УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Шејла Р. Даутовић

ЛОГИЧКО МОДЕЛОВАЊЕ БАЈЕСИЈАНСКЕ ТЕОРИЈЕ ПОТВРЂИВАЊА

докторска дисертација

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Šejla R. Dautović

LOGICAL FORMALIZATION OF BAYESIAN CONCEPTS OF CONFIRMATION

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022.

Ментори:

др Небојша Икодиновић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Драган Додер, доцент
Utrecht University - Department of Information and Computing Sciences

Чланови комисије:

др Предраг Јаничић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Зоран Огњановић, научни саветник
Математички институт САНУ

др Славко Моцоња, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

Датум одбране: ____________________

Захвалница

Као студент основних студија нисам се надала да ћу некада бити докторанд. Данас имам ту срећу да, не само што сам докторанд Математичког факултета у Београду, већ сам и истраживач-сарадник Математичког института САНУ. Математички институт је изузетно место где се развијају многе гране математике, а посебно та једна - математичка логика. Израда ове дисертације дугује многима захвалност, па да кренемо редом.

Пре свега, захваљујем се мом професору Александру Јовановићу (Аљоши), који више није међу нама, на подршци и саветима о упису докторских студија.

Захваљујем се директору Математичког института, Зорану Огњановићу, за све могућности које је подржао како бих стекла што више искуства и ван граница Србије. Захваљујем се на уложеном труду и времену које је увек налазио за рад са мном.

За мој први научни рад захваљујем се Зорану Петрићу који је мотивисао заједничке радове са Младеном Зекићем. Захваљујем се такође и на томе што је од Математичког института направио други дом за мене где увек могу да рачунам на пријатељство, савете, објашњење и стрпљење.

За посебну атмосферу кабинета 502 захваљујем се младом доктору математике, будућем оцу и мом пријатељу Младену Зекићу. Била сам те среће да започнем рад у Матемтичком институту када и Младен. Захвална сам му на несебичном дељењу знања и искуства, а посебно на стрпљењу да чита и исправи многе грешке мог брзоплетог куцкања дисертације. Захвална сам му на свим корацима које је искорачио пре мене и саветима како да и ја наставим даље.

Велику захвалност за моје прво радно место, као истраживач-приправник Математичког института дугујем мом првом ментору, Небојши Икодиновићу, који ме је предложио за ово место. Хвала за сваку консултацију, а било их је много, из предмета Математичка логика у рачунарству, на којима сам научила основе математичке логике које сам користила током целог истраживања. Захваљујем се такође и на свим коментарима и саветима током писања ове тезе.

И на крају, човек који је километрима био далеко од мене, а ипак увек био ту, захваљујем се мом другом ментору, Драгану Додеру. Захвална сам за многе идеје и научне радове које смо заједно произвели, али и више од тога. Захвална сам на томе што ме је научио и како бити истраживач у науци, како одржати предавање за 15 минута, како направити савршену презентацију, како поправити самопоуздање и на многим другим стварима које су утицале да данас пишем дисертацију. Захвална сам на великом стрпљену које је имао све време у раду са мном.

Захваљујем се мојим пријатељима на подршци и позитивној енергији током свих ових година. Посебно се захваљујем Емелу Капетановићу који је више пута читао моје радове како би проверио да не недостаје неко *the*. Хвала ти на разумевању мојих ирационалних страхова и на убеђењу да знам енглески.

И наравно, не бих писала ову тезу без подршке својих родитеља који већ губе стрпљење за дан одбране. Хвала вам на свему што сте ми омогућили да данас будем ово што јесам. Хвала мом брату Фарису који одржава напетост у такмичењу- ко има више диплома. Хвала мојој сестри Риалди за мотивацију током студирања. Највише хвала мојој сестри Мерјем на несебичној љубави коју ми пружа са хромозомом више. И да, хвала мом деди на свим одиграним партијама ремија у којима сам се научила стрпљењу. Волим вас.

За крај, захваљујем се члановима комисије који су дорпинели да се текст дисертације унапреди и употпуни.

За Мерјем

Наслов дисертације: Логичко моделовање бајесијанске теорије потврђивања

Резиме: Циљ ове дисертације је изградња логика са циљем да се формализује бајесијанска теорија потврђивања. Као таква, сама тема ове дисертације је из области вероватносних логика.

У бајесијанској теорији разликују се квалитативни и квантитативни појам потврђивања. Према првом од ова два појма, догађај E вероватносно потврђује други догађај F ако је условна вероватноћа догађаја F (са условом E) већа од безусловне вероватноће. Са друге стране, квантитативни приступ изучава у ком степену E потврђује F, што се формализује *мерама релевантности* потврђивања, бинарним функцијама са аргументима E и F. Карнап је користио појам степена потврђивања као основни појам за формални апарат индуктивне логике.

Главни резултати ове дисертације су вероватносне логике са операторима потврђивања који одговарају постојећим мерама релевантности из литературе, и теоријска тврђења везана за те логике, попут теорема дедукције и потпуности, као и резултати одлучивости. Значај развоја ових логичких система, сем у директној формализацији важних бајесијанских појмова, лежи и у њиховој изражајности: за сваку меру релевантности која ће се логички формализовати, добијени логички језик је довољно богат да се у њему могу изразити многи основни оператори вероватносних логика из литературе, као што су оператори стандардне вероватноће, квалитативне конфирмације и независности. Резултати потпуности ових логичких система су изведени у односу на стандардну класу мерљивих модела, који се састоје од Крипкеових структура у којима је релација достижности замењена вероватносним просторима којима је сваки могући свет снабдевен.

Други део дисертације посвећен је динамичком аспекту потврђивања у смислу да пратимо колико реализација неког догађаја утиче на реализацију другог догађаја у будућности. У складу са тим, у овој дисертацији развили смо логику са разгранатим временом са вероватносним операторима потврђивања. Резултати првог дела успешно су модификовани да се добије резултат потпуности ове логике.

Кључне речи: Вероватносне логике, Темпоралне логике, Одлучивост, Потпуност, Степени потврђивања, Инфинитарна аксиоматизација.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Математичка логика

Dissertation title: Logical formalization of Bayesian concepts of confirmation

Abstract:

The goal of this dissertation is to develop logics with the aim of formalizing Bayesian confirmation theory. As such, the very topic of this dissertation is in the field of probabilistic logic.

In Bayesian theory there are qualitative and quantitative concepts of confirmation. According to the first of these two terms, the event E probabilistically confirms the second event F if the conditional probability of the event F (with the condition E) is greater than unconditional probabilities. On the other hand, the quantitative approach studies the degree to which E confirms F, which is formalized by *relevance measures* of confirmation, binary functions with arguments E and F. Carnap used the notion of the degree of confirmation as the basic term for the formal apparatus of inductive logic.

The main results of the dissertation are probabilistic logics with operators of confirmation that correspond to existing measures of relevance from the literature, and theoretical predictions related to these logics, such as deduction and completeness theorems, as well as decision results. The importance of the development of such logical systems, except in the direct formalization of important Bayesian concepts, lies in their expressiveness: for each measure of relevance that will be logically formalized, the resulting logical language is rich enough to express many basic operators of probabilistic logic from the literature, which are the operators of standard probability, qualitative confirmation and independence. The completeness of these logical systems is proven in relation to the standard class of measurable models, which consist of Kripke's structures in which the accessibility relation is replaced by a probabilistic measure defined over all possible worlds.

The second part of the dissertation is about dynamic aspect of confirmation in the sense that we monitor how much the realization of an event affects the realization of another event in the future.

Accordingly, in this dissertation we constructed a branching-time temporal logic with actions and probabilistic confirmation operators. The results of the first part were successfully modified to obtain the completeness result of this logic.

Keywords: Probabilistic logic, Temporal logic, Decidability, Completeness, Degree of confirmation, Infinitary axiomatization.

Research area: Mathematics

Research sub-area: Mathematical Logic

Садржај

Увод

Тема ове докторске дисертације јесте логичка формализација квантитативних појмова бајесијанске теорије потврђивања применом техника математичке логике. За саму ту формализацију користимо некласичне вероватносне логике које су утемељене на теоријама класичне математичке логике и вероватноће. Прилагођавање техника класичне логике за резоновање исказа са вероватноћама задаје потешкоће у формирању језика и аксиоматског система, и доказивању главних тврђења као што су потпуност и одлучивост. У овом раду, представићемо више вероватносних логика, и за сваку од њих представићемо резултате потпуности и одлучивости.

Кроз историју, теорије математичке логике и вероватноће су се често преплитале. Заправо, покушавало се да се теорија вероватноће заснује на логичким основама, а такође су истраживане и логике у којима се истинитосне вредности формула изражавају вероватносним мерама. Међутим, сам почетак стварања вероватносних логика настао је средином 80-тих година радовима из области вештачке интелигенције. Проблем *извођења закључка на основу непотпуног знања* је уједно био и инспирација настанка ове некласичне логике.

Вероватносне логике ипак имају и нешто раније корене. Још је Вилхелм Лајбниц (*Gottfried Wilhelm Leibnitz 1646–1716*) покушавао да логички заснован поступак примени у верификацији тврђења из теорије вероватноће [63]. Након Лајбница, сличним проблемима бавили су се и још многи други математичари, Јакоб Бернули (*Jacob Bernoulli 1654–1705*), Аугустус Де Морган (*Augustus De Morgan 1806–1871*), Томас Бајес (*Thomas Bayes 1701–1761*) и други, а посебно Џорџ Бул (*George Boole 1815–1864*) [32, 63]. У [5] Бул проучава однос логичког рачуна и рачуна догађаја који су данас схваћни као део теорије вероватноће.

Аксиоматски приступ вероватноћи први је увео Андреј Колмогоров (*Andrei Nikolaevich Kolmogorov 1903–1987*) [45]. Представио је аксиоматске системе за коначно-адитивну вероватноћу и за σ-адитивну вероватноћу. Филозоф, Рудолф Карнап (*Rudolf Carnap 1891–1970*), теорију вероватноће је посматрао као проширење логике [7, 8]. Покушавао је да вероватноћу закључка, као обично закључивање, сведе на извођење из синтаксне форме аргумената закључивања. Његов рад наставио је Хаим Гаифман (*Haim Gaifman 1934*) који у [30] описује једну вишевредносну логику у чијем језику се појављују вероватносни оператори. У вишевредносним логикама постоје искази који нису ни тачни, а ни нетачни, већ имају неки други статус. Идеја да истинитосна вредност исказа представља и саму вероватноћу исказа омогућила је настанак многих некласичних логика међу којима је најпопуларнија фази логика где се интерпретација исказних слова дефинише преко реалне функције чије вредности јесу у интервалу $[0, 1]$. Ова логика је веома заступљена у вештачкој интелигенцији [19, 66]. Међуим, истинитосне вредности исказа не морају бити и вероватноћа исказа.

Најважнији напредак у вероватносној логици након Лајбница и Була, био је рад

Кислера (*Howard Jerome Keisler 1936*) [44]. Он уводи вероватносне квантификаторе облика $Px > r$, где формула облика $(Px > r)\Phi(x)$ има значење да је вероватноћа скупа $\{x : \Phi(x)\}$ већа од r. Мотивисан Кислеровом логиком, Хувер (*Douglas Hoover*) у [41] уводи вероватносне структуре и доказује резултат потпуности. Сличност између вероватносних логика и модалних логика увиђа Хамблин (*Charles Leonard Hamblin*) који у раду [37] уводи вероватносни модални оператор P.

У [31] Хаилперин (*Theodore Hailperin 1916–2014*) изводи ефикасан поступак, заснован на методама линарног програмирања, за добијање најбољих могућих граница за вероватноће исказних формула $\phi(X_1, \dots, X_n)$ ако су познате вероватноће појединачних потформула $X_1, \dots, X_n$.

Средином 80-тих расте интересовање за вероватносне логике због велике примене у решавању проблема о закључивању у присуству неизвесности. Истаживачи из области логике, вештаче интелигенције и информатике развијају разне формалне системе за резоновање вероватноће [2, 26, 34, 40, 54].

Вероватносне логике које данас проучавамо баве се исказима који садрже појам вероватноће док истинитост формуле остаје бивалентна, односно *тачна* или *нетачна*. Овакве логике су заправо једна врста модалних логика, где се вероватносни оператори понашају слично као и модални, али је у семантици релација достижности замењена вероватносном мером над световима, што ћемо прецизно описати кроз рад.

Сама дисертација је подељена у три главна поглавља и један додатак. У првом поглављу ове дисертације представићемо исказне вероватносне логике LPP_1 и LPP_2 [54], као и логику $LPP_{\frac{3}{2}}$ [10]. Језик ових логика је исти и помоћу њега се може формализовати реченице облика "Вероватноћа од α је бар $\frac{1}{2}$" уз помоћ вероватносних оператора $P_{\geqslant r}$. Разлике међу њима јесу те да водимо рачуна када можемо применити вероватносне операторе, што њихову семантику чини различитом. Циљ ове дисертације јесте проширење ових исказних вероватносних логика како би се формализовала теорија потврђивања. Због тога, у првом поглављу, детаљно су показани резултати коректности и јаке потпуности за све три логике, као и резултати одлучивости, јер су то и делови главних резултата ове тезе. Карактеристично за вероватносне логике је то што за њих не важи теорема компактности (ако је сваки коначан подскуп неког скупа формула задовољив, онда је и цео скуп задовољив). Последица некомпактности је та да аксиоматски систем не може бити коначан и јако потпун (сваки конзистентан скуп формула има модел). Како бисмо превазишли тај проблем, аксиоматски систем, који је исти за све три логике, садржи инфинитарна правила извођења која омогућавају доказ јаке потпуности. Последњи део овог поглавља посвећен је проширењу изкасних вероватносних логика на вероватносне логике првог реда, и за такве логике детаљно су доказана тврђења јаке потпуности

Појам *потврђивања* везује се за однос између неке хипотезе и услова. Кажемо да услов потврђује хипотезу ако је условна вероватноћа хипотезе (уз услов) већа од безусловне вероватноће саме хипотезе. У књизи [7] Карнап разликује неколико семантички различита појма потврђивања. Међу њима је представљен и *квантитативни* појам потврђивања који је формализован функцијом c где је $c(A, B) = r$, $r \in [-1, 1]$, где је A хипотеза а B услов. Друго поглавље ове тезе је посвећено формализацији овог квантитативног појма потврђивања где је степен потврђивања представљен помоћу *мере разлике*, тј. важи $c(A, B) = \mu(A|B) - \mu(A)$. Заправо, у овом делу представљамо сва проширења логика из првог поглавља новим вероватносним операторима потврђивања облика $c_{\geqslant r}$ и $c_{\leqslant r}$. Као и пре, показујемо иста тврђења која су значајна за вероватносне логике, коректност, јаку потпуност и одлучивост. Ове логике су приказане у радовима [13, 12]. На крају овог поглавља представићемо рестрикцију логика са операторима потврђивања где се ограничавамо да су вероватносне мере у семантици поменутих логика коначног кодомена. То се може посматрати и као проширење логике $LPP_2^{Fr(n)}$ из [54]. За ове логике показујемо потпуност коначне аксиоматизације.

Треће поглавље дисертације се бави проблемом потврђивања у динамичком аспекту, где омогућавамо да пратимо колико неки догађај утиче на испуњење другог догађаја у времену. У ту сврху користимо претходно добијену вероватносну логику са операторима потврђивања у комбинацији са темпоралним логикама. Темпоралне логике су логике за представљање исказа са појмом времена. Једну врсту темпоралних логика чине темпоралне логике са разгранатим временом у којима сматрамо да сваки временски тренутак може водити до различитих потенцијалних будућности. Баш ову врсту темпоралних логика користимо за стварање нове вероватносно-темпоралне логике са операторима потврђивања. Међутим, у овом делу се не бавимо стандардном темпоралном логиком са разгранатим временом, већ њеним проширењем у којем акцијама обележавамо активности које се догађају између два временска тренутка. Идеја за настанак овакве темпорлане логике са акцијама произилази из радова [69, 68]. У овим радовима аутори су развили логику са акцијама и предусловима за испуњење акција у разгранатом времену, која је семантички слична логици коју ми користимо. Та логика се показала веома корисном у вештачкој интелигенцији за ажурирање планираних акција у будућности на основу тренутно доступних података. Међутим, подаци на основу којих се врши ажурирање у тој логици могу бити тачни или нетачни. Управо комбинација оваквих логика са вероватносним логикама омогућава присуство неизвесности међу подацима. У овом поглављу развијамо логику која нам омогућава да пратимо колико испуњене неке акције повећава вероватноћу да су предуслови за неку другу акцију испуњени у следећем тренутку.

Први наш резултат вероватносно-темпоралне логике са акцијама представљен је у раду [11]. У трећем поглављу ове тезе проширујемо логику овог рада са новим операторима потврђивања из другог поглавља, и као и пре доказујемо тврђења коректности и јаке потпуности, као и резултат одлучивости за један фрагмент ове наше логике. Међутим, у овом делу ћемо представити само једну логику која је у духу LPP_2 вероватносне логике, односно, представљамо логику у којој није дозвољено мешање темпоралних формула са акцијама и вероватносних формула. Као и пре, теорема компактности не важи за темпоралне логике, што ћемо илустровати примером у овом поглављу, па и у аксиоматизацији за темпорални део имаћемо инфинитарно правило.

Резултат одлучивости за вероватносно-темпоралну логику са операторима потврђивања још увек није урађен, па је на крају трећег поглавља остављен као отворен проблем.

Степен потврђивања у другом поглављу је представљен помоћу мере разлике где је $c(A, B) = \mu(A|B) - \mu(A)$. Међутим, постоје и друге мере за дефинисање степена потврђивања. Ми смо се у раду базирали на најстандарнију, али у додатку ове дисертације коментаришемо како се наше аксиоматске технике могу адаптирати у случају другог избора за меру потврђивања. У таквим случајевима дискутујемо о могућим заменама аксиома и резултатима који тада следе.

Сва поглавља садрже нове резултате који су заправо плод заједничког рада са професорима Драганом Додером и Зораном Огњановићем.

Глава 1

Неке вероватносне логике

У овом поглављу представићемо три исказне вероватносне логике. Прво ћемо детаљно представити вероватносну логику LPP_2 која је једно проширење класичне исказне логике вероватносним операторима $P_{\geqslant r}$. У овој логици ћемо разликовати две врсте формула: *исказне формуле* које не садрже вероватносне операторе, и *вероватносне формуле* које садрже вероватносне операторе. У LPP_2 логици није дозвољено мешање вероватносних и исказних формула. На пример конјункција исказне и вероватносне формуле није могућа. Такође, није дозвољена итерација вероватносних оператора, односно за добијање вероватносне формуле оператор $P_{\geqslant r}$ се примењује само на исказне вероватносне формуле. За ову логику детаљно ћемо представити доказ јаке потпуности. Такође, показаћемо да је проблем одлучивости класе NP.

Даље ћемо представити проширења LPP_2 логике. Прво, дискутоваћемо о логици $LPP_{\frac{3}{2}}$ у којој ћемо дозволити мешање исказних и вероватносних формула, тако да ће скуп формула бити надскуп скупа формула логике LPP_2. Показаћемо да и у том случају важи јака потпуност, и да проблем одлучивости остаје у класи NP.

Што се тиче следећег проширења, представићемо логику LPP_1 која је проширење LPP_2 логике, а и логике $LPP_{\frac{3}{2}}$. У логици LPP_1 биће дозвољена итерација вероватносних оператора, односно, у овој логици оператор $P_{\geqslant r}$ може се применити како на исказне тако и на вероватносне формуле. Резултат јаке потпуности важиће и за ову логику, док проблем одлучивости више неће бити у класи NP.

На крају ћемо представити и проширење логике првог реда вероватносним операторима, слично као што смо урадили са класичном исказном логиком.

1.1 Логика LPP_2

У овом одељку представићемо формални језик и класу модела логике LPP_2. Показаћемо да теорема компактноти не важи за ову логику, и тиме оправдати немогућност коначне аксиоматизације. Затим ћемо представити инфинитарну аксиоматизацију и детаљно доказати теорему јаке потпуности у односу на одговарајуће мерљиве вероватносне моделе. Такође, показаћемо да је проблем одлучивости логике LPP_2 у класи NP.

1.1.1 Синтакса и семантика

Језик логике LPP_2 је једно пребројиво проширење језика класичне исказне логике и састоји се од пребројивог скупа исказних слова $\mathcal{P} = \{p, q, r, \dots\}$, исказних везника $\neg$ и $\wedge$ и вероватнсоних оператора $P_{\geqslant r}$, где је r рационални број из интервала $[0,1]$. Дефинишемо две врсте формула ове логике:

Дефиниција 1.1 (Исказне формуле). *Скуп формула у ознаци $For_C(LPP_2)$ је скуп свих исказних формула које се формирају језиком LPP_2 логике. Означавамо произвољну исказну формулу са α,β,γ (уз индексе уколико су потребни).*

Дефиниција 1.2 (Вероватносне формуле). *Скуп $For_P(LPP_2)$ вероватносних формула је најмањи скуп који задовољава:*

- *Ако је α исказна формула, формула облика $P_{\geqslant r}\alpha$ је вероватносна формула.*
- *Ако су ϕ и ψ вероватносне формуле, онда су и $\neg\phi$ и $\phi \wedge \psi$ вероватносне формуле.*

Произвољну вероватносну формулу означавамо са ϕ, ψ (уз индексе уколико су потребни). Вероватносне формуле облика $P_{\geqslant r}\alpha$ називамо базичне вероватносне формуле.

Скуп свих формула у ознаци $For(LPP_2)$ је унија скупова $For_C(LPP_2)$ и $For_P(LPP_2)$, и прозивољну формулу логике означавамо са ρ и σ (уз индексе).

Може се приметити да конјункцију и негацију користимо као примарне везнике. Остале класичне исказне везнике, $\vee$, $\to$ и $\leftrightarrow$, уводимо као скраћенице на уобичајан начин, што ћемо користити и у осталим логикама овог рада.

Поред поменутих вероватносних оператора уводимо и још неке вероватносне операторе следећим дефиницијама:

- $P_{<r}\alpha$ је $\neg P_{\geqslant r}\alpha$,
- $P_{\leqslant r}\alpha$ је $P_{\geqslant 1-r}\neg\alpha$,
- $P_{>r}\alpha$ је $\neg P_{\leqslant r}\alpha$ и
- $P_{=r}\alpha$ је $P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\leqslant r}\alpha$.

За моделе у којима дефинишемо значење формула, односно њихову задовољивост, користимо посебне Крипкеове моделе који су слични моделима модалне логике [43, 42, 46, 47]. Разлика је у томе што се уместо релација достижности у моделима модалне логике користи вероватносна мера простора која је додељена сваком свету модела. Иако формуле ове логике говоре о вероватноћи, дефинисањем оваквих модела, формуле и даље имају стандардне истинитосне вредности, тачно (true) и нетачно (false).

Дефиниција 1.3. *Вероватносни модел је структура $M = \langle W, H, \mu, v\rangle$ где:*

- *W је непразан скуп светова,*
- *H је алгебра подскупова од W тако да*
  1. *$W \in H$,*
  2. *ако $A \in H$, онда $W \setminus A \in H$, и*
  3. *ако $A, B \in H$, онда $A \cup B \in H$.*
- *$\mu : H \longrightarrow [0,1]$ је коначно адитивна мера где важи*
  1. *$\mu(W) = 1$,*

2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, *када год је* $A \cap B = \emptyset$.

- $v : W \times \mathcal{P} \to \{true, false\}$ *је исказна валуација која сваком свету и сваком исказном слову придружује тачну или нетачну истинитосну вредност.*

Релација задовољивости се дефинише између модела и формула LPP_2 логике на следећи начин:

Дефиниција 1.4. *Нека је* M *произвољан* LPP_2*-модел. Формула* ρ *је задовољива у моделу* M*, у ознаци* $M \models \rho$ *ако важи:*

- *Ако је* ρ *исказно слово* p *онда* $M \models p$ *акко* $v(w, p) = true$ *за све* w *модела* M*,*
- *Ако је* ρ *облика* $P_{\geqslant r}\alpha$*, онда* $M \models \rho$ *акко* $\mu(\{w \in W \mid w \models_C \alpha\}) \geqslant r$*,*
- *Ако је* ρ *облика* $\neg\sigma$*, онда* $M \models \rho$ *акко* $M \not\models \sigma$*,*
- *Ако је* ρ *облика* $\rho_1 \wedge \rho_2$*, онда* $M \models \rho$ *акко* $M \models \rho_1$ *и* $M \models \rho_2$*.*

Са $\models_C$ означаваћемо релацију задовољивости за класичну исказну логику. Валуација у свету се проширује на све исказне формуле на уобичајан начин. У циљу поједностављивања нотације, означићемо скуп светова $\{w \in W \mid v(w, \alpha) = true\}$, једноставно са $[\alpha]_M$. Модел M кажемо да је *мерљив* ако $[\alpha]_M \in H$ за све $\alpha \in For_C(LPP_2)$. Такође, пишемо $[\alpha]$ уместо $[\alpha]_M$ када год је M јасно из контекста.

Дефиниција 1.5. *Формула* ρ *је* задовољива *ако постоји модел* M *у којем је* ρ *задовољива. Формула* ρ *је* ваљана *ако је задовољива у свим моделима. Скуп формула* T *је задовољив ако постоји модел у којем су све формуле скупа* T *задовољиве.*

Са $Meas(LPP_2)$ означићемо скуп свих мерљивих модела и у даљем излагању бавићемо се само класом мерљивих модела.

1.1.2 Компактност

За логику кажемо да је *компактна* ако за сваки скуп формула језика те логике важи да ако је сваки његов коначан подскуп задовољив, онда је и цео скуп задовољив. Овде ћемо показати да поменута теорема компактности не важи за нашу LPP_2 логику. Односно, изложићемо пример који показује да компактност не важи за LPP_2, а исти пример се може користити и за остала проширења ове логике.

Пример 1.1. *Нека је* T *скуп*

$$\{\neg P_{=0}p\} \cup \{P_{<\frac{1}{n}}p \mid n \in \mathbf{N}\},$$

где је p *исказно слово. За сваки коначан подскуп* T' *од* T *постоји највеће* $k \in \mathbf{N}$ *такво да* $P_{<\frac{1}{k}}p \in T'$*. Заиста, лако је конструисати мерљив* LPP_2*-модел* $M_{T'} = (W', H', \mu', v')$ *у којем је* T' *задовољив. Нека* W' *садржи два света,* w *и* w'*, и нека је* $H' = P(W')$*, док мера од* w' *износи* $\frac{1}{k+1}$*, а мера за свет* w *је* $\frac{k}{k+1}$*, и нека важи* $v(w, p) = false$*,* $v(w', p) = true$*. Следи,* $\mu([p]) = \frac{1}{k+1}$ *и* $M_{T'} \models T'$*. Међутим, не постоји* LPP_2 *модел* M *такав да* $M, w \models T$*, јер за све* $m > 0$ *ако* $\mu([p]) = m$*, постоји* $k \in \mathbf{N}$ *тако да* $\frac{1}{k} < m$ *и* $M \not\models P_{<\frac{1}{k}}p$*. Ако је пак* $\mu([p]) = 0$ *онда* $M \not\models \neg P_{=0}p$*. На овај начин заиста за све коначне подскупове* T' *од* T *важи да су задовољиви, али цео скуп* T *није. Дакле, следећа теорема не важи за логику* LPP_2*.*

Једна од последица некомпактности логике јесте та да аксиоматизација не може истовремено бити коначна и коректна и да важи јака потпуност. Заиста, претпоставимо да постоји коначна аксиоматизација логике LPP_2 за коју важи јака потпуност. Нека је T бесконачан скуп формула где је сваки његов коначан подскуп задовољив, док сам скуп T није. Због јаке потпуности аксиоматизације знамо да скуп T није конзистентан. Дакле из скупа T можемо извести контрадикцију. Како је аксиоматизација коначна, онда је то извођење коначно. Следи да постоји коначан подскуп T' скупа T из којег можемо да изведемо контрадикцију, па ни скуп T' није конзистентан. Због теореме потпуности, коју смо претпоставили да важи, следи да скуп T' није задовољив, што је немогуће.

1.1.3 Потпуна аксиоматизација

Сада ћемо представити аксиоматски систем логике LPP_2 у ознаци $Ax(LPP_2)$.

Схеме аксиома:

(A1) Све инстанце класичних исказних таутологија.

(A2) $P_{\geqslant 0}\alpha$

(A3) $P_{\leqslant r}\alpha \to P_{<s}\alpha$ када је $r < s$

(A4) $P_{<r}\alpha \to P_{\leqslant r}\alpha$

(A5) $(P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \to P_{\geqslant r+s}(\alpha \vee \beta)$

(A6) $(P_{\leqslant r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \to P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$

Правила извођења:

(R1) Из $\{\rho, \rho \to \sigma\}$ закључити σ.

(R2) Из α закључити $P_{\geqslant 1}\alpha$.

(R3) Из скупа премиса $\{\phi \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant \frac{1}{r}\}$ закључити $\phi \to P_{\geqslant r}\alpha$.

Приметимо прво да у правилу R1 формуле ρ и σ морају бити истог типа. Друго, примећујемо да A1 и R1 обезбеђују да је класична исказна логика подлогика LPP_2 логике. Аксиома 2 обезбеђује да је свака формула задовољива у скупу светова бар мере 0. Аксиоме 3 и 4 обезбеђују монотоност што ћемо видети у теореми 1.3.(ђ). Док аксиоме 5 и 6 обезбеђују коначну адитивност мере. Што се тиче правила извођења, R1 је класично правило modus ponens. Правило R2 игра улогу правила нецеситације у модалним логикама [42]. И правило R3 је једно инфинитарно правило којим се каже: ако је вероватноћа формуле α произвољно близу неком рационалном броју r, онда је она управо једнака r.

Дефиниција 1.6 (Тоерема, доказ)**.** *Формула α је* теорема*, означено са $\vdash_{Ax(LPP_2)} \alpha$, ако постоји низ формула $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda$ (λ је коначан или пребројив ординал), такав да $\alpha_\lambda = \alpha$ и за све формуле низа α_i, $i < \lambda$, важи да су или аксиома, или добијене из претходних формула неким правилом извођења.*

Формула α је изводљива из скупа $T \subseteq For_{LPP_2}$ ($T \vdash_{Ax(LPP_2)} \alpha$) ако постоји низ формула $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda$ (λ је коначан или пребројив ординал), такав да је $\alpha_\lambda = \alpha$ и за *све формуле низа α_i важи да су или аксиоме, или формуле скупа T или су добијене из претходних формула неким правилом извођења. Низ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha$ је* доказ *формуле α из скупа T.*

Пишемо $\vdash$ уместо $\vdash_{Ax(LPP_2)}$ када је јасно из контекста.

Дефиниција 1.7 (Конзистентност)**.** *Скуп формула T је* неконзистентан *ако $T \vdash \bot$, у супротном је* конзистентан*.*

T је максимално конзистентан скуп *(мкс) формула ако је конзистентан и задовољава:*

- *за сваку формулу $\alpha \in For_C(LPP_2)$, ако $T \vdash \alpha$ онда $\alpha \in T$ и $P_{\geqslant 1}\alpha \in T$ и*
- *за сваку формулу $\phi \in For_P(LPP_2)$ важи $\phi \in T$ или $\neg\phi \in T$.*

Сада ћемо показати да је наш систем коректан.

Теорема 1.1 (Коректност)**.** *Аксиоматски систем $Ax(LPP_2)$ је коректан у односу на класу модела $Meas(LPP_2)$.*

Доказ. Нека је $M \in Meas(LPP_2)$. Доказ коректности се спроводи тако што се покаже да је свака инстанца аксиоме ваљана формула и да правила извођења чувају ваљаност.

A1 Сваки свет модела се са становишта класичних исказних формула може схватити као један класичан исказни модел, тако да у сваком свету важе све класичне таутологије.

A2-4 Ово су особине вероватноћа које важе у сваком свету.

A5 Претпоставимо да $M \models P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. Дакле имамо да је $\mu([\alpha]) \geqslant r$, $\mu([\beta]) \geqslant s$, док је мера скупова у којима истовремено важе α и β мере 0. Посматрајући само скупове са позитивном мером можемо рећи да су скупови $[\alpha]$ и $[\beta]$ дисјунктни. Према дефиницији коначно адитивне мере важи $\mu([\alpha] \cup [\beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta]) \geqslant \min\{1, s + r\}$.

A6 Претпоставимо да $M \models P_{\leqslant r}\alpha \wedge P_{<s}\beta$. Дакле важи $\mu([\alpha]) \leqslant r$, $\mu([\beta]) < s$ тј. $\mu([\alpha \vee \beta]) \leqslant \mu([\alpha]) + \mu([\beta]) < r + s$.

R1 Претпоставимо да важи $M \models \rho$ и $M \models \rho \to \sigma$ али не важи, $M \not\models \sigma$. Из $M \models \rho \to \sigma$ и $M \not\models \sigma$ добијамо да $M \not\models \rho$, што је контрадикција.

R2 Претпоставимо да $M \models \alpha$, односно α важи у сваком свету модела M. Следи $\mu([\alpha]) \geqslant 1$.

R3 Претпоставимо да $M \models \{\phi \to P_{\geqslant r - \frac{1}{k}}\alpha \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant \frac{1}{r}\}$. Ако $M \not\models \phi$, важи $M \models \phi \to P_{\geqslant r}\alpha$. Сада претпоставимо да важи $M \models \phi$. Тада је $M \models P_{\geqslant r - \frac{1}{k}}\alpha$ за све $k \geqslant \frac{1}{r}$. Користећи особине скупа реалних бројева заиста важи $M \models P_{\geqslant r}\alpha$.

$\square$

Још увек дугујемо образложење зашто аксиоматизација не може бити коначна ако циљамо ка јакој потпуности. Претпоставимо да постоји коначна коректна аксиоматизација логике LPP_2 за коју се може показати јака потпуност. Нека је T бесконачан скуп који није задовољив, док је сваки његов коначан подскуп задовољив. Због коначне аксиоматизације, скуп T није конзистентан скуп па се из T може извести $\perp$. Због коначне аксиоматизације мора бити да је такво извођење коначно, односно да постоји коначан подскуп од T који изводи $\perp$, што је немогуће.

За доказ јаке потпуности користићемо модификацију конструкције Леон Хенкина коју је предложио у [39]. Прво се доказују неке помоћне теореме међу којима је и теорема дедукције. Затим се описује поступак како се конзистентан скуп може проширити до максималног конзистентног скупа и како се користећи максимално конзистентне скупове гради тзв. канонски модел. Показује се да је тај канонски модел из класе $Meas(LPP_2)$. Користећи све то на крају показујемо да сваки конзистентан скуп има модел, и то баш тај канонски модел, што је заправо јака потпуност.

