UNIVERZITET U PRIŠTINI

PRIRODNO-MATEMATIČI FAKULTET

Mr Mazllum M.Cana

O NEKIM KRITERIJUMIMA INTEGRABILITETA JEDNE KLASE LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

PRIŠTINA, JANUAR 1977.

Duboku zahvalnost dugujem mentoru ovog rada Prof.Dr. Iliji A.Šapkarevu,koji mi je svestrano pomagao u toku izrade doktorske disertacije.

Isto tako posebno se zahvaljujem Prof.Dr.Dragoslavu S.Mitrinoviću,koji me je srdačno primio i doprineo svojim savetima i uputstvima da dodje do izrade ove disertacije.

Zahvaljujem se Pokrajinskoj zajednici za naučni rad Socijalističke Autonomne Pokrajine Kosova,čijim sredstvima je finansiran najveći deo ovog rada.

Veliku zahvalnost dugujem mojoj supruzi Fëllanëze Cani i dragoj deci,koji su zajedno samnom žrtvovali trud i vreme da bi ova disertacija ugledala svetlo dana.

S A D R Z A J

U V O D

Teorija linearnih diferencijalnih jednačina našla je široku primenu u mnogubrojnim tehničkim, fizičkim i astronomskim problemima. Stoga je proučavanju tih jednačina posvećena izvanredna pažnja. Neke klase linearnih diferencijalnih jednačina specialnog tipa, koje su od većeg značenja u primenjenoj matematici i u takozvanoj matematičkoj fizici, izazvale su takvo interesovanje, da u njima danas postoji jedna bogata literatura. Takve su, na primer:

1°. Bessel-ova jednačina (videti: [1]):

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0 \qquad (E_1)$$

$$(\nu = \text{const});$$

2°. Hill-ova jednačina (videti: [2]):

$$y''+[\phi(x)+\lambda]y = 0 \qquad (E_2)$$

gde je

$$\lambda = \text{const};$$

3°. Hipergeometriska jednačina ([2]):

$$x(x-1)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y'+\alpha\beta y = 0 \qquad (E_3)$$

$$(\alpha,\beta,\gamma = \text{const});$$

4°. Legendre-ova jednačina ([1]):

$$(x^2-1)y''+2xy'-\nu(\nu+1)y = 0 \qquad (E_4)$$

$$(\nu = \text{const});$$

5°. Laplace-oova jednačina ([1]);

$$(a_2x+b_2)y''+(a_1x+b_1)y'+(a_ox+b_o)y = 0 \qquad (E_5)$$

$$(a_\nu, b_\nu = \text{const});$$

i druge.

Nagli razvoj nauke i tehnike učinio je ovu problematiku aktuelnom i nametnuo potrebu da ova problematika bude predmet naših izučavanja i istraživanja.

Medjutim, poznato je, da klasa linearnih diferencijalnih jednačina koje se mogu integraliti pomoću kvadratura je veoma uzana. To znači da u opštem slučaju, na prvom pogledu, nije moguće prepoznati da li je ta jednačina integrabilna ili ne. S druge strane ne postoje opšte metode za nalaženje opštega rešenja tih jednačina u zatvorenom obliku. Zbog toga je bilo potrebno na različite načine ustanoviti različite metode za integraciju izvesnih klasa diferencijalnih jednačina.

Jedna takva metoda, koju ćemo primeniti u nekim delovima ove teze, jeste metoda reduktibilnost diferencijalnih jednačina.

Naime, koristeći metodu reduktibilnosti koja se pokazala vrlo efikasna mi istražujemo neke kriterijume integrabiliteta kod jedne klase linearnih diferencijalnih jednačina.

U vezi stim polazimo od linearne diferencijalne jednačine oblika

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = 0,$$

ili bolje oblika

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^{n-i}y = 0, \quad D = d/dx; \tag{j_1}$$

gde su koeficijenti $a_i(x)$ diferencijabilne funkcije od x u jednom intervalu (α,β) i $a_o \neq 0$ (videti: [3]).

Izraz
$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,D^{n-i}$$

zove se običan linearni diferencijalni operator n-tog reda, i može se označiti sa $M(x,D)$, odnosno sa M, t.j.

$$M \equiv M(x,D) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,D^{n-i}. \tag{j_2}$$

Izraz oblika

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,D^{n-i}y,$$

zove se diferencijalni ili operatorski polinom n-tog reda, i u ovom slučaju dobija oblik $M(x,D)y$ odnosno My, t.j.

$$My \equiv M(x,D)y \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^{n-i}y. \qquad (j_3)$$

Ako su data dva linearna diferencijalna operatora:

$$M \equiv M(x,D) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^{n-i}, \qquad N \equiv N(x,D) \equiv \sum_{j=0}^{m} b_j D^{m-j},$$

tada proizvod M.N znači da se operator M primenjuje na operator N, a pak proizvod N.M znači da se operator N primenjuje na operator M.

Lako se da zaključiti da je

$$M.Ny \neq N.My,$$

t.j. komutativni zakon za množenje diferencijalnih operatora ne važi. Naprimer, ako je $n=3$ i $m=2$ t.j. ako je

$$M = a_o D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3 \text{ i}$$
$$N = b_o D^2 + b_1 D + b_2,$$

dobijamo:

$$MNy \equiv (a_o D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3)(b_o D^2 + b_1 D + b_2)y = \{a_o b_o D^5 +$$
$$+[a_o(3b_o' + b_1) + a_1 b_o]D^4 + [a_o(3b_o'' + 3b_1' + b_2) +$$
$$+a_1(2b_o' + b_1) + a_2 b_o]D^3 + [a_o(b_o''' + 3b_1'' + 3b_2') +$$
$$+a_1(b_o'' + 2b_1' + b_2) + a_2(b_o' + b_1) + a_3 b_o]D^2 +$$
$$+[a_o(b_1''' + 3b_2'') + a_1(b_1'' + 2b_2') + a_2(b_1' + b_2) + a_3 b_1]D +$$
$$+a_o b_2''' + a_1 b_2'' + a_2 b_2' + a_3 b_2\}y,$$

i

$$NMy \equiv (b_o D^2 + b_1 D + b_2)(a_o D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3)y = \{a_o b_o D^5 +$$
$$+[b_o(2a_o' + a_1) + b_1 a_o]D^4 + [b_o(a_o'' + 2a_1' + a_2) + b_1(a_o' + a_1) +$$
$$+ b_2 a_o]D^3 + [b_o(a_1'' + 2a_2' + a_3) + b_1(a_1' + a_2) + b_2 a_1]D^2 +$$
$$+[b_o(a_2'' + 2a_3') + b_1(a_2' + a_3) + b_2 a_2]D + b_o a_3'' + b_1 a_3' +$$
$$+ b_2 a_3\}y,$$

odakle se neposredno zaključuje da je $MNy \neq NMy$.

Znači, komutativni zakon množenja operatora M i N, u opštem slučaju ne važi.

U vezi sa ovom osobinom diferencijalnih operatora mi dobijamo različite kriterijume integrabiliteta jedne klase linearnih diferencijalnih jednačina drugog i trećeg reda.

Problem drugog dela istraživanja u ovom radu jeste parametarsko pretstavljanje algebarskih i polinomskih rešenja unapred date linearne jednačine drugog reda.

GLAVA I

O JEDNOM POSTUPKU REDUKTIBILNOSTI JEDNE KLASE LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA DRUGOG REDA

1. Posmatramo, prvo, linearnu diferencijalnu jednačinu oblika

$$(\alpha f^2+\beta f+\gamma)y''+(af^2+bf+c)y'+(Af^2+Bf+C)y=0, \tag{1.1}$$

gde su:

$\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,A,B,C$ neodredjene konstante i $f=f(x)$ neodredjena diferencijalna funkcija od x.

Da bismo dobili kriterijume koje treba da zadovoljavaju koeficijenti: $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,A,B,C$ i funkcija $f(x)$ tako da jednačina (1.1) postane integrabilna, polazimo od diferencijalne jednačine oblika

$$\left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^{n-k}\right)y'+\left(\sum_{k=0}^{n} b_k f^{n-k}\right)y\right]'+$$

$$+A_1\left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^{n-k}\right)y'+\sum_{k=0}^{n} b_k f^{n-k}y\right]=0, \tag{1.2}$$

gde su:

a_k,b_k,A_1 $(k=0,1,2,\dots,n)$,

za sada neodredjene konstante.

Ako se u jednačini (1.2) izvrši označeno diferenciranje a zatim sredi, ona prelazi u jednačinu

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^{n-k}\right)y''+\left[\sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k f^{n-k-1}f'(x)+\sum_{k=0}^{n} b_k f^{n-k}+\right.$$

$$\left.+A_1\sum_{k=0}^{n} a_k f^{n-k}\right]y'+\left[\sum_{k=0}^{n}(n-k)b_k f^{n-k-1}f'(x)+A_1\sum_{k=0}^{n} b_k f^{n-k}\right]y=0 \tag{1.3}$$

Da bismo dobili pomenute kriterijume integrabiliteta jednačine (1.1), metod koji primenjujemo zahteva da stepeni polinoma u odnosu na f budu jednaki ispred y", y' i y u poslednoj jednačini.

Stim u vezi f'(x) mora biti linearna funkcija po f (videti: [4]):

$$f'(x) = pf+q, \quad (p,q = \text{konstante}) \tag{1.4}$$

Ako f'(x) iz (1.4) zamenimu u (1.3) dobija se jednačina

$$\left(\sum_{k=o}^{n} a_k f^{n-k}\right) y'' + \left[\sum_{k=o}^{n} (n-k) a_k (pf+q) f^{n-k-1} + \sum_{k=o}^{n} b_k f^{n-k} + \right.$$

$$\left. + A_1 \sum_{k=o}^{n} a_k f^{n-k}\right] y' + \left[\sum_{k=o}^{n} (n-k) b_k (pf+q) f^{n-k-1} + A_1 \sum_{k=o}^{n} b_k f^{n-k}\right] y = 0 . \tag{1.5}$$

Jednačina (1.2) smenom ...

$$\left(\sum_{k=o}^{n} a_k f^{n-k}\right) y' + \left(\sum_{k=o}^{n} b_k f^{n-k}\right) y = z, \tag{1.6}$$

prelazi u

$$z' + A_1 z = 0 . \tag{1.7}$$

Na ovaj način integracija jednačine (1.5) svodi se na integrabilan sistem linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda (1.6) i (1.7)

U vezi stim, u daljem radu, mi tražimo uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti:

$$\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, A, B, C$$

tako da jednačina (1.1) može da se napiše u obliku (1.5).

Dalje, iz jednačine (1.4), bitna su ova dva slučaja:

Prvi slučaj: $p \neq 0$ i drugi slučaj $p = 0$.

Za $p \neq 0$, dobijamo $f(x) = \dfrac{e^{p(x+c_1)} - q}{p}$; a za $p = 0$, iz (1.4) imamo $f(x) = qx + c_2$.

Mi ćemo, uzeti za prvi slučaj $f(x)=e^x$, a za drugi slučaj $f(x)=x$.

Napominjemo da ovim zadnim vrednostima za $f(x)$ problem koji posmatramo ne gubi svoju opštenost, a dobija se klasa linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, koji su od velikog značaja u teoriskim i praktičnim pitanjima.

1. U slučaju $f(x)=e^x$, jednačina (1.5) prelazi u

$$\left[\sum_{k=0}^{n} a_k e^{(n-k)x}\right] y'' + \left\{\sum_{k=0}^{n} [b_k + A_1 a_k + (n-k)a_k] e^{(n-k)x}\right\} y' +$$

$$+ \left\{\sum_{k=0}^{n} [A_1 b_k + (n-k) b_k] e^{(n-k)x}\right\} y = 0, \qquad (1.8)$$

a u slučaju $f(x)=x$ iz (1.5) dobija se jednačina

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}\right) y'' + \left\{\sum_{k=0}^{n} [b_k + A_1 a_k + (n-k+1) a_{k-1}] x^{n-k}\right\} y' +$$

$$+ \left\{\sum_{k=0}^{n} [A_1 b_k + (n-k+1) b_{k-1}] x^{n-k}\right\} y = 0 \qquad (1.9)$$

$$(a_{-1} = b_{-1} = 0).$$

Jednačina (1.8) biće ekvivalentna sa jednačinom (1.1), kada se u nju stavi $f(x)=e^x$, ako su zadovoljene sledeće relacije:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^{(n-k)x} = \left[\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k e^{(n-k-2)x}\right] (\alpha e^{2x} + \beta e^x + \gamma), \qquad (1.1.1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} [b_k + A_1 a_k + (n-k) a_k] e^{(n-k)x} = \left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{(n-k-2)x}\right] (a e^{2x} + b e^x + c), \qquad (1.1.2)$$

$$\sum_{k=0}^{n} [A_1 b_k + (n-k) b_k] e^{(n-k)x} = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{(n-k-2)x}\right] (A e^{2x} + B e^x + C) \qquad (1.1.3)$$

$(\alpha_k = \text{konstante})$; $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-2)$;

odnosno, bolje, u razvijenom obliku:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^{(n-k)x} = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_{k-2}\gamma + \alpha_{k-1}\beta + \alpha_k \alpha) e^{(n-k)x}, \tag{1.1.1'}$$

$$\sum_{k=0}^{n} [b_k + A_1 a_k + (n-k) a_k] e^{(n-k)x} = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_{k-2} c + \alpha_{k-1} b + \alpha_k a) e^{(n-k)x}, \tag{1.1.2'}$$

$$\sum_{k=0}^{n} [A_1 b_k + (n-k) b_k] e^{(n-k)x} = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_{k-2} C + \alpha_{k-1} B + \alpha_k A) e^{(n-k)x}, \tag{1.1.3'}$$

$$(\alpha_{-2} = \alpha_{-1} = 0).$$

Iz ovih triju poslednjih jednakosti slede respektivno ove relacije:

$$a_k = \alpha_{k-2}\gamma + \alpha_{k-1}\beta + \alpha_k \alpha, \quad (k=0,1,2,\ldots,n-2); \tag{1.1.4}$$

$$b_k + A_1 a_k + (n-k) a_k = \alpha_{k-2} c + \alpha_{k-1} b + \alpha_k, \tag{1.1.5}$$

$$A_1 b_k + (n-k) b_k = \alpha_{k-2} C + \alpha_{k-1} B + \alpha_k A, \tag{1.1.6}$$

odnosno, kada vrednost za a_k iz (1.1.4) uvrstimo u (1.1.5) dobija se

$$b_k = \alpha_{k-2}[c - A_1\gamma - (n-k)\gamma] + \alpha_{k-1}[b - A_1\beta - (n-k)\beta] + \\ + \alpha_k[a - A_1\alpha - (n-k)\alpha], \tag{1.1.7}$$

a kada (1.1.7) zamenimo u (1.1.6) proizlazi

$$\{[A_1 + (n-k)][a - A_1\alpha - (n-k)\alpha] - A\}\alpha_k + \{[A_1 + (n-k)][b - A_1\beta - (n-k)\beta] - \\ - B\}\alpha_{k-1} + \{[A_1 + (n-k)][c - A_1\gamma - (n-k)\gamma] - C\}\alpha_{k-2} = 0, \tag{1.1.8}$$

$$(\alpha_{-k} = 0; \ k=1,2,3,\ldots).$$

Poslednja jednačina daje nam mogućnost da odredimo nepoznate koeficijente α_k, tako naprimer:

za $k=0$, 1 iz (1.1.8) dobijaju se respektivno ove dve relacije:

$$(A_1+n)(a-A_1\alpha-n\alpha)-A=0, \tag{1.1.9}$$

$$\{[(A_1+n)-1][(a-A_1\alpha-n\alpha)+\alpha]-A\}\alpha_1 +$$
$$+\{[A_1+(n-1)][b-A_1\beta-(n-1)\beta]-B\}\alpha_0 = 0. \tag{1.1.10}$$

Iz jednačine (1.1.10), prema (1.1.9), proizlazi

$$\alpha_1 = \frac{[A_1+(n-1)][b-A_1\beta-(n-1)\beta]-B}{a+\alpha-2(A_1+n)\alpha}\alpha_0, \tag{1.1.11}$$

$$[a+\alpha-2(A_1+n)\alpha \neq 0];$$

za $k=2,3,4,\ldots$ dobijamo ostale vrednosti za α_k t.j.

$$\alpha_2 = \frac{\{[A_1+(n-2)][b-A_1\beta-(n-2)\beta]-B\}\alpha_1+\{[A_1+(n-2)][c-A_1\gamma-(n-2)\gamma]-C\}\alpha_0}{2[a+2\alpha-2(A_1+n)\alpha]} \tag{1.1.12}$$

$$\alpha_3 = \frac{\{[A_1+(n-3)][b-A_1\beta-(n-3)\beta]-B\}\alpha_2+\{[A_1+(n-3)][c-A_1\gamma-(n-3)\gamma]-C\}\alpha_1}{3[a+3\alpha-2(A_1+n)\alpha]} \tag{1.1.13}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_k = \frac{\{[A_1+(n-k)][b-A_1\beta-(n-k)\beta]-B\}\alpha_{k-1}+\{[A_1+(n-k)][c-A_1\gamma-(n-k)\gamma]-C\}\alpha_{k-2}}{k[a+k\alpha-2(A_1+n)\alpha]} \tag{1.1.14}$$

Posmatramo sada relacije koje se dobijaju za posebne vrednosti broja n, tako na primer: kada je $n=2,3$ i 4.

Ispitamo prvo slučaj $n=2$:

Iz relacije (1.1.1), (1.1.2) i (1.1.3) sledi da je $\alpha_k=0$, za $k=1,2,3,\ldots,n-2$; a iz (1.1.4), (1.1.7), (1.1.9), (1.1.10) i (1.1.8) dobijaju se respektivno sledeće relacije:

$$a_0 = \alpha_0\alpha, \tag{1.1.15}$$

$$a_1 = \alpha_0\beta, \tag{1.1.16}$$

$$a_2 = \alpha_0\gamma, \tag{1.1.17}$$

$$b_0 = (a-A_1\alpha-2\alpha)\alpha_0, \tag{1.1.18}$$

$$b_1 = (b - A_1\beta - \beta)\alpha_0, \tag{1.1.19}$$

$$b_2 = (c - A_1\gamma)\alpha_0, \tag{1.1.20}$$

$$(2+A_1)(a - A_1\alpha - 2\alpha) - A = 0, \tag{1.1.21}$$

$$(1+A_1)(b - A_1\beta - \beta) - B = 0, \tag{1.1.22}$$

$$A_1(c - A_1\gamma) - C = 0 \tag{1.1.23}$$

Rešavajući poslednje dve jednačine po A_1 proizlazi da za $\gamma \neq 0$:

$$A_1 = \frac{\beta C + (b - \beta - B)\gamma}{\beta c + (2\beta - b)\gamma}, \qquad (\beta c + (2\beta - b)\gamma \neq 0); \tag{1.1.24}$$

a iz relacija (1.1.23) i (1.1.21) dobija se

$$A_1[\alpha c + (4\alpha - a)\gamma] = \alpha C + (2a - 4\alpha - A)\gamma. \tag{1.1.25}$$

Najzad, ako stavimo vrednost za A_1 iz (1.1.24) u relacijama (1.1.25) i (1.1.23) dobijaju se respektivno ova dva uslova:

$$[\alpha c + (4\alpha - a)\gamma][\beta C + (b - \beta - B)\gamma] - [\beta c + (2\beta - b)\gamma][\alpha C + \\ + (2a - 4\alpha - A)\gamma] = 0, \tag{u_1}$$

$$c[\beta c + (2\beta - b)\gamma][\beta C + (b - \beta - B)\gamma] - \gamma[\beta C + (b - \beta - B)\gamma]^2 - \\ - C[\beta c + (2\beta - b)\gamma]^2 = 0. \tag{u_2}$$

Na osnovu navedenih činjenica, može se formulisati sledeći stav:

<u>Stav I.</u> Diferencijalna jednačina (1.1) je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_1) i (u_2).

Za slučaj $\gamma = 0$, iz (1.1.23) dobijamo

$$A_1 = C/c, \quad c \neq 0. \tag{1.1.26}$$

Iz relacija (1.1.21) i (1.1.22), imajući u vidu (1.1.26), dobijaju se sledeća dva uslova:

$$(2c + C)[c(a - 2\alpha) - \alpha C] - Ac^2 = 0, \tag{u_3}$$

$$(c + C)[c(b - \beta) - \beta C] - Bc^2 = 0. \tag{u_4}$$

Stav II. Diferencijalna jednačina (1.1), u kojoj je $\gamma=0$, je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_3) i (u_4).

Primer. Diferencijalna jednačina

$$(e^{2x}+2e^{x}+3)y''+(4e^{2x}+5e^{x}+6)y'+(3e^{2x}+2e^{x}+3)=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(e^{2x}+2e^{x}+3)y'+(e^{2x}+e^{x}+3)y=z,$$

$$z'+z=0.$$

Ispitujemo slučaj $n=3$:

Iz relacija (1.1 .1),(1.1 .2) i (1.1 .3) da se videti da je $\alpha_k=0$, za $(k=2,3,\dots,n-2)$; a iz (1.1′.4), (1.1 .7), (1.1 ,9), (1.1′.10) i (1.1′.8) dobijaju se respektivno ove relacije:

$$a_0=\alpha_0\alpha, \tag{1.1°.27}$$

$$a_1=\alpha_0\beta+\alpha_1\alpha, \tag{1.1°.28}$$

$$a_2=\alpha_0\gamma+\alpha_1\beta, \tag{1.1°.29}$$

$$a_3=\alpha_1\gamma, \tag{1.1°.30}$$

$$b_0=(a-\alpha A_1-3\alpha)\alpha_0, \tag{1.1°.31}$$

$$b_1=(b-\beta A_1-2\beta)\alpha_0+(a-\alpha A_1-2\alpha)\alpha_1, \tag{1.1°.32}$$

$$b_2=(c-\gamma A_1-\gamma)\alpha_0+(b-\beta A_1-\beta)\alpha_1, \tag{1.1°.33}$$

$$b_3=(c-\gamma A_1)\alpha_1, \tag{1.1°.34}$$

$$(3+A_1)(a-\alpha A_1-3\alpha)-A=0 \tag{1.1°.35}$$

$$[2(3+A_1)\alpha-a-\alpha]\alpha_1+[(2+A_1)(b-A_1\beta-2\beta)-B]\alpha_0=0, \tag{1.1°.36}$$

$$[(1+A_1)(b-A_1\beta-\beta)-B]\alpha_1+[(1+A_1)(c-A_1\gamma-\gamma)-C]\alpha_0=0, \tag{1.1°.37}$$

$$A_1(c-A_1\gamma)-C=0. \tag{1.1°.38}$$

Za $\gamma\neq 0$, iz (1.1°.38) i (1.1°.35) dobija se

$$A_1=\frac{\alpha C+(3a-9\alpha-A)\gamma}{\alpha c+(6\alpha-a)\gamma} \quad [\alpha c+(6\alpha-a)\gamma\neq 0];$$

a iz $(1.1^{\circ}.38)$ i $(1.1^{\circ}.36)$ sledi relacija

$$[\alpha_0\beta c+(4\alpha_0\beta-2\alpha\alpha_1-\alpha_0 b)\gamma]A_1-\alpha_0\beta C+$$
$$+(a\alpha_1+4\alpha_0\beta+\alpha_0 B-5\alpha_1\alpha-2\alpha_0 b)\gamma=0, \qquad (1.1^{\circ}.40)$$

dok iz $(1.1^{\circ}.38)$ i $(1.1^{\circ}.37)$ dobija se

$$[c(\alpha_0\gamma+\alpha_1\beta)+\gamma(2\alpha_1\beta+2\alpha_0\gamma-\alpha_0 c-\alpha_1 b)]A_1+\alpha_1\gamma B-$$
$$-\alpha_1\beta C+(\alpha_0\gamma+\alpha_1\beta-\alpha_0 c-\alpha_1 b)\gamma=0. \qquad (1.1^{\circ}.41)$$

Stavljajući $n=3$, relacija $(1.1^{\circ}.11)$ postaje

$$\alpha_1=\frac{(2+A_1)(b-A_1\beta-2\beta)-B}{a+\alpha-2(3+A_1)\alpha}\alpha_0\ ;\quad [a+\alpha-2(3+A_1)\alpha\neq 0]. \qquad (1.1^{\circ}.42)$$

Kada se u relacijama $(1.1^{\circ}.40)$ i $(1.1^{\circ}.41)$ uvrste vrednosti iz $(1.1^{\circ}.39)$ i $(1.1^{\circ}.42)$, dobijaju se sledeća dva uslova:

$$\{[\gamma(b-2\beta)-\beta c][\alpha C+(3a-9\alpha-A)\gamma]+[\beta C+\gamma(b-\beta-B)][\alpha c+(6\alpha-a)\gamma]\}\cdot$$
$$\{[\gamma(b-4\beta)-\beta c][\alpha C+(3a-9\alpha-A)\gamma]+[\beta C+\gamma(2b-4\beta-B)][\alpha c+(6\alpha-a)\gamma]\}+$$
$$+\{\gamma(c-\gamma)[\alpha c+(6\alpha-a)\gamma]-2\gamma^2[\alpha C+(3a-9\alpha-A)\gamma]\}\{\gamma(a-5\alpha)[\alpha c+(6\alpha-a)\gamma]-$$
$$-2\alpha\gamma[\alpha C+(3a-9\alpha-A)\gamma]\}=0, \qquad (u_5)$$

$$\alpha[\alpha C+(3a-9\alpha-A)\gamma]^2+(6\alpha-a)[\alpha C+(3a-9\alpha-A)\gamma][\alpha c+(6\alpha-a)\gamma]+$$
$$+(9\alpha-3a+A)[\alpha c+(6\alpha-a)\gamma]^2=0. \qquad (u_6)$$

Na osnovu izloženog, može se formulisati sledeći stav.

