Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Odredjivanje praga kompresije pri transformaciji ortonormiranim talasićima

-magistarski rad-

kandidat: Zlatko Udovičić
mentor: prof. dr. Desanka Radunović

Glava 1

Uvod

Iako je tremin "talasić" (engl. wavelet) prvi put upotrebljen tek osamdesetih godina XX veka, teorija talasića ima mnogo dublje korene. Naime, na samom početku XIX veka, Joseph Fourier je dokazao da se svaka integrabilna, 2π-periodična funkcija može predstaviti kao suma trigonometrijskog reda

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Stotinak godina kasnije, 1909. godine, u svojoj doktorskoj disertaciji Alfred Haar je posmatrao problem razvoja integrabilnih funkcija po nekom drugom ortonormiranom sistemu funkcija. Kao osnovnu funkciju uzeo je funkciju $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisanu sa:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i dokazao da se svaka integrabilna funkcija može sa proizvoljnom tačnošću aproksimirati linearnom kombinacijom funkcija $\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j} \cdot -k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Polazeći od činjenice da se svaka integrabilna funkcija može sa proizvoljnom tačnošću aproksimirati deo po deo konstantnom (na mreži gustine 2^{-n}, za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$) funkcijom, Haar je svaku takvu (deo po deo konstantnu) funkciju razvio po sistemu funkcija $\psi_{j,k}(\cdot)$. Kroz analizu dokaza te činjenice mogu se na jednostavan način istaći osnovne ideje multirezolucijske analize, pa se zbog toga u daljem tekstu daje skica ovog dokaza.

Dakle, neka je na mreži gustine $2^{-J}, J \in \mathbb{Z}$, svojim vrednostima f_l^{-J}[1], $l \in \mathbb{Z}$, zadana deo po deo konstantna funkcija $f^{-J}(\cdot)$. Funkcija $f^{-J}(\cdot)$ aproksimira se funkcijom $f^{-J+1}(\cdot)$, deo po deo konstantnom na intervalima $[\frac{l}{2^{J-1}}, \frac{l+1}{2^{J-1}}), l \in \mathbb{Z}$, definisanom sa $f_l^{-J+1} = \dfrac{1}{2}(f_{2l}^{-J} + f_{2l+1}^{-J})$, (funkcija $f^{-J}(\cdot)$

[1] Jednostavnosti radi, za $x \in [\frac{l}{2^j}, \frac{l+1}{2^j}), l, j \in \mathbb{Z}$, umesto oznake $f^{-j}(x)$ koristiće se oznaka f_l^{-j}.

se na intervalu $[\frac{l}{2^{J-1}}, \frac{l+1}{2^{J-1}})$ aproksimira svojom srednjom vrednošću na tom intervalu), dok je greška aproksimacije jednaka:

$$\begin{aligned}
\delta_{2l}^{-J+1} &= f_{2l}^{-J} - f_l^{-J+1} = \frac{1}{2}(f_{2l}^{-J} - f_{2l+1}^{-J}) \\
\delta_{2l+1}^{-J+1} &= f_{2l+1}^{-J} - f_l^{-J+1} = \frac{1}{2}(f_{2l+1}^{-J} - f_{2l}^{-J}) = -\delta_{2l}^{-J+1}
\end{aligned}$$

Odavde se zaključuje da je

$$f^{-J}(x) = f^{-J+1}(x) + \delta^{-J+1}(x),$$

pri čemu je

$$\delta^{-J+1}(x) = 2^{\frac{-J+1}{2}} \sum_l \delta_{2l}^{-J+1} \psi_{-J+1,l}(x).$$

Navedeni deo dokaza sadrži osnovnu ideju multirezolucije. Naime, deo po deo konstantna funkcija zadana svojim vrednostima na mreži odredjene gustine (nivo sa finijom rezolucijom) aproksimira se sa deo po deo konstantnom funkcijom na mreži sa dvostruko manjom gustinom (nivo sa grubljom rezolucijom), dok se "izgubljeni detalji" izražavaju kao linearna kombinacija baznih funkcija. Dalje se opisani postupak primenjuje na funkciju f^{-J+1}, pa na funkciju f^{-J+2}, ...

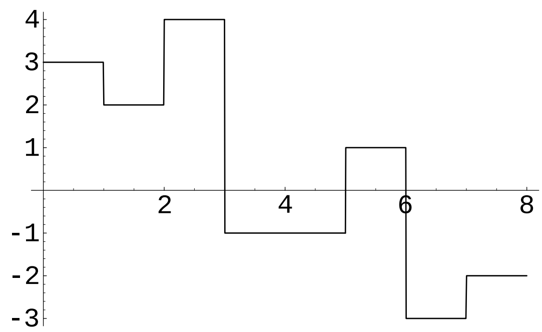
Dakle,

$$\begin{aligned}
f^{-J}(x) &= f^{-J+2}(x) + \sum_{k=1}^{2} \sum_l 2^{\frac{-J+k}{2}} \psi_{-J+k,l}(x) \delta_{2l}^{-J+k} = \\
&= \ldots = \sum_k \sum_l 2^{\frac{-J+k}{2}} \psi_{-J+k,l}(x) \delta_{2l}^{-J+k}.
\end{aligned}$$

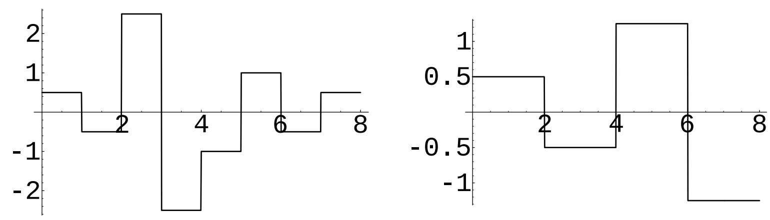
Dalje sledi primer realizacije opisanog algoritma za deo po deo konstantnu funkciju sa vrednostima $(3, 2, 4, -1, -1, 1, -3, -2)$. Naravno, u praktičnoj realizaciji, funkcija zadana svojim vrednostima u prostoru sa najfinijom rezolucijom (označenom na slici sa v_0) se izražava kao zbir aproksimacije u prostoru sa najgrubljom rezolucijom (na slici v_3) i detalja u prostorima na svim nivoima rezolucije (na slici w_3, w_2, w_1).

Na sledeći veliki korak u razvoju teorije talasića čekalo se oko osamdeset godina. Krajem 80-ih godina XX veka, Ingrid Daubechies je dala generalizaciju Haar-ove teze. Daubechies je uspela da za svako $r \in \mathbb{Z}$ konstruiše ortonormiranu bazu prostora $L_2(\mathbb{R})$ (funkcije $\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{-j/2}\psi_r(2^{-j}\cdot - k), j, k \in \mathbb{Z}$) sa osnovnom funkcijom $\psi_r(\cdot)$ koja ima sledeće osobine:

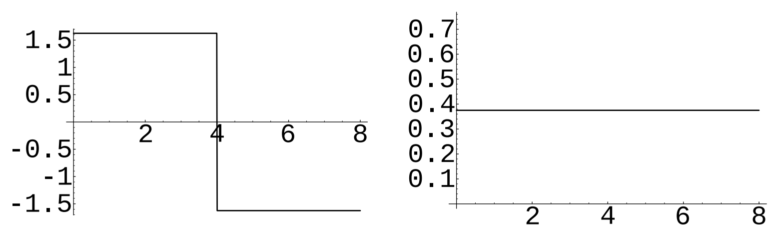
1. kompaktan nosač (interval $[0, 2r-1]$),
2. $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)dx = \ldots = \int_{\mathbb{R}} x^{r-1}\psi(x)dx = 0$ i
3. približno $\dfrac{r}{5}$ neprekidnih izvoda.



Prostor v_0



Prostori w_1 i w_2



Prostori w_3 i v_3

Navedene osobine osnovne funkcije imaju posledice koje su izuzetno značajne u teoriji kompresije podataka. Kao i do sada, najlakše ih je prezentovati na primeru Haar-ovih talasića. Naime, ako su promene funkcije koja se aproksimira male (funkcija ima nisku frekvenciju), onda će koeficijenti aproksimacije u prostoru u kojem se "čuvaju detalji" biti zanemarljivo mali (jer su jednaki razlici susednih vrednosti funkcije), pa se mogu zameniti nulama. Naravno, odgovarajuća linearna kombinacija više neće biti jednaka zadanoj funkciji.

Pomenutu tehniku razvili su Johnstone i Donoho. Koristili su je npr. prilikom izbora optimalne baze za nelinearnu aproksimaciju talasićima, kao i prilikom "čišćenja" zadanog signala od šuma. Više detalja o njihovom radu može se naći npr. u [5].

Osim toga, navedene osobine opravdavaju termin "talasić". Njihova oscilatorna priroda (bazne funkcije su translacije odredjene funkcije) nameće termin talas, dok je deminutiv upotrebljen zbog ograničenosti njihovog domena (kompaktan nosač).

U ovom radu upravo je posmatrana razlika izmedju zadane funkcije i linearne kombinacije koja nastaje kada se svi koeficijenti aproksimacije koji su po apsolutnoj vrednosti manji od zadanog pozitivnog broja (tzv. praga kompresije) zamene nulama (u daljem tekstu nova funkcija). Na osnovu zadane dozvoljene relativne greške rekonstrukcije (vrednosti deo po deo konstantne funkcije su posmatrane kao vektor odgovarajuće dimenzije) odredjen je prag kompresije na dva načina.

Prva vrednost praga je odredjena korištenjem najgrubljih procena. Nedostatak ovog načina je taj što je uvek realizovana relativna greška od pet, pa čak do trideset puta veća od dozvoljene, čime je znatno smanjen stepen kompresije zadane funkcije. Sa druge strane, sigurno je da realizovana relativna greška neće biti veća od dozvoljene.

Za odredjivanje druge vrednosti praga korištena je geometrijska interpretacija tzv. piramidalnog algoritma (postupak izračunavanja koeficijenata aproksimacije) i osnovni zakoni teorije verovatnoće. Osnovni nedostatak u ovom slučaju je činjenica da realizovana relativna greška može biti veća od dozvoljene ako je dozvoljena relativna greška previše mala. Nasuprot tome, stepen kompresije je neuporedivo veći nego u prvom slučaju.

Osim uvodnog dela i zaključka, ovaj rad ima četiri glave i dodatak. U drugoj glavi iznesene su osnove teorije talasića (pojam multirezolucijske analize, dilatacione jednačine i funkcije skaliranja, jednačine talasića i talasića majke i opisan je piramidalni algoritam). Treća glava govori o odredjivanju praga kompresije. Data je geometrijska interpretacija piramidalnog algoritma i detaljno je opisan postupak odredjivanja praga za Daubechies koeficijente reda 1 i 2. Na kraju je opisano uopštenje dobijenih zaključaka. Konkretne formule su izvedene i u slučaju Daubechies koeficijenata reda 4. U četvrtoj glavi je opisan programski paket WaveMath.m (razvijen u programskom okruženju *Mathematica*) koji je u suštini realizacija algoritama i postupaka opisanih u drugoj glavi. Programski paket WaveMath.m je korišten za testiranje primera koji su dati u petoj glavi. U dodatku se nalazi kod programskog paketa WaveMath.m.

Glava 2

Multirezolucija

U ovoj glavi su uvedeni pojmovi multirezolucijske analize, dilatacione jednačine, funkcije skaliranja, jednačine talasića i talasića majke. Dokazane su njihove osnovne osobine i opisane su specifičnosti aproksimacije funkcija iz prostora $L_2(\mathbb{R})$ talasićima.

2.1 Multirezolucijska analiza

Definicija 1 *Multirezolucijska analiza je razbijanje prostora $L_2(\mathbb{R})$ na niz zatvorenih potprostora $v_j, j \in \mathbb{Z}$, (tzv. aproksimacionih prostora) sa sledećim osobinama:*

1. $\{0\} \subseteq \ldots \subseteq v_2 \subseteq v_1 \subseteq v_0 \subseteq v_{-1} \subseteq \ldots \subseteq L_2(\mathbb{R})$,
2. $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} v_k = \{0\}$ *i* $cl(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} v_k) = L_2(\mathbb{R})$,
3. $(\forall k \in \mathbb{Z})(f(\cdot) \in v_k \Leftrightarrow f(2\cdot) \in v_{k-1})$,
4. $f(\cdot) \in v_0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}) f(\cdot - k) \in v_0$ *i*
5. *postoji funkcija* $\varphi(\cdot) \in v_0$ *(tzv. funkcija skaliranja) takva da je skup* $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ *ortonormirana baza prostora* v_0.

Lema 1 *Ako je skup funkcija $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora v_0, onda je svaki od skupova $\{\varphi_{j,k}(\cdot) | k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora $v_j, j \in \mathbb{Z}$, gde je $\varphi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}x - k)$.*

Dokaz:

Neka je $f(\cdot) \in v_j$ proizvoljna funkcija. Induktivno se zaključuje da je tada $f(2^j \cdot) \in v_0$, pa je

$$(\forall x \in \mathbb{R}) f(2^j x) = \sum_n c_n \varphi(x - n)$$

jer je $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ (ortonormirana) baza prostora v_0. Budući da je

$$(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = f(2^j \frac{x}{2^j}) = \sum_n c_n \varphi(2^{-j}x - n),$$

skup $\{\varphi(2^{-j} \cdot -k) | k \in \mathbb{Z}\}$ je zaista baza prostora v_j. Dalje je

$$\begin{aligned}(\varphi(2^{-j} \cdot -m), \varphi(2^{-j} \cdot -n)) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{-j}x - m)\varphi(2^{-j}x - n)dx = \\ &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(t - m)\varphi(t - n)dx = 2^j \delta(m - n),\end{aligned}$$

gde je $\delta(\cdot)$ Kronekerov delta simbol, $\delta(m) = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$, pa je baza $\{\varphi_{j,k}(\cdot) | k \in \mathbb{Z}\}$ ortogonalna. Konačno, zbog $\|\varphi(2^{-j} \cdot -n)\| = 2^{j/2}, n \in \mathbb{Z}$ baza $\{\varphi_{j,k}(\cdot) | k \in \mathbb{Z}\}$ je i normirana. ▶

Lema 2 *Svaki od prostora $v_j, j \in \mathbb{Z}$ je invarijantan u odnosu na translacije, tj. $f(\cdot) \in v_j \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}) f(\cdot - k) \in v_j, j \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz:
Za proizvoljnu funkciju $f(\cdot) \in Ł_2(\mathbb{R})$ važi

$$\begin{aligned} f(\cdot) \in v_j &\Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in v_0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}) f(2^j \cdot -k) \in v_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}) f(\cdot - \frac{k}{2^j}) \in v_j. \end{aligned}$$

Dakle, za proizvoljno $k \in \mathbb{Z}$ važi

$$f(\cdot) \in v_j \Leftrightarrow f(\cdot - k) = f(\cdot - \frac{2^j k}{2^j}) \in v_j, \tag{2.1}$$

što je i trebalo dokazati. ▶

Iz činjenice $v_0 \subseteq v_{-1}$ sledi da je $\varphi(\cdot) = \varphi_{0,0}(\cdot) \in v_{-1}$, pa se prema lemi 1 funkcija skaliranja može predstaviti kao linearna kombinacija funkcija $\varphi_{-1,k}(\cdot)$. Drugim rečima, funkcija skaliranja zadovoljava tzv. dilatacionu jednačinu

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \varphi_{-1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \varphi(2x - k) \tag{2.2}$$

Ako jednačina (2.2) ima jedno rešenje, onda ona ima beskonačno mnogo rešenja (ako je $\varphi(\cdot)$ rešenje jednačine (2.2), onda je i $c \cdot \varphi(\cdot), c \in \mathbb{R}$, takodje njeno rešenje). Odredjenosti radi, obično se zahteva da funkcija skaliranja zadovoljava uslov

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1,$$

odakle neposredno sledi da koeficijenti jednačine (2.2) moraju zadovoljavati uslov

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k = \sqrt{2}.$$

Primer 1 *Osnovni primer multirezolucijske analize (tzv. Haar-ova multirezolucijska analiza) su prostori deo po deo konstantnih funkcija. Funkcija skaliranja je karakteristična funkcija intervala* $[0,1)$, *(u daljem tekstu box funkcija) tj.* $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$, *a aproksimacioni prostori su definisani sa* $v_{-j} = \{f(\cdot)|(\forall k \in \mathbb{Z})x \in [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) \Rightarrow f(x) = f(2^{-j}k)\}, j \in \mathbb{Z}$.

2.2 Kaskadni algoritam

Kaskadnim algoritmom rekurzivno se definiše niz funkcija koji, ukoliko konvergira, konvergira ka rešenju jednačine (2.2). Početna aproksimacija je obično (ali ne obavezno) box funkcija, a dalje aproksimacije se definišu sa

$$\varphi^{(i+1)}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\varphi^{(i)}(2x-k), i \geq 0.$$

Lema 3 *Ako su* $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$ *koeficijenti jednačine (2.2) i ako niz funkcija generisan kaskadnim algoritmom konvergira, pri čemu početna aproksimacija ima kompaktan nosač, onda je nosač granične funkcije interval* $[0, N-1]$.

Dokaz:

Neka je nosač početne aproksimacije u kaskadnom algoritmu (proizvoljni) interval $[a,b]$. Tada je

$$\varphi^{(1)} = \sqrt{2}\sum_k f_k\varphi^{(0)}(2x-k),$$

pa je

$$\text{supp}\varphi^{(1)}(x) = \bigcup_{k=0}^{N-1}\Big[\frac{a+k}{2}, \frac{b+k}{2}\Big] = \Big[\frac{a}{2}, \frac{b+N-1}{2}\Big].$$

Sledećim korakom kaskadnog algoritma se dobija

$$\varphi^{(2)} = \sqrt{2}\sum_k f_k\varphi^{(1)}(2x-k),$$

odakle se zaključuje da je

$$\text{supp}\varphi^{(2)}(x) = \bigcup_{k=0}^{N-1}\Big[\frac{a+2k}{4}, \frac{b+N-1+2k}{4}\Big] = \Big[\frac{a}{4}, \frac{b+3(N-1)}{4}\Big].$$

Induktivno se zaključuje da je

$$\text{supp}\varphi^{(n)}(x) = \Big[\frac{a}{2^n}, \frac{b+(2^n-1)(N-1)}{2^n}\Big] \to [0, N-1], n \to \infty.$$

▶

Teorema 1 *Neka su $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$ koeficijenti jednačine (2.2) i neka niz funkcija generisan kaskadnim algoritmom konvergira, pri čemu je početna aproksimacija box funkcija. Potreban i dovoljan uslov da skup $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ bude ortonormiran jeste da koeficijenti jednačine (2.2) zadovoljavaju uslov*

$$(\forall m \in \mathbb{Z}) \sum_k f_k f_{k-2m} = \delta(m). \tag{2.3}$$

Dokaz:

Neka je skup $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormiran i neka je $m \in \mathbb{Z}$ proizvoljno. Tada je

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x-m)dx &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\sqrt{2}\sum_k f_k \varphi(2x-k)\Big) \cdot \\
&\quad \cdot \Big(\sqrt{2}\sum_l f_l \varphi(2x-2m-l)\Big) dx = \\
&= 2\sum_k \sum_l f_k f_l \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x-k)\varphi(2x-2m-l)dx = \\
&= \sum_k \sum_l f_k f_l \int_{\mathbb{R}} \varphi(t-k)\varphi(t-2m-l)dt = \\
&= \sum_k \sum_l f_k f_l \delta(k-2m-l) = \sum_k f_k f_{k-2m}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\delta(m) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x-m)dx = \sum_k f_k f_{k-2m},$$

čime je dokazano da je uslov (2.3) potreban za ortonormiranost skupa $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$.

Obratno, neka je sada $(\forall m \in \mathbb{Z}) \sum_k f_k f_{k-2m} = \delta(m)$ i neka niz funkcija generisan kaskadnim algoritmom, pri čemu je početna aproksimacija box funkcija, konvergira. Dokaz da je skup $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormiran izvodi se indukcijom po broju iteracije i.

Za $i = 0$ tvrdjenje je očigledno jer su box funkcije ortogonalne na svoje translacije.