Теорема 1.2 (Теорема дедукције)**.** *Ако је T скуӣ формула и ρ и σ формуле исшоī шиӣа онда важи*

$$T, \rho \vdash \sigma \text{ акко } T \vdash \rho \to \sigma,$$

īде T, ρ ӣредсшавља скуӣ $T \cup \{\rho\}$.

Доказ. Смер доказа здесна на лево директо важи применом правила извођења $R1$. За смер доказа слева на десно користићемо трансфинитну индукцију по дужини доказа за σ. Ако је дужина доказа за σ 1, онда је или σ аксиома или важи $\sigma \in T$ или $\sigma = \rho$. Из прва два случаја користећи A1 добијамо $\sigma \to (\rho \to \sigma)$, тј, $T \vdash \rho \to \sigma$. Ако је $\rho = \sigma$ важи $T \vdash \rho \to \rho$.

Претпоставимо сада да је дужина доказа $k > 0$ за формулу σ. Као и пре може бити да је σ аксиома или је из скупа T односно $\sigma = \rho$, па се у тим случајевима доказ спроводи као и пре. Претпоставимо да је формула σ добијена неким правилом извођења.

(R1) У случају да је σ добијена применом правила R1 важи $T \cup \{\rho\} \vdash \rho' \to \sigma$ и $T \cup \{\rho\} \vdash \rho'$. Из индукцијске хипотезе добијамо $T \vdash \rho \to (\rho' \to \sigma)$ и $T \vdash \rho \to \rho'$. Применом A1 важи $\vdash (\rho \to (\rho' \to \sigma)) \to ((\rho \to \rho') \to (\rho \to \sigma))$, тј. применом правила R1 добијамо $T \vdash \rho \to \sigma$.

(R2) Размотримо сада случај где је $\sigma = P_{\geqslant 1}\alpha$ и добијена је из скупа $T \cup \{\rho\}$ применом правила R2. У том случају важи $T, \rho \vdash \alpha$. Како је ρ из претпоставке теореме такође вероватносна формула па самим тим α не може ни на који начин бити изведена из вероватносне формуле, онда важи $T \vdash \alpha$. Односно применом правила R2 добијамо

$T \vdash P_{\geqslant 1}\alpha$,

$T \vdash \rho \to P_{\geqslant 1}\alpha$ (применом A1 и R1).

(R3) Разматрајмо сада случај када је формула σ добијена применом правила R3. Претпоставимо да је σ облика $\phi \to P_{\geqslant r}\alpha$, добијена из скупа премиса $\{\phi \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant \frac{1}{r}\}$. Према индукцијској хипотези важи:

$T \vdash \rho \to (\phi \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha)$, за све $k \geqslant \frac{1}{r}$.

Онда, применом класичне исказне логике добијамо

$T \vdash (\rho \wedge \phi) \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha$ за све $k \geqslant \frac{1}{r}$.

Применом правила R3 закључујемо

$T \vdash (\rho \wedge \phi) \to P_{\geqslant r}\alpha$.

Користећи A1 и R1 добијамо

$$T \vdash \rho \to (\phi \to P_{\geqslant r}\alpha)$$

$$T \vdash \rho \to \sigma.$$

□

Теорема 1.3. *За произвољне исказне формуле $\alpha, \beta \in For_C(LPP_2)$ и за све r и s важи:*

(а) $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}(\alpha \vee \bot)$.

(б) $\vdash P_{\geqslant r}(\alpha \vee \bot) \to P_{\geqslant r}\neg\neg\alpha$.

(в) $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}\neg\neg\alpha$.

(г) $\vdash P_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}\beta)$.

(д) Ако је $\alpha \leftrightarrow \beta$ онда $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \leftrightarrow P_{\geqslant r}\beta$.

(ђ) $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant s}\alpha$*, ако* $r > s$.

Доказ. (а) Знамо да је $\vdash \neg\alpha \vee \neg\bot$, па применом правила R2 добијамо $\vdash P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\bot)$. Из аксиома A1 и A5 важи $\vdash P_{\geqslant 0}\neg\bot$ и $\vdash (P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant 0}\neg\bot \wedge P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\bot)) \to P_{\geqslant r}(\alpha \vee \bot)$. Сада применом правила R1 добијамо $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}(\alpha \vee \bot)$.

(б) Инстанце аксиома A6 и A1 су $\vdash (P_{\leqslant 1-r}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<r}\neg\neg\alpha) \to P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$ и $\vdash (\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha$. Применом правила R2 добијамо $\vdash P_{\geqslant 1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$, тј, $\vdash \neg P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$. Стога важи $\vdash (P_{\leqslant 1-r}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<r}\neg\neg\alpha) \to (P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha) \wedge \neg P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha))$, односно $\vdash (P_{\leqslant 1-r}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<r}\neg\neg\alpha) \to \bot$. Заправо, применом аксиома A1 имамо $\vdash P_{\leqslant 1-r}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \to \neg P_{<r}\neg\neg\alpha$, тј. $\vdash P_{\geqslant r}(\alpha \vee \bot) \to P_{\geqslant r}\neg\neg\alpha$.

(в) Из (а) и (б) применом правила R1 добијамо да важи $P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}\neg\neg\alpha$.

(г) Из A6 важи $\vdash (P_{\leqslant 1-r}\neg\alpha \wedge P_{<r}\beta) \to P_{<1}(\neg\alpha \vee \beta)$, тј. $\vdash P_{>1-r}\neg\alpha \vee P_{\geqslant r}\beta \vee P_{<1}(\neg\alpha \vee \beta)$. Применом исказне логике добијамо $\vdash P_{<r}\alpha \vee P_{\geqslant r}\beta \vee \neg P_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta)$. Користећи дефиницију вероватносног оператора $P_{<r}$ и аксиоме A1 закључујемо $\vdash P_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}\beta)$.

(д) Ово је последица корака (г). Заправо, како важи $\alpha \leftrightarrow \beta$ важи и $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \alpha$. Па добијамо $P_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta)$, и применом корака (г) важи $(P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}\beta)$. Слично и за формулу $\beta \to \alpha$.

(ђ) Следи директном применом аксиома A3 и A4 и дефиниција за вероватносне операторе.

□

Покажимо сада како обезбеђујемо проширење произвољног консистентог скупа до максимално конзистентног скупа.

Теорема 1.4 (Линденбаумова теорема)**.** *Сваки конзистентан скуп формула T се може проширити до максимално конзистентног скупа.*

Доказ. Нека је $\{\phi_i \mid i = 0, 1, 2, ...\}$ набрајање свих вероватносних формула из $For_P(LPP_2)$ и нека је T^C скуп свих класичних синтаксних последица скупа T. Конструишемо низ скупуова $T_i, i = 0, 1, 2, \ldots$ рекурзивно на следећи начин:

1. $T_0 = T \cup T^C \cup \{P_{\geqslant 1}\alpha \mid \alpha \in T^C\}$.
2. За све $i \geqslant 0$
   (а) Ако је ϕ_i конзистентан са T_i, онда $T_{i+1} = T_i \cup \{\phi_i\}$, у супротном
   (б) Ако је ϕ_i облика $\psi \to P_{\geqslant r}\alpha$, онда $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\phi_i, \psi \to P_{<r-\frac{1}{k}}\alpha\}$ где је k позитиван цео број такав да $r - \frac{1}{k} \geqslant 0$ и T_{i+1} је конзистентан, у супротном
   (в) $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\phi_i\}$.
3. $T^\star = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Прво, користећи теорему 1.2 показујемо да је скуп $T^\star$ добро дефинисан, тј. постоји k из корака 2.б наведене конструкције.

Нека је ϕ_i формула $\psi \to P_{\geqslant r}\alpha$ и нека је ϕ_i неконзистентно са T_i. Тада следи да $T_i, \phi_i \vdash \bot$, а из теореме 1.2 добијамо $T_i \vdash \neg\phi_i$, односно $T_i \vdash \psi \wedge \neg P_{\geqslant r}\alpha$. Па важи $T_i \vdash \neg P_{\geqslant r}\alpha$.

Сада претпоставимо да је $T_i \cup \{\psi \to P_{<r-\frac{1}{k}}\alpha\}$ неконзистентно за све k, тј. важи $T_i \cup \{\psi \to P_{<r-\frac{1}{k}}\alpha\} \vdash \bot$. Поново, применом теореме 1.2 добијамо $T_i \vdash ((\psi \to P_{<r-\frac{1}{k}}\alpha) \to \bot)$, односно важи $T_i \vdash \psi \wedge \neg P_{<r-\frac{1}{k}}\alpha$ за све k. Дакле добили смо да је $T_i \vdash P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha$ за све k. Следи $T_i \vdash \top \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha$ за све k. Сада коритећи правило R3 добијамо $T_i \vdash \top \to P_{\geqslant r}\alpha$, односно $T_i \vdash P_{\geqslant r}\alpha$. Контрадикција.

Следеће ћемо показати да је $T^\star$ максимално конзистентнан скуп. Лако је приметити да су сви скупови T_i конзистентни, што следи из саме конструкције. Међутим, ово не имплицира чињеницу да је и $T^\star = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$, конзистентан због присуства инфинитарних правила у аксиоматизацији. Покажимо да је баш скуп $T^\star$ максимално конзистентан.

Из конструкције већ скуп T_0 задовољава први услов из дефиниције конзитентности. Како је $T_0 \subset T^\star$, први услов дефиниције је испуњен и за скуп $T^\star$. Из услова теореме T је конзистентнан скуп, па самим тим не садржи све исказне формуле, па из конструкције видимо да ни $T^\star$ не садржи све формуле.

Покажимо сада да је $T^\star$ дедуктивно затворен за све вероватносне формуле, тј да садржи све своје вероватносне последице. То се може показати коришћењем индукције по дужини доказа. Дакле, покажимо ако $T^\star \vdash \phi$ онда $\phi \in T^\star$. Ако је ϕ инстанца аксиоме онда $\phi \in T^\star$ према конструкцији $T^\star$.

R1 Претпоставимо да смо формулу ϕ добили применом правила R1. Нека је $\phi = \phi_i$, за неко i, $\psi = \phi_k$ и $\psi \to \phi = \phi_l$, за неке k и l. Нека је сада $m = \max\{k, l\}$, онда, из индукцијске хипотезе важи $\psi, \psi \to \phi \in T_{m+1}$. Дакле, имамо $T_{m+1} \vdash \phi$. Претпоставимо да $\phi \notin T^\star$. У том смислу, нека је $n = \max\{i, m\}$, тада $T_{n+1} \vdash \phi$. Ако је $\phi \notin T_{n+1}$, то значи да ϕ није додато у кораку i у скуп T_i, Што значи, према конструкцији, скуп $T_i \cup \{\phi\}$ није конзистентнан, тј. $T_i \cup \{\phi\} \vdash \bot$. Из теореме 1.2 добијамо $T_i \vdash \neg\phi$. Такође важи $T_{n+1} \vdash \neg\phi$, што је у контрадикцији са чињеницом да је T_{n+1} конзистентан.

R2 Претпоставимо да смо формулу ϕ добили применом правила R2, онда је ϕ формула облика $P_{\geqslant 1}\alpha$. Претпоставимо да важи $T^\star \vdash \phi$, па мора бити $T^\star \vdash \alpha$. Како је α исказна формула, а припадање исказних формула је дефинисано у кораку 1 наведене конструкције, мора бити да $P_{\geqslant 1}\alpha \in T_0$, односно $P_{\geqslant 1}\alpha \in T^\star$.

R3 Претпоставимо сада да је $\phi = \phi_i = \psi \to P_{\geqslant r}\alpha$ добијена правилом R3. Према индукцијској хипотези важи $\psi \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha \in T^\star$ за све $k > \frac{1}{r}$. Ако $\phi_i \notin T^\star$, онда према кораку 2.б постоје цели бројеви j и l такви да је $j > \frac{1}{r}$ и $\psi \to \neg P_{\geqslant r-\frac{1}{j}}\alpha \in T_l$ и $\neg(\psi \to P_{\geqslant r}\alpha) \in T_l$. Дакле, добијамо да је $\psi \wedge \neg P_{\geqslant r}\alpha \in T_l$, тј. $\psi \in T_l$. А то значи да за неко $l' \geqslant l$ имамо

$$\psi \in T_{l'}$$

$$\neg P_{\geqslant r-\frac{1}{j}}\alpha \in T_{l'} \text{ (R1 над } \psi \to \neg P_{\geqslant r-\frac{1}{j}}\alpha \in T_l)$$

$$P_{\geqslant r-\frac{1}{j}}\alpha \in T_{l'} \text{ (R1 над } \psi \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha \in T^\star \text{ за све } k > \tfrac{1}{r})$$

Контрадикција са чињеницом да је $T_{l'}$ конзистентан скуп. Дакле важи $\phi \in T^\star$.

Из дедуктивне затворености скупа $T^\star$ можемо показати да је скуп конзистентан. Заиста, ако је $T^\star$ неконзистентнан, онда постоји формула $\phi \in For_P(LPP_2)$ тако да $T^\star \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Самим тим постоји цео број i такав да важи $\phi \wedge \neg\phi \in T_i$, што је контрадикција. □

У следећој теореми формулисаћемо неке особине максимално конзистентог скупа које ћемо користити током целог рада.

Теорема 1.5. *Нека је $T^\star$ максимално конзистентан скуп. Тада важи:*

1. *Ако $\rho \in T^\star$ онда $\neg\rho \notin T^\star$.*
2. *$T^\star$ је дедуктивно затворен скуп, тј. ако $T^\star \vdash \rho$ онда $\rho \in T^\star$.*
3. *$\rho \wedge \sigma \in T^\star$ акко $\rho \in T^\star$ и $\sigma \in T^\star$.*
4. *Ако $\rho \in T^\star$ и $\rho \to \sigma \in T^\star$ онда и $\sigma \in T^\star$.*
5. *Све теореме припадају скупу $T^\star$.*
6. *Ако $P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star$ и $r \geqslant s$, онда $P_{\geqslant s}\alpha \in T^\star$.*
7. *Ако је $r \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$ и $r = \sup\{s : P_{\geqslant s}\alpha \in T^\star\}$ онда $P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star$.*

Доказ. 1. Претпоставимо супротно, нека $\rho \in T^\star$ и $\neg\rho \in T^\star$, тада важи $T^\star \vdash \rho$ и $T^\star \vdash \neg\rho$, односно $T^\star \vdash \bot$ што је у контрадикцији са претпоставком да је $T^\star$ конзистентан скуп.

2. Ако је ρ исказна формула, онда тврђење важи из саме дефиниције максимално конзистентног скупа. Нека је ρ нека вероватносна формула ϕ. Претпоставимо да $T^\star \vdash \phi$ и $\phi \notin T^\star$. Тада из дефиниције максимално конзитентног скупа онда важи $\neg\phi \in T^\star$, односно $T^\star \vdash \neg\phi$, немогуће према кораку 1.

3. Нека $\rho \wedge \sigma \in T^\star$. Тада $T^\star \vdash \rho$ и $T^\star \vdash \sigma$. Ако су σ и ρ из скупа $For_C(LPP_2)$ онда, из дефиниције мкс, важи $\rho \in T^*$ и $\sigma \in T^\star$. Претпоставимо сада да су σ и ρ вероватносне формуле и претпоставимо да $\sigma \notin T^\star$. Тада, поново из дефиниције мкс важи $\neg\sigma \in T^\star$. Односно, према кораку 2. ове теореме, важи $T^\star \nvdash \sigma$, што је немогуће. Слично важи ако претпоставимо да $\rho \notin T^\star$. За супротан смер доказ следи директно.

4. Ако $\rho \in T^\star$ и $\rho \to \sigma \in T^\star$ онда $T^\star \vdash \rho$ и $T^\star \vdash \rho \to \sigma$. Применом правила R1 важи $T^\star \vdash \sigma$ односно $\sigma \in T^\star$.

5. Ако је ρ теорема, онда важи $\vdash \rho$, па важи и $T^\star \vdash \rho$. Због дедуктивне затворености важи $\rho \in T^\star$.

6. Из теореме 1.3.(ђ) и корака 5. ове теореме, важи $T^\star \vdash P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant s}\alpha$. Ако је $P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star$, из особине дедуктивне затворености и правила R1 важи $P_{\geqslant s}\alpha \in T^\star$.

7. Нека је $r = \sup\{s : P_{\geqslant s}\alpha \in T^\star\}$. Применом правила R3 и особине дедуктивне затворености важи $P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star$.

□

Искористимо сада максимално конзистентне скупове за дефиницију канонског модела:

Нека је T конзистентан скуп, $T^\star$ његово максимално конзистентно проширење и нека је структура $M^\star = (W, H, \mu, v)$ дефинисана на следећи начин:

- W је скуп свих класичних интерпретација које задовољавају скуп T^C,
- v је пресликавање које сваком свету придружује баш ту интерпретацију коју сам свет представља,
- H је класа скупова облика $[\alpha] = \{w \in W \mid w \models_C \alpha\}$,
- $\mu([\alpha]) = \sup\{r \mid P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star\}$, за сваки скуп $[\alpha] \in H$.

Теорема 1.6. *Нека је $M^\star$ управо дефинисана структура. Важи $M^\star \in Meas(LPP_2)$.*

Доказ. Покажимо да канонски модел, дефинисан на начин пре, задовољава све особине мерљивих модела. Односно, у канонском моделу $M^\star$ показаћемо да је H алгебра над W и да је μ коначна адитивна мера.

(1) *H је алгебра подскупова од W.*

Лако је приметити да је $W = [\alpha \vee \neg\alpha]$, па из дефиниције за H о канонском моделу важи $W \in H$. Такође, ако $[\alpha], [\beta] \in H$ онда за комплемент скупа $[\alpha]$, у ознаци $[\neg\alpha]$, важи $[\neg\alpha] \in H$ и $[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \vee \beta] \in H$. Заиста, H је алгебра подскупова од W.

Сада покажимо да је μ коначно адитивна мера. Показаћемо да су услови из дефиниције 1.3 задовољени.

(2) *Ако $[\alpha] = [\beta]$ онда $\mu([\alpha]) = \mu([\beta])$.*

Довољно је показати да ако $[\alpha] \subset [\beta]$ онда $\mu([\alpha]) \leqslant \mu([\beta])$. Из $[\alpha] \subset [\beta]$ важи $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ и $\vdash P_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta)$. Потребно је показати да ако је $P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star$ онда $P_{\geqslant r}\beta \in T^\star$, тј, $\mu([\alpha]) \leqslant \mu([\beta])$. Применом теореме 1.3(г) и теореме 1.5(2,4) важи $\mu([\alpha]) \leqslant \mu([\beta])$.

(3) $\mu([\alpha]) \geqslant 0$.

Како је $P_{\geqslant 0}\alpha$ аксиома, онда важи $\mu([\alpha]) \geqslant 0$.

(4) $\mu([\alpha]) = 1 - \mu([\neg\alpha])$.

Нека је $r = \mu([\alpha]) = \sup\{s \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \mid P_{\geqslant s}\alpha \in T^\star\}$. Претпоставимо да је $r = 1$, па је $P_{\geqslant 1}\alpha \in T^\star$ (применом теореме 1.5(7)) и α је ваљана у моделу $M^\star$. Према особинама класичне интерпретације следи $\neg\alpha$ није задовољива у моделу $M^\star$, тј. $\mu([\neg\alpha]) = 0$. Следи $\neg P_{>0}\neg\alpha \in T^\star$. Ако за неко $s > 0$, $P_{>s}\neg\alpha \in T^\star$, мора бити $P_{>0}\neg\alpha \in T^\star$ што је немогуће. Дакле важи $\mu([\neg\alpha]) = 0$.

Претпоставимо сада да је $r < 1$. Онда, за сваки рационалан број r' из $(r, 1]$ је $\neg P_{\geqslant r'}\alpha = P_{<r'}\alpha \in T^\star$. Из аксиоме А4 следи $P_{\leqslant r'}\alpha \in T^\star$ и $P_{\geqslant 1-r'}(\neg\alpha) \in T^\star$. Такође, ако постоји рационалан број $r" \in [0, r) \cap \mathbf{Q}$ такав да $P_{\geqslant 1-r"}(\neg\alpha) \in T^\star$ онда $\neg P_{>r"}\alpha \in T^\star$, контрадикција.

Следи $\sup\{r \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \mid P_{\geqslant r}(\neg\alpha) \in T^\star\} = 1 - \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \mid P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star\}$, тј. $\mu([\alpha]) = 1 - \mu([\neg\alpha])$.

(5) $\mu([\alpha] \cup [\beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$ *за све дисјунктне* $[\alpha]$ и $[\beta]$.

Нека је $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$, $\mu([\alpha]) = r$ и $\mu([\beta]) = s$. Како је $[\beta] \subset [\neg\alpha]$, Из претходног корака важи $r + s \leqslant r + (1 - r) = 1$. Претпоставимо да је $r > 0$ и $s > 0$, тада за све $r' \in [0, r] \cap \mathbf{Q}$ и све $s' \in [0, s] \cap \mathbf{Q}$ важи да су $P_{\geqslant r'}\alpha$ и $P_{\geqslant s'}\beta$ у скупу $T^\star$. Следи из А5 да је $P_{\geqslant r'+s'}(\alpha \vee \beta) \in T^\star$. Дакле, $r + s \leqslant t_0 = \sup\{t \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \mid P_{\geqslant t}(\alpha \vee \beta) \in T^\star\}$.

Ако је $r + s = 1$, тада доказ директно следи. Претпоставимо да је $r + s < 1$. Ако је $r + s < t_0$ онда за све $t' \in (r + s, t_0) \cap \mathbf{Q}$ важи $P_{\geqslant t'}(\alpha \vee \beta) \in T^\star$. Можемо изабрати рационалне бројеве $r" > r$ и $s" > s$ такве да важи $\neg P_{\geqslant r"}\alpha, P_{<r"}\alpha \in T^\star$, $\neg P_{\geqslant s"}\beta, P_{<s"}\beta \in T^\star$ и $r" + s" = t' \leqslant 1$. Користећи А4 добијамо $P_{\leqslant r"}\alpha \in T^\star$. Из А6 следи $P_{<r"+s"}(\alpha \vee \beta) \in T^\star$, $\neg P_{\geqslant r"+s"}(\alpha \vee \beta) \in T^\star$ и $\neg P_{\geqslant t'}(\alpha \vee \beta) \in T^\star$, што је немогуће. Дакле $r + s = t_0$ и $\mu([\alpha] \cup [\beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$.

Коначно, претпоставимо да је $r = 0$ и $s = 0$, тада можемо урадити исто што и пре само са изменом да је $r' = 0$ или $s' = 0$.

Из (4) и (5) јасно следи да је $\mu(W) = 1$, па смо тиме показали да је канонски модел $M^\star$ добро дефинисан, односно да јесте модел LPP_2 логике. Особина да је $M^\star$ мерљив модел следи директно из дефиниције канонског модела. □

Сада смо у могућности да покажемо најзначајнији резултат овог поглавља, а то је резултат јаке потпуности.

Теорема 1.7 (Јака потпуност)**.** *Сваки конзистентан скуп T има $Meas(LPP_2)$-модел.*

Доказ. Прво конструишимо канонски модел на основу конзистентног скупа T. Из претходне теореме знамо да је канонски модел из класе $Meas(LPP_2)$. Покажимо да је баш канонски модел заправо модел конзистентног скупа T. Заправо, користећи индукцију по сложености формуле показаћемо да за све $\rho \in For(LPP_2)$ важи $\rho \in T^\star$ акко $M^\star \models \rho$.

- Претпоставимо да је ρ исказно слово. У том случају важи $\rho \in T^\star$ акко $M^\star \models \rho$ из дефиниције светова у моделу $M^\star$.

- У случају када је ρ вероватносна формула облика $P_{\geqslant r}\alpha$ важи: ако је $P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star$ онда $\sup_s\{P_{\geqslant s}\alpha \in T^\star\} = \mu([\alpha]) \geqslant r$ и $M^\star \models \rho$. Претпоставимо да је $M^\star \models \rho$, тада

$\sup_s\{P_{\geqslant s}\alpha \in T^\star\} \geqslant r$. Ако је $r < \mu([\alpha])$ онда из особина супремума и монотоности функције μ следи $P_{\geqslant r}\alpha \in T^\star$. Ако је $r = \mu([\alpha])$ тада применом правила R3 дедукујемо $P_{\geqslant r} \in T^\star$.

- Претпоставимо сада да је ρ облика $\rho' \wedge \sigma$. Нека је $M^\star \models \rho' \wedge \sigma$, а према дефиницији 1.4, имамо да је $M^\star \models \sigma$ и $M^\star \models \rho'$. Према индукцијској хипотези важи $\rho' \in T^\star$ и $\sigma \in T^\star$. Онда, мора бити $\rho' \wedge \sigma \in T^\star$ (особине мкс).

- Претпоставимо још да је ρ облика $\neg\sigma$. Тада је $\neg\sigma \in T^\star$ акко $\sigma \notin T^\star$ акко (индукцијска хипотеза) $M^\star \not\models \sigma$, тј. $M^\star \models \neg\sigma$.

□

На овај начин смо детаљно извели поступак доказивања јаке потпуности логике LPP_2. На сличан начин се показује јака потпуности многих проширења логике LPP_2 уз одређене измене. У наставку излагања овог одељка представићемо нека проширења LPP_2 логике и њихове резултате потпуности уз занемаривање детаља који су у потпуности доказују као код логике LPP_2. Такође, резултате које смо овде представили користићемо за добијање главних резултата ове тезе у следећем поглављу.

1.1.4 Одлучивост

Поред резултата јаке потпуности, други резултат који је битан за сваку логику коју представљамо у овој дисертацији јесте резултат одлучивости. У [54] доказано је да су проблеми задовољивости и ваљаности за класу $Meas(LPP_2)$ модела одлучиви. Како ћемо овај резултат користити у наставку рада, овде ћемо детаљно приказати поступак.

Прво ћемо дефинисати појам дужине формуле.

Дефиниција 1.8. *Дужина формуле ρ, у ознаци $|\rho|$, је функција дефинисана на следећи начин:*

- *ако је ρ исказно слово, онда $|\rho| = 1$,*
- *ако је ρ облика $\neg\rho'$, онда $|\rho| = 1 + |\rho'|$,*
- *ако је ρ облика $\rho' \wedge \sigma$, онда $|\rho| = 1 + |\rho'| + |\sigma|$,*
- *ако је ρ облика $P_{\geqslant r}\alpha$, онда $|\rho| = 1 + |\alpha|$.*

Теорема 1.8. *Број потформула неке LPP_2 формуле је мањи или једнак дужини формуле, тј. $|Subf(\rho)| \leqslant |\rho|$. Скуп $Subf(\rho)$ је скуп свих потформула формуле ρ.*

Доказ. Доказаћемо теорему индукцијом по сложености формуле ρ.

- Ако је ρ исказно слово, онда $Subf(\rho) = 1$ и $|\rho| = 1$, па важи $|Subf(\rho)| \leqslant |\rho|$.

- Ако је ρ вероватносна формула $P_{\geqslant r}\alpha$ онда $|Subf(\rho)| = 1 + |Subf(\alpha)| \leqslant 1 + |\alpha| = |\rho|$ (према ИХ).

- Ако је ρ формула облика $\neg\rho'$ онда $|Subf(\rho)| = 1 + |Subf(\rho')| \leqslant 1 + |\rho'| = |\rho|$ (према ИХ).

- Ако је ρ формула облика $\rho' \wedge \sigma$, онда $|Subf(\rho)| \leqslant 1 + |Subf(\rho')| + |Subf(\sigma)|$, ово важи јер може се десити да је $Subf(\rho') \cap Subf(\sigma) \neq \emptyset$. Остатак доказа важи на исти начин као и пре.

$\square$

Из теорије класичне логике знамо да су проблеми ваљаности и задовољивости исказних формула одлучиви. Стога, овде ћемо приказати проблем уколико посматрамо произвољну вероватносну формулу $\phi \in For_P(LPP_2)$.

Теорема 1.9. *Проблем задовољивости вероватносних формула из скупа $For_P(LPP_2)$ је NP-комплетан.*

Доказ. Нека је $\phi \in For_P(LPP_2)$ и нека су $p_1, \ldots, p_n$ сва исказна слова која се појављују у формули ϕ. *Атом* a формуле ϕ је конјункција $\pm p_1 \wedge \cdots \wedge \pm p_n$, где је $\pm p_i$ или исказно слов p_i или $\neg p_i$. Формула ϕ је еквивалентна са формулом

$$DNF(\phi) = \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{l_i} X_{i,j}\gamma_{i,j}(p_1, \ldots, p_n),$$

где $X_{i,j}$ је вероватносни оператор $P_{\geqslant r_{i,j}}$ или његова негација, и $\gamma_{i,j}(p_1, \ldots, p_n)$ исказна формула у DNF форми. Са $X_{i,j}\gamma_{i,j}(p_1, \ldots, p_n)$ смо дакле означили исказну формулу у дисјунктивној нормалној форми над којој је примењен вероватносни оператор $X_{i,j}$ и као таква је у потпуној дисјунктивној нормалној форми, тј. исказна формула је дијсункција атома формуле ϕ. Формула је ϕ је задовољива акко је бар један дисјункт формуле $DNF(\phi)$ задовољив. Означавамо меру атома a_i са y_i. Такође са $a_t \in X\gamma(p_1, \ldots, p_n)$ означаваћемо да се атом a_t појављује у исказном делу у $X\gamma(p_1, \ldots, p_n)$.

Дисјункт $D = \bigwedge_{j=1}^{k} X_j\gamma_j(p_1, \ldots, p_n)$ из $DNF(\phi)$ је задовољив акко следећи систем линеарних једначина и неједначина има решење

$\sum_{i=1}^{2^n} y_i = 1$

$y_i \geqslant 0$ за све $i = 1, \ldots, 2^n$

$\sum_{a_t \in X_1\gamma_1(p_1,\ldots,p_n)} y_t \geqslant s_1$ ако $X_1 = P_{\geqslant s_1}$

$\sum_{a_t \in X_1\gamma_1(p_1,\ldots,p_n)} y_t < s_1$ ако $X_1 = P_{<s_1}$

$\vdots$

$\sum_{a_t \in X_k\gamma_k(p_1,\ldots,p_n)} y_t \geqslant s_k$ ако $X_k = P_{\geqslant s_k}$

$\sum_{a_t \in X_k\gamma_k(p_1,\ldots,p_n)} y_t < s_k$ ако $X_k = P_{<s_k}$

Како је проблем задовољивости формуле ϕ сведен на решавање система линеарних једначина и неједначина, закључујемо да је проблем задовољивости одлучив.

Сада ћемо користи резултат сложености Фагина, Халперна и Мегида о линеарним тежинским формулама из [26]. Те формуле су буловске комбинације линеарних једначина и неједначина, са целим коефицијентима и променљивим облика $w(\alpha)$, где је $\alpha \in For_C$ и w означава тежину (weight), односно вероватноћу. Задовољивост ових формула се такође дефинише над Крипкеовим структурама са вероватносном мером дефинисаном над могућим световима, слично као и у нашој логици. У њиховом раду развијена је процедура за одређивање задовољивости линеарних тежинских формула која је у класи NP сложености.

Дакле, желимо да наш проблем сведемо на линеарне тежинске формуле, односно да наше вероватносне формуле преведемо у линеарне тежинске формуле, а онда применимо процедуру из рада [26]. Наша једноставна транслација је дефинисана рекурзивно на следећи начин:

- $f(P_{\geqslant \frac{r_1}{r_2}}\alpha) = r_2 w(\alpha) \geqslant r_1$,
- $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$,
- $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$.

где су r_1, r_2 позитивни цели бројеви и $r_2 \neq 0$.

На пример, ако је ρ формула $P_{\geqslant \frac{2}{3}} p \vee P_{\leqslant \frac{4}{5}} q$ онда $f(\rho)$ је $3w(p) \geqslant 2 \vee 5w(q) \leqslant 4$.

Очигледно, формула $\phi \in For_P$ је задовољива акко је $f(\phi)$ задовољива линеарна тежинска формула. Наш резултат следи из поменутог.

$\square$

1.2 Логика $LPP_{\frac{3}{2}}$

Као што знамо, у LPP_2 логици смо имали две врсте формула, исказне и вероватносне формуле, и знамо да мешање међу њима није било могуће, као ни итерирање вероватносних оператора. Такође смо показали да логика LPP_2 јесте одлучива и проблем одлучивости припада класи NP. У овом одељку представићемо једно проширење логике LPP_2 у циљу да дозволимо мешања исказних и вероватносних формула, а да притом сложеност логике остаје непромењена. То проширење, односно нову логику, означићемо са $LPP_{\frac{3}{2}}$ и она је у потпуности представљена у [10]. Сада ћемо формирати језик логике $LPP_{\frac{3}{2}}$, а онда укратко представити потпуну аксиоматизацију и резултат одлучивости логике $LPP_{\frac{3}{2}}$.

1.2.1 Синтакса и семантика

Језик ове логике је у потпуности исти као и језик логике LPP_2. Формуле, исказне и вероватносне, дефинишемо на исти начин као и пре. Међутим, у овој логици су дозвољене буловске комбинације вероватносних и исказних формула. У том смислу имамо следећи пример.

Пример 1.2. *Формула*

$$(p \vee q) \wedge P_{\geqslant r}\alpha$$

је једна формула $LPP_{\frac{3}{2}}$ логике, али није формула логике LPP_2.

Што се тиче семантике, односно дефиниције модела логике $LPP_{\frac{3}{2}}$ у потпуности је иста као у дефиницији 1.3. Међутим, задовољивост се дефинише другачије.

Дефиниција 1.9 (Задовољивост)**.** *Нека је M један $LPP_{\frac{3}{2}}$-модел и нека је w један свет из M.* Релација задовољивости*, у ознаци $\models$, се дефинише рекурзивно на следећи начин:*

1. *Ако је $\alpha \in \mathcal{P}$ онда $M, w \models \alpha$ акко $v(w, \alpha) = true$,*

2. *$M, w \models P_{\geqslant r}\alpha$ ако $\mu(\{w' \in W \mid v(w', \alpha) = true\}) \geqslant r$,*

3. *$M, w \models \neg\rho$ акко $M, w \not\models \rho$,*

4. *$M, w \models \rho \wedge \sigma$ акко $M, w \models \rho$ и $M, w \models \sigma$.*

Као и пре, користимо све скраћенице у нотацији које се дефинишу на исти начин. Такође, користимо класу мерљивих модела као и пре.

