. 195).

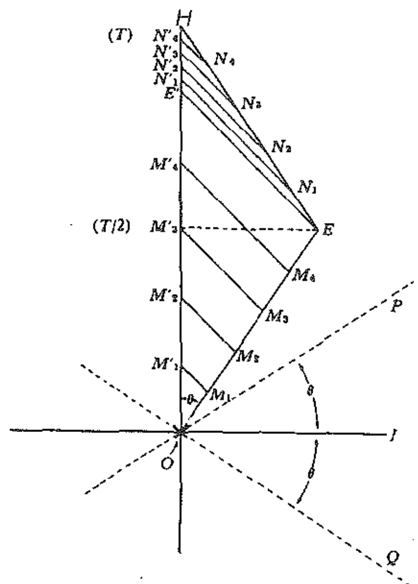
e) Razmena svetlosnih signala i geometrijska prezentacija misaonog eksperimenta

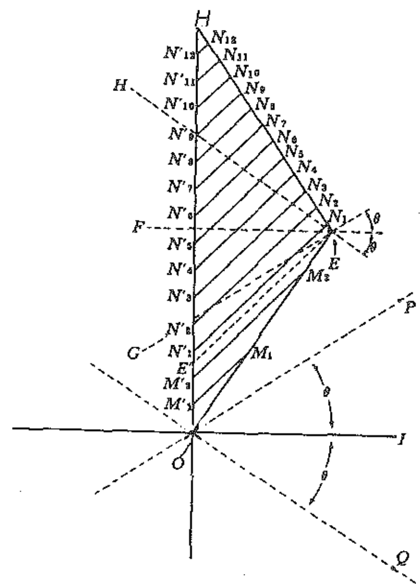
Kao što smo videli u §3, Paradoks časovnika egzemplifikuje situaciju u kojoj je opravdano reći da se jedan od blizanaca (**B** i **C** u našem foronomičkom opisu) kretao prosečnom brzinom koja je bila bliža brzini svetlosti nego što je to bila brzina drugog blizanca (**A**-a u našem opisu). S *ontološke* tačke gledišta, ova činjenica (brže kretanje) je *ratio essendi* za to što će broj emitovanih signala, za vreme celog putovanja, od strane blizanca koji je menjao smer (**B**-a i **C**-a u našoj redeskripciji) biti manji od broja signala emitovanih od strane drugog blizanca (**A**-a). Ali onda, s druge strane, *odnos* ukupnog broja emitovanih i primljenih signala može biti *ratio cognoscendi* ustanovljenja, od strane samih blizanaca (odnosno **A**-a, **B**-a i **C**-a) *kako* njihovo putovanje stvarno izgleda u pogledu objektivnog *smera kretanja* i toga *kada* i *koliko* je njihovo kretanje bilo blisko brzini svetlosti.

Pretpostavimo da su se, u vreme susreta, **A** i **B** dogovorili da jedan drugom šalju signale svakih godinu dana (prema u vreme susreta sinhronizovanim časovnicima). Neka su se, pored toga, dogovorili da, ako **B** sretne ili dostigne neku kosmičku lutalicu **C** koja se kreće jednoobraznom brzinom, **C** produži da šalje i prima signale umesto **B**-a, a po satu sinhronizivanom sa satom **B**-a u trenutku susreta. Zahvaljujući Doplerovom efektu, i **A** i **B** će primati signale jedan od drugog s manjom frekvencijom nego što ih šalju. Ali, poznavanje tih frekvencija zajedno sa znanjem o tome kolikom se brzinom jedan od drugog udaljavaju njima neće omogućiti da saznaju *čija* je brzina, ako je ičija, bliža brzini svetlosti. Isto važi, *mutatis mutandis*, za **A** i **C**.

Međutim, činjenica da ni **A** i **B** ni **A** i **C** ne mogu *izolovano* (za vreme međusobnog udaljavanja ili približavanja) da steknu informaciju o tome ko se od njih kreće brzinom bližom brzini svetlosti ne znači da **A** i **C** (uz pomoć **B**-a) ne mogu *izvesti zaključak* o tome šta se događalo i šta se događa u *apsolutnom* smislu, *izračunavanjem*, na osnovu frekvencije i promene frekvencije, *ukupnog broja signala koji će biti poslati* i *ukupnog broja signala koji će biti primljeni* tokom celog putovanja, i *ustanovljenjem odnosa* između ovih brojeva. Naime, ako se **B** i **C** *de facto* kreću u *suprotnom* smeru (bez obzira na to ima li ikakvih dinamičkih indikacija o tome), u trenutku susreta **A**-a i **C**-a ukupan broj signala koje je **A** primio mora biti *manji* od ukupnog broja signala koje je poslao, dok ukupan broj signala primljenih prvo od strane **B**-a do susreta sa **C**-om i zatim **C**-a do susreta sa **A**-om mora biti *veći* od ukupnog broja signala koje su poslali. S druge strane, ako se **B** i **C** *de facto* kreću u *istom* smeru, situacija u pogledu odnosa ukupnog broja primljenih i poslatih signala biće obrnuta.

Ilustrujmo ovo pomoću dva dijagrama Minkovskog (preuzetih iz *Bohm*, str. 169 i 171).





Važno je primetiti je Bom, prilikom crtanja ovih dijagrama, sledio izvorni Ajnštajnov opis misaonog eksperimenta, prema kojem je za **A** (čija je svetska linija *OH*) pretpostavljeno da je u stanju apsolutnog mirovanja, dok se **B** (čija je svetska linija *OE*) i **C** (čija je svetska linija *EH*) kreću u suprotnom smeru jednakom brzinom u odnosu na **A**. Zbog toga je *OE* jednako *EH* i zbog toga su intervali između signala M_1, M_2, M_3 i M_4, koje je **B** poslao, jednaki intervalima između N_1, N_2, N_3 i N_4, koje je poslao **C**. Međutim, poenta koja nas zanima bi ostala nepromenjena i ako bismo ukinuli ove specifične pretpostavke, dobijajući, kao posledicu, različite trouglove. Jedina neophodna pretpostavka – kao što smo videli – bez koje ne bismo uopšte dobili *trougao*, jer ne bi došlo do susreta **A**-a i **C**-a, je to da je relativna brzina kojom se **B** i **C** kreću jedan u odnosu na drugog *veća* od relativne brzine kojom se jedan u odnosu na drugog kreću **A** i **B**. Dodatnu pretpostavku, koja *nije* neophodna za to da bi se dobio *trougao*, ali jeste za to da *E* bude *tačka obrta*, čini to da se **B** i **C** kreću u suprotnom smeru, pošto čisto foronomički opis dopušta i drugu mogućnost, naime, da susret **B**-a i **C**-a znači da **B** pretiče **C**-a. Ukoliko bi ovo poslednje bilo slučaj, susret **B**-a i **C**-a bi proizveo *prelomnu tačku* na svetskoj linijii **A**-a (*sic!*), pošto bi od tada (iako **A** nikoga nije sreo!), trebalo upoređivati vreme **C**-a s vremenom u kojem će ga **A** *goniti*, i na kraju *stići*.

Otčitavajući levi dijagram, jasno je da će **A** početi da prima signale s povećanom frekvencijom (u odnosu na onu s kojom ih šalje) tek počev od *E*', znači, relativno kasno, tako da će ukupan broj primljenih signala biti *manji* od ukupnog broja poslatih. S druge strane – kao što se to jasno vidi na desnom dijagramu – samo mali broj signala poslatih od strane **A**-a biće primljeni od strane **B**-a s manjom frekvencijom od one s kojom je on signale slao, dok će ostatak signala, poslatih tokom znatno dužeg vremena, biti primljen od strane **C**-a s frekvencijom koja je *veća* od frekvencije signala koje je on poslao. Dakle, ukupan broj signala koji su primljeni od strane **B**-a i **C**-a očigledno je *veći* od broja signala koje su oni poslali.

Da li je uopšte moguće da se **A** i **C** sretnu i ustanove da su njihovi časovnici sinhronizovani? To nije moguće dokle god postoji samo jedna obrtna tačka. Međutim, ako zamislimo da **A** sretne izvesnog **D**-a pod uslovima koji su u odnosu na celo putovanje potpuno simetrični u odnosu na one u kojima se sreću **B** i **C**, i ako se kasnije, krećući se jedan prema drugom, na simetričan način, **C** i **D** sretnu, njihovi će časovnici u trenutku susreta *biti* sinhronizovani. Dijagram Minkovskog koji reprezentuje tu situaciju sadržaće *dve* izlomljene svetske linije simetrične u odnosu na liniju koja povezuje tačke susreta **A**-a i **B**-a, i **C**-a i **D**-a. Dakle, *bergsonovsko* rešenje (ili „rešenje“) tačno je samo u jednom specijalnom slučaju, u kojem postoje dve simetrične prelomne tačke.

f) Kada i kako nastaje starosna razlika među blizancima

Kolikogod metod prezentacije pomoću dijagrama Minkovskog bio geometrijski zgodan za opisivanje onoga što se fizički događa, fizičko razumevanje onoga što se događa mora služiti kao vodič u otčitavanju dijagrama.

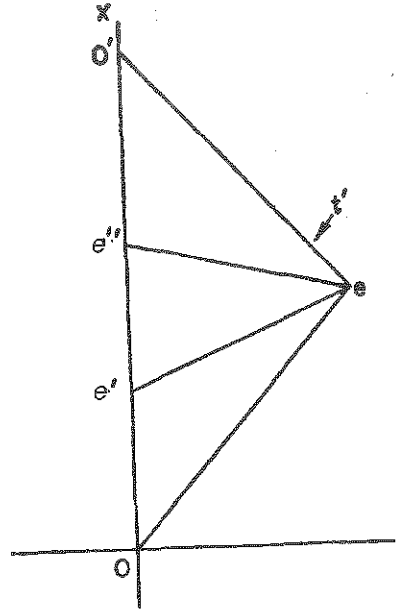
Pošto smo dali puno *fizičko* objašnjenje načina na koji se konačna *starosna razlika* među blizancima pokazuje kao rezultat *razlike u starenju*, koja pak *može* ali i *ne mora* biti *sve vreme* u korist jednog istog blizanca mada *mora* u konačnom ishodu biti u korist onoga blizanca koji se u proseku kretao brže u apsolutnom smislu (pod pretpostavkom da je biti mlađi prednost), možemo iskoristiti dijagrame Minkovskog da pokažemo studentima *kada* i *tačno kako* nastaje razlika u starenju. Na primer, prema gornjim dijagramima, koji reprezentuju Ajnštajnov izvorni opis situacije, *konačna starosna razlika* je rezultat *razlike u starenju* koja je nastajala *tokom celog putovanja*. Naime (koristeći ponovo tri osobe umesto blizanaca), može se direktno otčitati s levog dijagrama da je, ako su se **A**, **B** i **C** dogovorili da signale šalju po isteku svake godine, kombinovano putovanje **B**-a i **C**-a trajalo *deset* godina (te godine su OM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4E, EN_1, N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4, N_4H), dok je **A**, kao što se može videti s desnog dijagrama, živeo *petnaest* godina (te godine su $OM?_1$, $M?_1M?_2$, $M?_2N?_1$, $N?_1N?_2$, $N?_2N?_3$,..., $N?_{11}N?_{12}$, $N?_{12}H$).

Okrenimo se sada drugačijim, manje specifičnim trouglovima, ali i dalje s tačkom *E* (u kojoj se **B** i **C** sreću) kao s prelomnom tačkom (što znači da se **B** i **C** kreću u suprotnom smeru). U tim će slučajevima dužina godina **B**-a i **C**-a biti različita, jer će **C** morati da juri za **A**-om da bi ga stigao. I mada će konačna razlika u ukupnom broju godina ponovo biti u korist **B**-a i **C**-a u odnosu na **A**-a, ne mora, mada i dalje može biti slučaj, da će ona favorizovati **B**-a u odnosu na **A**-a (što je u Ajnštajnovom opisu *pretpostavljeno*). Sve će zavisiti od toga da li je **A** ili je **B** onaj koji se kreće brzinom bližom brzini svetlosti.

g) „Misteriozno" geometrijsko objašnjenje konačne starosne razlike

Mada prethodni odgovor na pitanje studenata o tome *kada* nastaje starosna razlika nekome može delovati ne samo očigledno i uverljivo nego, posle svega, čak i trivijalno, često se to pitanje, kao u slučaju Buna, smatra loše definisanim. I više od toga, dijagrami Minkovskog se koriste da bi se ukazalo na navodno „ekstra vreme" koje je jedan od blizanaca uštedeo *trenutno*.

Tako u svojoj čuvenoj knjizi *Prostor, Vreme, i Prostorvreme* Sklar objašnjava konačnu starosnu razliku sledećim dijagramom:



On kaže: „Prema računu posmatrača koji ubrzava, inercijalni sat radi sporije od njegovog od *O* do *e*', i takođe od *e*" do *O*'; ali ovaj posmatrač sebe vidi kao da se kreće trenutno od jedne do druge inercijalne putanje (za vreme događaja *e*, njegovo ubrzanje je 'skoro trenutno'), jer *e* je jednovremeno sa *e*' u njegovom prvom inercijalnom okviru, a sa *e*" u drugom. I upravo je *život inercijalnog časovnika između e' i e"* ono što čini da inercijalni časovnik pokazuje duži interval vremena između O i O' nego što pokazuje drugi časovnik" (*Sklar*, str. 270 [*kurziv dodat*]).

Odlučujuća stvar je to što Sklar kaže da je život inercijalnog časovnika *duži zbog njegovog života između e' i e"* (što je interval između događaja N'_2 i N'_9 na desnom gornjem dijagramu, gde su *OI*, i njene paralele, linije simultanosti iz **A**-ovog referencijalnog sistema, a *OP* i *OQ*, i njihove paralele, linije simultanosti iz **B**-ovog, odnosno **C**-ovog, referencijalnog sistema). Komplementarno tome, Sklar kaže da je časovnik koji je ubrzavao uštedeo vreme u *tački obrta e*, koja je „simultana sa *e'* u prvom inercijalnom sistemu, a sa *e*" u drugom". Objašnjavajući jedan slični dijagram, Redhed kaže da on „pokazuje da **b**-ov sat [sat blizanca koji menja pravac] žuri u odnosu na **a**-ov [sat drugog blizanca] duž deonica *Oe'* i *e''O*, ali misteriozno miruje duž *e' e*'', omogućavajući **a**-u da postaje stariji" (*Readhead*, str. 123 [*slova promenjena tako da odgovaraju Sklarovom dijagramu*]). Mislim da je izraz „misteriozno", koji je upotrebio Redhed, ovde sasvim na mestu.

Baveći se Sklarovim načinom objašnjenja *specialnorelativističkih fenomana* baziranom na *ravnoj prostorvremenskoj geometriji Minkovskog*, susrećemo se sa situacijom koja je karakteristično slična sa onom s kojom smo se sreli u §5, gde smo se bavili objašnjenjima koja u pomoć prizivaju dinamičke činioce. U oba slučaja, *tačka obrta* je *ispravno* povezana s blizancem koji će se na kraju ispostaviti mlađim, ali su pritom, na različite načine, izvesni *efekti* promene inercijalnog sistema, nezavisno od toga da li su za ishod *suštinski* ili *akcidentalni*, na *pogrešan način* uključeni u *samo objašnjenje*, koje mora biti zasnovano jedino na *metrici*, kao nečemu što je *različito* u odnosu na dva blizanca zbog *razlike* (barem u proseku) *njihovih brzina* u odnosu na *brzinu svetlosti*.

Ako želimo da putem *geometrijske prezentacije* objasnimo ono što se *fizički* događa, treba prvo da upotrebimo dijagrame Minkovskog na način na koji je to učinio Bom, jer jedino tada možemo *direktno očitati*, i onda *uporediti*, vremensku *metriku* putovanja dvaju blizanaca, obraćajući pažnju na *vremenske jedinične intervale* tokom *celog putovanja* (poredeći dva dijagrama). Svaki od dva dijagrama *po sebi* pokazuje samo *na koji način jedan od blizanaca prosuđuje* vreme drugoga.

Od najvećeg je značaja da se uoči da vremenska razlika između *e'* i *e*'', o kojoj Sklar govori kao o vremenu koje je ušteđeno

promenom inercijalnog sistema, zavisi od *obeju* brzina, one između *O* i *e* i one između *e* i *O'*, jer one određuju *ugao* na mestu *e*. Zato *starosna razlika koja će se pokazati na kraju tek ima da se ostvari kroz razliku u starenju*, a što je *uzrokovano razlikom u metrici*, koja je pak u krajnjoj liniji *uzrokovana razlikom u brzinama u odnosu na brzinu svetlosti*. I zato je vrlo *metaforičan način govora* da se kaže je jedan od blizanaca *uštedeo vreme promenom referencijalnog sistema*.

„Diskrepancija između relacija jednovremenosti", koju Vesli Samon smatra „ključem celog problema" (*Salmon*, str. 98), predstavlja nešto što *sâmo* treba, i može, biti objašnjeno *prostorvremenskom metrikom cele situacije*. Bilo bi to zaista misteriozno, ako bi činjenica da „ne postoji trenutak između *e'* i *e*'' koji bi blizanac koji menja pravac mogao smatrati jednovremenim s bilo kojim trenutkom svoga putovanja" značila da je *starosna razlika na kraju putovanja* rezultat *ekstra života* koji je blizanac koji je ostao kod kuće *živeo dok* je njegov brat *bio* (za samo trenutak!) *u tački obrta*. Ali nema ničeg misterioznog u tome što, zahvaljujući razlici u prostorvremenskoj metrici, i time i u prostornoj i vremenskoj metrici, blizanci ne samo stare različito već i ne mogu da koriste *bilo koju relaciju jednovremenosti* koja bi bila *relacija ekvivalencije* – iz čega se „diskrepancija" uzrokovana promenom referencijalnog sistema, o kojoj govori Samon, može izvesti kao *korolar*.

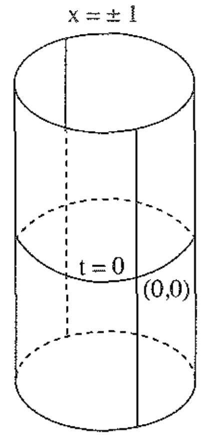
h) Zaključak i posledice: Paradoks blizanca u ravnom ali zatvorenom prostorvremenu

Pošto smo jasno odgovorili na pitanja studenata o tome *zašto* se jedan od blizanaca na kraju putovanja morao ispostaviti mlađim (zbog metričke razlike između njegove svetske linije i linije njegovog brata, koja ga je „favorizovala" zbog njegove brzine, a koja je, barem u proseku, bila bliža brzini svetlosti od one njegovog brata) i *kada* je razlika u starenju nastajala (ili tokom celog puta ili samo jednim njegovim delom, ali sigurno u više nego balansirajućem odnosu u korist blizanca koji je menjao pravac), i na pitanje o *neophodnosti tačke obrta* može se takođe odgovoriti na potpuno jasan način. Naime, u *otvorenom* i *ravnom* prostrorvremenskom svetu Minkovskog tek je putovanje tamo-amo ono što nam omogućuje da *dokažemo* da se jedan od blizanaca *morao* kretati brzinom bližom brzini svetlosti. U isto vreme, tek je *promena* inercijalnog sistema jednog od blizanaca ono što dovodi do *promene u frekvenciji* primanih svetlosnih signala, što omogućava *samim blizancima* da *izračunaju metričke razlike* koje se javljaju pri poređenju njihovih svetskih linija.

Kada su moguće konfuzije vezane za ulogu tačke obrta uklonjene, možemo se, na kraju, okrenuti i *zatvorenim* prostorvremenskim modelima, u kojima *tačka obrta nije neophodna* za ponovni susret među blizancima (vidi, na primer, *Brans and Stewart, Dray, Low, Uzan, Luminet, Lehoucq and Peter* 2000). Razmotrićemo slučaj u *ravnom* ali *zatvorenom* modelu.

Analogno slučaju u kojem postoji tačka obrta, i u slučaju ravnog ali zatvorenog prostorvremena ima beskonačno mnogo načina da se blizanci sretnu udaljavajući se i *istovremeno* se (zbog zatvorenosti prostorvremna) približavajući jedan drugom. Među tim slučajevima, dva su granična. U prvom od ovih, blizanci se kreću u suprotnom smeru, duž linije kojom bi se kretao svetlosni zrak, jednakom brzinom u odnosu na brzinu svetlosti. Kada se neočekivano sretnu (jer nisu slutili da se udaljujući u stvari i približavaju jedan drugom), bar neće biti iznenađeni bratovljevim izgledom, to jest, proteklim vremenom: neće biti starosne razlike među njima. U drugom graničnom slučaju, jedan od blizanaca će apsolutno mirovati i zato će se pri ponovnom susretu ispostaviti starijim. U međuslučajevima će onaj blizanac koji se kretao

brzinom bližom brzini svetlosti stariti sporije od svoga brata. Razmotrimo detaljnije drugi granični slučaj.



Prva stvar koju treba primetiti je da je topološka struktura po pretpostaci *ravna*, što, tehnički iskazano, znači da Rimanov vektor iščezava identično, što pak znači da možemo izabrati koordinatni sistem u kojem je *metrika konstantna*, zbog čega blizanac koji se kreće *neće* biti podvrgnut akceleraciji. No, u isto vreme, prostorvremenska struktura je po pretpostavci *zatvorena*, što znači da postoje parovi prostornih tačaka – recimo, tačka $x = 1$ i tačka $x = -1$ – koje su identične za sve vrednosti t. Ovo pak znači da kao geometrijsku reprezentaciju ove prostrorvremenske strukture dobijamo *cilindar* (vidi prethodnu sliku), pri čemu je vertikalna osa t-osa.

Pretpostavimo da blizanac koji miruje miruje u $x = 0$, dok se drugi kreće nadesno, počev od (0, 0), relativnom brzinom v, ne podležući nikakvom ubrzanju. To znači da između (0, 0) i (0, ±1) prvi *de facto* putuje samo duž t-ose, dok drugi putuje duž *heliksa* koji se obmotava oko cilindra, a čiji nagib zavisi od v. Kada je $t = 2/v$ (u sistemu prvog), blizanci će se sresti u (0, ±1).

Jasno je da u ovom slučaju nije moguće nikakvo rešenje u stilu Sklara, pošto nema promene smera kretanja, pa samim tim ni nekakvog „ekstra vremena" koje bi zahvaljujući tome navodno moglo biti ušteđeno. Štaviše, izvorni paradoks kao da ponovo izranja, jer moglo bi se argumentovati kako oba blizanca mogu da primenjuju Lorencove transformacije *tokom celog putovanja na isti način* sa *istm rezultatom* sve do *samog kraja puta* (vidi *Low*, §2). Drugim rečima, ako jedan od njih izračunava isteklo vreme drugog množeći $2/v$ s $\sqrt{(1-v^2)}$, to isto čini i drugi.

Lou kaže kako je „cela tehnologija upotrebe Lorencovih transformacija sumnjiva u datom kontekstu", pošto „transformacije imaju smisla lokalno" ali ne „i u celini" prostorvremena Minkovskog (*ibid.*, §3). Naime, zahvaljujući tome što „prostorvreme u ovom slučaju, mada ravno, nije jednostavno povezano", svako je udaljavanje blizanaca ujedno i njihovo približavanje. Zato Lou tvrdi da je jedino blizanac koji je ostao u $x = 0$ taj koji je u pravu kad tokom *celog* putovanja izračunava isteklo vreme drugog množeći $2/v$ sa $\sqrt{(1-v^2)}$. Kad bismo, naime, razmotali cilindar, pronašli bismo da je u sistemu *tog* blizanca, za svaku vrednost t, polazak drugog iz odgovarajućeg položaja *uvek jednovremen*, dok u sistemu drugog, koji putuje duž heliksa, to *nije* tako.

Ono što Lou kaže svakako je ispravno sa stanovišta *geometrije* prostorvremena. Ali opet, sećajući se Borovog upozorenja izrečenog Hajzenbergu – da fizičko objašnjenje mora apsolutno prethoditi matematičkoj formulaciji – ima još toga da se kaže da bismo dostigli puno objašnjenje.

Prvo, s *fizičke* tačke gledišta, deo razloga za to što je samo jedan od blizanaca u pravu kada izračunava isteklo vreme drugog množeći $2/v$ sa $\sqrt{(1-v^2)}$ jeste u tome što je *pretpostavljeno*, u datom *graničnom* slučaju, da on *apsolutno miruje* u odnosu na *prostiranje svetlosti* i što se zato nalazi u *apsolutno privilegovanom položaju* pri izračunavanju *bilo kojeg* vremena *bilo kojeg* tela koje se kreće u odnosu na njega. A sve je to moguće – da ponovimo još jednom – samo zato što u STR postoji smisao u kojem se, za razliku od *emisione teorije*, svetlost prostire *sama po sebi*, a *ne samo u odnosu* na ovaj ili onaj svetlosni izvor, uvek istom brzinom, bez obzira na to što mi to ne možemo uvek otkriti.

Drugo, deo razloga što je jedan od blizanaca u pravu kada izračunava isteklo vreme drugog množeći $2/v$ sa $\sqrt{(1-v^2)}$ jeste i u tome što je *pretpostavljeno*, u datom slučaju, da je struktura prostora takva da sama svetlost može stići na mesto sa kojeg je emitovana i da se jedan od blizanaca kreće upravo duž te linije „goneći" potencijalni svetlosni zrak. Drugim rečima, cilindrična prostorvremenska reprezentacija, po kojoj jedan od blizanaca putuje duž heliksa, ispravna je samo zato što on sledi svetlost za koju je pretpostavljeno da se prostire na opisani način.

Treće, *pretpostavka* da se svetlost prostire istom brzinom *i sama po sebi i u odnosu na bilo koji svetlosni izvor* povlači za sobom to da *mora* biti *razlike* i u prostornoj i u vremenskoj metrici različitih referencijalnih sistema, što konkretno znači da putovanje *duž prostorvremenskog heliksa* mora biti *duže* u *prostornom* a *kraće* u *vremenskom* pogledu. Drugim rečima, razlika među *relacijama jednovremenosti*, na koju nam Lou skreće pažnju, jeste *posledica* razlike u *metrici*, a ne obrnuto.

Konačno, najdelikatnije pitanje – koje je Lou potpuno izuzeo iz razmatranja – tiče se toga *kako* blizanci sami mogu da ustanove *putem razmene svetlosnih signala*, ako to onaj koji se kreće uopšte može da učini, kolika će biti razlika među njihovim časovnicima *na kraju puta*. Oni to *mogu* da učine na način koji je *u suštini isti* kao onaj u slučaju *otvorenog* sveta Minkovskog. Naime, mada u *zatvorenom* prostorvremenskom svetu *nema tačke obrta*, tako da se blizanci ne mogu koristiti razlikom u frekvenciji primljenih signala pre i posle promene smera kretanja jednog od njih, oni mogu po dogovoru i periodično slati parove signala u *suprotnim smerovima*, koje će primati zahvaljujući tome što je ovog puta prostorvremenski svet *zatvoren*, te iskoristiti razliku *u njihovoj frekvenciji* da bi izračunali koliko će biti *celokupno isteklo vreme onog drugog* prilikom ponovnog susreta. I pritom *i jedan i drugi* mogu koristiti Lorencove tranformacije da bi to postigli.

Sve u svemu, *s fizičke tačke gledišta*, razrešenje Paradoksa blizanaca formulisanog u *zatvorenom* suštinski je *isto* kao ono formulisano u *otvorenom* ravnom prostorvremenskom svetu.

123. Kinematička relativnost oblika

Stadion nam je pokazao kako i pri fiksiranoj jedinici mere i u slučajevima kada su sva tela čvrsta – dužine prostornih i vremenskih ili prostorvremenskih intervala ne moraju biti jednoznačne pod izvesnim kinematičkim uslovima. Pod nekim kinematičkim uslovima možemo otkriti i nejednoznačnost oblika.

Ako iz kuće posmatramo brod koji se kreće prema luci i vidimo grčkog kapetana kako baca u more Etiopljane – slepe putnike, uočićemo da oni ne padaju pravo na dole, već, kao da ih želja nosi ka luci, padaju u smeru kreanja broda, otprilike paraboličnim putanjama. Na prozorskom oknu možemo *crtati* linije kao neku vrstu tragova putanja njihovih padanja i lako se u to uveriti. Ako, međutim, neki putnik koji još nije napustio kabinu pogleda kroz prozor, videće kako odozgo ljudi sleću pravo u more, i ako bi se i on zabavljao crtajući putanje po oknu kabine, dobio bi prave linije.

Kako su putnici *stvarno* pali u more? Koje su linije vernije svedočanstvo, one na kućnom oknu ili one na oknu brodske kabine?

Odgovor na ovo pitanje može teći paralelno rešenju *Stadiona*. Ako s Aristotelom tvrdimo da postoji jedan τόπος ὁ μὲν κοινός, onda će biti verno ono svedočanstvo koje odgovara obliku putanje u tom jedinstvenom, stvarno zajedničkom prostoru. Tada je u principu moguće i da oba svedočanstva o kojima je reč budu *pogrešna*. Ako odbacimo pretpostavku o τόπος ὁ μὲν κοινός, onda su oba svedočanstva *ispravna* utoliko što svedoče o obliku putanje u *jednom* od relativnih prostora – kući ili brodskoj kabini – a o nekom pravom, stvarnom obliku, nezavisnom od ovakvih relativnih prostora, ne može se tada ni govoriti. Moguće je, naravno, i tada postulativno povlašćivati ovaj ili onaj relativni prostor i sve oblike određivati shodno tome.

Ipak, teško je osloboditi se predubeđenja da su tela morala padati putanjom tačno određenog oblika nezavisno od toga odakle smo ih posmatrali. Šta ako su ona za sobom ostavljala tragove, kao što to čine mlazni avioni. Kojeg su oblika ti tragovi? I Arhimed, koji nije znao za mlazne avione i možda nije gledao bacanje slepih putnika u more, znao je za tragove složenog kretanja (vidi definicije u spisu *O spiralama* – *Hutchins*, str. 490).

Ovo je tačka u kojoj nas kontingentne empirjske okolnosti mogu navesti na pogrešne principijelne zaključke; naime, zbog toga što bi eventualni trag *u vazduhu* bio tačno određenog oblika možemo olako poverovati da je putanja padanja ipak jednoznačno određena, previđajući da je i vazduh *jedan od* entiteta kakvi su prozorska okna i da je trag o kojem govorimo *samo još jedno* svedočanstvo. Ako kretanje broda ne bi ni najmanje „uznemiravalo“ okolni vazduh, što inače nije slučaj, trag bi bio paraboličan. Ako bi se pak okolni vazduh kretao zajedno s brodom, što takođe nije slučaj, trag bi bio prav. Trag u vazduhu strogo uzev neće biti ni paraboličan ni prav, ali *i to* je nešto *kontingentno*. I tragovi na oknima kuće i brodske kabine i trag u vazduhu tragovi su na *određenim entitetima* i nijedan nije trag u apsolutnom prostoru, sem ako ovaj već unapred nije postuliran. A trag na *određenom* entitetu *jeste* određenog oblika.

124. Egzaknta kvadratura kruga i određenje dužine π, problem rektifikacije krivih i narušavanje identiteta geometrijskih objekata u promeni

Mi smo prihvatili *kinematičku* relativnost oblika, jer se jedno isto kretanje moglo ispostaviti i kao kretanje po pravoj liniji i kao kretanje po paraboli, ali je pri tom, statički posmatrano, parabola ostala parabola a prava prava. Geometrijska linija razgraničenja dveju površina nije prestala biti jednog *određenog* oblika. Tako je trag na kućnom prozorskom oknu bio jednog određenog oblika koji je različit od – i ne kongruentan sa – tragom na oknu prozorske kabine (u primeru iz § 123). Pored ostalog i zato što je statički posmatrano prava prava a nije parabola, dok je parabola parabola a nije prava, putanja po kojoj slepi putnici padaju može biti *i* prava *i* parabolična.

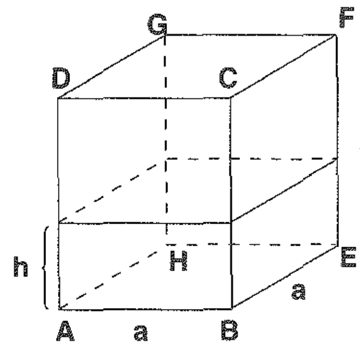
Ako uprkos *kinematičkoj* relativnosti oblika *geometrijska* parabola *nije* geometrijska prava i krug *nije* kvadrat, može li bar parabola *postati* prava a krug *postati kvadrat? Da li je moguća* rektifikacija *krivih linija?*

Za početak, moramo ustanoviti u kojem se smislu uopšte mogu upoređivati dužine krivih i pravih linija, odnosno moramo ispitati da li možemo s pravom reći da je *dužina* jedne *krive* linije *jednaka dužini* jedne *prave* linije. Da li se može dogoditi da obim jednog kruga bude potpuno jednak obimu jednog kvadrata? Da li je na brojnoj osi moguće barem načelno odrediti mesto broja π *isto toliko egzaktno* koliko se precizno može odrediti mesto broja $\sqrt{2}$ (up. gore, § 92, str. 262). Taj način je *kinematički* i on ujedno pokazuje kako je u načelu moguće izvršiti *kvadraturu kruga i kubaturu lopte potpuno ezgaktno.*

Kao što smo videli (§ 28, str. 44), izvorno je zadatak da se izvrši kvadratura kruga glasio: pronaći kvadrat čija će površina biti jednaka površini datog kruga. *Nikakva ograničenja* u pogledu

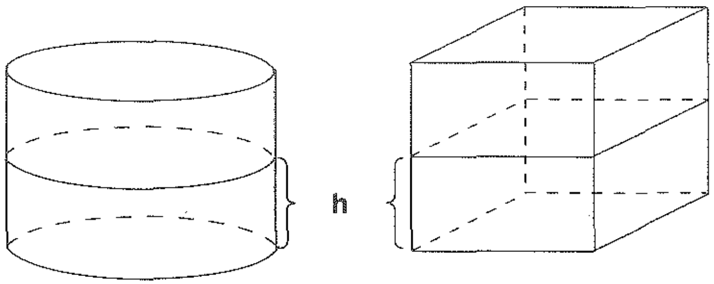
dozvoljenih sredstava nisu se pominjala. Izvršiti kubaturu lopte značilo bi, pak, formirati kocku čija je zapremina jednaka zapremini date lopte.

Pođimo od kubature lopte. Napunimo datu loptu vodom. Prespimo vodu u kvadar veličine kvadratne osnove $a \times a$ (vidi sliku),



tako da visina *h* nivoa vode bude manja od *a*. Neka je dati kvadar kao kontejner tako konstruisan da je širinu i dužinu moguće *istovremeno* smanjivati na *isti način*. Neka se, naime, strana ABCD smanjuje tako što se strana BCFE pomera na levo ostajući paralelna sa ADGH i neka se u isto vreme istom brzinom strana HEFG pomera prema ABCD ostajući paralelna sa ABCD. Nivo vode, odnosno visina *h* će se povećavati dok će se ivice osnove smanjivati. Ako se čitava stvar izvodi u konstantnim fizičkim uslovima, onda će, kada *h* postane jedako *a*, voda biti oblikovana u kocku čija će zapremina biti jednaka prethodno datoj lopti.

Za kvadraturu kruga potrebna nam je opet neka nestišljiva tečnost, uzmimo da je ovog puta to vino, i elastični putir. Neka dati krug bude krug razgraničenja vina s okolnim vazduhom. Pri nepromenjenim fizičkim uslovima održavajmo stalni nivo vina, to jest visinu *h* (vidi sliku), preoblikujući elastični putir sve dok ne



dobijemo kvadar sa kvadratnom osnovom. Ovaj zadatak je svakako lakši nego što je bio zadatak gralskih vitezova koji su morali održavati nivo Isusove krvi, pošto se izvodi običnim preoblikovanjem putira. Kako je zapremina tela proizvod osnove i visine i kako su visina prethodnog valjka i visina novonastalog kvadra jednake, jednake su i njihove osnove, te je i gornja površina vina jednaka površini prethodno datog kruga, što znači da smo *izvršili traženu kvadraturu kruga.*

Za egzaktno određenje dužine π, dovoljni su nam isti rekviziti kao maločas. Napunimo vodom loptu čiji poluprečnik r odgovara jediničnoj duži – što znači da je zapremina te lopte $(4/3)\pi$. Prespimo vodu u šupalj kvadar čija je osnova jedinični kvadrat. Visina h kao rastojanje gornjeg nivoa vode od donje osnove kvadra biće $(4/3)\pi$, a onda je lako odrediti $(3/4)h$, to jest dužinu π. Ili, sipajmo vino u elastični putir koji dok je valjkastog oblika ima osnovu čiji je poluprečnik jedinična duž, tako da je površina osnove π. Održavajući nivo vina, preoblikujmo putir u kvadar pravougaone osnove čija jedna stranica odgovara dužini jedinične duži. Druga njena stranica biće dužine π.

Teško je razumeti zašto ovakve jednostavne procedure nisu dozvoljene u matematici i zašto su lenjir, šestar i kreda bili dozvoljeni rekviziti, dok vino i pehani nisu. Zašto bismo kvadraturu morali izvršiti baš lenjirom i šestarom?

Ograničenja u pogledu dopustivih sredstava – bez obzira na razloge za njihovo uvođenje – stvorila su dva pogrešna uverenja: uverenje da se iza, u stvari *time nastale, nemogućnosti* rešenja zadataka kvadrature i kubature krije neki naročiti problem odnosa pravog i krivog i uverenje da je i načelno u rešenju nužno sadržan momenat aproksimacije.

Videli smo, opisujući kinematički način za kvadraturu kruga i kubaturu lopte, da isto tako mogu nastati problemi kubature *kvadra* i kvadrature *pravougaonika* koji se mogu rešiti *samo* čisto kinematičkim preoblikovanjem. Problem je, kao i kod određenja dužine ili mesta za $\sqrt{2}$, u *nesamerljivosti* dve dužine ili površine, to jest u tome što u *konačnom* broju koraka ne možemo sameriti dve dužine, samo se u slučaju određenja dužine ili mesta za $\sqrt{2}$ služimo *jednim*, a u nekim drugim slučajevima, kakav je slučaj određenja dužine i mesta za π, *drugim* načinom. Ovi načini se, međutim, *ne razlikuju* u pogledu „čistote" ili „strogosti" i korišćenje pehara i vina načelno *ne uvodi* nikakav „zanatlijski", prethodno odsutan momenat aproksimacije.

U načelu *je moguće* da u prirodi postoje savršeni krug i savršeni kvadrat, kao forme razgraničenja površina (up. §§ 15–17), iako je *malo verovatno* da se tela ili delovi njihovih površina baš tako razgraničavaju da obrazuju ove savršene oblike. Kada opisujemo geometrijske procedure mi govorimo o *načelnim empirijskim mogućnostima*. Na *tom* nivou posmatrano *isto je tako moguće* da se savršeni krug empirijski preoblikuje u savršeni kvadrat. I koliko god je geometrijska sredstva moguće u principu usavršavati do željenog stepena preciznosti, moguće je to isto činiti i sa ponuđenim kinematičkim sredstvima preoblikovanja. Tako ćemo, na primer, temperaturu i pritisak održavati konstantnim u onim granicama u kojima želimo da nam ostane stalna i zapremina vode ili vina koje koristimo za kvadraturu ili kubaturu.

Ako smo prihvatili da je načelno moguće empirijski izvršiti potpuno egzaktnu kvadraturu savršenog kruga i dobii savršeni kvadrat, to još ne znači da moramo prihvatiti da je kvadraturom kružna linija *postala kvadratna*. Da bismo ispravno mogli reći da je jedna kružna linija postala kvadratna potrebno bi bilo da ona *tokom preoblikovanja očuva svoj identitet*. Ništa, međutim, ne govori u prilog takvom očuvanju identiteta.

Ono što je, u opisanim procedurama, prilikom preoblikovanja ostalo isto to je *količina* vode, odnosno vina, s tim što su u slučaju kvadrature početno i završno telo imali i istu *dužinu* visina i *površinu* osnova čiji se obim inače povećao.

Da bismo s pravom kazali da je u slučajevima o kojima je reč kružna linija postala kvadratna, ili da je, slično tome, loptasta površina postala kockasta, morali bismo da prihvatimo da su se one prilikom preoblikovanja *istezale*. To ne deluje ni najmanje privlačno, ako o geometrijskim linijama i površinama govorimo samo kao o formama uzajamnog ograničavanja. Identitet geometrijskih objekata u promeni morao bi, naime, biti zajemčen nekim *nezavisnim putem*, a tako nešto nam nije na raspolaganju. Zato deluje prihvatljivije da prosto kažemo da su se voda i vino na početku na *jedan*, a na kraju na *drugi* način razgraničavali s okolinom, da je razgraničenje bilo najpre loptasto i kružno, a zatim kockasto i kvadratno.

125. Ontološki status geometrijskih objekata i matematičke definicije kontinuuma

U skladu s Kantorovom definicijom kontinuuma, među geometrijskim entitetima različitih dimenzija bilo bi moguće ostvariti μετάβασις εἰς ἄλλο γένος, tako bi, recimo, tačke mogle

biti elementi skupova koji čine liniju kao linearni kontinuum (§§ 93–94). Prema intuicionističkoj definiciji (§ 75) to nikako ne bi bilo moguće i geometrijski objekti nižih dimenzija bi mogli samo biti granice entiteta viših dimenzija, a kontinuum bi bio, po rečima Harmana Vajla, samo „medijum slobodnog nastajanja" (vidi gore, str. 192–193).

O čisto matematičkim sporovima ne bi valjalo odlučivati čisto filozofski, kao što ni u filozofskim sporovima ne bi trebalo presuđivati pozivanjem na matematičke definicije: ciljevi koje filozofi s jedne a matematičari s druge strane imaju u vidu mogu biti *relevantno različiti*, uprkos tome što su, kako je primetio Lajbnic (u pismu Malbranšu, marta 1699), „matematičari uvek imali potrebu da budu filozofi koliko i filozofi da budu matematičari". Intuicionističko shvatanje kontinuuma izgleda *filozofski* bolje utemeljeno, prema onome što je pokazala Gigantomahija, ali to ne znači da Kantorova definicija kontinuuma ne može biti *matematički* opravdana.

Pokušajmo da učinimo ono što je najdelikatnije: razmotrimo Kantorovu definiciju kontinuuma u filozofskom smislu strogo, zadržavajući ono shvatanje tačaka, linija i površina koje smo sve vreme imali u vidu a po kojem su one pre svega, ili u krajnjoj liniji, granice heterogenih delova fizičkih tela – zbog čega su ontološki sekundarne (§ 68) – ne gubeći u isto vreme iz vida moguće relevantne razlike između ciljeva filozofa i ciljeva matematičara.

