Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Законитости у Паскаловом троуглу

Ментор:

Др Тања Стојадиновић

Студент:

Марија Севић 1133/2020

Јун, 2022.

Садржај

1 Увод

Паскалов троугао има велику примену у настави математике од самих почетака учења математике.
Он увелико помаже при развијању логике и закључивању. Има велику улогу у области алгебре, вероватноће, као и у решавању великог броја комбинаторних проблема. Паскалов троугао има примену и у реалном свету. Познати геометријски низ деобе живе ћелије је у суштини Паскалов троугао. Паскалов троугао срећемо као општу законитост и код атомске структуре. Протонска и неутронска конфигурација у језгру атома и конфигурација електрона у омотачу атома повезане су са бројевима фигуративних низова Паскаловог троугла. Иако је овај низ добио име по француском математичару *Blaise Pascal*-у (1623 – 1662), многи математичари пре Паскала су га користили. Паскал је објавио већ познате чињенице везане за троугао и користио их да реши проблеме из вероватноће.

У првом делу овог рада су уведени биномни коефицијенти и одређени низови бројева, као што су Фибоначијеви, Каталанови и полигонални бројеви, који ће нам бити потребни за доказивање појединих законитости које важе у Паскаловом троуглу.
Последњи део рада је посвећен причи о троуглу Сјерпинског, који добијамо бојењем непарних бројева у Паскаловом троуглу. Пре него што започнемо причу о троуглу Сјерпинског, говорићемо о томе шта су фрактали, о врстама и својствима фрактала, јер је троугао Сјерпинског једна врста фрактала.

2 Биномни коефицијенти

Колико k-точланих подскупова има скуп од n елемената? Први елемент у том скупу можемо да изаберемо на n начина, други на $n-1$,...k-ти на $n-k+1$. Пошто њихов поредак није битан (тражимо k - точлани подскуп, а не уређену k - торку), поделићемо претходни производ са $k!$.

Дефиниција: Биномни коефицијент је број облика:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$, где су n и k било који ненегативни цели бројеви и $0 \leq k \leq n$.

Дакле, одговор на постављено питање представљају биномни коефицијенти. По дефиницији је: $\binom{n}{0} = 0! = 1$, $\binom{n}{n} = 0! = 1$ и $\binom{n}{1} = n$.

Биномни коефицијенти имају велики број примена и сасвим сигурно су један од најважнијих комбинаторних појмова. Њихова најважнија примена је исказано у теореми о степену бинома, односно у тзв. биномној формули. Леп начин да се биномни коефијенти запишу је помоћу бесконачне троугаоне таблице која се назива Паскалов троугао.

Коефицијенти биномне формуле се изједначавају са елементима у Паскаловом троуглу. О томе ћемо говорити касније, у наставку.

2.1 Својства биномних коефицијената

Теорема1: За биномне коефицијенте важе следеће релације:

1. За све $n \geq k \geq 0$ је $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; (особина симетрије)
2. За све $n \geq k \geq 1$ је $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$;

Ову релацију зовемо још и Паскалова формула.

3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$ за $n \geq 0$.

Доказ:

1. $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

2. $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=$

$=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-1-k)!}=\frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k(k-1)!(n-k-1)!(n-k)}=$

$=\frac{(n-1)!(n-k+k)}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}=\frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$

3. Како биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ дефинишемо као број k - точланих подскупова n - точланог скупа, својство 3. директно следи, јер сваки елемент скупа од n елемената може да припада или не припада подскупу датог скупа. Дакле, за сваки од њих постоје две могућности, па укупно има 2^n подскупова.

2.2 Биномна формула

Теорема2: За свако $n \in N$ је:

$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+...+\binom{n}{k}x^{n-k}y^k+...+\binom{n}{n}x^0y^n.$

Или краће записано,

$(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$

Доказ: Доказ биномне формуле извешћемо математичком индукцијом:

• За $n=1$, формула је тачна.

$(x+y)^1=\sum\limits_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k=\binom{1}{0}x^1y^0+\binom{1}{1}x^0y^1=x+y.$

• Претпоставимо да биномна формула важи за неко n, тј.
$(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$

• Индукцијски корак:

Докажимо да ова формула важи и за $n+1$, користећи индуктивну претпоставку.

$(x+y)^{n+1}=(x+y)(x+y)^n=(x+y)\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k=$

$x\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k+y\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k=$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k =$$

$$\binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} = *$$

Користећи једнакости $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ и друго својство биномног коефицијента из Теореме1, добија се:

$$* = \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n-k+1} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} = \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k +$$
$$\binom{n+1}{n+1} y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

Сада је формула облика $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$. Δ

Општи члан у биномној формули је: $T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Доказ трећег својства биномних коефицијената, можемо показати и користећи биномну формулу:

Доказ:

Ако у биномној формули узмемо да је $x = y = 1$ тада лева страна добија вредност 2^n. Дакле,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} \ \Delta$$

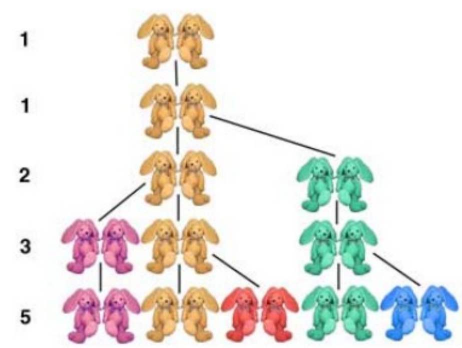
3 Фибоначијеви бројеви

Фибоначи, италијански математичар из Пизе, у својој књизи *Liber Abaci* изложио је један практичан аритметички проблем:

"Колико пари зечева ће репродуковати један пар зечева ако се претпостави да сваког месеца један пар роди нови пар зечева, који за два месеца постане репродуктиван?"

У овој апстрактној причи, зечеви никад не умиру, само се размножавају.

Занимљив је редослед бројева до којих је дошао, проучавајући размножавање зечева. Решавањем овог задатка добио је низ бројева на следећи начин: првог месеца експеримент почиње једним паром зечева, у другом месецу ће постојати само тај један пар, у трећем месецу ће бити два пара, у четвртом месецу три, у петом месецу пет парова итд.



Тако је настао један од најпопуланијих низова у математици, Фибоначијев низ: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... Почевши од трећег елемента, сваки следећи елемент у низу се проналази сабирањем претходна два елемента низа:

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 1+1 = 2$, $F_4 = 1+2 = 3$, $F_5 = 2+3 = 5$, $F_6 = 3+5 = 8$...

Фибоначијев низ F_n се најчешће дефинише на следећи начин:
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Теорема: Ако је $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, n-ти члан низа се може израчунати користећи формулу:
$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right)$.

Доказ:

Карактеристична једначина рекурзивне релације $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ је:
$x^2 - x - 1 = 0$, а њена решења су $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Зато је опште решење рекурзивне релације $F_n = C_1\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} + C_2\frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}$.

На основу почетних услова $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, добијамо систем једначина:

$C_1 + C_2 = 0$

$C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, одакле добијамо константе C_1 и C_2.

$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Дакле, општи члан Фибоначијевог низа је: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right)$. Δ

Ова формула се назива Бинеова формула, по француском матемтичару Бинеу.

• Сума квадрата првих n чланова је једнака производу F_n и F_{n+1} чланова низа.

