UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Marko Berar

INTERAKTIVNI ONLAJN NASTAVNI MATERIJALI O KONVERGENCIJI FUNKCIONALNIH NIZOVA KREIRANI KORIŠĆENJEM PROGRAMSKOG PAKETA GEOGEBRA

master rad

Beograd, 2022.

Mentor:

dr Miroslav Marić, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Miljan Knežević, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Marek Svetlik, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Naslov master rada: Interaktivni onlajn nastavni materijali o konvergenciji funkcionalnih nizova kreirani korišćenjem programskog paketa GeoGebra

Rezime:

Ključne reči: GeoGebra, funkcionalni nizovi, konvergencija

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Realni nizovi **3**

3 Funkcionlni nizovi **8**

3.1 Obična (tačka-po-tačka) konvergencija 9

3.2 Ravnomerna konvergencija 18

3.3 Neka funkcionalna svojstva granične funkcije 30

3.4 Zadaci za samostalni rad 36

4 Kreiranje i implementacija interaktivnih sadržaja korišćenjem programskog paketa GeoGebra **46**

4.1 Programski paket GeoGebra 46

4.2 Upotreba softvera i kreiranje interaktivnih primera 47

4.3 Generisanje GeoGebra apleta 58

4.4 Veb-sajt 61

5 Zaključak **71**

Bibliografija **73**

Glava 1

Uvod

Funkcionalni nizovi predstavljaju bitan deo kursa Analize 2 na Matematičkom fakultetu, odnosno kurseva matematike na višim godinama studija tehničkih i prirodno-matematičkih fakulteta. Budući da su osnov za izgradnju mnogih drugih, dosta apstraktnijih, matematičkih teorija, od velikog je značaja dobro usvojiti fundamentalne ideje ove oblasti. Od posebne važnosti je i odnos različitih vrsta konvergencije funkcionalnih nizova (na primer, konvergencije tačka-po-tačka i ravnomerne konvergencije). Ovaj rad ima za cilj da se osnovni pojmovi teorije funkcionalnih nizova, konkretno različite vrste konvergencije, predstave na što jednostavniji način, uz dosta primera. Rad je osmišljen delom i kao metodički priručnik za izvođenje nastave uvodnih pojmova ove oblasti, odnosno dodatak za studente u cilju lakšeg praćenja kursa i usvajanje osnovnih ideja pojma konvergencije funkcionalnih nizova kao uvod u apstraktnije oblasti. Značaj ove teme ogleda se u metodičkom doprinosu obrađivanju pomenute teorije upotrebom modernih edukativnih alata. Biće upotrebljen vizuelni pristup, sa više grafičkih prikaza nego što je to inače slučaj kada se ova tema obrađuje. Izlaganje će biti zasnovano na velikom broju autorskih interaktivnih dinamičkih apleta izrađenih pomoću softvera GeoGebra. Za potrebe rada kreiran je i veb sajt sa responzivnim dizajnom (optimizovan za upotrebu na desktop i laptop računarima, kao i tabletima). Sadrži kompletan materijal izložen u radu, mnoštvo interaktivnih primera u vidu GeoGebra apleta, kao i zadatke i vežbe za samostalni rad.

U poglavlju „Realni nizovi“ izložene su samo osnovne definicije i tvrđenja vezana za realne nizove. Nastojanje je bilo da se što sažetije predstave osnovne ideje, u prvom redu pitanje konvergencije, čije će se analogije korisititi u narednom poglavlju prilikom izlaganja centralne ideje ovog rada – konvergencije funkcionalnih nizova.

Budući da je tema rada sadržana u okviru kursa Analize 2, određen nivo predznanja je pretpostavljen, te je u kratkim crtama izložen samo neophodan materijal radi ostvarivanja prirodnog kontinuiteta gradiva pri prelasku sa realnih (brojevnih) na funkcionalne nizove. Definicije samog realnog (brojevnog) niza kao i granične vrednosti, prate i odgovarajući GeoGebra primeri u kojima je nešto detaljnije izložena suština pojma granične vrednosti i njenog odnosa sa pojmom epsilon okoline, budući da je to razmatranje ključno za kasnije razumevanje pojma konvergencije funkcionalnih nizova kao i suptilnih razlika između tipova konvergencije. Najviše sa ciljem da se sadržaj rada ne optereti suviše, uzimajući u obzir centralnu temu, stav i tvrđenje koje se odnosi na Košijev princip konvergencije, samo su navedeni, bez dokaza, dok teoremu 2, koja se odnosi na Košijev princip konvergencije za funkcionalne nizove, u trećem poglavlju, prati odgovarajući dokaz. Takođe, iz isth razloga nije razmatrano ni pitanje konvergencije Košijevih nizova u proizvoljnim metričkim prostorima, već samo u slučaju nizova u $\mathbf{R}$.

U poglavlju „Funkcionalni nizovi“ detaljno su obrađeni pojmovi obične (tačka-po-tačka) i ravnomerne konvergencije funkcionalnih nizova, uz obilje primera tj. autorskih interaktivnih GeoGebra apleta. Posebna pažnja usmerena je na razvijanje vizuelne predstave o pojmu funkcionalnog niza kao i manifestacije različitih tipova konvergencije i izgleda grafika odgovarajće granične funkcije. Poglavlje takođe sadrži i pregled nekih osnovnih funkcionalnih svojstava granične funkcije. Teoreme koje se odnose na funkcionalna svojstva familije funkcija (zamenu mesta limesa, neprekidnost, diferencijabilnost i integrabilnost granične funkcije), modifikovane su i prilagođene tako da se odnose funkcionalne nizove. Na kraju poglavlja nalaze se i rešeni zadaci za samostalni rad. Svaki zadatak, osim detaljnog rešenja, prati i odgovarajući grafički prikaz, realizovan kroz upotrebu odgovarajućeg GeoGebra apleta.

U poglavlju „Kreiranje i implementacija interaktivnih sadržaja korišćenjem programskog paketa GeoGebra“ detaljno je razmotren tehnički aspekt, odnosno način realizacije interaktivnih onlajn sadržaja, koji prati kreiranje odgovarajućih GeoGebra apleta, kao i njihovo postavljanje na autorski veb-sajt. Poglavlje sadrži i pregled osnovnih funkcionalnosti veb-sajta, kratak pregled veb-tehnologija korišćenih prilikom izrade, kao i pojednosti vezane za implementaciju matematičke notacije u veb-strane.

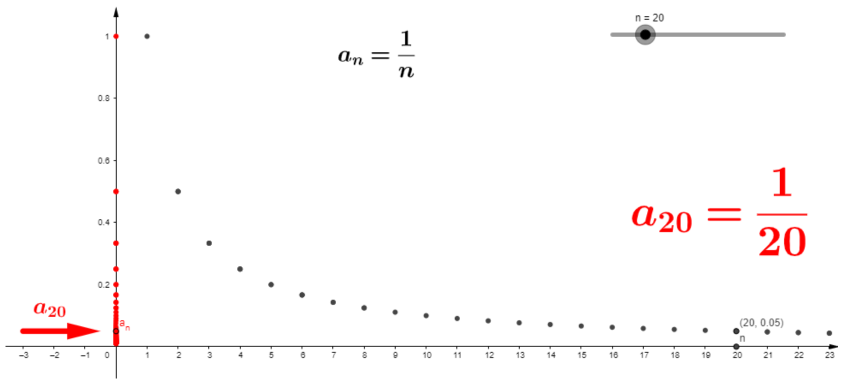
Glava 2

Realni nizovi

Pre razmatranja pojma funkcionalnih nizova, neophodno je prethodno razmotriti i poznavati osnovna svojstva nizova realnih brojeva tj. realnih (brojevnih) nizova. U daljem tekstu biće navedene samo osnovne definicije i tvrđenja (bez dokaza) neophodna za dalja izlaganja. Izvestan nivo predznanja je pretpostavljen.

