Симетрије у музици

Филип Јевтић

Математички Институт САНУ

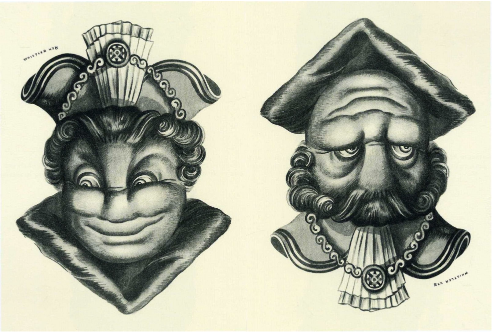
17.IX.2019.

Математика и Музика

Математика и Музика

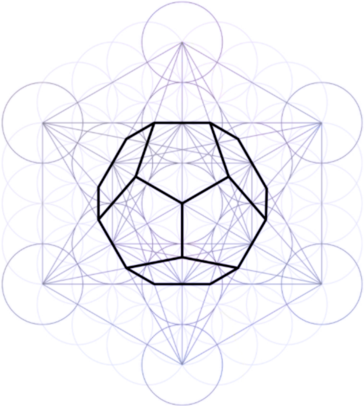
§ "... уредио си све по мери. броју, и тежини." – Соломон
§ "Музика је задовољство које људски ум доживљава док броји а да није свестан да броји." – Лајбниц
§ Математика је метафизика а, изненађујуће, преставља најпогоднији оквир за опис природних појава.
§ Од свих уметности музика је најапстрактнија а такође и она која најсиловитије утиче на човека.
§ Математика се бави Истином а музика Лепотом. Узевши у обзир однос Истине и Лепоте (за неке, нпр. Плотина, тај однос је једнакост) чврста и дубока веза математике и музике је све само не изненађујућа.
§ Древним људима је то било очигледно. Мудрац у Египту се често представљао као слепац који свира харфу; Хеленски Орфизам; реч 'мудрац' (sage) у кинеском има етимологију 'онај који чује (боље од других),' а шта то чује - Пут тј. Истину; итд.

Појам симетрије



§ $\sigma\nu\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$: “са мером;” сразмерно, хармонично, и сл.
§ Платон (Софист 228): Душа човека врлине је симетрична.
§ У метематици, под симетријом неког објекта се подразумева трансформација у односу на коју је тај објекат инваријантан.
§ У музици, симетрија је најчешће везана за мелодију (често за сам нотни запис) и, првеснтвено у делима која користе једнако темеровање, хармонији.

Појам симетрије



Палиндроми

§ Палиндром је реч (или реченица) која се чита исто с лева на десно као с десна на лево.

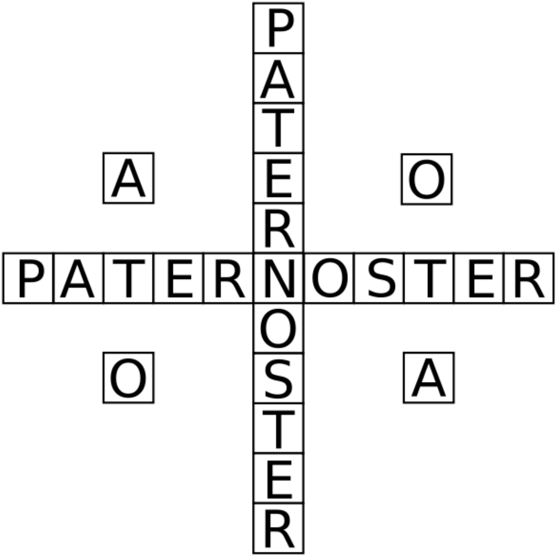
§ NIPSON ANOMEMATA ME MONAN OPSIN. (Григорије Богослов)

Палиндроми

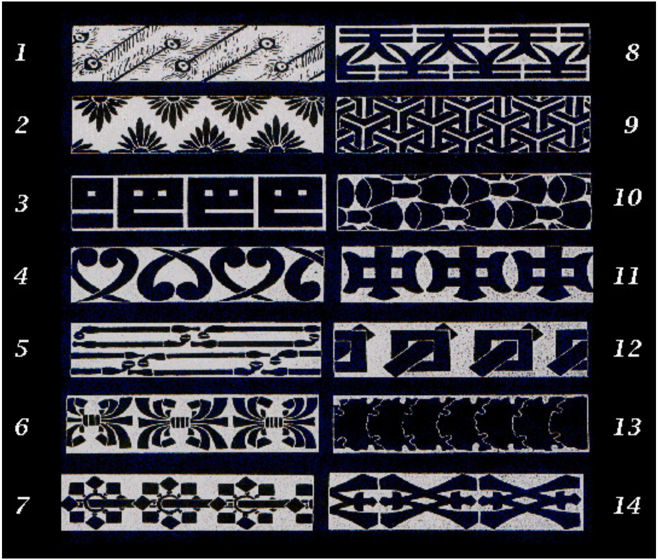
§ Палиндроми могу бити и дводимензионални.