$F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ за $n \geq 0$

Доказ:

Сваку од основних релација помножимо са $F_1, F_2...$ до F_n редом
$F_1 = F_2 - F_0/F_1$
$F_2 = F_3 - F_1/F_2$
. . .
$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n/F_{n-1}$
$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}/F_n$

Сабирањем добијених једнакости:
$F_1^2 = F_2F_1 - F_0F_1$
$F_2^2 = F_3F_2 - F_1F_2$
. . .
$F_{n-1}^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_nF_{n-1}$
$F_n^2 = F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_n$,
следи тврђење.

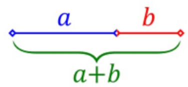
На пример:
За $n = 5$, $1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = F_5 \cdot F_6 = 5 \cdot 8 = 40$.

• Сума квадрата два узастопна члана низа такође је члан овог низа.

На пример:
$5^2 + 8^2 = 89$ (што је 11.члан овог низа).

Уопштено, $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

Интересантна је веза између Фибоначијевог низа и златног пресека.
У математици, за две вредности кажемо да су у "златном односу"ако је већа вредност у односу на мању вредност једнака односу суме те две вредности наспрам веће вредности.



Односно, ако су $a > b > 0$, онда:

$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$
Ако је однос између две вредности приближан броју φ, онда су те две вредности у "златном односу".

Однос између два узастопна Фибоначијева броја има вредност која је приближна златном односу. Односно, што су бројеви већи, то је однос између њих ближи "златном односу"што је и приказано у табели која следи.

A	B	B/A
2	3	$1,5$
3	5	$1,666666666...$
5	8	$1,6$
8	13	$1,625$
...	...	...
144	233	$1,618055556...$
233	377	$1,618025751...$

4 Каталанови бројеви

Каталанови бројеви представљају низ бројева који су првенствено коришћени у геометрији и при решавању многих комбинаторних проблема. Открио их је Леонард Ојлер (*Leonhard Euler*, 1707-1783) при проучавању проблема триангулације конвексног n-тоугла тј. при поступку тражења општег решења за број различитих начина на који се један многоугао, односно полигон од n страница може поделити на троуглове. Притом је требало водити рачуна да се не користе дијагонале многоугла које се међусобно секу. Ови бројеви су добили име по белгијском математичару Еугену Чарлсу Каталану (*Eugene Charles Catalan*, 1814-1894) који је извео и доказао многа својства и идентитете везане за ове бројеве. Он је открио везу ових бројева и проблема низова n-парова заграда. Каталанови бројеви се појављују као решења великог броја комбинаторних проблема, а нека од њих су: триангулације полигона, бинарна стабла, број могућих путева у дискретној решетки димензије $n \times n$...

Формула за израчунавање Каталанових бројева је:

$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, $n \geq 0$

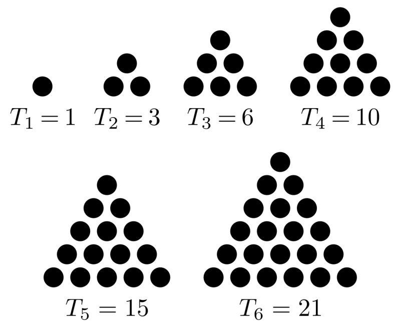
Првих десет Каталанових бројева су:
$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, C_7 = 429, C_8 = 1430, C_9 = 4862, C_{10} = 16796$

5 Полигонални бројеви

Стари Грци су посебну пажњу посвећивали полигоналним бројевима. Полигонални бројеви су резултат преноса њихових геометријских идеја на теорију бројева. Полигонални бројеви су ненегативни цели бројеви представљени геометријским распоредима једнако распоређених тачака (или других ликова) које формирају правилне полигоне. Једна тачка означава јединицу, две двојку, три тачке сложене у троугао тројку итд. Идентификује се заједничка почетна тачка од које се странице шире повећањем броја тачака, а затим се додају потребне додатне тачке између њих како би се формирао полигон. Најчешћи и основни типови полигоналних бројева су троугаони и квадратни бројеви.

5.1 Троугаони бројеви

Троугаони бројеви су најједноставнији полигонални бројеви које геометријски у равни приказујемо тачкама распоређеним у облику троугла. Уколико једној тачки додамо две тачке, добијамо једнакостранични троугао. Затим, додајући три тачке претходном једнакостраничном троуглу, добијамо већи једнакостранични троугао са шест тачака, итд. Даље повећање низа тачака, при чему су тачке добро распоређене формирајући проширени једнакостранични троугао са одговарајућим збиром тачака у сваком таквом троуглу, резултира низом троугаоних бројева: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36...



Елементи овог низа су добијени на следећи начин:

$$\begin{gathered} 1 = 1 \\ 3 = 1 + 2 \\ 6 = 1 + 2 + 3 \\ 10 = 1 + 2 + 3 + 4... \end{gathered}$$

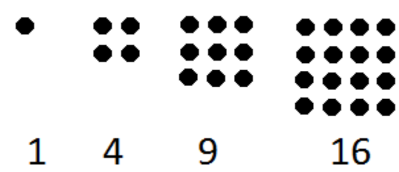
Уочимо да је сваки елемент низа T_n сума аритметичког низа (за троугаоне бројеве је то сума узастопних бројева од 1 до n), а то важи и за квадратне и за петоугаоне бројеве.
Формула за проналажење n-тог члана низа троугаоних бројева је:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

До ове формуле наводно је први дошао велики математичар Карл Фридрих Гаус, још као ученик. Према анегдоти, учитељ је ђацима дао задатак да израчунају збир првих 100 природних бројева. Након неколико тренутака мали Гаус је дошао до решења. Гаус је бројеве здруживао у парове: први са последњим, други са претпоследњим и тако редом:((1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(50+51)). Добио је 50 таквих парова. Како је збир бројева у сваком пару једнак 101, дошао је до резултата да је сума првих сто природних бројева: $50 \cdot 101 = 5050$. Приметимо да је број парова $\frac{n}{2}$, а сума парова је $n+1$ што даје формулу $\frac{n(n+1)}{2}$.
Низ парцијалних сума троугаоних бројева представља низ тетраедарних бројева: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84...
Општи чан тог низа бројева је:
$T(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

5.2 Квадратни бројеви

Када једној тачки додамо три тачке добијамо квадрат. Када овом квадрату додамо пет тачака, затим седам итд., добијамо низ квадратних бројева: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49...



Елементи овог низа су добијени на следећи начин:

$$1 = 1$$
$$4 = 1 + 3$$
$$9 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 1 + 3 + 5 + 7...$$

Односно, квадратне бројеве добијамо сабирајући првих n непарних природних бројева.

Теорема: За n-ти квадратни број важи:

$$T_4(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Доказ: Математичком индукцијом:
(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 1$. Тада важи:

$$T_4(1) = 1 = 1^2 = 1$$

(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.

(индукцијска корак): Докажимо да сада трврђење важи за $n + 1$.

$$T_4(n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

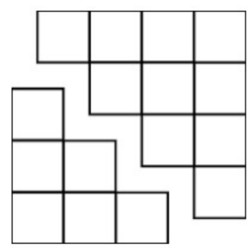
На основу математичке индукције тврђење важи за сваки природан број n. Δ

Интересантна особина троугаоних бројева је да је сума два узастопна троугаона броја једнака квадратном броју:

$1 + 3 = 4; 3 + 6 = 9; 6 + 10 = 16; ...$

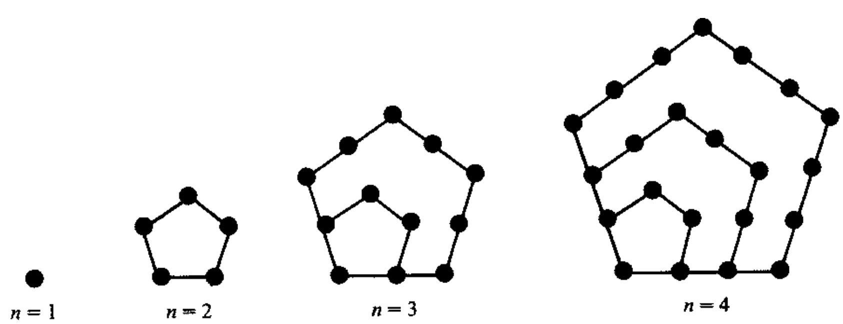
$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n+n^2+n}{2} = n^2$

Ово својство се може представити и визуелно.