Definicija 1. *Svaka funkcija* $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *koja preslikava skup prirodnih brojeva u skup realnih, predstavlja* ***niz realnih brojeva****.*
Vrednost $a(n)$ *funkcije* a *u tački* $n \in \mathbf{N}$ *označava se sa* a_n *i naziva* **n-*tim članom*** *tog niza, dok se sam taj niz označava sa* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$*, ili kraće* (a_n)*.*

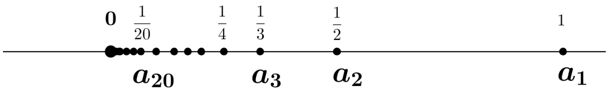
Primer 1. *Neka je* $(a_n) = (\frac{1}{n})$*, tada su članovi tog niza brojevi:* $a_1 = a(1) = \frac{1}{1}$, $a_2 = a(2) = \frac{1}{2}$, $a_3 = a(3) = \frac{1}{3}$, ..., $a_n = a(n) = \frac{1}{n}$, ...



Slika 2.1: Grafik niza $(a_n) = (\frac{1}{n})$

$\triangle$

Ključno u ovom razmatranju, što se često ispušta iz vida, jeste percepcija niza kao funkcije, sa domenom $\mathbf{N}$, koja svakom prirodnom broju dodeljuje realni. Njen grafik predstavlja skup tačaka u dvodimenzionalnom koordinatnom sistemu (Slika 2.1). Treba istaći da se u praksi najčešće koristi drugačija grafička interpretacija niza, pomoću brojevne prave, koja zapravo reprezentuje samo osu ordinate, odnosno osu vrednosti niza posmatranog kao funkciju jedne (prirodne) promenljive (Slika 2.2).



Slika 2.2: Niz $(a_n) = (\frac{1}{n})$ na brojevnoj pravi

Definicija 2. *Tačka $a \in \mathbf{R}$ je* ***limes***[1] *ili* ***granična vrednost*** *niza (a_n) realnih brojeva, u oznaci $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ako i samo ako*

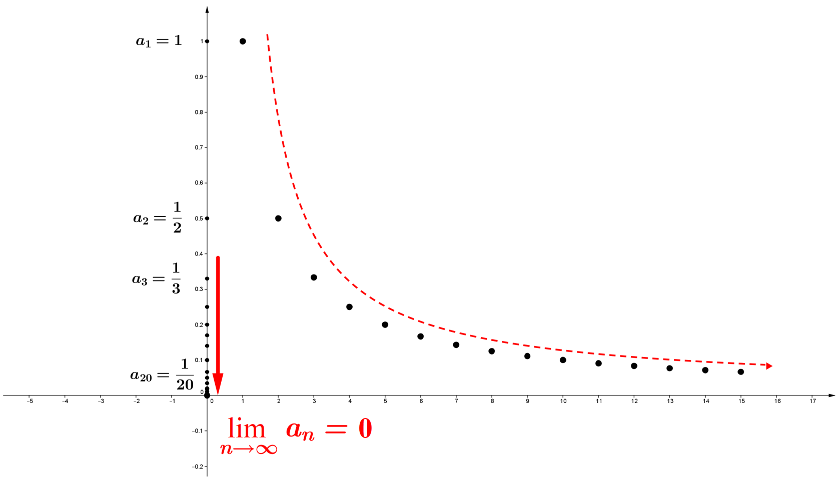
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Niz (a_n) je ***konvergentan*** *ako i samo ako postoji granična vrednost $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Tada se za niz (a_n) kaže da* ***teži ka*** *a* ***kad*** *n* ***teži*** *∞ i piše: $a_n \to a\,(n \to \infty)$. Niz je (a_n)* ***divergentan*** *ako nije konvergentan tj. ako ne postoji granična vrednost $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Specijalno, kažemo da niz (a_n)* ***divergira ka*** *$+\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako za svaki broj $K > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svako $n > n_0$ važi $a_n > K$. Analogno, kažemo da niz (a_n) divergira ka $-\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki broj $K < 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, takav da za svako $n > n_0$ važi $a_n < K$.*

Drugim rečima, tačka a je limes niza (a_n) ako i samo ako za svaki proizvoljno mali pozitivni broj ε postoji takav indeks n_0 niza a_n, počev od kog se svi elementi sa indeksom većim od n_0 nalaze na udaljenosti manjoj od ε od vrednosti a. Dakle, može se reći da se u proizvoljno maloj okolini tačke a nalazi **beskonačno mnogo** članova niza a van te okoline samo **konačno mnogo** tj. u ε-okolini tačke a nalaze se **skoro svi** članovi tog niza. Pritom, ključno je istaći da je tačka a limes niza realnih brojeva, **realan broj**.

[1] limes (lat.) - granica

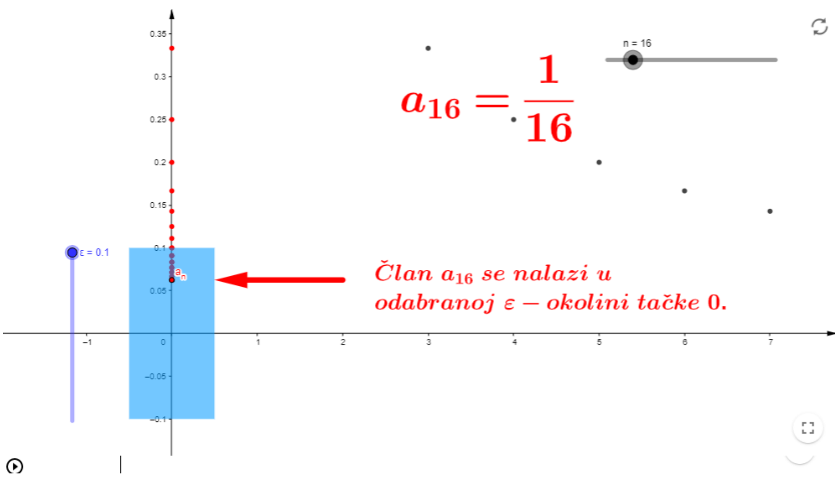
Primer 2. *Vrednosti niza $(a_n) = (\frac{1}{n})$, iz prethodnog primera, su (očigledno) sve manji pozitivni brojevi kako se indeks n povećava. Lako se može proveriti da je niz (a_n) konvergentan, a tačka $a = 0$ limes ovog niza kad n teži ∞.*



Slika 2.3: Granična vrednost niza $(a_n) = (\frac{1}{n})$

△

Primer 3. *Na slici 2.4 prikazan je GeoGebra aplet pomoću kog korisnik može menjati širinu ε-okoline tačke 0 i tako jasno videti od kog člana niza se svi naredni nalaze u toj okolini.*

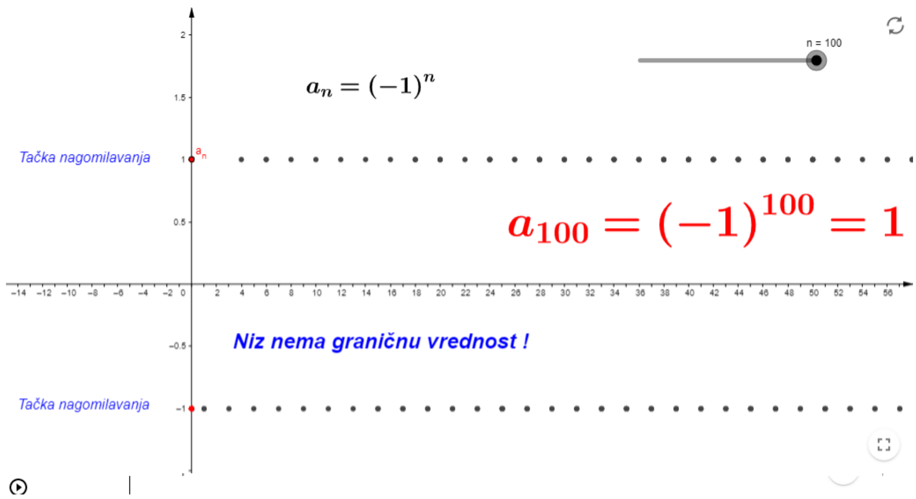


Slika 2.4: GeoGebra aplet sa promenljivom ε-okolinom

△

Primer 4. *Neka je dat niz sa opštim članom* $a_n = (-1)^n$*. Vrednosti ovog niza su isključivo brojevi* -1 *i* 1*, dakle niz ima dve tačke nagomilavanja. Takav niz nema graničnu vrednost tj. divergentan je, jer se beskonačno mnogo članova niza sadrži u okolinama obe tačke nagomilavanja. Samim tim, isključena je mogućnost da se van* ε*-okoline jedne tačke nalazi samo konačan broj članova.*