§ SATOR квадарт, најстарији сачувани дводимензиони палиндром. Приметимо додатне симетрије које не постоје у једнодимензионом случају.

Паліндроми



Симетрија нотног записа



§ Музички запис је линијска слика или реч у посебном језику.

Симетрија нотног записа

Another mathematical device used by composers is that of retrograde motion. This yields pieces that can be played forwards or backwards, and are sometimes known as *palindromes*, or *crab canons* – here $y = -x$. Here is a palindrome from J.S. Bach's *Musical Offering* – reading the first line backwards gives the second line, and *vice versa*.

Симетрија нотног записа

Питагора и Птоломејска скала

§ Питагора и његови следбеници су поставили темеље не само Европске математике него и теорије музике.
§ Њихови експерименти на монокорду резултирали су у конструкцији диатонске скале генерисане *савршеном квинтом*, музичким интервалом у коме су фрекфенције двају тонова $\frac{3}{2}$.
§ Користећи прогресију квинти добијамо следећих 7 фрекфенција:

$$1 \to \frac{3}{2} \to \frac{9}{4} \to \frac{27}{8} \to \frac{81}{16} \to \frac{243}{32} \to \frac{729}{64}.$$

Питагора и Птоломејска скала

§ Бирајући одговарајуће фрекфенције унутар базне октаве добијамо дурску лествицу. (Не умањујући општост, за базни тон је изабран C.)

C	D	E	F	G	A	B	C
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

§ Птоломејска скала се добија умањењем терце, сексте, и септе за *семитонску кому*.

C	D	E	F	G	A	B	C
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

§ Птоломејска скала је често истицана као најбоља и најприроднија. (Међу њеним заговницима је и Платон.)

Мали излет у архитектуру

§ Андреа Паладио (1508 - 1580). Ренесансни архитекта и сценограф.
§ Аутор многих вила, палата, и цркава.
§ Већина дела у покрајни Венето су стављене под заштиту УНЕСКА као ‘Паладијеве виле.‘

Мали излет у архитектуру

§ Паладијево најчувеније дело је Вила Ротонда (*Villa Almerico Capra Valmarana, 'La Rotonda'*) изграђена 1592, после Паладијеве смрти.

Мали излет у архитектуру

§ Поред многих архитектносих дела, Паладио је оставио и трактат о архитектури *Quattro Libri dell'Architettura* (1570), један од најзначајнијих текстова о архитектури поред Ветрувиусове *De architectura* (30-15 п.н.е.) и Леон Батист Албетијеве *De re aedificatoria* (1452).
§ Рудолф Витковер је први предложио да се неке од Паладијевих преферираних пропорција долазе из музике.
§ *Rudolf Wittkower, Architectural Principles in the Age of Humanism* (1949)
§ Бранко Митровић, *Palladio's Theory of Proportions and the Second Book of the "Quattro Libri dell'Architettura"*

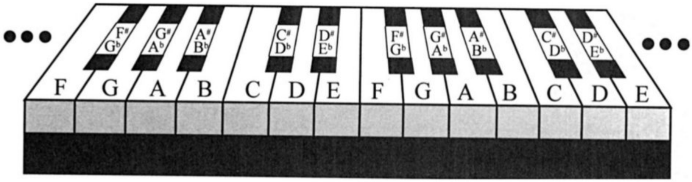
Мали излет у архитектуру

§ Означимо дужину и ширину собе са $l, w \in \mathbb{R}$, респективно.
§ Паладио предлаже 7 најбољих собних планова: кружни или правоугаони у коме је однос дужине и ширине собе

$$\frac{l}{w} \in \left\{ \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{\sqrt{2}}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1} \right\}.$$