Stav III. Diferencijalna jednačina (1.1) je integrabilna ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_5) i (u_6).

Primer. Diferencijalna jednačina

$$(2e^{2x}-3e^x+6)y''+2(4e^{2x}+5e^x+6)y'+2(4e^{2x}+2e^x-9)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(4e^{3x}+12e^{2x}-15e^x+54)y'+2(4e^{3x}+40e^{2x}+57e^x+81)y=z,$$

$$z'-z=0.$$

Najzad, ispitujemo slučaj: $n=4$.

Iz relacija (1.1 .1),(1.1 .2) i (1.1 .3) očito je $\alpha_k = 0$, za $(k=3,4,5,\ldots,n-2)$; a iz (1.1 .4), (1.1 .7), (1.1 .9),(1.1 .10) i (1.1^{*}.8) proizilaze sledeće relacije:

$$a_0 = \alpha_0\alpha, \tag{1.1°.43}$$

$$a_1 = \alpha_0\beta + \alpha_1\alpha, \tag{1.1°.44}$$

$$a_2 = \alpha_0\gamma + \alpha_1\beta + \alpha_2\alpha, \tag{1.1°.45}$$

$$a_3 = \alpha_1\gamma + \alpha_2\beta, \tag{1.1°.46}$$

$$a_4 = \alpha_2\gamma, \tag{1.1°.47}$$

$$b_0 = (a - A_1\alpha - 4\alpha)\alpha_0, \tag{1.1°.48}$$

$$b_1 = (b - A_1\beta - 3\beta)\alpha_0 + (a - A_1\alpha - 3\alpha)\alpha_1, \tag{1.1°.49}$$

$$b_2 = (c - A_1\gamma - 2\gamma)\alpha_0 + (b - A_1\beta - 2\beta)\alpha_1 + (a - A_1\alpha - 2\alpha)\alpha_2, \tag{1.1°.50}$$

$$b_3 = (c - A_1\gamma - \gamma)\alpha_1 + (b - A_1\beta - \beta)\alpha_2, \tag{1.1°.51}$$

$$b_4 = (c - A_1\gamma)\alpha_2, \tag{1.1°.52}$$

$$(4+A_1)(a - A_1\alpha - 4\alpha) - A = 0, \tag{1.1°.53}$$

$$[2(4+A_1)\alpha - a - \alpha]\alpha_1 + [(3+A_1)(b - A_1\beta - 3\beta) - B]\alpha_0 = 0, \tag{1.1°.54}$$

$$2[2(4+A_1)\alpha - a - 2\alpha]\alpha_2 + [(2+A_1)(b - A_1\beta - 2\beta) - B]\alpha_1 + [(2+A_1)(c - A_1\gamma - 2\gamma) - C]\alpha_0 = 0, \tag{1.1°.55}$$

$$[(1+A_1)(b - A_1\beta - \beta) - B]\alpha_2 + [(1+A_1)(c - A_1\gamma - \gamma) - C]\alpha_1 = 0, \tag{1.1°.56}$$

$$A_1(c - A_1\gamma) - C = 0. \tag{1.1°.57}$$

Za $\gamma \neq 0$, iz (1.1^{0}.57) i (1.1^{0}.53), dobijamo

$$A_1 = \frac{\alpha C + (4a - 16\alpha - A)\gamma}{\alpha c + (8\alpha - a)\gamma}, \quad [\alpha c + (8\alpha - a)\gamma \neq 0]; \tag{s}$$

a iz relacija $(1.1^{o}.54)$,$(1.1^{o}.55)$,$(1.1^{o}.56)$, prema $(1.1^{o}.57)$, dobijaju se respektivno sledeće jednačine:

$$[(b\gamma-6\beta\gamma-\beta c)\alpha_0+2\alpha\alpha_1\gamma]A_1+[(\beta C+3b\gamma-9\beta\gamma-\gamma B)\alpha_0+\gamma(7\alpha-a)\alpha_1]=0, \qquad (1.1^{o}.58)$$

$$[(\beta c+4\beta\gamma-b\gamma)\alpha_1+4\gamma^2\alpha_0-4\alpha\gamma\alpha_2]A_1+(4\beta\gamma+\gamma B-2b\gamma-\beta C)\alpha_1+$$
$$+2\gamma(a-6\alpha)\alpha_2+2\gamma(2\gamma-c)\alpha_0=0, \qquad (1.1^{o}.59)$$

$$[(\beta c+2\beta\gamma-b\gamma)\alpha_2+2\gamma^2\alpha_1]A_1+(\beta\gamma+B\gamma-b\gamma-\beta C)\alpha_2+$$
$$+\gamma(\gamma-c)\alpha_1=0. \qquad (1.1^{o}.60)$$

Relacije (1.1 .11) i (1.1 .12), za $n=4$, postaju:

$$\alpha_1=\frac{(3+A_1)(b-A_1\beta-3\beta)-B}{a+\alpha-2(4+A_1)\alpha}\,\alpha_0\,, \qquad (1.1^{o}.61)$$

$$\alpha_2=\frac{[(2+A_1)(b-A_1\beta-2\beta)-B]\alpha_1+[(2+A_1)(c-A_1\gamma-2\gamma)-C]\alpha_0}{2[a+\alpha-2(4+A_1)\alpha]}. \qquad (1.1^{o}.62)$$

Iz relacija $(1.1^{o}.58)$, $(1.1^{o}.59)$ i $(1.1^{o}.60)$, prema $(1.1^{o}.61)$ i $(1.1^{o}.62)$, dobija se najzad uslov:

$$c[(b\gamma-2\beta\gamma-\beta c)(b\gamma-4\beta\gamma-\beta c)+8\alpha\gamma^3][(b\gamma-6\beta\gamma-\beta c)A_1+(\beta C+3b\gamma-9\beta\gamma-B\gamma)]A_1-$$
$$-C[(b\gamma-2\beta\gamma-\beta c)(b\gamma-4\beta\gamma-\beta c)+8\alpha\gamma^3][(b\gamma-6\beta\gamma-\beta c)A_1+(\beta C-6\beta\gamma-B\gamma)]+$$
$$+4\gamma^3[(a-7\alpha)-2\alpha A_1](C-cA_1)+A_1\gamma[(b\gamma-2\beta\gamma-\beta c)(\beta C+2b\gamma-4\beta\gamma-B\gamma)+$$
$$+(b\gamma-\beta\gamma-B\gamma+\beta C)(b\gamma-4\beta\gamma-\beta c)+4\gamma^2(7\alpha\gamma-a\gamma-\alpha c)][(b\gamma-6\beta\gamma-\beta c)A_1+$$
$$+(\beta C+3b\gamma-9\beta\gamma-B\gamma)]+2\gamma^3A_1[(c-2\gamma)(b\gamma-2\beta\gamma-\beta c)-2\gamma(b\gamma-\beta\gamma-B\gamma+\beta C)]\cdot$$
$$[(a-7\alpha)-2\alpha A_1]+\gamma[(b\gamma-\beta\gamma-B\gamma+\beta C)(\beta C+2b\gamma-4\beta\gamma-B\gamma)-2\gamma^2(a-6\alpha)(\gamma-c)]$$
$$[(b\gamma-6\beta\gamma-\beta c)A_1+(\beta C+3b\gamma-9\beta\gamma-B\gamma)]+2\gamma^3(c-2\gamma)(b\gamma-\beta\gamma-B\gamma+\beta C)\cdot$$
$$[(a-7\alpha)-2\alpha A_1]=0, \qquad (u_7)$$

a iz $(1.1^{o}.53)$, prema (s), proizilazi drugi uslov:

$$\alpha[\alpha C+(4a-16\alpha-A)\gamma]^2+(8\alpha-a)[\alpha C+(4a-16\alpha-A)\gamma][\alpha c+(8\alpha-a)\gamma]+$$
$$+(16\alpha-4a+A)[\alpha C+(8\alpha-a)\gamma]^2=0. \qquad (u_8)$$

Konačno, može se formulisati i četvrti stav.

Stav IV. Diferencijalna jednačina (1.1) je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_7) i (u_8).

Primer. Diferencijalna jednačina

$$(2e^{2x}+5e^{x}+1)y''+(8e^{2x}-e^{x}-3)y'+6e^{x}(e^{x}-1)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(2e^{4x}+7e^{3x}+\frac{13}{2}e^{2x}+\frac{9}{4}e^{x}+\frac{1}{4})y' + (6e^{4x}+7e^{3x}+\frac{9}{2}\ e^{2x}+\frac{5}{4}e^{x})y = z,$$

$$z'-3z=0.$$

U toku proučavanja ovog problema došao sam do sledećih rezultata:

I. Rezultati koji su dobijeni od profesora Mitrinovića u svome radu [5], za integrabilnost diferencijalne jednačine:

$$(e^{x}+1)y''=y,$$

obuhvaćeni su našim kriterijumima (u_1) i (u_2).

II. Veći broj diferencijalnih jednačina koje se nalaze u knjizi E.Kamke [1], oblika (1.1), obuhvaćeni u naše kriterijume integrabiliteta iskazanim stavovima I do IV. Takvi su na strani 369 zadatak 2.17, str.375, z.2.34; st.766, z.237a itd.

2^{o}. Ispitaćemo sada drugi slučaj posmatranog problema, naime za $f(x)=x$, jednačina (1.1) transformiše se u (videti:[12]):

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y''+(ax^2+bx+c)y'+(Ax^2+Bx+C)y=0, \tag{1.1'}$$

Jednačine (1.1') i (1.9) su ekvivalentne, ako su zadovoljene sledeće relacije:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k x^{n-k-2}\right)(\alpha x^2+\beta x+\gamma), \tag{1.2°.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}[b_k+A_1 a_k+(n-k+1)a_{k-1}]x^{n-k} =$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k x^{n-k-2}\right)(ax^2+bx+c), \tag{1.2°.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}[A_1 b_k+(n-k+1)b_{k-1}]x^{n-k}=\left(\sum_{k=0}^{n-2}\alpha_k x^{n-k-2}\right)(Ax^2+Bx+C), \qquad (1.2^o.3)$$

gde su:

$$\alpha_k = \text{konstante}, \quad (k=0,1,2,\ldots,n-2);$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_{k-2}\gamma+\alpha_{k-1}\beta+\alpha_k\alpha)x^{n-k}, \qquad (1.2^o.1')$$

$$(\alpha_{-2}=\alpha_{-1}=0);$$

$$\sum_{k=0}^{n}[b_k+A_1 a_k+(n-k+1)a_{k-1}]x^{n-k}\equiv\sum_{k=0}^{n}(\alpha_{k-2}c+\alpha_{k-1}b+\alpha_k a)x^{n-k}, \qquad (1.2^o.2')$$

$$\sum_{k=0}^{n}[A_1 b_k+(n-k+1)b_{k-1}]x^{n-k}\equiv\sum_{k=0}^{n}(\alpha_{k-2}C+\alpha_{k-1}B+\alpha_k A)x^{n-k}. \qquad (1.2^o.3')$$

Iz jednakosti $(1.2^o.1')$, $(1.2^o.2')$ i $(1.2^o.3')$ slede respektivno ove relacije:

$$a_k = \alpha_{k-2}\gamma+\alpha_{k-1}\beta+\alpha_k\alpha, \quad (k=0,1,2,\ldots,n). \qquad (1.2^o.4)$$

$$b_k+A_1 a_k+(n-k+1)a_{k-1} = \alpha_{k-2}c+\alpha_{k-1}b+\alpha_k a, \qquad (1.2^o.5)$$

$$A_1 b_k+(n-k+1)b_{k-1} = \alpha_{k-2}C+\alpha_{k-1}B+\alpha_k A \; . \qquad (1.2^o.6)$$

Kada a_k iz $(1.2^o.4)$ zamenimo u $(1.2^o.5)$, dobijamo

$$b_k = \alpha_{k-2}[c-A_1\gamma-(n-k+1)\beta]+\alpha_{k-1}[b-A_1\beta-(n-k+1)\alpha] + +\alpha_k(a-A_1\alpha)-(n-k+1)\gamma\alpha_{k-3}, \qquad (1.2^o.7)$$

a kada se b_k iz $(1.2^o.7)$ uvrsti u $(1.2^o.6)$ dobija se relacija

$$[A_1(a-A_1\alpha)-A]\alpha_k+\{A_1[b-A_1\beta-\alpha(n-k+1)]+(n-k+1)(a-A_1\alpha)-B\}\alpha_{k-1}+$$
$$+\{A_1[c-A_1\gamma-(n-k+1)\beta]+(n-k+1)[b-A_1\beta-(n-k+2)\alpha]-C\}\alpha_{k-2}+$$
$$+\{(n-k+1)[c-A_1\gamma-(n-k+2)\beta]-A_1(n-k+1)\gamma\}\alpha_{k-3}-(n-k+1)(n-k+2)\gamma\alpha_{k-4}=0$$
$$(\alpha_{-k}=0),\ \text{za}\ k=1,2,3,\dots,n\ . \qquad (1.2^{\circ}.8)$$

Iz poslednje jednačine tražise da se odrede nepoznati koeficijenti α_k. Stim uvezi, za $k=0,1$, iz $(1.2^{\circ}.8)$ proizilazu ove dve relacije

$$A_1(a-A_1\alpha)-A=0, \qquad (1.2^{\circ}.9)$$

$$A_1(b-A_1\beta-n\alpha)+n(a-A_1\alpha)-B=0, \qquad (1.2^{\circ}.10)$$

a za $k=2,3,4,\dots$ dobijaju se:

$$\alpha_1=\frac{A_1[c-A_1\gamma-(n-1)\beta]+(n-1)(b-A_1\beta-n\alpha)-C}{a-2\alpha A_1}\,\alpha_0 \qquad (1.2^{\circ}.11)$$

$$\alpha_2=\frac{\{A_1[c-A_1\gamma-(n-2)\beta]+(n-2)[b-A_1\beta-(n-1)\alpha]-C\}\alpha_1+}{}$$
$$+\frac{\{(n-2)[c-A_1\gamma-(n-1)\beta]-(n-2)\gamma A_1\}\alpha_0}{2(a-2\alpha A_1)}, \qquad (1.2^{\circ}.12)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_k=\frac{\{A_1[c-A_1\gamma-(n-k)\beta]+(n-k)[b-A_1\beta-(n-k+1)\alpha]-C\}\alpha_{k-1}+}{}$$

$$\frac{+\{(n-k)[c-A_1\gamma-(n-k+1)\beta]-A_1(n-k)\gamma\}\alpha_{k-2}-(n-k)(n-k+1)\gamma\alpha_{k-3}}{k(a-2\alpha A_1)}, \qquad (1.2^{\circ}.13)$$

$$(a-2\alpha A_1\neq 0).$$

Za ispitivanje, bitna su sledeći slučajevi: $n=2$, $n=3$ i $n=4$.

Prvi slučaj: za $n=2$, iz $(1.2^o.1)$, $(1.2^o.2)$ i $(1.2^o.3)$ proizilazi: $\alpha_k = 0$, za $k=1,2,3,\ldots,n-2$; a iz $(1.2^o.4)$, $(1.2^o.7)$, $(1.2^o.9)$, $(1.2^o.10)$ i $(1.2^o.8)$, dobijaju se sledeće relacije:

$$a_o = \alpha_o \alpha, \qquad (1.2^o.14)$$

$$a_1 = \alpha_o \beta, \qquad (1.2^o.15)$$

$$a_2 = \alpha_o \gamma, \qquad (1.2^o.16)$$

$$b_o = (a - A_1\alpha)\alpha_o, \qquad (1.2^o.17)$$

$$b_1 = (b - A_1\beta - 2\alpha)\alpha_o, \qquad (1.2^o.18)$$

$$b_2 = (c - A_1\gamma - \beta)\ \alpha_o, \qquad (1.2^o.19)$$

$$A_1(a - A_1\alpha) - A = 0, \qquad (1.2^o.20)$$

$$A_1(b - A_1\beta - 2\alpha) + 2(a - A_1\alpha) - B = 0, \qquad (1.2^o.21)$$

$$A_1(c - A_1\gamma - \beta) + (b - A_1\beta - 2\alpha - C) = 0. \qquad (1.2^o.22)$$

Za $\alpha \neq 0$, iz $(1.2^o.20)$ i $(1.2^o.21)$ sledi

$$A_1 = \frac{\alpha B - \beta A - 2a\alpha}{\alpha b - 4\alpha^2 - a\beta}, \quad (\alpha b - 4\alpha^2 - a\beta \neq 0); \qquad (1.2^o.23)$$

a iz $(1.2^o.20)$ i $(1.2^o.22)$ proizilazi

$$(\alpha c - 2\alpha\beta - a\gamma)A_1 + (\alpha b - 2\alpha^2 + A\gamma - \alpha C) = 0. \qquad (1.2^o.24)$$

Ako u jednačinama $(1.2^o.24)$ i $(1.2^o.20)$ uvrstimo $(1.2^o.23)$ dobijaju se, respektivno ova dva uslova:

$$(\alpha b - 2\alpha^2 + A\gamma - \alpha C)(\alpha b - 4\alpha^2 - a\beta) + (\alpha B - \beta A - 2a\alpha)(\alpha c - 2\alpha\beta - a\gamma) = 0, \qquad (u_9)$$

$$\alpha(\alpha B - \beta A - 2a\alpha)^2 - a(\alpha b - 4\alpha^2 - a\beta)(\alpha B - \beta A - 2a\alpha) + A(\alpha b - 4\alpha^2 - a\beta)^2 = 0. \qquad (u_{1o})$$

Znači, već možemo formulisati peti stav.

Stav V. Diferencijalna jednačina (1.1') je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_9) i (u_{10}).

Pretpostavimo sada da je $\alpha=0$.

Stavljajući $\alpha=0$ u $(1.2^o.20)$, $(1.2^o.21)$ i $(1.2^o.22)$ dobijaju se respektivno ove relacije:

$$A_1=A/a, \quad a\neq 0 \tag{1.2°.25}$$

$$A_1(b-A_1\beta)+2a-B=0, \tag{1.2°.26}$$

$$A_1(c-A_1\gamma-\beta)+(b-A_1\beta-C)=0, \tag{1.2°.27}$$

odnosno, ako A_1 iz $(1.2^o.25)$ uvrstimo u $(1.2^o.26)$ i $(1.2^o.27)$ dobijamo još dva uslova:

$$abA-\beta A^2+2a^3-a^2B=0, \tag{u_{11}}$$

$$acA-\gamma A^2-2a\beta A+a^2b-a^2C=0. \tag{u_{12}}$$

Najzad, možemo formulisati i šesti stav.

Stav VI. Diferencijalna jednačina (1.1'), u kojoj je $\alpha=0$, je integrabilna ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_{11}) i (u_{12}).

Primer. Diferencijalna jednačina

$$(x^2+2x+3)y''+(4x^2+5x+6)y'+(4x^2+2x-5)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(x^2+2x+3)y'+(2x^2-x-2)y=z,$$

$$z'+2z=0.$$

Drugi slučaj: $n=3$; iz $(1.2^o.1)$, $(1.2^o.2)$ i $(1.2^o.3)$ vidi se da je $\alpha_k=0$, za $(k=2,3,\dots,n-2)$; a iz $(1.2^o.4)$, $(1.2^o.7)$, $(1.2^o.9)$, $(1.2^o.10)$ i $(1.2^o.8)$ dobijaju se ove relacije:

$$a_0=\alpha_0\alpha, \tag{1.2°.28}$$

$$a_1=\alpha_0\beta+\alpha_1\alpha, \tag{1.2°.29}$$

$$a_2=\alpha_0\gamma+\alpha_1\beta, \tag{1.2°.30}$$

$$a_3 = \alpha_1\gamma, \qquad (1.2^\circ.31)$$

$$b_0 = (a - A_1\alpha)\alpha_0, \qquad (1.2^\circ.32)$$

$$b_1 = (b - A_1\beta - 3\alpha)\alpha_0 + (a - A_1\alpha)\alpha_1, \qquad (1.2^\circ.33)$$

$$b_2 = (c - A_1\gamma - 2\beta)\alpha_0 + (b - A_1\beta - 2\alpha)\alpha_1, \qquad (1.2^\circ.34)$$

$$b_3 = (c - A_1\gamma - \beta)\alpha_1 - \gamma\alpha_0, \qquad (1.2^\circ.35)$$

$$A_1(a - \alpha A_1) - A = 0, \qquad (1.2^\circ.36)$$

$$A_1(b - A_1\beta - 3\alpha) + 3(a - A_1\alpha) - B = 0, \qquad (1.2^\circ.37)$$

$$[A_1(b - A_1\beta - 2\alpha) + 2(a - A_1\alpha) - B]\alpha_1 + [A_1(c - A_1\gamma - 2\beta) + \\ + 2(b - A_1\beta - 3\alpha) - C]\alpha_0 = 0, \qquad (1.2^\circ.38)$$

$$[A_1(c - A_1\gamma - \beta) + (b - A_1\beta - 2\alpha) - C]\alpha_1 + (c - 2A_1\gamma - 2\beta)\alpha_0 = 0. \qquad (1.2^\circ.39)$$

Pod pretpostavkom da je $\alpha \neq 0$, iz $(1.2^\circ.36)$ i $(1.2^\circ.37)$ sledi

$$A_1 = \frac{\beta A + 3a\alpha - \alpha B}{6\alpha^2 + a\beta - \alpha b}, \quad (6\alpha^2 + a\beta - \alpha b \neq 0); \qquad (1.2^\circ.40)$$

a iz $(1.2^\circ.36)$ i $(1.2^\circ.38)$ biće:

$$(\alpha\alpha_1 b - 4\alpha^2\alpha_1 + \alpha_0\alpha c - 4\alpha\alpha_0\beta - a\alpha_1\beta - a\alpha_0\gamma)A_1 + (\alpha_1\beta + \alpha_0\gamma)A + \\ + \alpha(2a\alpha_1 - \alpha_1 B + 2\alpha_0 b - 6\alpha\alpha_0 - \alpha_0 C) = 0, \qquad (1.2^\circ.41)$$

dok iz $(1.2^\circ.36)$ i $(1.2^\circ.39)$ dobija se relacija

$$(\alpha\alpha_1 c - \alpha_1\gamma a - 2\alpha\alpha_1\beta - 2\alpha\alpha_0\gamma)A_1 + (\alpha_1\gamma A + \alpha\alpha_1 b + \alpha\alpha_0 c - \\ - 2\alpha^2\alpha_1 - \alpha\alpha_1 C - 2\alpha\alpha_0\beta) = 0. \qquad (1.2^\circ.42)$$

Stavljajući $n = 3$, iz jednačine $(1.1.11)$, nalazimo

$$\alpha_1 = \frac{A_1(c - A_1\gamma - 2\beta) + 2(b - A_1\beta - 3\alpha) - C}{a - 2\alpha A_1}\alpha_0; \quad (a - 2\alpha A_1 \neq 0), \qquad (1.2^\circ.43)$$

Iz jednačina $(1.2^{\circ}.41)$ i $(1.2^{\circ}.42)$, prema $(1.2^{\circ}.40)$ i $(1.2^{\circ}.43)$, dobija se prvi uslov:

$$\alpha[2\gamma(\beta A+3a\alpha-\alpha B)+(2\beta-c)(6\alpha^2+a\beta-\alpha b)][(\beta A+2a\alpha-\alpha B)$$
$$(6\alpha^2+a\beta-\alpha b)+(\alpha b-4\alpha^2-a\beta)(\beta A+3a\alpha-\alpha B)]+$$
$$+[(A\gamma+2\alpha b-6\alpha^2-\alpha C)(6\alpha^2+a\beta-\alpha b)+(\alpha c-4\alpha\beta-a\gamma)(A\beta+3a\alpha-\alpha B)]$$
$$[(A\gamma+\alpha b-2\alpha^2-\alpha C)(6\alpha^2+a\beta-\alpha b)+(\alpha c-2\alpha\beta-a\gamma)(\beta A+3a\alpha-\alpha B)]=0, \qquad (u_{13})$$

a iz $(1.2^{\circ}.36)$ i $(1.2^{\circ}.40)$ nalazimo drugi uslov

$$\alpha(\beta A+3a\alpha-\alpha B)^2-a(6\alpha^2+a\beta-\alpha b)(\beta A+3a\alpha-\alpha B)+A(6\alpha^2+a\beta-\alpha b)^2=0 \qquad (u_{14})$$

Istraživanja nam omogućuje da formulišemo i sedmi stav.

<u>Stav VII.</u> Diferencijalna jednačina $(1.1')$ je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_{13}) i (u_{14}).