Na slici 2.5 vidi se GeoGebra aplet pomoću kog korisnik, pomerajući slajder promenljive n*, jasno može steći vizualnu predstavu o prethodno navedenom ponašanju niza.*



Slika 2.5: Divergentan niz

△

Definicija 3. *Niz* (a_n) *realnih brojeva je **Košijev**[2] ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji indeks* $n_0 \in \mathbf{N}$*, takav da je* $|a_m - a_n| < \varepsilon$ *čim su indeksi* m *i* n *veći od* n_0*. Dakle,* (a_n) *je Košijev ako i samo ako* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})$ $(m, n > n_0 \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$*. Opisno, moglo bi se reći da je niz* (a_n) *Košijev, ako su mu članovi sa dovoljno velikim indeksima proizvoljno blizu jedan drugom.*

Niz iz primera 2 je Košijev. Zaista, neka je za svako $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbf{N}$ takav indeks niza $(\frac{1}{n})$ da je $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Tada za sve $m, n > n_0$ važi

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

[2] A. L. Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

Na sličan način može se utvrditi da niz $a_n = (-1)^n$ iz primera 4 nije Košijev. Naime, pretpostavimo suprotno, neka je dati niz Košijev i neka je $\varepsilon = 1$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $m, n > n_0$ važi $\left|(-1)^m - (-1)^n\right| < \varepsilon$. Međutim, ako je na primer $m = n_0$ i $n = n_0 + 1$, onda je

$$\left|(-1)^m - (-1)^n\right| = \left|(-1)^{n_0} - (-1)^{n_0+1}\right| = \left|(-1)^n\right| \cdot \left|1 - (-1)\right| = 1 \cdot 2 > \varepsilon$$

čime je polazna pretpostavka opovrgnuta tj. niz nije Košijev.

Naredna tvrđenja biće navedena bez dokaza. Zaintersovani čitalac odgovarajuće dokaze može pronaći u [1] ili [2].

Stav 1. *Svaki konvergentan niz je Košijev.*

Teorema 1. *(*Košijev princip konvergencije*) Svaki Košijev niz u* $\mathbf{R}$ *je konvergentan.*

Treba istaći i da prethodno tvrđenje ne važi ako umesto skupa $\mathbf{R}$ razmatramo neki drugi skup. Na primer niz aproksimacija broja $\sqrt{2}$: $a_1 = 1.4$; $a_2 = 1.41$; $a_3 = 1.414$; $a_4 = 1.4142$; ... (n-ti član niza je broj $\sqrt{2}$ zaogrugljen na odgovarajući broj decimala) jeste Košijev niz racionalnih brojeva ali **nije i konvergentan u Q** (jer se njegova granična vrednost, broj $\sqrt{2}$, **ne nalazi u skupu Q**). Takođe, razmatrajući ponovo niz iz primera 2, ovoga puta na skupu $(0, 1]$, uočava se da on ne konvergira na tom skupu jer njegova granična vrednost 0, nije sadržana u skupu $(0, 1]$.

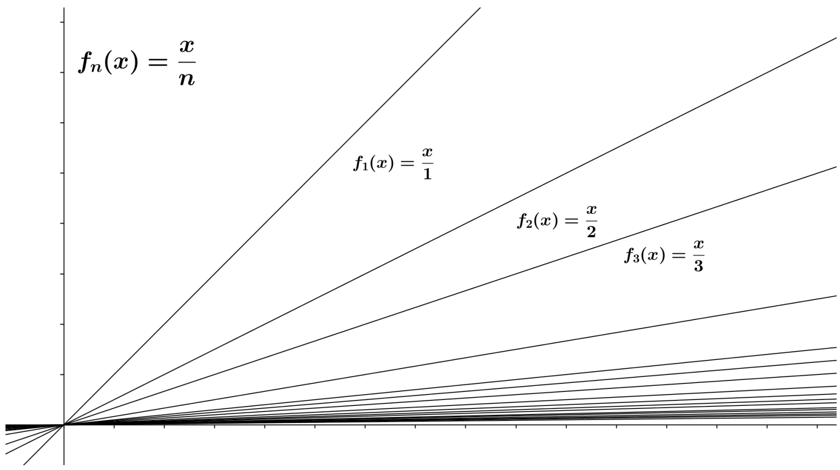
Glava 3

Funkcionlni nizovi

U prethodnom odeljku bilo je reči o nizovima čiji su članovi realni brojevi. Međutim, članovi niza mogu biti i elementi nekog drugog skupa, ne nužno brojevi.

Definicija 4. *Ako su članovi niza* ***realne funkcije*** $f_n : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, *tada je reč o* ***nizu realnih funkcija*** *odnosno o* ***funkcionalnom nizu*** (f_n). *Takav niz definiše se kao funkcija koja preslikava skup prirodnih brojeva u skup* ***realnih funkcija jedne promenljive****. Vrednosti takvog niza, odnosno njegovi članovi, su realne funkcije. Opšti član funkcionalnog niza obeležava se sa* f_n *ili sa* $f_n(x)$ *(ukoliko se želi naglasiti da je* f_n *funkcija promenljive* x*).*

Primer 5. *Neka je dat funkcionalni niz sa opštim članom* $f_n(x) = \frac{x}{n}$. *Tada su članovi tog niza funkcije:* $f_1(x) = \frac{x}{1} = x$, $f_2(x) = \frac{x}{2}$, $f_3(x) = \frac{x}{3}$, ..., $f_n(x) = \frac{x}{n}$, ...



Slika 3.1: Grafici članova niza $(f_n(x)) = (\frac{x}{n})$

△

3.1 Obična (tačka-po-tačka) konvergencija

Granična vrednost (konvergentnog) realnog niza je realni broj. Analogno, granična vrednost (konvergentnog) funkcionalnog niza je funkcija.

Definicija 5. *Neka je $D \subset \mathbf{R}$ i $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ niz realnih funkcija $f_n : D \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Niz $(f_n(x))$* ***konvergira*** *ka funkciji $f : D \to \mathbf{R}$ na D kad $n \to \infty$ ako za svako $x \in D$ važi*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Za niz $(f_n(x))$ još se kaže da konvergira ***u običnom smislu*** *odnosno* ***tačka-po-tačka*** *ka funkciji f i piše se $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ na D. Formalno:*

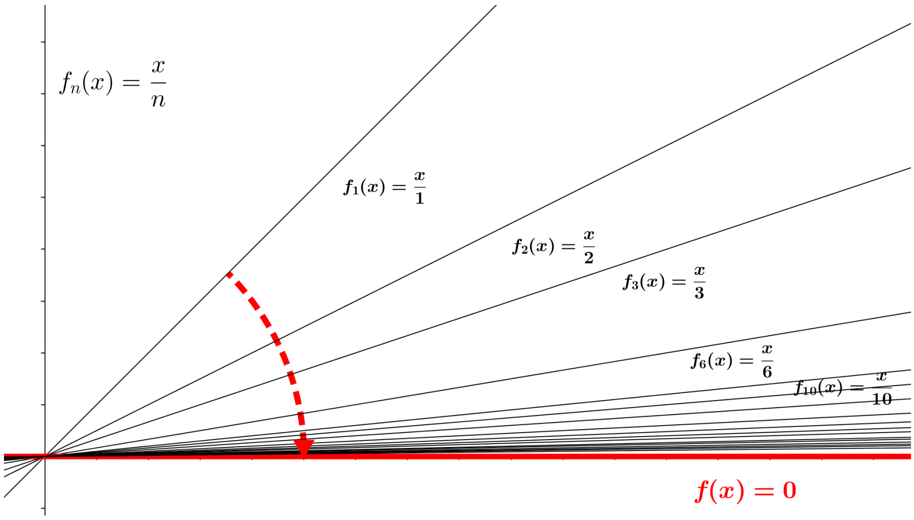
$$f_n(x) \to f(x)\,(n \to \infty)\,na\,D \Longleftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in D)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Drugim rečima, funkcija f je granična vrednost funkcionalnog niza $(f_n(x))$ ako za svaku **fiksiranu** vrednost promenljive x, npr. za $x = x_0$, **brojevni niz** $f_n(x_0)$ tj. **niz vrednosti funkcija** f_n **u tački** $x = x_0$, konvergira ka **vrednosti funkcije** f u istoj toj tački. Na taj način, obična konvergencija funkcionalnog niza svodi se na pitanje konvergencije realnih nizova.