Zahvaljujući indefinističkom redefinisanju Kantorovog određenja realnog broja-tačke, koje smo izveli u § 95, imamo razloga da priznamo Kantoru (vidi § 111, str. 323) da se *bilo koja* tačka može predstaviti konvergentnim nizom racionalnih brojeva, s tim što u nekim slučajevima znamo zakon po kojem se nižu članovi niza, to jest možemo rekurzivno odrediti to nizanje, dok u nekim drugim slučajevima to ne znamo. Ako je Kantorov cilj bio da nađe *takav način predstavljanja* tačaka pri kojem mu se ne bi mogla izmaći *nijedna moguća* koja *bi* se fiksirala na kontinuumu, možemo reći da je on u tome uspeo čak i ako tačke shvatimo samo kao granice heterogenih delova fizičkih tela, i *utoliko* bi se za kontinuum moglo reći da je *matematički skup* svih tih mogućih tačaka.

No Kantorova definicija vredi kad se ograniči, a tada vredi onoliko koliko vredi, ne i više od toga. Tajna njenog uspeha i van tih okvira je u tome što se bilo kojoj datoj tački možemo neograničeno približavati, „pronalazeći" stalno nove i nove tačke, „iscrpljujući" tako kontinuum preko svake unapred određene granice, što je za matematičara za koga su objekti mogući objekti to dovoljno da bi poverovao u ideju o konstituciji prostora iz tačaka. Ali ne samo što iz toga što smo dopustilil da se na liniji ne može naći tačka koja ne bi bila predstavljena pomoću nekog kantorovskog niza racionalnih brojeva *ne sledi* da moramo prihvatiti da linija jeste skup tačaka koje se na njoj mogu pronalaziti, već, kao što smo videli (§ 113), imamo dobrih razloga da verujemo da taj zaključak i nezavisno od toga što ne sledi, ni sam po sebi ne stoji. Ako želite da vidite stari nameštaj kojeg držim sakrivenog u podrumu i ako vam kažem da nema *nijednog* njegovog dela koji biste mogli da *vidite* a koji ne bi bio *osvetljen*, možda ćete u prvi mah pomisliti da je moj podrum nalik na osvetljeni izlog. Ali ubrzo ćete se nasmejati, prozrevši moju plitku nameru da vas zbunim jednom istinom koja nema nikakve veze s faktičkom osvetljenošću ili neosvetljenošću moga podruma, o kojem ćete nastaviti da mislite što i pre.

126. Nerealnost Kantorovog diskontinuuma

Činjenica da matematičar infinitista ne vodi računa o prevashodnom načinu postojanja svojih objekata, a zahvaljujući čemu

za njega prostor i može biti skup tačaka, postaje sasvim očigledna u svim onim slučajevima u kojima se u skladu sa njegovim načinom postupanja nesamostalna bića poput tačaka *pokazuju* kao samostalna. Tako se nerealnost Kantorovog *kontinuuma* kao skupa tačaka može bolje sagledati preko nerealnosti njegovog *diskontinuuma.*

Kantor tvrdi da je njegov ternarni skup diskontinuum tačaka (vidi gore, str. 265), pošto će nam za svaku tačku koju izaberemo desno od nule, ili levo od 1/9, ili desno od 2/9, i tako redom (vidi sliku na str. 265), tačno navesti bar jedan korak u kojem je uklonjen interval između tačke koju smo izabrali i tačaka koje odgovaraju nuli, jednoj devetini, itd. U skladu sa svojim pravilima igre Kantor je u pravu: sve što je postupkom građenja ternarnog skupa *propisano* on tretira i kao *izvršeno*, svaki pojedini korak kao *već načinjen* ako samo *može biti načinjen.* Za njega preostaje samo ono što *nijednim korakom ne može* biti uklonjeno, a to je diskontinuum tačaka.

Realno, međutim, uklanjanje srednjih trećina *ne može biti kompletno* i to ne samo zato što je nemoguće načiniti beskonačno mnogo uklanjanja koja bi sledila *jedno za drugim*, već i zato što i pri *jednovremenom* uklanjanju može biti izbačen samo konačan, iako neograničeno veliki, broj trećina. Bilo koja trećina uklonjena je kao trećina *nekog intervala* i zato pri bilo kojem uklanjanju i pri bilo kojem broju uklanjanja preostaju i *neki intervali* i samo zahvaljujući *njima* – i *tačke* koje odgovaraju brojevima 0, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9 itd. kao *granice* uklonjenih i neuklonjenih intervala. Paradokslano izraženo, kada bi tačke koje treba da tvore diskontinuum ostale same, ne bi ih ni bilo. Kada obrišemo srednju trećinu duži [0,1], dobijamo dve duži čiji su krajevi tačke 0, 1/3, 2/3, 1. *Kako god* da brišemo unutrašnjost ove dve duži, ne možemo ostaviti krajeve kao tačke bez nekih *ostataka* čiji bi to bili krajevi. Bez obzira na to koliki je broj uklonjenih trećina i koliko su ostaci mali, njih uvek ima. Ako odlučimo da ih *definitivno obrišemo* – izbrisaćemo *nužno* i *tačke* koje treba da ostanu.

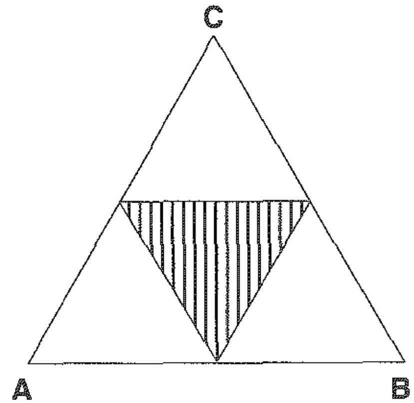
Samo u matematičarevom svetu postoje duži bez krajeva i krajevi bez duži. Njegova *pravila igre* mu dozvoljavaju da govori o nečem nesamostalnom kao o samostalnom i o nečem nemogućem kao o realnom. Kantorov diskontinuum je divan izum i kao što možemo mrzeti one koji sve hoće da demitologizuju svojim istorijskim, sociološkim ili psihološkim analizama možemo mrzeti i one koji bi želeli da nas „izvedu iz raja u koji nas je uveo Kantor". Mitološki svet je na svoj način realan, zašto i matematički ne bi bio na svoj? Lepota je možda vrednija od istine i možda vredi i žrtvovati istinu radi lepote, na šta su nas pozivali Niče i Oskar Vajld. Ali, dok se bavimo onim čime se mi ovde bavimo, dok smo vezani za surovu realnost, moramo, ostajući u zenonovskoj tradiciji, i sami biti surovi.

127. Nerealnost krivih bez tangenti i ostalih znamenitih krivih

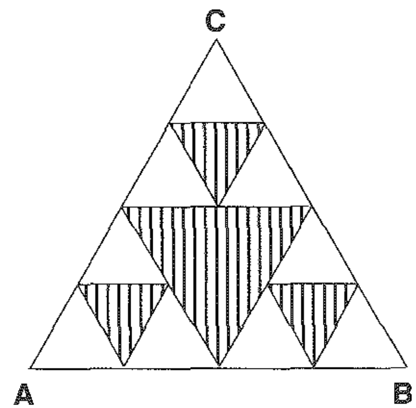
U § 91 (str. 257) sreli smo se s matematičkom krivom koju je, inspirisan Kantorovim ternarnim skupom, „konstruisao" fon Koh, a koja nema tangentu ni u jednoj tački. No taman toliko koliko nije realan Kantorov diskontinuum preostalih tačaka ternarnog skupa, nije realna ni Kohova kriva koja bi trebalo da se sastoji od novodobijenih tačaka (vidi sliku na str. 257) N, O, E, P, Q, ... Niti su Kantorove „preostale" tačke diskontinuirane, niti Kohove dobijene tačke tvore kontinuum. Niti neograničenim oduzimanjem trećina možemo dobiti diskontinuum tačaka, niti neograničenom konstrukcijom stranica jednakostraničnih trouglova nad oduzetim trećinama možemo dobiti krivu. Ova znamenita kriva ne može biti realna, kao ni Kantorov diskontinuum.

Kantorov ternarni skup bio je inspiracija za konstrukciju još jedne prekrasne krive, krive koju je 1915. godine „konstruisao" poljski matematičar Sjerpinski (W. Sierpiński – vidi *Hahn 3*, str. 96 i dalje).

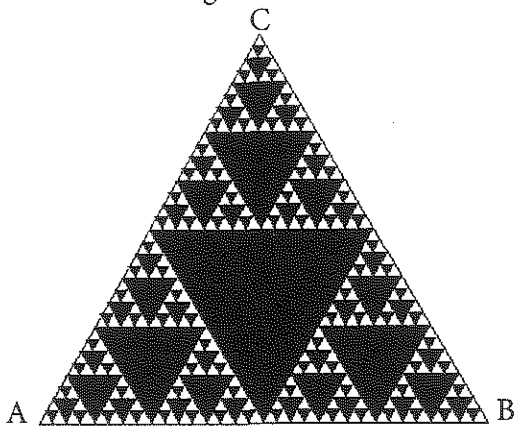
Podelimo jednakostranični trougao ABC na četiri jednakostranična trougla i osenčimo centralni kao na sledećoj slici:



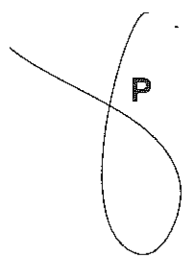
Učinimo to isto sa svakim od tri dobijena neosenčena trougla:



Ponovimo sve još jednom sa svakim od 27 dobijenih neosenčenih trouglova i nastavimo dalje u istim smislu. Posle n deoba dobićemo 3^n neosenčenih jednakostraničnih trouglova, tako će, na primer, za $n = 5$ takvih trouglova biti 243, kao na sledećoj slici:



Ako, u stilu Kantora, zamislimo da je neograničeni proces deobe *završen* – tako što pređemo *ab posse ad esse* i zamislimo da je svaki od trouglova koji bi mogao biti osenčen i *de facto* osenčen – preostaće $2^{\aleph_0}$ senčenjem „neoštećenih" tačaka koje ne tvore, poput Kantorovih, usamljeni svet diskontinuiranosti, već kao „skup" „obrazuju" jednu neobičnu krivu. Ako „čvorištem" nazovemo tačku linije gde se ona seče sa samom sobom, kao što je to tačka P na sledećoj slici:



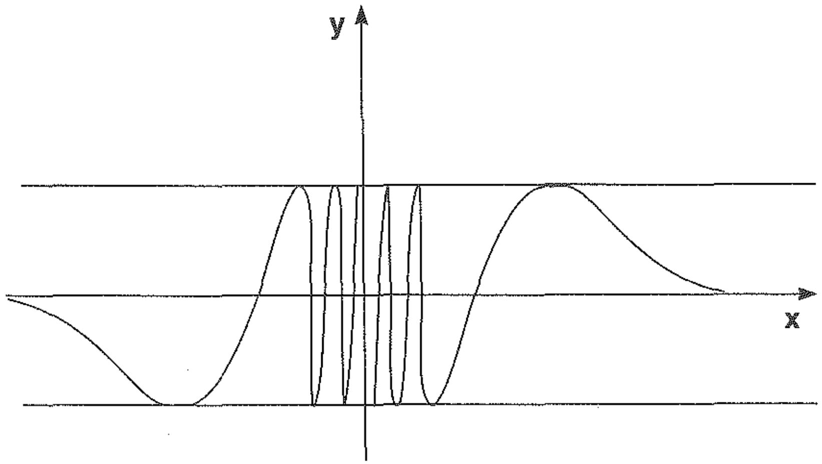
onda kriva koja predstavlja „skup" preostalih tačaka trougla ABC pedstavlja, s izuzetkom tačaka A, B i C, „skup čvorišta" utoliko što je svaka (moguća) tačka te krive presek krive sa samom sobom.

Kada bi bilo moguće ono što je nemoguće – iako je matematički definljivo, kad bi, naime, *neograničeni* proces deljenja i senčenja centralnih trouglova mogao da bude *realno okončan*, bila bi moguća i kriva koja se u bilo kojoj tački koju izaberete seče sa samom sobom!

Ni nešto običnija, ali još uvek znamenita kriva $y = x\sin(1/x)$, dodefinisana tako da za $x = 0$ bude $y = 0$, koja bi trebalo da bude *kontinuirana* ali *nediferencijabilna* u tački (0, 0) (vidi gore, str. 257) *ne može* biti realna, jer se po definisanim uslovima talasi u drugom i trećem kvadrantu koji se s leva na desno smanjuju *ne mogu* spojiti sa talasima u prvom i četvrtom koji se smanjuju s desno na levo. Iz toga, naime, što je kiva tako *definisana* da bi se *po definiciji* u proizvoljno bliskoj okolini tačke (0, 0) *mogle* pronaći njene tačke i što shodno *istoj definiciji* kriva *ne bi mogla* da priđe tački (0, 0) *ni iz jednog određenog* pravca, to jest ni iz jednog kvadranta, *ne sledi* da ona *postoji* kao kontinuirana u odnosu na tačku (0, 0), odnosno ne sledi da takva kriva može postojati. Beskonačno mnogo oscilacija u drugom i trećem ili prvom i četvrtom kvandantu ni statički posmatrano nije nešto što je moguće unutar ograničene oblasti, iako broj mogućih oscilacija definisanih zakonom $y = x\sin(1/x)$ nije ograničen.

Matematičar se sasvim lepo može igrati krivom $y = x\sin(1/x)$, tretirajući je kao kontinuiranu ali nediferencijabilnu u tački (0, 0), jer po njegovim pravilima igre i njegovim definicijama kontinuiteta i diferencijabilnosti kriva uvek može biti *dovoljno blizu* tački (0, 0) da nas uveri da joj je *bliže* nego tačka koju smo *izabrali* u želji da dokažemo eventualni diskontinuitet i, u isto vreme, uvek dovoljno *disparantna* s obzirom na istu tačku da nas uveri da ne dolazi do tačke (0, 0) ni iz jednog kvadranta. Ostajući *unutar matematičkih pravila* igre, kontinuirana kriva određena funkcijom $y=x\sin(1/x)$ *je dovoljno realna*, iako je *inače nemoguća*.

Kriva $y=x\sin(1/x)$ nije, *a fortiori*, ništa realnija od krive $y=\sin(1/x)$, koja je u tački (0, 0) ne samo nediferencijabilna nego i diskontinuirana (vidi sliku). Kriva $y=\sin(1/x)$ može izgle-



dati manje realna zato što se *i prema matematičkoj definiciji* talasi u drugom i trećem kvadrantu ne mogu povezati sa talasima u prvom i četvrtom. Naime, *koju god* tačku da smo *izabrali* na krivoj dovoljno blizu tački (0, 0), između nje i tačke (0, 0) postoji neograničeno mnogo tačaka na istoj krivoj koje su *udaljenije* od x-ose.

U prethodnim primerima se vidi koliko *matematička definicija* kontinuiteta ne obuhvata samo slučajeve *realnog* kontinuiteta. U slučaju krive $y=x\sin(1/x)$ rastojanja od x-ose se *prosečno* smanjuju kad se približavamo tački (0, 0) i to je *za matematičara dovoljno* da datu krivu proglasi kontinuiranom s obzirom na tačku (0, 0). Imajući na umu da prosečna rastojanja teže nuli, on ne haje za to što udaljavanja i približavanja treba da se neograničeno naizmenično smenjuju i poziva se *samo na to* što za bilo kojim udaljenjem sledi veće približenje.

Žordan je oko 1880. godine (vidi *Waismann 2*, str. 159), prisećajući se Ksenokrata (up. gore, str. 223–224), ponovo definisao liniju, pravu ili krivu, kao oblik koji nastaje kontinuiranjem tačke. Matematičari su bili ponosni što su izašli iz „rajskog stanja" (kako se izrazio Klajn (Klein) – vidi *Waismann 2*, str. 159, nap. 4) u kojem su još bili verovali da kontinuirane funkcije moraju biti diferencijabilne – čime je navodno bila ugrožena Žordanova definicija. Naime, kriva $y=x\sin(1/x)$ bi trebalo da bude kriva koja odgovara Žordanovoj definiciji, dok joj kriva $y=\sin(1/x)$ ne bi odgovarala, pošto, budući diskontinuirana u (0, 0), ne bi mogla nastati kontinuiranim kretanjem.

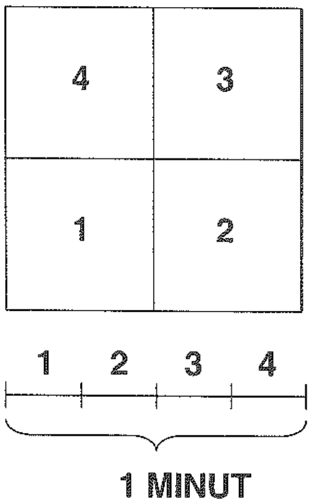
Mi smo pak, videli da *nijedna* od pomenutih krivih nije realno moguća i utoliko *nijedna* od njih ne može nastati kontinuiranim kretanjem tačke. Ni na ovom mestu nema narušavanja „velike analogije": kontinuirana kriva – kontinuirano kretanje, i obrnuto; ali matematička je definicija preširoka, ona obuhvata i nemoguće slučajeve.

Iako ni kriva $y=x\sin(1/x)$ ne može realno nastati kontinuiranim kretanjem tačke, shodno Ksenokrat-Žordanovoj definiciji samo je kriva $y=\sin(1/x)$ izgubila status krive za koju bi to važilo. No zato je Peanovim izumom iz 1890. godine (vidi *Hahn*, str. 85) kvadrat postao kriva!

Kantor nam je pokazao da se između tačaka na (jediničnoj) duži i tačaka na (jediničnom) kvadratu može uspostaviti biunivoka korespondencija (na str. 267–268) smo videli kako se takva korespondencija uspostavlja između jedinične duži i jedinične kocke), ali time jednodimenzionalni entitet još nije postao dvodimenzionalan (uzimajući dimenziju u smislu u kojem je to određeno u § 94, str. 269). Peano je samo konstruisao *kontinuirano* *preslikavanje* 1–1 tačaka linije na tačke kvadrata, gde x i y zavise od vremena (t), utvrdivši time da kontinuiranim kretanjem jedne tačke *mogu da se pokriju* sve moguće tačke kvadrata. Ukoliko kretanjem tačke nastaje linija, onda je, utoliko, i kvadrat linija.

Neka je tačka T tromeđa plave, crvene i žute površine (kao na slici na str. 16) i neka se zajedničkim kretanjem plave i žute pomera i tromeđa. Kako da izvedemo to kretanje da tromeđa prođe kroz sve moguće tačke jediničnog crvenog kvadrata?

Hilbert nam je dao jednostavno uputstvo (vidi *Waismann 2*, str. 160 i dalje). Podelimo minut na četiri jednaka dela i isto tako jediničnu duž i jedinični kvadrat (vidi sliku).

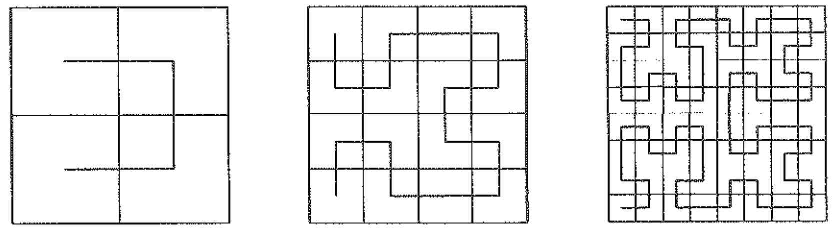


Podelimo ih zatim na 16, pa na 64 dela i numerišimo rednim brojevima dobijene kvadratiće tako da bude moguć kontinuirani prelaz (kao na slici)

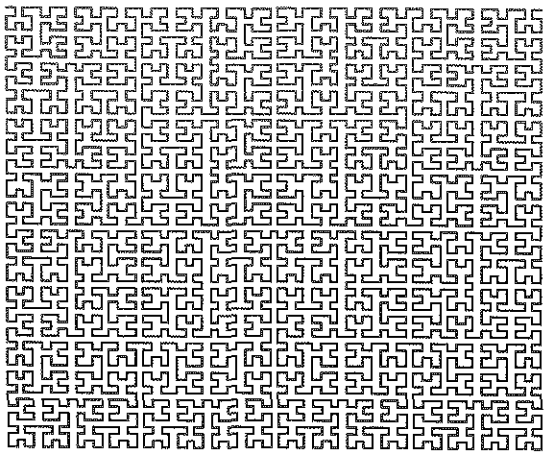
16	13	12	11
15	14	9	10
2	3	8	7
1	4	5	6

64	63	50	49	48	45	44	43
61	62	51	52	47	46	41	42
60	57	56	53	34	35	40	39
59	58	55	54	33	36	37	38
6	7	10	11	32	29	28	27
5	8	9	12	31	30	25	26
4	3	14	13	18	19	24	23
1	2	15	16	17	20	21	22

od prethodnog ka narednom. Povežimo kvadrate kontinuiranom izlomljenom linijom, kao na sledećim slikama:



Dakle, dok jednim jednominutnim kretanjem nastaje jedinična duž, drugim jednominutnim kretanjem mogu nastati takve izlomljene linije. Proces usitnjavanja kvadratića možemo produžiti neograničeno i na sličan način dobijati nove i nove izlomljene linije. Evo kako bi (uveličano) izgledala izlomljena linija nastala jednominutnim kretanjem kroz 4096 kvadratića:



Svakim narednim korakom pokriveno je sve više tačaka jediničnog kvadrata. Granična figura kojoj se nove i nove izlomljene linije približavaju je sam kvadrat *kao* kontinuirana kriva. Kvadrat *kao* kontinuirana kriva trebalo bi da može da nastane izvesnim jednominutnim kretanjem tačke.

Ova kriva, koja bi prekrila čitavu površinu kvadrata, ne bi, naravno, nigde bila diferencijabilna. Birajući tačke na krivoj sve bliže nekoj na njoj prethodno fiksiranoj tački, mogli bismo dobijati sečice koje su upravljene u kojem god pravcu želimo.

No ni ova znamenita kriva nije realno moguća, tačnije, ne može nastati realnim kretanjem tačke, pošto, naime, ne govorimo prosto o kvadratu nego o kvadratu *kao* krivoj. Videli smo da u slučajevima kakav je kvadratura kruga imamo razloga da tvrdimo da linija ne održava svoj identitet u promeni (str. 385). Čak i da u slučaju kad je reč o tački prihvatimo da ona identitet u promeni ne gubi i da kretanje tela kojim se izražava pomeranje tromeđe shvatimo kao kreanje *tačke*, ona se ne bi mogla kretati po Peanovoj krivoj. Ali, po pravilima igre infinitističke matematike opisano kretanje tačke *je* moguće, jer je sve veće približavanje takvom kretanju *neograničeno* i *čim*, shodno propisanom zakonu,

može biti približnije – uzima se da se i *zbilo*. A ako su *sva* približna kretanja isključena kao *već* prevaziđena, čak iako ih je neograničeno, ostaje još jedino kretanje po samoj znamenitoj krivoj.

Suštinske razlike između kruga koji je bio *definisan* kao granični slučaj neograničenog upisivanja poligona i Peano-Hilbertove krive, koja je *definisana* peko opisanog neograničenog upisivanja izlomljenih linija – matematički gledano *nema*. Zato je matematički gledano opravdano prihvatiti i postojanje Peano-Hilbertove krive.

Mogućnost realnog postojanja ne zavisi, međutim, samo od matematičkih definicija. I sam Hilbert je kao filozof bio radikalniji empiričar i, utoliko, finitista (vidi gore, str. 152). Razlika je između crtanja kruga i crtanja znamenite krive $y = x\sin(1/x)$ na prelazu iz drugog i trećeg u prvi i četvrti kvadrant, ili Peano-Hilbetove krive, u tome što crtajući krug ne moramo izvršiti beskonačan broj oscilacija, to jest izvršiti jedan *super-zadatak*, što bi se u slučaju druge dve kontinuirane, ali ne i svuda diferencijabilne, krive – moralo učiniti.

Sve znamenite krive kojima smo se divili potvrđuju svojom nerealnošću nezamenljivi značaj Aristotelovog učenja o primarnim značenjima (vidi § 66) za konačno presuđivanje u pitanjima koja se tiču ontološkog statusa matematičkih objekata. Ako je zakon krive, prema Lajbnicu, princip njene individuacije (vidi gore, str. 245), onda možemo zaključiti da je realno moguća samo ona kriva koja bi trebalo da se individuira, to jest ostvari, prema zakonu po kojem bi imala *konačno mnogo* delova koji su *jedinice u prvenstvenom smislu*. Kriva koja je matematički definisana tako da u nekom konačnom intervalu treba da ima beskonačno mnogo takozvanih kardinalnih tačaka – maksimuma, minimuma, tačaka kad prestaje da raste i počinje da opada (i obrnuto), diskontinuiranih promena uspona, ili drugih ključnih tačaka koje bi je u tom intervalu učinile nejedinstvenom – *nije realno moguće*.

128. Matematička pravila igre i asimetrija između statički i dinamički shvaćene beskonačnosti

Kako pojedinačna pravila igre tako i opšti kriterijumi strogosti na osnovu kojih je neki potez smatran dozvoljenim ili nedozvoljenim menjali su se tokom duge istorije matematike. Tako je, recimo, kao što smo videli (§§ 28, 67, 78), grčkom matematikom vladao duh finitizma, ali taj se finitizam veoma mnogo razlikuje od finitizma Hilbertovog programa (vidi *Hilbet 2*, str. 170 i dalje), koji je u sebi trebalo da sadrži čitav „Kantorov raj“ (*ibid.*, str. 170). Kraljica matematičkih nauka u Grčkoj bila je geometrija (posle aritmetizovanja geometrije kod ranih Pitagorejaca – §§ 27–31 i § 78) i finitizam je bio vezan za uverenje da u fizičkom svetu o kojem geometrija u krajnjoj liniji govori (vidi *Arisotle 22*, 193 b i dalje) nema aktualne beskonačnosti ni u kojem vidu. Nezavisno od toga što je Hilbert kao filozof uglavnom delio s Grcima ovo uverenje (vidi naročito *Hilbert 2*, str. 164), on kao matematičar nije želeo da se odrekne Kantorovih beskonačnosti, i finitizam svog programa bio je vezao za formalizam kojim se prezentira matematička teorija[1]. Makar koliko, dakle, bio finitista i kao filozof i kao formalista, Hilbert se s obzirom na „sadržaj“ koji se krio iza njegovog formalizma nije želeo odreći predivnih struktura koje su za Kantora kao pravog matematičara platoničara bile realne.

Dok je Hilbertova škola maksimalnu pažnju posvećivala formalnoj, sintaksičkoj strani izgradnje matematičkih teorija i uz to vezivala svoju strogost, Brauer na to nije obraćao naročitu pažnju,[2] ali je zato njegova strogost u pogledu korišćenja principa isključenja trećeg drastično ograničila broj klasično dozvoljenih poteza (vidi § 73). Brauer je tom redukcijom bio zadovoljan – to za njega nije bila samo jedna nesrećna posledica nekih logičkih razmatranja – jer mu je, kao i Kantoru, s kojim se inače toliko nije slagao, bilo

stalo do realnosti matematikih entiteta i struktura. Upravo zato što nije verovao u preegzistenciju beskonačnosti, on je i kritikovao preslobodno korišćenje principa isključenja trećeg (*Brouwer 5, 11* i *12*) i prihvatao je samo one entitete koji se u principu matematičkom konstrukcijom mogu stvoriti (osim razmatranja u §§ 73–75, vidi *Bernays*, str. 277 i dalje i *Heyting 2*, str. 1–12).

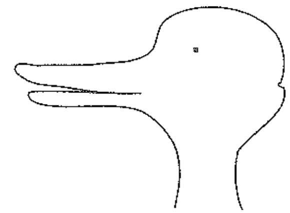
Ne hoteći da se mešamo u posao matematičara tako što bismo im nametali platonističku, formalističku, konstruktivističku – ili neku četvrtu – koncepciju po kojoj bi trebalo da formiraju pravila svoje igre, ostavljajući im na volju da uđu ili ne uđu u „Kantorov raj“, s ovim ili onim opravdanjem ili bez njega, pokušaćemo da razumemo, koristeći se prethodnim razmatranjima, zašto je infinitizam, koji je filozofski tako sporan, toliko prisutan i uspešan u matematičkoj praksi, nezavisno od ove ili one racionalizacije utemeljivača matematičkih programa.

Mi smo sva filozofska rešenja i filozofske komentare sporova koje smo razmatrali posle završetka Gigantomahije osnivali na okolnosti da čak ni Zevs ne može izvršiti zadatke za koje smo otkrili da su međusobno inkopatibilni. Premise spornog zaključka kojima se tvrdi i da Zevs neograničeno broji deonice Ahilovog puta, jer je to moguće, i da stiže na cilj s Ahilom, jer je i to moguće, proglasili smo nesaodrživim i zato smo tvrdili da se nijedan kvadrat ne može sastojati iz beskonačno mnogo raznobojnih prostranstava (iz § 19), jer koliko god nam Zevs pokazivao kako može da smesti više delova nego što smo mu rekli, ili više nego što je sam prethodno stavio, on ne može da ih stavi više nego konačno mnogo, prosto zato što, po pretpostavkama koje prihvata i standardna matematika, za to ne bi bilo dovoljno mesta. No i ono što Zevs ne može da uradi, i ono što ne može da sačini, matematičaru može izgledati moguće, jer on sam ne mora da broji deonice Ahilovog puta i sastavlja šarene kvadrate: on može prosto propisati da se broj koraka i šarenih delova ne ograničava i pustiti Sizifa da proverava da li je u nekom konačnom vremenu moguće postupiti u skladu s takvim propisom. Iz perspektive *propisivača nedelatnika* broj koraka, ili delova, veći je od bilo kojeg konačnog koji mu navedemo, jer može biti veći, i *utoliko* je *za njega* članova niza *beskonačno mnogo*. Njega ne mora uznemiravati to što smo mi izvršili *reductio ad absurdum* uverenja da za beskonačnost u pomenutim slučajevima ima dovoljno mesta, jer on Zevsa na cilju i ne čeka da bi ga pitao koliko je deonica izbrojao, niti na vašaru prikazuje šarene kvadrate. Za njegov način posmatranja, za igru koju on igra, dovoljno je to što broj mogućih koraka ili delova nije ograničeno veliki pa da dopusti kao moguće nešto što je inače realno nemoguće, jer uvek tokom igre, kad god mu to zatreba, može uzeti da je broj koraka ili delova veći nego što je bio prethodno, kad mu je bio dovoljan i manji.

Matematičar praktičar na svoje objekte gleda *dvojako* i *dinamično*, i zbog toga što mu *pri takvom posmatranju* oni nude *i* svoju unutrašnju beskonačnost *i* svoju ograničenost, on ne haje za to što nas Zenon opominje da se ograničena stvar ne može sastojati od beskonačno mnogo delova. Lišen obaveze da načini beskonačno mnogo koraka, ili da u kvadrat stavi beskonačno mnogo pravougaonika, matematičar, poput deteta, uzima da je ovih toliko koliko mu je trenutno potrebno. Tako se on, recimo, po geometrijskoj progresiji približava kraju puta ili kraju predmeta proizvoljno blizu, dodajući da članova niza koji se nižu po propisanom zakonu ima još. Inače, ako mu zatreba, matematičar će stvar brzo okrenuti, posmatraće je na drugi način, s druge strane, tvrdeći kako nijedan od članova niza ne doseže kraj predmeta. Naravno, svaki član iz geometrijske progresije je po propisu smešten tako da je udaljen od kraja: važi doduše $\vdash \forall\varepsilon\exists n(1-\varepsilon<(2^n-1)/2^n)$, ali važi i $\vdash \forall n\exists\varepsilon(1-\varepsilon>(2^n-1)/2^n)$; na kraju će modalno opravdane a nemodalno nesaodržive teoreme biti ujedinjene u jednu, doslovno uzeto apsurdnu tvrdnju, tvrdnju da beskonačan niz

čiji su članovi sve bliži kraju predmeta (površina ili duži) *kao beskonačan iscrpljuje* taj predmet (površinu ili duž).

Za ono što je u *dvojnom* i *dinamičnom* posmatranju bilo moguće, matematičar lako može pomislilti da je moguće *statički* i *u oba aspekta istovremeno*. No to što je nešto što gledamo čas patka čas zec (posmatraj sledeću sliku)



ne znači da je to i patka i zec jednovremeno. To je u slučaju o kojem je reč samo *crtež* koji možemo *naizmenično* videti *kao* patku i *kao* zeca. Shematizam u postupanju matematičara koji smo razjasnili u § 113 (vidi naročito str. 326), koji se sastoji u tome što se neka data duž ne tretira kao određena, pa se sve moguće deobe, odnosno sve moguće aktualizacije granica o nekom zakonu, uzimaju i kao *izvedene* i ako *nisu istovremeno sve moguće*, dovodi do toga da se uzima u obzir čas to što je mogućnosti *beskonačno* – pa su tačke po geometrijskoj progresiji raspoređene do kraja duži – čak to što se sve mogućnosti *ne mogu istovremeno realizovati* – pa je svaka tačka niza udaljena od krajnje.

Imajući u vidu vrstu shematizma koju primenjuje matematičar i dvojako i dinamično posmatranje koje ga karakteriše, zanimljivo je razmotriti spor između klasičara i intuicioniste na primeru gde intuicionista koristi okolnost da dinamički može biti beskonačno ono što statički ne može, da bi, shodno svojim standardima, dobio specifične intuicionističke „entitete“ koji su na isti način nerealni kao klasične duži bez kraja.

Za intuicioniste, za razliku od klasičara, ne važi da se u euklidovskoj geometriji dve prave koje se ne mogu ni poklapati niti biti paralelne nužno seku (vidi *Heyting 2*, str. 119)! To je tako zbog toga što je konstrukcijom zgodnog „letećeg svojstva" (vidi gore, str. 186) moguće je pokazati da $ax + b = 0$, gde je $a \neq 0$ i $b \neq 0$, nema uvek rešenje (vidi *Heyting 2*, str. 119). Ovo pak važi zato što $a \neq 0$ ne implicira $a \not> 0 \vee a \not< 0$ (*ibid.*, str. 118), gde $a \not> b$ važi ako je $a > b$ nemoguće, a $a \not< b$ ako je $a < b$ nemoguće (*ibid.*, str. 25). Ovo je pak tako zato što u svim slučajevima u kojima beskonačni niz nije rekurzivno definisan *uvek* postoji mogućnost da se traženo svojstvo preko kojeg je definisano leteće nalazi u *još nepregledanom* delu niza.

Ako ne možemo navesti tačno gde se neka prava $ax + dy = b$ seče sa x-osom iako je i $a \neq 0$, i $b \neq 0$, i realni broj $d \# 0$ (*Heyting 2*, str. 119), uvek je navodno zajemčen presek moguće neograničeno odlagati. U krajnjoj liniji navodni presek je *uvek moguće* izbeći *zato što* važi $\forall m \exists n (n > m)$ (up. §§ 6, 84).

Klasični matematičar infinitista, koji bi želeo da protestvuje protiv ovakvog intuicionističkog zaključka, bio bi ovde poražen vlastitim oružjem. Njegov spas trebalo bi da leži u tome što iako važi $\forall m \exists n (n > m)$, ipak $\neg \exists n \forall m (n > m)$. Koliko god, naime, presek prave $ax + dy = b$ sa x-osom mogao ležati dalje nego što je inspekcijom utvrđeno, on mora biti konačno udaljen od koordinatnog početka. Ali kako će klasičar na to smeti da se poziva kad za njega postoje duži bez kraja jer uprkos tome što $\forall n \exists \varepsilon (1 - \varepsilon > (2^n - 1)/2^n)$ ipak $\forall \varepsilon \exists n (1 - \varepsilon < (2^n - 1)/2^n)$?

„Delo tvoje vratiće se na glavu tvoju!". Koliko god se razlikovali, i klasični i intuicionistički matematičar učili su se svojoj veštini na „patka-zečevima". U igri koju oni igraju pobeđuju igrači koji igraju crnim figurama, pošto se intuicionista poziva na $\forall m \exists n (n > m)$, gde se u traženju eventualnog kontraprimera prvo mora fiksirati m, a klasičar na $\neg \exists \varepsilon \forall n (1 - \varepsilon > (2^n - 1)/2^n)$, gde se prvo mora fiksirati ε.

Koliko god su nerealne duži bez kraja, nerealne su i neparalelne euklidske prave koje se ne seku, ali, bez obzira na to, mi razumemo i matematičku igru i sukob između klasičara i intuicioniste. Tome nas je naučio *Zevs*, koji odlažući prestanak brojanja deonica Ahilovog puta – *nije stigao na cilj*.

Nesvestan toga da prihvatljivost proširenja polja realnih tačaka R u polje $^*R$ (vidi § 86) počiva na istoj Zevsovoj nemoći, nestandardni analitičar se potpuno slobodno koristi matematičkim shematizomom, bez ikakvih ontoloških obzira koje su još imali tvorci standardne analize. On aspekte koji nam otkrivaju teoreme $\forall n \exists \varepsilon (1 - \varepsilon > (2^n - 1)/2^n)$ i $\forall \varepsilon \exists n (1 - \varepsilon < (2^n - 1)/2^n)$ više ni pećutno ne tretira kao aspekte, to jest kao tvrdnje koje zavise od načina posmatranja koji mogu biti i nespojivi na način na koji viđenje „patke" isključuje viđenje" zeca" – on uzima da to što se nijednim članom geometrijske progresije čiji je opšti član $[(2^n - 1)/2^n, (2^{n+1} - 1)/2^{n+1}]$ ne možemo dočepati jedinice, jer je $(2^{n+1} - 1)/2^{n+1} \neq 1$ za svako standardno n, *znači* da se između standardnh članova niza i jedinice mogu umetnuti novi članovi, samo što oni, zato što $\forall \varepsilon \exists n (1 - \varepsilon < (2^n - 1)/2^n)$, moraju biti beskonačno blizu jedinici.

Ovom *matematičarskom „ontologizacijom" aspekata* koji su posledica *dvojnog* i *dinamičkog* posmatranja, kojom je *faktički* negiran Arhimedov aksiom (vidi gore, str. 239), priroda matematičkog shematizma se najbolje pokazala *na delu*, u samoj matematičkoj praksi, šokirajući, svakako, i mnoge dogmatične matematičare koji veruju u realizam svoje nauke.

Matematički shematizam nas prirodno vuče u infinitizam. U svetu u kojem nema heterogenosti i u kojem je jedini način razlikovanja delova matematički, njihov realitet zavisi jedino od matematičkih zakona koji tom svetu nametnemo i mi ćemo prirodno želeti da ti zakoni budu takvi da raščlanjenje homogenog kontinuuma bude što iscrpnije, pri čemu možemo lako prevideti da ono što je dinamički moguće ne mora biti i statički moguće (vidi gore, § 111, § 112, § 113).

Zanimljivo je to što je upravo Lajbnic, koji je sigurno jedan od onih koji su najdublje sagledali matematičku vrednost infinitezimalnog računa, najavio definitivni kraj epohe u kojoj se verovalo u realno postojanje statički shvaćenih infinitezimala (čime smo se opširno bavili u §§ 80-84), proglasivši ove, pred kraj života, korisnim fikcijama (§ 85), dok, s druge strane, bezobzirnost nestandardnog analitičara koji je, posle njihovog dužeg izgnanstva, ponovo uveo infinitezimale, može najbolje da posluži da se *kroz samu matematičku praksu* sagleda kako se iza *savremenog filozofskog infinitizma bez infinitezimala* krije *matematički shematizam standardne analize* – koji isto tako ne obezbeđuje realnost svojim objektima.

129. Kontinuirane i diskontinuirane promene, statički i dinamički shvaćena beskonačnost i Boškovićeva aporija sudara

Da bi obesnažio našu antiinfinitističku interpretaciju – koja kad su ograničeni entiteti u pitanju priznaje beskonačnost samo u dinamičkom smislu i koja u „matematičkoj infinitističkoj praksi" vidi dvojno i dinamičko posmatraje koje okriva aspekte realnih predmeta koji su međusobno nespojivi – infinitista može pribeći staroj strategiji prenošenja diskusije na područje gde objekti oko kojih se sporimno *nastaju* (up. §§ 51, 71 i § 83, str. 223–230), da bi nam pokazao da se tu kinematički do kraja *ostvaruje* ono za šta i mislimo da je *samo dinamički moguće*. Ako jedan konačni

segment parabole može da bude slika jednog jednako ubrzanog, složenog kretanja (vidi o tome gore, str. 224), onda je, reći će on, beskonačan broj promena brzine *realizovan* i više nije reč o tome da *bi potencijalni* parovi tangenti parabole u parovima različitih tačaka čije se apscise jednako razlikuju obrazovali različite uglove (vidi gore, str. 335).

Međutim, odgovor koji se tiče promene brzine *istovetan* je s odgovorom koji bi se ticao promene svetline, recimo, pošto u ovoj tački možemo potpuno održati „veliku analogiju prostora i vremena".

Posmatrajući neku površinu možemo primetiti kako je globalno uzevši desno svetlija. Bližim istraživanjem možemo otkriti da za svaki od izabranih isečaka važi isto: desno je svetliji, levo tamniji. Da li je, bar u principu, moguće da površina celom svojom dužinom *postaje kontinuirano svetlija* s leva na desno, tako da *u principu ne možemo naći* ni dva jednako svetla delića ma koliko rastojanje od linije koja ih vertikalno razgraničava bilo malo – jer takvih delića uistinu nema?

U prethodnom pitanju krije se izvanredno zavodljiva ekvivokacija koja je, međutim, varijacija osnovne ekvivokacije iz §§ 113, 114. Ako se pitamo da li je moguće da *površina nekog tela bude takva da* na njoj ne možemo otkriti ni dva dela za koja bismo rekli da su jednake svetline, onda je odgovor *potvrdan*. Ali, ako se pitamo da li je moguće da se *svetlina neke površine stalno menja* tako da površina *zbog toga* nema nijedan homogeno svetli deo, onda je, ako pitanje shvatimo doslovno, odgovor *odričan*! Otkriće tajne je u tome što je u prvom pitanju reč o *površini* za koju ne vidimo zašto ne bi mogla biti *takva da bi se ispostavilo, dinamički*, da na njoj ne možemo uočiti dva jednako svetla dela, dok je u drugom pitanju reč o samoj *svetlini* koja bi trebalo da je aktualno beskonačno, $2^{\aleph_0}$, puta promenjena, a znamo da se ne može promeniti ni $\aleph_0$ puta (vidi § 111).

