

Универзитет у Београду
Математички факултет



Никола Лукић

Рефлексије и примена

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

др Мирјана Ђорић, редован професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Мирослава Антић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милош Ђорић, асистент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

23.06.2022.

Садржај

Предговор	2
1. Увод	4
1.1 Изометријске трансформације.....	4
1.2 Директне и индиректне изометријске трансформације простора E^2	5
2. Осна рефлексија равни E^2	6
2.1 Дефиниција и особине	6
2.2 Представљање изометријских трансформација равни E^2 помоћу осних рефлексија.....	10
2.3 Праменови правих у равни E^2	12
2.4 Централна ротација равни E^2	14
2.5 Централна рефлексија равни E^2	15
2.6 Транслација равни E^2	17
2.7 Клизајућа рефлексија равни E^2	18
2.8 Класификација изометријских трансформација равни E^2	19
Разни задаци у равни E^2	21
3. Раванске рефлексије простора E^3	51
3.1 Директне и индиректне изометријске трансформације простора E^3	51
3.2 Раванска рефлексија простора E^3	51
3.3 Представљање изометријских трансформација простора E^3 помоћу раванских рефлексија.....	56
3.4 Праменови равни у простору E^3	59
3.5 Осна ротација простора E^3	61
3.6 Осна рефлексија простора E^3	65
3.7 Осноротациона рефлексија простора E^3	66
3.8 Централна рефлексија простора E^3	68
3.9 Транслација простора E^3	72
3.10 Клизајућа рефлексија простора E^3	75
3.11 Завојно кретање простора E^3	76
3.12 Класификација изометријских трансформација простора E^3	78
4. Рефлексије у еуклидским афиним n-димензионим просторима	79
4.1 Основне дефиниције и теореме.....	79
4.2 Примери задатака.....	88
Литература	111

Предговор

Геометрија решава многе практичне проблеме са којом се среће човек. Стари Грци су геометрију изучавали са синтетичке тачке гледишта (Еуклидови „Елементи“). Ова еуклидска геометрија је више од две хиљаде година била једина геометрија коју је човек изучавао. У 17. веку се појава координата у геометрији приписује Декарту и на овај начин се стварају услови за аналитичко изучавање геометрије. Синтетички приступ је био погодан за изучавање димензија два и три, али развојем линеарне алгебре омогућено је једноставно уопштавање еуклидске геометрије на просторе са више димензија. Крајем 19. века Бољај и Лобачевски откривају хиперболичку геометрију и тиме су откривене нове могућности геометрије.

У школама у Србији је заступљен „Ерлангенски“ приступ, који је дао Клајн у свом „Ерлангенском програму“ и који користи групе трансформација за проучавање геометрије. У овом раду је, сем синтетичког приступа, употребљен и координатни приступ задавању пресликавања. Уведене су дефиниције и основне особине изометријских трансформација, али акценат је стављен на рефлексije. Кроз теорију и задатке везане за рефлексije, илустроване су особине и могућности рефлексija у просторима димензије два, три и након тога у просторима произвољних димензија.

У првој глави овог рада су уведене основне дефиниције и теореме које ће бити потребне да би се тема овог рада могла започети и разрађивати. Ту су наведене теореме и дефиниције које се тичу основних особина изометријских трансформација и њихова подела на директне и индиректне.

У другој глави је уведена дефиниција и доказане теореме које се тичу основних особина рефлексije у простору E^2 , односно, рефлексije чија је основа права у равни. Такође, поменуте су и остале изометријске трансформације у равни и неке њихове основне особине, јер се свака изометрија у равни може представити као композиција коначног броја осних рефлексija. При крају ове главе је урађена класификација изометријских трансформација у равни и њихова подела у односу на број тачака које не мењају свој положај. На крају ове главе су урађени задаци који приказују примену осне рефлексije у неким приликама које се могу срести свакодневно, примену у конструктивним задацима у основној и средњој школи, примену осне рефлексije у доказивању неких особина геометријских фигура у равни, доказивању неких особина изометријских трансформација и примену у неким екстермалним проблемима. Велики број ових задатака може бити укључен како у редовну, тако и у додатну наставу у основној школи.

У трећој глави је уведена дефиниција рефлексije у простору E^3 , односно рефлексije у тродимензионалном еуклидском простору чија је основа раван. У овој глави су наведене дефиниције и теореме које се тичу и осталих изометријских трансформација у простору E^3 , као и њихова класификација на директне и индиректне.

Четврта глава уводи приступ рефлексijaма преко афиних простора и то за просторе произвољних димензија. У овој глави су, приступом преко афиних простора, доказане теореме које се тичу општих особина рефлексija и то за просторе произвољних димензија. Тако, на пример, теореме 2.1.5 и 3.2.2 дају тврђења везана за особину инволутивности рефлексija у просторима димензија 2 и 3, док теорема 4.1 даје ово тврђење за простор произвољне димензије. Или, на пример, теорема 4.3 а) даје потребан и довољан услов да би потпростор био инваријантан за неку рефлексiju и то у простору произвољне димензије, док теореме 2.1.4 и 3.2.4 дају исте услове само у случају простора димензија 2 и 3.

У овој глави, сем синтетичког, користи се и координатни приступ задавања пресликавања. Овај приступ такође користи и матрични начин задавања пресликавања и може бити занимљив за употребу у настави у средњим стручним школама и гимназијама. За просторе димензије два, овај приступ може бити употребљен и у основној школи након обраде система линеарних једначина са две непознате. Због коришћења матрица, може бити и употребљен и у информатичкој индустрији. На крају ове главе је урађен одређен број задатака који користе координатни приступ задавања пресликавања и такви задаци могу бити искоришћени у основној школи (задаци из E^2) и средњој школи (задаци из E^3 и у више димензија) на редовној и додатној настави. Све илустрације у овом раду су креиране коришћењем програмског пакета GeoGebra и дело су аутора.

Посебну захвалност дугујем свом ментору проф. др Мирјани Ђорић на свесрдном залагању, утрошеном времену и помоћи коју ми је пружила у току израде овог рада и на корисним саветима који су допринели да овај рад буде једна смислена и функционална целина.

Проф. др Мирослави Антић се захваљујем на пажљивом читању рада, на сугестијама и саветима који су допринели да овај рад буде још квалитетнији.

Др Милошу Ђорићу се захваљујем на бројним саветима и сугестијама и великој помоћи око спремања задатака који су илустровали применљивост рефлексija у основним и средњим школама и њену практичну применљивост.

1. Увод

1.1 Изометријске трансформације

Дефиниција 1.1.1: Пресликавање $\mathcal{J}: E^n \rightarrow E^n$, $n \in \mathbb{N}$, које је бијекција и које сваке две тачке A и B простора E^n пресликава у тачке A' и B' такве да је $(A, B) \cong (A', B')$ назива се *изометријска трансформација* или *изометрија* простора E^n .

На основу дефиниције, домен и кодомен изометријских трансформација може бити еуклидски простор произвољне димензије.

Дефиниција 1.1.2: Пресликавање $\varepsilon: E^n \rightarrow E^n$ које сваку тачку A пресликава у саму себе тј. $(\forall A \in E^n) \varepsilon(A) = A$ назива се *коинциденција*.

Дефиниција 1.1.3: Тачка A је *фиксна* или *инваријантна* тачка неке изометрије $\mathcal{J}: E^n \rightarrow E^n$, $n \in \mathbb{N}$, ако је $\mathcal{J}(A) = A$.

Из саме дефиниције могу се извести нека непосредна својства изометријских трансформација. Како за сваке две тачке $X, Y \in E^n$ важи $(X, Y) \cong (X, Y)$, коинциденција ε , која сваку тачку простора E^n преводи у ту исту тачку, представља изометријску трансформацију тог простора.

У наредним теоремама ће бити наведене неке особине изометријских трансформација које ће надаље бити коришћене, али се овде неће доказивати јер ти докази нису од великог значаја за тему овог рада. Докази се могу пронаћи у [3] и [8] (погледати литературу).

1.1.1 Теорема:

- а) Композиција две изометријске трансформације простора E^n је такође изометријска трансформација.
- б) Инверзна трансформација изометријске трансформације простора E^n је такође изометријска трансформација тог простора.

□

1.1.2 Теорема: Скуп свих изометријских трансформација простора E^n , $n \in \mathbb{N}$ представља групу. Та група се обележава са $G(\mathcal{J})$.

□

1.1.3 Теорема: Ако су A, B две различите тачке неке праве p и A', B' тачке праве p такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, тада постоји јединствена изометријска трансформација $\mathcal{J}: p \rightarrow p$ таква да је

$$\mathcal{J}(A) = A' \text{ и } \mathcal{J}(B) = B'.$$

□

Последица: Ако изометријска трансформација $\mathcal{J}$ праве p поседује две различите инваријантне тачке она представља коинциденцију.

1.1.4 Теорема: Ако су A, B, C три неколинеарне тачке равни E^2 и A', B', C' тачке те исте равни такве да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$, тада постоји јединствена изометријска трансформација $\mathcal{J}: E^2 \rightarrow E^2$ таква да је

$$\mathcal{J}(A) = A', \quad \mathcal{J}(B) = B', \quad \mathcal{J}(C) = C'.$$

□

Последица: Ако изометријска трансформација $\mathcal{J}: E^2 \rightarrow E^2$ има три неколинеарне инваријантне тачке, она представља коинциденцију.

1.1.5 Теорема: Ако су A, B, C, D четири некомпланарне тачке простора E^3 и A', B', C', D' тачке тог простора такве да је $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$, тада постоји јединствена изометријска трансформација $\mathcal{J}: E^3 \rightarrow E^3$ таква да је

$$\mathcal{J}(A) = A', \quad \mathcal{J}(B) = B', \quad \mathcal{J}(C) = C', \quad \mathcal{J}(D) = D'$$

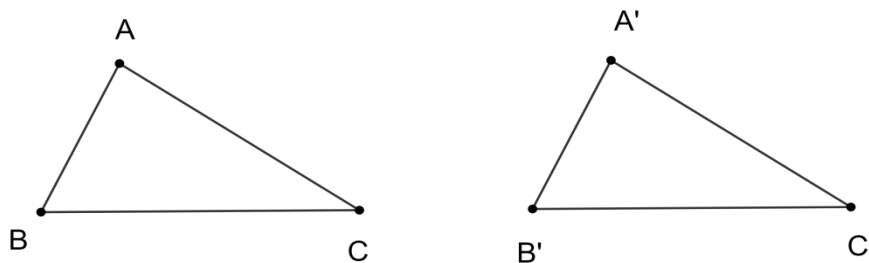
□

Последица: Ако изометријска трансформација $\mathcal{J}: E^3 \rightarrow E^3$ има четири некомпланарне инваријантне тачке, она представља коинциденцију.

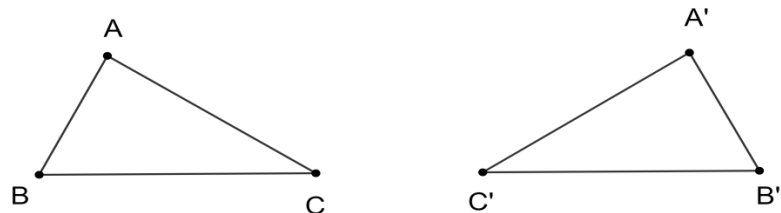
1.2 Директне и индиректне изометријске трансформације простора E^2

Дефиниција 1.2.1: Изометријска трансформација $\mathcal{J}: E^2 \rightarrow E^2$ је *директна* ако „чува“ оријентацију равни E^2 , тј. сваки троугао те равни пресликава у троугао исте оријентације (Слика 1.а).

Изометријска трансформација $\mathcal{J}: E^2 \rightarrow E^2$ је *индиректна* ако сваки троугао те равни пресликава у троугао супротне оријентације (Слика 1.б).



Слика 1.а



Слика 1.6

Позивајући се на теорему 1.1.4 установљује се да је директна (индиректна) изометријска трансформација равни E^2 једнозначно одређена ако су задата два пара одговарајућих тачака. Као специјалан случај тог тврђења добија се да је директна изометријска трансформација равни E^2 са две различите инваријантне тачке увек коинциденција. Треба још поменути да композиција две индиректне изометријске трансформације увек преставља директну изометријску трансформацију, док композиција једне директне и једне индиректне изометријске трансформације представља индиректну изометријску трансформацију.

2. Осна рефлексија равни E^2

2.1 Дефиниција и особине

Разврставање изометријских трансформација на директне и индиректне је само један вид разврставања. Када је разматрано тврђење по којем изометријска трансформација равни E^2 са три неколинеарне инваријантне тачке представља коинциденцију, природно је било поставити питање које су то неидентичне изометријске трансформације те равни која имају две, једну или ниједну инваријантну тачку. Сада ће бити разматране неидентичне изометријске трансформација равни E^2 које поседују две различите инваријантне тачке, а самим тим и једну праву којој су све тачке инваријантне.

Дефиниција 2.1.1: Нека је p права равни E^2 . Неидентична изометријска трансформација за коју је свака тачка праве p инваријантна назива се *осна рефлексија* те равни и означава се са S_p . Права p се назива *оса рефлексије*.

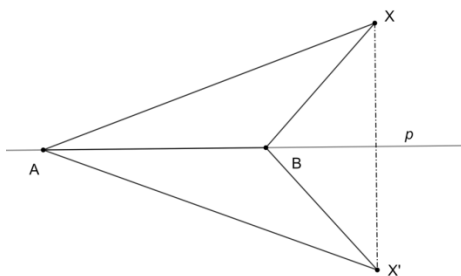
2.1.1 Теорема: Све фиксне тачке осне рефлексије су на оси те рефлексије.

Доказ: Нека је тачка A инваријантна тачка за осну рефлексију S_p таква да $A \notin p$. Нека су тачке B и C тачке са праве p . Оне су инваријантне по дефиницији осне рефлексије S_p . У том случају су тачке A, B и C три неколинеарне и инваријантне тачке за осну рефлексију S_p , па према последици теореме 1.1.4 осна рефлексија S_p представља коинциденцију, а то је у контрадикцији са дефиницијом осне рефлексије. Дакле, мора бити $A \in p$.

□

2.1.2 Теорема: Ако је S_p осна рефлексија неке равни и за неку тачку X те равни важи да је $S_p(X) = X'$ и $X \neq X'$, тада је оса p медијатриса дужи XX' .

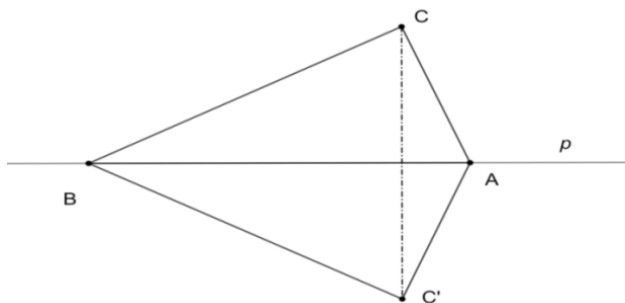
Доказ: Нека су тачке A и B са осе p . Како је $S_p(A) = A$, $S_p(B) = B$, а S_p је изометријска трансформација, мора бити $(A, X) \cong (A, X')$ и $(B, X) \cong (B, X')$. Ово значи да тачке A и B припадају медијатриси дужи XX' , а како је медијатриса дужи јединствена, а A и B су са осе p , онда мора бити права p медијатриса дужи XX' .



□

2.1.3 Теорема: Осна рефлексија S_p равни E^2 је индиректна изометријска трансформација.

Доказ: Нека су тачке A, B две различите тачке праве p и нека је тачка $C \in E^2$ ван праве p . Нека је $S_p(C) = C'$. Тада је права p медијатриса дужи CC' . Тачке C и C' су са различитих страна праве p и са тачкама A и B формирају троуглове ABC и ABC' . Добијени троуглови су супротносмерни па је осна рефлексија S_p индиректна изометријска трансформација.



□

2.1.4 Теорема: Једине праве које се осном рефлексијом S_p равни E^2 пресликавају у себе су оне те рефлексије и све праве нормалне на ту осу.

Доказ: Да се оса рефлексије пресликава у себе следи по дефиницији. Нека је s права равни E^2 таква да s није нормална на p и нека је X тачка праве s . Нека је права s инваријантна у односу на осну рефлексију S_p , тј. $S_p(s) = s$.

Ако за тачку X важи да је $S_p(X) = X'$ и $X \neq X'$, онда и $X' \in s$ и тада је оса p медијатриса дужи XX' према теорему 2.1.2. Како је p медијатриса дужи XX' то значи да је $p \perp XX'$. С обзиром да $X \in s$ и $X' \in s$, то значи да је $p \perp s$, а то је у супротности са претпоставком да s није нормална на p . Дакле, ако је s права која је инваријантна у односу на осну рефлексију S_p , онда мора бити $p \perp s$ или $p = s$.

□

Интуитивно је јасно да ако се нека осна рефлексија два пута примени, онда се свака тачка „враћа“ на своје место. То значи да је композиција осне рефлексије са самом собом коинциденција тј. да је инверзна изометријска трансформација осне рефлексије једнака управо тој осној рефлексији.

Односно: $S_p^2 = S_p \circ S_p = \varepsilon$ и $S_p^{-1} = S_p$.

Све трансформације које поседују ову особину се називају *инволуционе трансформације* или *инволуције*.

2.1.5 Теорема: Осна рефлексија S_p равни E^2 је инволуција.

Доказ: Нека је тачка X произвољна тачка равни E^2 и тачке X' и X'' такве да је $S_p(X) = X'$ и $S_p(X') = X''$.

Ако $X \in p$, онда је $X = X'$ и $X' = X''$, па је $X = X''$.

Ако $X \notin p$, онда је $X \neq X'$ и $X' \neq X''$, па је права p медијатриса дужи XX' и дужи $X'X''$.

Ово значи да је $X = X''$.

У сваком случају, добија се

$$S_p^2 = \varepsilon.$$

па је осна рефлексија инволуција.

□

2.1.6 Теорема: Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни E^2 има бар једну инваријантну тачку A , онда та изометријска трансформација представља неку осну рефлексију S_p чија оса p садржи ту инваријантну тачку A .

Доказ: Обзиром да је ε директна, а $\mathcal{I}$ индиректна изометријска трансформација равни E^2 , онда је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Тада постоји тачка X таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. Како је тачка A инваријантна тј. $\mathcal{I}(A) = A$, онда је $(A, X) \cong (A, X')$ па тачка A припада медијатриси дужи XX' . Нека је права p медијатриса дужи XX' . Тада и $A \in p$ и важи још

$$S_p \circ \mathcal{I}(A) = A \text{ и } S_p \circ \mathcal{I}(X) = X$$

па трансформација $S_p \circ \mathcal{I}$ има две инваријантне тачке.

$S_p \circ \mathcal{I}$ је директна изометријска трансформација, јер представља композицију две индиректне изометријске трансформације и има две инваријантне тачке па према последици теореме 1.1.4 ова композиција је коинциденција.

Дакле $S_p \circ \mathcal{I} = \varepsilon$ односно $S_p = \mathcal{I}$.

□

2.1.7 Теорема: Ако су S_p и S_q две осне рефлексије са различитим осама p и q , онда је једина инваријантна тачка композиције $S_p \circ S_q$ тачка пресека оса p и q (уколико се оне секу). Другим речима

$$S_p \circ S_q(X) = X \Leftrightarrow X \in p \cap q.$$

Доказ: Нека је најпре $S_p \circ S_q(X) = X$.

Ако је $S_q(X) = X'$ и $X \neq X'$ онда је $S_p(X') = X$. Ово значи да су обе праве p и q медијатресе дужи XX' . Како дуж може имати само једну медијатрису, ово значи да је $p = q$ или је $X = X'$. С обзиром да су осе p и q различите, онда мора бити $X = X'$ па је $S_q(X) = X$ и $S_p(X) = X$ па $X \in p \cap q$.

Нека сада $X \in p \cap q$.

Ако $X \in p$ онда је $S_p(X) = X$. Ако $X \in q$ онда је $S_q(X) = X$.

Тада је

$$S_p \circ S_q(X) = S_p(X) = X.$$

□

Наредном теоремом ће бити размотрена *трансмутација* или *преображавање* осне рефлексије било којом изометријском трансформацијом. Трансмутација неке трансформације f неком трансформацијом g је композиција

$$f' = g \circ f \circ g^{-1}.$$

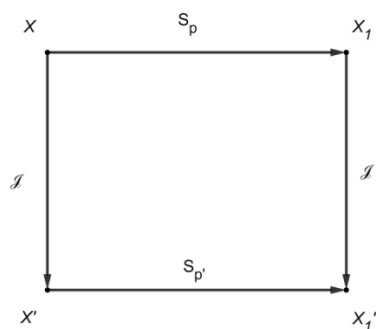
2.1.8 Теорема: Нека је p произвољна права равни E^2 , S_p осна рефлексија те равни и $\mathcal{I}$ било која изометријска трансформација те исте равни. Ако је p' права у коју се пресликава права p трансформацијом $\mathcal{I}$ тада је

$$\mathcal{I} \circ S_p \circ \mathcal{I}^{-1} = S_{p'}.$$

Доказ: Нека је Y произвољна тачка праве p' и $X = \mathcal{I}^{-1}(Y)$. Тада тачка X припада правој p па је $S_p(X) = X$. Дакле важи: $\mathcal{I} \circ S_p \circ \mathcal{I}^{-1}(Y) = \mathcal{I} \circ S_p(X) = \mathcal{I}(X) = Y$.

Изометрија $\mathcal{I} \circ S_p \circ \mathcal{I}^{-1}$ је индиректна са бар једном фиксном тачком Y . Тада, на основу теореме 2.1.6 она представља неку осну рефлексију чија оса садржи ту фиксну тачку. Тачка Y је произвољна тачка праве p' , па то значи да су све тачке праве p' инваријантне за изометрију $\mathcal{I} \circ S_p \circ \mathcal{I}^{-1}$ а то повлачи да је оса симетрије баш права p' , односно

$$\mathcal{I} \circ S_p \circ \mathcal{I}^{-1} = S_{p'}.$$



□

2.1.9 Теорема: Две осне рефлексије равни E^2 комутирају ако и само ако су им осе нормалне или једнаке, тј. ако су p и q праве равни E^2 онда је

$$S_q \circ S_p = S_p \circ S_q \Leftrightarrow (p \perp q \vee p = q).$$

Доказ: Нека је $S_q \circ S_p = S_p \circ S_q$. Тада је

$$S_q \circ S_p \circ S_q = S_p \quad (*).$$

Нека је права p' таква да је $p' = S_q(p)$. Тада, према закону трансмутације осне рефлексије S_p осном рефлексијом S_q , добија се

$$S_q \circ S_p \circ S_q = S_{p'}, \quad (**)$$

На основу једнакости (*) и (**) се добија да је $S_p = S_{p'}$, а самим тим и $p = p'$, па је $S_q(p) = p$. Ако је $p = q$, онда је крај. Ако је $p \neq q$, онда је $p \perp q$.

Обратно, нека је $p \perp q \vee p = q$. Одавде следи да је $S_q(p) = p$, па према закону трансмутације се добија

$$S_q \circ S_p \circ S_q = S_p$$

односно

$$S_q \circ S_p = S_p \circ S_q.$$

□

2.2 Представљање изометријских трансформација равни E^2 помоћу осних рефлексија

Једна од најбитнијих особина осних рефлексија равни E^2 јесте да се свака изометријска трансформација те равни може представити у облику композиције коначног броја осних рефлексија. На основу овога, цела теорија изометријских трансформација се може изградити полазећи од осних рефлексија.

2.2.1 Теорема: Свака изометријска трансформација $\mathcal{J}$ равни E^2 може се представити као композиција коначног броја осних рефлексија, при чему се те осне рефлексије увек могу изабрати тако да њихов број не буде већи од три.

Доказ: Нека је $\mathcal{J}: E^2 \rightarrow E^2$ изометријска трансформација равни. Према максималном броју инваријантних неколинеарних тачака изометријске трансформације $\mathcal{J}$, разликују се следећи случајеви:

1° Изометрија $\mathcal{J}$ равни E^2 може имати највише три неколинеарне инваријантне тачке. Ако има тачно три линеарно независне инваријантне тачке, тада је она, према последици теореме 1.1.4, коинциденција, тј. $\mathcal{J} = \varepsilon$. Тада се, због инволутивности осне рефлексије S_p , за било коју праву p , може рећи да је

$$\mathcal{J} = \varepsilon = S_p \circ S_p.$$

2° Ако изометрија $\mathcal{J}$ има две инваријантне тачке, нека су то тачке A и B . Ако је $\mathcal{J}$ директна трансформација, онда је $\mathcal{J}$ коинциденција према последици теореме 1.1.4. Ако је $\mathcal{J}$ индиректна, онда је $\mathcal{J}$ осна рефлексија S_p чија оса p садржи тачке A и B према теорему 2.1.6.

3° Нека изометрија $\mathcal{J}$ има једну инваријантну тачку A . Ако је $\mathcal{J}$ индиректна изометрија, онда је она, према теорему 2.1.6, нека осна рефлексија S_p чија оса p садржи тачку A . Међутим, осне рефлексије имају бесконачно много инваријантних тачака (све тачке са осе рефлексије), па $\mathcal{J}$ не може бити осна рефлексија јер има само једну инваријантну тачку A .

Дакле, нека је $\mathcal{J}$ директна трансформација. Додатно, нека је p права која садржи тачку A која је инваријантна за изометрију $\mathcal{J}$. Осна рефлексија S_p је индиректна трансформација, $\mathcal{J}$ је директна, па је композиција $S_p \circ \mathcal{J}$ индиректна изометрија која има бар једну инваријантну тачку A . Тада, на основу теореме 2.1.6 ова композиција представља неку осну рефлексију S_q чија оса q садржи тачку A . Дакле

$$S_p \circ \mathcal{J} = S_q \quad \text{тј.} \quad \mathcal{J} = S_p \circ S_q.$$

4° Ако изометрија $\mathcal{J}$ нема инваријантних тачака, онда за произвољну тачку A равни E^2 важи $\mathcal{J}(A) = A'$ и $A \neq A'$. Нека је права p медијатриса дужи AA' . Онда је $S_p \circ \mathcal{J}(A) = S_p(A') = A$, па је тачка A инваријантна тачка за пресликавање $S_p \circ \mathcal{J}$. На основу претходних случајева, то значи да се пресликавање $S_p \circ \mathcal{J}$ може представити као композиција највише две осне рефлексије тј. $S_p \circ \mathcal{J} = S_q$ или $S_p \circ \mathcal{J} = S_q \circ S_r$ па је

$$\mathcal{J} = S_p \circ S_q \quad \text{или} \quad \mathcal{J} = S_p \circ S_q \circ S_r.$$

□

На основу ове теореме, ако је нека изометрија $\mathcal{J}$ представљена као композиција више од три осне рефлексије, што је могуће, увек се могу наћи неке друге осе тако да њихов број у композицији не буде већи од три.

Дефиниција 2.2.1: Свака композиција коначног броја осних рефлексива равни E^2 којом је представљена нека изометријска трансформација $\mathcal{J}$ те равни се назива *оснорефлексивна* или *симетријска репрезентација* те изометрије.

Ако је та симетријска репрезентација састављена из минималног могућег броја осних рефлексива, онда се она назива *минимална* или *оптимална симетријска репрезентација* те изометрије.

Из доказа теореме се закључује да се свака директна изометријска трансформација $\mathcal{J}$ равни E^2 може представити као композиција две осне рефлексиве тј. $\mathcal{J} = S_q \circ S_p$. Ако је $\mathcal{J}$ има бар две инваријантне тачке, онда је $\mathcal{J}$ коинциденција, па је $p = q$.

Према теорему 2.1.9, ако $\mathcal{J}$ има једну инваријантну тачку, онда се праве p и q секу у тој тачки. Ако нема фиксних тачака, према истој теорему је $p \parallel q$.

Ако је $\mathcal{J}$ индиректна изометријска трансформација равни E^2 , она је или осна рефлексива или се може представити као композиција три осне рефлексиве. Ако $\mathcal{J}$ има фиксних тачака, онда је $\mathcal{J}$ сигурно осна рефлексива.

У наредном одељку ће бити испитано под којим условима композиције три осне рефлексиве представља осну рефлексиву.

2.3 Праменови правих у равни E^2

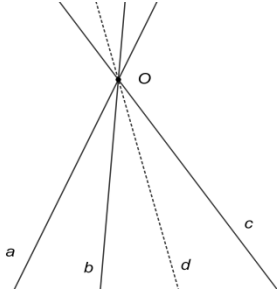
Дефиниција 2.3.1: Скуп свих праив у равни E^2 које се секу у једној тачки O назива се *прамен конкурентних правих* са средиштем O и симболички се обележава са $\mathcal{X}_O$.

Скуп свих правих равни E^2 које су паралелне са неком правом p те равни се назива *прамен паралелних правих* и означава се са $\mathcal{X}_p$.

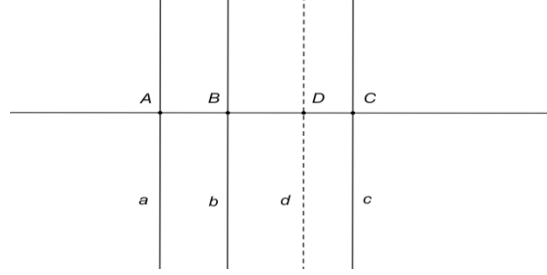
Из дефиниције непосредно следи да је прамени $\mathcal{X}_O$ правих равни E^2 једнозначно одређен средиштем O , а прамени $\mathcal{X}_p$ паралелних правих је једнозначно одређен било којом својом правом p .

Иако су праменови правих дефинисани независно од појма изометријске трансформације, они се могу довести у везу са изометријама, посебно са осним рефлексивама.

2.3.1 Теорема: Нека су a, b, c неке праве равни E^2 . Композиција $S_a \circ S_b \circ S_c$ представља неку осну рефлексиву S_d ако и само ако праве a, b, c припадају једном прамени $\mathcal{X}$. При томе, оса d осне рефлексиве S_d припада истом прамени.



Слика 2.а



Слика 2.б

Доказ: Нека се најпре праве a и b секу у некој тачки O (Слика 2.а). Према теорему 2.1.7 из релације $a \cap b = \{O\}$ се добија да је тачка O једина инваријантна тачка композиције $S_b \circ S_a$. Како је $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$, тј. $S_b \circ S_a = S_c \circ S_d$, онда значи да је тачка O такође једина инваријантна тачка композиције $S_c \circ S_d$ а то значи и да се праве c и d секу у тачки O . Дакле, све четири праве се секу у тачки O па припадају прамену конкурентних правих $\mathcal{X}_O$.

Ако су праве a и b међусобно паралелне (Слика 2.б), нека је права p било која права равни E^2 нормална на праве a и b . Тада је $S_b \circ S_a(p) = p$. Како је $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$, тј. $S_b \circ S_a = S_c \circ S_d$, то значи да је $S_c \circ S_d(p) = p$, па је $p \perp c, d$, па су све четири праве нормалне на праву p и све четири припадају прамену паралелних правих $\mathcal{X}_p$. Обратно, нека је $\mathcal{X}$ прамен конкурентних правих са средиштем у тачки O (Слика 2.а). С обзиром да све три праве a, b, c припадају овом прамену, тада је $S_c \circ S_b \circ S_a(O) = O$ тј. O је инваријантна тачка ове композиције. Ова композиција је састављена од три осне рефлексije, тј. од три индиректне трансформације па је због тога и сама индиректна и има инваријантну тачку O . На основу теореме 2.1.6, тада ова композиција представља неку осну рефлексiju S_d чија оса d садржи ту инваријантну тачку O . Дакле, $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$ и $d \in \mathcal{X}$.

Ако је $\mathcal{X}$ прамен паралелних правих (Слика 2.б) и нека је права p права равни E^2 нормална на праве a, b, c . Из чињенице да $p \perp a, b, c$ следи да свака од осних рефлексija S_c, S_b, S_a преводи праву p у ту исту праву и мења њену оријентацију јер су S_c, S_b, S_a индиректне. Зато композиција $S_c \circ S_b \circ S_a$ такође преводи праву p у ту исту праву и мења њену оријентацију. Због тога следи да на правој p постоји инваријантна тачка D . Дакле, композиција $S_c \circ S_b \circ S_a$ је индиректна изомеријска трансформација равни E^2 и има инваријантну тачку $D \in p$, па према теорему 2.1.6 ова композиција представља неку осну рефлексiju рефлексiju S_d чија оса d садржи ту инваријантну тачку D .

$D \in d$ и $d \perp p$ па одатле и $d \in \mathcal{X}$ и $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$.

□

2.4 Централна ротација равни E^2

Већ је речено да се сложеније врсте изометријских трансформација равни E^2 могу изучавати преко њихових минималних симетријских репрезентација. Једна од таквих изометријских трансформација равни E^2 је централна ротација.

Дефиниција 2.4.1: Нека су S_p и S_q две осне рефлексије равни E^2 чије се осе p и q секу у некој тачки O и ω угао једнак двоструком оријентисаном углу pOq , тј $\omega = 2\angle pOq$. Композиција $S_q \circ S_p$ се назива *средишње обртање* или *централна ротација* равни E^2 у ознаци $\mathcal{R}_{O,\omega}$. Тачка O се назива *центар*, а ω *угао централне ротације*.

Дакле, изометријска трансформација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ је одређена релацијом

$$\mathcal{R}_{O,\omega} = S_q \circ S_p \quad (O = p \cap q, \quad \omega = 2\angle pOq).$$

С обзиром да је централна ротација композиција две осне рефлексије, дакле композиција две индиректне изометрије, она представља директну изометријску трансформацију равни E^2 . Како се осе p и q секу у некој тачки O , на основу теореме 2.1.7, то значи да је тачка O једина инваријантна тачка композиције $S_q \circ S_p$, а самим тим и ротације $\mathcal{R}_{O,\omega}$. Дакле, центар ротације је једина инваријантна тачка централне ротације.

Надаље, теореме неће бити доказиване, већ читалац може пронаћи одговарајуће доказе у [3] и [8] (погледати литературу). За одређене теореме докази ће бити изведени у глави 4 где ће та тврђења бити доказана за просторе произвољних димензија користећи приступ преко афиних еуклидских простора.

2.4.1 Теорема: Две централне ротације $\mathcal{R}_{O,\omega}$ и $\mathcal{R}_{O',\omega'}$ исте равни E^2 су једнаке међусобно ако и само ако је $O = O'$ и $\omega = \omega'$.

□

2.4.2 Теорема: Ако директна изометријска трансформација $\mathcal{J}$ равни E^2 има јединствену инваријантну тачку O , онда је $\mathcal{J}$ централна ротација.

□

2.4.3 Теорема: Ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ је једноначно одређена својим центром O и углом ω и може се представити као композиција произвољних осних рефлексија p и q чије се осе секу у тачки O и одређују оријентисани угао једнак углу $\omega/2$.

□

2.4.4 Теорема: Нека је $\mathcal{J}$ изометрија и $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ротација равни E^2 . Ако је $O' = \mathcal{J}(O)$, тада је

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{R}_{O',\omega}.$$

□

2.4.5 Теорема: Две централне ротације $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta}$ равни E^2 су комутативне ако и само ако се средишта A и B тих ротација поклапају, тј. важи

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} \Leftrightarrow A = B.$$

□

2.4.6 Теорема: Нека су $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta}$ две централне ротације равни E^2 , такве да је $\alpha + \beta \neq 0^\circ$ и $\alpha + \beta \neq 360^\circ$. Тада композиција $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha}$ представља ротацију за угао $\alpha + \beta$ са центром у тачки C , где је $\sphericalangle CAB = \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle ABC = \frac{\beta}{2}$.

□

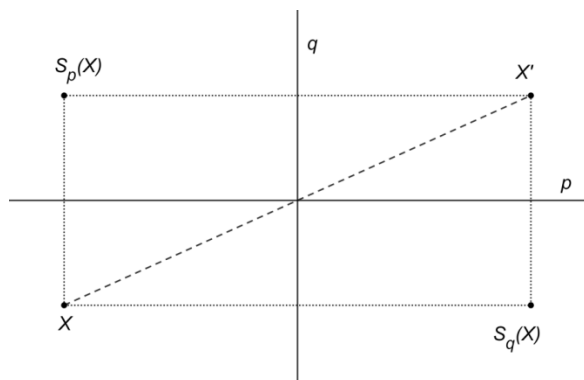
2.5 Централна рефлексija равни E^2

Као посебна врста изометрије се посматра централна ротација са углом ротације од 180° .

Дефиниција 2.5.1: Централна ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни E^2 за угао $\omega = 180^\circ$ се назива *централна рефлексija* са *центром* O у ознаци S_O . Дакле, централна рефлексija S_O је композиција две осне рефлексije S_p и S_q равни E^2 чије се осе p и q секу у тачки O под правим углом, односно

$$S_O = S_q \circ S_p = S_p \circ S_q \quad (p \cap q = \{O\}, p \perp q).$$

Директно из дефиниције следи да је централна рефлексija директна изометријска трансформација равни E^2 јер је композиција две осне рефлексije. Такође, централна рефлексija има јединствену инваријантну тачку, а то је њен центар. Сваку другу тачку $X \in E^2$ централна рефлексija S_O преводи у тачку X' такву да је тачка O средиште дужи XX' . Дакле, централна рефлексija S_O је једнозначно одређена тачком O .