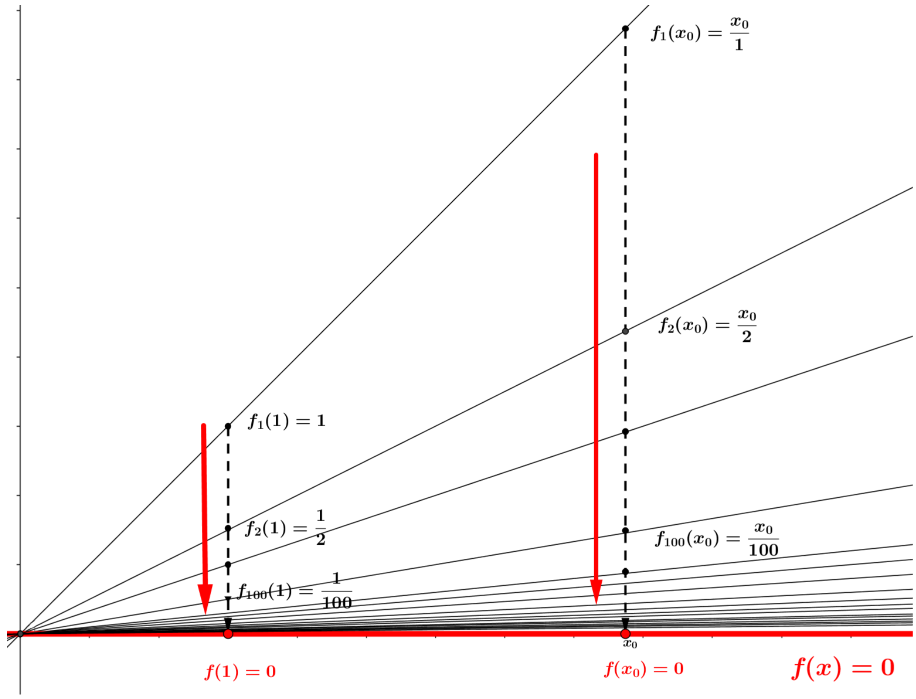
Primer 6. *Neka je dat funkcionalni niz sa opštim članom $f_n(x) = \frac{x}{n}$ iz prethodnog primera.*
Članovi tog niza su funkcije:
$f_1(x) = \frac{x}{1} = x$, $f_2(x) = \frac{x}{2}$, $f_3(x) = \frac{x}{3}$, ..., $f_n(x) = \frac{x}{n}$, ...

Niz $(f_n(x))$ konvergira u običnom smislu ka konstantnoj funkciji $f(x) = 0$ čija je vrednost jednaka nuli u svakoj tački domena (Slika 3.2).



Slika 3.2: Granična vrednost niza $(f_n(x)) = (\frac{x}{n})$

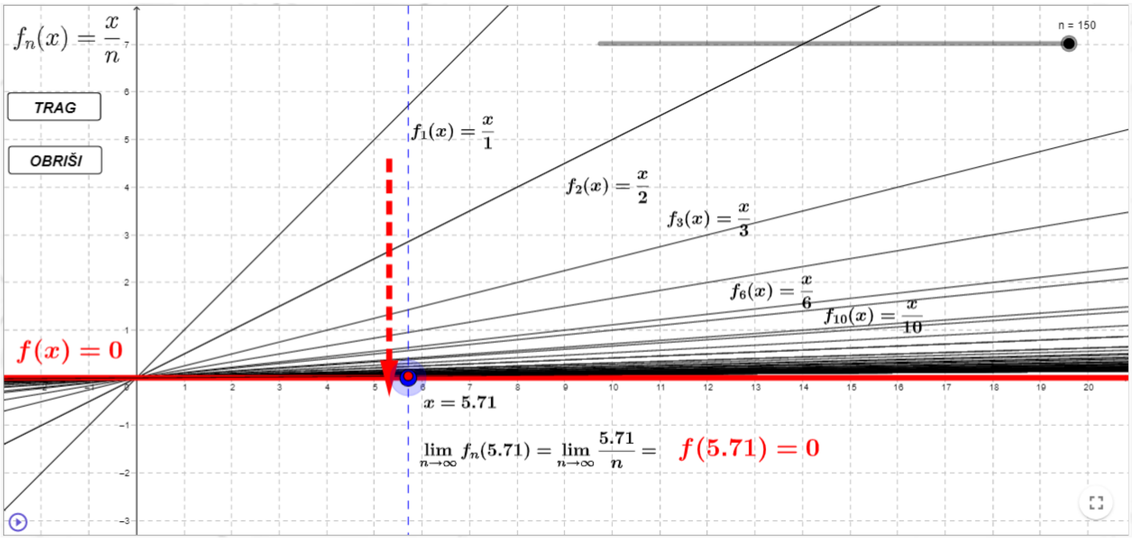
Razmotrimo ovaj primer detaljnije. Neka je $x = 1$ fiksirana vrednost promenljive x. Tada u tački $x = 1$ postoji niz vrednosti funkcija $f_1(1) = 1$, $f_2(1) = \frac{1}{2}$, $f_3(1) = \frac{1}{3}$, ..., $f_n(1) = \frac{1}{n}$, ...
Niz $(f_n(1))$ je realni niz, sa opštim članom $f_n(1) = \frac{1}{n}$, i kao takav, konvergira ka broju 0, što je ujedno i vrednost granične funkcije f u tački $x = 1$ tj. $f(1) = 0$.
Zapravo, za bilo koju fiksiranu vrednost $x = x_0$ imaćemo realni niz $(f_n(x_0))$ sa opštim članom $f_n(x_0) = \frac{x_0}{n}$. Kako je x_0 konstanta, jasno je da će svaki takav niz konvergirati ka vrednosti 0, što se opet poklapa sa vrednošću granične funkcije f u svakoj tački $x = x_0$ (Slika 3.3).