5.3 Петоугаони бројеви

Аналогно добијању троугаоних и квадратних бројева, ако тачки придодамо четири, затим седам, десет итд. тачака добијамо низ петоугаоних бројева: 1, 5, 12, 22, 35,... Петоугаони бројеви су бројеви које можемо приказати тачкама које су распоређене у равни тако да образују правилне петоуглове.



Елементи овог низа су добијени на следећи начин:

$$1 = 1$$
$$5 = 1 + 4$$
$$12 = 1 + 4 + 7$$
$$22 = 1 + 4 + 7 + 10...$$

Односно, петоугаоне бројеве добијамо сабирајући првих n природних бројева који се разликују за 3.

Теорема: За n-ти петоугаони број важи:

$$T_5(n) = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

Доказ: Математичком индукцијом:
(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 1$. Тада важи:

$$T_5(1) = 1 = \frac{1(3-1)}{2} = 1$$

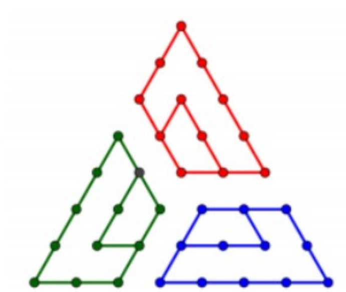
(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.

(индукцијска корак): Докажимо да сада тврђење важи за $n + 1$.

$$T_5(n+1) = \frac{1}{2}n(3n - 1) + (3n + 1) = \frac{n(3n-1)+6n+2}{2} = \frac{3n^2-n+6n+2}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

На основу математичке индукције тврђење важи за сваки природан број n. Δ

Једна од особина петоугаоних бројева јесте да је петоугаони број једна трећина одређеног троугаоног броја.



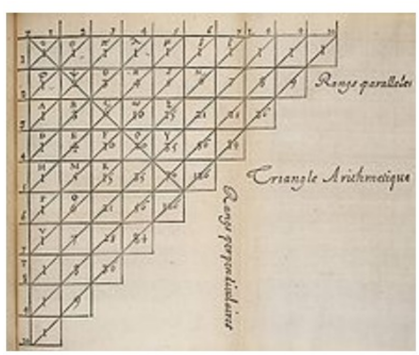
Сваки петоугаони број се састоји од квадратног и троугаоног броја.

Интересантно је поменути да је *Pierre de Fermat* у својој теореми о полигоналним бројевима претпоставио да се сваки позитиван цео број може представити као збир три троугаона броја, или као збир четири квадратна броја, или као збир пет петоугаоних бројева, и тако даље. Иако Фермаов доказ никад није пронађен, *Friedrich Gauss* је 1801. доказао да претпоставка важи за троугаоне бројеве, а *Augustin Cauchy* је 1813. доказао уопштену теорему.

Аналогно досад дефинисаним полигоналним бројевима, лако можемо добити и остале полигоналне бројеве: шестоугаоне, седмоугаоне итд. За њих важе сличне дефиниције као и за претходне полигоналне бројеве.

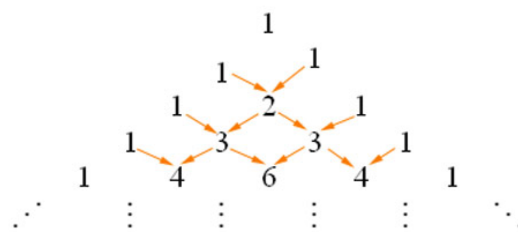
6 Паскалов троугао

Паскалов троугао је бесконачна троугаона шема у којој су крајњи бројеви увек јединице, а сваки број који није крајњи једнак је збиру бројева који су дијагонално лево и десно, у реду изнад тог броја.
Иако је овај низ добио име по француском математичару *Blaise Pascalu* (1623-1662), многи математичари пре Паскала су га проучавали вековима пре њега, у Индији, Персији, и Кини.
Геометријски мотив троугла среће се још у неолиту и представља почетак математичке мисли. Постоје неки докази да је Паскалов бројевни троугао, пре њега познат као аритметички троугао, био близак и арапском астроному, песнику и математичару Омару Хајаму још у 11. веку. Кинески приказ биномних коефицијената, познат као Паскалов троугао, налази се у његовом постхумно објављеном раду (*Treatise on Arithmetical Triangle*), 1665. године.



Први пут га у Европи срећемо у једној Апианусовој аритметици 1527. године. Касније, у 17. веку овај аритметички троугао постаће кључна тачка у развоју

три значајне математичке области: истраживања бесконачних редова, рачуна коначних разлика и теорије вероватноће.
Поступак формирања Паскаловог троугла је следећи: У почетну врсту уписује се један(1). Претпостављајући да свака врста почиње и завршава се са по једном нулом (ове нуле се не пишу), свака врста се образује помоћу претходне сабирањем по два узастопна члана у претходној врсти и исписивањем сваког збира у средини размака између сабирака.



За Паскалов троугао важе и следеће карактеристике:
1. Елементи Паскаловог троугла су биномни коефицијенти.
2. Збир бројева у n-тој врсти је удвостручен збир бројева у претходној врсти.
3. У свакој врсти, два од крајева једнако удаљена члана, међусобно су једнака. Код првих врста може се запазити симетрија у односу на вертикалну осу фигуре. Та симетрија важи и због симетричности биномних коефицијената. Према правилу по ком формирамо врсте, ова симетрија прелази са сваке врсте на следећу и тако се бесконачно наставља.
4. У свакој врсти, збир елемената парних редних бројева и збир елемената непарних редних бројева је једнак.

Пример1: Представљен је део Паскаловог троугла. Пронађи елементе X, Y и Z.

$$\begin{array}{c} 1287 \; \{\ \} \; \{\ \} \; X \\ 3003 \; 3432 \; Y \\ \{\ \} \; 6435 \\ Z \end{array}$$

Решење: Користећи законитост да је сваки елемент у Паскаловом троуглу, који није на рубу троугла, једнак збиру два елемента који су дијагонално лево и десно изнад тог броја, можемо пронаћи елемент који недостаје у трећој врсти, сабирајући бројеве лево и десно изнад: $3003 + 3432 = 6435$. Одавде проналазимо да је $Z = 6435 + 6435 = 12870$. Пошто је $3432 + Y = 6435$, онда је $Y = 3003$. Такође, први елемент у првој врсти који недостаје је: $3003–1287 =$

1716, а други је: 3432–1716 = 1716. Због симетричности троугла, добијамо да је $X = 1287$.