<u>Primer</u>. Diferencijalna jednačina

$$(x^2-x+1)y''+(3x^2+x-2)y'+(2x^2+5x-1)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(x^3-3x^2+3x-2)y'+(2x^3-5x^2-x+3)y=z,$$
$$z'+z=0.$$

<u>Treći slučaj: $n=4$.</u>

Iz $(1.2^{\circ}.1)$, $(1.2^{\circ}.2)$ i $(1.2^{\circ}.3)$ očito je da:

$\alpha_k=0$, za $k=3,4,5,\dots,n-2$; a iz $(1.2^{\circ}.4)$, $(1.2^{\circ}.7)$, $(1.2^{\circ}.9)$, $(1.2^{\circ}.10)$ i $(1.2^{\circ}.8)$ proizilazu sledeće relacije:

$$a_0=\alpha_0\alpha, \qquad (1.2^{\circ}.44)$$
$$a_1=\alpha_0\beta+\alpha_1\alpha, \qquad (1.2^{\circ}.45)$$
$$a_2=\alpha_0\gamma+\alpha_1\beta+\alpha_2\alpha, \qquad (1.2^{\circ}.46)$$
$$a_3=\alpha_1\gamma+\alpha_2\beta, \qquad (1.2^{\circ}.47)$$
$$a_4=\alpha_2\gamma, \qquad (1.2^{\circ}.48)$$

$$b_0 = (a-\alpha A_1)\alpha_0, \qquad (1.2^0.49)$$

$$b_1=(b-A_1\beta-4\alpha)\alpha_0+(a-A_1\alpha)\alpha_1, \qquad (1.2^0.50)$$

$$b_2=(c-A_1\gamma-3\beta)\alpha_0+(b-A_1\beta-3\alpha)\alpha_1+(a-A_1\alpha)\alpha_2, \qquad (1.2^0.51)$$

$$b_3= (c-A_1\gamma-2\beta)\alpha_1+(b-A_1\beta-2\alpha)\alpha_2-2\gamma\alpha_0, \qquad (1.2^0.52)$$

$$b_4= (c-A_1\gamma-\beta)\alpha_2-\gamma\alpha_1, \qquad (1.2^0.53)$$

$$A_1(a-A_1\alpha)-A = 0, \qquad (1.2^0.54)$$

$$A_1(b-A_1\beta-4\alpha)+4(a-A_1\alpha)-B = 0, \qquad (1.2^0.55)$$

$$[A_1(b-A_1\beta-3\alpha)+3(a-A_1\alpha)-B]\alpha_1+[A_1(c-A_1\gamma-3\beta) + \\ +3(b-A_1\beta-4\alpha)-C]\alpha_0 = 0, \qquad (1.2^0.56)$$

$$[A_1(b-A_1\beta-2\alpha)+2(a-A_1\alpha)-B]\alpha_2+[A_1(c-A_1\gamma-2\beta) + \\ +2(b-A_1\beta-3\alpha)-C]\alpha_1+[2(c-A_1\gamma-3\beta)-2\gamma A_1]\alpha_0=0, \qquad (1.2^0.57)$$

$$[A_1(c-A_1\gamma-\beta)+(b-A_1\beta-2\alpha)-C]\alpha_2+[(c-A_1\gamma-2\beta)-\gamma A_1]\alpha_1-2\gamma\alpha_0=0. \qquad (1.2^0.58)$$

Za slučaj $\alpha\neq 0$, iz $(1.2^0.54)$ i $(1.2^0.55)$, dobija se

$$A_1 = \frac{\alpha B-\beta A-4a\alpha}{\alpha b-8\alpha^2-a\beta}, \quad (\alpha b-8\alpha^2-a\beta\neq 0); \qquad (1.2^0.59)$$

a iz $(1.2^0.54)$, $(1.2^0.56)$ i $(1.2^0.57)$ proizilaze respektivno ove dve relacije:

$$[(\alpha b-a\beta-6\alpha^2)\alpha_1+(\alpha c-a\gamma-6\alpha\beta)\alpha_0]A_1 + \\ +[(\beta A+3a\alpha-\alpha B)\alpha_1+(\gamma A+3\alpha b-12\alpha^2-\alpha C)\alpha_0] = 0, \qquad (1.2^0.60)$$

$$[(\alpha b-\beta a-4\alpha^2)\alpha_2+(\alpha c-\gamma a-4\alpha\beta)\alpha_1-4\alpha\gamma\alpha_0]A_1 + \\ +[(\beta A+2a\alpha-\alpha B)\alpha_2+(\gamma A+2\alpha b-6\alpha^2-\alpha C)\alpha_1+2\alpha(c-3\beta)\alpha_0] = 0, \qquad (1.2^0.61)$$

dok iz ($1.2^{\circ}.54$) i ($1.2^{\circ}.58$) sledi

$$[(\alpha c-\gamma a-2\alpha\beta)\alpha_2-2\alpha\gamma\alpha_1]A_1+[(\gamma A-2\alpha^2-\alpha C)\alpha_2+$$
$$+\alpha(c-2\beta)\alpha_1-2\alpha\gamma\alpha_0]=0 \qquad (1.2^{\circ}.62)$$

Stavljajući $n=4$ u ($1.1^{\circ}.11$) i ($1.1^{\circ}.12$), one se transformišu u:

$$\alpha_1=\frac{A_1(c-A_1\gamma-3\beta)+3(b-A_1\beta-4\alpha)-C}{a-2\alpha A_1}\,\alpha_0, \qquad (1.2^{\circ}.63)$$

$$\alpha_2=\frac{[A_1(c-A_1\gamma-2\beta)+2(b-A_1\beta-3\alpha)-C]\alpha_1+[2(c-A_1\gamma-3\beta)-2\gamma A_1]\alpha_0}{2(a-2\alpha A_1)}.$$
$$(1.2^{\circ}.64)$$

Iz ($1.2^{\circ}.60$), ($1.2^{\circ}.61$) i ($1.2^{\circ}.62$), imajući u obzir relacije ($1.2^{\circ}.59$), ($1.2^{\circ}.63$) i ($1.2^{\circ}.64$), sledi uslov:

$$[(\alpha c-4a\beta-a\gamma)(\alpha B-\beta A-4a\alpha)+(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)(2\alpha b-6\alpha^2-\alpha C+\gamma A]$$
$$[(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)(\alpha C-\gamma A-3\alpha b+12\alpha^2)-(\alpha c-6\alpha\beta-a\gamma)(\alpha B-\beta A-4a\alpha)]$$
$$[(\alpha c-2\alpha\beta-a\gamma)(\alpha B-\beta A-4a\alpha)+(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)\cdot(b\alpha-2\alpha^2-\alpha C+\gamma A)]-$$
$$-[(\alpha b-4\alpha^2-a\beta)(\alpha B-\beta A-4a\alpha)+(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)(2a\alpha-\alpha B+\beta A)].$$
$$\cdot\{2a\alpha^2\gamma(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)^2+[\alpha(c-2\beta)(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)-2\alpha\gamma(\alpha B-\beta A-4a\alpha)].$$
$$\cdot[(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)(\alpha C-\gamma A-3\alpha b+12\alpha^2)-(\alpha c-6\alpha\beta-a\gamma)(\alpha B-\beta A-4a\alpha)]\}-$$
$$-[2a\alpha^2(c-3\beta)(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)^2-4a\alpha^2\gamma(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)(\alpha B-\beta A-4a\alpha)].$$
$$\cdot[(\alpha c-2\alpha\beta-a\gamma)(\alpha B-\beta A-4a\alpha)+(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)(\alpha b-2\alpha^2-\alpha C+\gamma A)]=0, \qquad (u_{15})$$

a iz ($1.2^{\circ}.54$) i ($1.2^{\circ}.59$), dobija se drugi uslov:

$$\alpha(\alpha B-\beta A-4a\alpha)^2-a(\alpha B-\beta A-4a\alpha)(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)+$$
$$+A(b\alpha-8\alpha^2-a\beta)^2=0. \qquad (u_{16})$$

Na osnovu izloženih činjenica, dobili smo nov stav koji glasi:

Stav VIII. Diferencijalna jednačina (1.1') je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_{15}) i (u_{16}).

Primer. Diferencijalna jednačina

$$(x^2+2x-1)y''+2(x^2+3x+2)y'+(x^2+4x-1)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih diferencijalnih jednačina:

$$(x^4+2x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})y'+(x^4-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x-1)y=z,$$

$$z'+z=0.$$

Najzad, napominjemo sledeće: Prvo, ispitivanje nekih posebnih slučajeva, kao što su: $\alpha=0$ i $\alpha b-8\alpha^2-a\beta=0$; nismo unosili u ovu tezu, zbog racionalnosti same teze. Drugo, postupak koji smo izabrali u ovoj glavi može se proširiti i za ostale slučajeve, t.j. za $n=5,6,\ldots$, itd. Poteškoće koje se pojavljuju u radu su samo algebarske prirode.

U toku proučavanja posmatranog problema iz drugog poglavlja došao sam do sledećih zaključaka:

1^o. U poznatoj knjizi E. Kamke [1,st.393], navedeni su kriterijumi H.Görtler-a integrabiliteta diferencijalne jednačine

$$xy''+(ax^2+bx+c)y'+(Ax^2+Bx+C)y=0 \tag{E}$$

Jedan od njih je, kada koeficijenti ove jednačine zadovoljavaju relacije:

$$A=a(b+k),\ B=2a-bk-k^2 \text{ i } C=b(c-1)+k(c-2) \tag{a}$$

Ovaj kriterijum obuhvaćen je kao partikularan slučaj naših kriterijuma (u_{11}) i (u_{12}) iz stava VI; naime, ako u ova dva kriterijuma uvrstimo $\beta=1$ i $\alpha=\gamma=0$ dobija se uslov pod (a).

2^{o}. Kriterijumi integrabiliteta dobijenih od nas za posmatranu klasu diferencijalnih jednačina predstavljaju za te jednačine najopštije kriterijume i da najveći broj diferencijalnih jednačina koje se nalaze u knjizi [1] predstavljaju partikularan slučaj posmatrane jednačine (1.1') a njihovi koeficijenti zadovoljavaju naše dobijene kriterijume, iskazanih stavovima V,VI,VII i VIII. To je provereno na mnogubrojnim primerima sistematski iskažanih sa rešenjima u poznatoj knjizi E.Kamke.

3^{o}. Neki slučajevi integrabiliteta ove jednačine svode se na integraciju jednačine tretirane u [6].

4^{o}.H.Gortler u svome radu [14] navodi kriterijume integrabiliteta diferencijalne jednačine

$$y''+ay'+be^{2ax}y=0.$$

Ova jednačina obuhvaćena je kao partikularan slučaj jednačine (1.1),a njegovi koeficijenti zadovoljavaju uslove (u_1) i (u_2), iskazanim stavom I.

GLAVA II

O NEKIM DRUGIM POSTUPCIMA REDUKTIBILNOSTI LINEARNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

Naš cilj rasprave u ovoj glavi jeste dobijanje novih kriterijuma integrabiliteta diferencijalnih jednačina drugog reda oblika (1.1).t.j.

$$(\alpha f^2+\beta f+\gamma)y''+(af^2+bf+c)y'+(Af^2+Bf+C)y=0.$$

Naime, primenjujući metod reduktibilnosti diferencijalnih jednačina istražujemo kriterijume koje treba da zadovoljavaju koeficijenti:

$$\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,A,B,C$$

i diferencijabilna funkcija $f(x)$, pod uslovom da posmatrana jednačina bude integrabilna.

Zbog toga polazimo od diferencijalne jednačine, oblika:

$$(a_0f+a_1)[(b_0f+b_1)y'+(c_0f+c_1)y]'+(d_0f+d_1)[(b_0f+b_1)y'+(c_0f+c_1)y]=0, \tag{2.1}$$

a_k,b_k,c_k,d_k, $(k=0,1)$ neodredjene konstante.

Ako u jednačini (2.1) izvršimo označeno diferenciranje, a zatim sredimo, ona se transformiše u jednačinu oblika:

$$\begin{aligned}&[a_0b_0f^2+(a_0b_1+a_1b_0)f+a_1b_1]y''+[(a_0c_0+b_0d_0)f^2+a_0b_0ff'+\\&(a_0c_1+a_1c_0+b_1d_0+d_1b_0)f+a_1b_0f'+(a_1c_1+b_1d_1)]y'+\\&[c_0d_0f^2+(c_0d_1+d_0c_1)f+a_0c_0ff'+a_1c_0f'+c_1d_1]y=0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Budući da stepeni polinoma u odnosu na f moraju biti jednaki ispred y'', y' i y u poslednjoj jednačini, proizilazi da $f'(x)$ treba da je neka linearna funkcija po f, t.j.

$$f'(x)=pf+q,\quad (p,q=\text{const}). \tag{2.3}$$

Ako (2.3) uvrstimo u (2.2), dobija se jednačina

$$\begin{aligned}&[a_0b_0f^2+(a_0b_1+a_1b_0)f+a_1b_1]y''+[(a_0c_0+b_0d_0+a_0b_0p)f^2+\\&(a_0c_1+a_1c_0+b_1d_0+d_1b_0+a_0b_0q+a_1b_0p)f+(a_1c_1+b_1d_1+a_1b_0q)]y'+\end{aligned}$$

$$+[c_o(d_o+a_op)f^2+(c_od_1+d_oc_1+d_oa_oq+a_1c_op)f+(c_1d_1+a_1c_oq)]=0 \qquad (2.4)$$

Ako u jednačini (2.1) uvedemo smenu

$$(b_of+b_1)y'+(c_of+c_1)y=z, \qquad (2.5)$$

dobijamo

$$(a_of+a_1)z'+(d_of+d_1)z=0. \qquad (2.6)$$

To znači, integraciju jednačine (2.4) sveli smo na integrabilan sistem linearnih diferencijalnih jednačina prvoga reda.

Da bismo dobili uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti posmatrane jednačine (1.1), da ista postane integrabilna, mi ćemo za rešenje jednačine (2.3) uzeti:

$$1^o.\ f(x)=e^x \quad i \quad 2^o.\ f(x)=x,$$

zbog istih razloga koje smo spomenuli u prvoj glavi, kod jednačine (1.4).

U slučaju $f(x)=e^x$, polazeći od (2.4), dobijamo

$$[a_ob_oe^{2x}+(a_ob_1+a_1b_o)e^x+a_1b_1]y''+[(a_ob_o+a_oc_o+b_od_o)e^{2x}+$$

$$+(a_oc_1+a_1c_o+a_1b_o+b_1d_o+d_1b_o)e^x+(a_1c_1+b_1d_1)]y'+$$

$$+[(a_oc_o+c_od_o)e^{2x}+(c_od_1+d_oc_1+a_1c_o)e^x+c_1d_1]y=0, \qquad (2.7)$$

a u slučaju $f(x)=x$ iz (2.4), sledi

$$[a_ob_ox^2+(a_ob_1+a_1b_o)x+a_1b_1]y''+[(a_oc_o+b_od_o)x^2+$$

$$+(a_ob_o+a_oc_1+a_1c_o+b_1d_o+b_od_1)x+a_1b_o+a_1c_1+b_1d_1]y'+$$

$$[c_od_ox^2+(a_oc_o+c_od_1+c_1d_o)x+a_1c_o+c_1d_1]y=0. \qquad (2.8)$$

1^o. Jednačina (2.7) biće ekvivalentna sa jednačinom (1.1), ako i samo ako, su zadovoljene sledeće relacije:

$$a_ob_o=k\alpha, \qquad (2.1^o.1)$$

$$a_ob_1+a_1b_o=k\beta, \qquad (2.1^o.2)$$

$$a_1b_1=k\gamma, \qquad (2.1^o.3)$$

$$a_o b_o + a_o c_o + b_o d_o = ka, \qquad (2.1^o.4)$$

$$a_o c_1 + a_1 c_o + a_1 b_o + b_1 d_o + d_1 b_o = kb, \qquad (2.1^o.5)$$

$$a_1 c_1 + b_1 d_1 = kc, \qquad (2.1^o.6)$$

$$a_o c_o + c_o d_o = kA, \qquad (2.1^o.7)$$

$$c_o d_1 + d_o c_1 + a_1 b_o = kB, \qquad (2.1^o.8)$$

$$c_1 d_1 = kC, \ (k=\text{const}). \qquad (2.1^o.9)$$

U našem daljem radu, u zavisnosti od konstanata a_k, b_k, c_k, d_k $(k=0,1)$, razmotrićemo sledeće slučajeve:

I. $a_o b_o \neq 0$, II. $a_o = 0$, $b_o \neq 0$; III. $a_o \neq 0$, $b_o = 0$.

<u>Prvi slučaj:</u> $a_o b_o \neq 0$. Iz prve tri relacije, t.j. $(2.1^o.1)$ $(2.1^o.2)$ i $(2.1^o.3)$, dobijaju se ove dve relacije:

$$\frac{a_1}{a_o} = G, \qquad (2.1^o.10)$$

$$\frac{b_1}{b_o} = \frac{\beta}{\alpha} - G, \qquad (2.1^o.11)$$

gde je

$$G = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha};$$

a iz $(2.1^o.1)$, $(2.1^o.4)$ i $(2.1^o.7)$ proizilaze sledeće dve relacije:

$$\frac{c_o}{b_o} = H \qquad (2.1^o.12)$$

$$\frac{d_o}{a_o} = \frac{a}{\alpha} - 1 - H, \qquad (2.1^o.13)$$

gde je

$$H = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\alpha A}}{2\alpha};$$

dok iz $(2.1^o.1)$, $(2.1^o.6)$ i $(2.1^o.9)$ nalazimo još dve relacije

$$\frac{d_1}{a_o} = V, \qquad (2.1^o.14)$$

$$\frac{c_1}{b_o} = \frac{1}{G}\left[\frac{c}{\alpha} + \left(G - \frac{\beta}{\alpha}\right)V\right], \qquad (2.1^o.15)$$

gde je

$$V = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4G(\alpha G - \beta)C}}{2(\alpha G - \beta)}.$$

Kada vrednosti iz relacija $(2.1^o.10)$, $(2.1^o.11)$, $(2.1^o.12)$, $(2.1^o.13)$, $(2.1^o.14)$ i $(2.1^o.15)$ unesemo u $(2.1^o.8)$ i $(2.1^o.5)$ dobijaju se na kraju ova dva uslova:

$$[a-(1+H)\alpha][c+(\alpha G-\beta)V]+\alpha^2 GH(G+V)-\alpha GB = 0, \qquad (k_1)$$

$$\alpha[c+(\alpha G-\beta)V]+\alpha^2 G^2(1+H)+G(\beta-\alpha G)[a-(1+A)\alpha]+ \alpha G(\alpha V-b)] = 0. \qquad (k_2)$$

Tako smo dobili još jedan novi stav integrabiliteta.

<u>Stav IX.</u> Diferencijalna jednačina (1.1) je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (k_1) i (k_2).

<u>Primer</u>. Diferencijalna jednačina

$$(e^{2x}+3e^x+2)y''+(4e^{2x}+10e^x+3)y'+(3e^{2x}+9e^x+1)y = 0$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(e^x+1)y'+(3e^x+1)y = z,$$

$$(e^x+2)z'+z = 0.$$

<u>Drugi slučaj</u>: $a_o = 0$, $b_o \neq 0$. Stavljajući $a_o = 0$ u relacijama od $(2.1^o.1)$ do $(2.1^o.9)$, dobijaju se respektivno:

$$a_1 b_o = k\beta, \qquad (2.1^o.16)$$

$$a_1 b_1 = k\gamma, \qquad (2.1^o.17)$$

$$b_o d_o = ka, \qquad (2.1^o.18)$$

$$a_1c_o+a_1b_o+b_1d_o+d_1b_o=kb, \qquad (2.1^o.19)$$

$$a_1c_1+b_1d_1 = kc, \qquad (2.1^o.20)$$

$$c_od_o = kA, \qquad (2.1^o.21)$$

$$c_od_1+d_oc_1+a_1c_o=kB, \qquad (2.1^o.22)$$

$$c_1d_1=kC, \quad (k=\text{const}). \qquad (2.1^o.23)$$

Kada sistem jednačina: $(2.1^o.16)$, $(2.1^o.17)$, $(2.1^o.18)$, $(2.1^o.21)$, $(2.1^o.19)$ i $(2.1^o.23)$ rešavamo po nepoznatim koeficijentima: $a_1, b_1, d_o, c_o, d_1, c_1$, dobijamo sledeće relacije:

$$a_1=\frac{k\beta}{b_o}, \quad b_1=\frac{\gamma}{\beta}b_o, \quad d_o=\frac{ka}{b_o}, \quad c_o=\frac{A}{a}b_o,$$

$$d_1=\frac{a(b\beta-a\gamma)-\beta^2(a+A)}{a\beta b_o}k$$

i

$$c_1=\frac{ab_o\beta C}{a(b\beta-a\gamma)-\beta^2(a+A)}.$$

I najzad, kada dobijene vrednosti za: a_1, b_1, d_o, c_o, d_1 i c_1 uvrstimo u dve preostale relacije, t.j. $(2.1^o.20)$ i $(2.1^o.22)$, dobijaju se:

$$\gamma(a\beta b-a^2\gamma-a\beta^2-\beta^2A)^2-a\beta^2(a\beta b-a^2\gamma-a\beta^2-\beta^2A)c+ +a^2\beta^4C=0, \qquad (k_3)$$

$$A(ab\beta-a^2\gamma-a\beta^2-\beta^2A)^2+a^4\beta^2C+a\beta^2(ab\beta-a^2\gamma-a\beta^2-\beta^2A)A -a^2\beta(ab\beta-a^2\gamma-a\beta^2-\beta^2A)B=0 \qquad (k_4)$$

<u>Stav X.</u> Diferencijalna jednačina (1.1) je integrabilna ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (k_3) i (k_4).

<u>Primer</u>. Diferencijalna jednačina

$$(e^x+2)y''+(3e^{2x}+4e^x-3)y'-(6e^{2x}+3e^x-1)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem lineranih jednačina:

$$(e^x+2)y'-(2e^x+1)y=z,$$
$$z'+(3e^x-1)z=0.$$

Treći slučaj: $a_o\neq 0$, $b_o=0$. Stavljajući $b_o=0$ u relacijama od $(2.1^o.1)$ do $(2.1^o.9)$, dobijaju se respektivno sledeće relacije:

$$a_o b_1 = k\beta, \tag{2.1°.24}$$

$$a_1 b_1 = k\gamma, \tag{2.1°.25}$$

$$a_o c_o = ka, \tag{2.1°.26}$$

$$a_o c_1 + a_1 c_o + b_1 d_o = kb, \tag{2.1°.27}$$

$$a_1 c_1 + b_1 d_1 = kc, \tag{2.1°.28}$$

$$a_o c_o + c_o d_o = kA, \tag{2.1°.29}$$

$$c_o d_1 + d_o c_1 + a_1 c_o = kB, \tag{2.1°.30}$$

$$c_1 d_1 = kC. \tag{2.1°.31}$$

Kada sistem jednačina: $(2.1^o.24)$, $(2.1^o.25)$, $(2.1^o.26)$ $(2.1^o.29)$, $(2.1^o.27)$ i $(2.1^o.28)$ rešavamo po b_1, a_1, c_o, d_o, c_1 i d_1, dobijaju se respektivno:

$$b_1=\frac{k\beta}{a_o};\quad a_1=\frac{\gamma a_o}{\beta},\quad c_o=\frac{ka}{a_o},\quad d_o=\frac{A-a}{a}\,a_o,\quad (a\neq 0);$$

$$c_1=\frac{k[ab\beta-\beta^2(A-a)-a^2\gamma}{aa_o\beta},\quad (\beta\neq 0);$$

i

$$d_1 = \frac{ac\beta^2-\gamma[ab\beta-\beta^2(A-a)-a^2\gamma]}{a\beta^3},$$

a kada vrednosti za b_1, a_1, c_o, d_o, c_1 i d_1 zamenimo u $(2.1^o.31)$ i $(2.1^o.30)$ proizilaze respektivno ova dva uslova:

$$[ab\beta-\beta^2(A-a)-a^2\gamma]\{ac\beta^2-\gamma[ab\beta-\beta^2(A-a)-a^2\gamma]\}-$$
$$-a^2\beta^4C=0, \qquad (k_5)$$

i

$$a^2\{ac\beta^2-\gamma[ab\beta-\beta^2(A-a)-a^2\gamma]\}+$$
$$+\beta^2\{(A-a)[ab\beta-\beta^2(A-a)-a^2\gamma]\}+$$
$$+a^2\beta^2(a\gamma-\beta B)=0. \qquad (k_6)$$

Znači, na osnovu navedenih činjenica može se formulisati još jadan stav.

<u>Stav XI.</u> Diferencijalna jednačina (1.1) je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (k_5) i (k_6).

<u>Primer.</u> Diferencijalna jednačina

$$(e^x-3)y''-(e^{2x}+2e^x-8)y'+(2e^{2x}+7e^x-4)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$-y'+(e^x+2)y=z,$$
$$(e^x-3)z'-(3e^x-2)z=0.$$

2^o. Jednačina (2.8) biće ekvivalentna sa jednačinom (1.1'), ako i samo ako, su zadovoljene sledeće relacije (videti [13)]:

$$a_ob_o=k\alpha, \qquad (2.2^o.1)$$

$$a_ob_1+a_1b_o=k\beta, \qquad (2.2^o.2)$$

$$a_1b_1=k\gamma, \qquad (2.2^o.3)$$

$$a_o c_o + b_o d_o = ka, \tag{2.2°.4}$$

$$a_o b_o + a_o c_1 + a_1 c_o + b_1 d_o + b_o d_1 = kb, \tag{2.2°.5}$$

$$a_1 b_o + a_1 c_1 + b_1 d_1 = kc, \tag{2.2°.6}$$

$$c_o d_o = kA, \tag{2.2°.7}$$

$$a_o c_o + c_o d_1 + c_1 d_o = kB, \tag{2.2°.8}$$

$$a_1 c_o + c_1 d_1 = kC \tag{2.2°.9}$$

U zavisnosti od koeficijenata: a_k, b_k, c_k, d_k $(k=0,1)$, α, β i γ interesantno je proučiti ova tri slučaja:

I. $a_o b_o \neq 0$;

II. $a_o = 0,\ b_1 = 0,\ a_1 \neq 0,\ b_o \neq 0,\ \alpha=\gamma=0,\ \beta = 1$;

III. $a_o \neq 0,\ b_o = 0,\ a_1 = 0,\ b_1 \neq 0,\ \alpha = \gamma = 0,\ \beta = 1$,

<u>Prvi slučaj</u>: $a_o b_o \neq 0$. Iz prvi tri relacije, t.j. (2.2°.1) (2.2°.2) i (2.2°.3), proizilaze ove dve relacije:

$$\frac{a_1}{a_o} = p, \tag{2.2°.10}$$

$$\frac{b_1}{b_o} = \frac{\beta}{\alpha} - p, \tag{2.2°.11}$$

gde je:

$$p = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2};$$

a iz (2.2°.1), (2.2°.4) i (2.2°.7), dobijamo sledeće dve relacije:

$$\frac{d_o}{a_o} = q, \tag{2.2°.12}$$

$$\frac{c_o}{b_o} = \frac{a}{\alpha} - q, \tag{2.2°.13}$$

gde je:

$$q=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4\alpha A}}{2};$$

dok iz $(2.2^o.1)$, $(2.2^o.6)$ i $(2.2^o.9)$ slede još dve relacije:

$$\frac{d_1}{a_o}=t, \qquad (2.2^o.14)$$

$$\frac{c_1}{b_o}=\frac{c-\alpha p}{\alpha p}-\frac{\beta-\alpha p}{\alpha p}\cdot\frac{d_1}{a_o}, \qquad (2.2^o.15)$$

gde je

$$t=\frac{(c-\alpha p)\pm\sqrt{(c-\alpha p)^2-4p(\beta-\alpha p)(c-ap+\alpha pq)}}{2(\beta-\alpha p)}.$$

Kada vrednosti iz relacija $(2.2^o.10)$, $(2.2^o.11)$, $(2.2^o.12)$, $(2.2^o.13)$, $(2.2^o.14)$ i $(2.2^o.15)$ zamenimo u $(2.2^o.8)$ i $(2.2^o.7)$ dobijamo na kraju ova dva uslova:

$$p(a-\alpha q)(1+t)+[c-\alpha p-(\beta-\alpha p)t]q-pB=0, \qquad (k_7)$$

$$p\alpha+[(c-\alpha p)-(\beta-\alpha p)t]+p^2(a-\alpha q)+$$
$$+pq(\beta-\alpha p)+p(\alpha t-b)=0. \qquad (k_8)$$

Na osnovu izloženih činjenica dobili smo još jedan kriterijum integrabiliteta, koji ćemo formulisati u sledećem stavu.