Приметимо да у дефиницији задовољивости, задовољивост је дефинисана у свету, што значи да нека формула може бити задовољива у једном свету а у другом не, неког истог модела. Међутим, то не важи за све формуле. Задовољивост исказне формуле зависи од света, међутим задовољивост вероватносних формула не зависи, што се да приметити из дефиниције. Заиста, ако је нека вероватносна формула задовољива у неком свету модела, она је задовољива у свим световима тог модела, јер у моделима имамо једну меру која је дефинисана над световима као у логици LPP_2. Самим тим основни појмови о задовољивости се дефинишу нешто другачије:

Дефиниција 1.10. *Формула ρ је задовољива ако постоји $LPP_{\frac{3}{2}}$-модел M и свет w у M тако да $M, w \models \rho$. Формула ρ је ваљана у моделу M ако је задовољива у сваком свету w модела M. Формула ρ је ваљана ако је ваљана у сваком $LPP_{\frac{3}{2}}$-моделу.*

Скуп формула T је задовољив*, ако постоји $LPP_{\frac{3}{2}}$-модел M и свет w из M тако да $M, w \models \rho$ за све $\rho \in T$, у ознаци $M, w \models T$.*

1.2.2 Потпуна аксиоматизација

Како је LPP_2 подлогика ове логике, а знамо да LPP_2 није компактна, исти пример некомпкатности важи и за логику $LPP_{\frac{3}{2}}$, тј $LPP_{\frac{3}{2}}$ такође није компактна. Стога, и овај акиоматски систем ће садржати инфиниратна правила.

Заправо, аксиоматски систем логике $LPP_{\frac{3}{2}}$ је исти као и $Ax(LPP_2)$ осим што се аксиома A1 може применити на све формуле $LPP_{\frac{3}{2}}$ логике, и у правилима није потребно да су формуле истог типа.

Појам теореме се дефинише исто као и пре док за доказ имамо мале промене.

Дефиниција 1.11 (Доказ)**.** *Формула ρ је изводљива из скупа $T \subseteq For_{LPP_{\frac{3}{2}}}$ ($T \vdash_{Ax(LPP_{\frac{3}{2}})} \rho$) ако постоји низ формула $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_\lambda$ (λ је коначан или пребројив ординал), тако да $\rho_\lambda = \rho$ и свако ρ_i је аксиома или формула из T, или је изведена из претходних формула неким правилом извођења, са изузетком да се правило R2 може применити само на исказне теореме. Низ $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho$ је* доказ *формуле ρ из T. Пишемо $\vdash$ уместо $\vdash_{Ax_{LPP_{\frac{3}{2}}}}$ када је то јасно из контекста.*

Приметимо да је дужина доказа може бити било који пребројив ординал наследник. Илустроваћемо ову чињеницу једноставним примером у којем ћемо применити правило R3. Ако је $T = \{\rho \to P_{\geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{k}}\alpha \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2\}$ онда можемо пребројати све елементе из T: $\rho_0 = \rho \to P_{\geqslant 0}\alpha$, $\rho_1 = \rho \to P_{\geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}\alpha, \ldots$, $\rho_n = \rho \to P_{\geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}}\alpha, \ldots$

Ако означимо са ρ_ω (где ω означава најмањи бесконачни ординал) формулу $\rho \to P_{\geqslant \frac{1}{2}}\alpha$, онда бесконачни низ

$$\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots, \rho_\omega$$

је доказ за $\rho \to P_{\geqslant \frac{1}{2}}\alpha$ из скупа T (добијен применом правила R3). Можемо приметити да је дужина доказа следбеник ординал, $\omega + 1$.

Приметимо да ако избришемо ρ_ω из низа, добијамо низ $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots$ дужине ω, који је гранични ординал. Овај низ нема последњи елемент и самим тим није доказ према дефиницији 1.11 (исто важи и за дефиницију 1.6).

Као што смо рекли, правило R2 се може применити само на исказне теореме. Заиста, уколико би правило било примењиво на све исказне формуле имали бисмо следећу ситуацију: из $p \vdash p$ применом правила R2 важиће $p \vdash P_{\geqslant 1}p$ што не важи у општем смислу због семантике логике $LPP_{\frac{3}{2}}$. Исказне формуле и вероватносне формуле су независне међусобно, на пример може се десити да искзна формула p је задовољива у свету w модела M и истовремено да важи $M, w \models P_{=0}p$.

Сада ћемо увести дефиницију максимално конзистентног скупа који ће нам и овај пут бити од суштинске важности за доказ јаке потпуности.

Дефиниција 1.12 (Конзистентност). *Скуп формула T је* неконзистентна *ако постоји формула $\rho \in For(LPP_{\frac{3}{2}})$ тако да $T \vdash \rho \wedge \neg\rho$, у супротном је* конзистентан.

T је максимално конзистентан скуп *(мкс) ако важи следеће:*

- *за све $\rho \in For(LPP_{\frac{3}{2}})$ или је $\rho \in T$ или $\neg\rho \in T$.*

Теорема коректности важи и доказује се на исти начин као у претходном поглављу, док ће исказ теореме дедукције бити другачији јер немамо сва синтаксна ограничења као и пре.

Теорема 1.10 (Теорема дедукције). *Нека су ρ и σ произвољне формуле логике $LPP_{\frac{3}{2}}$ и нека је T скуп формула. Тада важи*

$$T, \rho \vdash \sigma \text{ акко } T \vdash \rho \to \sigma.$$

Као што видимо, сад немамо ограничење да формуле ρ и σ морају бити истог типа, јер је сада дозвољено мешање међу исказним и вероватносним формулама.

Доказ теореме се показује на исти начин као и пре.

Хенкинова конструкција доказа јаке потпуности за следећи корак тражи Линденбаумову теорему, која наравно важи и за $LPP_{\frac{3}{2}}$ логику.

Теорема 1.11 (Линденбаумова теорема). *Сваки конзистентан скуп се може проширити до максимално конзистентног скупа.*

Доказ. Како је дефиниција максимално конзистентог скупа другачија него у LPP_2 логици, доказ ове теореме има измене у односу на доказ теореме 1.4.

Нека је T произвољан конзистентан скуп формула. Претпоставимо да је $\{\rho_i \mid i = 0, 1, 2, ...\}$ набрајање свих формула из $For(LPP_{\frac{3}{2}})$. Конструишемо $T^\star$ рекурзивно на следећи начин:

1. $T_0 = T$.

2. За све $i \geqslant 0$

   (а) Ако је ρ_i конзистентан са T_i, онда $T_{i+1} = T_i \cup \{\rho_i\}$, у супротном

   (б) Ако је ρ_i облика $\rho' \to P_{\geqslant r}\sigma$, онда $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\rho_i, \rho' \to P_{<r-\frac{1}{k}}\alpha\}$ где је k позитиван цео број такав да $r - \frac{1}{k} \geqslant 0$ и T_{i+1} је конзистентан, у супротном

(в) $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\rho_i\}$.

3. $T^\star = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Као што видимо, кренули смо од набрајања свих формула, а не само вероватносних формула, јер да бисмо добили максимлано проширење, неопходно је да задовољимо дефиницију 1.12. Приметимо да у односу на теорему 1.4, пратећи дефиницију 1.12, максимално проширење $T^\star$ је дедуктивно затворено за све формуле, а не само за вероватносне формуле што је пре био случај. Доказ дедуктивне затворености, као и добре дефинисаности скупа $T^\star$ се ослања на теорему 1.10, и слично као и у доказу теореме 1.4 следи да је $T^\star$ максимално конзистентнан скуп.

□

Сада ћемо дефинисати канонски модел.

Дефиниција 1.13 (Канонски модел). *Нека је $T^\star$ максимално конзистентна скуп. Канонски модел $M^\star = (W, H, \mu, v)$ се дефинише као:*

- $W = \{w \mid w$ *је класична исказна интерпретација*$\}$,
- $H = \{[\alpha] \mid \alpha \in For_C(LPP_{\frac{3}{2}})\}$, *где је* $[\alpha] = \{w \in W \mid w \models_C \alpha\}$,
- $\mu : H \to [0,1]$ *тако да* $\mu([\alpha]) = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \mid T^\star \vdash P_{\geqslant r}\alpha\}$,
- *за све светове w и свако исказно слово $p \in \mathcal{P}$ важи,* $v(w,p) = w(p)$.

Овде можемо нешто више рећи о потреби разлике међу дефиницијама о максимлано конзистентним скуповима логика LPP_2 и $LPP_{\frac{3}{2}}$. Наиме, у дефиницији 1.7 захтевамо само за вероватносне формуле услов да или ϕ или $\neg\phi$ припада скупу, јер у случају да захтевамо исто и за исказне, канонски модел LPP_2 логике садржао би само један свет. Међутим, сада у канонском моделу светове представљају све интерпретације, па је у дефиницији 1.12 услов проширен и на исказне формуле.

На исти начин као у логици LPP_2 може се показати да је $M^\star$ мерљив модел, тј. $M^\star \in Meas(LPP_{\frac{3}{2}})$.

На крају овог поглавља можемо формулисати теорему потпуности за нашу логику.

Теорема 1.12 (Јака потпуност). *Скуп формула T је конзистентан акко постоји модел $M \in Meas(LPP_{\frac{3}{2}})$ и свет w у њему, тако да $M, w \models T$.*

Доказ. Јасно је да доказ у смеру здесна на лево је у ствари теорема коректности. За смер слева на десно радимо слично као и пре. Користећи конзистентан скуп T констуисаћемо максимално конзистентан скуп $T^\star$ и канонски модел $M^\star$. Сада, изаберимо свет w из $M^\star$ за који важи $w(p) = true$ ако $p \in T^\star$, у супротном $w(p) = false$. Може се, на исти начин као у теореми 1.7, показати да $\rho \in T^\star$ акко $M^\star, w \models \rho$ индукцијом по сложености формуле ρ. □

1.2.3 Одлучивост

У овом пододељку ћемо показати да проблем задовољивости и ваљаности формула логике $LPP_{\frac{3}{2}}$ остаје у класи сложености NP-потпуност. Знамо да је класична исказна логика подлогика ове логике, па је најнижа граница сложености логике $LPP_{\frac{3}{2}}$ баш NP-потпуност. Покажимо да је то уједно и највећа граница сложености наше логике.

Свака формула ρ се може написати у облику

$$\rho = \bigvee_{i=1}^{k} (\alpha_i \wedge \phi_i) \tag{1.1}$$

где је α_i конјункција исказних слова и њихових негација, а ϕ_i конјункција базичних вероватносних формула и њихових негација. Из теореме 1.8 закаључујемо да број чланова конјункције из (1.1) је мањи или једнак дужини формуле ρ. Приметимо то да у неким дисјунктивним формама можемо имати само исказни део, односно вероватносни део (у случају да је формула ρ исказна формула, односно вероватносна формула).

Ако је формула ρ задовољива у неком свету w модела M, онда бар један дисјункт је задовољив у свету w, тј. за неко i, α_i и ϕ_i су задовољиви у свету w модела M. Приметимо да из дефиниције задовољивости 1.9 важи ако је вероватносни део задовољив у свету w модела M онда је тај вероватносни део задовољив у свим световима модела M. Међутим, ово не важи за исказни део формуле ρ.

Како су могуће две врсте потформула формуле ρ (α и ϕ), радимо следеће:

- Прво проверимо задовољивост вероватносног дела, формулу ϕ, користећи теорему 1.9.
- Ако је ϕ задовољиво у моделу M (свет није битан у овом делу задовољивости), онда ћемо моделу M додати нове светове мере нула који ће представљати све класичне интерпретације формуле α.
- Проверићемо задовољивост формуле α над додатим световима (то је у ствари SAT проблем). Ако је α задовољива у неком свету онда је и сама формула ρ задовољива.

Заиста, из теореме 1.9 можемо пронаћи модел M, решавањем система линеарних једначина и неједначина, у којем је ϕ_i задовољиво. Сада је потребно проверити да ли је исказни део формуле ρ задовољив, односно проверити задовољивост формуле α_i. Из добијеног модела M препознајемо само оне атоме формуле ρ са позитивном вероватноћом. Односно, можемо имати ситуацију где атоми формуле α_i нису дефинисани у M, тј. може се десити да се нека исказна слова појављују у α_i али да се не појављују у формули ϕ_i, и из конструкције модела M ми немамо информације у којим световима та исказна слова важе, односно не важе. Тај проблем можемо превазићи тако што моделу додамо нове светове. Нека је n број свих исказних слова који се појављују у формули α_i. Можемо додати највише 2^n нових светова у модел M са вероватносном мером нула. У том смислу, ϕ_i остаје задовољиво у моделу, односно у свим новим световима, јер додати светови имају меру 0, па се они могу занемарити у дефиницији задовољивости вероватносних формула. Такође, додавањем нових светова обезбеђујемо присуство свих могућих класичних валуација формуле α_i у моделу M. Сада можемо проверити задовољивост формуле α_i у овим додатим световима. То је заправо SAT проблем. Сада, ако постоји свет w у којем α_i важи, онда је $M, w \models \rho$.

Теорема 1.13. *Проблем задовољивост $LPP_{\frac{3}{2}}$ логике је NP-йуйӣун.*

Доказ. Из теореме 1.9 знамо да је проблем задовољивости вероватносних формула, односно линеарних тежинских формула из [26], NP-сложености. И такође знамо да је проблем задовољивости исказних формула NP-потпун. Дакле, задовољивост $LPP_{\frac{3}{2}}$ логике је NP-потпуна.

□

1.3 Логика LPP_1

За крај исказних вероватносних логика представићемо логику LPP_1. Логика LPP_1 се може посматрати као ново проширење логике LPP_2 где су све рестрикције у синтакси LPP_2 логике овде дозвољене. Уједно, ова логика је и проширење логике $LPP_{\frac{3}{2}}$. Показаћемо да дозвољавањем итерације вероватносних оператора проблем одлучивости задовољивости формула је сложенији.

1.3.1 Синтакса и семантика

Што се тиче језика логике LPP_1 у потпуности је исти као и језик логике LPP_2. Разлика је у скупу формула. Скуп свих формула логике LPP_2 је подскуп скупа формула логике LPP_1, односно у логици LPP_1 је дозвољено мешање вероватносних и исказних формула, као и итерирање вероватносних оператора. Дакле, скуп LPP_1 формула, је најмањи скуп који садржи:

- све исказне формуле, укључујући и контрадикцију ($\perp$);
- ако су α и β LPP_1 формуле, онда су и $\neg\alpha$, $\alpha \to \beta$ и $P_{\geqslant r}\alpha$ такође LPP_1 формуле.

Можемо приметити да у писању формула више не водимо рачуна које слово означава исказну а које вероватносну формулу, јер су све рестрикције логике LPP_2 нестале. Сада произвољну формулу обележаваћемо са α,β,γ уз индексе уколико су потребни.

Прича постаје сложенија формирањем семантике. Наиме, како је у синтакси могуће мешање свих формула и итерација оператора, семантика бива сложенија како би спровела ред у логици.

Дефиниција 1.14. *LPP_1-модел је уређена ӣројка $(W, Prob, v)$ ēде је*

- *W нейразан скуй свеӣова,*
- *v валуација ӣаква да $v : W \times \mathcal{P} \to \{true, false\}$,*
- *$Prob$ је ӣресликавање које сваком свеӣу w додељује један вероваӣносни ӣросӣор $(W(w), H(w), \mu(w))$, ēде:*
  - *$W(w)$ је йодскуй од W,*
  - *$H(w)$ је алēебра йодскуйова од $W(w)$,*
  - *$\mu(w)$ је коначно-адиӣивна мера дефинисана на $H(w)$.*

Напоменимо да се валуација приордно проширује на скуп $W \times For_C$. Релација задовољивости је релација између светова LPP_1-модела и формула.

Дефиниција 1.15. *Нека је M произвољан LPP_1-модел и w произвољан свет тог модела. Формула α је задовољива у свету w, у ознаци $M, w \models \alpha$ ако важи:*

- *Ако је α исказна формула онда $M, w \models \alpha$ акко $v(w, \alpha) = true$,*
- *Ако је α облика $P_{\geqslant r}\beta$, онда $M, w \models \alpha$ акко $\mu(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \beta\}) \geqslant r$,*
- *Ако је α облика $\neg\beta$, онда $M, w \models \alpha$ акко $w \not\models \beta$,*
- *Ако је α облика $\beta \wedge \gamma$, онда $M, w \models \alpha$ акко $M, w \models \beta$ и $M, w \models \gamma$.*

Приметимо да у претходној дефиницији задовољивост свих формула је дефинисана у свету. У LPP_2 логици задовољивост је била над моделом, односно ако је формула задовољива онда је задовољива у свим световима. У $LPP_{\frac{3}{2}}$ имали смо задовољивост у односу на свет, слично као у LPP_1 логици, међутим из саме дефиниције се могло закључити да задовољивост вероватносних формула не зависи од изабраног света модела. Док у логици LPP_1 за све формуле задовољивост зависи од изабраног света.

Користићемо ознаку $w \models \alpha$ уместо $M, w \models \alpha$ када је модел M јасан из контекста.

Као и у логици $LPP_{\frac{3}{2}}$ дефинише се ваљаност и коректност формула и користи се класа мерљивих модела.

1.3.2 Потпуна аксиоматизација

Као и за логику $LPP_{\frac{3}{2}}$ важи чињеница да је LPP_2 подлогика и логике LPP_1, па самим тим пример некомпактности је валидан и за ову логику. Односно, знамо да ни логика LPP_1 није компактна, и да као последицу поменутог користићемо бесконачну аксиоматизацију, у ознаци $Ax(LPP_1)$, која је у потуности иста као и у претходним логикама уз јасно ограничење да инстанце аксиома морају бити у складу са правилима формирања формула.

Појмови теореме се дефинише на исти начин као и до сада, док се појам доказа уводи слично као у логици $LPP_{\frac{3}{2}}$.

Дефиниција 1.16 (Доказ). *Формула ρ је изводљива из скупа $T \subseteq For_{LPP_1}$ ($T \vdash_{Ax(LPP_1)} \rho$) ако постоји низ формула $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{\lambda+1}$ (λ је коначан или пребројив ординал), тако да $\rho_{\lambda+1} = \rho$ и свако ρ_i је аксиома или формула из T, или је изведена из претходних формула неким правилом извођења, са изузетком да се правило R2 може применити само на теореме. Низ $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho$ је* доказ *формуле ρ из T. Пишемо $\vdash$ уместо $\vdash_{Ax_{LPP_1}}$ када је то јасно из контекста.*

Приметимо да у дефиницији 1.11 правило R2 се може применити на све исказне теореме, док у овој дефиницији, због дозвољених итерација у логици LPP_1, правило R2 се примењује на све теореме.

Појам максимално конзистентног скупа се уводи исто као и у дефиницији 1.12.

Како је аксиоматски систем исти као и до сада, теорема коректности се показује потпуно исто као и у претходним вероватносним логикама. И као и до сада, за доказ потпуности пратићемо Хенкинову конструкцију доказа.

- Теорема дедукције се формулише и доказује исто као у теореми 1.10.
- Линденбаумова теорема се формулише и доказује исто као и у теореми 1.11.

Како је семантика другачија него у претходним логикама, канонски модел се дефинише другачије.

Дефиниција 1.17 (Канонски модел)**.** *Канонски модел $M^\star = (W, Prob, v)$ се дефинише као:*

- *W је скуп свих максимално конзистентних скупова.*
- *За свако $w \in W$, $Prob(w) = (W(w), H(w), \mu(w))$ тако да*
  - *$W(w) = W$,*
  - *$H(w)$ је класа скупова облика $[\![\alpha]\!] = \{w \in W \mid \alpha \in w\}$ за сваку формулу α,*
  - *$\mu(w) : H(w) \to [0,1]$ тако да $\mu(w)([\![\alpha]\!]) = \sup\{r \in [0,1]_{\mathbf{Q}} \mid P_{\geqslant r}\alpha \in w\}$.*
- *v је пресликавање које сваком свету $w \in W$ и сваком исказном слову $p \in \mathcal{P}$ придружује валуацију тако да за свако исказно слово $p \in \mathcal{P}$ важи $v(w,p) = true$ ако и само ако $p \in w$.*

Приметимо да у овој дефиницији уводимо нову ознаку $[\![\alpha]\!]$ јер користимо другачију дефиницију елемената скупа H. Скуп $[\![\alpha]\!]$ представља све оне светове, у овом случају максимално конзистентне скупове, који садрже формулу α, док скуп $[\alpha]$ представља скуп светова у којима је формула α задовољива. Заправо, испоставиће се да важи $[\![\alpha]\!] = [\alpha]$.

Слично као и пре, показује се да $M^\star \in Meas(LPP_1)$.

Теорема 1.14 (Јака потпуност)**.** *Сваки конзистентан скуп формула T има модел $M \in Meas(LPP_1)$.*

Доказ. Нека је $M^\star$ канонски модел дефинисан као и пре. Покажимо, индукцијом по сложености формуле, да за сваки свет w канонског модела $M^\star$ важи: $M^\star, w \models \alpha$ ако и само ако $\alpha \in w$.

- Ако је α исказно слово, тврђење важи из саме дефиниције канонског модела.
- Ако је α облика $\neg\beta$ тада важи: $M^\star, w \models \neg\beta$ акко $M^\star, w \not\models \beta$ акко $\beta \notin w$ акко $\neg\beta \in w$.
- Ако је α облика $\beta \wedge \gamma$ важи: $M^\star, w \models \beta \wedge \gamma$ акко $M^\star, w \models \beta$ и $M^\star, w \models \gamma$ акко $\beta \in w$ и $\gamma \in w$ акко $\beta \wedge \gamma \in w$.
- Нека је α облика $P_{\geqslant r}\beta$. Ако $\alpha \in w$ онда $\sup\{s \in [0,1]_{\mathbf{Q}} \mid P_{\geqslant s}\beta \in w\} = \mu(w)([\![\beta]\!]) \geqslant r$, па $M^\star, w \models P_{\geqslant r}\beta$. Претпоставимо сада да $M^\star, w \models P_{\geqslant r}\beta$, односно $\sup\{s \in [0,1]_{\mathbf{Q}} \mid P_{\geqslant s}\beta \in w\} \geqslant r$. Ако је $\mu(w)([\![\beta]\!]) > r$ онда због особине супремума и монотоности вероватноће $\mu(w)$ важи $P_{\geqslant r}\beta \in w$. Ако је пак $\mu(w)([\![\beta]\!]) = r$ онда према модификацији теореме 1.5.(7) прилагођена логици LPP_1 важи $P_{\geqslant r}\beta \in w$.

Применом Линденбаумове теореме скуп T можемо проширити до максимално конзистентног скупа $T^\star$. Из дефиниције канонског модела приметимо да ће $T^\star$ бити један од могућих светова. Па заиста за све формуле $\alpha \in T$ важи $M^\star, T^\star \models \alpha$. $\square$

1.3.3 Одлучивост

За доказ одлучивости логике LPP_1 користићемо метод филтрације [42] и свођење на проблем решивости система линеарних једначина и неједначина. Метод филтрације је битан корак у којем ограничавамо моделе на коначан број светова. Како је сада формула задовољива у свету, да бисмо пронашли тај свет показаћемо да је довољно тражити међу моделима са коначним бројем светова.

Теорема 1.15. *Формула α је задовољива у неком мерљивом моделу акко је задовољива у неком моделу са коначним бројем светова.*

Доказ. Нека је $M = (W, Prob, v)$ један мерљив модел LPP_1 логике и нека је $w \in W$ такав да $M, w \models \alpha$. Сада ћемо формирати један нови такође мерљив модел са коначним бројем светова у којем ће α и даље да важи.

Нека је $Subf(\alpha)$ скуп свих потформула формуле α и $k = |Subf(\alpha)|$. Дефинишимо релацију еквиваленција $\sim$ над $W \times W$ на следећи начин: $w \sim w'$ акко за све $\beta \in Subf(\alpha)$, $M, w \models \beta$ акко $M, w' \models \beta$. Скуп $W_{/\sim}$ је коначан и важи $|W_{/\sim}| \leqslant 2^k$. Сада, за сваку класу C_i изаберимо елемент и означимо га са w_i. Размотримо модел $M^* = (W^*, Prob^*, v^*)$, где:

- $W^* = \{w_i \mid C_i \in W_{/\sim}\}$,
- $Prob^*(w_i) = (W^*(w_i), H^*(w_i), \mu^*(w_i))$ тако да:
  - $W^*(w_i) = \{w_j \in W^* \mid (\exists u \in C_j) u \in W(w_i)\}$,
  - $H^*(w_i)$ је партитивни скуп од $W^*(w_i)$,
  - $\mu^*(w_i)(\{w_j\}) = \mu(w_i)(C_j)$ и за било који $D \in H^*(w_i)$ важи једнакост $\mu^*(w_i)(D) = \sum_{w_j \in D} \mu^*(w_i)(\{w_j\})$,
- $v^*(w_i, p) = v(w_i, p)$.

Из дефиниције модела M^* може се лако закључити да важи $M^* \in Meas(LPP_1)$. Применом једноставне индукције по сложености формуле $\beta \in Subf(\alpha)$ може се показати да важи $M, w \models \beta$ акко $M^*, w_i \models \beta$ где w_i представља C_w у M^*. Случајеви када је β исказно слово или нека класична исказна формула су тривијални. Нека је $\beta = P_{\geqslant r}\gamma$. Како је $\gamma \in Subf(\alpha)$ важи следеће:

$$M, w \models \beta \text{ ако и само ако } M, w_i \models \beta \text{ ако и само ако } \mu(w_i)([\gamma]) \geqslant r \text{ ако и само ако } \sum_{C_u : M, u \models \gamma} \mu(w_i)(C_u) \geqslant r \text{ ако и само ако } \sum_{C_u : M^*, u \models \gamma} \mu^*(w_i)(\{u\}) \geqslant r \text{ ако и само ако } \mu^*(w_i)([\gamma]) \geqslant r \text{ ако и само ако } M^*, w_i \models \beta.$$

□

Може се приметити да филтрирање није довољно за показивање одлучивости јер и даље може постојати бесконачно много могућих избора мера дефинисаних над коначним бројем светова. Дакле, сада слично као и за LPP_2 логику сводимо проблем на систем линеарних једначина и неједначина.

Теорема 1.16. *Проблеми одлучивости и ваљаности за* $Meas(LPP_1)$ *су одлучиви.*

Доказ. Нека је $M \in Meas(LPP_1)$ и нека је w свет модела M у којем важи формула α. Нека је, као и пре, $Subf(\alpha)$ скуп свих потформула од α. У сваком свету модела M важи тачно једна формула облика $\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n \wedge \neg\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \neg\gamma_m$, где су β_i и γ_j из скупа $Subf(\alpha)$ за $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$, и важи $k = n + m$. Називаћемо ту формулу карактеристична формула за свет w. Претходна теорема нам гарантује да постоји мерљив модел са највише 2^k светова где α важи у бар једном свету. За сваки природан број $l \leqslant 2^k$ размотрићемо моделе са l светова. У сваком од тих светова важиће тачно једна карактеристична формула. Дакле, за свако l размотрићемо све скупове од l карактеристичних формула које су исказно неконтрадикторне и од којих бар једна формула садржи формулу α. Заправо, овде је реч о мултискуповима јер се иста карактеристична формула може појавити више пута. Ти скупови у потпуности описују модел. За сваки такав избор и за сваки свет w_i посматраћемо следећи систем линеарних једначина и неједначина:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \mu(w_i)(\{w_j\}) \geqslant 0, \text{ за све } j = 1, l \\
&(2) \quad \sum_{j=1}^{l} \mu(w_i)(\{w_j\}) = 1 \\
&(3) \quad \sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} \mu(w_i)(\{w_j\}) \geqslant r, \text{ за све } P_{\geqslant r}\beta \in \alpha_{w_i} \\
&(4) \quad \sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} \mu(w_i)(\{w_j\}) < r, \text{ за све } \neg P_{\geqslant r}\beta \in \alpha_{w_i}
\end{aligned}
$$

Прва једначина означава да су вероватноће светова ненегативне. Друга једначина значи да за сваки свет w_i вероватноћа скупа свих светова је 1. Трећом (четвртом) групом неједначина тврди се да су све вероватносне формуле облика $P_{\geqslant r}\beta$ ($P_{\leqslant r}\beta$) које се јављају као конјункти у карактеристичној формули α_i задовољиве. Решавање оваквог система линарних једначина и неједначина је одлучив проблем. Ако је систем за фиксирано l и избор карактеристичних формула задовољив, онда у сваком од l светова се могу дефинисати вероватносни простори и у бар једном свету важиће полазна формула α. Ако за неке фиксиране l и избор карактеристичних формула одговарајући систем није решив, тада не постоји модел са највише l светова такав да у i-том свету важи карактеристична формула α_i. Ако ни за које фиксирано l и избор карактеристичних формула систем није решив онда према претходној теореми формула α није $Meas(LPP_1)$-задовољива.

□

1.4 Предикатска вероватносна логика првог реда

Сада ћемо представити вероватносне логике које су заправо проширење класичне предикатске логике првог реда. Слично као и пре разликујемо $LFOP_1$, $LFOP_{\frac{3}{2}}$ и $LFOP_2$. Прва и трећа логика су описане у [54] док ћемо овде представити само логику $LFOP_{\frac{3}{2}}$.

Језик наше логике, у ознаци $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_{\frac{3}{2}})$, је једно пребројиво проширење класичног језика првог реда и садржи:

- бесконачан скуп променљивих $Var = \{x, y, z, ...\}$,
- универзални квантификатор $\forall$, и класичне исказне везнике,
- за сваки цео број $k \geqslant 0$, бесконачно много k-арних функцијских симбола $F_0^k, F_1^k, \ldots$,
- за сваки цео број $k \geqslant 1$, бесконачно много k-арних релацијских симбола $P_0^k, P_1^k, \ldots$,
- листу унарних вероватносних оператора $P_{\geqslant r}$, за све $r \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$.

Функцијски симболи арности 0 називају се константни симболи.

Скуп $Term(LFOP_{\frac{3}{2}})$ терама овог језика је најмањи скуп који садржи променљиве и симболе константи и затворен је за правило:

- Ако су $t_1, \ldots, t_k$ терми и F^k функцијски симбол арности k, $(k > 0)$, онда је $F^k(t_1, \ldots, t_k)$ такође терм.

Терм који не садржи променљиве назива се основни терм. Ако су $t_1, \ldots, t_k$ терми и P^k релацијски симбол арности k, $(k > 0)$, онда је $P^k(t_1, \ldots, t_k)$ атомска формула. Сада, слично као и у исказном делу, дефинишемо две врсте формула. Скуп $For_C(LFOP_{\frac{3}{2}})$ је најмањи скуп који садржи атомске формуле и затворен је за правила:

- Ако су α и β класичне формуле онда су и $\neg\alpha$ и $\alpha \wedge \beta$ такође класичне формуле.
- Ако је α класична формула и x променљива, $(\forall x)\alpha$ је такође класична формула.

Класичне формуле ћемо као и пре обележавати са $\alpha, \beta, \ldots$.

Са друге стране, скуп $For_P(LFOP_{\frac{3}{2}})$ је скуп вероватносних формула који се дефинише исто као и у логици $LPP_{\frac{3}{2}}$ где сада вероватносни оператор примењујемо на класичне формуле $LFOP_{\frac{3}{2}}$ логике. Вероватносне фромуле као и пре облежавамо са ϕ, ψ (уз индексе).

Скуп формула логике $LFOP_{\frac{3}{2}}$ представља унију поменута два скупа и обележава се са $For(LFOP_{\frac{3}{2}})$. Произвољну формулу обележавамо са ρ, σ (уз индексе).

Друге класичне и вероватносне операторе дефинишемо исто као и у претходном одељку, док се егзистенцијални оператор дефинише са $(\exists x)\alpha =_{def} \neg(\forall x)\neg\alpha$.

Као и у класичној логици првог реда дефинише се појам слободних променљивих. У формули облика $(\forall x)\alpha$ формула α је у досегу квантификатора $(\forall x)$. Појава променљиве x у формули α је везана ако је у делу формуле α облика $(\forall x)\beta$, у супротном је појава слободна. Реченице су формуле без слободних променљивих. Ако је t терм и α класична формула, кажемо да је t слободан за променљиву x у α ако ни једно слободно појављивање од x није у досегу било ког квантификатора $(\forall y)$, где је y променљива у t. Ако је $\alpha(x)$ класична формула и t терм слободан за x у α, са $\alpha(t/x)$ ћемо означавати резултат замене свих слободних појава променљивих x у α термом t.

Дефиниција 1.18. *$LFOP_{\frac{3}{2}}$-модел је $M = (W, D, I, H, \mu)$ где:*

- *W је непразан скуп светова,*
- *D је пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује непразан домен $D(w)$,*
- *I је пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује класичну интерпретацију првог реда $I(w)$ тако да:*

  – *за свако i и сваки симбол константе F_i^0, $I(w)(F_i^0)$ је елемент скупа $D(w)$,*
  – *за сваки i и k, $I(w)(F_i^k)$ је функција из $D(w)^k$ у $D(w)$,*
  – *за сваки i и k, $I(w)(P_i^k)$ је k-арна релација над $D(w)$, односно подскуп од $D(w)^k$,*

- *H је алгебра подскупова од W,*
- *$\mu : H \longrightarrow [0, 1]$ је коначно адитивна мера.*

Нека је $M = (W, D, I, H, \mu)$ један $LFOP_{\frac{3}{2}}$-модел. *Валуација променљивих* v придружује сваком пару који се састоји од света w и променљиве x елемент домена, тј. $v(w)(x) \in D(w)$. Ако $w \in W$, $d \in D(w)$, и v валуација, онда $v[d/x]$ је такође валуација и иста је као и v са изузетком да је $v[d/x](w)(x) = d$.

Вредност терма t, у ознаци $I(w)(t)_v$, је:

- ако је t променљива x, онда $I(w)(x)_v = v(w)(x)$, и
- ако је $t = F_i^m(t_1, ..., t_m)$, онда $I(w)(t)_v = I(w)(F_i^m)(I(w)(t_1)_v, ..., I(w)(t_m)_v)$.

Сада ћемо увести појам истинитосних вредности формула.