6.1 Законитости у Паскаловом троуглу

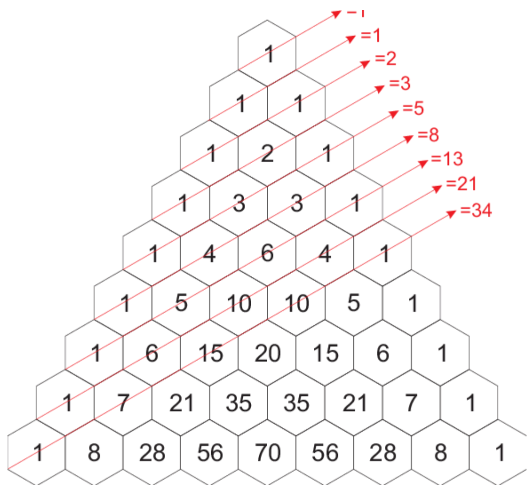
1. Веза између биномне формуле и елемената у Паскаловом троуглу

Коефицијенти биномне формуле се изједначавају са елементима у Паскаловом троуглу

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & {}_0C_0 & & \binom{0}{0} \\
1 \quad 1 & & {}_1C_0 \ {}_1C_1 & & \binom{1}{0} \ \binom{1}{1} \\
1 \quad 2 \quad 1 & \Leftrightarrow & {}_2C_0 \ {}_2C_1 \ {}_2C_2 & \Leftrightarrow & \binom{2}{0} \ \binom{2}{1} \ \binom{2}{2} \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & & {}_3C_0 \ {}_3C_1 \ {}_3C_2 \ {}_3C_3 & & \binom{3}{0} \ \binom{3}{1} \ \binom{3}{2} \ \binom{3}{3} \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & & {}_4C_0 \ {}_4C_1 \ {}_4C_2 \ {}_4C_3 \ {}_4C_4 & & \binom{4}{0} \ \binom{4}{1} \ \binom{4}{2} \ \binom{4}{3} \ \binom{4}{4} \\
\ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Ово тврђење смо већ доказали, када смо говорили о 2. својству биномних коефицијената.

2. Сабирајући бројеве по дијагоналама, у Паскаловом троуглу се могу уочити Фибоначијеви бројеви.



Доказ:

Тврдимо да је $F_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$ (јер је то збир по дијагонали).
За $n = 0$, $F_1 = 1$, а за $n = 1$, $F_2 = 1$.

Докажимо рекурзивну формулу која дефинише Фибоначијев низ, односно да је $F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$.

$F_{n+1} + F_{n+2} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k}$ (за леву суму, индекс $k \to \ k-1$)
$= \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n-k+1}{k-1} + \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n-k+1}{k-1} + \binom{n+1}{0} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n-k+1}{k}$ (за десну суму смо издвојили елемент за $k = 0$)

$= 1 + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k}$ (користимо једнакост $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$)

$= 1 + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k}$ (пошто је $k = n+2$, имамо да је $\binom{n+2-(n+2)}{n+2} = 0$)

$$= \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} = F_{n+3}.\ \Delta$$

3. Збир бројева у свакој врсти Паскаловог троугла је 2^n, где је n број врсте у троуглу.

На слици је приказана законитост везана за збир елемената по врстама у првих шест врста Паскаловог троугла.

Врста 0	1	$2^0 = 1$
Врста 1	1 1	$2^1 = 2 = 1+1$
Врста 2	1 2 1	$2^2 = 4 = 1+2+1$
Врста 3	1 3 3 1	$2^3 = 8 = 1+3+3+1$
Врста 4	1 4 6 4 1	$2^4 = 16 = 1+4+6+4+1$
Врста 5	1 5 10 10 5 1	$2^5 = 32 = 1+5+10+10+5+1$

Доказ:

Користимо индукцију:
За $n = 0$, $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$.

Претпоставимо да тврђење важи за $n = m : \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + ... + \binom{m}{m} = 2^m$ и докажимо да тврђење важи за $n = m+1$, односно да је:

$\binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + ... + \binom{m+1}{m+1} = 2^{m+1}$.

Користимо:

$(\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}$, $\binom{m+1}{0} = \binom{m}{0} = 1$, $\binom{m+1}{m+1} = \binom{m}{m} = 1)$, па имамо:

$$\binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + ... + \binom{m+1}{m+1} = \binom{m}{0} + \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}\right] + \left[\binom{m}{1} + \binom{m}{2}\right] + ... +$$

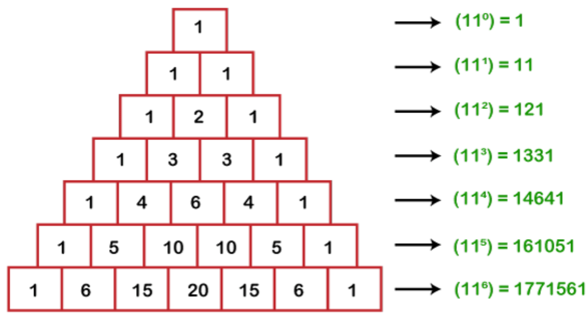
$$\left[\binom{m}{m-1} + \binom{m}{m}\right] + \binom{m}{m}$$

Пошто се сваки елемент појављује два пута, имамо:

$$= 2 \cdot \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + ... + \binom{m}{m}\right] = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$$

Приметимо да смо ову законитост већ доказали на једноставнији начин користећи биномну формулу за $x = y = 1$.

4. Степени броја 11



Када су елементи у првих пет врста Паскаловог троугла поређани један поред другог, они креирају бројеве који су степени броја 11, или 11^n , где је n број врсте у троуглу. Степене броја 11 добијамо и ако су елементи вишецифрени бројеви, али онда цифру јединица броја који претходи вишецифреном броју треба сабрати са:

а) Првом цифром вишецифреног броја који следи (ако је вишецифрени број двоцифрен), или

б) Делом тог вишецифреног броја, не укључујући цифру јединица. Описано правило је приказано у табели која следи:

Број врсте	Елементи у тој врсти	Степен броја 11
0	1	$11^0 = 1$
1	1, 1	$11^1 = 11$
2	1, 2, 1	$11^2 = 121$
3	1, 3, 3, 1	$11^3 = 1331$
4	1, 4, 6, 4, 1	$11^4 = 14641$
5	1, 5, 10, 10, 5, 1 1, (5+1), (0+1), 0, 5, 1 1, 6, 1, 0, 5, 1	$11^5 = 161051$
6	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 1, (6+1), (5+2), (0+1), 5, 6, 1 1, 7, 7, 1, 5, 6, 1	$11^6 = 1771561$

Доказ:

$11^0 = 1 = 1 \cdot 10^0 = \binom{0}{0}10^0$
$11^1 = 11 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = \binom{1}{0}10^1 + \binom{1}{1}10^0$
$11^2 = 121 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = \binom{2}{0}10^2 + \binom{2}{1}10^1 + \binom{2}{2}10^0$
...
Приметимо да када израчунамо k-ти степен броја 11 и запишемо га у декадном запису, добијамо да је:

$11^k = \binom{k}{0}10^k + \binom{k}{1}10^{k-1} + ... + \binom{k}{k-1}10^1 + \binom{k}{k}10^0$. (*)

Докажимо да једнакост (*) важи за свако $k \in N_0$ применом биномне формуле:

$11^k = (10+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}10^{k-i}1^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}10^{k-i} = \binom{k}{0}10^k + \binom{k}{1}10^{k-1} + ... + \binom{k}{k-1}10^1 + \binom{k}{k}10^0$. Δ

Пример2: Користећи елементе у Паскаловом троуглу израчунај 11^9.