Slično kao u ovom primeru sa svetlinom, možemo reći da je moguće *kretanje* koje je *takvo da bi se ispostavilo* da telo ni u koja dva slobodno izabrana i vremenski jednaka intervala nije prešlo jednak put, ali ta *karakterizacija* jednog kretanja ne znači da moramo da kažemo da se brzina beskonačno puta promenila, ili da se stalno menjala – ne stižući (zbog toga) da bude brzina – jer bismo na to bili obavezni samo ako bismo prihvatili Raselovu definiciju kretanja (vidi § 114).

Segment parabole je, za razliku od znamenitih kivih iz § 127, realno moguć lik, zato što nije moguć *reductio ad absurdum* poput onog kojim smo porekli mogućnost kvadrata sačinjenog od beskonačno mnogo šarenih pravougaonika (str. 319), a to što je uspon krive, to jest koeficijent pravca tangente, u bilo kojim dvema izabranim tačkama segmenta različit, ne znači da se on aktualno promenio beskonačno mnogo puta odslikavajući navodno beskonačno mnogostruku promenu brzine jednako ubrzanog kretanja. Takva promena se ne može obaviti ni $\aleph_0$ puta (shodno zaključku iz § 111), a onda se, *a fortiori*, nije obavila ni $2^{\aleph_0}$ puta.

Bez obzira, dakle, da li je reč o promeni mesta, promeni oblika ili promeni svetline, da li o menjanju i vremenu ili samo u prostoru, „velika analogija" nije narušena: beskonačnost je moguća samo u dinamički shvaćenom smislu.

Zanimljivo je to što je Ruđer Bošković, čije je određenje geometrijskih objekata najbliže onom koje smo mi pre svega imali u vidu (up. str. 16) i koji je jedan od onih filozofa za čije se ime vezuje „velika analogija" o kojoj je reč, razmatrajući slične primere kontinuiranih i diskontinuiranih promena – došao do suprotnih zaključaka u pogledu mogućnosti ovakvih promena; mi smo ostali pri tome da su diskontinuirane promene ono što je *pre svega* moguće *de re* (φύσει), a da je pojam kontinuirane promene *derivativan* pojam, jer se odnosi na činjenicu da u bilo kojoj mogućoj tački nekog entiteta poput geometrijskog oblika možemo

konstatovati promenu s obzirom na neku datu osobinu i neke, koliko god želimo male, intervale uprkos tome što se o toj osobini može govoriti samo s obzirom na te intervale; Bošković je zaključio da su samo kontinuirane promene moguće i to je ilustrovao *aporijom sudara* (vidi *Bošković 3*, §§ 63–72, str. 28–33)[1].

Kad bi bilo zaista moguće ono što uobičajeno smatramo sudarima tela koja se kreću različitim brzinama, moralo bi da dođe do trenutne promene brzine kretanja tela, a time bi funkcija čije vrednosti predstavljaju prvi izvod funkcije kojom je jedno takvo kretanje predstavljeno bila *prekidna*. Ona ne bi imala jednoznačno određenu vrednost za izvesno x i linija kojom je ona predstavljena bila bi diskontinuirana. Ali šta u tome deluje paradoksalno?

Celu aporiju sudara možemo operacionalizovati – u „veku tehnike" – zahvaljujući postojanju *tahometra*. Ako je automobil najednom promenio brzinu, igla koja pokazuje brzinu trebalo bi da *u istom trenutku* bude na *dva različita mesta*, pokazujući dve različite brzine, odnosno, ukoliko se automobil do trenutka promene brzine kretao ravnomernom brzinom, trebalo bi da se – budući na jednom mestu do trenutka promene brzine – igla *odjednom nađe* na *drugom* mestu *preskočivši međupoložaje*.

No zašto bi igla *morala da može* da *stalno tačno pokazuje* brzinu kretanja? Ne možemo li aporiju razrešiti tako što ćemo utvrditi da je nemoguć klasični tahometar koji bi uvek tačno pokazivao brzinu, pošto je igla za izvesno, ma koliko kratko, vreme morala preći put od položaja u kojem *je* tačno pokazivala brzinu do položaja u kojem *će* je tačno pokazivati? Zbog nemogućnosti da igla stalno tačno pokazuje brzinu, ili nezadovoljivosti zahteva sa jednoznačnošću prvog izvoda u nekoj tački, *ne moramo zaključiti* da je nemoguća diskontinuirana promena brzine.

Da li bi prostor postojao, ili bi bar mogao postojati, i kad svet materijalnih objekata, u kojem živimo, ne bi postojao? Da li bi vreme postojalo, ili bi bar moglo postojati, kad se nikakva promena ne bi dešavala? Ova pitanja su izbila svom silinom na filozofsku pozornicu u doba Njutna i Lajbnica.

Kembridžski platoničari, među njima i Njutnov učitelj Isak Barou, tvrdili su da „je prostor postojao pre nego što je Svet stvoren i da sad postoji izvansvetski beskonačni prostor" (*Barrow*, str. 35), i da je, isto tako, „vreme postojalo pre nego što je Svet počeo (da postoji) i postoji... i u izvansvetskom prostoru" (*ibid.*, *loc. cit.*). Njutn se u pogledu uverenja da prostor i vreme imaju apsolutni realitet, dakle da postoje po sebi, potpuno slagao sa svojim učiteljem, mada je njegova argumentacija tome u prilog originalna (vidi kraj ovog odeljka), jer bi trebalo da se osniva, pored ostalog, i na dobro utemeljenoj empirijskoj teoriji. Njegov glasnogovornik Klark, u korespondenciji s Lajbnicom, uporno je branio ovo apsolutističko stanovište, koje neki nazivaju platonističkim, po kembridžskim platoničarima (*Newton-Smith*, str. 7), neki pak supstancijalističkim, jer su prostor i vreme shvaćeni kao samostalni entiteti, dakle, kao supstancije (*Sklar*, str. 161).

Lajbnic je, kao što smo videli, mislio da bi prostor i vreme bili još samo Božje ideje da Sveta nema. Osim toga što bi prostor i vreme u pogledu svog *postojanja* zavisili od materijalnih stvari, oni su kod Lajbnica i *definisani* redukcionistički. Naime, svi iskazi o prostoru i vremenu treba da su svodivi na iskaze o stvarima i njihovim odnosima, aktualnim ili mogućim (*Leibniz 32*, 25-26). Osnovna vrsta odnosa koji se tu pojavljuju su odnosi koegzistencije i sledovanja (*ibid.*, *loc. cit.*); *sensu stricto* ne bi trebalo govoriti o „stvarima u prostoru i vremenu", već o stvarima *koje su*

rasprostrte i *koje* traju *zato* i *time što* su u ovakvom ili onakvom *odnosu*.

U mnogobrojnim raspravama koje su od vremena Lajbnic-Klarkove korespondencije vođene među filozofima i, ne manje, među naučnicima (vidi *Sklar*, gl. 3, D, E), opšte pitanje o mogućnosti postojanja prostora i vremena bez sveta i promene često je potiskivano specifičnijim pitanjem o mogućnosti postojanja unutarsvetskih prostornih i/ili vremenskih vakuuma (vidi *Newton-Smith*, str. 33–47). Moguće je, naime, da neko bude antisupstancijalista kad je u pitanju opšta teza, a da ipak dopusti postojanje praznog prostora *unutar sveta* ili postojanje vremenskih intervala bez ikakve promene u svetu u kojem se *inače* dešavaju promene.

Da li nam ishod Gigantomahije može pomoći da se opredelimo u sporu oko načina postojanja prostora i vremena?

Rešenje *Ahila* donelo je sa sobom i niz neočekivanih zaključaka o prirodi matematičarskog načina analize prostora. Dok Zevs *može* neograničeno brojati deonice Ahilovog puta, ali tada *nikad* neće stići na cilj, i, s druge strane, *može* stići na cilj, ali izbrojavši samo *konačno mnogo* deonica – kao što može sastavljati šarene kvadrate iz neograničeno mnogo boja a da ipak svaki kvadrat mora da se sastoji iz konačno mnogo boja – matematičar svojim veštim „geštalt-prebacivanjem", zahvaljujući kojem stvari vidi čas ovako čas onako (§ 128), „stvara" mnoge *nemoguće objekte* (§§ 126–128) za koje, onda, i mnogi nematematičari veruju da su realni. Iako na duži ne može stvarno biti beskonačno mnogo intervala, prosto zato što na njoj za to *nema dovoljno mesta* (§ 111), matematičari nas uveravaju u suprotno, prepisujući zakon beskonačnog niza (*ab posse ad esse*). Na sličan način i još neverovatnije stvari postaju „moguće" (kao što su kriva koja se sama sa sobom seče u svakoj tački, kriva koja prekriva čitav kvadrat i nema tangentu ni u jednoj tački i slično – § 127).

Ako smo se pomoću *svođenja na apsurd* uverili da se, s *jedne* strane, jedan ograničeni deo prostora *može sastojati samo* iz *konačno* mnogo *kvalitativno različitih* delova, dok ga, s *druge* strane, možemo *proizvoljno i neograničeno deliti, onda* to znači da našom matematičkom deobom *ne otkrivamo* već prethodno postojeće delove. To, drugim rečima, znači da i ako ograničeni prostor može da postoji *po sebi*, kao vakuum, *on ne može biti* struktuiran u smislu u kojem bi njegovi eventualni delovi imali realitet. On se mora tretirati kao realno apsolutno jedinstven, kao κυρίως ἕν koje bi po svemu bilo Demokritov atom (§ 46) da nije deljivo.

Ako su tačke, linije i površine samo granice, onda ih u okviru ograničenog prostora stvarno može biti samo konačno mnogo, pošto telâ unutar ograničenog prostora može biti samo konačno mnogo. Iako ograničeni *matematički* prostor sadrži beskonačno mnogo tačaka, *ograničeni* realni prostor ih *ne može* toliko sadržavati. Vakuum ih pak uopšte ne sadrži.

Ako ograničeni realni prostor ne sadrži $\aleph_0$ tačaka, linija i površina, onda ih, *pace* Herr Mathematiker, ne sadrži ni $2^{\aleph_0}$. Ograničeni realni prostor nije u sebi struktuiran u smislu punktualiteta ili raznolikosti geometrijskih oblika[1].

Najzad, ograničeni realni prostor ne može biti ni bilo kako ograničen, odnosno ograničen bilo kojom matematički definisanom površinom. Videli smo, naime, da na ograničenom prostoru nisu sve matematičke krive realno moguće. Nisu ni sve matematičke površine realno moguće. Među zatvorenim ograničenim površinama moguće su samo one kod kojih je *broj istovrsnih delova*, bez obzira kako bili definisani, konačan.

Što važi za ograničen prostor važi i za ograničeno vreme, bez obzira na takozvanu topološku strukturu vremena (naime vremensku strukturu koja bi se izrazila i topološki ispitivala na istovetnoj strukturi prostora – o različitim topološkim strukturama vremena vidi *Newton-Smith*, gl. 3–6, str. 48–142). Naime, bez obzira *kojom* bi krivom trebalo predstaviti neki isečak vremena (ili prostorvremena), ova bi morala u tom intervalu imati konačno mnogo kadrinalnih tačaka.

Neograničeni prostor po sebi, ukoliko je realan, takođe nije struktuiran, i on bi se od eventualnih unutarsvetskih vakuuma razlikovao samo po tome što spolja ne bi bio ograničen. On bi, utoliko, bio upravo ono o čemu je Parmenidu govorila Boginja (vidi § 32). No, u njemu bi, za razliku od unutarsvetskih vakuuma, *bilo* dovoljno mesta za beskonačno mnogo raznolikih stvari, jer je u ovom slučaju nemoguće izvesti *reductio ad absurdum* poput onog na osnovu kojeg smo zaključili da na ograničenom prostoru nema dovoljno mesta za beskonačno mnogo raznolikih stvari.

Sve, dakle, što je homogeno, to jest kvalitativno neizdiferencirano, pa bio to i unutarsvetski ili izvansvetski vakuum, predstavlja κυρίως ἕν, koje je u svemu poput Demokritovog atoma, odnosno Parmenidovog Jednog, sem što je deljivo. To što ono izgleda mnogostruko s obzirom da može biti mereno nekom realnom stvari kao merom, ne znači da ono jeste mnogostruko. Tako Aristotel kaže za vreme: „Pošto ono što postoji u vremenu postoji u njemu kao brojivo (ἐν ἀριθμῷ), može se uzeti (da je) vreme duže od bilo čega što postoji u vremenu" (*Aristotle 21*, 221 a 27); međutim, bez ikakve promene koja bi uvela realnu razliku, ne bi bilo razlike potencijalnih delova vremena, i ne bi uopšte bilo prošlosti, sadašnjosti i budućnosti, baš kao što je to o onome što je skroz homogeno govorio Parmenid.

Pošto *nihil privativum* nije čisto *nihil negativum* (up. gore, §§ 12, 44), već samo označava jedan kvalitet koji je suprotstavljen nekom drugom kvalitetu kao tama svetlosti, mi nećemo Aristotelovu izjavu radikalizovati tako što bismo tvrdili da period potpunog mira, bez ikakve promene, uopšte nije moguć *qua* period jer bez aktualnog menjanja unutar onog što postoji nema vremena.

Sve najpoznatije verzije argumenta protiv vremenskih vakuuma zasnivaju se na originalnoj Lajbnicovoj upotrebi Okamovog brijača. Ne treba prihvatiti tvrdnje o egzistenciji nekih entiteta, karakteristika ili njihovih promena, ako nema posledica tih tvrdnji koje bi mogle da se registruju. „(Postojanje) kretanja zaista ne zavisi od toga da li se opaža; ali ono zavisi od toga da li se može opaziti. Nema kretanja ako nema promene koja bi se mogla opaziti. A kad nema promene koja se može opaziti, uopšte nema promene“ (*Leibniz 32*, str. 74). Slično tome, „kada bi bilo vremenskog vakuuma, to jest postojanja bez promene, bilo bi nemoguće odrediti njegovu dužinu“. Ako je pak *u načelu* nemoguće odrediti dužinu nekog navodnog vremenskog intervala, ima li uopšte tog intervala?

Sidni Šumejker (vidi *Shoemaker 2*) i Viljem Njutn-Smit (*Newton-Smith*, str. 19 i dalje) konstruisali su primere u kojima se uverljivo pokazuje kako bismo bar u nekim slučajevima odredili *dužinu* vremena bez promene. Zadržavajući poentu Šumejkerovog i Njutn-Smitovog primera, iskoristimo za ilustraciju ovakav: uzmimo da u svetu koji se sastoji iz konačno mnogo objekata ovi objekti, ne uključujući nas same, naizmenično, posle izvesnih promena koje smo upoznali, dolaze u stanje potpune „zamrznutosti“ u trajanju od tri minuta, da bi po isteku ta tri minuta počeo proces „odmrzavanja“; pretpostavimo da poznajemo zakone promene koja vodi potpunom zamrznuću i da možemo da udesimo da se svi objekti, ali sad uključujući i nas same, u istom trenutku zamrznu; ne bismo li kasnije rekli da je opšte zamrznuće, *stanje bez promene*, trajalo *tri minuta*?

Antisupstancijalisti stoji na raspolaganju modalna verzija takozvanog Aristotelovog principa, kojom se dozvoljavaju vremenski vakuumi, ali unutar sveta u kojem se inače dešavaju promene: „Između događaja E_1 i E_2 protekao je vremenski period ako i samo ako je s obzirom na ove događaje moguće da se među njima desio neki događaj“ (*ibid.*, str. 44).

Tek je ova verzija Aristotelovog principa u stvari u skladu sa Lajbnicovom glavnom idejom da se o vremenu govori i s obzirom na izvesne *moguće* odnose među objektima. No, važno je uočiti da se u govorenju o tim mogućim odnosima ukazuje na neke postojeće događaje *van opsega modalnog operatora*. Antisupstancijalista zato može nastaviti da tvdi da vremena bez promenljivog sveta nema.

Naravno, Aristotelov se princip bilo u radikalizovanoj bilo u modalnoj verziji može *mutatis mutandis* definisati i za prostor. Umeto o događajima E_1 i E_2 (iz malopređašnje formulacije) reč će biti o materijalnim objektima, a umesto o međuperiodu o prostornom intervalu.

I onaj ko ne bi želeo da govori o prostoru *i* vremenu, već o prostorvremenu u smislu Minkovskog (vidi § 121), mogao bi da preformuliše Aristotelov princip *mutatis mutandis*. Umesto *bilo kojih* događaja E_1 i E_2, odnosno *bilo kojih* materijalnih objekata, pojavili bi se događaji vezani za *istoriju jednog objekta*, a umesto međuperioda, odnosno prostornog intervala, *prostorvremenski interval na jednoj „svetskoj liniji“*, odnosno u „individualnoj istoriji“ objekta o kojem je reč.

Pošto nas je Hegel podučio da su apsolutno biće i apsolutno ništa jedno te isto (up. gore, str. 290), možemo se zapitati imamo li nekakvih dodatnih razloga na osnovu kojih bismo presudili da li su čisti prostor ili čisto vreme realni ili nisu.

Čisto kinematički posmatrano, u svetu u kojem bi postojalo samo jedno jedino telo ne bismo mogli reći da li se to telo kreće ili miruje, jer bi nam za to, kao i za vođenje ljubavi, bilo potrebno bar još jedno telo. Ako bismo, ipak, pretpostavili da se to jedno telo kreće, ne bismo mogli reći kakva je, i koliko dugačka, putanja njegovog kretanja, kao ni koliko se dugo to telo kretalo.

Ali ne završava se sve na tome da mi ne bismo znali šta se dešava. Nije stvar samo u tome da se kretanje (jednog) tela ne može shvatiti kao kretanje u matematičkom prostoru – što je poenta *Strele* (vidi § 114) – već, kao što nam pokazuje *Stadion*, i sve njegove zanimljive posledice (§§ 118–123), u svetu sa više tela može se, pod izesnim kinematičkim uslovima, otkriti relativnost dužina i oblika prostornih i/ili vremenskih, odnosno prostorvremenskih, intervala. Ako se, pak, relevantne osobine prostora[2] pokazuju kao promenljive i zavisne od izvesnih „svetskih" okolnosti, onda nam to sugeriše da – držeći se pravila kojim smo dopunili Hegelovo ograničenje važenja principa neprotivrečnosti da bismo ovom principu povratili univerzalnost (§ 104) – aspekt u kojem se postojanje prostora i vremena (ili prostorvremena) počinje razlikovati od njihovog nepostojanja interpretiramo antisupstancijalistički. To je neobičan odgovor na „neobično pitanje 'da li prostor postoji'" (*Hinckfus*, str. 4).

Da bi se poslednji, antisupstancijalistički argument doveo u pitanje, potrebno bi bilo očuvati povlašćenost jednog referencijalnog sistema. Pored Aristotelovog (vidi § 119, str. 364), u istoriji fizike je bilo i drugačijih načina opravdavanja verovanja u postojanje jedinstvenog τόπος ὁ μὲν κοινός. Tako je hipoteza o postojanju kvintesencije, etra, trebalo da njutnovski apsolutni prazni prostor učini realnim (vidi o tome, na primer, *Kant 2*, str. 515, *C. Neumann*, str. 126–127) i u devetnaestom veku su vršeni mnogi eksperimenti, od kojih je svakako najpoznatiji Majklson-Morlijev (vidi *Lorentz*, str. 4), kojima je trebalo odrediti tačno kretanje Zemlje u apsolutno mirujućem etru, to jest registrovati takozvani etarski vetar (*aether drift*) koji tim kretanjem nastaje.

Sam Njutn govori o etru (vidi *Newton 2*, II, knj. 3, stav 6, corol. 2), ali je zanimljivo to što on prethodno, nezavisno od hipoteze o etru, misaonim eksperimentima želi da *dokaže* postojanje apsolutnog prostora (*spatium absolutum*), prostora „bez odnosa prema ičem (drugom) spoljašnjem, koji je uvek isti (*similare*) i nepokretan" (*Newton 2*, I, str. 46).

Dok se za Lajbnica mesto (*locus*) ne samo *određuje* u zavisnosti od telâ, razlika među njima i odnosa među njima, već mesta po sebi

uopšte nema nezavisno od toga, za Njutna postoji apsolutno mesto (*locus apsolutus*), koje je određeno mesto u apsolutnom prostoru (*Newton 2*, I, str. 47). Naravno, za Njutna onda postoji i apsolutno kretanje (*motus absolutus*), koje predstavlja „translaciju tela s jednog apsolutnog mesta na drugo" (*ibid., loc. cit.*).

Iako je apsolutno kretanje *definisano* pomoću apsolutnog mesta, koje je mesto u apsolutnom prostoru, *postojanje* apsolutnog prostora Njutn hoće da *dokaže* preko postojanja apsolutnog kretanja. Postojanje apsolutnog kretanja mora se u tom slučaju, naravno, dokazati bez pozivanja na *postojanje* apsolutnog prostora, što ne znači i bez pozivanja na *definicije* apsolutnog prostora, mesta i kretanja. Karakteristično je da Njutn ne dokazuje postojanje apsolutne translacije, već apsolutne *rotacije* (*ibid.*, str. 52–53). Neka dve kugle budu i neka ostanu na konstantnom rastojanju, što se utvrđuje pomoću žice kojom su spojene. U odnosu na ostala tela mogućno je reći da se one okreću oko zajedničkog težišta, no mogućno je reći i da one miruju, a da se ostala tela na odgovarajući način kreću. Alternativno, možemo zamisliti da ostalih tela nema. Da li se kugle apsolutno kreću? Njutnov odgovor je da treba pogledati žicu, da bismo preko prisustva ili odsustva napetosti zaključili o tome, pošto bi u slučaju da se radi o kretanju centrifugalna sila izazvala napinjanje.

Nojman je konstruisao sličan primer (vidi *C. Neumann*, str. 127). Neka fluidna masa poput Zemlje rotira oko svoje ose s obzirom na neka ostala tela. Zbog dejstva centrifugalne sile ona bi trebalo da postane elipsoidna. Uzmimo da je to slučaj. Da li bi puki nestanak ostalih tela bio dovoljan da nam uskrati pravo da kažemo da ta masa i dalje rotira oko svoje ose? I Njutn i Nojman su mislili da su konstruisali primer na osnovu kojeg sledi da se bar neki put s pravom može zaključiti da postoji apsolutni prostor, jer se bar u nekim slučajevima mora govoriti o kretanju jednog tela, ili dva tela koja jedno u odnosu na drugo miruju, *bez obzira* na ostala tela, ili čak i u slučaju da nikakva druga tela ni *ne postoje*.

Odgovor na njutnovski argument, koji se možda prvi nameće, jeste da je dokaz ipak cirkularan. To je, sledeći Barklija (iz spisa *De motu*), najbolje razradio Mah (vidi *Mach*). Uklanjanje svih ostalih tela u Nojmanovom primeru može prosto dovesti do toga da dejstvo centrifugalne sile prestane, jer je sasvim moguće da je prethodno rotaciono kretanje „određeno *medijumom* u kojem telo postoji" (*ibid.*, str. 311). Slično tome bi se mogli izgubiti efekti napetosti žice iz Njutnovog primera u slučaju iščeznuća svih tela osim dve kugle.

Makar koliko delovao uverljivo, Mahov odgovor ne mora potpuno da obeshrabri apsolutiste. Oni bi mogli da specifikuju argument tvrdeći da bi njutnovska situacija samo predstavljala *exemplum crucis ako bi se* efekti delovanja centrifugalne sile zapazili; šta bi se desilo u opisanim situacijama ne znamo, ali znamo da bi realizacija jedne mogućnosti dokazivala postojanje apsolutnog kretanja i, time, apsolutnog prostora. U *tom* slučaju *bismo* prostor supstantivirali i to bi bilo ravno potvrdi hipoteze o etru (vidi *Einstein 4*, str. 334), pošto bi apsolutni prostor igrao ulogu koju inače igra Mahov medijum, on bi, naime, igrao ulogu onog tela u Nojmanovom primeru koje je on, kao apsolutno mirujuće telo, nazvao telom *Alpha (C. Neumann*, str. 126).

Relacionisti, koji poriču postojanje prostora po sebi, i na prethodni manevar imaju odgovor (vidi, na primer, *van Fraassen*, str. 112–113). On u stvari odgovara izvornoj Lajbnicovoj koncepciji (up. *Leibniz 32*, Peto pismo Klarku i *Leibniz 15*, str. 418). – Iskomplikujmo malo Nojmanov primer. Neka na svetu postoje samo dve kugle koje rotiraju oko svoje ose kad se gledaju jedna u odnosu na drugu i neka se događa ono u šta je Mah sumnjao, neka, naime, samo jedna postaje elipsoid. Čak ni tada ne moramo reći da se ona apsolutno kreće dok druga apsolutno miruje, pošto postojanje centrifugalne sile ne mora biti *posledica* rotacionog kretanja, rotaciono kretanje, naime, može biti *posledica* dejstva odgovarajuće sile. Dejstvo te sile činilo bi kretanje o kojem je reč stvarnim, ali ono ne bi bilo apsolutno kretanje, to jest kretanje u apsolutnom prostoru *samo zato* što je s obzirom na dejstvo sile stvarno (up. *van Fraassen*, str. 112). Moglo bi se, naime, reći da je ono *kretanje* utoliko što se menja (spoljašnji) odnos među kuglama, ili odnos između delića jedne kugle – no kao takvo je, opet, relativno – a da je *stvarno* zato što u slučaju one kugle koja se deformiše zaključujemo na delovanje neke sile u njenom slučaju.

Poučno u ovom nadmetanju apsolutista i relacionista je to što se pokazuje da i prilikom priznavanja *svih mogućih kinematičkih efekata* i uvođenja vankinematičkih, to jest *dinamičkih* faktora u cilju razjašnjenja, *ne moramo* prihvatiti postojanje apsolutnog prostora, odnosno „pravog" referencijalnog sistema: i dalje prostor i kretanje *možemo*

definisati relacionistički tako da, suprotno Ojlerovom uverenju (vidi *Euler 1*, str. 113), ne padnemo u protivrečnost kad tvrdimo da u svetu koji sadrži samo jedno telo nema kretanja. Jer, mi ćemo isto tako reći da tu nema ni mirovanja. To pak ne znači da se to jedno telo i kreće i miruje. Ono se, poput tela u trenutku (νῦν), *niti* kreće, *niti* miruje. *Možemo* reći da je Ptolomejev sistem *isto toliko* adekvatan stanju stvari koliko i Kopernikov *utoliko što* je *svako* kretanje relativno (up. *Mach*, str. 312), iako, naravno, možemo imati *nezavisne* razloge da *postulaciono povlastimo* ptolomejski, odnosno kopernikanski, referencijalni sistem[3].

131. Avgustinov „paradoks"

Misleći očigledno na samoga sebe, Sveti Avgustin u *Ispovestima* govori o hrišćaninu čiji se nemirni duh pita o vremenu od nebrojeno mnogo godina tokom kojih je Bog oklevao da stvori Svet, koji je najzad stvorio (*Augustine*, knj. 11, gl. 13, str. 234). Ali, nije li, prema dogmi, vreme nastalo upravo Stvaranjem? Ne protivreči li dogmi sama mogućnost postavljanja pitanja o godinama pre Stvaranja?

U slične nezgode može zapasti i savremeni astrofizičar koji usvaja teoriju o „velikoj eksploziji" (*big bang*). Ako prostor, ili prostorvreme, nastadoše „velikom eksplozijom" (koja je uostalom mogla biti izazvana Božjim „Amin"), šta reći o transkosmičkim prostranstvima u kojima se kosmos širi?

Zahvaljujući modalnoj antisupstancijalističkoj verziji Aristotelovog principa, za koju se ispostavilo da je u skladu s našim zaključcima o ishodu Gigantomahije (§ 130), možemo hrišćane i astrofizičare izbaviti iz teškoća ukazivanjem na razliku između Parmenidove i Melisove karakterizacije onoga za šta, po pretpostavci, važi princip koji smo nazvali *indiscernibilitas identitatum* (§ 33). Kao što je potencijalna mnoštvenost nečega što je ograničeno i u sebi homogeno, koja počiva na mogućnosti deljenja shodno nekoj realnoj meri kao, od toga različitog, kvalitativnog kvantuma (up. str. 292) ne znači da to nešto nije κυρίως ἕν – a u šta nas je uverila Zevsova nemoć da kvadrat složi iz beskonačno mnogo raznovrsnih delova – tako, analogno tome, realne razlike „ovde-onde" i „sada-tada" koje nastaju Stvaranjem još ne čine realnim razlike u onome što je po sebi, nezavisno od Stvaranja, poput Parmenidovog Jednog: *za nas* koji živimo u svetu *realnih* razlika, *posle* Stvaranja *zahvaljujući* Stvaranju postoje prošlost i budućnost i „ovde" i „tamo", i mi zato, na melisovski način, govorimo i o navodnom vremenu pre Stvaranja i o navodnom transkosmičkom prostoru u kojem se kosmos širi.

132. Aritmetika, geometrija, fizika

Ako sabiramo „na prste", dva i dva jesu četiri, uvek četiri i nužno četiri, između ostalog i zato što nam prste za vreme „operacije sabiranja" ne odsecaju. Zaboravljajući na *model* zahvaljujući kojem je to tako, mi kasnije rezultat po kojem je $2+2=3$ jer smo dve i dve jabuke stavili u probušenu kotaricu (vidi gore, § 63, str. 149) *reinterpretiramo* tako da ipak ostane $2 + 2 = 4$, tvrdeći da je $2 + 2 = 3$ *pogrešno zato što* smo propustili da uzmemo u obzir jabuku koja je *ispala* kroz probušeno dno. Skloni smo da kažemo da je $2 + 2 = 4$ *bez obzira* na prste ili jabuke, odsecanje ili ispadanje, u krajnjoj liniji – bez obzira na *model* u kojem *je* $2 + 2 = 4$.

Na neki način smo u pravu kad kažemo da je $2 + 2 = 4$ aritmetička istina *a priori*. Ako smo *pravila sabiranja* odredili po modelu brojanja i sabiranja „na prste" dok nam prste nisu odsecali, onda će *po tim pravilima* dva i dva biti jednako četiri i ako nam kasnije prilikom svakog sabiranja budu prste odsecali i ako svaka kotarica u koju budemo stavljali jabuke bude imala probušeno dno. Ali, ne treba zbog toga što je po *fiksiranim pravilima* aritmetike *nužno* $2 + 2 = 4$, smatrati *nemogućim* da kući donesemo manje jabuka nego što smo ih kupili. Ako je nešto tačan rezultat *po nekim pravilima*, ne znači da su ta pravila uvek pogodna za otkrivanje *istina o svetu* u kojem živimo. *U načelu*, aritmetika može biti poput šaha, koji uprkos „forsiranim varijantama" i „iznuđenim potezima", zbog čega podseća na nauku i pruža šanse genijima da se razmahnu, ipak slabo šta govori o surovoj stvarnosti u kojoj većina njih živi i o njoj svojstvenim „forsiranim varijantama" i „iznuđenim potezima".

Pitagorejci su u svojim geometrijskim istraživanjima vrlo uspešno koristili aritmetiku napravljenu na modelu računanja s kamenčićima. Bilo je to zlatno doba *„logistike"* (§ 31). A onda je Hipas svojim otkrićem, zbog kojeg je bio surovo kažnjen (str. 45), sve pokvario – i „aritmetizovana geometrija" se morala osloboditi aritmetike da bi dalje napredovala (§ 78). Srećom, ovo oslobađanje je u već slobodnom helenskom svetu išlo brzo. Zašto bi se neka oblast morala konačan broj puta sadržavati u nekoj drugoj oblasti tako da bi se pitagorejska „višestruka aplikacija" (§ 31) morala moći izraziti brojem? Zašto bi računanje s kamenčićima bilo isto što i računanje s geometrijskim oblastima? Eudoksova teorija proporcije (str. 200) predstavlja najjasniji primer trijumfalnog oslobođenja: odnosi su *geometrijski* postali odredivi i kad nisu mogli biti izraženi brojem. $\sqrt{2}$ je dobio status *geometrijski* određenog odnosa i bio je prognan iz carstva brojeva. Tokom celog daljeg razvoja grčke matematike geometrija je imala prvenstvo u odnosu na aritmetiku; aritmetika je mogla da izrazi samo ponešto od mnogih istina do kojih se došlo geometrijom (up. *Heath*, I, str. 462).

Koliko god je „razvod" aritmetike i geometrije doneo koristi geometriji, doneo je, mada mnogo kasnije, korist i aritmetici.

Koliko god se, naime, model nekada opirao tvrdim aritmetičkim pravilima, bilo je i slobodno razvijanje aritmetičkih pravila ograničeno vezanošću za određeni model. Ako je 2 + 2 značilo, i smelo značiti, samo dva i dva prsta, kamenčića, konja, ili neka slična dva opaziva i fizički individualizovana objekta, onda je u inverznoj operaciji, operaciji oduzimanja, rezulat operacije 2 – 4 bio besmislen. Ako, međutim, imajući u vidu ovaj rezultat zanemarimo model i „po analogiji" s brojevima 1, 2, 3, ... uvedemo brojeve -1, -2, -3, ..., onda će – bez obzira kako ćemo rezultat (-2) interpretirati, on postati *aritmetički* moguć. Slično tome, možemo uvesti u igru broj *i* tako da i $\sqrt{-1}$ postane nešto što je arimetički moguće, naime tako da bude $\sqrt{-1} = \pm i$. Kasnije će možda biti nađen, kao što je nađen (vidi gore, str. 219), pogodan model za interpretaciju.

Dedekind je bio nezadovoljan što je na predavanjima o elementima diferencijalnog računa morao da „pribegava geometrijskim očiglednostima" i kroz to je osetio „nedostatak istinski naučnog zasnivanja aritmetike" (*Dedekind*, str. 17). On je želeo da aritmetika bude slobodno „razvijena iz same sebe" (*ibid.*, str. 22). Dedekind je *kao aritmetičar* to s pravom smeo želeti. Kao što su nekada Grci geometriju oslobodili okova aritmetike, tako su u devetnaestom veku Nemci oslobađali aritmetiku.

Dok svako za sebe radi svoj posao, stvari teku glatko i bez svađe. Dok je igra igra – neka se slobodno igra. Opasnosti počinju s novim bračnim ponudama. To ne mora biti opasnost po bračne drugove – već po druge, slobodne članove zajednice. Iz obnovljenog braka aritmetike i geometrije koji je sklopljen u infinitističkoj matematičkoj ekleziji, u kojem su „realni brojevi" monogamno povezani s „realnim tačkama", rođeni su egzaktno definisane linije i čitavi prostori kao skupovi tačaka impozantne, nepreborojeve kardinalnosti, egzaktno definisane duži bez krajeva, egzaktno definisane znamenite krive i nebrojeni drugi „patka-zec" objekti (vidi §§

125–128). Koliko god takvi entiteti mogu biti „deca raja" u koji je matematičare vične „geštalt-prebacivanju" uveo Kantor, oni mogu biti i izvor najveće frustracije za sve one koji još uvek na geometriju gledaju s grčkom naivnošću. Na kraju je aritmetika, za koju su pravila važnija od mogućnosti njihovog sprovođenja (vidi § 128, str. 395), ponovo ovladala geometrijom, kao što je to bio slučaj na početku istorije matematike. To su mnogi doživeli kao najveći trijumf u razvoju matematike (vidi *Boyer*, str. 298, 308–309, *Hahn 1*, str. 115 i dalje). Ne poričući da je to trijumf, podsetimo se, na osnovu svega prethodnog, koliki je ceh za to platila geometrija.

Hans Han je mislio da je čitav ceh plaćen nemogućnošću intuitivnog sagledavanja objekata kakvi su znamenite krive i u tom je smislu govorio o *krizi intuicije* (vidi *Hahn 3*) koja je – kriza – nastala razvojem moderne matematike. On to inače nije smatrao visokom cenom (up. *ibid.*, str. 76, 101), a verovatno je to mišljenje i većine savremenih matematičara.

Kurt Menger i za njim Fridrih Vajsman (vidi Mengerov predgovor u *Waismann 2* i *Waismann 2*, str. 165) mislili su da se ne radi ni o kakvoj *krizi* intuicije, već samo o „preciziranju", i u isto vreme „proširivanju", upotrebe reči čija su svakodnevna značenja „nejasna" i „nepotpuna", a da se tim *preciziranjem* i *proširivanjem ne protivreči* uobičajenoj upotrebi. Ako se prednost „proizvoljnosti" u svakodnevnoj upotrebi u fleksibilnosti i „plodnosti", prednost je rigorozne matematičke definicije u tome što stvara polazište za izgradnju deduktivnog sistema (*Waismann 2*, str. 166).

Ni prvo, kao ni drugo, mišljenje nije, nažalost, prihvatljivo s obzirom na ishod Gigantomahije i na to kako smo razumeli posao kojim se matematičari bave. Cena je nešto veća – mnogi matematički objekti postali su *nemogući* (§§ 126–128).

To da je cena *nešto veća* ne treba shvatiti kao ironiju, jer za bogatstvo matematičke produkcije nije ni važno da njeni objekti i strukure budu realno mogući. No, ako Vajsman želi da linija ostane i „granica između dve obojene površine" (*ibid.*, str. 165), upravo onako kako smo je mi, filozofski naivno, shvatili – a izgleda da on to želi – i da u isto vreme Peanova, Kohova ili Sjerpinskova kriva budu isto toliko moguće koliko i krug (*ibid.*, str. 158 i dalje)[1], onda mu moramo skrenuti pažnju da je pao u *hybris*, verujući da su matematičari u svojim kreacijama nadmašili i samog Zevsa.

Savremena infinitistički aritmetizovana geometrija je jedna prekrasna tvorevina, ali je svoj slobodan razmah – kao nekad pre nje sama aritmetika – platila daljim labavljenjem veze s fizičkim svetom.

Što se dogodilo s aritmetizovanom geometrijom, dogodilo se i s novovekovnom *matematizovanom fizikom*, zahvaljujući prirodnoj tendenciji da se kretanje fizičkih tela shvati kao kretanje u prethodno struktuiranom matematičkom prostoru. Ako Zevs ne može načiniti beskonačno mnogo koraka pre nego što stigne na cilj, on ipak može neograničeno smanjivati veličinu koraka – po bilo kojem matematičkom zakonu – kao što broj koraka može neogrančeno povećavati, pa je smrtnicima potrebna neka veština kojom bi se nosili s jednom takvom neizvesnošću. Fizika je trebalo da bude nadgrađena na aritmetizovanu geometriju.

Vajerštras-Raselova teorija promene (vidi gore, str. 259) trebalo je da bude konačno ostvarenje Njutnovog sna (up. § 83), jer je kretanje fizičkih tela definisano kao kretanje u *infinitistički struktuiranom prostoru bez infinitezimala*, a da se ujedno sva stanja s kojima se fizičar uopšte može sresti shvataju kao realna. To je osnova i Ajnštajn-Podolski-Rouzenovog *kriterijuma realnosti* (§ 117).

Fenomeni s kojima se srećemo u kvantnoj mehanici trebalo je da budu opomena da ipak postoji razlika između *realnog* i *matematičkog* prostora i *realnog* i *matematičkog* vremena (vidi §§ 115–117). Za neke smrtne besmrtnike ova Božja znamenja nisu bila dovoljna; za neke besmrtne smrtnike, kao što je Nils Bor – jesu.

Filozofija pre čini jednu porodicu u Vitgenštajnovom smislu (vidi *Wittgenstein 3*, § 67) nego što bi se moglo obuhvatiti jednom definicijom, a verovatno je pojam filozofije još i „suštinski sporan" (o „suštinski spornim pojmovima" vidi *Gallie*), tako da i kad se slažemo u pogledu opšte formule kojom bismo definisali filozofiju ta formula može biti podložna različitim i u načelu podjednako legitimnim interpretacijama. Ipak, kad je u pitanju onaj član porodice koji pokriva probleme s kojima smo se mi sretali, mogu se navesti izvesne karakterisike koje se ili *uvek* ili bar *vrlo često* nalaze – ako ne na spisku nužnih, ono bar na spisku onih uslova koji zajedno, kao skup, treba da predstavljaju dovoljan uslov da bismo neku aktivnost nazvali filozofijom. Razmotrimo neke od tih najčešće navođenih karakteristika u svetlosti ishoda i posledica Gigantomahnije kojoj smo prisustvovali.

Kada se određuje mesto filozofije među naukama, njoj se pripisuje *neempirijski* karakter. To ne znači da se filozofi obavezno bave nekom transcendentnom, nadiskustvenom stvarnošću. U kojem smislu je filozofija neempirijska i onda kad se bavi problemima koji se odnose na svet u prostoru i vremenu, kojim smo se mi bavili, a koji se može opažati?

To što je filozfja neempirijska ne znači da u njoj ne smemo navoditi primere iz svakodnevnog ili naučnog iskustva; od Zenona, pa peko Sokrata, Platona i Aristotela do dana današnjeg, takvi primeri su obilato korišćeni. To ne znači ni da su pojmovi s kojima se srećemo u filozofiji takvi da ih po pravilu možemo shvatiti i bez prethodnog iskustva o onome na šta se oni odnose. I filozofija se bavi problemom inverznog spektra (vidi *Armstrong 1*, str. 256–260), a to šta je boja slepi ne znaju. Ako dopustimo da oni mogu razumeti šta je boja po nekoj zgodnoj analogiji, zahvaljujući nekom drugom čulu, ipak ostaje da je neko drugo, za analogiju zgodno, čulno opažanje i u tom slučaju neophodno.

Ono što se pod neempirijskim karakterom filozofije pre svega podrazumeva odnosi se na to što se jednom definisan problem *filozofski* rešava *bez daljeg* posmatranja i eksperimentisanja, bez daljeg „zagledanja" u svet. Kad je *jednom definisao problem* – filozof se može povući iz sveta, jer po filozofskim pravilima igre njime više *ne sme* da se koristi u svom poslu. To ne znači da on ne sme da se služi takozvanim *misaonim eksperimentima* (up. gore, str. 346 i dalje), da bi otkrio razne empirijske *mogućnosti*, on samo više ne sme da se služi onim što zavisno od *aktualnih* zbivanja i *stvarno* izvedenih eksperimenata može da se ispostavi i ovakvim i onakvim.