Stav XII. Diferencijalna jednačina (1.1') je integrabilna, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (k_7) i (k_8).

Drugi slučaj: $a_o=b_1=0$, $a_1\neq 0$, $b_o\neq 0$, $\alpha=\gamma=0$, $\beta=1$.

Stavljajući $a_o=b_1=0$, $\alpha=\gamma=0$ i $\beta=1$ u relacijama od $(2.2^o.1)$ do $(2.2^o.9)$, dobijaju se respektivno sledeće relacije:

$$a_1b_o = k, \tag{2.2°.16}$$

$$b_od_o = ka, \tag{2.2°.17}$$

$$a_1c_o+b_od_1 = kb, \tag{2.2°.18}$$

$$a_1b_o+a_1c_1 = kc, \tag{2.2°.19}$$

$$c_od_o = kA, \tag{2.2°.20}$$

$$c_od_1+c_1d_o = kB, \tag{2.2°.21}$$

$$a_1c_o+c_1d_1 = kC. \tag{2.2°.22}$$

Kada prvih pet relacija rešavamo po a_1, d_o, c_1, d_1 nalazimo sledeće vrednosti:

$$a_1 = \frac{k}{b_o}, \quad d_o = \frac{ka}{b_o}, \quad c_1 = (c-1)b_o, \quad d_1 = \frac{k}{b_o}(b-\frac{A}{a});$$

a kada ove poslednje vrednosti uvrstimo u dve preostale relacije t.j. (2.2°.21) i (2.2°.22), dobijaju se ova dva uslova:

$$A(ab-A)+a^3(c-1)-a^2B = 0, \tag{k_9}$$

$$A+(ab-A)(c-1)-aC = 0. \tag{k_{10}}$$

<u>Stav XIII.</u> Diferencijalna jednačina (1.1') pod uslovom $a_o=b_1=0$, $a_1 \neq 0$, $b_o \neq 0$, $\alpha=\gamma=0$ i $\beta=1$, je integrabilna ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (k_9) i (k_{10}).

<u>Treći slučaj:</u> $a_o \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_1 = b_o = 0$, $\alpha=\gamma=0$ i $\beta=1$. Ako u relacije od (2.2°.1) do (2.2°.9) uvrstimo $a_1=b_o=0$, $\alpha=\gamma=0$ i $\beta=1$, dobijaju se respektivno ove jednakosti:

$$a_o b_1 = k, \tag{2.2°.23}$$

$$a_o c_o = ka, \tag{2.2°.24}$$

$$a_o c_1 + b_1 d_o = kb, \tag{2.2°.25}$$

$$b_1 d_1 = kc, \tag{2.2°.26}$$

$$c_o d_o = kA, \tag{2.2°.27}$$

$$a_o c_o + c_o d_1 + c_1 d_o = kB, \tag{2.2°.28}$$

$$d_1 c_1 = kC. \tag{2.2°.29}$$

Rešavajući prvih pet jednakosti po a_o, c_o, d_o, c_1 i d_1, dobijaju se sledeće vrednosti:

$$a_o = \frac{k}{b_1}, \quad c_o = ab_1, \quad d_o = \frac{kA}{ab_1},$$

$$c_1 = (b - \frac{A}{a})b_1 \quad \text{i} \quad d_1 = \frac{kc}{b_1}.$$

Kada poslednje vrednosti za a_o, c_o, d_o, c_1 i d_1 uvrstimo u dve preostale jednakosti, dobijaju se respektivno ova dva uslova:

$$a^3(1+c) + A(ab-A) - a^2B = 0, \tag{k_{11}}$$

$$c(ab-A) - aC = 0. \tag{k_{12}}$$

Znači, dobili smo sledeći stav.

<u>Stav XIV</u>. Diferencijalna jednačina (1.1'), pod uslovom $a_o \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_1 = b_o = 0$, $\alpha = \gamma = 0$ i $\beta = 1$, je integrabilna ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (k_{11}) i (k_{12}).

<u>Primer.</u> Diferencijalna jednačina

$$(x^2+3x+2)y'' + (4x^2+7x+3)y' + (3x^2+2x+2)y = 0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(x+1)y'+xy=z,$$

$$(x+2)z'+(3x+1)z=0.$$

Na osnovu naših istraživanja, u ovoj glavi došli smo do sledećih važnih konstatacija:

1. H.Görtler u poznatoj knjizi [1, st.393] navodi kriterijume integrabiliteta jednačine (E). Dva od njih su kada konstante:

$$a,b,c,A,B,C$$

zadovoljavaju relacije:

$$A=a(b+k),\quad B=a(c+1)-k(b+k),\quad C=-ck; \tag{b}$$

$$A=-ak,\quad B=a(c-1)-k(b+k),\quad C=b(c-1)+k(c-2) \tag{v}$$

Lako se da pokazati da poznati kriterijumi (b) i (v) dobijeni od H.Görtlera predstavljaju partikularne slučajeve naših dobijenih kriterijuma koji su formulisani u stavu X_{II}.

2. Neki slučajevi integrabiliteta ove jednačine svode se na integraciju jednačine koja je razmatrana u radovima [7] i [8]

U ovom dodatnom delu druge glave, obradjivačemo pitanje integrabiliteta date diferencijalne jednačine (1.1), predstavljajući je u obliku:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^{n-k}\right)(y' - ry)' + \sum_{k=0}^{n} b_k f^{n-k}(y' - ry) = 0, \qquad (2.1.1)$$

gde su:

a_k , b_k, $(k=0,1,2,\ldots n)$ i r

za sada neodredjene konstante.

Ako u ovoj jednačini, uvedemo smenu

$$y' - ry = z, \qquad (2.1.2)$$

dobijamo

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^{n-k}\right) z' + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k f^{n-k}\right) z = 0. \qquad (2.1.3)$$

Na taj način, pitanje integracije jednačine (1.1) svedeno je na pitanje integracije sistema linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda (2.1.2) i (2.1.3).

Jednačina (2.1.1), posle izvršenog diferenciranja i sredjivanja, postaje

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^{n-k}\right) y'' + \left[\sum_{k=0}^{n} (b_k - ra_k) f^{n-k}\right] y' - \left(\sum_{k=0}^{n} rb_k f^{n-k}\right) y = 0 \qquad (2.1.4)$$

Da bi poslednja jednačina (2.1.4) bila ekvivalentna sa datom jednačinom (1.1), treba da budu zadovoljene sledeć relacije:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k f^{n-k-2}\right)(\alpha f^2 + \beta f + \gamma), \qquad (2.1.5)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (b_k - ra_k) f^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k f^{n-k-2}\right)(af^2 + bf + c), \qquad (2.1.6)$$

$$\sum_{k=0}^{n} rb_k f^{n-k} = -\left(\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k f^{n-k-2}\right)(Af^2 + Bf + C); \qquad (2.1.7)$$

$(\alpha_k = \text{konstante})$; $(k=0,1,2,\ldots,n-2)$;

odnosno bolje, u razvijenom obliku:

$$\sum_{k=o}^{n} a_k f^{n-k} = \sum_{k=o}^{n} (\alpha_{k-2}\gamma+\alpha_{k-1}\beta+\alpha_k\alpha)f^{n-k}, \qquad (2.1.5')$$

$$\sum_{k=o}^{n}(b_k-ra_k)f^{n-k} = \sum_{k=o}^{n}(\alpha_{k-2}c+\ \alpha_{k-1}b+\alpha_k a)f^{n-k}, \qquad (2.1.6')$$

$$\sum_{k=o}^{n} rb_k f^{n-k} = -\sum_{k=o}^{n}(\alpha_{k-2}C+\alpha_{k-1}B+\alpha_k A)f^{n-k}, \qquad (2.1.7')$$

$$(\alpha_{-2}=\alpha_{-1}=0).$$

Iz ove tri poslednje jednakosti slede respektivno ove relacije

$$a_k = \alpha_{k-2}\gamma+\alpha_{k-2}\beta+\alpha_k\alpha, \quad (k=0,1,2,\ldots,n-2) \qquad (2.1.8)$$

$$b_k - ra_k = \alpha_{k-2}c+\alpha_{k-1}b+\alpha_k a, \qquad (2.1.9)$$

$$rb_k = -\ \alpha_{k-2}C-\alpha_{k-1}B-\alpha_k A; \qquad (2.1.10)$$

odnosno, kada vrednost za a_k iz (2.1.8) uvrstimo u (2.1.9), dobija se

$$b_k=\alpha_{k-2}(r\gamma+c)+\alpha_{k-1}(r\beta+b)+\alpha_k(r\alpha+a), \qquad (2.1.11)$$

i u vezi s tim, treća jednačina (2.1.10), postaje:

$$(r^2\alpha+ra+A)\alpha_k+(r^2\beta+rb+B)\alpha_{k-1}+(r^2\gamma+rc+C)\alpha_{k-2}=0 \qquad (2.1.12)$$

Iz ove relacije, za k=0,1,2, dobijamo respektivno sledeće uslove:

$$r^2\alpha+ra+A=0 \qquad (v_1)$$

$$r^2\beta+rb+B=0, \qquad (v_2)$$

$$r^2\gamma+rc+C=0. \qquad (v_3)$$

U vezi sa napred iznetim činjenicama, može se formulisati sledeći stav.

Stav. Diferencijalna jednačina

$$(\alpha f^2+\beta f+\gamma)y''+(af^3+bf+c)y'+(Af^2+Bf+C)y=0$$

gde su:

$$\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,A,B,C \quad \text{date konstante,}$$

a $f=f(x)$ neprekidna funkcija od x, može se svesti na integrabilan ~~xx~~ sistem diferencijalnih jednačina:

$$y'-ry=Z,$$

$$(a_0f^2+a_1f+a_2)Z'+(b_0f^2+b_1f+b_2)Z=0;$$

ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove $(v_1),(v_2),(v_3)$.

Nepoznate koeficijente a_k,b_k $(k=0,1,2)$; dobijaju se iz relacija (2.1.8) i (2.1.11), to jest:

$$a_0=\alpha\alpha_0, \tag{2.1.13}$$

$$a_1=\alpha_0\beta+\alpha_1\alpha, \tag{2.1.14}$$

$$a_2=\alpha_0\gamma+\alpha_1\beta+\alpha_2\alpha, \tag{2.1.15}$$

$$b_0=\alpha_0(r\alpha+a), \tag{2.1.16}$$

$$b_1=\alpha_0(r\beta+b)+\alpha_1(r\alpha+a), \tag{2.1.17}$$

$$b_2=\alpha_0(r\gamma+c)+\alpha_1(r\beta+b)+\alpha_2(r\alpha+a), \tag{2.1.18}$$

gde je:

r -proizvoljan parametar.

U toku istraživanja posmatranog problema, došao sam do sledećih rezultata:

1. Ako u relacijama $(v_1),(v_2)$ i (v_3) uvrstimo $\alpha=\gamma=0, \beta=1$ i $r=k$, dobijaju se i četvrti Görtlerovi uslovi:

(g) $\quad A=-ak, \quad B=-k(b+k), \quad C=-ck.$

2. Iz tih relacija za $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1, a=0, b=a, c=b, A=0, B=c, C=d$, dobija se kriterijum integrabiliteta jednačine (2.77):

$$a^2d-abc+c^2=0,\ a\neq 0\ ;$$

a koji se nalazi u knjizi [1, st.383] .

GLAVA III

POSTUPAK ZA REDUKTIBILNOSTI JEDNE KLASE LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA TREĆEG REDA

3. Predmet rasprave ove glave jeste formiranje kriterijuma za reduktibilnost jedne klase linearnih diferencijalnih jednačina trećeg reda, t.j. jednačina oblika:

$$(\alpha f^2+\beta f+\gamma)y'''+(af^2+bf+c)y''+(Af^2+Bf+C)y'+(Df^2+Ef+F)y=0. \tag{3.1}$$

Drugim rečima, istražujemo uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti:

$$\alpha,\beta,\gamma,\ a,b,c,A,B,C,D,E,F \text{ i}$$

i diferencijabilna funkcija $f = f(x)$, tako da se opšti integral jednačine (3.1) dobija pomoću kvadratura.

Zbog toga, polazimo od diferencijalne jednačine oblika

$$[(a_0f^2+b_0f+c_0)y''+(a_1f^2+b_1f+c_1)y'+(a_2f^2+b_2f+c_2)y]'+$$
$$+A_1[(a_0f^2+b_0f+c_0)y''+(a_1f^2+b_1f+c_1)y'+(a_2f^2+b_2f+c_2)y]=0, \tag{3.2}$$

gde su:

$$a_k, b_k, c_k,\ (k=0,1,2),\ A_1 = \text{konstante}.$$

Ako se u poslednjoj jednačini izvrši označeno diferenciranje, a zatim sredi, ona se transformiše u

$$(a_0f^2+b_0f+c_0)y'''+[(a_1+a_0A_1)f^2+(2a_0f+b_0)f'+$$
$$(b_1+b_0A_1)f+(c_1+c_0A_1)]y''+[(a_2+a_1A_1)f^2+$$
$$(2a_1f+b_1)f'+(b_2+b_1A_1)f+(c_2+c_1A_1)]y'+$$
$$[a_2A_1f^2+(2a_2f+b_2)f'+b_2A_1f+c_2A_1]y=0. \tag{3.3}$$

Budući da stepeni polinoma u odnosu na (f) moraju biti jednaki ispred y'', y' i y u poslednjoj jednačini, proizilazi da za

$f'(x)$ uzimamo neku linearnu funkciju po f, t.j.

$$f'(x) = pf+q, \tag{3.4}$$

gde su

$$(p,q = \text{konstante}).$$

Ako u jednačini (3.3) uvrstimo (3.4), dobijamo

$$\begin{aligned}
&(a_0f^2+b_0f+c_0)y'''+[(a_1+a_0A_1+2a_0p)f^2 + \\
&+(b_1+b_0A_1+2a_0q+b_0p)f+c_1+c_0A_1+b_0q)y'' + \\
&+(b_1+b_0A_1)f+(c_1+c_0A_1)]y'' + [(a_2+a_1A_1+2a_1p)f^2+ \\
&+(b_2+b_1A_1+2a_1q+b_1p)f+(c_2+c_1A_1+b_1q)]y' + \\
&+[a_2A_1+2a_2p)f^2+(b_2A_1+2a_2q+b_2p)f + \\
&+c_2A_1+b_2q]y = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ako u jednačini (3.2), stavimo

$$\begin{aligned}
&(a_0f^2+b_0f+c_0)y''+(a_1f^2+b_1f+c_1)y'+ \\
&+(a_2f^2 + b_2f+c_2)y = z,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

dobijamo

$$z' + A_1z = 0. \tag{3.7}$$

Što znači, integraciju jednačine (3.5) svodimo na integrabilan sistem linearnih diferencijalnih jednačina drugog i prvog reda.

U vezi s tim, mi dalje tražimo uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti:

$$\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,A,B,C,D,E,F$$

da bi jednačina (3.1) mogla dobiti oblik (3.5).

Iz jednačine (3.4), bitno je uzeti rešenja:

1°. $f(x) = e^x$ i 2°. $f(x) = x$.

iz istih razloga kao i u ranijim slučajevima.

Za $f(x)=e^x$, jednačina (3.5) prelazi u

$$
\begin{aligned}
&(a_oe^{2x}+b_oe^x+c_o)y'''+[(2a_o+a_1+a_oA_1)e^{2x}+\\
&+(b_o+b_1+b_oA_1)e^x+(c_1+c_oA_1)]y''+\\
&+[(2a_1+a_2+a_1A_1)e^{2x}+(b_1+b_2+b_1A_1)e^x+(c_2+c_1A_1)]y'+\\
&+[a_2(2+A_1)e^{2x}+b_2(1+A_1)e^x+c_2A_1]y=0,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

a za $f(x)=x$, ona se transformiše u

$$
\begin{aligned}
&(a_ox^2+b_ox+c_o)y'''+[(a_1+a_oA_1)x^2+(2a_o+b_1+b_oA_1)x+\\
&+(b_o+c_1+c_oA_1)]y''+[(a_2+a_1A_1)x^2+(2a_1+b_2+b_1A_1)x+\\
&+(b_1+c_2+c_1A_1)]y'+[a_2A_1x^2+(2a_2+b_2A_1)x+b_2+c_2A_1]y=0.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Jednačina (3.8) biće ekvivalentna sa jednačinom (3.1), ako i samo ako, su zadovoljene ove relacije:

$$a_o=k\alpha, \tag{3.1^o.1}$$

$$b_o=k\beta, \tag{3.1^o.2}$$

$$c_o=k\gamma, \tag{3.1^o.3}$$

$$2a_o+a_oA_1+a_1=ka, \tag{3.1^o.4}$$

$$b_o+b_1+b_oA_1=kb, \tag{3.1^o.5}$$

$$c_1+c_oA_1=kc, \tag{3.1^o.6}$$

$$2a_1+a_1A_1+a_2=kA, \tag{3.1^o.7}$$

$$b_1+b_1A_1+b_2=kB, \tag{3.1^o.8}$$

$$c_2+c_1A_1=kC, \tag{3.1^o.9}$$

$$2a_2+a_2A_1=kD, \tag{3.1^o.10}$$

$$b_2+b_2A_1=kE, \tag{3.1^o.11}$$

$$c_2A_1=kF, \quad (k=\text{const}). \tag{3.1^o.12}$$

Iz poslednjih relacija tražimo a_k, b_k, c_k $(k=1,2)$, tako na primer, iz $(3.1^o.4)$, prema $(3.1^o.1)$, dobija se

$$a_1 = k[a-(2+A_1)\alpha], \tag{3.1°.13}$$

a iz $(3.1^o.7)$, prema $(3.1^o.13)$, sledi

$$a_2 = k[A-(2+A_1)a+(2+A_1)^2\alpha]. \tag{3.1°.14}$$

Iz $(3.1^o.10)$, prema $(3.1^o.14)$, dobija se

$$\alpha A_1^3 + (6\alpha-a)A_1^2+(12\alpha-4a+A)A_1 + +(8\alpha+2A-4a-D) = 0. \tag{3.1°.15}$$

Iz $(3.1^o.5)$, prema $(3.1^o.2)$, imamo

$$b_1 = k[b-(1+A_1)\beta], \tag{3.1°.16}$$

a iz $(3.1^o.6)$, prema $(3.1^o.3)$, sledi

$$c_1 = k(c-A_1\gamma). \tag{3.1°.17}$$

Relacija $(3.1^o.8)$, prema $(3.1^o.16)$, postaje

$$b_2 = k[B-(1+A_1)b+(1+A_1^2)\beta], \tag{3.1°.18}$$

a $(3.1^o.9)$, prema $(3.1^o.17)$, daje

$$c_2 = k(C-cA_1+\gamma A_1^2) . \tag{3.1°.19}$$

Iz $(3.1^o.11)$, prema $(3.1^o.18)$, dobija se

$$\beta A_1^3+(3\beta-b)A_1^2+(3\beta-2b+B)A_1+(\beta+B-b-E)=0, \tag{3.1°.20}$$

a iz $(3.1^o.12)$, prema $(3.1^o.19)$, sledi

$$\gamma A_1^3 - cA_1^2 + CA_1 - F = 0. \tag{3.1°.21}$$

Najzad, da bismo rešili sistem algebarskih jednačina $(3.1^o.15)$, $(3.1^o.20)$ i $(3.1^o.21)$ po A_1 postupamo ovako: prvo, rešimo jednačinu $(3.1^o.21)$ po A_1^3, t.j.

$$A_1^3 = \frac{cA_1^2 - CA_1 + F}{\gamma}, \quad (\gamma \neq 0), \qquad (3.1^\circ.21')$$

ovu vrednst za A_1^3 zamenimo u jednačinama $(3.1^\circ.15)$, $(3.1^\circ.20)$ i dobijamo respektivno ove dve jednačine:

$$[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)]A_1^2+[\gamma(A-4a+12\alpha)-\alpha C]A_1 + [\alpha F+\gamma(8\alpha+2A-4a-D)] = 0, \qquad (3.1^\circ.22)$$

$$[\beta c+\gamma(3\beta-b)]A_1^2+[\gamma(3\beta-2b+B)-\beta C]A_1+ +[\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)] = 0. \qquad (3.1^\circ.23)$$

Drugo, poslednju jednačinu rešimo po A_1^2, t.j.

$$A_1^2 = \frac{[\beta C-\gamma(3\beta-2b+B)]A_1-[\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)]}{\beta c+\gamma(3\beta-b)} \qquad (3.1^\circ.23')$$

$$(\beta c+\gamma(3\beta-b) \neq 0).$$

Kada vrednosti za A_1^2 iz $(3.1^\circ.23')$ uvrstimo u $(3.1^\circ.22)$, dobija se na kraju

$$A_1 = \frac{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)]-[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\alpha F+\gamma(8\alpha+2A-4a-D)]}{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta C-\gamma(3\beta-2b+B)]+[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\gamma(12\alpha+A-4a)-\alpha C]},$$

$$(3.1^\circ.24)$$

$$[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta C-\gamma(3\beta-2b+B)] + [\beta c+\gamma(3\beta-b)] [\gamma(12\alpha+A-4a)-\alpha C] \neq 0.$$

Ako vrednost A_1 iz $(3.1^\circ.24)$ uvrstimo u relacije $(3.1^\circ.23)$ i $(3.1^\circ.21)$, dobijamo respektivno sledeća dva uslova:

$$[\beta c+\gamma(3\beta-b)]\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)]-$$

$$-[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\alpha F+\gamma(8\alpha+2A-4a-D)]\}^2+$$

$$+[\gamma(3\beta-2b+B)-\beta C]\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)]-$$

$$-[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\alpha F+\gamma(8\alpha+2A-4a-D)]\}\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)]$$

$$[\beta C-\gamma(3\beta-2b+B)]+[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\gamma(12\alpha+A-4a)-\alpha C]\}$$

$$+[\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)]\{\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta C-\gamma(3\beta-2b+B)]+$$

$$+[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\gamma(12\alpha+A-4a)-\alpha C]\}^2=0, \qquad (i_1)$$

$$\gamma\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)]-[\beta c+\gamma(3\beta-b)]$$

$$[\alpha F+\gamma(8\alpha+2A-4a-D)]\}^3-c\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)]$$

$$[\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)]-[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\alpha F+\gamma(8\alpha+2A-4a-D)]\}^2$$

$$\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta C-\gamma(3\beta-2b+B)]+[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\gamma(12\alpha+A-4a)-$$

$$-\alpha C]\}+C\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta F+\gamma(\beta+B-b-E)]-$$

$$-[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\alpha F+\gamma(8\alpha+2A-4a-D)]\}\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)]$$

$$[\beta C-\gamma(3\beta-2b+B)]+[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\gamma(12\alpha+A-4a)-\alpha C]\}^2-$$

$$-F\{[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][\beta C-\gamma(3\beta-2b+B)]+[\beta c+\gamma(3\beta-b)]$$

$$[\gamma(12\alpha+A-4a)-\alpha C]\}^3=0. \qquad (i_2)$$

Na osnovu izloženih činjenica možemo formulisati sledeći stav.

Stav XV. Diferencijalna jednačina trećeg reda (3.1) svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina drugog i prvog reda ako njeni koeficijenti zadovoljavau uslove (i_1) i (i_2).