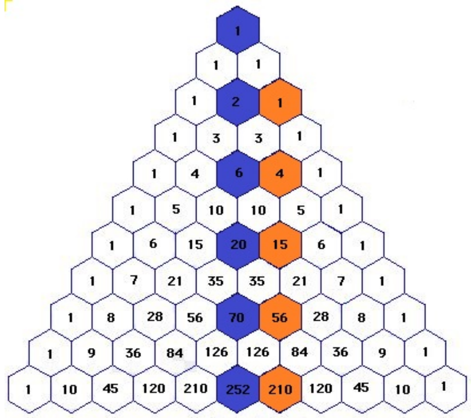
Решење: Елементи врсте 9 су: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1. Користећи методу груписања описану изнад, имамо: 1(9+3)(6+8)(4+12)(6+12)(6+8)(4+3)6 9 1. Приметимо да пошто су неки од елемената двоцифрени или троцифрени бројеви, процедуру груписања морамо поновити све док не добијемо једноцифрене бројеве:

1	12	14	16	18	14	7	6	9	1
(1 + 1)	(2 + 1)	(4 + 1)	(6 + 1)	(8 + 1)	4	7	6	9	1
2	3	5	7	9	4	7	6	9	1

Добијамо да је $11^9 = 2357947691$.

5. Каталанови бројеви у Паскаловом троуглу

У Паскаловом троуглу, у парним врстама, разлика између бројева у средњој колони и суседних бројева је Каталанов број.



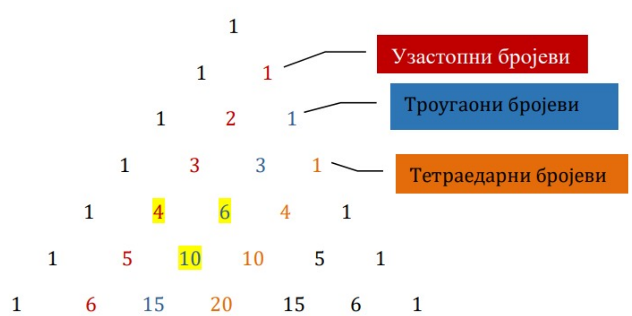
$C_0 = 1, C_2 = 2-1 = 1, C_4 = 6-4 = 2, C_6 = 20-15 = 5, C_8 = 70-56 = 14, C_{10} = 252 - 210 = 42$

Доказ:

Уопштено, централни елемент у парним врстама Паскаловог троугла је $\binom{2n}{n}$, а први елемент до њега је $\binom{2n}{n+1}$.

Разлика ова два елемента је:
$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = C_n$, што је n-ти Каталанов број. Δ

6. Законитости везане за дијагоналне бројеве у Паскаловом троуглу



• Као што видимо са дијаграма, на другој дијагонали у Паскаловом троуглу, означеној црвеном бојом, можемо уочити узастопне природне бројеве.
• На трећој дијагонали, означени плавом бојом су троугаони бројеви.

Доказ:

n-ти троугаони број је у реду $n+1$, Паскаловог троугла.

$C(n+1,2) = \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!(2)!} = \frac{(n+1)(n+0)(n-1)(n-2)...}{2(n-1)(n-2)...} = \frac{n(n+1)}{2}$. Δ

• На четвртој дијагонали, означени наранџастом бојом, уочавамо тетраедарне бројеве.

Доказ:

n-ти тетраедарни број је у реду $n+2$, Паскаловог троугла.

$C(n+2,3) = \frac{(n+2)!}{(n+2-3)!(3)!} = \frac{(n+2)(n+1)(n+0)(n-1)(n-2)...}{6(n-1)(n-2)...} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Δ

Знамо да је збир два узастопна троугаона броја квадратни број, а ову законитост можемо сад уочити и у Паскаловом троуглу.

Квадрат сваког природног броја са друге дијагонале у троуглу, једнак је збиру троугаоног броја који је непосредно поред и следећег троугаоног броја у низу са треће дијагонале. На пример, са дијаграма изнад имамо да је: $4^2 = 6 + 10 = 16$.

Доказ:

Лева страна једнакости:

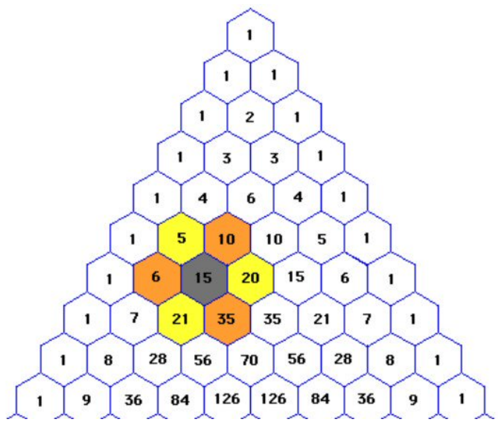
$(C(n,1))^2 = (\frac{n!}{(n-1)!})^2 = (\frac{(n+0)(n-1)(n-2)...}{(n-1)(n-2)...})^2 = n^2$.

Десна страна једнакости:

$C(n,2)+C(n+1,2) = \frac{n!}{2(n-2)!}+\frac{(n+1)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...}{2(n-2)...}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)...}{2(n-1)(n-2)...} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n+n^2+n}{2} = n^2$. Δ

7. Паскалове латице

У Паскаловом троуглу можемо уочити правилности у облику цвета. Одаберимо неко место у Паскаловом троуглу, бројеве око тог броја замислимо као латице цвета (има их шест) и сваки други број помножимо. Производи су једнаки и дељиви су са унутрашњим бројем.



На пример, резултат бројева око броја 15. Имамо шест бројева: 5, 10, 20, 35, 21, 6 и множимо три броја, сваки други. Односно:
-резултат жутих латица је $5 \cdot 20 \cdot 21 = 2100$
-резултат наранџастих латица је $6 \cdot 10 \cdot 35 = 2100$
Производи су једнаки и дељиви бројем 15.
Паскалове латице можемо записати у облику: $\binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1}\binom{n-1}{k-1}\binom{n+1}{k}$, где је $\binom{n}{k}$ биномни коефицијент и он дели сваки од производа.

Доказ:

Према дефиницији биномног коефицијента $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, важи да је:
$\binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1}\binom{n-1}{k-1}\binom{n+1}{k}$, односно
$\frac{(n+1)!n!(n-1)!}{(k+1)!(k-1)!k!(n-k-1)!(n-k)!(n+1-k)!} = \frac{n!(n-1)!(n+1)!}{(k+1)!(k-1)!k!(n-k-1)!(n-k)!(n+1-k)!}$.
Очигледно важи једнакост и $\binom{n}{k}$ дели тај израз. Δ

Бојењем непарних бројева Паскаловог троугла добијамо један познати облик који је фрактал и који се назива троугао Сјерпинског. Због тога што су фрактали значајни сами по себи, а појављују се у многим областима математике, пре него што опишемо троугао Сјерпинског, рећи ћемо нешто више о њима.

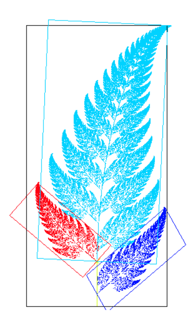
7 Фрактали

Фрактал је геометријски лик који се може разложити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине. Каже се да је такав лик сам себи сличан. Термин је 1975. године извео Беноа Манделброт, који се сматра оцем фрактала. Он им је осим дефиниције подарио и име које потиче од латинске речи $fractus$ што значи сломљен. Поред тога што су изломљени, за фрактале је карактеристично да се исти облик стално понавља. Ако се неки део фрактала увећа изгледаће као цели фрактал. Још је антички астроном и математичар Аполоније увидео да унутар једне кружнице можемо уписати бесконачно много мањих кружница које се додирују и тиме увео фрактале у математику. Касније, фрактална структура помиње се у 17. веку у Лајбницовим радовима. У 19. и почетком 20. века разни математичари се баве цртањем и проучавањем фракталних облика. Тада су настале Кохова пахуљица, троугао Сјерпинског и тепих Сјерпинског, Хилбертова крива... Тек развојем компјутера ова уметничка област математике могла је да дође до изражаја.