Pošto je filozofu, da bi ostao filozof, *zabranjeno* da gleda u svet dok rešava jednom definisan problem, sasvim je razložno ograničiti njegov zadatak tako da njegovi rezultati *ne budu empirijski opovrgljivi*. Spor Ajnštajna i Bora oko kvantne mehanike, koji se vodio pomoću konstrukcije različitih misaonih eksperimenata, jednim je delom *čisto filozofski*. Taj spor je čisto filozofski *ako* se ne odnosi na pitanje da li je sistem kvantne mehanike *de facto* potpun, već na pitanje da li je *moguće* da *jedan takav sistem* kao što je kvantna mehanika bude potpun. Nefilozofski shaćenu tvrdnju o potpunosti kvantne mehanike *moguće je* empirijski opovrgnuti *bar* utoliko što se daljim razvojem nauke sistem kvantne mehanike *može prevazići*, to jest *zameniti* nekim sistemom koji bi se odnosio na „elementarniji nivo ponašanja", a kojim bi određeni fenomeni koji su u principu nerazjašnjivi u okviru kvantne mehanike – bili razjašnjeni. No, mi smo zaključili – na osnovu razlike između matematičkog i realnog prostora i matematičkog i realnog vremena na koju nam ukazuje ishod Gigantomahije – da je na *filozofskom* nivou *moguće* da je *jedan takav sistem* kao što je kvantna mehanika *u principu* nedopustiv.

Spor sličan sporu oko kvantne mehanike može se voditi i oko problema elementarnih čestica. S obzrom na naš rezultat da se jedan ograničeni predmet ne može sastojati iz beskonačno mnogo delova, neka fizička teorija po kojoj su neke otkrivene čestice *elementarne* može *u principu* biti ispravna, jer jedan određeni homogeni deo prostora *može* biti κυρίως ἕν (vidi § 130). Ne samo što nije *nužno* da postoje i elementarniji delovi, kao što nije nužno ni da postoji elementarniji nivo ponašanja, već je, *a fortiori*, nužno da eventualnih manjih delova ili elementarnijih faza u *jednom trenutku* i s obzirom na *jedno ograničeno telo* bude *konačno* mnogo. *Moguće je*, utoliko, da novootkriveni kvarkovi predstavljaju „osnovni materijal kosmosa". No iako filozofski gledano neka fizička teorija *samim tim* što je atomistička *nije nužno* neistinita, jer ima filozofskih razloga da se dopusti da je istinita, ona može kao *određena* fizička teorija biti empirijski opovrgnuta, kao što, s druge strane, empirijska opovrgljivost neke određene teorije o elementarnim česticama ne znači da ne postoje elementarne čestice, pošto bar s obzirom na svako pojedinačno određeno statičko stanje konačnih predmeta one, naprotiv, moraju postojati.

Da zakon inercije otkazuje u slučaju elektromagnetskih fenomena, ili da je brzina svetlosti konstantna i da iznosi koliko iznosi, to je, svakako, nešto što se ne može otkriti filozofskim putem. No da *ukoliko* je to tako pod određenim kinematičkim uslovima kod izračunavanja prostornih i/ili vremenskih ili prostorvremenskih intervala mora doći do specijalnorelativističkih kontrakcija i dilatacija – moguće je utvrditi pomoću misaonih eksperimenata popuno *a priori* (vidi § 120) i utoliko je zadovoljen prvi od uslova koji dopuštaju da se izvede filozofsko utemeljenje Specijalne teorije relativiteta. Ne ispitujući ovde ostale uslove koji bi zajedno predstavljali dovoljan uslov da bismo aktivnost o kojoj je reč nazvali filozofskom i dopuštajući da je filozofija suštinski sporan pojam, kako za Ajnštajnovo, koje se osniva na kritici pojma jednovremenosti (vidi *Einstein 3* i *2*), tako i za utemeljenje koje se koristi rešenjem *Stadiona* (vidi gore, §§ 120, 121) – možemo reći da je filozofsko.

Jedan od danas najraširenijih filozofskih mitova, koji su lansirali mladi Vitgenštajn i članovi Bečkog kruga, a koji je u najbližoj vezi s neempirijskim karakterom filozofije, sažet je u tvrdnji o *neinformativnosti* filozofskih iskaza i teorija.[1] Taj mit je postepeno postajao deo opštijeg mita, mita o „kraju filozofije", čijem su širenju inače kumovali „mislioci" najrazličitijih orijentacija (koje ovde ne moramo pominjati).

Ako filozofi pri rešavanju jednom postavljenog problema više ne smeju da „gledaju" u svet i ako su čak pravila igre tako podešena da njihovi rezultati ne budu empirijski opovrgljivi, nije li onda očigledno da nam oni o svetu ništa informativno ne mogu reći? Oni nam ne mogu reći da li kiša pada ili ne pada i, uopšte, ne mogu nam reći ništa što bi moglo biti istinito ili lažno, jer bi u protivnom njihove tvrdnje bile opovrgljive.[2]

Teza o neinformativnosti filozofije ne mora biti netačna ako se uzme u sasvim specijalnom „tehničkom" smislu; ona je netačna kad se uzme *tout court*. Filozofija nam ne može reći *da li će* ili *kada će* Zevs odustati od brojanja deonica Ahilovog puta, ali zar nije *informativna empirijska neopovrgljiva tvrdnja* da on kad-tad mora odustati da bi stigao na cilj, ili tvrdnja da je, pošto je stigao na cilj, negde odustao. Zar nije informativno reći, bez obzira da li je to tačno, da Kohova i Peanova kriva nisu realno moguće? Zar nije informativno reći da se boja na oganičenom prostoru ne može promeniti beskonačno mnogo puta ili da se ne može menjati u svakoj tački ili duž svake linije? Zar nije informativno reći da su Blekove „Beta" i „Gama" prekinule svoju igru pre isteka četiri minuta, pošto su četiri minuta istekla? Zar nisu odgovori i na tolika druga sporna pitanja s kojima smo se sreli informativni?

Filozofija nam ne može reći šta je slučaj ako nešto može biti i ovako i onako, ali nam može reći šta *mora* ili šta *ne može* biti slučaj.

Uverenje da su samo *kontingentni* empirjski iskazi informativni vezano je za uverenje da su svi analitički iskazi trivijalni[3] i da nisu iskazi o stvarima već iskazi o jeziku kojim o svetu govorimo. Međutim, analitički iskazi ne moraju biti trivijalni i oni govore, *inter alia*, i o empirijskom svetu.

Reći nekome da kiša pada za njega je informativno ako se on u predvorju bez prozora premišlja da li da ponese kišobran. Ali zašto bi to za njega bilo informativno ako bi, dok mu govorimo, upravo gledao kroz prozor? Slično tome, ako nekome ko razlaže šareni kvadrat koji se sastoji iz različitih homogeno obojenih površina kažemo da će stići „do kraja" ako bude dovoljno istrajan i ako bude imao dovoljno vremena, to za njega može da bude informativno ako je podozrevao da bi kvadrat mogao biti složen iz beskonačno mnogo raznobojnih površina. To nije više informativno za nas – ako smo uvereni u rezultat prethodnog filozofskog istraživanja.

Informativnot iskaza se ponekad tehnički definiše preko toga da li bi se tvrdnjom da su istiniti *eo ipso* isključili neki u principu empirijski mogući slučajevi[4]. Ako *tvrdim* da trenutno kiša pada, time *isključujem* mogućnost da ona ne pada, iako je *u principu moguće* da kiša sada ne pada. U *ovom* smislu filozofski iskazi sa kojima smo se sretali zaista nisu informativni. Pa ipak, iako ne isključuju neku empirijsku mogućnost, istiniti filozofski iskazi isključuju mnoge *prima facie* mogućnosti i *zahvaljujući tome jesu* informativni. Reći nešto *o svetu* što je *nužno istinito* informativno je ako ono što je time isključeno – iako nemoguće, nije *očigledna* ili *opšte poznata* neistina.

Kojim to putem filozofija dolazi do ovih informativnih nužnih istina? Metod kojim se do njih dolazi predstavlja još jednu od najčešće navođenih karakteristika filozofije, a poznat je pod imenom *dijalektika*. Aristotel je prvim dijalektičarem nazvao upravo Zenona u svom (nažalost izgubljenom) *Sofistu* (*Diogen*, IX 25), no mi smo videli da bi to mogao biti već „otac Parmenid" – kako ovoga naziva stranac iz Eleje u Platonovom *Sofistu (Plato 8*, 241 D) – odnosno boginja koja je Parmenida na put istine izvela isključivanjem ostala dva moguća puta, puta mnenja smrtnika (vidi § 32). Ta mnenja predstavljaju one *prima facie* mogućnosti koje bognja isključuje *svođenjem na apsurd*.

Filozofski *recuctio ad absurdum*, koji je Rajl kao specifično filozofski metod razlikovao od matematičkog svođenja na apsurd nazivajući ga *jakim reductio (Ryle 2*, str. 197), predstavljao je i kod Platona (vidi naročito *Plato 4*) i kod Aristotela (vidi *Aristotle 23*, 101 a 34–36, 101 b 1–2)[5] glavni način za testiranje filozofskih teza. Do informativnih nužnih istina dolazimo, dakle, svođenjem na apsurd njima alternativnih.

Mislim da celo iskustvo Gigantomahije ide u prilog jednom *široko shvaćenom pojmu dijalektike* po kojem je to opšti naziv za put razvoja filozofije koja se, slobodna od unapred fiksiranih pretpostavki, razvija kroz kritiku prihvaćenih verovanja i svih ostalih nauka uopšte (prema Platonovoj *Državi* – *Plato 7*, 532 i dalje). Kakva sve *ograničenja* nastaju *na tom putu* videćemo odmah.

Uvedimo – tehnički – razliku između *analitički istinitih iskaza* i *tautologija*, odnosno *analitičkih lažnih iskaza* i *kontradikcija*. Neka tautologije budu iskazi istiniti *ex vii terminorum* u slučaju da za utvrđivanje istinitosti nije potrebno načiniti nijedan dodatan korak u zaključivanju. Tako je iskaz „krug je krug" tautologija, kao i svaki složeni iskaz koji ima formu $\neg(A \wedge \neg A)$. Slično tome, neka *kontradikcije* budu jedino neposredno samoprotivrečni iskazi. Neka *analitički istiniti iskazi* budu iskazi koji se bez „zagledanja u svet" mogu *svesti* na tautologije korišćenjem *bilo kojeg* postupka

koji nam *izgleda prhvatljiv*, a *analitički lažni* na kontradikcije korišćenjem *bilo kojeg* postupka koji nam izgleda *prihvatljiv*.

Imajući u vidu prethodne razlike, možemo reći da konstruisati *aporiju* znači pokazati na neki *prima facie* prihvatljiv način da je neki *prima facie* prihvatljiv iskaz analitički lažan. *Razrešiti* aporiju filozofski značilo bi pokazati na prihvatljiv način *zašto* primenjeni način svođenja na kontradikciju *u stvari* nije prihvatljiv ili zašto polazni iskaz koji je sveden na kontradikciju *u stvari* nije prihvatljiv, ne zapadajući pri tom u neku novu aporiju.

Iskustvo Gigantomahije nam govori da u *filozofiji* glavnu ulogu igraju analitički lažni i analitički istiniti iskazi definisani na prethodan način, do kojih se dolazi konstrukcijom *aporija*, odnosno njihovim razrešenjem.

Zenonova besmrtnost počiva na tome što je konstruisao aporije u kojima i premise i izvođenje deluju neodoljivo prihvatljivo, dok zaključci deluju isto toliko neprihvatljivo.

Zenonove aporije nisu samo protivrečnosti nekog formalnog sistema koje lako možemo otkloniti nekom promenom u tom sistemu. U Gigantomahiji svako je mogao pobediti tako što bi nekom zgodnom intervencijom onemogućio izvođenje kontradikcije (zabranom deljenja posle određene tačke, definicionalnim postuliranjem odsustva poslednjeg koraka u završenom nizu koraka, ukidanjem identiteta objekata spoljašnjeg sveta itd.), ali ne samo što nas time ne bi morao, razuveriti da su Zenonove premise ili izvođenja prihvatljivi, već se, kao što smo videli, sam mogao izložiti mogućnosti konstrukcija novih aporija (vidi, recimo, §§ 47, 50, 52, 89).

Filozofija po malo liči na *keč-ez-keč-ken*. Sve je dozvoljeno da bi se protivnikovo stanovište načinilo „neprirodnim", da bi se pokazalo kako on može formalno izbeći protivrečnosti ali ne i aporije. Te aporije, u sada definisanom smislu, mi smo tokom Gigantomahije zvali prosto teškoćama. Tek kada izađemo iz svih ćorsokaka i kada nam se učini da više ne možemo konstruisati nove aporije, bićemo zadovoljni rešenjem nekog filozofskog problema. Filozofska pitanja su, kao što je to jednom lucidno primetio Viljem Džems, „ona pitanja na koja nije odgovoreno na opšte zadovoljstvo". Svako kome ponuđena rešenja nisu prirodna, nalazi se još uvek u Zenonovom ćorsokaku.

Najbolji primer neadekvatnosti pokušaja izlaženja iz ćorsokaka formalnim izbegavanjem paradoksa predstavljaju „nefilozofska rešenja" Zenonovih aporija. koliko god infinitističko „matematičko" rešenje (vidi §§ 94, 98, 100) bilo u skladu s pravilima igre matematičara (vidi § 128), ono je filozofski posmatrano ravno Antistenovom (vidi str. 96): ni jedno ni drugo nam ne pomaže da shvatimo *kako to* Zevs navodno uspeva da stigne na cilj *pod definisanim uslovima*, ili šta s tim uslovima nije u redu.

Iako je prvenstveno imao u vidu matematičku analizu, verovatno je Frege svojim shvatanjem *analitičnosti* iskaza i *procesa* kojim se ona ustanovljuje najbolje među svim postojećim shvatanjima pokrio filozofski postupak kojim smo se mi koristili rešavajući aporiju i pronalazeći time zanimljive iskaze koji su analitički istiniti prema malopređašnjim definicijama. Ukazujući na to da je za dokaz istinitosti nekog iskaza „često neophodno (koristiti) više definicija koje su takve da taj iskaz nije sadržan ni u jednoj od njih pojedinačno, a (da) ipak on čisto logički iz njih sledi kad se one uzmu zajedno" (*Frege 2*, § 88, str. 101), Frege je definisao „analitičku istinu", to jest analitički istinit iskaz, preko *procesa* kojim se istinitost *opravdava*: „ako u ostvarivanju tog procesa (opravdavanja iskaza) dolazimo samo do opštih zakona logike i definicija, imajući na umu sve iskaze od kojih zavisi prihvatljivost definicija, onda je istina analitička" (*ibid.*, § 3, str. 4). „Opšti zakoni logike" odnose se ili na iskaze koje smo maločas definisali kao tautologije ili na iskaze koji se striktnim logičkim pravilima na njih mogu svesti, dok su analitički istiniti iskazi oni za čije se opravdanje koriste i razne dodatne definicije, ali „imajući na umu sve iskaze od kojih zavisi prihvatljivost (tih) definicija".

Ovaj poslednji deo Fregeove definicije, u kojem se pominju *iskazi od kojih zavisi prihvatljivost definicija*, kao da je zaboravljen, možda zato što nije u skladu s najčešće navođenim definicijama analitičnosti (up. *Hintikka 1* i *Quinton*). Ali on nije zaboravljen samo u *teoriji*, on je zaboravljen i u *praksi filozofske analize*, što najbolje pokazuju upravo mnogobrojni primeri izlaženja iz ćorsokaka pomoću raznih definicionalnih *fiat*, s kojima smo se sretali (vidi, na primer, §§ 55, 56, 100, 101). A upravo u filozofskoj analizi, zbog načela „misliti bez pretpostavki" (*voraussetzunglos zu denken*), moramo nastojati da imamo u vidu sve što definicije kojima se služimo u svođenjima na apsurd ili tautologiju čini prihvatljivim ili neprihvatljivim. Tek to će omogućiti da neko filozofsko rešenje bude *prirodno* i, uz neke druge zadovoljene uslove, prihvatljivo.

Filozofska analiza nije samo logička ili jezička analiza.[6] Filozofska analiza bi se eventualno mogla svesti na logičku i jezičku analizu samo ako bi svi relevantni pojmovi s kojima se u njoj srećemo bili strogo definisani i pri tom sadržavali određeni broj karakteristika čiji su odnosi takođe definisani. Tada bismo možda analizom tih pojmova, kako je to jednom mislio Rasel (vidi *Russell 3*, str. 185–186), mogli forsirano utvrditi da li je neki iskaz analitički istinit ili analitički lažan. Pošto to, međutim, nije slučaj, mi smo se, kao što su nas Platon i Aristotel podučavali, morali služiti *aporetikom*[7], da bismo potom *dijalektički*, preko rešavanja aporija, tek formirali manje-više čvrste granice pojmova.

Aristotel je bio uveren da tek izvesnim učvršćenjem primarnog značenja možemo razumeti sekundarna koja nisu ni puki homonimi ni analogije (up. Aristotelovo rešenje „aporije celine i delova": §§ 66–67). Nama je filozofsko rešenje Zenonovih aporija omogućilo da shvatimo i matematički prostor i realitet matematičkih „patka-zec" objekata. Filozofija se ne zadovoljava izlaženjem iz ćorsokaka ili pećine, o čemu u *Državi* govori Sokrat (up. *Plato 7*, 519 D i dalje), jer nam omogućava i bolji uvid u druge delatnosti, i to je jedna od njenih često navođenih karakteristika[8]. Kao što je Sokrat naglašavao i na sudu (*Plato 1*, 21 E i dalje) i u tamnici (*Plato 5*, 97 E i dalje), filozofija nam omogućava da bolje razumemo razloge i svrhe pojedinih delatnosti i, ako se one uspešno obavljaju, razloge iz kojih je to tako (up., na primer, § 128).

Prošavši s divovima bitku i prekalivši se u njoj, mogli smo bolje da pratimo i sporove među fizičarima ili matematičarima, kao što je spor Ajnštajna i Bora oko kvantne mehanike (§§ 116–117) ili spor između matematičara klasičara i matematičara intuicionista (vidi §§ 73–75, 91–95, 111–113, 128), otkrivši pri tom i gde je slobodan prostor za delovanje nestandardnih analitičara (§§ 86, 128).

Svi „tvrdi" zaključci do kojih smo došli, koji, suprotno rasprostranjenoj dvadesetovekovnoj rezignaciji, vraćaju veru u *moć* filozofije, manje-više slede, kako izgleda, iz ponuđenog rešenja Zenonovih aporija, koje će čitalac možda prihvaiti, mada je na osnovu vekovnog lošeg iskustva opravdanije očekivati da neće. Filozofija je barem u nečemu slična umetnosti: ne postoje opšteprihvaćeni fiksirani kanoni po kojima bismo utvrdili koliko nešto vredi, ili da li se s nekim moramo složiti, ali ipak ima manje i više prihvatljivih rešenja. „Crna žuč" (μέλαινα χολή) koju, po Aristotelu, filozof mora posedovati da bi se nosio sa različitim shvatanjima (vidi *Aristotle 15*, 953 a, i dalje)[9], ne mora da ubije smisao za prirodnost.

Voraussetzungslosigkeit je čar i izazov filozofije. Uz svu slobodu, videli smo, oni koji se u zenonovskoj tradiciji bave filozofijom moraju biti surovi i prema drugima i prema sebi, spremni da podele sudbinu samosvesnog germanskog Zevsa iz Prstena Nibelunga.

NAPOMENE

APORETIKA

§ 2.

[1] „Kakve razloge možemo navesti u prilog tvrdnji da je, recimo, nemoguće da se kamen sastoji iz beskonačno mnogo delova?" (*R. Taylor 1*, str. 42).

§ 3.

[1] „...(U jednom smislu) možemo činiti neke stvari ('*S* će činiti *X*' nije logički lažno) ['*S will do X' iz not logically false*] za koje se ne može reći da su učinjene ('*S* je učinio *X*' je logički nemoguće) ['*S has done X' is logically impossible*]" (*Dretske 1*, str. 100).

§ 4.

[1] U Robertson-Volkerovim modelima postoji jedinstveni trenutak $t = 0$ kada je gustina Univerzuma bila beskonačna (vidi *Sciama*, str. 127).

[2] Pošavši od Zemlje, svakoj stanici će biti dodeljen jedan i samo jedan prirodni broj: za bilo koje dve različite stanice ne samo što će važiti da je nužno ili prva bliža Zemlji ili druga, već će biti određeno da li su susedne ili nisu, i ako nisu, koliko je stanica između (upor. *Cantor 1*, § 12: „Die wohlgeordneten Mengen", str. 312).

§ 5.

[1] Raselovu ideju, koju, inače, na kraju odbacuje, dosledno je domislio Gič (vidi *Geach 2*, str. 71). Ako je „a_1, a_2, a_3, ...“ potpuna lista vlastitih imena koja se odnose na entitete vrste *A*, onda je:

„*f*(*A*)“ [na engleskom: *f*(*an A*)] istinito ako i samo ako je istinito „*f*(a_1 ili a_2 ili a_3 ili ...)“;

„*f* (neko *A*)“ je istinito ako i samo ako je istinito „*f*(a_1) ili *f*(a_2) ili *f*(a_3) ili...“

“*f* (bilo koje *A*)“ je istinito ako i samo ako je istinito „*f*(a_1) i *f*(a_2) i *f*(a_3)...“;

“*f* (svako *A*)“ je istinito ako i samo ako je istinito „*f*(a_1 i a_2 i a_3...)“.

[2] Kvajn je razliku između „*bilo koji*“ i „*svaki*“ odredio tehnički i ekskluzivno preko razlike u opsegu ∀ kvantifikatora (vidi *Quine 1*, str. 120).

§ 7.

[1] Na engleskom jeziku nije isto „*everyone will be called*“ i „*everyone will have been called*“ (vidi *Dretske 1*, str. 100).

[2] Sâm sam pokušao da razrešim aporiju na taj način u članku „Jedna aporija kosmičke beskonačnosti“ (*Arsenijević 2*).

§ 8.

[1] “Everyone *will have been called*“ (vidi § 7, nap. 1).

§ 10.

[1] Vidi, na primer, *Aristotle 22*, str. 183. Da bi u Ahilovom zadatku trebalo da je reč o dosegnuću beskonačno mnogo tačaka vidi *Guthrie 2*, str. 92, *Booth 3*, str. 188; vidi, takođe, *Ross 2*, str. 416, gde se u prvom trenutku pojavljuje „tačka“ (kao i kod Viksteda i Kornforda), a zatim se govori o rastojanjima (polovinama).

§ 11.

[1] Za hipotezu da bi za Platona tačke mogle biti objekti koji postoje samo u učenjima geometara (γεωμετρικῷ δόγματι) vidi *Aristotle 1*, 992 a 22, Platon stepenuje realitet (vidi *Vlastos 3*) i ako je tačno da je on verovao da tačke

postoje samo u učenjima matematičara, onda bi to mogao da izrazi na različite načine: tačka tada nije biće „potpuno“ stvarno (παντελῶς ὄν – *Plato 7*, 477 A), ili „savršeno“ stvarno (παντελῶς ὄν – *ibid.*, 579 A), ona nije stvarno stvarna (οὐσία ὄντως οὖσα – *Plato 6*, 247 C).

§ 13.

[1] „Gramatika“ je ovde upotrebljena u jednom vitgenštajnovskom smislu (vidi *Wittgenstein 2*, X 133–134, str. 184-185 i *Wittgenstein 1*, I § 664.

§ 14.

[1] To je bila osnova za razrešenje „aporije dodirivanja“ u *Arsenijević 1*.

§ 15.

[1] Na ovom mestu se εἶδος i μορφή upotrebljavaju sinonimno.

§ 16.

[1] Na ovom mestu (227 a b) Aristotel koristi u stvari reč ἐχόμενον, ne ἁπτόμενον, koju je uveo ranije, u 226 b 23, ali je nijansa u značenju, koja nije skroz sprovedena, za nas trenutno zanemarljiva: ἐχόμενον bi se odnosilo na one slučajeve kontigualnog dodirivanja tela ili delova tela za koje bismo, osim toga što su ἁπτόμενα hteli da kažemo i da su konsekutivni – ἐφεξῆς. Inače, naravno, skupovi čiji su elementi poređani u niz tako da su ἐφεξῆς ne moraju biti ἐχόμενα i, samim tim, ni ἁπτόμενα, jer se elementi ne moraju međusobno dodirivati.

[2] Svet čistih oblika bio bi, kao kod Platona (*Plato 12*, 48 E, 49 A), samo inteligibilan (νοητόν).

[3] Iako geometrijske objekte shvata kao granice fizičkih i utoliko ih od njih ne odvaja (vidi *Aristotle 21*, 193 b i dalje), Aristotela ekskluzivno razdvajanje kontinualnog i kontigualnog dodirivanja (vidi *Aristotle 22*, 227 a 18–27) onemogućava da govori o dva načina jednovremenog dodirivanja dva tela.

[4] Jedno isto dodirivanje kao dodirivanje baš ova dva, a ne neka druga dva tela, ili dela, za Aristotela je *ili* kontigualno, *ili* kontinualno. No kontigualno i kontinualno dodirivanje bi mogli biti *različiti aspekti istog* dodirivanja.

[5] Može eventualno biti sporno da li ćemo govoriti o dva dela ili o dva tela, a da ne bude sporno da je reč o kontigualnom dodirivanju.

§ 19.

[1] Vidi *Aristotle 21*, 221 b 12–13 u vezi sa *Aristotle 22*, 239 b 10 i dalje. Čepel ἕστηκεν u 239 b 30 prevodi sa *„stands still"*, svesno ga ne izjednačujući sa ἠρεμεῖ, ne prevodeći ga, naime, sa *„is at rest"*, zbog razlike na kojoj Aristotel insistira u 221 b 12-13 (vidi *Chappell*, str. 198, nap. 3).

§ 24.

[1] Sva moguća rastojanja se ne mogu dobro urediti da bi se mogao primeniti metod matematičke indukcije (vidi *Cantor 3*).

GIGANTOMAHIJA

§ 25.

[1] Za testiranje su, svakako, najzgodnija ona rešenja koja problem ekspliciraju na način na koji smo to mi činili, tako da nam nisu potrebna nikakva preformulisanja (to je slučaj u *Grünbaum 3*).

A. NEGATIVNA DIJALEKTIKA

§ 26.

[1] Oven govori o „Zenonovom programu" koji je trebalo da bude uperen protiv bilo koje pluralističke hipoteze (vidi *Owen 6*, str. 199 i dalje; vidi, takođe, *Hussey*, str. 99–100).

[2] Tako, na primer, da je Zenon znao za učenje Leukipa i Demokrita, verovatno bi konstruisao neki *reductio ad absurdum* atomističke hipoteze.

[3] To dovodi u pitanje Solmsen (vidi *Solmsen*, str. 135–141), donekle But (vidi *Booth 2*, str. 3 i dalje), a Ketlin Friman je uverena da su Zenonovi argumenti upereni i protiv pluralističke i protiv monističke hipoteze (vidi *Freeman*, str. 157).

§ 27.

[1] To što su kasniji izvori zavisni od Eudemove istorije matematike svakako ne znači da su pouzdani koliko i ona sama. To se naročito vidi kad se uporede kasnija „znanja" o Pitagori sa Aristotelovim opštim ukazivanjem na Pitagorejce (up. *Heidel*, str. 363 i dalje).

[2] Ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾠήθησαν εἶναι πάντων.

[3] Hajdel ide toliko daleko da dopušta i jedno neočekivano čitanje samog početka rečenice: „za vreme i pre ovih...". On, naime, dozvoljava mogućnost, ne navodeći grčki tekst, da Aristotel govori o vremenu Leukipa i Demokrita, ali da je, pošto je Leukip stariji od Demokrita, rekao „za vreme i pre" misleći „za vreme Leukipa a pre Demokrita". Ovo deluje sasvim čudno kad se uzme u obzir da Aristotel kaže ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων, to jest „za vreme ovih i pre ovih". Teško, naime, da bi Aristotel izdvojio καὶ πρὸ τούτων ("i pre ovih") da je mislio samo „pre Demokrita".

[4] Talesu se pripisuje poznavanje pet teorema, od kojih jedna i danas nosi njegovo ime (teorema o uglovima na presečenim paralelama – vidi *DK*, 11 A **20**).

[5] Egipćani su znali čak kako da izračunaju zapreminu piramide s kvadratnom osnovom (vidi *Boyer*, str. 15).

[6] O egipatskoj matematici vidi *Neugebauer*, I: „Vorgriechische Mathematik".

[7] Pitagorejsko slaganje kamenčića kao znakova za jedinice (γνῶμα) moglo je biti *shematizacija* prethodnog znanja (vidi *Aristotle 21*, 203 a 10).

§ 29.

[1] Teetet deli brojeve u dve klase: one koji su kvadratni, jer se mogu predstaviti pomoću kvadrata čija površina odgovara tom broju i one koji su pravougaoni, kojima ne odgovara nijedan kvadrat čija stranica sadrži ceo broj jedinica (vidi *Plato 9*, 147 E – 148 A).

[2] Prema fon Fricu, Prokle u komentarima za Euklidove *Elemente* samo prividno odstupa od toga zbog krivog čitanja ἀλόγων namesto ἀναλόγων ili ἀναλογιῶν, koji se nalaze u nekim rukopisima (vidi *von Fritz*, str. 386, nap. 13).

[3] Aristotel je navodno napisao delo Περὶ τῶν Πυθαγορείων (vidi *DK*, 14 7). Ali, fragmenti koji su do nas posredno došli sadrže apokrifne elemente (vidi *Kirk and Raven*, str. 218).

[4] Istorija rane matematike počiva na Eudemovom izgubljenom delu, kao što doksografska istorija filozofije počiva na Teofrastovom.

[5] U *Zakonima (Plato 11*, 819 C) Platon se kroz reči starog Atinjanina žali što je tek kasno saznao za otkriće nesamerljivosti i što svi Grci to još ne znaju. Otkrića su izgleda putovala sporo. Hipasovo vreme bi po svemu sudeći moglo biti vreme prvog otkrića nesamerljivosti. Na sreću, nezavisno od istorije matematike, Hipas se pominje u političkoj istoriji pitagorejskog bratstva (vidi Jamblihov *Život Pitagore* (*DK*, 18 **5**), što nam omogućava nezavisno i relativno precizno datiranje. On je, navodno, igrao značajnu ulogu u nemirima u koje je bratstvo bilo upleteno u drugoj četvrtini petog veka pre nove ere i koji su se završili buntom 445. godine pre nove ere, koji predstavlja kraj pitagorejske dominacije u Južnoj Italiji (za preciznost u pogledu datuma vidi *von Fritz*, str. 386 i nap. 17 na istoj strani).

Pored Jamblihovog, još dva svedočanstva indirektno potvrđuju da bi Hipas mogao biti zaslužan za otkriće nesamerljivosti. Jedno potiče iz sholiona za Platonovog *Fedona* (*DK*, 18 **12**), gde se pominje eksperiment sa metalnim diskovima, s kojim ćemo se uskoro pozabaviti, drugo je Boetijevo (*ibid.*, 18 **14**), gde se govori o teoriji muzičke skale i matematičkom određenju različitih harmonija. Pitagorejac Arhita u fragmentu iz *Harmonikosa (ibid.*, *47* B **1–4**) implicira da je teorija zvuka već veoma uznapredovala pre njega, a Arhita je bio na čelu Tarenta 362. godine pre nove ere. Arhita dodaje da su isti ljudi koji su razradili ovu teoriju postigli jasne uvide u probleme astronomije, geometrije i aritmetike (*ibid.*, **4–7**).

[6] To je pre Hasea i Šolca tvrdio Moric Kantor (Moritz Cantor) na svojim *Predavanjima o istoriji grčke matematike* krajem devetnaestog veka (vidi *Cajori 2*, str. 16).

§ 30.

[1] Čak i ako su se Pitagorejci najpre bavili čistom aritmetikom zbog njene primene u trgovini, na šta ukazuje Aristoksenova izjava, učenje o proporciji

verovatno je proisteklo iz muzičkih istraživanja (ἱστορίη). Da reč ἱστορίη treba uzimati u najopštijem smislu kao „istraživanje“, vidi se na jednom mestu kod Jambliha, gde se govori o pitagorejskom „geometrijskom istraživanju“ (vidi *Burnet 1*, str. 97).

[2] Grci tonove nisu proizvodili simultano, tako da u današnjem smislu može biti reči samo o *arpeggio* akordima i o harmoniji koja proizlazi iz melodijskog toka.

[3] Na zadovoljstvo Fajerabenta (vidi *Feyerabend*, str. 29–35), možemo primetiti da Pitagorejci uglavnom nisu postupali induktivistički, već „kontrainduktivistički“, što se najjasnije može uvideti na osnovu dva mesta kod Aristotela gde se on, govoreći o njima, žali kako su oni čak izmislili nepostojeću planetu da bi broj planeta odgovarao svetom broju deset (*Aristotle 9*, 293 a 25) i da su stalno tražili primere za potvrdu već postojeće teorije o broju i haromiji (*Aristotle 1*, 986 a 3).

[4] Brojevi koji se u ovim proporcijama pojavljuju su 1, 2, 3 i 4, njihov zbir je 10, a dekada je, po Aristotelu, za Pitagorejce nešto savršeno, što u sebi sadrži svu prirodu broja (*Aristotle 1*, 985 a 9). Za tetraktis, sveti pitagorejski simbol, koji se sastoji od deset elemenata, možda deset oblutaka (o računanju oblucima Herodot govori kao o nečem uobičajenom), Porfirije i Jamblih kažu da je izvor i koren večne prirode (vidi *Guthrie 1*, str. 225; slično kaže i Aetije – *DK*, 58 B **15**) a to takođe, po njima, potiče od Pitagore.

§ 31.

[1] Taneri je tvrdio da je Ekfant imaginarna ličnost iz dijaloga Heraklida iz Ponta, u čemu ga je jedno vreme sledio Hajdel, a zatim Hit i Frank (vidi *Vlastos 4*, str. 174, nap. 4 i *Guthrie 1*, str. 323–324).

[2] Tvrdnju da „Pitagorejci ne prave razliku između tačaka i jedinica“, „ili u stvari, između jedinica-tačaka i partikula“, Gatri zasniva na mestima iz Aristotela: 1002 a 6, 1028 b 16 i 1080 b 16. Njegov argument se može sažeti ovako: sva tri mesta govore o Pitagorejcima, na prva dva mesta se jedinica i tačka tretiraju sinonimno, na trećem se kaže da jedinice poseduju veličinu, dakle, Pitagorejci su uzimali da jedinice-tačke imaju veličinu.

Dve stvari se mogu primetiti u vezi sa ovakvim Gatrijevim argumentom. Prvo, mesto 1002 a 6 nalazi se u pasusu u kojem se govori o onima koji su dokazivali da su jedinica (μονάς), tačka (στιγμή), linija (γραμμή) i površ (ἐπιφάνεια) pre supstancije (οὐσία) nego li što je to telo (σῶμα), zbog mogućnosti njihovog postojanja bez tela. Ova poslednja tvrdnja je, doduše, modalnog karaktera, ali svejedno, ako se zapitamo kako je to u skladu sa pomenutom pohvalom koju je Aristotel izrekao o Pitagorejcima, da naime nisu dopuštali odvojeno (samostalno) postojanje brojeva, onda već zbog toga možemo pretpostaviti da se ovde govori o nekim geometrima, možda iz kruga kasnijih Pitagorejaca, a da ovde monada (μονάς) nema aritmetičko značenje kao ranije. Drugo, ako su ljudi o kojima se ovde govori oni isti „neki" (τινές) o kojima se govori na drugom navedenom mestu, 1028 b 16, onda su to neki koji su smatrali da su tačka, linija i površina *granice tela* (τὰ τοῦ σώματος πέρατα), dok se za Pitagorejce o kojima se eksplicitno govori na trećem navedenom mestu, 1080 b 16, kaže da su smatrali da su jedinice koje imaju veličinu ono iz čega se čulne stvari sastoje (σύστασις τῆς αἰσθητῆς οὐσίας). Oni „neki" (τινές) i ovi Pitagorejci ne moraju biti isti ljudi, bar ne Pitagorejci iste generacije. U tom slučaju bi bila neopravdana tranzitivnost koja se koristi u Gatrijevom argumentu i oni „neki" bi mogli o tački govoriti kao o monadi ne pretpostavljajući nikakvu veličinu tačke, dok bi ovi drugi mogli sve aritmetizovati, na ranije opisani način, dobijajući tako jedinice u proporciji, koje i ako u nekom smislu jesu veličine (kao dužine žice, recimo), nisu nikakve minimalne veličine ili atomi (to se i onako kod Aristotela ne pominje). Ovakvim, a ne Gatrijevim čitanjem Aristotela, ostvario bi se, suprotno Hajdelovim očekivanjima, sklad između Aristotela i Aetija, koji na navedenom mestu tvrdi da je tek Ekfant iz Sirakuze povezao atomizam s pitagorejskim učenjem.

Zapitajmo se na kraju koliko je verovatno da su već rani Pitagorejci bili oni koji su osnovne geometrijske objekte shvatali kao granice (πέρατα) a tačku kao granicu bez ikakve veličine. Iako moguće, u nedostatku bilo kakve pozitivne evidencije, bilo direktne bilo posredne, to ostaje samo prazna mogućnost. Ako Aristotelove izjave uzmemo u smislu u kojem je to predloženo, onda je verovatno da raniji Pitagorejci, uz svoju aritmetizovanu geometriju i logistiku, nisu razvili nikakvo shvatanje tačke i ostalih geometrijskih objekata i da su različita shvatanja, koja ćemo imati prilike da razmotrimo, nastala kasnije.

§ 32.

[1] Za Jegera ovde ὁδός (put) već ima značenje kasnijeg μέθ-οδος (vidi *Jaeger*, str. 97 i dalje).

[2] Kornford doduše misli, verovatno imajući u vidu kasniju raspravu u Platonovom *Parmenidu* i Platonovom *Sofistu* (up. *Plato 4*, 162 C i dalje, *Plato 8*,

237, 240 C) da tvrdnje o kojima je reč ne moraju nužno biti tautološke, odnosno protivrečne, i da ih je Parmenid mogao uvesti kao „specijalne premise". No, ne vidi se kako bi se u kontekstu Parmenidove poeme one u tom obliku koristile kao premise ako već nisu tautologije, odnosno kontradikcije.

[3] Kulman je insistirao na tome da treći put ne treba izjednačiti sa običnim mnenjem smrtnika, koje se pominje u B **1** 27–30, jer se na tom mestu pojavljuje reč πάτος, što pre znači „staza" ili „puteljak" nego „pravi put" (vidi *Kullmann*, str. 159). Suprotno tome, Kornford je treći put povezivao sa uobičajenim uverenjem da „ono što nije (ipak) može biti zahvaljujući nastajanju i promeni" (*Cornford 3*, str. 100, nap. 3), pa treći put utolio nije nikakva filozofska kombinacija prethodnih mogućnosti već nešto o čemu smrtnici govore uzdajući se u oči i uši (o čemu se govori u B 7 3–5) (*Cornford 3*, str. 100). – Inače, Kulman (*Kullmann*, str. 160) i mnogi drugi (vidi diskusiju u *Booth 2*, str. 93-94) misle da se „teći put" već načinom na koji je uveden odnosi na Heraklita. No, odnosio se on na Heraklita ili ne, odnosio se na sve prethodne kosmologe ili pak na sve smrtnike, koje zavode oči, uši i jezik (B 7 3–5), Parmenid nije tu hteo da optuži one koji idu „trećim putem" za padanje u očiglednu kontradikciju *ex vii terminorum*. Boginja u B **6** 5–9 *najavljuje* apsurdni zaključak na koji će *svesti* ovo mišljenje, i ceo B **8** je upravo taj *reductio ad absurdum*.

[4] Σήματα se može odnositi na *znake kraj puta*.

[5] Kulman misli (*Kullmann* str. 171) da je, čisto jezički posmatrano, ova upotreba izraza συν-εχές nastala u vezi s glagolom ἀπ-έχω, koji ćemo uskoro sresti kod Zenona. Συνεχές bi bilo obeležje onoga na šta se ne može primeniti ἀπέχειν utoliko što nema „delova" koji bi *kao* delovi bili odeljeni jedni od drugih.

[6] Na ovom mestu je teško složiti se sa Ovenom, koji tvrdi da Permenid insistira na tome da bi morao postojati jaz da bi se dve stvari odelile (*Owen 6*, str. 210), jer izgleda očigledno da bi za Parmenida već postojanje heterogenosti značilo da postoje delovi (up. *Fränkel 2*, str. 5, nap. 15 i str. 19, nap. 36).

[7] Prema principu *identitas indiscernibilium, akcidentalni* identitet objekata x i y s obzirom na *bilo koje* dato svojsvo koje stavimo na mesto shematskog slova Φ određen je implikacijom $\forall x \forall y((\Phi x \leftrightarrow \Phi y) \rightarrow (x=y))$. Za identitet objekata x i y u pogledu *svih* svojstava bilo bi, međutim, potrebno uvesti predikatske promenljive, tako da se identitet odredi implikacijom $\forall x \forall y \forall F((Fx \leftrightarrow Fy) \rightarrow \rightarrow (x=y))$. Samo *vrsni* identitet objekata x i y bio bi određen formulom $\forall x \forall y((Nx \leftrightarrow Ny) \rightarrow (x=y))$, gde je Nx i Ny shema za $f'x \wedge f''x \wedge \ldots \wedge f^{(n)}x$, odnosno $f'y \wedge f''y \wedge \ldots \wedge f^{(n)}y$, gde su $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ predikati koji se

u interpretaciji odnose na bitna svojstva vrste u odnosu na koju su x i y nerazlučivi. – Za razliku od ovog principa, koji se koristi u *dijalektičkom pobijanju* o kojem je reč, pozitivni ontološki princip bio bi inverzan (*indiscernibilitas identitatum*); implikacija bi u navedenim formulama koje bi određivale nerazlučivost išla u suprotnom smeru.

[8] Kad Rasel (*Russell 2*, str. 102 i dalje), suprotstavljajući se Maksu Bleku (up. *Black 4*, str. 161), dokazuje kako u svetu u kojem bi stvari bile takve da su im sva svojsva ista ne bismo mogli da govorimo o mnoštvenosti, ili kad Ejer, analogno tome, dokazuje kako se navodno različiti događaji ne bi razlikovali ako bi pripadali ciklusima koji su svi međusobno istovetni (vidi *Ayer 2*, str. 32), onda oni govore o principu *identitas indiscernibilium*. Kad, međutim, Platon govori o vremenu koje biva moguće tek zahvaljujući promeni (*Plato 12*, 38 A), onda on koristi Parmenidov princip koji smo nazvali *indiscernibilitas identitatum*.