2.5.1 Теорема: Централна рефлексija S_O равни E^2 је инволуција.

□

2.5.2 Теорема: У централној рефлексији S_O равни E^2 права p која пролази кроз центар O се слика у ту исту праву. Ако права p не садржи тачку O , тада се та права p слика у праву p' тако да је $p \cap p' = \emptyset$.

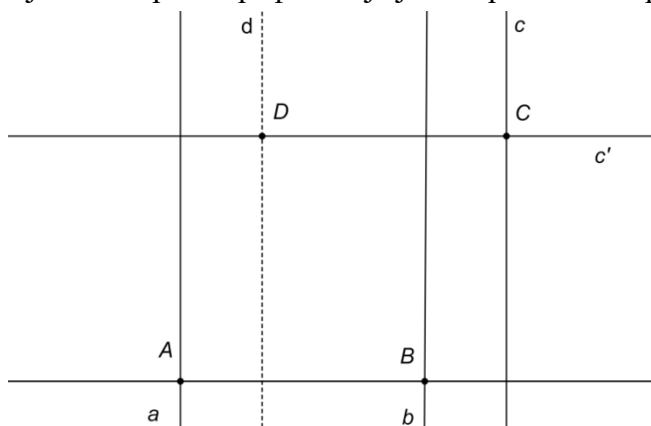
□

2.5.3 Теорема: Централна рефлексија S_O и осна рефлексија S_p равни E^2 су две комутативне трансформације ако и само ако тачка O припада правој p , тј. биће

$$S_p \circ S_O = S_O \circ S_p \Leftrightarrow O \in p.$$

□

2.5.4 Теорема: Композиција три централне рефлексије равни E^2 је опет централна рефлексија те равни. У случају да су центри тих централних рефлексија неколинеарне тачке, центар добијене централне рефлексије је четврто теме паралелограма.



□

2.5.5 Теорема: Композиција непарног броја централних рефлексија равни E^2 представља такође централну рефлексију те равни.

□

2.5.6 Теорема: Ако су S_A и S_B две различите централне рефлексије равни E^2 и S_p осна рефлексија те исте равни, тада композиција $S_B \circ S_p \circ S_A$ представља неку осну рефлексију S_d ако и само ако је $AB \perp p$, односно

$$S_B \circ S_p \circ S_A = S_d \Leftrightarrow AB \perp p.$$

□

2.5.7 Теорема: Ако су S_a и S_b две осне рефлексије равни E^2 и S_C централна рефлексија те исте равни, тада композиција $S_b \circ S_C \circ S_a$ представља неку централну рефлексију S_D ако и само ако су праве a и b међусобно паралелне, тј.

$$S_b \circ S_C \circ S_a = S_D \Leftrightarrow a \parallel b.$$

□

2.6 Транслација равни E^2

Централна рефлексija је композиција две осне рефлексije чије се осе секу у једној тачки. Сада ће бити проучен случај композиције две осне рефлексije чије се осе не секу.

Дефиниција 2.6.1: Нека су S_p и S_q две осне рефлексije равни E^2 којима су осе p и q паралелне. Нека је права s таква да је $s \perp p, q$ и $s \cap p = \{P\}$, $s \cap q = \{Q\}$.

Композиција $S_q \circ S_p$ се назива *транслација* равни E^2 за вектор $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$. Оваква транслација се означава $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ тј. $\mathcal{T}_{\vec{v}} = S_q \circ S_p$. Дакле,

$$\mathcal{T}_{\vec{v}} = S_q \circ S_p.$$

Из дефиниције се јасно види да је транслација директна изометријска трансформација као композиција две осне рефлексije.

Како се осе ове две осне рефлексije не секу, то значи да транслација нема инваријантних тачака. Међутим, транслација поседује бесконачно много инваријантних правих и то су све праве паралелне правој PQ .

2.6.1 Теорема: Две транслације $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ и $\mathcal{T}_{\vec{w}}$ су међусобно једнаке ако и само ако су дужи PQ и RS међусобно подударне и истосмерне.

□

2.6.2 Теорема: Директна изометријска трансформација равни E^2 која нема ниједну инваријантну тачку је транслација.

□

2.6.3 Теорема: Транслација $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ је једнозначно одређена својим вектором $\vec{v}$ и може се представити као композиција две произвољне осне рефлексije чије су осе две паралелне праве p и q , такве да за неке две тачке $P \in p, Q \in q$, $PQ \perp p$ важи $2\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.

□

2.6.4 Теорема: Изометријска трансформација $\mathcal{T}$ равни E^2 представља транслацију ако и само ако се може представити као композиција две различите централне рефлексije те исте равни, односно, ако је $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ онда

$$\mathcal{T}_{\vec{v}} = S_Q \circ S_P.$$

□

2.6.5 Теорема: Нека су $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ и $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ две транслације равни E^2 за векторе $\vec{v}$ и $\vec{u}$. Тада важи:

$$1^\circ \mathcal{T}_{\vec{v}}^{-1} = \mathcal{T}_{-\vec{v}};$$

$$2^\circ \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{T}_{\vec{u}} = \mathcal{T}_{\vec{\omega}}, \text{ где је } \vec{\omega} = \vec{v} + \vec{u};$$

$$3^\circ \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{T}_{\vec{u}} = \mathcal{T}_{\vec{u}} \circ \mathcal{T}_{\vec{v}}.$$

□

2.6.6 Теорема: Ако је $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ транслација равни E^2 , $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ и $\mathcal{J}$ било која изометријска трансформација те равни, затим $P' = \mathcal{J}(P)$, $Q' = \mathcal{J}(Q)$, тада важи

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{T}_{\vec{v}'}$$

где је $\vec{v}' = 2\overrightarrow{P'Q'}$.

□

2.6.7 Теорема: Транслација $\mathcal{T}_{\vec{v}}$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ и осна рефлексија S_p равни E^2 комутирају ако и само ако је права PQ паралелна са правом p . Дакле, биће

$$S_p \circ \mathcal{T}_{\vec{v}} = \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ S_p \Leftrightarrow PQ \parallel p.$$

□

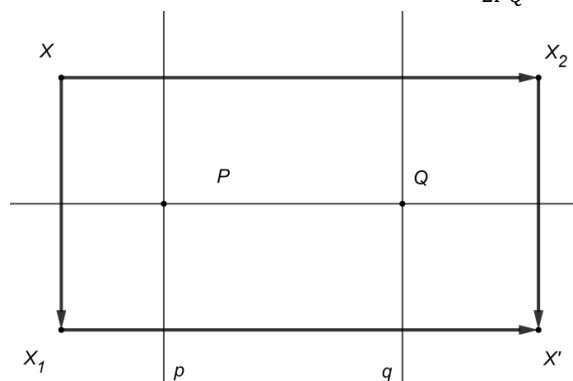
2.7 Клизајућа рефлексија равни E^2

Сада ће бити речи и о изометријским трансформацијама равни E^2 чија се минимална симетријска репрезентација састоји од три осне рефлексије. Ако три осе припадају једном прамену, онда композиција три осне рефлексије са тим осама представља опет осну рефлексију. А када те три осе не припадају истом прамену, онда се добија нова изометријска трансформација.

Дефиниција 2.7.1: Нека је $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ транслација за вектор $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ и S_{PQ} осна рефлексија са осом PQ . Композиција $\mathcal{T}_{\vec{v}} \circ S_{PQ}$ се назива *клизајућа рефлексија* равни E^2 и означава се са $\mathcal{G}_{2PQ}$. Дакле,

$$\mathcal{G}_{2PQ} = \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ S_{PQ}.$$

Правна s одређена тачкама P и Q се назива *оса рефлексије* $\mathcal{G}_{2PQ}$.



Слика 2.в

Из дефиниције је јасно да је клизајућа рефлексија одређена својом осом и својим вектором.

Такође, како је оса осне рефлексије S_{PQ} паралелна са вектором $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$, то значи да транслација $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ и осна рефлексија S_{PQ} комутирају (слика 2.в) према теорему 2.6.7, тј.

$$\mathcal{G}_{2PQ} = \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ S_{PQ} = S_{PQ} \circ \mathcal{T}_{\vec{v}}.$$

Из чињенице да је translација $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ директна изометријска трансформација, а осна рефлексација S_{PQ} индиректна, добија се да је клизајућа рефлексација $\mathcal{G}_{2PQ}^{\rightarrow} = \mathcal{T}_{\vec{v}} \circ S_{PQ}$ индиректна изометријска трансформација равни E^2 као композиција једне директне и једне индиректне изометријске трансформације.

2.7.1 Теорема: Клизајућа рефлексација $\mathcal{G}_{2PQ}^{\rightarrow}$ равни E^2 нема инваријантних тачака. Поседује једну инваријантну праву и то је оса рефлексације PQ .

□

2.7.2 Теорема: Ако индиректна изометријска трансформација равни E^2 нема инваријантних тачака, онда је то клизајућу рефлексација.

□

2.7.3 Теорема: Композиција састављена од три осне рефлексације равни E^2 чије осе не припадају једном прамену представља клизајућу рефлексацију. Дакле, ако су p, q, r три праве равни E^2 које не припадају истом прамену, тада је $S_r \circ S_q \circ S_p$ клизајућа рефлексација те равни.

2.8 Класификација изометријских трансформација равни E^2

У претходним разматрањима је обухваћено више врсте изометријских трансформација равни E^2 . Изометријске трансформације су подељене на директне и индиректне, а такође су и класификоване према броју својих инваријантних тачака. Да ли су овим обухваћене све изометријске трансформације?

2.8.1 Теорема: Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{J}$ равни E^2 представља коинциденцију, translацију или централну ротацију.

Доказ: С обзиром да је $\mathcal{J}$ директна изометријска трансформација, она се може представити као композиција две осне рефлексације. Нека је

$$\mathcal{J} = S_p \circ S_q.$$

У зависности од међусобног положаја оса p и q , разликују се следеће могућности:
1° Ако су осе p и q истоветне, тј. $p = q$, тада је $\mathcal{J}$ коинциденција јер

$$\mathcal{J} = S_p \circ S_q = S_p \circ S_p = \varepsilon$$

због инволутивности осне рефлексације.

2° Ако су осе p и q две различите и паралелне праве, тада композиција $S_p \circ S_q$ представља неку translацију $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ равни E^2 , где је $P \in p$, $Q \in q$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ и $PQ \perp p, q$.

Дакле, добија се

$$\mathcal{J} = S_p \circ S_q = \mathcal{T}_{\vec{v}}.$$

3° Ако се осе p и q секу у некој тачки O , тада композиција осних рефлексија $S_p \circ S_q$ представља централну неку ротацију $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни E^2 , где је ω двоструки оријентисани угао између правих p и q . Добија се

$$\mathcal{I} = S_p \circ S_q = \mathcal{R}_{O,\omega}.$$

□

2.8.2 Теорема: Свака индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни E^2 представља осну или клизајућу рефлексију.

Доказ: У зависности од тога да ли изометријска трансформација $\mathcal{I}$ има или нема инваријантних тачака, разликују се следећи случајеви:

1° Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни E^2 поседује бар неку инваријантну тачку, према теореме 2.1.6 она представља неку осну рефлексију равни E^2 .

2° Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни E^2 нема инваријантних тачака, према теореме 2.7.2 она представља клизајућу рефлексију те равни.

Овде треба напоменути да се централна рефлексија не помиње експлицитно као посебна изометријска трансформација. Сваку централну рефлексију треба посматрати као специјалан облик централне ротације за опружен угао.

Дакле, према претходне две теореме, класификација изометријских трансформација равни E^2 се може представити и таблично.

	Изометријске трансформације равни E^2				
	Директне изометријске трансформације			Индиректне изометријске трансформације	
Број инваријантних тачака	Бар две	Тачно једна	Ниједна	Бар једна	Ниједна
Врста изометрије	Коинциденција ε	Централна ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ (Спец. случај централна рефлексија $\mathcal{R}_O$)	Транслација $\mathcal{T} \xrightarrow{v}$	Осна рефлексија S_p	Клизајућа рефлексија $\mathcal{G} \xrightarrow{2PQ}$

Разни задаци у равни E^2

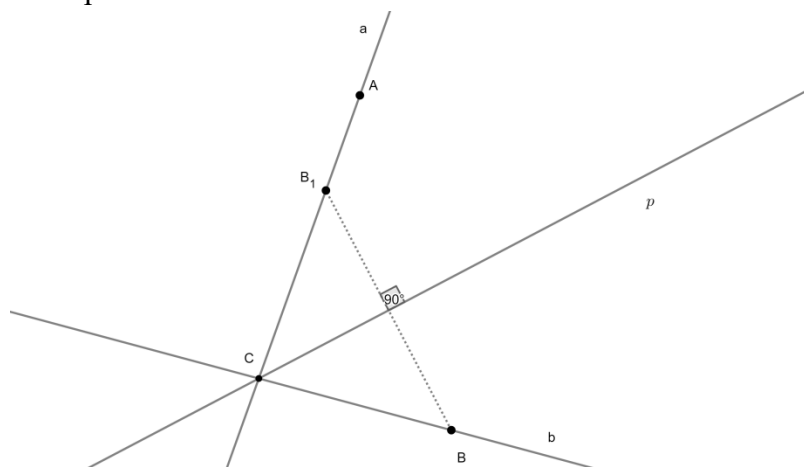
Задатак 1: Дата је права p и тачке A и B које не припадају правој p . Одредити праве a и b тако да $A \in a, B \in b$ и да права p полови угао који образују праве a и b .

Решење:

Нека је $S_p(B) = B_1$. Ако права p треба да полови угао између правих a и b то значи да је она симетрала угла између њих. Тада је $S_p(b) = a$, а самим тим и $B_1 \in a$ јер $B \in b$. Ако је $B_1 \neq A$, за праву a се узме права $a = p(A, B_1)$.

Ако права a сече праву p некој тачки C , онда је то тражена права a , а права b је права $b = p(B, C)$.

Ако је $a \parallel p$ онда нема решење.

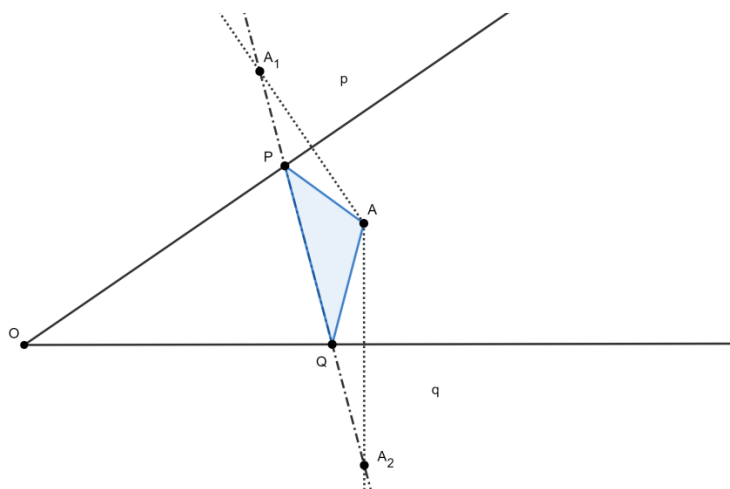


Ако је баш $S_p(B) = A$, тада се за тачку C може узети било која тачка са праве p , права a ће бити права $a = p(A, C)$, а права b је права $b = p(B, C)$.

□

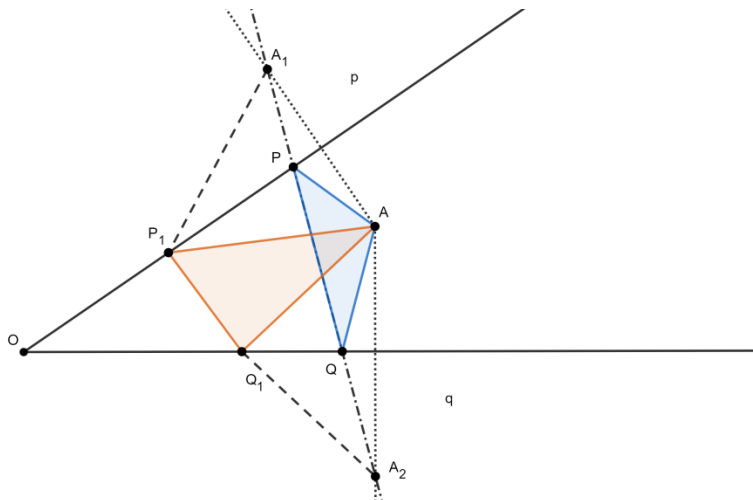
Задатак 2: Дат је оштар угао pOq и у њему тачка A . Одредити тачке $P \in p$ и $Q \in q$ тако да обим троугла APQ буде минималан.

Решење:



Прво се конструишу тачке A_1 и A_2 тако да буду носиметричне тачки A у односу на краке Op и Oq . Затим се конструише права која садржи тачке A_1 и A_2 . У пресеку те

праве са краком Op се добија тачка P , а у пресеку са краком Oq се добија тачка Q . Троугао APQ је тражени троугао са минималним обимом. Зашто баш тај троугао има минималан обим?



Обим троугла APQ је $O = AP + PQ + QA$, а како је $AP = A_1P$ и $QA = QA_2$ онда је обим $O = A_1P + PQ + QA_2$, а то је управо дужина дужи A_1A_2 .

Ако би уместо тачака P и Q узели било које друге две тачке P_1 и Q_1 онда би обим тог троугла AP_1Q_1 био $O_1 = AP_1 + P_1Q_1 + Q_1A$, а како је $AP_1 = A_1P_1$ и $Q_1A = Q_1A_2$ тада би обим троугла AP_1Q_1 био $O_1 = A_1P_1 + P_1Q_1 + Q_1A_2$, а та изломљена линија је засигурно дужа од дужи A_1A_2 .

□

Задатак 3 : Дате су тачке A и B унутар оштрог угла $\sphericalangle mOn$. На крацима датог угла одредити тачке M и N такве да изломљена линија $AMNB$ буде најкраћа могућа.

Решење:

Нека је $A' = S_m(A)$ и $B' = S_n(B)$.

Нека је $\{M\} = p(A', B') \cap m$ и $\{N\} = p(A', B') \cap n$.

Тада је очигледно $AM = A'M$ и $NB = NB'$.

Дужина изломљене линије $AMNB$ је:

$$\begin{aligned} |AMNB| &= |AM| + |MN| + |NB| \\ &= |A'M| + |MN| + |NB'| \\ &= |A'B'| \end{aligned}$$

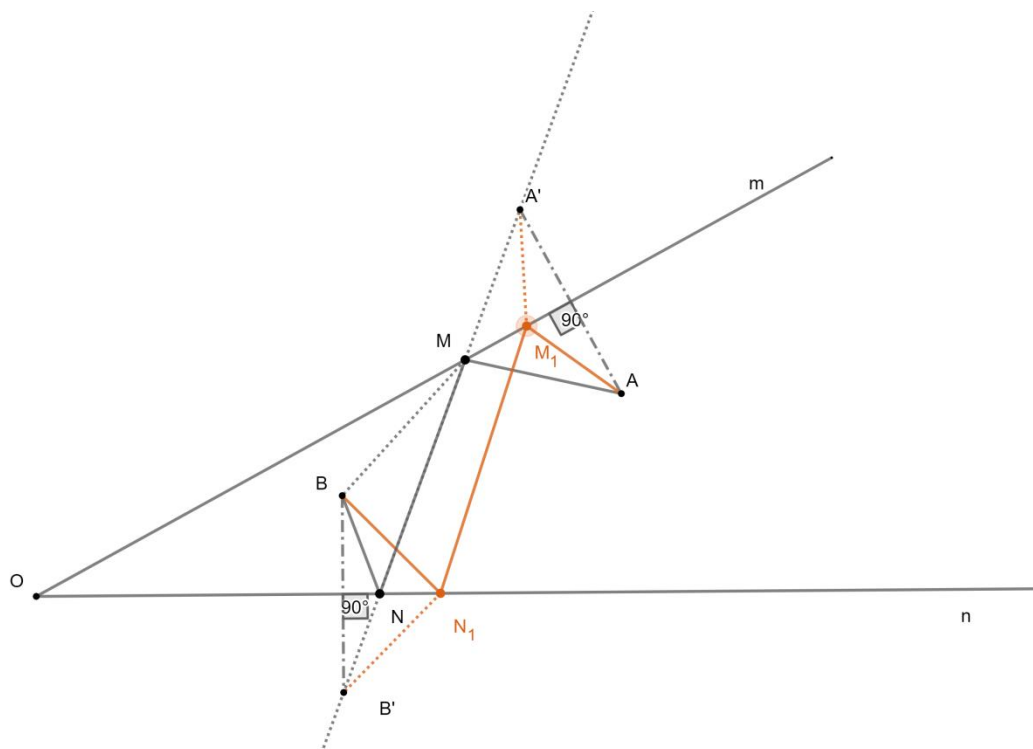
Добијено је да је дужина изломљене линије $AMNB$ управо једнака дужини дужи $A'B'$. Зашто је ово најкраћа могућа дужина?

Ако се на крацима m и n узму било које друге две тачке M_1 и N_1 , тада је: $AM_1 = A'M_1$ и $N_1B = N_1B'$.

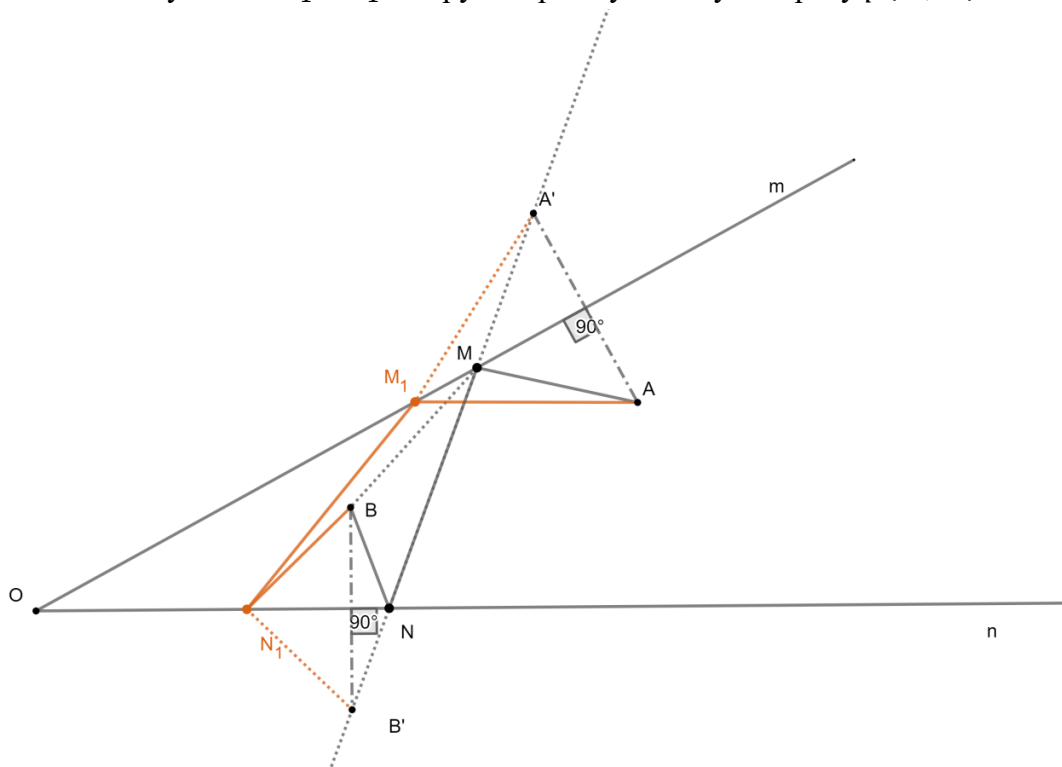
Онда ће дужина те изломљене линије AM_1N_1B бити:

$$\begin{aligned} |AM_1N_1B| &= |AM_1| + |M_1N_1| + |N_1B| \\ &= |A'M_1| + |M_1N_1| + |N_1B'| > |A'B'| = |AMNB| \end{aligned}$$

јер дужи $A'M_1, M_1N_1$ и N_1B' са дужи $A'B'$ граде четвороугао, па је збир дужина три странице четворугла увек већи од дужине четврте странице.



Ово важи и када су тачке M_1 и N_1 са друге стране у односу на праву $p(A', B')$.

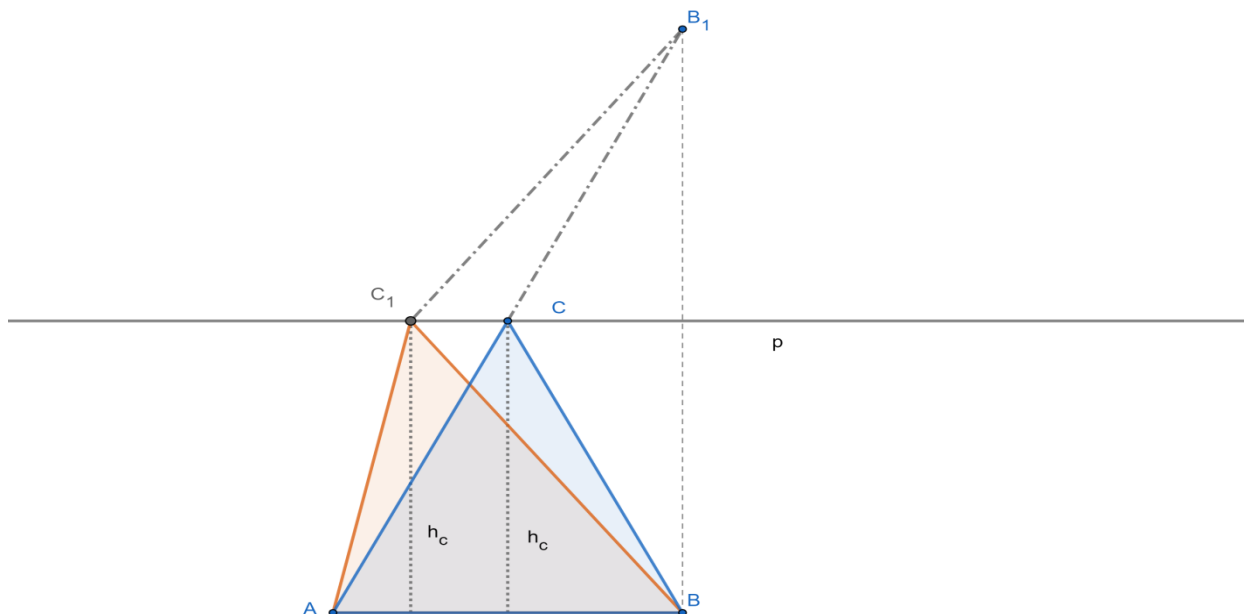


Важи и када су тачке M_1 и N_1 са разних страна праве $p(A', B')$. Тада је дужина изломљене линије AM_1N_1B једнака дужини изломљене линије $A'M_1N_1B'$ што је очигледно дуже од $|AMNB| = |A'B'|$.



Решение:

24



ΔBB_1C је једнакокраки ($BC = B_1C$) па је обим троугла ΔABC једнак:

$$O_{\Delta ABC} = AB + CA + BC = AB + CA + B_1C = AB + AB_1. (*)$$

ΔBB_1C_1 је такође једнакокраки ($BC_1 = B_1C_1$) па је обим троугла ΔABC_1 једнак:

$$O_{\Delta ABC_1} = AB + C_1A + BC_1 = AB + (C_1A + B_1C_1). (**)$$

Када се посматра ΔAB_1C_1 види се да је $C_1A + B_1C_1 > AB_1. (***)$

Сада, када се истовремено посматрају једнакости $(*)$, $(**)$ и $(***)$ добија се:

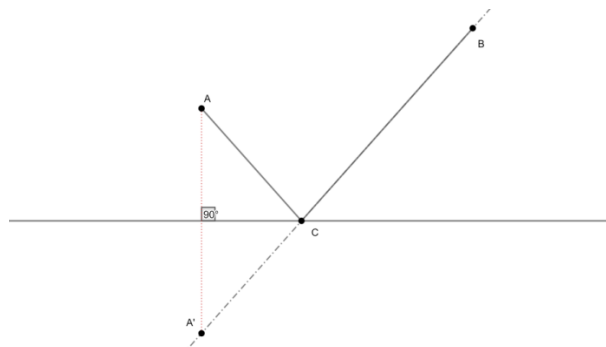
$$O_{\Delta ABC_1} = AB + (C_1A + B_1C_1) > AB + AB_1 = O_{\Delta ABC}$$

□

Задатак 5 (О два брода): Два брода (брод A и брод B) се налазе усидрени на мору. Са брода A чамцем треба да се превезу путници до обале, путањом која је праволинијског облика и да потом чамац дође до брода B . Одредити путању најкраће дужине којом чамац треба да се креће.

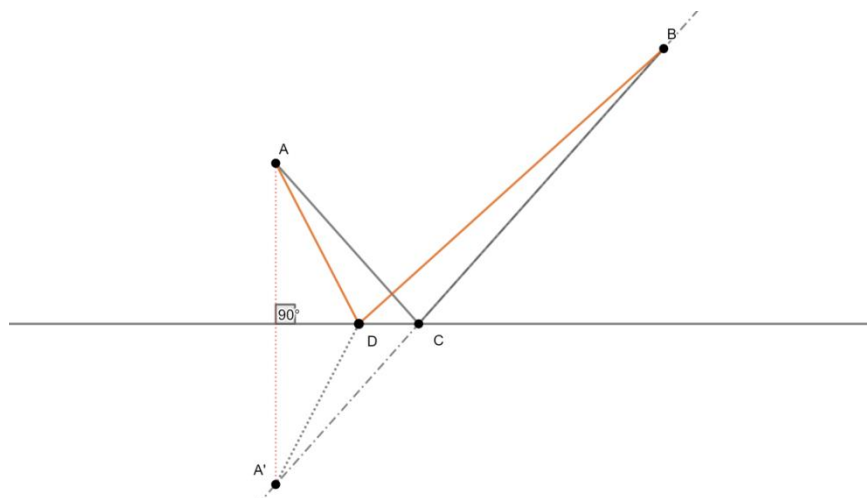
Решење:

Дакле, без умањења општости, ситуацију можемо представити као на слици. Треба прво наћи тачку A' која је осносиметрична тачки A у односу на обалу. Тада се у пресеку праве $A'B$ и обале добије тачка C . Путања најкраће дужине је путања састављена од дужи AC и CB .



Зашто је баш ово путања најкраће дужине?

Како је троугао $\triangle ACA'$ једнакокраки и $AC = A'C$ добија се да је дужина путање једнака:
 $AC + CB = A'C + CB = A'B$.



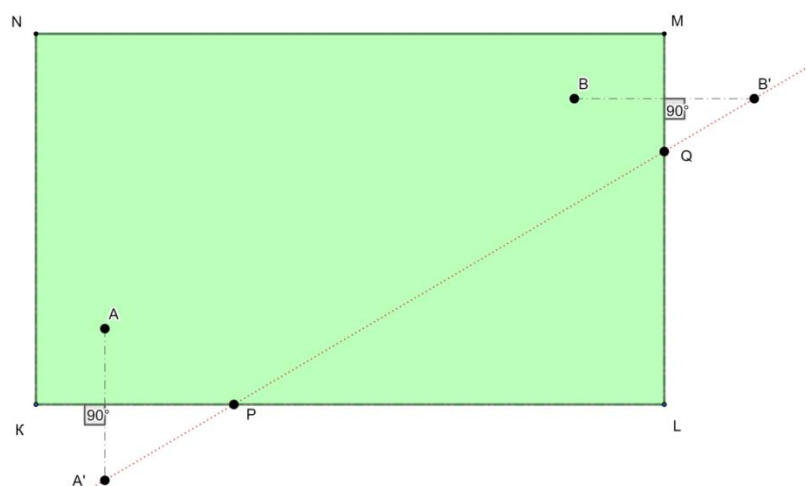
Ако се на обали узме било која тачка D различита од тачке C ($\triangle ADA'$ је једнакокраки и $AD = A'D$), тада би укупна дужина те нове путање била: $AD + DB = A'D + DB > A'C$ јер је збир дужина било које две стране троугла већи од дужине треће стране. Исто ово важи и када је тачка D са друге стране тачке C .

□

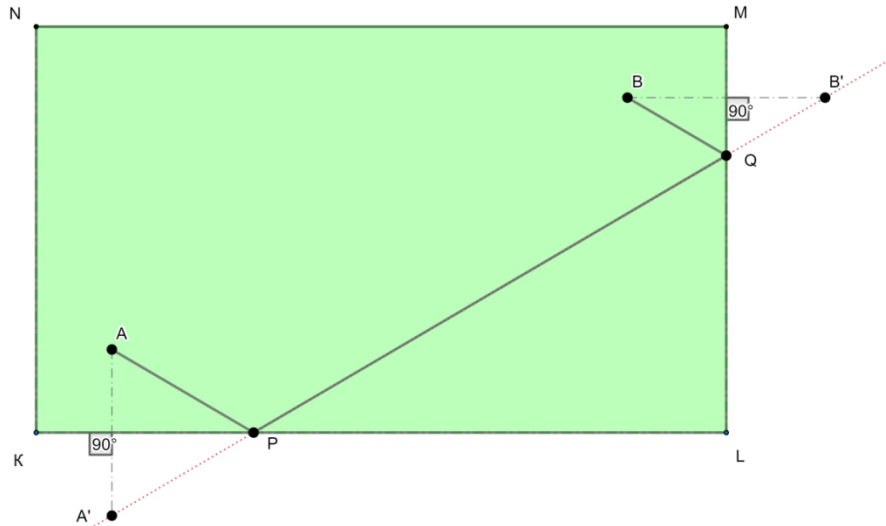
Задатак 6 (Билијарски сто са два одбијања од суседних страница): Одредити путању којом треба да се креће дата билијарска лоптица A , да би, пошто удари о две суседне ивице правоугаоног билијарског стола, ударила у лоптицу B .

Решење:

Нека је $KLMN$ правоугли билијарски сто и нека је $S_{KL}(A) = A'$ и $S_{LM}(B) = B'$. Нека права $A'B'$ сече ивице KL и LM у тачкама P и Q .



У тачкама P и Q ће лоптица A ударити ивице стола пре него што удари у лоптицу B .
Доказ:



Троугао $\triangle AA'P$ је једнакокраки ($AP = A'P$) па је део дужи KL који се налази унутар $\triangle AA'P$ висина која одговара основици AA' , а самим тим припада симетрали угла $\angle APA'$ ($\angle APK = \angle A'PK$). $\angle A'PK = \angle LPQ$ јер су унакрсни, па се добија да је $\angle APK = \angle LPQ$.

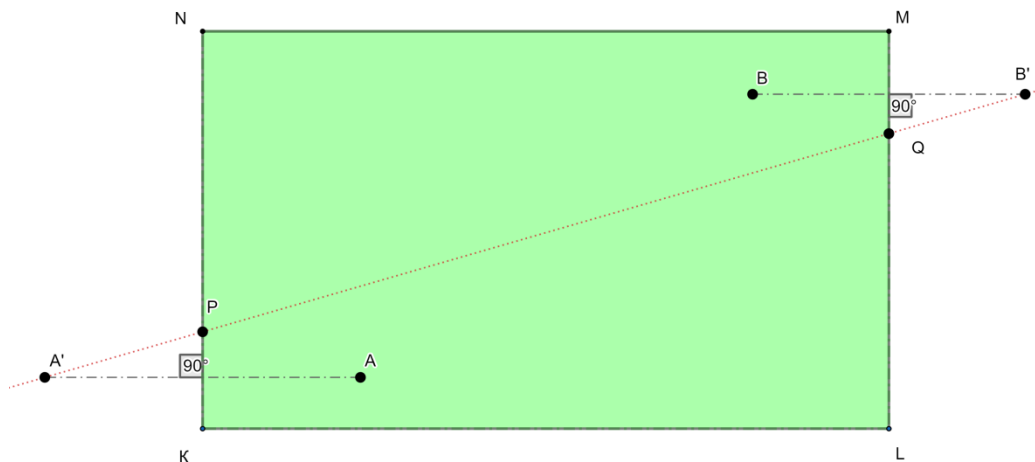
Аналогно разматрање важи и за троугао $\triangle BQB'$, па се добије да је $\angle LQP = \angle BQM$. Слично разматрање би било када би се лоптица A одбијала од суседне ивице KN и MN .

□

Задатак 7 (Билијарски сто са два одбијања од наспрамних страница): Одредити путању којом треба да се креће дата билијарска лоптица A , да би, пошто удари о две наспрамне ивице правоугаоног билијарског стола, ударила у лоптицу B .

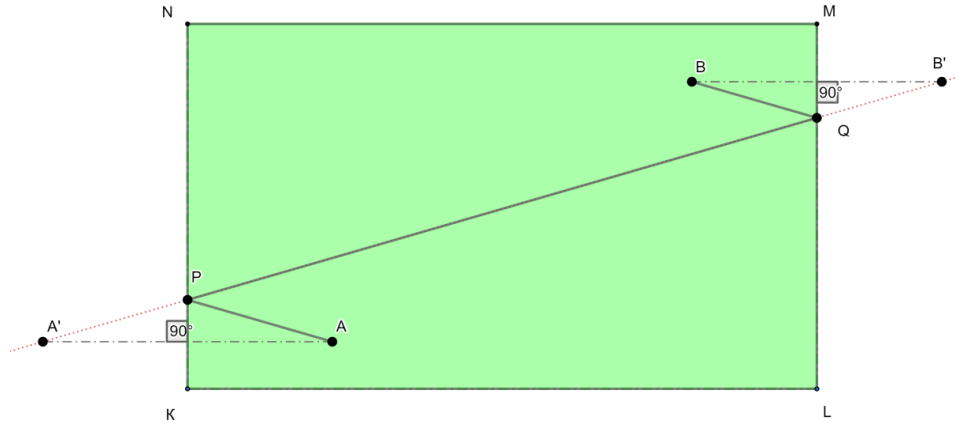
Решење:

Нека је $KLMN$ правоугли билијарски сто и нека је $S_{KN}(A) = A'$ и $S_{LM}(B) = B'$. Нека права $A'B'$ сече ивице KN и LM у тачкама P и Q .