Дефиниција 1.19. *Вредност формуле ρ у свету $w \in W$ једног $LFOP_{\frac{3}{2}}$-модела $M = (W, D, I, H, \mu)$, по валуацији v (означено са $I(w)(\rho)_v$) је:*

- *ако је $\rho = P_i^m(t_1, ..., t_m)$, онда $I(w)(\rho)_v = true$, ако $(I(w)(t_1)_v, ..., I(w)(t_m)_v) \in I(w)(P_i^m)$, у супротном $I(w)(\rho)_v = false$,*
- *ако је $\rho = P_{\geqslant r}\alpha$, онда $I(w)(\rho)_v = true$, ако $\mu(w)(\{u \in W(w) \mid I(u)(\alpha)_v = true\}) \geqslant r$, у супротном $I(w)(\rho)_v = false$,*
- *ако $\rho = \neg\sigma$, онда $I(w)(\rho)_v = true$, ако $I(w)(\sigma)_v = false$, у супротном $I(w)(\rho)_v = false$,*
- *ако је $\rho = \rho_1 \wedge \rho_2$, онда $I(w)(\rho)_v = true$, ако $I(w)(\rho_1)_v = true$, и $I(w)(\rho_2)_v = true$, у супротном $I(w)(\rho)_v = false$, и*
- *ако је $\rho = (\forall x)\alpha$, онда $I(w)(\rho)_v = true$ ако за све $d \in D(w)$, $I(w)(\alpha)_{v[d/x]} = true$, у супротном $I(w)(\rho)_v = false$.*

Формула важи у свету w неког $LFOP_{\frac{3}{2}}$-модела $M = (W, D, I, H, \mu)$ (у ознаци $(M, w) \models \rho$) ако за све валуације v, $I(w)(\rho)_v = true$. Формула је ваљана у $LFOP_{\frac{3}{2}}$-моделу $M = (W, D, I, H, \mu)$ (у ознаци $M \models \rho$), ако је задовољива у сваком свету w из W. Формула ρ је ваљана ако за све $LFOP_{\frac{3}{2}}$-моделе M важи $M \models \rho$. Реченица α је задовољива ако постоји свет w из $LFOP_{\frac{3}{2}}$-модела M тако да $(M, w) \models \alpha$. Скуп реченица T је задовољив ако постоји свет w из $LFOP_{\frac{3}{2}}$-модела M тако да важи $(M, w) \models \alpha$ за све $\alpha \in T$.

Као и у исказном делу, разматраћемо само $LFOP_{\frac{3}{2}}$-мерљиве моделе: $LFOP_{\frac{3}{2}}$-модел M је мерљив ако за све реченице α, све валуације v и све светове w из M, скуп

$$[\alpha]_{M,w}^v = \{u \in W \mid I(u)(\alpha)_v = true\}$$

припада H. Ако је α реченица, изостављаћемо индексирање са v у $[\alpha]_{M,w}^v$. Означавамо скуп свих мерљивих $LFOP_{\frac{3}{2}}$-модела са $Meas(LFOP_{\frac{3}{2}})$. Остали појмови семантике се дефинишу исто као и у исказном делу.

Наш аксиоматски систем за $LFOP_{\frac{3}{2}}$ логику садржи све аксиоме и правила извођења логике $LPP_{\frac{3}{2}}$ плус следеће:

(A7) $(\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$ где x није слободно променљива у α

(A8) $(\forall x)\alpha(x) \to \alpha(t/x)$, где је $\alpha(t/x)$ добијено заменом свих слободних појављивања x у $\alpha(x)$ са термом t који је слободан за x у $\alpha(x)$

(R4) Из α извести $(\forall x)\alpha$.

Појмови доказа, теореме, синтаксне последице скупа формула итд. се дефинишу као и у исказном случају.

Теорема 1.17 (Коректност)**.** *Аксиоматски систем $Ax(LFOP_{\frac{3}{2}})$ је коректан у односу на класу $Meas(LFOP_{\frac{3}{2}})$-модела.*

Доказ. Овде ћемо размотрити само случај за аксиому A7 док се доказ за аксиому A8 може наћи у [54], док правило R4 диркетно следи. Нека је $M = (W, D, I, H, \mu)$ један $LFOP_{\frac{3}{2}}$-мерљив модел. Претпоставимо да за неки свет $w \in W$ важи $M, w \not\models (\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$. То значи да за неку валуацију v, $I(w)((\forall x)(\alpha \to \beta))_v = true$, $I(w)(\alpha)_v = true$ и $I(w)((\forall x)\beta)_v = false$. Дакле, за неку валуацију v, и све $d \in D(w)$, $I(w)(\alpha \to \beta)_{v[d/x]} = true$, $I(w)(\alpha)_v = true$ и за неко $d' \in D(w)$, $I(w)(\beta)_{v[d'/x]} = false$. За све d' такође имамо да је $I(w)(\alpha)_{v[d'/x]} = true$, што имплицира $I(w)(\alpha \to \beta)_{v[d'/x]} = false$, што је контрадикција. □

У доказу теореме потпуности пратићемо идеју исказног случаја. Изоставићемо доказ теореме дедукције који се лако може адаптирати из Теореме 1.10.

У конструкцији канонског модела користићемо специјалне максимално конзистентне скупове зване *засићени* скупови.

Дефиниција 1.20. *Скуп T језика $\mathcal{L}(LFOP_{\frac{3}{2}})$ је* конзистентан *ако је $T \nvdash \bot$, у супротном је неконзистентан. Скуп T је* максимлано конзистентан *ако за сваку формулу α језика $\mathcal{L}(LFOP_{\frac{3}{2}})$ важи $\alpha \in T$ или $\neg\alpha \in T$. Скуп T је* засићен *ако је максимално конзистентан и важи:*

- *ако $\neg(\forall x)\alpha \in T$, онда за неки терм t, $\neg\alpha(t) \in T$, где је t терм језика $\mathcal{L}(LFOP_{\frac{3}{2}})$.*

Сада покажимо да можемо проширити било који конзистентан скуп реченица до засићеног скупа. Да бисмо то показали потребно је да проширимо језик $LFOP_{\frac{3}{2}}$ логике са бесконачним пребројивим скупом нових симбола константи C (елементи из C не припадају разматраном језику наше логике). Са $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_{\frac{3}{2}})$ означимо проширење језика $\mathcal{L}(LFOP_{\frac{3}{2}})$ скупом нових симбола. Користићемо модификацију Линденбаумове теореме на следећи начин:

Теорема 1.18 (Линденбаумова теорема)**.** *Сваки конзистентан скуп реченица на језику $\mathcal{L}(LFOP_{\frac{3}{2}})$ може се проширити до засићеног скупа реченица језика $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_{\frac{3}{2}})$.*

Доказ. Нека је T конзистентан скуп реченица језика $\mathcal{L}(LFOP_{\frac{3}{2}})$ и нека је $\{\alpha_i \mid i = 0, 1, 2, ...\}$ набрајање свих реченица језика $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_{\frac{3}{2}})$. Са T^* означимо скуп реченица добијен корацима $(1) - (3)$ из доказа теореме 1.11 са додатком у кораку (2):

- ако је скуп T_{i+1} добијен додавањем формуле облика $\neg(\forall x)\beta(x)$ у скуп T_i, онда за неко $c \in C$, $\neg\beta(c)$ је такође додата скупу T_{i+1}, тако да је скуп T_{i+1} конзистентан.

Покажимо да у новом кораку сви скупови који настају су конзистентни у одговарајућем језику. Претпоставимо да за неко $i > 0$, формула облика $\neg(\forall x)\beta(x)$ је конзистентно додата скупу T_i. Ако постоји симбол константе $c \in C$ тако да $\neg\beta(c) \in T_i$, онда $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x), \neg\beta(c)\}$ је конзистентан. Претпоставимо да не постоји такво c. Како је $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x)\}$ добијено додавањем коначно много формула у T, и T не садржи константе из C, онда постоји бар једна константа $c \in C$ која се не појављује у $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x)\}$. Ако $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x), \neg\beta(c)\} \vdash \perp$, онда применом теореме дедукције добијамо $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x)\} \vdash \beta(c)$, и како се c не појављује у $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x)\}$, имамо да $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x)\} \vdash (\forall x)\beta(x)$. Дакле, $T_i \vdash (\forall x)\beta(x)$. Следи да скуп T_i није конзистентан што је немогуће. Дакле, скупови добијени наведеним корацима су конзистентни.

Коначно, како бисмо показали да је T^* конзистентан, морамо да покажемо да је T^* дедуктивно затворен ($T^* \vdash \rho$ имплицира да $\rho \in T^*$). Једини случај који се не разматра у доказу теореме 1.11 је тај када важи $T^* \vdash (\forall x)\beta(x)$ што смо добили из $T^* \vdash \beta(x)$ применом правила R4. Како $\beta(x)$ има једну слободну променљиву, и T_i и T^* су скупови реченица, $\beta(x)$ не припада скупу T^*. Применом класичне логике првог реда имамо да $T^* \vdash \beta(c)$ за све константе $c \in C$, и из индукцијске претпоставке важи $\beta(c) \in T^*$. Ако $(\forall x)\beta(x) \notin T^*$, конструкција скупа T^* гарантује да постоји неко $i > 0$ и $c \in C$ тако да $\beta(c), \neg\beta(c) \in T_i$ за неко $c \in C$, контрадикција.

Из дедуктивне затворености скупа T^*, као и пре, следи да је T^* конзистентан. Слично као и у доказу теореме 1.4 показује се максималност скупа T^* док засићеност диретно следи из наведене констуркције. □

Сада дефинишимо канонски модел за нашу вероватносну предикатску логику првог реда.

Нека је T конзистентан скуп и $T^\star$ његово проширење до засићеног скупа. Канонски модел је $M_C = (W, D, I, H, \mu)$ тако да:

- W је скуп свих класичних интерпретација првог реда са коначним доменима,
- за сваки свет w, $D(w)$ је скуп терама у којима нема променљивих,
- за све $w \in W$, $I(w)$ је интерпретација таква да:
  - за сваки функцијски симбол F_i^m , $I(w)(F_i^m) : D(w)^m \to D(w)$ тако да за све основне терме $t_1, ..., t_m$, $I(w)(F_i^m) : \langle t_1, ..., t_m\rangle \to (F_i^m(t_1, ..., t_m))$, и
  - за сваки релацијски симбол P_i^m , $I(w)(P_i^m) = \{\langle t_1, ..., t_m\rangle \mid P_i^m(t_1, ..., t_m) \in w\}$, за све основне терме $t_1, ..., t_m$,
- H је класа скупова $[\alpha] = \{w' \in W \mid M_C, w' \models \alpha\}$, за све реченице α, и
- за сваки скуп $[\alpha] \in H$, $\mu([\alpha]) = \sup\{s \in [0, 1] \cap \mathbf{Q} \mid T^\star \vdash P_{\geqslant s}\alpha\}$.

Слично као и исказном делу, може се показати да је канонски модел заиста једна мерљива структура, и да важи следећи резултат.

Теорема 1.19 (Јака потпуност логике $LFOP_{\frac{3}{2}}$)**.** *Скуп реченица T је конзистентан акко T је задовољив у неком моделу из $Meas(LFOP_{\frac{3}{2}})$.*

Што се тиче одлучивости, све поменуте логике садрже као подлогику класичну логику првог реда за коју се зна да проблеми задовољивости и ваљаности нису одлучиви. Самим тим закључујемо да проблеми задовољивости и ваљаности вероватносних логика првог реда такође нису одлучиви. Међутим, у [54] је показано да монадски фрагмент логике $LFOP_2$ јесте одлучив.

Глава 2

Вероватносне логике са операторима потврђивања

У овом одељку представићемо појам потврђивања, као и вероватносне логике, како исказне, тако и логике првог реда, које формализују појам потврђивања.

2.1 Бајесијанска теорија потврђивања

У филозофији појам *потврђивања* се односи на однос између неке хипотезе и услова. Кажемо да услов потврђује хипотезу уколико је испуњењем услова вероватноћа за тачност хипотезе већа. Уколико је мања, кажемо да услов оповргава хипотезу. Дакле теорија потврђивања проучава потврђивање у смислу: како су хипотезе подржане или оповргнуте неким условима.

Рудолф Карнап у својој књизи [7] уводи појам потврђивања на три семантички различита начина: *класификациони* ("доказ B потврђује хипотезу A"), *компаративни* ("доказ B потврђује хипотезу A бар исто колико и C потврђује D") и *квантитативни* појам потврђивања. Трећи појам, односно квантитативни појам потврђивања, је формализован нумеричком функцијом c која пресликава парове реченица у реалане бројеве. Са $c(A, B)$ означвамо *степен потврђивања* којим B потврђује хипотезу A. Бајесова епистемологија предлаже разне кандидате функција за меру степена потврђивања $c(A, B)$. Све оне суштински подржавају да важи: $c(A, B) > 0$ ако и само ако апостериорна вероватноћа хипотезе A базирана над B је већа од априорне вероватноће хипотезе A ($\mu(A|B) > \mu(A)$), што припада класификационом појму ("B потврђује A") [27]. Класификациони појам потврђивања је логички формализован у [15]. У овом одељку логички ћемо формализовати појам квантитативног потврђивања, што је урађено у [13, 12].

Фокусираћемо се на, према Елсу и Фителсону [20], најстандарнију меру степена потврђивања, звану *мера разлике*:

$$c(A, B) = \mu(A|B) - \mu(A).$$

Описаћемо формални језик који је проширење класичне (исказне/првог реда) логике са унарним вероватносним операторима $P_{\geqslant r}$ и бинарним вероватносним операторима $c_{\geqslant r}$ и $c_{\leqslant r}$, које семантички тумачимо помоћу мере разлике. Одговарајућа семантика се састоји од посебних врста Крипкеових модела са вероватносном мером дефинисаном над световима.

Као што смо већ рекли, многе мере потврђивања су предлагане годинама пре. Овде смо се фокусирали на најстандарднију, не бирајући је као најзначајнију већ као најпопуларнију меру потврђивања. Међутим, у одељку 4 кратко ћемо дискутовати о томе да се наше аксиоматске технике могу лако модификовати у зависности избора мере за степен потврђивања.

Главни резултати као и пре биће коректност и јака потпуност аксиоматизације. Такође, за доказ јаке потпуности користимо Хенкинову конструкцију. Како ни ова логика није компактна, аксиоматизација неће бити коначна. Такође, показаћемо одлучивост оваквих логика.

2.2 Логика $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$

У овој секцији ћемо представити скуп формула логике $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$, и класу семантичких структура у којима дајемо значење формулама.

2.2.1 Синтакса

Нека је $\mathcal{P} = \{p, q, r, \dots\}$ пребројив скуп исказних слова. Са $\mathbf{Q}$ означавамо скуп рационалних бројева. За два рационална броја a и b такви да $a < b$, $[a, b]_{\mathbf{Q}}$ представља скуп $[a, b] \cap \mathbf{Q}$. Језик логике $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ је саграђен од:

- елемената скупа $\mathcal{P}$,
- класичних исказних везника $\neg$ и $\wedge$,
- листе унарних вероватносних оператора облика $P_{\geqslant r}$, за све $r \in [0, 1]_{\mathbf{Q}}$,
- листе бинарних вероватносних оператора $c_{\geqslant r}$, за све $r \in [-1, 1]_{\mathbf{Q}}$, и
- листе бинарних вероватносних оператора $c_{\leqslant r}$, за све $r \in [-1, 1]_{\mathbf{Q}}$.

Дефиниција 2.1 (LPP_1^{conf} формула)**.** *Скуп свих формула $For(LPP_1^{conf})$ логике* $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ *је најмањи скуп такав да:*

1. $\mathcal{P} \subset For(LPP_1^{conf})$;
2. *Ако* $\alpha \in For(LPP_1^{conf})$ *и* $r \in [0, 1]_{\mathbf{Q}}$ *онда* $P_{\geqslant r}\alpha \in For(LPP_1^{conf})$.
3. *Ако су* α *и* β LPP_1^{conf}*-формуле и* $r \in [-1, 1]_{\mathbf{Q}}$ *онда* $c_{\geqslant r}(\alpha, \beta), c_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \in For(LPP_1^{conf})$
4. *Ако су* α *и* β LPP_1^{conf}*-формуле онда* $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta \in For(LPP_1^{conf})$.

Означаваћемо произвољне формуле са $\alpha, \beta, \gamma, ...$*, са индексима уколико је потребно. Формуле облика* $P_{\geqslant r}\alpha$, $c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ *и* $c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$ *називамо базичне вероватносне формуле.*

Као пре $P_{\geqslant r}\alpha$ означава да је вероватноћа формуле α је већа или једнака r, док $c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ ($c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$) означава да формула β потврђује формулу α са степеном потврђивања најмање r (највише r, редом). Како смо већ истакли у претходном поглављу, фокусирали смо се на најстандарднију меру за степен потврђивања, мера разлике, па интерпретација формуле $c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ је "условна вероватноћа од α уз услов β минус безусловна вероватноћа од α једнака је бар r". Оператори $P_{\geqslant r}$ су стандардни вероватносни оператори из одељка 1 и језик логике $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ можемо посматрати као проширење језика логике LPP_1 са два бинарна оператора потврђивања, $c_{\geqslant r}$ и $c_{\leqslant r}$.

Остале вероватносне операторе уводимо следећим дефиницијама:

- $P_{<r}\alpha$, $P_{\leqslant r}\alpha$, $P_{>r}\alpha$, $P_{=r}\alpha$ дефинишемо као и у одељку 1.
- $c_{=r}(\alpha,\beta)$ је $c_{\geqslant r}(\alpha,\beta) \wedge c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)$,
- $c_{>r}(\alpha,\beta)$ је $c_{\geqslant r}(\alpha,\beta) \wedge \neg c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)$ и
- $c_{<r}(\alpha,\beta)$ је $c_{\leqslant r}(\alpha,\beta) \wedge \neg c_{\geqslant r}(\alpha,\beta)$.

Такође, следеће уобичајне везнике уводимо као: $\alpha \wedge \neg\alpha$ је $\perp$ и $\alpha \vee \neg\alpha$ представља $\top$.

Природно је претпоставити да оператор $c_{<r}(\alpha,\beta)$ може бити представљен као $\neg c_{\geqslant r}(\alpha,\beta)$, слично као и оператор $P_{<s}$ који смо претходно дефинисали. Међутим, видећемо касније да је оваква дефиниција немогућа под нашом дефиницијом релације задовољивости формула.

Следећи пример илуструје значење оператора потврђивања.

Пример 2.1. *Ситуација у којој услов* Киша *оповргава хипотезу* Пикник *са степеном* -0.8 *може се представити формулом*

$$c_{\leqslant -0.8}(p,r),$$

где исказно слово p *означава* Пикник *а* r Кишу. □

2.2.2 Семантика

Сада ћемо представити семантику наше логике $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$. Почећемо са дефинисањем $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-структуре која је уствари LPP_1-модел који смо представили у дефиницији 1.14.

Дакле, семантика вероватносних логика користи структуре дефинисане над могућим световима, са исказном валуацијом за сваки свет. Као и пре фокусираћемо се на мерљиве структуре које ћемо овде детаљно дефинисати.

Пре тога представићемо пример једне $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-структуре.

Пример 2.2. *Нека је* $A = \{p, q, r\}$ *коначан скуп исказних слова и нека је* $M = (W, Prob, v)$ *структура таква да:*

- $W = \{w, t, u\}$
- $Prob(w) = (W(w), H(w), \mu(w))$
  - $W(w) = W$
  - $H(w)$ *је партитивни скуп* $\mathrm{P}(W)$
  - $\mu(w)$ *карактерише* $\mu(w)(\{w\}) = \mu(w)(\{t\}) = \frac{2}{5}$, $\mu(w)(\{u\}) = \frac{1}{5}$ *(остале вредности се могу лако израчунати из особина мере:* $\mu(w)(\emptyset) = 0$, $\mu(w)(\{w,t\}) = \frac{4}{5}$, $\mu(w)(\{w,u\}) = \mu(w)(\{t,u\}) = \frac{3}{5}$ *и* $\mu(w)(W) = 1$*)*
- $Prob(t) = (W(t), H(t), \mu(t))$
  - $W(t) = W$

  - $H(t)$ *је партитивни скуп* $\mathrm{P}(W)$
  - $\mu(t)$ *карактерише* $\mu(t)(\{w\}) = \mu(t)(\{u\}) = \frac{1}{4}$, $\mu(t)(\{t\}) = \frac{1}{2}$

- $Prob(u) = (W(u), H(u), \mu(u))$
  - $W(u) = W$
  - $H(u)$ *је партитивни скуп* $\mathrm{P}(W)$
  - $\mu(u)$ *карактерише* $\mu(u)(\{w\}) = \frac{1}{3}$,$\mu(u)(\{t\}) = \frac{1}{2}$, $\mu(u)(\{u\}) = \frac{1}{6}$

- $v(w,p) = v(w,q) = v(w,\neg r) = true$, $v(t,p) = v(t,\neg q) = v(t,r) = true$, *и* $v(u,p) = v(u,q) = v(u,r) = true$. □

Следеће ћемо дефинисати задовољивост формула у свету $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-структуре. Интуитивно, ако претпоставимо да је задовољивост формуле α већ дефинисана у сваком свету, онда $P_{\geqslant r}\alpha$ би требало да важи у сваком свету w ако за сваки скуп S свих светова из $W(w)$ у којима важи α важи $\mu(w)(S) \geqslant r$.

Проблем са оваквом дефиницијом је тај што је могуће да скуп S није из $H(w)$, и у том случају ми не можемо да применимо меру $\mu(w)$. Са том намером следимо приступ Халперна [25]. Прво ћемо дефинисати релацију задовољивости $\models$ користећи унутрашње и спољашње мере. Затим ћемо усмерити пажњу само на мерљиве структуре у којима знамо да формуле одговарају мерљивим скуповима светова.

Унутрашња мера неког скупа S је заправо мера највећег мерљивог скупа који је садржан у S и означавамо је са μ_*. То можемо записати и као $\mu_*(S) = \sup\{\mu(S') \mid S' \subset S \text{ и } S' \in H\}$. *Спољашњу меру* обележавамо са μ^* и она представља меру најмањег мерљивог скупа који садржи скуп S. Важи $\mu^*(S) = 1 - \mu_*(\overline{S})$.

Дефиниција 2.2. *Нека је* M *једна* $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$*-структура и нека је* w *неки свет структуре* M*.* Релација задовољивости $\models$ *је дефинисана тако да:*

1. *Ако* $\alpha \in \mathcal{P}$ *онда* $M, w \models \alpha$ *акко* $v(w, \alpha) = true$,

2. $M, w \models P_{\geqslant r}\alpha$ *ако* $\mu_*(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \alpha\}) \geqslant r$,

3. $M, w \models c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ *ако* $\mu^*(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \beta\}) > 0$ *и* $\frac{\mu_*(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \alpha \wedge \beta\})}{\mu^*(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \beta\})} - \mu^*(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \alpha\}) \geqslant r$,

4. $M, w \models c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$ *ако* $\mu(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \beta\}) > 0$ *и* $\frac{\mu^*(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \alpha \wedge \beta\})}{\mu_*(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \beta\})} - \mu_*(w)(\{w' \in W(w) \mid M, w' \models \alpha\}) \leqslant r$,

5. $M, w \models \neg\alpha$ *акко* $M, w \not\models \alpha$,

6. $M, w \models \alpha \wedge \beta$ *акко* $M, w \models \alpha$ *анд* $M, w \models \beta$.

Како бисмо поједноставили нотацију, са $[\alpha]_{M,w}$ означавамо скуп свих светова из $W(w)$ у којима α важи, тј,

$$[\alpha]_{M,w} = \{w' \in W(w) \mid M, w' \models \alpha\}.$$

Пишемо $[\alpha]$ уместо $[\alpha]_{M,w}$ када се M и w подразумевају из контекста.

Дефиниција 2.3 ($\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$- мерљива структура)**.** $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-*структура* M *је* $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-*мерљива акко* $[\alpha]_w \in H(w)$ *за сваки свет* w *из* M *и за сваку формулу* $\alpha \in For_{\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}}$. *Са* $\mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$ *означавамо скуп свих* $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-*мерљивих* LPP_1-*структура.*

Напомена 2.1. *Рестрикција на класу мерљивих структура је уобичајан приступ у пољу вероватносних логика [26, 54]. Приметимо да логике са различитим језиком имају различите класе мерљивих структура. На пример, скуп* $S = [c_{\geqslant r}(\beta, \gamma)]$ *је мерљив скуп у сваком свету* w *сваке структуре* $M \in \mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$. *Ипак,* S *није нужно мерљив у произвољној структури логике* LPP_1, *из једностаног разлога што* $c_{\geqslant r}(\beta, \gamma)$ *није формула поменуте логике.*

У овом раду, ми ћемо се фокусирати на $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-мерљиве структуре и самим тим, показаћемо потпуност и резултате одлучивости за класу мерљивих структура. Приметимо да у класи $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-мерљивих структура нису нам потребне унутрашње и спољашње мере из дефиниције $\models$. Заиста, како се μ, μ^* и μ_* поклапају на мерљивим скуповима, у дефиницији 2.2 можемо заменити услове 2–4 са:

2^* $M, w \models P_{\geqslant r}\alpha$ ако $\mu(w)([\alpha]_{M,w}) \geqslant r$,

3^* $M, w \models c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ ако $\mu(w)([\beta]_{M,w}) > 0$ и $\mu(w)([\alpha]_{M,w} | \, [\beta]_{M,w}) - \mu(w)([\alpha]_{M,w}) \geqslant r$,

4^* $M, w \models c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$ ако $\mu(w)([\beta]_{M,w}) > 0$ и $\mu(w)([\alpha]_{M,w} | \, [\beta]_{M,w}) - \mu(w)([\alpha]_{M,w}) \leqslant r$.

Илустоваћемо примером како се дефинише задовољивост неке формуле у структури.

Пример 2.3. *Размотримо задовољивост формула*

$$c_{\leqslant -0.2}(p \wedge q, r) \text{ и } c_{\leqslant -0.2}(p \wedge q, P_{\geqslant 0.2} r)$$

у свету w *модела* M *из претходног примера.*

Прва формула: *Знамо да* $M, w \models c_{\leqslant -0.2}(p \wedge q, r)$ *ако* $\mu(w)([r]_w) > 0$ *и* $\mu(w)([p \wedge q]_w | [r]_w) - \mu(w)([p \wedge q]_w) \leqslant -0.2$.

За свет w *имамо да је* $[r]_w = \{t, u\}$, *дакле* $\mu(w)([r]_w) = \mu(w)(\{t, u\}) = \frac{3}{5} > 0$. *Слично имамо да је* $\mu(w)([p \wedge q \wedge r]_w) = \mu(w)(\{u\}) = \frac{1}{5}$ *и* $\mu(w)([p \wedge q]_w) = \mu(w)(\{w, u\}) = \frac{3}{5}$. *У том случају важи* $\mu(w)([p \wedge q]_w | [r]_w) - \mu(w)([p \wedge q]_w) = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = -\frac{4}{15} \leqslant -0.2$. *Дакле,* $M, w \models c_{\leqslant -0.2}(p \wedge q, r)$.

Друга формула*: Знамо да* $M, w \models c_{\leqslant -0.2}(p \wedge q, P_{\geqslant 0.2} r)$ *ако* $\mu(w)([P_{\geqslant 0.2} r]_w) > 0$ *и* $\mu(w)([p \wedge q]_w | [P_{\geqslant 0.2} r]_w) - \mu(w)([p \wedge q]_w) \leqslant -0.2$.

Лако је проверити да $[P_{\geqslant 0.2} r]_w = \{w, t, u\}$, *тј,* $\mu(w)([P_{\geqslant 0.2} r]_w) = 1$. *Добијамо да је* $\mu(w)([p \wedge q]_w | [P_{\geqslant 0.2} r]_w) - \mu(w)([p \wedge q]_w) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0 > -0.2$. *Односно,* $M, w \not\models c_{\leqslant -0.2}(p \wedge q, P_{\geqslant 0.2} r)$. $\square$

Користећи дефиницију задовољивости и својства реалних бројева, лако је добити дефиниције задовољивости за остале типове оператора. На пример,

$$M, w \models c_{<r}(\alpha, \beta) \text{ акко } \mu(w)([\beta]) > 0 \text{ и } \mu(w)([\alpha] | [\beta]) - \mu(w)([\alpha]) < r.$$

Сада је очигледно зашто оператор $c_<$ није еквивалентан са "негацијом $c_\geqslant$", тј, $M, w \not\models c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ не имплицира да $M, w \models c_{<r}(\alpha, \beta)$. Разлог је тај што $c([\alpha], [\beta])$ може једноставно бити недефинисан у M (ако је $\mu(w)([\beta]_{M,w}) = 0$).

На крају овог одељка дефинисаћемо неке основне семантичке појмове. Почећемо са појмом модела.

Дефиниција 2.4 (Модел)**.** *За* $M = (W, Prob, v) \in \mathrm{LPP}^{\mathrm{conf}}_{1,\mathrm{Meas}}$*,* $w \in W$ *и скуп формула* T*, кажемо да је* M, w модел *за* T*, и пишемо* $M, w \models T$*, акко* $M, w \models \alpha$ *за све* $\alpha \in T$*. Скуп* T *је* $\mathrm{LPP}^{\mathrm{conf}}_{1,\mathrm{Meas}}$-задовољив*, ако постоји* $M \in \mathrm{LPP}^{\mathrm{conf}}_{1,\mathrm{Meas}}$ *и свет* w *из* M *тако да* $M, w \models T$*. Формула* α *је ваљана ако* $\neg\alpha$ *није задовољива.*

У даљем тексту једноставно ћемо рећи да је скуп *задовољив* што ће се односити на то да је $\mathrm{LPP}^{\mathrm{conf}}_{1,\mathrm{Meas}}$-*задовољив*, ако је то јасно из контекста.

Сада ћемо дефинисати појам семантичке последице.

Дефиниција 2.5 (Семантичка последица)**.** *Кажемо да је* α семантичка последица *скупа формула* T *и пишемо* $T \models \alpha$*, ако за све* $M = (W, Prob, v) \in \mathrm{LPP}^{\mathrm{conf}}_{1,\mathrm{Meas}}$ *и све* $w \in W$ *важи* $M, w \models T$ *онда* $M, w \models \alpha$*.*

2.2.3 Аксиоматизација

У овом одељку ћемо представити аскиоматски систем наше логике, који означавамо са $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$. Аксиоматски систем $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$ садржи десет схема аксиома и пет правила извођења. Подразумевамо да све формуле задовољавају дефиницију 2.1. На пример, узимамо у обзир само инстанце аксиома A9 и A10 код којих важи $s(r+t) \leqslant 1$.

Схеме аксиома:

(A1) Све инстанце класичних исказних таутологија.

(A2) $P_{\geqslant 0}\alpha$

(A3) $P_{\leqslant r}\alpha \to P_{<s}\alpha$ када је $r < s$

(A4) $P_{<r}\alpha \to P_{\leqslant r}\alpha$

(A5) $(P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \to P_{\geqslant r+s}(\alpha \vee \beta)$

(A6) $(P_{\leqslant r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \to P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$

(A7) $c_{\geqslant r}(\alpha, \beta) \to P_{>0}\beta$

(A8) $c_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \to P_{>0}\beta$

(A9) $(P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)) \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$

(A10) $(P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta \wedge c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)) \to P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$

Правила извођења:

(R1) Из $\{\alpha, \alpha \to \beta\}$ закључити β

(R2) Из α закључити $P_{\geqslant 1}\alpha$

(R3) Из скупа премиса $\{\gamma \to P_{\geqslant r - \frac{1}{k}}\alpha \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant \frac{1}{r}\}$ закључити $\gamma \to P_{\geqslant r}\alpha$.

(R4) Из скупа премиса

$$\{\gamma \to P_{>0}\beta\} \cup \{\gamma \to ((P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta) \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)) | t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}\}$$

закључити $\gamma \to c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$.

(R5) Из скупа премиса

$$\{\gamma \to P_{>0}\beta\} \cup \{\gamma \to ((P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta) \to P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)) \mid t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}\}$$

закључити $\gamma \to c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$.

Коментарисаћемо кратко аксиоматизацију $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$. Аксиоме А1-А6 и правила извођења R1-R3 су заправо из аксиоматског система за логику LPP_1. Аксиоме А7 и А9, заједно са правилом R4 обухватају трећи услов дефиниције 2.2. Слично, А8, А10 и R5 одговарају четвртом услову дефиниције 2.2.

Правила извођења R3-R5 су инфинитарна правила извођења. Потреба за увођењем оваквих правила долази из некомпактности о чему ћемо говорити нешто касније.

Појмови *теорема, доказ* и *конзистентност* се дефинишу на исти начин као и у логици LPP_1.

За крај овог поглавља показаћемо да је аксиоматски систем $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$ коректан.

Теорема 2.1 (Коректност). *Аксиоматски систем* $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$ *је коректан у односу на класу структура* $\mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$.

Доказ. Може се показати да свака инстанца било које схеме аксиоме важи у структури, и да правила извођења чувају ваљаност. Овде ћемо показати коректност за аксиоме А7 и А9 као и за правило R5, док доказ за А8, А10 и R6 је сличан .

(А7) Претпоставимо да је $M \in \mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$ и w свет модела M, такав да $M, w \models c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$. Тада је $\mu(w)([\beta]) > 0$, дакле $M, w \models P_{>0}\beta$.

(А9) Претпоставимо да важи $M, w \models (P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta) \wedge c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$. Дакле важи да је $\mu(w)([\alpha]) \geqslant t$, $\mu(w)([\beta]) \geqslant s$, $\mu(w)([\beta]) > 0$ и $\mu(w)([\alpha]|[\beta]) - \mu(w)([\alpha]) \geqslant r$, тј, $\mu(w)([\alpha \wedge \beta]) \geqslant \mu(w)([\beta])(r + \mu(w)([\alpha]))$. Ово значи да је $\mu(w)([\alpha \wedge \beta]) \geqslant s(r+t)$. Дакле, $M, w \models P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$.

(R5) Сада ћемо показати да правило R5 чува ваљаност, односно, показаћемо да када год премисе правила важе у свету, онда и закључак правила мора да важи у истом свету. Претпоставимо да $M, w \models \{\gamma \to P_{>0}\beta\} \cup \{\gamma \to ((P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta) \to P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)) \mid t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}\}$. Ако $M, w \not\models \gamma$, имамо да $M, w \models \gamma \to c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$. Сада претпоставимо да $M, w \models \gamma$. Дакле $M, w \models P_{>0}\beta$, тј. $\mu(w)([\beta]) > 0$, и $M, w \models (P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta) \to P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$ за све $t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$. Ако су $t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$ бројеви такви да $t \geqslant \mu(w)([\alpha])$ и $s \geqslant \mu(w)([\beta])$, онда $M, w \models P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta$, дакле $M, w \models P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$, тј, $\mu(w)([\alpha \wedge \beta]) \leqslant s(r+t)$. Користећи особине рационалних и реалних бројева, можемо закључити да је $\mu(w)([\alpha \wedge \beta]) \leqslant \mu(w)([\beta])(r + \mu(w)([\alpha]))$ тј, $\mu(w)([\alpha]|[\beta]) - \mu(w)([\alpha]) \leqslant r$. Претпостављајући да је $\mu(w)([\beta]) > 0$ имамо да је $M, w \models c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$. Следи, $M, w \models \gamma \to c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$.