Slika 3.3: Konvergencija za fiksirane vrednosti promenljive

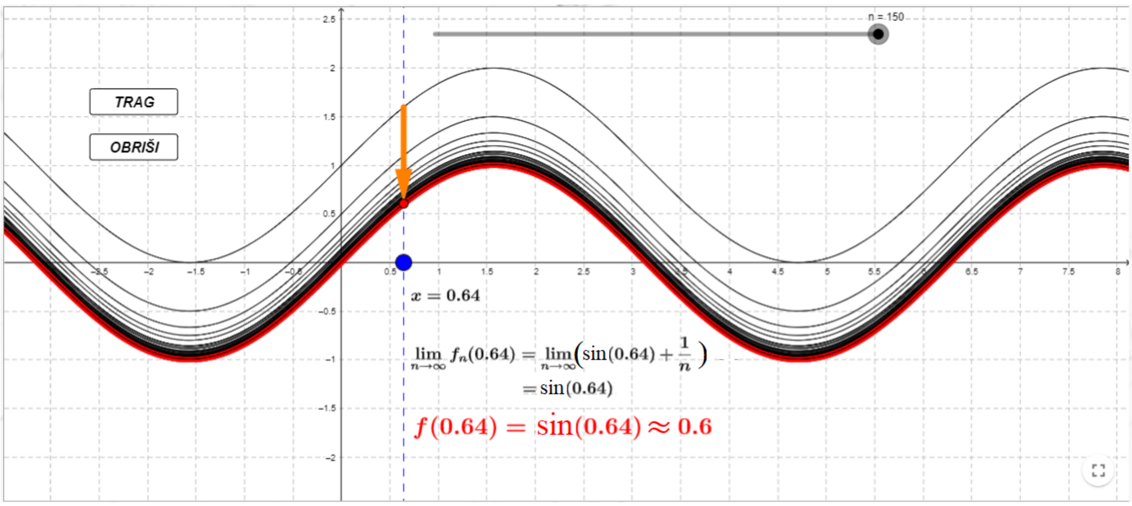
△

Primer 7. *Na slikama 3.4 i 3.5 vide se dva GeoGebra apleta, čijom upotrebom se korisnik može i sam uveriti u prethodno navedene zaključke. Prvi aplet se ponovo odnosi na isti funkcionalni niz iz ranijih primera ali ovoga puta korisnik ima apsolutnu slobodu u odabiru vrednosti promenljive x (tačku x je moguće pomerati mišem ili strelicama na tastaturi, nakon selektovanja). Pomeranjem slajdera n moguće je videti ponašanje prvih* 150 *članova funkcionalnog niza (slajder n moguće je pomerati na prethodno opisan način). Korisniku je na ekranu vidjiva vrednost konkretnog člana niza u posmatranoj tački (u svakom trenutku na ekranu) kao i limes niza tih vrednosti (kada slajder dodje do kraja). Dugme* ***TRAG*** *omogućava korisniku isticanja svih tačaka grafika koje odgovaraju vrednostima članova funkcionalnog niza u posmatranoj tački x (na taj način stiče se bolji vizualni doživalj niza). Dugme* ***OBRIŠI*** *vraća aplet u početni položaj i isključuje opciju* ***TRAG****.*



Slika 3.4: GeoGebra aplet (1) sa varijabilnom pozicijom tačke x

Drugi aplet funkcioniše po istom principu ali je zastupljen funkcionalni niz $f_n(x) = \sin x + \frac{1}{n}$ *odabran tako da granična vrednost ovoga puta ne bude konstantna funkcija* $f(x) = 0$.

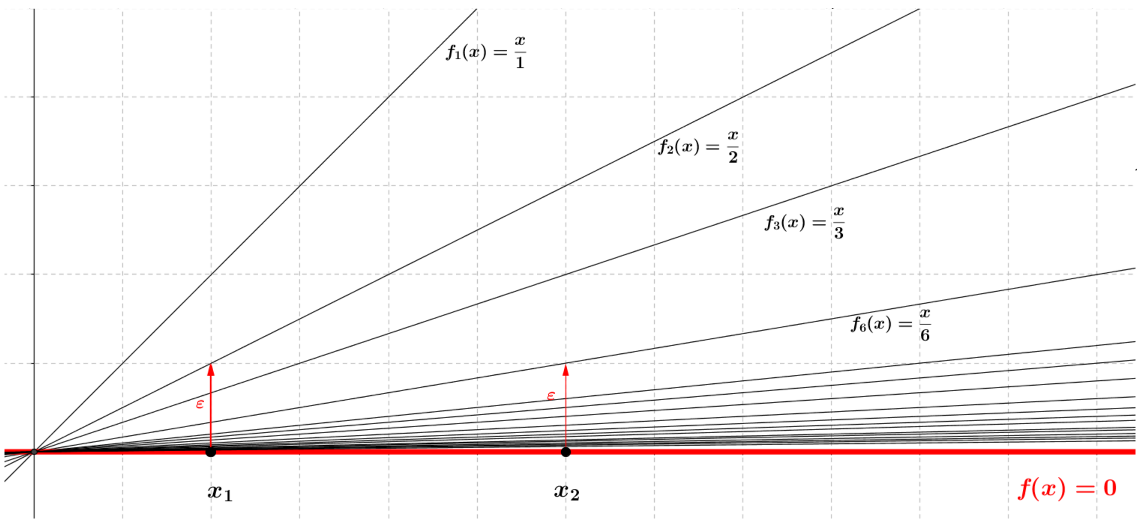


Slika 3.5: GeoGebra aplet (2) sa varijabilnom pozicijom tačke x

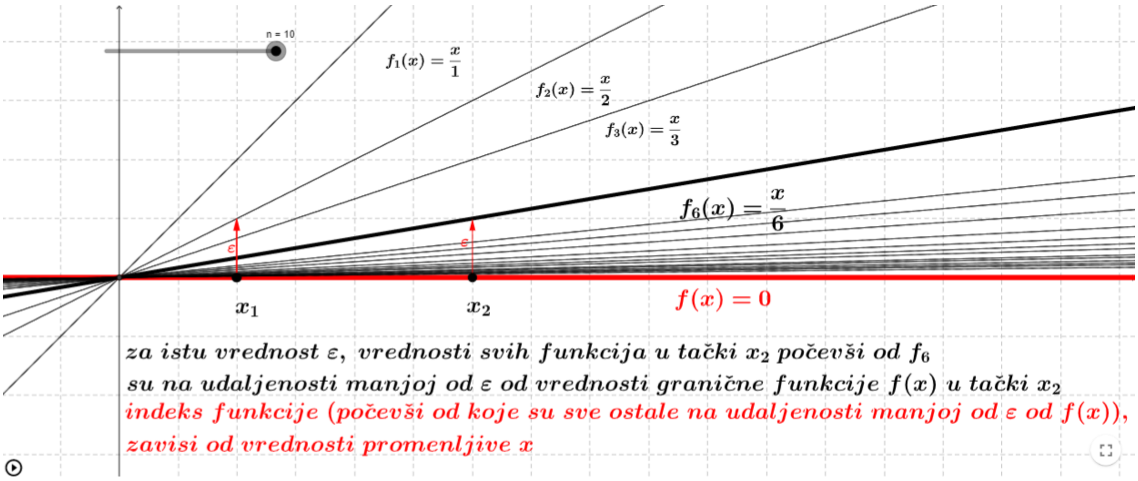
$\triangle$

Osvrnimo se sada i na formalnu definiciju. Dakle, niz $(f_n(x))$ konvergira tačka-po-tačka ka funkciji f na $D \subset \mathbf{R}$ ako i samo ako za proizvoljno mali pozitivan broj ε i za svaki realan broj x iz D, postoji takav indeks n_0 niza $(f_n(x))$, počev od kog je udaljenost vrednosti svih ostalih članova niza (tj. funkcija $f_n(x)$) sa indeksom većim od n_0 u tački x, na udaljenosti manjoj od ε od vrednosti granične funkcije f u tački x. Drugim rečima, za svaku vrednost promenljive x iz D postoji funkcija f_{n_0} počev od koje će se vrednosti svih narednih funkcija u tački x iz tog niza nalaziti u ε-okolini vrednosti granične funkcije f u tački x tj. unutar intervala $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ za proizvoljnu pozitivnu vrednost ε.

Primer 8. *Razmotrimo ponovo funkcionlni niz* $(f_n(x))$ *iz primera 6. Neka je* $\varepsilon = 1.01$*, tada za fiksirano* $x = x_1 = 2$*, vrednosti u tački* $x = 2$ *svih funkcija počev od indeksa* $n = 2$ *(tj. vrednosti* $f_i(2)$ *za* $i = 2, 3, \ldots, n, \ldots$*) se nalaze na udaljenosti manjoj od* 1.01 *od vrednosti granične funkcije* f *u tački* 2*.*
Neka je sada fiksirana vrednost promenljive $x = x_2 = 6$*, tada će se tek počev od indeksa* $n = 6$*, vrednosti svih funkcija u tački* $x = 6$ *nalaziti na udaljenosti manjoj od* 1.01 *od vrednosti granične funkcije* f *u tački* 6 *(Slika 3.6).*
Ključno je istaći da je ***za različite vrednosti promenljive*** x ***potrebno odabrati različite indekse*** n_0 *da bi važila definicija. Upravo zbog toga se i kaže da niz konvergira* ***tačka-po-tačka****.*