У тачкама P и Q ће лоптица A ударити ивице стола пре него што удари у лоптицу B .

Доказ:



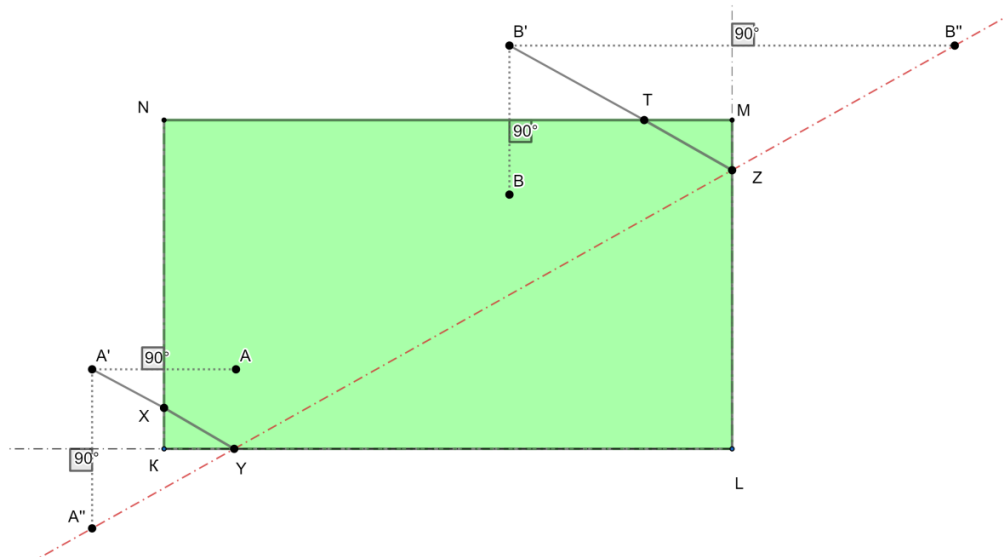
Троугао $\triangle AA'P$ је једнаокраки ($AP = A'P$) па је део дужи KN који се налази унутар $\triangle AA'P$ висина која одговара основици AA' , а самим тим припада симетрали угла $\angle APA'$ ($\angle APK = \angle A'PK$). $\angle A'PK = \angle NPQ$ јер су унакрсни, па се добија да је $\angle APK = \angle NPQ$. Аналогно разматрање важи и за троугао $\triangle BQB'$, па се добије да је $\angle LQP = \angle BQM$. Слично разматрање би било када би се лоптица A одбијала од наспрамне ивице KL и MN .

□

Задатак 8 (Билијарски сто са одбијањем од све четири стране стола):
Одредити путању којом треба да се креће дата билијарска лоптица A , да би, пошто удари о све четири ивице правоугаоног билијарског стола, ударила у лоптицу B .

Решење:

Нека је $KLMN$ правоугли билијарски сто и нека је $S_{KN}(A) = A'$ и $S_{KL}(A') = A''$. Даље, нека је $S_{MN}(B) = B'$ и $S_{LM}(B') = B''$. Нека права $A''B''$ сече ивице KL и LM у тачкама Y и Z . Нека дуж KN сече $A'Y$ у тачки X , а дуж MN сече $B'Z$ у тачки T .



Лоптицу A треба ударити тако да прво удари тачку X , па ће онда она ударити у тачку Y , па у тачку Z , па у тачку T и на крају у лоптицу B .

The diagram shows a green rectangle $KLMN$. Points A and B are on the top edge NM , while points X and Y are on the left edge KN . A line segment connects X and Y . Point T is on the top edge NM , and point Z is on the right edge LM . A line segment connects Y and Z . External points A' and B' are located above the rectangle, connected to X and Y respectively. External points A'' and B'' are located below the rectangle, connected to Y and Z respectively. Right angle symbols are shown at A' , B' , A'' , and B'' . A red dashed line passes through A'' , Z , and B'' .

Аналогно, $\Delta A' A'' Y$ једнакокраки ($A'' X = A' X$) па се добија да је

а углови $\angle A''YK$ и $\angle LYZ$ су унакрсни па је $\angle XYK = \angle LYZ$.

Исто разmatрање важи и за троугао $\Delta B'ZB''$ па је $\angle LZY = \angle MZT$.

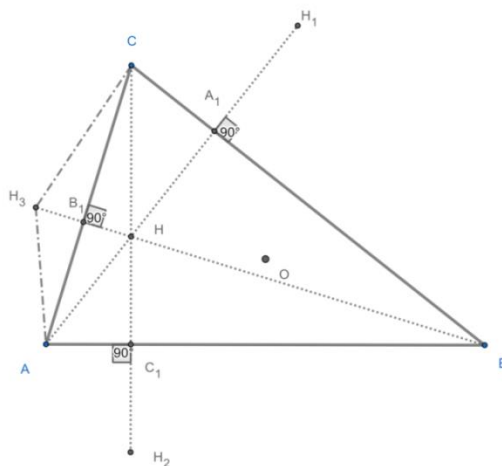
Слично се добија и за троугао $\triangle BTB'$ да је $\angle MTZ = \angle NTB$.

9

Решение:

На пример, за почетак, посматрати тачку H_3 . Ако се докаже да је четвороугао $ABCH_3$ тетиван то значи да тачка H_3 лежи на кругу који је описан око троугла $\triangle ABC$. Довољно је доказати да је

29



Троугао ΔHCH_3 је једнакокрани и $HC = H_3C$. Троугао ΔHAH_3 је једнакокрани и $HA = H_3A$.

Из ових разлога је четвороугао HAH_3C делтоид па је $\angle CH_3A = \angle CHA$ (*).
Даље, $\angle CHA = \angle A_1HC_1$ (јер су унакрсни) (**).

Када се посматра четвороугао A_1HC_1B добија се да је

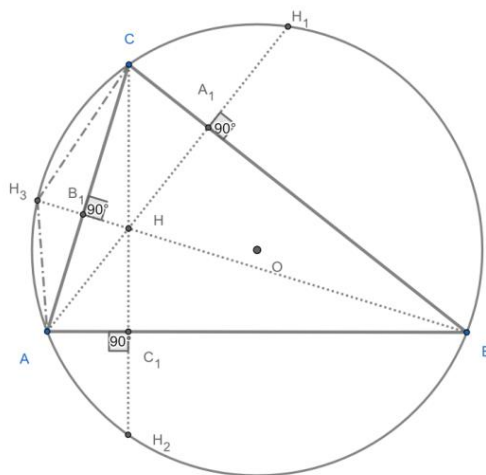
$$\angle B = 360^\circ - (\angle C_1 + \angle H + \angle A_1) = 360^\circ - (90^\circ + \angle H + 90^\circ) = 180^\circ - \angle H,$$

тј. $\angle A_1BC_1 = 180^\circ - \angle A_1HC_1$. Односно $\angle A_1HC_1 = 180^\circ - \angle A_1BC_1$ (***).

Сада, када се споје једанкости (*), (**) и (***) добије се:

$$\angle CH_3A = \angle CHA = \angle A_1HC_1 = 180^\circ - \angle A_1BC_1 = 180^\circ - \angle ABC$$

што је и требало доказати.



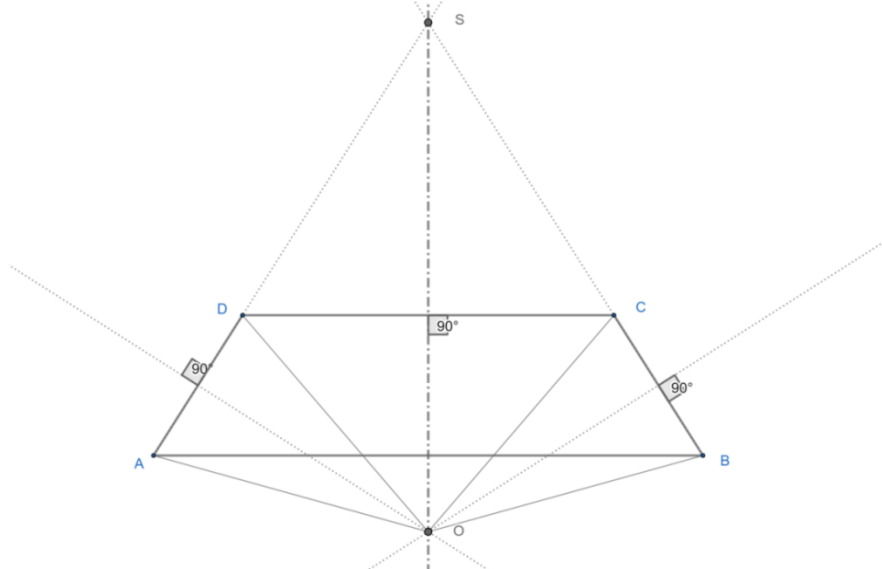
Сличан доказ важи и за тачке H_2 и H_1 па се добија да и оне припадају кругу описаном око троугла ΔABC .

□

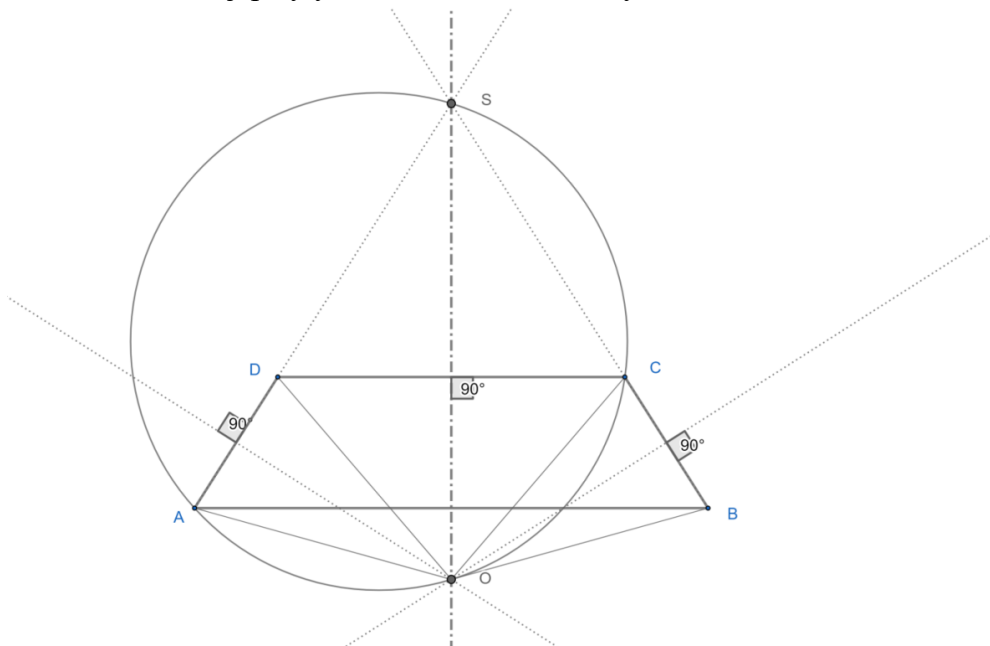
Задатак 10: Продужеци кракова AD и BC једнакокраког трапеца $ABCD$ се секу у тачки S . Доказати да се кругови описани око троуглова $\triangle ACS$ и $\triangle BDS$ секу у центру круга описаног око датог трапеца.

Решење:

Нека је тачка O центар описане кружнице око датог трапеца. Права OS је симетрала основица AB и CD . Због симетричности трапеца у односу на праву OS довољно је доказати да је четвороугао $AOCS$ тетиван.

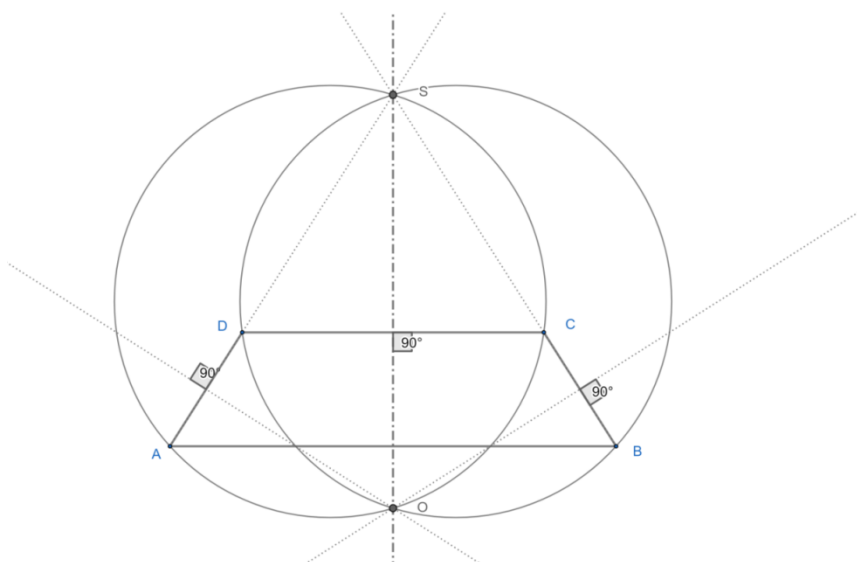


Како је $AO = BO = CO = DO$ добија се да су троуглови $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ једнакокраки, а због симетрије и подударни. Из тога се може закључити да је $\angle OAD = \angle OCB$ па због $\angle SCO + \angle OCB = 180^\circ$ добија се да је $\angle SCO + \angle OAD = 180^\circ$ па је закључак да је четвороугао $AOCS$ тетиван (јер су углови $\angle SCO$ и $\angle OAD$ углови над истом тетивом SO).



Аналогно се добија и да је четвороугао $OBSD$ тетиван.

Како је дуж SO заједничка тетива за кругове описане око ових четвороуглова, то значи и да је SO заједничка тетива кружница описаних око троуглова $\triangle ACS$ и $\triangle BDS$, а то значи да обе кружнице пролазе кроз тачку O .



□

Задатак 11: Нека су M и N тачке симетричне темењу C троугла $\triangle ABC$ у односу на симетрале углова α и β . Доказати да је тачка S у којој уписани круг троугла додирује страну AB , средиште дужи MN .

Решење:

Нека је s_α симетрала угла α , s_β симетрала угла β и $s_\alpha \cap s_\beta = \{O\}$. Ово значи да је тачка O инваријантна и за рефлексiju S_{s_α} и за рефлексiju S_{s_β} .

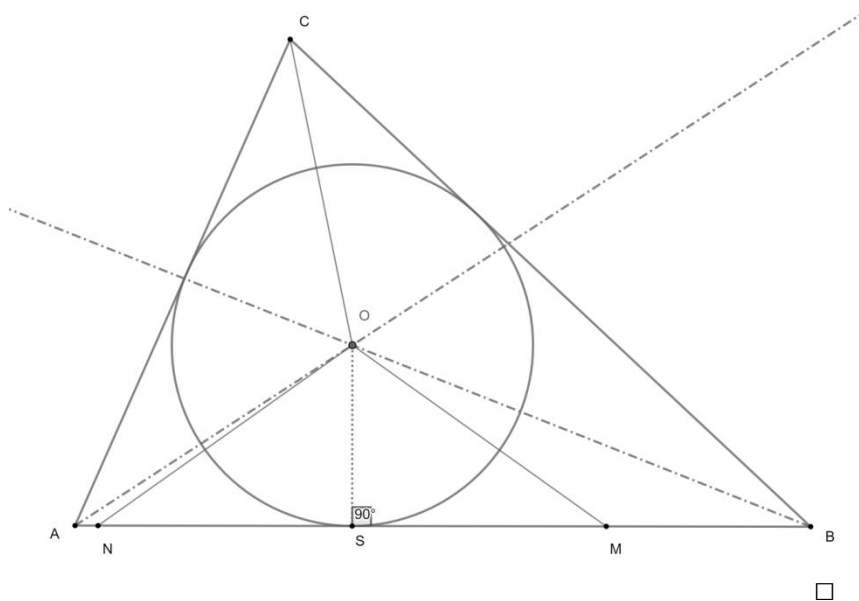
Како је $M = S_{s_\alpha}(C)$, то значи да је $OC = OM$. Тачка C лежи на једном од кракова угла α , а како је s_α симетрала тог угла то значи да $S_{s_\alpha}(C)$ лежи на другом краку истог угла. Зато тачка M лежи на страници AB .

Како је $N = S_{s_\beta}(C)$, то значи да је $OC = ON$. Из истих разлога као за тачку M , и тачка N лежи на страници AB .

$OC = OM$ и $OC = ON$, дакле, $ON = OM$.

Из претходних једнакости се закључује да је троугао $\triangle ONM$ једнакокрак. Уписани круг додирује троугао $\triangle ABC$ у тачки S , а то значи да је дуж AB тангентна дуж па са полупречником OS гради прав угао.

Како тачка S уједно припада и дужи NM , тј. страници једнакокраког троугла $\triangle ONM$ и ту се формира прав угао, то значи да је дуж OS висина једнакокраког троугла $\triangle ONM$ која одговара основици NM , па је подножје те висине увек на средишту основице, тј. тачка S је средиште дужи NM .

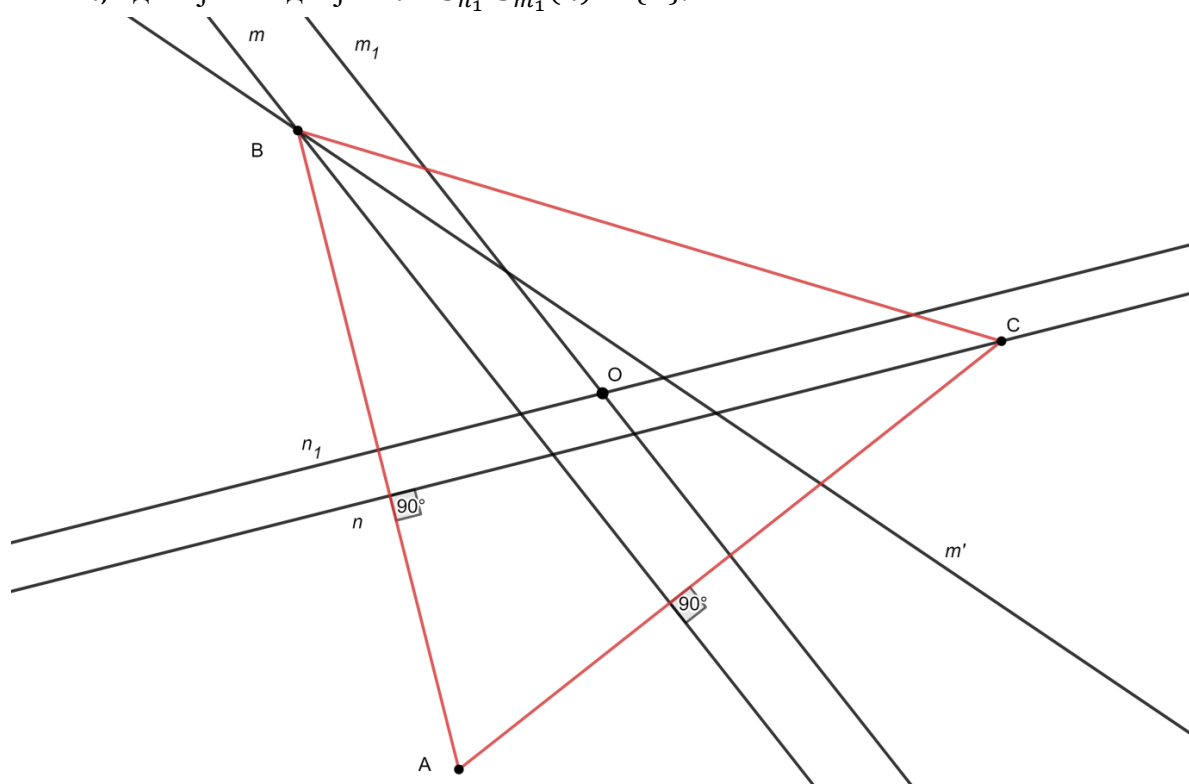


Задатак 12: У равни су дате праве m и n , које се секу и тачка O ван њих. Одредити троугао $\triangle ABC$ коме висине из темена B и C припадају редом правим m и n , а тачка O је центар описаног круга.

Решење:

Нека је $\triangle ABC$ тражени троугао и нека су m_1 и n_1 симетрале дужи CA и AB .

Тада $O \in m_1, n_1$, $m_1 \parallel m$, $n_1 \parallel n$. Даље је $S_{n_1} \circ S_{m_1}(C) = B$, па како $C \in n$ и $B \in m$, добија се да је $m \cap S_{n_1} \circ S_{m_1}(n) = \{B\}$.



Прво се конструише права $S_{n_1} \circ S_{m_1}(n) = m'$ и са B означимо тачку пресека правих m и m' . Оне се секу, сем у случају $\angle(m, n) = 120^\circ$. Ако је $\angle(m, n) = 120^\circ$, тада је и $\angle(m_1, n_1) = 120^\circ$ па је композиција $S_{n_1} \circ S_{m_1}$ уствари ротација за угао 240° . Тада је $\angle(m', m) = \angle(m', n) = \angle(m, n) + 2\angle(m_1, n_1) = 120^\circ + 240^\circ = 360^\circ$ и онда је $m \parallel m'$ и задатак има решење (и то бесконачно много) само ако је $m = m'$. Овај специјални случај настаје само када тачка O припада симетрали оштрог угла између правих m и n , и то уз услов $\angle(m, n) = 120^\circ$. Након тога се конструишу тачке A и C на следећи начин:

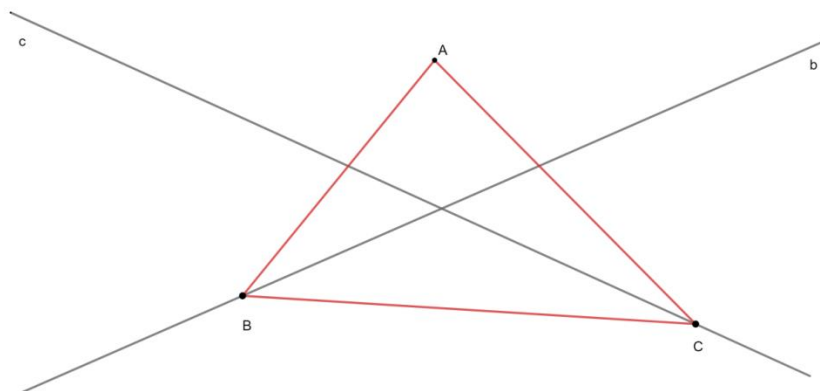
$$A = S_{n_1}(B) \text{ и } C = S_{m_1}(A).$$

По конструкцији су праве n_1 и m_1 симетрале дужи AB и CA и O је центар описаног круга. Због $B \in m$ и $m \parallel m_1$, m је права која садржи висину из темена B . Због $n_1 \parallel n$ треба још доказати да $C \in n$. То следи из чињенице да је $S_{m_1} \circ S_{n_1}(m') = n$, $B \in m'$, па $n \ni S_{m_1} \circ S_{n_1}(B) = C$.

□

Задатак 13: Дате су две праве b и c које се секу и тачка A ван њих. Одредити троугао $\triangle ABC$ коме су праве b и c симетрале унутрашњих углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$.

Решење:



Ако права b треба да буде симетрала угла $\sphericalangle ABC$, а тачка A се налази на једном од кракова тог угла, то значи да на другом краку BC постоји тачка A_1 која се добије од тачке A оном рефлексијом у односу на праву b .

Из истог разлога, на краку BC постоји и тачка A_2 која је од тачке A у односу на праву c добије оном рефлексијом.

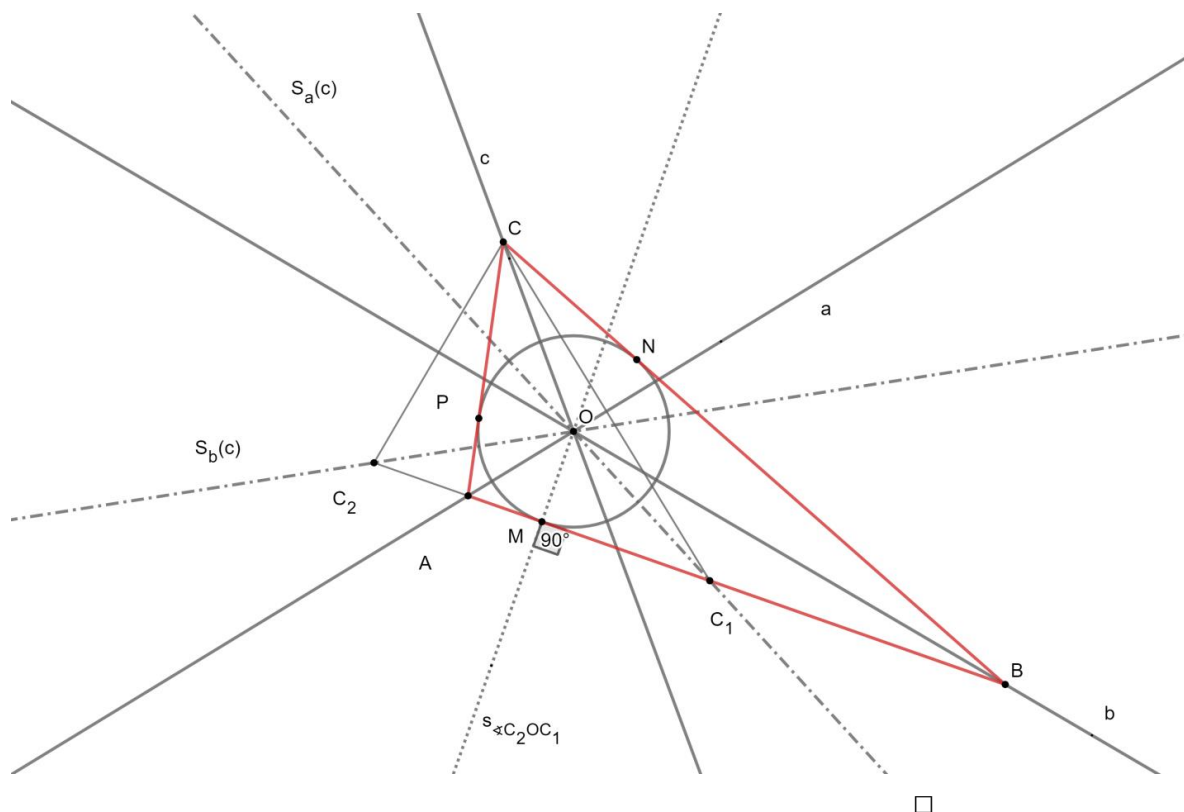
Правна на којој се налазе темена B и C је одређена правом A_1A_2 и темена B и C се добију у пресеку ове праве са правима b и c редом.

Конструишу се прво тачке A_1 и A_2 такве да је $A_1 = S_b(A)$, $A_2 = S_c(A)$. Темена B и C се добију на следећи начин: $p(A_1, A_2) \cap b = \{B\}$, $p(A_1, A_2) \cap c = \{C\}$.



Решение:

Теме C се добије тако што се из тачке A (или B , свеједно) конструише тангента на дати круг и у пресеку те тангенте и праве c се добија теме C .



Задатак 15: Дат је троугао $\triangle ABC$. Конструисати осу клизајуће симетрије, која је композиција осних рефлексија у односу на праве BC, CA, AB .

Решење:

Дакле, треба наћи осу клизне рефлексије која представља композицију $S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$. Праве одређене дужима BC, CA, AB не припадају истом прамену правих.

Нека је права p таква да је $C \in p$ и p је нормална на праву одређену са тачкама A и B . Тада права p припада истом прамену као и праве одређене са паровима тачака B и C тј. C и A .

Како композиција три осне рефлексије оса које припадају истом прамену представља опет једну осну рефлексију, то значи да постоји права t која припада истом том прамену шравих таква да је $S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_p = S_t$.

Нека је $p \cap p(A, B) = \{F\}$.

Тада је $S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_p(F) = S_{BC} \circ S_{CA}(F) = S_{BC}(F') = F''$.

Такође, мора бити $S_t(F) = F''$, па је права t симетрала дужи FF'' .

Дакле, добија се: $S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_p = S_t$ тј. $S_{BC} \circ S_{CA} = S_t \circ S_p$ и даље је

$$S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_{AB} = S_t \circ S_p \circ S_{AB} = S_t \circ S_F.$$

Нека је тачка D подножје нормале из тачке F на праву t ($D \neq F$ јер би се у супротном праве p и t поклопиле), и нека је права b нормална на праву DF у тачки F . Тада је:

$$S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_{AB} = S_t \circ S_F = S_t \circ S_b \circ S_{FD} = \mathcal{T}_{2FD} \circ S_{FD} = \mathcal{G}_{2FD}$$

па је оса клизајуће рефлексије права DF .



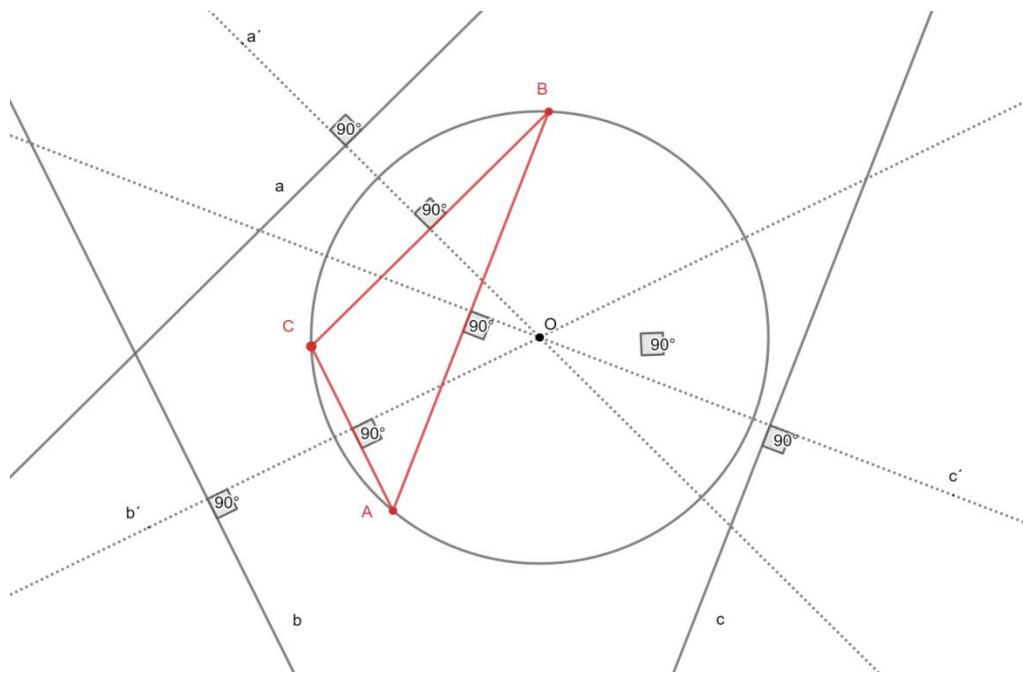
Решение:

Дакле, никоје три од правих a, b, c нису паралелне.

Прво се на све три праве a, b, c конструишу нормале тако да оне пролазе кроз тачку O .

Тада те три нормале припадају прамену правих са центром у тачки O .

Претпоставимо да је задатак урађен и да је добијен тражени троугао.



Како су a', b', c' нормале на a, b, c а странице троугла $\triangle ABC$ паралелне са a, b, c , то значи да су a', b', c' уједно нормале и на странице датог троугла.

С обзиром да темена датог троугла $\triangle ABC$ леже на датом кругу k , то значи да ће темена B и C бити симетрична у односу на нормалу a' , темена A и C бити симетрична у односу на нормалу b' , темена A и B бити симетрична у односу на нормалу c' . Ово даје закључак да су праве a', b', c' медијатрисе одговарајућих страница троугла $\triangle ABC$. То значи да је :

$$S_{a'}(B) = C, \quad S_{b'}(C) = A, \quad S_{c'}(A) = B,$$

па се добија да је

$$S_{a'}(S_{c'}(S_{b'}(C))) = S_{a'}(S_{c'}(A)) = S_{a'}(B) = C.$$

Ово значи да је тачка C инваријантна тачка за композицију $S_{a'} \circ S_{c'} \circ S_{b'}$.

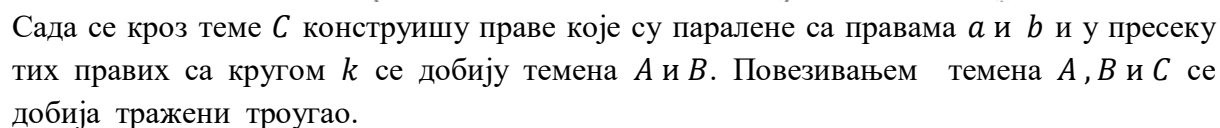
Ова композиција има још једну инваријантну тачку а то је центар прамена, тачка O . Ова композиција се састоји из три осне рефлексије и пошто осе тих рефлексије a', b', c' припадају истом прамену то значи да је њихова композиција опет нека осна рефлексија S_s чија оса s припада истом прамену. Како композиција има две инваријантне тачке C и O , то значи да оса рефлексије S_s садржи обе тачке C и O . Дакле теме C се налази у пресеку круга k и осе s .

Нека је тачка F произвољна тачка на кругу k .

Тада је

$$S_s(F) = S_{a'}(S_{c'}(S_{b'}(F))) = S_{a'}(S_{c'}(F')) = S_{a'}(F'') = F'''.$$

Дакле, тачка F се осном рефлексијом слика у тачку F''' . То значи да је права s медијатриса дужи FF''' . У пресеку те праве и круга k се налази теме C .



Решение:

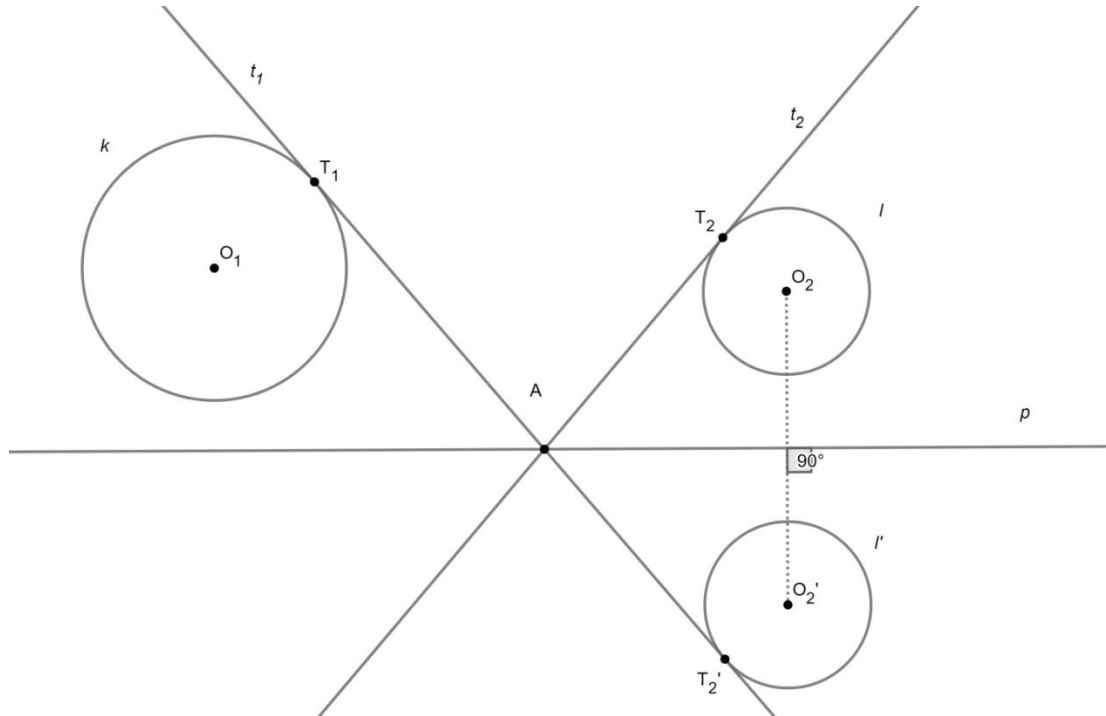
39

такав да је $l' = S_p(l)$. Затим се конструише права t_1 тако да буде заједничка тангента као на слици. Нека је тачка $\{A\} = p \cap t_1$. Нека те T_1 додирна тачка круга k и тангенте t_1 и нека је T_2' додирна тачка круга l' и тангенте t_1 .

Тада је оштар угао $\sphericalangle T_1 A p$ једнак оштром углу $\sphericalangle T_2' A p$.

Како је l' слика круга l , а права t_1 је тангента на l' онда ће права $t_2 = S_p(t_1)$ бити тангента на круг l и са правом p ће градити исти оштар угао као права t_2 .