[9] Kornford je dokazivao da u Parmenidovo vreme ideja o beskonačnom (*infinite*) prostoru naprosto nije ni postojala (*Cornford 5*, str. 5 i dalje) i da su euklidski beskonačni prostor „izumeli" grčki matematičari polovinom 5. veka pre nove ere (*ibid.*, str. 7). Za Anaksimandra, Parmenida i Empedokla prostor je navodno još uvek konačan (*finite*), ali je bez granice (*boundless*) zato što je kružan poput rimanovskog, tako da se kretanjem nikad ne stiže do neke granice (*ibid.*, str. 10, str. 15). Govoreći o tome značenju, Kornford se poziva na sholium za *Ilijadu* (Ξ 200) gde se citira Porfirije u prilog tumačenju reči o „granicama zemlje", kao i na kasnije takvo očuvano značenje kod Aristofana (*Cornford 5*, str. 10). Potpuno isto značenje nalazimo kod Ajnštajna: jedna posledica opšte teorije relativiteta je da je moguće da je Univerzum konačan (*finite*), ali da ipak nema granica (*yet has no limits*) (*Einstein 2*, str. 109). Kornforda je sledio Gatri (*Guthrie 2*, str. 48–49). Za uverljive razloge protiv toga da je pojam prostora neograničenog u svim pravcima (određenim običnim pravim linijama) nastao tek u postparmenidskom vremenu – vidi *Owen 3*, str. 78–81).

[10] 'Ακίνητον u grčkom pokriva nepromenljivost i nepokretnost (vidi *Fränkel 2*, st. 32).

[11] U B **8** 34-41, što čini prelaz ka mestu koje nas zanima, pominje se sudbina (Μοῖρα), koja igra sličnu ulogu kao i 'Ανάγκη. Tu se, verovatno prvi put uopšte, Μοῖρα i 'Ανάγκη pojavljuju u kontekstu filozofske argumentacije (vidi, takođe, B **8** 34–41): nužnost i sudbina su nešto što proizlazi iz svođenja na apsurd svih navodnih mogućnosti sem jedne, koja se onda afirmiše.

[12] Μεῖζον je još mnogo pre Parmenida moglo da znači „veće" u bilo kojem smislu (vidi *Fränkel 1*, st. 36).

§ 34.

[1] Analizirajući takozvanu teoriju o porama, Gatri zaključuje (*Guthrie 2*, str. 152) da bi Empedoklova teorija bila održiva kad bi izvesni delovi bili takvi da se deljenje više ne može vršiti, jer bi u protivnom sve prodiralo u sve, što po teoriji o porama nije slučaj (o Empedoklovom eksperimentu s klepsidrom koji ovu teoriju eventualno potvrđuje vidi *Furley 1*). Nije, međutim, neophodno da se uvede neko definitivno ograničenje deobe da bi se moglo tvrditi da sve svuda ne prodire. Empedokle primećuje da se voda meša s vinom, ali ne i s uljem (B **91**). Uzrok nemešanja mogao bi uvek *u krajnjoj liniji* biti isti i svoditi se na *sui generis* razliku između korena, a da ipak pri tome svaki od korena ostane neograničeno deljiv, kao što se ni ulje ni voda ne sastoje od delova koji se ne mogu dalje deliti samo zato što se ulje ne meša s vodom.

§ 35.

[1] Primer bi mogao poticati od Eudema, naime iz njegove analize Zenonovih argumenata na aristotelovski način (vidi *Booth 3*, str. 198).

[2] Ovde Dils dodaje: „mnoštva"; ali to je opravdano samo pod pretpostavljenom interpretacijom, u kojoj se već na početku izgubilo ono αὐτοῦ (vidi gore, str. 118), pa zato nije reč o delu dela, već o delu početnog mnoštva.

[3] No, ovu „grešku" za Zenonom ponavljaju i Eudem (*Simplicius 2*, 459. 25–26), Epikur (*Epicurus*, § 57) i sam Simplikije (*Simplicius 2*, 142, 14).

[4] Grčki matematičari taj zaključak *nisu* poricali (vidi *Boyer*, str. 32–37, 51–53).

[5] Za detaljnu analizu Simplikijevih „manipulacija" vredi pogledati ceo Solmsenov tekst.

§ 36.

[1] Ova okolnost ne bi išla u prilog Tejlorovoj argumentaciji (vidi *A. E. Taylor 2*, str. 112–123) po kojoj prisustvo specifičnih premisa govori protiv toga da Zenon napada pluralističku hipotezu kao uobičajeno uverenje o postojanju mnoštva (stvari), pošto bi uvođenje (čak) novih entiteta moglo pre da

ukazuje na obuhvatnost programa (up. *Owen 6*, str. 199) nego na specifičnost pobijanja.

§ 37.

[1] Brošar je mislio da Zenon nije samo bio retoričar, koji zbunjuje druge, već i skeptik koji je sam sumnjao u mogućnost postojanja, odnosno razumevanja mogućnosti postojanja mnoštva i kretanja (vidi *Brochard).*

§ 38.

[1] Iako je sporan, ipak je naziv διχοτομία toliko uobičajen da ga, svakako, nećemo menjati, mada i to neki čine, na primer Vlastos (*Vlastos 5*, str. 95) i Kirk i Rejvn (*Kirk and Raven*, str. 292).

[2] Kod Kornforda i Viksteda se ovaj glagol prevodi sa „*cover*" (vidi prevod na str. 181 u *Aristotle 22*).

[3] Mislim da je διεξελθεῖν zgodno prevesti sa „savladati", jer znači „proći skroz" za razliku od διεξιέναι i διιέναι (up. *Lee*, str. 68).

[4] Osim navedenog prevoda Viksteda i Kornforda, vidi diskusiju u *Lee*, str. 6 i dalje.

[5] Viksted i Kornford prevodom sugerišu opadajuću geometrijsku progresiju.

[6] Kod komentatora se umesto ὀϊστός upotrebljava βέλος (*Simplicius 2*, 1015. 19, *Philoponus*, 816. 31–871. 1).

[7] Vidi *Zeller*, str. 599–600, *Diels-Kranz*, 29 A 27, *Burnet 2*, str. 319, prevod i komentar Viksteda i Kornforda na str. 181 u *Aristotle 22, Lee*, 79–81, *Guthrie 2*, str. 93, *Vlastos 1*, str. 3, *Chappell*, str. 197-198, *Barnes*, str. 277. Brošar (vidi *Brochard*, str. 6) ostavlja tekst kakav je u berlinskom izdanju ali na kraju daje interpretaciju radi koje zagovonici kvantizacije prepravljaju tekst. S druge strane, Vlastos (vidi *Vlastos 1*, str. 10 i dalje), But (vidi *Booth 3*, str. 191–192) i Farli (vidi *Furley 3*, str. 361–362) prihvataju promene u tekstu ali ne i interpretaciju po kojoj vreme mora biti kvantizovano.

[8] Li, na primer, kaže ovo poslednje (vidi *Lee*, str. 79).

[9] Tako se i dalje možemo slagati s Vlastosom (vidi *Vlastos 1*, str. 10) i Butom (vidi *Booth 3*, str. 191–192) da se kod Zenona ne govori ni o kakvom atomizmu. Farli pak, misli da su argumenti protiv mnoštva upereni i protiv nedeljivih veličina, ali da to nije slučaj ni sa jednim dokazom protiv kretanja (vidi *Furley 3*, str. 365X366).

[10] Sa izuzetkom Geja, koji misli da je ὄγκος Empedoklov termin i da je Zenonov argument uperen protiv Empedokla (vidi *Gaye*, str. 110–113), ostali misle da je on deo pitagorejske pojmovne aparature i da je *Stadion* još jedna, možda definitivna, potvrda za to da su Pitagorejci bili prva i glavna meta Zenonovih napada (vidi naročito *Kirk and Raven*, str. 291 i 296).

[11] Mada je raspava o tome kakav je početni položaj sama po sebi zanimljiva (osim *Bicknell*, vidi pre svega *Gaye*, str. 103, *Ross 2*, str. 660–664, *Lee*, str. 86–88), mi se ovde na nju nećemo osvrtati, jer ne utiče na poentu argumenta.

[12] Vidi *Simplicius 2*, 1016. 9 i dalje, *Philoponus*, 817. 20; prema rečima Eudema koje Simlikije navodi u komentaru *Fizike* (1019. 32 – 1020. 6), jasno je da se i on slaže sa Aristotelom.

§ 41.

[1] No ni Bredli, kao ni Parmenid, nije konvencionalist ni u kojem smislu: koherentnost je dovoljan uslov *jedine* istine: *korespondencije* mišljenja i realnosti

[2] U B 1 28-33 Boginja najavljuje da su mnenja smrtnika bez istinske verodostojnosti, a u B 8 50 sasvim nedvosmisleno kaže da zaključuje svoj pouzdan govor i mišljenje o istini ἐν τῶι σοι παύω πιστὸν λόγον ἠδὲ νόημα ἀμφὶς ἀληθείης). Za reči koje slede ona ne kaže samo da izražavaju mnenja smrtnika, već i da govore o varljivom ili lažnom poretku stvari δόξας δ' ἀπὸ τοῦδε βροτείας μάνθανε κόσμον ἐμῶν ἐπέων ἀπατηλὸν ἀκούων).

B. ATOMIZAM

§ 44.

[1] Platon u *Sofistu* navodi paradoks predikacije kao glavnu aporiju (ἀπορία) koja će biti razrešena prihvatanjem postojanja nebića kao „nečeg drugog" (vidi *Plato 8*, 250 E – 251 B).

§ 48.

[1] U spisu *O nebu* (vidi *Aristotle 9*, 286 b 27) Aristotel opisuje nastanak tela i površina prema *Timaju* (up. *Plato 12*, 53 C); vidi takođe *Aristotle 3*, 315 b 30.

[2] Aristotel upotrebljava i reč σῶμα i reč στερεόν, zanemarujući u kontekstu raspravljanja eventualnu razliku između tela i geometrijskog tela.

[3] Za najočigledniju primenu metoda *dijareze* vidi *Plato 8*, 218 B i dalje.

[4] Aristotel verovatno misli na deo u *Timaju* (53 C), gde se tela, za koja se kaže da nužno imaju dubinu, konstruišu pomoću površina koje ih ograničavaju. Ali tu se nigde eksplicitno ne govori o nedeljivim površinama. Aristotel verovatno još nešto ima u vidu što mi ne možemo imati u vidu jer se nismo družili s Platonom niti slušali njegova predavanja.

§ 49.

[1] Iz Boetijevih komentara saznajemo da je Diodor Megaranin odredio *moguće* kao ono što ili jeste ili će biti (*aut est aut erit*), *nemoguće* kao ono što budući (sada) lažno neće ni biti istinito (*quod cum falsum sit, non erit verum*), *nužno* kao ono što budući (sada) istinito neće ni biti lažno (*quod cum verum sit, non erit falsum*), *nenužno* kao ono što je ili već lažno ili će biti lažno (*aut jam est aut erit falsum*) (vidi *Rescher*, str. 205–206).

[2] ... ἀλλὰ καὶ τὴν μετάβασιν μὴ νομιστέον γενέσθαι ἐν τοῖς ὡρισμένοις εἰς ἄπειρον μηδ' ἐ(πὶ) τοὔλαττον. Ja bih se složio sa Mauom, koji ὡρισμένοις prevodi sa „određen" a ne „ograničen" (vidi *Mau*, str. 32), pri čemu su onda određena tela atomi, za razlilku od onih koja nastaju kao konglomerati. Inače, već prvo mesto gde se pominje ὡρισμένον σῶμα, neposredno posle teksta u kojem se govori o atomima, nedvosmisleno ukazuje na to da je ovde reč o delovima atoma, te da, prema tome, fizička deljivost nije jedina koja se dopušta ili ograničava (uporedi u vezi s tim inerpretaciju ranog fizičkog atomizma u § 46, naročito str. 219 i dalje).

[3] Ovde bih se složo s Bejlijem (vidi *Bailey*, str. 293) i *Mauom* (vidi *Mau*, str. 31).

C. FINITIZAM

§ 56.

[1] Tomson izraz „super-zadatak" upotrebljava samo za beskonačne zadatke reda ω.

[2] Blek je pod utiskom kritike Tejlora i Vejtlinga priznao (vidi *Black 2*, str. 111) da postoje radnje (i zadaci) za koje se može reći *da* su obavljene (*"I have finished"*) ali ne i *kada* su završene (*"I finished at such and such a time"*), odnosno radnje za koje se može upotrebiti *present perfect tense* ali ne i *simple past tense*. No kako bi to moglo da važi za mašine čiji su akti sukcesivni ili čak strogo diskretni?!

§ 58.

[1] „Reći da stopa sadrži, ili da se sastoji od, dvanaest inča, ili da može da se podeli u dvanaest inča, zgodan je ali neprecizan način govora. Korektnije je reći da se dužna stope odnosi prema dužini inča kao 12 prema 1" (*Ritchie*, str. 311).

D. RADIKALNI EMPIRIZAM

§ 60.

[1] Džems je tim imenom označio Renuvijeov (Renouvier) finitizam u kontekstu koji nas trenutno zanima (vidi *James*, str. 84–85).

§ 61.

[1] „Kad gledamo kroz mikroskop, mi niti vidimo više vizuelnih tačaka (perceptivnih jedinica – M. A.), niti su kolateralne tačke više distingvirane nego kad gledamo golim okom" (*Berkeley 2*, § 85, str. 61–62).

[2] Argumentacija koja sledi može se *mutatis mutandis* primeniti na bilo koji oblik.

§ 62.

[1] O „parazitskom" karakteru fenomenalističkog opisa iskustva vidi *Grahek*, str. 143 i dalje.

[2] Arhibiskup Viljem King pokušao je da svede na apsurd i Barklijevu trdnju da su *minima sensibilia* ista za sva svorenja, pozivajući se na činjenicu da ima „životinja čija su cela tela daleko manja nego što je *minimum visibile* za nekog

čoveka" (vidi *Berkleley 2*, § 80, str. 59, nap. 74). Barkli je na to odgovorio da je Arhibiskup pobrkao posredne i neposredne objekte viđenja, jer *minimum visibile* nije „delić materije", koji je za nekog insekta poput planine, i koji, kad je pred njim, sadrži za razliku od slučaja kad je pred nama, veliki broj *minima visibilia*.

[3] Na sličan način je Strosn dokazivao da je pojam naše rastelovljene egzistencije (*disembodiment*) sasvim opravdan, iako je primarno pojam osobe takav da uključuje i pojam tela (vidi *Strawson 1*, sr. 115 i dalje).

§ 63.

[1] Mada je Kantor prvobitno kardinalni broj, odnosno moć skupa, definisao kao opšti pojam (*Allgemeinbegriff*) do kojeg se dolazi određenom apstrakcijom (vidi *Cantor 1*, str. 282), on se može odrediti i *ekstenzionalno*, kao klasa svih skupova između čijih elemenata se može uspostaviti biunivoka korespondencija (vidi *Russell 3*, str. 204).

§ 64.

[1] Ako neko konstruiše primere sa ljudima koji „razmenjuju" tela ili sadržaje svesti (to je omiljeni primer u savremenim raspravama o ličnom identitetu – vidi *Perry*) da bi nas naterao da se *odlučimo* između različitih kriterijuma ličnog identiteta, onda bi ukazivanjem na to da se radi o zamislivoj ali ne i *stvarnoj* situaciji moglo biti vrlo značajno, jer naši kriterijumi mogu biti *de facto* koekstenzivni, ili čak nužno alternativni (up. *Shoemaker*, str. 119–134), pa nas možda zbunjuje upravo to što treba da se opredeljujemo za *samo jedan* u *zamislivoj* situaciji u kojoj oni više *nisu* koekstenzivni, ili alternativni.

E. INDEFINITIZAM

§ 66.

[1] Teško je složiti se s Vikstedom i Kornfordom da je ova aporija u stvari samo aporija mesta (vidi *Aristotle 21*, str. 22, nap. 6).

[2] O λόγος-u kao definiciji vidi u *de Strycker*, str. 143.

[3] O tome vidi *Owen 4*. Značenja koja ćemo mi zvati primarnim Oven, s dosta dobrih razloga, naziva fokalnim (vidi str. 179).

[4] To Aristotel čini i u knjizi A *Metafizike* (991 a 2-8).

[5] O tome da razvijena teorja o sistematskoj vezi značenja (preko primarnih značenja) ne protivreči već pretpostavlja podelu na homonime i sinonime vidi u *Owen 1*, str. 95.

[6] Kao na navedenom mestu u *Eudemovoj etici*: 1236 a 18-21.

[7] Vidi Rekhemov (Rackham) komentar u *Aristotle 20*, str. 22, nap. b.

[8] Čisto jezički posmatrano grčkom οὐσία odgovara latinsko *essentia* a ne *substantia*; drastičan primer narušavanja jezičkog paralelizma u stvaranju filozofske terminologije, jer se u latinskim tekstovima iza *substantia* skriva *u stvari* οὐσία.

[9] I o identitetu (περὶ ταὐτοῦ) se govori višestruko (vidi *Aristotle 1*, 1004 a 27), ali *prvenstveno* se govori o identitetu supstancije. Jedino prva supstancija može da ostane ista ne menjajući se, dok to ne važi analogno za *ovo* određeno svojstvo, *ovaj* određeni odnos, *ovo* određeno mesto itd. Naravno, stvari mogu da ostanu u suštini iste samo ako ima razlike između suštinskih i akcidentalnih svojstava: καθ' αὑτό je suprotstavljeno κατὰ συμβεβηκός (vidi *Aristotle 23*, 110 b 21–25, 111 a 4–5, 116 b 6–7, 143 a 3–4). Συμβεβηκός se u *Topici* ne upotrebljava nikad kao *suštinsko svojstvo*, kao συμβεβηκός καθ' αὑτό (vidi *de Strycker*, str. 146–148; širu raspavu o razlici između suštinskih i akcidentalnh svojstava kod Aristotela vidi u *Copi*, str. 157 i dalje). Aristotelov pojam suštine je takav da je blizak Lokovom pojmu „nominalne suštine" (o toj suštini je reč u *Locke*, I, knj. 2, gl. 23, str. 422 i dalje), ne i njegovom pojmu „realne suštine" pojedinačne stvari (vidi *Locke* II, knj. 3, gl. 3, § 15, str. 17), pošto su vrsna određenja, koja kod Loka čine nominalnu suštinu, ona koja omogućuju promenu pojedinačnih stvari bez promene njihove suštine. I za Aristotela i za Loka samo je o takvoj suštini moguće imati znanje (up. *Copi*, str. 157-158, 166). Za Aristotela, kao imanentnog realistu, to je i jedina suština stvari.

[10] I Platon i Aristotel prihvataju mogućnost transformacije empedoklovskih elemenata jednih u druge (up. *Plato 12*, 48 C i dalje), s tim što Aristotel i za određeni materijal, odeđenog agregatnog stanja, upotrebljava reč ὕλη, kao što ovom rečju označava i neodređenu tvar koja se transformiše, koja je samo potencijalno ono u šta se transformiše, koja je po sebi nesaznatljiva (vidi *Aristotle 1*, 1036 a 9) i neuništiva (šire o tome vidi u *Owens*, str. 196, 211), a što su kasnije sholastičari nazivali *materia prima*.

[11] Ζῷον se odnosi i na čoveka.

§ 67.

[1] Neka materijalna stvar može da se zahvaljujući preoblikovanju ne samo *promeni*, već i da *prestane da bude to što jeste*, ukoliko joj se promene suštinska svojstva (više o tome vidi u *Copi*, str. 150 i dalje).

[2] Više o dvama pojmovima mogućnosti kod Aristotela vidi u *Hintikka 2*, str. 35 i dalje.

[3] "Απειρον u smislu mogućnosti da se uvek uzme još, ma koliko da je već uzeto ἄπειρον μὲν οὖν ἐστιν οὗ κατὰ ποσὸν λαμβάνουσιν ἀεί τι λαβεῖν ἔστιν ἔξω – *Aristotle 21*, 207 a 7).

§ 68.

[1] Aristotel samo kaže da su definicije koje sadrže ovaj red razumljivije (γνωριμώτερα), ali ne u nekom opštem, nespecifikovanom (ἁπλῶς) (*Aristotle 22*, 228 b 16) smislu, već samo zato što su nama (ἡμῖν) tela prva pristupačna u opažaju (πρῶτον κατὰ τὴν αἴσθησιν) (*ibid.*, 229 a 5).

§ 69.

[1] O vrstama promena vidi u *Aristotle 21*, 201 a 10 i dalje.

[2] Za razliku od slučajeva dinamičke ravnoteže, postoje, prema Aristotelu, i slučajevi kad tela miruju zato što se nalaze u prirodnom položaju, na „svom mestu“ (vidi *Aristotle 22*, 230 b 22, 231 a 5–10, 253 b 33).

§ 70.

[1] I „tačka je moguća samo kao granica nekog prostora (te, dakle, nečeg složenog)“ (*Kant 1*, str. 304).

[2] O tome da se Kant na to poziva i kad govori o procesu razlaganja vidi u *Kant 1*, str. 357–360.

[3] Rešenje *Strele* i *Stadiona*, koje je u suštini istovetno s Aristotelovim, Kant nam omogućava uvođenjem pojma *relativnog prostora* (vidi *Kant 2*, str. 480). Relativni prostor je određen kao i sam pokretan (vidi *ibid.*, *loc. cit.*), za razliku od apsolutnog. Kako je „kretanje neke stvari *promena spoljašnjeg odnosa* te stvari prema nekom datom prostoru“, to je jasno da će telo koje se kreće biti jedake veličine s obzirom na relativni prostor prema kojem *ne menja* odnos i koji se zajedno s njim kreće, dok će u odnosu na prostor prema kojem menja spoljašnji odnos zauzimati, za vreme kretanja, prostor veći od sebe.

§ 71.

[1] Vajthedovo narušavanje „velike analogije“ ne znači i definitivno razdvajanje prostora i vremena. Mada je s obzirom na takozvani metod ekstenzivne apstrakcije (vidi *Whitehead 1*, str. 86 i dalje) dozvoljavao da se govori o „vanvremenskom prostoru“ (*timeless space*), on je ipak tvrdio da su „kako prostor tako i vreme parcijalni izrazi jedne osnovne relacije između događaja, koja nije ni prostorna ni vremenska“ (*Whitehead 1*, str. 185).

[2] Bergson pre svega ima u vidu atomizam koji je branio Evelin (više o odnosu Evelinovog i Bergsonovog rešenja vidi u *Koyré*, str. 13–20). No nije neophodno dokazivati da bi telo koje bi trebalo da savlada neko rastojanje u jednom nedeljivom trenutku trebalo da u tom trenutku bude i na početku i na kraju tog rastojanja; mi smo se već sreli sa svođenjem na apsurd hipoteze o kvantizovanom vremenu čak i ako se dopusti da se tokom nedeljivog vremenskog intervala telo nalazi u celom prostornom intervalu koji prelazi (up. *Koyré*, str. 14).

§ 73.

[1] Frege je razlikovao sadržaje kao „puke kombinacije ideje“ od sadržaja koje čine iskaz jer se njima nešto tvrdi (*beurtheilbare Inhalte*) (vidi *Frege 1*, str. 111–112). O asertoričkoj snazi vidi *Frege 3*, str. 185, 198, 233.

§ 74.

[1] To je varijanta za koju se kasnije opredeli Hejting. On je za „generatore realnih brojeva“ uzimao Košijeve nizove u specifičnom smislu u kojem niz poput niza $\{r_n\}$ o kojem je reč to nije (vidi *Heyting 2*, str. 16).

§ 75.

[1] U Inauguralnoj besedi na Univerzitetu u Amsterdamu 1912. godine (vidi *Benacerraf and Putnam*, str. 66).

[2] Hejting je suprotno tome $<$ zadržao kao oznaku za relaciju uređenja, a relaciju virtualnog uređenja označio sa $<$ (vidi *Heyting 2*, str. 106–107).

[3] $a \circ\!> b \overset{def}{=} b <\!\circ\, a$.

[4] Kad smo ranije govorili o intuicionističkoj kritici klasičnog shvatanja kontinuuma, „skup“ nismo upotrebljavali u smislu u kojem je on kod intuicionista strogo suprotstavljen vrsti, već u *dovoljno širokom* smislu da bi mogao da se primeni na sve *sporne* slučajeve, bez obzira na konačnu odluku.

[5] *"Fan"* je skraćenica za raširenje (*spread*) koje je u svakom trenutku konačno (*"finitary"*) (vidi *Heyting 2*, str. 42), a s obzirom na sliku koje nam pružaju različita „ispuštanja“ delova intuitivno shvaćenog kontinuuma kao „medijuma slobodnog nastajanja“, mislim da je *„fan“* zgodno prevesti na *„sito“*.

F. INFINITIZAM

I. Infinitizam sa infinitezimalama

§ 79.

[1] O promeni odnosa prema beskonačnosti pod uticajem hrišćanstva vidi *Cohn*, §§ 7–17.

[2] Sam Toričeli je dopunjavao otkrića do kojih se došlo uz pomoć infinitezimala dokazima u klasičnom Arhimedovom stilu (vidi *Boyer*, str. 124).

[3] Spis je otkrio Hajberg (vidi *Heiberg und Zeuthen*, str. 321).

§ 80.

[1] *Conatus* je po analogiji sa galilejskim *momentum* prvi uveo Hobs (vidi *Boyer*, str. 178), što je, razvijajući infinitezimalnu analizu, prihvatio Lajbnic (vidi *Leibniz 21*, str. 107). O specifičnoj upotrebi *momenta* kod Njutna vidi kasnije, § 83.

[2] Izgleda da je o ovakvom sumiranju kao integriranju prvi put govorio Tomas Bredvordajn (Bradwardine), poznat kao *Doctor profundus*, samo je on poricao mogućnost da se kontinuum sastavi (integriše) iz beskonačno mnogo nedeljivih (veličina): *„Nullum continuum ex indivisibilibus infinitis integrari vel componi“* (vidi *Boyer*, str. 66-67).

[3] Iz spisa *Historia et origo calculi differentialis* (vidi *Boyer*, str. 215).

[4] To je slučaj u *Leibniz 31* (vidi str. 139–141); da takve tačke imaju delove vidi *Leibniz 5*, str. 149; o odnosu tačaka i linija, monada i složenih supstancija vidi u *Leibniz 8*, str. 600 i *Leibniz 9*, str. 602; za metafizičku definiciju monade vidi *Leibniz 30*, str. 643, a za matematičku relevanciju tog pojma u vezi sa zakonom kontinualne serije vidi *Leibniz 6*, str. 360.

[5] O tome kad je i kako Lajbnic došao do tog zaključka, vidi u Gerhardt, *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz*, Halle, 1848.

§ 81.

[1] Njutn je već 1664. upotrebljavao *„0“*, ali je Grigorije to prvi upotrebio u *objavljenom* delu (*Geometrica pars universalis*) 1668. godine (vidi *Newton 3*, str. 262, nap. 14).

[2] Barou govori o „linijicama“ iz kojih se linija sastoji (*Barrow*, str. 38). Zahvaljujući njima moguće je premostiti jaz između pravog i krivog, jer one imaju karakteristike tačaka, koje nisu ni prave ni krive.

[3] *"Infinita quasi sophismata possunt fieri de infinito que omnia si diligenter inspexeris quod nullius partis ad totum infinitium est aliqua proportio faciliter dissoluere poteris per predicta“* (iz *Liber calculationum*, citirano prema *Boyer*, str. 70. nap. 49).

[4] Toričeli govori, pozivajući se na Galileja, o nejednakim linijama s istim brojem tačaka, zaključujući da same tačke moraju biti nejednake (vidi *Boyer*, str. 134).

[5] *"Parallelepipeda illa ita posse multiplicari ut corpora ipsa, quibus inscribuntur*, exhaurant“ (*podv. M. A.*; citirano prema *Boyer*, str. 136, nap. 148).

§ 82.

[1] *"Esto enim ∞ nota numeri infiniti“* (*Boyer*, str. 170, nap. 253)

§ 84.

[1] O beskonačnim redovima govore i matematičari 14, 15. i 16. veka, počev, možda, od Orezma (vidi *Wieleitner 1* i *2*), ali je teško zaključiti kako su oni shvatili sumaciju članova, odnosno način na koji zbir članova daje neku konačnu veličinu. Posle Orezma, koji se koristio *grafičkim* predstavljanjem, oni se služe *samo rečima* (vidi, na primer, *Wieleitner 2*, str. 156), bez geometrijskog ili aritmetičkog predstavljanja. Kad Alvarus Tomas 1509. godine kaže *„Si aliquod corpus diuidatur in infinitas partes...“* (vidi *Wieleinter 2*, str. 153), navodeći potom izvesnu istu proporciju (recimo *a*) u kojoj delovi stoje, i to

jedan (prvi) prema drugom, drugi prema trećem, itd., dobijajući geometrijsku progresiju sa određenim količnikom ($1/a$), onda je to nedovoljno da kažemo kako već on tvrdi isto što i Grigorije, jer nam on ne kaže kako beskonačni delovi koje pominje dostižu granicu na drugom kraju tela, niti da li se za telo uopšte može reći da je njima iscrpeno (*exhaustum est*).

§ 86.

[1] *A. Robinson 1*; kratak istorijat „metafizike infinitezimalnog računa" koja je vodila nestandardnoj analizi vidi u *A. Robinson 2*.

[2] Vidi, na primer, Luxemburg W.A.J. and Robinson A. (ur.), *Contributions to Non-Standard Analysis*, North-Holland Publiching Co., Amsterdam, 1972.

[3] Za Grajsa, koji *značenje* analizira preko *namere* (vidi *Grice 1*), Arhimedov aksiom bio bi prosto negiran.

[4] Lajbnic ne prihvata da tačke ili monade *po sebi* mogu tvoriti kontinuum kao složeni entitet (vidi *Leibniz 8*, str. 600, *Leibniz 9*, str. 602).

[5] Ako je R relacija ekvivalencije na skupu A, i ako a pripada A, onda je *klasa ekvivalencije* od a skup članova iz A koji su svi u odnosu R prema a.

[6] Između svaka dva elementa a i b skupa tačaka nalazi se element c tako da je $a<c<b$ ili $a > c > b$.

[7] Delovi, po Lajbnicu, nisu uvek jednostavniji od celine (vidi *Leibniz 18*, str. 664-665).

[8] Nije neophodno da delovi koji se sumiraju budu prosti (up. prethodnu napomenu), ali bi trebalo da – dok se sumiraju – budu nepromenljivi s obzirom na aspekt prema kojem ih sumiramo.

§ 87.

[1] Prema „zakonima kontinualne serije", $y = x^2$ se razlikuje od $y = x^3$, ali ne time što bi se nedeljivi delovi jedne krive razlikovali od nedeljivih delova druge, kako bi to bilo prema Demokritu (vidi § 46), već time što su monade, kao samo virtualne celine koje imaju delove, shodno tim zakonima različito „užljebljene".

II. *Infinitizam bez infinitezimala*

§ 90.

[1] Topologija (analiza mesta), ili analiza situacije (*analysis situs*), razvijena je u Euklidovom spisu Δεδομένα, o čemu saznajemo iz komentara Proklovog učenika Marina (vidi *Leibniz 25*, str. 254), ali je njen značaj kao *samostalne* geometrijske discipline, koja se bavi onom vrstom sličnosti ili istovetnosti koje su nezavisne od veličine u ikojem smislu, otkrio tek Lajbnic (vidi *Leibniz 23*, str. 192–193, *Leibniz 7*, str. 248–249). U skladu sa savremenom definicijom, topološka svojstva su svojstva koja su invarijantna s obzirom na topološke transformacije ili homeomorfizam (vidi kasnije, § 94), nezavisno od bilo kojih varijacija koje ispituje metrička geometrija (koja se bavi svojstvima koja se odnose na veličinu) ili projektivna geometrija, koju je u Erlanškom programu 1872. godinu definisao Feliks Klajn (Felix Klein – vidi *Grünbaum 1*, str. 290), a koja se bavi sličnošću ili istovetnošću oblika s obzirom na projektivne transformacije.

§ 91.

[1] Budući da su već kod samog Lajbnica infinitezimale postale korisne fikcije, to što je u osamnaestom veku u kontinentalnoj Evropi infinitezimalni račun uglavnom interpretiran Lajbnicovom terminologijom, u kojoj se pojavljuju dx i dy kao osnovni pojmovi koji pretpostavljaju statički shvaćene infinitezimale, ne znači da su metafizičke ili pojmovne osnove računa bile raščišćene u korist statičkog shvatanja. No, kritike i rasprave o osnovama računa, poput one u Engleskoj između Barklilja i Njutnovih branitelja, vremenom su se odrazile i na formalnu stranu u izgradnji računa. U periodu od 1754. do 1784. godine dx i dy se pojavljuju kao osnov u zasnivanju *calculusa* u 15 od 28 publikacija, u šest od ostalih 13 osnov je pojam granice, u četiri su to Ojlerove nule, dve se osnivaju na teoriji fluksije, a jedna se koristi specifičnim Lagranžovim metodom (vidi *Boyer*, str. 250, 252 i dalje).

[2] L'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des ligne courbes* (prvi put objavljeno u Parizu 1696. godine): *definicija* 2.

[3] Što se tiče Košijeve definicije integrala, ona je, takođe, indefinitistička. Određeni integral *nije* suma u striktnom smislu, već opet samo granica jednog niza parcijalnih suma: „Ako se interval $X - x_0$ podelili na beskonačno male

elemente $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n\text{-}0}$, suma $S=(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1)+ \ldots +(X\text{-}x_{n-1})f(x_{n-1})$ će konvergirati prema jednoj granici koja se predstavlja određenim integralom $\int_{x_0}^{X} f(x)\mathrm{d}x$" (Résumé des leçons sur le calcul infinitésitésimal" u *Cauchy*, ser. 2. tom 4).

Beskonačno mali elementi (élements *infiniment petits*) su u stvari neodređeno mali, to jest mali koliko se hoće, kao dinamičke infinitezimale, dok je njihov broj neograničeno veliki, ali ne i beskonačan; dx je proizvoljno, ali uvek različito od nule.

Slično tome je, kao kod Dalambera, suma beskonačnog konvergentnog reda određena preko zbira parcijalnih suma koje *nikad ne iscrpljuju interval* koji je određen prvim članom reda i granicom niza koji čine članovi reda.

[4] Kontinuirana funkcija $f(x) = \sum^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, gde je a neparan ceo broj a b pozitivna konstanta manja od jedinice takva da je $ab > 1 + 3\pi/2$, nije diferencijabilna, to jest nema izvod ni u jednoj tački, što bi značilo da kriva koja bi ovoj funkciji odgovarala nema tangentu ni u jednoj tački!

§ 92.

[1] „Ako je D ceo pozitivan broj, ali koji nije kvadrat nekog celog broja, tada postoji ceo pozitivan broj λ takav da je $\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$. Ako u klasu A_2 uključimo svaki pozitivan broj a_2 čiji je kvadrat veći od D, a u klasu A_1 sve ostale racionalne brojeve, ta podela čini presek (A_1, A_2), to jest svaki broj a_1 manji je od svakog broja a_2. Ako je naime $a_1 = 0$ ili negativno, tada je a_1 već iz tog razloga manje od svakog broja a_2, jer je ovaj pozitivan po samoj definiciji; no ako je a_1 pozitivno, tada je njegov kvadrat $\leq D$, pa je prema tome a_1 manje od svakog pozitivog broja a_2 čiji je kvadrat $>D$. Ali, taj presek nije prozveden nijednim racionalnim brojem. Za dokaz toga mora se pre svega pokazati da nema nijednog racionalnog broja čiji je kvadrat $= D$. Mada je to poznato iz prvih elemenata teorije brojeva, neka ipak ovde nađe mesta sledeći indirektan dokaz. Ako postoji racionalan broj čiji je kvadrat $=D$, tada takođe postoje dva pozitivna cela broja t, u, koja zadovoljavaju jednačinu $t^2 - Du^2 = 0$, i može se pretpostaviti da je u – *najmanji pozitivan* ceo broj koji ima tu osobinu da se množenjem njegovog kvadrata sa D dobija kvadrat celog broja t. Kako je očevidno $\lambda u < t < (\lambda + 1)u$, to je broj $u' = t - \lambda u$ pozitivan ceo broj, i to *manji* od u. Stavi li se dalje $t' = Du - \lambda t$, to t' postaje takođe pozitivan, ceo broj, i proizilazi da je $t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0$, što je u protivrečnosti sa pretpostavkom

o broju u. Prema tome, kvadrat svakog racionalnog broja x ili je $<D$ ili je $>D$. Odatle lako sledi da niti u klasi A_1 postoji najveći, niti u klasi A_2 postoji najmanji broj. Stavi li se naime $y = x\,(x^2 + 3D)/(3x^2 + D)$, to je $y - x = 2x\,(D - x^2)/(3x^2 + D)$ i $y^2 - D = (x^2 - D)^3/(3x^2 + D)^2$. Uzme li se ovde za x neki pozitivan broj iz klase A_1, biće $x^2 < D$, i, prema tome, $y > x$, i $y^2 > D$, dakle y takođe pripada klasi A_1. Međutim, ako se za x uzme neki broj iz klase A_1, biće $x^2 > D$ i, prema tome, $y < x$, $y > 0$, i $y^2 > D$, dakle y takođe pripada klasi A_2. Taj presek stoga nije proizveden nijednim racionalnim brojem" (*Dedekind 2*, str. 23–24).

§ 93.

[1] Izraz „moć skupa" preuzeo je Kantor od Štajnera (Steiner) (vidi *Cantor 9*, str. 151), a u stvari je ideju o ekvipotentnosti kao mogućnosti korespondencije 1–1 razvio prvi Bolcano (vidi *Bolzano*, § 20, str. 27–30).

[2] Topološki gledano, da bi skup bio *nuladimenzionalan* i nužno je i dovoljno da njegovi elementi budu diskretni nuladimenzionalni entiteti (vidi *Menger*, str. 125–126).

§ 94.

[1] Vidi, na primer, klasično delo A. A. Fraenkel and P. Bernays, *Axiomatic Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1958.

[2] Osnovu za takvo određenje predstavlja slavni Brauerov „dokaz za invarijantnost broja dimenzija" (*Brouwer 1*, str. 161-165 u *Brouwer 3*, str. 430–434).

§ 96.

[1] Ova okolnost je u skladu sa intuicionističkim neprihvatanjem da je $\neg\exists x \neg p(x) \rightarrow \forall x\, p(x)$ teorema. Neka su racionalne i iracionalne tačke domen za x i neka $p(x)$ bude „x je racionalno ili x je iracionalno" (up. *Heyting 2*, str. 103). Nema načina da se sistematski aktualizuju *sve* tačke, da bismo iz toga što važi $\neg\exists x \neg p(x)$ smeli da zaključimo da $\forall x p(x)$.

§ 97.

[1] Vidi P. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* New York, 1966.

§ 98.

[1] Razlika između Vitgenštajnovog i Kripkeovog mišljenja odgovara u ovoj tački razlici između antisupstancijalističkog i supstancijalističkog shvatanja načina na koji prostor postoji (vidi § 130).

ISHOD

§ 107.

[1] Sistem relevantne implikacije razvili su 1950. i 1951. godine Mo Šo-Kvaj (vidi *Moh Shaw-Kwei*) i Čerč (vidi *Church*). Ovaj sistem se može odrediti poznatim aksiomima identiteta – $A \rightarrow A$, tranzitivnosti – $A \rightarrow B \rightarrow .B \rightarrow C \rightarrow .A \rightarrow C$, permutacije – $(A \rightarrow .B \rightarrow C) \rightarrow .B \rightarrow .A \rightarrow C$ i samodistribucije – $(A \rightarrow .B \rightarrow C) \rightarrow .A \rightarrow B \rightarrow .A \rightarrow C$. Da bi dobili jednu poželjnu osobinu, da, naime, logičke posledice nužnih istina budu nužno istinite, da važi, na primer, $A \rightarrow .A \rightarrow A \rightarrow A$, Anderson i Belnap su aksiom permutacije zamenili aksiomom ograničene asercije: $A \rightarrow B \rightarrow .A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C$ (vidi *Anderson and Belnap*, str. 24). Za razliku od ove ograničene asercije, $A \rightarrow .B \rightarrow A$ ne važi. – Da se relevantna implikacija ne može svesti na striktnu, definisanu pomoću modalnih operatora u nekom sistemu modalne logike, vidi u *Meyer 1* i *2*.

[2] Ti aksiomi su: $A \rightarrow. B \rightarrow A \circ B$ i $(A \rightarrow .B \rightarrow C) \rightarrow (A \circ B) \rightarrow C$.

[3] Luis i Lengford definisali su operaciju neprotivrečnosti kao $A \circ B \overset{def}{=} \neg (A \rightarrow \neg B)$ (vidi *Lewis and Langford*). „$\rightarrow$" ovde odgovara relevantnoj implikaciji

[4] Inače, za $\circ$ važi da $(A \circ B) \circ C \rightleftharpoons A \circ (B \circ C)$, $A \circ B \rightleftharpoons B \circ A$ i $A \circ B \rightarrow .A \circ C \rightarrow B \circ C$, pored aksioma navedenih u nap. 2. Isto tako, ako $\vdash A$ i $\vdash B$, onda $\vdash A \circ B$. Sve to odgovara konjunkciji $\wedge$ u uobičajenom iskaznom računu.

POSLEDICE

§ 109.

[1] Do vrlo sličnog zaključka o neodrživosti analogije došao je drugim putem, nezavisno od bilo kojih indefinitističkih pretpostavki, Rajl (vidi *Ryle 1*, str. 44-45).

[2] Da nema *nikakve* apsurdnosti u tvrdnji da brži trkač jednostavno neće *nikad* dostići sporijeg u trci koja je bez ograničenja predstavljena kao sukcesivno prelaženje deonica koje su određene kao u *Ahilu*, najotvorenije je možda priznao Džon Nelzon (vidi *Nelson*, str. 486–487). Ali i on, uprkos tom priznanju, Zenonove zaključke smatra „nelegitimnim" (*ibid.*, str. 488) i pri tom se poziva na analizu značenja reči „kretanje" (*ibid.*, str. 489). Mi pak dopuštamo da je Zenon potpuno u pravu *utoliko što je moguće* da se sve zaista odvija kao pri Zevsovom *legato* brojanju.