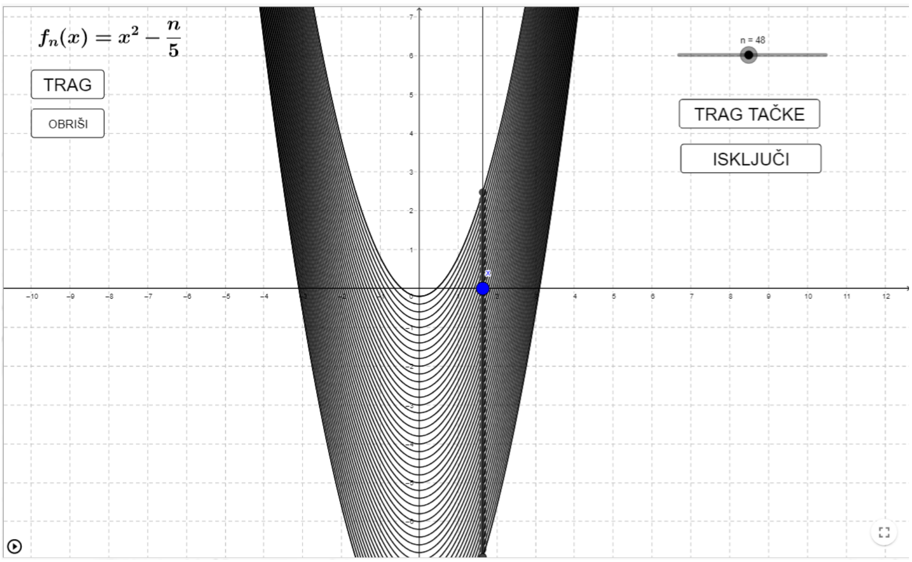
Slika 3.6: Konvergencija za različite vrednosti promenljive x



Slika 3.7: Konvergencija za različite vrednosti promenljive x

△

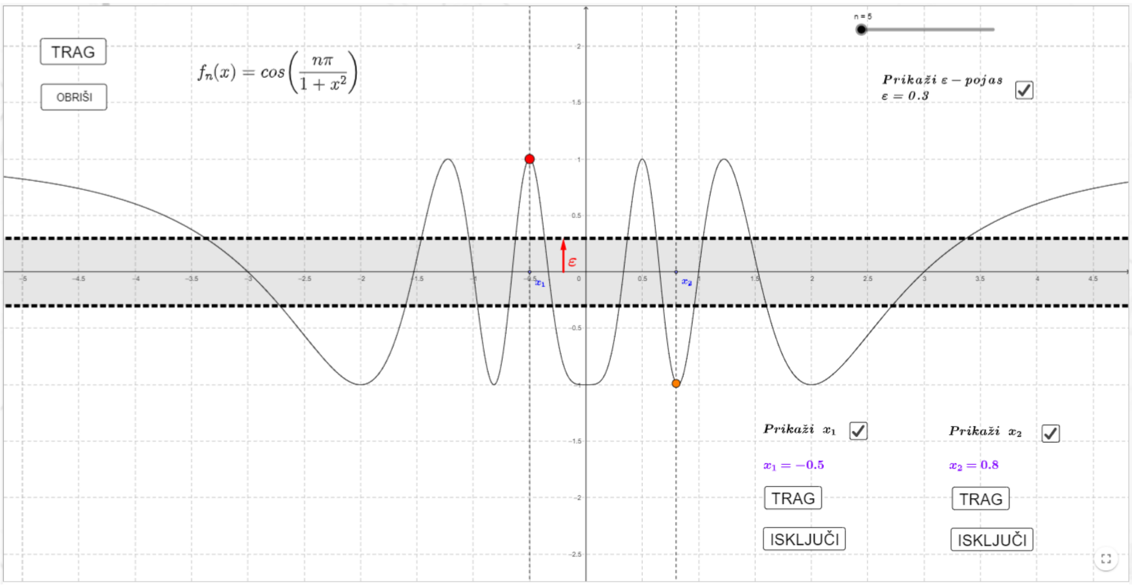
Primer 9. *U ovom primeru, ilustracije radi, biće predstavljen i jedan niz koji nema graničnu vrednost. Neka je dat niz* $f_n(x) = x^2 - \frac{n}{5}$*. Korisnik će, pomerajući slajder ili pokretajući animaciju (dugme u donjem levom uglu), koristeći opcije za prikazivanja traga tačke i funkcionalnog niza, uz mogućnost promene položaja tačke* x*, jasno videti da za svako* $x \in \mathbf{R}$ *vrednosti funkcija* $f_n(x)$ *teže ka* $-\infty$ *kad* $n \to \infty$.



Slika 3.8: Niz $f_n(x) = x^2 - \frac{n}{5}$

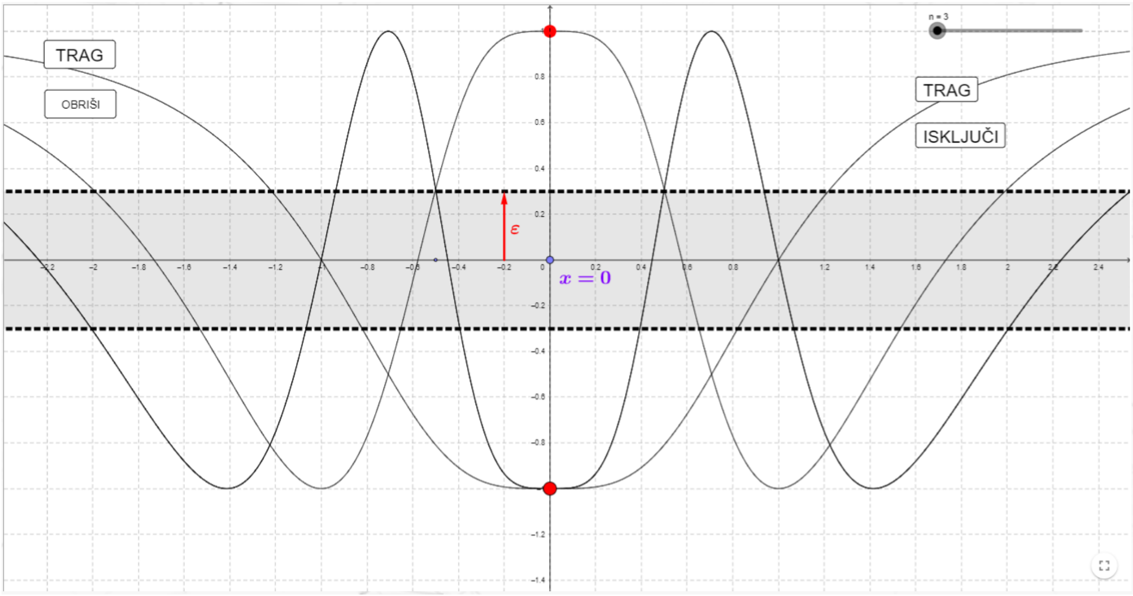
△

Primer 10. *Razmotrimo niz* $f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{1+x^2}\right)$ *na* $[-1, 1]$. *Za svako* $x \in [-1, 1]$ *vidimo da vrednosti funkcija* $f_n(x)$ *sve vreme osciliraju, dostižući vrednosti na* y *osi između* -1 *i* 1. *Prateći GeoGebra aplet (slika 3.9) prikazuje dve proizvoljno odabrane tačke* $x_1 = -0.5$ *i* $x_2 = 0.8$ *i promenu vrednosti niza funkcija u tim tačkama. Korisnik ima opciju prikaza* ε *pojasa za proizvoljno odabrano* ε *(za potrebe ovog primera* $\varepsilon = 0.3$*) kao i opciju prikaza jedne ili obe tačke* x_1 *i* x_2. *Takođe, klikom na odgovarajuće dugme, korisniku je vidljiv trag (jedne ili obe) tačke u odnosu na promenu vrednosti* n. *Jasno se vidi da vrednosti funkcija u datim tačkama konstanto ulaze i izlaze iz* ε *pojasa, te da niz očito divergira jer ni za jedno* $n \in \mathbf{N}$ *neće biti ispunjen uslov iz definicije 5.*



Slika 3.9: GeoGebra aplet koji prikazuje niz $f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{1+x^2}\right)$