Ako je $\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(j)}(x-m)\varphi^{(j)}(x-n) = \delta(m-n)$, za sve $j \leq i-1$, onda je

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(i)}(x-m)\varphi^{(i)}(x-n)dx = \\
= &\int_{\mathbb{R}} \Big(\sqrt{2}\sum_k f_k \varphi^{(i-1)}(2x-2m-k)\Big)\Big(\sqrt{2}\sum_l f_l \varphi^{(i-1)}(2x-2n-l)\Big)dx = \\
= &\; 2\sum_k \sum_l f_k f_l \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(i-1)}(2x-2m-k)\varphi^{(i-1)}(2x-2n-l)dx =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_k \sum_l f_k f_l \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(i-1)}(t-2m-k)\varphi^{(i-1)}(t-2n-l)dt = \\
&= \sum_k \sum_l f_k f_l \delta(2m+k-2n-l) = \sum_k f_k f_{k-2(m-n)} = \delta(m-n).
\end{aligned}
$$

Budući da kaskadni algoritam konvergira, skup $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$, gde je $\varphi(\cdot) = \lim_{i\to\infty} \varphi^{(i)}(\cdot)$, takodje je ortonormiran, što u potpunosti dokazuje tvrdjenje. ▶

Napomena 1: Ukoliko $k \notin \{0, 1, \ldots, N-1\}$, onda je u svakoj od gornjih suma $f_k = 0$.

Napomena 2: Nije se teško uveriti da neparan broj koeficijenata jednačine (2.2) ne može zadovoljavati uslov (2.3).

2.3 Prostori talasića

Prostori talasica, u oznaci w_k, su ortogonalni komplementi prostora v_k u odnosu na prostore v_{k-1}. Dakle,

$$v_{j-1} = v_j \dot{+} w_j.$$

Kao i u slučaju aproksimacionih prostora i za prostore talasića postoji funkcija $\psi(\cdot)$ (tzv. talasić majka) takva da je familija $\{\psi_{j,k}(\cdot) | j, k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora w_k, gde je $\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k)$. Iz činjenice $w_0 \subseteq v_{-1}$ sledi da je $\psi(\cdot) = \psi_{0,0}(\cdot) \in v_{-1}$, pa se talasić majka može predstaviti kao linearna kombinacija funkcija $\varphi_{-1,k}(\cdot)$, odnosno talasić majka zadovoljava tzv. jednačinu talasića

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \varphi_{-1,k}(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \varphi(2x-k). \tag{2.4}$$

Lema 4 *Neka su zadani brojevi $f_0, f_1, \ldots, f_{2N-1}$ koji zadovoljavaju uslov (2.3) i neka je*

$$p_k = (-1)^k f_{2N-1-k}, k \in \{0, 1, \ldots, 2N-1\}. \tag{2.5}$$

Tada je $(\forall m \in \mathbb{Z})\Big(\sum_k p_k p_{k-2m} = \delta(m) \text{ } i \sum_k f_k p_{k-2m} = 0\Big).$

Dokaz:

Neka je $m \in \mathbb{Z}$ proizvoljno. Tada je

$$
\begin{aligned}
\sum_k p_k p_{k-2m} &= \sum_k (-1)^k f_{2N-1-k}(-1)^{k-2m} f_{2N-1-k+2m} = \\
&= \sum_l f_l f_{l+2m} = \delta(m),
\end{aligned}
$$

čime je dokazana prva jednakost.

Dalje, ako je $S = \sum_k f_k p_{k-2m}$, onda je

$$\begin{aligned}
S &= \sum_k f_k p_{k-2m} = \\
&= \sum_k (-1)^{k-2m} f_k f_{2N-1-k+2m} = \\
&= \sum_l (-1)^{2N-1-l} f_{2N-1-(l-2m)} f_l = \\
&= \sum_l (-1)(-1)^{l-2m} f_{2N-1-(l-2m)} f_l = \\
&= -\sum_l p_{l-2m} f_l = -S,
\end{aligned}$$

odakle se zaključuje da je $S = 0$, čime je i druga jednakost dokazana. ▶

Teorema 2 *Neka su* $f_0, f_1, \ldots, f_{2N-1}$ *koeficijenti jednačine* (2.2)*, neka kaskadni algoritam (u kojem je početna aproksimacija box funkcija) konvergira ka funkciji skaliranja* $\varphi(\cdot)$ *i neka potprostori* $v_j, j \in \mathbb{Z}$*, generisani skupovima* $\{\varphi_{j,k}(\cdot) | k \in \mathbb{Z}\}$ *obrazuju multirezolucijsku analizu prostora* $L_2(\mathbb{R})$*. Ako su brojevi* $p_k = (-1)^k f_{2N-1-k}, k \in \{0, 1, \ldots, 2N-1\}$*, koeficijenti jednačine* (2.4)*, onda je:*

$$(\forall j, J \in \mathbb{Z})(\forall m, n \in \mathbb{Z})(\psi_{j,m}, \psi_{J,n}) = \delta(j - J)\delta(m - n) \ \ i$$

$$(\forall j, J \in \mathbb{Z}, J \leq j)(\forall m, n \in \mathbb{Z})(\varphi_{j,m}, \psi_{J,n}) = 0.$$

Slobodno govoreći, talasići su medjusobno ortogonalni na svim nivoima rezolucije i ortogonalni su na sve funkcije skaliranja sa grubljom rezolucijom.

Dokaz:

Skupovi $\{\varphi_{j,k}(\cdot) | k \in \mathbb{Z}\}$ su ortonormirane baze prostora $v_j, \in \mathbb{Z}$, pa prema teoremi 1 koeficijenti jednačine (2.2) zadovoljavaju uslov (2.3), a prema prethodnoj lemi, koeficijenti jednačine (2.4) zadovoljavaju uslove $(\forall m \in \mathbb{Z})\Big(\sum_k p_k p_{k-2m} = \delta(m) \text{ i } \sum_k f_k p_{k-2m} = 0\Big)$.

Za proizvoljne $m, n \in \mathbb{Z}$ važi:

$$\begin{aligned}
(\psi_{j,m}(\cdot), \psi_{j,n}(\cdot)) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(2^{-j/2} \sum_k p_k \varphi(2^{-j}x - 2m - k)\Big) \cdot \\
&\cdot \ \Big(2^{-j/2} \sum_l p_l \varphi(2^{-j}x - 2n - l)\Big) dx = \\
&= 2^{-j} \sum_k \sum_l p_k p_l \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{-j}x - 2m - k) \cdot \\
&\cdot \ \varphi(2^{-j}x - 2n - l) dx = \\
&= \sum_k \sum_l p_k p_l \delta(2m + k - 2n - l) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_k \sum_l p_k p_{k+2(m-n)} = \delta(m-n).$$

Dalje, ako je npr. $j > J$, onda je $v_j \subseteq v_{j-1} \subseteq \ldots \subseteq v_J$, pa iz činjenica $\psi_j(\cdot) \in v_J$, $\psi_J(\cdot) \in w_J$ i $v_J \perp w_J$ sledi da je

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z}) \psi_{j,m}(\cdot) \perp \psi_{J,n}(\cdot),$$

što u potpunosti dokazuje prvu relaciju.

Analogno prethodnom dokazu, za proizvoljne $m, n \in \mathbb{Z}$ važi:

$$\begin{aligned}
(\varphi_{j,m}(\cdot), \psi_{j,n}(\cdot)) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(2^{-j/2} \sum_k f_k \varphi(2^{-j}x - 2m - k)\Big) \cdot \\
&\cdot \Big(2^{-j/2} \sum_l p_l \varphi(2^{-j}x - 2n - l)\Big) dx = \\
&= 2^{-j} \sum_k \sum_l f_k p_l \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{-j}x - 2m - k) \cdot \\
&\cdot \varphi(2^{-j}x - 2n - l) dx = \\
&= \sum_k \sum_l f_k p_l \delta(2m + k - 2n - l) = \\
&= \sum_k \sum_l f_k p_{k+2(m-n)} = 0.
\end{aligned}$$

Ako je $J < j$, onda za proizvoljne $m, n \in \mathbb{Z}$ iz činjenica $v_j \subseteq v_J$ i $v_J \perp w_J$ sledi da je $v_j \perp w_J$, odnosno da je $\varphi_{j,m}(\cdot) \perp \psi_{J,n}(\cdot)$. Time je teorema u potpunosti dokazana. ▶

Napomena: Ako je $J > j$, onda je $v_J \dot{+} w_J \subseteq v_j$, pa talasići na nivou sa grubljom rezolucijom ne mogu biti ortogonalni na funkcije skaliranja na nivou sa finijom rezolucijom.

2.4 Aproksimacija u prostorima v_j i $w_j, j \in \mathbb{Z}$

Koristeći definiciju prostora talasića dobija se da je

$$v_{j-1} = v_j \dot{+} w_j = v_{j+1} \dot{+} w_{j+1} \dot{+} w_j = \ldots = v_J \dot{+} w_J \dot{+} w_{J-1} \dot{+} \ldots \dot{+} w_j.$$

Kada $J \to \infty$, dobija se da je

$$v_{j-1} = \bigoplus_{k=j}^{\infty} w_k,$$

a kada $j \to -\infty$, dobija se da je

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} w_k.$$

U praksi je najznačajnija jednakost

$$v_{j-1} = v_J \dot{+} w_J \dot{+} w_{J-1} \dot{+} \ldots \dot{+} w_j$$

koja omogućava reprezentaciju funkcija iz aproksimacionog prostora sa najfinijom rezolucijom pomoću funkcije iz aproksimacionog prostora sa najgrubljom rezolucijom i funkcija iz prostora talasića sa svim medjurezolucijama. Dakle, ako je $f_{j-1}(\cdot) \in v_{j-1}$, onda je

$$f_{j-1}(x) = f_J(x) + \sum_{k=j}^{J} \Delta f_k(x) = \sum_n a_{J,n}\varphi_{J,n}(x) + \sum_{k=j}^{J}\sum_n b_{k,n}\psi_{k,n}(x), \quad (2.6)$$

jer je $f_J(\cdot) \in v_J$ i $\Delta f_k(\cdot) \in w_k, k \in \{j, j+1, \ldots, J\}$. Ortonormiranost odgovarajućih baza omogućava izračunavanje koeficijenata reprezentacije (2.6) po formulama

$$a_{J,n} = \int_{\mathbb{R}} f_{j-1}(x)\varphi_{J,n}(x)dx \text{ i } b_{k,n} = \int_{\mathbb{R}} f_{j-1}(x)\psi_{k,n}(x)dx \quad (2.7)$$

Lema 5 *Ako koeficijenti* $f_0, f_1, \ldots, f_{2N-1}$ *jednačine* (2.2) *zadovoljavaju uslov*

$$\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k k^m f_k = 0, m \in \{0, 1, \ldots, r-1\}, \quad (2.8)$$

onda je

$$\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x)dx = 0, m \in \{0, 1, \ldots, r-1\}. \quad (2.9)$$

Dokaz:
Ako je $0 \leq k \leq r-1$, onda je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2N-1} i^k p_i &= \sum_{i=0}^{2N-1} (-1)^i i^k f_{2N-1-i} = \\
&= \sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^{j+1}(2N-1-j)^k f_j = \\
&= \sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^{j+1} f_j \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (2N-1)^{k-n}(-1)^n j^n = \\
&= \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (2N-1)^{k-n}(-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^j f_j j^n = 0,
\end{aligned}$$

pa za $0 \leq m \leq r-1$ važi

$$\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x)dx = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2N-1} p_k \int_{\mathbb{R}} x^m \varphi(2x-k)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^{2N-1} p_k \int_{\mathbb{R}} (t+k)^m \varphi(t) dt =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^{2N-1} p_k \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} t^{m-i} k^i \varphi(t) dt =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^{2N-1} p_k \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} k^i \int_{\mathbb{R}} t^{m-i} \varphi(t) dt =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2^{m+1}} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \int_{\mathbb{R}} t^{m-i} \varphi(t) dt \sum_{k=0}^{2N-1} k^i p_k = 0,$$

što je i trebalo dokazati. ▶

Ako je funkcija $f_{j-1}(\cdot)$ r puta diferencijabilna na intervalu $[2^k n, 2^k(n+2N-1)]$ (nosač talasića $\psi_{k,n}$), ona se može predstaviti Tejlorovim redom u okolini tačke $x_{k,n} = 2^k(n+N-1/2)$,

$$f_{j-1}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f_{j-1}^{(i)}(x_{k,n})}{i!}(x-x_{k,n})^i + \frac{f_{j-1}^{(r)}(\xi)}{r!}(x-x_{k,n})^r,$$

pa ako su zadovoljeni uslovi (2.8), odnosno uslovi (2.9), onda je koeficijent $b_{j,k}$ zanemarljivo mali.

2.5 Piramidalni algoritam

Nepostojanje analitičkog oblika kako za funkciju skaliranja, tako i za talasić majku, znatno otežava izračunavanje integrala (2.7). Direktni piramidalni algoritam je postupak izračunavanja koeficijenata $a_{j,k}$ i $b_{j,k}$ (koeficijenti na nivou sa grubljom rezolucijom) pomoću koeficijenata $a_{j-1,k}$ (koeficijenti na nivou sa finijom rezolucijom) i koeficijenata jednačina (2.2) i (2.4). Inverzni piramidalni algoritam je postupak izračunavanja koeficijenata $a_{j-1,k}$ pomoću koeficijenata $a_{j,k}$ i $b_{j,k}$ i koeficijenata jednačina (2.2) i (2.4).

Teorema 3 *Neka je*

$$f_{j-1}(x) = \sum_n a_{j-1,n}\varphi_{j-1,n}(x) = \sum_k a_{j,k}\varphi_{j,k}(x) + \sum_k b_{j,k}\psi_{j,k}(x).$$

Koeficijenti aproksimacije na nivou sa grubljom rezolucijom se, pomoću koeficijenata na nivou sa finijom rezolucijom, računaju po formulama

$$a_{j,k} = \sum_n f_{n-2k} a_{j-1,n} \ i \ b_{j,k} = \sum_n p_{n-2k} a_{j-1,n}. \tag{2.10}$$

Sa druge strane, koeficijenti aproksimacije na nivou sa finijom rezolucijom se, pomoću koeficijenata na nivou sa grubljom rezolucijom, računaju po formulama

$$a_{j-1,k} = \sum_n (f_{k-2n} a_{j,n} + p_{k-2n} b_{j,n}). \tag{2.11}$$

Dokaz:
Za proizvoljno $j \in \mathbb{Z}$ je

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,m}(t) &= 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}t - m) = \\
&= 2^{(-j+1)/2}\sum_k f_k \varphi(2^{-j+1}t - 2m - k) = \\
&= 2^{(-j+1)/2}\sum_n f_{n-2m}\varphi(2^{-j+1}t - n) = \sum_n f_{n-2m}\varphi_{j-1,n}(t).
\end{aligned}$$

Analogno se dokazuje da za proizvoljno $j \in \mathbb{Z}$ važi

$$\psi_{j,m}(t) = \sum_n p_{n-2m}\varphi_{j-1,n}(t).$$

Sada je

$$\begin{aligned}
a_{j,k} &= (f(\cdot), \varphi_{j,k}(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_{j,k}(t)dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\Big(\sum_n f_{n-2k}\varphi_{j-1,n}(t)\Big)dt = \\
&= \sum_n f_{n-2k}\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_{j-1,n}(t)dt = \\
&= \sum_n f_{n-2k}\cdot a_{j-1,n}.
\end{aligned}$$

Analogno se dokazuje i druga od jednakosti (2.10). Ostaje još da se dokaže jednakost (2.11). Dakle,

$$\begin{aligned}
\sum_k a_{j-1,k}\varphi_{j-1,k}(t) &= \sum_k a_{j,k}\varphi_{j,k}(t) + \sum_k b_{j,k}\psi_{j,k}(t) = \\
&= \sum_k a_{j,k}\sum_n f_{n-2k}\varphi_{j-1,n}(t) + \\
&\quad + \sum_k b_{j,k}\sum_n p_{n-2k}\varphi_{j-1,n}(t) = \\
&= \sum_n \Big[\sum_k a_{j,k}f_{n-2k} + b_{j,k}p_{n-2k}\Big]\varphi_{j-1,n}(t),
\end{aligned}$$

odakle neposredno sledi tražena jednakost. ▶

Dakle, u svakom koraku direktnog piramidalnog algoritma (formule (2.10)) se pomoću koeficijenata $a_{j-1,k}$ dobija dvostruko manje koeficijenata $a_{j,k}$ i dvostruko manje koeficijenata $b_{j,k}$, dok se u svakom koraku inverznog piramidalnog algoritma (formula (2.11)) pomoću koeficijenata $a_{j,k}$ i $b_{j,k}$ dobija dvostruko više koeficijenata $a_{j-1,k}$.

Ovakva formulacija piramidalnog algoritma nameće dva problema prilikom praktične realizacije. Prvi je problem izbora početne aproksimacije (ulaznih koeficijenata), dok je drugi problem produženja na granici. Teoretski, kada su broj ulaznih podataka i broj koraka piramidalnog algoritma beskonačni, ovi problemi naravno ne postoje.

Početna aproksimacija treba da dovoljno dobro aproksimira zadanu funkciju u prostoru sa najfinijom rezolucijom, pa je najčešći (naravno, ne i jedini) izbor niz vrednosti zadane funkcije u tačkama dovoljno guste mreže.

Problem produženja na granici najjednostavnije je objasniti na primeru. Dakle, neka su f_0, f_1, f_2, f_3 koeficijenti jednačine (2.2), p_0, p_1, p_2, p_3 koeficijenti jednačine (2.4) i neka su $a_{0,k}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^J - 1\}$ ulazni koeficijenti piramidalnog algoritma. Nakon $j-1$ koraka, piramidalnim algoritmom se dobijaju koeficijenti $a_{j-1,k}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j+1} - 1\}$ i $b_{j-1,k}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j+1} - 1\}$. Poslednje komponente u sledećem koraku se dobijaju po formuli

$$\begin{aligned} a_{j,2^{J-j}-1} &= f_0 a_{j-1,2^{J-j+1}-2} + f_1 a_{j-1,2^{J-j+1}-1} + \\ &\quad + f_2 a_{j-1,2^{J-j+1}} + f_3 a_{j-1,2^{J-j+1}+1} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} b_{j,2^{J-j}-1} &= p_0 a_{j-1,2^{J-j+1}-2} + p_1 a_{j-1,2^{J-j+1}-1} + \\ &\quad + p_2 a_{j-1,2^{J-j+1}} + p_3 a_{j-1,2^{J-j+1}+1}. \end{aligned}$$

Problem produženja na granici je problem dodeljivanja vrednosti koeficijentima $a_{j-1,2^{J-j+1}}$ i $a_{j-1,2^{J-j+1}+1}$ koji nisu izračunati u prethodnom koraku. Najčešće se ovaj niz koeficijenata produžava na jedan od sledećih načina: konstantom (obično nulom), periodično ili simetrično. Treba napomenuti da se na isti način problem produženja na granici javlja i u inverznom piramidalnom algoritmu.

Prema prethodno rečenom, maksimalan broj koraka piramidalnog algoritma je moguće realizovati ako je broj početnih koeficijenata stepen broja 2. U tom slučaju samo jedan koeficijent u aproksimacionom prostoru sa najgrubljom rezolucijom predstavlja funkciju, dok su preostale informacije o funkciji sadržane u prostorima talasića sa različitim rezolucijama.