□

2.2.3.1 Проблеми аксиоматизације

Као што већ знамо, логика $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ је проширење логике LPP_1 за коју смо показали да није компактна. Сада ћемо дати још један пример некомпактности у којем су присутне формуле са новим операторима потврђивања.

Нека је T скуп
$$\{c_{>0}(p,q)\} \cup \{c_{<\frac{1}{n}}(p,q) \mid n \in \mathbf{N}\},$$
где су p и q исказна слова. За сваки коначан подскуп T' скупа T имамо највеће $k \in \mathbf{N}$ такво да $c_{<\frac{1}{k}}(p,q) \in T'$. Лако је приметити да постоји $\mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$-мерљива структура $M_{T'} = (W', Prob', v')$ и $w' \in W'$ тако да $\mu(w')([q]) > 0$, $\mu(w')([p]|[q]) - \mu(w')([p]) = \frac{1}{k+1}$ и $M_{T'}, w' \models T'$. Међутим, не постоји $\mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$-мерљива структура $M = (W, Prob, v)$ и свет $w \in W$ тако да $M, w \models T$ јер за све $m > 0$ ако $\mu(w)([q]) > 0$ и $\mu(w)([p]|[q]) - \mu(w)([p]) = m$, постоји $k \in \mathbf{N}$ тако да је $\frac{1}{k} < m$ и $M, w \not\models c_{<\frac{1}{k}}(p,q)$. Ако је $\mu(w)([q]) > 0$ и $\mu(w)([p]|[q]) - \mu(w)([p]) = 0$ онда $M, w \not\models c_{>0}(p,q)$. У случају да је $\mu(w)([q]) = 0$ онда T није задовољив. Дакле, сваки коначан подскуп T' скупа T је $\mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$-задовољив, док је сам скуп T незадовољив.

Овај пример нас инспирише на то да у аксиоматизацији уведимо нова инфинитарна правила како би обухватили дефинисаност оператора потврђивања. Као што знамо, из чињенице да логика није компактна, не постоји коначна аксиоматизација која би била и јако потпуна. Дакле, у следећем одељку ми ћемо користити три инфинитарна правила, описана у $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$, како бисмо добили јаку потпуност логике.

Једна алтернатива инфинитарне аксиоматизације је развој коначне аксиоматизације и добијање слабе потпуности ("формула је теорема ако и само ако је ваљана"). Међутим, у циљу формализације степена потврђивања, логика би требала да дозволи резоновање линеарних комбинација условних вероватноћа. Фагин, Халперн и Мегидо у раду [26] су се суочили са проблемом када су покушали да уведу условну вероватноћу у језик њихове логике са полиномијалним тежинским формулама тако што су дозвољавали множење терама, на пример
$$w(p_1 \wedge p_2) \cdot (w(p_1) + w(p_2)) \geqslant w(p_1) \cdot w(p_2).$$

Формула изнад представља исказ "вероватноћа од p_2 под условом p_1 плус вероватноћа од p_1 под условом p_2 је највише 1". Аутори су приметили да је чак и за потребе слабе потпуности потребна јача изражајност језика. С поменутим циљем, они су увели језик првог реда тако да се променљиве могу појавити у формулама. На пример $(\forall x)(\exists y)[(3+x)w(\varphi)w(\psi)+2w(\varphi \vee \psi) \geqslant z]$ је једна формула која испуњава услове дефиниције формула. Одговарајући аксиоматски систем садржи стандардну аксиоматизацију првог реда као и аксиоме за реално затворена поља.

Као алтернативу, истраживачи из поља вероватносних логика користе приступ са инфинитарним правилима [17] као и фази приступ [51]. У [51], Марчиони и Годо разматрају вероватноћу условног догађаја облика "α под условом β" као истинитост фази исказа $P(\alpha|\beta)$ који се чита "$P(\alpha|\beta)$ је вероватан."

У случају вероватносне логике првог реда, ситуација је чак и гора, будући да скуп ваљаних формула разматране логике није рекурзивно набројив [1, 36]. Као последица горе поменутог- коначна аксиоматизација која би била чак и слабо потпуна није могућа.

2.2.4 Теорема јаке потпуности

У овом одељку показаћемо да је аксиоматски систем $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$ јако потпун за логику $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$, тј, показаћемо да сваки конзистентан скуп формула има модел. Потпуност је показана у неколико корака Хенкинове конструкције доказа. Прво смо доказали да теорема дедукције важи за $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$, користећи импликативне форме инфинитарних правила. Затим, користећи теорему дедукције показали смо да се сваки конзистентан скуп формула T може проширити до максимално конзистентног скупа (Линденбаумова теорема). Треће, користимо максимално конзистентан скуп за конструкцију канонског модела. На крају, показујемо да је канонски модел заиста модел за скуп T.

2.2.4.1 Линденбаумова теорема

За почетак показаћемо да теорема дедукције важи за наш аксиоматски систем.

Теорема 2.2 (Теорема дедукције)**.** *Нека су α и β формуле и T скуп формула. Тада је*

$$T \cup \{\alpha\} \vdash \beta \text{ акко } T \vdash \alpha \to \beta.$$

Доказ. Овде ћемо разматрати само нетривијални смер доказа- слева на десно, тј, покажимо да из $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ следи $T \vdash \alpha \to \beta$. Дакле, претпоставимо да је $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Доказаћемо индукцијом по дужини доказа. Овде ћемо представити доказ за случајеве када је формула β изведена правилом R4 (слично важи и за правило R5), док остали случајеви следе из доказа теореме дедукције вероватносних логика из претходног одељка.

Размотримо случај када је β изведена правилом R4. Претпоставимо да је β формула $\gamma \to c_{\geqslant r}(\alpha', \beta')$, изведена из скупа премиса $\{\gamma \to P_{>0}\beta'\} \cup \{\gamma \to ((P_{\geqslant t}\alpha' \wedge P_{\geqslant s}\beta') \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha' \wedge \beta')) \mid t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}\}$. Према индукцијској хипотези важи

$$T \vdash \alpha \to (\gamma \to P_{>0}\beta'), \text{ и}$$

$$T \vdash \alpha \to (\gamma \to ((P_{\geqslant t}\alpha' \wedge P_{\geqslant s}\beta') \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha' \wedge \beta'))), \text{ за све } t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}.$$

Сада, из исказне логике, односно аксиоме A1 имамо

$$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to P_{>0}\beta', \text{ и}$$

$$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to ((P_{\geqslant t}\alpha' \wedge P_{\geqslant s}\beta') \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha' \wedge \beta')) \text{ за све } t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}.$$

Применом R4 добијамо

$$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to c_{\geqslant r}(\alpha', \beta').$$

Користећи опет A1 и R1 следи

$$T \vdash \alpha \to (\gamma \to c_{\geqslant r}(\alpha', \beta'))$$

$$T \vdash \alpha \to \beta.$$

□

Следеће што ћемо показати је теорема која је веома значајна за доказ саме теореме потпуности.

Теорема 2.3 (Линденбаумова теорема)**.** *Сваки конзистент скуп формула T се може проширити до максимално конзистентног скупа.*

Доказ. Нека је T произвољан конзистентан скуп формула. Нека је $\{\gamma_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ једно набрајање свих формула $For_{\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}}$. Конструишемо скуп T^* рекурзивно, на следећи начин:

1. $T_0 = T$.

2. Ако је γ_i конзистентна са T_i, онда је $T_{i+1} = T_i \cup \{\gamma_i\}$.

3. Ако формула γ_i није конзистентна са T_i, онда имамо четири случаја:

   (а) Ако је $\gamma_i = \gamma' \to P_{\geqslant r}\alpha$, онда

   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\gamma' \to P_{<r-\frac{1}{k}}\alpha\},$$

   где је k позитиван цео број такав да $r - \frac{1}{k} \geqslant 0$ и T_{i+1} је конзистентан.

   (б) Ако је $\gamma_i = \gamma' \to c_{\geqslant r}(\alpha,\beta)$, онда $T_{i+1} = T_i \cup \{\gamma_i'\}$ где је

   $$\gamma_i' = \begin{cases} \gamma' \to P_{=0}\beta, & T_i \cup \{\gamma' \to P_{=0}\beta\} \nvdash \bot \\ \gamma' \to (P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{<s(r+t)}(\alpha,\beta)), & T_i \cup \{\gamma' \to P_{=0}\beta\} \vdash \bot \end{cases}$$

   и t и s су два рационална броја из јединичног интервала и притом је скуп T_{i+1} конзистентан.

   (в) Ако је $\gamma_i = \gamma' \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)$, онда $T_{i+1} = T_i \cup \{\gamma_i'\}$ где је

   $$\gamma_i' = \begin{cases} \gamma' \to P_{=0}\beta, & T_i \cup \{\gamma' \to P_{=0}\beta\} \nvdash \bot \\ \gamma' \to (P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta \wedge P_{>s(r+t)}(\alpha,\beta)), & T_i \cup \{\gamma' \to P_{=0}\beta\} \vdash \bot \end{cases}$$

   и t и s су два рационална броја из јединичног интервала и притом је скуп T_{i+1} конзистентан.

   (г) У супротном, $T_{i+1} = T_i$.

4. $T^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Прво, користећи Теорему 2.2 може се показати да је скуп T^* добро дефинисан, тј, постоје k, t и s из корака 3(а)-3(в) конструкције. Овде ћемо размотрити само корак 3(в), док се остали кораци могу показати слично.

Претпоставимо да је $T \cup \{\gamma' \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)\}$ неконзистентан. Тада је скуп $T \cup \{c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)\}$ такође неконзистентан. Према теореми 2.2 важи $T \vdash \neg c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)$. Сада претпоставимо да је и скуп $T \cup \{\gamma' \to P_{=0}\beta\}$ неконзистентан и да је скуп $T \cup \{\gamma' \to (P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta \wedge P_{>s(r+t)}(\alpha,\beta))\}$ неконзистентан за све t и s. Према теореми 2.2, важи да је $T \vdash P_{>0}\beta$ и $T \vdash \neg(P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta \wedge P_{>s(r+t)}(\alpha,\beta))$, за све t и s. Као последицу добијамо да је

$$T \vdash \top \to P_{>0}\beta$$

и

$$T \vdash \top \to ((P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta) \to P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha,\beta)),$$

за све t и s. Користећи правило R5 следи

$$T \vdash \top \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta).$$

Приметимо да је ово у контрадикцији са нашом претпоставком да је скуп $T \cup \{c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)\}$ неконзистентан. Дакле, постоје рационални бројеви t и s такви да је скуп

$$T \cup \{\gamma' \to (P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta \wedge P_{>s(r+t)}(\alpha,\beta))\}$$

конзистентан.

Следеће ћемо показати да је T^* максимално конзистентан скуп. Може се приметити да је сваки скуп T_i конзистентан према дефиницији конструкције. Међутим, ово и даље не значи да је и скуп $T^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$, конзистентан због присуства инфинитарних правила. Да бисмо показали конзистентност скупа T^*, прво ћемо показати да је T^* дедуктивно затворен. Ако је формула γ инстанца аксиоме, онда $\gamma \in T^*$ према конструкцији скупа T^*. Покажимо сада да је T^* затворен за правила извођења. Овде ћемо показати да је T^* затворен за правило R5, док се остали случајеви показују на сличан начин.

Прво показујемо да за све $\gamma' \in For_{\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}}$ важи да $\gamma' \in T^*$ или $\neg\gamma' \in T^*$. Нека су i и j ненегативни цели бројеви такви да $\gamma_i = \gamma'$ и $\gamma_j = \neg\gamma'$. Онда, или је γ' или $\neg\gamma'$ конзистентно са $T_{max\{i,j\}}$. Ако $T_{max\{i,j\}}$ није конзистентно ни са γ' нити са $\neg\gamma'$ онда према теореми 2.2, $T_{max\{i,j\}}$ је неконзистентан. Дакле $\gamma' \in T_{i+1}$ или $\neg\gamma' \in T_{j+1}$, односно или $\gamma' \in T^*$ или $\neg\gamma' \in T^*$.

Сада ћемо показати затвореност скупа T^* за правило извођења R5. Претпоставимо да је

$$\gamma' \to P_{>0}\beta, \gamma' \to ((P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta) \to P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha, \beta)) \in T^*$$

за све $r, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$. Потребно је да покажемо да је $\gamma' \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta) \in T^*$. Претпоставимо да $\gamma' \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta) \notin T^*$. Онда, из максималности скупа T^* је, $\neg(\gamma' \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)) \in T^*$. Дакле, $\gamma' \in T^*$, па постоји i такво да $\gamma' \in T_i$. Нека је j ненегативан цео број такав да $\gamma_j = \gamma' \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)$. Према кораку 3(в) конструкције скупа T^* или је $\gamma' \to P_{=0}\beta \in T_{j+1}$, или постоје $t', s' \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$ такви да $\gamma' \to (P_{\leqslant t'}\alpha \wedge P_{\leqslant s'}\beta \wedge P_{>s'(r+t')}(\alpha,\beta)) \in T_{j+1}$. Претпоставимо да $\gamma' \to P_{=0}\beta \in T_{j+1}$ и нека је k ненегативан цео број такав да $\gamma_k = \gamma' \to P_{>0}\beta$. Онда је

$$T_{\max\{i,k+1\}} \vdash P_{>0}\beta.$$

Приметимо да такође важи $T_{\max\{i,j+1\}} \vdash P_{=0}\beta$. Следи $T_{\max\{i,j+1,k+1\}} \vdash \perp$, што је немогуће.

Сада претпоставимо да $\gamma' \to (P_{\leqslant t'}\alpha \wedge P_{\leqslant s'}\beta \wedge P_{>s'(r+t')}(\alpha,\beta)) \in T_{j+1}$, где су $t', s' \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$. Нека је k' ненегативан цео број такав да $\gamma_{k'} = \gamma' \to ((P_{\leqslant t'}\alpha \wedge P_{\leqslant s'}\beta) \to P_{\leqslant s'(r+t')}(\alpha,\beta))$. Онда је $T_{\max\{i,k'+1\}} \vdash (P_{\leqslant t'}\alpha \wedge P_{\leqslant s'}\beta) \to P_{\leqslant s'(r+t')}(\alpha,\beta)$. Са друге стране имамо,

$$T_{\max\{i,j+1\}} \vdash P_{\leqslant t'}\alpha \wedge P_{\leqslant s'}\beta \wedge P_{>s'(r+t')}(\alpha,\beta).$$

Следи, $T_{\max\{i,j+1,k'+1\}} \vdash \perp$, контрадикција. Дакле, скуп T^* је дедуктивно затворен.

Из чињенице да је T^* дедуктивно затворен можемо доказати да је T^* и конзистентан. Заиста, ако је T^* неконзистентан, онда постоји формула $\gamma' \in For_{\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}}$ таква да $T^* \vdash \gamma' \wedge \neg\gamma'$. Али онда постоји и ненегативни цео број i такав да је $\gamma' \wedge \neg\gamma' \in T_i$, што је немогуће. □

2.2.4.2 Канонски модел

Сада смо спремни за главни резултат: аксиоматски систем $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$ је јако потпун за класу $\mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$-структура. Користимо максимално конзистентне скупове како бисмо саградили специјалну мерљиву структуру звану *канонски модел*. За дати конзистентан скуп T, показујемо да постоји свет канонског модела у којем су све формуле његовог максимално конзистентог проширења T^* задовољиве. Подсетимо се да је постојање таквог проширења загарантовано теоремом 2.3.

Дефиниција 2.6 (Канонски модел)**.** *Канонски модел* $M_C = (W, Prob, v)$ *је дефинисан на следећи начин:*

- *W је скуп свих максимално конзистентних скупова,*
- *за сваки свет w и свако исказно слово $p \in \mathcal{P}, v(w,p) = true$ акко $p \in w$.*
- *$Prob(w) = (W(w), H(w), \mu(w))$ тако да:*
  - *$W(w) = W$,*
  - *$H(w) = \{\{w' \in W \mid \alpha \in w'\} \mid \alpha \in For_{\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}}\}$,*
  - *$\mu(w) : H(w) \to [0,1]$ тако да $\mu(w)(\{w' \in W \mid \alpha \in w'\}) = \sup\{r \in [0,1]_{\mathbf{Q}} \mid P_{\geqslant r}\alpha \in w\}$.*

Користимо следећу нотацију за ознаку елемената $H(w)$ канонског модела:

$$[\![\alpha]\!] = \{w' \in W \mid \alpha \in w'\}.$$

Следеће што желимо јесте да покажемо да је $M_C \in \mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$. Почећемо са показивањем да је M_C једна $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-структура.

Лема 2.1. *Канонски модел M_C је $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-структура.*

Доказ ове леме је исти као и доказ леме 1.6.

Лема 2.2. *Нека је M_C канонски модел и нека је $\gamma \in For_{\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}}$. Тада за сваки свет w из M_C важи*

$$\gamma \in w \text{ ако и само ако } M_C, w \models \gamma.$$

Доказ. За доказ користићемо индукцију по сложености формуле γ. Ако је γ исказно слово, исказ леме важи из конструкције канонског модела M_C. Случајеви када је формула γ конјункција или негација, лема јасно следи.

Нека је γ формула облика $P_{\geqslant r}\alpha$. Ако $P_{\geqslant r}\alpha \in w$, онда $\sup\{s \in [0,1]_{\mathbf{Q}} \mid P_{\geqslant s}\alpha \in w\} = \mu(w)([\![\alpha]\!]) \geqslant r$ и $M_C, w \models P_{\geqslant r}\alpha$. Претпоставимо да $M_C, w \models P_{\geqslant r}\alpha$. Следи да $\sup\{s \in [0,1]_{\mathbf{Q}} \mid P_{\geqslant s}\alpha \in w\} \geqslant r$, тј, $\mu(w)([\![\alpha]\!]) \geqslant r$. Ако $\mu(w)([\alpha]) > r$ тада према дефиницији канонског модела, $P_{\geqslant r}\alpha \in w$. Ако је $\mu(w)([\![\alpha]\!]) = r$ онда према правилу R3 и чињеници да је w дедуктивно затворен имамо да је $P_{\geqslant r}\alpha \in w$.

Нека је сада γ формула облика $c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$.

($\Rightarrow$) Претпоставимо да $c_{\geqslant r}(\alpha,\beta) \in w$. Нека су $\{t_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ и $\{s_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ два строго растућа низа бројева из $[0,1]_{\mathbf{Q}}$, такви да $\lim_{n\to\infty} t_n = \mu(w)([\![\alpha]\!])$ и $\lim_{n\to\infty} s_n = \mu(w)([\![\beta]\!])$. Нека је n било који број из $\mathbf{N}$. Тада $w \vdash P_{\geqslant t_n}\alpha \wedge P_{\geqslant s_n}\beta$. Користећи претпоставку да је $c_{\geqslant r}(\alpha,\beta) \in w$, применом аксиома A7 и A9 као и исказне логике, добијамо $w \vdash P_{>0}\beta$ и $w \vdash P_{\geqslant s_n(r+t_n)}(\alpha \wedge \beta)$. Коначно, према дефиницији 2.6 имамо да је $\mu(w)([\![\beta]\!]) > 0$ и $\mu(w)([\![\alpha \wedge \beta]\!]) \geqslant \lim_{n\to\infty} s_n(r + t_n) = \mu(w)([\![\beta]\!])(r + \mu(w)([\![\alpha]\!]))$, тј,

$$\mu(w)([\![\beta]\!]) > 0$$

и

$$\mu(w)([\![\alpha]\!] | [\![\beta]\!]) - \mu(w)([\![\alpha]\!]) \geqslant r.$$

($\Leftarrow$) Сада претпоставимо да је $\mu(w)([\![\beta]\!]) > 0$ и $\mu(w)([\![\alpha]\!]|[\![\beta]\!]) - \mu(w)([\![\alpha]\!]) \geqslant r$, тј, $\mu(w)([\![\alpha \wedge \beta]\!]) \geqslant \mu(w)([\![\beta]\!])(r + \mu(w)([\![\alpha]\!]))$. Покажимо да важи

$$w \vdash P_{>0}\beta$$

и

$$w \vdash (P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta) \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta) \text{ за све } t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}.$$

Претпоставимо да је $w \nvdash P_{>0}\beta$. Из максималности следи $w \vdash P_{=0}\beta$, тј. $\mu(w)([\![\beta]\!]) = 0$, што је контрадикција. Дакле важи $w \vdash P_{>0}\beta$.

Ако је $t > \mu(w)([\![\alpha]\!])$ или $s > \mu(w)([\![\beta]\!])$, онда $w \nvdash P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta$. Из максималности света w имамо $w \vdash \neg(P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta)$, односно $w \vdash (P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta) \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$. Ако је $t \leqslant \mu(w)([\![\alpha]\!])$ и $s \leqslant \mu(w)([\![\beta]\!])$, онда $s(r+t) \leqslant \mu(w)([\![\alpha \wedge \beta]\!])$ што следи из наше претпоставке, па је $w \vdash P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$ према дефиницији 2.6. Сада резултати произилазе из чињенице да је w дедуктивно затворен.

Случај када је γ облика $c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$ може се показати на сличан начин. □

Заиста, показали смо да за сваку формулу $\alpha \in For_{\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}}$ и сваки свет w из M_C важи једначина $[\alpha]_{M_C,w} = [\![\alpha]\!]$. Стога, сваки скуп $[\alpha]_{M_C,w}$ припада алгебри $H(w)$ канонског модела. Ова чињеница у комбинацији са лемом 2.1 даје следећу последицу.

Последица 2.1. *Канонски модел M_C је $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-мерљива структура који је модел сваког конзистентног скупа T.*

Сада формулишимо теорему потпуности за нашу логику.

Теорема 2.4 (Јака потпуност логике $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$)**.** *Скуп формула T је конзистентан акко T је $\mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$-задовољив.*

Доказ. Приметимо да је смер доказа са десно на лево заправо теорема 2.1. За супротан смер доказа, претпоставимо да је T конзистентан скуп формула. Применом теореме 2.3, постоји максимално конзистентан надскуп T^* скупа T. Из претходне последице имамо да је $M_C \in \mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$, па остаје само да покажемо да је M_C модел скупа T^*. Из леме 2.2 имамо, ако је T конзистентан скуп онда знамо да је T^* заправо један свет канонског модела M_C, дакле важи $M_C, T^* \models T$. □

На крају, подсетимо се корисне формулације јаке потпуности:

$$T \vdash \alpha \ \text{ акко } \ T \models \alpha.$$

Добро је познато да је ова стандардна формулација еквивалента формулацији теореме 2.4.

2.2.5 Одлучивост

У овом одељку показујемо да је $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ логика одлучива. У доказу користимо метод филтрације и редукцију на коначни систем једначина и неједначина, као за логику LPP_1. Прво ћемо показати да је $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-формула задовољива акко је задовољива у моделу са коначним бројем светова.

Теорема 2.5. *Ако је $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-формула α задовољива у неком моделу $M \in \mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$, онда је задовољива и у неком моделу $M^* \in \mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$ са коначним бројем светова.*

Доказ. Нека је w свет модела M такав да $M, w \models \alpha$. Исто као у теореми 1.15 може се увести релација еквиваленције над $W \times W$, где $w \sim w'$ акко за све $\beta \in Subf(\alpha)$, $w \models \beta$ акко $w' \models \beta$ и користећи класе еквиваленција C_i и њихове представнике s_i, слично као и пре, можемо дефинисати модел $M^* = (W^*, Prob^*, v^*)$ где:

- $W^* = \{w_i \mid C_i \in W_{/\sim}\}$,
- $Prob^*(w_i) = (W^*(w_i), H^*(w_i), \mu^*(w_i))$ тако да:
  - $W^*(w_i) = \{w_j \in W^* \mid (\exists u \in C_j) u \in W(w_i)\}$,
  - $H^*(w_i)$ је партитивни скуп од $W^*(w_i)$,
  - $\mu^*(w_i)(\{w_j\}) = \mu(w_i)(C_j)$ и за било који скуп $D \in H^*(w_i)$ важи једнакост $\mu^*(w_i)(D) = \sum_{w_j \in D} \mu^*(w_i)(\{w_j\})$,
- $v^*(w_i, p) = v(w_i, p)$.

Може се показати да је $M^* \in \mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$. Сада, желимо доказати да за било које $\beta \in Subf(\alpha)$, $M, w \models \beta$ акко $M^*, w_i \models \beta$ где w_i представља C_w у M^*. Доказ ћемо извести користећи индукцију по сложености формуле. Размотримо случај када је $\beta = c_{\geqslant r}(\alpha', \beta')$, док се случај $\beta = c_{\leqslant r}(\alpha', \beta')$ доказује слично, а остали случајеви су образложени у доказу теореме 1.15.

$$\begin{aligned}
& M, w \models \beta \\
& \text{акко } M, w_i \models \beta \\
& \text{акко } \mu(w_i)([\beta']) > 0 \text{ и } \mu(w_i)([\alpha' \wedge \beta']) \geqslant \mu(w_i)([\beta'])(r + \mu(w_i)([\alpha])) \\
& \text{акко } \sum_{C_u : M, u \models \beta'} \mu(w_i)(C_u) > 0 \text{ и } \\
& \sum_{C_u : M, u \models \alpha' \wedge \beta'} \mu(w_i)(C_u) \geqslant \Big(\sum_{C_u : M, u \models \beta'} \mu(w_i)(C_u) \Big) \Big(r + \sum_{C_u : M, u \models \alpha'} \mu(w_i)(C_u) \Big) \\
& \text{акко } \sum_{C_u : M^*, u \models \beta'} \mu^*(w_i)(\{u\}) > 0 \text{ и } \\
& \sum_{C_u : M^*, u \models \alpha' \wedge \beta'} \mu^*(w_i)(\{u\}) \geqslant \Big(\sum_{C_u : M^*, u \models \beta'} \mu^*(w_i)(\{u\}) \Big) \Big(r + \sum_{C_u : M^*, u \models \alpha'} \mu^*(w_i)(\{u\}) \Big) \\
& \text{акко } \mu^*(w_i)([\beta']) > 0 \text{ и } \\
& \qquad \mu^*(w_i)([\alpha' \wedge \beta']) \geqslant \mu^*(w_i)([\beta'])(r + \mu^*(w_i)([\alpha])) \\
& \text{акко } M^*, w_i \models \beta.
\end{aligned}$$

□

Као и пре може се приметити да постоји бесконачно много коначних модела из $\mathrm{LPP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$ са највише $2^{|Subf(\alpha)|}$ светова, зато што има бесконачно много могућности за реално-вредносне логике. Дакле, за одлучивост, као и за логику LPP_1, превешћемо проблем задовољивости формула у проблем задовољивости коначних скупова једначина и неједначина.

Теорема 2.6. *Проблем задовољивости за* $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ *логику је одлучив.*

Доказ. Опишимо процедуру која проверава задовољивост формуле α. Како је процедура слична резултату логике LPP_1 овде ћемо грубо прећи на систем линеарних једначина и неједначина. Као и пре, можемо да трансформишимо формулу α у дисјункцију формула облика $\bigwedge_{k=1}^{|Subf(\alpha)|} \beta_k$, где

$$\beta_k \in Subf(\alpha) \cup \{\neg\beta \mid \beta \in Subf(\alpha)\},$$

и свака подформула α се појављује тачно једном (са или без негације, и претпоставком да $\neg\neg\beta$ је исто што и β). У сваком свету $w \in W^*$ тачно једна формула облика $\bigwedge_{k=1}^{|Subf(\alpha)|} \beta_k$ важи и ту формулу означимо са α_w. За све $l \leqslant 2^{Subf(\alpha)}$ размотрићемо l формула од горе наведене форме тако да следећа два услова буду задовољена:

- Изабране формуле нису нужно различите, али свака α_w не садржи обе формуле β и $\neg\beta$ у конјункцији.
- Бар једна α_w мора садржати формулу α у конјункцији.

Као што знамо за сваки свет w_i, $i < l$, размотрићемо специфичне једначине и неједначине. Промењливе облика y_{w_i,w_j} представљају вредност $\mu(w_i)(\{w_j\})$. Подсетимо се да пишемо $\beta \in \alpha_w$ као ознаку да је β конјункт у α_w.

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad y_{w_i,w_j} \geqslant 0, \text{ за сваки свет } w_j \\
&(2)\quad \sum_{w_j \in W(w_i)} y_{w_i,w_j} = 1 \\
&(3)\ \sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \geqslant r, \text{ за све } P_{\geqslant r}\beta \in \alpha_{w_i} \\
&(4)\ \sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} < r, \text{ за све } \neg P_{\geqslant r}\beta \in \alpha_{w_i} \\
&(5)\ \sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} > 0 \text{ и} \\
&\sum_{w_j : \gamma\wedge\beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \geqslant \Big(\sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \Big)\Big(r + \sum_{w_j : \gamma \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \Big), \\
&\text{за све } c_{\geqslant r}(\gamma, \beta) \in \alpha_{w_i} \\
&(6)\ \sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} > 0 \text{ и} \\
&\sum_{w_j : \gamma\wedge\beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \leqslant \Big(\sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \Big)\Big(r + \sum_{w_j : \gamma \in \alpha_{w_j}} \mu(w_i)(\{w_j\}) \Big), \\
&\text{за све } c_{\leqslant r}(\gamma, \beta) \in \alpha_{w_i} \\
&(7)\ \sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} = 0 \text{ или} \\
&\sum_{w_j : \gamma\wedge\beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} < \Big(\sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \Big)\Big(r + \sum_{w_j : \gamma \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \Big), \\
&\text{за све } \neg c_{\geqslant r}(\gamma, \beta) \in \alpha_{w_i} \\
&(8)\ \sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} = 0 \text{ или} \\
&\sum_{w_j : \gamma\wedge\beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} > \Big(\sum_{w_j : \beta \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \Big)\Big(r + \sum_{w_j : \gamma \in \alpha_{w_j}} y_{w_i,w_j} \Big), \\
&\text{за све } \neg c_{\leqslant r}(\gamma, \beta) \in \alpha_{w_i}
\end{aligned}
$$

Једначине и неједначине (1)–(4) су из система у доказу теореме 1.16. Даље, свака неједначина (3)-(8) односи се на специфичну конјункцију из α_w. Лако је видети да (3), (5) и (6) одговарају другом, трећем и четвртом услову задовољивости из дефиниције 2.2. Слично, (4), (7) и (8) баве се негативним литералима и одговарају комбинацији петог услова са другим, трећим и четвртим условом из дефиниције 2.2.

Једначине и неједначине (1)-(8) формирају не један, већ коначан број система линеарних једначина и неједначина. Приметимо да додавањем (7) или (8) у било који систем Sys једначина и неједначина добијамо дисјункцију од два различита проширења Sys. У сврху овог доказа, чињеница да увек имамо коначно много система је довољна, и то је довољно да је један од њих решив. Приметимо да су сви системи у језику реалних затворених поља, и познато је да је теорија реалних затворених поља одлучива [64]. Како имамо коначно много могућности за избор l, и (за свако l) коначно много могућих избора за избор l формула α_w, наша логика $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ је одлучива. $\square$

2.3 Логике $LPP_{\frac{3}{2}}^{conf}$ и LPP_2^{conf}

Формирање језика, дефинисаност формула и модела, формирање аксиматских система и докази теорема потпуности за логике $LPP_{\frac{3}{2}}^{conf}$ и LPP_2^{conf} су заправо слични поступцима за логике $LPP_{\frac{3}{2}}$ и LPP_2 уз методе које су коришћене у претходном одељку.

Као и пре логике $LPP_{\frac{3}{2}}^{conf}$ и LPP_2^{conf} не дозвољавају итерацију вероватносних оператора, у овом случају не само оператора $P_{\geqslant}$ већ и оператора $c_{\geqslant}$ и $c_{\leqslant}$, док у LPP_2^{conf} није дозвољено ни мешање исказних и вероватносних формула. Из претходног одељка, лако је наслутити да се структуре вероватносних логика $LPP_{\frac{3}{2}}$ и LPP_2 користе као такве и у одговарајућим вероватносним логикама са операторима потврђивања. Аксиоматизација ових логика се поклапа са аксиоматским системом $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$ уз вођење рачуна да се не крше дефиниције формула логика.

Што се тиче целокупног доказа теореме потпуности, поступак је у потпуности исти као и за одговарајуће вероватносне логике уз додатке случајева за нове вероватносне операторе који се у потпуности исто доказују као и у претходном поглављу.

Проблем задовољивости и ваљаности формула за обе логике је одлучив. Описаћемо укратко доказ за логику LPP_2^{conf}, док за логику $LPP_{\frac{3}{2}}^{conf}$ доказ следи на исти начин као у одељку 1.2.3.

Теорема 2.7. *Проблем задовољивости вероватносних формула језика логике LPP_2^{conf} је PSPACE-комплетан.*

Доказ. Како у логици LPP_2^{conf} имамо две врсте формула, за исказни случај резултат је исти као и за логику LPP_2. Овде ћемо дискутовати само случај вероватносних формула. И овде ћемо користи резултат сложености Фагина, Халперна и Мегида из [26] о полиномијалним тежинским формулама. За LPP_2 логику биле су нам потребне линеарне тежинске формуле, међутим сада због условне вероватноће прелазимо на полиномијалне формуле. Дакле, желимо да наше вероватносне формуле преведемо у полиномијалне тежинске формуле, а онда применимо процедуру из рада [26] у којем је показано да је овај проблем из класе сложености PSPACE. Наша транслација је дефинисана рекурзивно на следећи начин:

(1) $f(P_{\geqslant \frac{r_1}{r_2}}\alpha) = r_2 w(\alpha) \geqslant r_1$,

(2) $f(c_{\geqslant \frac{r_1}{r_2}}(\alpha, \beta)) = x(\beta) \geqslant 0 \wedge r_2 w(\alpha \wedge \beta) - r_2 w(\alpha) w(\beta) \geqslant r_1 w(\beta)$,

(3) $f(c_{\leqslant \frac{r_1}{r_2}}(\alpha, \beta)) = x(\beta) \geqslant 0 \wedge r_2 w(\alpha \wedge \beta) - r_2 w(\alpha) w(\beta) \leqslant r_1 w(\beta)$,

(4) $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$,

(5) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$.