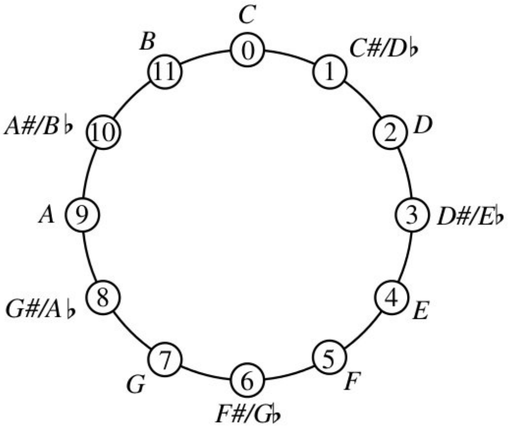
§ Сви односи, са изузетком $\frac{\sqrt{2}}{1}$ одговарају се налазе у Птоломејској скали! Снецифично, они одговарају основним функцијама дурске скале, тј., унисону (1) C, субдоминанти $\left(\frac{4}{3}\right)$ F, доминанти $\left(\frac{3}{2}\right)$ G, наддоминанти $\left(\frac{5}{3}\right)$ A, и октави (2) C.
§ Постоји ли музичка интерпретација $\frac{\sqrt{2}}{1}$?

Ревномерна ненаштимованост



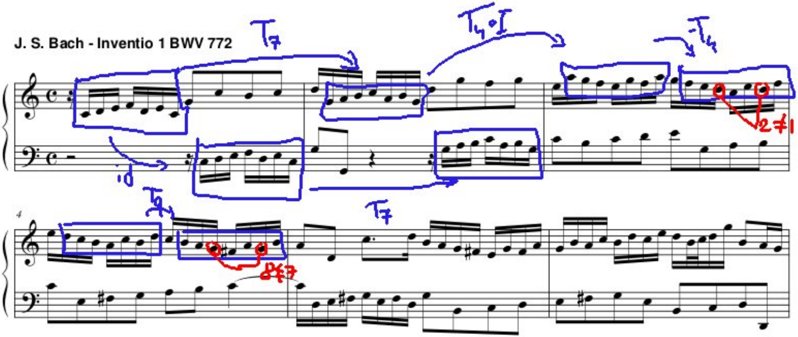
§ Крајем ренесансе, систем штимовања у коме је инвервал између сваке две суседне ноте исти (и једак $\sqrt[12]{2}$) постаје доминантан.
§ Тако подешени инструменти омогућавају лак прелаз између тоналитета у тоналитет.
§ Као последица регуларност новог штимовања јављају се нове симетрије, како у мелодији тако и у хармонији.

Ревномерна ненаштимованост



§ Простор нота се сада може идентификовати са $\mathbb{Z}_{12}$ што у музичку теорију уводи диедралну групу симетрија правилног 12-тоугла и модуларну аритметику.

Симетрија мелодија



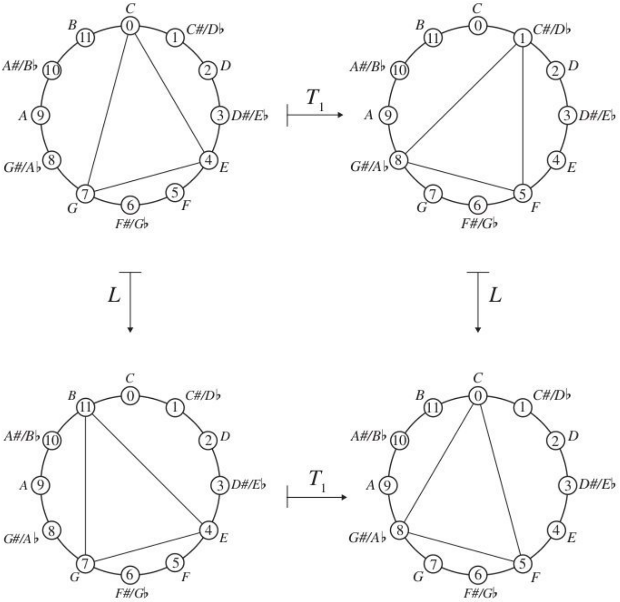
§ BWV 772: Еволуција теме.