Izračunavanje vrednosti funkcije skaliranja i majke talasića primenom piramidalnog algoritma

Primenom piramidalnog algoritma moguće je sa proizvoljnom tačnošću izračunati vrednosti funkcije skaliranja i majke talasića u diadskim tačkama (tačkama oblika $m2^{-K}$, gde su $m, K \in \mathbb{Z}$). Pre svega, treba dokazati da važi sledeća

Lema 6 *Ako je $\varphi(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ funkcija sa kompaktnim nosačem sadržanim u intervalu $[-R, R]$, takva da je $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$, a funkcija $f(\cdot)$ neprekidna na skupu $\mathbb{R}$, onda je*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \lim_{j \to \infty} 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\varphi(2^j y)dy = f(x)$$

Dokaz: Budući da je $2^n \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^n x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 1$, za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned}
|f(x) - 2^n \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\varphi(2^n y)dy| &= |2^n \int_{\mathbb{R}} \Big[f(x) - f(x+y)\Big]\varphi(2^n y)dy| = \\
&= |\int_{\mathbb{R}} \Big[f(x) - f(x+2^{-n}t)\Big]\varphi(t)dt| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|dx \cdot \\
&\cdot \sup_{|x+2^{-n}t|\leq R} |f(x) - f(x+2^{-n}t)|.
\end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti funkcije f,

$$\sup_{|x+2^{-n}t|\leq R} |f(x) - f(x+2^{-n}t)| \to 0, n \to \infty,$$

čime je tvrdjenje dokazano. ▶

Ako je $f(\cdot) \equiv \varphi(\cdot)$, pri čemu je $\varphi(\cdot)$ funkcija skaliranja (uz pretpostavku da je funkcija skaliranja neprekidna), na osnovu prethodne teoreme, za $m, K \in \mathbb{Z}$ važi

$$\begin{aligned}
\varphi(m2^{-K}) &= \lim_{j\to\infty} 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(m2^{-K} + y)\varphi(2^j y)dy = \\
&= \lim_{j\to\infty} 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi(2^j t - m2^{j-K})dt = \\
&= \lim_{j\to\infty} 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi_{-j,m2^{j-K}}(t)dt = \\
&= \lim_{j\to\infty} 2^{j/2} a_{-j,m2^{j-K}},
\end{aligned}$$

pa se, za dovoljno veliko j može smatrati da je

$$\varphi(m2^{-K}) \approx 2^{j/2} a_{-j,m2^{j-K}},$$

gde su $a_{-j,m2^{j-K}}$ koeficijenti aproksimacije funkcije skaliranja u prostoru v_j. Iz pretpostavke da je funkcija skaliranja ortogonalna na svoje translacije, zajedno sa činjenicom $\varphi(\cdot) \in v_0$, za $j = 0$ se dobija da je

$$a_{0,m2^{-K}} = (\varphi(\cdot), \varphi_{0,m2^{-K}}(\cdot)) = \delta(m2^{-K}) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}.$$

Dakle, za približno izračunavanje vrednosti $\varphi(m2^{-K}), m, K \in \mathbb{Z}$, na mreži gustine $2^{-j}, j \in \mathbb{Z}$, inverzni piramidalni algoritam treba primeniti na skup podataka $a_{0,k} = \delta(k), b_{0,k} = 0, k \in \{0, 1, \ldots, (2N-1)2^j - 1\}$ ($2N$ je broj koeficijenata jednačine (2.2)). Može se dokazati da za približno izračunavanje vrednosti $\psi(m2^{-K}), m, K \in \mathbb{Z}$, na mreži gustine $2^{-j}, j \in \mathbb{Z}$, inverzni piramidalni algoritam treba primeniti na skup podataka $a_{0,k} = 0, b_{0,k} = \delta(2^n)$, $k \in \{0, 1, \ldots, (2N-1)2^j - 1\}$

Matrična interpretacija piramidalnog algoritma

Neka je matrica F definisana na sledeći način

$$F_{ij} = \begin{cases} f_{j-i}, & i \in 2\mathbb{Z}, \\ p_{j-i+1}, & i \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}.$$

Direktni piramidalni algoritam u matričnom obliku glasi

$$x_j = F a_{j-1},$$

dok inverzni piramidalni algoritam u matričnom obliku glasi

$$a_{j-1} = F^T x_j,$$

gde je $x_{j,n} = \begin{cases} a_{j,\frac{1}{2}n}, & n \in 2\mathbb{Z} \\ b_{j,\frac{1}{2}(n-1)}, & n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}.$

Lema 7 *Ako koeficijenti jednačine* (2.2) *zadovoljavaju uslov* (2.3), *a koeficijenti jednačine* (2.4) *uslov* (2.5), *onda je matrica* F *ortogonalna, tj.* $F^{-1} = F^T$.

Dokaz:
Budući da je $F_{ij} = \begin{cases} f_{j-i}, & i \in 2\mathbb{Z}, \\ p_{j-i+1}, & i \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$, to je

$$\begin{aligned} \left(FF^T\right)_{2i2j} &= \sum_k F_{2ik}F^T_{k2j} = \sum_k F_{2ik}F_{2jk} = \sum_k f_{k-2i}f_{k-2j} = \\ &= \sum_n f_n f_{n+2i-2j} = \delta(2j-2i) = \delta(j-i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \left(FF^T\right)_{2i2j+1} &= \sum_k F_{2ik}F^T_{k2j+1} = \sum_k F_{2ik}F_{2j+1k} = \sum_k f_{k-2i}p_{k-2j+1-1} = \\ &= \sum_n f_n p_{n+2i-2j} = 0. \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje da je $\left(FF^T\right)_{2i+12j+1} = \delta(j-i)$ i da je $\left(FF^T\right)_{2i+12j} = 0$.
▶

Iz prethodne leme sledi da su uslovi (2.3) i (2.5), uz periodično produženje niza ulaznih koeficijenata, dovoljni za savršenu rekonstrukciju (izlaz iz inverznog piramidalnog algoritma jednak je ulazu u direktni piramidalni algoritam). Ako su zadovoljeni uslovi (2.9), odnosno (2.8) i aproksimacija funkcije $f(\cdot)$ u prostoru v_{j-1} je diferencijabilna dovoljan broj puta, onda su, prema lemi 5, koeficijenti aproksimacije funkcije $f(\cdot)$ u prostoru w_j zanemarljivo mali ili jednaki nuli što je izuzetno korisno u praktičnim primenama. Naime, svi koeficijenti $b_{j,k}$ koji su po apsolutnoj vrednosti manji od zadane konstante (tzv. praga) zamenjuju se nulama, što znatno može smanjiti broj ulaznih koeficijenata, a stvoriti neznatnu grešku prilikom rekonstrukcije inverznim piramidalnim algoritmom (ukoliko su zadovoljeni uslovi savršene rekonstrukcije).

Primer 2 *Tipični primeri koeficijenata jednačine (2.2) koji zadovoljavaju uslov* (2.3) *su tzv. Haar-ovi koeficijenti*

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2.12}$$

i tzv. Daubechies koeficijenti reda 2

$$f_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, f_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, f_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, f_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \tag{2.13}$$

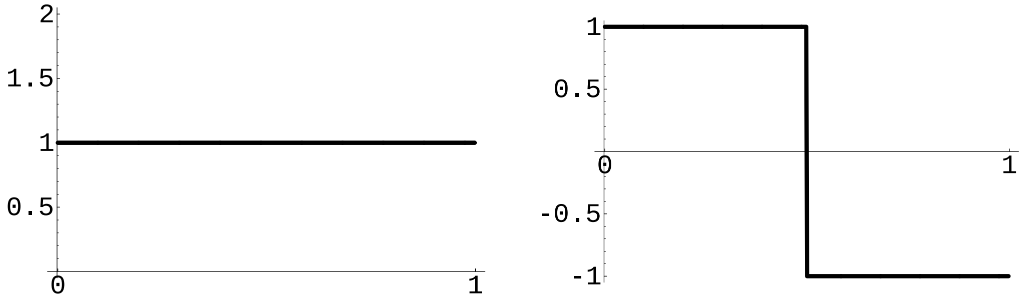
Preostali koeficijenti su nula. Koeficijenti odgovarajućih jednačina talasića se dobijaju iz uslova (2.5) *i glase*

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, p_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{2.14}$$

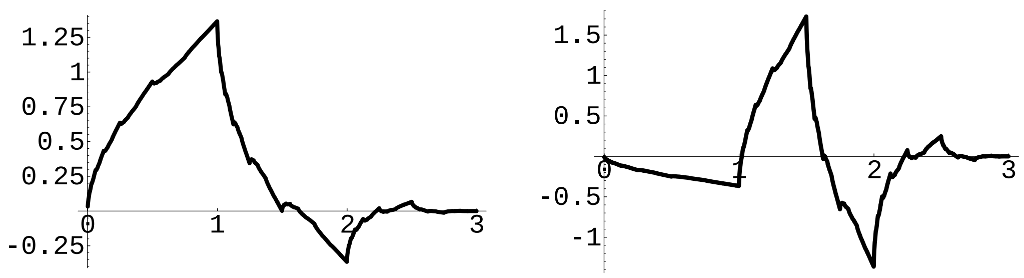
odnosno

$$p_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_1 = -\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, p_3 = -\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \tag{2.15}$$

Grafici pripadnih funkcija skaliranja i talasića majki su dati na slikama koje slede.



Funkcija skaliranja i talasić majka odredjeni koeficijentima (2.12) odnosno (2.14)



Funkcija skaliranja i talasić majka odredjeni koeficijentima (2.13) odnosno (2.15)

Glava 3

Odredjivanje praga

U ovoj glavi dat je jedan predlog za izbor praga u zavisnosti od dozvoljene relativne greške rekonstrukcije, kao i za izbor optimalnog praga. Budući da su osnovni zaključci doneseni u skladu sa zakonima teorije verovatnoće u petoj glavi je dato nekoliko primera koji ilustruju primenu dobijenih rezultata u praksi.

U daljem tekstu se pretpostavlja da je v_0 prostor sa najfinijom rezolucijom i da je broj ulaznih podataka u piramidalni algoritam stepen broja 2. Jasno je da se koeficijenti aproksimacije funkcije u prostorima v_j i w_j mogu posmatrati kao vektori iz prostora $\mathbb{R}^{2^{J-j}}$ (broj ulaznih podataka je 2^J). Sve ocene su date u odnosu na euklidsku normu prostora $\mathbb{R}^n$.

3.1 Haar-ovi koeficijenti

Neka su koeficijenti jednačine (2.2) odredjeni formulama (2.12), neka su $a_{0,k}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^J - 1\}$ početne vrednosti u piramidalnom algoritmu i neka su nakon J koraka piramidalnog algoritma dobijeni koeficijenti $a_{J,0}$ i $b_{j,k}$, $j \in \{J, J-1, \ldots, 1\}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j} - 1\}$.

3.1.1 Procena greške

U prvom koraku inverznog piramidalnog algoritma dobijaju se koeficijenti $a_{J-1,0}$ i $a_{J-1,1}$ po formulama

$$\begin{aligned} a_{J-1,0} &= 2^{-1/2}(a_{J,0} + b_{J,0}), \\ a_{J-1,1} &= 2^{-1/2}(a_{J,0} - b_{J,0}). \end{aligned}$$

Sledeći korak daje koeficijente aproksimacije u prostoru v_{J-2} sa

$$\begin{aligned} a_{J-2,0} &= 2^{-1}(a_{J,0} + b_{J,0} + \sqrt{2} b_{J-1,0}), \\ a_{J-2,1} &= 2^{-1}(a_{J,0} + b_{J,0} - \sqrt{2} b_{J-1,0}), \\ a_{J-2,2} &= 2^{-1}(a_{J,0} - b_{J,0} + \sqrt{2} b_{J-1,1}), \end{aligned}$$

$$a_{J-2,3} = 2^{-1}(a_{J,0} - b_{J,0} - \sqrt{2}b_{J-1,1}).$$

Induktivno se zaključuje da se koeficijenti aproksimacije u prostoru v_{J-j}, $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ računaju po formulama

$$a_{J-j,m} = 2^{-j/2}\Big[a_{J,0} + \sum_{k=0}^{j-1}(\pm 1)_m 2^{k/2} b_{J-k,n_m}\Big], m \in \{0, 1, \ldots, 2^j - 1\}.$$

U gornjoj formuli simbol $(\pm 1)_m$ označava da se neki umnošci oblika $2^{k/2}b_{J-k,n_m}$ dodaju, a neki oduzimaju, zavisno od toga koja se komponenta aproksimacije a_{J-j} računa. Specijalno, za $j = J$ dobija se da je

$$a_{0,m} = 2^{-J/2}\Big[a_{J,0} + \sum_{k=0}^{J-1}(\pm 1)_m 2^{k/2} b_{J-k,n_m}\Big], m \in \{0, 1, \ldots, 2^J - 1\}. \quad (3.1)$$

Ukoliko se primeni postupak odsecanja (engl. hard thresholding), tj. ukoliko se svi koeficijenti aproksimacije u prostorima talasića koji su manji po apsulotnoj vrednosti od zadanog praga $\varepsilon > 0$ zamene nulama, formula (3.1) postaje

$$\widetilde{a}_{0,m} = 2^{-J/2}\Big[a_{J,0} + \sum_{k=0}^{J-1}(\pm 1)_m 2^{k/2} \widetilde{b}_{J-k,n_m}\Big], m \in \{0, 1, \ldots, 2^J - 1\}, \quad (3.2)$$

gde je

$$\widetilde{b}_{J-j,n} = \begin{cases} 0, & |b_{J-j,n}| < \varepsilon \\ b_{J-j,n}, & |b_{J-j,n}| \geq \varepsilon \end{cases}, j \in \{0, 1, \ldots, J-1\}, n \in \{0, 1, \ldots, 2^j - 1\} \quad (3.3)$$

Prirodno je postaviti pitanje za koliko se razlikuju vektori a_0 i $\widetilde{a}_0$. U najgorem slučaju, kada je $\widetilde{b}_{J-j,n} = 0, j \in \{0, 1, \ldots, J-1\}, n \in \{0, 1, \ldots, 2^j - 1\}$, formula (3.2) postaje

$$\widetilde{a}_{0,m} = 2^{-J/2} a_{J,0}, m \in \{0, 1, \ldots, 2^J - 1\}, \quad (3.4)$$

što zajedno sa (3.1) daje procenu

$$|a_{0,m} - \widetilde{a}_{0,m}| = |2^{-J/2}\sum_{k=0}^{J-1}(\pm 1)_m 2^{k/2} b_{J-k,n_m}| \leq 2^{-J/2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1}, \quad (3.5)$$

odakle sledi da je

$$\begin{aligned} \|a_0 - \widetilde{a}_0\| &= \Big[2^J \Big(2^{-J/2}\sum_{k=0}^{J-1}(\pm 1)_m 2^{k/2} b_{J-k,n_m}\Big)^2\Big]^{1/2} = \\ &= \Big|\sum_{k=0}^{J-1}(\pm 1)_m 2^{k/2} b_{J-k,n_m}\Big| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{J-1} 2^{k/2} = \quad (3.6) \\ &= \varepsilon \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1}. \end{aligned}$$

Ova procena greške je izuzetno gruba i nema opravdanje u računu verovatnoće. Procena broja koeficijenata $b_{J-j,n}, j \in \{0, 1, \dots, J-1\}, n \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}$, koji će biti zamenjeni nulama, zasnovana na računu verovatnoće, daje znatno praktičniju ocenu.

3.1.2 Verovatna greška

Geometrijska interpretacija

Neka su, nakon $j, j > 0$ koraka piramidalnog algoritma, dobijeni koeficijenti $a_{j,k}, k \in \{0, 1, \dots, 2^{J-j} - 1\}$ (ulazni podaci za $j+1$-i korak piramidalnog algoritma) i $b_{j,k}, k \in \{0, 1, \dots, 2^{J-j} - 1\}$. Dalje, neka je od niza koeficijenata $a_{j,k}, k \in \{0, 1, \dots, 2^{J-j} - 1\}$ formiran skup od 2^{J-j-1} tačaka $S_j = \{(a_{j,2k}, a_{j,2k+1}) | k \in \{0, 1, \dots, 2^{J-j-1} - 1\}\}$. U $j+1$-om koraku piramidalnog algoritma na svaku tačku iz skupa S_j deluje se matricom

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

koja je matrica simetrije u odnosu na pravu

$$y = \tan \frac{\pi}{8} \cdot x = (\sqrt{2} - 1) \cdot x. \tag{3.7}$$

Drugim rečima, u $j+1$-om koraku piramidalnog algoritma sve tačke skupa S_j se preslikavaju u njima simetrične tačke u odnosu na pravu (3.7). Apscise ovih tačaka predstavljaju koeficijente aproksimacije u prostoru v_{j+1} i ulazni su podaci za sledeći korak piramidalnog algoritma, dok su njihove ordinate koeficijenti aproksimacije u prostoru w_{j+1}. Očigledno je da istu geometrijsku interpretaciju ima i inverzni piramidalni algoritam.

Ukoliko se primeni tehnika odsecanja, sve tačke $(a_{j+1,k}, b_{j+1,k})$ zamenjuju se tačkama $(a_{j+1,k}, 0)$ ukoliko je $|b_{j+1,k}| < \varepsilon$ i prilikom realizacije inverznog piramidalnog algoritma ove tačke neće biti savršeno rekonstruisane (umesto originalnih, dobiće se tačke $(\frac{a_{j+1,k}}{\sqrt{2}}, \frac{a_{j+1,k}}{\sqrt{2}})$). Dakle, inverznim piramidalnim algoritmom tačke koje leže u traci $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |y| < \varepsilon \wedge y \neq 0\}$ neće biti savršeno rekonstruisane. Simetrijom u odnosu na pravu (3.7) traka T se preslikava u traku $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x - y| < \varepsilon \wedge x \neq y\}$, a odavde se jednostavno zaključuje da će savršeno rekonstruisane biti one i samo one tačke skupa S_j koje su izvan trake V i tačke sa prave $y = x$. Procena broja tačaka skupa S_j koje se nalaze u traci V zasnovana na računu verovatnoće daje znatno praktičniju ocenu greške $\|a_0 - \widetilde{a}_0\|$.

Procena greške

Sve tačke skupa S_j nalaze se u krugu $K_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq r_j^2\}$, gde je $r_j = \max\{\sqrt{a_{j,2k}^2 + a_{j,2k+1}^2}, k \in \{0, 1, \dots, 2^{J-j-1} - 1\}\}$. Neka se od tih 2^{J-j-1} tačaka k_j njih nalazi u traci V (te tačke neće biti savršeno rekonstruisane) i neka su sve tačke skupa S_j ravnomerno rasporedjene u krugu K_j. Broj k_j se može proceniti sa

$$\frac{k_j}{2^{J-j-1}} = \frac{2(\varepsilon\sqrt{r_j^2-\varepsilon^2} + r_j^2 \arcsin\frac{\varepsilon}{r_j})}{r_j^2\pi} = c_j(\varepsilon) \tag{3.8}$$

(odnos površine dela trake V unutar kruga K_j i površine kruga K_j). Dakle, može se smatrati da će $k_j = 2^{J-j-1}c_j(\varepsilon)$ komponenti vektora b_{j+1} biti zamenjeno nulama, što znači da će k_j komponenti vektora $b_{j+1} - \widetilde{b}_{j+1}$ biti različito od nule. Prethodno zaključivanje daje sledeću procenu

$$\|b_{j+1} - \widetilde{b}_{j+1}\| \leq \sqrt{k_j\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2^{J-j-1}c_j(\varepsilon)} \leq \varepsilon\sqrt{2^{J-j-1}c(\varepsilon)}, \tag{3.9}$$

gde je $c(\varepsilon) = \max\{c_0(\varepsilon), c_1(\varepsilon), \ldots, c_{J-1}(\varepsilon)\}$. Ako se vektori $b_j - \widetilde{b}_j$ aproksimiraju vektorima $\varepsilon\sqrt{c_{j-1}(\varepsilon)}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2^{J-j}})$ (ovi vektori imaju istu normu kao i vektori koji "majoriraju" vektore $b_j - \widetilde{b}_j$), procena (3.5) postaje

$$\begin{aligned} |a_{0,m} - \widetilde{a}_{0,m}| &= |2^{-J/2}\sum_{k=0}^{J-1}(\pm 1)_m 2^{k/2}(b_{J-k,n_m} - \widetilde{b}_{J-k,n_m})| \leq \\ &\leq 2^{-J/2}\sum_{k=0}^{J-1} 2^{k/2}\varepsilon\sqrt{c_{J-k-1}(\varepsilon)} \leq \\ &\leq 2^{-J/2}\cdot\sqrt{c(\varepsilon)}\cdot\varepsilon\cdot\frac{2^{J/2}-1}{2^{1/2}-1}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Odavde se zaključuje da se verovatna greška rekonstrukcije može proceniti sa

$$\|a_0 - \widetilde{a}_0\| \leq \sqrt{c(\varepsilon)}\cdot\varepsilon\cdot\frac{2^{J/2}-1}{2^{1/2}-1}. \tag{3.11}$$

3.1.3 Izbor praga i optimalni prag

Koristeći relaciju (3.11) moguće je izabrati prag na osnovu dozvoljene relativne greške rekonstrukcije. Naime, ako je ρ dozvoljena greška rekonstrukcije, onda prag ε treba biti rešenje jednačine

$$\frac{1}{\|a_0\|}\cdot\frac{2^{J/2}-1}{2^{1/2}-1}\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{c(\varepsilon)} = \rho. \tag{3.12}$$

Jednačina (3.12) ima jedno ili nijedno rešenje. Zaista, neka je

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\|a_0\|}\cdot\frac{2^{J/2}-1}{2^{1/2}-1}\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{c(\varepsilon)},$$

gde je

$$c(\varepsilon) = \frac{2(\varepsilon\sqrt{r^2-\varepsilon^2} + r^2 \arcsin\frac{\varepsilon}{r})}{r^2\pi}$$

i $r = r_j$, za neko $j \in \{0, 1, \ldots, J-1\}$.

Budući da je

$$c'(\varepsilon) = \frac{4}{r^2\pi}\sqrt{r^2-\varepsilon^2},$$

to je

$$\varphi'(\varepsilon) = \left(\frac{c'(\varepsilon)\varepsilon}{2\sqrt{c(\varepsilon)}} + \sqrt{c(\varepsilon)}\right)\frac{2^{J/2}-1}{\|a_0\|(2^{1/2}-1)},$$

što znači da je funkcija $\varphi(\cdot)$ rastuća na svom domenu. Budući da je $\varphi(0) = 0$ i da je $\varphi(r) = r\dfrac{2^{J/2}-1}{\|a_0\|(2^{1/2}-1)}$, jednačina (3.12) ima jedinstveno rešenje ako je $\rho \in [0, r\dfrac{2^{J/2}-1}{\|a_0\|(2^{1/2}-1)}]$, dok za ostale vrednosti relativne greške ρ uopšte nema rešenja.