§ 115.

[1] „Neuobičajene epizode u kojima se odigrava pomeranje profesionalnih uverenja predstavljaju one epizode koje se u ovom ogledu (*Strukturi naučnih revolucija – M.A.*) nazivaju naučnim revolucijama" (*Kuhn*, str. 6); „...naučne revolucije su... one nekumulativne razvojne epizode u kojima je starija paradigma u potpunosti ili delimično zamenjena jednom novom koja je nespojiva sa starom" (*ibid.*, str. 91).

[2] Konstruktivistički zahtev je u matematici posle Kanta prvi postavio Kroneker (Kronecker), a usvojio ga je i dosledno poštovao Brauer, razvijajući intuicionističku mtematiku (vdi *Bernays*, str. 57).

[3] Kiršenman konstruiše primer sa harmoničkim oscilatorom, koji ilustruje situaciju u kojoj $\Delta\psi q$ i $\Delta\psi p$ ne variraju obrnuto proporcionalno (vidi *Kirschenmann*, str. 56, nap. 8).

§ 116.

[1] Prema izjavi samog Hajzenberga u intervjuu od 25. februara 1963. godine u *Archive for the History of Quantum Physics* (vidi *Jammer*, str. 65); vidi, takođe, *Heisenberg 3*, str. 106.

[2] Detaljnu rekapitulaciju spora kako ga je video Bor vidi u *Bohr 1*, str. 32–66, sistematski rezime vidi u *Hooker 4*, a istorijski pregled u *Jammer*, str. 108–158.

[3] Različita shvatanja prirode fotona vidi u *de Broglie 4* i *6*, naročito *de Broglie 4*, str. 31 i dalje.

[4] Zato se u eksperimentima koje smo opisali umesto fotona mogu koristiti elektroni.

§ 117.

[1] Članak Ajnštajna, Podolskog i Rouzena izašao u časopisu *Physical Review* od 15. maja, a Bor je već 29. juna rezime svog odgovora uputio kao kratko pismo uredniku časopisa *Nature*, u kojem se 22. juna pojavila recenzija članka Ajnštajna, Podolskog i Rouzena (vidi *Bohr 6*). Iscrpan odgovor izašao je potom u *Physical Review (Bohr 3)*.

§ 119.

[1] Da bi jedan dan bio apsolutna jedinica mere, ili Sunce ili Zemlja moraju biti, ili se barem moraju tretirati kao, apsolutno mirujući (up. *Aristotle 21*, 220 a 5–10).

[2] Ovde, naime, više nije reč o relativnosti dužine zbog nepostojanja κυρίως ἕν i beskonačne deljivosti prostornih veličina o kojoj, još uvek, govori Paskal (vidi *Pascal 2*, str. 89).

§ 120.

[1] Pretpostavili smo da se $S(x, y, z, t)$ i $S'(x', y', z' t')$ udaljuju translatorno i ravnomerno duž x-ose, odnosno x'-ose. Svetlosni signal kreće se u pozitivnom smeru x-ose (x'-ose) brzinom $c = x/t$ (u S), odnosno $c = x'/t'$ (u S'), tako da je $x' - ct' = \lambda(x - ct)$, gde je λ neka konstanta. U suprotnom smeru svetlosni signal bi se kretao brzinom $c = x/t$ (u S), odnosno $c = x'/t'$ (u S'), tako da je i $(x' + ct') = \mu(x + ct)$, gde je μ neka konstanta. Ako $(\lambda + \mu)/2$ označimo sa a, a $(\lambda - \mu)/2$ sa b, onda sabiranjem, odnosno oduzimanjem, jednakosti $x' - ct' = \lambda(x - ct)$ i $x' + ct' = \mu(x + ct)$ dobijamo $x' = ax - bct$, odnosno $ct' = act - bx$.

Za $x' = 0$, $x = bct/a$, i ako se S' kreće u odnosu na S brzinom v, onda ona iznosi $v = bc/a$.

S jedne strane, u izvesnom trenutku, $t = 0$, posmatrano iz S $x' = ax$, a izvesno rastojanje u S' od $\Delta x' = 1$ iznosi u S $\Delta x = 1/a$. S druge strane, u trenutku $t' = 0$ posmatrano iz S' $ct' = act - bx$ je ravno nuli, i iz $bx = act$, $x' = ax - bct$ i $v = bc/a$ dobijamo $x' = a(1 - v^2/c^2)x$, dok rastojanje u S od $\Delta x = 1$ iznosi u $S'\Delta x' = a(1 - v^2/c^2)$.

S obzirom da „snimci" sistema S' iz S i S iz S' moraju biti istovetni, to je $\Delta x = \Delta x'$, pa je $a^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$. Na osnovu ove poslednje jednakosti i gornje jednakosti $v = bc/a$, možemo odrediti vrednosti za a i b i smenom u $x' = ax - bct$ i $ct' = act - bx$ dobijamo: $x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ i $t' = (t - (v/c^2)x)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (Q.E.D.).

[2] U napomeni na str. 4 Lorenc navodi da mu je Ficdžerald „ljubazno rekao" da se već duže vreme bavi hipotezom koju Lorenc obznanjuje 1895. godine.

§ 121.

[1] Ušenko je verovao da je za „fizičko pobijanje" Zenonovih dokaza (*Ushenko*, str. 159–162) dovoljno to što u svetu Minkovskog „Ahil ne mora da savlada beskonačnu seriju rastojanja duž puta, odnosno x-ose, da bi stigao kornjaču, zato što *uopšte i ne putuje duž x-ose*" (*ibid.*, str. 161)).

§ 122.

[1] Ne radi se, naime, ni o kakvim dinamičkim činiocima, pošto se, eksplicitno, ne radi o rotacionom, niti ubrzanom kretanju, eda bismo se pozivali na eventualno dejstvo sila koje, nezavisno od postojanja ili nepostojanja apsolutnog prostora, jedno od dva relativna kretanja – relativna iz kinematičkih razloga – čine „stvarnim" (up. *Bohm*, str. 451-452).

[2] Bergson ukazuje na Lanvžena (Langevin) kao tvorca primera o kojem je reč, izloženom na kongresu u Bolonji 1911. No iste godine je, i to 16. januara, u osnovi istovetan primer (gore, sa str. 377) naveo Ajnštajn u Cirihu.

[3] Oni bi mogli biti snhronizovani i tokom događaja na paralelnim „svetskim linijama".

[4] Mi apstrahujemo od pitanja kako su sistemi dovedeni u stanje ravnomernog translatornog udaljavanja, kako je kasnije došlo do promene smera kretanja i da li je zbog toga bila primenjena neka sila na jedan od sistema, dovodeći eventualno do asimetrije među njima. Osim toga, mi promenu smera

uzimamo kao čistu promenu bez prethodnog usporavanja i potonjeg ubrzavanja, da bi se u razmatranju isključili dinamički činioci. U sledećem primeru, s dezintegracijom π-mezona, mi ćemo imati u vidu samo dosad ustanovljene, čisto kinematičke efekte (idi *Whitrow 2*, str. 93–95).

[5] I ovde, opet, treba imati u vidu razliku između produženja koje bi nastupilo zbog udaljavanja kao takvog i produženja zbog specijalnorelativističkog efekta, što se po pravilu ne naglašava (vidi, na primer, *Whitrow 1*, str. 93–95).

[6] Bom u razjašnjenju dilatacije vremena, odnosno rešenja „paradoksa blizanaca" pominje promenu u gravitacionom polju (vidi *Bohm*, str. 452); u vezi s tim vidi Mahovo ukazivanje na mogućnost „čisto kolateralne uloge izolovanih tela" koja svojim rasporedom mogu određivati *medijum* u kojem telo koje se kreće postoji (*Mach*, str. 311; vidi, takođe, dole, § 130, nap. 3).

§ 128.

[1] „Formalizovan dokaz je, baš kao i jedan numerički simbol, konkretan vidljivi predmet" (*Hilbert 2*, str. 179).

[2] Vidi dijalog između intuicioniste i formaliste u *Heyting 2*, str. 3 i dalje.

§ 129.

[1] Nemogućnost diskontinuirane promene brzine isključuje direktni sudar i zato se približavanjem tela menja nužno, po Boškoviću, njihova brzina, i to postepeno (*Bošković 3*, § 73, str. 33); odatle Bošković direktno izvodi postojanje sile koja brzinu menja (*ibid.*, loc. cit.).

§ 130.

[1] Namećući prostoru, *bez* odnosa prema telima, razne strukture koje on ima *kad* je, *zavisno* od tela i događaja, struktuiran, zapadamo u najrazličitije teškoće. To je verovatno najotvorenije i najradikalnije formulisao Lajbnic: „Izvor naših teškoća povodom konstitucije kontinuuma leži u tome što mislimo o materiji (nestrukuirano ispunjenom prostoru – *M.A.*) i prostoru kao o supstancijama... Ukoliko prostor i vreme nisu označeni kao ekstenzija fizičkih fenomena, delovi su samo mogućnosti... Ali ukoliko uzmemo da sve moguće tačke stvarno postoje u celini – što bi trebalo da kažemo ukoliko bi ova celina bila supstancijalna stvar koja se sastoji iz delova (to jest ukoliko bi bila struktuirana – *M. A.*) – izgubili bismo se u lavirintu iz kojeg se ne može izaći" (*Leibniz 19*, str. 656; vidi, takođe, *Leibniz 10*, str. 516). Ukazivanje na razne teškoće takve vrste predstavlja osnovu Lajbnicove kritike Dekartovog učenja o *res extensa* (vidi *Leibniz 1*).

[2] Kako ćemo postor i vreme, ili postorvreme, *matematički najbolje predstaviti* može na više načina da zavisi od *empirijskih* okolosti. Ako se, na primer, svetlosni zrak kreće po neeuklidskoj pravoj i *ako* uopšte po euklidskoj pravoj kao liniji razgraničenja nije ništa struktuirano, *kao da* je nemoguće, što je slučaj s fenomenima koje opisuje Opšta teorija relativiteta (vidi *Einstein 2*, str. 93 i dalje, str. 151 i dalje), biće nam *pogodnije* da prostor neeuklidski predstavimo. *Kad smo* jednom izabrali geometriju kojom ćemo predstaviti svet, „prave" drugih „konkurentskih" geometrija *nisu više moguće*; to je već stvar logičke konzistentnosti. Mi, naravno, možemo i dalje „delove" sveta ili izvesne „domene" iskustva opisivati na „stari", odnosno drugačiji način, pravdajući se praktičnim razlozima i dovoljnom aproksimacijom. Pitanje o tome da li se na osnovu „čistih" empirijskih činjenica može odlučiti o istinitosti „fizičke geometrije" ili je odluka u krajnjoj liniji samo stvar pogodnosti, podelilo je naučnike i filozofe u dve grupe: empiriste i konvencionaliste (vidi *Mittelstaedt*, str. 50-60, 74-78, *Sklar*, gl. 2, F, G, H, gl. 4, D).

U savremenoj matematici uočljiva je sklonost ka *implicitnom definisanju* osnovnih geometrijskih objekata preko *aksoma* kojima se određuju njihovi odnosi (vidi *Hilbert 1*, gl. 1 i *Sklar*, str. 26). Tako je, na primer, Petim Euklidovim postulatom, uz zadržavanje ostalih uobičajenih aksioma, implicitno definisana euklidska prava. Ona je *matematički moguća* ako je sistem aksioma, kojem pripada i peti Euklidov postulat neprotivrečan. No, *realna* euklidska prava je *linija za koju između ostalog važi* takozvani Euklidov Peti postulat.

[3] Vrlo je karakteristično da se kod Njutna, doduše, apsolutnost dužina *može izvesti* iz tvrdnje o postojanju apsolutnog prostora, odnosno etra, odnosno apsolutno povlašćenog referencijalnog sistema, ali se relativnost dužina *ne navodi kao razlog* za apsolutno povlašćivanje. Od Ojlera, pak, navodi se i taj razlog (vidi *Euler 1*, str. 113). Pošto je prvim aksiomom tvrdio da je „svako telo, nezavisno od odnosa prema drugim telima, ili u mirovanju ili u kretanju, znači, ili u apsolutnom miru ili u apsolutnom kretanju" (*ibid., loc. cit.*), Ojler drugim i trećim aksiomom tvrdi da će „telo koje je u apsolutnom miru ostati stalno u tom stanju, ako nije podvrgnuto nekom spoljašnjem dejstvu" (*ibid.*, str. 115), dok će „telo koje je u apsolutnom kretanju nastaviti da se kreće u istom smeru ravnomernim kretanjem, ako nije podvrgnuto nekom spoljašnjem dejstvu" (*ibid.*, str. 116). Ako se telo kretalo krivolinijski i neravnomer-

nom brznom, ono će posle prestanka dejstva svih sila nastaviti da se kreće tangencijalno i brzinom koju je imalo u trenutku prestanka dejstva sila. Ovakav zakon inercije pretpostavlja postojanje apsolutnog prostora, što znači, njegovo supstantiviranje, opšte izraženo hipotezom o etru, odnosno Nojmanovim telom *Alpha*.

Njutn je priznao da je za zakon inercije u zemaljskom sistemu *irelevantno* da li se on translatorno ravnomerno kreće u odnosu na zvezde stajaćice (vidi *Newton 2*, I, corol. 5, str. 63–64). Tako je, kako kaže Mah (*Mach*, str. 313), „uprkos metafizičkoj vezanosti za apsolut (to jest apsolutni prostor – *M. A.*), Njutn bio ispravno vođen *osećajem prirodnog istraživača*". S obzirom da je Njutn postojanje apsolutnog prostora dokazivao samo pomoću navodno apsolutne rotacije, a da je s obzirom na inerciju priznavao samo relativno povlašćivanje sistema koji se uzajamno ravnomerno translatorno kreću, „ograničenim principom relativnosti", kako se ovakvo relativno povlašćivanje naziva (vidi *Einstein 2*, str. 12), praktično je dovedena u pitanje teorija o apsolutnom prostoru (up. *Boscovich 1*).

§ 132.

[1] Da Vajsman ne uočava nikakav problem, ili „krizu", u tome što smo to šta je linija naučili na način koji više ne možemo koristiti u slučaju Peanove i sličnih drugih krivih, vidi u *Waismann 2*, str. 164–166.

§ 133.

[1] Iskaz bi bio informativan ako i samo ako je empirijski potkrepljiv ili oporgljiv.

[2] Neinformativnost neempirijskih iskaza najjače je istaknuta u slučaju *definisanja* analitičnosti preko neinformativnosti; to je jedna od tri definicije analitičnosti o kojima raspravlja Hintika u *Hintikka 1* (vidi str. 95).

[3] To rasprostranjeno uverenje je najmilitantnije zraženo u *Quinton*.

[4] Vidi Hintikinu ekspoziciju vitgenštajnovskog pojma tautologije: *Hintikka 1*, str. 97–98.

[5] Uverljive dokaze protiv „redukcionističke teze", po kojoj se kod Aristotela dijalektika svodi na eristiku, vidi u *Owen 2*. O Aristotelovoj dijalektici kao metodu za testiranje filozofskih teza, kako bi se isključivanjem neprihvatljivih došlo do istinitih načela, vidi naročito u *Moraux* i *Moreau*.

[6] Ova izjava ovde nije prosta konstatacija da se neki ljudi bave filozofskom analizom na takav način da se ona ne svodi na logičku ili jezičku; utoliko izjava nije trivijalna. Ona nije ni običan normativni iskaz uperen protiv jedne filozofske škole. Ona je *zaključak* izveden na osnovu *rezultata* Gigantomahije u kojoj su se *rešavali* problemi ili zagonetke rođeni u *Aporetici*.

[7] Aristotel je eksplicitno neke knjige nazivao knjigama u kojima se izlažu teškoće (ἀπορίαι) kao osnov za dalje istraživanje. Takva je, na primer, knjiga E *Fizike* (vidi *Aristotle 22*), najrelevantnija za ono čime smo se mi bavili. Takav je, kao što smo videli, ceo Platonov *Parmenid* s obzirom na spor monista i pluralista (gde je rezultat dijalektičkog ispitivanja negativan – vidi *Plato 4*).

[8] Da je to jedan od tradicionalnih zadataka filozofije vidi u *Passmore*, str. 225.

[9] Ovaj deo *Problema*, u kojem se govori o ljudima s „crnom žuči", melanholicima (μελαγχολικοί), prema Plutarhu i Ciceronu izvorno je Aristotelov (vidi *Aristotle 15*, str. XI).

NAVEDENA DELA*

ABRAHAM, W.E., "The Nature of Zeno's Argument Against Plurality in DK 29 B 1", *Phronesis* 17, 1972.

ADAMS, E.W., "The Naive Conception of the Topology of the Surface of a Body" u Suppes, *Space, Time and Geometry* (vidi *Suppes).*

ALEMBERT, .T. le R. d'., «Exhaustion», «Différentiel», «Limite», *Encyclopedie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des arts et des métiers;* Lausanne et Berne, 1780–82.

ALLEN, R.E. and FURLEY, D.J. (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* II ("Eleatics and Pluralists"), Routledge and Kegan Paul; London, 1975.

ANDERSON, A.R. & BELNAP, N.D. Jr., *Entailment – The Logic of Relevance and Necessity* I, Princeton University Press; Princeton and London, 1975.

ARCHIMEDES,

1. "On Conoids and Spheroids" u Hutchins (ured.), *The Works of Archimedes Including the Method* (vidi *Hutchins).*
2. "The Method Treating of Mechanical Problems" u Hutchins (ured.), *The Works of Archimiedes Including the Method* (vidi *Hutchins).*

ARISTOTLE,

1. *Metaphysica,* recognovit brevique adnotatione critica instruxit W. Jaeger, Oxford University Press; Oxford, 1969 (prvo izd. 1957).

* Na listi koja sledi nalaze se puni naslovi i svi potrebni podaci o delima koja su bila navođena skraćeno: ili samo podvučenim imenom autora, ili, gde je zbog većeg broja dela neophodno, još i brojem koji odgovara broju pod kojim je delo o kojem je reč uvršćeno u spisak ovde citiranih dela.

2. *Minor Works* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and Willliam Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1963.
3. "On Coming-to-Be and Passing-Away" (vidi *Aristotle 7*).
4. "On Indivisible Lines" u *Minor Works* (vidi *Aristotle 2*).
5. *On Interpretation* (vidi *Aristotle 17*).
6. "On Melissus, Xenophanes and Gorgias" u *Minor Works* (vidi *Aristotle 2*).
7. *On Sophistical Refutations; On Coming-to-Be and Passing-Away* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1965.
8. "On Sophistical Refutations" (vidi *Aristotle* 7).
9. *On the Heavens* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1971.
10. *On the Soul; Parva Naturalia; On Breath* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1975.
11. "On the Soul" (vidi *Aristotle 10*).
12. *Posterior Analytics; Topica* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1976.
13. "Posterior Analytics" (vidi *Aristotle 12*).
14. "Prior Analytics" (vidi *Aristotle 17*).
15. *Problems* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1970.
16. *The Athenian Constitution; The Eudemian Ethics; On Virtues and Vices* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1971.
17. *The Categories; On Interpretation; Prior Analytics* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1973.
18. "The Categories" (vidi *Aristotle 11*).
19. "The Eudemian Ethics" (vidi *Aristotle 16*).
20. *The Nicomachean Ethics* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1975.

21. *The Physics* I (knj. I–IV, uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1970.
22. *The Physics* II (knj. V–VIII, uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1968.
23. "Topica" (vidi *Aristotle 12*).

ARMSTRONG, D.M.,
1. *A Materialist Theory of the Mind*, Routledge and Kegan Paul, and Humanities Press; London, Henley, and New York, 1976 (prvo izdanje 1968).
2. *Universals and Scientific Realisin* (I: "Nominalism and Realism", II. "Theory of Universals"), Cambridge University Press; Cambridge, London, New York, and Melbourne, 1978.

ARSENIJEVIĆ, M.,
1. „Dodirivanje", *Filozofske studije* 10, 1978.
2. „Jedna aporija kosmičke beskonačnosti", *Gledišta* 6, 1980.

AUGUSTINE, St., *Confessions* II (uporedni latinsko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1970.

AUSTIN, J.L., *Sense and Sensibilia*, Clarendon Presis; Oxford, 1964.

AYER, A.J.,
1. „Metafizika i zdravi razum", *Filozofija 2*, 1966.
2. "The Identity of Indiscernibles" u Ayer, *Philosophical Essays*, Mac-Millan; New York, 1969.

BAILEY, C., *The Greek Atomists and Epicurus*, Clarendon Press; Oxford, 1928.

BALLENTINE, L.E., "The Uncertainity Principle and the Statistical Interpretation of Quantum Mechanics", *Canadian Journal of Physics* 47, 1969.

BAMBROUGH, R. (ured.), *New Essays on Plato and Aristotle*, Routledge and Kegan Paul, and the Humanities Press; London, Henley, and New York, 1979 (prvo izdanje 1965).

BARKER, S., *Filozofija matematike*, Nolit; Beograd, 1973.

BARNES, J., *The Presocratic Philosophers* I ("Thales to Zeno"), Routledge and Kegan Paul; London, Henley, and Boston, 1979.

BARROW, I., *Geometrical Lectures*, Open Court; Chicago and London, 1916.

BEAUREGARD, O.C. de, «Une réponse à l'argument dirigé par Einstein, Podolsky et Rosen contre l'interprétation bohrienne de phénomnes quantiques», *Comptes Rendus* 236, 1953.

BENACERRAF, P., "Tasks, Super-Tasks and the Modern Eleatics", *Jorunal oj Philosophy* 24, 1962.
BENACERRAF, P. and PUTMAN, H. (ured.), *Philosophy of Mathematics*, Prentice Hall Inc.; Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
BERGSON, H.,
1. *Durée et smultanéité propos de la théorie d'Einstein*, Librairie Felix Alcan; Paris, 1929 (tekst kao u drugom izdanju, iz 1923).
2. *L'Évolution creatrice*, Librairie Felix Alcan; Paris, 1932.
3. "Discussion With Becquerel of the Paradox of the Twins", in: M. Čapek (ed.), *The Concepts of Space and Time* (433–439), 1976.
BERGSTEIN, I., "Complementarity and Philosophy", *Nature* 222, 1969.
BERKELEY, G.,
1. "A Defence of Free-Thinking in Mathematics" (vidi *Berkeley 6*) (prvi put objavljeno 1735).
2. "An Essay Towards a New Theory of Vision" (vidi *Berkeley* 7) (prvi put objavljeno 1709).
3. "Reasons for not Replying to Mr. Walton's Full Answer, in a Letter to P.T.P." (vidi *Berkeley 6*) (prvi put objavljeno 1735).
4. "The Analyst; or, A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician" (vidi *Berkeley 6*) (prvi put objaviljanio 1734).
5. *The Principles of Human Knowledge*, George Routledge and Sons; London and New Vork, 1878.
6. *The Works* III ("Philosophical Works 1734–52"), Clarendon Press, Oxford, 1901.
7. *Works on Vision*, The Bobbs-Merrill Company, Inc.; Indianapolis, New York, 1963.
BERNAYS, P., «Sur le platonisme dans les mathématiques», *L'enseignement mathématique* 34, 1935.
BICKNELL, P.J., "The Fourth Paradox of Zeno", *Acta Classica*, 1961.
BILLETTE, J.J., CAMPILLO, C., LEE, C., McCONNELL, R.D., PARISEAU, G., and FISCHER, G., "Concerning 'A Thought Experiment Violating Heisenberg's Uncertainty Principle'", *Canadian Journal of Physics* 47, 1969.
BLACK, M.,
1. "Archilles and the Tortoise", *Analysis* 11, 1951.
2. *Problems of Analysis*, Cornell University Press; Ithaca, 1954.
3. "Saying and Disbelieving", *Analysis* 13, 1952.
4. "The Identity of Indiscernibles", *Mind* 61, 1952.
BLAKE, R.M., "The Paradox of Temporal Process", *Journal of Philosophy* 24, tom 23, 1926.

BOHM, D., *The Special Theory of Relativity*, Routledge, 1996.
BOHR, N.,
1. *Atomic Physics and Human Knowledge*, J. Wiley and Sons, Chapman and Hall; New York and London, 1958.
2. *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge University Press; Cambridge, 1961.
3. "Can Quanitum-Mechaniical Description of Physical Reality be Considered Complete?", *Physical Review* 48, 1935.
4. "Causality and Complementarity", *Philosophy of Science* 3, tom 4, 1937.
5. "On the Notions of Causality and Complementarity", *Dialectica 2*, 1948.
6. "Quantum Mechanics and Physical Reality", *Nature* 136, 1935.
BOLZANO, B., *Paradoxien des Unendlichen*, Felix Meiner Verlag; Hamburg, 1975 (prvi put objavljeno 1851).
BOOTH, N.B.,
1. "Were Zeno's Arguments a Repily to Attacks upon Parmenides?", *Phronesis*, 1957.
2. "Were Zeno's Arguments Directed Against the Pythagoreans?", *Phronesis*, 1957.
3. "Zeno's Paradoxes", *Journal of Hellenic Studies 11*, 1957.
BOSCOVICH, R.J.,
1. "Criticism of Newton's Alleged Proof of Absolute Motion" iz *Philosophiae recentioribus versibus a Benedito Stay Libri Decem* u Čapek (ured.), *The Concepts of Space and Time* (vidi *Čapek).*
BOŠKOVIĆ, R.,
2. O *zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile*, Matematički institut; Beograd, 1975.
3. *Teorija prirodne filozofije*, Sveučilišna naklada Liber; Zagreb, 1974.
BOUGHN, S.P.
1. "The Case of the Identically Accelerated Twins", *Am. J. Phys.* 57 (791–793), 1989.
BOURBAKI, N., *Eléments de mathématique*, premire partie («Les structures fondamentales de l'analyses»), III («Topologie génerale»), Hermann et companie; Paris, 1942.
BOYER, C.B., *The Concepts of the Calculus: A Critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral*, Dover publications; New York and London, 1939.

BRADLEY, F.H., *Appearance and Reality – A Metaphysical Essay,* Clarendon Press; Oxford, 1966 (prvo izdanje 1893).
BRANS, C.H and STEWART D.R., "Unaccelerated Returning Twin Paradox in Flat Spacetime", *Phys. Rev.* D8 (1662–1666), 1973.
BREITENBERGER, E,, "On the So-called Paradox of Einstein, Podolsky and Rosan, *Il Nuovo Cimento* 1, tom 38, 1965.
BROAD, CD., "Note on Achilles and the Tortoise", *Mind,* NS tom 22, 1913.
BROCHARD, V., «Les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement» u *Études de philosophie ancienne et de philosophie moderne;* Paris, 1926.
BROGLIE, L. de,
1. *Continu et discontinu en physique moderne,* Albin Michel; Paris, 1941.
2. *La mecanique ondulatoire des systems des corpuscules,* Gauthier-Villars; Paris, 1950.
3. *Le principe de correspondence et des interactions entre la matire et le rayonnement,* Hermann et companie; Paris, 1938.
4: *Nouvelles recherches sur la lumière,* Hermann et companie; Paris, 1936.
5. *Optique electronique et corpusculaire,* Hermann et companie; Paris, 1950.
6. *Une nouvelle conception de la lumière,* Hermann et companie; Paris, 1934.
BROUWER, L.E.J.,
1. „Beweis der Invarianz der Dimensionennzahl" (vidi *Brouwer 3*).
2. *Collected Works* I („Philosophy and Foundations of Mathematics"), North-Holland Publishing Company and American Elsevier Publishing Company, Inc.; Amsterdam, Oxford, and New York, 1975.
3. *Collected Works* II ("Geometry, Analysis, Topology and Mechanics"), North-Holland Publishing Company and American Elsevier Publishing Company, Inc.; Amsterdam, Oxford, and New York, 1976.
4. „Die Struktur des Kontinuums" (vidi *Brouwer 2*).
5. "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism" (vidi *Brouwer* 2).
6. „Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus" (vidi *Brouwer 2*).
7. "On Accumuilation Cores of Infinite Core Species" (vidi *Brouwer 2*).
8. "On order in the Continuum, and the Relation of Truth to Non-Contradictority" (vidi *Brouwer 2*).
9. "Points and Spaces" (vidi *Brouwer 2*).
10. "The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic" (vidi *Brouwer 2*).
11. "The Unreliability of the Logical Principles" (vidi *Brouwer 2*).
12. „Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie" (vidi *Brouwer 2*).
BURNET, J.,
1. *Early Greek Philosophy,* Adam and Charles Black; London, 1975 (prvo izdanje 1892).
2. *Greek Philosophy,* The MacMillan Press Ltd.; London and Basingstoke, 1978 (prvo izdanje 1914).
CAJORI, F.,
1. "The History of Zeno's Arguments on Motion: Phases in the Development of the Theory of Limits", *American Mathematical Monthly* 1, tom 22, 1915.
2. "The Purpose of Zeno's Arguments on Motion", *Isis* 3, 1920–21.
CANTOR, G.,
1. „Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (vidi *Cantor* 5).
2. „Eine Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen" (vadi *Cantor* 5).
3. «De la puissance des ensembles parfaits de points« (vidi *Cantor* 5).
4. „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" (vidi *Cantor* 5).
5. *Gesammelte Abhandlungen – Mathematischen und Philosophischen Inhalts,* Georg Olms Varlagsbuchhandlung; Hildesheim, 1962.
6. „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten" (vidi *Cantor 5*).
7. „Über die verschiedenen Standputnkte in Bezug auif das aktuelle Unendliche" (vidi *Cantor 5*).
8. „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" (vidi *Cantor 5*).
9. „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" (vidi *Cantor 5*).
10. „Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem *n*-fach ausgedehnten stetigen Raume *Gn*". Zweite Mitteilung" (vidi *Cantor 5*).

CAUCHY, A., *Œuvres complètes,* Gauthier – Villars et companie; Paris, 1932.

CHAPPELL, V.C., "Time and Zeno's Arrow", *Journal of Philosophy* 8, tom 59, 1962.

CHAPPELL, V.C., (ured.), *The Philosophy of Mind,* Prentice-Hall, Inc.; Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

CHIHARA, C.S., "On the Possibility of Completing an Infinite Process", *Philosophical Review,* tom 74, 1965.

CHURCH, A., "The Weak Theory of Implication" u Menne, Wilhelmy und Angsil (ured.), *Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkul der Einzelwissenschaften* (vidi *Menne, Wilhelmy und Angsil*).

COHEN, L.J., "Probability – The One and the Many", *Proceedings of the British Academy,* tom 61, 1975.

COHN, J., *Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant,* Wilhelm Engelmann; Leipzig, 1896.

COLODNY, R.G. (ured.), *Paradigms and Paradoxes: The Philosophical Challenge of the Quantum Domain,* University of Pittsburgh Press; Pittsburgh, 1972.

COOPER, J.L.B., "The Paradox of Separated Systems in Quantum Theory", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 46, 1950.

COPI, I.M., "Essence and Accident" u Moravcsik (ured.), *Aristotle* (vidi *Moravcsik*).

CORNFORD, F.M.,

1. "Anaxagoras' Theory of Matter" u Allen and Furley (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* II (vidi *Allen and Furley*).
2. "Mysticism and Science in the Pythagorean Tradilion", *Classical Quarterly,* 1922.
3. "Parmenides' Two Ways", *Classical Quarterly,* 1933.
4. *Plato and Parmenides,* Routledge and Kegan Paul Ltd.; London, 1950 (prvo izdanje 1939).
5. "Invention of Space" iz *Essays in Honor of Gilbert Murray* u Čapek (ured.), *The Concepts of Space and Time* (vidi *Čapek*).

ČAPEK, M. (ured.), *The Concepts of Space and Time – Their Structure and Their Development,* Reidel Publishing Company; Dordrecht-Holland and Boston -USA., 1976.

DANTO, A.C., "Basic Actions" u White (ured.), *The Philosophy of Action* (vidi *White* ured.).

DANTZIG, D, van, "Comments on Brouwer's Theorem on Essentially-Negative Predicates", *Indagationes Mathematicae ex actis quibus titulus* LII („Proceedings of The Section of Sciences" XI), North-Holland Publishing Company; Amsterdam, 1949.

DEDEKIND, R..,

1. *Neprekidnost i iracionalni brojevi; šta su i čemu služe brojevi?;* (Štampano sa Cantor, G., *O proširenju jednog stava iz teorije trigonometrijskih redova*), Matematički institut; Beograd, 1976.
2. „Neprekidnost i iracionalni brojevi" (vidi *Dedekind 1*).
3. „Šta su i čemu služe brojevi?" (vidi *Dedekind 1*).

DESCARTES, R., Principles of Philosophy, in *The Philosophical Writings of Descartes*, Vol. I, Cambridge University Press., 1988.

DIELS, H., *Die Fragmente der Vorsokratiker* I–II, (grčki i grčko-nemački tekst), herausgegeben von Walther Kranz; Weidmann, 1974 (prema izdanju iz 1951–52).

DIOGEN LAERTIJE, *Životi i mišljenja istaknutih filozofa* I–X, BIGZ–„Kultura"; Beograd, 1973.

DIRAC, P.A.M., "The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics", *Proceedings of The Royal Society* A 113, 1926.

DOMBROWSKI, H.D., "On Simultaneous Measurements of Incompatible Observables", *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 35, 1969.

DRAY, T. 1990: „The Twin Paradox Revisited", *Am. J. Phys.*58 (822–825).

DRETSKE, F.I.,

1. "Counting to Infinity", *Analysis* 25, 1965.
2. *Seeing and Knowing,*, Routledge and Kegan Paul, and Humanities Press; London and New Yark, 1969.

DRAY, T., "The Twin Paradox Revisited", *Am. J. Phys. 58* (822–825), 1990.

DÜRING, J. and OWEN, G.E.L. (ured.), *Aristotle and Plato in the Mid-Fourth Century,* Elanders Boktryckeri Aktie bolag; Goteborg, 1960.

EDWARDS, P. (ured.), *The Encyclopedia of Philosophy* I–VIII, MacMillan Publishing Company, Inc. and The Free Press, Collier MacMillan Publishers; New York and London, 1972 (prvo izdanje 1967).

EINSTEIN, A.,

1. „Die Relativitts-Theorie", *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Ziirich,* 1911.
2. *Relativity – The Special and the General Theory,* Methuen and Company Ltd.; London, 1977 (prvo izdanje 1920).

3. "On the Electrodynamics of Moving Bodies" (iz *Annalen der Physik* 17, 1905) u Lorentz, Einstein, Minkowski, and Weyl, *The Principle of Relativity* (vidi *Lorentz, Einstein, Minkowski and Weyl*).
4. "The Inadequacy of Classical Models of Aether" iz *The World as I See It* u Čapek (ured.), *The Concepts of Space and Time* (vidi *Čapek*).

EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., and ROSEN, N, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", *Physical Review* 47, 1935.

EPICURUS, *The Extant Remains,* Clarendon Press, Oxford, 1926.

ERLICHSON, H.,
1. "Einstein and the Einstein–Podolsky–Rosen Criterion of Reality", *American Journal of Physics* 40, 1972.
2. "The Einstein–Podolsky–Rosen Paradox", *Philosophy of Science* 39, 1972.

EUCLID, *The Thirteen Books of Elements* (vidi *Hutchins*).

EULER, L.,
1. "Argument for the Reality of Absolute Space" iz *Theoria Motus Corporum Solidorum* u Čapek (ured.), *The Concepts of Space and Time* (vidi *Čapek*).
2. „Institutiones calculi differentialis" u *Opera omnia;* Leipzig und Berlin, 1913.

EVELLIN, F., «Le mouvement et les partisans des indivisibles», *Revue de Métaphysique et de Morale* I, 1893.

FERMAT, P., „Methodus ad disquirendam maximam et minimam" u Fermat, *(Œuvres* I, Gauthier-Villars et Fils; Paris, 1891.

FEYERABEND, P., *Against Method,* NLB and Humanities Press; London, 1975.

FINK, D.G. (ured.), *Color Television Standards,* McGraw-Hill Book Co. Inc.; New York, Toronto, and London, 1955.

FRAASSEN, B.C. van, *An Introduction to the Philosophy of Time and Space,* Random House; New York, 1970.

FRANK E., *Platon und die sogenannten Pythagoreer,* Max Niemer Verlag; Halle, 1923.

FRÄNKEL, H.,
1. "Studies in Parmenides" u Allen and Furley (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* II (vidi *Allen and Furley*).
2. "Zeno of Elea's Attacks on Plurality", *American Journal of Philosophy* 63, 1942, str. 1–25 i 193–206.

FREEMAN, K., *The Pre-Socratic Philosophers,* Basil Blackwell; Oxord, 1966 (prvo izdanje 1959).

FREGE, G.,
1. *Conceptual Notation and Related Articles,* Clarendon Press; Oxford, 1972.
2. *Die Grundlagen der Arithmetik,* Basil Blackwell; Oxford, 1953 (prvo izdanje 1950, uporedni nemačko-engleski tekst).
3. *Posthumous Writings,* Basil Blackwell; Oxford, 1979.
4. *The Basic Laws of Arithmetic,* University of California Press; Berkeley and Los Angeles, 1967.
5. „Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik,* 1892.

FRITZ, K. von, "The Discovery of Incommensuraibility by Hippasus of Metapontum" iz *Annals of Mathematics* 46, 1945 u Furley and Allen (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* I (vidi *Furley and Allen*).

FURLEY, D.J.,
1. "Empedocles and the Clepsydra" iz *Journal of Hellenic Studies* 77, 1957 u Furley and Allen (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* I (vidi *Furley and Allen*).
2. "The Atomist's Reply to the Eleatics" iz *Two Studies in The Greek Atomists* u Mourelatos (ured.), *The Pre-Socratics* (vidi *Mourelatos*).
3. "Zeno and Indivisible Magnitudes" iz *Two Studies in the Greek Atomists* u Mourelatos (ured.), *The Pre-Socratics* (vidi *Mourelatos*).

FURLEY. D.J., and ALLEN, R.E. (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* I ("The Beginnings af Philosophy"), Routledge and Kegan Paul, and Humanities Press; London and New York, 1970.

GALE, R.M. (ured.), *The Philosophy of Time – A Collection of Essays,* Humanities Press, Harvester Press; New Jersey and Sussex, 1978 (prvo izdanje 1968).

GALILEI, G., „Dialoghi delle nuove scienze" u *Opere,* G. Barbera editore; Firenze, 1933.

GALLIE, W.B., "Essentially Contested Concepts", *Proceedings of the Aristotelian Society* 56/1955–56.

GARDNER, M., "Mathematical Games", *Scientific American,* July 1971.

GAYE, R.K., "On Aristotle *Physics* Z ix 239 b 33 – 240 a 18 (Zeno's Fourth Argument Against Motion)", *Journal of Philology,* 1908.

GEACH, P.T.,
1. "Identity" iz *Logic Matters* (vidi Geach 2).
2. Geach, P.T. 1972: *Logic Matters*, Basil Blackwell.

3. *Reference and Generality,* Cornell University Press; Ithaca and London, 1962.
GESCHWIND, N., "Specializations of the Human Brain" *Scientific American* 3, tom 241, 1979.
GIBSON, J.J., *The Perception of Visual World,* Haughton Mifflin Company; Boston, 1950.
GÖDEL, K., "What is Cantor's Continuum Problem?" u Benacerraf and Putnam (ured.), *Philosophy of Mathematics* (vidi *Benacerraf and Putnam*).
GOOD, R.H. 1982, "Uniformly Accelerated Reference Frame and Twin Paradox", *Am. J. Phys.* 50, (232–238).
GOODMAN, N., *Facts, Fiction, and Forecast,* Harvard University Press; Cambridge-Massachusetts, 1955.
GRAHEK, N., *Teorija čulnih utisaka* (magistarski rad), Filozofski fakultet; Beograd, 1983.
GRICE, H.P.,
1. "Meaning" u Strawson (ured.), *Philosophical Logic* (vidi *Strawson* ured.).
2. "The Causal Theory of Perception" u Warnock (ured.), *The Philosophy of Perception* (vidi *Warnock*).
GRÜNBAUM, A.,
1. "A Consistent Conception of the Extended Linear Continuum as an Aggregate of Unextended Elements", *Philosophy of Science* 4, tom 19, 1952.
2. "Messrs. Black and Taylor on Temporal Paradoxes", *Analysis* 13, 1952.
3. *Modern Science and Zeno's Paradoxes,* George Allen and Unwin Ltd.; London, 1968.
4. *Philosophical Problems of Space and Time,* Reidel Publishing Company; Dordrecht-Holland, Boston-USA (dopunjeno izdanje iz 1973), 1974.
5. "Relativity and the Atomicity of Becoming", *Review of Metaphysics 2,* tom 4, 1950.
GUTHRIE, W.K.C,
1. *A History of Greek Philosophy* I ("The Earlier Presocratics and the Pythagoreans"), Cambridge University Press; London, 1967 (prvo izdanje 1962).
2. *A History of Greek Philosophy* II ("The Presocratic Tradition from Parmenides to Democritus"), Cambridge University Press; London, 1969 (prvo izdanje 1965).

3. *A History of Greek Philosophy* III ("The Fifth-Century Enlightement"), Cambridge University Press; London, 1969 (prvo izdanje).
HAFELE, J.C. AND KEATING, R.E. 1972: "Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains", *Science* 177 (168–170).
HAHN, H.,
1. "Does the Infinite Exist?" iz *Empiricism, Logic and Mathematics* (vidi *Hahn 2*).
2. *Empiricism, Logic and Mathematics,* Reidel Publishing Company; Dordrecht-Holland, Boston-USA, London-England, 1980.
3. "The Crisis in Intuition" iz *Empiricism, Logic, and Mathematics* (vidi *Hahn 2*).
HASSE, H. und SCHOLZ, H., *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik,* Pan-Verlag Kurt Metzner; Berlin, 1928.
HEATH, T.L., *A History of Greek Mathematics* I–II, Clarendon Press; Oxford, 1921.
HEGEL, G.W.F.,
1. *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse,* Verlag von Feilix Meiner; Hamburg, 1969 (prvo izdanje 1830).
2. *Phänomenologie des Geistes,* Verlag von Felix Meiner; Hamburg, 1952 (prvo izdanje 1807).
3. *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie* I–III u Hegel, *Werke,* knj. 18, 19 i 20, Suhrkamp Verlag; Frankfurt am Main, 1971 (prvo izdanje 1832–45).
4. *Wissenschaft der Logik* I–II, Verlag von Felix Meiner; Hamburg, 1971 (prvo izdanje 1812).
HEIBERG, J.L. und ZEUTHEN, H.G., „Eine neue Schrift des Archimedes", *Bibliotheca Mathematica – Zeitschrift fiir Geschichte der mathematischen Wissenschaften,* 1906–1907.
HEIDEL, W.A., "The Pythagoreans and Greek Mathematics" iz *American Journal of Philology* 61, 1940 u Furley and Allen (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* I (vidi *Furley and Allen*).
HEISENBERG. W.,
1. „Die Entwicklung der Quantentheorie 1918–1928", *Die Naturwissenschaften* 17, 1929.
2. „Die Rolle der Unbestimmtheitsrelationen in der modernen Physik", *Monatshefte fur Mathematik und Physik* 38, 1931.
3. "Ouantum Theory and Its Interpretation" u Rozental (ured.), *Niels Bohr – His Life and Work as Seen by his Friends and Colleagues* (vidi *Rozental*).