Нео-Риманска теорија хармоније

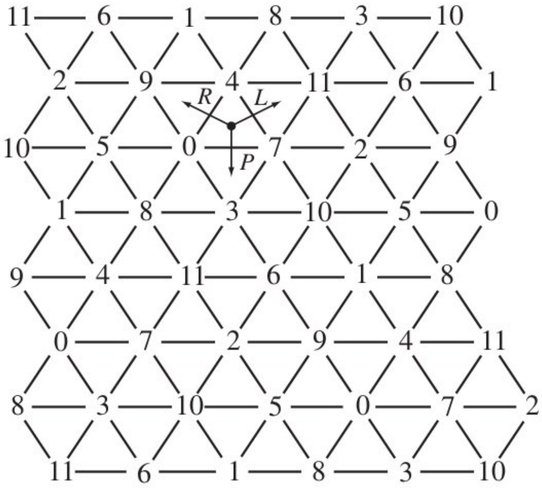
Major Triads	Minor Triads
$C = \langle 0, 4, 7 \rangle$	$\langle 0, 8, 5 \rangle = f$
$C\sharp = D\flat = \langle 1, 5, 8 \rangle$	$\langle 1, 9, 6 \rangle = f\sharp = g\flat$
$D = \langle 2, 6, 9 \rangle$	$\langle 2, 10, 7 \rangle = g$
$D\sharp = E\flat = \langle 3, 7, 10 \rangle$	$\langle 3, 11, 8 \rangle = g\sharp = a\flat$
$E = \langle 4, 8, 11 \rangle$	$\langle 4, 0, 9 \rangle = a$
$F = \langle 5, 9, 0 \rangle$	$\langle 5, 1, 10 \rangle = a\sharp = b\flat$
$F\sharp = G\flat = \langle 6, 10, 1 \rangle$	$\langle 6, 2, 11 \rangle = b$
$G = \langle 7, 11, 2 \rangle$	$\langle 7, 3, 0 \rangle = c$
$G\sharp = A\flat = \langle 8, 0, 3 \rangle$	$\langle 8, 4, 1 \rangle = c\sharp = d\flat$
$A = \langle 9, 1, 4 \rangle$	$\langle 9, 5, 2 \rangle = d$
$A\sharp = B\flat = \langle 10, 2, 5 \rangle$	$\langle 10, 6, 3 \rangle = d\sharp = e\flat$
$B = \langle 11, 3, 6 \rangle$	$\langle 11, 7, 4 \rangle = e$

The set S of consonant triads

Нео-Риманска теорија хармоније

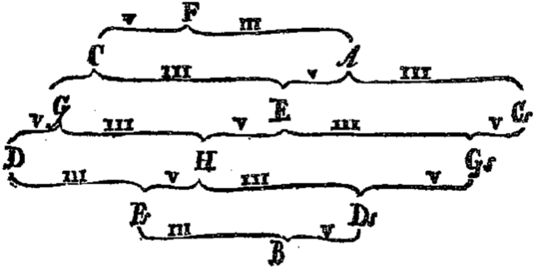


Нео-Риманска теорија хармоније



§ *Tonnetz*: Простор молова и дурова је торус!

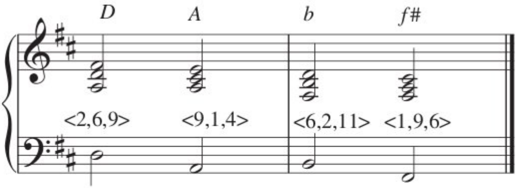
Нео-Риманска теорија хармоније



§ *Tonnetz* је први открио Ојлер у свом трактату о теорији музике *Tentamen novae theoriae musicae ex certissismis harmoniae principiis dilucide expositae* (1739).
§ Ојерово дело, чији је циљ био да врати теорију музике у оквир математике где природно припада, није, нажалост, добро примљено ни од стране матеамтичара ни од стране музичара.
§ У другој половини XIX века, *Arthur von Oettingen* и *Hugo Riemann* поново откривају *Tonnetz* и постављају основе модерне теорије хармоније.

Пар примера

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, mapsto, "T_7"] \arrow[d, mapsto, "R"'] & A \arrow[d, mapsto, "R"] \\ b \arrow[r, mapsto, "T_7"'] & f\sharp \end{tikzcd}$$



Chord progression from Pachelbel, Canon in *D*.

Пар примера

$$\begin{tikzcd} A\flat \arrow[r, mapsto, "T_5"] \arrow[d, mapsto, "R"'] & D\flat \arrow[d, mapsto, "R"] \\ f \arrow[r, mapsto, "T_5"'] & b\flat \end{tikzcd}$$