где су r_1, r_2 позитивни цели бројеви у случају (1), док у случају (2) и (3) могу бити и негативни све док важи $\frac{r_1}{r_2} \in [-1, 1]$ и у оба случаја је $r_2 \neq 0$.

Очигледно, вероватносна формула ϕ логике LPP_2^{conf} је задовољива акко је $f(\phi)$ задовољива полиномијална тежинска формула. Наш резултат следи из поменутог.

□

2.4 Предикатска логика првог реда са операторима потврђивања

У овом одељку представићемо $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$ логику првог реда, проширење логике $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$. Због сличности у представљању овде нећемо причати о логикама $\mathrm{LFOP}_{\frac{3}{2}}^{\mathrm{conf}}$ и $\mathrm{LFOP}_2^{\mathrm{conf}}$. Такође, због сличности у синтакси и семантици прескочићемо представљање неких техничких детаља који су већ детљано представљени у исказном делу овог поглавља.

Језик $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$ логике, у ознаци $\mathcal{L}(\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}})$, садржи:

- бесконачан скуп промењљивих $Var = \{x, y, z, ...\}$,
- универзални квантификатор $\forall$, и класичне исказне везнике,
- за сваки цео број $k \geqslant 0$, бесконачно много k-арних функцијских симбола $F_0^k, F_1^k, \ldots$,
- за сваки цео број $k \geqslant 1$, бесконачно много k-арних релацијских симбола $P_0^k, P_1^k, \ldots$,
- листу унарних вероватносних оператора $P_{\geqslant r}$, за све $r \in [0, 1]_{\mathbf{Q}}$ и
- листу бинарних вероватносних оператора $c_{\geqslant r}$,$c_{\leqslant r}$, за све $r \in [-1, 1]_{\mathbf{Q}}$.

Као и пре функцијски симболи арности 0 називају се константни симболи. Терми и формуле су дефинисане на уобичајан начин, а такође и појам слободних промењљивих. Реченице су формуле без слободних промењљивих.

Пример 2.4. *Размотримо реченицу:*

> *"Шанса да све ваше колеге знају вашу тајну повећала би се (за r) ако би бар један био свестан тога."*

Ако са предикатским симболом S означимо исказ "знати тајну", онда реченицу можемо формализовати као

$$c_{\geqslant r}((\forall x) S(x), (\exists x) S(x)).$$

$\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$-структура је $M = (W, D, I, Prob)$ где:

- W је непразан скуп светова,

- D је непразан домен за све $w \in W$,
- I је пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује класичну интерпретацију $I(w)$ тако да за све i и k:
  - $I(w)(F_i^k)$ је функција из D^k у D,
  - за све $w' \in W$, $I(w)(F_i^k) = I(w')(F_i^k)$,
  - $I(w)(P_i^k)$ је релација над D^k
- $Prob(w) = (W(w), H(w), \mu(w))$ је вероватносни простор где:
  - $W(w)$ је непразан подскуп од W,
  - $H(w)$ је алгебра подскупова од $W(w)$,
  - $\mu(w) : H(w) \longrightarrow [0, 1]$ је коначно адитивна мера.

Приметимо да смо направили две претпоставке које су уобичајне за модалне логике првог реда. Прва је та да је модел са фиксираним доменом (домен је исти за све светове разматраног модела). Интуитивно то значи да смо сигурни у постојање објеката. Друга претпоставка је та да су терми *ригидни*, тј, за сваки модел њихово значење је исто за сваки свет разматраног модела.

Нека је $M = (W, D, I, Prob)$ једна $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$-структура. *Валуација променљивих* v придружује сваком пару који се састоји од света w и променљиве x елемент домена,тј. $v(w)(x) \in D$. Ако $w \in W$, $d \in D$, и v валуација, онда $v[d/x]$ је такође валуација и иста је као и v са изузетком да је $v[d/x](w)(x) = d$.

Вредност терма t, у ознаци $I(w)(t)_v$, је:

- ако је t променљива x, онда $I(w)(x)_v = v(w)(x)$, и
- ако је $t = F_i^m(t_1, ..., t_m)$, онда $I(w)(t)_v = I(w)(F_i^m)(I(w)(t_1)_v, ..., I(w)(t_m)_v)$.

Сада ћемо увести појам истинитосних вредности формула.

Дефиниција 2.7. *Вредност формуле* α *у свету* $w \in W$ *једне* $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$*-структуре* $M = (W, D, I, Prob)$*, по валуацији* v *(означено са* $I(w)(\alpha)_v$*) је:*

- *ако је* $\alpha = P_i^m(t_1, ..., t_m)$*, онда* $I(w)(\alpha)_v = true$*, ако* $(I(w)(t_1)_v, ..., I(w)(t_m)_v) \in I(w)(P_i^m)$*, у супротном* $I(w)(\alpha)_v = false$*,*
- *ако је* $\alpha = P_{\geqslant r}\beta$*, онда* $I(w)(\alpha)_v = true$*, ако* $\mu(w)(\{u \in W(w) \mid I(u)(\beta)_v = true\}) \geqslant r$*, у супротном* $I(w)(\alpha)_v = false$*,*
- *ако је* $\alpha = c_{\geqslant r}(\beta, \gamma)$*, онда* $I(w)(\alpha)_v = true$*, ако* $\mu(w)(\{u \in W(w) \mid I(u)(\gamma)_v = true\}) > 0$ *и* $\mu(w)(\{u \in W(w) \mid I(u)(\beta)_v = true\}|\{u \in W(w) \mid I(u)(\gamma)_v = true\}) - \mu(w)(\{u \in W(w) \mid I(u)(\beta)_v = true\}) \geqslant r$*, у супротном* $I(w)(\alpha)_v = false$*,*
- *ако је* $\alpha = c_{\leqslant r}(\beta, \gamma)$*, онда* $I(w)(\alpha)_v = true$*, ако* $\mu(w)(\{u \in W(w) \mid I(u)(\gamma)_v = true\}) > 0$ *и* $\mu(w)(\{u \in W(w) \mid I(u)(\beta)_v = true\}|\{u \in W(w) \mid I(u)(\gamma)_v = true\}) - \mu(w)(\{u \in W(w) \mid I(u)(\beta)_v = true\}) \leqslant r$*, у супротном* $I(w)(\alpha)_v = false$*,*
- *ако* $\alpha = \neg\beta$*, онда* $I(w)(\alpha)_v = true$*, ако* $I(w)(\beta)_v = false$*, у супротном* $I(w)(\alpha)_v = false$*,*

- *ако је* $\alpha = \beta \wedge \gamma$, *онда* $I(w)(\alpha)_v = true$, *ако* $I(w)(\beta)_v = true$, *и* $I(w)(\gamma)_v = true$, *у супротном* $I(w)(\alpha)_v = false$, *и*

- *ако је* $\alpha = (\forall x)\beta$, *онда* $I(w)(\alpha)_v = true$ *ако за све* $d \in D$, $I(w)(\beta)_{v[d/x]} = true$, *у супротном* $I(w)(\alpha)_v = false$.

Синтаксни појмови се дефинишу слично као у поглављу 1.4.

Наш аксиоматски систем за $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$ логику садржи све аксиоме и правила извођења логике $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ као и нове аксиоме из поглавља 1.4:

(A11) $(\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$ где x није слободно у α

(A12) $(\forall x)\alpha(x) \to \alpha(t/x)$, где је $\alpha(t/x)$ добијено заменом свих слободних појављивања x у $\alpha(x)$ са термом t који је слободан за x у $\alpha(x)$

(R6) Из α извести $(\forall x)\alpha$.

Подсетимо се да користимо фиксиран домен $\mathrm{LFOP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$-мерљивих модела са ригидним термима, који је сличан објективном тумачењу логика првог реда [28]. Ако одбацимо претпоставку о ригидним термима, онда стандарна аксиома првог реда A12 не важи.

Појмове теорема и извођења уводимо као и у одељку 1.4.

Теорема 2.8 (Коректност). *Аксиоматски систем* $Ax(\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}})$ *је коректан у односу на класу* $\mathrm{LFOP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$*-структура.*

Доказ је сличан комбинацији теорема коректности логика $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ и $LFOP_1$ из [54].

У доказу теореме потпуности пратићемо идеју исказног случаја. Изоставићемо доказ теореме дедукције који се лако може адаптирати из теореме 2.2.

У конструкцији канонског модела користићемо специјалне максимално конзистентне скупове зване *засићени* скупови који су дефинисани у поглављу 1.4.

Сада покажимо да можемо проширити било који конзистентан скуп реченица до засићеног скупа, за шта ћемо користити модификацију Линденбаумове теореме.

Теорема 2.9 (Линденбаумова теорема). *Сваки конзистентан скуп реченица на језику* $\mathcal{L}(\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}})$ *може се проширити до засићеног скупа реченица језика* $\overline{\mathcal{L}}(\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}) = \mathcal{L}(\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}) \cup C$, *где је* C *бесконачно пребројив скуп константи које се не појављују у језику* $\mathcal{L}(\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}})$.

Доказ. Нека је T конзистентан скуп реченица језика $\mathcal{L}(\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}})$ и нека је $\alpha_0, \alpha_1, ...$ набрајање свих реченица језика $\overline{\mathcal{L}}(\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}})$. Са T^* означимо скуп реченица добијен корацима $(1) - (4)$ из доказа Теореме 2.3 са додатком у кораку (3):

- ако је скуп T_{i+1} добијен додавањем формуле облика $\neg(\forall x)\beta(x)$ у скуп T_i, онда за неко $c \in C$, $\neg\beta(c)$ је такође додата скупу T_{i+1}, и T_{i+1} је конзистентан.

Доказ да је T^* засићен скуп се показује слично као у доказу теореме 1.18.

□

Канонски модел је $M_C = (W, D, I, Prob)$ тако да:

- W је скуп свих засићених скупова формула,

- D је скуп свих терама језика у којем нема промењљивих,
- за све $w \in W$, $I(w)$ је интерпретација таква да:
  - за сваки функцијски симбол F_i^m , $I(w)(F_i^m) : D^m \to D$ тако да за све основне терме $t_1, ..., t_m$, $I(w)(F_i^m) : \langle t_1, ..., t_m\rangle \to (F_i^m(t_1, ..., t_m))$, и
  - за сваки релацијски симбол P_i^m , $I(w)(P_i^m) = \{\langle t_1, ..., t_m\rangle \mid P_i^m(t_1, ..., t_m) \in w\}$, за све основне терме $t_1, ..., t_m$,
- за све $w \in W$, $Prob(w) = (W(w), H(w), \mu(w))$ тако да:
  - $W(w) = W$,
  - $H(w)$ је класа скупова $[\![\alpha]\!] = \{w' \in W \mid \alpha \in w'\}$, за све реченице α, и
  - за сваки скуп $[\![\alpha]\!] \in H(w)$, $\mu(w)([\![\alpha]\!]) = \sup\{s \in [0, 1]_{\mathbf{Q}} \mid P_{\geqslant s}\alpha \in w\}$.

Може се показати да је канонски модел заиста једна мерљива структура, и да важи следећи резултат.

Теорема 2.10 (Јака потпуност $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$ логике)**.** *Скуп реченица T је конзистентан ако и само ако T је $\mathrm{LFOP}_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{conf}}$-задовољив.*

2.5 Рестрикције логика са операторима потврђивања

Циљ овог одељка јесте да представимо неке рестрикције поменутих логика овог рада, $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ и $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$, са претпоставком да су вероватносне мере у семантици поменутих логика коначног кодомена. Показаћемо да се у таквим околностима може структуисати коначна акиоматизација. Ове рестрикције на вероватносне мере коначног кодомена су заправо проширења логике $LPP_2^{Fr(n)}$ која је представљена у [54].

За све $n \in \mathbb{N}$ можемо размотрити вероватносну меру са кодоменом

$$Range(n) = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{(n-1)}{n}, 1\},$$

самим тим постоји пребојиво много различитих логика које означавамо са $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}}$ и $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}}$. Процес добијања семантике и аксиоматског система за $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}}$ из $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ је заправо исти као и процес из $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{conf}}$ у $\mathrm{LFOP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}}$. Што се тиче саме аксиоматизације, процес се састоји у замени три инфинитарна правила, R3-R5, са три нове аксиоме. Због сличности у процесу стварања логике овде ћемо представити само исказни део, тј прелазак исказне логике у $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}}$ логику.

Синтакса $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}}$ логике је иста као и синтакса $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ логике. У семантици $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}}$ разматрамо поткласу $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-структура где вероватносне мере имају кодомен $Range(n)$, тј, за сваки свет једне $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$-структуре

$$\mu(w) : H(w) \to Range(n).$$

Дефинишемо класу $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$-модела на исти начин као и пре.

У аксиоматизацији имамо три нове аксиоме, и то:

(F1) $\bigwedge_{k=0}^{l-1} P_{>\frac{k}{n}}\alpha \to P_{\geqslant\frac{l}{n}}\alpha$, где је $l \in [1,n]_N$

(F2) $((P_{>0}\beta) \wedge \bigwedge_{k,l=0}^{n}((P_{\geqslant\frac{k}{n}}\alpha \wedge P_{\geqslant\frac{l}{n}}\beta) \to P_{\geqslant\frac{l}{n}(r+\frac{k}{n})}(\alpha\wedge\beta))) \to c_{\geqslant r}(\alpha,\beta)$

(F3) $((P_{>0}\beta) \wedge \bigwedge_{k,l=0}^{n}((P_{\leqslant\frac{k}{n}}\alpha \wedge P_{\leqslant\frac{l}{n}}\beta) \to P_{\leqslant\frac{l}{n}(r+\frac{k}{n})}(\alpha\wedge\beta))) \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)$.

Претпостављамо да формуле поштују дефиницију 2.1. На пример, разматрамо само оне инстанце аксиома F2 и F3 које задовољавају $0 \leqslant \frac{l}{n}(r+\frac{k}{n}) \leqslant 1$.

Приметимо да аксиоматски систем $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}})$ је очигледно коректан за класу структура $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$. Ово полази директно из теореме 2.1. Покажимо да су и нове аксиоме такође коректне.

Теорема 2.11 (Коректност). *Аксиоме F1, F2 и F3 су коректне у односу на класу структура* $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$.

Доказ. (F1) Нека је $M \in LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$, и нека је w свет модела M такав да важи $M,w \models \bigwedge_{k=0}^{l-1} P_{>\frac{k}{n}}\alpha$ за неко фиксирано $l \in [1,n]_N$, односно важи $M,w \models P_{>\frac{k}{n}}\alpha$ за све $k \in \{0,1,\ldots,l-1\}$. Нека је $t = \mu(w)([\alpha])$. То значи да је $t > \frac{k}{n}$ за све $k \in \{0,1,\ldots,l-1\}$. Како је $\mu(w) : H(w) \to Range(n)$ то значи да је t облика разломка са имениоцем n, па мора бити $t \geqslant \frac{l}{n}$. Заиста, $M,w \models P_{\geqslant\frac{l}{n}}\alpha$.

(F3) Нека је $M \in LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$, и нека је w свет модела M такав да важи $M,w \models (P_{>0}\beta) \wedge \bigwedge_{k,l=0}^{n}((P_{\geqslant\frac{k}{n}}\alpha \wedge P_{\geqslant\frac{l}{n}}\beta) \to P_{\geqslant\frac{l}{n}(r+\frac{k}{n})}(\alpha\wedge\beta))$. Онда важи $M,w \models P_{>0}\beta$ и $M,w \models (P_{\geqslant\frac{k}{n}}\alpha \wedge P_{\geqslant\frac{l}{n}}\beta) \to P_{\geqslant\frac{l}{n}(r+\frac{k}{n})}(\alpha\wedge\beta)$ за све $k,l = 0,\ldots,n$. Следи да имамо

$$\mu(w)([\beta]) > 0. \tag{2.1}$$

Нека је $t = \mu(w)([\alpha])$ и $s = \mu(w)([\beta])$. Како је $\mu(w) : H(w) \to Range(n)$, постоје k и l тако да $t = \frac{k}{n}$ и $s = \frac{l}{n}$. Дакле, $M,w \models (P_{\geqslant\frac{k}{n}}\alpha \wedge P_{\geqslant\frac{l}{n}}\beta)$, према коректности правила R1 важи $M,w \models P_{\geqslant\frac{l}{n}(r+\frac{k}{n})}(\alpha\wedge\beta)$. Сада такође имамо да

$$\mu(w)([\alpha\wedge\beta]) \geqslant \frac{l}{n}(r+\frac{k}{n}) = \mu(w)([\beta])(r+\mu(w)([\alpha])), \tag{2.2}$$

што из (2.1) и (2.2) следи $M,w \models c_{\geqslant r}(\alpha,\beta)$.

(F3) Доказује се на исти начин као аксиома F2.

□

Сада представимо коначни аксиоматски систем $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}})$. Он садржи

- схеме аксиома A1-A10 и F1-F3 и
- правила извођења R1 и R2.

Покажимо да је наведена аксиоматизација јако потпуна у односу на класу модела $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$.

Теорема 2.12 (Јака потпуност). *Скуп формула T је конзистентан у односу на аксиоматски систем $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}})$ ако и само ако T је $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$-задовољив.*

Доказ. Потпуност је показана у два корака. Прво показујемо да је аксиоматски систем добијен додавањем инфинитарних правила R3-R5 на $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}})$ потпун. Док у другом делу показујемо да се избацивањем правила R3-R5 из аксиоматизације изводљивост из остатка аскиоматског система не мења. То за резултат даје потпуност аксиоматског система $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}})$.

Први део је скоро па идентичан доказу потпуности $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ логике. Разлика је у конструкцији канонског модела. Како је *Range* коначан скуп, мере канонског модела су дефинисане са

$$\mu(w)([\![\alpha]\!]) = \max\{r \mid r \in Range, P_{\geqslant r}\alpha \in w\}.$$

Користећи аксиому F1, може се показати да новоконструисани канонски модел припада класи $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$.

Сада желимо да покажемо да можемо заобићи инфинитарна правила из аксиоматизације.

- Прво, покажимо да правило R3 можемо занемарити уз присуство аксиоме F1. Заправо, покажемо да R3 је изводљиво из F1 и исказног дела (A1 и R1).

  Односно, за дате формуле α и γ, и фиксирано $r \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$, претпоставимо да је скуп

  $$P = \{\gamma \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant \frac{1}{r}\}$$

  заправо скуп премиса правила R3, и да смо извели закључак

  $$\gamma \to P_{\geqslant r}\alpha$$

  користећи аксиому F1. Размотримо коначан скуп $S = \{\gamma \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha \mid k \in [0,n]_{\mathbb{N}}, k \geqslant \frac{1}{r}\}$. Очигледно важи $S \subseteq P$.

  Применом исказне логике важи формула

  $$\bigwedge_k S \to [\gamma \to (\bigwedge_{k,l=0}^{n}((P_{\geqslant\frac{k}{n}}\alpha \wedge P_{\geqslant\frac{l}{n}}\beta) \to P_{\geqslant\frac{l}{n}(r+\frac{k}{n})}(\alpha\wedge\beta))].$$

  Користећи F2 (као и A1 и R1) важи формула

  $$\bigwedge_k S \to (\gamma \to P_{\geqslant r}\alpha).$$

  Следи, из $S \subseteq P$ можемо извести $\gamma \to P_{\geqslant r}\alpha$ користећи F2.

- Следеће што показујемо да аксиома F2 може заменити правило R4. Идеја је да покажемо да R4 је изводљиво из F2 и исказног дела (A1 и R1). Односно, за дате α, β и γ, и фиксирано $r \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$, претпоставимо да је скуп

  $$P = \{\gamma \to P_{>0}\beta\} \cup \{\gamma \to ((P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta) \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha\wedge\beta))|t,s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}\}$$

  заправо скуп свих премиса сада правила R4. Нека важи да смо извели закључак

  $$\gamma \to c_{\geqslant r}(\alpha,\beta)$$

  применом F2. Размотримо коначан скуп $S = \{\gamma \to P_{>0}\beta\} \cup \{\gamma \to ((P_{\geqslant\frac{k}{n}}\alpha \wedge P_{\geqslant\frac{l}{n}}\beta) \to P_{\geqslant\frac{l}{n}(r+\frac{k}{n})}(\alpha\wedge\beta)) \mid k,l \in [0,1]_{\mathbb{N}}, \frac{l}{n}(r+\frac{k}{n}) \in [0,1]\}$. Очигледно и сада $S \subseteq P$.

Такође, применом исказне логике важи формула

$$\bigwedge_{k,l} S \to [\gamma \to ((P_{>0}\beta) \wedge \bigwedge_{k,l=0}^{n}((P_{\geqslant \frac{k}{n}}\alpha \wedge P_{\geqslant \frac{l}{n}}\beta) \to P_{\geqslant \frac{l}{n}(r+\frac{k}{n})}(\alpha \wedge \beta))].$$

Применом F2 (као и A1 и R1) важиће и формула

$$\bigwedge_{k,l} S \to (\gamma \to c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)).$$

Па заиста из $S \subseteq P$ може се извести $\gamma \to c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ користећи F2.

- На сличан начин се показује да аксиома F3 може заменити правило R5.

□

Овим је показано да је наведени коначни систем $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}})$ јако потпун. Последица ове чињенице је та да је логика $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{Fr(n),conf}}$ компактна.

Теорема 2.13 (Компактност)**.** *Нека је T скуп формула. Ако је сваки коначан подскуп од T $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$-задовољив, онда је и цео скуп T $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$-задовољив.*

Доказ. Претпоставимо да скуп T није $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$-задовољив, док су сви његови коначни подскупови задовољиви. Тада важи $T \vdash \bot$. Како је аксиоматски систем коначан, онда постоји коначан подскуп T' од T такав да је $T' \vdash \bot$, што је супротно претпоставци. □

Може се приметити да је у доказу одлучивости проблема задовољивости у односу на класу модела $LPP_{1,Meas}^{Fr(n),conf}$ довољно користити само метод филтрације. Заиста, са вероватносном мером коначног кодомена број модела са коначним бројем светова је коначан.

Глава 3

Темпоралне логике са вероватносним операторима потврђивања

До сада је било речи само о вероватносним логикама помоћу којих смо фомализовали степен потврђивања. Пре него што пређемо на комбиновање вероватносних логика са темпоралним логикама, први део овог поглавља посветићемо самом представљању темпоралних логика. Причаћемо о настанку и поделама темпоралних логика, главним резултатима и најчешћим комбинацијама са другим логикама.

3.1 Неке темпоралне логике

Темпоралне логике су логике за представљање исказа који у себи садрже појам времена. Рани развој темпоралне логике среће се још у делима Аристотела. Аристотел се бавио проблемом истинитости будућих контингената, исказа који нису нужно тачни, нити нужно нетачни. Он није могао да прихвати да се принцип бивалентности примењује на исказе о будућим догађајима, односно да тренутно можемо да одлучимо да ли је исказ о будућем догађају тачан или лажан.

Половином прошлог века почиње модерни развој темпоралних логика радом Прајора [57]. Главна идеја темпоралних логика јесте додавање временске компоненте као однос међу могућим световима, где уз помоћ појмова прошлости и будућности изражавамо релацију достижности. На тај начин светови и даље задржавају информације изражене помоћу класичне логике, док темпорални оператори говоре о везама између светова. Данас, темпоралне логике имају велики број примена, посебно у области теоријског рачунарства [21].

Постоје две поделе темпоралних логика које се тичу моделовања протока времена. Време које моделујемо можемо представљати линеарно или разгранато, као и непрекидно или дискретно. Друга подела је више филозофског карактера, и већина истраживања у овој области припада групи дискретног описа времена (време се посматра као дискретна промењива). Код прве поделе, линеарно време се третира као низ "догађаја" који води нечему. Међутим, понекад је згодније претпоставити да је време разгранато, у смислу да временски тренутак може да има више потенцијалних наследника.

У почетку, језик исказне логике био је проширен унарним операторима P (past) и F (future), и за такву логику представљена је потпуна аксиоматизација у [4]. Затим је језик постао изражајнији уз операторе S (since) и U (until), и потпуност ове изражајније логике показана је у [6]. Данас се најчешће користе унарни оператори $\bigcirc$ (next) и U у такозваним линеарним темпоралним логикама. Прва потпуна аксиоматизација исказне логике са линеарним временом, уз операторе $\bigcirc$ и U, представљена је у [29, 48], док је проширење на предикатску логику дато у [50]. Теорема јаке потпуности за логику првог реда дата је у [55], док је њено вероватносно проширење дато у [56].

Темпорална логика са разгранатим временом, као проширење исказне логике унарним операторима $\bigcirc$, U и A, описана је у [29, 48]. Нови темпорални оператор A, за разлику од $\bigcirc$ и U који су линеарни, омогућава промену пута, односно пружа избор будућег света. Нема пуно потпуних аксиоматизација исказне логике са разгранатим временом [60, 62]. Прва теорема потпуности за предикатски случај овакве темпоралне логике доказана је у [16].

Један од најпознатијих представника темпоралних логика са разгранатим временом је логика CTL (Computation Tree Logic), чији језик садржи операторе промене пута, A и E. Модел времена у CTL логици је структура налик дрвету у којој будућност није одређена, тј. постоје различити путеви у будућности, и сви они потенцијално могу бити реализован пут. Ову логику су први представили Кларк и Емерсон у [9].

Нешто касније, Емерсон и Халперн [22] описују нову логику CTL^*. Ово је такође темпорална логика са разгранатим временом која садржи и CTL и LTL (Linear Temporal Logic), где слободно можемо да комбинујемо темпоралне операторе линеарних логика са операторима промене пута логике CTL. Ова логика је једна од најпопуларнијих темпоралних логика са применама у рачунарству.

Међусобно комбиновање некласичних логика је у прошлости јако истраживано. Као што смо већ поменули, комбинација вероватносних и темпоралних логика описана је у радовима пре [38, 56, 54]. Међутим, поред комбинације са вероватносним логикама, темпоралне логике су популарне и у комбинацији са епистемичким логикама [35, 33], са интуиционистичким логикама [24] итд.

У [67, 18] наведена је значајност интеракције времена и акција (активности) у развоју интелигентних система као што су роботске апликације, аутономни системи, сервисни агенти и други. Расуђивање времена и акција је тема која се развија у задњих неколико десетина година нарочито у компјутерским наукама [58, 53], мада су, такође, истраживања вршена и са филозофског аспекта [49]. Због велике примене, управо ову комбинацију темпоралних логика са акцијама користићемо за даље истраживање наше теме.

Дакле, у овом делу ћемо се фокусирати на CTL^* логику комбиновану са акцијама и вероватносним логикама са операторима потврђивања. Идеја за комбиновање баш логике CTL^* са акцијама проистекла је из радова [68, 69] у којима је изграђена PAL (Parameterized-time Action Logic) логика која има јако сличну семантику као и CTL^*. Аутори су у PAL логици уместо уобичајних модалних временских оператора користили експлицитне временске тачке.

Пре него што пређемо на поменуту комбинацију, укратко ћемо представити синтаксу и семантику, као и основне резултате логике CTL^*. Затим ћемо детаљно представити нашу нову темпоралну логику са разгранатим временом са акцијама и вероватносним операторима потврђивања.

3.1.1 Логика CTL^*

Као што смо рекли, CTL^* је разграната темпорална логика која садржи логике CTL и LTL. Језик CTL^* логике проширује језик исказне логике темпоралним операторима $U, \bigcirc$, а такође садржи и путни оператор A. Дакле формула ове логике може бити:

$$\phi ::= \top \mid p \mid \bigcirc\phi \mid \phi U \psi \mid A\phi,$$

где је p исказно слово. Формулу $\bigcirc\phi$ интерпретирамо са „*Формула ће важити у наредном временском тренутку на неком путу*". Формула $\phi U \psi$ формализује исказ „*Формула ϕ важи у свим стањима неког пута док формула ψ не постане тачна у неком стању истог пута*". $A\phi$ означава да „*Формула ϕ важи на сваком путу са почетком у датом стању*".

Дефиниција 3.1. *CTL^*-структура је $M = (S, R, v)$ где:*

- *S је непразан скуп стања;*
- *$v : S \to 2^{Prop}$ је валуациона функција из стања у скуп валуација;*
- *R је тотална бинарна релација на S, тј. за свако $s \in S$ постоји $s' \in S$ тако да sRs'.*

На оваквим структурама дефинише се задовољивост формула. Потпуна аксиоматизација је представљена у [22]. Показано је у [23] да је логика одлучива, док је доказ да је проблем задовољивости из класе $PSPACE$ представљен у [3].

3.2 Вероватносна темпорална логика $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$

У овом делу рада представићемо потпуну инфинитарну аксиоматизацију разгранате темпоралне исказне логике са акцијама и степеном потврђивања, што у ствари представља једну вероватносну темпоралну логику.

3.2.1 Синтакса и семантика

Сада ћемо представити скуп свих формула наше логике коју означавамо са $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$ као и класу семантичких структура.

Синтакса

Нека је $\mathcal{P} = \{p, q, r, \dots\}$ непразан скуп исказних слова , и нека је $Act = \{a, b, c, \dots\}$ коначан скуп детерминистичких акција, што значи да је исход акција одређен и увек исти. Са $pre(a)$ и $post(a)$ означавамо преуслове који морају бити испуњени да би се извела акција a, као и постуслови који важе након извршења акције a. Ознака $do(a)$ представља само извођење акције a. Користимо $\wedge$ и $\neg$ као основне везнике. Остали исказни везници, $\vee$, $\to$ и $\leftrightarrow$, као и симболи $\top$ и $\bot$, представљају одређене скраћенице као и обично.

Дефиниција 3.2 (CTL$^*_{\mathrm{A}}$−формула)**.** *Скуп свих* CTL$^*_{\mathrm{A}}$*−формула, у ознаци* $For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$*, садржи скуп свих основних исказа* $Prop = \mathcal{P} \cup \{pre(a), post(a) \mid a \in Act\}$ *и индуктивно је дефинисан на следећи начин:*

$$\alpha ::= \chi \mid do(a) \mid \bigcirc\alpha \mid A\alpha \mid \alpha U \beta \mid \alpha \wedge \beta \mid \neg\alpha$$

где је $\chi \in Prop$ *и* $a \in Act$*. Означаваћемо формуле из скупа* $For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$ *са* α, β *и* γ *(уз индексе).*

Темпорални оператори $\bigcirc$ (next), U (until) и A (universal path operator) су стандарни оператори CTL^* логике [60]. Такође ћемо користити и остале темпоралне операторе F (sometimes), G (always) и E (existential path quantifier) који су дефинисани као следеће скраћенице: $F\alpha \equiv \top U \alpha$, $G\alpha \equiv \neg F \neg\alpha$ и $E\alpha \equiv \neg A \neg \alpha$.

Приметимо да формуле из скупа $For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$ не садрже вероватносне операторе, па ћемо их често називати као темпоралне формуле са акцијама.

Дефиниција 3.3 (Вероватносне формуле)**.** *Скуп* For_P *индуктивно је дефинисан са*

$$\phi ::= P_{\geqslant s}\alpha \mid c_{\geqslant r}(\alpha, \beta) \mid c_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \mid \phi \wedge \psi \mid \neg\phi$$

где су α *и* β *из скупа* $For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$*,* $s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}$ *и* $r \in [-1,1]_{\mathbf{Q}}$*. Произвољну вероватносну формулу означавамо са* ϕ, ψ *(уз индексе уколико су потребни).*

Приметимо да се скуп формула For_P слично дефинише као скуп вероватносних формула логике LPP_2^{conf}, разлика је у томе што се наведени вероватносни оператори могу применити сада на све CTL$^*_{\mathrm{A}}$− формуле.

На исти начин као и у LPP_2^{conf} остали вероватносни оператори се уводе као поменуте скраћенице.

Дефиниција 3.4 (Формула)**.** *Скуп свих формула, у ознаци* $For(\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}})$*, је унија поменута два скупа формула, односно важи* $For(\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}) = For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}} \cup For_P$*. Произвољну формулу означавамо са* ρ *и* σ *(уз индексе када су потребни).*

Мешање темпоралних формула са акцијама и вероватносних формула у овом делу није дозвољено.

Семантика

Сада дефинишимо моделе наше логике. Имаћемо две врсте структура у којима испитујемо задовољивост формула наше логике, једну само за CTL$^*_{\mathrm{A}}$-формуле и другу за све формуле наше логике.

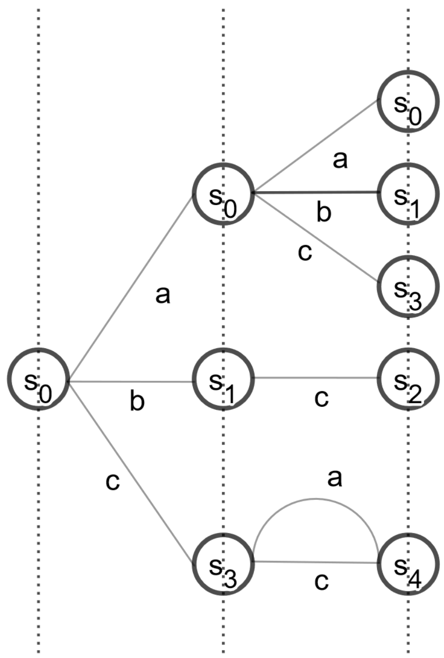
Дефиниција 3.5 (CTL$^*_{\mathrm{A}}$-структура)**.** CTL$^*_{\mathrm{A}}$*-структура је* $\mathbf{TS} = (S, R, v)$ *где:*

- S *је непразан скуп стања;*
- $v : S \to 2^{Prop}$ *је функција која сваком стању придружује валуацију;*
- $R = \bigcup R_a$, $a \in Act$, $R_a \subseteq S \times S$, *тако да важе следећи услови:*
  - *(а) За свако стање* $s \in S$ *постоји стање* $s' \in S$ *и* $a \in Act$ *тако да је* sR_as'*;*
  - *(б) За све акције* $a \in Act$*: ако* sR_as' *и* sR_as'' *онда* $s' = s''$*;*

(*в*) *Ако* $pre(a) \in v(s)$, $a \in Act$, $s \in S$ *онда постоји* $s' \in S$, $sR_a s'$;

(*г*) *Ако* $sR_a s'$ *онда* $post(a) \in v(s')$ *и* $pre(a) \in v(s)$.