Problem izbora optimalnog praga ima klasičnu formulaciju. Naime, treba odrediti prag tako da broj "odsečenih" koeficijenata aproksimacije u prostorima talasića bude što je moguće veći, a da greška rekonstrukcije bude što je moguće manja. Prema (3.8) broj komponenti vektora $b_j, j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ koje će biti zamenjene nulama je $k_{j-1} = 2^{J-j}c_{j-1}(\varepsilon), j \in \{1, 2, \ldots, J\}$, pa ukupan broj koeficijenata aproksimacije u prostorima talasića koje će biti zamenjene nulama iznosi

$$\sum_{j=0}^{J-1} k_j = \sum_{j=0}^{J-1} c_j(\varepsilon)2^{J-j-1} \leq c(\varepsilon)(2^J - 1).$$

Dakle, broj nenula koeficijenata aproksimacije jednak je

$$2^J - \sum_{j=0}^{J-1} k_j \geq 2^J - c(\varepsilon)(2^J - 1),$$

pa relativno smanjenje broja ulaznih koeficijenata u piramidalni algoritam nije manje od

$$\frac{2^J - c(\varepsilon)(2^J-1)}{2^J} = 1 - c(\varepsilon)(1 - 2^{-J})$$

Neka je $\psi(\varepsilon) = 1 - c(\varepsilon)(1 - 2^{-J})$. Funkcija $\psi(\cdot)$ je opadajuća, $\psi(0) = 1$ i $\psi(r) = 2^{-J}$, pa jednačina

$$\psi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) \tag{3.13}$$

ima jedinstveno rešenje. Rešenje jednačine (3.13) predstavlja optimalni prag.

3.2 Daubechies koeficijenti reda 2

U slučaju kada je broj koeficijenata jednačine (2.2) veći od dva, tehnika primenjena u 3.1.1 je zbog složenosti formula neupotrebljiva. Druga mogućnost procene greške je analiza matrične intrepretacije piramidalnog algoritma.

3.2.1 Procena greški

Matrična interpretacija

Neka su matrice F_j i P_j, $j \in \{0, 1, \ldots, J-1\}$ definisane na sledeći način

$$F_{j,kn} = \begin{cases} f_{n-2k}, & n \in \{2k, 2k+1, 2k+2, 2k+3\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

$k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j-1}-1\}$, $n \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j}-1\}$ i

$$P_{j,kn} = \begin{cases} p_{n-2k}, & n \in \{2k, 2k+1, 2k+2, 2k+3\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

$k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j-1}-1\}$, $n \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j}-1\}$, gde su elementi f_k i p_k, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ definisani formulama (2.13) i (2.15). Jedan korak piramidalnog algoritma sada ima sledeću (matričnu) interpretaciju

$$\begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_j \\ P_j \end{pmatrix} a_j = \begin{pmatrix} F_j a_j \\ P_j a_j \end{pmatrix}, j \in \{0, 1, \ldots, J-1\},$$

dok je

$$a_{j-1} = \begin{pmatrix} F_{j-1} \\ P_{j-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = F_{j-1}^T a_j + P_{j-1}^T b_j, j \in \{J, J-1, \ldots, 1\}$$

matrična interpretacija jednog koraka inverznog piramidalnog algoritma. Na osnovu prethodne relacije, induktivno se zaključuje da je

$$\begin{aligned} a_0 &= F_0^T a_1 + P_0^T b_1 \\ &= F_0^T F_1^T a_2 + F_0^T P_1^T b_2 + P_0^T b_1 = \ldots = \\ &= \Big(\prod_{j=0}^{J-1} F_j^T\Big) a_J + \sum_{k=2}^{J} \Big(\prod_{j=0}^{k-2} F_j^T\Big) P_{k-1}^T b_k + P_0^T b_1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

odnosno da je

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_0 &= F_0^T a_1 + P_0^T \widetilde{b}_1 \\ &= F_0^T F_1^T a_2 + F_0^T P_1^T \widetilde{b}_2 + P_0^T \widetilde{b}_1 = \ldots = \\ &= \Big(\prod_{j=0}^{J-1} F_j^T\Big) a_J + \sum_{k=2}^{J} \Big(\prod_{j=0}^{k-2} F_j^T\Big) P_{k-1}^T \widetilde{b}_k + P_0^T \widetilde{b}_1, \end{aligned} \tag{3.15}$$

gde su komponente vektora $\widetilde{b}_j, j \in \{1, 2, \ldots, J\}$ odredjene relacijama (3.3). Prema prethodnom, važi sledeća jednakost

$$a_0 - \widetilde{a}_0 = \sum_{k=2}^{J} \Big(\prod_{j=0}^{k-2} F_j^T\Big) P_{k-1}^T (b_k - \widetilde{b}_k) + P_0^T (b_k - \widetilde{b}_k). \tag{3.16}$$

Izometričnost transformacija odredjenih matricama F_j^T i P_j^T

U jednakosti (3.16) matrice F_j^T i P_j^T, $j \in \{0, 1, \ldots, J-1\}$ nisu kvadratne, pa u cilju procene veličine $\|a_0 - \widetilde{a}_0\|$ nije moguće primeniti klasičnu nejednakost trougla. Medjutim, ovim matricama su definisana linearna preslikavanja prostora $\mathbf{R}^{2^{J-j-1}}$ u prostor $\mathbf{R}^{2^{J-j}}$ za koja se može dokazati da su izometrije (norma slike jednaka je normi originala). Zaista, matrice P_j^T i F_j^T u imaju oblik

$$R^T = \begin{pmatrix} r_0 & 0 & \ldots & 0 & r_2 \\ r_1 & 0 & \ldots & 0 & r_3 \\ r_2 & r_0 & \ldots & 0 & 0 \\ r_3 & r_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & r_0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & r_2 & r_0 \\ 0 & 0 & \ldots & r_3 & r_1 \end{pmatrix},$$

gde je $R \in \{F, P\}$ i $r \in \{f, p\}$, pri čemu svaka od ovih matrica ima dva puta više vrsta nego kolona. Prve dve koordinate u poslednjoj koloni omogućavaju periodično produženje niza ulaznih koeficijenata koje je (osim uslova (2.3) i (2.5)) potrebno i dovoljno za savršenu rekonstrukciju. Ako je $X \in \mathbf{R}^{2^{J-j-1}}$ i $Y = R^T X \in \mathbf{R}^{2^{J-j}}$, onda je

$$Y_n = \begin{cases} r_2 X_{\frac{1}{2}n-1} + r_0 X_{\frac{1}{2}n}, & n \in 2\mathbf{Z} \\ r_3 X_{\frac{1}{2}(n-1)-1} + r_1 X_{\frac{1}{2}(n-1)}, & n \in 2\mathbf{Z}+1 \end{cases}, n \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j} - 1\},$$

pa je

$$\begin{aligned} \|Y\| &= \left(\sum_{k=0}^{2^{J-j}-1} Y_k^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{2^{J-j-1}-1} Y_{2k}^2 + Y_{2k+1}^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{2^{J-j-1}-1} \Big[(r_2 X_{k-1} + r_0 X_k)^2 + (r_3 X_{k-1} + r_1 X_k)^2 \Big] \right\}^{1/2} = \\ &= \Bigg\{ \sum_{k=0}^{2^{J-j-1}-1} \Big[(r_2^2 + r_3^2) X_{k-1}^2 + 2(r_2 r_0 + r_3 r_1) X_{k-1} X_k + \\ &\quad + (r_3^2 + r_1^2) X_k^2 \Big] \Bigg\}^{1/2} = \\ &= \left[\sum_{k=0}^{2^{J-j-1}-1} (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) X_k^2 \right]^{1/2} = \|X\|, \end{aligned}$$

što znači da linearna preslikavanja definisana matricama F_j^T i P_j^T, $j \in \{0, 1, \ldots, J-1\}$ zaista jesu izometrije. Prema tome,

$$\begin{aligned} \|a_0 - \widetilde{a}_0\| &= \Big\| \sum_{k=2}^{J} \Big(\prod_{j=0}^{k-2} F_j^T \Big) P_{k-1}^T (b_k - \widetilde{b}_k) + P_0^T (b_k - \widetilde{b}_k) \Big\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{J} \|b_k - \widetilde{b}_k\| \end{aligned} \tag{3.17}$$

U najgorem slučaju, kada su svi vektori $\widetilde{b}_k, k \in \{1, 2, \ldots, J\}$ nula vektori, tj. sve komponente vektora $b_k, k \in \{1, 2, \ldots, J\}$ po apsolutnoj vrednosti manje od zadanog praga $\varepsilon > 0$, prethodna procena postaje

$$\|a_0 - \widetilde{a}_0\| \leq \sum_{k=1}^{J} \|b_k\| \leq \sum_{k=1}^{J} \Big(\sum_{n=0}^{2^{J-k}-1} \varepsilon^2 \Big)^{1/2} = \varepsilon \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1}.$$

Procena verovatne greške

Geometrijska interpretacija direktnog i inverznog piramidalnog algoritma u ovom slučaju je analogna prethodnoj. Naime, neka je od niza ulaznih podataka u $j+1$-i korak piramidalnog algoritma (koeficijenti $a_{j,k}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j} - 1\}$) formiran skup tačaka $S_j = \{(a_{j,2k}, a_{j,2k+1}, a_{j,2k+2}, a_{j,2k+3}) | k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j-1} - 1\}\}$, gde je $a_{j,2^{J-j}} = a_0$ i $a_{j,2^{J-j}+1} = a_1$. U jednom koraku direktnog piramidalnog algoritma na svaku tačku ovog skupa deluje se (ortogonalnom) matricom

$$D = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

dok se u odgovarajućem koraku inverznog piramidalnog algoritma na svaku sliku tačke iz skupa S_j deluje matricom D^T. Pri tome će rekonstrukcija biti savršena ukoliko se matricom D^T deluje na tačke koje su izvan skupa $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | |x_2| < \varepsilon \wedge |x_4| < \varepsilon \wedge x_2 x_4 \neq 0\}$. Budući da se sve tačke skupa S_j nalaze u lopti $K_j = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq r_j^2\}$, gde je $r_j = \max\{\sqrt{a_{j,2k}^2 + a_{j,2k+1}^2 + a_{j,2k+2}^2 + a_{j,2k+3}^2}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j-1} - 1\}\}$, uz pretpostavku da su sve tačke skupa S_j ravnomerno rasporedjene u lopti K_j, broj tačaka skupa S_j koje neće biti savršeno rekonstruisane može se proceniti sa

$$\frac{k_j}{2^{J-j-1}} = \frac{\mu(T_j)}{\mu(K_j)},$$

gde je $T_j = T \cap K_j$ i $\mu(A) = \int_A dx$. Nakon relativno jednostavnog računa dobija se da je

$$\mu(T_j) = \int\int\int\int_{T_j} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 4\varepsilon^2 \pi (r_j^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2), \tag{3.18}$$

uz napomenu da ova jednakost važi samo za $\varepsilon \in [0, r_j/\sqrt{2}]$. Zaista,

$$\begin{aligned}\iiiint_{T_j} dx_1dx_2dx_3dx_4 &= \iint_{[-\varepsilon,\varepsilon]^2} dx_2dx_4 \iint_{0\le x_1^2+x_3^2\le r_j^2-x_2^2-x_4^2} dx_1dx_3\\ &= \pi \iint_{[-\varepsilon,\varepsilon]^2} (r_j^2 - x_2^2 - x_4^2)dx_2dx_4\\ &= 4\varepsilon^2\pi(r_j^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Ograničenje $\varepsilon \in [0, r_j/\sqrt{2}]$ najjednostavnije je opravdati činjenicom da mora biti $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \le r_j^2$, pa ako je $x_2 = x_4 = \varepsilon$, onda mora biti $x_1^2+x_3^2 \le r_j^2 - 2\varepsilon^2$, odakle sledi da mora biti $r_j^2 - 2\varepsilon^2 \ge 0$. Sa druge strane, rezultat

$$\mu(K_j) = \int\int\int\int_{K_j} dx_1dx_2dx_3dx_4 = \frac{1}{2}r_j^4\pi^2$$

je klasičan (zapremina četverodimenzione lopte). Dakle,

$$\frac{k_j}{2^{J-j-1}} = \frac{8\varepsilon^2(r_j^2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2)}{r_j^4\pi} = c_j(\varepsilon), \tag{3.19}$$

što znači da će k_j komponenti vektora b_{j+1} biti zamenjeno nulama, odnosno da će k_j komponenti vektora $b_{j+1} - \widetilde{b}_{j+1}$ biti različito od nule. Prema tome,

$$\|b_j - \widetilde{b}_j\| \le \sqrt{k_{j-1}\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2^{J-j}c_{j-1}(\varepsilon)} \le \varepsilon\sqrt{2^{J-j}c(\varepsilon)}, \tag{3.20}$$

gde je ponovo $c(\varepsilon) = \max\{c_0(\varepsilon), c_1(\varepsilon), \ldots, c_{J-1}(\varepsilon)\}$. Koristeći ovaj zaključak zajedno sa procenom (3.17) dobija se procena vjerovatne greške

$$\|a_0 - \widetilde{a}_0\| \le \sqrt{c(\varepsilon)} \cdot \varepsilon \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1}. \tag{3.21}$$

3.2.2 Izbor praga i optimalni prag

Analogno razmatranju u slučaju Haarovih koeficijenata, koristeći relaciju (3.21) moguće je odabrati prag u zavisnosti od zadane relativne greške. Ako je ρ dozvoljena relativna greška rekonstrukcije, onda prag ε treba biti rešenje jednačine

$$\frac{1}{\|a_0\|} \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{c(\varepsilon)} = \rho \tag{3.22}$$

koje pripada intervalu $[0, r/\sqrt{2}]$, pri čemu je sada

$$c(\varepsilon) = \frac{8}{3r^4\pi}\varepsilon^2(3r^2 - 2\varepsilon^2)$$

i $r = r_j$, za neko $j \in \{0, 1, \ldots, J-1\}$.

Ako je

$$\varphi(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{c(\varepsilon)},$$

gde je $K = \frac{1}{\|a_0\|} \cdot \frac{2^{J/2}-1}{2^{1/2}-1}$, onda je

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{16K}{r^4\pi} \frac{\varepsilon^2(r^2-\varepsilon^2)}{\sqrt{c(\varepsilon)}},$$

pa je funkcija $\varphi(\cdot)$ rastuća na intervalu $[0, r/\sqrt{2}]$. Dalje je $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(r/\sqrt{2}) = \frac{2Kr}{\sqrt{3\pi}}$, pa jednačina (3.22), u intervalu $[0, r/\sqrt{2}]$, ima jedinstveno rešenje ako dozvoljena relativna greška nije veća od $\frac{2Kr}{\sqrt{3\pi}}$. Naravno, ako je dozvoljena relativna greška veća od $\frac{2Kr}{\sqrt{3\pi}}$ posmatrana jednačina nema rešenja u intervalu $[0, r/\sqrt{2}]$.

Kao i u prethodnom razmatranju, problem izbora optimalnog praga ima klasičnu formulaciju, dok relativno smanjenje broja ulaznih koeficijenata u piramidalni algoritam ponovo nije manje od

$$\frac{2^J - c(\varepsilon)(2^J-1)}{2^J} = 1 - c(\varepsilon)(1-2^{-J}).$$

Ako je

$$\psi(\varepsilon) = 1 - c(\varepsilon)(1-2^{-J}),$$

onda je

$$\psi'(\varepsilon) = -(1-2^{-J})\frac{16\varepsilon}{3r^4\pi}(3r^2-4\varepsilon^2),$$

pa na intervalu $[0, r/\sqrt{2}]$ funkcija $\psi(\cdot)$ opada od $\psi(0) = 1$ do $\psi(r/\sqrt{2}) = 1 - \frac{8}{3\pi}(1-2^{-J})$. Optimalni prag je ponovo rešenje jednačine

$$\varphi(x) = \psi(x) \tag{3.23}$$

iz intervala $[0, r/\sqrt{2}]$ koje postoji i jedinstveno je ako i samo ako je

$$1 - \frac{8}{3\pi}(1-2^{-J}) = \psi(r/\sqrt{2}) < \varphi(r/\sqrt{2}) = \frac{2Kr}{\sqrt{3\pi}}.$$

3.3 Slučaj kada je broj koeficijenata dilatacione jednačine 6, 8, ...

Generalizacija prethodno izloženog zaključivanja je relativno jednostavna. Pre svega, treba naglasiti da je moguće konstruisati proizvoljno veliki (paran) broj koeficijenata jednačine (2.2) koji zadovoljavaju uslov (2.3), odnosno proizvoljno veliki (paran) broj koeficijenata jednačine (2.4) koji zadovoljavaju uslov (2.5). Dakle, u tom će slučaju (uz periodično produženje niza ulaznih koeficijenata) biti moguća savršena rekonstrukcija.

Kao i u prethodna dva slučaja, od niza ulaznih podataka u $j+1$-i korak piramidalnog algoritma formira se skup $S_j = \{(a_{j,2k}, a_{j,2k+1}, \ldots, a_{j,2k+2N-1}) | k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j-1} - 1\}\}$, pri čemu je $2N$ broj koeficijenata jednačine (2.2), a niz podataka a_j je produžen periodično. Koristeći matričnu intrepretaciju i uslove (2.3) i (2.5) dokazuje se da je jednim korakom piramidalnog algoritma definisana jedna idempotentna izometrija prostora $\mathbb{R}^{2N}$. Dakle, inverznim piramidalnim algoritmom dobija se polazni niz podataka. Ukoliko se primeni tehnika odsecanja, niz izlaznih podataka iz inverznog piramidalnog algoritma neće biti jednak nizu ulaznih podataka u direktni piramidalni algoritam. Naime, ponovo će sa greškom biti rekonstruisane one i samo one tačke čije slike u pomenutoj izometriji pripadaju skupu $T = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{2N}) \in \mathbb{R}^{2N} | |x_{2k}| < \varepsilon, k \in \{1, 2, \ldots, N\} \wedge \prod_{k=1}^{N} x_{2k} \neq 0\}$. Kao i u prethodnom slučaju, dobija se da je najstrožija procena greške

$$\|a_0 - \widetilde{a}_0\| \leq \varepsilon \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1}.$$

(za dokaz gornje nejednakosti nije bitan broj koeficijenata jednačine (2.2), nego samo činjenica da su zadovoljeni uslovi (2.3) i (2.5)). I sada su sve tačke skupa S_j u unutrašnjosti lopte $K_j = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{2N}) \in \mathbb{R}^{2N} | x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2N}^2 \leq r_j^2\}$, gde je $r_j = \max\{\sqrt{a_{j,2k}^2 + a_{j,2k+1}^2 + \ldots + a_{j,2k+2N-1}^2}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^{J-j-1} - 1\}\}$, pa se broj tačaka skupa S_j koje neće biti savršeno rekonstruisane, na osnovu "geometrijske definicije" verovatnoće, procenjuje sa

$$\frac{k_j}{2^{J-j-1}} = \frac{\mu(T_j)}{\mu(K_j)} = c_j(\varepsilon),$$

gde je $T_j = T \cap K_j$ i $\mu(A) = \int_A dx$. Odavde se verovatna greška rekonstrukcije procenjuje sa

$$\|a_0 - \widetilde{a}_0\| \leq \sqrt{c(\varepsilon)} \cdot \varepsilon \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1}, \tag{3.24}$$

gde je $c(\varepsilon) = \max\{c_0(\varepsilon), c_1(\varepsilon), \ldots, c_{J-1}(\varepsilon)\}$. Integrale $\mu(T_j)$, za $\varepsilon \in [0, \frac{R}{\sqrt{N}}]$, moguće je izračunati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\int_{T_j} dx_1 \ldots dx_{2N} &= \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^N} dx_2 \ldots dx_{2N} \cdot \\
&\quad \cdot \int_{0 \leq \sum_{k=1}^{N} x_{2k-1}^2 \leq r_j^2 - \sum_{k=1}^{N} x_{2k}^2} dx_1 \ldots dx_{2N-1} \\
&= \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^N} V(x_2, \ldots, x_{2N}) dx_2 \ldots dx_{2N},
\end{aligned}$$

gde je $V(x_2, \ldots, x_{2N})$ zapremina N-dimenzione lopte poluprečnika

$\sqrt{r_j^2 - \sum_{k=1}^N x_{2k}^2}$, tj.

$$V(x_2,\ldots,x_{2N}) = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m!}(r_j^2 - \displaystyle\sum_{k=1}^N x_{2k}^2)^m, & N = 2m \\ \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}(r_j^2 - \displaystyle\sum_{k=1}^N x_{2k}^2)^{N/2}, & N = 2m+1 \end{cases},$$

dok je

$$\mu(K_j) = \frac{\pi^N}{N!} r_j^{2N}.$$

U slučaju $N = 4$ (koeficijenti jednačine (2.2) u tom slučaju iznose 0.23038, $0.71485, 0.63088, -0.027984, -0.18703, 0.030841, 0.032883, -0.010597$), dobija se da je

$$\mu(T_j) = \frac{8\pi^2\varepsilon^4}{15}(32\varepsilon^4 - 40\varepsilon^2 r_j^2 + 15r_j^4), \varepsilon \in [0, R/2]$$

i

$$\mu(K_j) = \frac{\pi^4}{24} r_j^8,$$

pa je

$$c_j(\varepsilon) = \frac{64\varepsilon^4}{5\pi^2 r_j^8}(32\varepsilon^4 - 40\varepsilon^2 r_j^2 + 15r_j^4).$$

U skladu sa prethodnim rezultatima, ako je $\rho > 0$ dozvoljena relativna greška rekonstrukcije, onda prag $\varepsilon > 0$ treba da bude rešenje jednačine

$$\frac{1}{\|a_0\|} \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{c(\varepsilon)} = \rho \tag{3.25}$$

i $r = r_j$, za neko $j \in \{0, 1, \ldots, J-1\}$, koje pripada intervalu $[0, r/2]$, pri čemu je

$$c(\varepsilon) = \frac{64\varepsilon^4}{5\pi^2 r^8}(32\varepsilon^4 - 40\varepsilon^2 r^2 + 15r^4).$$

Jednostavno je dokazati da jednačina (3.25) ima jedinstveno rešenje u intervalu $[0, r/2]$ ako i samo ako je $\rho \in [0, K\frac{r}{\pi}\sqrt{\frac{7}{5}}], K = \frac{1}{\|a_0\|} \cdot \frac{2^{J/2}-1}{2^{1/2}-1}$. Dalje, optimalni prag je i u ovom slučaju rešenje jednačine

$$\frac{1}{\|a_0\|} \cdot \frac{2^{J/2} - 1}{2^{1/2} - 1} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{c(\varepsilon)} = 1 - c(\varepsilon)(1 - 2^{-J}) \tag{3.26}$$

koje pripada intervalu $[0, r/2]$. Ovo rešenje postoji i jedinstveno je ako i samo ako je $K\dfrac{r}{\pi}\sqrt{\dfrac{7}{5}} \leq 1 - \dfrac{28}{5\pi^2}(1 - 2^{-J})$.