Дакле $\sphericalangle T_2' A p = \sphericalangle T_2 A p$ и тачка $\{A\} = p \cap t_1$ је тражена тачка.



Задатак 18: Ван дате праве p дате су тачке A и B . Одредити тачку P на правој p тако да разлика њених растојања од тачака A и B буде најмања. Затим, Одредити тачку Q правој p тако да је разлика њених растојања од тачака A и B највећа.

Решење:

Нека је права s симетрала дужи AB .

Претпоставимо прво да су A и B са исте стране праве p .

Када се конструишу тачке P и Q онда се добијају троуглови $\triangle APB$ и $\triangle AQB$.

Овде треба користити неједнакости троугла за троугао $\triangle APB$:

$$||PA| - |PB|| \leq |AB|$$

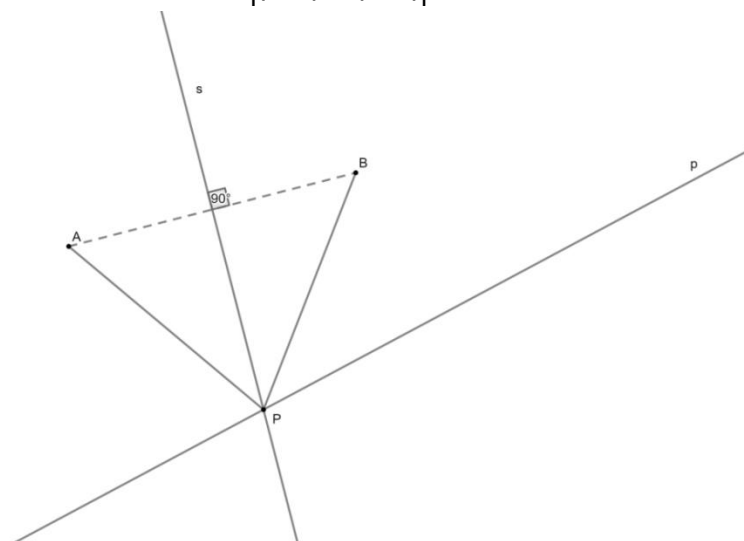
Ако је $s = p$, онда се за тачку P узме тачка која представља средиште дужи AB , па како је онда $|PA| = |PB|$ добија се да је :

$$||PA| - |PB|| = 0$$

и то је најмања могућа разлика њених растојања од тачака A и B .

Ако је $s \neq p$, онда се за тачку P узме тачка $\{P\} = p \cap s$. С обзиром да је права s симетрала дужи AB , онда је троугао $\triangle ABP$ једнакокраки и важи да је $|PA| = |PB|$ па је поново

$$||PA| - |PB|| = 0.$$



Ако је $s \parallel p$, онда се за тачку P узме тачка $\{P\} = p \cap p(A, B)$. С обзиром да је $s \parallel p$ и $p(A, B) \perp s$, тада је $p(A, B) \perp p$. Без умањења општости, нека је тачка B ближа правој p . Тада је $|PA| = |PB| + |AB|$ па се добије

$$||PA| - |PB|| = |AB|.$$

Тачка Q треба да буде таква да је разлика њених растојања од тачака A и B највећа, то значи и да разлика $|QA| - |QB|$ мора да буде највећа могућа, па како и тачка Q мора да задовољава неједнакост

$$||QA| - |QB|| \leq |AB|$$

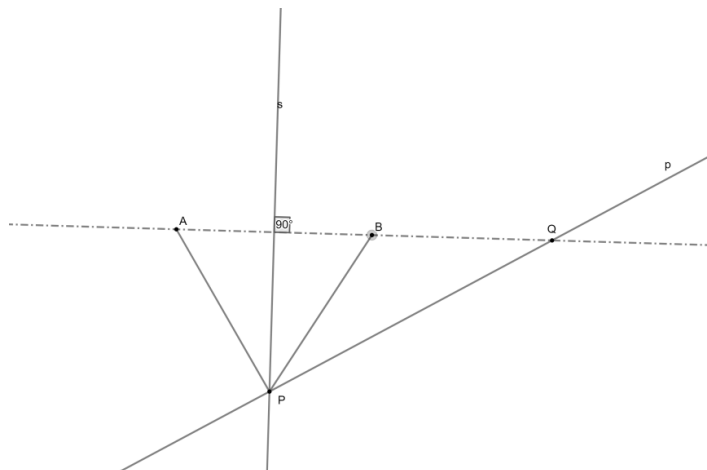
онда је највећа могућа разлика када је $||QA| - |QB|| = |AB|$ тј. када је:

$$|QA| - |QB| = |AB| \text{ одакле се добија } |QA| = |AB| + |QB| \text{ или када је}$$

$$|QB| - |QA| = |AB|$$

одакле се добија $|QB| = |AB| + |QA|$.

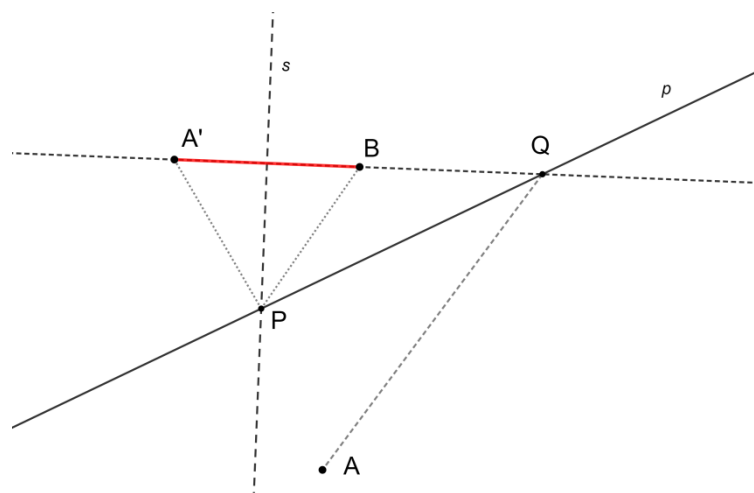
Ово значи да су тачке A, B и Q колинеарне. То значи да се тачка Q добија у пресеку праве p и праве $p(A, B)$.



Ако су тачке A и B са различитих страна праве p , онда се једна од тачака A или B преслика осном рефлексијом у односу на праву p . Без умањења општости, нека је $S_p(A) = A'$.

Ако се тачке A' и B разликују, тада се тачке P и Q одреде на исти начин као у прошлим случајевима, само се сада посматрају тачке A' и B . Тада је $|PA| = |PA'|$ и $|QA| = |QA'|$. Ако се тачке A' и B поклапају, тада је права p уједно и симетрала дужи AB , онда се за тачку Q може изабрати једна од тачака A или B . Без умањења општости, нека је $Q = A$. Тада је $|QA| = 0$ па је онда $||QA| - |QB|| = |QB| = |AB|$.

Већ је објашњено како се одређује тачка P у случају када је права p симетрала дужи AB .



□

Задатак 19: Права s је симетрала једног од углова одређеног правама a и b ако и само ако је $S_b \circ S_s \circ S_a = S_s$. Доказати.

Решење:

Нека је $a \cap b = \{O\}$. Тада и $O \in s$.

Нека је најпре права s симетрала једног од углова одређеног правама a и b .

То значи да је $\angle sOa = \angle sOb$. Добија се:

$S_b \circ S_s \circ S_a \circ S_s = (S_b \circ S_s) \circ (S_a \circ S_s) = \mathcal{R}_{2\angle sOb} \circ \mathcal{R}_{2\angle sOa} = \mathcal{R}_{2\angle sOb} \circ \mathcal{R}_{-2\angle sOb} = \varepsilon$ где је ε идентичко пресликавање. То значи да је:

$$S_b \circ S_s \circ S_a \circ S_s = \varepsilon \quad \text{тј.}$$

$$S_b \circ S_s \circ S_a = S_s.$$

Обратно, нека је тачка $X \in a$ и нека је

$$S_b \circ S_s \circ S_a = S_s, \quad \text{тј.}$$

$$S_s \circ S_a = S_b \circ S_s.$$

Тада је

$$S_s(S_a(X)) = S_b(S_s(X))$$

односно

$$S_s(X) = S_b(S_s(X)).$$

Ово значи да је за осну рефлексију S_b тачка $S_s(X)$ инваријантна тачка, а то је могуће

само ако $S_s(X) \in b$. С обзиром да је тачка $X \in a$ била произвољна, а $S_s(X) \in b$ онда трансформација S_s сваку тачку са праве a пресликава на праву b , а то значи да је права s симетрала једног од углова одређеног правама a и b . Исто се добија и ако се крене од тачке $X \in b$.

□

Задатак 20: Ако су праве $p_1, p_2, \dots, p_n$ неке равни које се изометријом J те равни пресликавају у праве $p_1', p_2', \dots, p_n'$ доказати да је:

$$J \circ S_{p_n} \circ \dots \circ S_{p_2} \circ S_{p_1} \circ J^{-1} = S_{p_n'} \circ \dots \circ S_{p_2'} \circ S_{p_1'} .$$

Решење:

Користи се теорема закона трансмутације која каже:

Ако је J изометрија неке равни p права која се том изометријом пресликава у праву p' онда је : $J \circ S_p \circ J^{-1} = S_{p'}$.

То значи да је :

$$\begin{aligned} J \circ S_{p_n} \circ \dots \circ S_{p_2} \circ S_{p_1} \circ J^{-1} = \\ (J \circ S_{p_n} \circ J^{-1}) \circ (J \circ S_{p_{n-1}} \circ J^{-1}) \circ \dots \circ (J \circ S_{p_2} \circ J^{-1}) \circ (J \circ S_{p_1} \circ J^{-1}) = \\ S_{p_n'} \circ \dots \circ S_{p_2'} \circ S_{p_1'} \end{aligned}$$

□

Задатак 21: Ако је J индиректна изометрија равни која тачке A, B пресликава редом у тачке B, A доказати да је J осна рефлексива.

Решење:

Ако је $J(A) = B, J(B) = A$, онда је

$$J(J(A)) = J(B) = A, \quad J(J(B)) = J(A) = B$$

па изометрија J^2 има две инваријантне тачке A и B .

Како је J индиректна изометрија равни, онда је J^2 директна изометрија као композиција две индиректне изометрије.

J^2 је директна изометрија и има бар две инваријантне тачке A, B па према теореме онда је J^2 коинциденција, тј.

$$J^2 = \varepsilon$$

а то значи да је J инволуција.

Једине две изометрије које су инволуције су осна рефлексива и централна рефлексива. Обзиром да је централна рефлексива директна изометрија, а J је индиректна, онда J може бити само осна рефлексива.

□

Задатак 22: Доказати да за праве p, q, r неке равни важи $S_r \circ S_q \circ S_p = S_p \circ S_q \circ S_r$ ако и само ако оне припадају једном прамену.

Решење:

Нека је $S_r \circ S_q \circ S_p = S_p \circ S_q \circ S_r$.

S_r, S_q, S_p су осне рефлексии па су инволуције тј.

$$S_r^2 = \varepsilon, S_q^2 = \varepsilon, S_p^2 = \varepsilon \text{ па је}$$

$$S_r = S_r^{-1}, S_q = S_q^{-1}, S_p = S_p^{-1}.$$

Онда је $(S_r \circ S_q \circ S_p)^{-1} = S_p^{-1} \circ S_q^{-1} \circ S_r^{-1} = S_p \circ S_q \circ S_r$ а то значи да је

$$(S_r \circ S_q \circ S_p)^2 = (S_r \circ S_q \circ S_p) \circ (S_r \circ S_q \circ S_p) = S_p \circ S_q \circ S_r \circ S_r \circ S_q \circ S_p = \varepsilon,$$

па је композиција $S_r \circ S_q \circ S_p$ инволуција.

Ако праве p, q, r припадају једном прамену (прамену конкурентних правих или прамену паралелних правих), онда је композиција $S_r \circ S_q \circ S_p = S_m$ тј. опет нека осна рефлексиија S_m чија оса m припада том истом прамену и S_m је инволуција као и $S_r \circ S_q \circ S_p$.

Ако праве p, q, r не припадају једном прамену (ни прамену конкурентних правих, ни прамену паралелних правих), онда је композиција $S_r \circ S_q \circ S_p$ нека клизајућа рефлексиија $\mathcal{G}_{2AB} \rightarrow = \mathcal{J}_{2AB} \rightarrow \circ S_{AB}$ а клизајућа рефлексиија није инволуција јер

$$(\mathcal{G}_{2AB} \rightarrow)^2 = \mathcal{G}_{2AB} \rightarrow \circ \mathcal{G}_{2AB} \rightarrow = \mathcal{J}_{2AB} \rightarrow \circ S_{AB} \circ \mathcal{J}_{2AB} \rightarrow \circ S_{AB} =$$

$$\mathcal{J}_{2AB} \rightarrow \circ \mathcal{J}_{2AB} \rightarrow \circ S_{AB} \circ S_{AB} =$$

$$\mathcal{J}_{4AB} \rightarrow \circ \mathcal{G}_{2AB} \rightarrow \neq \varepsilon.$$

□

Задатак 23: Нека је $ABCDE$ тетиван петоугао, такав да $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да теме D припада медијатриси странице AB .

Решење:

Нека је O центар описане кружнице око датог петоугла. Нека су p, q, r медијатрисе редом страница AB, BC, CD . Како је тачка O центар описане кружнице, она је подједнако удаљена од свих темена датог петоугла, па из тог разлога O припада и медијатрисама p, q, r , па ове медијатрисе припадају једном прамену.

Како је $q \perp BC$ и $BC \parallel DE$, то значи да је и $q \perp DE$. Центар O је подједнако удаљен и од тачака D и E па је онда права q уједно и медијатриса дужи DE .

Како је $r \perp CD$ и $CD \parallel EA$, то значи да је и $r \perp EA$. Центар O је подједнако удаљен и од тачака E и A па је онда права r уједно и медијатриса дужи EA .

Сада се посматра композиција $S_r \circ S_q \circ S_p \circ S_r \circ S_q$. Тада је

$$S_r \circ S_q \circ S_p \circ S_r \circ S_q(D) =$$

$$S_r \circ S_q \circ S_p \circ S_r(E) =$$

$$S_r \circ S_q \circ S_p(A) =$$

$$S_r \circ S_q(B) =$$

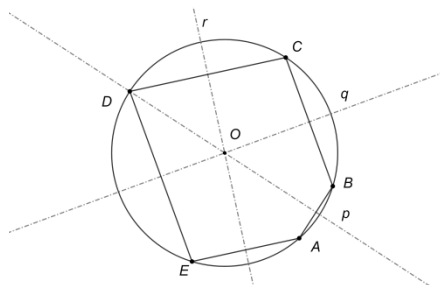
$$S_r(C) = D$$

С обзиром да праве p, q, r припадају једном прамену, тада је на основу претходног

задатка $S_p \circ S_r \circ S_q = S_q \circ S_r \circ S_p$ па се добија :

$$\begin{aligned} D &= S_r \circ S_q \circ S_p \circ S_r \circ S_q(D) = \\ S_r \circ S_q \circ S_q \circ S_r \circ S_p(D) &= \\ S_p(D) \end{aligned}$$

а ово важи само ако $D \in p$, тј. D припада медијатриси дужи AB .



□

Задатак 24: Доказати да се медијатресе страница троугла секу у једној тачки.

Решење:

Нека су s_{AB}, s_{AC}, s_{BC} медијатресе страница AB, AC и BC редом.

Нека је $s_{AB} \cap s_{AC} = \{O\}$. Ове две праве се морају сећи, јер ако се не секу то значи да је $s_{AB} \parallel s_{AC}$, а како обе ове праве граде праве углове са својим одговарајућим страницама троугла то онда значи да је $AB \parallel AC$, а то је немогуће.

Дакле, $s_{AB} \cap s_{AC} = \{O\}$.

Како $O \in s_{AB}$ то значи да је $(A, O) \cong (B, O)$ (*).

Како $O \in s_{AC}$ то значи да је $(A, O) \cong (C, O)$ (**).

Када се споје једнакости (*) и (**) добија се

$$\begin{aligned} (B, O) &\cong (A, O) \cong (C, O) \text{ тј.} \\ (B, O) &\cong (C, O) \end{aligned}$$

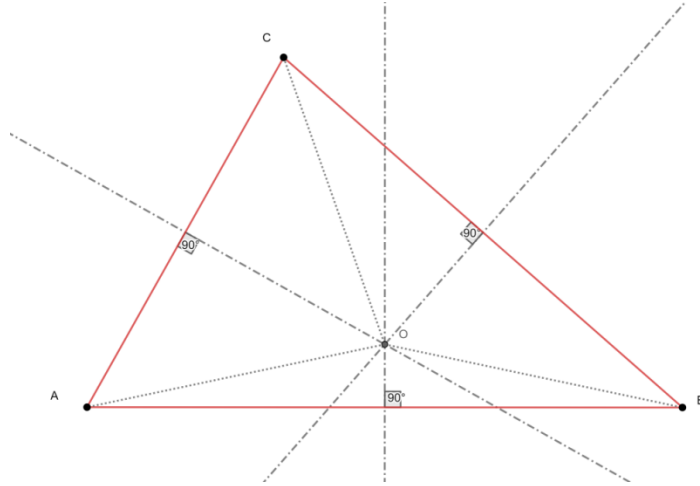
па тачка O припада и медијатриси дужи BC , тј. $O \in s_{BC}$.

Тада је $S_{s_{AB}} \circ S_{s_{AC}} \circ S_{s_{BC}}(O) = S_{s_{AB}} \circ S_{s_{AC}}(O) = S_{s_{AB}}(O) = O$. Дакле, тачка O је инваријантна за композицију $S_{s_{AB}} \circ S_{s_{AC}} \circ S_{s_{BC}}$. Ова композиција је индиректна јер се састоји од три осне рефлексije и има бар једну инваријантну тачку, па на основу теореме 2.1.6 ова композиција представља неку осну рефлексiju S_m и важи $O \in m$.

Тада је $S_m = S_m^{-1}$ па је

$$\begin{aligned} S_{s_{AB}} \circ S_{s_{AC}} \circ S_{s_{BC}} &= S_m = S_m^{-1} = \\ (S_{s_{AB}} \circ S_{s_{AC}} \circ S_{s_{BC}})^{-1} &= S_{s_{BC}}^{-1} \circ S_{s_{AC}}^{-1} \circ S_{s_{AB}}^{-1} = \\ S_{s_{BC}} \circ S_{s_{AC}} \circ S_{s_{AB}}. \end{aligned}$$

На основу задатка 22, ово значи да праве s_{AB}, s_{AC}, s_{BC} припадају једном прамену. Дакле, ове три медијатресе припадају прамену конкурентних правих са средиштем O .



□

Задатак 25: Доказати да се бисектрисе унутрашњих углова троугла секу у једној тачки.

Решење:

Нека су $s_{\sphericalangle A}, s_{\sphericalangle B}, s_{\sphericalangle C}$ бисектрисе редом углова код темена A, B, C .

Нека је $s_{\sphericalangle A} \cap s_{\sphericalangle B} = \{O\}$. Ове две праве се морају сећи јер ако се не секу то онда значи да је $s_{\sphericalangle A} \parallel s_{\sphericalangle B}$ па је $\frac{\sphericalangle A}{2} + \frac{\sphericalangle B}{2} = 180^\circ$, односно $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 360^\circ$, а то је немогуће за унутрашње углове троугла.

Дакле, бисектрисе $s_{\sphericalangle A}$ и $s_{\sphericalangle B}$ се секу у некој тачку O .

Нека је O_1 подножје нормале из тачке O на страницу AB , O_2 подножје нормале из тачке O на страницу BC , O_3 подножје нормале из тачке O на страницу CA .

Како $O \in s_{\sphericalangle A}$, то значи да је тачка O подједнако удаљена од страница AB и CA , па је

$$(O, O_1) \cong (O, O_3) \quad (*).$$

Како $O \in s_{\sphericalangle B}$, то значи да је тачка O подједнако удаљена од страница AB и BC , па је

$$(O, O_1) \cong (O, O_2) \quad (**).$$

Када се споје једнакости $(*)$ и $(**)$, добије се

$$(O, O_3) \cong (O, O_1) \cong (O, O_2) \text{ тј. } \\ (O, O_3) \cong (O, O_2),$$

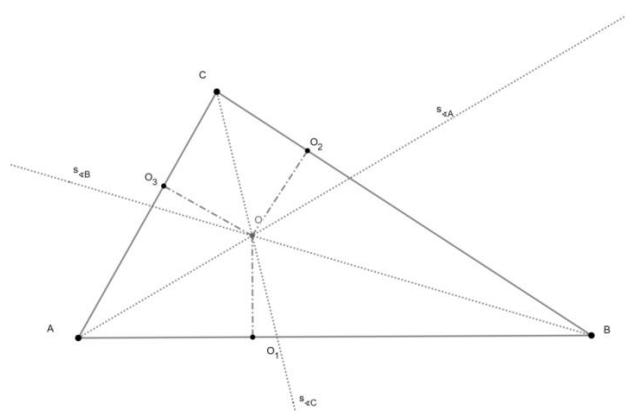
односно тачка O је подједнако удаљена од страница CA и BC тј. $O \in s_{\sphericalangle C}$.

Тада је $S_{s_{\sphericalangle A}} \circ S_{s_{\sphericalangle B}} \circ S_{s_{\sphericalangle C}}(O) = S_{s_{\sphericalangle A}} \circ S_{s_{\sphericalangle B}}(O) = S_{s_{\sphericalangle A}}(O) = O$. Дакле, тачка O је инваријантна за композицију $S_{s_{\sphericalangle A}} \circ S_{s_{\sphericalangle B}} \circ S_{s_{\sphericalangle C}}$. Ова композиција је индиректна јер се састоји од три осне рефлексije и има бар једну инваријантну тачку, па на основу теореме 2.1.6 ова композиција представља неку осну рефлексiju S_m и важи $O \in m$. Тада је $S_m = S_m^{-1}$ па је

$$S_{s_{\sphericalangle A}} \circ S_{s_{\sphericalangle B}} \circ S_{s_{\sphericalangle C}} = S_m = S_m^{-1} = \\ (S_{s_{\sphericalangle A}} \circ S_{s_{\sphericalangle B}} \circ S_{s_{\sphericalangle C}})^{-1} = S_{s_{\sphericalangle C}}^{-1} \circ S_{s_{\sphericalangle B}}^{-1} \circ S_{s_{\sphericalangle A}}^{-1} = \\ S_{s_{\sphericalangle C}} \circ S_{s_{\sphericalangle B}} \circ S_{s_{\sphericalangle A}}.$$

На основу задатка 22, ово значи да праве $s_{\sphericalangle A}, s_{\sphericalangle B}, s_{\sphericalangle C}$ припадају једном прамену.

Дакле, бисектрисе $s_{\sphericalangle A}$, $s_{\sphericalangle B}$, $s_{\sphericalangle C}$ припадају прамену конкурентних правих са средиштем O .



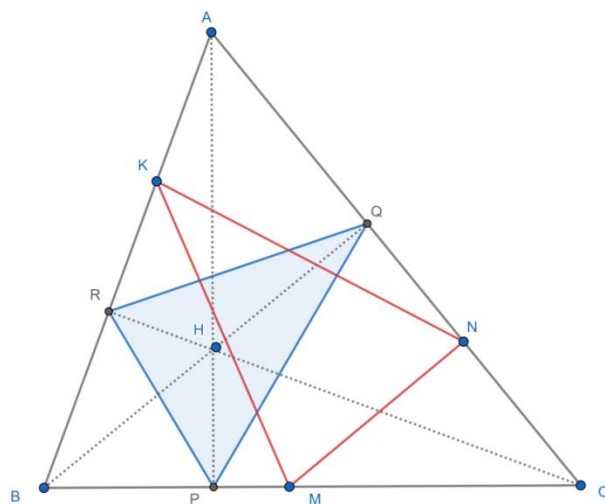
□

Задатак 26 (Фањанов проблем): Проблем који је поставио Ђовани Фањано 1775. године. За дати оштроугли троугао ABC одреди троугао минималног обима чија темена P , Q и R леже на страницама оштроуглог троугла ABC .

Решење:

Оригинално решење се базирало на рачуну, али касније се јавило неколико геометријских доказа. Најпознатије решење је дао Херман Шварц.

Нека је дат $\triangle ABC$ и нека је $\triangle PQR$ троугао чија су темена подножја висина тог троугла, а $\triangle MNK$ произвољан троугао чија темена леже на страницама троугла $\triangle ABC$.



Слика 1

Сада, треба направити прво неколико напомена.

$\angle HPC$ и $\angle HQC$ су једнаки и прави. Стога је њихов збир једнак опруженом углу, па је четвороугао $HPCQ$ тетиван четвороугао. Како се око тетивног четвороугла може

описати кружница, то су углови $\angle HPQ$ и $\angle QCH$ једнаки јер су они периферијски углови над истом тетивом у том кругу.

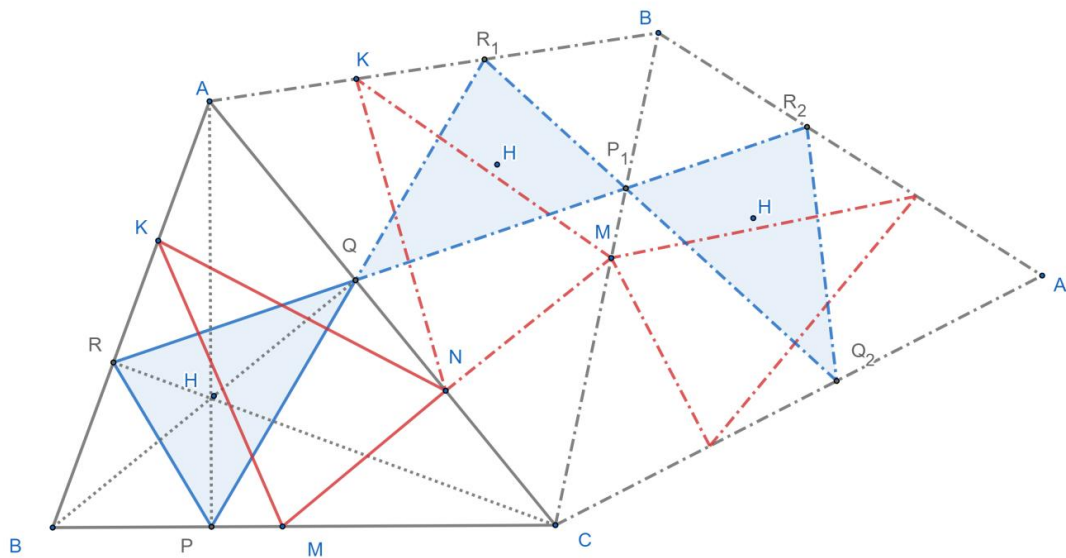
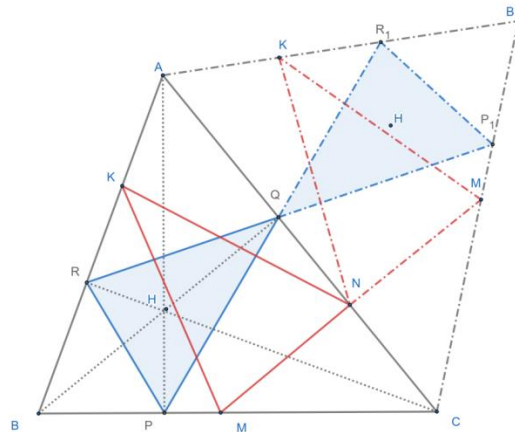
Будући да је угао $\angle RAC$ допуна угла $\angle RCA$ до правог угла, као и $\angle QPC$ угла $\angle APQ$ они су подударни тј. $\angle A \cong \angle QPC$.

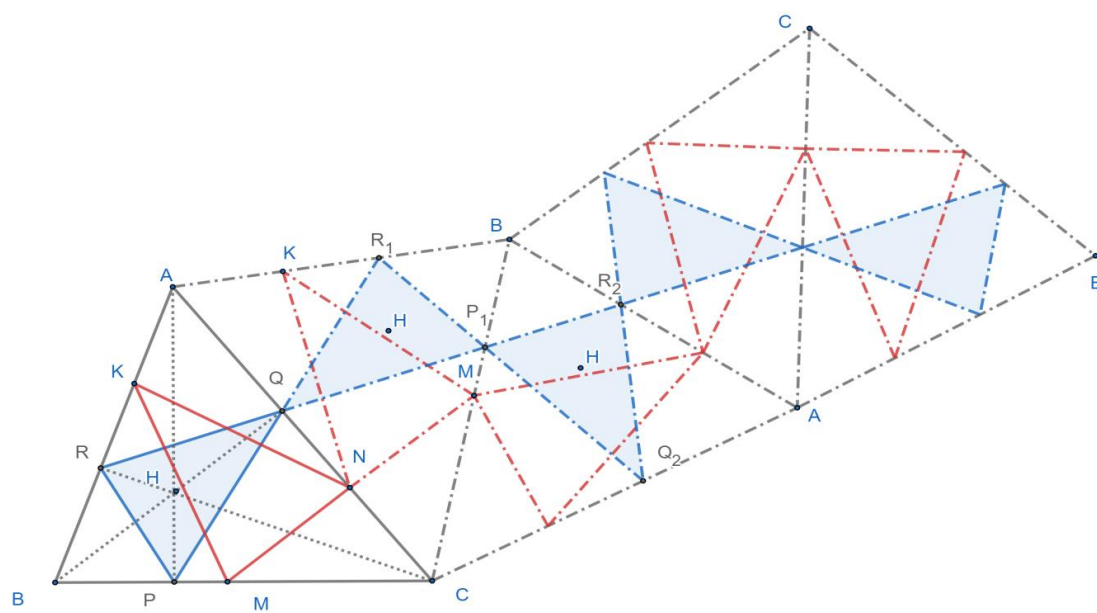
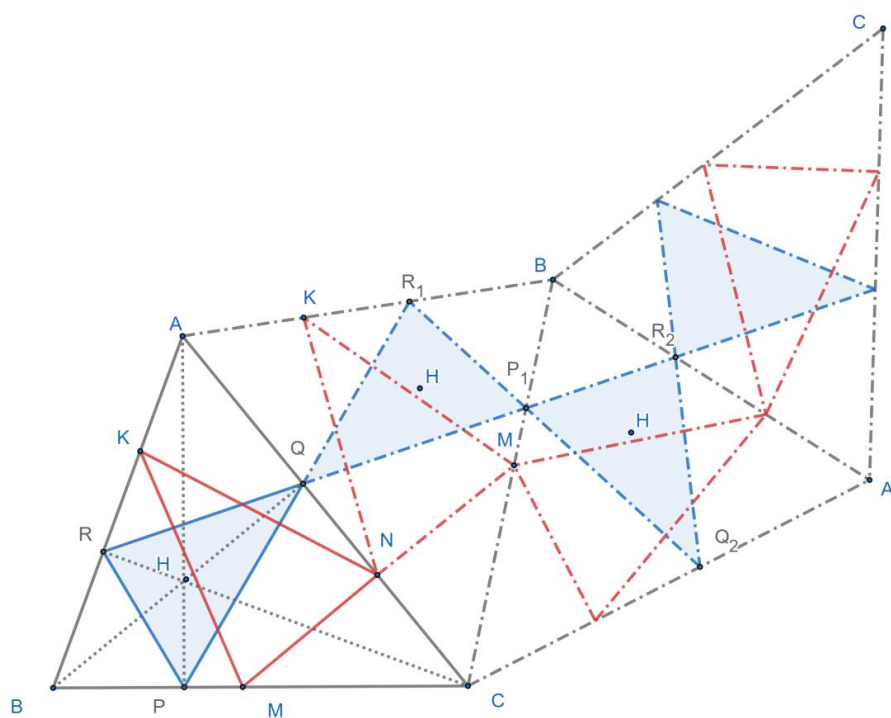
Слично се показује да је $\angle A \cong \angle RPB$, па је $\angle RPB \cong \angle QPC$.

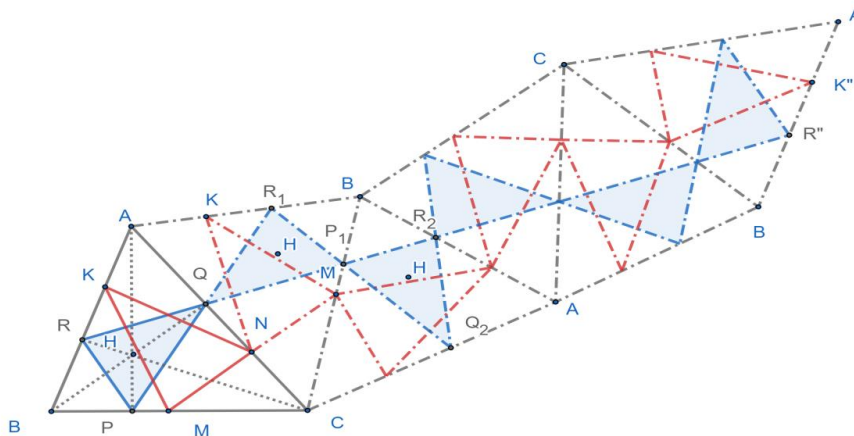
Аналогно се добија и да је: $\angle PQC \cong \angle RQA$ и $\angle PRB \cong \angle QRA$.

Пресликајмо сада троугао $\triangle ABC$ композицијом осних рефлексија на следећи начин:

$$S_{CB} \circ S_{CA} \circ S_{BA} \circ S_{BC} \circ S_{AC}(\triangle ABC).$$







Слика 2

Приметимо да је финална позиција странице AB паралелна оригиналној позицији. Штавише, и оријентација је задржана. То следи из чињенице да смо уствари страницу AB најпре заротирали за угао 2α у позитивном смеру, затим за угао 2β такође у позитивном смеру, а затим за угао 2α и 2β у негативном смеру.

Како су темена троугла $\triangle PQR$ подножја висина троугла $\triangle ABC$ важи да је угао $\angle PQC$ једнак углу $\angle RQA$, а самим тим и угловима $\angle CQP_1$ и $\angle AQR_1$.

Због тога су тачке R, Q и P_1 три колинеарне тачке и $QP_1 = QP$. Аналогно, и тачке Q, P_1 и R_2 су колинеарне и $P_1 R_2 = R_1 P_1 = PR$. Дакле, добија се да је:

$$RQ + QP_1 + P_1 R_2 = RQ + QP + PR = O_{\triangle PQR}.$$

Слично важи и за остале рефлексије па је мера дужи RR'' једнака двоструком обиму троугла $\triangle PQR$.

Будући да су странице AB у почетном и крајњем положају паралелне (слика2), дужи RK и $R''K''$ су паралелне и једнаке (осна рефлексија чува растојање међу тачкама). Стога је четвороугао $RKK''R''$ паралелорам, а дужи су RR'' и KK'' подударне. Међутим, како је дужина изломљене линије KK'' , која је једнака двоструком обиму троугла $\triangle MNK$, већа или једнака од дужине дужи KK'' , а самим тим и од дужине дужи RR'' која је једнака двоструком обиму троугла $\triangle PQR$, из свега тога закључујемо да је обим троугла $\triangle PQR$ мањи или једнак од обима троугла $\triangle MNK$.

$$2 \cdot O_{\triangle PQR} = |RR''| = |KK''| \leq 2 \cdot O_{\triangle MNK}$$

$$O_{\triangle PQR} \leq O_{\triangle MNK}$$

□

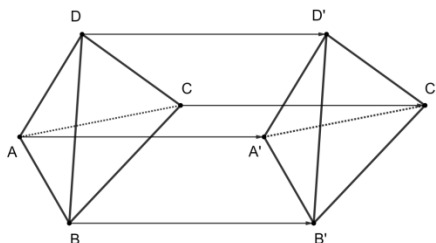
3. Раванске рефлексије простора E^3

3.1 Директне и индиректне изометријске трансформације простора E^3

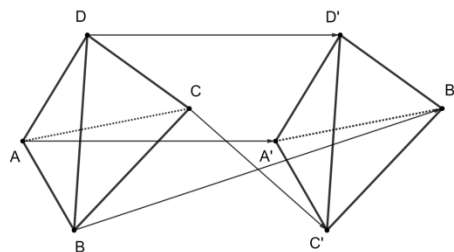
Да би се дефинисале ове две врсте изометријских трансформација простора E^3 неопходно је поменути тврђење према којем свака изометријска трансформација простора E^3 преводи истосмерне тетраедре у истосмерне тетраедре, а супротносмерне тетраедре у супротносмерне тетраедре. Доказ овог тврђења је врло сложен те се овде неће наводити.

Из тог тврђења следи да постоје две врсте изометријских трансформација простора E^3 : *директне изометријске трансформације* које не мењају оријентацију простора E^3 и *индиректне изометријске трансформације* које мењају оријентацију тог простора. Да би се установило да ли је нека изометријска трансформација простора E^3 директна или индиректна, довољно је установити да ли неке две одговарајуће четворке некомпланарних тачака одређују истосмерне или супротносмерне тетраедре.

Тако на пример, на слици 1.а истосмерни подударни тетраедри $ABCD$ и $A'B'C'D'$ одређују директну, а на слици 1.б супротносмерни подударни тетраедри $ABCD$ и $A'B'C'D'$ одређују индиректну изометријску трансформацију простора E^3 .