4. „Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", *Zeitschrift fiir Physik* 43, 1927.
HENKIN, L., "Completeness in the Theory of Types" u Hintikka (ured.), *The Philosophy of Mathematics* (vidi *Hintikka* ured.).
HEYTING, A.,
1. "The Intuitionist Foundations of Matherniatios" iz *Erkenntnis 2,* 1931, u Benacerraf and Putnam (ured.), *Philosophy of Mathematics* (vidi *Benacerraf and Putnam*).
2. *Intuitionism – An Introduction,* North-Holilang Publishing Company; Amsterdam, 1966.
HILBERT, D.,
1. *Osnove geometrije,* Srpska Akademija nauka, Matematički institut; Beograd, 1957.
2. „Über das Unendliche", *Mathematische Anncden* 95, 1926.
HILBERT, D. und BERNAYS, P., *Grundlagen der Mathematik* I, Springer Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, 1968 (prvo izdanje 1934).
HILGARD, E.R., ATKINSON, R.L. and ATKINSON, R.C., *Introduction to Psychology,* Harcourt Brace Jovanovich, Inc.; New York, San Diego, Chicago, San Francisco, Atlanta, 1979 (prvo izdanje 1953).
HINCKFUS, I., *The Existence oj Space and Time,* Oxford University Press; Oxford, 1975.
HINTIKKA. J.,
1. "Are Logical Truths Analytic?" u Sumner and Woods (ured.), *Necessary Truth* (vidi *Sumner and Woods*).
2. "Aristotle's Different Possibilities" u Moravcsik (ured.), *Aristotle* (vidi *Moravcsik*).
HINTIKKA, J. (ured.), *The Philosophy of Mathematics,* Oxford University Press; London, 1969.
HINTON, J.M. and MARTIN, C.B., "Achilles and the Tortoise", *Analysis* 14, 1954.
HONDERICH, T. (ured.), *New Essays on Plato and Aristotle,* Routledge and Kegan Paul; London, 1965.
HOOKER, C.A.,
1. "Against Krips' Resolution of Two Paradoxes in Quantum Mechanics", *Philosophy of Science* 38, 1971.
2. "Concerning Einstein's, Podolsky's and Rosen's Objection to Quantum Theory", *American Journal of Physics 1,* tom 38, 1970.
3. "Sharp and the Refutation of the Einstein's, Podolsky's, Rosen's Paradox", *Philosophy oj Science* 38, 1971.

4. "The Nature of Quantum Mechanical Reality: Einstein Versus Bohr" u Colodny (ured.), *Paradigms and Paradoxes: The Philosophical Challenge of the Quantum Domain* (vidi *Colodny*).
HUBEL, D.H., "The Brain", *Scientific American* 3, tom 241, 1979.
HUBEL, D.H. and WIESEL, T.N., "Brain Mechanisms of Vision", *Scientific American* 3, tom 241, 1979.
HUME, D., *A Treatise of Human Nature,* The World Publishing Company; Cleveland and New York, 1969 (prvo izdanje 1962).
HUSSEY, E., *The Presocratics,* Duckworth; London, 1974 (prvo izdanje 1972).
HUTCHINS, R.M. (ured.), *Great Books of the Western World* II ("Euclid, Archimedes, Apollonius of Perga, Nicomachus"), William Benton Publisher, Enciclopaedia Britanica, Inc.; Chicago, London, Toronto, 1952.
JAEGER, W., *The Theology of the Early Greek Philosophers,* Oxford University Press; London, Oxford, New York, 1968 (prvo izdanje 1947).
JAMES, W., *Some Problems of Philosophy,* Harvard University Press; Cambridge-Massachutsetts and London, 1979.
JAMMER, M., *The Philosophy of Quantum Mechanics,* John Wiley and Sons; New York, London, Sydney, Toronto, 1974.
JAUCH, J.M., *Foundations of Quantum Mechanics,* Addison-Wesley; Reading – Massachusetts, 1968.
KANT, I.,
1. *Kritik der reinen Vernunft,* Dnuck und Verlag von Georg Reimer u Kant, *Werke* III; Berlin, 1911 (prema izdanju iz 1787).
2. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft,* Druck und Varlag von Georg Reimer u Kant, *Werke* IV; Berlin, 1903.
KING, H.R., "Aristotle and the Paradox of Zeno", *Journal of Philosophy* 21, tom 46, 1949.
KIRK, G.S. and RAVEN, J.E., *The Presocratic Philosophers,* Cambridge University Press; London and New York, 1977 (prvo izdanje 1957).
KIR'SCHENMANN, P., "Reciprocity in the Uncertainty Relations", *Philosophy of Science* 40, 1973.
KNJAZEV-ADAMOVIĆ, S., „Još jednom o Hegelovoj kritici zakona formalne logike", *Zbornik filozofskog fakulteta* XII—2; Beograd, 1979.
KÖRNER, S., "Inidividuals in Possibile Worlds" u Munitz, *Logic and Ontology* (vidi *Munitz*).
KOYRÉ, A., *Études d'histoire de la pensée philosophique,* Galimard; Paris, 1971.

KRIPKE, S., *Naming and Necessity,* Basil Blackwell; Oxford, 1980.
KRIPS, H.,
1. "Defence of a Measurement Theory", *Il Nuovo Cimento* 1, tom 1 B, 1971.
2. "Fundamentals of Measurement Theory", *Il Nuovo Cimento 2,* tom 60 B, 1969.
3. "Two Paradoxes in Quantum Mechanics", *Philosophy of Science* 36, 1969.

KUHN, T., *The Structure of Scientific Revolutions,* University of Chicago Press: Chicago, 1962.
KULLMANN, W., „Zenon und die Lehre des Parmenides", *Hermes,* 1958.
LAKATOS, I., "Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes" u Lakatos and Musgrave (ured.), *Criticism and the Growth of Knowledge* (vidi *Lakatos and Musgrave*).
LAKATOS, I. and MUSGRAVE, A. (ured.), *Criticism and the Growth of Knowledge,* Cambridge University Press; London and New York, 1970.
LANGEVIN, P. 1911: «L'évolution de l'espace et du temps», *Scientia* X (31).
LAZARUS, R.S. and McCLEARY, R.A., "Autonomic Discrimination Without Awareness: A study of Subception", *Psychological Review* 58, 1951.
LEE, H.D.P., *Zeno of Elea,* Cambridge University Press; Cambridge, 1936.
LEIBNIZ, G.W.,
1. "Critical Thoughts on the General Part on the Principles of Descartes", 1962 (G., IV, 354–92), u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
2. *Gesammelte Werke,* ured. Pentz, G.H., ser. 3, Mathematik; Halle, 1849–63:.
3. "Justification of the Infinitesimal Calculus by That of Ordinary Algebra", 1702 (GM., IV, 104–6) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
4. "Letter of Mr. Leibniz on a General Principle Useful in Explaining the Laws of Nature through a Consideration of the Divine Wisdom, to Serve as a Reply to the Response of the Rev. Father Malebranche", juli 1687 (G., III, 55–56) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
5. "Letter to Antoine Arnauld", novembar 1671 (G., I, 71–74) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
6. "Letter to Arnauld", mart 1690 (G., II, 134–38) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
7. "Letter to Christian Huygens", 8. sept. 1679 (GM., II, 17–20) i "Supplement" (GM., II, 20–27) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
8. "Letter to Des Bosses", 5. feb. 1712 (G., II, 435–37) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
9. "Letter to Des Bosses", 26. maj 1712 (G., II, 444) u Lebniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
10. "Letter to De Volder", 24. mart/3, april 1699 (G., II, 168–75) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
11. "Letter to De Volder", 23. jun 1699 (G., II, 182–85) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*),
12. "Letter to De Volder", 30. jun 1704 (G., II, 268–71) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
13. "Letter to De Volder", 19. januar 1706 (G., II, 281–83) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
14. "Letter to Huygens", 16/26. septembar 1692 (GM., II, 141–46) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
15. "Letter to Huygens", 12. jun 1694 (GM., II, 179–85) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
16. "Letter to John Bernoulli, 18. novembar 1698 (GM., III, 551–53) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
17. "Letter to John Bernoulli", 21. februar 1699 (GM., III, 574–75) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
18. "Letter to Louis Bourguet", 5. avgust 1715 (G., III, 580–83) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
19. "Letter to Nicolas Remond, 14. mart 1714 (G., III, 611–13) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
20. "Letter to Queen Sophia Charlotte of Prussia", 1702 (G., VI, 499– 508) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
21. Letter to Thomas Hobbes", 13/22. jul 1670 (G., VII, 572–74) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
22. "Letter to Varignon", 2. februar 1702 (GM., IV, 91–95) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
23. "Letter to Walter von Tschirnhaus", maj 1678 (GM., IV, 451–63) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
24. *Mathematische Schriften,* Gerhardt, C.I. (ured.), Georg Olms Verlag; Hildesheim und New York, 1971.

25. "On Analysis Situs" (GM., V, 178–83) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
26. *Philosophical Papers and Letters,* Loemker, L.E. (ured), Reidel Publishing Company, Dordrecht– Holland and Boston-USA, 1969.
27. *Philosophische Schriften,* Gerhardt, C.I. (ured); Berlin, 1875–90.
28. "Responsio ad nonullas difficultates, a Dn. Bernardo Nieuwentijt", *Acta Eruditorum,* 1695.
29. "Specimen Dynamicum", (GM., VI, 234–54) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
30. "The Monadology", 1714 (G., VI, 607–23) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).
31. "The Theorv of Abstract Motion: Fundamental Principles (Praedemonstrabilia)" (G., IV, 228–32) u Leibniz, *Philosophical Papers and Letters* (vidi *Leibniz 26*).

(LEIBNIZ, G.W.),
32. *The Leibniz–Clarke Correspondence;* Manchester, 1956.

(LEONARDO DA VINCI), *The Notebooks of Leonardo da Vinci,* MacCurdy, E. (ured); New York, 1958.

LEWIS, C.J. and LANGFORD, C.H., *Symbolic Logic,* Dover Publications; New York, 1959 (prvo izdanje 1932).

LOCKE, J., "An Essay Concerning Human Understanding" u Locke, *The Philosophical Works* I–II, G. Bell and Sons, Ltd.; London, 1916.

LORENTZ, H.A., "Michelson's Interference Experiment", u Lorentz, Einstein, Minkowski, and Weyl, *The Principle of Relativity* (vidi *Lorentz, Einstein, Minkowski, and Weyl*).

LORENTZ, H.A., EINSTEIN, A, MINKOWSKI, H., and WEYL, H., *The Principle of Relativity,* Methuen and Co. Ltd.; London, 1923.

LOW, R.J .1990: "An acceleration-free version of the clock paradox", *Eur. J. Phys.* 11 (25–27).

LURIA, S., „Die infinitezimaltheorie der antiiken Atomisten", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik,* tom 2, sveska 2, odeljak B, 1932.

MacDONALD, G.F. (ured.), *Perception and Identity: Essays Presented to A. J. Ayer With Replies to Them,* MacMillan; London, 1979.

MACH, E., "Criticism of Newton's Concept of Absolute Space" u Čapek (ured.), *The Concepts of Space and Time – Their Structure and Their Development* (vidi *Čapek*).

MALCEV, A., „Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik", Matematičeskiy sbornik, tom 1; Moskva, 1936.

MARGENAU, H. and PARK, J.L., "The Physics and the Semantics of Quantum Measurement", *Foundations of Physics* 1, tom 3, 1973.

MARGENAU, H. and WIGNER, E.P., "Reply to Professor Putnam", *Philosophy of Science* 1, tom 31, 1964.

MAU, J., *Zum Problem des Infinitesimalen bei den antiken Atomisten;* Berlin, 1957 (drugo izdanje).

MAXWELL, G. and FEIGL, H., "Why Ordinary Language Needs Reforming", *Journal of Philosophy* 58, 1961.

MENGER, K., „Bericht über die Dimensionstheorie", *Jahresbericht der Deutschen Mathematik-Vereinigung,* tom 35; Leipzig, 1926.

MENNE – VILHELMY – ANGSIL (ured.), *Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül der Einzelwissenschaften,* Kommissions-Verlag Karl Albert; München, 1951.

MERMIN, N.D. *Space and Time in Special Relativity*, Waveland Press, 1968.

MEYER, R.K.,
1. "Entailment is not strict implication", *Australisian Journal of Philosophy,* tom 52.
2. "Relevance is not reducible to modality" u Anderson & Belnap, *Entailment – The Logic of Relevance and Necessity* I (vidi *Anderson & Belnap,* str. 462–471).
3. "Some Problems No Longer Open for E and Related Logics", *Journal of Symbolic Logic* 35, 1970.

MINKOWSKI, H., "Space and Time" u Lorentz, Einstein, Minkowski, and Weyl, *The principle of Relativity* (vidi *Lorentz, Einstein, Minkowski, and Weyl*).

MITTELSTAEDT, P., *Philosophical Problems of Modern Physics,* Reidel Publishing Company; Dordrecht-Halland and Boston-USA, 1976.

MORAUX, P., «La joute dialectique d'après le huitime livre des *Topiques»* u Owen (ured.), *Aristotle on Dialectic* (vidi *Owen* ured.).

MORAVCSIK, J.M.E. (ured.), *Aristotle,* MacMillan; London and Melbourne, 1968.

MOREAU, J., «Aristôte et la dialectique platonicienne» u Owen (ured.), *Aristotle on Dialectic* (vidi *Owen* ured.).

MOH SHAW-KWEI, "The Deduction Theorems and Two New Logical Systems", *Methodos* 2, 1950.

MOURELATOS, A.P.D. (ured.), *The Pre-Socratics,* Anchor Press-Doubleday and Garden City, New York, 1974.

MUNITZ, M.K. (ured.), *Logic and Ontology,* New York University Press; New York, 1973.

NELSON, J.O., "Zeno's Paradoxes on Motion", *Review of Metaphysics* 16, 1962–3.
NEUGEBAUER, O., *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wiessenschaften*, Verlag von Julius Springer; Berlin, 1934.
NEUMANN, C, "On the Necessity of the Absolute Frame of Reference" u Čapek (ured.), *The Concepts of Space and Time* (vidi *Čapek*).
NEUMANN, J. von, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer Verlag; Berlin, 1932.
NEWTON, I.,
1. „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" u Newton, *The Mathematical Papers* (vidi *Newton 3*).
2. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* I–II, Harvard University Press; Cambridge -Massachusetts, 1972.
3. *The Mathematical Papers* II–III, Cambridge University Press; Cambridge, 1968–69.
4. „Tractatus de methodis serierum et fluxionum" u Newton, *The Mathematical Papers* (vidi *Newton* 3).
5. „Tractatus de quadratura curvarum" u *Opera quae exstant omnia* I, Friedrich Frommann Verlag (Günther Holzboog); Struttgart, Bad Cannstatt, 1964.
NEWTON-SMITH, W.H., *The Structure of Time*, International Library of Philosophy, Routledge and Kegan Paul; London, Boston and Henley, 1980.
NICOL, A. T., "Indivisible Lines", *Classical Quarterly* 30, 1936.
NILSON, M.P., *Geschichte der griechischen Religion* I, Handbuch der Altertumswissenschaft V. 2.1; Munchen, 1967.
NOËL, G., «Le mouvemant et les arguments de Zénon d'Elée», *Revue de Métaphysique et de Morale* I, 1893.
NORTON, J.D., "Einstein's Investigations of Galilean Covariant Electrodynamics prior to 1905", *Archive for History of Exact Sciences* 59 (45–105), 2004.
OWEN, G.E.L.,
1. "Aristotile on the Snares of Ontology" u Bambrough (ured.), *New Essays on Plato and Aristotle* (vidi *Bambrough*).
2. "Dialectic and Eristic in theTreatment of the Forms" u Owen (ured.), *Aristotle on Dialectic* (vidi *Owen* ured.).
3. "Eleatic Questions" u Allen and Furley (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* II (vidi *Allen and Furley*).
4. "Logic and Metaphysics in Some Earlier Works of Aristotle" u Düring and Owen (ured.), *Aristotle and Plato in the Mid-Fourth Century* (vidi *Düring and Owen*).
5. "Plato and Parimenides on the Timeless Present" u Mourelatos (ured.), *The Pre-Socratics* (vidi *Mourelatos*).
6. "Zeno and the Mathematicians", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1957–8.
OWEN, G.E.L. (ured.), *Aristotle on Dialectic – the Topics* (Proceedings of the Third Symposium Aristotelicum), Clarendon Press; Oxford, 1968.
OWENS, J., "Matter and Predication in Aristotle" u Moravcsik (ured.), *Aristotle* (vidi *Moravcsik*).
PARK, J.L. and MARGENAU, H.,
1. "Simultaneous Measurability in Quantum Theory", *International Journal of Theoretical Physics* 3, tom I, 1968.
2. "The Logic of Noncommutability of Quantum-Mechanical Operators – and Its Empirical Consequences" u Yourgrau and Merwe (ured.), *Perspectives in Quantum Theory – Essays in Honor of A. Landé* (vidi *Yourgrau and Merwe*).
PASCAL, B.,
1. *Œuvres* III, Librairie Hachette; Paris, 1923.
2. "The Relativity of Magnitude" iz *Pensées* u Čapek (ured.), *The Concepts of Space and Time* (vidi *Čapek*).
PASSMORE, J., "Philosophy" u Edwards (ured.), *The Encyclopedia of Philosophy* (vidi *Edwards*).
PEACH, B., "Logical and Practical Contradictions", *Analysis* 14, 1954.
PEIRCE, C.S., *Collected Papers* VI: *Scienlific Metaphysics*, Harvard University Press; Cambridge – Massachusetts, 1935.
PERRIN, R., "Twin Paradox: A Complete Treatment from the Point of View of Each Twin", *Am. J. Phys.* 44 (317–319), 1970.
PERRY, J. (ured.), *Personal Identity*, University of California Press; Berkeley, Los Angeles, and London, 1975.
PETRONIJEVICS, B.,
1. «L'espace discret et la géometrie noneuclidienne», *Archiv für systematische Philosophie und Soziologie*, tom 31, sveska 3–4; Berlin, 1928.
2. „Über Leibnizens Methode der direkten Differentiation", *Isis* 22, 1934.
3. „Zenons Beweise gegen die Bewegung", *Archiv fur Geschichte der Philosophie* 20, 1906 (u tekstu citirano prema manuskriptu koji se nalazi u Narodnoj biblioteci Srbije).
PETRONIJEVIĆ, B.,
4. „Kritičke primedbe na Fontenelovu teoriju beskrajnih brojeva", *Glas Srpske kraljevske akademije*, 1929.

PHILOPONUS, I., „In Aristotelis physicorum commentaria" u *Commentaria in Aristotelem Graeca* XVI–XVII, typis et impensis Georgii Reimeri; Berlin, 1887–88.
PLATO,
1. "Apology" (vidi *Plato 3*).
2. *Cralylus; Parmenides; Greater Hippias; Lesser Hippias* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and Willliam Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1977.
3. *Euthyphro; Apology; Crito; Phaedo; Phaedrus* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1977.
4. „Parmenides" (vidi *Plato 2*).
5. "Phaedo" (vidi *Plato* 3).
6. "Phaedrus (vidi *Plato 3*).
7. *Republic* I–II (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard Universitv Press and William Heinemiann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1969–70.
8. "Sophist" (vidi *Plato 10*).
9. "Theaetetus" (vidi *Plato 10*).
10. *Theaetetus; Sophist* (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusetts and London, 1967.
11. *The Laws* I–II (uporedni grčko-engleski tekst), Harvard University Press and William Heinemann Ltd.; Cambridge – Massachusets and London, 1967–68.
12. "Timaeus" (vidi *Plato 13*).
13. *Timaeus; Critias; Cleitophon; Menexenus; Epistles* (uporedni grčko-engleski tekst), William Heineman Ltd. and Harvard University Press; London and Cambridge – Massachusetts, 1966.
POINCARÉ, H., «Le continu mathématique», *Revue de métaphysique et de morale* 1, 1893.
POPPER, K.P., "Particle Annihillation and the Argument of Einstein, Podolsky, and Rosen" u Yourgrau and Merwe (ured.), *Perspectives in Quantum Theory – Essays in Honor of A. Landé* (vidi *Yourgrau and Merwe*).
PRICE, H.H., *Perception*, Methuen and Co. Ltd.; London, 1973.
PRUGOVEČKI, E.,
1. "A Postulational Framework for Theories of Simultaneous Measurement of Several Observables", *Foundations of Physics* 1, tom 3, 1973.

2. "On a Theory of Measurement of Incompatible Observables in Quantum Mechanics", *Canadian Journal of Physics*, tom 45, 1967.
PUTNAM, H.,
1. "A Reply to Margenau and Wigner", *Philosophy of Science* 1, tom 31, 1964.
2. "Comments on the Paper of David Sharp", *Philosophy of Science* 3, tom 28, 1961.
QUAN, S., "The Solution of the Achilles Paradox", *Review of Metaphysics* 16, 1963.
QUINE, W.v.O.,
1. *Methods of Logic* (treće izdanje), Routledge and Kegan Paul; London, 1974.
2. "Notes on Existence and Necessity", *Journal of Philosophy*, tom 40, 1943.
QUINTO'N, A., "The A Priori and the Analytic", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1963–1964.
RAVEN, J.E., *Pythagoreans and Eleatics*, Cambridge University Press; Cambridge, 1948.
REDHEAD, M., "The Conventionality of Simultaneity", in: J. Earman, A.I. Janis, G.J. Massey, N. Rescher (ed.), *Philosophical Problems of the Internal and External Worlds*, University of Pittsburgh Press (103–128), 1993.
REICHENBACH, H,, *The Philosophy of Space and Time*, Dover Publications, Inc.; New York, 1958.
REISLER, D.L., "The Epistemological Basis of Einistein's, Podolsky's, and Rosen's Objection to Quantum Theory", *American Journal of Physics*, tom 39, 1971.
RESCHER, N., "Truth and Necessity in Temporal Perspective", u Gale (ured.), *The Philosophy of Time – A Collection of Essays* (vidi *Gale*).
RITCHIE, A.D., "Why Achilles Does Not Fail to Catch the Tortoise" *Mind* 50, 1946.
ROBINSON, A.,
1. *Non-Standard Analisis*, North-Holland Publishing Company; Amsterdam and London, 1970.
2. "The Metaphysics of the Calculus" u Hintikka (ured.), *The Philosophy of Mathematics* (vidi *Hintikka* ured.).
ROBINSON, M.C., "A Thought Experiment Violating Heisenberg's uncertainty Principle", *Canadian Journal of Physics*, tom 47, 1969.
Romer, R.H., "Twin Paradox in Special Relativity", *Am. J. Phys*. 27 (131–135), 1959.

ROSS, W.D.,
1. *Aristotle's Metaphysics* I–II, Clarendon Press, Oxford, 1966 (prvo izdanje 1924).
2. *Aristotle's Physics,* Clarendon Press; Oxford, 1979 (prvo izdanje 1936).

ROZENTAL, S. (ured.), *Niels Bohr: His Life and Work as Seen by His Friends and Colleagues,* North-Holland – John Wiley and Sons; Amsterdam and New York, 1967.

RUSSELL, B.,
1. *ABC Teorije relativnosti,* Savremena škola; Beograd, 1962.
2. *An Inquiry into Meaning and Truth,* George Allen and Uniwin Ltd.; London, 1951 (prvo izdanje 1940).
3. *Our Knowledge of the External World,* The Open Court Publishing Company; Chicago and London, 1914.
4. "The Limits of Empiricism", *Proceedings of the Aristotelian Society,* N.S. tom 36, 1935–36.
5. *The Principles of Mathematics,* George Allen and Unwin Lmt.; Cambridge, 1903.

RYLE, G.,
1. "Achilles and the Tortoise" iz Ryle, *Dilemmas,* Cambridge University Press; Cambridge, 1969 (prvo izdanje 1954).
2. "Philosophical Arguments", *Collected Papers* II, Hutchinson and Co. Ltd.; London, 1971.

SALMON, W.C, *Space, Time, and Motion,* Dickenson Publishing Co., Inc.; Encino – California and Belmot – California, 1975.

SCHLEGEL, R., "The Einstein–Podolsky–Rosen Paradox", *American Journal of Physics,* tom 39, 1971.

SCHRÖDINGER, E., *Vier Vorlesungen über Wellenmechanik,,* Verlag von Julius Springer; Berlin, 1928.

SCIAMA, D.W., *Modern Cosmology,* Cambridge University Press; Cambridge 1973 (prvo izdanje 1971).

SEARLE, J.R., *Speech Acts – An Essay in the Philosophy of Language,* Cambridge University Press; Cambridge, 1974 (prvo izdanje 1969).

SHARP, D.H., "The Einstein –Podolsky –Rosen Paradox Re-Examined", *Philosophy of Science* 3, tom 28, 1961.

SHE, C.Y. and HEFFNER, H., "Simultaneous Measurement of Noncomuting Observables", *Physical Review* 4, tom 152, 1966.

SHOEMAKER, S.,
1. "Personal ldentity and Memory" u Perry (ured.), *Personal ldentity* (vidi *Perry*).
2. "Time without Change", *Journal of Philosophy* 66, 1969.

SCHWAYDER, D.S., "Achilles Unbound", *Journal of Philosophy* 17, tom 52, 1955.

SIMPLICIUS,
1. „In Aristotelis de caelo commentaria" *Commentaria in Aristotelem Graeca* VII, typis et impensis Georgii Reimeri; Berlin, 1894.
2. „In Aristotelis physicorum commentaria" u *Commentaria in Aristotelem Graeca* IX–X, typis et impensis Georgii Reimeri; Berlin, 1882–95.

SKLAR, L., *Space, Time, and Spacetime,* University of California Press: Berkeley, Los Angeles, and London, 1977 (prvo izdanje 1974).

SMART, J.J.C., "Sensations and Brain Processes" u Chappell (ured.), *The Philosophy of Mind* (vidi *Chappell* ured.).

SMITH, H.B., "Mr. Blake and the Paradox of Zeno", *Journal of Philosophy* 24, 1977.

SOLMSEN, F., "The Tradition about Zeno of Elea Re-Examined", *Phronesis* 16, 1971.

SOMORJAI, G.A., "Surface Science", *Science* 201, 1978.

STAFFORD, P., *Psychedelics Encyclopedia,* And/Or Press; Berkeley – California, 1977.

STRANG, C, "The Physical Theory of Anaxagoras" iz *Archiv für Geschichte der Philosophie* 45, 1963 u Allen and Furley (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* (vidi *Allen and Furley*).

STRAWSON, P.F.,
1. *Individuals,* Methuen; London, 1965 (prvo izdanje 1959).
2. "Perception and its Objects" u MacDonald (ured.), *Perception and Identity: Essays Presented to A.J. Ayer With Replies to Them* (vidi *MacDonald*).

STRAWSON, P.F. (ured.), *Philosophical Logic,* Oxford University Press; Oxford, 1973 (prvo izdanje 1967).

STROLL, A., "Two Conceptions of Surfaces", *Midwest Studies in Philosophy* 4, 1979.

STRYCKERS, E.S.J. de, «Conceptes et terminologie dans les livres ii à vii des Topiques» u Owen (ured.), *Aristotle on Dialectic – the Topics* (vidi *Owen* ured.).

SUMNER, L.W., and WOODS, J. (ured.), *Necessary Truth,* Random House; New York, 1969.

SUPPES, P. (ured.), *Space, Time, and Geometry,* Reidel Publishing Company; Dordrecht – Holland and Boston – USA, 1973.

TANNERY, P.,
1. *La géométrie Grecque, comment son histoire nous est parvenu et ce que nous en savons. Essai critique,* prvi deo: Histoire générale de la géométrie eleméntaire; Paris, 1887.
2. »Le concept scientifique du continu – Zenon d'Elée et Georg Cantor», *Revue philosophique* 20, 1885.
3. *Pour l'historie de la science Hellene,* (drugo izdanje); Paris, 1930 (prvo izdanje 1887).

TAYLOR, A.E.,
1. *A Commentary on Plato's Timaeus,* Clarendon Press; Oxford, 1928.
2. *The Parmenides of Plato Translated into English* (Appendlx A: "On the Work of Zeno"; Oxford, 1934.

TAYLOR, R.,
1. "Mr. Black on Temporal Paradoxes", *Analysis* 12, 1951.
2. "Mr. Wisdom on Temporal Paradoxes", *Analysis* 13, 1952.

TeHENNEPE, E., "Language Reform and Philosophical Imperialism: Another Round with Zeno", *Analysis* 23, 1963.
THOMAS, L.E., "Achimes and the Tortoise", *Analysis* 13, 1952.
THOMSON, J.F., "Tasks and Super-Tasks", *Analysis* 15, 1954 u Gale (ured.), *The Philosophy oj Time* (vidi *Gale*).
TOLMAN, R.C., *Relalivity, Thermodynamics, and Cosmology,* Clarendon Press; Oxford, 1950 (prvo izdanje 1934).
UNRUH, W.G., "Parallax Distance, Time, and the Twin Paradox", *Am. J. Phys*. 49 (589–592), 1981.
USHENKO, A., "Zeno's Paradoxes", *Mind,* tom 55, 1946.
UZAN, J.-P. , LUMINET, J.-P., LEHOUCQ, R.L. and PETER, P., »Twin Paradox and Space Topology», *Ar. Phys.* June (1–6), 200.

VLASTOS, G.,
1. "A Note on Zeno's Arrow", *Phronesis* 11, 1966.
2. "A Note on Zeno B 1" u Allen and Furley (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* (vidi *Allen and Furley*).
3. "Degrees of Reality in Plato" u Bambrough (ured.), *New Essays on Plato and Aristotle* (vidi *Bambrough*).
4. "Raven's 'Pythagoreans and Eleatics'" u Allen and Furley (ured.), *Studies in Presocratic Philosophy* (vidi *Allen and Furley*).
5. "Zeno's Race Course", *Journal of the History of Philosophy* 4, 1966.

WAERDEN, B.L. van der, „Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik", *Mathematische Annalen,* 1941.

WAISSMANN, F.,
1. *How I See Philosophy,* MacMillan and St. Martin's Press; London, Melbourne, Toronto, and New York, 1968.
2. *Introduction to Mathematical Thinking,* Hafner Publishing Company, Ltd.; London, 1951 (prvo izdanje Wien, 1936).

WALLNER, C.R., „Entwickelungsgeschichtliche Momente bei Entstehung der Infinitesimalrechnung", *Bibliotheca Mathematica* 3, V, 1904.
WARNOCK, G.J. (ured.), *The Philosophy of Perception,* Oxford University Press; Oxford, 1968 (prvo izdanje 1967).
WATLING, J., "The Sum of an Infinite Series", *Analysis,* 1952.
WEISS, P., *Reality,* Princeton University Press; Princeton, 1938.

WEYL, H.,
1. „Der Circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis", *Jahresbericht, Deutsche Mathematiker-Vereinigung* 28, 1919.
2. *Philosophy of Mathematics and Natural Science,* Princeton University Press; Princeton, drugo izdamje 1949.
3. „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", *Mathematische Zeitschrift* 10, 1919.

WHITE, A.R., *Modal Thinking,* Basil Blackwell; Oxford, 1957.
WHITE, A.R. (ured.), *The Philosophy of Action,* Oxford University Press; Oxford, 1973 (prvo izdanje 1968).

WHITEHEAD, A.N.,
1. *Concept of Nature,* Cambridge University Press; Cambridge, 1971 (prvo izdanje 1920).
2. *Process and Reality,* The MacMillan Company; New York, 1929.
3. *Science and the Modern World,* William Collins Sons and Co. Ltd.; Glasgow, 1975 (prvo izdanje 1925).
4. "The problem of simultaneity", *Aristotelian Society, Suppl.* Vol. 3. (1923) (34–41).

WHITROW, G.J.,
1. *The Natural Philosophy of Time,* Thomas Nelson and Sons Ltd.; London, 1961.
2. *The Nature of Time,* Penguin Books Inc. and Holt, Rinehart and Winston Inc., 1975 (prvo izdanje 1973).

WIELEITNER. H,
1. „Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme", *Bibliotheca Mathematica* 3,XIV, 1914.
2. „Zur Geschichte der unendlichen Reihen im chriistlichen Mittelalter", *Bibliotheca Mathematica* 3, XIV, 1814.

WINDELBAND, W., *Povijest filozofije* I, Naprijed; Zagreb (prema izdanju iz 1950, Tübingen).
WISDOM, J.L.,
1. "Achilles on a Physical Racecourse", *Analysis* 12, 1952.
2. "Why Achilles Does Not Fail to Catch the Tortoise", *Mind*, 1941.
WITTGENSTEIN, L.,
1. *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (uporedni nemačko-engleski tekst), Basil Blackwell; Oxford, 1956.
2. *Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie* I–II (uporedni nemačko-engleski tekst), Basil Blackwell; Oxford, 1980.
3. *Philosophical Investigations*, Basil Blackwell; Oxford, 1953.
4. *Philosophische Grammatik*, Basil Blackwell; Oxford, 1969.
YOURGRAU, W. and MERWE, A. van der (ured.), *Perspectives in Quantum-Theory; Essays in Honor of A. Landé*, MIT Press; Cambridge – Massachusetts and London, 1971.
ZELLER, E., *Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung*, Erster Theil; Leipzig, 1892 (peto izdanje).

SPACE, TIME, ZENO

(Analytical table of contents)

APORETICS

1. Overcoming obstacles step-by-step and all-at-once

There are instances where the only way to overcome an obstacle is to do it step-by-step, while in certain instances the only way is to do it all-at-once 63

2. Overcoming infinity

In certain instances, it seems that an obstacle consisting of an infinite number of tasks can be overcome all-at-once 64

3. Is it possible to overcome infinity step-by-step?

Considering the concept of infinity and the nature of overcoming obstacles step-by-step, it seems obvious that infinity cannot be overcome step-by-step, although certain philosophers take an exception to this 65

4. An aporia concerning the overcoming of infinity step-by-step

If Zeus, the immortal, were to contact, on each of his birthdays, a different space station belonging to an infinite sequence of space stations, and if no space station may be specified which will not be contacted, does not this mean that Zeus will contact all the stations and thus overcome infinity step-by-step? 66

5. *"Some", "any", "every"*

It is not only the pronoun "any" but also the pronouns "some" and "every", that may be used as indeterminate pronouns; in the predicate calculus, the determinateness and indeterminateness of the quantifiers depend on their scope and the order of their introduction 69

6. *The scope and the order of introduction of quantifiers and the solution of the aporia*

The statement that Zeus will contact every space station would be true if "every" were used indeterminately, which is indeed the case when an allegedly unconatactable station to be specified is required 73

7. *"Every" and "all", and the nature of the infinity of ordinals*

When used indeterminately, "every" must not be replaced by "all"; on the other hand, the existence of infinite sets implies not the existence of infinite ordinal numbers 74

8. *Converging sequences and the impossibility of infinity being overcome step-by-step*

Even if the sequence to be overcome were a converging one, Zeus could not overcome the infinity step-by-step, since he could not set himself free from the property of finitness, which is being recursively preserved 77

9. *Is it possible to conceive an ordinary race as overcoming infinity step-by-step?*

If an ordinary race could be represented as overcoming infinity step-by-step, then the seemingly obvious possibilities such as Achilles' catching up with the tortoise, would seem impossible 78

10. *Reaching points and covering distances*

The analogy between Zeus' task of contacting an infinite number of space stations and Achilles' task of catching up with the tortoise seems to be justified, because it seems that there is enough room in a limited space not only for infinite multitude of geometrical points but also for an infinite number of micro-space stations 80

11. *The contested ontological status of points*

Historically, the mode of the existence of points has not been univocally defined; in view of a possible formulation of Achilles' task, a question that can be raised is whether points exist in the sensory world 81

12. *Are geometrical points and lines perceivable?*

Geometrical lines and points can be seen, since it is possible to see the way in which differently coloured surfaces delimit each other 82

13. *Perception of geometrical surfaces*

If two differently illuminated spaces deliniate each other and if, while within one, we cannot see any part of the other, is it not the case that we shall, looking from one toward the other, see a geometrical surface and, moreover, see a geometrical surface when we look at a black wall? 86

14. *The visual and the tactile worlds*

The world of our experience is a world of unified experience and we are therefore justified in saying that we see a wall when we are really seeing a geometrical surface only 87

15. *The geometrical and the material worlds*

Material bodies as investigated by phsysicists are geometrical bodies as well; not all that we perceive and speak of when referring to material bodies is material: their shape is nonmaterial 91

16. *Touching*

Two touching bodies may create a continuum as well as what might be called a *contiguum*; two material bodies may touch both contiguously and continuously at the same time: contiguously because they are materially different, continuously because they are geometrical 92

17. *The family of existence*

There are different ways in which ontologists speak of existence, resorting frequently to ontological reduction; however, in order to construct the aporia we are looking for and which is the reason for our turning to ontology, it suffices that geometrical objects exist in the sensory world in the way defined in §§ 12–16 98

18. *Instant*

In terms of time the instant corresponds to the point in space, bordering two intervals which are heterogeneous in relation to two different changes that have been taking place within the first and the second, respectively 100

19. *Reaching points*

In order to overcome disanalogies between the space stations being contacted by Zeus and the points being reached by Achilles, we may imagine that any two succesive segments of an infinite number of segments of Achilles' track are illuminated by different lights 101

20. *The staccato run*

In order to make certain that Achilles' touchings of borders between differently coloured spaces are real, he will be required to run *staccato*, i.e., to stop at the end of each space, briefly enough to reach the goal within a finite time 102

21. *The legato count*

Zeus is counting the sections of Achilles' track, which are becoming shorter and shorter according to a geometric progresion; how many will he have counted by the time he reaches the goal together with Achilles? 103

22. *The runner who slows down in a strange way and the runner who speeds up in a strange way*

When convergence conditions have not been met with reference to both the space and the time intervals, but have been met with reference to one of them only, either the runner will not be able to reach a finitely distant goal without this being strange in the sense that it had been strange in Achilles' case, or the runner will seemingly be able to reach a point infinitely distant from the starting point 104

23. *The "super-task" machines*

In the technological age, psiholosophers have invented numerous machines intended to perform tasks containing an infinite number of acts in order to use them for testing the theses on the posibility or impossibility of infinity being overcome step-by-step 107

24. *Two aporias: unreachability and unmovability*

If any given goal can be made unreachable by a construction such as the one in *the Achilles*, we may also conclude that movement is impossible 109

GIGANTOMACHY

25. *Dealing with history*

The 2500 years long history of Zeno's arguments against plurality and motion consists of the philologico-philosophical reconstructions of the original arguments, the intended or accidentally arisen variations on Zeno's theme – in mathematics and physics as well as in philosophy – and the various responses to Zeno's challenge; the known solutions are classified here in accordance with type of intellectual reactions to the aporias 113

A. THE NEGATIVE DIALECTIC

26. *The dating of Zeno's arguments and the importance of an independent reconstruction of earlier teachings*

The date of the formulation of Zeno's argument is of importance not only for discovering of Zeno's motives and goals, but also for an exact determination of the structure of his arguments 116

27. *Does early Pythagorean mathematics contain a concept of basic geometrical objects?*

No Pythagorean concept of basic geometrical objects has to be assumed for the time when Zeno's arguments originated; Pythagorean mathematical knowledge before Zeno does not imply any such concept, and there is no direct evidence to that effect 118

28. *The uncertainty over the use of the infinitesimals in Grcek mathematics*

There is no direct evidence that Greek mathematicians had used any infinitesimal method, while the indirect inference to the existence of such a method is unconvincing 123

29. *The discovery of incommensurability*

It is most likely that the discovery of incommensurability of the diagonal and the side of the square took place after Zeno had stated his arguments; contrary to the opinion of certain scholars, Zeno did not enter the historical stage at the moment when the crisis of the basis of Greek geometry was alredy under way 124

30. *The Pythagorean teaching on number and proportion*

The Pythagoreans had probably come upon their teaching on number and proportion through exploring the length of wires in producing consonant musical intervals; contrary to the opinion of many scholars, the numbers seem to have appeared initially only with reference to lengths and did not refer to any points, be they with or without magnitude 126

31. *The early Phythagoreans' arithmetization of geometry*

The teaching on number and proportion had been applied in comparisons of geometrical areas, i.e. by using the method of multiple application of a single measuring area 130

32. *Parmenides' teaching on the one, homogeneous, and continuous being*

a) Method

Considering that which can be spoken about meaningfully, Parmenides attributed to it the characteristics of existence, homogeneity, continuity and oneness; this was achieved by reductio ad absurdum of other "possibilities" 133

b) Homogeneity

That which exists cannot be divisible or differentiated in itself with respect to the characteristic of existence: it is, as such, homogeneous throughout 136

c) Continuity

Having applied συνεχές to one being, Parmenides used it in a wholly new way, because that which exists contains no parts which would be in continuous touch; continuity thus became a characteristic of one thing, having ceased to be a relation between two things 137

d) Oneness

Without heterogeneity or discontinuity there is no plurality and that is way that which can be spoken of meaningfully is one and unique 138

33. *Paramenides' and Melissus' identitas indiscernibilium and indiscernibilitas identitatum*

For Parmenides the principle of *identitas indiscernibilium* is a principle of negative dialectic, used to reduce various "possibilities" to absurdity, whereas the *indiscernibilitas identitatum* is an ontological principle used to characterise that which can be spoken of meannigfully; for Melissus, it seems, the *identitas indiscernibilium* is a principle which makes it posssible for the mortals to speak the truth about what they allegedly discern 140

34. *What sort of plurality had Empedocles and Anaxagoras in mind?*

According to Empedocle, all perishable things come into being through mutual insertion of four qualitatively different imperishable roots, which lose in that process some characteristics of the Parmenidean being; speaking of the plurality of different seeds of all that exist, Anaxagoras allowed for the existence of infinite quantitative differentiation of spatially limited bodies 141