Glava 4

Mathematica paket WaveMath.m

Programski paket WaveMath.m razvijen je u programskom okruženju *Mathematica* 5.0 i korišten je za praktično testiranje rezultata dobijenih u trećoj glavi. Osnovne funkcije koje su razvijene u okviru ovog paketa su realizacija direktnog i inverznog piramidalnog algoritma. Osim toga, razvijen je čitav niz pomoćnih funkcija.

Učitavanje paketa realizuje se naredbama

```
SetDirectory["C:\My Documents\WaveMath"]
<< WaveMath.m
```

4.1 Koeficijenti dilatacione jednačine i produženje niza ulaznih koeficijenata

Ranije je rečeno da je moguće konstruisati proizvoljno veliki (paran) broj koeficijenata jednačine (2.2) koji zadovoljavaju uslov (2.3), odnosno proizvoljno veliki (paran) broj koeficijenata jednačine (2.4) koji zadovoljavaju uslov (2.5). Bez ulaženja u detalje, opisan je algoritam (koji je realizovan u programskom paketu WaveMath) konstrukcije najpopularnije grupe takvih koeficijenata (postoji proizvoljno mnogo tih grupa), tzv. Daubechies [1] koeficijenata. Više o Daubechies koeficijentima može se naći u [4].

Konstrukcija Daubechies koeficijenata reda r

Daubechies koeficijenti reda r su koeficijenti polinoma $D(\cdot)$ (čija je konstrukcija opisana) stepena $2r$. Najčešće se ovi keficijenti uzimaju u poretku od koeficijenta uz najstariji član do slobodnog koeficijenta.

[1] Koeficijenti su dobili naziv po njihovom tvorcu, belgijskoj matematičarki Ingrid Daubechies

Korak 1 Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ nule polinoma

$$B_r(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1+i}{i} x^i.$$

Korak 2 Neka je $z_i, i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ rešenje jednačine

$$\frac{1}{2}(z + z^{-1}) = x_i, i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$$

koje je po apsolutnoj vrednosti manje od jedan.

Korak 3 Neka je

$$D(t) = (t+1)^r \prod_{i=1}^{r-1} (t - z_i).$$

Korak 4 Koeficijenti polinoma

$$\frac{\sqrt{2}}{D(1)} D(\cdot)$$

su Daubechies koeficijenti reda r.

Napomena: Nekada se umesto zahteva $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k = \sqrt{2}$ zahteva da zbir koeficijenata dilatacione jednačine bude jednak jedan, pa umjesto **Koraka 4** u prethodnom algoritmu treba realizovati

Korak 4' Koeficijenti polinoma

$$\frac{1}{D(1)} D(\cdot)$$

su Daubechies koeficijenti reda r.

U paketu WaveMath se izračunavanje Daubechies koeficijenata reda `r` (obavezan argument) realizuje naredbom `mFDb[r]`, a rezultat je lista realnih brojeva dužine `2r` čiji su elementi odgovarajući Daubechies koeficijenti. Obavezni argument `r` je isključivo prirodan broj. Npr. Daubechies koeficijenti reda 3 se dobijaju na sledeći način:

```
In[1]:= mFDb[3]
Out[1]={0.332671,0.806892,0.459878,
        -0.135011,-0.0854413,0.0352263}
```

Produženje niza ulaznih koeficijenata

U prethodnoj glavi je opisan problem produženja niza ulaznih koeficijenata, a u programskom paketu WaveMath niz ulaznih koeficijenata je moguće produžiti na jedan od tri sledeća načina: periodično, simetrično i konstantama. Dakle, ako je $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ niz ulaznih koeficijenata, i **ap** periodično produženje niza $\mathbf{a}$, onda je $\mathbf{ap}_k = \mathbf{a}_{rest\{k,n\}}$, gde je sa $rest\{k, n\}$ označen ostatak pri deljenju broja k sa brojem n. Za simetrično produženje niza $\mathbf{a}$, prvo se formira pomoćni niz $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_{n-1} \ldots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0$, koji se zatim produžava periodično. U programskom paketu WaveMath `k`-ta komponenta periodično, simetrično, odnosno konstantama produženog niza ulaznih koeficijenata **a** dobija se izvršavanjem naredbi:

```
mPPeriodicno[a,k]
mPSimetricno[a,k]
mPKonstantama[a,k,lc,dc]
```

respektivno. Poslednja dva argumenta funkcije `mPKonstantama[.,.,.,.]` su konstante sa kojima se produžava niz ulaznih koeficijenata (konstantom `lc` za negativne vrednosti indeksa `k`, a konstantom `ld` za vrednosti indeksa `k` koje su veće od dužine ulaznog niza). Osim toga, razvijena je i funkcija `mPNulama[.,.]` koja niz ulaznih koeficijenata produžava nulama. Argument `a` u svakoj od tri gornje funkcije mora biti lista, dok argument `k` mora biti celi broj. Svi argumenti opisanih funkcija su obavezni.

4.2 Direktni i inverzni piramidalni algoritam

Dve osnovne funkcije, razvijene u programskom paketu WaveMath, su funkcije kojima se relizuju direktni i inverzni piramidalni algoritam, tj. formule (2.10) i (2.11).

Direktni piramidalni algoritam

U programskom paketu WaveMath direktni piramidalni algoritam se realizuje pozivom funkcije

```
mDekompozicijaPA[a,f,p,n,t,pa]
```

Sledi opis argumenata ove funkcije:

a - koeficijenti aproksimacije na nivou sa najfinijom rezolucijom (obavezan argument).

f - niz koeficijenata jednačine (2.2) (podrazumevana vrednost su koeficijenti (2.12)).

p - niz koeficijenata jednačine (2.4) (podrazumevana vrednost su koeficijenti (2.14)).

n - broj koraka piramidalnog algoritma koje treba realizovati (ukoliko se izostavi, ili je veći od maksimalnog mogućeg broja koraka, realizovaće se maksimalan broj koraka).

t - prag (podrazumevana vrednost je 0).

pa - način produženja niza koeficijenata aproksimacije na granici (podrazumevana vrednost je periodično produženje).

Prva tri argumenta moraju biti liste, četvrti mora biti celi broj veći ili jednak od -1, a peti argument mora biti realan broj veći od nule.

Izlazni argument ove funkcije je dvoelementna lista. Prvi element izlazne liste je takodje lista čiji su elementi koeficijenti aproksimacije. Na početku "unutrašnje liste" su koeficijenti aproksimacije u aproksimacionom prostoru sa najgrubljom rezolucijom, zatim slede koeficijenti aproksimacije u prostorima talasića poredjani od koeficijenata u prostoru sa grubljom rezolucijom, prema koeficijentima u prostoru sa finijom rezolucijom. Drugi element izlazne liste je broj realizovanih koraka piramidalnog algoritma.

Modifikacija funkcije `mDekompozicijaPA[.,.,.,.,.,.]` je funkcija `mProjekcije[.,.,.,.,.,.]`. Jedina razlika izmedju ovih funkija je u tome što su koeficijenti aproksimacije (prvi element izlaza iz funkije `mProjekcije[.,.,.,.,.,.]`) grupisani u liste prema odgovarajućim prostorima.

Inverzni piramidalni algoritam

Pozivom funkcije

```
mRekonstrukcijaPA[a,f,p,n,pka,pkt]
```

programskog paketa WaveMath, realizuje se inverzni piramidalni algoritam. Argumenti ove funkcije imaju sledeće značenje:

- **a -** koeficijenti aproksimacije u aproksimacionom prostoru sa najgrubljom rezolucijom i koeficijenti aproksimacije u prostorima talasića sa svim rezolucijama (oblik koji se dobije na izlazu funkcije `mDekompozicijaPA[.,.,.,.,.,.]`).
- **f -** niz koeficijenata jednačine (2.2) (podrazumevana vrednost su koeficijenti (2.12)).
- **p -** niz koeficijenata jednačine (2.4) (podrazumevana vrednost su koeficijenti (2.14)).
- **n -** broj koraka piramidalnog algoritma koje treba realizovati (ukoliko se izostavi, ili je veći od maksimalnog mogućeg broja koraka, realizovaće se maksimalan broj koraka).
- **pka -** način produženja niza koeficijenata aproksimacije u aproksimacionom prostoru (podrazumevana vrednost je periodično produženje).
- **pkt -** način produženja niza koeficijenata aproksimacije u prostoru talasića (podrazumevana vrednost je periodično produženje).

I ovde prva tri argumenta moraju biti liste, a četvrti mora biti celi broj veći ili jednak od -1. Obavezan je jedino prvi argument.

Izlazni argument funkcije `mRekonstrukcijaPA[.,.,.,.,.,.]` je istog oblika kao i izlazni argumment funkcije `mDekompozicijaPA[.,.,.,.,.,.]` (lista i broj realizovanih koraka inverznog piramidalnog algoritma), s tim da su sada elementi "unutrašnje" liste koeficijenti aproksimacije u aproksimacionom prostoru sa najfinijom rezolucijom.

4.2.1 Vrednosti funkcije skaliranja i talasića majke

U komentaru datom nakon Leme 6 u 2.5 opisan je postupak izračunavanja vrednosti funkcije skaliranja (talasića majke) u tačkama oblika $m2^{-K}$, gde su $m, K \in \mathbb{Z}$. U programskom paketu WaveMath ovaj postupak se realizuje pozivom funkcija

```
mFS[K]
```

ili

```
mTM[K]
```

gde je `K` (obavezni argument) stepen broja 2 koji odredjuje gustinu mreže. Argunemt `K` mora biti prirodan broj. Izlazni argument ovih funkcija je lista vrednosti funkcije skaliranja (talasića majke) na intervalu $[0, 2N-1)$, gde je $2N$ broj koeficijenata jednačine (2.2), odnosno jednačine (2.4). Koristeći ove funkcije prikazani su grafici funkcija skaliranja i talasića majke u 2.5, primer 2.

Diskretizacija funkcije

Za diskretizaciju funkcije `f[.]` na intervalu `[a,b]` sa mrežom gustine `2^d` razvijena je funkcija

```
mS[f,d,a,b]
```

čiji argumenti imaju sledeće značenje:

f - funkcija koja se diskretizuje (obavezan argument).

d - parametar koji odredjuje gustinu mreže (obavezan argument).

a - levi kraj intervala diskretizacije (podrazumevana vrednost je -1).

b - desni kraj intervala diskretizacije (podrazumevana vrednost je 1).

Izlaz je lista vrednosti funkcije `f[.]`.

Glava 5

Primeri

U primerima koji slede tabelarno su prikazani rezultati izbora praga primenom modifikacije jednačina (3.12), (3.22) i (3.25) za različite dozvoljene relativne greške. Poredjenja radi, za svaku dozvoljenu relativnu grešku prag je odredjen i korištenjem grube procene, tj. primenom formule

$$\varepsilon = \rho \|a_0\| \frac{2^{1/2} - 1}{2^{J/2} - 1}. \tag{5.1}$$

Osim toga, u svakom od primera odredjen je i optimalni prag rešavanjem modifikacije jednačine (3.13), (3.23) ili (3.26). Pomenute modifikacije jednačina (3.12), (3.22) i (3.25), odnosno jednačina (3.13), (3.23) ili (3.26) ogledaju se u tome što je uvek smatrano da je $c(\varepsilon) = c_0(\varepsilon)$.

Skraćenice u tabelama imaju sledeće značenje:

DRG - dozvoljena relativna greška (izražena u procentima),

GOP - prag odredjen primenom formule (5.1),

VOP - prag odredjen kao rešenje jednačine (3.12), (3.22) ili (3.25),

OP - optimalni prag,

RRG - realizovana relativna greška (izražena u procentima) i

RSD - realizovano smanjenje dužine (izraženo u procentima).

Budući da su sve jednačine čijim se rešavanjem odredjuje prag posledica odredjenih nejednakosti, nakon što se primeni tehnika odsecanja, inverznim piramidalnim algoritmom nije moguće postići dozvoljenu relativnu grešku. Očigledno je da će realizovana relativna greška biti znantno manja od dozvoljene ukoliko se prag odredi primenom formule (5.1), dok nije iznenadjujuće i premašenje dozvoljene relativne greške ukoliko se prag izabere kao rešenje neke od jednačina (3.12), (3.22) ili (3.25). Ukoliko se ne primenjuje tehnika odsecanja, broj koeficijenata aproksimacije (u aproksimacionom prostoru i prostorima talasića) jednak je broju (dužini niza) ulaznih podataka. Medjutim, primenom tehnike odsecanja broj koeficijenata aproksimacje različitih od nule ("neodsečeni koeficijenti") može biti znatno manji. Realizovanim smanjenjem dužine upravo je izražen odnos "neodsečenih" koeficijenata aproksimacije sa brojem ulaznih podataka (u procetnima).

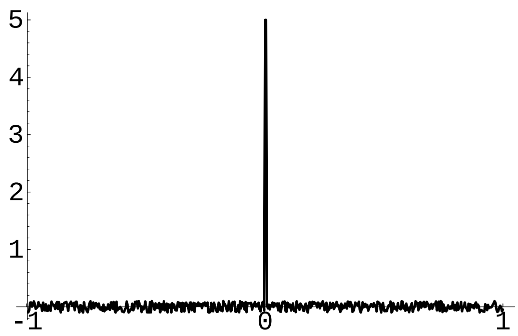
U drugom delu su svi podaci navedeni u tabelama prikazani i grafički. Skraćenice u legendi na grafičkom prikazu imaju sledeće značenje:

RRGgop - realizovana relativna greška kada je prag odredjen formulom (5.1),

RRGvop - realizovana relativna greška kada je prag odredjen kao rešenje jednačine (3.12), (3.22) ili (3.25) i

DRG - dozvoljena relativna greška.

U svim primerima ulazni skup podataka predstavlja diskretizacija funkcije f na odgovarajućem intervalu, sa korakom 2^{-9}.



Primer 3

Primer 3 *Diskretizacija funkcije*
`f[x_]:=If[Abs[x]<=0.005,5,Random[Real,{-0.1,0.1}],`
na intervalu $[-1, 1]$.

Dozvoljena relativna greška: 1%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.1379 \cdot 10^{-2}$	$0.1379 \cdot 10^{-2}$	$0.1379 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	$0.30 \cdot 10^{-1}$	$0.36 \cdot 10^{-1}$	$0.36 \cdot 10^{-1}$
RSD (%)	99	98	98
DRG/RRG	33	28	28
VOP	$0.1954 \cdot 10^{-1}$	$0.7816 \cdot 10^{-1}$	$0.2502 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.8	11	19
RSD (%)	75	24	4.5
DRG/RRG	0.56	$0.88 \cdot 10^{-1}$	$0.52 \cdot 10^{-1}$

Dozvoljena relativna greška: 2%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.2757 \cdot 10^{-2}$	$0.2757 \cdot 10^{-2}$	$0.2757 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	$0.91 \cdot 10^{-1}$	0.11	$0.78 \cdot 10^{-1}$
RSD (%)	97	96	97
DRG/RRG	22	18	26
VOP	$0.3102 \cdot 10^{-1}$	0.1105	0.3153
RRG (%)	3.4	16	19
RSD (%)	61	8.8	4.5
DRG/RRG	0.58	0.12	0.10

Dozvoljena relativna greška: 5%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.6893 \cdot 10^{-2}$	$0.6893 \cdot 10^{-2}$	$0.6893 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	0.37	0.33	0.32
RSD (%)	92	92	93
DRG/RRG	13	15	15
VOP	$0.5715 \cdot 10^{-1}$	0.1748	0.4283
RRG (%)	7.6	18	21
RSD (%)	37	3.5	4.1
DRG/RRG	0.66	0.27	0.24

Dozvoljena relativna greška: 10%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.1379 \cdot 10^{-1}$	$0.1379 \cdot 10^{-1}$	$0.1379 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.1	0.99	1.0
RSD (%)	82	84	85
DRG/RRG	9.1	10	10
VOP	$0.9072 \cdot 10^{-1}$	0.2472	0.5401
RRG (%)	13	19	22
RSD (%)	17	3.1	3.9
DRG/RRG	0.78	0.53	0.46

Dozvoljena relativna greška: 20%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.2757 \cdot 10^{-1}$	$0.2757 \cdot 10^{-1}$	$0.2757 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	2.8	2.6	3.0
RSD (%)	6.6	71	67
DRG/RRG	7.1	7.7	6.7
VOP	0.1440	0.3497	0.6816
RRG (%)	18	20	29
RSD (%)	4.5	2.7	2.9
DRG/RRG	1.1	1.0	0.70

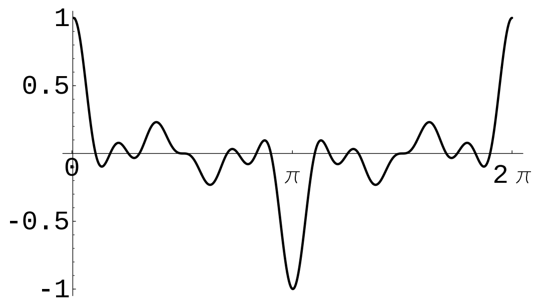
Dozvoljena relativna greška: 25%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.3447 \cdot 10^{-1}$	$0.3447 \cdot 10^{-1}$	$0.3447 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	3.8	4.0	4.1
RSD (%)	58	61	59
DRG/RRG	6.6	6.2	6.2
VOP	0.1671	0.3910	0.7347
RRG (%)	18	21	29
RSD (%)	3.5	2.5	2.9
DRG/RRG	1.4	1.2	0.87

Dozvoljena relativna greška: 50%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.6893 \cdot 10^{-1}$	$0.6893 \cdot 10^{-1}$	$0.6893 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	9.3	9.9	9.9
RSD (%)	29	30	30
DRG/RRG	5.4	5.1	5.0
VOP	0.2653	0.5533	0.9284
RRG (%)	18	21	34
RSD (%)	3.3	2.5	2.3
DRG/RRG	2.7	2.4	1.5

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
OP	0.3927	0.7713	1.1698
ORG (%)	19	25	40
OSD (%)	3.1	2.1	2.0



Primer 4

Primer 4 *Diskretizacija funkcije*
`f[x_]:=Cos[x]*Cos[2*x]*Cos[3*x]*Cos[5*x]`,
na intervalu $[0, 2\pi]$.