Слика 1.а



Слика 1.б

Позивајући се на теорему која каже: *Ако су A, B, C, D четири некомпланарне тачке простора E^3 и A', B', C' и D' тачке тог истог простора такве да*

$$(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D'),$$

тада постоји јединствена изометријска трансформација $\mathcal{J}: E^3 \rightarrow E^3$ таква да је:

$$\mathcal{J}(A) = A', \quad \mathcal{J}(B) = B', \quad \mathcal{J}(C) = C', \quad \mathcal{J}(D) = D',$$

непосредно се установљује да је директна (индиректна) изометријска трансформација простора E^3 једнозначно одређена ако су задате две подударне четворке некомпланарних тачака.

Штавише, као специјалан случај тог тврђења налазимо да директна изометријска трансформација простора E^3 са три неколинеарне инваријантне тачке представља коинциденцију. Поменимо још и тврђење према којем композиција састављена од две

директне или две индиректне изометријске трансформације простора E^3 увек представља директну изометријску трансформацију тог простора. Напротив, композиција састављена из једне директне и једне индиректне изометријске трансформације простора E^3 увек представља индиректну изометријску трансформацију тог простора. То својство омогућава да се установи да скуп свих директних изометријских трансформација простора E^3 представља некомутативну подгрупу групе $G(\mathcal{I})$ свих изометријских трансформација E^3 . Та подгрупа се назива група директних изометријских трансформација простора E^3 и симболички се обележава са $G(\mathcal{I}^+)$.

3.2 Раванска рефлексија простора E^3

Директне и индиректне изометријске трансформације простора E^3 представљају само један вид разврставања изометријских трансформација тог простора. Разврставању тих трансформација може се приступити и на други начин.

Када је разматрано тврђење према којем изометријска трансформација са четири некомпланарне инваријантне тачке представља коинциденцију, било је природно поставити питање које су то неидентичне изометријске трансформације тог простора које поседују три неколинеарне инваријантне тачке, односно две, једну или нула инваријантних тачака. Основу даљег разматрања представљаће управо неидентичне изометријске трансформације простора E^3 које поседују по три неколинеарне инваријантне тачке, па према томе и једну раван којој су све тачке инваријантне.

Дефиниција 3.2.1: *Раванска рефлексија или раванска симетрија простора E^3 са основом $\pi \subset E^3$ је неидентична изометријска трансформација $S_\pi: E^3 \rightarrow E^3$ којој је свака тачка равни π инваријантна.*

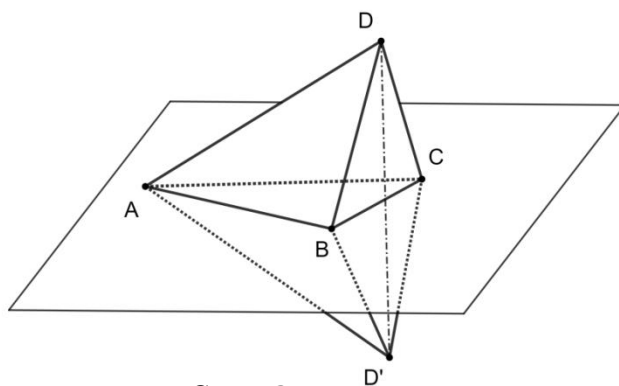
Из ове дефиниције се закључује да раванска рефлексија S_π простора E^3 ван равни π нема инваријантних тачака. Ако у раванској рефлексији S_π простора E^3 тачки $X \in E^3$ одговара нека друга тачка $X' \in E^3$, лако се доказује да је π медијална раван дужи XX' . Ако се обележи са A, B, C три неколинеарне тачке равни π , добијају се релације

$$AX \cong AX', \quad BX \cong BX', \quad CX \cong CX'$$

па је свака од тачака A, B, C у медијалној равни π' дужи XX' . Како су тачке A, B, C неколинеарне, оне одређују само једну раван па је $\pi = \pi'$. Из ових својстава следи да је раванска рефлексија једнозначно одређена својом основом π или пак једним паром одговарајућих неистоветних тачака.

У наставку ће бити наведене неке особине раванске рефлексије простора E^3 .

3.2.1 Теорема: Раванска рефлексација S_π простора E^3 је индиректна изометријска трансформација.



Слика 2

Доказ: Ако обележимо са A, B, C три неколинеарне тачке равни π , са D било коју тачку ван равни π и са D' тачку такву да је $S_\pi(D) = D'$, биће $D \neq D'$ и π медијална раван дужи DD' (Слика 2). Из тог разлога су тачке D и D' са различитих страна равни π па су одговарајући тетраедри $ABCD$ и $ABCD'$ супротносмерни и према томе је раванска рефлексација S_π индиректна трансформација.

□

3.2.2 Теорема: Раванска рефлексација S_π простора E^3 је инволуциона трансформација.

Доказ: Нека је X произвољна тачка простора E^3 , и X', X'' тачке такве да је

$$S_\pi(X) = X' \quad \text{и} \quad S_\pi(X') = X''$$

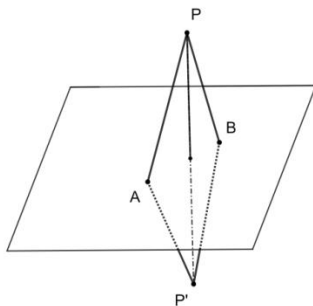
Ако је $X \in \pi$, тада је $X = X'$ и $X' = X''$ па је $X = X''$. Ако је $X \notin \pi$, тада је $X \neq X'$ и $X' \neq X''$, па је основа π равanske рефлексације S_π медијална раван сваке од дужи XX' и $X'X''$, па је $X = X''$. Овим је доказано да у сваком случају важи релација

$$S_\pi^2 = \varepsilon$$

па је раванска рефлексација S_π инволуциона трансформација.

□

3.2.3 Теорема: Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора E^3 поседује две разне инваријантне тачке A и B , она представља неку раванску рефлексацију S_π простора E^3 којој основа π садржи обе тачке A и B .



Слика 3

Доказ: С обзиром да је $\mathcal{J}$ индиректна и ε директна изометријска трансформација, биће $\mathcal{J} \neq \varepsilon$.

Зато у простору E^3 постоји тачка P таква да је $\mathcal{J}(P) = P'$ и $P \neq P'$. При томе је $(P, A) \cong (P', A)$ и $(P, B) \cong (P', B)$, па се свака од тачака A и B налази у медијалној равни π дужи PP' (Слика 3). Како су S_π и $\mathcal{J}$ индиректне изометријске трансформације, композиција $S_\pi \circ \mathcal{J}$ представља директну изометријску трансформацију простора E^3 . Та трансформација поседује три инваријантне неколинеарне тачке A, B и P , те према раније изведеној теорему, она представља коинциденцију.

Добија се да је $S_\pi \circ \mathcal{J} = \varepsilon$ тј. $\mathcal{J} = S_\pi$.

□

3.2.4 Теорема: Ако је S_π раванска рефлексација простора E^3 и p права која се налази у том простору, а не припада равни π , тада је

$$S_\pi(p) = p \Leftrightarrow p \perp \pi.$$

Доказ: Ако је $S_\pi(p) = p$, тада је $p \cap \pi \neq \emptyset$. Ако би важила релација $p \cap \pi = \emptyset$, тада би истоветне праве p и $S_\pi(p)$ биле са разних страна равни π , што је немогуће. Зато је $p \cap \pi \neq \emptyset$. Из те релације и релације $p \not\subset \pi$ следи да права p продире раван π у некој тачки O . Ако је P тачка праве p различита од O и P' њена одговарајућа тачка у раванској рефлексацији S_π , важи да ј $P \neq P'$ и $P' \in p$, па је π медијална раван дужи PP' и према томе $p \perp \pi$.

Обратно, ако је $p \perp \pi$ у некој тачки O , тада је $S_\pi(p) = p$. Ево и зашто. Ако је P тачка праве p различита од O и P' њена одговарајућа тачка у раванској рефлексацији S_π , онда је $P \neq P'$, па је π медијална раван дужи PP' те је $PP' \perp \pi$. Зато је $P' \in p$, дакле $S_\pi(p) = p$.

□

3.2.5 Теорема: Ако су S_α и S_β две раванске рефлексације простора E^3 са разним основама α и β , а X тачка тог истог простора, тада је

$$S_\beta \circ S_\alpha(X) = X \Leftrightarrow X \in \alpha \cap \beta.$$

Доказ: Прво, нека је $S_\beta \circ S_\alpha(X) = X$. Ако се са X' обележи тачка таква да је $S_\alpha(X) = X'$ биће $S_\beta(X') = X$. Индиректним поступком треба доказати да је $X = X'$.

Ако би, напротив, важила релација $X \neq X'$, тада би постојале две разне медијалне равни α и β дужи XX' што је немогуће.

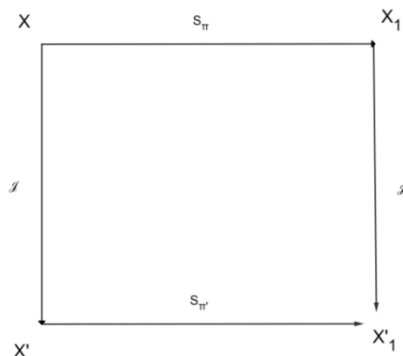
Зато је $X = X'$, па је $S_\alpha(X) = X$ и $S_\beta(X) = X$, па $X \in \alpha \cap \beta$.

Обратно, ако се претпостави да је задовољена релација $X \in \alpha \cap \beta$, тада је $X \in \alpha$ и $X \in \beta$, па је $S_\alpha(X) = X$ и $S_\beta(X) = X$.

□

3.2.6 Теорема: Ако је S_π раванска рефлексација еуклидског простора E^3 и $\mathcal{J}$ било која изометријска трансформација тог истог простора, затим π' раван која у изометрији $\mathcal{J}$ одговара равни π , тада важи релација:

$$\mathcal{J} \circ S_\pi \circ \mathcal{J}^{-1} = S_{\pi'}.$$



Слика 4

Доказ: Према дефиницији раванске рефлексije, за сваку тачку $X' \in \pi'$ која у изометрији $\mathcal{J}$ одговара некој тачки $X \in \pi$ добија се (Слика 4)

$$S_{\pi} \circ \mathcal{J}^{-1}(X') = X.$$

Ако обе стране ове једнакости помножимо с лева са изометријом $\mathcal{J}$, добија се

$$\mathcal{J} \circ S_{\pi} \circ \mathcal{J}^{-1}(X') = \mathcal{J} \circ \mathcal{J}^{-1}(X') = \varepsilon(X') = X'.$$

На тај начин, композиција

$$\mathcal{J} \circ S_{\pi} \circ \mathcal{J}^{-1}$$

преводи сваку тачку равни π' у ту исту тачку. С обзиром да та композиција представља индиректну, дакле неидентичну, изометријску трансформацију простора E^3 којој је свака тачка равни π' инваријантна, она представља раванску рефлексiju $S_{\pi'}$.

Дакле, биће

$$\mathcal{J} \circ S_{\pi} \circ \mathcal{J}^{-1} = S_{\pi'} . . \quad \square$$

3.2.7 Теорема: Две раванске рефлексije S_{α} и S_{β} еуклидског простора E^3 , са разним основама α и β , су комутативне ако и само ако је, $\alpha \perp \beta$ тј. биће

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow S_{\beta} \circ S_{\alpha} = S_{\alpha} \circ S_{\beta} \Leftrightarrow \alpha \perp \beta.$$

Доказ: Нека је

$$S_{\beta} \circ S_{\alpha} = S_{\alpha} \circ S_{\beta},$$

$$\text{тј. } S_{\beta} \circ S_{\alpha} \circ S_{\beta} = S_{\alpha} \quad (*).$$

Ако се обележи са α' раван одређена релацијом $S_{\beta}(\alpha) = \alpha'$, према закону трансмутације раванске рефлексije S_{α} раванском рефлексijом S_{β} , налазимо да је

$$S_{\beta} \circ S_{\alpha} \circ S_{\beta} = S_{\alpha'} \quad (**).$$

Из једнакости (*) и (**) следи да је $S_{\alpha} = S_{\alpha'}$ па је $\alpha = \alpha'$, тј. $\alpha = S_{\beta}(\alpha)$. Из овога и из релације $\alpha \neq \beta$ закључује се да је $\alpha \perp \beta$ јер за рефлексiju S_{β} једине инваријантне равни су сама раван β и равни које су нормалне на њу. Како је $\alpha \neq \beta$, онда мора бити $\alpha \perp \beta$. Обратно, нека је сада $\alpha \perp \beta$. Из ове релације добија да је $S_{\beta}(\alpha) = \alpha$, па према закону трансмутације раванске рефлексije S_{α} раванском рефлексijом S_{β} , добија се

$$S_{\beta} \circ S_{\alpha} \circ S_{\beta} = S_{\alpha}$$

$$\text{тј. } S_{\beta} \circ S_{\alpha} = S_{\alpha} \circ S_{\beta} . \quad \square$$

3.3 Представљање изометријских трансформација простора E^3 помоћу раванских рефлексција

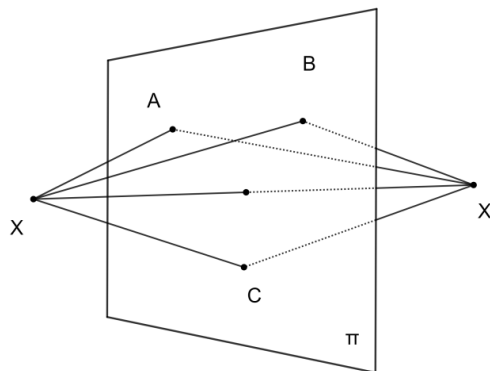
Једно веома значајно својство изометријских трансформација еуклидског простора E^3 јесте да се свака изометријска трансформација тог простора може представити у облику композиција коначног броја раванских рефлексција. И још уз то, може се доказати да минималан број раванских рефлексција помоћу којих се може представити било која унапред задата изометријска трансформација простора E^3 није већи од 4.

3.3.1 Теорема: Свака изометријска трансформација $\mathcal{J}$ простора E^3 може се представити као композиција коначног броја раванских рефлексција. Минималан број раванских рефлексција заступљених у таквој композицији није већи од 4.

Доказ: Према максималном броју инваријантних тачака изометријске трансформације $\mathcal{J}$, разликујемо наредних пет случајева.

1° Изометријска трансформација $\mathcal{J}$ може да поседује четири некомпланарне инваријантне тачке, обележене нпр. са A, B, C, D . На основу познате теореме, таква изометријска трансформација представља коинциденцију, па с обзиром на инволутивност било које раванске рефлексције S_π простора E^3 закључак је да је

$\mathcal{J}$ Слика 5

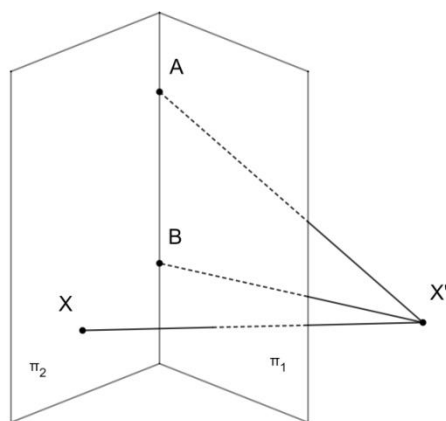


Слика 5

2° Нека сада изометријска трансформација $\mathcal{J}$ поседује највише три инваријантне неколинеарне тачке, обележене са нпр. A, B, C . Те тачке су неколинеарне, па одређују неку раван π (Слика 5). С обзиром да ван равни π изометријска трансформација $\mathcal{J}$ нема инваријантних тачака, добија се да је $\mathcal{J} \neq \varepsilon$. Из тог разлога, постоји тачка $X \in E^3$ таква да је $\mathcal{J}(X) = X'$ и $X \neq X'$. При томе важе релације

$$(A, X) \cong (A, X'), \quad (B, X) \cong (B, X'), \quad (C, X) \cong (C, X'),$$

па је π медијална раван дужи XX' . Композиција $S_\pi \circ \mathcal{J}$ представља изометријску трансформацију која има четири некомпланарне инваријантне тачке A, B, C, X па је као у претходном случају $S_\pi \circ \mathcal{J} = \varepsilon$, и према томе $\mathcal{J} = S_\pi$.



Слика 6

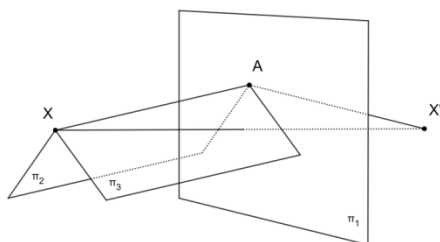
3° Нека изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседује највише две инваријантне тачке, обележене са нпр. A и B . Те тачке су различите па одређују неку праву p . С обзиром да ван праве p изометријска трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, то значи да је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Тада постоји тачка $X \in E^3$ таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. При томе је

$$(A, X) \cong (A, X'), \quad (B, X) \cong (B, X'),$$

па је свака од тачака A и B садржана у медијалној равни π_1 дужи XX' (Слика 6). Композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ има инваријантне тачке A, B и X па самим тим и све тачке равни ABX . Дакле, композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ је или коинциденција ε или раванска рафлексација S_{π_2} . Не може бити коинциденција јер би Слика 7 нају важила релација $S_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \varepsilon$ тј. релација $\mathcal{I} = S_{\pi_1}$, па би изометрија $\mathcal{I}$ поседовала три инваријантне неколинеарне тачке, што је супротно претпоставци. Стога, добија се да је

$$S_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = S_{\pi_2} \quad \text{па је}$$

$$\mathcal{I} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}.$$



Слика 7

4° Нека сада изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседује јединствену инваријантну тачку обележену са A . С обзиром да је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$, постоји тачка $X \in E^3$ таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. При томе је

$$(A, X) \cong (A, X'),$$

па је тачка A у медијалној равни π_1 дужи XX' . Тада композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ поседује две инваријантне тачке A и X .

Ван праве AX композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ нема инваријантних тачака. Ако би та композиција поседовала четири некомпланарне инваријантне тачке, важила би релација

$$S_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \varepsilon$$

тј. релација $\mathcal{J} = S_{\pi_1}$

па би изометрија $\mathcal{J}$ поседовала више инваријантних тачака, што је супротно претпоставци. Ако би поменута композиција поседовала највише три инваријантне неколинеарне тачке, онда би према случају 2° представљала неку раванску рефлексiju S_{π_2} те би из релације $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = S_{\pi_2}$ следила релација

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}.$$

Како је $\mathcal{J}(A) = A$, тј. $S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}(A) = A$, према раније доказаној теореме имамо да је $A \in \pi_1 \cap \pi_2$. Како равни π_1 и π_2 поседују заједничку тачку A , оне поседују најмање још једну заједничку тачку B . У том случају се добија да је

$$S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}(B) = B, \text{ тј. } \mathcal{J}(B) = B$$

па би изометрија $\mathcal{J}$ сем тачке A поседовала још инваријантних тачака, што је супротно претпоставци да $\mathcal{J}$ поседује јединствену инваријантну тачку. Овим је показано да ван праве AX композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ нема инваријантних тачака.

Дакле, према случају 3° изометријска трансформација $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ представља композицију две раванске рефлексije S_{π_2} и S_{π_3} којима се основе π_2 и π_3 секу по правој AX (Слика 7).

Из релације $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3}$ добија се да је

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3}.$$

5° Нека сада изометријска трансформација $\mathcal{J}$ уопште нема инваријантних тачака. У том случају изометрија $\mathcal{J}$ се може представити као композиција састављена из две, три или четири раванске рефлексije. Сада треба ово доказати. Нека је $X \in E^3$ произвољна тачка, а X' њена одговарајућа тачка и π_1 медијална раван дужи XX' .

Композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ представља изометријску трансформацију простора E^3 , која поседује инваријантну тачку X .

Та композиција не може имати четири некомпланарне инваријантне тачке, јер би тада важила релација $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = \varepsilon$ тј. релација

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1},$$

па би изометрија $\mathcal{J}$ имала инваријантних тачака, што је супротно претпоставци.

Ако би композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ поседовала највише три неколинеарне инваријантне тачке, она би према случају 2° представљала неку раванску рефлексiju S_{π_2} .

Из релације $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = S_{\pi_2}$ следила би једнакост

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}.$$

При томе би важила релација $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, јер би у противном свака заједничка тачка равни π_1 и π_2 била инваријантна тачка изометрије $\mathcal{J}$, што је супротно претпоставци. Ако би композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ поседовала највише две инваријантне тачке, она би према случају 3° представљала композицију две раванске рефлексije, нпр. S_{π_2} и S_{π_3} . Основе π_2 и π_3 те две рефлексije секу се по правој x која је одређена поменутим инваријантним тачкама. Из једнакости $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3}$ добија се да је

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3}.$$

При томе, права x не продире раван π_1 , јер би тада продорна тачка представљала заједничку тачку равни π_1 , π_2 и π_3 и према томе инваријантну тачку изометрије $\mathcal{J}$, што

је супротно претпоставци.

Ако би композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ поседовала једино инваријантну тачку X , она би се према случају 4° могла представити као композиција трију раванских рефлексива, обележених нпр. са $S_{\pi_2}, S_{\pi_3}, S_{\pi_4}$. Из једнакости $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3} \circ S_{\pi_4}$ добија се да је

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3} \circ S_{\pi_4}.$$

□

Дефиниција 3.3.1: Свака композиција коначног броја раванских рефлексива еуклидског простора E^3 којом је представљена нека изометријска трансформација $\mathcal{J}$ тог простора назива се *раванскорефлексивна* или *симетријска репрезентација* те изометрије. Симетријска репрезентација изометрије $\mathcal{J}$ простора E^3 састављену из најмањег могућег броја раванских рефлексива назива се *минимална* или *оптимална симетријска репрезентација*. Број раванских рефлексива из којих се састоји минимална симетријска репрезентација изометрије $\mathcal{J}$ назива се *ред изометрије*.

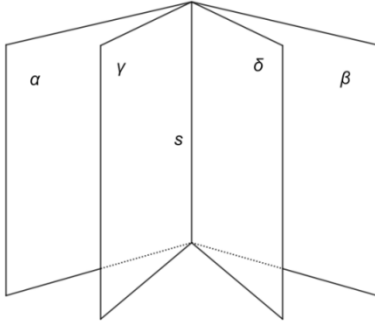
3.4 Праменови равни у простору E^3

С обзиром на узајамни положај равни, у геометрији простора E^3 разликују се равни које се секу по једној правој и равни које су међусобно паралелне. Тим узајамним положајима одговарају два прамена равни: прамен коаксијалних равни и прамен паралелних равни.

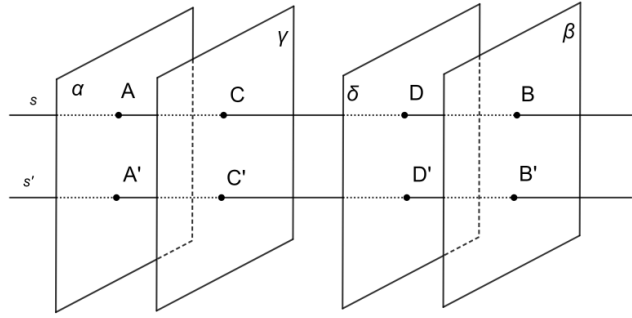
Дефиниција 3.4.1: Скуп $\mathcal{X}$ свих равни простора E^3 које се секу по једној правој s називамо *праменом коаксијалних равни* са осом s и симболички обележавамо са $\mathcal{X}_s$. Скуп $\mathcal{X}$ свих равни простора E^3 које су паралелне са неком равни σ , и према томе међу собом, називамо *праменом паралелних равни* и симболички обележавамо са $\mathcal{X}_\sigma$.

Из дефиниције непосредно следи да је прамен $\mathcal{X}_s$ једнозначно одређен осом s , а прамен $\mathcal{X}_\sigma$ једнозначно одређен било којом својом равни σ . Иако су праменови равни дефинисани независно од појма изометријске трансформације, они се могу довести у тесну везу са тим трансформацијама, посебно са раванским рефлексивама.

3.4.1 Теорема: Ако три равни α, β, γ простора E^3 припадају неком прамену $\mathcal{X}$, тада композиција $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ представља неку раванску рефлексиву S_δ којој основа δ такође припада прамену $\mathcal{X}$.



Слика 8.а



Слика 8.б

Доказ: Нека је најпре $\mathcal{X}$ прамен коаксијалних равни; нека је s његова оса (Слика 8.а). С обзиром да права s припада свакој од равни α, β, γ , свака тачка шправе s инваријантна је у композицији $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$. На тај начин, индиректна изометријска трансформација

$$S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$$

поседује две разне инваријантне тачке, па према познатој теореми представља неку раванску рефлексију S_δ . При томе $s \subset \delta$, и према томе $\delta \in \mathcal{X}$.

У другом случају, нека је сад $\mathcal{X}$ прамен паралелних равни (Слика 8.б). Нека су s и s' две различите праве нормалне на равни α, β, γ . С обзиром да свака од раванских рефлексија $S_\gamma, S_\beta, S_\alpha$ преводи сваку од правих s и s' у ту исту праву, мењајући њену оријентацију, и композиција $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ такође преводи сваку од правих s и s' у ту исту праву мењајући њену оријентацију. Зато композиција

$$S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$$

поседује на свакој од правих s и s' по једну инваријантну тачку. Будући да та композиција представља индиректну изометријску трансформацију простора E^3 са две разне инваријантне тачке, према познатој теореми, она представља неку раванску рефлексију S_δ . При томе је $\delta \perp s$, и према томе $\delta \in \mathcal{X}$.

□

3.4.2 Теорема: Ако композиција $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ састављена из три раванске рефлексије простора E^3 представља неку раванску рефлексију S_δ , тада основе $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ тих раванских рефлексија припадају једном прамену.

Доказ: Нека се најпре равни α и β секу по једној правој s (Слика 8.а). Према познатој теореми, у композицији $S_\beta \circ S_\alpha$ свака тачка праве s је иваријантна. Како је

$$S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = S_\delta$$

тј. $S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ S_\delta$, и у композицији $S_\gamma \circ S_\delta$ биће свака тачка праве s инваријантна. Зато се равни γ и δ секу по правој s , па све равни $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ припадају једном прамену. У другом случају, нека је $\alpha \parallel \beta$ (Слика 8.б). Ако се обележи са s нека права нормална на равни α и β , добија се $S_\beta \circ S_\alpha(s) = s$. Како је

$$S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = S_\delta$$

тј. $S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ S_\delta$, биће и $S_\gamma \circ S_\delta(s) = s$. Дакле, права s је инваријантна, али не и њене тачке. На основу теореме 3.2.4 ако је $S_\gamma \circ S_\delta(s) = s$ онда је $\gamma, \delta \perp s$, па све равни $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ припадају једном прамену.

□

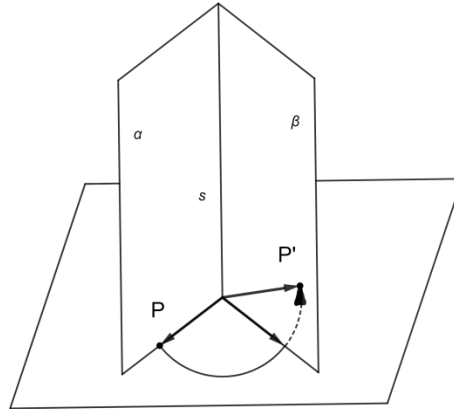
3.5 Осна ротација простора E^3

Већ је поменуто да се израчунавању сложених врста изометријских трансформација еуклидског простора E^3 може приступити разматрањем специфичних видова њихових минималних симетријских репрезентација. Осна ротација је једна од тих изометријских трансформација.

Дефиниција 5.1: Нека су S_α и S_β две раванске рефлексije еуклидског простора E^3 којима се основе α и β секу по некој правој s . *Осним обртањем* или *осном ротацијом* простора E^3 око праве s за угао ω назива се трансформација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ одређена релацијом

$$\mathcal{R}_{s,\omega} = S_\beta \circ S_\alpha \quad (s = \alpha \cap \beta, \quad \omega = 2\angle(\alpha, \beta)).$$

Правa s се назива *оса ротације*, а оријентисани угао ω назива се *угао ротације* $\mathcal{R}_{s,\omega}$.



Слика 9

Из саме дефиниције и раније доказаних теорема може се установити низ особина осних ротација. С обзиром да је раванска рефлексija простора E^3 индиректна изометријска трансформација, композиција две раванске рефлексije, према томе и осна ротација простора E^3 , представља директну изометријску трансформацију.

3.5.1 Теорема (Даламбер, 1743.): Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора E^3 , која поседује најмање једну инваријантну тачку O , представља коинциденцију или неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ којој оса s садржи тачку O .

Доказ: Ако је $\mathcal{I} = \varepsilon$, тврђење следује непосредно. У случају када је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$, постоји тачка

$P \in E^3$ таква да је $\mathcal{J}(P) = P'$ и $P \neq P'$. Нека је π_1 медијална раван дужи PP' .

С обзиром да у изометријској трансформацији $\mathcal{J}$ тачкама O и P одговарају редом тачке O и P' , важи релација $OP \cong OP'$, па је тачка O у медијалној равни π_1 дужи PP' . Зато композиција

$$S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$$

поседује две разне инваријантне тачке O и P . Будући да је $\mathcal{J}$ директна, а раванска рефлексја S_{π_1} индиректна изометријска трансформација, композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ је индиректна изометријска трансформација. На тај начин, индиректна изометријска трансформација $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ поседује две разне инваријантне тачке O и P , па према раније доказаној теореме представља неку раванску рефлексју S_{π_2} којој основа π_2 садржи тачке O и P . Из тог разлога је $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = S_{\pi_2}$, па према томе

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}.$$

Из релације $P \notin \pi_1$ и $P \in \pi_2$ следи да је $\pi_1 \neq \pi_2$. С обзиром да две различите равни π_1 и π_2 имају заједничку тачку O , оне се секу по некој правој s која садржи тачку O . Зато композиција $S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}$, тј. изометријска трансформација $\mathcal{J}$ представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ простора E^3 .

□

3.5.2 Теорема: Скуп $\mathcal{R}_s$ који се састоји из идентичне трансформације и свих осних ротација простора E^3 , које имају заједничку осу s , представља групу.

Доказ: Нека су $\mathcal{R}_{s,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{s,\beta}$ било које две осне ротације из скупа $\mathcal{R}_s$, а нека је π произвољна раван која садржи праву s и μ, ν равни одређене релацијама

$$\mathcal{R}_{s,\alpha} = S_\pi \circ S_\mu \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_{s,\beta} = S_\nu \circ S_\pi$$

Користећи ове релације добија се да је

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = S_\nu \circ S_\pi \circ S_\pi \circ S_\mu = S_\nu \circ S_\mu.$$

Из чињенице да равни μ и ν секу раван π по правој s , равни μ и ν имају заједничку праву s , према томе оне су истоветне или се секу по правој s . Ако је $\mu = \nu$, тада је $S_\nu \circ S_\mu = \varepsilon$; ако је $\mu \cap \nu = s$, композиција $S_\nu \circ S_\mu$ представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\gamma}$. Овим је доказано да у сваком случају важи релација

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} \in \mathcal{R}_s.$$

Ако се са $\mathcal{R}_{s,\omega}$ обележи било која осна ротација из скупа $\mathcal{R}_s$ и са μ и ν равни простора E^3 такве да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = S_\nu \circ S_\mu$, биће

$$\mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = (S_\nu \circ S_\mu)^{-1} = S_\mu \circ S_\nu \in \mathcal{R}_s.$$

С обзиром да трансформације из скупа $\mathcal{R}_s$ представљају елементе групе $G(\mathcal{J})$ свих изометријских трансформација простора E^3 , из доказаних својстава следи да скуп $\mathcal{R}_s$ представља такође групу.

□

Дефиниција 5.2: Групу која се састоји из идентичне трансформације и свих осних ротација простора E^3 , које имају заједничку осу s , називамо *групом осних ротација*

простора E^3 око праве s , и симболички обележавамо са $G(\mathcal{R}_s)$.

3.5.3 Теорема: Група $G(\mathcal{R}_s)$ осних ротација простора E^3 око праве s је комутативна. Другим речима, за сваке две осне ротације $\mathcal{R}_{s,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{s,\beta}$ из групе $G(\mathcal{R}_s)$ важи релација

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta}.$$

Доказ: Нека је π произвољна раван која садржи праву s , μ и ν равни такве да је

$$\mathcal{R}_{s,\alpha} = S_\pi \circ S_\mu \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_{s,\beta} = S_\nu \circ S_\pi.$$

Користећи ове једнакости, добија се да је

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} &= S_\nu \circ S_\pi \circ S_\pi \circ S_\mu = S_\nu \circ S_\mu, \\ \mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta} &= S_\pi \circ S_\mu \circ S_\nu \circ S_\pi. \end{aligned}$$

С обзиром да равни μ и ν секу раван π по истој правој s , равни π, μ припадају коаксијалном прамену равни $\mathcal{X}_s$, па композиција $S_\pi \circ S_\mu \circ S_\nu$ представља неку раванску рефлексију, дакле инволуциону трансформацију простора E^3 . То значи да квадрат те композиције представља коинциденцију, па ће бити

$$S_\pi \circ S_\mu \circ S_\nu \circ S_\pi \circ S_\mu \circ S_\nu = \varepsilon$$

$$\text{тј. } S_\pi \circ S_\mu \circ S_\nu \circ S_\pi = S_\nu \circ S_\mu.$$

Из ове и претходних релација добија се да је

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta}.$$

□

3.5.4 Теорема: Ако је $\mathcal{R}_{s,\omega}$ осна ротација и $\mathcal{I}$ било која изометријска трансформација еуклидског простора E^3 , затим s' права која у изометрији $\mathcal{I}$ одговара правој s и ω' оријентисани угао који у изометрији $\mathcal{I}$ одговара углу ω , тада је

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$$

Доказ: Ако се са μ и ν обележе равни еуклидског простора E^3 такве да је

$$\mathcal{R}_{s,\omega} = S_\nu \circ S_\mu,$$

тада се равни μ и ν секу по правој s под углом $\angle(\mu, \nu) = \frac{1}{2}\omega$. Ако се затим обележи са μ' и ν' равни које у изометрији $\mathcal{I}$ одговарају респективно равнима μ и ν , тада се равни μ и ν секу по правој s' под углом $\angle(\mu', \nu') = \frac{1}{2}\omega'$, па се добија да је

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I} \circ (S_\nu \circ S_\mu) \circ \mathcal{I}^{-1} \\ &= \mathcal{I} \circ (S_\nu \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ S_\mu) \circ \mathcal{I}^{-1} \\ &= (\mathcal{I} \circ S_\nu \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ (\mathcal{I} \circ S_\mu \circ \mathcal{I}^{-1}) \\ &= S_{\nu'} \circ S_{\mu'} = \mathcal{R}_{s',\omega'}. \end{aligned}$$

Нека су A и B тачке праве s , а A' и B' њихове слике. Како $\mathcal{I}$ слика углове у њима подударне углове, ω и ω' су подударни. При том, ако је ω оријентисани угао који са вектором $\overrightarrow{AB}$ одређује једну оријентацију (нпр. позитивну) онда је ω' оријентисани угао који са вектором $\overrightarrow{A'B'}$ одређује такође позитивну оријентацију. Тада, ако је $\mathcal{I}$

директна трансформација, односно чува оријентацију, онда су оријентисани углови ω и ω' исте оријентације.

□

3.5.5 Теорема: Осна ротација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ и раванска рефлексација S_π еклидског простора E^3 су две комутативне трансформације ако и само ако је права s нормална на раван π , односно важи

$$S_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ S_\pi \Leftrightarrow s \perp \pi \vee (s \subset \pi \wedge \omega = 180^\circ) .$$

Доказ: Нека је најпре

$$S_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ S_\pi \quad \text{тј.} \quad S_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ S_\pi = \mathcal{R}_{s,\omega} .$$

Ако се са s' обележи права која у раванској рефлексацији одговара правој s и са ω' угао који у тој истој рефлексацији одговара углу ω , применом претходне теореме добија се

$$S_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ S_\pi = \mathcal{R}_{s',\omega'} .$$

Из ове и претходне једнакости добија се да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$. Зато су осе s и s' истоветне.

Обратно, нека је $s \perp \pi$. Ако се са s' обележи права која у раванској рефлексацији S_π одговара правој s и са ω' угао који у тој истој рефлексацији одговара углу ω , биће праве s и s' истоветне, а оријентисани углови ω и ω' подударни и истосмерни, па је

$$\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s',\omega'} .$$

Након примене претходне теореме добија се да је

$$S_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = S_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ S_\pi \circ S_\pi = \mathcal{R}_{s',\omega'} \circ S_\pi = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ S_\pi .$$

□

3.5.6 Теорема: Две осне ротације $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{b,\beta}$ еуклидског простора E^3 , којима углови α и β нису опружени, представљају комутативне трансформације ако и само ако се осе тих ротација поклапају. Другим речима, биће

$$\mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta} = \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \Leftrightarrow a = b .$$

Ако су углови α и β опружени, тада $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{b,\beta}$ комутирају ако се осе секу под правим углом.