Primer. Diferencijalna jednačina trećeg reda

$$(e^{2x}+2e^{x}+3)y'''+(7e^{2x}+9e^{x}+9)y''+(15e^{2x}+12e^{x}+9)y' +(9e^{2x}+4e^{x}+3)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(e^{2x}+2e^{x}+3)y''+(4e^{2x}+5e^{x}+6)y' + +(3e^{2x}+2e^{x}+3)y=z,$$

$$z'+z=0.$$

2^{o}. Za $f(x) = x$, jednačina (3.1) prelazi u

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y'''+(ax^2+bx+c)y''+(Ax^2+Bx+C)y'+(Dx^2+Ex+F)y=0. \tag{3.1'}$$

Jednačina (3.9) biće ekvivalentna sa jednačinom (3.1') ako, i samo ako, su zadovoljene relacije:

$$a_o = k\alpha, \tag{3.2°.1}$$

$$b_o = k\beta, \tag{3.2°.2}$$

$$c_o = k\gamma, \tag{3.2°.3}$$

$$a_1+a_oA_1 = ka, \tag{3.2°.4}$$

$$2a_o+b_1+b_oA_1 = kb, \tag{3.2°.5}$$

$$b_o+c_1+c_oA_1 = kc, \tag{3.20.6}$$

$$a_2+a_1A_1 = kA, \tag{3.2°.7}$$

$$2a_1+b_2+b_1A_1 = kB, \tag{3.2°.8}$$

$$b_1+c_2+c_1A_1 = kC, \tag{3.2°.9}$$

$$a_2A_1 = kD, \tag{3.2°.10}$$

$$2a_2+b_2A_1 = kE, \tag{3.2°.11}$$

$$b_2+c_2A_1 = kF, \quad (k=\text{parametar}). \tag{3.2°.12}$$

Iz $(3.2^{o}.4)$, prema $(3.2^{o}.1)$, dobija se

$$a_1 = k(a - A_1 \alpha) \qquad (3.2^{o}.13)$$

a iz $(3.2^{o}.7)$, prema $(3.2^{o}.13)$ sledi

$$a_2 = k[A - A_1(a - A_1\alpha)] \qquad (3.2^{o}.14)$$

Kada dve poslednje vrednosti za a_1 i a_2 zamenimo u $(3.2^{o}.10)$, dobija se jednačina

$$\alpha A_1^3 - aA_1^2 + AA_1 - D = 0. \qquad (3.2^{o}.15)$$

Iz $(3.2^{o}.5)$, prema relacijama $(3.2^{o}.1)$ i $(3.2^{o}.2)$, dobija se

$$b_1 = k(b - 2\alpha - \beta A_1), \qquad (3.2^{o}.16)$$

a iz $(3.2^{o}.6)$, prema $(3.2^{o}.2)$ i $(3.2^{o}.3)$ sledi

$$c_1 = k(c - \beta - \gamma A_1), \qquad (3.2^{o}.17)$$

i dalje, iz $(3.2^{o}.8)$, prema relacijama $(3.2^{o}.13)$ i $(3.2^{o}.16)$ proizlazi

$$b_2 = k\,[\beta A_1^2 + (4\alpha - b)A_1 + (B - 2a)], \qquad (3.2^{o}.18)$$

a iz $(3.2^{o}.9)$, prema $(3.2^{o}.16)$ i $(3.2^{o}.17)$ imamo

$$c_2 = k[(C - b + 2\alpha) + A_1(2\beta - c) + \gamma A_1^2]. \qquad (3.2^{o}.19)$$

Kada se u $(3.2^{o}.11)$ zamene vrednosti za a_2 i b_2 iz $(3.2^{o}.14)$, $(3.2^{o}.18)$, dobija se jednačina

$$\beta A_1^3 + (6\alpha - b)A_1^2 + (B - 4a)A_1 + (2A - E) = 0. \qquad (3.2^{o}.20)$$

Isto tako, ako u relaciju $(3.2^{o}.12)$ uvrstimo vrednosti iz $(3.2^{o}.18)$ i $(3.2^{o}.19)$, dobija se treća jednačina

$$\gamma A_1^3 + (3\beta - c)A_1^2 + (C + 6\alpha - 2b)A_1 + (B - 2a - F) = 0. \qquad (3.2^{o}.21)$$

Da bismo rešili sistem od tri algebarske jednačine $(3.2^{\circ}.15)$, $(3.2^{\circ}.20)$ i $(3.2^{\circ}.21)$ po A_1: Prvo, rešimo jednačinu $(3.2^{\circ}.15)$ po A_1^3, t.j.

$$A_1^3=\frac{aA_1^2-AA_1+D}{\alpha},\quad (\alpha\neq 0); \tag{3.2°.22}$$

drugo, vrednost iz relacije $(3.2^{\circ}.22)$ zamenimo u jednačinama $(3.2^{\circ}.20)$, $(3.2^{\circ}.21)$ i dobićemo respektivno ove dve jednačine:

$$(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)A_1^2+(\alpha B-4a\alpha-\beta A)A_1+(\beta D+2\alpha A-\alpha E)=0, \tag{3.2°.23}$$

$$(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)A_1^2+(6\alpha^2+\alpha C-2\alpha b-\gamma A)A_1+$$
$$+(\gamma D+\alpha B-2\alpha a-\alpha F)=0, \tag{3.2°.24}$$

Dalje, jednačinu $(3.2^{\circ}.23)$ rešimo po A_1^2, t.j.

$$A_1^2=\frac{(\beta A+4a\alpha-\alpha B)A_1+(\alpha E-\beta D-2\alpha A)}{6\alpha^2-\alpha b+\beta a},\quad (6\alpha^2-\alpha b+\beta a\neq 0); \tag{3.2°.23'}$$

i uvrstimo u jednačinu $(3.2^{\circ}.24)$, pa se tako dobija

$$A_1=\frac{(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(\alpha F+2a\alpha-\alpha B-\gamma D)+(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta D+2\alpha A-\alpha E)}{(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta A+4a\alpha-\alpha B)+(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(6\alpha^2+\alpha C-2\alpha b-\gamma A)} \tag{3.2°.25}$$

uslov:

$$[(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta A+4a\alpha-\alpha B)+(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(6\alpha^2+\alpha C-2\alpha b-\gamma A)]\neq 0.$$

Kada se vrednost za A_1, iz $(3.2^{\circ}.25)$ zameni u $(3.2^{\circ}.23)$ i $(3.2^{\circ}.22)$, dobijaju se respektivno ova dva uslova:

$$(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)[(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(\alpha F+2a\alpha-\alpha B-\gamma D)+$$
$$+(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta D+2\alpha A-\alpha E)]^2+(\alpha B-4a\alpha-\beta A)$$
$$[(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(\alpha F+2a\alpha-\alpha B-\gamma D)+(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)$$
$$(\beta D+2\alpha A-\alpha E)].[(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta A+4a\alpha-\alpha B)+$$

$$+(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(6\alpha^2+\alpha C-2\alpha b-\gamma A)]+(\beta D+2\alpha A-\alpha E)$$
$$[(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta A+4a\alpha-\alpha B)+(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)$$
$$(6\alpha^2+\alpha C-2\alpha b-\gamma A)]^2=0, \tag{i_3}$$

$$\alpha[(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(\alpha F+2a\alpha-\alpha B-\gamma D)+(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta D+2\alpha A-\alpha E)]^3-$$
$$-a[(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(\alpha F+2a\alpha-\alpha B-\gamma D)+(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta D+2\alpha A-\alpha E)]^2$$
$$[(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta A+4a\alpha-\alpha B)+(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(6\alpha^2+\alpha C-2\alpha b-\gamma A)]+$$
$$+A[(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(\alpha F+2a\alpha-\alpha B-\gamma D)+(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta D+2\alpha A-\alpha E)]$$
$$[(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta A+4a\alpha-\alpha B)+(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(6\alpha^2+\alpha C-2\alpha b-\gamma A)]^2-$$
$$-D[(a\gamma+3\alpha\beta-\alpha c)(\beta A+4\,a\alpha-\alpha B)+$$
$$+(6\alpha^2-\alpha b+\beta a)(6\alpha^2+\alpha C-2\alpha b-\gamma A)]^3=0. \tag{i_4}$$

Znači, na osnovu izloženog može se formulisati novi stav.

Stav XVI. Diferencijalna jednačina (3.1') svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina drugog i prvog reda, ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (i_3) i (i_4).

Primer. Diferencijalna jednačina trećeg reda

$$(x^2+2x+3)y'''+(5x^2+9x+11)y''+(8x^2+15x+6)y'+(4x^2+$$
$$+10x-3)y=0$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(x^2+2x+3)y''+(4x^2+5x+6)y'+(4x^2+2x-5)y=z,$$

$$z'+z=0.$$

II. Da bismo formulirali nove kriterijume integrabiliteta diferencijalnih jednačina oblika (3.1), polazimo sada od jednačine oblika:

$$[(a_0f^2+b_0f+c_0)y'+(a_1f^2+b_1f+c_1)y]''+A_1[(a_0f^2+b_0f+c_0)y'+$$
$$+(a_1f^2+b_1f+c_1)y]'+A_2[(a_0f^2+b_0f+c_0)y'+$$
$$+(a_1f^2+b_1f+c_1)y]=0, \tag{3.1_1}$$

gde su:

$(a_o, b_o, c_o, a_1, b_1, c_1, A_1$ i $A_2 =$ neodredjene konstante).

Ako u (3.1_1) izvršimo označeno diferenciranje, a zatim sredimo, ona se transformiše u jednačinu

$$\begin{aligned}
&(a_o f^2+b_o f+c_o)y'''+[(a_1+a_o A_1)f^2+2(2a_o f+\\
&+b_o)f'+(b_1+b_o A_1)f+(c_1+c_o A_1)]y''+\\
&+[(a_1 A_1+a_o A_2)f^2+2(2a_1+a_o A_1)ff'+(2a_o f'+\\
&+2b_1+b_o A_1)f'+(2a_o f+b_o)f''+(b_1 A_1+b_o A_2)f+\\
&+(c_1 A_1+c_o A_2)]y'+[a_1 A_2 f^2+(2a_1 A_1 f+b_1 A_1+\\
&+2a_1 f')f'+(2a_1 f+b_1)f''+A_2(b_1 f+c_1)]y=0. \qquad (3.2_1)
\end{aligned}$$

Pošto stepeni polinoma u odnosu na (f) moraju biti jednaki ispred y'', y' i y, otuda proizilazi da za $f'(x)$ uzimamo:

$$f'(x)=pf+q, \quad (p,q=\text{const}) \qquad (3.3_1)$$

Ako u jednačini (3.2_1) uvrstimo (3.3_1), dobijamo

$$\begin{aligned}
&(a_o f^2+b_o f+c_o)y'''+[(a_1+a_o A_1)f^2+2(2a_o f+b_o)\\
&(pf+q)+(b_1+b_o A_1)f+(c_1+c_o A_1)]y''+\\
&+[(a_1 A_1+a_o A_2)f^2+2(2a_1+a_o A_1)f(pf+q)+\\
&+2a_o(pf+q)^2+(2b_1+b_o A_1)(pf+q)+(2a_o f+b_o)f''+\\
&+(b_1 A_1+b_o A_2)f+(c_1 A_1+c_o A_2)]y'+[a_1 A_2 f^2+\\
&+(2a_1 f+b_1)f''+2a_1(pf+q)^2+A_1(2a_1 f+b_1)\\
&(pf+q)+A_2(b_1 f+c_1)]y=0. \qquad (3.4_1)
\end{aligned}$$

Ako u jednačini (3.1_1) uvodimo smenu

$$(a_o f^2+b_o f+c_o)y'+(a_1 f^2+b_1 f+c_1)y=z, \qquad (3.5_1)$$

dobijamo

$$z'' + A_1 z' + A_2 z = 0. \qquad (3.6_1)$$

To jest, integraciju jednačine (3.4_1) sveli smo na integrabilan sistem linearnih diferencijalnih jednačina (3.5_1) i (3.6_1).

Za dobijanje kriterijume integrabiliteta posmatrane jednačine (3.1), bitno je uzeti za rešenje jednačine (3.3_1):

$$1^o.\ \ f(x) = e^x \quad \text{i} \quad 2^o.\ f(x) = x,$$

iz istih razloga kao i pre.

1^o. Za $f(x) = e^x$ jednačine (3.1) i (3.4_1) transformišu se respektivno u

$$(\alpha e^{2x}+\beta e^x+\gamma)y'''+(ae^{2x}+be^x+c)y''+(Ae^{2x}+$$
$$+Be^x+C)y'+(De^{2x}+Ee^x+F)y = 0, \qquad (3.1')$$

$$(a_o e^{2x}+b_o e^x+c_o)y'''+[(4a_o+a_1+a_oA_1)e^{2x}+$$
$$(2b_o+b_1+b_oA_1)e^x+(c_1+c_oA_1)]y''+[(4a_o+4a_1+$$
$$2a_oA_1+a_1A_1+a_oA_2)e^{2x}+(b_o+2b_1+b_oA_1+b_1A_1+b_oA_2)e^x+$$
$$(c_oA_2+c_1A_1)]y'+[a_1(4+2A_1+A_2)e^{2x}+$$
$$b_1(A_1+A_2+1)e^x+c_1A_2]\, y = 0. \qquad (3.4_1')$$

Jednačina $(3.4_1')$ biće ekvivalentna sa $(3.1')$ ako su zadovoljene sledeće relacije:

$$a_o = k\alpha, \qquad (k = \text{parametar}) \qquad (3.1_1^o.1)$$

$$b_o = k\beta, \qquad (3.1_1^o.2)$$

$$c_o = k\gamma, \qquad (3.1_1^o.3)$$

$$4a_o+a_1+a_oA_1 = ka, \qquad (3.1_1^o.4)$$

$$2b_o+b_1+b_oA_1 = kb, \qquad (3.1_1^o.5)$$

$$c_1+c_oA_1 = kc, \qquad (3.1_1^o.6)$$

$$4a_o+4a_1+2a_oA_1+a_oA_2+a_1A_1 = kA, \qquad (3.1_1^o.7)$$

$$b_o+2b_1+b_oA_1+b_oA_2+b_1A_1 = kB, \qquad (3.1_1^o.8)$$

$$c_oA_2+c_1A_1 = kC, \qquad (3.1_1^o.9)$$

$$(4+2A_1+A_2)a_1 = kD, \qquad (3.1_1^o.10)$$

$$(1+A_1+A_2)b_1 = kE, \qquad (3.1_1^c.11)$$

$$c_1A_2 = kF. \qquad (3.1_1^o.12)$$

Iz poslednjih relacija tražimo da dobijemo nepoznate kojeficijente: a_k, b_k, c_k, A_1 i A_2. U vezi s tim iz relacija $(3.1_1^o.4)$, $(3.1_1^o.5)$ i $(3.1_1^o.6)$, prema $(3.1_1^o.1)$, $(3.1_1^o.2)$ i $(3.1_1^o.3)$, dobijaju se respektivno ove vrednosti:

$$a_1 = k[a-(4+A_1)\alpha], \qquad (3.1_1^o.13)$$

$$b_1 = k[b-(2+A_1)\beta], \qquad (3.1_1^o.14)$$

$$c_1 = k(c-\gamma A_1), \qquad (3.1_1^o.15)$$

a iz $(3.1_1^o.7)$, prema $(3.1_1^o.1)$ i $(3.1_1^o.13)$, proizilazi

$$\alpha A_1^2 + (6\alpha-a)A_1-\alpha A_2+12\alpha+A-4a = 0. \qquad (3.1_1^o.16)$$

Relacija $(3.1_1^o.8)$ prema $(3.1_1^o.2)$ i $(3.1_1^o.14)$, postaje

$$\beta A_1^2+(3\beta-b)A_1-\beta A_2+(3\beta+B-2b) = 0, \qquad (3.1_1^o.17)$$

a $(3.1_1^o.9)$ prema $(3.1_1^o.15)$, biće

$$\gamma A_1^2 - cA_1 - \gamma A_2 + C = 0. \qquad (3.1_1^o.18)$$

Najzad, relacije $(3.1_1^o.10)$, $(3.1_1^o.11)$ i $(3.1_1^o.12)$, prema $(3.1_1^o.13)$, $(3.1_1^o.14)$ i $(3.1_1^o.15)$ postaju:

$$2\alpha A_1^2+2(6\alpha-a)A_1+(4\alpha+A_1\alpha-a)A_2+(16\alpha+D-4a)=0, \qquad (3.1_1^0.19)$$

$$\beta A_1^2+(3\beta-b)A_1+(2\beta+A_1\beta-b)A_2+(2\beta+E-b)=0, \qquad (3.1_1^0.20)$$

$$A_2(c-A_1\gamma)=F. \qquad (3.1_1^0.21)$$

Rešimo poslednju jednačinu po A_2, t.j.

$$A_2=\frac{F}{c-A_1\gamma},\quad (c-A_1\gamma\neq 0).$$

Stavljajući vrednost za A_2 u jednačinama: $(3.1_1^0.16)$, $(3.1_1^0.17)$, $(3.1_1^0.18)$, $(3.1_1^0.19)$ i $(3.1_1^0.20)$, dobijaju se respektivno sledeće relacije:

$$\alpha\gamma A_1^3+[(6\alpha-a)\gamma-\alpha c]A_1^2+[(a-6\alpha)c+\gamma(12\alpha+A-4a)]A_1+ +[\alpha F-(12\alpha+A-4a)c]=0, \qquad (3.1_1^0.22)$$

$$\beta\gamma A_1^3+[\gamma(3\beta-b)-\beta c]A_1^2+[\gamma(3\beta+B-2b)-c(3\beta-b)]A_1+ +[BF-(3\beta+B-2b)c]=0, \qquad (3.1_1^0.23)$$

$$\gamma^2A_1^3-2c\gamma A_1^2+(c^2+\gamma C)A_1+(\gamma F-cC)=0, \qquad (3.1_1^0.24)$$

$$2\alpha\gamma A_1^3+2[(6\alpha-a)\gamma-\alpha c]A_1^2+[\gamma(16\alpha+D-4a)- -2(6\alpha-a)c-\alpha F]A_1+[(a-4\alpha)F-(16\alpha+D-4a)c]=0, \qquad (3.1_1^0.25)$$

$$\beta\gamma A_1^3+[(3\beta-b)\gamma-\beta c]A_1^2+[\gamma(2\beta+E-b)-\beta F-(3\beta-b)c]A_1+ +[(b-2\beta)F-(2\beta+E-b)c]=0. \qquad (3.1_1^0.26)$$

Iz poslednjih jednačina tražimo A_1, t.j. iz $(3.1_1^0.24)$

$$A_1^3=\frac{2c\gamma A_1^2-(c^2+\gamma C)A_1+(cC-\gamma F)}{\gamma^2},\quad (\gamma\neq 0) \qquad (3.1_1^0.24')$$

Ako vrednost za A_1^3 iz $(3.1_1^0.24')$ uvrstimo u preostale četiri jednačine $(3.1_1^0.22)$, $(3.1_1^0.23)$, $(3.1_1^0.25)$ i $(3.1_1^0.26)$, dobijaju se respektivno sledeće jednačine:

$$\gamma[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)]A_1^2+[(a-6\alpha)c\gamma+\gamma^2(12\alpha+A-4a)-\alpha(c^2+\gamma C)]A_1+$$
$$+[\alpha\gamma F-\gamma(12\alpha+A-4a)c+\alpha(cC-\gamma F)]=0, \quad (3.1_1^0.27)$$

$$\gamma[\beta c+\gamma(3\beta-b)]A_1^2+[\gamma^2(3\beta+B-2b)-c\gamma(3\beta-b)-\beta(c^2+\gamma C)]A_1+$$
$$+[\gamma BF-\gamma(3\beta+B-2b)c+\beta(cC-\gamma F)]=0, \quad (3.1_1^0.28)$$

$$2\gamma[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)]A_1^2+[\gamma^2(16\alpha+D-4a)-2\gamma(6\alpha-a)c-\alpha\gamma F-$$
$$-2\alpha(c^2+\gamma C)]A_1+[\gamma(a-4\alpha)F-\gamma c(16\alpha+D-4a)+2\alpha(cC-\gamma F)]=0, \quad (3.1_1^0.29)$$

$$\gamma[\beta c+(3\beta-b)\gamma]A_1^2+[\gamma^2(2\beta+E-b)-\beta\gamma F-\gamma(3\beta-b)c-\beta(c^2+\gamma C)]A_1+$$
$$+[\gamma(b-2\beta)F-\gamma(2\beta+E-b)c+\beta(cC-\gamma F)]=0. \quad (3.1_1^0.30)$$

Iz jednačina $(3.1_1^0.28)$ i $(3.1_1^0.30)$, oduzimanjem prve od druge, dobija se

$$A_1=\frac{(\beta+B-b-E)c+(b-B-2\beta)F}{\gamma(\beta+B-3b-E)+\beta F}; \quad (\gamma(\beta+B-3b-E)+\beta F\neq 0) \quad (3.1_1^0.31)$$

a iz $(3.1_1^0.27)$ i $(3.1_1^0.29)$, kada prvu jednačinu pomnožimo sa 2 i oduzmemo drugu jednačinu, dobijamo

$$[(8\alpha+2A-4a-D)\gamma+\alpha F]A_1+(6\alpha F-8\alpha c-2Ac+4ac-aF+cD)=0. \quad (3.1_1^0.32)$$

Kada vrednost za A_1 zamenimo u $(3.1_1^0.21)$ dobijamo vrednost za A_2.

I najzad, ako se vrednost za A_1 iz $(3.1_1^0.31)$ uvrsti u $(3.1_1^0.28)$, $(3.1_1^0.27)$, $(3.1_1^0.32)$ i $(3.1_1^0.24)$ dobijaju se respektivno sledeći uslovi:

$$\gamma[\beta c+\gamma(3\beta-b)][\beta c+Bc+bF-BF-2\beta F-bc-cE)^2+[\gamma^2(3\beta+B-2b)-$$
$$-c\gamma(3\beta-b)-\beta(c^2+\gamma C)][(\beta+B-b-E)c+(b-B-2\beta)F][\gamma(\beta+B-$$
$$-3b-E)+\beta F]+[\gamma BF-\gamma(3\beta+B-2b)c+\beta(cC-\gamma F)][\gamma(\beta+B-$$
$$-3b-E)+\beta F]^2=0, \quad (i_5)$$

$$\gamma[\alpha c+\gamma(6\alpha-a)][(\beta+B-b-E)c+(b-B-2\beta)F]^2+[(a-6\alpha)c\gamma+\gamma(12\alpha+A-4a)-$$
$$-\alpha(c^2+\gamma C)][(\beta+B-b-E)c+(b-B-2\beta)F][\gamma(\beta+B-3b-E)+\beta F]+$$
$$+[\alpha\gamma F-\gamma(12\alpha+A-4a)c+\alpha(cC-\gamma F)][\gamma(\beta+B-3b-E)+\beta F]^2=0, \qquad (i_6)$$

$$[(8\alpha+2A-4a-D)\gamma+\alpha F][(\beta+B-b-E)c+(b-B-2\beta)F]+[(4a+D-2A-8\alpha)c+$$
$$+(6\alpha-a)F][\gamma(\beta+B-3b-E)+\beta F]=0, \qquad (i_7)$$

$$\gamma^2[(\beta+B-b-E)c+(b-B-2\beta)F]^3-2c\gamma[(\beta+B-b-E)c+(b-B-2\beta)F]^2$$
$$[\gamma(\beta+B-3b-E)+\beta F]+(c^2+\gamma C)[(\beta+B-b-E)c+(b-B-2\beta)F]$$
$$[\gamma(\beta+B-3b-E)+\beta F]^2+(\gamma F-cC)[\gamma(\beta+B-3b-E)+\beta F]^3=0$$

Na osnovu izloženog, možemo formulisati sledeći stav.

Stav XVII. Diferencijalna jednačina (3.1) je integrabilna ako, i samo ako, njeni koeficijenti Zadovoljavaju uslove (i_5), (i_7), (i_6) i (i_8).