Dozvoljena relativna greška: 1%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.1339 \cdot 10^{-2}$	$0.1339 \cdot 10^{-2}$	$0.1339 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	$0.49 \cdot 10^{-1}$	0.16	$0.70 \cdot 10^{-1}$
RSD (%)	94	57	24
DRG/RRG	21	6.3	14
VOP	$0.1258 \cdot 10^{-1}$	$0.4094 \cdot 10^{-1}$	0.1337
RRG (%)	1.5	2.7	5.6
RSD (%)	51	14	7.4
DRG/RRG	0.65	0.38	0.18

Dozvoljena relativna greška: 2%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.2679 \cdot 10^{-2}$	$0.2679 \cdot 10^{-2}$	$0.2679 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	0.16	0.28	$0.94 \cdot 10^{-1}$
RSD (%)	89	46	23
DRG/RRG	12	7.1	21
VOP	$0.1997 \cdot 10^{-1}$	$0.5791 \cdot 10^{-1}$	0.1685
RRG (%)	2.0	3.2	6.6
RSD (%)	45	13	6.8
DRG/RRG	1.0	0.63	0.30

Dozvoljena relativna greška: 5%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.6697 \cdot 10^{-2}$	$0.6697 \cdot 10^{-2}$	$0.6697 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	0.70	0.68	0.40
RSD (%)	72	29	17
DRG/RRG	7.2	7.4	13
VOP	$0.3678 \cdot 10^{-1}$	$0.9158 \cdot 10^{-1}$	0.2290
RRG (%)	4.1	4.9	9.7
RSD (%)	28	11	5.7
DRG/RRG	1.2	1.0	0.51

Dozvoljena relativna greška: 10%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.1339 \cdot 10^{-1}$	$0.1339 \cdot 10^{-1}$	$0.1339 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.6	1.0	0.72
RSD (%)	50	24	13
DRG/RRG	6.3	9.6	14
VOP	$0.5838 \cdot 10^{-1}$	0.1296	0.2890
RRG (%)	5.8	5.9	10
RSD (%)	21	9.8	5.5
DRG/RRG	1.7	1.7	0.98

Dozvoljena relativna greška: 20%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.2679 \cdot 10^{-1}$	$0.2679 \cdot 10^{-1}$	$0.2679 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	3.1	2.0	1.0
RSD (%)	35	17	12
DRG/RRG	6.4	10	20
VOP	$0.9269 \cdot 10^{-1}$	0.1834	0.3652
RRG (%)	8.2	9.1	12
RSD (%)	15	7.8	5.1
DRG/RRG	2.4	2.2	1.6

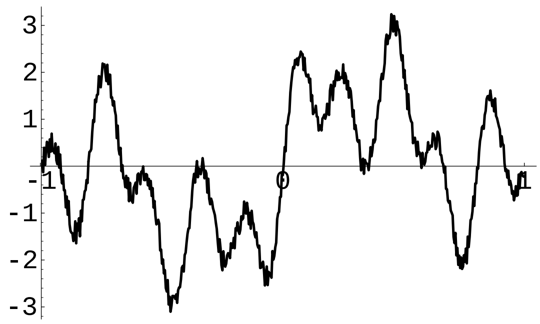
Dozvoljena relativna greška: 25%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.3348 \cdot 10^{-1}$	$0.3348 \cdot 10^{-1}$	$0.3348 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	3.8	2.4	1.1
RSD (%)	30	15	12
DRG/RRG	6.5	11	23
VOP	0.1076	0.2051	0.3939
RRG (%)	9.6	11	15
RSD (%)	13	7.0	4.7
DRG/RRG	2.6	2.3	1.7

Dozvoljena relativna greška: 50%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.6697 \cdot 10^{-1}$	$0.6697 \cdot 10^{-1}$	$0.6697 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	6.1	3.6	2.5
RSD (%)	20	12	10
DRG/RRG	8.3	14	20
VOP	0.1708	0.2905	0.4990
RRG (%)	12	15	15
RSD (%)	10	5.5	4.7
DRG/RRG	4.1	3.4	3.4

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
OP	0.2323	0.3919	0.6250
ORG (%)	15	21	20
OSD (%)	8.4	3.9	4.1



Primer 5

Primer 5 *Diskretizacija funkcije*

```
f[x_]:=Sin[Pi*x]+Sin[2*Pi*x]+Sin[5*Pi*x]+Sin[10*Pi*x]+
       +Random[Real,{-0.25,0.25}],
```

na intervalu $[-1, 1]$.

Dozvoljena relativna greška: 1%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.6152 \cdot 10^{-2}$	$0.6152 \cdot 10^{-2}$	$0.6152 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	$0.42 \cdot 10^{-1}$	$0.44 \cdot 10^{-1}$	$0.36 \cdot 10^{-1}$
RSD (%)	97	97	98
DRG/RRG	24	23	28
VOP	$0.5133 \cdot 10^{-1}$	0.1553	0.4698
RRG (%)	0.81	4.6	10
RSD (%)	84	43	9.2
DRG/RRG	1.2	0.22	$0.96 \cdot 10^{-1}$

Dozvoljena relativna greška: 2%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.1230 \cdot 10^{-1}$	$0.1230 \cdot 10^{-1}$	$0.1230 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	$0.90 \cdot 10^{-1}$	0.10	0.12
RSD (%)	96	95	95
DRG/RRG	22	19	17
VOP	$0.8148 \cdot 10^{-1}$	0.2197	0.5924
RRG (%)	1.4	6.9	11
RSD (%)	78	28	8.6
DRG/RRG	1.4	0.29	0.18

Dozvoljena relativna greška: 5%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.3076 \cdot 10^{-1}$	$0.3076 \cdot 10^{-1}$	$0.3076 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	0.38	0.40	0.52
RSD (%)	90	89	86
DRG/RRG	13	12	9.6
VOP	0.1501	0.3475	0.8054
RRG (%)	3.9	9.8	13
RSD (%)	58	14	6.8
DRG/RRG	1.3	0.51	0.39

Dozvoljena relativna greška: 10%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.6152 \cdot 10^{-1}$	$0.6152 \cdot 10^{-1}$	$0.6152 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	0.98	1.2	1.3
RSD (%)	82	77	72
DRG/RRG	10	8.4	7.7
VOP	0.2383	0.4917	1.017
RRG (%)	6.9	11	15
RSD (%)	41	12	5.5
DRG/RRG	1.5	0.94	0.69

Dozvoljena relativna greška: 15%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.9228 \cdot 10^{-1}$	$0.9228 \cdot 10^{-1}$	$0.9228 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.8	2.4	2.3
RSD (%)	75	63	60
DRG/RRG	8.4	6.3	6.5
VOP	0.3123	0.6025	1.167
RRG (%)	9.5	11	16
RSD (%)	29	11	4.9
DRG/RRG	1.6	1.3	0.96

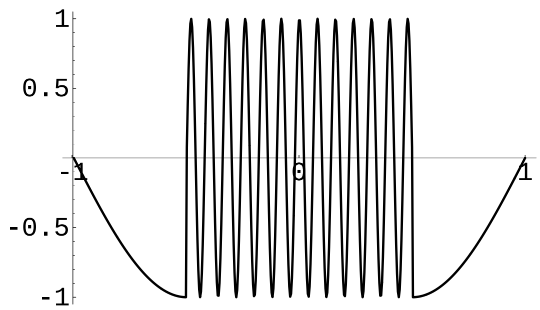
Dozvoljena relativna greška: 20%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	0.1230	0.1230	0.1230
RRG (%)	2.8	3.2	3.5
RSD (%)	67	54	48
DRG/RRG	7.2	6.2	5.7
VOP	0.3783	0.6961	1.286
RRG (%)	11	12	16
RSD (%)	22	9.6	4.9
DRG/RRG	1.8	1.6	1.3

Dozvoljena relativna greška: 50%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	0.3076	0.3076	0.3076
RRG (%)	9.5	9.3	8.8
RSD (%)	29	16	14
DRG/RRG	5.3	5.4	5.7
VOP	0.6975	1.104	1.762
RRG (%)	16	15	16
RSD (%)	13	8.2	4.9
DRG/RRG	3.1	3.4	3.2

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
OP	0.9123	1.460	2.191
ORG (%)	18	19	16
OSD (%)	11	6.4	4.9



Primer 6

Primer 6 *Diskretizacija funkcije*

`f[x_]:=If[Abs[x]<=0.5,Cos[25*Pi*x],-Sin[Pi*Abs[x]]],`

na intervalu $[-1, 1]$.

Dozvoljena relativna greška: 1%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.3058 \cdot 10^{-2}$	$0.3058 \cdot 10^{-2}$	$0.3058 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	$0.60 \cdot 10^{-1}$	$0.78 \cdot 10^{-1}$	$0.95 \cdot 10^{-1}$
RSD (%)	94	57	46
DRG/RRG	17	13	11
VOP	$0.2182 \cdot 10^{-1}$	$0.6191 \cdot 10^{-1}$	0.1771
RRG (%)	0.79	3.0	4.7
RSD (%)	63	27	15
DRG/RRG	1.3	0.33	0.21

Dozvoljena relativna greška: 2%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.6117 \cdot 10^{-2}$	$0.6117 \cdot 10^{-2}$	$0.6117 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	0.19	0.11	0.23
RSD (%)	85	56	33
DRG/RRG	10	18	8.7
VOP	$0.3464 \cdot 10^{-1}$	$0.8756 \cdot 10^{-1}$	0.2234
RRG (%)	1.1	3.2	5.4
RSD (%)	58	26	14
DRG/RRG	1.8	0.62	0.37

Dozvoljena relativna greška: 5%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.1529 \cdot 10^{-1}$	$0.1529 \cdot 10^{-1}$	$0.1529 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	0.54	0.37	0.30
RSD (%)	68	51	31
DRG/RRG	9.2	14	16
VOP	$0.6381 \cdot 10^{-1}$	0.1385	0.3039
RRG (%)	2.0	3.9	6.6
RSD (%)	51	24	13
DRG/RRG	2.5	1.3	0.76

Dozvoljena relativna greška: 10%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.3058 \cdot 10^{-1}$	$0.3058 \cdot 10^{-1}$	$0.3058 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.1	0.84	0.58
RSD (%)	58	45	29
DRG/RRG	8.9	12	17
VOP	0.1013	0.1961	0.3841
RRG (%)	3.3	5.2	7.3
RSD (%)	46	22	13
DRG/RRG	3.0	1.9	1.4

Dozvoljena relativna greška: 15%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.4588 \cdot 10^{-1}$	$0.4588 \cdot 10^{-1}$	$0.4588 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.5	1.7	0.91
RSD (%)	54	38	27
DRG/RRG	10	9.0	17
VOP	0.1328	0.2403	0.4409
RRG (%)	4.9	7.0	8.5
RSD (%)	41	20	13
DRG/RRG	3.1	2.2	1.8

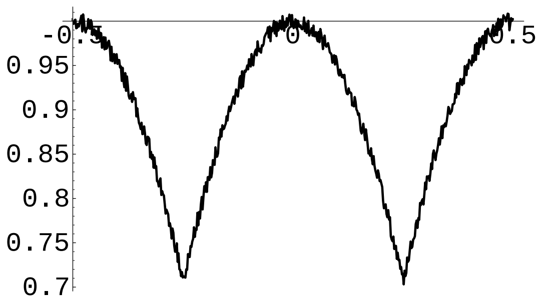
Dozvoljena relativna greška: 25%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.7646 \cdot 10^{-1}$	$0.7646 \cdot 10^{-1}$	$0.7646 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	2.6	3.1	2.1
RSD (%)	48	27	22
DRG/RRG	9.6	7.9	12
VOP	0.1867	0.3107	0.5252
RRG (%)	7.9	13	12
RSD (%)	33	13	11
DRG/RRG	3.2	2.0	2.0

Dozvoljena relativna greška: 50%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	0.1529	0.1529	0.1529
RRG (%)	5.6	4.1	4.0
RSD (%)	39	24	16
DRG/RRG	8.9	12	12
VOP	0.2969	0.4413	0.6683
RRG (%)	13	14	15
RSD (%)	22	12	9.8
DRG/RRG	3.8	3.6	3.4

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
OP	0.3637	0.5641	0.8212
ORG (%)	14	16	18
OSD (%)	20	11	9.0



Primer 7

Primer 7 *Diskretizacija funkcije*

`f[x_]:=If[Abs[x]<=0.25,Cos[Pi*x],Abs[Sin[Pi*x]]]+Random[Real,{-0.01,0.01}],`

na intervalu $[-0.5, 0.5]$.

Dozvoljena relativna greška: 1%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.3921 \cdot 10^{-2}$	$0.3921 \cdot 10^{-2}$	$0.3921 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	0.15	0.17	0.15
RSD (%)	63	56	56
DRG/RRG	6.9	6.0	6.5
VOP	$0.2581 \cdot 10^{-1}$	$0.7026 \cdot 10^{-1}$	0.1931
RRG (%)	0.88	0.84	1.3
RSD (%)	10	3.3	1.8
DRG/RRG	1.1	1.2	0.79

Dozvoljena relativna greška: 2%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.7841 \cdot 10^{-2}$	$0.7841 \cdot 10^{-2}$	$0.7841 \cdot 10^{-2}$
RRG (%)	0.35	0.38	0.40
RSD (%)	38	27	23
DRG/RRG	5.7	5.2	5.0
VOP	$0.4096 \cdot 10^{-1}$	$0.9938 \cdot 10^{-1}$	0.2436
RRG (%)	1.0	0.84	1.3
RSD (%)	8.2	3.3	1.8
DRG/RRG	2.0	2.4	1.6

Dozvoljena relativna greška: 5%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.1960 \cdot 10^{-1}$	$0.1960 \cdot 10^{-1}$	$0.1960 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	0.76	0.66	0.63
RSD (%)	13	5.9	4.5
DRG/RRG	6.6	7.6	7.9
VOP	$0.7547 \cdot 10^{-1}$	0.1572	0.3315
RRG (%)	1.6	2.0	2.5
RSD (%)	4.7	1.8	1.4
DRG/RRG	3.2	2.5	2.0

Dozvoljena relativna greška: 10%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.3921 \cdot 10^{-1}$	$0.3921 \cdot 10^{-1}$	$0.3921 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.0	0.78	0.75
RSD (%)	8.2	3.7	2.9
DRG/RRG	10	13	13
VOP	0.1198	0.2226	0.4193
RRG (%)	1.7	2.0	2.5
RSD (%)	4.1	1.8	1.4
DRG/RRG	5.9	4.9	4.1

Dozvoljena relativna greška: 20%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.7841 \cdot 10^{-1}$	$0.7841 \cdot 10^{-1}$	$0.7841 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.6	0.84	0.95
RSD (%)	4.5	3.3	2.3
DRG/RRG	13	24	21
VOP	0.1903	0.3155	0.5315
RRG (%)	3.1	2.9	4.1
RSD (%)	1.8	1.4	0.98
DRG/RRG	6.4	7.0	4.9

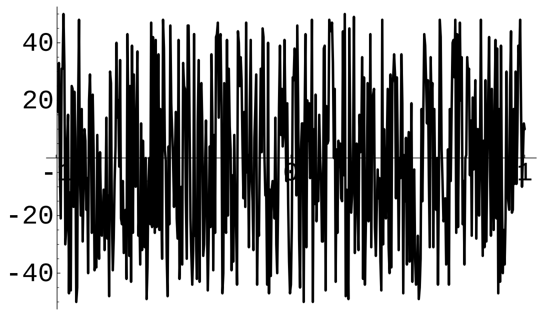
Dozvoljena relativna greška: 25%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	$0.9801 \cdot 10^{-1}$	$0.9801 \cdot 10^{-1}$	$0.9801 \cdot 10^{-1}$
RRG (%)	1.7	0.84	1.0
RSD (%)	4.1	3.3	2.1
DRG/RRG	15	30	24
VOP	0.2209	0.3531	0.5740
RRG (%)	3.1	2.9	4.1
RSD (%)	1.8	1.4	0.98
DRG/RRG	8.0	8.7	6.2

Dozvoljena relativna greška: 50%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	0.1960	0.1960	0.1960
RRG (%)	3.1	2.0	1.3
RSD (%)	1.8	1.8	1.8
DRG/RRG	16	25	40
VOP	0.3514	0.5020	0.7320
RRG (%)	3.1	4.4	4.1
RSD (%)	1.8	0.98	0.98
DRG/RRG	16	11	12

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
OP	0.4133	0.6264	0.8899
ORG (%)	3.1	4.4	6.9
OSD (%)	1.8	0.98	0.59



Primer 8

Primer 8 *Diskretizacija funkcije*

`f[x_]:=Random[Integer,{-50,50}],`

na intervalu $[-1, 1]$.

Dozvoljena relativna greška: 1%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	0.1208	0.1208	0.1208
RRG (%)	$0.36 \cdot 10^{-13}$	$0.19 \cdot 10^{-1}$	$0.35 \cdot 10^{-13}$
RSD (%)	99	$0.10 \cdot 10^{3}$	$0.10 \cdot 10^{3}$
DRG/RRG	$0.28 \cdot 10^{14}$	53	$0.29 \cdot 10^{14}$
VOP	0.9263	2.548	6.882
RRG (%)	0.35	1.3	6.7
RSD (%)	97	93	80
DRG/RRG	2.9	0.80	0.15

Dozvoljena relativna greška: 2%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	0.2417	0.2417	0.2417
RRG (%)	$0.36 \cdot 10^{-13}$	$0.19 \cdot 10^{-1}$	$0.27 \cdot 10^{-1}$
RSD (%)	99	$0.10 \cdot 10^{3}$	$0.10 \cdot 10^{3}$
DRG/RRG	$0.55 \cdot 10^{14}$	$0.11 \cdot 10^{3}$	73
VOP	1.470	3.604	8.680
RRG (%)	0.57	2.4	9.3
RSD (%)	96	90	75
DRG/RRG	3.5	0.82	0.22

Dozvoljena relativna greška: 5%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	0.6042	0.6042	0.6042
RRG (%)	$0.79 \cdot 10^{-1}$	0.15	0.13
RSD (%)	99	98	99
DRG/RRG	63	33	40
VOP	2.709	5.701	11.81
RRG (%)	1.4	5.2	14
RSD (%)	94	83	66
DRG/RRG	3.6	0.96	0.35

Dozvoljena relativna greška: 10%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	1.208	1.208	1.208
RRG (%)	0.42	0.45	0.36
RSD (%)	97	96	98
DRG/RRG	24	22	27
VOP	4.300	8.069	14.93
RRG (%)	3.0	8.1	19
RSD (%)	89	77	60
DRG/RRG	3.3	1.2	0.54

Dozvoljena relativna greška: 20%

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	2.417	2.417	2.417
RRG (%)	1.2	1.2	1.5
RSD (%)	94	93	94
DRG/RRG	17	17	13
VOP	6.829	11.43	18.90
RRG (%)	5.6	12	26
RSD (%)	84	70	51
DRG/RRG	3.5	1.6	0.77

Dozvoljena relativna greška: 25%

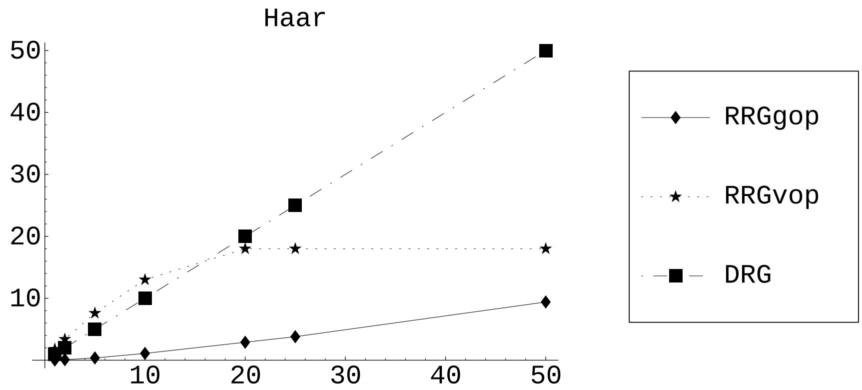
Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	3.021	3.021	3.021
RRG (%)	1.5	1.7	1.9
RSD (%)	93	92	92
DRG/RRG	16	15	13
VOP	7.926	12.79	20.41
RRG (%)	7.7	14	28
RSD (%)	80	67	48
DRG/RRG	3.3	1.8	0.89