35. *The basic elements of the conceptual network employed in Zeno's arguments against plurality*

a) M u l t i t u d e
In the pluralist hypothesis which Zeno was refuting the elements of multitude are all that could be reached if the division of Parmenidean cintinuous being were allowed 144

b) P o i n t
Although Zeno did not use the word στιγμή, he was probably the first to speak of the mathematical entity which was later to be called by that name; the so-called Zeno's axiom axiom states that nothing can be composed of such entities 146

c) M a g n i t u d e , t h i c k n e s s , m a s s
When speaking about μέγεθος and πάχος, and, probalby, ὄγκος, Zeno was in fact using the concept of dimension; since "point" cannot be an element of an allegedly existing multitude, only that which is corporeal, having a magnitude and thickness (and a mass), is a possible candidate for an element of such a multitude 156

d) T o u c h i n g
According to the most convincing translation and interpretation of *DK* 29 B 1, there is no mention in Zeno of the problem of the possibility of touching between the elements of multitude 156

e) P l a c e
The Place aporia deals with indeterminateness of the place at which, or with the infinity of the space in which, a body is placed 157

f) D i v i s i o n
Whether the division which leads to parts as elements of multitude is conceived as physical or as "division in the mind" – is of no import for the point of Zeno's arguments against the existence of multitude; the only thing that matters is that parts are supposed to be only revealed and not created by division 158

g) I n f i n i t y
In Zeno's refutation of pluralist hypothesis, ἄπειρον can refer to any of the following: indeterminateness of multitude (with reference to indeterminateness of the unit), infinity of number of parts, infinity of magnitude of bodies, infinity of the process of division, and infinity of the process of addition (in the Place aporia) 159

h) H o m o g e n i t y
The arguments against multitude are constructed in such a way that their point might be undermined only if the parts are required to be qualitatively differentiated from one another 163

i) C o n t i n u i t y
Although the divisibility of the continuum is most often understood hypothetically, there are places where it would be difficult to deny that Zeno spoke of it categorically 164

j) O n e n e s s
Ancient comentators used to contrast the true one (κυρίως ἕν) and the alleged units which ought to be discarded as units on the very strength of Zeno's arguments; although the comentators would deny it, it is not certain that Zeno had not questioned even the Parmenidean One 165

k) B e i n g
In the pluralist hypothesis that is being refuted τὰ ὄντα are corporeal beings having magnitude, thickness, and mass, and, in the refutation of the second horn of the dilemma, might be points without magnitude 167

36. *The structure and the point of Zeno's arguments against plurality*

Zeno's arguments in *DK* 29 B 1-3 constitute a *reductio ad absurdum* of the general pluralist hypothesis, according to which there exists a multitude of beings; the arguments may be classified into two groups: those in which ἄπειρον must be translated as "infinite", and those in which it may be translated by the weaker term "indeterminate"; if the pluralist hypothesis were to be at the same time an affirmation of the monist hypothesis, it would be necessary to rely on the *tertium non datur* principle, and it is not certain that Zeno did so 170

37. *Zeno's arguments against plurality on the philosophical scene*

A comparison of the independently presented reconstructions of Zeno's arguments against plurality, on the one hand, and of teachings which preceded them, on the other, suggests that they might have been directed against the Pythagoreans or Anaxagoras, though the reasons for this belief are not those usually given 174

38. *Zeno's kinematic aporias*

a) The Dichotomy
According to Aristotle's text, the problem of overcoming infinity, which is dealt with in this aporia of Zeno, may be understood either as a problem of reaching an infinite number of points, or as a problem of covering an infinite number of sections of a finite track; on the basis of Aristotle's text, the infinite sequence of points or distances does not have to be interpreted as a decreasing geometric progression, as has been done regularly ever since Simplicius and Philoponus, while if the geometric progression is acknowledged to be decreasing then *the Dichotomy* differs from Zeno's customary *reductio*, since the runner is not allowed to start and thus it cannot be demonstrated *subsequently* that the assumption that he does is absurd 181

b) The Achilles
The slower racer chased by Achilles may be used to make any given position unreachable, since the starting position in the race and the speed of the slower racer may be varied 184

c) The Arrow
There is no need to change the text of Bekker's edition of Aristotle's *Physics*, as is usually done, in order to comprehend the point of this aporia: if the arrow in flight has to retain the size it has while stationary, it cannot move, for in order to change its position it must occupy the space larger than itself (while stationary), while at the same time its being in that space cannot be analysed into a sequence of states in which the arrow would be occupying a space equal to itself 185

d) The Stadium
No reconstruction of this aporia, such as the so-called French Interpretation, is necessary for its point not to be trivial: *the Stadium* illustrates the non-univocality of lengths of spatial and temporal intervals in certain kinematic circumstances in spite of assumedly fixed measuring unit 191

39. *Arguments against plurality and kinematic aporias*

In spite of all similarities, there is an important respect in which kinematic aporias are more elementary than the arguments against plurality, thus posing ever greater difficulties: the first step in the destruction of the world in which we live is "abolition" of movement, which is performed "operationally" in kinematic aporias in such a way that actors "produce" paradoxical effects by their very acts; for the costruction of kinematic aporias, a "weaker" concept of infinity – infinity in dynamic sense – would be sufficient 201

40. *The general result of Zeno's negative dialectic*

If we accept the premisses underlying Zeno's arguments against the possibility of plurality and motion, we are also obliged to accept his conclusions 204

41. *Reactions of those who accept the general result of negative dialectic*

To accept Zeno's conclusions and then to take a walk and convince oneself that the motion does indeed exist, like Antisthenes did, would lead us into a Tertulian-like situation: *credo quia absurdum est*; the sceptic who accepts Zeno's conclusions interprets the result strictly *ad hominem*: considering the arguments offered, he himself fails to see the possibility of plurality and motion; the rhetorician accepts the conclusions in order to confuse others; the ontological nihilist, such as Gorgias, radicalizes the conclusions to the statement that nothing exists; Bradley proclaimes the entire world of change to be mere appearance behind which the "true" reality is hiding 205

42. *Difficulties of those answers which accept the result of negative dialectic*

Credo quia absurdum est is an anti-philosophical slogan; the sceptic is honest, but dissatisfied; the rhetorician's position does not suit those who are confused themselves; behind the ontological nihilist lurks a rhetorician; to call an apperance something which we have held to be real without explaning how the apperance had arised, could satisfy us neither in principle, nor, particulary, in those instances – such as the presently considered – where the postulate of unreachable "true" reality was introduced in view of our inability to find an immanent solutions for our difficultes 208

B. ATOMISM

43. *The Eleatics and the early atomism*

The answer to the Eleatics given by Leucippus and Democritus was the first in a series of answers which do not question the general hypothesis concerning the existence of plurality and motion, but dispute instead some of the special premisses necessary for Zeno's conclusion 212

44. *The predication paradox and the acceptance of qualitative differences*

Things which are identical with reference to one property may differ with reference to another, thus being both identical and different: the emptiness is "not-being" *qua* "something other" – as something which differs from the fullness – but it does exist nonetheless 213

45. *A proof against infinite divisibility*

In his arguments against plurality, Zeno had not argued that atoms did not exist, rather he excluded their existence *a priori* on the assumption that division was allowed; the atomists used Zeno's arguments as an apagogic proof of atoms' existence, thus safeguarding the possibility of the existence of plurality 215

46. *In what sense and why are atoms indivisible?*

Atoms must exist for reasons supplied by Zeno's dialectic (§ 45), but they are indivisible by virtue of their property of impenetrability, i.e. they are physically indivisible; minuteness of atoms is not the reason for their indivisibility, but it explains why we do not encounter them in our experience; from the standpoint of reality, the geometrical point of view is subordinate to the physical point of view and therefore it might be claimed that, being physically indivisible, the atoms are the entites of the smallest possible size 216

47. *Difficulites of physical atomism*

The fundamental problem of physical atomism does not lie in the definitional *fiat* which sets the limits to division, but rather in the fact that the eptiness is not quantized, and that therefore there is no answer to either the *staccato* or to the *legato* version of the *Achilles* 223

48. *The early debate on the basis of geometry and the origin of geometric atomism*

By taking points, lines, surfaces and bodies to be null-dimensional, one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional, respecively, Plato might have been only arguing that the continuity of mathematical genera is such that the fact that higher genera are contained within the lower ones cannot be explained by assuming that the former constitute the latter: all the genera are something *sui generis*; however, it might be possible that Plato has, at least for a while, in order to obtain a continuity of mathematical genera, argued for indivisible minimal lines and surfaces, respectively, although it might be equally possible that Xenocrates was the first to do so 225

49. *Quantization of space and time*

In defiance of the Peripatetics' critique of the teaching on indivisible lines, Epicurus has introduced the temporal and the spatial *minima*, completing thus what the early atomists had started by quantizing the fullness; in this way, certain difficulties in the field of kinematic aporetics are being solved as well 231

50. *Difficulties of geometric atomism*

In addition to various other difficulties of geometric atomism, a *reductio ad absurdum* of the statement about the existence of Epicurean *topons* and *chronons* is possible through the so-called French Interpretation of *the Stadium* 237

51. *Kinematic atomism*

Kinematic atomism is a teaching which accepts the necessity of existence of indivisible, or at least actually not divided, temporal intervals, without introducing by analogy spatial, or at least physical, atoms 241

52. *Difficultes of kinematic atomism*

The main diffculty with kinematic atomism which concerns indivisible temoral intervals is that the statement about the existence of *chronons* may be reduced to absurdity in spite of the nonacceptance of the existence of *topons*; a version of kinematic atomism which would assert the necessity of the existence of a shortest actually not divided phase of a given change, regardless of the fact that the time of such a phase does not necessarily have to be indivisible, would not, however, exclude the possibility of constructing a *staccato* version of the *Achilles* 243

C. FINITISM

53. *The negative and the positive definitions of finitism*

Negatively defined, the finitists are all those who are anti-infinitists, i.e. all those who claim that it cannot be said meaningfully, or at least truthfully, that a thing which is limited, such as a stone, a track, or a temporal interval, consistts of infinitely many parts or phases; the positive finitist thesis, i.e. finitism in a stricter sense, will be treated in § 57 246

54. *Logico-linguistic arguments against infinitism*

An analysis of the concepts of the parts and the whole demonstrates that the infinitist thesis is analytically false 247

55. *Logico-mathematical arguments against static infinitism*

The infinitist may formulare his thesis by introducing new words and redefining the relevant concepts; it becomes apparent, however, that a *reductio ad absurdum* of the thesis of static infinitism is possible at least upon standard mathematical assumptions 249

56. *Logico-mathematical arguments against dynamic infinitism*

A survay of the contemporaty debates between finitists and anti-infinitists, which rely on the examples of machines from § 23, demonstrates that on standard mathematical assumptions it is possible to reduce to absurdity the thesis of dynamic infinitism as well; it is impossible to perform an infinite number of succesive discrete acts 255

57. *The positive finitist thesis*

The contemporary finitists use Frege's and Geach's analysis of identity statements in order to show that it is only the use of a count noun, by virtue of which a part is part of a species, which makes it possible to count parts; with reference to any part so defined, a limited object consists of a finite number of parts 265

58. *The finitist solution of kinematic aporias*

In the same way that Achilles' track contains a finite number of pebbles, clods of earth or blades of grass, it may be claimed that Achilles will reach the tortoise in a finite number of steps and so, in general, everything that Achilles will do is finite with reference to number; regardless of the way in which we identify temporal intervals, the arrow in those intervals does indeed occupy a space larger than itself, and the sense in which we speak of occupying space in a moment is derivative 268

59. *Difficulties of finitism*

Sections counted by Zeus in the *legato* version of *the Achilles* are defined well enough with respect to the finitist requirements concerning identification, while at the same time the finitists cannot answer the question concerning the number of sections so counted by the time when Achilles and Zeus have reached the goal; in itself, the proof of the impossibility of performing an infinite number of acts is of no help in answering the question 273

D. RADICAL EMPIRICISM

60. *Experience and the requirement of infinite divisibility*

The differently coloured spaces through which Achilles was running in § 19 shrink to an order of magnitudes which are insignificant to us and our physics; in the *staccato* version (§ 20) Achilles was required to take ever shorter "rests", after having had "covered" the track through each of those spaces, while in the *legato* version (§ 21) Zeus' threshold of perception was required to drop unlimitedly; from the standpoint of the constructor who is supposed to design them in reality and not in imagination only, the machines intended to perform super-tasks (§ 23) would in principle possess an inconceivably high speed of operation; is it true that the difficulties implied in the requirement of infinite divisibility are "merely technical"? 276

61. *Subjective idealism*

Berkeley, the most radical of all radical empirisists, has solved the problems concerning infinite divisibility by establishing the existence of finitely large perceptive *minima* while holding, at the same time, the principle *esse est percipii*: the object, the track, and the race lose their identities if the division is allowed to proceed beyond a certain point; it is contemporary psychology of perception which saves Barkeley's standpoint from being reduced to absurdity through a French Version of *the Stadium* 278

62. *Difficulties with subjective-idealist solution*

Berkeley's solution fails to satisfy us for reasons similar to that of Bradley's (§ 42): we get round the difficulties by simply denying the identity, i.e. by denying reality, of that which the difficulties had been initally tied to, the existence of which we had previously accepted, and which we continue to speak of successfully in other instances 283

63. *The appeal to ordinary language and scientific empiricism*

It may be that on the basis of infinite divisibility of space we are not jusified in concluding that bodies too are infinitely divisible, since the divisibility of space rests upon a certain mathematical schematism; both the ordinary and the scientific languages are subject to a "limitation of scale upon the applicability of words", so that, for example, it is not justifiable to speak of "thousandth inch jump" or of "multicoloured space of a billionth part of a pin": our requirement in formulating aporias oversteps the bounderies of an epirically justified use of words 286

64. *Difficulties with appealing to ordinary language and scientific empiricism*

Through a radical empiricist maneouvre, the possibility of infinite division is not refuted but only called into question, since the limitations of the scale upon the applicability of certain terms do not prove that limitations must always exist: at best, the radical empiricist is speaking of something which is probable and which would, as such, in fact get round our difficulties; the question we are dealing with concerns something which is, perhaps, improbable but which, as possible, demands a different answer 294

E. INDEFINITISM

65. *The unlimited number of the possible and the limited number of the real parts of a whole*

Indefinitism is a general term denoting any view which states that Zenonean difficulties should be solved by arguing that although there exists no largest possible number of parts or phases of a whole, their number must nevertheless be finite 299

66. *Primary meanings, model of existence, and aporias of the whole and its parts*

Although Aristotle considered referens to πολλαχῶς λεγόμενα to be a necessary precondition for solving Eleatic aporias, he did not considered it sufficient for their solution; the existence, oneness, and multitude can indeed be spoken of in multiple ways, but one of the meanings is primary; as to the primary meanings, when dealing with homogeneous or heterogeneous, or with continuosly or contiguously touching things, we must alternately favour the oneness or the multitude 300

67. *Indeterminateness and the potential infinity*

A thing which is one according to its substantiallty may in that sense, and at the same time, be only potentially multiple; by differentiating what was later to be called infinity in the syncategorematic sense from what was to be called infinity in the categorematic sense, Aristotle argued that no division would make it possible to obtain infinitely many instead of one substance: infinity is potential not only accidentally but necessarily as well 309

68. *Modes of existence of geometrical objects*

Geometrical objects exist only as the limits of geometrical objects of higher dimensions, or, in the final analysis, of the bodies; in definitions of bodies as substances the shape of a body may be referred to, or at least implied, because bodies are limited, but such a definitional implication does not amount to an ontological priority of the shape – on the contrary, physical bodies possess ontological priority in relation to mathematical objects 314

69. *The first indefinitist solution of kinematic aporias*

The motion of bodies may consist of parts or phases inasmuch as a track may consist of parts while the motion itself may be discontinuous or non-uniform; the number of parts of phases, however, must be finite, which is the basis for a solution *of the Dichotomy* and the *Achilles*; the fact that a body neither moves nor rests in any given moment as a limit, while at any given interval of time its position is not strictly defined with reference to the bodies in relation to which it is moving, represents the basis for a solution of *the Arrow* and *the Stadium* 317

70. *The impossibility of the infinity of real parts and the infinity of possible parts*

Importance of Kants's indefinitism lies in the fact that, unlike Aristotle, he is not an anti-infinitist when dealing with the posible parts of a body; it is not only possible to divide a body into more parts than there are, but the number of possible parts (spaces) *encountered* through division is also infinite 322

71. *Kinematic monism*

Bergson's kinematic monsim is to Kant's indefinitism as kinematic atomism is to physical or geometrical atomism; while spaces may consist of infinitely many parts, as proved by divisions which, in principle, do not change them, the unbroken motion is one in the sense that by its very nature it excludes divisions, since it would cease to be itself if a division took piace 327

72. *Operationalization of the indefinitist thesis*

From the fact that, by having performed a task, we had also performed an infinite number o possible tasks, it does not follow that we can perform that task by performing infinitely many tasks first; according to Hinton and Martin, the *staccato* and the *legato* versions (§§ 20, 21) would be essentially different from what happens when Achilles is running: it is impossible to reach the goal in the manner required by those versions, while it is a simple task for Achilles to catch up with the fortoise 330

73. *The status of infinity and the restricted applicability of the principle of the excluded middle in the intuitionist mathematics*

If, for reasons quoted by indefinitists, mathematical infinity is only potential and is to be treated in a dynamic way only, then – given the non-finite domains – the principle of the excluded middle should also be restricted to those cases in which the law of an infinitely proceeding sequence allows it 333

74. *Intuitionist definition of the real number*

The principle of the excluded middle being restricted, it is possible that there are essentially insoluble mathematical problems, so that – through an apt selection of the so-called flying property – sequences may be constructed which would be deemed generators of real numbers although they no logner define a unique number; it is necessary to distinguish equality from coincidence, and lying apart from unequality, as well as to scrutinize defiitions of properties such as discreteness, denseness separability in itself, dependence, and compactness, which apply to the set of real numbers in classical mathematics 341

75. *Conception of the continuum in the intuitionist mathematics*

An entire series of similarities between indefinitist theories in philosophy, on the one hand, and the philosophical foundations of a developed intuitionist mathematics and many of its results, on the other hand, is evident in the theory of the continuum which, intuitively, is a medium for free generation of the elements of which it is, formally, a defining property; in the intuitioniste context, the order of the elements is only virtual 348

76. *Difficulties of indefinitism*

In spite of the sophistication and elaborateness of indefinitist ideas, we did not get an answer to the question concerning the number of Achilles' rests in the *staccato* version and of the counted sections of the *legato* version, while, at the same time, we have not been shown what, if anything, is wrong with the question; in addition, Aristotle's proof that a finite track must be covered in a fiite time by a continuous motion is fallacious, as shown by the case of the runner who has slowed down (§ 22); finally, there are certain difficulties in the field of non-kinematic aporetics which are left unsolved by the indefinitists: through the correspondence of an aptly chosen possible natural law to a mathematical law of infinitely proceeding sequence, an actually infinite set of points or intervals is brought into play 359

F. INFINITISM

77. *The two variants of infinitism*

Infinitism is a general term for all those views which allow for the actual infinite in a categorematic sence, either in all contested cases or in some of them; various infinitist theses shall be grouped here and treated separately, according to whether or not they contain the concept of some sort of infinitesimals 363

I. Infinitism with infinitesimals

78. *The anti-infinitist nature of Greek mathematics and the need for infinitesimals*
The post-Platonic geometry operated with a purely geometrical theory of proportion, which solved the difficulties ecountered by the old arithmetized geometry after the discovery of incomensurability; the Greek method, which was much later called the method of exhaustion and which relied on the purely geometrical theory of proportion, was a consistently finitst one, while its fundamental ontological assumptions were indefinitist; in order to speak literally of an area being exhausted by the inscribed figures which unlimitedly aproximate to it as a limit, the infinitesimals had to be brought into play 364

79. *The Arhimedean axiom and the heuristic use of infinitesimals*
The important thing in Greek mathematics was that any two magnitudes were comparable inasmuch as the smaller could reach or surpass the larger through the use of a finite multiplier; although this statement was used as an axiom (the Archimedean axiom), Archimedes himself used to treat surfaces as if they had been composed of lines – at least for heuristic purposes if not for those of a strict proof – and later on, the Christian mathematicians, being more prone to endorse the concept of infinity, were to conclude that those lines represented infinitesimal elements 371

80. *Infinitesimals as a constitutive part of proofs*
With the passage of time, the infinitesimals became irreplacable in certain proofs 375

81. *Geometric infinitesimals*
Certain geometrical entities, whose magnitude is such that it cannot be compared to the usaual limited geometrical magnitudes in a finite number of steps, may, as "infinitely small", assume the role of the traditional points, lines and surfaces, remaining at the same time the constituents of entities of higher dimensions and, in addition, making it possible to bridge the "grap" between the straight and the curved; however, the teaching concerning geometric infinitesimals is subject to an immanent critique from the standpoint of the infinitesimal method itself, while in order to bridge "successfully" the "gap" – if the "exhaustion" is taken literally – it is necessary to make the socalled Bernoulli's mistake 387

82. *Language games and arithmetic infinitesimals*
If the negative, irrational and imaginary numbers were to cease being *numeri falsi, numeri surdi* and *numeri ficti*, it would be necessary to start playing new nalguage games, different from those which are being played with natural numbers; the same applies to Valis' number ∞ and its corresponding infinitesimal $1/\infty$; a coherent theory of infinite natural numbers and infinitesimals was to be developed only in the contemporary non-standard analysis (§ 86) 393

83. *Kinematic infinitesimals*
The relationship of the theory of kinematic infinitesimals to the theory of geometric infinitesimals is the same as the relationship of kinematic atomism to geometric atomism; avoiding the kinematic infinitesimals only, Newton in fact began to use an alternative theory, which was later to lead to the founding of infinitesimal calculus upon the concept of limiting value (§ 91) 399

84. *The static and the dynamic views of infinitesimals*
Static infinitesimals represent all those fixed magnitudes – arithmetic, geometric, temporal or kinematic – which are, by definition, smaller than any usual finite magnitudes; dynamic infinitesimals represent any variable magnitudes which, by decreasing, come to be smaller than any fixed finite magnitude; the dynamic view of the infinitesimals tends to supplant infinitism, since the infinity which appears in this context may be interpreted in an indefinitist way 410

85. *Static infinitesimals as useful fictions*

Realizing the difficulties, implied in the static view of infinitesimals, Leibniz eventually abandoned philosophical infinitism, but nonetheless retained static infinitesimals in the calculus as "useful fictions" 416

86. *Static infinitesimals in the comtemporary non-standard mathematical analysis*

The tools of a developed matehematical logic – espacially the theory of types, the model theory and the compactness theorem – have enabled Abraham Robinson to enlarge easily the model *N* of standard arithmetic to a structure **N* which contains the infinite natural numbers too, as well as to enlarge the field *R* of standard real numbers to a field **R* which contains infinitesimals too, and in which Archimedes' axiom, although formally retained, is negated with respect to its intended meaning; the infinitesimals from **R* possess all the properties needed by Leibniz in his initial foundation of the calculus, while the monads may be defined as sets of real numbers-points which are infinitely close to a given number-point 419

87. *Theories of infinitesimals and Zeno's arguments against plurality*

In the non-standard analysis, Zeno's axiom had a fate which was, in a certain sense, oposite to that of the Archimedes axiom: although formally negated, it was preserved in a relevant sense because standard points became "separated" by the non-standard ones, on the one hand, while on the other, the non-standard points are not independent in the manner of the standard ones, and therefore cannot participate in constituting the entities of higher dimensions as "finished elements"; the needs of the infinitesimal method itself have led to a realization that infinitesimals must not be indivisible and to that extent they have not been treated as κυρίως ἕν but, on the other hand, in the non-standard analysis the monad as a class of equivalence is a well enough defined κυρίως ἕν; the hardest problems are connected with Zeno's argument against plurality which demonstrates the limited object to be non-one, since the old formula, according to which the finite distances were supposed to consist of infinitely many infinitely smaller distances, could at best be saved as a "compensating fiction" 432

88. *Theories of infinitesimals and kinematic aporias*

Theories of infinitesimals are impotent when faced with the main kinematic aporia, since the operationalized problem faced, for example, by Zeus in the *legato* version, cannot be shifted to a lower level, since there exists no largest finite subscripts number in a sequence of sections with finite subscripts 439

89. *Main difficulties of the solution based on infinitesimals*

When reviewing all the main difficulties encountered by the theory of infinitesimals and acknowledging that no other theory discussed so for has demonstrated a similar degree of "selfcriticism", we come to realize that mathematicians are able to come to grips successfully with many difficulties encountered in their practice, even if that practice has no sound philosophical foundation 441

II. Infinitism without infinitesimals

90. *Two theses of infinitism without infinitesimals*

The topological infinitist thesis represents an open negation of Zeno's axiom, while the metric infinitist thesis negates Zeno's conclusion that a finite distance can in no sense be constituted by an infinite number of smaller ones, bearing in mind that, at the same time, in infinitism without infinitesimals none of subdistances is infinitely small 444

91. *Indefinitist definitions of the derivative and the integral, and the difficulties with continuity, differentiability, and convergence*

Caushy's definition of the derivative is an indefinitist one, containing dynamically conceived infinitesimals and a dynamic concept of "tending", which today may be avoided by the infinitists through a translation into a "static" language by the so-called ε,δ-technique; what may point in favour of an infinitist redefinition of the fundamental concepts of mathematical analysis are the difficulties with an indefinitist interpretation of the fact that there are functions discontinued at one point as well as non-differentiale functions, defined by Weierstrass, as well as the problems connected to the conditions which would, in certain cases, justify statements on the existence or non-existence of a unique limit of a Cauchy's sequence 446

92. *Infinitist definition of irrational numbers, Dedekind's cut, and the Dedekind-Cantor axiom*

In opoosition to the old geometrical solution of the problem of incomensurability, Weierstrass has defined the irrational number in a purely arithmetical fashion, as an infinitely complex number; in Dedekind's definition the irrational number is a unique delimiter of two actually infinite sets of numbers; in the axiom which bears Dedekind's and Cantor's names, the elements of the set of all rational real and irrational, i.e. transcendent real numbers, on the one hand, and all points of a line, on the other, are corresponded biunivocally 454

93. *Space as a set of points*

On the basis of certain results, discussed under this heading, and by negating Zeno's axiom, Cantor has defined not only the linear continuum, but the entire multidimensional space as well, as a perfect set, dense throughout, which consists of null-dimensional entities, and whose cardinal number is $2^{\aleph_0}$ 461

94. *Cantor's continuum as a set of points and Zeno's axiom*

The topological examination of the relationship between the point and the line, the line and the surface, and the surface and the body, which rests upon Cantor's set theory, concerns only the mutual relationship of those entities with a view to the possibility of delimiting the parts; a topologically defined concept of dimension is independent from the concept of shape, while the issue of preservation of the shape is irrelevant in topological mappings 469

95. *The topological infinitist thesis and an indefinitist reinterpretation of Cantor's definition of real numbers*

Due to the fact that in Cantor's definition of real numbers rational numbers belonging to sequences which define real numbers are not yet real numbers themselves, it becomes possible to reinterpret Cantor's definition in an indefinitist way and use that reinterpretation as a neutral starting point in an analysis of the deeper antagonisms between the infinitists and the indefinitists, and respectively, between the classicists and intuitionists in mathematics 472

96. *Difficulties with the topological infinitist thesis and the results that may be reinterpreted indefinitistically*

When studying certian difficulties with the topological infinitist thesis, we come to realize that the conflict between the indefinitists and infinitists has no significant consequences up to a certain point, namely to the point to which it is possible to reinterpret the infinitist results in an indefinitist way 481

97. *Difficulties with the topological infinitist thesis and the untranslatable infinitist results*

There are infinitist mathematical results which cannot be reinterpreted indefinitistically; a typical example would be the Cantor's ternary set – discontinuum 486

98. *The metric infinitist thesis*

The metric infinitist thesis claims that a finite non-degenerated interval may consist of infinitely many finite non-degenerated intervals which do not overlap; otherwise, since an interval which is finite with reference to one metric rule may become infinite if another metric rule is selected, the space will be metrically amorphous 489

99. *Difficulties with the metric infinitist thesis*

Taken literally, the metric infinitist thesis becomes subject to a *reduction ad absurdum*, which we have already encountered in § 55 492

100. *The kinematic infinitist thesis*

When opposed to a solely dynamic concept of infinity, the kinematic infinitist thesis is a thesis of kinematic infinitism: the infinity may be overcome step-by-step 495

101. *Difficulties with the kinematic infinitist thesis*

The difficulties with the kinematic infinitist thesis have been discussed at length in § 56, and it is here that we shall only compare certain kinematic conditions which, according to Grünbaum, make it impossible to perform the Thompson lamp's supertask, with similar conditions which allegedly make it possible to perform the super-tasks of two other machines, Black's "Beta" and "Gama" (§ 23); in this way we shall bring out even more convincingly the strangeness of external conditions under which the infinitists apply the definition of an allegedly finished infinite process as a series of discrete acts without a last member 498

G. THE POSITIVE DIALECTIC

102. *Restricted application of the principle of consistency*

A closer examination of Hegel's concept of *Aufhebung* reveals a specific restriction imposed on the application of the principle of consistency: while the compactness theorem allow us to conclude, on the basis of consistency of all the finite subsets of all the sentences in a system, that the entire system, even if infinite, is consistent, Hegel, on the contrary, has sought to remove the contradictions in any one part of the sysem by appealing to the consistency of the system itself, and has argued, *a fortiori*, that any part of the system, if isolated, must necessarily contain inconsistencies 500

103. *The positive-dialectical answer to the arguments against plurality and to the kinematic aporias*

The general restriction of the application of the principle of consistency requires that the sequence of characteristics which enables Zeno to perform the *reductio ad absurdum* is finite; so Hegel's solution is shown to be the positive-finitist in character (§ 58) 506

104. *Difficulites with the positive-dialectical solution*

It is shown that with the help of a simple rule each of Hegel's transcending solutions of contradictions may be reinterpreted in an immanentist way, while preserving the principle of consistency in its full generality; in this way, we can see clearly that Hegel's solution does not give any answer at all to the question concerning the number of sections counted by Zeus upon reaching the goal 509

THE OUTCOME

105. *Is everyone defeated?*

In a sense, all the combatants in the Gigantomachy are defeated – inasmuch as we have discovered a weak point in each of the answers to at least one Zenonean aporia 515

106. *A wholly new strategy: incotenability of the premisses of the contested conclusion*

Having learned on the experience of Gigantomachy and having accepted a possibility that the premisses of unacceptable conclusions of *staccato* and *legato* versions of *the Achilles* (§§ 20, 21) might be true, we shall now adopt a wholly new strategy: if each of the premisses is indisputable as a possible contingently true hypothesis, it does not follow that the premisses of the contested conclusions, taken together, may be true 518

107. The incotenability of propositions in the logical systems with relevant implication and intensional conjuction
If we were to express formally our solution of *staccato* and *legato* versions of *the Achilles*, we would have to resort to the logical systems with relevant implication and intensional conjuction, since the relevant implication is irreducible to either material or strict implication, while it is only in the systems with relevant implication that it is possible to say that the addition of a new hypothesis (that Achilles or both Achilles and Zeus had reached the goal) prevents conclusions which would follow from the preceding hypotheses, inasmuch as the new hypothesis may relevantly contradict preceding ones, being incotenable with them 521

108. Solution of the main difficulty and a new look at Gigantomachy
If we accept that premisses of the contested conclusions are incotenable, we may be able to see both the source of the difficulties with the attempts analysed in *Gigantomachy*, and certain aspect of their possible plausibility – all this, of course, under certain conditions and with certain specifications and reformulations 524

THE CONSEQUENCES

109. The solutions of staccato and legato versions of the Achilles as a model for solutions of other versions
If Achilles had reached the goal by running in a perfectly normal way, that means that the analogy betweed the mode of his movement and the Zeus' counting of sections of the track which decrease following the law of a geometric progression must have been violated; this is the basis for solving problems relating to machines intended to perform super-tasks (§ 23); the difference between the runner from § 22 who was slowing down and Achilles does not lie in truth or falsity of the hypotheses, but in their modal status; the runner from § 22 who was speeding up unilimitedly is in the same situation as Achilles who is chasing the tortoise *staccato*, considering transcendence of the moment that is supposed to be the moment of reaching the goal 535

110. Solution of the Dichotomy
A fly flying back and forth between Achilles and the tortoise would have to had ceased behaving in this way if Achilles had reached the tortoise and then would have to had kept moving for a while either parallel to Achilles or parallel to the tortoise, if the tortoise had been overtaken by Achilles; since we always, necessarily, have at our disposal at least some "free" time, unidivided by any measuring – it is possible to move 539

111. The solutions of the Achilles and the Dichotomy as a model for solutions of metric aporias
The belief that a limited area may consist of infinitely many heterogeneous non-infinitesimal parts may be reduced to absurdity, although mathematicians may think otherwise, led astray by the specific sxhematism of their mode of proceeding 542

112. The solution of the metric aporias as a basis for determining the number of points in a space
If points are conceived as limits of heterogeneous parts of a line, or of a surface, or, in the final analysis, of a body, then it can exist only finitely many points in a limited space, while the question of how many points there are exactly in a given space would be an empirical question; in a limited space there is not enough room for an infinite number of points, even though geometrical ponts are points without magnitude 552

113. The solution of the topological aporias and the difference between the physical and the classical mathematical spaces
By taking the step *ab posse ad esse*, mathematicians treat all possible points as real and thereby the mathematical space as a field of possible divisions; however, it is not only

that mathematical space is not real, but it is also not possible, not even in the sense of a potentiality of simultaneous actualization of an infinite number of points 554

114. Solution of the Arrow on the basis of the solution of topological aporias

Since it is impossible to actualize an infinite number of moments in a limited time, to move primarily means to occupy a space larger than oneself, while it is only in a derived, mathematical sense that to move continuously is to be in different positions at different moments 562

115. The solution of the Arrow and Heisenberg's indeterminacy relations

The examples from quantum mechanics used to interpret Heisenberg's indeterminacy relations also illustrate the essential indeterminateness of the position of a moving body 566

116. Indeterminateness of the position of a moving body and Bohr's complementarity principle

In view of the so-called Copenhagen interpretation of quantum mechanics, the wave-particle dualism as well as all other forms of complementariy may be properly understood on the basis of the above solution of *the Arrow*: the choice of an experimental arrangement leads to a manifestation of incomatible but complementary aspects of phenomena because, physically, the motion is irreducible to a set of different states of the body: under wholistic circumstances, i.e. the circumstances under which it is not possible to differentiate sharply between the behaviour of atomic objects and their interaction with the measuring instrument used to define conditions under which the phenomena appear, an actualization of different states through the creation of different configuration of space *ipso facto* individuates the process in a certain way, excluding thereby the possibility of an appearance of the complementary aspects 579

117. The Einstein-Podolsky-Rosen "paradox"

Although the Einstein-Podolsky-Rosen argument against the allegedly necessary incompletness of the "ortodox" system of quantum mechanics is not valid – because the supposedly paradoxical quantum mechanical situation described in the argument which is supposed to be paradoxical is not paradoxical – it nonetheless enables us to imagine a situation in which the position of a particle would be indirectly localized at several places without its impulse being changed; however, even then it could still hold that no possible position between any two real positions could be estabilished through a direct experiment, inasmuch as realization of the experiment itself would mean the realization of a possibility incopatible with the subesequent state of the system in relation to which the possible position under discussion has been calculated 598

118. The Solution of the Stadium on the basis of the difference between mathematical and physical spaces and mathematical and physical times

If motion of a body is motion in the physical space and if it consists in changing the relation of the body to other physical bodies, then it is not strange that the length of the track covered, as a measure of such a shange, does not have to be the same when the relations to any two bodies have been changed simultaneously, regardless of the fact that measuring unit is fixed; the same applies to the length of time during which the change has been taking place; it is not only that the speed of motion is non-univocal because of the relativity of motion, but the same applies to lengths of spaces and times 610

119. The solution of the Stadium and the Galileian transformations

In classical physics, the point of *the Stadium* has been underestimeted, not only because kinematic results obtained in any one of the so-called Galileian systems are easily translatable within another system, but also because the form of mechanical laws in such systems remains invariant 613

120. *The solution of the Stadium and Lorentz's transformations*

The Galileian-Newtonean mechanics was unable to deal convincingly with the non-inert behaviour of light, but even after Lorentz's non-Galileian transformations had been accepted as an adequate mechanical means for inter-systemic conversion of the lengths of intervals, the point of *the Stadium* has not been used for a kinematic relativization of spatial and temporal intervals, but – through a special Lorentz-Fitzgerald hypothesis of modifications of length – it has been interpreted instead as absolute ashortening of the object in the direction of motion through aether 620

121. *Space, time, and spacetime*

The point of *the Stadium* has been appreciated, finally, by the Special+Relativist modifications of spatial and temporal intervals: time is not treated as an external parameter any more, but is instead joined to spatial coordinates as a new coordinate, which varies from place to place; in this way, events become the basic elements of the world while time becomes local 622

122. *The "Paradox" of the twins*

It is shown that it follows from the main postulate of the Special Relativity Theory that the direction of motion of any body, and not only of the light propagation, must be the so-called Shakespearean, observer-independent property; a further consequence is that it must turn out at the end of the round-trip described in the so-called Twin Paradox that one of the twins had to move at the speed that was closer to the speed of light than it was the speed of another twin, which is the last and only correct explanation of why he turned out younger: the time-like metric of the twin faster in the absolute sense makes by itself that his time flows more slowly; in the open flat Minkowski spacetime, the existence of a turning point is necessary only in order to make it possible to establish which of the twins had to move at the speed closer to the speed of light, being as such no cause for the difference in aging, as it is wrongly claimed in some well known dynamic and geometric explanations; consequently, in the flat but closed spacetime, the same result can be obtained at the end of the accele-ration-free trip of the twins, during which they did not change their referential systems. 633

123. *Kinematic relativity of shapes*

Under certain kinematic conditions, it is possible to discover the non-univocality of shapes, analogously to the phenomenon of non-univocality of lengths 656

124. *Exact squaring of the circle and determination of the length of π, the problem of rectification of curves, and the disappearance of identity of geometrical objects in change*

It is shown that if we formulare the task of squaring the circle in its original frame, i.e. without any, subsequently introduced, special constraints concerning permissible means, it can be performed as exactly as it is possible to determine exactly the point on the number-axis which corresponds to $\sqrt{2}$, and that is, in principle, perfectly precise; the same applies to the cubing of the sphere and determining the point corresponding to π; however, all this does not mean that a curved geometrical line could ever become squared, since it can be argued that through transformations the identity of geometrical objects under discussion has disappeared 658

125. *The ontological status of geometrical objects and the mathematical definitions of the continuum*

Mathematical disputes should not be decided upon the strength of philosophical arguments only, just as we cannot solve philosophical disputes by appealing to mathematical definitions; from a philosophical point of view, given the primary mode of existence of points, it may be accepted, under the redefined concept of convergence from § 95, that any fixed point on a line may be represented by Cantorean sequences of rational numbers, but it does not fillow therefrom that the line consists of points 662

126. *Unreality of Cantor's discontinuum*

The fact that an infinitist mathematican would not take into account the ontological status of geometrical objects is even more visible in those cases, such as Cantor's discontinuum, in which the non-independent beings, such as points, in keeping with a mathematical mode of proceeding, become independent 664

127. *Unreality of the curves without tangents and of the other remarkable curves*

Curves withous tangents, curves intersecting themselves at each point, curves originating in the movement of a point which succeeds in covering the entire square, as well as other "remarkable curves", are as unreal as Cantor's discontinuum; operatively, the ontological difference between the circle and "remarkable curves" is manifested by the fact that in drawing a circle we would not perform a super-task, which is not a case with drawing other curves in those limited intervals in which they are remarkable 666

128. *The mathematical rules of games and the asymmetry between the statically and the dynamically conceived infinities*

With his alternating and dynamical point of view, and in keeping with his rules of games, the mathematician ontologizes even that which is possible only dynamically and therefore his objects are akin to the "duck-rabbit" drawings familiar from the gestalt-psychology 676

129. *Continuous and discontinuous changes, the statically and the dynamically conceived infinities, and Boschovich's collision aporia*

The fact that there are uniformly accelerated motions does not mean that they unfold by the speed being changed at every moment; by adopting a solution of the collision aporia different from Boschovich's solution, not only do we accept collisions and sudden changes as real, but we also consider sudden changes to be primary, while we talk about continuous changes in a derived sense, the sense of mathematical characterization rather than an ontological definition of certain sui generis events or structures 682

130. *Reality and structure of space and time*

The outcome and the consequences of Gigantomachy not only indicate that space and time in themselves are not structured but they also lend support to the antisupstantivalist view of their reality; however, with the introduction of qualitative differences, the unfilled parts of space, time or spacetime become a *nihil privativum* and *as such* they are not mere *nihil negativum*, which is why only the modal version of the so-called Aristotelian antisupstantivalist principle ought to be accepted 686

131. *Augustine's "paradox"*

The fact that, while expressing ourselves in a Melissean way, we are able to speak of the time before Creation or of spacetime before the Big Bang does not mean that, in accordance with the modal version of the Aristotelian antisupstantivalist principle, they are not subject to Parmenides' ontological principle which we have called the *indiscernibilitas identitatum* 695

132. *Arithmetic, geometry, physics*

The experience gained through our research may enable us to obtain a better view of the relationships between individual sciences or scientific disciplines: the "divorce" of geometry and arithmetic in Greece after the "Golden age" of logistics was at first to geometry's advantage, because the model resisted the rigid and inpoverished arithmetical rules, but later on it also enabled a free development of arithmetic without tying it to the model; the contemporary geometry, arithmetized once again, raises predominantly pilosophical problems, although not because of an alleged crisis of our intuition but rather because of new questions concerning the connections of mathematics with the physical world; modern mathematical physics leads naturally towards infinitism and it was only our encounter with the phenomena of quantum mechanics that has warned us against the hubris implied in our belief that what had not been possible for Zeus was possible indeed 696

133. Aporias, science, philosophy

It is a precious experience to attempt to solve Zeno's aporias – which have a history more diverse and rich than any other problem – it is an experience which, in the end, may help us not only to gain a better understanding of the nature of the activity known as philosophy and of its place among sciences, but also to recover the faith in its power; even if analytical, its statements could be informative, since analytical statements do not necessarily have to be trivial: they may exclude many *prima facie* possibilities; the road to such statements leads via aporias 701