Na drugom apletu (slika 3.10) ponovo je reč o istom nizu ali se ovog puta mogu videti promene vrednosti funkcija za $x = 0$. *Primećujemo da je* $f_n(0) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ *pa će takav niz imati samo dve vrednosti* -1 *i* 1 *koje su i njegove tačke nagomilavanja. Sada je i na ovaj način očigledno da niz* $f_n(x)$ *nema graničnu vrednost. Takođe, korisnik ovde može prepoznati realni niz iz primera 4 koji je korišćen upravo kao najčešći primer divergentnog niza.*



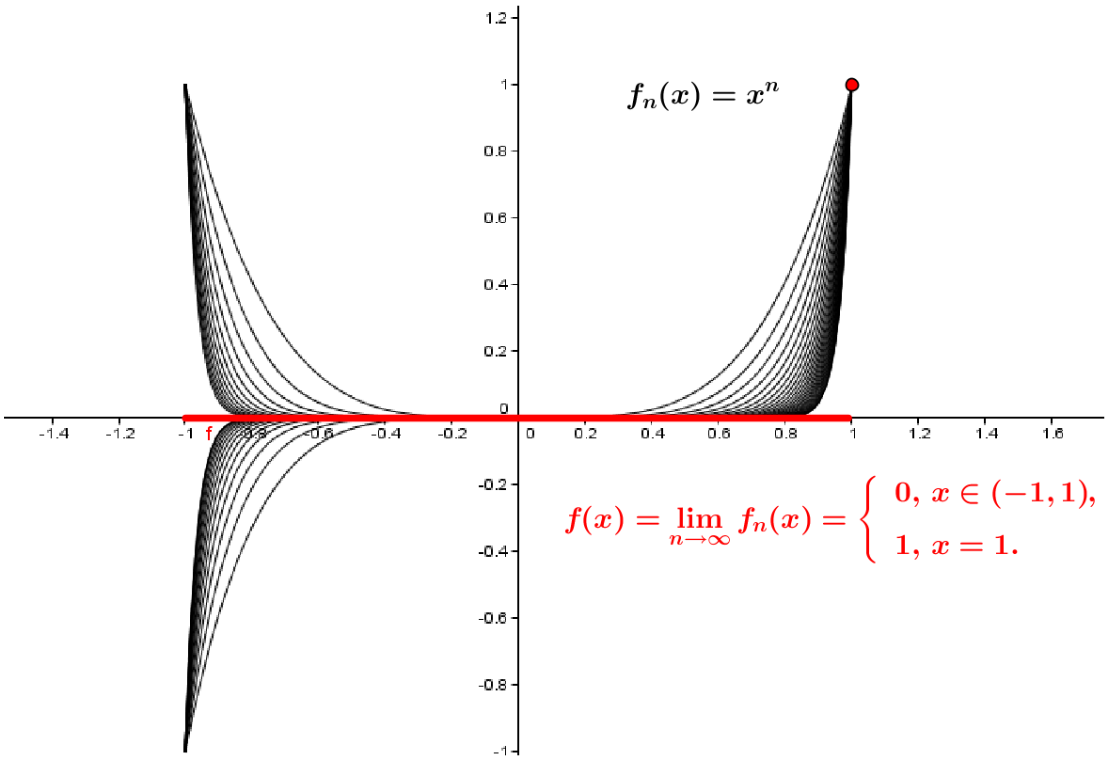
Slika 3.10: Vrednosti niza $f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{1+x^2}\right)$ za $x = 0$

△

Primer 11. *Neka je* $f_n(x) = x^n$ *opšti član funkcionalnog niza. Očigledno je da* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *postoji ako i samo ako* $x \in A = (-1, 1]$ *i da je*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \; x \in (-1,1), \\ \\ 1, \; x = 1. \end{cases}$$

Ovaj primer ilustruje situaciju kada su sve funkcije $f_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ *neprekidne (elementarne stepene funkcije sa prirodnim eksponentom), dok je granična vrednost niza* $(f_n(x))$ *prekidna funkcija (Slika 3.11).*



Slika 3.11: Granična vrednost niza $f_n(x) = x^n$

$\triangle$

3.2 Ravnomerna konvergencija

Definicija 6. *Neka je $D \subset \mathbf{R}$ i $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz realnih funkcija $f_n : D \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Niz $(f_n(x))$* ***ravnomerno (uniformno) konvergira*** *ka funkciji $f : D \to \mathbf{R}$ na D kad $n \to \infty$ ako važi*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall x \in D)(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

U tom slučaju piše se $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ na D ili samo $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ na D.

Dakle, niz $(f_n(x))$ ravnomerno konvergira ka funkciji f na D ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji indeks n_0 niza $(f_n(x))$, takav da za svaki realan broj x iz D važi da je udaljenost vrednosti svih narednih članova niza (tj. funkcija $f_n(x)$) sa indeksom većim od n_0 u tački x, na udaljenosti manjoj od ε od vrednosti granične funkcije f u tački x.

Razlika između obične i ravnomerne konvergencije

Ključna razlika između definicije ova dva pojma leži u suptilnoj zameni uslova u formulaciji dveju definicija.

$$\textit{Obična}: (\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in D)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$$\textit{Ravnomerna}: (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall x \in D)(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

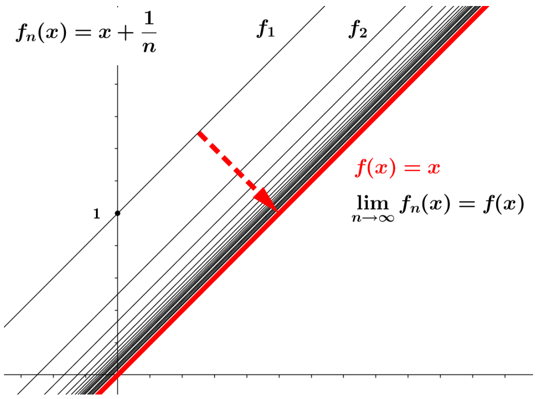
Izrazi $(\exists n_0 \in \mathbf{N})$ i $(\forall x \in D)$ menjaju mesta. Drugim rečima, raspored ovih izraza u definiciji obične konvergencije sugeriše da za svako **posebno odabrano** $x \in D$ **postoji neko** $n_0 \in \mathbf{N}$ **koje odgovara samo tom posebno odabranom** x, dok uslov u drugoj definiciji zahteva da **postoji neko** $n_0 \in \mathbf{N}$ **koje odgovara svim vrednostima promenjlive** x tj. koje je isto za sve vrednosti promenjive x na D. Dakle, indeks n_0 u prvoj definiciji pored toga što zavisi od ε zavisi i od promenljive x i mora joj se prilagođavati, dok u drugoj definiciji **ne zavisi** od x već samo od ε. Zapravo, ako niz ravnomerno konvergira ka f na D, za $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliko n, kompletni **grafici** svih funkcija (počev od indeksa n) tog niza nalaziće se **unutar** ε**-pojasa** $(f - \varepsilon,\ f + \varepsilon)$ (formalno $D \times (f - \varepsilon,\ f + \varepsilon)$). Treba istaći i činjenicu da izrazi $(\forall\varepsilon > 0)$ i $(\forall x \in D)$ u definiciji obične konvergencije mogu zameniti mesta.

Neposredna posledica definicije ravnomerne konvergencije je i implikacija

$$(f_n \rightrightarrows f) \Rightarrow (f_n \to f),\ (n \to \infty).$$

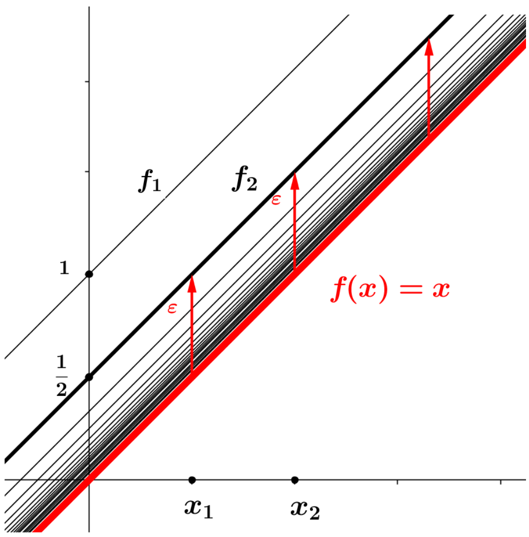
Ako niz $(f_n(x))$ konvergira ravnomerno ka f na D, **onda konvergira i tačka-po-tačka** ka f na D.