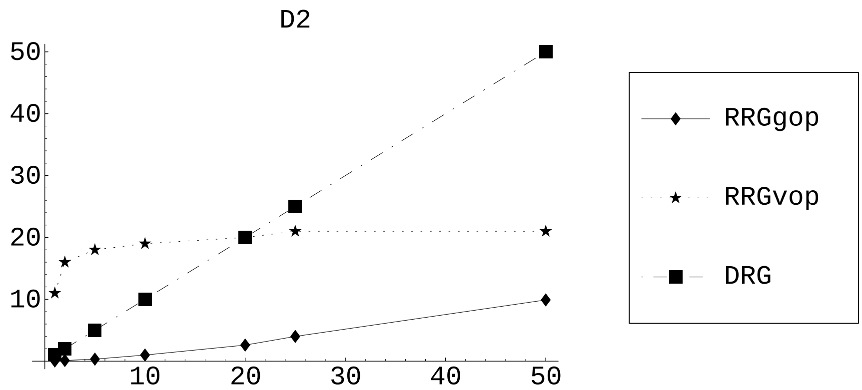
Dozvoljena relativna greška: 50%

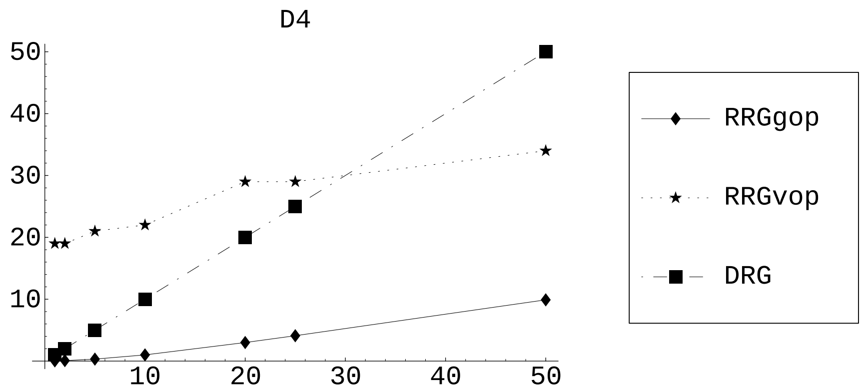
Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
GOP	6.042	6.042	6.042
RRG (%)	4.8	5.4	5.0
RSD (%)	86	82	84
DRG/RRG	10	9.2	9.9
VOP	12.60	18.15	25.98
RRG (%)	14	25	39
RSD (%)	69	53	38
DRG/RRG	3.5	2.0	1.3

Koeficijenti jednačine (2.2)	*Haar*	*D2*	*D4*
OP	15.94	23.37	31.89
ORG (%)	21	35	51
OSD (%)	60	42	27

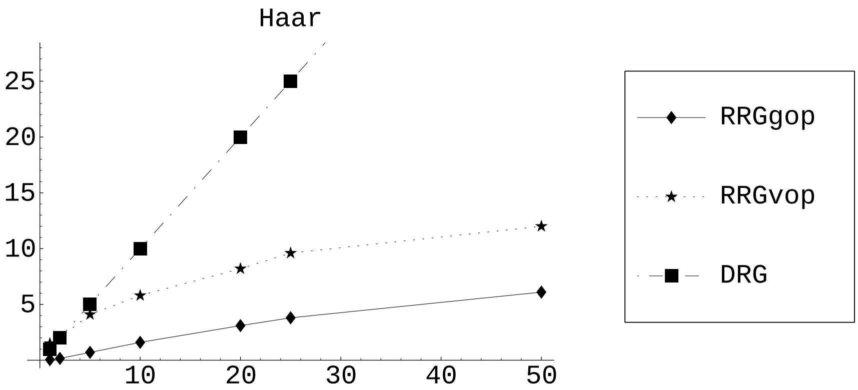
Primer 3 (grafički prikaz)

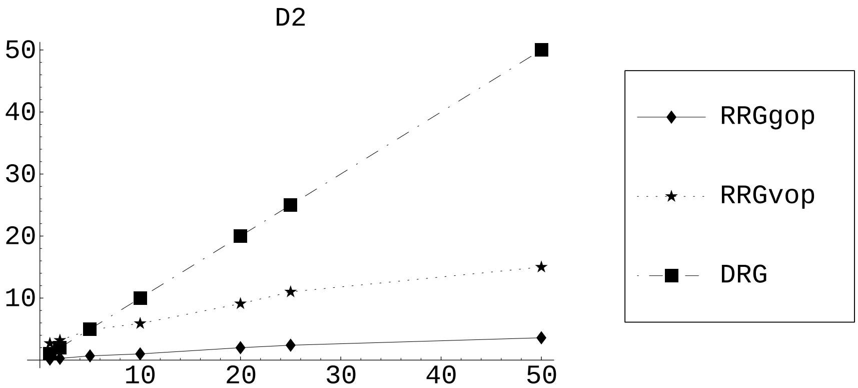


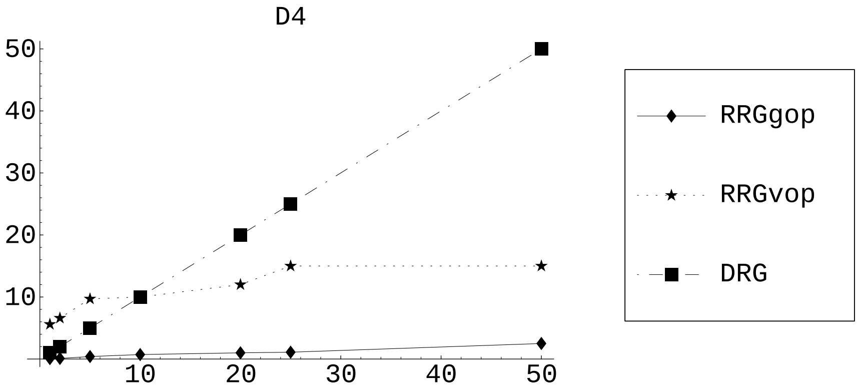




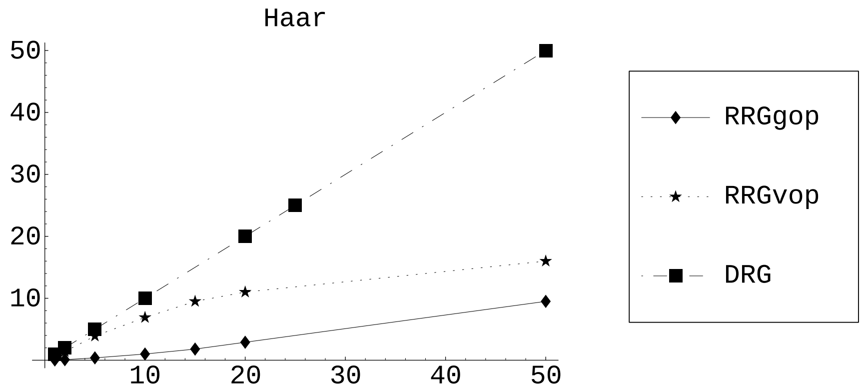
Primer 4 (grafički prikaz)

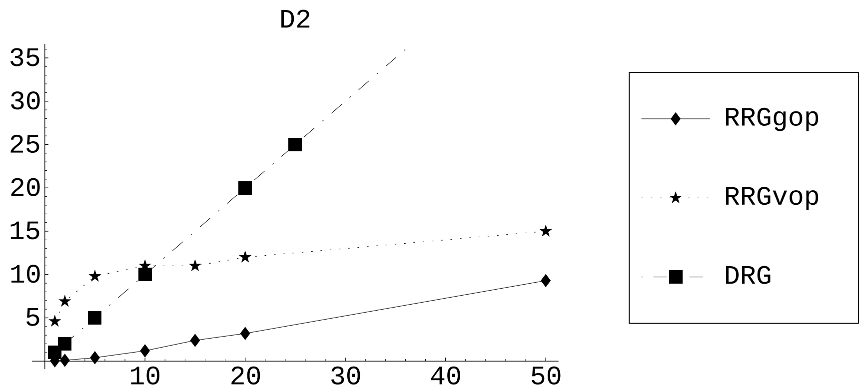


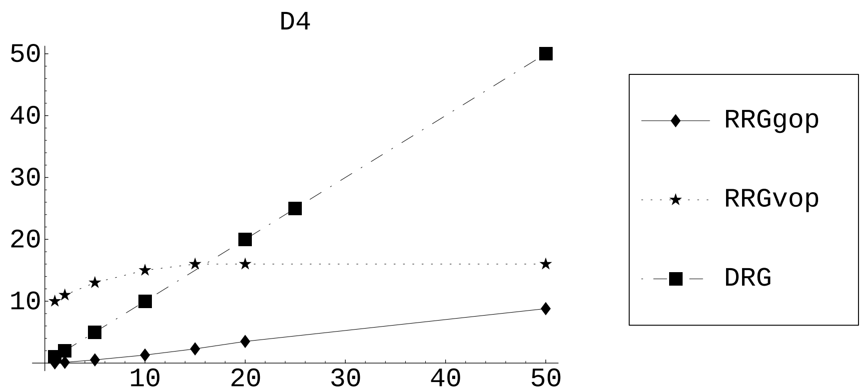




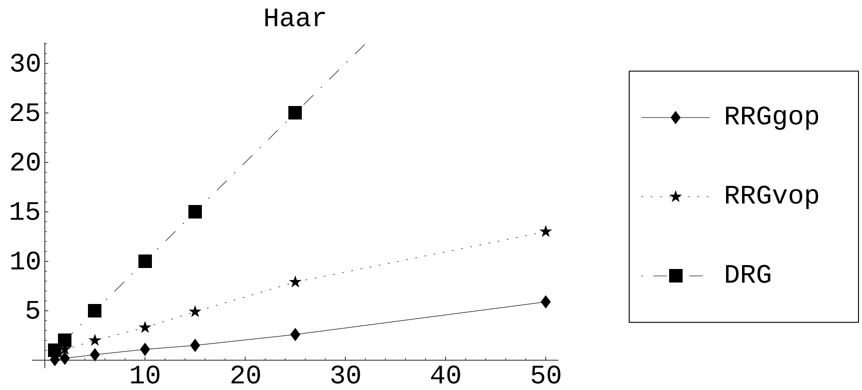
Primer 5 (grafički prikaz)

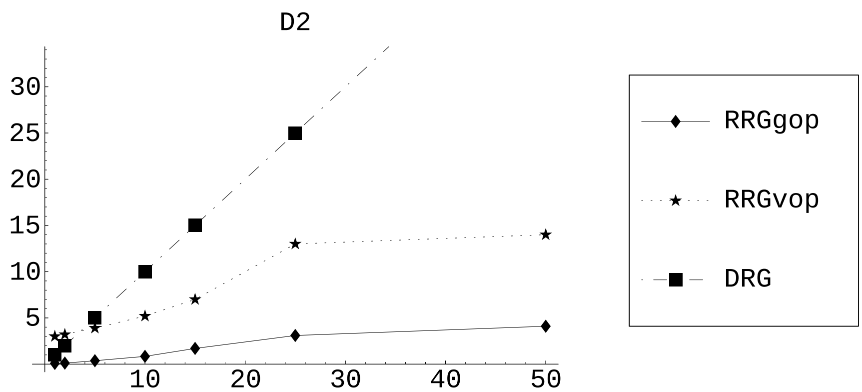


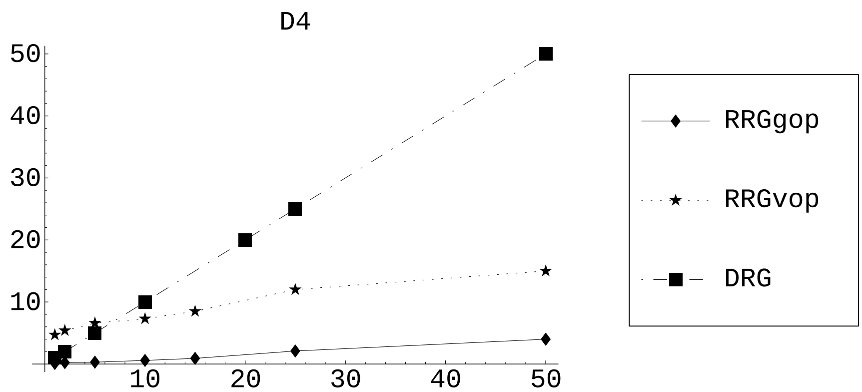




Primer 6 (grafički prikaz)

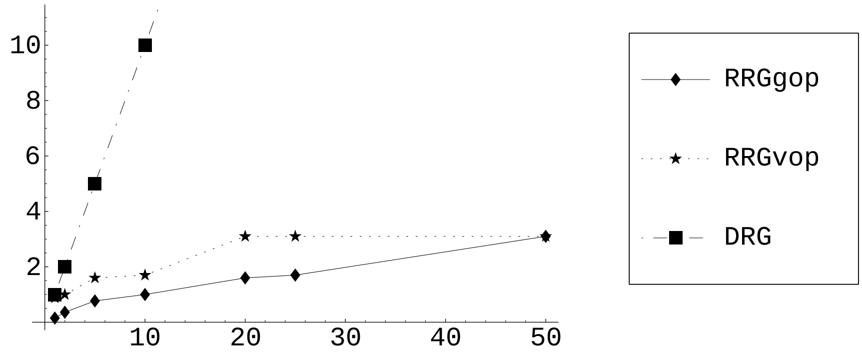




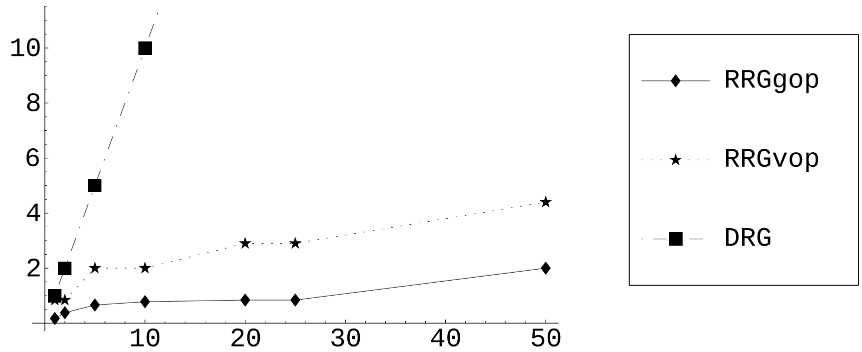


Primer 7 (grafički prikaz)

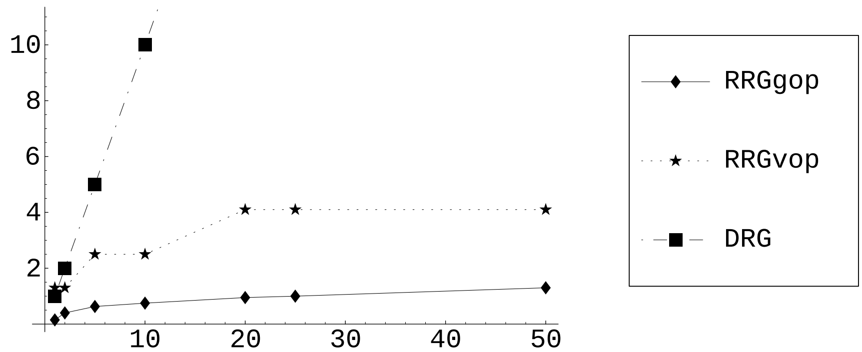
Haar



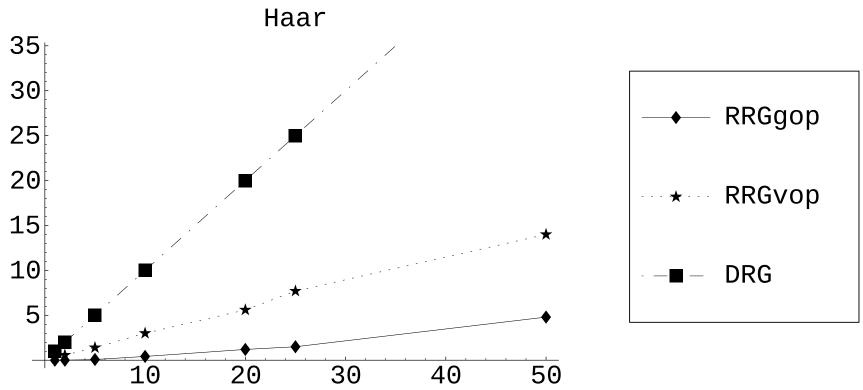
D2

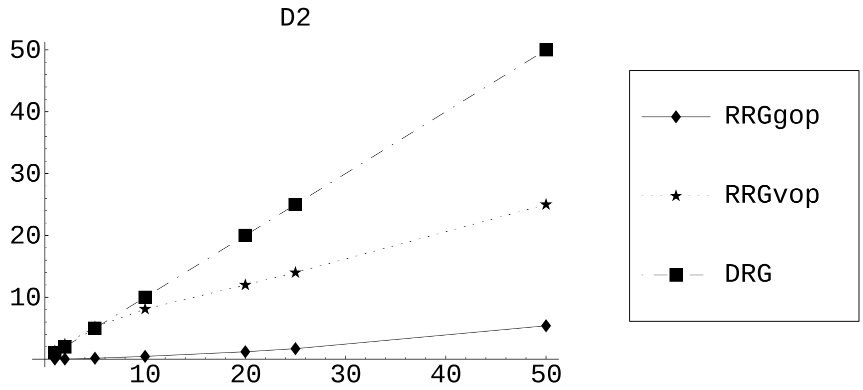


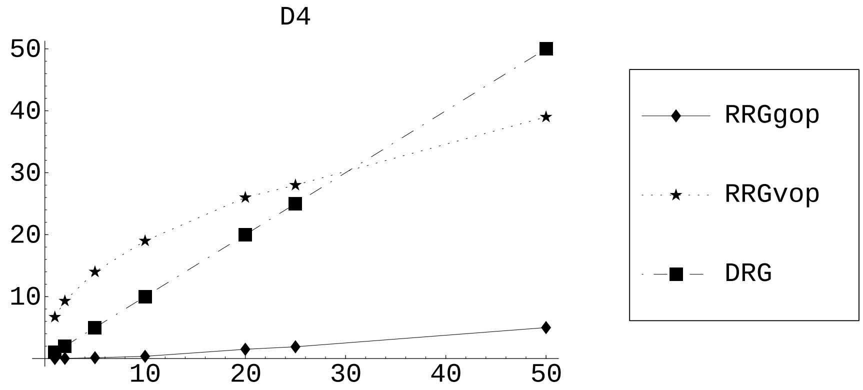
D4



Primer 8 (grafički prikaz)







Glava 6

Zaključak

Osnovno pitanje: Da li je opravdano dobijene zaključke primenjivati u praksi, na žalost, mora ostati bez odgovora. Razlog leži u tome što se rezultati dobijeni primenom zakona teorije verovatnoće ne mogu primenjivati na pojedinačni slučaj. U svakom slučaju, ukoliko je zahtev o dozvoljenoj relativnoj greški podredjen zahtevu o smanjenju dužine niza ulaznih podataka, moglo bi se reći da je primena dobijenih rezultata sasvim opravdana. Detaljnija analiza navedenih primera zahteva njihovu podelu po koeficijentima jednačine (2.2). U svim slučajevima kao "najlošija" se pokazala simulacija Diracove delta funkcije u primeru 3. Ako se izostave rezultati sa ovom funkcijom, mogu se doneti zaključci koji slede.

Ukoliko je dozvoljena relativna greška veća od `1%` razumno je koristiti Haarove koeficijente (u preostalih pet slučajeva samo jednom je premašena dozvoljena relativna greška). Ukoliko je dozvoljena relativna greška veća od `5%` razumno je koristiti D2 koeficijente (u preostalih pet slučajeva samo dva puta je premašena dozvoljena relativna greška). Od ta dva puta jednom učinjena relativna greška iznosi `5.7%` što je gotovo zanemarljivo. Ako je broj koeficijenata jednačine (2.2) osam, dobijene rezultate je razumno primenjivati u praksi tek kada je dozvoljena relativna greška veća od `20%`.

Tri su razloga zbog kojih je odstupanje dobijenih rezultata možda veće od očekivanih. Prvo, niz tačaka formiran od niza ulaznih koeficijenata ne mora biti ravnomerno rasporedjen u odgovarajućem skupu S_j. U cilju poboljšanja dobijenih rezultata trebalo bi odrediti kojem se zakonu raspodele povinjava niz ulaznih koeficijenata. Kao drugo, umesto korištenja pomenutih modifikacija u svakom koraku piramidalnog algoritma trebalo bi odrediti odgovarajuću funkciju $c_j(\varepsilon)$, što bi sigurno dalo bolje rezultate. Naravno, odgovarajući algoritam bi bio nešto složeniji i vreme izvršavanja bi bilo duže. Konačno, poslednji uzrok "loših" rezultata, čije bi otklanjane sigurno doprinelo njihovom poboljšanju, je dosta grubo odredjena mera skupova T_j. Sigurno je jedan od mogućih nastavaka ovog rada otklanjanje ovih nedostataka.