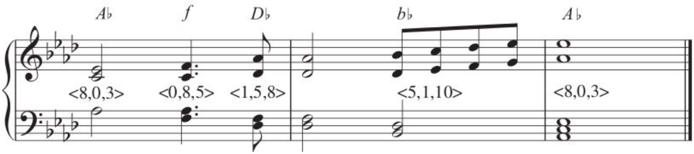
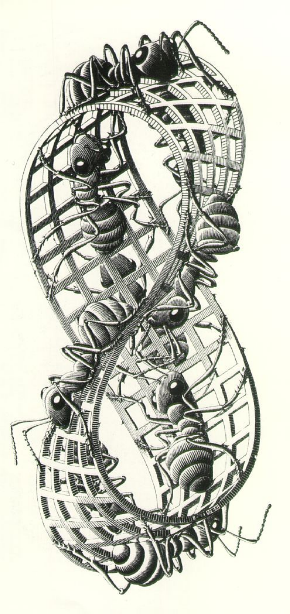
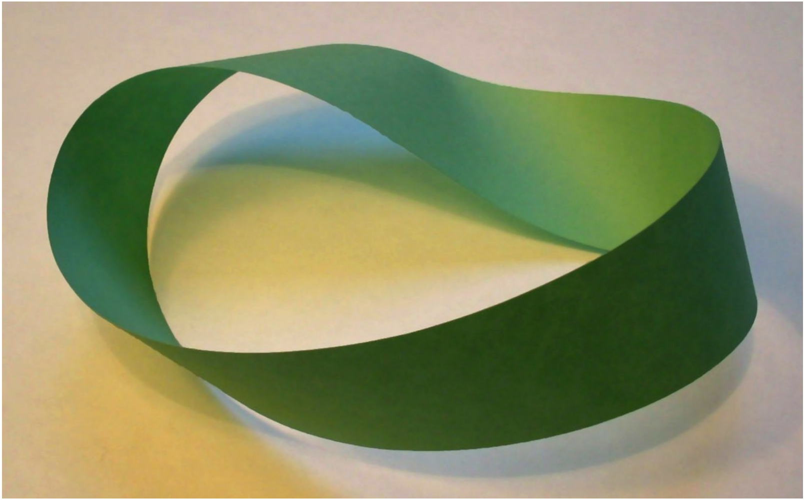


Figure 10. Wagner, *Parsifal*, "Grail" Theme.