7.1 Својства фрактала

Основна својства фрактала:

1. Самосличност - својство фрактала да је сам себи сличан тј. његови делови изгледају као и он цео. Када се увеличају сами себе садрже. Фрактали представљају скалиране копије самог себе. Када погледамо један његов део он изгледа слично или потпуно исто као почетни облик и састављен је од истих таквих објеката све мањих и мањих. Као пример самосличности, можемо навести пример из природе - папрат.



2. Фрактална димензија - вредност која нам даје увид у то у којој мери неки фрактал испуњава простор у којем се налази. Фрактална димензија није цео број и за фрактале важи да је фрактална димензија, димензија строго већа него тополошка димензија. Тополошка димензија је најближа интуитивном, природном тумачењу: тачка има тополошку димензију 0, права 1, раван 2, а простор 3. Можемо је разумети као број смерова у којима можемо ићи унутар одређеног објекта. На пример, права је једнодимензионална јер имамо само један "степен слободе кретања" (лево - десно), док код равни имамо "два степена слободе" (лево - десно и горе - доле), те је она дводимензионална.

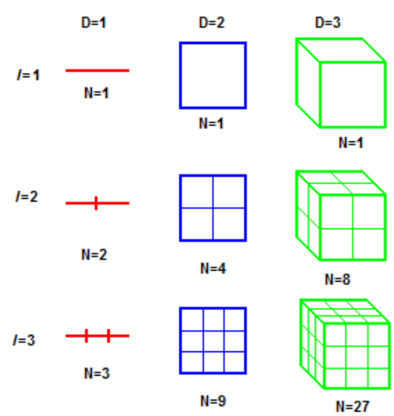
Израз по којем се мери фрактална димензија је:

$d = \frac{\log n}{\log s}$.

d-фрактална димензија

n-број нових копија објекта посматрано након увећања

s-фактор увећања



7.2 Подела фрактала

Подела фрактала према степену самосличности:

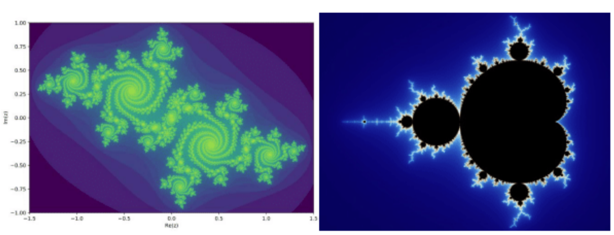
(1) Потпуно слични фрактали - садрже копије које су сличне целом фракталу.

Овој групи припадају Канторов скуп, троугао Сјерпинског, Кохова пахуља... О овим фракталима говорићемо у наставку.

(2) Квази самослични фрактали - фрактал садржи мале копије себе које нису сличне целом фракталу, него се појављују у искривљеном облику. Примери су Јулија скуп и Манделбротов скуп у којима није могуће одмах уочити идентичне делове, али повећањем тих појединих делова можемо приметити мање верзије почетне фигуре.

Математичар Гастон Јулиа проучавао је квадратну функцију $f(z) = z^2 + c$ и низ $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$, где су z_n и c комплексни бројеви. Том функцијом је добио, за различите вредности броја c, графички приказ комплексних бројева у комплексној равни и ти скупови се по њему зову - Јулијини скупови.

Након Јулије, математичар Манделброт проучавао је ту исту квадратну функцију и низ. Године 1979. проучавао је итерације $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$, при чему је сматрао да је реч о комплексним бројевима $z_n = x_n + iy_n$ и $c = a + ib$. Из познатих правила за множење и сабирање комплексних бројева добио је једначине за итерацију x_n и y_n. Проучавао је како се понаша низ бројева добијених итерацијом за разне c. Манделбротовом скупу припадају комплексни бројеви c за које апсолутна вредност $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ за велике n тежи према коначном броју.
Дакле, Манделбротов скуп је скуп тачака у комплексној равни при чему фрактал формира границу тог скупа.



Слика 1: (а) Јулија скуп и (б)Манделбротов скуп

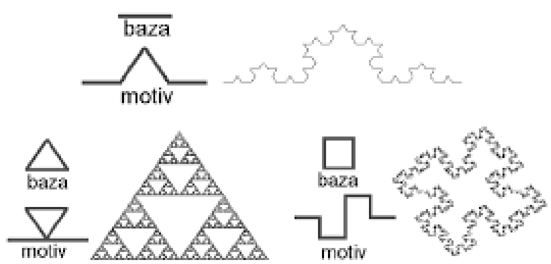
(3) Статистички самослични фрактали - фрактал не садржи копије самог себе, али неке његове особине (нпр. фрактална димензија) остају исте при различитим проценама. Пример: Перлинов шум..

Перлинов шум је функција за креирање кохерентног шума. Кохерентни шум значи да за било које две тачке у простору се вредност шума мења глатко, односно нема неповезаности. Перлинов шум је врста математичке функција која се добија сабирањем више функција које су добијене случајним одабиром тачака где свака следећа функција има двоструко мању амплитуду и двоструко већу фреквенцију. Највеће примене Перлиновог шума су у рачунарској графици.

Слика 2: Перлинов шум

Подела фрактала према начину настанка:

(1)Итеративни фрактали - настају копирањем, ротирањем и/или транслирањем копије, могућим замењивањем неког елемента копијом. Конструкцију фрактала насталих итерацијом започињемо обликом који се назива базом фрактала. Сваки део базе се тада замени другим обликом којег називамо мотивом или генератором. Поступак настављамо на новонасталом облику. Фрактали настали итеративно су потпуно самослични.



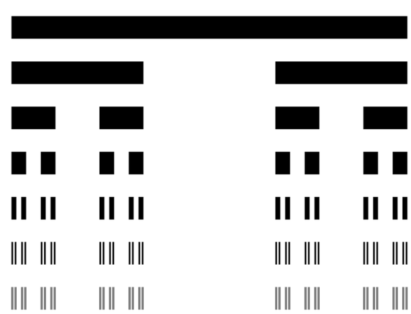
(2) Рекурзивни фрактали - фрактали који су одређени рекурзивном формулом која одређује припада ли одређена тачка простора неком скупу или не. Рекурзивни фрактали су квази-самослични.

(3) Случајни фрактали - фрактали настали цртањем графова неких стохастичких процеса и најчешће их налазимо у природи (руб морске обале, облик

планина, облака, муње, свемира, папрати и многих других биљака). Случајни фрактали су статистички самослични фрактали.