Primer. Diferencijalna jednačina

$$(2e^{2x}+3e^x+1)y'''+(8e^{2x}+8e^x+2)y''-(2e^{2x}+3e^x+1)y'-$$
$$-2(4e^{2x}+1)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina:

$$(2e^{2x}+3e^x+1)y'-(2e^{2x}+e^x-1)y=z,$$

$$z''+z'-2z=0.$$

2°. Za $f(x)=x$, jednačine (3.1) i (3.4_1), svode se na:

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y'''+(ax^2+bx+c)y''+(Ax^2+Bx+C)y'+(Dx^2+Ex+F)y=0, \qquad (3.1.0)$$

$$(a_0x^2+b_0x\pm c_0)y'''+[(a_1+a_0A_1)x^2+(4a_0+b_1+b_0A_1)x+$$
$$+(2b_0+c_1+c_0A_1)]y''+[(a_1A_1+a_0A_2)x^2+(4a_1+2a_0A_1+b_1A_1+b_0A_2)x+$$
$$+(2a_0+2b_1+b_0A_1+c_1A_1+c_0A_2)]y'+[a_1A_2x^2+(b_1A_2+2a_1A_1)x+$$
$$+b_1A_1+c_1A_2+2a_1]y=0. \qquad (3.4_1.0)$$

Dve poslednje jednačine biće ekvivalentne ako i samo ako, su zadovoljene sledeće relacije:

$$a_o = k\alpha, \qquad (3.2^{o}_{1}.1)$$

$$b_o = k\beta, \qquad (3.2^{o}_{1}.2)$$

$$c_o = k\gamma, \qquad (3.2^{o}_{1}.3)$$

$$a_1+a_oA_1 = ka, \qquad (3.2^{o}_{1}.4)$$

$$4a_o+b_oA_1+b_1 = kb, \qquad (3.2^{o}_{1}.5)$$

$$2b_o+c_oA_1+c_1 = kc, \qquad (3.2^{o}_{1}.6)$$

$$a_1A_1+a_oA_2 = kA, \qquad (3.2^{o}_{1}.7)$$

$$4a_1+2a_oA_1+b_1A_1+b_oA_2 = kB, \qquad (3.2^{o}_{1}.8)$$

$$2a_o+2b_1+b_oA_1+c_1A_1+c_oA_2 = kC, \qquad (3.2^{o}_{1}.9)$$

$$a_1A_2 = kD, \qquad (3.2^{o}_{1}.10)$$

$$b_1A_2+2a_1A_1 = kE, \qquad (3.2^{o}_{1}.11)$$

$$b_1A_1+c_1A_2+2a_1 = kF. \qquad (3.2^{o}_{1}.12)$$

Sada treba odrediti parametre $a_k, b_k, c_k, (k=0,1)$, A_1 i A_2. U vezi sa tim, relacije $(3.2^{o}_{1}.4)$, $(3.2^{o}_{1}.5)$ i $(3.2^{o}_{1}.6)$, prema $(3.2^{o}_{1}.1)$, $(3.2^{o}_{1}.2)$ i $(3.2^{o}_{1}.3)$ postaju:

$$a_1 = k(a-A_1\alpha), \qquad (3.2^{o}_{1}.13)$$

$$b_1 = k(b-4\alpha-A_1\beta), \qquad (3.2^{o}_{1}.14)$$

$$c_1 = k(c-2\beta-\gamma A_1). \qquad (3.2^{o}_{1}.15)$$

Jednačina $(3.2^{o}_{1}.7)$, prema $(3.2^{o}_{1}.13)$ i $(3.2^{o}_{1}.1)$, svodi se u

$$\alpha A_1^2 - aA_1 - \alpha A_2 + A = 0, \qquad (3.2^{o}_{1}.16)$$

a $(3.2^{o}_{1}.8)$, prema $(3.2^{o}_{1}.13)$, $(3.2^{o}_{1}.14)$, $(3.2^{o}_{1}.1)$ i $(3.2^{o}_{1}.2)$, postaje

$$\beta A_1^2 + (6\alpha-b)A_1 - \beta A_2 - 4a + B = 0. \qquad (3.2^{o}_{1}.17)$$

Iz $(3.2_1^0.9)$, $(3.2_1^0.10)$, $(3.2_1^0.11)$ i $(3.2_1^0.12)$, dobijaju se respektivno ove jednačine:

$$\gamma A_1^2 + (3\beta - c)A_1 + 6\alpha - \gamma A_2 - 2b + C = 0, \tag{3.2$_1^0$.18}$$

$$A_2(a - \alpha A_1) - D = 0, \tag{3.2$_1^0$.19}$$

$$2A_1^2\alpha + (\beta A_2 - 2a)A_1 + (4\alpha - b)A_2 + E = 0, \tag{3.2$_1^0$.20}$$

$$\beta A_1^2 + (6\alpha + \gamma A_2 - b)A_1 + (2\beta - c)A_2 - 2a + F = 0. \tag{3.2$_1^0$.21}$$

Rešavamo $(3.2_1^0.19)$ po A_2, t.j.

$$A_2 = \frac{D}{a - \alpha A_1}, \quad (a - \alpha A_1 \neq 0). \tag{3.2$_1^0$.19'}$$

Kada vrednost za A_2, iz $(3.2_1^0.19')$, zamenimo u $(3.2_1^0.16)$, $(3.2_1^0.17)$, $(3.2_1^0.18)$, $(3.2_1^0.20)$ i $(3.2_1^0.21)$, dobijaju se respektivno sledeće jednačine:

$$A_1(a - \alpha A_1)^2 - A(a - \alpha A_1) + \alpha D = 0, \tag{3.2$_1^0$.22}$$

$$\alpha\beta A_1^3 + (6\alpha^2 - \alpha b - a\beta)A_1^2 + (\alpha B + ab - 10\alpha a)A_1 + (4a^2 + \beta D - aB) = 0, \tag{3.2$_1^0$.23}$$

$$\alpha\gamma A_1^3 + (3\alpha\beta - a\gamma - \alpha c)A_1^2 + (6\alpha^2 + \alpha C + ac - 3a\beta - 2\alpha b)A_1 + \\ + (2ab + \gamma D - 6\alpha a - aC) = 0. \tag{3.2$_1^0$.24}$$

$$2\alpha^2 A_1^3 - 4a\alpha A_1^2 + (2a^2 + \alpha E - \beta D)A_1 + (bD - aE - 4\alpha D) = 0, \tag{3.2$_1^0$.25}$$

$$\alpha\beta A_1^3 + (6\alpha^2 - \alpha b - a\beta)A_1^2 + (ab + \alpha F - \gamma D - 8a\alpha)A_1 + \\ + (2a^2 + cD - 2\beta D - aF) = 0. \tag{3.2$_1^0$.26}$$

Poslednje jednačine predstavljaju sistem algebarskih jednačina trećeg stepena po A_1.

Da bismo rešili ovaj sistem jednačina po A_1, prvo rešimo $(3.2_1^0.22)$ po A_1^3, t.j.

$$A_1^3=\frac{2a\alpha A_1^2-(a^2+\alpha A)A_1+(aA-\alpha D)}{\alpha^2},\quad (\alpha\neq 0); \qquad (3.2_1^0.27)$$

drugo, vrednost za A_1^3 iz $(3.2_1^0.27)$ zamenimo u $(3.2_1^0.23)$, $(3.2_1^0.24)$ $(3.2_1^0.25)$ i $(3.2_1^0.26)$ i time dobijamo:

$$\alpha(6\alpha^2-\alpha b+a\beta)A_1^2+[(B-10a)\alpha^2+(ab-\beta A)\alpha-\beta a^2]A_1+$$
$$+[a(4a\alpha+\beta A-\alpha B)]=0, \qquad (3.2_1^0.28)$$

$$\alpha(3\alpha\beta+a\gamma-\alpha c)A_1^2+[6\alpha^3+(C-2b)\alpha^2+(ac-3a\beta-\gamma A)\alpha-\gamma a^2]A_1-$$
$$-a[6\alpha^2+(C-2b)\alpha-\gamma A]=0, \qquad (3.2_1^0.29)$$

$$(\alpha E-\beta D-2\alpha A)A_1+(2aA+bD-6\alpha D-aE)=0, \qquad (3.2_1^0.30)$$

$$\alpha(6\alpha^2-\alpha b+a\beta)A_1^2+[(F-8a)\alpha^2+(ab-\beta A-\gamma D)\alpha-\beta a^2]A_1+$$
$$+(a\beta A-3\alpha\beta D+2\alpha a^2+\alpha cD-a\alpha F)=0.$$

Iz $(3.2_1^0.30)$ sledi

$$A_1=\frac{6\alpha D+aE-2aA-bD}{\alpha E-\beta D-2\alpha A}\ (\alpha E-\beta D-2\alpha A\neq 0). \qquad (3.2_1^0.32)$$

Kada vrednost za A_1 iz $(3.2_1^0.32)$ zamenimo u $(3.2_1^0.19')$, dobijamo A_2.

Ako vrednost za A_1, zamenimo u jednačinama $(3.2_1^0.28)$, $(3.2_1^0.29)$, $(3.2_1^0.31)$ i $(3.2_1^0.27)$, dobijamo na kraju sledeće uslove:

$$\alpha(6\alpha^2-\alpha b+a\beta)(6\alpha D+aE-2aA-bD)^2+[(B-10a)\alpha^2+(ab-\beta A)\alpha-\beta a^2]$$
$$(6\alpha D+aE-2aA-bD)(\alpha E-\beta D-2\alpha A)+a(4a\alpha+\beta A-\alpha B)$$
$$(\alpha E-\beta D-2\alpha A)^2=0, \qquad (i_9)$$

$$\alpha(3\alpha\beta+a\gamma-\alpha c)(6\alpha D+aE-2aA-bD)^2+[6\alpha^3+(C-2b)\alpha^2+(ac-3a\beta-\gamma A)\alpha-$$
$$-\gamma a^2](6\alpha D+aE-2aA-bD)(\alpha E-\beta D-2\alpha A)-[6a\alpha^2+(aC-2ab)\alpha-a\gamma A].$$
$$(\alpha E-\beta D-2\alpha A)^2=0, \qquad (i_{10})$$

$$(6\alpha D+aE-2aA-bD)(\alpha E-\beta D-2\alpha A)(\alpha B-2\alpha a-\alpha F+\gamma D)+(\alpha E-\beta D-2\alpha A)^2\cdot (2a^2+3\beta D+aF-aB-cD)=0, \qquad (i_{11})$$

$$\alpha(6\alpha D+aE-2aA-bD)^2[6\alpha^2 D+(2aA-aE-bD)\alpha+2a\beta D]+ +(\alpha E-\beta D-2\alpha A)^2[(4A+E)D\alpha^2+(6a^2-bA-\beta D)D\alpha+a(a^2E-2a^2A-abD+\beta AD)]=0. \qquad (i_{12})$$

Iz našeg istraživanja može se formulisati još jedan novi stav.

Stav XVIII. Diferencijalna jednačina (3.1.0) je integrabilna ako njeni koeficijenti zadovoljavaju uslove (i_9), (i_{10}), (i_{11}) i (i_{12}).

Primer. Diferencijalna jednačina

$$(x^2-2x+2)y'''+(5x^2-6x+8)y''+(7x^2+2x+4)y'+ +(3x^2+6x+2)y=0,$$

svodljiva je na integrabilan sistem linearnih jednačina

$$(x^2-2x+2)y'+(3x^2-6x+8)y=z,$$
$$z''+2z'+z=0.$$

U toku proučavanja ove glave došao sam do sledećih zaključaka:

I. Sistematski je provereno da sve diferencijalne jednačine trećeg reda, koje se nalaze u knjizi [1,str.460-470], predstavljaju partikularan slučaj naše posmatrane jednačine (3.1), a njihovi koeficijenti zadovoljavaju kriterijume iz stavova XV, XVI, XVII i XVIII.

II. Neki slučajevi integrabiliteta ove jednačine svode se na integraciju jednačine ispitane u radu [9].

III. Postupak koji smo primenili za formiranje kriterijuma integrabiliteta linearnih diferencijalnih jednačine drugog i trećeg reda, možemo proširiti i na jednačine četvrtog, petog i n-tog reda. Ovim metodom mogu se, praktično, formirati kriterijumi integrabiliteta jednačine četvrtog, petog i n-tog reda, uz normalne napore algebarske prirode.

GLAVA IV

PARAMETARSKI OBLIK NEKI ALGEBARSKIH I POLINOMNIH REŠENJA JEDNE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

4. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu (4.1)

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y''+(ax^2+bx+c)y'+(Ax^2+Bx+C)y=0 \tag{4.1}$$

i tražimo uslove koje treba da zadovoljavaju koeficijenti

$$\begin{aligned}&\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,A,B,C,\\ &a_0,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2,b_3\end{aligned} \tag{4.2}$$

da bi data jednačina imala partikularna rešenja oblika

$$\begin{aligned}x&=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3,\\ y&=b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Zato, ako u jednačini (4.1), zamenimo

$$y'_x=\frac{\dot y}{\dot x} \quad i \quad y''_x=\frac{\ddot y\dot x-\ddot x\dot y}{\dot x^3}$$

ona se transformiše u jednačini oblika

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(\ddot y\dot x-\ddot x\dot y)+(ax^2+bx+c)\dot x^2\dot y+(Ax^2+Bx+C)\dot x^3y=0, \tag{4.1'}$$

odnosno, pošto je:

$$\dot x=a_1+2a_2t+3a_4t^3, \qquad \ddot x=2a_2+6a_3t,$$

$$\dot y=b_1+2b_2t+3b_3t^2, \qquad \ddot y=2b_2+6b_3t,$$

$$y'_x=\frac{b_1+2b_2t+3b_3t^2}{a_1+2a_2t+3a_3t^2}, \qquad y''_x=\frac{2\alpha_{12}+6\alpha_{13}t+6\alpha_{23}t^2}{(a_1+2a_2t+3a_3t^2)^3},$$

gde je

$$\alpha_{ik}=\begin{vmatrix}a_i & a_k\\ & b_k\end{vmatrix}, \quad (i,k=0,1,2,3),$$

jednačina (4.1) prelazi u jednačinu oblika

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)(2\alpha_{12}+6\alpha_{13}t+6\alpha_{23}t^2)+(ax^2+bx+c)(b_1+2b_2t+3b_3t^2)\cdot$$
$$(a_1+2a_2t+3a_3t^2)^2+(Ax^2+Bx+C)(a_1+2a_2t+3a_3t^2)^3(b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3)=0 \tag{4.1''}$$

Ako se vrednosti za x i y iz relacije (4.3) zamene u poslednju jednačinu, dobija se jedna algebarska jednačina petnajestog stepena po (t), a koju ćemo nazovati jednačina (F).

Da bi pomoću (4.3) bilo definisano jedno rešenje jednačine (4.1) potrebno i dovoljno je, da se jednačina (F) identički anulira.

Za odredjivanje zavisnosti konstanata (4.2) dobija se sistem od šesnajset jednačina i to:

$$a_3^5b_3A=0, \tag{1}$$

$$a_3^4A(a_3b_2+4a_2b_3)=0, \tag{2}$$

$$a_3^3A(3a_3^2b_1+12a_2a_3b_2+19a_2^2b_3+9a_1a_3b_3)=0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&a_3^2A(a_3^3b_0+108a_2a_3^2b_1+171a_2^2a_3b_2+81a_1a_3^2b_2+134a_2^3b_3+\\&+252a_1a_2a_3b_3+54a_0a_3^2b_3)+27a_3^4b_3(a+B)=0.\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&(171a_2^2a_3^2b_1+81a_1a_3^3b_1+134a_2^3a_3b_2+252a_1a_2a_3^2b_2+\\&+108a_2a_3^3b_0+291a_1a_2^2a_3b_3+90a_1^2a_3^2b_3+52a_2^4b_3+54a_0a_3^3b_2+\\&+162a_0a_2a_3^2b_3)\cdot a_3A+27a_3^3(a_3b_2+3a_2b_3)B+\\&+18a_3^3(a_3b_2+5a_2b_3)a=0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&(171a_2^2a_3^3b_0+81a_1a_3^4b_0+134a_2^3a_3^2b_1+252a_1a_2a_3^3b_1+\\&+291a_1a_2^2a_3^2b_2+90a_1^2a_3^3b_2+204a_1^2a_2a_3^2b_3+52a_2^4a_3b_2+\\&+148a_1a_2^3a_3b_3+8a_2^5b_3+54a_0a_3^4b_1+162a_0a_2a_3^3b_2+\\&+180a_0a_2^2a_3^2b_3+108a_0a_1a_3^3b_3)A+9a_3^2(3a_3^2b_1+9a_2a_3b_2+\\&+10a_2^2b_3+6a_1a_3b_3)B+3a_3^2(3a_3^2b_1+20a_2a_3b_2+\\&+37a_2^2b_3+24a_1a_3b_3)a=0,\end{aligned} \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&(134a_2^3a_3^2b_0+252a_1a_2a_3^3b_0+291a_1a_2^2a_3^2b_1+90a_1^2a_3^3b_1+\\
&+204a_1^2a_2a_3^2b_2+46a_1^3a_3^2b_3+52a_2^4a_3b_1+148a_1a_2^3a_3b_2+\\
&+153a_1^2a_2^2a_3b_3+8a_2^5b_2+28a_1a_2^4b_3+54a_0a_3^4b_0+162a_0a_2a_3^3b_1+\\
&+180a_0a_2^2a_3^2b_2+108a_0a_1a_3^3b_2+88a_0a_2^3a_3b_3+234a_0a_1a_2a_3^2b_3+\\
&+27a_0^2a_3^3b_3)A+a_3(27a_3^3b_0+81a_2a_3^2b_1+90a_2^2a_3b_2+54a_1a_3^2b_2+\\
&+44a_2^3b_3+117a_1a_2a_3b_3+27a_0a_3^2b_3)B+2a_3(15a_2a_3^2b_1+37a_2^2a_3b_2+\\
&+24a_1a_3^2b_2+87a_1a_2a_3b_3+30a_2^3b_3+27a_0a_3^2b_3)a+\\
&+27a_3^3b_3(b+C)=0, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(291a_1a_2^2a_3^2b_0+90a_1^2a_3^3b_0+204a_1^2a_2a_3^2b_1+46a_1^3a_3^2b_2+\\
&+52a_2^4a_3b_0+148a_1a_2^3a_3b_1+153a_1^2a_2^2a_3b_2+68a_1^3a_2a_3b_3+\\
&+8a_2^5b_1+28a_1a_2^4b_2+38a_1^2a_2^3b_3+180a_0a_2^2a_3^2b_1+108a_0a_1a_3^3b_1+\\
&+88a_0a_2^3a_3b_2+234a_0a_1a_2a_3^2b_2+162a_0a_2a_3^3b_0+168a_0a_1a_2^2a_3b_3+\\
&+72a_0a_1^2a_3^2b_3+16a_0a_2^4b_3+27a_0^2a_3^3b_2+54a_0^2a_2a_3^2b_3)A+\\
&+(90a_2^2a_3^2b_1+54a_1a_3^3b_1+44a_2^3a_3b_2+117a_1a_2a_3^2b_2+81a_2a_3^3b_0+\\
&+84a_1a_2^2a_3b_3+36a_1^2a_3^2b_3+8a_2^4b_3+27a_0a_3^3b_2+54a_0a_2a_3^2b_3)B+\\
&+27a_3^2(a_3b_2+2a_2b_3)C+6a_3^2\alpha_{23}\alpha+\\
&+2(14a_2^2a_3^2b_1+12a_1a_3^3b_1+58a_1a_2a_3^2b_2+33a_1^2a_3^2b_3+20a_2^3a_3b_2+\\
&+69a_1a_2^2a_3b_3+6a_2^4b_3+63a_0a_2a_3^2b_3+18a_0a_3^3b_2)a+\\
&+9a_3^2(2a_3b_2+7a_2b_3)b=0, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(204a_1^2a_2a_3^2b_o+46a_1^3a_3^2b_1+148a_1a_2^3a_3b_o+153a_1^2a_2^2a_3b_1+\\
&+68a_1^3a_2a_3b_2+11a_1^4a_3b_3+8a_2^5b_o+28a_1a_2^4b_1+38a_1^2a_2^3b_2+\\
&+25a_1^3a_2^2b_3+180a_oa_2^2a_3^2b_o+108a_oa_1a_3^3b_o+88a_oa_2^3a_3b_1+\\
&+234a_oa_1a_2a_3^2b_1+168a_oa_1a_2^2a_3b_2+72a_oa_1^2a_3^2b_2+102\ a_oa_1^2a_2a_3b_3+\\
&+16a_oa_2^4b_2+40a_oa_1a_2^3b_3+27a_o^2a_3^3b_1+54a_o^2a_2a_3^2b_2+36a_o^2a_2^2a_3b_3+\\
&+27a_o^2a_1a_3^2b_3)A+(90a_2^2a_3^2b_o+54a_1a_3^3b_o+44a_2^3a_3b_1+\\
&+84a_1a_2a_3^2b_1+84a_1a_2^2a_3b_2+36a_1^2a_3^2b_2+8a_2^4b_2+51a_1^2a_2a_3b_3+\\
&+20a_1a_2^3b_3+27a_oa_3^3b_1+54a_oa_2a_3^2b_2+36a_oa_2^2a_3b_3+27a_oa_1a_3^2b_3)B+\\
&+9a_3(3a_3^2b_1+6a_2a_3b_2+4a_2^2b_3+3a_1a_3b_3)C+\\
&+2(29a_1a_2a_3^2b_1+22a_1^2a_3^2b_2+10a_2^3a_3b_1+46a_1a_2^2a_3b_2+51a_1^2a_2a_3b_3+\\
&+4a_2^4b_2+18a_1a_2^3b_3+9a_oa_3^3b_1+42a_oa_2a_3^2b_2+48a_oa_2^2a_3b_3+\\
&+45a_oa_1a_3^2b_3)a+3a_3(3a_3^2b_1+14a_2a_3b_2+16a_2^2b_3+15a_1a_3b_3)b+\\
&+6a_3(a_3\alpha_{13}+2a_2\alpha_{23})\alpha=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(46a_1^3a_3^2b_o+153a_1^2a_2^2a_3b_o+68a_1^3a_2a_3b_1+11a_1^4a_3b_2+28a_1a_2^4b_o+\\
&+38a_1^2a_2^3b_1+25a_1^3a_2^2b_2+88a_oa_2^3a_3b_o+234a_oa_1a_2a_3^2b_o+\\
&+168a_oa_1a_2^2a_3b_1+72a_oa_1^2a_3^2b_1+102a_oa_1^2a_2a_3b_2+20a_oa_1^3a_3b_3+\\
&+8a_1^4a_2b_3+16a_oa_2^4b_1+40a_oa_1a_2^3b_2+36a_oa_1^2a_2^2b_3+27a_o^2a_3^3b_o+\\
&+54a_o^2a_2a_3^2b_1+36a_o^2a_2^2a_3b_2+27a_o^2a_1a_3^2b_2+8a_o^2a_2^3b_3+36a_o^2a_1a_2a_3b_3)A+\\
&+(44a_2^3a_3b_o+117a_1a_2a_3^2b_o+84a_1a_2^2a_3b_1+36a_1^2a_3^2b_1+51a_1^2a_2a_3b_2+\\
&+10a_1^3a_3b_3+8a_2^4b_1+20a_1a_2^3b_2+18a_1^2a_2^2b_3+27a_oa_3^3b_o+54a_oa_2a_3^2b_1+\\
&+36a_oa_2^2a_3b_2+27a_oa_1a_3^2b_2+8a_oa_2^3b_3+36a_oa_1a_2a_3b_3)B+(27a_3^3b_o+\\
&+54a_2a_3^2b_1+36a_2^2a_3b_2+27a_1a_3^2b_2+8a_2^3b_3+36a_1a_2a_3b_3)C+
\end{aligned}
$$

$$(22a_1^2a_3^2b_1+46a_1a_2^2a_3b_1+68a_1^2a_2a_3b_2+24a_1^3a_3b_3+4a_2^4b_1+$$
$$+24a_1a_2^3b_2+39a_1^2a_2^2b_3+42a_0a_2a_3^2b_1+64a_0a_2^2a_3b_2+$$
$$+60a_0a_1a_3^2b_2+132a_0a_1a_2a_3b_3+24a_0a_2^3b_3+27a_0^2a_3^2b_3)a+$$
$$+(21a_2a_3^2b_1+32a_2^2a_3b_2+30a_1a_3^2b_2+66a_1a_2a_3b_3+12a_2^3b_3+$$
$$+27a_0a_3^2b_3)b+27a_3^2b_3c+$$
$$+2(a_3^2\alpha_{12}+6a_2a_3\alpha_{13}+6a_1a_3\alpha_{23}+3a_2^2\alpha_{23})\alpha=0, \qquad (10)$$

$$(68a_1^3a_2a_3b_0+11a_1^4a_3b_1+38a_1^2a_2^3b_0+25a_1^3a_2^2b_1+168a_0a_1a_2^2a_3b_0$$
$$+72a_0a_1^2a_3^2b_0+102a_0a_1^2a_2a_3b_1+20a_0a_1^3a_3b_2+8a_1^4a_2b_2+$$
$$+a_1^5b_3+16a_0a_2^4b_0+40a_0a_1a_2^3b_1+36a_0a_1^2a_2^2b_2+14a_0a_1^3a_2b_3+$$
$$+36a_0^2a_2^2a_3b_1+27a_0^2a_1a_3^2b_1+8a_0^2a_2^3b_2+36a_0^2a_1a_2a_3b_2+$$
$$+54a_0^2a_2a_3^2b_0+12a_0^2a_1a_2^2b_3+9a_0^2a_1^2a_3b_3)A+$$
$$+(84a_1a_2^2a_3b_0+36a_1^2a_3^2b_0+51a_1^2a_2a_3b_1+10a_1^3a_3b_2+8a_2^4b_0+$$
$$+20a_1a_2^3b_1+18a_1^2a_2^2b_2+7a_1^3a_2b_3+36a_0a_2^2a_3b_1+27a_0a_1a_3^2b_1+8a_0a_2^3b_2$$
$$+36a_0a_1a_2a_3b_2+54a_0a_2a_3^2b_0+12a_0a_1a_2^2b_3+9a_0a_1^2a_3b_3)B+$$
$$+(36a_2^3a_3b_1+27a_1a_3^2b_1+8a_2^3b_2+36a_1a_2a_3b_2+54a_2a_3^2b_0+$$
$$+12a_1a_2^2b_3+9a_1^2a_3b_3)C+$$
$$+2(17a_1^2a_2a_3b_1+8a_1^3a_3b_2+6a_1a_2^3b_1+13a_1^2a_2^2b_2+16a_0a_2^2a_3b_1+$$
$$+15a_0a_1a_3^2b_1+44a_0a_1a_2a_3b_2+21a_0a_1^2a_3b_3+9a_1^3a_2b_3+$$
$$+8a_0a_2^3b_2+24a_0a_1a_2^2b_3+9a_0^2a_3^2b_2+18a_0^2a_2a_3b_3)a$$
$$+(16a_2^2a_3b_1+15a_1a_3^2b_1+44a_1a_2a_3b_2+21a_1^2a_3b_3+8a_2^3b_2+24a_1a_2^2b_3+$$
$$+18a_0a_3^2b_2+36a_0\,[illegible])b+$$
$$+18a_3(a_3b_2+2a_2b\,[illegible](2a_2a_3\alpha_{12}+6a_1a_3\alpha_{13}+3a_2^2\alpha_{13}+$$
$$+6a_0a_3\alpha_{23}+6a_1a_2\alpha_{23})\alpha+6a_3\alpha_{23}\beta=0, \qquad (11)$$