На слици 3.1 је графички представљен један пример $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре од почетног тренутка 0 до тренутка 2, где је почетно стање s_0 а акције су a, b и c. Са слике видимо да је стање s_0 у релацији са самим собом акцијом a док је, рецимо, стање s_3 са стањем s_4 у релацији и преко акције a и акције c. Дакле, из једног стања можемо различитим акцијама стићи до истог стања. Приметимо такође да стање s_0 у времену 1 има исто гранање као и у времену 0, односно, из једног стања истим акцијама долазимо до већ одређених стања у било којем времену. Због детерминистичких акција у нашим структурама не можемо имати два стања која следе у следећем тренутку из неког стања извршавањем исте акције.



Слика 3.1: Илустрација $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре

У следећој дефиницији представићемо појам пута. То је уствари један могући низ догађаја у будућности који је дефинисан избором акције у сваком тренутку.

Дефиниција 3.6 (Пут). *Пут,* π, *у* $\mathbf{TS}$ *је бесконачан низ стања из* $\mathbf{TS}$ *и акција,* $\pi = (s_0, a_0, s_1, a_1, ...)$, *тако да за све* i, $s_i R_{a_i} s_{i+1}$. *За пут* $\pi = (s_0, a_0, s_1, a_1, ...)$, *пишемо* π_k *да означимо стање* s_k, $\pi_{\geqslant i}$ *за пут* $(s_i, a_i, s_{i+1}, a_{i+1}, ...)$ *и* $act(\pi, k) = a_k$ *(читамо- акција на путу* π *у тренутку* k *је* a_k*).*

Пример пута са слике 3.1 је $\pi = (s_0, a, s_0, a, s_0, \dots)$.

Пишемо $p \in v(s)$ као ознаку да у придруженој валуацији за стање s вредност исказа p је тачна. Слично и за остале формуле из скупа $Prop$.

Сада можемо да дефинишемо задовољивост формуле α на путу π у $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структури $\mathbf{TS}$, што означавамо са $\mathbf{TS}, \pi \models_c \alpha$, на следећи начин:

1. $\mathbf{TS}, \pi \models_c \chi$ акко $\chi \in v(\pi_0)$, $\chi \in Prop$;

2. $\mathbf{TS}, \pi \models_c do(a)$ акко $act(\pi, 0) = a$;

3. $\mathbf{TS}, \pi \models_c \neg\alpha$ акко $\mathbf{TS}, \pi \not\models_c \alpha$;

4. $\mathbf{TS}, \pi \models_c \alpha \wedge \beta$ акко $\mathbf{TS}, \pi \models_c \alpha$ и $\mathbf{TS}, \pi \models_c \beta$;

5. $\mathbf{TS}, \pi \models_c \bigcirc\alpha$ акко $\mathbf{TS}, \pi_{\geqslant 1} \models_c \alpha$;

6. $\mathbf{TS}, \pi \models_c \alpha U \beta$ акко за неко $i \geqslant 0$, $\mathbf{TS}, \pi_{\geqslant i} \models_c \beta$ и за све j, $0 \leqslant j < i$, $\mathbf{TS}, \pi_{\geqslant j} \models_c \alpha$;

7. $\mathbf{TS}, \pi \models_c A\alpha$ акко за све π', $\pi_0 = \pi'_0$, $\mathbf{TS}, \pi' \models_c \alpha$.

Логички појмови задовољивости, ваљаности и семантичке последице се дефинишу на уобичајан начин. Ми ћемо означавати одговарајућу вредност од α на путу π у $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структури $\mathbf{TS}$ са $v(\alpha, \mathbf{TS}, \pi) = 1$ ако $\mathbf{TS}, \pi \models_c \alpha$, у супротном $v(\alpha, \mathbf{TS}, \pi) = 0$.

Сада можемо дефинисати структуре у којима се дефинише задовољивост свих $For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}}$ формула.

Дефиниција 3.7 ($\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$–структура)**.** $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$*–структура је уређена четворка* $M = \langle W, H, \mu, \sigma \rangle$ *где:*

- W *је непразан скуп светова,*
- $\langle W, H, \mu \rangle$ *је вероватносни простор, тј.*
  - H *је алгебра подскупова од* W*,*
  - $\mu : H \longrightarrow [0, 1]$ *је коначно адитивна мера.*
- σ *је функција која сваком свету* $w \in W$ *обезбеђује* $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$*-структуру и пут у тој структури, тј.* $\sigma(w) = (\mathbf{TS}_w, \pi_w)$*. За два различита света* $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$*-структуре које им додељујемо могу бити различите, као и путеви у њима.*

Слично као и пре за $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$–структуру M и за сваку формулу α дефинишемо скупове $[\alpha]_M = \{w \in W \mid v(\alpha, \mathbf{TS}_w, \pi_w) = 1\}$. Кажемо да је M *мерљив* ако $[\alpha]_M \in H$ за све $\alpha \in For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$. Означавамо класу свих мерљивих $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$–структура са $\mathrm{CTL}^{*\mathrm{Meas}}_{\mathrm{A,conf}}$.

Дефинишимо сада задовољивост формула у структурама скупа $\mathrm{CTL}^{*\mathrm{Meas}}_{\mathrm{A,conf}}$.

Дефиниција 3.8 (Задовољивост)**.** *Нека је* $M \in \mathrm{CTL}^{*\mathrm{Meas}}_{\mathrm{A,conf}}$*.* Релација задовољивости*, у ознаци* $\models$*, је дефинисана рекурзивно на следећи начин:*

1. $M \models \alpha$ *акко* $v(\alpha, \mathbf{TS}_w, \pi_w) = 1$ *за све* $w \in W$*,*

2. $M \models P_{\geqslant r}\alpha$ *ако* $\mu([\alpha]) \geqslant r$*,*

3. $M \models c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ *ако* $\mu([\beta]) > 0$ *и* $\mu([\alpha]|[\beta]) - \mu([\alpha]) \geqslant r$*,*

4. $M \models c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$ *ако* $\mu([\beta]) > 0$ *и* $\mu([\alpha]|[\beta]) - \mu([\alpha]) \leqslant r$*,*

5. $M \models \neg\phi$ *акко* $M \not\models \phi$*,*

6. $M \models \phi \wedge \psi$ *акко* $M \models \phi$ *и* $M \models \psi$*.*

Слично као и у претходном делу, можемо добити и услове задовољивости за остале вероватносне операторе користећи дефиницију задовољивости и особине реалних бројева.

На крају овог дела напомињемо да се основни семантички појмови као што су модел формула и семантичке последице дефинишу исто као и одељку 2.

3.2.2 Аксиоматизација

У овом поглављу представићемо аксиоматизацију наше логике коју означавамо са $Ax(\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}})$. Пре него испишемо аксиоме и правила извођења, потребно је увести неке појмове које ћемо користити у аксиоматизацији. Први појам је k-угњеждена импликација која је пожељна како би се показала теорема јаке нецеситације. У том циљу, нека правила извођења морају садржати премисе и закључке у овој k-угњежденој ипликативној форми (видети доказ теореме 3.4).

Дефиниција 3.9 (k-угњеждена импликација)**.** *Форма k-угњеждене импликације за неку формулу τ, у запису $\phi_k(\tau, \overline{\gamma})$, базирана на низу формула $\overline{\gamma} = (\gamma_0, ..., \gamma_k)$ и темпоралног оператора $X \in \{\bigcirc, A\}$, је дефинисана рекурзивно на следећи начин:*

$$\phi_0(\tau, \gamma_0) = \gamma_0 \to \tau$$

$$\phi_k(\tau, \overline{\gamma}) = \gamma_k \to X(\phi_{k-1}(\tau, (\gamma_0, ..., \gamma_{k-1})).$$

На пример, за $X = A$, $\phi_2(\alpha, (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2))$ је формула $\gamma_2 \to A(\gamma_1 \to A(\gamma_0 \to \alpha))$.

Дефиниција 3.10 (Формуле стања)**.** *Формула је* формула стања *ако је буловска комбинација елемената из $Prop$ и формула облика $A\alpha$. Означавамо скуп свих формула стања са St.*

Такође уводимо оператор U_n на следећи начин:

$$\alpha U_n \beta := (\bigwedge_{k=0}^{n-1} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^n \beta,$$

где $\bigcirc^{k+1}\alpha$ је скраћеница за $\bigcirc(\bigcirc^k\alpha)$.

Као што се може претпоставити, наша аксиоматизација због вероватносне логике садржи инфинитарна правила, јер теорема компактности не важи за њих. Међутим, теорема компактности не важи ни за темпоралне логике. Стандарни пример незадовољивог, а коначно задовољивог скупа формула темпоралне логике је

$$T = \{F\neg\alpha\} \cup \{\bigcirc\alpha, \bigcirc\bigcirc\alpha, \bigcirc\bigcirc\bigcirc\alpha, \dots\}.$$

Због истих разлога као и пре имаћемо и инфинитарно правило и у делу аксиоматизације за темпоралне логике.

Наш аксиоматски систем садржи следеће схеме аксиома и правила извођења.

Схеме аксиома и правила извођења за исказну логику

(A1) Све инстанце класичних исказних таутологија како за $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}-$формуле тако и за вероватносне формуле.

(R1) Из $\{\rho, \rho \to \sigma\}$ закључити σ

Схеме аксиома и правила извођења за темпоралну логику

(A2) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$

(A3) $\alpha U \beta \to \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha U \beta))$

(A4) $\alpha \to A\alpha$ где $\alpha \in Prop$

(A5) $E\alpha \to \alpha$ где $\alpha \in Prop$

(A6) $A\alpha \to \alpha$

(A7) $A(\alpha \to \beta) \to (A\alpha \to A\beta)$

(A8) $A\alpha \to AA\alpha$

(A9) $E\alpha \to AE\alpha$

(R2) Из α закључити $\bigcirc\alpha$

(R3) Из α закључити $A\alpha$

(R4) Из скупа премиса $\{\phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\gamma}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ закључити $\phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$

Схеме аксиоме за акције, пре и пост услове

(A10) $\bigvee_{a \in Act} do(a)$

(A11) $do(a) \to \bigwedge_{b \neq a} \neg do(b)$

(A12) $pre(a) \to E do(a)$

(A13) $do(a) \to \bigcirc post(a)$

(A14) $do(a) \to pre(a)$

(A15) $E(do(a) \wedge \bigcirc\alpha) \to A(do(a) \to \bigcirc\alpha)$, где је α формула стања.

Схеме аксиома и правила извођења за вероватносну логику

(A16) $P_{\geqslant 0}\alpha$

(A17) $P_{\leqslant r}\alpha \to P_{<s}\alpha$ за $r < s$

(A18) $P_{<r}\alpha \to P_{\leqslant r}\alpha$

(A19) $(P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \to P_{\geqslant \min\{1, r+s\}}(\alpha \vee \beta)$

(A20) $(P_{\leqslant r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \to P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$, за $r + s \leqslant 1$

(A21) $c_{\geqslant r}(\alpha, \beta) \to P_{>0}\beta$

(A22) $c_{\leqslant r}(\alpha, \beta) \to P_{>0}\beta$

(A23) $(P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)) \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$

(A24) $(P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta \wedge c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)) \to P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)$

(R5) Из α закључити $P_{\geqslant 1}\alpha$.

(R6) Из скупа премиса $\{\phi \to P_{\geqslant r-\frac{1}{k}}\alpha \mid k \in \mathbb{N}, k \geqslant \frac{1}{r}\}$ закључити $\phi \to P_{\geqslant r}\alpha$.

(R7) Из скупа премиса

$$\{\phi \to P_{>0}\beta\} \cup \{\phi \to ((P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta) \to P_{\geqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)) | t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}\}$$

закључити $\phi \to c_{\geqslant r}(\alpha,\beta)$.

(R8) Из скупа премиса

$$\{\phi \to P_{>0}\beta\} \cup \{\phi \to ((P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta) \to P_{\leqslant s(r+t)}(\alpha \wedge \beta)) \mid t, s \in [0,1]_{\mathbf{Q}}\}$$

закључити $\phi \to c_{\leqslant r}(\alpha,\beta)$.

Дате схеме аксиома и правила извођења су подељене у 4 групе, према типу логика које представљају. Аксиоме A10-A15 су адаптиране из аксиоматског система из [68]. Аксиоме A16-A23 су заправо аксиоме логике LPP_2^{conf}. Правило извођења R4 је генерализовано правило из [52]; Правила R6-R8 су већ нама сад добро позната инфинитарна правила извођења. Као и пре, потреба за оваквим правилима произилази из феномена некомпкатности вероватносне логике LPP_2^{conf}, која је подлогика наше логике.

Појмови теорема, доказа и извођење се уводе као и у дефиницији 1.11 уз додатак да се поред правила R5, правила R2 и R3 могу применити само на теореме. Максимално конзистентни скупови се дефинишу исто као и у дефиницији 1.12.

Како наша логика у себи садржи LPP_2^{conf} логику, у доказима теорема које следе показаћемо само случајеве темпоралног дела.

3.2.3 Теорема коректности

Теорема 3.1 (Коректност). *Аксиоматски систем* $Ax(\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}})$ *је коректан у односу на класу структура* $\mathrm{CTL}^{*\mathrm{Meas}}_{\mathrm{A,conf}}$.

Доказ. Коректност прве и последње групе аксиоматског система се показује на сличан начин као што је показано у претходним поглављима, тако да ћемо овде показати конзистентност друге и треће групе аскиома и правила извођења. Како су у свим тим групама аксиоме везане за темпоралне формуле са акцијама, користићемо само $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре. Нека је TS једна $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структура и π пут у TS.

(A2) Нека важи $TS,\pi \models_c \bigcirc(\alpha \to \beta)$ и $TS,\pi \models_c \bigcirc\alpha$. Према дефиницији задовољивости $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$ формула важи $TS,\pi_{\geqslant 1} \models_c \alpha \to \beta$ и $TS,\pi_{\geqslant 1} \models_c \alpha$. Применом правила R1 важи $TS,\pi_{\geqslant 1} \models_c \beta$, односно $TS,\pi \models_c \bigcirc\beta$.

(A3) Нека важи $TS,\pi \models_c \alpha U \beta$. Према дефиницији задовољивости важи да постоји $i \geqslant 0$ такво да $TS,\pi_{\geqslant i} \models_c \beta$ и за све j, $0 \leqslant j < i$ важи $TS,\pi_{\geqslant j} \models_c \alpha$. Ако $TS,\pi \models_c \beta$ онда $TS,\pi \models_c \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha U \beta))$. Претпоставимо да $TS,\pi \not\models_c \beta$. То значи да β не може бити формула стања, односно да је $i > 0$. Према претпоставци за све j, $0 \leqslant j < i$ важи $TS,\pi_{\geqslant j} \models_c \alpha$. Важи $TS,\pi_{\geqslant 0} \models_c \alpha$. Односно важи да постоји $i \geqslant 1$ такво да $TS,\pi_{\geqslant i} \models_c \beta$ и за све j, $1 \leqslant j < i$ важи $TS,\pi_{\geqslant j} \models_c \alpha$, што у ствари представља $TS,\pi_{\geqslant 1} \models_c \alpha U \beta$, односно $TS,\pi \models_c \bigcirc(\alpha U \beta)$. Па заиста мора бити $TS,\pi \models_c \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha U \beta))$.

(A4-A6) Следе директно из дефиниције задовољивости.

(A7) Претпоставимо да је $TS, \pi \models_c A(\alpha \to \beta)$ и $TS, \pi \models_c A\alpha$. Значи за све путеве π' за које је $\pi_0 = \pi'_0$ важи $TS, \pi' \models_c \alpha \to \beta$ и $TS, \pi' \models_c \alpha$. Применом правила R1 важи $TS, \pi' \models_c \beta$, односно $TS, \pi \models_c A\beta$.

(A8) Нека је $TS, \pi \models_c A\alpha$. То значи да за све путеве π' за које је $\pi_0 = \pi'_0$ важи $TS, \pi' \models_c \alpha$. Нека је баш пут π' један такав пут. Како су свим путевима почетна стања иста онда важи чињеница да све путеве π'' за које је $\pi'_0 = \pi''_0$ важи $TS, \pi'' \models_c \alpha$, односно важи $TS, \pi' \models_c A\alpha$ за све путеве π' за које је $\pi_0 = \pi'_0$. Према дефиницији задовољивости следи $TS, \pi \models_c AA\alpha$.

(A9) Показује се на исти начин као и аксиома A8.

(R2) Ако важи да је формула α ваљана формула, онда је она задовољива на сваком путу и сваком моделу $TS, \pi \models_c \alpha$, па и на путу $\pi_{\geqslant 1}$, тј. важи $TS, \pi_{\geqslant 1} \models_c \alpha$, односно $TS, \pi \models_c \bigcirc\alpha$.

(R3) Показује се слично као и претходно правило.

(R4) Нека су формуле из скупа $\{\phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\gamma}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ваљане. Односно формуле $\gamma_k \to A(\phi_{k-1}(\neg(\alpha U_n \beta), (\gamma_0, ..., \gamma_{k-1}))$ су ваљане за све $n \in \mathbb{N}$. Како су формуле ваљане, оне су задовољиве на свим путевима у свим моделима, што значи да ни у једном путу не важи формула $\alpha U_n \beta$, односно, ни на једном путу не постоји временски тренутак до којег је формула α била тачна, а онда формула β постала тачна (из дефиниције оператора U_n).

Претпоставимо сад да правило не чува ваљаност, односно важи да је $TS, \pi \not\models_c \phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$, тј. $TS, \pi \models_c \neg(\gamma_k \to A(\phi_{k-1}(\neg(\alpha U \beta), (\gamma_0, ..., \gamma_{k-1})))$. Применом A1 и R1 следи $TS, \pi \models_c \gamma_k$ и $TS, \pi \models_c \neg A(\phi_{k-1}(\neg(\alpha U \beta), (\gamma_0, ..., \gamma_{k-1}))$. Из дефиниције задовољивости следи да постоји пут π^1 такав да $TS, \pi^1 \models_c \neg\phi_{k-1}(\neg(\alpha U \beta), (\gamma_0, ..., \gamma_{k-1}))$. Поновимо сада исти поступак $k-1$ пута и добићемо $TS, \pi^k \models_c \gamma_0$ и $TS, \pi^k \models_c \alpha U \beta$, за неки пут π^k за који важи $\pi_0 = \pi^k_0$, што је у контрадикцији са последњом реченицом претходног пасуса.

Дакле и формула $\phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$ је ваљана.

(A10-A14) Директно следе из дефинисаности акција у језику логике.

(A15) Претпоставимо да важи $TS, \pi \models_c E(do(a) \wedge \bigcirc\alpha)$, то значи да постоји пут π', при чему важи $\pi'_0 = \pi_0$, у којем важи $TS, \pi' \models_c do(a)$ и $TS, \pi' \models_c \bigcirc\alpha$, тј. $TS, \pi'_{\geqslant 1} \models_c \alpha$.

Претпоставимо сада да важи $TS, \pi \not\models_c A(do(a) \to \bigcirc\alpha)$. То значи да постоји пут π'', при чему је $\pi''_0 = \pi_0$, и важи $TS, \pi'' \models_c \neg(do(a) \to \bigcirc\alpha)$, тј. $TS, \pi'' \models_c do(a)$ и $TS, \pi'' \models_c \neg\bigcirc\alpha$, односно $TS, \pi''_{\geqslant 1} \not\models_c \alpha$ што је немогуће јер $\pi''_0 = \pi'_0$, извођење акције b води до одређеног света (акције су детерминистичке) и формула α је формула стања.

□

3.2.4 Теорема потпуности

Сада ћемо прећи на теореме које су неопходне за доказ јаке потпуности. Дакле, прво ћемо показати да теорема дедукције важи у нашој логици $\mathrm{CTL}^{*}_{\mathrm{A,conf}}$

Теорема 3.2 (Теорема дедукције)**.** *Нека је T скуп формула и нека су ρ и σ две формуле истог типа. Тада важи $T, \rho \vdash \sigma$ ако и само ако $T \vdash \rho \to \sigma$.*

Доказ. Доказ ове теореме се изводи на исти начин као и до сада, трансфинитном индукцијом по дужини доказа. Овде ћемо показати само случај правила R4, док су остали случајеви тривијални.

(R4) Нека је σ формула облика $\phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$ и изведена је правилом R4 из скупа $T \cup \rho$. Онда мора да важи $T, \rho \vdash \phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\gamma})$ за све $n \in \mathbf{N}$. Применом индукцијске хипотезе следи $T \vdash \rho \to (\gamma_k \to \phi_{k-1}(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\overline{\gamma}}))$ за све $n \in \mathbf{N}$, односно применом аксиоме A1 важи $T \vdash (\rho \wedge \gamma_k) \to \phi_{k-1}(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\gamma})$, што можемо записати као $T \vdash \phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), (\overline{\gamma}, \rho \wedge \gamma_k))$, за све $n \in \mathbf{N}$. Сада применом правила R4 важи $T \vdash \phi_k(\neg(\alpha U \beta), (\overline{\gamma}, \rho \wedge \gamma_k))$. Сада применимо опет исте особине класичне логике и добићемо да важи $T \vdash \rho \to \phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$.

□

Следећа теорема која је потребна за доказ јаке потпуности јесте Линденбаумова теорема.

Теорема 3.3 (Линденбаумова теорема)**.** *Сваки конзистентан скуп се може проширити до максимално конзистентног скупа.*

Доказ. Нека је $\rho_0, \rho_1, \ldots$ једно набрајање свих формула. За дати конзистентан скуп T, дефинишемо низ скупова T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ као и скуп $T^{\star}$ на следећи начин:

1. $T_0 = T$,

2. за све $i \geqslant 0$,

   (а) ако је $T_i \cup \{\rho_i\}$ конзистентан, онда $T_{i+1} = T_i \cup \{\rho_i\}$, у супротном

   (б) ако је ρ_i облика $\phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$, онда је

   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\gamma})\},$$

   где је n најмањи ненегативан цео број такав да T_{i+1} је конзистентан, у супротном

   (в) ако је ρ_i облика $\phi \to P_{\geqslant r}\alpha$, онда је

   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\phi \to P_{<r-\frac{1}{k}}\alpha\},$$

   где је k најмањи ненегативан цео број такав да је $r - \frac{1}{k} \geqslant 0$ и T_{i+1} је конзистентан, у супротном (г) Ако је $\rho_i = \phi \to c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$, онда је $T_{i+1} = T_i \cup \{\psi\}$ где је

$$\psi = \begin{cases} \phi \to P_{=0}\beta, & T_i \cup \{\phi \to P_{=0}\beta\} \nvdash \bot \\ \phi \to (P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{<s(r+t)}(\alpha, \beta)), & T_i \cup \{\phi \to P_{=0}\beta\} \vdash \bot \end{cases}$$

за неке рационалне бројеве t и s из јединичног интервала тако да T_{i+1} је конзистентан.

(д) Ако је $\rho_i = \phi \to c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$, онда $T_{i+1} = T_i \cup \{\psi\}$ где

$$\psi = \begin{cases} \phi \to P_{=0}\beta, & T_i \cup \{\phi \to P_{=0}\beta\} \nvdash \bot \\ \phi \to (P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta \wedge P_{>s(r+t)}(\alpha, \beta)), & T_i \cup \{\phi \to P_{=0}\beta\} \vdash \bot \end{cases}$$

за неке рационалне бројеве t и s из јединичног интервала тако да T_{i+1} је конзистентан.

(ђ) $T_{i+1} = T_i$.

3. $T^\star = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$.

Да је скуп $T^\star$ добро дефинисан, показаћемо само да постоји n из корака (б) наведене конструкције, док за остале кораке важи исти доказ као у доказу теореме 2.3.

Претпоставимо да је за неко i скуп $T_i \cup \{\phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})\}$ неконзистентан. Применом теореме дедукције важи $T_i \vdash \neg\phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$. Сада претпоставимо и да је скуп $T_i \cup \{\neg\phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\gamma})\}$ неконзистентан за све $n \in \mathbb{N}$. Применом опет теореме 3.2 важи $T_i \vdash \phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$ за све $n \in \mathbb{N}$. Применом правила R4 важи $T_i \vdash \phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$ што је немогуће.

Покажимо још да је скуп $T^\star$ дедуктивно затворен. Као и пре, показаћемо само случај са правилом R4, док су остала правила извођења као и остатак доказа показана у претходним деловима.

Заиста, нека важи $T^\star \vdash \phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$ применом правила R4. Из индукцијске претпоставке важи $\phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\gamma}) \in T^\star$ за све $n \in \mathbf{N}$. Претпоставимо да $\phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma}) \notin T^\star$. Нека је j позитиван цео број такав да важи $\rho_j = \phi_k(\neg(\alpha U \beta), \overline{\gamma})$. Мора бити да је $T_i \cup \{\rho_j\}$ неконзистентан. Тада из конструкције важи $\neg\phi_k(\neg(\alpha U_{n'} \beta), \overline{\gamma}) \in T_{i+1}$ за неко $n' \in \mathbb{N}$. Из чињенице да је $\phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \overline{\gamma}) \in T^\star$ за све $n \in \mathbf{N}$, нека је i цео број такав да $\phi_k(\neg(\alpha U_{n'} \beta), \overline{\gamma}) \in T_i$. Тада је $T_{\max\{i,j\}}$ неконзистентан, што је контрадикција. Дакле, скуп $T^\star$ је дедуктивно затворен.

Дакле, $T^\star$ је максимално конзистентан скуп који садржи конзистентан скуп T.

□

Пре него покажемо најзначајнији резултат наше логике, потребно је да покажемо још једну теорему:

Теорема 3.4 (Јака нецеситација)**.** *Ако је T скуп формуила и важи $T \vdash \alpha$, онда важи $\bigcirc T \vdash \bigcirc\alpha$ и $AT \vdash A\alpha$, где је $\bigcirc T = \{\bigcirc\alpha \mid \alpha \in T\}$ и $AT = \{A\alpha \mid \alpha \in T\}$.*

Доказ. За доказ ћемо користити индукцију по дужини доказа формуле α изведене из T. Претпоставимо да важи $T \vdash \Phi_k(\neg(\alpha U \beta), \gamma)$ које је добијено правилом R4 из $T \vdash \Phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \gamma)$ за све $n \in \mathbb{N}$. Важи следеће:

$\bigcirc T \vdash \bigcirc\Phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \gamma)$ за све $n \in \mathbb{N}$ (ИХ)

$\bigcirc T \vdash \top \to \bigcirc \Phi_k(\neg(\alpha U_n \beta), \gamma)$ за све $n \in \mathbb{N}$

$\bigcirc T \vdash \Phi_{k+1}(\neg(\alpha U_n \beta), \gamma')$ за све $n \in \mathbb{N}$ где је $\gamma' = (\gamma, \top)$ и $X = \bigcirc$

$\bigcirc T \vdash \Phi_{k+1}(\neg(\alpha U \beta), \gamma')$ (R4)

$\bigcirc T \vdash \top \to \bigcirc \Phi_k(\neg(\alpha U \beta), \gamma)$

$\bigcirc T \vdash \bigcirc \Phi_k(\neg(\alpha U \beta), \gamma)$.

Слично се доказује и да важи $AT \vdash A\Phi_k(\neg(\alpha U \beta), \gamma)$, док се случајеви за правила R2 и R3 лако доказују.

□

У овом одељку, као што смо рекли, показаћемо наш главни резултат: Аксиоматизација $Ax(\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}})$ је јако потпуна у односу на класу модела $\mathrm{CTL}^{*\mathrm{Meas}}_{\mathrm{A,conf}}$. Као део овог доказа, прво ћемо показати потпуност логике $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$.

3.2.4.1 Потпуност логике $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$

Размотримо невероватносни део наше целокупне логике, део са $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}-$формулама и $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структурама. Означићемо са $Ax(\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}})$ подсистем система $Ax(\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}})$ који садржи аксиоме A1-A14 и правила извођења R1-R4. Наравно, овде је A1 примењиво на $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-формуле.

Почећемо увођењем релације еквиваленције над максимално конзистентним скуповима, а затим ћемо показати нека помоћна тврђења.

Дефиниција 3.11. *За два максимално конзистентна скупа T и T' који садрже само $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}-$формуле, кажемо да су еквивалнетни и пишемо $T \equiv T'$, ако важи: $T \equiv T'$ ако и само ако $T \cap St = T' \cap St$. За максимално конзистентнан скуп T, $[T]$ је скуп свих максимално конзистентних скупова који су еквивалентни са T, тј, $[T] = \{T' \mid T' \equiv T\}$.*

Лема 3.1. *За сваки скуп формула T, важи следеће*

1. *Ако је T максимално конзистентан скуп $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}-$формула онда је $T' = \{\alpha \mid \bigcirc\alpha \in T\}$ такође максимално конзистентан скуп.*

2. *Ако је T максимално конзистентан скуп и $A\alpha \notin T$ онда постоји $T' \in [T]$, такав да је $\alpha \notin T'$.*

3. *Ако је T максимално конзистентан скуп и $E\alpha \in T$ онда постоји $T' \in [T]$, такав да је $\alpha \in T'$.*

Доказ. 1. Претпоставимо да T' није максимално конзистентан скуп, то значи да за неку формулу α важи $\alpha \in T'$ и $\neg\alpha \in T'$, или $\alpha \notin T'$ и $\neg\alpha \notin T'$. Претпоставимо да важи први случај, док се други показује слично. Тада важи $\bigcirc\alpha \in T$ и $\bigcirc\neg\alpha \in T$. Како је $\bigcirc\neg\alpha \to \neg \bigcirc \alpha$ теорема, важи $\neg \bigcirc \alpha \in T$ што је контрадикција.

2. Нека је $T' = T \cap St$. Ако је $T' \cup \{\neg\alpha\}$ конзистентан онда знамо да га можемо проширити до максимлано конзистентног скупа T^*. Како је $T^* \cap St = T'$, онда $T^* \in [T]$. Ако је $T' \cup \{\neg\alpha\}$ неконзистентан онда $T' \vdash \alpha$. Применом теореме 3.4 важи $AT' \vdash A\alpha$. Како је $T' \subseteq St$, применом аксиома A4, A8 и A9, $T' \vdash A\alpha$. Следи $A\alpha \in T$ што је у контрадикцији са претпоставком.

3. Доказује се слично као под 2.

□

Користећи релацију еквивалнеције $\equiv$, дефинисаћемо канонску $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуру.

Дефиниција 3.12 (Канонска $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структура). *Дефинишемо уређену тројку* $\mathbf{TS}_{can} = (S, R, v)$ *где је:*

1. $S = \{[T] \mid T$ *је максимално конзистентан скуп* $\}$
2. $R = \bigcup R_a$, $a \in Act$, *тако да* sR_as' *акко постоје максимлано конзистентни скупови* $T' \in s$ *и* $T'' \in s'$, *тако да* $do(a) \in T'$ *и* $T'' = \{\alpha \mid \bigcirc\alpha \in T'\}$
3. $p \in v([T])$ *ако и само ако* $p \in T$.

Од сада када говоримо о стању $s \in S$, канонског модела $\mathbf{TS}_{can}$, подразумеваћемо да је облика $[T]$, где је T максимално конзистентан скуп.

Теорема 3.5. $\mathbf{TS}_{can}$ *је* $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$*-структура.*

Доказ. Прво, приметимо да је $\mathbf{TS}_{can}$ добро дефинисана $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структура. Потребно је показати да релација R из $\mathbf{TS}_{can}$ задовољава услове $(a) - (d)$ дефиниције 3.5.

(а) Нека је $s \in S$, и нека је T_1 максимално конзистентан скуп такав да $T_1 \in s$. Према A10, за неко $a \in Act$, $do(a) \in T_1$. Из леме 3.1(1) важи $T_1' = \{\alpha \mid \bigcirc\, \alpha \in T_1\}$ је такође максимално конзистентнан скуп. Дакле T_1' припада неком стању $s' \in S$, па важи особина (а) из дефинисије $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре из дефиниције канонског модела.

(б) Нека је $a \in Act$ и нека sR_as' и sR_aS''. Из дефиниције $\mathbf{TS}_{can}$ постоји $T \in s$ тако да $do(a) \in T$ и $T' \in s'$ такво да важи $T' = \{\alpha \mid \bigcirc\alpha \in T\}$, тј. постоји $T_1 \in s$, такав да $do(a) \in T_1$ и $T_1' \in s''$, и важи $T_1' = \{\alpha \mid \bigcirc\alpha \in T_1\}$. Из A15 следи $T' \equiv T_1'$, односно $s' = s''$.

(в) Ако је $pre(a) \in v(s)$, s из $\mathbf{TS}_{can}$, онда постоји максимално конзистентан скуп $T \in s$ такав да $pre(a) \in T$. из A12 важи $Edo(a) \in T$, а применом леме 3.1.5, постоји $T' \in [T]$, тако да $do(a) \in T'$. из дефиниције канонског модела важи sR_as'.

(г) Ако је sR_as' онда према дефиницији TS_{can}, постоји $T \in s$, тако да $do(a) \in T$ и $T' \in s'$, $T' = \{\alpha \mid \bigcirc\alpha \in T\}$. Применом сада A13 и A14 важи $\bigcirc post(a) \in T$ и $pre(a) \in T$ из чега следи $post(a) \in T'$. Дакле важи $post(a) \in v(s')$ и $pre(a) \in v(s)$.

□

Уводимо нови оператор $\bigcirc^{-n}$ над скупом формула као: $\bigcirc^{-n}T := \{\alpha \mid \bigcirc^n\alpha \in T\}$. Приметимо да важи да ако је T максимлано конзистентан скуп онда је и $\bigcirc^{-n}T$ максимално конзистентан према леми 3.1(1).

Дефиниција 3.13. *За дати максимално конзистентан скуп* T *дефинишемо пут* $\pi_T = (s_0, a_0, s_1, a_1, \dots)$ *на следећи начин:*

- $s_i = [\bigcirc^{-i}T]$,
- $a_i = a$ *тако да* $\bigcirc^i do(a) \in T$.

Лако је проверити да је π_T добро дефинисан. Штавише, може се показати да је пресликавање из максимално кознистентних скупова у путеве $\mathbf{TS}_{can}$ бијекција.

Лема 3.2. *Нека је Σ скуп свих путева у $\mathbf{TS}_{can}$ и MCS скуп свих максимлано конзистентних скупова $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}-$формула. Функција $f: MCS \to \Sigma$, таква да важи $f(T) = \pi_T$, је бијекција.*

Доказ. Заиста, ако су T и T^* два максимално конзистентна скупа за које важи $T = T'$, из саме конструкције путева π_T и $\pi_{T'}$ важи $\pi_T = \pi_{T'}$, односно $f(T) = f(T')$. Такође, лако је приметити да за сваки пут π постоји максимално конзистентан скуп који га дефинише. □

Диркетно следи следећа лема.