Канторов скуп C

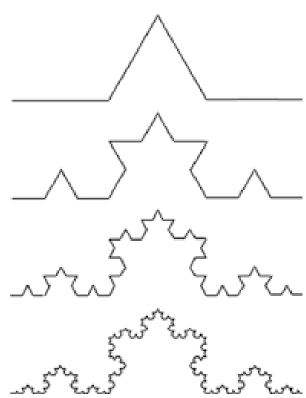
Међу првим познатим фракталима је Канторов скуп C којег је 1883. представио немачки математичар *Georg Cantor* (1845 - 1918) заслужан за развој теорије скупова. Канторов скуп игра важну улогу у многим гранама математике, па је и модел по којем су настали неки други фрактали попут Јулија скупа. Скуп C је бесконачни скуп тачака које припадају сегменту $[0, 1]$, односно скуп одређених бројева, попут $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}$...
Конструкцију Канторовог скупа започињемо јединичним сегментом $[0, 1]$. Почетни сегмент поделимо на три једнака подсегмента и избацимо средњи интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ Преостала су нам два сегмента $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$ од којих је сваки дужине $\frac{1}{3}$. Потом сваки од њих опет поделимо на три једнака подсегмента и избацимо средњи интервал. Добијемо сегменте $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ и $[\frac{8}{9}, 1]$. Поновимо поступак. У почетку имамо један сегмент, након првог корака имамо два, након другог четири, након трећег осам сегмената итд. Након n-тог корака имамо 2^n дисјунктних сегмената дужине $\frac{1}{3^n}$.
Из конструкције је очигледно да је Канторов скуп самосличан без обзира на увећање. На слици је приказано неколико почетних корака конструкције Канторовог скупа.



Слика 3: Канторов скуп

Кохова крива

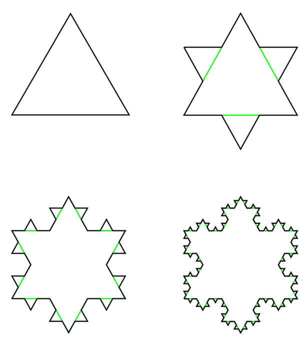
Један од најједноставнијих фрактала који се често користи као репрезентативни пример је Кохова крива. Кохова крива и Кохова пахуља једне су од првих описаних фракталних кривих, а представио их је шведски математичар *Niels Fabian Helge von Koch* (1870 - 1924). Кохову криву је једноставно геометријски конструисати. Почињемо са сегментом који поделимо на три једнака дела. Над средњим делом конструишемо једнакостранични троугао, а потом уклонимо средњи подсегмент. Први корак конструкције завршава са четири подсегмента чија је дужина једнака $\frac{1}{3}$ дужине почетног сегмента. Поступак се наставља даље на исти начин. Сваки од четири подсегмента делимо на три једнака дела, над средњим делом конструишемо једнакостранични троугао, а потом га уклонимо. Итеративни поступак поновимо бесконачно пута и добијемо Кохову криву.



Слика 4: Кохова крива

Кохова пахуља

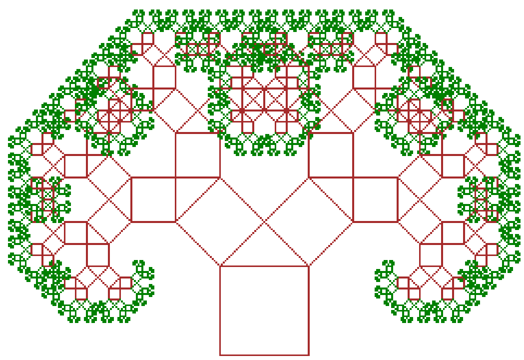
Кохова пахуља је један од најраније описаних фрактала. Почетни облик Кохове пахуље је једнакостранични троугао. Свака страница датог троугла се тада подели на три дела па се над средишњим делом конструише једнакостраничан троугао. Дужине страница конструисаног троугла су тада трећина дужине почетног троугла. Страница конструисаног троугла који лежи на почетном троуглу се тада уклони. Кохову пахуљу добијамо понављањем описаног процеса над преосталим страницама.



Слика 5: Кохова пахуља

Питагорино стабло

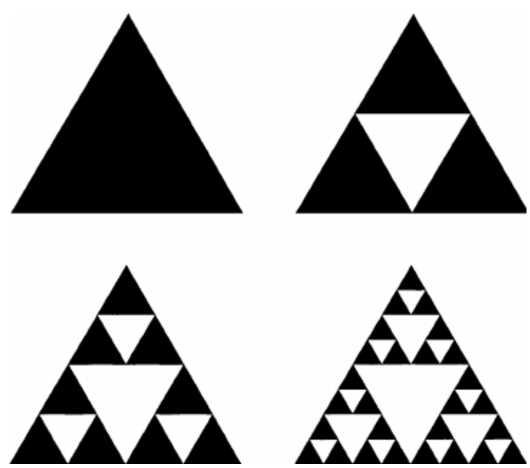
Традиционално Питагорино стабло је фрактал настао рекурзивним цртањем квадрата. Конструкција Питагориног стабла започиње квадратом. Тада се над горњом страницом квадрата конструише једнакокрако правоугли троугао коме је страница квадрата хипотенуза. У другој се итерацији над катетама правоуглог троугла конструишу квадрати. Итеративни поступак се понавља бесконачно много пута. Питагорино стабло се такође може конструисати на начин да се над горњом страницом, уместо два квадрата, конструише више њих. Због тога се Питагорина стабла користе при визуализацији хијерархијских података.



Слика 6: Питагорино стабло

7.3 Троугао Сјерпинског

Троугао Сјерпинског је фрактал којег је описао пољски математичар *Waclaw Franciszek Sierpinski* (1882 - 1969) 1916. године, а пример је једног од најједноставнијих фрактала. Може се рећи да је постао симбол фрактала. Сјерпински је био један од најутицајнијих математичара свог времена у Пољској. Занимљиво је да у његову част један месечев кратер назван по њему. Конструкција троугла Сјерпинског креће од испуњеног једнакостраничног троугла коме одредимо средишта страница, па их спојимо. Настају четири подударна једнакостранична троугла од којих избацујемо онај чија су темена средишта страница почетног троугла. Тиме је завршен први корак конструкције. На преостала три троугла, чија је дужина страница двоструко мања од дужине страница почетног троугла, поновимо поступак. Након другог корака преостаје $9 = 3^2$ троуглова, након трећег $27 = 3^3$ троуглова и тако даље. Односно, након n-тог корака имамо 3^n троуглова. Својство самосличности овог фрактала огледа се у његовој конструкцији. Сваки од три преостала дела у n-том кораку је умањена копија целокупне структуре из претходног корака, умањена фактором два.



Слика 7: Троугао Сјерпинског

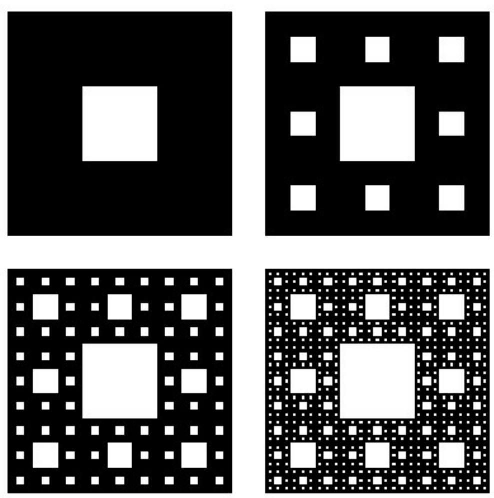
Израчунајмо фракталну димензију троугла Сјерпинског. Број копија самог себе при фактору умањења 2 јесте 3, из чега добијамо:
$d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5849$

Овај фрактал посебно је занимљив због тога што му је обим бесконачно велики, а површина једнака 0. Уколико је страница почетног троугла дужине a, а његова површина P_0, обим троугла Сјерпинског у k-том кораку износи: $\frac{3^{k+1}}{2^k}a$, а површина $\left(\frac{3}{4}\right)^k P_0$ што води до закључка да је:

$O = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}}{2^k}a = \infty$

$P = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k P_0 = 0.$

Сјерпински је додао још један објекат у галерију фрактала, а ради се о тепиху Сјерпинског који је заправо варијација на тему његовог већ познатог фрактала. У овом случају конструкцију започињемо испуњеним квадратом који поделимо на девет подударних квадрата и избацимо средишњи квадрат. Тиме је завршен први корак конструкције. Даље настављамо истим поступком, дакле преосталих осам испуњених квадрата делимо на девет подударних квадрата и у сваком избацујемо онај средишњи. Тиме нам преостају шездесет четири испуњена квадрата, а након n-тог корака имамо 8^n квадрата.