$$
\begin{aligned}
&(11a_1^4a_3b_0+25a_1^3a_2^2b_0+102a_0a_1^2a_2a_3b_0+20a_0a_1^3a_3b_1+\\
&+8a_1^4a_2b_1+a_1^5b_2+40a_0a_1a_2^3b_0+36a_0a_1^2a_2^2b_1+14a_0a_1^3a_2b_2+\\
&+2a_0a_1^4b_3+36a_0^2a_2^2a_3b_0+27a_0^2a_1a_3^2b_0+8a_0^2a_2^3b_1+36a_0^2a_1a_2a_3b_1+\\
&+12a_0^2a_1a_2^2b_2+9a_0^2a_1^2a_3b_2+6a_0^2a_1^2a_2b_3)A+\\
&+(51a_1^2a_2a_3b_0+10a_1^3a_3b_1+20a_1a_2^3b_0+18a_1^2a_2^2b_1+7a_1^3a_2b_2+\\
&+a_1^4b_3+36a_0a_2^2a_3b_0+27a_0a_1a_3^2b_0+8a_0a_2^3b_1+36a_0a_1a_2a_3b_1+\\
&+12a_0a_1a_2^2b_2+9a_0a_1^2a_3b_2+6a_0a_1^2a_2b_3)B+\\
&+(36a_2^2a_3b_0+27a_1a_3^2b_0+8a_2^3b_1+36a_1a_2a_3b_1+12a_1a_2^2b_2+\\
&+9a_1^2a_3b_2+6a_1^2a_2b_3)\,C+\\
&+(14a_1^3a_3b_1+17a_1^2a_2^2b_1+56a_0a_1a_2a_3b_1+28a_0a_1^2a_3b_2+20a_1^3a_2b_2+6a_1^4b_3+\\
&+16a_0a_2^3b_1+48a_0a_1a_2^2b_2+36a_0a_1^2a_2b_3+9a_0^2a_3^2b_1+24a_0^2a_2a_3b_2+12a_0^2a_2^2b_3+\\
&+18a_0^2a_1a_3b_3)a+\\
&+(22a_1a_2a_3b_1+14a_1^2a_3b_2+4a_2^3b_1+16a_1a_2^2b_2+15a_1^2a_2b_3+9a_0a_3^2b_1+\\
&+24a_0a_2a_3b_2+12a_0a_2^2b_3+18a_0a_1a_3b_3)b+\\
&+3(3a_3^2b_1+8a_2a_3b_2+4a_2^2b_3+6a_1a_3b_3)c+\\
&+2(2a_1a_3\alpha_{12}+a_2^2\alpha_{12}+6a_0a_3\alpha_{13}+6a_1a_2\alpha_{13}+3a_1^2\alpha_{23}+6a_0a_2\alpha_{23})\alpha\\
&+6(a_3\alpha_{13}+a_2\alpha_{23})\beta=0, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(20a_0a_1^3a_3b_0+8a_1^4a_2b_0+a_1^5b_1+36a_0a_1^2\,a_2^2b_0+14a_0a_1^3a_2b_1+2a_0a_1^4b_2+\\
&+8a_0^2a_2^3b_0+36a_0^2a_1a_2a_3b_0+12a_0^2a_1a_2^2b_1+9a_0^2a_1^2a_3b_1+6a_0^2a_1^2a_2b_2+a_0^2a_1^3b_3)A+\\
&+(10a_1^3a_3b_0+18a_1^2a_2^2b_0+7a_1^3a_2b_1+a_1^4b_2+8a_0a_2^3b_0+36a_0a_1a_2a_3b_0+\\
&+12a_0a_1a_2^2b_1+9a_0a_1^2a_3b_1+6a_0a_1^2a_2b_2+a_0a_1^3b_3)B+
\end{aligned}
$$

$$+(8a_2^3b_o+36a_1a_2a_3b_o+12a_1a_2^2b_1+9a_1^2a_3b_1+6a_1^2a_2b_2+a_1^3b_3)C+$$

$$+2(7a_oa_1^2a_3b_1+3a_1^3a_2b_1+a_1^4b_2+8a_oa_1a_2^2b_1+10a_oa_1^2a_2b_2+3a_oa_1^3b3+$$

$$+6a_o^2a_2a_3b_1+4a_o^2a_2^2b_2+6a_o^2a_1a_3b_2+6a_o^2a_1a_2b_3)a$$

$$+(7a_1^2a_3b_1+8a_1a_2^2b_1+10a_1^2a_2b_2+3a_1^3b_3+12a_oa_2a_3b_1+8a_oa_2^2b_2+$$

$$+12a_oa_1a_3b_2+12a_oa_1a_2b_3)b+$$

$$+4(3a_2a_3b_1+2a_2^2b_2+3a_1a_3b_2+3a_1a_2b_3)c+$$

$$+2(2a_oa_3\alpha_{12}+2a_1a_2\alpha_{12}+3a_1^2\alpha_{13}+6a_oa_2\alpha_{13}+6a_oa_1\alpha_{23})\alpha+$$

$$+2(a_3\alpha_{12}+3a_2\alpha_{13}+3a_1\alpha_{23})\beta=0, \qquad (13)$$

$$a_1(a_1^4b_o+14a_oa_1^2a_2b_o+2a_oa_1^3b_1+12a_o^2a_2^2b_o+9a_o^2a_1a_3b_o+$$

$$+6a_o^2a_1a_2b_1+a_o^2a_1^2b_2)A+$$

$$+a_1(7a_1^2a_2b_o+a_1^3b_1+12a_oa_2^2b_o+9a_oa_1a_3b_o+6a_oa_1a_2b_1+a_oa_1^2b_2)B+$$

$$+a_1(12a_2^2b_o+9a_1a_3b_o+6a_1a_2b_1+a_1^2b_2)C+$$

$$+(a_1^4b_1+10a_oa_1^2a_2b_1+4a_oa_1^3b_2+4a_o^2a_2^2b_1+6a_o^2a_1a_3b_1+$$

$$+8a_o^2a_1a_2b_2+3a_o^2a_1^2b_3)a+$$

$$+(5a_1^2a_2b_1+2a_1^3b_2+4a_oa_2^2b_1+6a_oa_1a_3b_1+8a_oa_1a_2b_2+3a_oa_1^2b_3)b+$$

$$+(4a_2^2b_1+6a_1a_3b_1+8a_1a_2b_2+3a_1^2b_3)c+$$

$$+2(a_1^2\alpha_{12}+2a_oa_2\alpha_{12}+6a_oa_1\alpha_{13}+3a_o^2\alpha_{23})+$$

$$+2(a_2\alpha_{12}+3a_1\alpha_{13}+3a_o\alpha_{23})\beta+6\alpha_{23}\gamma=0, \qquad (14)$$

$$a_1^2(2a_oa_1^2b_o+6a_o^2a_2b_o+a_o^2a_1b_1)A+$$

$$+a_1^2(a_1^2b_o+6a_oa_2b_o+a_oa_1b_1)B+$$

$$+a_1^2(6a_2b_o+a_1b_1)C+$$

$$+2a_1(a_oa_1^2b_1+2a_o^2a_2b_1+a_o^2a_1b_2)a+$$

$$+a_1(a_1^2b_1+4a_oa_2b_1+2a_oa_1b_2)b+$$

$$+2a_1(a_1b_2+2a_2b_1)c+2(2a_oa_1\alpha_{12}+3a_o^2\alpha_{13})\alpha+$$

$$+2(a_1\alpha_{12}+3a_o\alpha_{13})\beta+6\alpha_{13}\gamma=0, \tag{15}$$

$$a_o^2a_1^3b_oA+a_oa_1^3b_oB+a_1^3b_oC+a_o^2a_1^2b_1a+a_oa_1^2b_1b+$$

$$+a_1^2b_1c+2a_o^2\alpha_{12}\alpha+2a_o\alpha_{12}\beta+2\alpha_{12}\gamma=0. \tag{16}$$

U zavisnosti od koeficijenta (4.2), u daljem radu moramo posmatrati sedam slučajeva:

1. $a_3b_3\neq 0$, $A=0$; 2. $a_3=0$, $b_3\neq 0$, $A=0$;

3. $a_3\neq 0$, $b_3=0$, $A=0$, 4. $a_3=b_3=A=0$;

5. $a_3\neq 0$, $b_3\neq 0$, $A\neq 0$, 6. $a_3\neq 0$, $b_3=0$, $A\neq 0$,

7. $a_3=b_3=0$, $A\neq 0$.

<u>Prvi slučaj:</u> $a_3b_3\neq 0$, $A=0$. Za $A=0$, jedinične (1), (2) i (3) su zadovoljene.

Iz jednačine (4), dobija se

$$a+B=0, \tag{4.1.1}$$

a iz (5), prema (4.1.1), imamo

$$a\alpha_{23}=0. \tag{4.1.2}$$

Ova relacija biće zadovoljena ako:

1^o. $a\neq 0$, $\alpha_{23}=0$; 2^o. $a=0$, $\alpha_{23}\neq 0$, 3^o $a=0$, $\alpha_{23}=0$.

1^o. Iz jednačine (6), prema (4.1.1) i (4.1.2), dobija se

$$\alpha_{13}=0. \tag{4.1^o.1}$$

Iz $\alpha_{13}=0$ i $\alpha_{23}=0$ $\Rightarrow$ $\alpha_{12}=0$, t.j. $a_1b_2=a_2b_1$

Iz relacije (7), prema (4.1.1), (4.1.2) i ($4.1^o.1$), dobija se prvi uslov

$$a\alpha_{03}+b_3(b+C)=0, \qquad (4.1^o.2)$$

a iz (8), prema (4.1.1), (4.1.2) i ($4.1^o.1$), proizilazi

$$9a_2b_3(b+C)+(8a_2\alpha_{03}+a_3\alpha_{02})a=0, \qquad (4.1^o.3)$$

dok iz (9), prema (4.1.1), (4.1.2) i ($4.1^o.1$), imamo

$$3a_3(3a_1b_3+5a_2b_2)(b+C)+[5a_2a_3\alpha_{02}+$$
$$+(10a_2^2+9a_1a_3)\alpha_{03}]a=0. \qquad (4.1^o.4)$$

Uporedjujući ($4.1^o.2$) sa ($4.1^o.3$) i ($4.1^o.4$) da se zaključiti da je jedna jednačina posledica druge jednačine.

Jednačina (10), prema (4.1.1), (1.1.2) i ($4.1^o.1$), postaje

$$[a_3(28a_2^2+21a_1a_3)\alpha_{02}+(16a_2^3+27a_0a_3^2+96a_1a_2a_3)\alpha_{03}]a+$$
$$+a_3(27a_3^3b_0+117a_1a_3b_2+44a_2^2b_2)C+27a_3^2b_3c+$$
$$+a_3(27a_0a_3b_3+117a_1a_3b_2+44a_2^2b_2)b=0. \qquad (4.1^o.5)$$

Iz jednačina ($4.1^o.2$) i ($4.1^o.5$) dobija se na kraju sledeći uslov

$$b_3c-\alpha_{03}C=0. \qquad (4.1^o.6)$$

Jednačine od (11) do (16), prema (4.1.2), ($4.1^o.1$), ($4.1^o.2$) i ($4.1^o.6$) su zadovoljene.

Na osnovu izloženih činjenica možemo formulisati sledeći stav.

<u>Stav XIX.</u> Diferencijalna jednačina (4.1) ima partikularnih rešenja oblika (4.3), ako su zadovoljeni uslovi (4.1.1), ($4.1^o.6$), ($4.1^o.2$).

<u>Drugi slučaj:</u> $a_3b_3\neq 0$, $A=0$, $\alpha_{23}\neq 0$, $a=0$. Iz (4.1.1) dobijaju se $B=0$.

Ovaj slučaj je ispitan od strane prof. Ilije A. Šapkareva u radu [10, s1.1.1], a koji sam ja koristio u ovome radu.

Treći slučaj: $a_3b_3\neq 0$, $A=0$, $\alpha_{23}=0$, $a=0$, $\alpha_{13}\neq 0$.

Ovaj slučaj se svodi na rezultate dobijenih u [10, s. 1.2].

Primer. Diferencijalna jednačina

$$2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y''+(10x^2+x-2)y'-2(5x-2)y=0$$

i ima partikularan integral definisan sa:

$$x=-1+t+2t^2+3t^3,$$
$$y=-2(1-2t-4t^2-6t^3)$$

Posmatramo sada slučaj 2. $a_3=A=0$, $b_3\neq 0$.

Za $a_3=A=0$, jednačine od (1) do (7) su zadovoljene.

Iz jednačine (8), za $a_2\neq 0$, dobija se

$$2B+3a=0, \tag{4.2.1}$$

a iz (9), prema (4.2.1), sledi

$$(3a_1b_3-2a_2b_2)a=0. \tag{4.2.2}$$

Poslednja relacija je zadovoljena ako:

1°. $a\neq 0$, $3a_1b_3-2a_2b_2=0$,

2°. $a=0$, $3a_1b_3-2a_2b_2\neq 0$,

3°. $a=0$, $3a_1b_3-2a_2b_2=0$.

1°. Iz relacija (10), (11), (12), (13), (14), (15) i (16), prema (4.2.1) i 1°, dobijaju se respektivno sledeće jednačine:

$$(a_1b_2-4a_2b_1+6a_0b_3)a+6b_3b+4b_3C+3b_3\alpha=0, \tag{4.2.1°.1}$$

$$(2a_1^2b_2+12a_0a_2b_2-6a_2^2b_0-9a_1a_2b_1)a+12a_2b_2b+$$
$$+2a_2b_2(4C+3\alpha)=0, \tag{4.2.1°.2}$$

$$(5a_1^3b_2+56a_0a_1a_2b_2+24a_0^2a_2b_3-60a_1a_2^2b_0-28a_1^2a_2b_1-$$
$$-8a_0a_2^2b_1)a+16a_2(a_2b_1+2a_1b_2)C+24a_2b_3c+4a_2(2a_2b_1+$$
$$+13a_1b_2+6a_0b_3)b+4a_2(\alpha_{12}+6a_1b_2+6a_0b_3)\alpha+12a_2b_3\beta=0, \tag{4.2.1°.3}$$

$$(a_1^4b_2+28a_oa_1^2a_2b_2+32a_o^2a_2^2b_2-9a_1^3a_2b_1-54a_1^2a_2^2b_o-24a_oa_2^3b_o-$$
$$-4a_oa_1a_2^2b_1)a+4(4a_2^3b_o+6a_1a_2^2b_1+5a_1^3b_3)C+32a_2^2b_2c+$$
$$+8a_2(2a_1a_2b_1+3a_1^2b_2+4a_oa_2b_2)b+8a_2(a_1^2b_2+4a_oa_2\,b_2+a_1\alpha_{12})\alpha+$$
$$+16a_2^2b_2\beta=0, \tag{4.2.1°.4}$$

$$(2a_oa_1^2a_2b_1+5a_oa_1^3b_2+8a_o^2a_2^2b_1+20a_o^2a_1a_2b_2-21a_1^3a_2b_o-$$
$$-a_1^4b_1-36a_oa_1a_2^2b_o)a+2a_1(12a_2^2b_o+6a_1a_2b_1+a_1^2b_2)C+$$
$$+2(5a_1^2a_2b_1+2a_1^3b_2+4a_oa_2^2b_1+10a_oa_1a_2b_2)b+4a_2(2a_2b_1+5a_1b_2)c+$$
$$+4[(a_1^2+2a_oa_2)\alpha_{12}+4a_oa_1a_2b_2+3a_o^2a_2b_3]\alpha+4a_2(\alpha_{12}+2a_1b_2+3a_ob_3)\beta+$$
$$+12a_2b_3\gamma=0, \tag{4.2.1°.5}$$

$$(a_oa_1^2b_1+4a_o^2a_1b_2+8a_o^2a_2b_1-18a_oa_1a_2b_o-3a_1^3b_o)a+$$
$$+2a_1(6a_2b_o+a_1b_1)C+2(a_1^2b_1+4a_oa_2b_1+2a_oa_1b_2)b+$$
$$+4(2a_2b_1+a_1b_2)c+4a_o(2\alpha_{12}+3a_ob_3)\alpha+4(\alpha_{12}+3a_ob_3)\beta+$$
$$+12b_3\gamma=0, \tag{4.2.1°.6}$$

$$a_oa_1^2(2a_ob_1-3a_1b_o)a+2a_1^3b_oC+2a_oa_1^2b_1b+$$
$$+2a_1^2b_1c+4a_o^2\alpha_{12}\alpha+4a_o\alpha_{12}\beta+4\alpha_{12}\gamma=0 \tag{4.2.1°.7}$$

Iz jednačina (4.2.1°.1) i (4.2.1°.2) kada prema jednačinu pomnožimo sa $(-3a_1)$ i saberemo sa drugom jednačinom, imajući u vidu i 1°, dobija se uslov:

$$a_1^2b_2-3a_1a_2b_1+6a_2^2b_o=0. \tag{4.2.1°.8}$$

Rešavajući jednačinu (4.2.1°.1) po C dobija se

$$C=\frac{(4a_2b_1-a_1b_2-6a_ob_3)a-6b_3b-3b_3\alpha}{4b_3} \tag{4.2.1°.9}$$

Kada u relacijama (4.2.1°.3), (4.2.1°.4), (4.2.1°.5), (4.2.1°.6) i (4.2.1°.7) zamenimo vrednost za C iz (4.2.1°.9) i koristeći još uslove 1° i (4.2.1°.8), dobijaju se respektivno ove jednačine:

$$(4a_0a_1b_2b_3-8a_1^2b_1b_3+a_1^2b_2^2+12a_0^2b_3^2-16a_0a_2b_1b_3+8a_2^2b_1^2)a+$$
$$+2b_3(a_1b_2-4a_2b_1+6a_0b_3)(b+\alpha)+12b_3^2c+6b_3^2\beta=0, \qquad (4.2.1^o.10)$$

$$(16a_0^2a_2^2b_2b_3+8a_2^4b_0b_1+12a_1a_2^3b_1^2+12a_0a_1^3b_3^2+20a_1a_2^3b_0b_2$$
$$+a_1^3a_2b_1b_3-32a_0a_1a_2^2b_1b_3-2a_1^4b_2b_3)a+24a_1a_2b_3^2c+$$
$$+4a_2b_3(a_1^2b_2-4a_1a_2b_1+4a_0a_2b_2)(b+\alpha)+12a_1a_2b_3^2\beta=0, \qquad (4.2.1^o.11)$$

$$(48a_1^2a_2^2b_1^2-5a_1^4b_1b_3-104a_0a_1^2a_2b_1b_3+28a_0a_1^3b_2b_3+16a_0^2a_2^2b_1b_3+$$
$$+40a_0^2a_1a_2b_2b_3-11a_1^3a_2b_1b_2-34a_1^2a_2^2b_0b_2)a+$$
$$+2b_3(7a_1^3b_2+8a_0a_2^2b_1+20a_0a_1a_2b_2-26a_1^2a_2b_1)b+$$
$$+b_3(11a_1^3b_2-44a_1^2a_2b_1+48a_0a_1a_2b_2-16a_0a_2^2b_1+24a_0^2a_2b_3)\alpha+$$
$$+8a_2b_3(2a_2b_1+5a_1b_2)c+8a_2b_3(3a_1b_2-a_2b_1+3a_0b_3)\beta+24a_2b_3^2\gamma=0,$$
$$(4.2.1^o.12)$$

$$(8a_0^2a_1b_2b_3+16a_0^2a_2b_1b_3-10a_1^2a_2b_0b_2+16a_1^2a_2b_1^2-5a_1^3b_1b_2-$$
$$-40a_0a_1^2b_1b_3+8a_0a_1^2b_2^2)a+2b_3(8a_0a_2b_1+4a_0a_1b_2-a_1^2b_1-$$
$$-18a_1a_2b_0)b+$$
$$+b_3(16a_0\alpha_{12}+24a_0^2b_3-18a_1a_2b_0-3a_1^2b_1)\alpha+8b_3(2a_2b_1+a_1b_2)c+$$
$$+8b_3(\alpha_{12}+3a_0b_3)\beta+24b_3^2\gamma=0, \qquad (4.2.1^o.13)$$

i

$$a_1^2(4a_0^2b_1b_3+4a_1a_2b_0b_1-12a_0a_1b_0b_3-a_1^2b_0b_2)a+$$
$$+2a_1^2b_3(2a_0b_1-3a_1b_0)b+b_3(8a_0^2\alpha_{12}-3a_1^3b_0)\alpha+$$
$$+4a_1^2b_1b_3c+8a_0\alpha_{12}b_3\beta+8b_3\alpha_{12}\gamma=0. \qquad (4.2.1^o.14)$$

Iz jednačina $(4.2.1^o.10)$ i $(4.2.1^o.11)$, kada prvu jednačinu pomnožemo sa $(-2a_1a_2)$ i saberemo sa drugom jednačinom koristeći još i uslove 1^o i (2.2.1.8), dobija se relacija:

$$a_1b_2 - 3a_2b_1 = 0 \qquad (4.2.1^o.15)$$

koja predstavlja treći uslov.

Kada uslove $(4.2.1^o.8)$, $(4.2.1^o.15)$ i 1^o rešimo kao sistem jednačina po b_2, b_1 i b_o dobijaju se ove relacije:

$$b_2 = \frac{3a_1}{2a_2}b_3; \quad b_1 = \frac{a_1^2}{2a_2^2}b_3; \quad b_o = 0. \qquad (4.2.1^o.16)$$

Ako se vrednosti za b_2, b_1 i b_o iz $(4.2.1^o.16)$ zamene u jednačinama $(4.2.1^o.10)$, $(4.2.1^o.12)$, $(4.2.1^o.13)$ i $(4.2.1^o.14)$ dobijaju se respektivno sledeće relacije:

$$(a_1^4 - 8a_oa_1^2a_2 + 48a_o^2a_2^2)a + 4a_2(12a_oa_2 - a_1^2)(b+\alpha) + \\ +48a_2^2c + 24a_2^2\beta = 0, \qquad (4.2.1^o.17)$$

$$a_1^2(5a_1^4 - 40a_oa_1^2a_2 + 272a_o^2a_2^2)a + 4a_1^2a_2(68a_oa_2 - 5a_1^2)b + \\ +2a_2(128a_oa_1^2a_2 - 11a_1^4 + 48a_o^2a_2^2)\alpha + 272a_1^2a_2^2c + \\ +32a_2^2(4a_1^2 + 3a_oa_2)\beta + 96a_2^3\gamma = 0, \qquad (4.2.1^o.18)$$

$$a_1^2(a_1^4 + 80a_o^2a_2^2 - 8a_oa_1^2a_2)a + 4a_1^2a_2(20a_oa_2 - a_1^2)b + \\ +2a_2(32a_oa_1^2a_2 + 48a_o^2a_2^2 - 3a_1^4)\alpha + 80a_1^2a_2^2c + \\ +32a_2^2(a_1^2 + 3a_oa_2)\beta + 96a_2^3\gamma = 0, \qquad (4.2.1^o.19)$$

$$a_o^2a_1^2a + a_oa_1^2b + 4a_o^2a_2\alpha + a_1^2c + 4a_oa_2\beta + 4a_2\gamma = 0, \qquad (4.2.1^o.20)$$

I na kraju, kada vrednosti iz relacije $(4.2.1^o.16)$ uvrstimo u $(4.2.1^o.9)$ dobija se jednačina:

$$(a_1^2 - 12a_oa_2)a - 12a_2b - 6a_2\alpha - 8a_2C = 0 \qquad (4.2.1^o.21)$$

Ako iz jednačine $(4.2.1^o.18)$ oduzmemo $(4.2.1^o.19)$, dobija se jednačina $(4.2.1^o.17)$.

Iz jednačina $(4.2.1^o.18)$ i $(4.2.1^o.20)$, kada drugu jednačinu pomnožimo sa $(-24a_2^2)$ i saberemo sa prvom jednačinom, dobija se:

$$(5a_1^4-40a_oa_1^2a_2+248a_o^2a_2^2)a+4a_2(62a_oa_2-5a_1^2)b+$$
$$+2a_2(128a_oa_2-11a_1^2)\alpha+248a_2^2c+128a_2^2\beta=0, \qquad (4.2.1^o.22$$

a iz jednačina $(4.2.1^o.17)$ i $(4.2.1^o.22)$, kada prvu jednačinu pomnožimo sa (-16), a drugu sa 3, pa ih saberemo, dobija se relacija:

$$(8a_oa_1^2a_2-a_1^4-24a_o^2a_2^2)a+4a_2(a_1^2-6a_oa_2)b-$$
$$-2a_1^2a_2\alpha-24a_2^2c=0. \qquad (4.2.1^o.23)$$

Na osnovu izloženog vidimo da je broj dobijenih jednačina za 3 manji od broja nepoznatih $(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma,C)$, pa ćemo tri od njih smatrati proizvoljnim (a,b,α), da bismo dobili ostala četiri nepoznate.

Tako iz jednačina $(4.2.1^o.23)$, $(4.2.1^o.21)$, $(4.2.1^o.17)$ i $(4.2.1^o.20)$ dobijaju se respektivno ove vrednosti:

$$c=\frac{1}{24a_2^2}[(8a_oa_1^2a_2-a_1^4-24a_o^2a_1^2)a+4a_2(a_1^2-6a_oa_2)b-$$
$$-2a_1^2a_2\alpha], \qquad (4.2.1^o.24)$$

$$C=\frac{1}{8a_2}[(a_1^2-12a_oa_2)a-12a_2b-6a_2\alpha], \qquad (4.2.1^o.25)$$

$$\beta=-\frac{1}{24a_2^2}[(a_1^4-8a_oa_1^2a_2+48a_o^2a_2^2)a+4a_2(12a_oa_2-a_1^2)(b+\alpha)+$$
$$+48a_2^2c], \qquad (4.2.1^o.26)$$

$$\gamma=-\frac{1}{4a_2}(a_o^2a_1^2a+a_oa_1^2b+4a_o^2a_2\alpha+a_1^2c+4a_oa_2\beta) \qquad (4.2.1^o.27)$$

Naša istraživanja omogućuju da formulišemo sledeći stav

Stav XX. Diferencijalna jednačina (4.1) ima partikularnih rešenja oblika (4.3) ako su zadovoljeni uslovi 1^o, $(4.2.1^o.8)$ i $(4.2.1^o.15)$.