Доказ: Нека је најпре

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta} \quad \text{тј.} \quad \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a,\alpha} .$$

Ако у осној ротацији $\mathcal{R}_{b,\beta}$ правој a одговара нека права a' , а углу α одговара неки угао α' , према теорему имамо да је

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a',\alpha'} .$$

па је потребно да важи $a = a'$. При том, нека су A и B тачке праве a , а A' и B' њихове слике. Ако a и b немају заједничких тачака (паралелне су или мимоилазне), нека је MN њихова заједничка нормала. Тада $\mathcal{R}_{b,\beta}$ слика M у саму себе, праву a у себе, па и дуж MN у себе, тј. N се слика у саму себе. Како N не припада b , то је могуће само ако је ротација за 360° , тј. ако је $\mathcal{R}_{b,\beta}$ коинциденција, што се искључује као могућност.

□

3.6 Осна рефлексија простора E^3

Осне ротације простора E^3 у општем случају нису инволуционе трансформације. Оне су инволуционе само у специјалном случају када су им углови ротације опружени. Такве осне ротације називамо осним рефлексијама. Због своје инволутивности оне располажу низом специфичних својстава које ће овде бити проучене.

Дефиниција 6.1: Осном рефлексијом S_s простора E^3 назива се композиција две равanske рефлексије S_α и S_β простора E^3 којима основе α и β задовољавају релацију:

$$\alpha \perp \beta \quad \text{и} \quad \alpha \cap \beta = s.$$

На тај начин се добија да је:

$$S_s = S_\beta \circ S_\alpha = S_\alpha \circ S_\beta \quad (\alpha \cap \beta = s).$$

Из дефиниције непосредно следи да осна рефлексија S_s простора E^3 представља осну ротацију којој је угао ротације једнак 180° . Као таква, она представља директну изометријску трансформацију простора E^3 којој су инваријантне једино тачке осе s . Није тешко доказати да је у осној рефлексији S_s простора E^3 инваријантна свака раван која садржи осу s , као и свака раван која је нормална на осу s . У равни која садржи осу s осна рефлексија S_s индукује осну рефлексију, а у равни која је нормална на осу s осна рефлексија S_s индукује централну рефлексију.

3.6.1 Теорема: Осна рефлексија S_s простора E^3 је инволуциона трансформација.

Доказ: Ако се са α и β обележе две равни простора E^3 које задовољавају релације

$$\alpha \perp \beta \quad \text{и} \quad \alpha \cap \beta = s$$

биће $S_s = S_\beta \circ S_\alpha$.

Користећи релацију $\alpha \perp \beta$, добија се да је

$$S_s^2 = (S_\beta \circ S_\alpha) \circ (S_\beta \circ S_\alpha) = (S_\beta \circ S_\alpha) \circ (S_\alpha \circ S_\beta) = \varepsilon.$$

□

3.6.2 Теорема: Раванска рефлексија S_π и осна рефлексија S_p простора E^3 , којима оса p не припада основи π , представљају две комутативне трансформације ако и само ако је права p нормална на раван π . Другим речима, биће

$$p \not\subset \pi \Rightarrow S_\pi \circ S_p = S_p \circ S_\pi \Leftrightarrow p \perp \pi.$$

Доказ: Нека је најпре

$$(*) \quad S_\pi \circ S_p = S_p \circ S_\pi \quad \text{тј.} \quad S_\pi \circ S_p \circ S_\pi = S_p.$$

Ако се са p' обележи права одређена релацијом $S_\pi(p) = p'$, према закону трансмутације осне рефлексије S_p раванском рефлексијом S_π добија се да је

$$(**) \quad S_\pi \circ S_p \circ S_\pi = S_{p'}.$$

Из једнакости (*) и (**) добија се да је $S_p = S_{p'}$, и према томе је и $p = p'$.

С обзиром да права p не припада равни π једнакост $p = p'$ важи само у случају када је $p \perp \pi$.

Обратно, нека је $p \perp \pi$. Из те релације се добија да је $S_\pi(p) = p$, па према закону за трансмутацију осне рефлексije S_p раванском рефлексijом S_π добија се

$$S_\pi \circ S_p \circ S_\pi = S_p \quad \text{тј.} \quad S_\pi \circ S_p = S_p \circ S_\pi.$$

□

3.7 Осноротациона рефлексija простора E^3

До сада је обрађена само једна врста индиректних изометријских трансформација простора E^3 , а то је раванска рефлексija.

То је неидентичка изометријска трансформација која располаже са равнима којима су све тачке инваријантне. На тај начин, свака раванска рефлексija поседује бесконачно много инваријантних тачака. Сада ће бити обрађене индиректне изометријске трансформације које поседују само по једну инваријантну тачку.

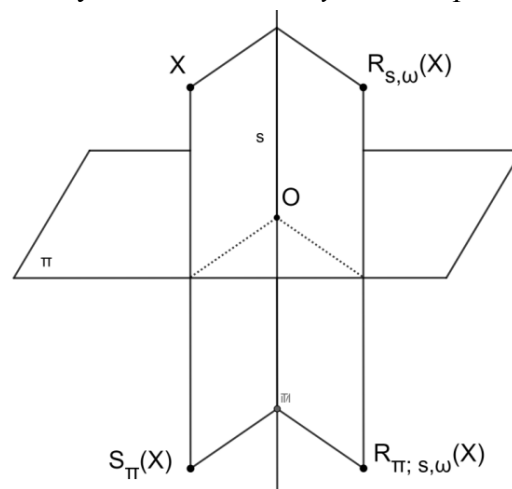
Проучавању ових трансформација претходи увођење нове врсте индиректних изометријских трансформација тзв. осноротационих рефлексija простора простора E^3 .

Дефинија 7.1: Композиција састављена из једне осне ротације $\mathcal{R}_{s,\omega}$ и једне раванске рефлексije S_π простора E^3 , при чему је $s \perp \pi$, назива се *осноротациона* или *ротациона рефлексija* простора E^3 која се симболички обележава са $\mathcal{R}_{\pi; s, \omega}$.

На тај начин се добија

$$\mathcal{R}_{\pi; s, \omega} = S_\pi \circ \mathcal{R}_{s, \omega} = \mathcal{R}_{s, \omega} \circ S_\pi.$$

Раван π се назива *основа*, права s се назива *оса*, тачка $\{O\} = \pi \cap s$ се назива *средиште* или *центар*, а оријентисани угао ω се назива *угао осноротационе рефлексije* $\mathcal{R}_{\pi; s, \omega}$.



Слика 10

Из дефиниције непосредно следи да је осноротациона рефлексija $\mathcal{R}_{\pi; s, \omega}$ простора E^3 једнозначно одређена основом π , осом s и оријентисаним углом ω . Како је осноротација директна, а раванска рефлексija индиректна изометријска трансформација, њихова композиција, према томе и осноротациона рефлексija, представља индиректну изометријску трансформацију простора E^3 .

Лако се доказује да осноротациона рефлексija $\mathcal{R}_{\pi; s, \omega}$ простора E^3 поседује само једну инваријантну тачку, то је тачка $\{O\} = \pi \cap s$. Ако угао ω није опружен, она поседује јединствену инваријантну праву – осу s . Такође, поседује и јединствену инваријантну раван – то је основа π .

3.7.1 Теорема: Свака индиректна изометријска трансформација $\mathcal{J}$ простора E^3 која има јединствену инваријантну тачку O представља осноротациону рефлексiju са средиштем O .

Доказ: Нека је X тачка простора E^3 таква да је $\mathcal{J}(X) = X'$ и $X \neq X'$. Из релације $(O, X) \cong (O, X')$

следи да тачка O припада медијалној равни π_1 дужи XX' . Композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ представља директну изометријску трансформацију простора E^3 са две различите инваријантне тачке O и X , па према Даламберовој теореми представља коинциденцију или неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s, \omega}$ којој оса s садржи тачке O и X . Не може представљати коинциденцију, јер би у том случају из релације $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = \varepsilon$ следила релација $\mathcal{J} = S_{\pi_1}$, па би трансформација $\mathcal{J}$ сем тачке O имала још инваријантних тачака, што је супротно претпоставци. Зато је

$$S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = \mathcal{R}_{s, \omega}$$

и према томе

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s, \omega}.$$

С обзиром да права s садржи тачку O која се налази у равни π_1 и тачку X која се налази ван равни π_1 , права s продире раван π_1 у тачки O . Ако је $s \perp \pi_1$, трансформација $\mathcal{J}$ по дефиницији представља осноротациону рефлексiju. Ако није $s \perp \pi_1$, обележимо са π_2 раван која садржи праву s , а нормална је на раван π_1 и са π_3 раван такву да је

$$\mathcal{R}_{s, \omega} = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3}.$$

С обзиром да су равни π_1 и π_2 нормалне међусобно, оне се секу по некој правој s_1 . Ако је δ_1 раван која са држи праву s_1 а нормална је на раван π_3 , затим δ_2 раван таква да је

$$S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2} = S_{\delta_1} \circ S_{\delta_2},$$

композиција $S_{\delta_2} \circ S_{\delta_3}$ представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{t, \theta}$ којој је оса t нормална на раван δ_1 па је

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3} = S_{\delta_1} \circ S_{\delta_2} \circ S_{\delta_3} = S_{\delta_1} \circ \mathcal{R}_{t, \theta} = \mathcal{R}_{\delta_1; t, \theta}.$$

□

3.7.2 Теорема: Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{J}$ простора E^3 може се представити као композиција две осне рефлексије тог простора.

Доказ: Ако је $\mathcal{J} = \varepsilon$, тада због инволутивности осне рефлексије за сваку праву $p \subset E^3$ важи да је $\mathcal{J} = S_p \circ S_p$. Ако је $\mathcal{J} \neq \varepsilon$, тада постоји тачка $X \in E^3$ таква да је $\mathcal{J}(X) = X'$ и $X \neq X'$. Нека је π_1 медијална раван дужи XX' . С обзиром да је $\mathcal{J}$ директна и S_{π_1} индиректна изометријска трансформација простора E^3 , композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ представља индиректну изометријску трансформацију тог простора. Из релација $\mathcal{J}(X) = X'$ и $S_{\pi_1}(X') = X$ добија се да је у композицији $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ тачка X инваријантна. Ако композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ поседује сем тачке X још неку инваријантну тачку Y , према теорему 2.3 она представља неку раванску рефлексију S_{π_2} . У том случају, из релације $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = S_{\pi_2}$ следи да је $\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}$. Ако се са π обележи раван нормална на обе равни π_1 и π_2 , а са m и n праве по којима она сече те равни, биће

$$\mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2} = (S_{\pi_1} \circ S_{\pi}) \circ (S_{\pi} \circ S_{\pi_2}) = S_m \circ S_n.$$

Ако композиција $S_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ сем тачке X нема других инваријантних тачака, према претходној теорему, она представља неку осноротациону рефлексију $\mathcal{R}_{\pi_4; s, \omega}$ којој је средиште тачка X . Нека је π_2 раван која садржи праву s и која је нормална на раван π_1 , а нека је π_3 раван таква да је $\mathcal{R}_{s, \omega} = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3}$. У том случају биће

$$S_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3} \circ S_{\pi_4} \quad \text{тј.} \quad \mathcal{J} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2} \circ S_{\pi_3} \circ S_{\pi_4}.$$

Из релација $\pi_1 \perp \pi_2$, $\pi_3 \perp \pi_4$ и једнакости $\pi_1 \cap \pi_2 = m$, $\pi_3 \cap \pi_4 = n$, добија се да је

$$\mathcal{J} = S_m \circ S_n.$$

3.8 Централна рефлексија простора E^3

Осноротациона рефлексија у општем случају није инволуциона трансформација. Она је инволуциона једино у случају када је угао ротације опружен.

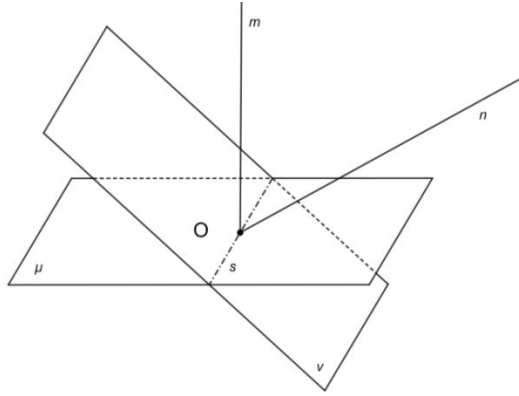
Дефиниција 8.1: Композиција једне осне рефлексије S_s и једне раванске рефлексије S_{π} простора E^3 , при чему је $s \perp \pi$ у некој тачки $O \in E^3$ назива се *централна рефлексија* S_O простора E^3 .

На тај начин, ако је права s нормална на раван π у тачки O , биће

$$S_O = S_{\pi} \circ S_s = S_s \circ S_{\pi}.$$

Непосредно из дефиниције следи да централна рефлексија простора E^3 представља осноротациону рефлексију којој је угао ротације 180° . Као таква, она представља индиректну изометријску трансформацију простора E^3 која има само једну инваријантну тачку, а то је средиште O те централне рефлексије. Свакој другој тачки $X \in E^3$ одговара тачка $X' \in E^3$ таква да је тачка O средиште дужи XX' .

3.8.1 Теорема: Централна рефлексија S_O простора E^3 једнозначно је одређена својим средиштем O .



Слика 11

Доказ: Довољно је доказати да за сваке две праве m и n које се секу у тачки O и равни μ и ν које су у тачки O нормалне на праве m и n важи релација $S_\mu \circ S_m = S_\nu \circ S_n$ (Слика 11).

Ако се са π обележи раван одређена правима m и n , а са s права по којој се секу равни μ и ν , биће $s \perp \pi$. Ако се затим обележе са μ' и ν' равни одређене паровима правих m, s и n, s добија се да је

$$S_\mu \circ S_m = S_\mu \circ S_{\mu'} \circ S_\pi = S_s \circ S_\pi = S_\nu \circ S_{\nu'} \circ S_\pi = S_\nu \circ S_n .$$

□

3.8.2 Теорема: Централна рефлексija S_O простора E^3 је инволуциона трансформација.

Доказ: Ако се са π обележи било која раван која садржи тачку O и са s права која је у тачки O нормална на раван π , биће $S_O = S_\pi \circ S_s$ па је

$$S_O^2 = (S_\pi \circ S_s) \circ (S_\pi \circ S_s) = (S_\pi \circ S_\pi) \circ (S_s \circ S_s) = \varepsilon .$$

□

3.8.3 Теорема: У централној рефлексiji S_O простора E^3 правој x која садржи тачку O одговара та иста права, правој x која не садржи тачку O одговара права x' таква да је $x \parallel x'$ и $x \cap x' = \emptyset$.

Доказ: Нека је најпре $O \in x$. Ако се са π обележи раван која је у тачки O нормална на праву x , онда је

$$S_O(x) = S_\pi \circ S_x(x) = S_\pi(x) = x .$$

У другом случају, ако $O \notin x$ и ако је π раван одређена релацијама $O \in \pi$ и $\pi \perp x$, и ако је p права која је у тачки O нормална на раван π , онда је

$$S_O(x) = S_p \circ S_\pi(x) = S_p(x) = x' .$$

Будући да у осној рефлексiji S_p правој x која задовољава релације $x \parallel p$ и $x \cap p = \emptyset$ одговара друга права x' која задовољава релације $x' \parallel p$ и $x' \cap p = \emptyset$, добија се да је

$$x \parallel x' \text{ и } x \cap x' = \emptyset .$$

□

3.8.4 Теорема: У централној рефлексiji S_O простора E^3 равни π која садржи тачку O одговара та иста раван, равни π која не садржи тачку O одговара раван π' таква да је $\pi \parallel \pi'$ и $\pi \cap \pi' = \emptyset$.

Доказ: Нека најпре $O \in \pi$. Ако се са p обележи права која је у тачки O нормална на раван, онда важи $S_O = S_p \circ S_\pi$, па је

$$S_O(\pi) = S_p \circ S_\pi(\pi) = S_p(\pi) = \pi.$$

У другом случају, када $O \notin \pi$, ако се са p обележи права одређена релацијама $O \in p$ и $p \perp \pi$ и са δ раван која је у тачки O нормална на праву p , онда ће бити

$$S_O(\pi) = S_\delta \circ S_p(\pi) = S_\delta(\pi) = \pi'.$$

Из релација $S_\delta(\pi) = \pi'$ и $\pi \cap \delta = \emptyset$ следи да су равни π и π' са различитих страна равни δ , па је $\pi \parallel \pi'$ и $\pi \cap \pi' = \emptyset$.

□

3.8.5 Теорема: Ако је S_O централна рефлексација и $\mathcal{J}$ било која изометријска трансформација простора E^3 , затим O' тачка таква да је $\mathcal{J}(O) = O'$, тада је

$$\mathcal{J} \circ S_O \circ \mathcal{J}^{-1} = S_{O'}.$$

Доказ: Нека је права p произвољна права која садржи тачку O и π раван која је у тачки O нормална на праву p . Ако у трансформацији $\mathcal{J}$ правој p одговара права p' , а равни π одговара раван π' , онда ће бити $p' \perp \pi'$ у некој тачки O' . Зато је

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \circ S_O \circ \mathcal{J}^{-1} &= \mathcal{J} \circ S_\pi \circ S_p \circ \mathcal{J}^{-1} \\ &= (\mathcal{J} \circ S_\pi \circ \mathcal{J}^{-1}) \circ (\mathcal{J} \circ S_p \circ \mathcal{J}^{-1}) \\ &= S_{\pi'} \circ S_{p'} = S_{O'}. \end{aligned}$$

□

3.8.6 Теорема: Централна рефлексација S_O и раванска рефлексација S_π простора E^3 су две комутативне трансформације ако и само ако тачка O припада равни π . Дакле, биће

$$S_\pi \circ S_O = S_O \circ S_\pi \iff O \in \pi.$$

Доказ: Нека је најпре

$$(*) \quad S_\pi \circ S_O = S_O \circ S_\pi \quad \text{тј.} \quad S_\pi \circ S_O \circ S_\pi = S_O.$$

Ако се са O' обележи тачка одређена релацијом $S_\pi(O) = O'$, према закону трансмутације централне рефлексације S_O раванском рефлексацијом S_π добија се да је

$$(**) \quad S_\pi \circ S_O \circ S_\pi = S_{O'}.$$

Из једнакости (*) и (**) следи да је $S_O = S_{O'}$, па према томе да је $O = O'$, што је могуће само у случају када се тачка O налази у равни π .

Обратно, нека је сада $O \in \pi$. Из ове релације следи да је $S_\pi(O) = O$, па према закону за трансмутацију централне рефлексације S_O раванском рефлексацијом S_π добија се да је

$$S_\pi \circ S_O \circ S_\pi = S_O \quad \text{тј.} \quad S_\pi \circ S_O = S_O \circ S_\pi.$$

□

3.8.7 Теорема: Централна рефлексација S_O и осна рефлексација S_p простора E^3 су две комутативне трансформације ако и само ако тачка O припада правој p . Тада ће бити:

$$S_p \circ S_O = S_O \circ S_p \iff O \in p.$$

Доказ: Нека је најпре

$$(*) \quad S_p \circ S_O = S_O \circ S_p \quad \text{тј.} \quad S_p \circ S_O \circ S_p = S_O.$$

Ако се са O' побележи тачка одређена релацијом $S_p(O) = O'$, према закону трансмутације централне рефлексије S_O оном рефлексијом S_p добија се да је

$$(**) \quad S_p \circ S_O \circ S_p = S_{O'}.$$

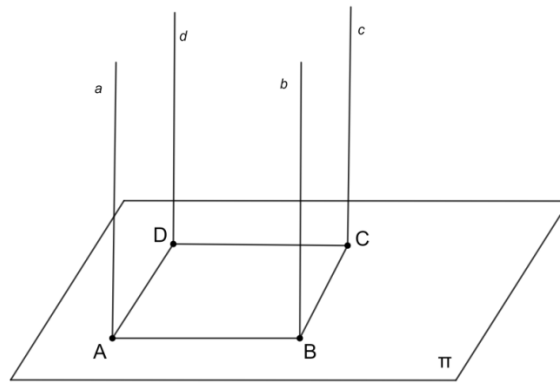
Из једнакости $(*)$ и $(**)$ следи да је $S_O = S_{O'}$, па према томе да је $O = O'$, што је могуће само у случају када се тачка O налази на правој p .

Обратно, нека је $O \in p$. Из ове релације следи да је $S_p(O) = O$, па према закону трансмутације централне рефлексије S_O оном рефлексијом S_p добија се да је

$$S_p \circ S_O \circ S_p = S_O \quad \text{тј.} \quad S_p \circ S_O = S_O \circ S_p.$$

□

3.8.8 Теорема: Композиција три централне рефлексије простора E^3 представља такође централну рефлексију тог простора.



Слика 12

Доказ: Нека су дате три централне рефлексије S_A, S_B, S_C еуклидског простора E^3 . Ако је при томе $A = B$ или $B = C$, тада непосредно следује да композиција $S_C \circ S_B \circ S_A$ представља такође централну рефлексију.

Шта се дешава када је $A \neq B$ или $B \neq C$? (Слика 12).

Ако се са π обележи раван која садржи тачке A, B, C и са a, b, c праве које су у тим тачкама нормалне на раван π , онда је

$$S_C \circ S_B \circ S_A = (S_\pi \circ S_C) \circ (S_b \circ S_\pi) \circ (S_\pi \circ S_a) = S_\pi \circ (S_C \circ S_b \circ S_a).$$

С обзиром да су праве a, b, c нормалне на раван π , према раније доказаној теореме, композиција $S_C \circ S_b \circ S_a$ представља неку осну рефлексију S_d којој је оса d нормална на раван π . Ако продорну тачку та осе са равни π обележимо са D , биће

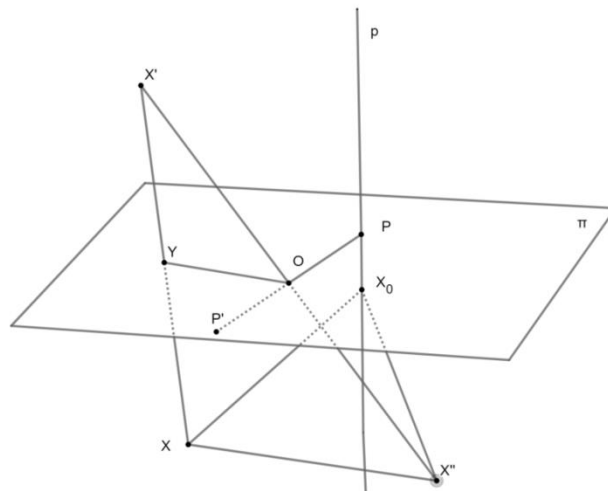
$$S_C \circ S_B \circ S_A = S_\pi \circ (S_C \circ S_b \circ S_a) = S_\pi \circ S_d = S_D.$$

□

3.8.9 Теорема: Средишта дужи које спајају одговарајуће тачке индиректне изометријске трансформације $\mathcal{J}$ простора E^3 припадају једној равни.

Доказ: Нека је $P \in E^3$, $\mathcal{J}(P) = P'$ и O средиште дужи PP' (Слика 13). С обзиром да су $\mathcal{J}$ и S_O индиректне изометријске трансформације простора E^3 , композиција $S_O \circ \mathcal{J}$ представља директну изометријску трансформацију. У тој директној изометријској

трансформацији тачка P је инваријантна, па према Даламберовој теореме представља неку основу ротацију $\mathcal{R}_{p,\omega}$ при чему $P \in p$.



Слика 13

Нека је раван π одређена релацијама $O \in \pi$ и $\pi \perp p$. Нека је са X обележена било која тачка простора E^3 , различита од тачке P , и са X' тачка таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и са Y средиште дужи XX' у равни π . Заиста, ако се стави да је $S_O(X') = X''$, биће

$$\mathcal{R}_{p,\omega}(X) = X''.$$

Стога медијална раван δ дужи XX'' садржи праву p . Права одређена средиштима O и Y дужи $X'X''$ и $X'X$ паралелна је са дужи XX'' , и према томе нормална на раван δ , дакле и на праву $p \subset \delta$. Одатле следи да је $Y \in \pi$.

□

Дефиниција 8.2: Раван π којој припадају средишта дужи одређених одговарајућим тачкама индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ простора E^3 назива се *основа* те изометријске трансформације.

3.9 Транслација простора E^3

Дефиниција 9.1: Нека су S_α и S_β две раванске рефлексije простора E^3 којима су основе α и β нормалне на неку праву s у две различите тачке A и B и нека је $A' = S_\beta(A)$. Паралелним померањем или *транслацијом* по правој s за оријентисану дуж $PP' \subset s$ назива се трансформација

$$\mathcal{T}_{PP'}: E^3 \rightarrow E^3,$$

одређена релацијом

$$\mathcal{T}_{PP'} = S_\beta \circ S_\alpha.$$

Из горе наведеног се види да, сем осних ротација, постоји још једна врста изометријских трансформација простора E^3 које се могу представити као композиција две раванске рефлексije.

Непосредно из дефиниције се види да је translација директна изометријска трансформација као композиција две раванске рефлексije које су индиректне трансформације.

Будући да је $\alpha \cap \beta = \emptyset$, композиција $S_\beta \circ S_\alpha$, према томе и translација $\mathcal{T}_{PP'}$ простора E^3 нема инваријантних тачака. Translација $\mathcal{T}_{PP'}$ простора E^3 преводи сваку праву $x \parallel PP'$ у ту исту праву, не мењајући њену оријентацију.

3.9.1 Теорема: Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора E^3 представља translацију тог простора ако и само ако се може представити као композиција два различите централне рефлексije тог истог простора.

Доказ: Нека најпре изометријска трансформација простора E^3 представља неку translацију $\mathcal{T}_{PP'}$ тог простора. Ако обележимо са Q средиште дужи PP' , са s праву одређену тачкама P и P' , а са α и β равни нормалне на праву s у тачкама P и Q , применом теореме 6.1 добија се да је

$$\mathcal{T}_{PP'} = S_\beta \circ S_\alpha = (S_\beta \circ S_s) \circ (S_s \circ S_\alpha) = S_Q \circ S_P.$$

Обратно, нека је сада изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора E^3 представља композицију две различите централне рефлексije. Нека је нпр.

$$\mathcal{I} = S_Q \circ S_P.$$

Ако се са s обележи права одређена тачкама P и Q , са α и β равни које су у тачкама P и Q нормалне на праву s и са P' тачка таква да је $S_\beta(P) = P'$, применом теореме 6.1 добија се

$$S_Q \circ S_P = (S_\beta \circ S_s) \circ (S_s \circ S_\alpha) = S_\beta \circ S_\alpha = \mathcal{T}_{PP'}.$$

□

3.9.2 Теорема: Скуп $\mathcal{T}$ који се састоји из идентичне трансформације и свих translација простора E^3 представља подгрупу групе $G(\mathcal{T}^+)$ свих директних изометријских трансформација тог истог простора.

Доказ: Нека су $\mathcal{T}_{AB}$ и $\mathcal{T}_{CD}$ било које две translације из скупа $\mathcal{T}$. Ако је E тачка која у translацији $\mathcal{T}_{CD}$ одговара тачки B , имамо да је $\mathcal{T}_{CD} = \mathcal{T}_{BE}$. Ако су M и N средишта дужи AB и BE , а M' тачка симетрична тачки M у односу на тачку N , биће

$$\mathcal{T}_{CD} \circ \mathcal{T}_{AB} = \mathcal{T}_{BE} \circ \mathcal{T}_{AB} = S_N \circ S_B \circ S_B \circ S_M = S_N \circ S_M = \mathcal{T}_{MM'} \in \mathcal{T}.$$

На тај начин композиција сваке две трансформације из скупа $\mathcal{T}$ представља такође трансформацију из скупа $\mathcal{T}$.

Ако је $\mathcal{T}_{PQ}$ произвољна трансформација из скупа $\mathcal{T}$ и R средиште дужи PQ , имамо да је

$$\mathcal{T}_{PQ}^{-1} = (S_Q \circ S_R)^{-1} = S_R \circ S_Q = \mathcal{T}_{QP} \in \mathcal{T}.$$

Из тог разлога инверзна трансформација било које трансформације из скупа $\mathcal{T}$ представља такође трансформацију из скупа $\mathcal{T}$.

С обзиром да трансформације из из скупа $\mathcal{T}$ представљају елементе из групе $G(\mathcal{T}^+)$, из доказаних својстава следи да је скуп $\mathcal{T}$ подгрупа те групе.

□

3.9.3 Теорема: Група транслација $G(\mathcal{T})$ простора E^3 је комутативна. Другим речима, за сваке две транслације $\mathcal{T}_{AB} \rightarrow$ и $\mathcal{T}_{CD} \rightarrow$ простора E^3 важи релација

$$\mathcal{T}_{CD} \rightarrow \circ \mathcal{T}_{AB} \rightarrow = \mathcal{T}_{AB} \rightarrow \circ \mathcal{T}_{CD} \rightarrow.$$

Доказ: Нека је E тачка која у транслацији $\mathcal{T}_{CD} \rightarrow$ одговара тачки B . Према раније доказаној теореме добија се да је $\mathcal{T}_{CD} \rightarrow = \mathcal{T}_{BE} \rightarrow$. Ако су M и N средишта дужи AB и BE , применом теореме 9.1 добија се

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{CD} \rightarrow \circ \mathcal{T}_{AB} \rightarrow &= \mathcal{T}_{BE} \rightarrow \circ \mathcal{T}_{AB} \rightarrow = S_N \circ S_B \circ S_B \circ S_M = S_N \circ S_M, \\ \mathcal{T}_{AB} \rightarrow \circ \mathcal{T}_{CD} \rightarrow &= \mathcal{T}_{AB} \rightarrow \circ \mathcal{T}_{BE} \rightarrow = S_B \circ S_M \circ S_N \circ S_B. \end{aligned}$$

Према раније доказаној теореме, композиција $S_B \circ S_M \circ S_N$ представља централну рефлексију равни E^2 , дакле инволуциону трансформацију. Зато квадрат те композиције представља коинциденцију. Дакле биће

$$\begin{aligned} S_B \circ S_M \circ S_N \circ S_B \circ S_M \circ S_N &= \varepsilon \\ \text{тј. } S_B \circ S_M \circ S_N \circ S_B &= S_N \circ S_M. \end{aligned}$$

Из ове и претходне две једнакости следи да је $\mathcal{T}_{CD} \rightarrow \circ \mathcal{T}_{AB} \rightarrow = \mathcal{T}_{AB} \rightarrow \circ \mathcal{T}_{CD} \rightarrow$.

□

3.9.4 Теорема: Нека је $\mathcal{T}_{AB} \rightarrow$ транслација и $\mathcal{I}$ изометријска трансформација простора E^3 . Ако су A' и B' тачке простора E^3 такве да је $\mathcal{I}(A) = A'$, $\mathcal{I}(B) = B'$ онда је

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{AB} \rightarrow \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{T}_{A'B'} \rightarrow.$$

□

3.9.5 Теорема: Транслација $\mathcal{T}_{AB} \rightarrow$ и раванска рефлексија S_π простора E^3 комутирају ако и само ако је права AB паралелна са равни π . Дакле,

$$S_\pi \circ \mathcal{T}_{AB} \rightarrow = \mathcal{T}_{AB} \rightarrow \circ S_\pi \Leftrightarrow AB \parallel \pi.$$

□

3.9.6 Теорема: Транслација $\mathcal{T}_{AB} \rightarrow$ и осна ротација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ простора E^3 комутирају ако и само ако је су праве s и AB паралелне. Дакле,

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{AB} \rightarrow = \mathcal{T}_{AB} \rightarrow \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \Leftrightarrow MN \parallel s.$$

□

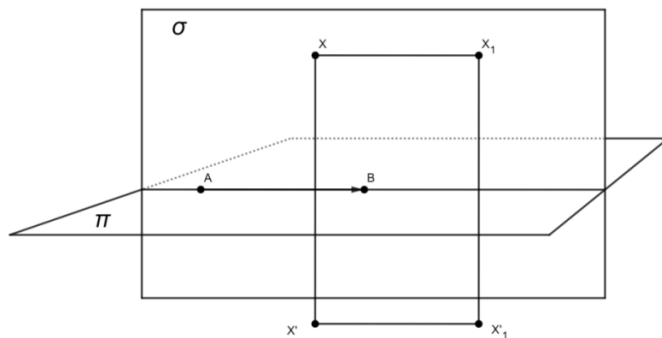
3.10 Клизајућа рефлексija простора E^3

До сада су проучаване индиректне изометријске трансформације простора E^3 које су поседовале једну или више инваријантних тачака. Сада ће бити речи о индиректним изометријским трансформацијама које немају инваријантних тачака.

Дефиниција 10.1: Композиција састављена из транслације $\mathcal{T}_{AB}^{\rightarrow}$ и раванске рефлексije S_{π} простора E^3 , где раван π садржи праву AB , назива се *клизајућа рефлексija* или *транслаторна рефлексija*. Означава се са $\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}}$. Дакле,

$$\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}} = S_{\pi} \circ \mathcal{T}_{AB}^{\rightarrow} = \mathcal{T}_{AB}^{\rightarrow} \circ S_{\pi}.$$

Раван π се назива *основа*, оријентисана права AB се назива *оса*, а оријентисана дуж AB се назива *транслациона дуж клизајуће рефлексije* $\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}}$.



Слика 14

Непосредно из дефиниције се уочава да је клизајућа рефлексija $\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}}$ простора E^3 једнозначно одређена ако је задата основа π и транслациона дуж AB .

Клизајућа рефлексija је индиректна изометријска трансформација јер представља композицију транслације (директна изометрија) и једне раванске рефлексije (индиректна изометрија).

Клизајућа рефлексija $\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}}$ простора E^3 нема инваријантних тачака. Има бесконачно много инваријантних правих и то су све праве које припадају равни π и паралелне су правој AB . Има две инваријантне равни а то су основа рефлексije π и раван σ која садржи праву AB и нормална је на раван π , такозвана *противоснова*. Транслација $\mathcal{T}_{AB}^{\rightarrow}$ и раванска рефлексija S_{π} су у овом случају комутативне трансформације (јер је $\pi \parallel AB$) што је илустровано претходном сликом.

Наредним теоремама су исказана још нека својства клизајуће рефлексije $\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}}$.

3.10.1 Теорема: Индиректна изометријска трансформација простора E^3 која нема инваријантних тачака представља клизајућу рефлексiju.

□

3.10.2 Теорема: Ако је $\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}}$ клизајућа рефлексija простора E^3 и p права која је у средишту Q дужи AB нормална на раван π , тада је

$$\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}} = S_p \circ S_A = S_B \circ S_p .$$

□

3.11 Завојно кретање простора E^3

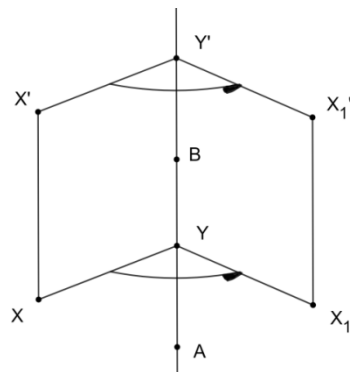
До сада нису разматране директне изометријске трансформације простора E^3 чија се минимална симетријска репрезентација састоји из четири раванске рефлексije.

Дефиниција 11.1: Композиција састављена из транслације $\mathcal{T}_{AB}$ и осне ротације $\mathcal{R}_{AB, \omega}$ простора E^3 назива се *завојно кретање* или *хеликоидно кретање*.

Означава се са $\mathcal{Z}_{AB}^{\rightarrow, \omega}$.

Дакле, добија се

$$\mathcal{Z}_{AB}^{\rightarrow, \omega} = \mathcal{R}_{AB, \omega} \circ \mathcal{T}_{AB} = \mathcal{T}_{AB} \circ \mathcal{R}_{AB, \omega} .$$



Слика 15

Оријентисана права AB се назива *осом*, оријентисана дуж AB се назива *транслациона дуж*, а оријентисани угао ω се назива *угао завојног кретања* $\mathcal{Z}_{AB}^{\rightarrow, \omega}$.

Ако је угао ω опружен, завојно кретање $\mathcal{Z}_{AB}^{\rightarrow, \omega}$ се назива *завојно полуобртање*.

Непосредно из дефиниције се уочава да је завојно кретање $\mathcal{Z}_{AB}^{\rightarrow, \omega}$ једнозначно одређено

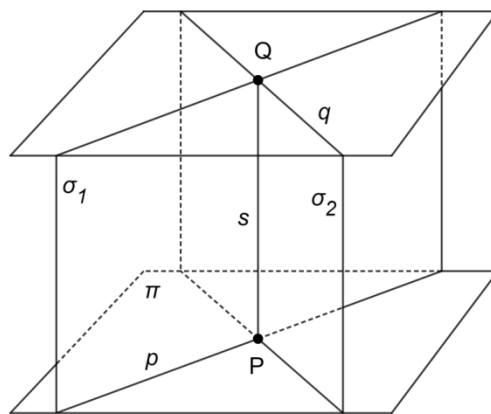
транслационом дужи AB и углом ω . Завојно кретање представља директну изометријску трансформацију простора E^3 јер је композиција једне транслације и једне осне ротације, а обе ове трансформације су директне.

□

3.11.1 Теорема: Завојно кретање $\mathcal{Z}_{AB, \omega}$ простора E^3 се може представити као композиција две осне рефлексије тог простора при чему су осе тих рефлексија међусобно мимоилазне.

□

3.11.2 Теорема: Композиција $\mathcal{J}$ састављена од две осне рефлексије S_p и S_q простора E^3 , којима су осе p и q мимоилазне, представља завојно кретање.