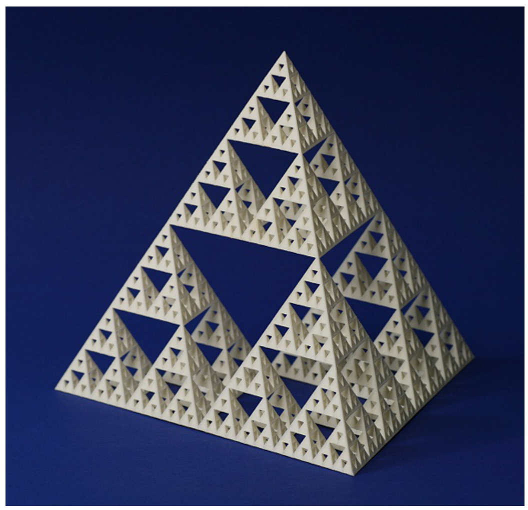


Слика 8: Тепих Сјерпинског

Дакле, имамо фактор умањења 3, а број копија самог објекта 8, те фрактална димензија приближно износи:

$d = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.8928$

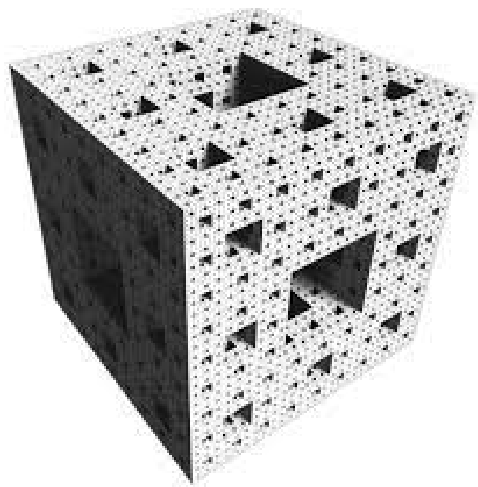
Ако заменимо троуглове тетраедрима, добијамо тетраедар Сјерпинског. Али, приликом конструкције се не одузима један тетраедар из средине, већ се остављају четири тетраедра и све остало одузима. При сваком кораку конструкције настају четири мања тетраедра с двоструко краћим дужинама страница.



Слика 9: Тетраедар Сјерпинског

Тродимензионални тепих Сјерпинског је Менгеров сунђер. То је фрактал ког је 1926. описао аустријски математичар *Karl Menger* према ком је и добио име. Често се назива и *Sierpinski – Mengerov* сунђер. Свака страна Менгеровог сунђера је тепих Сјерпинског, а дијагонала Канторов скуп. Добија се на сличан начин као и тепих Сјерпинског само што уместо квадрата узмемо коцку коју поделимо на двадесет седам коцки чије су дужине страница $\frac{1}{3}$ почетне. Након тога одузмемо седам коцки, односно средишњу и шест коцки које се налазе у средиштима страна почетне коцке. Поступак понављамо на преосталим коцкама и с повећањем броја корака добијамо све крхкију, готово потпуно шупљу конструкцију.

Фактор смањења је три, а број новонасталих копија је $27 - 7 = 20$. Фрактална димензија Менгеровог сунђера приближно износи: $d = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.72688$



Слика 10: Менгеров сунђер

7.4 Примена фрактала

Невероватна ствар којој треба поклонити пажњу су фрактали у природи. Склад, равнотежа, сложеност, умножавање облика, неки су од основних принципа на којима, загледамо ли се дубље, почивају анатомија човека, животиња, биљака, особине природних феномена... Ако погледамо лист папрати, приметићемо да сваки мали лист, који је део већег, има исти облик као и велики лист. Дакле, колико год да зумирамо неку фракталну структуру сваки зумирани део биће умањена копија оног већег и сваки фрактал има свој шаблон. Ако мало више обратимо пажњу на свет око себе, приметићемо да се самосличност среће свуда: нервни систем, крошње и корење дрвећа, делте река, карфиол, паукова мрежа, планете, алвеоле у плућима, облаци, ДНК... Осим што су невероватно примамљиви и атрактивни људском оку, дуго се мислило да су фрактали крајње бескорисни и да немају никакву примену. Међутим, временом се открио њихов значај у многим научно-технолошким, медицинским и уметничким сферама.

Фрактали су свој смисао добили развојем рачунарске графике те се у том подручју највише и примењују. Најједноставнији примери су моделирање терена, посебно планина, грмља, дрвећа и трава. Планине се могу цртати тако да се хоризонтално положеном троуглу сваки врх повиси или снизи на неку вредност. Тако добијеном троуглу одредимо средишта страница које потом спојимо. Сваку од тачака средишта, односно врхова новог средњег троугла, повисимо или снизимо као и код почетног троугла. Тај поступак понављамо на сваком следећем троуглу па можемо упоредити ову конструкцију с конструкцијом троугла Сјерпинског. Код мобилних телефона, производе се антене које се фрактални пакују, тако да могу користити широк спектар фреквенција, а заузимају јако мало простора. У графичком дизајну се користе да би се креирали пејзажи и живописне слике и ефекти, као и у кинематографији за израду специјалних ефеката. Велику примену, фрактали су нашли и у медицини за дијагностификовање и третирање канцерогених ћелија, јер је примећено да ћелије рака имају много већу фракталну димензију од здравих. Коштани преломи се такође дефинишу као фрактални. Као што је већ поменуто, фракталне структуре откривамо и у откуцајима људског срца, што је јако важно у кардиологији. То се најбоље види кад се детаљније проуче њихови временски редоследи. Откуцаји срца нису правилни и увек се наилази на ситне варијације, али срчана болест се може открити уз помоћ екстремног и аритмичног фракталног понашања.

Концепт фрактала је један од ретких који повезује математику, уметност, архитектуру, биологију... Листа би могла да иде унедоглед. Фрактали једноставно прожимају читав Универзум.

8 Закључак

Овај рад има за циљ да читаоца упозна са појмом Паскаловог троугла, законитостима које важе у њему, као и одређеним низовима бројева који су потребни за доказивање поменутих законитости.
Паскалов троугао је један од најпознатијих и најелегантнијих математичких шема. Веза биномних коефицијената и Паскаловог троугла, повезује га не само са комбинаториком и теоријом вероватноће, већ и са другим областима математике и њеним применама.

Ради још детаљнијег упознавања са темом и могућностима њеног ширења, читаоцу се препоручује проучавање наведене литературе.

9 Литература

1. Елементи енумеративне комбинаторике, Душко Јојић

2. *Pascal′s Arihmetical Triangle*, *Edward A.W.F.*

3. Ана Трајковић, Законитости и инваријанте у средњошколској додатној настави (Стручни рад, Универзитет у Београду)

4. Филић Андреа, Класични фрактали (Стручни рад, Универзитет у Загребу)

5. *Fractal Everywhere*, *Barnsley M. F.*