Primer. Diferencijalna jednačina

$$2x(3x-1)y''-(2x^2+x+1)y'+(3x-1)y=0$$

ima partikularan integral definisan sa:

$$x=1+2t+t^2$$

$$y=-(2t+3t^2+t^3)=$$ [redacted]

2^o. Za slučaj: $a_3=0$, $b_3\neq 0$, $A=0$, $a=0$, $a_2\neq 0$,

$$2a_2b_2-3a_1b_3\neq 0,$$

dobija se iz (4.2.1) $B=0$, t.j.

$$a=A=B=0.$$

Ovaj slučaj se svodi na rezultate dobijenih u radu [10,s.2.1].

3^o. Za slučaj: $a_3=0$, $b_3\neq 0$, $A=0$, $a=0$, $a_2\neq 0$ i

$$2a_2b_2-3a_1b_3=0,$$

i ovaj slučaj je ispitan (videti: [10,2.2]).

3. $a_3\neq 0$, $b_3=0$, $A=0$.

Za $b_3=0$ i $A=0$ jednačine (1), (2), (3) i (4) su zadovoljene.

Iz jednačine (5) sledi

$$2a+3B=0, \tag{4.3.1}$$

a iz (6), prema (4.3.1), dobija se

$$(2a_2b_2-3a_3b_1)a=0, \tag{4.3.2}$$

Ova relacija biće zadovoljena ako:

1°. $a \neq 0$, $2a_2b_2 - 3a_3b_1 = 0$,

2°. $a = 0$, $2a_2b_2 - 3a_3b_1 \neq 0$,

3°. $a = 0$, $2a_2b_2 - 3a_3b_1 = 0$.

Jednačina (7), prema (2.3.1) i 1°, postaje:

$$4a_1b_2 - a_2b_1 - 6a_3b_o = 0. \tag{4.3.1°.1}$$

Iz jednačina (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15) i (16), prema relacijama (4.3.1), 1° i (4.3.1°.1), dobijaju se respektivno sledeće jednačine:

$$(a_1b_1 - 4a_2b_o + 6a_ob_2)a + 9b_2c - 2b_2\alpha + 6b_2b = 0, \tag{4.3.1°.2}$$

$$\begin{aligned}&(18a_oa_3b_1 + 7a_1^2b_2 - 12a_1a_3b_o - 7a_2^2b_o)a + 27a_3b_1c + \\ &\quad + 18a_3b_1b - 6a_3b_1\alpha = 0,\end{aligned} \tag{4.3.1°.3}$$

$$\begin{aligned}&(111a_1^2a_3b_1 + 918a_oa_1a_3b_2 - 198a_1a_2a_3b_o - 1242a_oa_3^2b_o - \\ &\quad - 64a_2^3b_o)a + 81a_3(17a_1b_2 - 23a_3b_o)c + \\ &\quad + 54a_3(17a_1b_2 - 23a_3b_o)b - \\ &\quad - 18a_3(13a_1b_2 - 17a_3b_o)\alpha = 0,\end{aligned} \tag{4.3.1°.4}$$

$$\begin{aligned}&2(378a_oa_1a_3^2b_1 + 92a_1^3a_3b_2 + 27a_o^2a_3^2b_2 - 270a_oa_2a_3^2b_o - \\ &- 8a_2^4b_o - 153a_1^2a_3^2b_o - 72a_1a_2^2a_3b_o)a + 27a_3^2(41a_1b_1 - 26a_2b_o)c + \\ &+ 9a_3^2(83a_1b_1 + 6a_ob_2 - 56a_2b_o)b + 54a_3^2b_2c - \\ &- 36a_3^2(7a_1b_1 + a_ob_2 - 5a_2b_o)\alpha - 18a_3^2b_2\beta = 0,\end{aligned} \tag{4.3.1°.5}$$

$$\begin{aligned}&5(186a_oa_1^2a_3b_2 - 270a_oa_1a_3^2b_o + 11a_1^3a_3b_1 - 24a_1^2a_2a_3b_o - \\ &- 24a_oa_2^2a_3b_o + 27a_o^2a_3^2b_1 - 8a_1a_2^3b_o)a + 9a_3(139a_1^2b_2 - 4a_2^2b_o - \\ &- 195a_1a_3b_o)c + 3(46a_1a_2a_3b_1 + 14a_1^2a_3b_2 + 4a_2^3b_1 + \\ &\quad + 45a_oa_3^2b_1)b + 135a_3^2b_1c - 3(13a_1a_2a_3b_1 + \\ &+ 2a_1^2a_3b_2 + 2a_2^3b_1 + 30a_oa_3^2b_1)\alpha - \\ &\quad - 45a_3^2b_1\beta = 0,\end{aligned} \tag{4.3.1°.6}$$

$$2a_1(9a_oa_2^2b_1+81a_o^2a_3b_2-11a_1^2a_3b_o-4a_1^3b_2)a+$$
$$+3a_1a_2(22a_1b_2+3a_2b_1)C+3a_3(6a_oa_1b_2+12a_oa_2b_1+35a_1^2b_1-$$
$$-24a_1a_2b_o)b+54a_3(3a_1b_2-4a_3b_o)c-36a_3(a_1^2b_1+3a_oa_1b_2-$$
$$-a_1a_2b_o-4a_oa_3b_o)\alpha-18a_3(3a_1b_2-4a_3b_o)\beta=0, \qquad (4.3.1^o.7)$$

$$(34a_o^2a_1a_2b_2+12a_o^2a_2^2b_1-26a_oa_1^3b_2+21a_oa_1^2a_2b_1+a_1^4b_1-$$
$$-14a_1^3a_2b_o)a+3a_1^2(37a_1b_2-27a_3b_o)C+6(11a_1^3b_2+6a_oa_1a_2b_2+$$
$$+2a_oa_2^2b_1-15a_1^2a_3b_o)b+18a_3(7a_1b_1-4a_2b_o)c+$$
$$+18(2a_1^2a_3b_o+4a_oa_2a_3b_o-a_1^3b_2-5a_oa_1a_3b_1-a_o^2a_3b_2)\alpha-$$
$$-9a_3(5a_1b_1-4a_2b_o-2a_ob_2)\beta-18a_3b_2\gamma=0, \qquad (4.3.1^o.8)$$

$$2a_1(3a_o^2a_1b_2+2a_oa_1^2b_1-a_1^3b_o-6a_oa_1a_2b_o+6a_o^2a_2b_1)a+$$
$$+3a_1^2(6a_2b_o+a_1b_1)C+3a_1(a_1^2b_1+2a_oa_1b_2+4a_oa_2b_1)b$$
$$+18a_1(3a_1b_2-4a_3b_o)c+18a_o(a_1a_3b_o-2a_1^2b_2-a_oa_3b_1)\alpha+$$
$$+18(2a_1a_3b_o-a_1^2b_2-a_oa_3b_1)\beta-12a_2b_2\gamma=0, \qquad (4.3.1^o.9)$$

$$a_oa_1^2(3a_ob_1-2a_1b_o)a+3a_1^3b_oC+3a_oa_1^2b_1b+$$
$$+3a_1^2b_1c+6a_o^2\alpha_{12}\alpha+6a_o\alpha_{12}\beta+6\alpha_{12}\gamma=0. \qquad (4.3.1^o.10)$$

Iz jednačina $(4.3.1^o.2)$ i $(4.3.1^o.3)$, kada prvu pomnožimo sa $(-2a_2)$ i saberemo sa drugom, koristeći uslov 1^o, dobija se treći uslov:

$$a_2^2b_o-a_1^2b_2=0 \qquad (4.3.1^o.11)$$

Dobijeni uslovi :

$$\begin{aligned} 6a_3b_o-4a_1b_2+a_2b_1&=0,\\ -2a_2b_2+3a_3b_1&=0,\\ a_2^2b_o-a_1^2b_2\quad&=0, \end{aligned} \qquad (4.3.1^o.12)$$

daju nam jedan linearan sistem homogenih jednačina po b_o, b_1 i b_2.

Kao što je poznato, sistem jednačina ($4.3.1^o.12$) je rešljiv ako i samo ako, determinanta sistema biće jednaka nuli

$$D_s = \begin{vmatrix} 6a_3 & a_2 & -4a_1 \\ 0 & 3a_3 & -2a_2 \\ a_2^2 & 0 & -a_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

odnosno

$$(a_2^2 - 3a_1a_3)^2 = 0 \rightarrow a_2^2 = 3a_1a_3 \qquad (4.3.1^o.13)$$

Znači, dobijaju se sledeće tri relacije:

$$a_2^2 = 3a_1a_3; \; b_1 = \frac{2a_2}{3a_3} b_2; \quad b_o = \frac{a_1^2}{a_2^2} b_2. \qquad (4.3.1^o.14)$$

Jednačina ($4.3.1^o.2$), prema ($4.3.1^o.14$), postaje:

$$2(3a_oa_2 - a_1^2)a + 9a_2C - 2a_2\alpha + 6a_2b = 0, \; (b_2 \neq 0). \qquad (4.3.1^o.15)$$

Jednačine ($4.3.1^o.2$) i ($4.3.1^o.3$) su saglasne. Jednačina ($4.3.1^o.4$), prema ($4.3.1^o.14$), postaje:

$$14(3a_oa_2 - a_1^2)a + 63a_2C + 42a_2b - 11a_2\alpha = 0. \qquad (4.3.1^o.16)$$

Iz dve poslednje jednačine, kada ($4.3.1^o.15$) pomnožimo sa (−7) i saberemo sa ($4.3.1^o.16$), dobija se relacija:

$$3a_2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0, \text{ za } a_2 \neq 0. \qquad (4.3.1^o.17)$$

Jednačina ($4.3.1^o.15$), prema ($4.3.1^o.17$), postaje:

$$2(3a_oa_2 - a_1^2)a + 9a_2C + 6a_2b = 0. \qquad (4.3.1^o.18)$$

Kada u jednačinama($4.3.1^o.5$)i($4.3.1^o.6$) zamenimo($4.3.1^o.14$) i ($4.3.1^o.17$),dobijaju se respektivno ove relacije:

$$(162a_oa_1a_2 + 27a_o^2a_3 - 55a_1^3)a + 252a_1a_2C + 27a_3c + \\ + 3(55a_1a_2 + 9a_oa_3)b - 9a_3\beta = 0, \qquad (4.3.1^o.19)$$

$$(108a_0a_1^2a_3-13a_1^3a_2+27a_0^2a_2a_3)a+189a_1^2a_3C+27a_2a_3c+$$
$$+9(13a_1^2a_3+3a_0a_2a_3)b-9a_2a_3\beta = 0. \quad (4.3.1^o.20)$$

Iz poslednje dve jednačine, kada $(4.3.1^o.19)$ pomnožimo sa $(-a_2)$ i saberimo sa $(4.3.1^o.20)$ dobija se relacija

$$2(7a_1a_2-63a_0a_3)a-189a_3C-42a_3b = 0. \quad (4.3.1^o.21)$$

Kada sistemi jednačina $(4.3.1^o.18)$, $(4.3.1^o.21)$:

$$6a_2b+9a_2C = -2(3a_0a_2-a_1^2)a,$$
$$42a_3b+189a_3C = 2(7a_1a_2-63a_0a_3)a$$

rešimo po b i C dobijamo:

$$D_a = 756a_2a_3, \quad D_b = 0 \quad \text{i} \quad D_C = 168a_3(a_1^2-3a_0a_2)a,$$

odavde se dobijaju vrednosti za b i C, t.j.

$$b = 0 \quad \text{i} \quad C = \frac{2(a_1^2-3a_0a_2)}{9a_2}\,a \quad (4.3.1^o.22)$$

Jednačina $(4.3.1^o.7)$ prema relacijama $(4.3.1^o.14)$, $(4.3.1^o.17)$, postaje:

$$(5a_1^3-30a_0a_1a_2+243a_0^2a_3)a+135a_3c-45a_3\beta = 0. \quad (4.3.1^o.23)$$

Kada vrednosti iz $(4.3.1^o.22)$ zamenimo u jednačini $(4.3.1^o.19)$ dobija se relacija:

$$(a_1^3-6a_0a_1a_2+27a_0^2a_3)a+27a_3c-9a_3\beta = 0, \quad (4.3.1^o.24)$$

a kada jednačinu $(4.3.1^o.24)$ pomnožimo sa (-5) i saberimo sa $(4.3.1^o.23)$ dobija se na kraju relacija:

$$135a_0^2a_3a = 0 \;\rightarrow\; a_0 = 0, \quad (4.3.1^o.25)$$

jer su $a_3 \neq 0$ i $a \neq 0$ po pretpostavci.

Jednačine $(4.3.1^\circ.8)$, $(4.3.1^\circ.9)$ i $(4.3.1^\circ.10)$, prema relacijama $(4.3.1^\circ.14)$, $(4,3.1^\circ.17)$, $(4.3.1^\circ.22)$ i $(4.3.1^\circ.25)$ postaju respektivno:

$$10a_1^5 a+270a_1^2a_3c-81a_1^2a_3\beta-27a_2a_3\gamma=0, \qquad (4.3.1^\circ.26)$$

$$5a_1^5a+135a_1^2a_3c-27a_1^2a_3\beta-54a_2a_3\gamma=0. \qquad (4.3.1^\circ.27)$$

$$a_1^5a+27a_1^2a_3c-27a_2a_3\gamma=0. \qquad (4.3.1^\circ.28)$$

Kada vrednost za a_0 iz relacije $(4.3.1^\circ.25)$ zamenimo u $(4.3.1^\circ.24)$ dobija se:

$$a_1^3a+27a_3c-9a_3\beta=0. \qquad (4.3.1^\circ.29)$$

Ako vrednosti za β iz poslednje jednačine uvrstimo u $(4.3.1^\circ.26)$ i $(4.3.1^\circ.27)$ dobija se, u oba slučaja, jednačina $(4.3.1^\circ.28)$.

Iz jednačina $(4.3.1^\circ.29)$ i $(4.3.1^\circ.28)$ dobija se relacija:

$$\beta-9\gamma=0 \Rightarrow \beta=9\gamma. \qquad (4.3.1^\circ.30)$$

Na osnovu navedenih činjenica može se formulisati sledeći stav:

Stav XXI. Diferencijalna jednačina (4.1) ima partikularnih rešenja oblika (4.3), ako su zadovoljeni uslovi 1°, $(4.3.1^\circ.1)$ i $(4.3.1^\circ.11)$.

Primer. Diferencijalna jednačina

$$9(9x+1)y''-(81x^2-28)y'+6(9x-1)y=0$$

ima partikularan integral definisan sa:

$$x=-(1-3t+3t^2)t,$$

$$y=1-6t+9t^2.$$

2^o. Za slučaj: $a_3 \neq 0$, $b_3 = 0$, $A = 0$, $b_2 \neq 0$,

$$a = 0,\ 2a_2b_2 - 3a_3b_1 \neq 0,$$

dobija se prema (4.3.1):

$$a = A = B = 0,$$

t.j. slučaj se svodi na rezultate dobijene u [10,4.3].

3^o. Slučaj: $a_3 \neq 0$, $b_3 = 0$, $A = 0$, $b_2 \neq 0$, $a = 0$, $2a_2b_2 - 3a_3b_1 = 0$, nije interesantan za razmatranje jer postaje samo trivijalna rešenja.

4. $a_3 = 0$, $b_3 = 0$, $A = 0$.

Jednačine (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7) i (8) za $a_3 = b_3 = A = 0$ su zadovoljene.

Iz jednačine (9) dobija se:

$$B+a=0,\ \text{za}\ a_2 \neq 0\ \text{i}\ b_2 \neq 0. \qquad (4.4.1)$$

Jednačina (10) prema (4.4.1), postaje:

$$\alpha_{12}a = 0. \qquad (4.4.2)$$

1^o. $a \neq 0$, $\alpha_{12} = 0$.
2^o. $a = 0$, $\alpha_{12} \neq 0$
3^o. $a = 0$, $\alpha_{12} = 0$.

1^o. Jednačine (11) i (12), prema (4.4.1) i 1^o, postaju:

$$\alpha_{02}a + b_2(b+C) = 0, \qquad (4.4.1^o.1)$$

$$a_1[\alpha_{02}a + b_2(b+C)] = 0. \qquad (4.4.1^o.2)$$

Jednačine $(4.4.1^o.1)$ i $(4.4.1^o.2)$ su saglasne.

Jednačine (13), (14), (15) i (16) prema relacijama (4.4.1)) i 1^o, respektivno postaju:

$$(4a_o\alpha_{02} + 9a_1\alpha_{01})a + (4a_2b_o + 9a_1b_1)C + (9a_1b_1 + 4a_ob_2)b + 4b_2c = 0, \qquad (4.4.1^o.3)$$

$$(7a_1^2+12a_oa_2)\alpha_{o1}a+a_1(12a_2b_o+7a_1b_1)C+$$

$$+(7a_1^2+12a_oa_2)b_1b+12a_2b_1c=0, \qquad (4.4.1^o.4)$$

$$(a_1\alpha_{o1}+6a_o\alpha_{o2})a+(6a_2b_o+a_1b_1)C+(a_1b_1+6a_ob_2)b+6b_2c=0, \qquad (4.4.1^o.5)$$

$$a_o\alpha_{o1}a+a_1b_oC+a_ob_1b+b_1c=0. \qquad (4.4.1^o.6)$$

Eliminacijom c iz $(4.4.1^o.3)$ i $(4.4.1^o.4)$ dobija se relacija:

$$\alpha_{o1}a+b_1(b+C)=0 \qquad (4.4.1^o.7)$$

Jednačine $(4.4.1^o.2)$ i $(4.4.1^o.7)$ su saglasne, jer je jednači na $(4.4.1^o.2)$ ekvivalentna sa jednačinom

$$a_2[\alpha_{o1}a+b_1(b+C)]=0,$$

odnosno

$$\alpha_{o1}a+b_1(b+C)=0$$

Kada iz jednačina $(4.4.1^o.3)$ i $(4.4.1^o.5)$ eliminišemo c dobija se relacija:

$$\alpha_{o1}a+b_1(b+C)=0 \qquad (4.4.1^o.8)$$

t.j. proizilazi da su jednačine $(4.4.1^o.7)$ i $(4.4.1^o.8)$ jednake.

Ako eliminišemo c iz jednačina (2.4.1.3) i (2.4.1.6) dobija se takodje

$$\alpha_{o1}a+b_1(b+C)=0 \qquad (4.4.1^o.9)$$

t.j. jednačine $(4.4.1^o.7)$, $(4.4.1^o.8)$ i $(4.4.1^o.9)$ su jednake.

Ako jednačinu $(4.4.1^o.7)$ pomnožimo sa $(-a_o)$ i saberemo sa $(4.4.1^o.6)$, dobija se i treći uslov:

$$\alpha_{o1}C-b_1c=0. \qquad (4.4.1^o.10)$$

Znači, možemo formulisati i sledeći stav (XXII).

Stav XXII. Diferencijalna jednačina (4.1) ima partikularnih rešenja definisano sa (4.3) ako njenih koeficijenti zadovoljavaju uslove (4.4.1), (4.4.1°. 7), (4.4.1°.10) i 1°

Ilustracije radi, dokazujemo poslednji stav:

Iz uslova 1°:

$$\alpha_{12}=0 \Rightarrow a_1b_2=a_2b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{b_2}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1=ka_1 \quad \text{i} \quad b_2=ka_2.$$

Kada uvrstimo vrednosti za b_1 i b_2 u relaciji (4.3) imajući u vidu $a_3=b_3=0$, dobija se:

$$\left.\begin{array}{l} x=a_o+a_1t+a_2t^2 \\ y=b_o+k(a_1t+a_2t^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y-b_o}{k}=x-a_o,$$

odnosno:

$$y=b_o+k(x-a_o) \qquad (*)$$

Iz (*) tražimo y' i y", t.j.

$$y'=k,\ y''=0, \qquad (**).$$

Ako vrednosti za y,y' i y" iz relacija (*) i (**) zamenimo u posmatranu jednačinu (4.1), dobija se:

$$(ax^2+bx+c)k+(Bx+C)[b_o+k(x-a_o)]=0 \Rightarrow$$

$$k(a+B)x^2+(bk+b_oB-a_okB+kC)x+(ck+b_oC-a_okC)=0.$$

Poslednja jednačina biće identički jednaka nuli ako, i samo ako, su zadovoljene sledeće relacije:

I. $k(a+B)=0 \Rightarrow a+B=0$, jer je $k\neq 0$,

II. $bk+b_oB-a_okB+kC=0, \quad k=b_1/a_1$,

odnosno:

$$b_1b+a_1b_oB-a_ob_1B+b_1C=0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{o1}B-b_1(b+C)=0,$$

$$\text{III. } ck+b_oC-a_okC=0 \Rightarrow b_1c+a_1b_oC-a_ob_1C=0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{01}C-b_1c=0,$$

što je i trebalo da pokazujemo.

2^o. U slučaju: $a_3=b_3=0$, $A=0$, $a_2\neq 0$, $b_2\neq 0$,

$$a=0, \quad \alpha_{12}\neq 0,$$

dobijamo, prema (2.4.1):

$$a=B=A=0,$$

t.j. dobija se slučaj koji je istraživan u radu [10,4.1].

3^o Slučaj: $a_3=b_3=0$, $A=0$, $a=0$, $\alpha_{12}=0$, $a_2\neq 0$, $b_2\neq 0$, takodje je ispitan u radu [10,4.2].

Na kraju napominjemo da, na osnovu naših istraživanja, tvrdimo da u ostala tri slučaja, t.j. 5^o. $a_3=0$, $b_3\neq 0$, $A\neq 0$, 6^o. $a_3\neq 0$, $b_3=0$, $A\neq 0$, i 7^o. $a_3=b_3=0$, $A\neq 0$, postoje samo trivijalna rešenja.

U toku istraživanja ove glave došao sam do sledeći zaključaka:

I. Svi rezultati dobieni sa strane profesora I.Šapkareva u radu [10] sadržani su u rezultatima koje smo mi dobili u ovoj glavi, jer jednačina posmatrana u [10] je specijalan slučaj od nas posmatrane jednačine (4.1).

II. U ovoj glavi naše teze zbog ekonomičnosti same teze nisu obuhvaćeni neki podslučaji koje sam inače ispitivao.

III. Problem koji tretiramo može se proširiti i na diferencijalne jednačine trećeg (videti:[11]), četvrtog i n-tog reda, uz normalne napore algebarske prirode.

L I T E R A T U R A

[1] E.Kamke:Sprovočnik po obiknovenim diferencialnim uravnenijam, Moskva 1971.

[2] D.S.Mitrinović:Postupak za formiranje kriterijuma integrabiliteta linearnih diferencijalnih jednačina čiji koeficijenti imaju oblike unapred date. Ibid,2 (1949),207-237.

[3] Blagoj S.Popov:Formiranje kriteriumi za reduktibilnost na nekoj klasi linearni diferencijalni ravenki. Doktorska disertacija,Skopje,1952.

[4] Ilija A.Šapkarev:Za edna linearna diferencijalna ravenka vtor red čij opšti integral se dobiva so kvadraturi.Bilten na DMFSRM,kniga XIX (1968), Skopje.

[5] D.S.Mitrinović:Compléments au Traité de Kamke.VI.Ibid o.27 (1959),4pp.

[6] Ilija A.Šapkarev:Za edna homogena linearna diferencijalna ravenka od vtor red čii integrali se dobibaat so kvadraturi.Publikacija Makedonska Akademija na naukite i umetnostite,Skopje,(1970).

[7] Ilija A.Šapkarev:Sur une classe d'equation differentielles lineaires du deuxieme ordre resolubles par quadratures.Matematički vesnik 6(21)Sv.3,1969.

[8] Ilija A.Šapkarev:Nekoliko primedaba o homogenim linearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda čiji se opšti integral dobija pomoću kvadratura. Matematički besnik 5(20),Sv.4,1968 Beograd.

[9] Petar Lazov,Dragan Dimitrovski:Za edna boopštena Laplasova diferencijalna ravenka od tret red.Godišen zbornik PMFS, kniga 25-26 tome (1975/76).

[10] Ilija A.Šapkarev:Sur une équatin différentielle linéaire. Publikacije ETFB,No.70-No.76 (1962).

[11] Ilija A.Šapkarev:Za edna homogena diferencijalna ravenka od tret red.Publikacije TFS (1964).

[12] Mazllum M.Cana:O nekim kriterijumima integrabiliteta jedne linearne diferencijalne jednačine drugog reda Publikacije PMFS,kniga 26-27 tome (1976/77).

[13] Mazllum M.Cana:Jedna zabeleška u vezi sa integracijom jedne linearne homogene d ferencijalne jednačine drugog reda.Bilten PMF u Prištini, No.3(1976)

[14] H.Görtler:Ze.tschrift f.ange W.Math.Mech.23 (1943),str.234 Wien .

O S T A L A   L I T E R A T U R A

[1 P.M.Vasić:Sur une équation différentielle.Publikacija ETFB, Serija:Matematika i fizika,No.70-No.76 (1962).

[2] L.Toscano:Sur une équation différentielle linéaire.Publikaci- je ETFB,No.78-83 (1962).

[3] D.S.Mitrinović-D.Ž.Djoković:Dopune Kamke-ovom delu.VII. Publikacije,ETFB,No.78-83 (1962)

[4] Ilija A.Šapkarev:Sur la solution d'une équation différentiell lineaire du second ordre.Publikacije ETFB(19

[5] Mazllum M.Cana:O dvema homogenim diferencijalnim jednačinama drugog reda čija se rešenja dobijaju pomoću kvadratura.Bilten na DMFSRM,kniga XXI(1970)Sko