Слика 16

□

Читалац може пронаћи преостале доказе одговарајућих теорема у [7] (погледати литературу).

3.12 Класификација изометријских трансформација простора E^3

У претходним разматрањима је уведен одређен број изометријских трансформација простора E^3 . Поставља се питање: да ли су обухваћене све изометријске трансформације?

3.12.1 Теорема: Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{J}$ простора E^3 представља коинциденцију, транслацију, осну ротацију или завојно кретање.

□

3.12.2 Теорема: Свака индиректна изометријска трансформација $\mathcal{J}$ простора E^3 представља раванску, осноротациону или клизајућу рефлексију.

□

На основу ове две теореме, класификација изометријских трансформација простора E^3 се може представити и таблично.

Изометријске трансформације простора E^3	
Директне изометријске трансформације	Индиректне изометријске трансформације
Коинциденција Транслација Осне ротације Завојна кретања	Раванска рефлексија Осноротациона рефлексија Клизајућа рефлексија

Овде се не истичу посебно осне симетрије; оне се сврставају међу осне ротације. Нису посебно поменуте ни осноротационе симетрије међу којима се налази и централна рефлексија простора; оне се сврставају међу осноротационе рефлексије простора E^3 .

4. Рефлексије у еуклидским афиним n -димензионим просторима

4.1 Основне дефиниције и теореме

Дефиниција 4.1.1: *Афини простор* над неким пољем K је свака уређена тројка $(\mathcal{A}, V, +)$ неког скупа $\mathcal{A}$ чији елементи се називају *тачке*, извесног векторског простора V над уоченим пољем K и једног пресликавања

$$(A, u) \rightarrow A + u \quad A \in \mathcal{A}, u \in V.$$

скупа $\mathcal{A} \times V$ у сам скуп $\mathcal{A}$, које задовољава следеће услова или аксиоме:

- A1. $A + 0 = A$ за сваку тачку A ;
- A2. $(A + u) + v = A + (u + v)$ за сваку тачку A и свако $u, v \in V$;
- A3. За сваки пар тачака A и B постоји тачно један вектор $u \in V$ такав да је $B = A + u$.

Сам векторски простор V се назива *директриса* уоченог афиног простора $A = (\mathcal{A}, V, +)$.

Због једноставности записа, афини простор $(\mathcal{A}, V, +)$ над пољем K ће бити означаван истим симболом као и сам скуп његових тачака, то јест са $\mathcal{A}$.

Дефиниција 4.1.2: Нека је $A = (\mathcal{A}, V, +)$ било који афини простор над пољем K . За непразан скуп тачака Π из $\mathcal{A}$ се каже да је *афини потпростор* или само *потпростор* у том афином простору, ако постоји и неки векторски потпростор U од V такав да је са

$$(P, u) \rightarrow P + u \quad (P \in \Pi, u \in U)$$

дефинисано и једно пресликавање $+$ скупа $\Pi \times U$ у тај скуп Π , где $P + u$ има исто значење као и у самом афином простору $\mathcal{A}$.

Ако је афини простор димензије n , афини потпростори димензије 0 су саме тачке тог простора, афини потпростори димензије 1 се називају *праве*, потпростори димензије 2 се називају *равни*, а потпростори димензије $n - 1$ се називају *хиперравни*.

Дефиниција 4.1.3: Нека су сада $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ било који афини простори над истим пољем скалара K и са директрисама V и W . Ако је P фиксирана тачка из $\mathcal{A}$, за сваки вектор u из V постоји тачно једна тачка M из $\mathcal{A}$ за коју је $u = M - P$. Тиме је, за свако пресликавање $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, са

$$(1) \quad L(M - P) = \sigma M - \sigma P \quad (M \in \mathcal{A})$$

дефинисано и једно пресликавање L саме директрисе V афиног простора $\mathcal{A}$ у директрису W афиног простора $\mathcal{B}$. Дакле, ту је

$$(2) \quad L(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{\sigma P \sigma M} \quad (M \in \mathcal{A}).$$

Како је $u = M - P$, то значи да је $P + u = M$, па следи да је

$$\sigma(P + u) = \sigma(P) + L(u) \quad (u \in V).$$

Када је пресликавање $L: V \rightarrow W$ линеарно, оно не зависи од саме тачке P . За пресликавање $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ афиног простора $\mathcal{A}$ у афини простор $\mathcal{B}$ над истим пољем K и са директрисама V и W се каже да је *афино* ако је за бар једну тачку P из $\mathcal{A}$ са (2) дефинисано и линеарно пресликавање $L: V \rightarrow W$.

Дефиниција 4.1.4: *Еуклидски векторски простор* је сваки реални векторски простор V коначне димензије у коме је дефинисан један скаларни производ, тј. једно пресликавање

$$(u, v) \rightarrow u \circ v \quad (u, v \in V)$$

скупа $V \times V$ у само поље $\mathbb{R}$, такво да за произвољне векторе u, v, w из V и сваки скалар α важи:

- 1) $(u + v) \circ w = u \circ w + v \circ w$;
- 2) $(\alpha u) \circ v = \alpha(u \circ v)$;
- 3) $u \circ v = v \circ u$;
- 4) $u \neq 0 \Rightarrow u \circ u > 0$.

Дакле, афини простори чије су директрисе неки еуклидски векторски простори се називају *еуклидски афини простори* или само *еуклидски простори*.

Дефиниција 4.1.5: Уређен пар $Oe = (O, e)$ неке тачке $O \in \mathcal{A}$ и било које базе $e = [e_1, \dots, e_n]$ директрисе V афиног простора $\mathcal{A}$, назива се *афини репер* или само *репер* са почетком O и базом e .

Даље, нека су Re и Sg било који репери афиних простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ над истим пољем K , где су $e = [e_1, \dots, e_n]$ и $g = [g_1, \dots, g_m]$ базе њихових директриса V и W .

Ако је L линеарни део афиног пресликавања $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, према претходном је и

$$\sigma(R + u) = \sigma(R) + L(u) \quad (u \in V). \quad (*)$$

Са друге стране, ако је $L(e_s) = \alpha_{1s}g_1 + \dots + \alpha_{ms}g_m$, тада је $A = [\alpha_{rs}]$ и једина матрица за коју је

$$[Le_1, \dots, Le_n] = [g_1, \dots, g_m] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

то јест $L(e) = gA$. Зове се још и *матрица тог линеарног пресликавања* L , као и самог афиног пресликавања σ , у односу на уочени пар база (e, g) и означава се са $A = [L]_{eg} = [\sigma]_{eg}$. Она је формата $m \times n$ и њена s -та колона је управо колона координата вектора $L(e_s)$ у односу на базу g .

Даље, ако је u_e колона координата вектора $u = \sum x_r e_r$ у односу на базу e , биће

$$L(u) = \sum x_r L(e_r),$$

$$\text{тј. } u = e u_e \text{ и } L(u) = L(e) u_e,$$

па је јасно тада да је тада и

$$L(u) = g A u_e, \quad L(u)_g = A u_e \quad (u \in V).$$

Отуда, ако је X колона координата тачке $R + u = M$ у односу на репер Re , биће $X = u_e$, а тиме и $L(u)_g = AX$. На тај начин, према (*) важи и

$$Y = Y_0 + AX,$$

где су Y и Y_0 колоне координате тачака σM и σR у односу на репер Sg у простору $\mathbb{B}$. При том, ако је $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$ и $Y_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, тада се и сама претходна релација $Y = Y_0 + AX$ даље своди на

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= \alpha_m + \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n \end{aligned}$$

Дефиниција 4.1.6: Нека је E било који еуклидески простор са директрисом V димензије n и датим скаларним производом $(u, v) \rightarrow u \circ v$. Сваком вектору $u \in V$ одговара један реалан број $|u| = \sqrt{u \circ u}$ и тај реалан број се назива *норма* или *дужина* вектора u .

Нека су сада тачке A, B из E . Пресликавање $\delta: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ дато са:

$$\delta(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

које испуњава услове:

$$M1) \quad \delta(A, B) \geq 0,$$

$$M2) \quad \delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B,$$

$$M3) \quad \delta(A, B) = \delta(B, A),$$

$$M4) \quad \delta(A, B) + \delta(B, C) \geq \delta(A, C),$$

се назива *еуклидско растојање* или само *растојање* у еуклидском простору E .

Реалан број $\delta(A, B)$ се назива *растојање* између тачака A и B .

Дефиниција 4.1.7: Пресликавање $\sigma: E \rightarrow E$ се назива *изометрија* еуклидског простора E ако чува растојање тачака, тј. ако за произвољне тачке A, B из E и њихове слике σA и σB важи

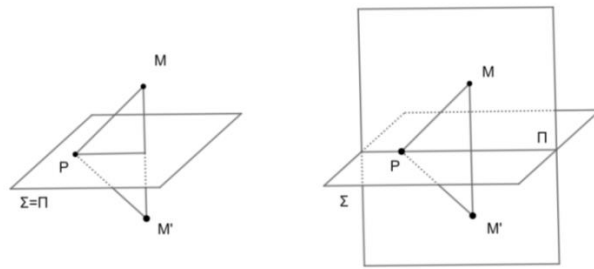
$$\delta(A, B) = \delta(\sigma A, \sigma B).$$

Дефиниција 4.1.8: Нека је $\Pi = p + U$ било који потпростор еуклидског простора E . Ако је M било која тачка из E и S њена ортогонална пројекција на Π , тада у простору E постоји тачно једна тачка M' таква да је S средиште дужи MM' . Тиме је са $\sigma: M \rightarrow M'$ добро дефинисано једно пресликавање $\sigma: E \rightarrow E$. При том, оно је бијективно и важи $\sigma(M) = M$ ако и само ако $M \in \Pi$. Овако дефинисано пресликавање σ се назива *симетрија* еуклидског простора E у односу на уочени потпростор Π . Означава се са σ_Π или само σ .

Симетрије σ еуклидског простора E , чије су основе хиперравни, називају се још и *рефлексије*.

Доказ да је овако дефинисано пресликавање изометрија читалац може пронаћи у [5] (погледати литературу.)

4.1.1 Теорема: Изометрија $\sigma: E \rightarrow E$ еуклидског простора E је *симетрија* ако и само ако је инволутивна, тј. ако је $\sigma^2 = \varepsilon$.



Доказ: Нека је изометрија $\sigma \neq \varepsilon$ инволутивна и M било која тачка из E за коју је $\sigma M = M' \neq M$. Због $\sigma^2 = \varepsilon$, тада је и $\sigma M' = M$, па ако је S средиште пара (M, M') биће и σS средиште пара тачака $(\sigma M, \sigma M')$, то јест (M', M) . Отуда је $\sigma S = S$, а тиме и скуп свих фиксних тачака P изометрије σ један потпростор Π простора E , који садржи S . Уз то, због $P' = P$, за сваку тачку P из Π важи $\delta(P, M) = \delta(P, M')$. Зато су оне и у медијатриси Σ дужи MM' . Тиме је и $\Pi \subset \Sigma$, па како је та дуж ортогонална на Σ , она је ортогонална и на Π . При том је њено средиште S у Π , па тако је и сама тачка $M' = \sigma M$ симетрична тачки M у односу на потпростор Π .

□

Напомена: Теореме 2.1.5 и 3.2.2 дају сличне закључке, али овде је услов инволутивности потребан и довољан да би нека изометрија била симетрија.

Дефиниција 4.1.9: Линеарни оператор L се назива *ортогоналан* ако чува скаларни производ, тј. ако за произвољне векторе u и v важи

$$Lu \circ Lv = u \circ v.$$

Тада је $|Lu| = |u|$ као и $u \perp v \Leftrightarrow Lu \perp Lv$.

Ово значи да је линеарни оператор L ортогоналан ако и само ако су такве и његове матрице у односу на ортонормиране базе.

Дакле, ако је A матрица ортогоналног оператора L , тада је $A \cdot A^T = E$ где је E јединична матрица.

Дефиниција 4.1.10: Нека је a било који вектор из директрисе V еуклидског простора E и $\tau: E \rightarrow E$ пресликавање одређено са $\tau(M) = M + a$. Тада за сваке две тачке S и M важи

$$\overrightarrow{M\tau(M)} = a, \quad \overrightarrow{\tau(S)\tau(M)} = \overrightarrow{SM}.$$

Овако дефинисано пресликавање се назива *транслација* еуклидског простора E и означава се са τ_a или само τ .

Транслација је такође изометрија, јер ако је $\overrightarrow{\tau(S)\tau(M)} = \overrightarrow{SM}$ тада је

$$\delta(\tau(S), \tau(M)) = \left| \overrightarrow{\tau(S)\tau(M)} \right| = \left| \overrightarrow{SM} \right| = \delta(S, M).$$

4.1.2 Теорема: Пресликавање $\omega: E \rightarrow E$ је изометрија ако и само ако је и афина трансформација тог простора, чији је линеарни део L неки ортогоналан оператор еуклидског векторског простора $V = \vec{E}$.

Доказ: Нека је P фиксирана тачка из E и $Q = \omega(P)$. Ако је τ translација простора E одређена са $\tau(Q) = P$, уочено пресликавање ω је и изометрија ако и само ако је то и композиција $\sigma = \tau \circ \omega$.

Тада је $\sigma(P) = P$ па је довољно доказати да теорема важи за свако пресликавање $\sigma: E \rightarrow E$ које има бар једну инваријантну тачку.

Нека је, за почетак, пресликавање σ изометрија, тј. $|\overrightarrow{\sigma A \sigma B}| = |\overrightarrow{AB}|$, а тиме и

$$(1) \quad |\overrightarrow{P\sigma B} - \overrightarrow{P\sigma A}| = |\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}|$$

за сваки пар тачака A, B из простора E . Како је $\sigma P = P$, за доказ да је оно и афино, довољно је доказати да је са

$$(2) \quad L(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{P\sigma A} \quad (A \in E)$$

дефинисан један линеарни оператор на векторском простору V . На основу (1) прво следи да за тако одређено L важи

$$(3) \quad |L(v) - L(u)| = |v - u|,$$

где су $u = \overrightarrow{PA}$ и $v = \overrightarrow{PB}$ произвољни вектори из V . Такође, ако је $A = P$, релације (2) и (1) се свде на $L(0) = 0$ и $|L(v)| = |v|$, па се квадрирањем релације (3) добија

$$Lu \circ Lv = u \circ v$$

за свако u и v из V . Ако је вектор a облика

$$(4) \quad a = L(w) - L(u) - L(v),$$

тада је и $a \circ a$ сума скалара облика $\pm(Lx \circ Ly)$. Замењујући сваки од њих са $\pm(x \circ y)$, на тај начин се добија да је и $a \circ a = |w - u - v|^2$.

Посебно, $w = u + v$, мора бити $a = 0$, а тиме и $L(u + v) = Lu + Lv$.

И слично за $L(\alpha u) = \alpha L(u)$, па је уочено пресликавање $L: V \rightarrow V$ и линеарно и ортогонално.

И обрнуто, ако је σ афина трансформација еуклидског простора E , са ортогоналним линеарним делом L и инваријантном тачком P , тада важи (2), као и $|Lw| = |w|$. За $w = v - u$, последња релација се своди на (3). Јасно је да тада важи и (1), па је σ и једна изометрија простора E . Отуда и тврђење у целини јер трансформације ω и $\sigma = \tau \circ \omega$ имају исти линеарни део L .

□

Дефиниција 4.1.11: За два вектора u и v се каже да су *ортогонални* ако је $u \circ v = 0$, тј. ако је њихов скаларни производ једнак нули. То се означава са $u \perp v$. За вектор u се каже да је ортогоналан и на непразном скупу A вектора из V ако је ортогоналан на свим векторима тог скупа. Тада се пише $u \perp A$.

Скуп свих вектора који су ортогонални на A се назива *ортогонал* уоченог скупа A . Ортогонал скупа A се означава са $A^\perp$. Дакле, $A^\perp = \{u \in V : u \perp A\}$.

4.1.3 Теорема:

- а) Потпростор Γ еуклидског простора E је инваријантан у односу на симетрију σ са основом Π ако и само ако је његова ортогонална пројекција на Π управо $\Pi \cap \Gamma$.
б) За сваку изометрију τ , конјугат $\omega = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ дате симетрије σ са основом Π је симетрија са основом $\tau\Pi$ (теорема о трансмутацији).

Доказ: а) Заједно са тачком M , потпростор Γ садржи и њој симетричну тачку у односу на Π ако и само ако садржи и средиште S пара тачака $(M, \sigma M)$. При том је та тачка S управо ортогонална пројекција тачке M на потпростор Π , па је тако и ортогонална пројекција потпростора Γ управо $\Pi \cap \Gamma$.

Напомена: Теореме 2.1.4 и 3.2.4 дају исте овакве закључке само у случајевима када је посматрани простор димензије 2, односно 3.

- б) Како је $\sigma^2 = \varepsilon$, на основу претходне теореме из $\omega^2 = \tau \circ \sigma^2 \circ \tau^{-1} = \varepsilon$ прво следи да је и ω симетрија, а затим и да је скуп њених инваријантних тачака управо $\tau\Pi$. Тиме је $\omega = \sigma$, тј. $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, ако и само ако је $\tau\Pi = \Pi$.

Напомена: Теореме 2.1.8 и 3.2.6 дају исте овакве закључке само у случајевима када је посматрани простор димензије 2, односно 3.

□

Са друге стране, ако су $\bar{e} = [e_1, \dots, e_k]$ и $\tilde{e} = [g_1, \dots, g_m]$ било које ортонормиране базе директрисе U потпростора $\Pi \subset E$ и њеног ортогонала $U^\perp$, тада је и $e = \bar{e} \cup \tilde{e}$ једна ортонормирана база простора $V = U \oplus U^\perp$.

Отуда, ако је L линеарни део симетрије σ простора E у односу на тај простор Π , биће $Le_r = e_r$ и $Lg_s = -g_s$ за свако r и s , а самим тим и

$$A = \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_m \end{bmatrix}$$

његова матрица у односу на ту базу e .

При том је E_k јединична матрица реда $k = \dim \Pi$, као и $m = n - k$, где је n димензија простора E .

И обратно, ако афина трансформација $\omega: E \rightarrow E$ има бар једну инваријантну тачку, на пример P и ако њен линеарни део има назначену матрицу A у односу на неку ортонормирану базу $[e_1, \dots, e_n]$, тада се она подудара са симетријом σ у односу на потпростор $\Pi = P + \Omega(e_1, \dots, e_n)$, где је $\Omega(e_1, \dots, e_n)$ линеарни омотач од $e_1, \dots, e_n$.

4.1.4 Теорема: Афина трансформација $\sigma: E \rightarrow E$ је симетрија еуклидског простора E димензије n ако и само ако има бар једну инваријантну тачку P и ако, у односу на бар један ортонормирани репер Oe , има матрицу $A = E_k \oplus (-E_m)$.

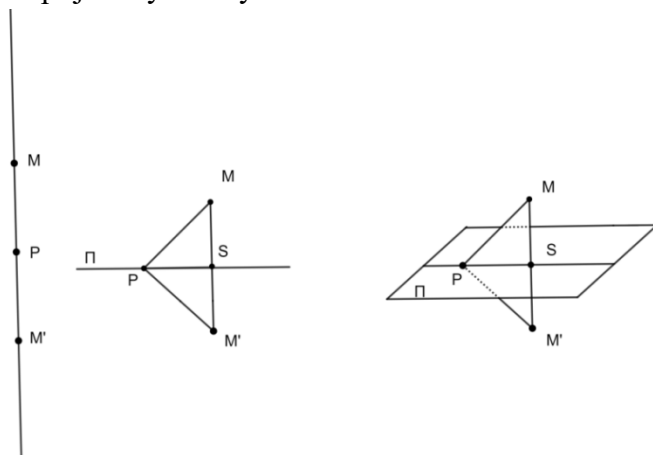
Ако је $\det(A) = 1$ таква изометрија се назива *директна* изометрија. У супротном, ако је $\det(A) = -1$ таква изометрија се назива *индиректна*.

Посебно, обзиром да је ту $\det A = (-1)^m$, симетрија σ еуклидског простора E димензије n , са основом Π димензија k , је директна ако и само ако је $m = n - k$ паран. Ако је, на пример, Π хиперраван, тада је $m = 1$, па је симетрија σ индиректна.

4.1.5 Теорема:

а) Изометрија σ еуклидског простора E је рефлексива ако и само ако је скуп свих њених инваријантних тачака једна хиперраван у E .

б) Изометрија σ еуклидске равни E је рефлексива ако и само ако је индиректна и ако има бар једну инваријантну тачку.



Доказ: а) Нека је хиперраван Π скуп свих инваријантних тачака изометрије σ и нека је M било која тачка из простора E која није у Π . Тада је $\sigma M = M' \neq M$ и за сваку тачку $P \in \Pi$ важи $\sigma P = P$, а тиме и $\delta(P, M) = \delta(P, M')$. То даље значи да је $\Pi \subset \Sigma$, где је Σ медијатриса дужи MM' . Како је и Σ хиперраван у E , онда мора бити $\Pi = \Sigma$. Одавде следи и само тврђење, јер су тиме тачке M и M' симетричне и у односу на Π , па је тако Π основа изометрије σ .

Напомена: Теорема 2.1.1 даје исти овакав закључак само у случају када је посматрани простор димензије 2. Специјално, када је димензија посматраног простора 2, одговарајућа теорема је теорема 2.1.1. Када је простор димензије 3, у приступу који је коришћен за изучавање ових простора, раванска рефлексива је дефинисана као неидентична изометријска трансформација чији је скуп инваријантних тачака раван.

б) Прво, како је изометрија σ индиректна, она није коинциденција, па постоји бар једна тачка A за коју је $\sigma A = A' \neq A$. Ако је P било која инваријантна тачка од σ , као и у претходном, следи да је она на медијатриси Π дужи AA' . Сада је $\omega = \sigma_{\Pi} \circ \sigma$ изометрија која фиксира P и A , а тиме и све тачке праве PA . Даље, како је та изометрија ω директна и права PA хиперраван у E , на основу а) следи да права PA није цео скуп инваријантних тачака изометрије ω . Зато она има и

неку инваријантну тачку Q која није на правој PA . Тиме ω фиксира и све тачке равни $(P, A, Q) = E$, па је тако $\omega = \varepsilon$, тј. $\sigma_{\Pi} \circ \sigma = \varepsilon$, а тиме и $\sigma_{\Pi} = \sigma$.

□

Напомена: Теорема 2.1.6 даје исти овакав закључак само у случају када је посматрани простор димензије 2.

Претходном теоремом је дата карактеризација рефлексиија еуклидског простора E . Наредном теоремом ће бити дате везе рефлексиија са осталим симетријама.

4.1.6 Теорема:

- а) Ако основа Δ симетрије σ_{Δ} није у основи Π рефлексиије σ_{Π} простора E , тада је скуп свих инваријантних тачака композиције $\omega = \sigma_{\Delta} \circ \sigma_{\Pi}$ пресек $\Delta \cap \Pi$.
- б) Рефлексиија σ_{Π} комутира са симетријом σ_{Δ} простора E ако и само ако је $\Delta \subset \Pi$ или $\Delta \perp \Pi$.
- в) Ако су основе рефлексиије σ_{Π} и неке симетрије σ_{Δ} управне, тада је и композиција $\omega = \sigma_{\Delta} \circ \sigma_{\Pi}$ симетрија у односу на њихов пресек $\Gamma = \Delta \cap \Pi$.
- г) Транслација за вектор $a = \overrightarrow{AB}$ је композиција $\sigma_P \circ \sigma_A$ централних симетрија σ_A и σ_P , где је P средиште дужи AB .
- д) Транслација τ за не-нула вектор $a = \overrightarrow{AB}$ је композиција $\sigma_{\Gamma} \circ \sigma_{\Pi}$ рефлексиија σ_{Π} и σ_{Γ} , где је Γ медијатриса од AB и Π хиперраван која садржи A и која је паралелна са Γ .

Доказ:

- а) Прво, ако је $\omega A = A$ и $\sigma_{\Pi} A = B$, тада је и $\sigma_{\Delta} B = A$. Уз то мора бити и $B = A$, јер би у супротном, у медијатриси дужи AB , тј. хиперравни Π биле и све тачке из Δ . Зато је тачка A и у Π и у Δ , па је скуп свих инваријантних тачка изометрије ω пресек $\Delta \cap \Pi$.
- Напомена:* Теореме 2.1.7 и 3.2.5 дају исте овакве закључке само у случајевима када је посматрани простор димензије 2, односно 3.

- б) Према теорему 2. рефлексиија $\tau = \sigma_{\Pi}$ комутира са симетријом σ_{Δ} ако и само ако је и $\tau \Delta = \Delta$. Ако потпростор $\Delta = S + W$ садржи и неку тачку A која није у Π , из релације $\tau \Delta = \Delta$ следи да он садржи и тачку τA , а тиме и све тачке праве $\Gamma = (A, \tau A)$. Како је та права ортогонална на хиперравни $\Pi = P + U$, њена директриса мора бити $U^{\perp}$. Сада се $\Gamma \subset \Delta$ своди на $U^{\perp} \subset W$, па је тада и $\Delta = A + W$ управно на Π .

Напомена: Теореме 2.1.9 и 3.2.7 дају исте овакве закључке само у случајевима када је посматрани простор димензије 2, односно 3.

- в) Како је $\Delta \perp \Pi$, биће и $\sigma_{\Pi} \circ \sigma_{\Delta} = \sigma_{\Delta} \circ \sigma_{\Pi} = \omega$, па је и $\omega^2 = \varepsilon$. Према теорему 2. тиме је и ω и једна симетрија. При том је, на основу а) њена основа управо $\Delta \cap \Pi$.

- г) Ако је M било која тачка простора E и $\sigma_A M = S$, $\sigma_P S = N$, на основу Талесове теореме је и $MN:AP = 2$. Како је P средиште дужи AB , то управо значи да ту мора бити и $\overrightarrow{MN} = a$. Отуда је $\tau_a M = N$, а самим тим и $\tau_a = \sigma_P \circ \sigma_A$.

д) Како је права Δ , односно права AB ортогонална на хиперравнима Π и Γ , прво на основу в) следи да је $\sigma_{\Delta} \circ \sigma_{\Pi} = \sigma_A$ и $\sigma_{\Gamma} \circ \sigma_{\Delta} = \sigma_P$, а затим и на основу г) да је $\sigma_{\Gamma} \circ \sigma_{\Pi} = \sigma_P \circ \sigma_A$ управо translација τ_a .

□

Сада се претходна теорема може лако преформулисати за еуклидске просторе E димензија 2 и 3 и одговарајуће осне и равanske симетрије.

1) Изометрија ω еуклидске равни E^2 је централна симетрија, односно translација ако и само ако је композиција $\omega = \sigma_b \circ \sigma_a$ две осне симетрије чије су осе ортогоналне, односно паралелне.

2) Изометрија ω еуклидског простора E^3 је централна симетрија ако и само ако је композиција једне рефлексije σ_{Π} и једне осне симетрије σ_{Δ} чија је оса Δ ортогонална равни Π .

3) Изометрија еуклидског простора E^3 је translација ако и само ако је композиција $\sigma_{\Gamma} \circ \sigma_{\Pi}$ неке две његове рефлексije σ_{Γ} и σ_{Π} са паралелним основама, тј. хиперравнима Π и Γ .

4.1.7 Теорема: Свака изометрија σ еуклидског простора E димензије n се може представити као композиција највише $n + 1$ његових рефлексija.

Доказ: Читалац може наћи доказ овог тврђења у [5](погледати литературу).

4.2 Примери задатака

4.2.1 Задатак : Нека је дата тачка $M(3,4)$ и права $p: y + 2x - 3 = 0$. Одреди координате тачке $M'(x', y')$ настале од тачке M оном рефлексијом у односу на праву p .

Решење

Прво једначину праве p преведемо у експлицитни облик. Добије се $p: y = -2x + 3$. Дакле, коефицијент правца ове праве је $k_1 = -2$.

Тачке M и M' се налазе на правој l која је нормална на праву p . Ово значи да је коефицијент правца праве l једнак $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$. Дакле, права l има једначину $l: y = \frac{1}{2}x + n$, где слободан члан n тек треба да се одреди.

Како и права l садржи тачку $M(3,4)$, то значи и да координате тачке M задовољавају једначину праве l па када се њене координате уврсте у једначину праве l добија се:

$$4 = \frac{3}{2} + n$$

па се одавде добија

$$n = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Дакле, права l има једначину $l: y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Правна l је нормална на праву p , па се њих две морају сећи у једној тачки. Нека је то тачка N . Та тачка N је средиште дужи MM' . Координате тачке N тек треба одредити. За почетак, x —координата тачке N се добије када се изједначе једначине правих l и p . Добија се:

$$-2x + 3 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

па се решавањем ове једначине добија

$$x = \frac{1}{5}$$

y —координата тачке N се добије када се x —координата тачке N уврсти у било коју једначину од правих l и p . Нпр, уврсти се у једначину праве $p: y = -2x + 3$. Добије се:

$$y = -2 \cdot \frac{1}{5} + 3$$

$$y = -\frac{2}{5} + 3$$

$$y = \frac{13}{5}.$$

Дакле, тачка N има координате $N\left(\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

Већ је речено да је тачка N средиште дужи MM' , односно, њене координате се могу добити и на следећи начин $N(x, y) = \left(\frac{3+x'}{2}, \frac{4+y'}{2}\right)$

односно

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right) = \left(\frac{3+x'}{2}, \frac{4+y'}{2}\right).$$

Како је ово једнакост две уређена пара, одавде се добију следеће једначине:

$$\frac{1}{5} = \frac{3+x'}{2}$$

$$\frac{13}{5} = \frac{4+y'}{2}$$

$$2 = 15 + 5x'$$

$$26 = 20 + 5y'$$

$$-2\frac{3}{5} = x'$$

$$1\frac{1}{5} = y'$$

Дакле, координате тачке $M'(x', y')$ су: $M'(-2\frac{3}{5}, 1\frac{1}{5})$.

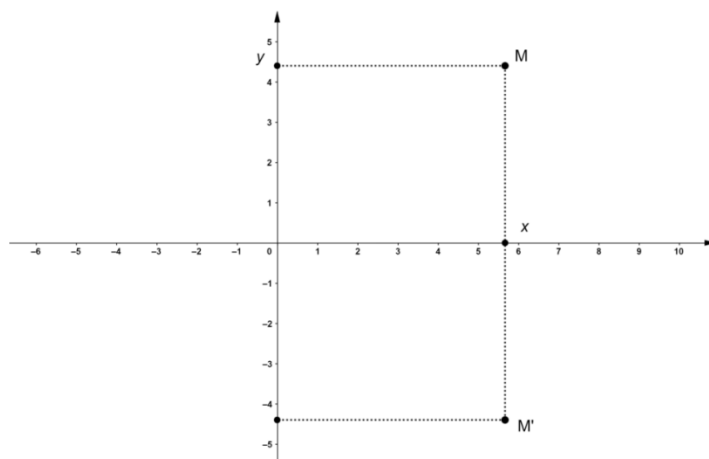
□

4.2.2 Задатак : Нека тачка $M \in E^2$ има координате $M(x, y)$. Одредити формуле пресликавања оном рефлексijом у E^2 у координатном и матричном облику ако је оса рефлексije:

- а) x –оса;
- б) y –оса;
- в) произвољна права $t: ax + by + c = 0$;
- г) права $y = x$;
- д) права $y = -x$.

Решење:

а) Нека је тачка $M'(x', y')$ настала од тачке $M(x, y)$ оном рефлексijом у односу на x –осу.



Као што се може уочити са слике, x – координата тачке M' се не разликује у односу на x – координату тачке M .

Како је тачка M из горње полуравни прешла у доњу и њено растојање од x –осе се није променило, то значи да је y –координата тачке M' исте апсолутне вредности као и y –координата тачке M , само супротног знака, а то управо значи да је y –координата тачке M' једнака $-y$.

Дакле, тачка $M(x, y)$ се пресликава у тачку $M'(x, -y)$, па ће формуле пресликавања

бити следеће:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}.$$

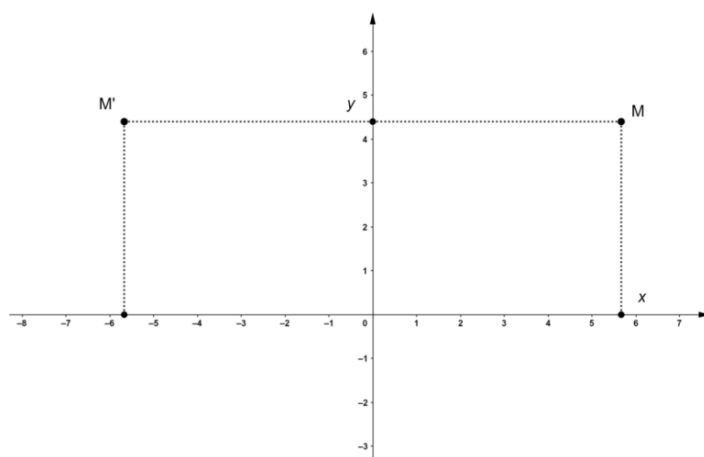
Исти закључак се добија када се, у почетном положају, тачка $M(x, y)$ налази у доњој полуравни јер је $-(-y) = y$.

У матричном облику, пресликавање је потребно представити у форми $Y = AX + B$, где је A матрица пресликавања, B слика координатног почетка, а Y и X матрице координата тачака M' и M . Добија се :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Овде нема матрице B јер се координатни почетак већ налази на x —оси.

б) Нека је тачка $M'(x', y')$ настала од тачке $M(x, y)$ оном рефлексijом у односу на y —осу.



Као што се може уочити са слике, y — координата тачке M' се не разликује у односу на y — координату тачке M .

Како је тачка M из десне полуравни прешла у леву и њено растојање од y —осе се није променило, то значи да је x —координата тачке M' исте апсолутне вредности као и x —координата тачке M , само супротног знака, а то управо значи да је x —координата тачке M' једнака $-x$.

Дакле, тачка $M(x, y)$ се пресликава у тачку $M'(-x, y)$, па ће формуле пресликавања бити следеће:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned}.$$

Исти закључак се добија када се, у почетном положају, тачка $M(x, y)$ налази у левој полуравни јер је $-(-x) = x$.

У матричном облику, добија се :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Овде нема матрице B јер се координатни почетак већ налази на y —оси.

в) Нека се тачка $M(x_1, y_1)$ пресликава овом рефлексијом у тачку $M'(x_2, y_2)$. Свака права, па и права m , има свој вектор нормале $\vec{n}_m$ који је увек нормалан на њу, па ако је права m задата једначином $ax + by + c = 0$, њен вектор ће имати координате $\vec{n}_m(a, b)$.

С обзиром да су тачке M и M' симетричне у односу на праву m , то значи да је права MM' нормална на праву m , па ће бити паралелна са вектором $\vec{n}_m$. Како ова права MM' мора да пролази и кроз тачку $M(x_1, y_1)$, једначина ове праве ће бити

$$p: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b}.$$

Слично као у задатку 4.2.1, постоји тачка $N(x_N, y_N)$ која је средиште дужи MM' и која припада правој m . Да би се одредиле координате тачке N , потребно употребити одређене системе једначина. Прво се једначина праве p изједначи са неким параметром t . Добија се :

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = t.$$

Одавде се изражавањем променљивих x и y преко параметра t добија следећи систем једначина:

$$\begin{cases} x = ta + x_1 \\ y = tb + y_1 \end{cases}.$$

Сада се овако изражени x и y употребе у једначини праве $m: ax + by + c = 0$. Добија се:

$$m: a(ta + x_1) + b(tb + y_1) + c = 0$$

Сада се одавде изрази параметар t на следећи начин:

$$\begin{aligned} ta^2 + ax_1 + tb^2 + by_1 + c &= 0 \\ t(a^2 + b^2) &= -ax_1 - by_1 - c \\ t &= \frac{-ax_1 - by_1 - c}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Сада се овако изражен параметар t употреби у систему

$$\begin{cases} x = ta + x_1 \\ y = tb + y_1 \end{cases}$$

па се добије

$$\begin{aligned} x &= \frac{-ax_1 - by_1 - c}{a^2 + b^2} \cdot a + x_1 \\ y &= \frac{-ax_1 - by_1 - c}{a^2 + b^2} \cdot b + y_1 \end{aligned}$$

и на овај начин су добијене координате тачке N .

Дакле

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{-ax_1 - by_1 - c}{a^2 + b^2} \cdot a + x_1 \\ y_N &= \frac{-ax_1 - by_1 - c}{a^2 + b^2} \cdot b + y_1 \end{aligned}$$

односно

$$N(x_N, y_N) = \left(\frac{-ax_1 - by_1 - c}{a^2 + b^2} \cdot a + x_1, \frac{-ax_1 - by_1 - c}{a^2 + b^2} \cdot b + y_1 \right).$$

С обзиром да је та тачка управо средиште дужи MM' , то значи да се њене координате могу добити и на следећи начин

$$N(x_N, y_N) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Када се ово изједначи са претходним представљањем координата тачке N добија се

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} \cdot a + x_1, \frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} \cdot b + y_1\right).$$

На основу тога се добије систем

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2}{2} &= \frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} \cdot a + x_1 \\ \frac{y_1+y_2}{2} &= \frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} \cdot b + y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= 2 \cdot \left(\frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} \cdot a + x_1\right) - x_1 \\ y_2 &= 2 \cdot \left(\frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} \cdot b + y_1\right) - y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= 2a \cdot \frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} + x_1 \\ y_2 &= 2b \cdot \frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} + y_1\end{aligned}$$

и на овај начин се добијају координате тачке $M'(x_2, y_2)$.