Sledeće pitanje koje se postavlja je izvodjenje analognih zaključaka u odnosu na neke druge norme (prvenstveno apsolutnu i uniformnu). Relativno jednostavno bi bilo dati odgovore u slučaju kada je (2.2) jednačina sa Haar-ovim koeficijentima zbog veoma jednostavne vizuelizacije. Sa druge strane, u prostorima veće dimenzije davanje odgovora na postavljeno pitanje bilo bi znatno komplikovanije. Osnovni problem bila bi činjenica da linearna preslikavanja definisana odgovarajućim matricama više nisu izometrije. Otvorena je svakako i mogućnost zamene zahteva o dozvoljenoj relativnoj grešci, npr. zahtevom da odredjeni procenat energije, koja je jednaka $\int_{\mathbb{R}}[f(x)]^2dx$, bude rekonstruisan.

Pored toga, svakako treba pomenuti i tehniku tzv. mekog odsecanja (engl. soft thresholding) koja umesto formule (3.3) za "korekciju" koeficijenata u prostorima talasića koristi formulu

$$\widetilde{b}_{J-j,n} = \begin{cases} 0, & |b_{J-j,n}| < \varepsilon \\ \dfrac{b_{J-j,n}}{|b_{J-j,n}|}(|b_{J-j,n}| - \varepsilon), & |b_{J-j,n}| \geq \varepsilon \end{cases}.$$

Zaključivanje prezentovano u ovom radu moglo bi se izvesti i sa ovom tehnikom odsecanja.

Na kraju, svakako treba spomenuti i otvoreno pitanje realizacije prezentiranih ideja sa biortogonalnim talasićima. Osnovni koncept biortogonalnosti je u tome da se polazi od dva niza multirezolucijskih prostora

$$\{0\} \subseteq \ldots \subseteq v_2 \subseteq v_1 \subseteq v_0 \subseteq v_{-1} \subseteq \ldots \subseteq L_2(\mathbb{R})$$

i

$$\{0\} \subseteq \ldots \subseteq \widetilde{v}_2 \subseteq \widetilde{v}_1 \subseteq \widetilde{v}_0 \subseteq \widetilde{v}_{-1} \subseteq \ldots \subseteq L_2(\mathbb{R}),$$

a za odgovarajuće prostore talasića se postavlja uslov $w_k \perp \widetilde{v}_k$ i $\widetilde{w}_k \perp v_k, k \in \mathbb{Z}$. I u slučaju biortogonalnih talasića razvijen je odgovarajući piramidalni algortiam. U matričnoj interpretaciji piramidalnog algoritma sa biortogonalnim talasićima matrice nisu uzajamno ortogonalne, nego su samo uzajamno inverzne.

Dodatak A

Mathematica kod programskog paketa WaveMath

```
(* Verzija Mathematica - e : 5.0
                       Ime : WaveMath.m
                     Autor : Zlatko Udovicic
                  Istorija : Verzija 1.0 (kraj 2004)
                             Verzija m (april 2005, koristena za
                             testiranje rezultata u
                             magistarskom radu)
                      Opis : Konstrukcija Daubechies koeficijenata
                             DJ i realizacija direktnog i inverznog
                             malotalasnog piramidalnog algoritma.
*)


BeginPackage["WaveMath`"];


mD0::usage =
     "Funkcija mD0[arg_] izdaje listu koeficijenata JT koji sa
      koeficijentima DJ arg zadovoljava uslove dvostruke
      ortogonalnosti.";

mFDb::usage =
     "Funkcija mFDb[arg_] izdaje listu Daubechies koeficijenata
      DJ duzine 2arg.";

mPKonstantama::usage =
```

```
     "Funkcija mPKonstantama produzava niz ulaznih
      koeficijenata konstantama.";

mPNulama::usage =
     "Funkcija mPNulama produzava niz ulaznih koeficijenata
      nulama.";

mPPeriodicno::usage =
     "Funkcija mPPeriodicno produzava niz ulaznih koeficijenata
      periodicno.";

mPSimetricno::usage =
     "Funkcija mPSimetricno produzava niz ulaznih koeficijenata
      simetricno.";

mDekompozicijaPA::usage =
     "Funkcija mDekompozicijaPA je realizacija direktnog
      malotalasnog piramidalnog algoritma.";

mProjekcije::usage =
     "Funkcija mProjekcije ima isti izlaz kao i funkcija
      mDekompozicijaPA, s tim sto su projekcije signala
      grupisane u liste.";

mRekonstrukcijaPA::usage =
     "Funkcija mRekonstrukcijaPA je realizacija inverznog
      malotalasnog piramidalnog algoritma.";

mFS::usage =
     "Funkcija mFS[argD_,argF_] izdaje listu vrijednosti
      funkcije skaliranja koja je odredjena koeficijentima DJ
      argF na mrezi gustine 2^(-argD).";

mTM::usage =
     "Funkcija mTM[argD_,argF_] izdaje listu vrijednosti
      talasica majke koji je odredjen koeficijentima DJ argF na
      mrezi gustine 2^(-argD).";

mS::usage =
     "Funkcija mS[argF_,argD_,arglk_:-1.,argdk_:1.]
      diskretizuje funkciju argF na intervalu [arglk,argdk] sa
      korakom 2^(-argD) (duzina niza izlaznih koeficijenata je
      2^argD).";
```

```
Begin["`Private`"];



Unprotect[mDO, mFDb, mPKonstantama, mPNulama, mPPeriodicno,
          mPSimetricno, mDekompozicijaPA, mProjekcije,
          mRekonstrukcijaPA, mFS, mTM, mS];


(* KOEFICIJENTI DILATACIONE JEDNACINE *)


(* Funkcija mDO pravi koeficijenta JT id koji sa zadanim
koeficijentima DJ ac zadovoljavaju uslov dvostruke ortogonalnosti.
*)

mDO[ac_ /; VectorQ[ac]] := Module [
     {id},
     id = Table[(-1)^(i + 1)*ac[[Length[ac] + 1 - i]],
          {i, 1, Length[ac]}];
     id
]

(* Daubechies koeficijenti DJ. Broj koeficijenata DJ (koji je
izlaz funkcije mFDb) je 2*ar, gdje je ar argument funkcije mFDb.
*)

mB[an_, ax_] := Sum[Binomial[an - 1 + k, k]*ax^k,
                {k, 0, an - 1}];
mFDb[ar_ /; (IntegerQ[ar] && ar > 0)] := Module [
     {ly, lz, lC, lK},
     ly = Table[NSolve[mB[ar, x] == 0, x][[k, 1, 2]],
          {k, 1, ar - 1}];
     lz = Table[
            If[Abs[NSolve[(x + x^(-1))/2 == 1 - 2*ly[[k]], x]
                   [[1, 1, 2]]] < 1,
              NSolve[(x + x^(-1))/2 == 1 - 2*ly[[k]], x]
              [[1, 1, 2]],
              NSolve[(x + x^(-1))/2 == 1 - 2*ly[[k]], x]
              [[2, 1, 2]]],
          {k, 1, ar - 1}];
     lC[x_] = (x + 1)^ar*Product[x - lz[[k]], {k, 1, ar - 1}];
     lC[x_] = NSolve[lK*lC[1] == Sqrt[2], lK][[1, 1, 2]]*lC[x];
     Reverse[Chop[CoefficientList[lC[x], x]]]
]
```

```
(* KRAJ KOEFICIJENATA DILATACIONE JEDNACINE *)


(* PIRAMIDALNI ALGORITAM *)


(* Funkcije mPKonstantama, mPPeriodicno i mPSimetricno u nizu
ulaznih koeficijenata a, koji je zadan kao lista duzine L,
pomjeraju indeks liste tako da ide od 0 do L - 1 i zadani niz
ulaznih koeficijenata produzavaju na odgovarajuci nacin tako sto
na poziciji k u nizu ulaznih koeficijenata postavljaju
odgovarajucu vrijednost. *)

mPKonstantama[a_ /; VectorQ[a], k_/; IntegerQ[k], cl_ /;
              NumericQ[cl], cd_ /; NumericQ[cd]]: = a[[k + 1]]
              /; 0 <= k && k <=Length[a] - 1;
mPKonstantama[a_ /; VectorQ[a], k_ /; IntegerQ[k], cl_ /;
              NumericQ[cl], cd_ /; NumericQ[cd]] := cl
              /; k < 0;
mPKonstantama[a_ /; VectorQ[a], k_ /; IntegerQ[k], cl_ /;
              NumericQ[cl], cd_ /; NumericQ[cd]] := cd
              /; k > Length[a] - 1;

mPNulama[a_ /; VectorQ[a], k_ /; IntegerQ[k]] :=
     mPKonstantama[a, k, 0, 0]

mPPeriodicno[a_ /; VectorQ[a], k_ /; IntegerQ[k]]:=
     a[[Mod[k, Length[a]] + 1]];

mPSimetricno[a_ /; VectorQ[a], k_ /; IntegerQ[k]] := Module [
     {pa},
     pa=Join[a,Reverse[a]];
     pa=mPPeriodicno[pa,k-1];
     pa
]

(* Funkcija mKorakPA izracunava k - tu koordinatu niza
koeficijenata aproksimacije na sljedecem nivou piramidalnog
algoritma. Za izracunavanje se koriste ulkazni koeficijenti S i
koeficijenati DJ F. Niz ulaznih koeficijenata a se produzava
pomocu funkcije mPS, dok se niz koeficijenata DJ produzava nulama.
*)

mKorakPA[S_, F_, k_, PS_] := Sum[mPNulama[F, i]*PS[S, 2*k + i],
                             {i, 0, Length[F] - 1}];
```

```
(* Modul mDekompozicijaPA izracunava koeficijente u FWT
piramidalnim algoritmom.
     Ulazni argumenti su :
                  Signal - niz koeficijenata na koji se
                           primjenjuje FWT.
     NFFilter i VFFilter - koeficijenti DJ i JT.
                           Podrazumijevana vrijednost su
                           Haarovi koeficijenti DJ i JT.
     Prva tri argumenta su liste.
                    Nivo - broj koraka koji treba izvrsiti ako
                           je to moguce (ako nije moguce ili se
                           ovaj argument izostavi, realizovace
                           se maksimalan broj koraka).
                       T - trag. Ukoliko je koeficijent
                           aproksimacije u prostorima talasica
                           manji po apsolutnoj vrijednosti od
                           traga T, zamjenjuje se nulom.
                           Podrazumijevana vrijednost je nula.
                      PS - funkcija kojom se definise nacin
                           produzenja miza ulaznih
                           koeficijenata. Podrazumijevana
                           vrijednost je periodicno produzenje.
     Na izlazu se izdaju koeficijenti aproksimacije i broj
realizovanih koraka algoritma. *)

mDekompozicijaPA[Signal_ /; VectorQ[Signal], NFFilter_:mFDb[1],
VFFilter_:mDO[mFDb[1]], Nivo_: - 1, T_:0, PS_:mPPeriodicno] :=
Module [
     {pSignal, pNivoMax, pL, Izlaz},
     If[Mod[Length[Signal], 2] == 0,
        pNivoMax = Min[Nivo, FactorInteger[Length[Signal]]
                              [[1, 2]]],
        pNivoMax = 0];
     If[pNivoMax < 0,
        pNivoMax = FactorInteger[Length[Signal]][[1, 2]]];
     pSignal = Signal;
     pL = Length[Signal]/2^pNivoMax;
     Izlaz = {};
     For[bNivoTek = pNivoMax, bNivoTek >= 1,
      {
       Izlaz = Join[Table[mKorakPA[pSignal, VFFilter, k, PS],
                     {k, 0,pL*2^(bNivoTek - 1) - 1}], Izlaz],
       pSignal = Table[mKorakPA[pSignal, NFFilter, k, PS],
                 {k, 0, pL*2^(bNivoTek - 1) - 1}]
      };
```

```
     bNivoTek--];
     Izlaz = Table[If[Abs[Izlaz[[i]]] < T, 0, Izlaz[[i]]],
             {i, 1, Length[Izlaz]}];
     Izlaz = Join[pSignal, Izlaz];
     {Izlaz, pNivoMax}
] /; (VectorQ[NFFilter] && VectorQ[VFFilter] &&
     IntegerQ[Nivo] && Nivo >= -1 && T >= 0)

(* Funkcija mProjekcije ima iste ulazne argumente kao i funkcija
mDekompozicijaPA, a izlaz joj je dvoelementna lista. Prvi element
liste je dvodimenziona lista u koju su smjesteni aproksimacija i
detalji dobijeni primjenom piramidalnog algoritma na niz ulaznih
koeficijenata. Drugi element liste je broj realizovanih koraka
piramidalnog algoritma. *)

mProjekcije[Signal_ /; VectorQ[Signal],NFFilter_:mFDb[1],
            VFFilter_:mDO[mFDb[1]], Nivo_: - 1, T_:0,
            PS_:mPPeriodicno] := Module
[
     {pSDek},
     pSDek = mDekompozicijaPA[Signal, NFFilter, VFFilter, Nivo,
                              T, PS];
     {Join[
      {Take[pSDek[[1]], {1, Length[pSDek[[1]]]/2^pSDek[[2]]}]},
            Table[
            Take[pSDek[[1]],
                {2^(k - pSDek[[2]] - 1)*Length[pSDek[[1]]] + 1,
                 2^(k - pSDek[[2]])*Length[pSDek[[1]]]}],
            {k, 1, pSDek[[2]]}]],
       pSDek[[2]]}
] /;   (VectorQ[NFFilter] && VectorQ[VFFilter] &&
       IntegerQ[Nivo] && Nivo >= -1 && T >= 0)

(* Funkcija mIP je klasican cjelobrojni dio broja x. Izlaz je
najveci cijeli broj koji nije veci od zadanog broja. *)

mIP[x_] := If[x > 0, IntegerPart[x], IntegerPart[x] - 1];

(* Funkcija mKorakIPA izracunava k - tu koordinatu vektora na
sljedecem nivou inverznog piramidalnog algoritma. Za izracunavanje
se koriste koeficijenti aproksimacije u prostorima talasica i
aproksimacionim prostorima koeficijenti DJ i JT. Kopeficijenti DJ
i JT se produzavaju nulama. Produzenje koeficijenata aproksimacije
je definisano funkcijama PNFS i PVFS. *)

mKorakIPA[NFS_, VFS_, NFF_, VFF_, k_, PNFS_, PVFS_] :=
```

```
     Sum[mPNulama[NFF, k - 2*i]*PNFS[NFS, i]
         +mPNulama[VFF, k - 2*i]*PVFS[VFS, i],
     {i, mIP[(k - Length[NFF] + 1)/2], mIP[k/2] + 1}];

(* Modul mRekonstrukcijaPA rekonstruise koeficijente aproksimacije
(na koji je primjenjena FWT) inverznim piramidalnim algoritmom.
     Ulazni argumenti su :
                  Signal - koeficijenti aproksimacije na koje
                           je primjenjen FWT.
     NFFilter i VFFilter - koeficijenti DJ i JT.
                           Podrazumijevana vrijednost su Harovi
                           koeficijenti.
     Prva tri argumenta su liste.
                    Nivo - broj koraka koji treba izvrsiti ako
                           je to moguce (ako nije moguce ili se
                           ovaj argument izostavi, realizovace
                           se maksimalan broj koraka).
             PNFS i PVFS - funkcije kojima se definise
                           produzenje koeficijenata
                           aproksimacije (u aproksimacionim i
                           prostorima talasica). Ako se
                           izostave, koeficijenti ce biti
                           produzeni periodicno.
Na izlazu se izdaje rekonstruisani niz ulaznih podataka i broj
realizovanih koraka algoritma. *)

mRekonstrukcijaPA[Signal_ /; VectorQ[Signal],NFFilter_:mFDb[1],
                 VFFilter_:mDO[mFDb[1]], Nivo_: - 1,
                 PNFS_:mPPeriodicno, PVFS_:mPPeriodicno] :=
Module [
     {pVFS, pNivoMax, pL, Izlaz},
     If[Mod[Length[Signal], 2] == 0,
        pNivoMax = Min[Nivo, FactorInteger[Length[Signal]]
                             [[1, 2]]],
        pNivoMax = 0];
     If[pNivoMax < 0,
        pNivoMax = FactorInteger[Length[Signal]][[1, 2]]];
     pL = Length[Signal]/2^pNivoMax;
     Izlaz = Take[Signal, {1, pL}];
     For[bNivoTek = pNivoMax, bNivoTek >= 1,
        {
         pVFS = Take[Signal, {2^(pNivoMax - bNivoTek)*pL + 1,
                     2^(pNivoMax - bNivoTek + 1)*pL}],
         Izlaz = Table[mKorakIPA[Izlaz, pVFS,
                       NFFilter, VFFilter, k, PNFS, PVFS],
                 {k, 0, 2^(pNivoMax - bNivoTek + 1)*pL - 1}]
```

```
        };
      bNivoTek--];
      {Izlaz, pNivoMax}
] /; (VectorQ[NFFilter] && VectorQ[VFFilter] && IntegerQ[Nivo]
      && Nivo>=-1)


(* KRAJ PIRAMIDALNOG ALGORITMA *)


(* Funkcije mFS i mTM izdaju listu vrijednosti funkcije skaliranja
i majke \ talasica izracunatih inverznim piramidalnim algoritmom
na mrezi gustine 2^aD. *)

mFS[aD_ /; (IntegerQ[aD] && aD >= 1), aF_ /; VectorQ[aF]] :=
Module [
      {pL},
      pL = Table[0, {(Length[aF] - 1)*2^aD}];
      pL[[1]] = 1;
      2^(aD/2)*mRekonstrukcijaPA[pL, aF, mDO[aF], aD][[1]]
] mTM[aD_ /; (IntegerQ[aD] && aD >= 1), aF_ /; VectorQ[aF]] :=
Module [
      {pL},
      pL = Table[0, {(Length[aF] - 1)*2^aD}];
      pL[[Length[aF]]] = 1;
      2^(aD/2)*mRekonstrukcijaPA[pL, aF, mDO[aF], aD][[1]]
]

(* Funkcija mS diskretizuje funkciju aF na intervalu [alk, adk] sa
korakom 2^(-aD) (duzina izlaznog signala je 2^aD). *)

mS[aF_, aD_, alk_: - 1., adk_:1.] := Table[
                            aF[alk + k*(adk -alk)/(2^aD - 1)],
                                    {k, 0, 2^aD - 1}]

End[];

Protect[mDO, mFDb, mFInt, mFSplajn, mPKonstantama, mPNulama,
mPPeriodicno, mPSimetricno, mDekompozicijaPA, mProjekcije,
mRekonstrukcijaPA, mFS, mTM, mS];


EndPackage[]
```

Bibliografija

[1] Beylkin Gregory, Coifman Ronald, Rokhlin Vladimir, *Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms*, I. Comm. Pure Appl. Math. 44, pp. 141183, 1991

[2] Chui K. Charles, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992

[3] Chui K. Charles, *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997

[4] Daubechies Ingrid, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992

[5] Mallat Stéphane, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998

[6] Meyer Yves, *Wavelets Algorithms and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993

[7] Radunović P. Desanka, *Talasići (wavelets)*, rukopis, 2004

[8] Strang Gilbert, Nguyen Truong, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996

[9] Sweldens Wim, *Construction and Application of Wavelets in Numerical Analysis*, PhD Thesis, 1994

[10] Keinert Fritz, *Numerical Stability of Biorthogonal Wavelet Transforms*, Adv. Comput. Math. 4, no. 1-2, pp. 1–26, 1991

[11] Sweldens Wim, Piessens Robert, *Quadrature Formulae and Asymptotic Error Expansions for Wavelet Approximations of Smooth Functions*, SIAM J. Numer. Anal. 31, no. 4, pp. 1240–1264, 1994

[12] Radunović Desanka, *Numeričke metode*, Univerzitet u Beogradu, 1998

[13] Blažić Novica, Bokan Neda, Lučić Zoran, Rakić Zoran, *Analitička geometrija*, Matematički fakultet, 2003

[14] Kurepa Svetozar, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, 1990

[15] Fihtengolc Grigorií Mihaílovic, *Kurs differencialnogo i integralnogo ischisleniya* III, Izdatelstvo "Nauka", 1969

[16] John W. Gray, *Mastering Mathematica, Programming Methods and Applications*, Academic Press, 1994

[17] Wolfram Stephen, *Mathematica Book*, Wolfram media, Cambridge university press, 1996

[18] http://www.amara.com/current/wavelet.html

[19] http://cm.bell-labs.com/who/wim/index.html

[20] http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/wavelet/wavelet.html

[21] http://www.ee.umanitoba.ca/ ferens/wavelets.html

[22] http://www.wavelets.org/

Sadržaj