Лема 3.3. *(а) За два максимално конзистентна скупа, T и T' важи $T \equiv T'$ акко $(\pi_T)_0 = (\pi_{T'})_0$;*

(б) За максимално конзистентан скуп T важи $\pi_{(\bigcirc^{-k}T)} = (\pi_T)_{\geqslant k}$.

Сада можемо показати резултат потпуности.

Теорема 3.6 (Јака потпуност $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$)**.** *Скуп $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}-$формула је конзистентан ако и само ако је задовољив на путу неке $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре.*

Доказ. Смер ($\Leftarrow$) може се лако проверити. У циљу да покажемо смер ($\Rightarrow$) користићемо Линденбаумову теорему како бисмо проширили произвољан конзистентан скуп до максимално конзистентног скупа T, који ћемо користити за конструкцију канонске $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-стуктуре $\mathbf{TS}_{can}$. Потребно је да покажемо да за сваку формулу α важи $\alpha \in T$ ако и само ако $\mathbf{TS}, \pi_T \models_c \alpha$. Доказ се своди на индукцију по сложености формуле α.

У случају ако је $\alpha \in Prop$ и $\alpha = do(a)$ доказ директно следи из дефиниције. У случајевима када је формула негација или конјункција доказ теореме показује се на уобичајан начин.

Ако је $\alpha = \bigcirc\beta$ онда важи $\alpha \in T$ акко $\beta \in \bigcirc^{-1}T$ акко (ИХ) $\mathbf{TS}, \pi_{(\bigcirc^{-1}T)} \models_c \beta$ акко $\mathbf{TS}, \pi_T \models_c \bigcirc\beta$ (лема 3.3(б)) акко $\mathbf{TS}, \pi_T \models_c \alpha$.

Ако је $\alpha = \beta U \gamma$, тада је $\mathbf{TS}, \pi_T \models_c \beta U \gamma$ акко за неко $i \geqslant 0$, $\mathbf{TS}, (\pi_T)_{\geqslant i} \models_c \gamma$ и за све j, $0 \leqslant j < i$, $\mathbf{TS}, (\pi_T)_{\geqslant j} \models_c \beta$ акко за неко $i \geqslant 0$, $\mathbf{TS}, \pi_{\bigcirc^{-i}T} \models_c \gamma$ и за све j, $0 \leqslant j < i$, $\mathbf{TS}, \bigcirc^{-i}T \models_c \beta$ (лема 3.3(б)) акко за неко $i \geqslant 0$, $\gamma \in \bigcirc^{-i}T$ и за све j, $0 \leqslant j < i$, $\beta \in \bigcirc^{-i}T$ (ИХ) акко $\beta U \gamma \in T$ (A2,A3 и R4).

Нека је $\alpha = A\beta$. Претпоставимо да је $\mathbf{TS}, \pi_T \models_c A\beta$. Тада за све π' такве да је $\pi'_0 = (\pi_T)_0$ важи $\mathbf{TS}, \pi' \models_c \beta$. Према леми 3.3, за све мкс T' такви да $T' \equiv T$, $\mathbf{TS}, \pi_{T'} \models_c \beta$. Из ИХ добијамо да за све T' такве да $T' \equiv T$, $\beta \in T'$. Онда, према леми 3.1(2) важи $A\beta \in T$. За супротан смер претпоставимо да $\mathbf{TS}, \pi_T \not\models_c A\beta$. Тада постоји π' такав да $\pi'_0 = (\pi_T)_0$ и $\mathbf{TS}, \pi' \not\models_c \beta$. Из леме 3.2, постоји мкс T', такав да $T' \equiv T$ и $\pi' = \pi_{T'}$. Према ИХ, $\beta \notin T'$, применом A6, $A\beta \notin T'$, па је коначно $A\beta \notin T$, јер $T' \equiv T$. □

3.2.4.2 Потпуност логике $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$

Сада узмимо у обзир цео језик наше логике. Слично као и пре, крећући од максимално конзистентног скупа дефинисаћемо канонски модел.

Дефиниција 3.14 (Канонски модел)**.** *За максимално конзистентан скуп T^* дефинишемо $M_{T^*} = \langle W, H, \mu, \sigma \rangle$, тако да:*

1. $W = \{(\mathbf{TS}, \pi) \mid v(\alpha, \mathbf{TS}, \pi) = 1$ *за све* $\alpha \in T^* \cap For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}\}$,
2. $H = \{[\alpha] \mid \alpha \in For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}\}$, *где* $[\alpha] = \{(\mathbf{TS}, \pi) \in W \mid v(\alpha, \mathbf{TS}, \pi) = 1\}$,
3. $\mu([\alpha]) = \sup\{r \in \mathbf{Q} \mid T^* \vdash P_{\geqslant r}\alpha\}$, *за све* $\alpha \in For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$,
4. $\sigma(w) = w$ *за све* $w \in W$.

На сличан начин као и пре важи следећа лема.

Лема 3.4. *M_{T^*} је мерљив модел.*

Теорема 3.7 (Јака потпуност)**.** *Скуп формула $T \subseteq For$ је конзистентан акко је задовољив.*

Доказ. Смер здесна на лево следи из теореме 3.1. За супротан смер потребно је показати да конзистентан скуп формула T има модел. Прво, као и пре, користимо Линденбаумову теорему како бисмо проширили скуп T до максимално конзистентног скупа T^*, а онда конструисали канонски модел M_{T^*}. Показаћемо да је M_{T^*} модел за T^*, односно да је модел и за T. Довољно је показати да за све $\rho \in For$, $T^* \vdash \rho$ ако и само ако $M_{T^*} \models \rho$.
Нека је $\rho = \alpha \in For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$. Ако је $\alpha \in T^*$, онда према дефиницији за W из M_{T^*} важи $M_{T^*} \models \alpha$. За супротан смер важи, ако је $M_{T^*} \models \alpha$, према теореми 3.6, $\alpha \in T^*$.
Ако је $\rho \in For_P$, доказ показујемо применом индукције по сложености формуле ρ слично као у логици $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$.

□

3.2.5 Одлучивост једног фрагмента логике $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$

Резултат одлучивости за нашу логику $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$ још увек није добијен, о чему ћемо као о отвореном проблему више рећи у наредном одељку. Међутим, овде ћемо представити резултат одлучивости за један фрагмент логике $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$ у чијем језику не користимо оператор U.

Као што знамо, проблем одлучивости заснива се на одговору на питање да ли је нека формула задовољива или не. До сада смо се бавили овим проблемом кроз вероватносне логике, међутим сада у логици имамо и темпорални део. Карактеристично за темпоралне логике је то што време, који је главни мотив ових логика, јесте бесконачно, јер увек имамо следећи тренутак. Темпорални оператори захтевају испитивање задовољивости формула у будућности. Подсетимо се да је формула $\alpha U \beta$ задовољива ако α важи све до неког тренутка када формула β важи. Када је тај тренутак када β важи не може се закључити из саме формуле. Док, са друге стране, формула $\bigcirc\alpha$ важи ако α важи у следећем временском тренутку. У том случају, довољно је проверити у моделу до *следећег временског тренутка* да ли формула α важи, и ту се процедура проверавања задовољивости завршава, не морамо ићи даље у будућност. Идеја која се јавља јесте та да ако формула не садржи темпорални оператор U, њена задовољивост се може проверити у коначном времену, до неког одређеног тренутка. Изглед структуре након тог времена неће утицати на задовољивост саме формуле.

Нека је $\mathrm{CTL}^{*\,\cancel{U}}_{\mathrm{A,conf}}$ фрагмент логике $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$ без оператора U, а $For^{\cancel{U}}_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$ подскуп скупа $For_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$ у којем су све формуле без оператора U. Како имамо две врсте формула показаћемо прво следеће тврђење.

Теорема 3.8. *Проблем задовољивости формула $For^{\cancel{U}}_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$ за логику $\mathrm{CTL}^{*\,\cancel{U}}_{\mathrm{A,conf}}$ је одлучив.*

Доказ. Нека је α нека формула из скупа $For^{\not U}_{\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}}$. Како у формули α није могуће појављивање оператора U, једини темпорални оператор који захтева испитивање стања у будућем времену јесте оператор $\bigcirc$. Нека је t_α максималан број понављања оператора $\bigcirc$ у формули α. Као што знамо, максималан број грана из једног стања је $|Act|$. Да би испитали задовољивост формуле α довољно је испитати задовољивост формуле у свим структурама до времена t_α, јер остатак структуре неће утицати на задовољивост.

Знамо да $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре имају облик налик древетима. Нека *дрво* представља скелет $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$ стуктуре где човорви и гране не садрже информације о акцијама и валуацијама. Додавањем тих информација дрво постаје потенцијална $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структура. Ако такво дрво задовољи услове дефиниције 3.1, онда смо од дрвета добили једну $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуру.

Конструишимо сада сва могућа дрвета од којих правимо све могуће потенцијалне $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре на следећи начин:

- Нека је s_0 почетно стање. Из њега можемо имати највише $|Act|$ грана до следећих стања. За сваки број грана g, $g \leqslant |Act|$, правимо ново дрво са бројем грана g дубине 1 (до временског тренутка 1). На овај начин направили смо све могућности како дрво може да изгледа до тренутка 1. Сада, из сваког новог стања можемо поновити поступак као за стање s_0 и добити скуп свих различитих дрвета дубине 2. Овај поступак понављамо до тренутка $t_\alpha + 1$. Сада имамо коначан број дрвета чија је свака грана дужине $t_\alpha + 1$.

- Нека је P_α скуп свих исказних слова који се појављују у формули α и нека је $Prop_\alpha = P_\alpha \cup \{pre(a), post(a) | a \in Act\}$. Тада имамо $2^{|Prop_\alpha|}$ могућих валуација које можемо доделити стањима и коначан број акција из Act које можемо доделити гранама. На овај начин добијамо коначан број потенцијалних $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структура дубине t_α.

Сада када смо констуисали све могуће потенцијалне $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре дубине t_α, следећи корак јесте да одстранимо оне које не задовољавају услове дефиниције $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре (дефиниција 3.1). Потенцијалне $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре дубине t_α које задовољавају услове дефиниције су заправо све могуће $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре дубине t_α које се могу продужити до $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре, а у којима је могуће у коначном времену проверити задовољивост формуле α. Изглед структуре након времена t_α, као што смо објаснили, неће утицати на задовољивост формуле.

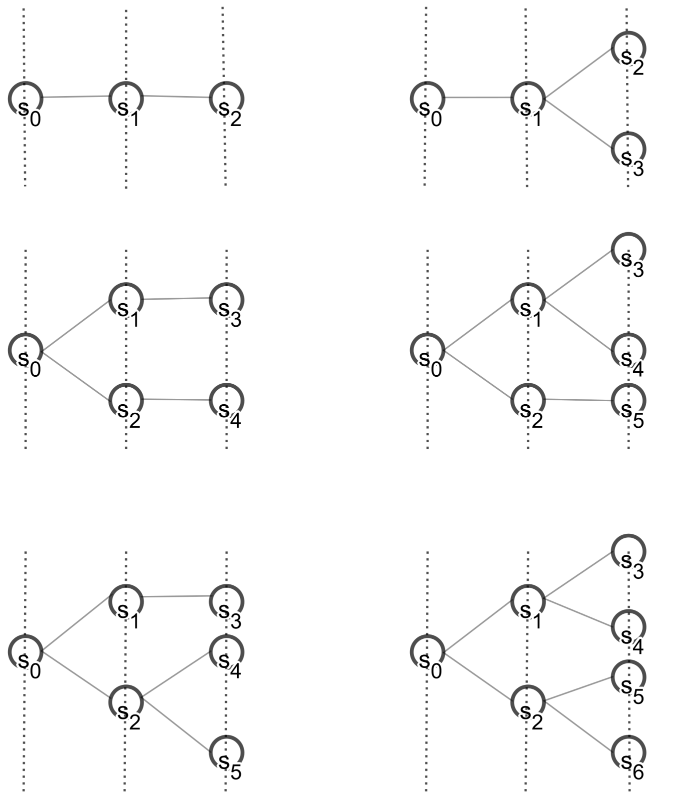
На овај начин смо показали да имамо коначно много $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структура дубине t_α у којима можемо проверити задовољивост формуле α. Самим тим, испитивање задовољивости формуле α може се извршити у коначном времену.

□

Поменуту конструкцију од дрва до $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$-структура из доказа претходне теореме демонстрираћемо примером за формулу $\alpha = \bigcirc A(do(a) \vee do(b))$.

Приметимо да је $t_\alpha = 1$ и $Prop_\alpha = \{pre(a), pre(b), post(a), post(b)\}$, па је укупан број валуација 16, док је $Act = \{a, b\}$. Нека је s_0 почетно стање. Из s_0 може постојати једна грана или две гране које воде до стања s_1, односно s_1 и s_2 у следећем тренутку, тренутку 1. У првом случају разматрамо нове две могућности за стање s_1, имамо једну нову грану или две нове гране. На тај начин добијамо 2 облика дрвета до тренутка 2. У другом случају разматрамо случајеве гранања сада из стања s_1 и s_2. У овом делу до тренутка 2 имаћемо 4 различита дрва. На слици испод представљени су сви облици дрвета до тренутка 2 у којима на коначан број начина можемо доделити акције и валуације, и проверити који од њих заиста јесу $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре.

Сада имамо коначан број $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структура и коначан број путева у њима до времена 2. То значи да задовољивост формуле α можемо проверити у коначном времену.



Слика 3.2: Облици дрвета до тренутка 2

Размотримо сада проблем задовољивости вероватносних формула наше логике.

Теорема 3.9. *Проблем задовољивости вероватносних формула језика логике* $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$ *је одлучив.*

Доказ. За доказ ове теореме користићемо модификацију доказа одлучивости из рада [14], у којем је такође развијена једна вероватносна-темпорална логика али са линеарним временом.

Нека је $\phi \in For_P$. Као што знамо, формула ϕ је Булова комбинација базичних вероватносних формула, јер итерација вероватносних оператора није дозвољена. Подсетимо се да су базичне формуле вероватносне формуле облика $P_{\geqslant r}\alpha, c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$ и $c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$. Нека је $For_B(\phi)$ скуп свих базичних вероватносних формула које се појављују у формули ϕ. Као што знамо, формулу ϕ можемо представити у комплетној дисјунктивној нормалној форми, $\phi = \bigvee_{i=1}^{m} \phi_i$, где су ϕ_i конјункције формула из скупа $For_B(\phi)$ или њихових негација. Дужина сваког конјункта је $|For_B(\phi)|$. Знамо да је формула ϕ задовољива ако је бар један дисјункт њене КДНФ задовољив. Дакле, фокусираћемо се на задовољивост формуле облика

$$\bigwedge_{k=1}^{|For_B(\phi)|} \phi'_k,$$

где је ϕ'_k базична вероватносна формула. Сада желимо да сваку темпоралну формулу која се налази унутар ових базичних формула напишемо у одговарајућем облику.

Нека је F скуп свих темпоралних потформула формуле ϕ. Посматрајмо сада формулу облика

$$\bigwedge_{k=1}^{|F|} \alpha_k \tag{3.1}$$

где је $\alpha_k \in F \cup \{\neg\alpha \mid \alpha \in F\}$, и свака потформула од ϕ се појављује само једном (негирана или не). Очигледно, конјункција било које две формуле облика 3.1 чине контрадикцију, док дисјункција свих формула чини таутологију. Ово нам омогућава да наш проблем задовољивости преведемо на проблем решивости система полиномијалних неједначина. Приметимо да формула облика 3.1 има $2^{|F|}$. Међутим, овде не знамо да ли су све оне задовољиве. У ту сврху елиминишемо све оне формуле које нису задовољиве ни на једном путу ниједне $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A}}$-структуре користећи процедуру из доказа теореме 3.8. Нека је $l \leqslant 2^{|F|}$ број формула које су задовољиве и означимо их са $\alpha_1, \ldots \alpha_l$. Сада сваку темпоралну потформулу α формуле ϕ можемо написати у облику $\bigvee_{i \in I_\alpha} \alpha_i$ где је $I_\alpha \subseteq \{1, \ldots, l\}$. Нека променљива y_i представља вероватноћу формуле α_i. Сада, на сличан начин као и у доказу теореме 2.6 можемо конструисати систем полиномијалних једначина и неједначина. Дакле, задовољивост формуле ϕ сводимо на проблем решавања система полиномијалних једначина и неједначина који је одлучив.

□

3.2.6 Одлучивост логике $\mathrm{CTL}^*_{\mathrm{A,conf}}$: Отворен проблем

Као што смо видели, без оператора U наша логика јесте одлучива. Шта се дешава када оператор U остаје као део језика? Већ смо поменули да формула облика $\alpha U \beta$ не указује када би формула β требала да важи. Због тога, проверавање задовољивости оваквих формула може трајати бесконачно, па претходни поступак за одлучивост се не може искористити.

Оно што знамо јесте да је логика CTL^* одлучива и тај резултат је показан на више начина. Као што смо напоменули пре, доказ за одлучивост прво је представљен у раду [23]. У том раду аутори су користили метод таблоа за проблем задовољивости CTL^* формула као и коначне аутомате како би показали одлучивост. Идеја коришћења методе таблоа је настављена и даље. У радовима [60, 61, 59] описују се различите методе таблоа за проверу задовољивости CTL^* формула. Међутим, креирање таблоа за CTL^* формуле са акцијама још увек није урађено. Методе таблоа на којима су гране означене (у овом случају акцијама) још увек није познат. Тај проблем заправо јесте отворен, али и наставак рада теме ове дисертације ка новим областима математичке логике које овде још увек нису коришћене.

Проблем који се јавља јесте тај да стања која су повезана неком акцијом не дају довољно информација о самој акцији која је извршена. Наиме, може се десити да важе предуслови за акције a и b у стању s_0, и да $post(a)$ и $post(b)$ важе у стањима s_1 и s_2, али да важи $s_0 R_a s_1$ и $s_0 R_b s_2$. Овде видимо да смо из информација које важе у стањима s_0, s_1 и s_2 у немогућности да сазнамо којом акцијом смо у којем стању завршили.

Глава 4

Додатак

Као што смо рекли у одељку 2, за меру степена потврђивања користили смо најстандарднију меру разлике где је $c(A, B) = \mu(A|B) - \mu(B)$. У овом одељку показаћемо како се наше аксиматске технике за логику $\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}}$ модификују у зависности избора мере за степен потврђивања.

У [65] представљене су мере за степен потврђивања, међу којима је и мера разлике коју смо користили.

На пример, ако изаберемо за представљање степена потврђивања Карнапову меру

$$\mu(A \wedge B) - \mu(A)\mu(B)$$

тада у аксиоматизацији $Ax(\mathrm{LPP}_1^{\mathrm{conf}})$ аксиоме A7-A10 и правила извођења R4 и R5 морају бити замењена следећим аксиомама и правилима извођења:

(A7') $(P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)) \to P_{\geqslant r+st}(\alpha \wedge \beta)$

(A8') $(P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta \wedge c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)) \to P_{\leqslant r+st}(\alpha \wedge \beta)$

(R4') Из скупа премиса

$$\{\gamma \to ((P_{\geqslant t}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta) \to P_{\geqslant r+st}(\alpha \wedge \beta)) \mid t, s \in [0, 1]_Q\}$$

закључити $\gamma \to c_{\geqslant r}(\alpha, \beta)$.

(R5') Из скупа премиса

$$\{\gamma \to ((P_{\leqslant t}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\beta) \to P_{\leqslant r+st}(\alpha \wedge \beta)) \mid t, s \in [0, 1]_Q\}$$

закључити $\gamma \to c_{\leqslant r}(\alpha, \beta)$.

За аксиматизацију Карнапове мере потребно нам је само осам схема аксиома. Приметимо да сличне технике за аксиоматизацију можемо применити и на логаритамске мере као што је

$$c(\alpha, \beta) = \log\left[\frac{P(\alpha|\beta)}{P(\alpha)}\right],$$

међутим резултати одличивости нису у потпуности чисти. У том случају, као што видимо, не можемо искористити транслацију формула као што смо урадили у секцији 2.2.5. Дакле, не можемо користити процедуру из [26].

Литература

[1] M. Abadi and J. Y. Halpern. "Decidability and Expressiveness for First-Order Logics of Probability". In: *Inf. Comput.* 112.1 (1994), pp. 1–36.

[2] N. Alechina. "*Logic with Probabilistic Operators*". In: *Proc. of the ACCOLADE '94.* 1995, pp. 121–138.

[3] C. Baier and J.P. Katoen. *Principles of model checking.* MIT Press, 2008.

[4] J. van Benthem. *The logic of time.* Dordrecht: Riedel, 1982.

[5] G. Boole. *An Investigation of the Laws of Thought: On Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Wakton and Maberley, London, 1854.

[6] J. P. Burgess. "Axioms for tense logic. I. "Since" and "Until"". In: *Notre Dame J. Formal Log.* 23.4 (1982), pp. 367–374.

[7] R. Carnap. *Logical Foundations of Probability.* 2nd edition, 1st edition 1950. The University of Chicago Press, 1962.

[8] R. Carnap. *The Continuum of Inductive Methods.* University of Chicago Press, 1952.

[9] E. M. Clarke and E. A. Emerson. "Design and Synthesis of Synchronization Skeletons Using Branching-Time Temporal Logic". In: *Logics of Programs, Workshop, Yorktown Heights, New York, USA, May 1981.* 1981, pp. 52–71.

[10] Š. Dautović. "A Probabilistic Logic between LPP_1 and LPP_2". In: *Logica Universalis.* Vol. 16. 1. 2022, pp. 323–333.

[11] Š. Dautović and D. Doder. "Probabilistic Logic for Reasoning About Actions in Time". In: *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty, 15th European Conference, ECSQARU 2019, Belgrade, Serbia, September 18-20, 2019, Proceedings.* Ed. by Gabriele Kern-Isberner and Zoran Ognjanovic. Vol. 11726. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2019, pp. 385–396.

[12] Š. Dautović, D. Doder, and Z. Ognjanović. "Logics for reasoning about degrees of confirmation". In: *J. Log. Comput.* 31.8 (2021), pp. 2189–2217.

[13] Š. Dautović, D. Doder, and Z. Ognjanović. "Reasoning About Degrees of Confirmation". In: *Logic and Argumentation - Third International Conference, CLAR 2020, Hangzhou, China, April 6-9, 2020, Proceedings.* 2020, pp. 80–95.

[14] D. Doder and Z. Ognjanovic. "A Probabilistic Logic for Reasoning about Uncertain Temporal Information". In: *Proceedings of the Thirty-First Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, UAI 2015, July 12-16, 2015, Amsterdam, The Netherlands.* 2015, pp. 248–257.

[15] D. Doder and Z. Ognjanović. “Probabilistic logics with independence and confirmation”. In: *Studia Logica* 105.5 (2017), pp. 943–969.

[16] D. Doder, Z. Ognjanović, and Z. Marković. “An Axiomatization of a First-order Branching Time Temporal Logic”. In: *J. Univers. Comput. Sci.* 16.11 (2010), pp. 1439–1451.

[17] D. Doder et al. “*A Logic with Conditional Probability Operators*”. In: *Publications de L’Institut Mathématique* Ns. 87(101) (2010), pp. 85–96.

[18] P. Doherty, J. Kvarnström, and F. Heintz. “A temporal logic-based planning and execution monitoring framework for unmanned aircraft systems”. In: *Auton. Agents Multi Agent Syst.* 19.3 (2009), pp. 332–377.

[19] D. Dubois and H. Prade. “What Does Fuzzy Logic Bring to AI?” In: *ACM Comput. Surv.* 27.3 (1995), pp. 328–330.

[20] E. Eells and B.Fitelson. “Measuring Confirmation and Evidence”. In: *Journal of Philosophy* 97.12 (2000), pp. 663–672.

[21] E. A. Emerson. “Temporal and Modal Logic”. In: *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Semantics*. 1990, pp. 995–1072.

[22] E. A. Emerson and J. Y. Halpern. “”Sometime” and ”Not Never” Revisited: On Branching Versus Linear Time”. In: *Conference Record of the Tenth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages, Austin, Texas, USA, January 1983*. 1983, pp. 127–140.

[23] E. A. Emerson and A. P. Sistla. “Deciding Full Branching Time Logic”. In: *Inf. Control.* 61.3 (1984), pp. 175–201.

[24] W. B. Ewald. “Intuitionistic Tense and Modal Logic”. In: *J. Symb. Log.* 51.1 (1986), pp. 166–179.

[25] R. Fagin and J. Y. Halpern. “Reasoning about knowledge and probability”. In: *Journal of the ACM* 41 (2) (1994), pp. 340–367.

[26] R. Fagin, J. Y. Halpern, and N. Megiddo. “A Logic for Reasoning about Probabilities”. In: *Inf. Comput.* 87.1/2 (1990), pp. 78–128.

[27] B. Fitelson. “The Plurality of Bayesian Measures of Confirmation and the Problem of Measure Sensitivity”. In: *Philosophy of Science* 66.3 (1999), p. 378.

[28] D. M. Gabbay and I. M. Hodkinson. “An Axiomitization of the Temporal Logic with Until and Since over the Real Numbers”. In: *J. Log. Comput.* 1.2 (1990), pp. 229–259.

[29] D. M. Gabbay et al. “On the Temporal Analysis of Fairness”. In: *Conference Record of the Seventh Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages, Las Vegas, Nevada, USA, January 1980*. 1980, pp. 163–173.

[30] H. Gaifman. “A Theory of Higher Order Probabilities”. In: *Proceedings of the 1st Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge, Monterey, CA, USA, March 1986*. Ed. by Joseph Y. Halpern. Morgan Kaufmann, 1986, pp. 275–292.

[31] T. Hailperin. “Best possible inequalities for the probability of a logical function of events”. In: 72.4 (1965), pp. 343–359.

[32] T. Hailperin. *Boole’s Logic and Probability: Critical Exposition from the Standpoint of Contemporary Algebra, Logic and Probability Theory*. Elsevier Science Ltd, 1986.

[33] J. Y. Halpern, R. van der Meyden, and M. Y. Vardi. "Complete Axiomatizations for Reasoning about Knowledge and Time". In: *SIAM J. Comput.* 33.3 (2004), pp. 674–703.

[34] J. Y. Halpern and R. Pucella. "*A Logic for Reasoning about Evidence*". In: *J. Artif. Intell. Res.* 26 (2006), pp. 1–34.

[35] J. Y. Halpern and M. Y. Vardi. "The Complexity of Reasoning about Knowledge and Time. I. Lower Bounds". In: *J. Comput. Syst. Sci.* 38.1 (1989), pp. 195–237.

[36] J.Y. Halpern. "An analysis of first-order logics of probability". In: *Artificial Intelligence* 46 (1990), pp. 311–350.

[37] C. L. Hamblin. "The Modal *Probably*". In: *Mind* 68.270 (1959), pp. 234–240.

[38] S. Hart and M. Sharir. "Probabilistic Propositional Temporal Logics". In: *Inf. Control.* 70.2/3 (1986), pp. 97–155.

[39] L. Henkin. "The Completeness of the First-Order Functional Calculus". In: *J. Symb. Log.* 14.3 (1949), pp. 159–166.

[40] W. van der Hoek. "*Some Considerations on the Logic PFD*$^{\sim}$". In: *Journal of Applied Non-Classical Logics* 7.3 (1997).

[41] D.N. Hoover. "Probability logic." In: *Ann. Math. logic* 14 (1978), pp. 287–313.

[42] G. E. Hughes and M. J. Cresswell. *A companion to Modal logic*. Methuen, 1984.

[43] G. E. Hughes and M. J. Cresswell. *Modal Logic*. Methuen, 1968.

[44] H. J. Keisler. "Hyperfinite model theory". In: *Logic Colloquium* 76 (1977), pp. 5–110.

[45] A. Kolmogoroff. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, 1933.

[46] S. Kripke. "A Completeness Theorem in Modal Logic". In: *J. Symb. Log.* 24.1 (1959), pp. 1–14.

[47] S. Kripke. "Semantical consideration on modal logic". In: *Acta philosophica fennica* 83.94226 (1963).

[48] O. Lichtenstein and A. Pnueli. "Propositional Temporal Logics: Decidability and Completeness". In: *Log. J. IGPL* 8.1 (2000), pp. 55–85.

[49] N. Belnap M. Xu and M. Perloff. *Facing the Future: Agents and Choices in Our Indeterminist World*. Oxford University Press USA, 2001.

[50] Z. Manna and A. Pnueli. "Verification of Concurrent Programs: Temporal Proof Principles". In: *Logics of Programs, Workshop, Yorktown Heights, New York, USA, May 1981*. 1981, pp. 200–252.

[51] E. Marchioni and L. Godo. "A Logic for Reasoning About Coherent Conditional Probability: A Modal Fuzzy Logic Approach". In: *Logics in Artificial Intelligence, 9th European Conference, JELIA 2004, Lisbon, Portugal, September 27-30, 2004, Proceedings*. Ed. by José Júlio Alferes and João Alexandre Leite. Vol. 3229. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2004, pp. 213–225.

[52] B. Marinković et al. "A propositional linear time logic with time flow isomorphic to ω^2". In: *J. Applied Logic* 12.2 (2014), pp. 208–229.

[53] E. T. Mueller. *Commonsense Reasoning*. Morgan Kaufmann Publishers, 2010.

[54] Z Ognjanović, M. Rašković, and Z. Marković. *Probability logics. Probability-Based Formalization of Uncertain Reasoning.* Cham, Switzerland: Springer, 2016.

[55] Z. Ognjanović. "Completeness theorem for a first-order probability logics". In: *Publications de L'institut Mathématique, Nouvelle serie* 69.83 (2001), pp. 1–7.

[56] Z. Ognjanović. "Discrete Linear-time Probabilistic Logics: Completeness, Decidability and Complexity". In: *J. Log. Comput.* 16.2 (2006), pp. 257–285.

[57] A. Prior. *Time and Modality.* Oxford University Press, 1957.

[58] R. Reiter. *Knowledge in Action. Logical Foundations for Specifying and Implementing Dynamical Systems.* MIT Press, 2001.

[59] M. Reynolds. "A Faster Tableau for CTL". In: *Proceedings Fourth International Symposium on Games, Automata, Logics and Formal Verification, GandALF 2013, Borca di Cadore, Dolomites, Italy, 29-31th August 2013.* 2013, pp. 50–63.

[60] M. Reynolds. "An Axiomatization of Full Computation Tree Logic". In: *J. Symb. Log.* 66.3 (2001), pp. 1011–1057.

[61] M. Reynolds. "Towards a CTL* Tableau". In: *FSTTCS 2005: Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, 25th International Conference, Hyderabad, India, December 15-18, 2005, Proceedings.* 2005, pp. 384–395.

[62] C. Stirling. *Modal and Temporal Logic. Handbook of Logic in Computer Science.* Vol. 2. 1990, pp. 477–563.

[63] N.I. Styazhkin. *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano.* MIT Press, 1969.

[64] A. Tarski. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry.* Univ. of California, Press, Berkeley, 1951.

[65] K. Tentori et al. "Comparison of Confirmation Measures". In: *Cognition* 103.1 (2007), pp. 107–119.

[66] R. Turner. *Logics for artificial intelligence.* Ellis Horwood series in artificial intelligence. Ellis Horwood, 1984.

[67] M. J. Wooldridge. *Reasoning about rational agents.* Intelligent robots and autonomous agents. MIT Press, 2000.

[68] M. van Zee et al. "AGM Revision of Beliefs about Action and Time". In: *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence.* 2015.

[69] M. van Zee et al. "Intention as Commitment toward Time". In: *CoRR* abs/2004.08144 (2020).

Биографија аутора

Шејла Даутовић рођена је у Новом Пазару 12.5.1992. Основну школу „Јован Јовановић Змај” завршила је у Новом Пазару 2007. године, а „Гимназију” у Новом Пазару 2011. године. Као средњошколка била је полазник семинара астрономије у Истраживачкој станици Петница. Дипломирала је на Математичком факултету на Државном универзитету у Новом Пазару 2015. године са просечном оценом 9.83. Мастер рад под насловом *Идентификациони тополошки простори* одбранила је 2016. године на истом факултету. Исте године, 2016, уписује докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду. Добитница је стипендије Министарства просвете за изузетно надарене студенте, као и Доситејеве стипендије коју додељује Фонд за младе таленте Републике Србије. Од 2017. године запослена је на Математичком институту САНУ. Била је члан тима за прјекат „Репрезентације логичких структура и формалних језика и њихове примене у рачунарству”, док је тренутно члан тима пројекта „Напредне технике вештачке интелигенције за анализу и дизајн системских компоненти базираних на поузданој BlockChain технологији”. Своје радове је излагала на разним међународним конференцијама. Била је полазник већег броја школа за докторанте широм Европе.

До сада је објавила следеће радове.

1. Š.Dautović, M. Zekić, *Intuitionistic unprovability* , Matematički Vesnik 71, 1-2 (2019), 180-189.

2. Š.Dautović, D. Doder, *Probabilistiv Logic for Reasoning About Actions in Time*, Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty, 15th European Conference (ECSQARU) 2019, Belgrade, Serbia, September 18-20 2019, page: 385-396 Springer (2019).

3. Š.Dautović, D. Doder, Z. Ognjanović, *Reasoning About Degrees of Confirmation*, Logic and Argumentation - Third International Conference, (CLAR) 2020, Hangzhou, China, April 6-9, 2020, Proceedings: page: 80-95, Springer (2020).

4. Š.Dautović, D. Doder, Z. Ognjanović, *An Epistemic Probabilistic Logic with Conditional Probabilities*, Logics in Artificial Intelligence - 17th European Conference (JELIA) 2021, Virtual Event, May 17-20, 2021, Proceedings, 279-293, Springer (2021).

5. Š.Dautović, M. Zekić, *Fuzzy logic and enriched categories*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, volume 18, issue 3 , (2021). **Impact Factor (2020): 2.100**

6. Š.Dautović, D. Doder, Z. Ognjanović, *Logics for reasoning degrees of confirmation*, Journal of Logic and Computation, May 2021. **Impact Factor: 0.416**

7. Š.Dautović, *A Probabilistic Logic between LPP_1 and LPP_2*, Logica Universalis, 2022. **Impact Factor (2020): 0.385**

8. Š.Dautović, *Reasoning about degrees of confirmation with actions in time*, 32ND European Summer School in Logic, Language and Information, Student Session 2021.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ____

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, __________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Потписани/а _______________________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе свиј који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____