Сада ове једначине треба раздвојити по x_1 и y_1 .

$$\begin{aligned}x_2 &= 2a \cdot \frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} + x_1 \\ y_2 &= 2b \cdot \frac{-ax_1-by_1-c}{a^2+b^2} + y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-2a^2x_1-2aby_1-2ac}{a^2+b^2} + x_1 \\ y_2 &= \frac{-2abx_1-2b^2y_1-2bc}{a^2+b^2} + y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-2a^2x_1-2aby_1-2ac+x_1(a^2+b^2)}{a^2+b^2} \\ y_2 &= \frac{-2abx_1-2b^2y_1-2bc+y_1(a^2+b^2)}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2} x_1 - \frac{2ab}{a^2+b^2} y_1 - \frac{2ac}{a^2+b^2} \\ y_2 &= -\frac{2ab}{a^2+b^2} x_1 + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} y_1 - \frac{2bc}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Ово су формуле којима је задата осна рефлексија у E^2 којом се тачка $M(x_1, y_1)$ пресликава у тачку $M'(x_2, y_2)$ у односу на праву $m: ax + by + c = 0$.

У матричном облику, ово пресликавање би имало облик

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2ac \\ -2bc \end{bmatrix}$$

па би једначине пресликавања биле

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{a^2+b^2} ((b^2-a^2) \cdot x_1 - 2ab \cdot y_1 - 2ac) \\ y_2 &= \frac{1}{a^2+b^2} (-2ab \cdot x_1 - (a^2-b^2) \cdot y_1 - 2bc)\end{aligned}$$

г) Нека се тачка $M(t, z)$ слика у тачку $M(t', z')$.

Ако се посматра права $y = x$, односно $-x + y = 0$, види се да је $a = -1, b = 1, c = 0$ па за

$$t' = \frac{1}{a^2 + b^2} ((b^2 - a^2) \cdot t - 2ab \cdot z - 2ac)$$

$$z' = \frac{1}{a^2 + b^2} (-2ab \cdot t - (a^2 - b^2) \cdot z - 2bc)$$

када се убаци $a = -1, b = 1, c = 0$ биће

$$t' = \frac{1}{2} \cdot 2z$$

$$z' = \frac{1}{2} \cdot 2t$$

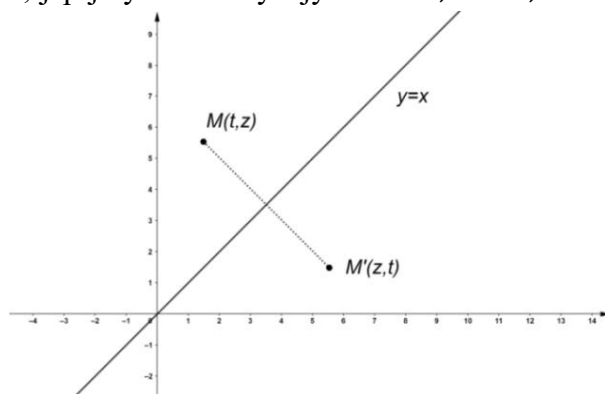
односно

$$\begin{matrix} t' = z \\ z' = t \end{matrix}.$$

Одавде се види да би за ову праву ово пресликавање у матричном облику било дато са

$$\begin{bmatrix} t' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix}.$$

И ово се уклапа са матрицом пресликавања у која је дата у односу на произвољну праву $m: ax + by + c = 0$, јер је у овом случају $a = -1, b = 1, c = 0$.



д) Као специјалан пример, може се посматрати и осна рефлексја у односу на праву $y = -x$, односно $x + y = 0$. Одавде се види да је $a = b = 1$ и $c = 0$.

Дакле, за

$$t' = \frac{1}{a^2 + b^2} ((b^2 - a^2) \cdot t - 2ab \cdot z - 2ac)$$

$$z' = \frac{1}{a^2 + b^2} (-2ab \cdot t - (a^2 - b^2) \cdot z - 2bc)$$

када се убаци $a = b = 1$ и $c = 0$ биће

$$t' = \frac{1}{2} \cdot (-2z)$$

$$z' = \frac{1}{2} \cdot (-2t)$$

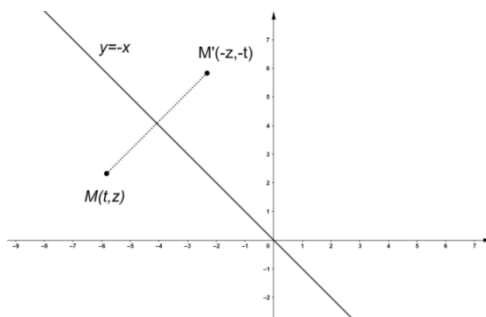
и на крају

$$\begin{matrix} t' = -z \\ z' = -t \end{matrix}.$$

Одавде се види да би за ову праву ово пресликавање у матричном облику било дато са

$$\begin{bmatrix} t' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix}.$$

Ово се уклапа са матрицом пресликавања у која је дата у односу на произвољну праву $m: ax + by + c = 0$, јер је у овом случају $a = b = 1$ и $c = 0$.



У свим овим случајевима, детерминантна матрице пресликавања је једнака -1 , што потврђује да је ово пресликавање једна изометрија и то индиректна.

□

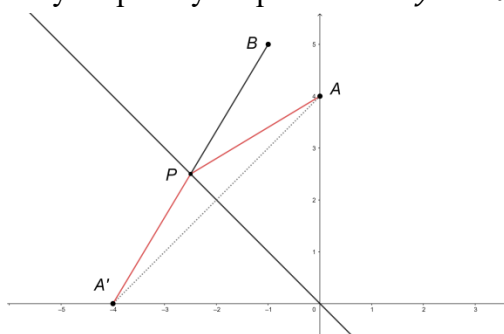
4.2.3 Задатак (Државно такмичење за ученике VIII разреда основних школа, 14.05.2022.): Дате су тачке $A(0,4)$ и $B(-1,5)$. На правој $y = -x$ одреди тачку P тако да збир дужина дужи AP и BP буде минималан.

Решење: Ако се мало боље уочи, обе тачке A и B се налазе са исте стране праве $y = -x$. Такође, тачка P испуњава исте услове као тачка C у задатку 5 (о два брода) који је урађен међу задацима у E^2 . Дакле, процес одређивања координата тачке P се може поистоветити са процесом одређивања тачке C у задатку 5, само прилагођено на овај приступ. Прво треба тачку A пресликати оном рефлексијом у односу на праву $y = -x$. У претходном задатку, у примеру д), је управо речено како изгледају формуле пресликавања у односу на дату праву.

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

С обзиром да треба пресликати тачку $A(x, y) = A(0,4)$, њена слика $A'(x', y')$ ће имати координате $A'(-4,0)$.

Тражена тачка P налази у пресеку праве $y = -x$ и праве $p(A', B)$.



Једначина праве $A'B$ је: $p: y - 5 = \frac{0-5}{-4-(-1)} \cdot (x - (-1))$, односно $p: y = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$.

Дакле, тачка P се налази у пресеку ових правих $y = -x$ и $p: y = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$ па се њена

x –координата добије преко једначине:

$$-x = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3}.$$

и решавањем ове једначине се добија $x = -\frac{5}{2}$. Сада се ова вредност употреби у некој од једначина $y = -x$ или $p: y = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$. Лакше је у једначини $y = -x$, па се добија да је y –координата тачке P једнака $y = \frac{5}{2}$. Дакле, тачка P има координате $P(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. У задатку 5 је већ показано да је тачка P једина тачка таква да је $AP+BP$ минимално.

□

4.2.4 Задатак : Дате су формуле пресликавања:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{13}(5x - 12y - 16) \\y' &= \frac{1}{13}(-12x - 5y - 24) \quad .\end{aligned}$$

Доказати да је датим формулама дефинисана једна рефлексивна у E^2 .

Решење:

Дате формуле се могу записати и у следећем облику:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{16}{13} \\y' &= -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{24}{13} \quad .\end{aligned}$$

Одавде следи да се у матричном облику ово пресликавање може представити на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{16}{13} \\ -\frac{24}{13} \end{bmatrix} \quad .$$

За почетак, овде се користи теорема 4.1.2 која каже: Пресликавање $\omega: E \rightarrow E$ је изометрија ако и само ако је и афина трансформација тог простора, чији је линеарни део L неки ортогоналан оператор еуклидског векторског простора $V = \vec{E}$. Дакле, како линеарни део овог пресликавања треба да буде ортогоналан оператор, то значи и да матрица овог пресликавања дата са

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

треба да буде ортогонална тј. да важи $A \cdot A^T = E$. Ово се лако покаже:

$$\begin{aligned}A \cdot A^T &= \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} = \\&= \begin{bmatrix} \frac{25}{169} + \frac{144}{169} & -\frac{60}{169} + \frac{60}{169} \\ -\frac{60}{169} + \frac{60}{169} & \frac{25}{169} + \frac{144}{169} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{169}{169} & 0 \\ 0 & \frac{169}{169} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.\end{aligned}$$

Дакле, према теореме 4.1.2, ово пресликавање је изометрија.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{vmatrix} = -\frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{169}{169} = -1$$

па је ова изометрија индиректна.

Сада треба одредити скуп инваријантних тачака. То су све тачке чије координате задовољавају систем једначина

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{16}{13} \\ y &= -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{24}{13} \end{aligned} .$$

Решавањем овог система једначина се добија:

$$\begin{aligned} 13x &= 5x - 12y - 16 \\ 13y &= -12x - 5y - 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x + 12y + 16 &= 0 \\ 12x + 18y + 24 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4 &= 0 \\ 2x + 3y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

а ово, у ствари, значи да је једначином $2x + 3y + 4 = 0$ управо задата једна права која је инваријантна у односу на ово пресликавање. Како се ово пресликавање одвија у E^2 , а права $2x + 3y + 4 = 0$ је димензије један, то значи да је добијена права управо хиперраван у простору E^2 .

На основу теореме 4.1.5 која тврди: Изометрија σ еуклидског простора E је рефлексija ако и само ако је скуп свих њених инваријантних тачака једна хиперраван у E , добија се да је пресликавање задато са формулама

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{13}(5x - 12y - 16) \\ y' &= \frac{1}{13}(-12x - 5y - 24) \end{aligned}$$

заиста рефлексija. Оса ове рефлексije је права $p: 2x + 3y + 4 = 0$. $\square$

4.2.5 Задатак

- а) Показати да је композиција две осне рефлексije чије су осе рефлексije x – оса и y – оса једна централна симетрија и наћи центар те симетрије;
- б) Показати да је композиција две осне рефлексije чије су осе рефлексije праве $t_1: y = x$ и $t_2: y = -x$ једна централна симетрија и наћи центар те симетрије;
- в) Нека су дате праве $p_1: y = 3x + 2$ и $p_2: y = 3x - 1$. Доказати да се композицијом двеју осних рефлексija $S_{p_2} \circ S_{p_1}$ чије су основе ове две праве добија једна translација и одредити вектор translације.
- г) Показати да је композиција $S_{t_1} \circ S_{t_2}$ две осне рефлексije чије су осе рефлексije праве $t_1: y = \sqrt{3}x$ и $t_2: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ једна ротација и наћи центар те ротације и угао ротације.

Решење:

а) Матрични запис пресликавања осном рефлексijом у односу на x –осу је већ урађен у задатку 4.2.2 а) и он изгледа овако :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Матрични запис пресликавања осном рефлексijом у односу на y –осу је већ урађен у задатку 4.2.2 б) и он изгледа овако :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

На основу теореме 4.1.6 б) где се тврди: Рефлексija σ_{Π} комутира са симетријом σ_{Δ} простора E ако и само ако је $\Delta \subset \Pi$ или $\Delta \perp \Pi$, добија се да осне рефлексije у односу на ове две праве комутирају јер су координатне осе нормалне једна на другу. Дакле, није битно којим редоследом ће се ове две рефлексije ставити у композицију. Нека су S_x и S_y , редом, рефлексije у односу на x –осу и y –осу и нека буде $S_x \circ S_y$. Добија се:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Матрица ове композиције је

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

и њена детерминанта је једнака 1, што значи да је ова композиција једна директна изометријска трансформација.

На основу теореме 4.1.6 а) где се тврди: Ако основа Δ симетрије σ_{Δ} није у основи Π рефлексije σ_{Π} простора E , тада је скуп свих инваријантних тачака композиције $\omega = \sigma_{\Delta} \circ \sigma_{\Pi}$ пресек $\Delta \cap \Pi$, добија се да је скуп фиксних тачака једино пресек ових двеју оса рефлексija, односно једина фиксна тачка је координатни почетак. На основу последице теореме 4.1.6 где се тврди: Изометрија ω еуклидске равни E^2 је централна симетрија, односно translација ако и само ако је композиција $\omega = \sigma_b \circ \sigma_a$ две осне симетрије чије су осе ортогоналне, односно паралелне, добија се да је ова композиција једна централна симетрија и центар те централне симетрије је њена једина инваријантна тачка, односно координатни почетак.

Дакле, добија се $:S_x \circ S_y(x) = S_o(x)$ и

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

па формуле овог пресликавања изгледају

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

б) Матрични запис пресликавања осном рефлексијом у односу на праву $t_1: y = x$ је већ урађен у задатку 4.2.2 г) и он изгледа овако :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Матрични запис пресликавања осном рефлексијом у односу на праву $t_2: y = -x$ је већ урађен у задатку 4.2.2 д) и он изгледа овако :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Поново, на основу теореме 4.1.6 б) где се тврди: Рефлексија σ_Π комутира са симетријом σ_Δ простора E ако и само ако је $\Delta \subset \Pi$ или $\Delta \perp \Pi$, добија се да осне рефлексије у односу на ове две праве комутирају јер су праве t_1 и t_2 нормалне једна на другу. Опет, није битно којим редоследом ће се ове две рефлексије ставити у композицију. Нека буде $S_{t_1} \circ S_{t_2}$. Добија се:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Овде нема матрице која показује шта је слика координатног почетка јер координатни почетак припада и једној и другој оси рефлексије.

Матрица ове композиције је

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

и њена детерминанта је једнака 1, што значи да је ова композиција једна директна изометријска трансформација.

Опет, на основу теореме 4.1.6 а) где се тврди: Ако основа Δ симетрије σ_Δ није у основи Π рефлексије σ_Π простора E , тада је скуп свих инваријантних тачака композиције $\omega = \sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi$ пресек $\Delta \cap \Pi$, добија се да је скуп фиксних тачака једино пресек ових двеју оса рефлексија, односно једина фиксна тачка је координатни почетак. На основу последице теореме 4.1.6 где се тврди: Изометрија ω еуклидске равни E^2 је централна симетрија, односно translација ако и само ако је композиција $\omega = \sigma_b \circ \sigma_a$ две осне симетрије чије су осе ортогоналне, односно паралелне, добија се да је ова композиција једна централна симетрија и центар те централне симетрије је њена једина инваријантна тачка, односно координатни почетак.

Дакле, добија се $:S_{t_1} \circ S_{t_2}(x) = S_o(x)$ и

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

па формуле овог пресликавања изгледају овако:

$$\begin{aligned}x' &= -x \\ y' &= -y\end{aligned}.$$

Из примера а) и б) се види да је у оба случаја добијена иста матрица пресликавања и исте формуле пресликавања. Исто би се добило када би била посматрана композиција осних рефлексија у односу на две произвољне нормалне праве чија је пресечна тачка координатни почетак. Дакле, свака централна симетрија се може представити на бесконачно много начина као композиција две осне рефлексије чије су осе нормалне и секу се у центру те симетрије.

в) Ове две праве у равни E^2 јесу хиперравни и паралелне су јер имају исте коефицијенте правца (3), па на основу последице теореме 4.1.6 њихова композиција већ јесте једна translација. Али, хајде да се ово покаже експлицитно. На основу задатка 4.2.2. под в) матрица осне рефлексије чија је основа права p_1 изгледа овако ($a = -3, b = 1, c = -2$):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Детерминантна ове матрице је -1 што и треба да се деси јер је осна рефлексија индиректна трансформација.

У матричном облику, на основу задатка 4.2.2. ово пресликавање има облик:

$$Y = A_1 X + B$$

односно

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

На основу истог задатка, матрица осне рефлексије чија је основа права p_2 изгледа исто као прошла јер је $a = -3, b = 1, c = 1$, а у матрици коефицијент c не фигурише. Дакле,

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Наравно, детерминатна је опет -1 .

У матричном облику, на основу задатка 4.2.2. ово пресликавање има облик:

$$Y = A_2 X + B$$

односно

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Композиција ове две рефлексије $S_{p_2} \circ S_{p_1}$ ће имати следећи облик:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{30}{25} \\ -\frac{10}{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица композиције ове две осне рефлексије $A_{1,2}$ се добија као производ матрица A_1 и A_2 . Она изгледа овако:

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а ово је јединична матрица I и њена детерминантна је 1, а то значи да је ова композиција једна директна изометријска трансформација.

Формуле овог пресликавања би биле:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{9}{5} \\ y' &= y - \frac{3}{5} \end{aligned}$$

а одавде се види да ово пресликавање нема инваријантних тачака.

Дакле, ово је једна директна изометријска трансформација које нема инваријантних тачака, па је она управо једна translација.

Матрица $B = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ показује шта је слика координатног почетка приликом

пресликавања композицијом $S_{p_2} \circ S_{p_1}$, односно, показује за који вектор се померио(транслирао) координатни почетак и то је управо тражени вектор translације.

г) Ако се посматра права $t_1: y = \sqrt{3}x$, она у имплицитном облику има запис $t_1: -\sqrt{3}x + y = 0$, па на основу задатка 4.2.2 в) када се узме $a = -\sqrt{3}, b = 1, c = 0$ њен матрични запис је:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Када се посматра права $t_2: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, она у имплицитном облику има запис $t_2: -\frac{\sqrt{3}}{3}x + y = 0$, па на основу задатка 4.2.2 в) када се узме $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, b = 1, c = 0$ њен матрични запис је:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

За разлику од примера а) и б), праве t_1 и t_2 нису нормалне једна на другу, па је овде битан редослед њихових осних рефлексја у композицији.

Ако се посматра $S_{t_1} \circ S_{t_2}$ добија се

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Матрица ове композиције је

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

и њена детерминантна је једнака 1, што значи да је ово једна директна изометријска трансформација.

Поново, на основу теореме 4.1.6 а) где се тврди: Ако основа Δ симетрије σ_Δ није у основи Π рефлексје σ_Π простора E , тада је скуп свих инваријантних тачака композиције $\omega = \sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi$ пресек $\Delta \cap \Pi$, добија се да је скуп фиксних тачака једино пресек ових двеју оса рефлексја, односно једина фиксна тачка је координатни почетак.

Дакле, ова композиција је директна изометрија и има једну инваријантну тачку. Осе рефлексја у овом случају нису нормалне, па ова композиција не представља централну симетрију. Једино што преостаје је да ова композиција представља ротацију чији је центар управо та инваријантна тачка. Дакле, ова композиција $S_{t_1} \circ S_{t_2}$ представља ротацију око координатног почетка и угао ротације је једнак двоструком углу између правих t_1 и t_2 .

Угао који гради права t_1 са x -осом је једнак: $\alpha_1 = \arctg(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Угао који гради права t_2 са x -осом је једнак: $\alpha_2 = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Угао између правих t_1 и t_2 је: $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Ово значи да је угао ове ротације једнак: $\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Дакле, добија се : $S_{t_1} \circ S_{t_2} = R_{O,\theta}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ и

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

па су формуле пресликавања

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) \\ y' &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \end{aligned}.$$

□

Напомена: Матрица

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

је матрица ротације за произвољан угао θ .

4.2.6 Задатак : У простору E^3 је задато пресликавање формулама

$$x' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z - 3)$$

$$y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6).$$

$$z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z + 3)$$

Испитати да ли је ово изометрија и, ако јесте, одредити скуп инваријантних тачака.

Решење:

Када се формуле овог пресликавања запишу на сличан начин добија се

$$x' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) - 1$$

$$y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) - 2$$

$$z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 1$$

па је матрични облик овог пресликавања

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

што значи да је матрица овог пресликавања

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Као и у претходном задатку, према теореме 4.1.2, треба доказати да је матрица A ортогонална, односно да је $A \cdot A^T = E$. Ово се лако покаже:

$$A \cdot A^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Дакле, ово пресликавање јесте изометрија према теореме 4.2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} + \frac{1}{27} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} = -\frac{27}{27} = -1$$

па је ова изометрија индиректна.

Сада треба одредити скуп инваријантних тачака. То су све тачке чије координате задовољавају систем једначина

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y, \\ z' &= z \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3}(2x - 2y + z) - 1 \\y &= \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) - 2 \\z &= \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 1\end{aligned}$$

Решавањем овог система једначина се добија

$$\begin{aligned}3x &= 2x - 2y + z - 3 \\3y &= -2x - y + 2z - 6 \\3z &= x + 2y + 2z + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= -3 \\2x + 4y - 2z &= -6 \quad /:2 \\-x - 2y + z &= 3 \quad / \cdot (-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= -3 \\x + 2y - z &= -3 \\x + 2y - z &= -3\end{aligned}$$

односно, овде учествује само једна једначина $x + 2y - z = -3$, а ово је једначина равни $x + 2y - z + 3 = 0$. То значи да је раван $\pi: x + 2y - z + 3 = 0$ решење овог система једначина, односно, раван π је скуп инваријантних тачака овог пресликавања. Како је ово пресликавање у E^3 , а раван π је димензије два, то значи да је раван π једна хиперраван у E^3 .

Поново, као у претходном задатку, на основу теореме 4.1.5 се добија да пресликавање дато формулама

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}(2x - 2y + z - 3) \\y' &= \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6) \\z' &= \frac{1}{3}(x + 2y + 2z + 3)\end{aligned}$$

јесте рефлексја. Њена основа је раван $\pi: x + 2y - z + 3 = 0$.

□

4.2.7 Задатак : Одредити формуле пресликавања раванском рефлексјом у E^3 у односу на произвољну раван $\pi: ax + by + cz + d = 0$.

Решење:

Нека се тачка $M(x_1, y_1, z_1)$ пресликава овом рефлексјом у тачку $M'(x_2, y_2, z_2)$. Свака раван, па и раван π , има свој вектор равни $\vec{n}_\pi$ који је увек нормалан на њу, па ако је раван π задата једначином $ax + by + cz + d = 0$, њен вектор ће имати координате $\vec{n}_\pi(a, b, c)$.

С обзиром да су тачке M и M' симетричне у односу на раван π , то значи да је права MM' нормална на раван π , па ће бити паралелна са вектором равни $\vec{n}_\pi$. Како ова права MM' мора да садржи тачку $M(x_1, y_1, z_1)$, једначина ове праве ће бити

$$p: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}.$$

Слично као у задатку 4.2.1, у простору E^2 , постоји тачка $N(x_N, y_N, z_N)$ која је средиште дужи MM' и која припада равни π . Да би се одредиле координате тачке N , потребно је изједначити једначину праве p са једначином равни π . Прво се једначина праве p изједначи са неким параметром t . Добија се :

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} = t.$$

Одавде се изражавањем променљивих x, y, z преко параметра t добија следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} x &= ta + x_1 \\ y &= tb + y_1. \\ z &= tc + z_1 \end{aligned}$$

Сада се овако изражени x, y, z употребе у једначини равни $\pi: ax + by + cz + d = 0$. Добија се:

$$\pi: a(ta + x_1) + b(tb + y_1) + c(tc + z_1) + d = 0.$$

Сада се одавде изрази параметар t на следећи начин:

$$\begin{aligned} ta^2 + ax_1 + tb^2 + by_1 + tc^2 + cz_1 + d &= 0 \\ t(a^2 + b^2 + c^2) &= -ax_1 - by_1 - cz_1 - d \\ t &= \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Сада се овако изражен параметар t употреби у систему

$$\begin{aligned} x &= ta + x_1 \\ y &= tb + y_1 \\ z &= tc + z_1 \end{aligned}$$

па се добије

$$\begin{aligned} x &= \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot a + x_1 \\ y &= \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot b + y_1 \\ z &= \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot c + z_1 \end{aligned}$$

и на овај начин су добијене координате тачке N .

Дакле

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot a + x_1 \\ y_N &= \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot b + y_1 \\ z_N &= \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot c + z_1 \end{aligned}$$

односно:

$$N(x_N, y_N, z_N) = \left(\frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot a + x_1, \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot b + y_1, \frac{-ax_1 - by_1 - cz_1 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot c + z_1 \right).$$

С обзиром да је та тачка управо средиште дужи MM' , то значи да се њене координате могу добити и на следећи начин:

$$N(x_N, y_N, z_N) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Када се ово изједначи са претходним представљањем координата тачке N добија се

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = \left(\frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot a + x_1, \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot b + y_1, \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot c + z_1\right).$$

На основу тога се добије систем

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2}{2} &= \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot a + x_1 \\ \frac{y_1+y_2}{2} &= \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot b + y_1 \\ \frac{z_1+z_2}{2} &= \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot c + z_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= 2 \cdot \left(\frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot a + x_1\right) - x_1 \\ y_2 &= 2 \cdot \left(\frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot b + y_1\right) - y_1 \\ z_2 &= 2 \cdot \left(\frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} \cdot c + z_1\right) - z_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= 2a \cdot \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} + x_1 \\ y_2 &= 2b \cdot \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} + y_1 \\ z_2 &= 2c \cdot \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} + z_1\end{aligned}$$

и на овај начин се добијају координате тачке $M'(x_2, y_2, z_2)$.

Сада ове једначине треба раздвојити по x_1, y_1, z_1 .

$$\begin{aligned}x_2 &= 2a \cdot \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} + x_1 \\ y_2 &= 2b \cdot \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} + y_1 \\ z_2 &= 2c \cdot \frac{-ax_1-by_1-cz_1-d}{a^2+b^2+c^2} + z_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-2a^2x_1-2aby_1-2acz_1-2ad}{a^2+b^2+c^2} + x_1 \\ y_2 &= \frac{-2abx_1-2b^2y_1-2bcz_1-2bd}{a^2+b^2+c^2} + y_1 \\ z_2 &= \frac{-2acx_1-2bcy_1-2c^2z_1-2cd}{a^2+b^2+c^2} + z_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-2a^2x_1-2aby_1-2acz_1-2ad+x_1(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} \\ y_2 &= \frac{-2abx_1-2b^2y_1-2bcz_1-2bd+y_1(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} \\ z_2 &= \frac{-2acx_1-2bcy_1-2c^2z_1-2cd+z_1(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}x_1 - \frac{2ab}{a^2+b^2+c^2}y_1 - \frac{2ac}{a^2+b^2+c^2}z_1 - \frac{2ad}{a^2+b^2+c^2} \\y_2 &= -\frac{2ab}{a^2+b^2+c^2}x_1 + \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}y_1 - \frac{2bc}{a^2+b^2+c^2}z_1 - \frac{2bd}{a^2+b^2+c^2} \\z_2 &= -\frac{2ac}{a^2+b^2+c^2}x_1 - \frac{2bc}{a^2+b^2+c^2}y_1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}z_1 - \frac{2cd}{a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

Ово су формуле којима је задата раванска рефлексija у E^3 којом се тачка $M(x_1, y_1, z_1)$ пресликава у тачку $M'(x_2, y_2, z_2)$ у односу на раван $\pi: ax + by + cz + d = 0$.

У матричном облику, ово пресликавање би имало облик

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} -a^2+b^2+c^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2-b^2+c^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2ad \\ -2bd \\ -2cd \end{bmatrix}.$$

□

4.2.8 Задатак : Одреди формуле пресликавања у E^3 раванском рефлексijом чија је основа xy -раван.

Решење:

а) Раван xy сече z -осу у тачки $(0,0,0)$ и нормална је на z -осу. За све тачке из те равни је заједничко да је њихова z координата једнака нули, односно $z = 0$. Управо тако и гласи једначина ове равни $\pi_{xy}: z = 0$, односно, $\pi_{xy}: 0x + 0y + z = 0$.

Из једначине се види да је $a = b = 0, c = 1, d = 0$. Када се то уврсти у матрични облик пресликавања добија се:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Ако је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

тада је

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

што на основу теореме 4.1.2 значи да је ово пресликавање једна изометрија.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

па је ова изометрија индиректна.

Дакле, формуле пресликавања изгледају овако:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \\y_2 &= y_1 \\z_2 &= -z_1\end{aligned}$$

Аналогно, ако се као основа рефлексije посматра xz -раван, њена једначина би била $\pi_{xz}: y = 0$, односно $\pi_{xz}: 0x + y + 0z = 0$, па се одавде види да је

$$a = 0, b = 1, c = d = 0.$$

Тада би матрични облик пресликавања био:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

па би формуле пресликавања биле

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= -y_1 \\ z_2 &= z_1 \end{aligned}$$

И овде је $A \cdot A^T = E$, па је ово изометрија и то индиректна.

Ако се као основа рефлексije посматра yz -раван, њена једначина би била $\pi_{yz}: x = 0$, односно $\pi_{xz}: x + 0y + 0z = 0$, па се одавде види да је $a = 1, b = c = d = 0$.

Матрични облик овог пресликавања би био

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

па би формуле пресликавања биле

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \\ y_2 &= y_1 \\ z_2 &= z_1 \end{aligned}$$

И овде је $A \cdot A^T = E$, па је ово изометрија и то индиректна.

□

4.2.9 Задатак : У четвородимензионом еуклидском простору задата је дводимензиона раван $\alpha: x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0$. Ако је тачка $P_1(x_1', x_2', x_3', x_4')$ симетрична тачки $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у односу на раван α , изразити координате тачке P_1 у функцији од координата тачке P .

Решење:

Раван α се може параметризовати на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ x_3 &= -x_4 \end{aligned}$$

па ако се узме да је:

$$x_1 = p, \quad x_3 = q, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

добива се да је $x_2 = -p, \quad x_4 = -q, \quad p, q \in \mathbb{R}$.

На основу тога је $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (p, -p, q, -q) = (p, -p, 0, 0) + (0, 0, q, -q) = p(1, -1, 0, 0) + q(0, 0, 1, -1)$.

па одговарајући векторски потпростор генеришу вектори

$$\vec{a}_1(1, -1, 0, 0) \quad \text{и} \quad \vec{a}_2(0, 0, 1, -1).$$

Даље, нека је тачка N подножје нормале из тачке $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ на раван α . Тада су координате ове тачке $N(p, -p, q, -q)$ за неке $p, q \in \mathbb{R}$.

Тада је вектор $\vec{PN}(p - x_1, -p - x_2, q - x_3, -q - x_4)$ нормалан на векторе $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Због тога је $\vec{PN} \cdot \vec{a}_1 = 0$ и $\vec{PN} \cdot \vec{a}_2 = 0$, односно

$p - x_1 + p + x_2 = 0$ и $q - x_3 + q + x_4 = 0$
па се одавде добија да је

$$p = \frac{x_1 - x_2}{2} \text{ и } q = \frac{x_3 - x_4}{2}$$

и координате тачке N су према томе

$$N\left(\frac{x_1 - x_2}{2}, -\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_3 - x_4}{2}, -\frac{x_3 - x_4}{2}\right).$$

С обзиром да је N средиште дужи PP_1 то значи да је

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_1'}{2} &= p = \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{x_2 + x_2'}{2} &= -p = -\frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{x_3 + x_3'}{2} &= q = \frac{x_3 - x_4}{2} \\ \frac{x_4 + x_4'}{2} &= -q = -\frac{x_3 - x_4}{2} \end{aligned}$$

па се одавде добија да је

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_1'}{2} &= \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{x_2 + x_2'}{2} &= -\frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{x_3 + x_3'}{2} &= \frac{x_3 - x_4}{2} \\ \frac{x_4 + x_4'}{2} &= -\frac{x_3 - x_4}{2} \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} x_1 + x_1' &= x_1 - x_2 \\ x_2 + x_2' &= -x_1 + x_2 \\ x_3 + x_3' &= x_3 - x_4 \\ x_4 + x_4' &= -x_3 + x_4 \end{aligned}$$

и одавде се коначно добија тражена веза између координата

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= -x_1 \\ x_3' &= -x_4 \\ x_4' &= -x_3 \end{aligned} \quad .$$

□

4.2.10 У петодимензионом еуклидском простору E^5 је дата хиперраван

$$\alpha: x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 19.$$

Ако је тачка $M_1(x_1', x_2', x_3', x_4', x_5')$ настала рефлексijом од тачке $M(5, 0, -3, 4, 0)$ у односу на хиперраван α , одреди координате тачке M_1 .

Решење:

Слично као у дводимензионалном и тродимензионалном простору, и хиперраван α има свој вектор нормале. Њен вектор нормале је $\vec{n}_\alpha(1, -1, 2, 1, 3)$. Права p која садржи тачке M и M_1 је нормална на хиперраван α , па је и паралелна са вектором нормале $\vec{n}_\alpha$.

Дакле, једначина праве p ће бити:

$$p: \frac{x_1-5}{1} = \frac{x_2+0}{-1} = \frac{x_3+3}{2} = \frac{x_4-4}{1} = \frac{x_5-0}{3}.$$

Као и у претходним случајевима, постоји тачка N која представља средиште дужи MM_1 и та тачка N је пресек хиперравни α и праве p . Треба одредити координате тачке N . Прво се једначина праве p изједначи са неким параметром t .

$$\frac{x_1-5}{1} = \frac{x_2+0}{-1} = \frac{x_3+3}{2} = \frac{x_4-4}{1} = \frac{x_5-0}{3} = t.$$

Одавде се изражавањем променљивих x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 преко параметра t добија следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} x_1 &= t + 5 \\ x_2 &= -t \\ x_3 &= 2t - 3 \\ x_4 &= t + 4 \\ x_5 &= 3t \end{aligned} \quad (■)$$

Сада се овако изражени x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 употребе у једначини хиперравни

$$\alpha: x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 19.$$

Добија се:

$$\alpha: t + 5 - (-t) + 2(2t - 3) + t + 4 + 3 \cdot 3t - 19 = 0.$$

Сада се одавде изрази параметар t на следећи начин:

$$\begin{aligned} t + 5 + t + 4t - 6 + t + 4 + 9t - 19 &= 0 \\ 16t &= 16 \\ t &= 1. \end{aligned}$$

Сада се овако изражен параметар t употреби у систему (■) па се добије

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 5 = 6 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 2 \cdot 1 - 3 = -1 \\ x_4 &= 1 + 4 = 5 \\ x_5 &= 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

и на овај начин су добијене координате тачке N .

Дакле, тачка $N(x_1^N, x_2^N, x_3^N, x_4^N, x_5^N)$ има координате:

$$\begin{aligned} x_1^N &= 6 \\ x_2^N &= -1 \\ x_3^N &= -1 \\ x_4^N &= 5 \\ x_5^N &= 3 \end{aligned}$$

С обзиром да је та тачка управо средиште дужи MM' , то значи да се њене координате могу добити и на следећи начин:

$$N(x_1^N, x_2^N, x_3^N, x_4^N, x_5^N) = \left(\frac{5+x_1'}{2}, \frac{0+x_2'}{2}, \frac{-3+x_3'}{2}, \frac{4+x_4'}{2}, \frac{0+x_5'}{2} \right).$$

Када се ово изједначи са претходним представљањем координата тачке N добија се:

$$\begin{aligned}\frac{5+x_1'}{2} &= 6 \\ \frac{0+x_2'}{2} &= -1 \\ \frac{-3+x_3'}{2} &= -1 \\ \frac{4+x_4'}{2} &= 5 \\ \frac{0+x_5'}{2} &= -3\end{aligned}$$

ОДНОСНО

$$\begin{aligned}x_1' &= 12 - 5 = 7 \\ x_2' &= -2 \\ x_3' &= -2 + 3 = 1 \\ x_4' &= 10 - 4 = 6 \\ x_5' &= -6\end{aligned}.$$

Дакле, тачка $M_1(x_1', x_2', x_3', x_4', x_5')$ има координате $M_1(7, -2, 1, 6, -6)$.

□

Литература

- [1] Мирослава Антић, *Одабрана поглавља геометрије, скрипте*,
Београд
- [2] Michele Audin, *Geometry*,
Стразбур, 2002.
- [3] Михаило Вељковић, Милан Митровић, Срђан Огњановић, Љубинка Петковић,
Ненад Лазаревић, *Геометрија за први разред Математичке гимназије*,
Београд, 1998.
- [4] Jean Gallier, *Geometric Methods and Applications For Computer Science and Engineering*,
Филадельфија, 2011.
- [5] Мирјана Ђорић, Гојко Калајџић, *Афина и еуклидска геометрија*, материјал за
студенте
Београд, 2013.
- [6] Мирјана Ђорић, Оливера Миленковић, *Збирка задатака из аналитичке геометрије*,
Београд, 2018.
- [7] Еуклид, *Елементи*
Александрија, 3. век п.н.е.
- [8] Драгомир Лопандић, *Геометрија*, Завод за удбенике,
Београд, 2011.
- [9] Jean-Marie Monier, *Algebre et geometrie MPSI*,
Дунод, 2002.
- [10] Владимир Стојановић, *Математископ 3, Збирка решених задатака за први разред средњих школа*,
Београд, 1999.