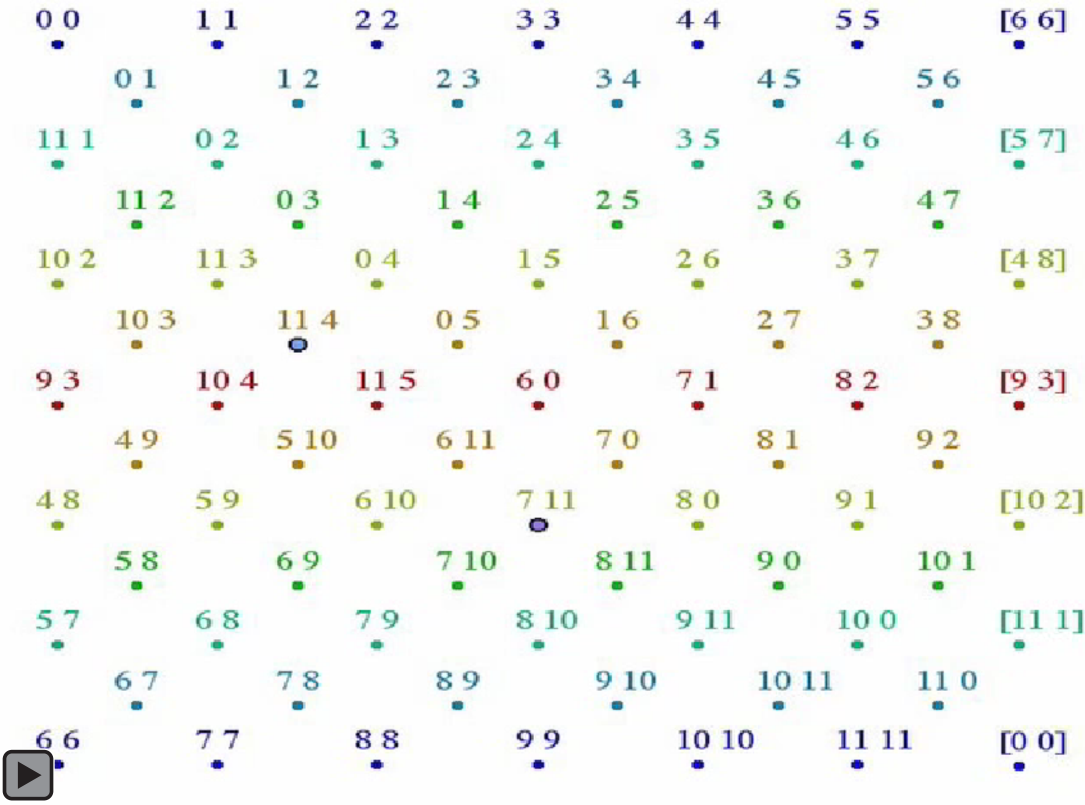
Простор интервала

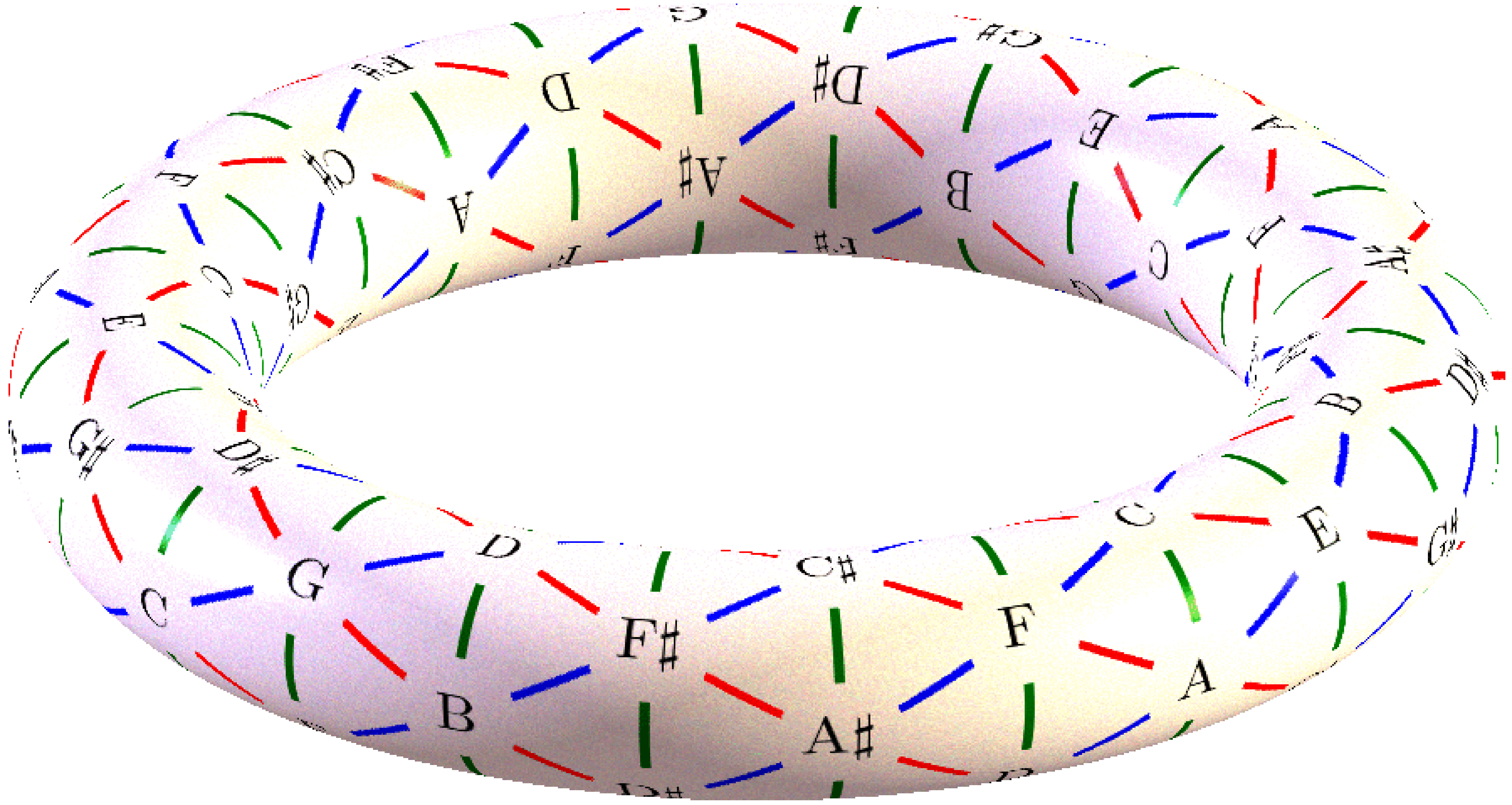


Простор интервала

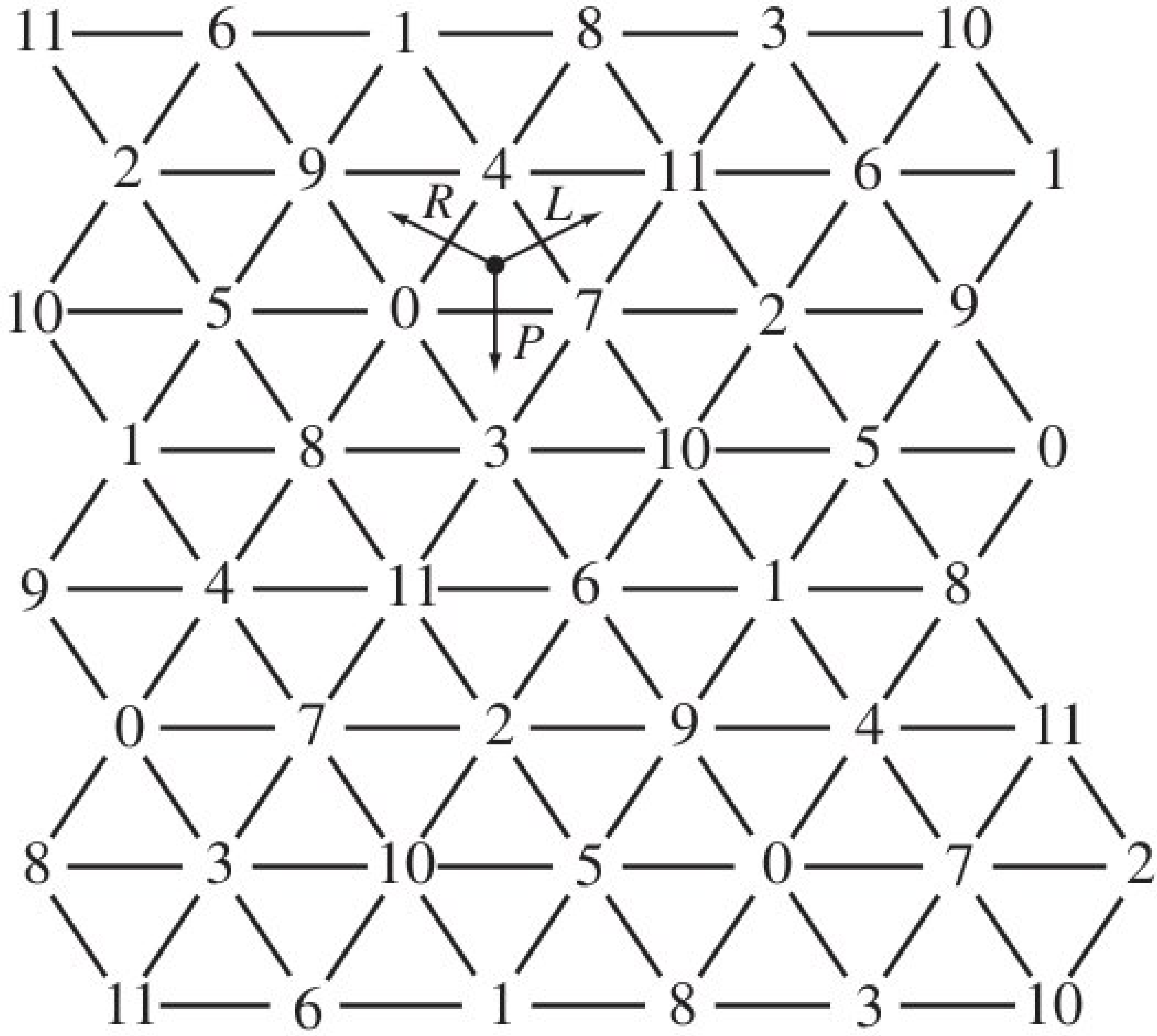


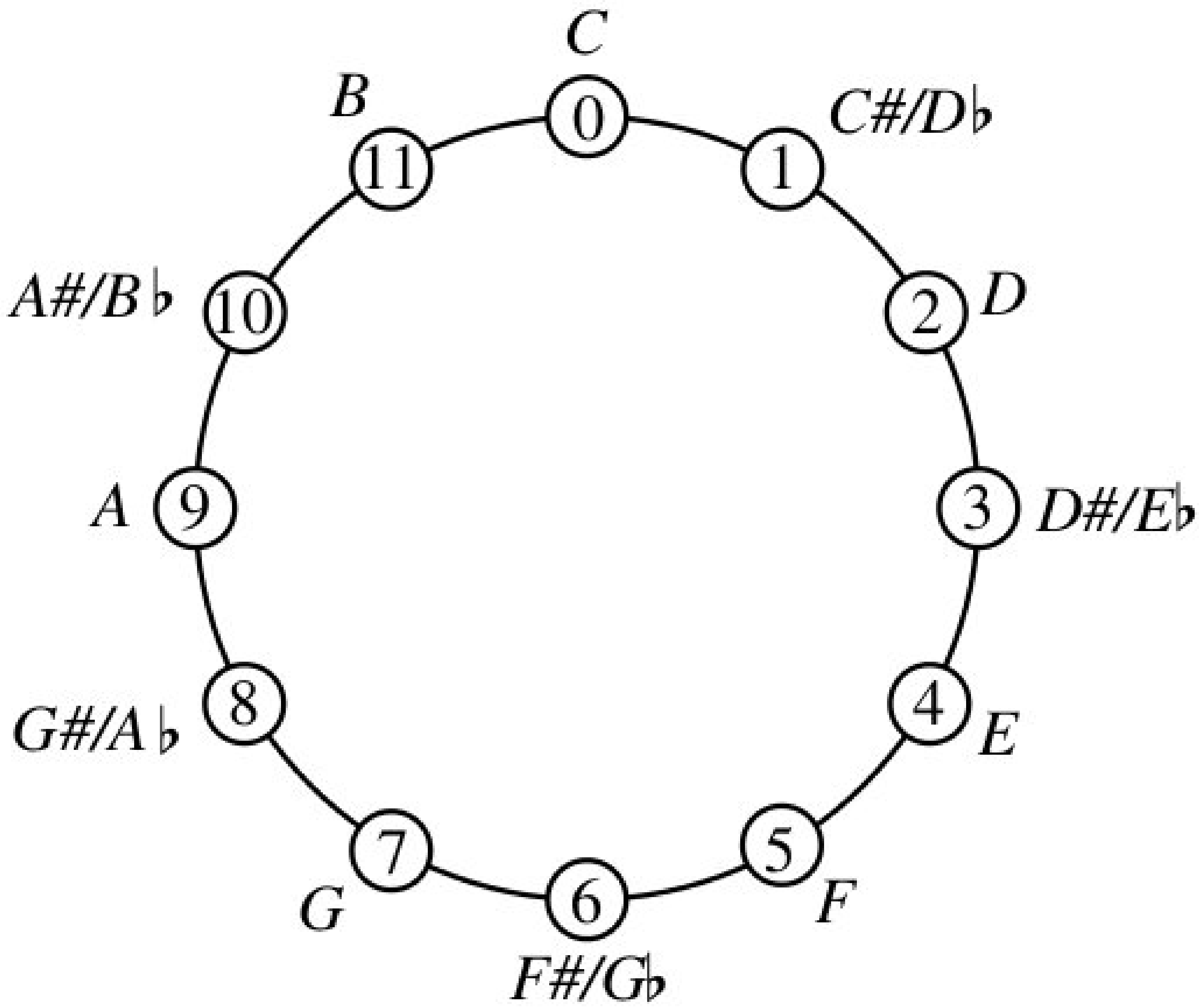
Хвала.


0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 [6 6]
0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6
11 1 0 2 1 3 2 4 3 5 4 6 [5 7]
11 2 0 3 1 4 2 5 3 6 4 7
10 2 11 3 0 4 1 5 2 6 3 7 [4 8]
10 3 11 4 0 5 1 6 2 7 3 8
9 3 10 4 11 5 6 0 7 1 8 2 [9 3]
4 9 5 10 6 11 7 0 8 1 9 2
4 8 5 9 6 10 7 11 8 0 9 1 [10 2]
5 8 6 9 7 10 8 11 9 0 10 1
5 7 6 8 7 9 8 10 9 11 10 0 [11 1]
6 7 7 8 8 9 9 10 10 11 11 0
6 6 7 7 8 8 9 9 10 10 11 11 [0 0]



C
G
D
B
F♯
C♯
A♯
F
C
E
G♯
A
D
A♯
D♯
B
A
E


11 6 1 8 3 10
2 9 4 11 6 1
R L
10 5 0 7 2 9
P
1 8 3 10 5 0
9 4 11 6 1 8
0 7 2 9 4 11
8 3 10 5 0 7 2
11 6 1 8 3 10



C
0
C#/D♭
1
D
2
D#/E♭
3
E
4
F
5
F#/G♭
6
G
7
G#/A♭
8
A
9
A#/B♭
10
B
11