Primer 12. *Neka je* $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. *Tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x$.



Slika 3.12: Granična vrednost niza $(f_n(x))$

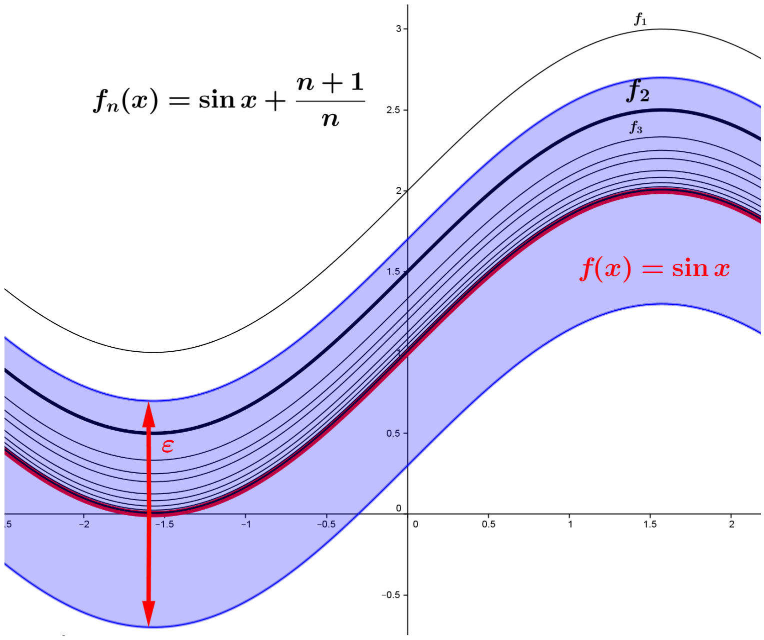
Neka je $\varepsilon = 0.5$, *tada će vrednosti svih funkcija iz* $f_n(x)$, *počevši od indeksa* $n = 2$ *nalaziti u intervalu* $(f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon)$ *za* ***sve vrednosti promenljive*** x. *Niz* $f_n(x)$ *konvergira ravnomerno ka funkciji* $f(x)$ *(Slika 3.13).*



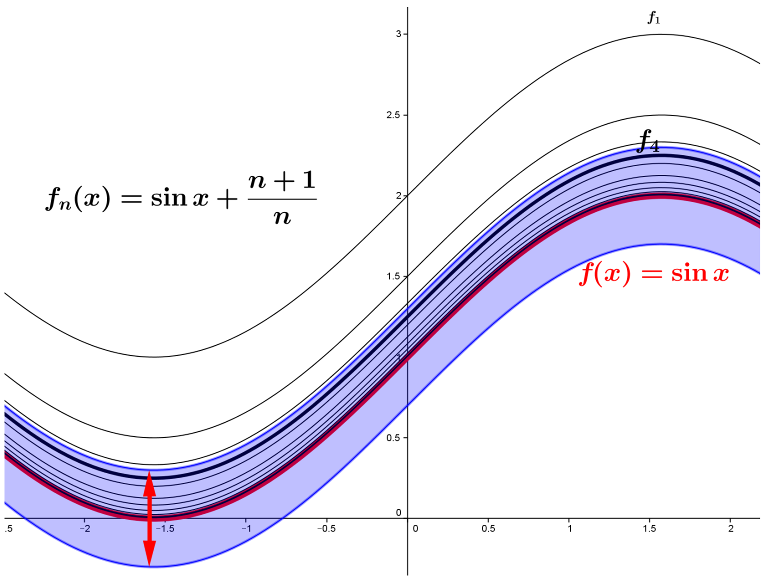
$\triangle$

Slika 3.13: Ravnomerna konvergencija

Primer 13. *Neka je* $f_n(x) = \sin x + \frac{n+1}{n}$. *Tada niz konvergira ravnomerno ka funkciji* $f(x) = \sin x + 1,\ x \in \mathbf{R}$.
Na slikama 3.14 i 3.15 vidi se promena indeksa n_0 *za različite vrednosti* ε *i kako se grafici svih funkcija* $f_n(x)$ *sa indeksom većim od* n_0 *nalaze u* ε*-pojasu* $\mathbf{R} \times (f-\varepsilon, f+\varepsilon)$.



Slika 3.14: ε-pojas za $\varepsilon = 0.7$

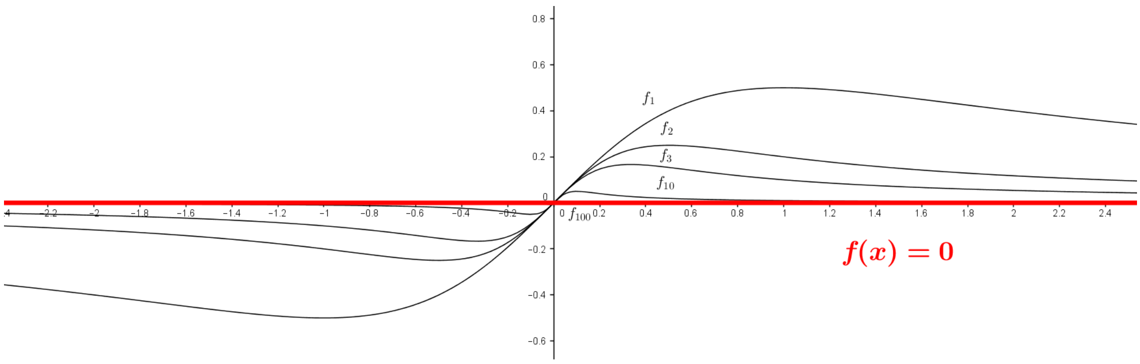


Slika 3.15: ε-pojas za $\varepsilon = 0.2$

$\triangle$

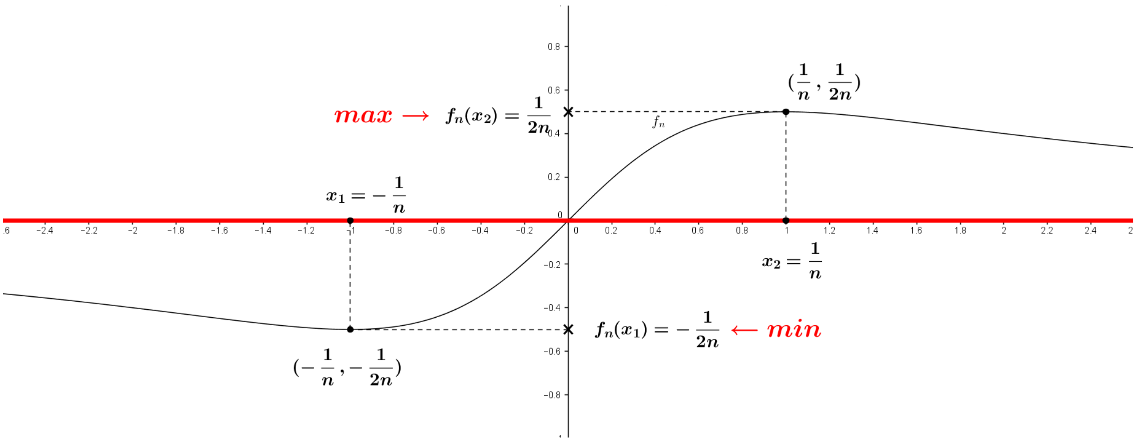
Primer 14. *Neka je* $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. *Tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ *za svako* $x \in \mathbf{R}$. *Pritom,* $|f_n(x)| = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}$ *za svako* $x \in \mathbf{R}$.
Kako bez obzira na vrednost broja ε, *važi* $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ *za dovoljno veliko* n, *sledi da će se grafici svih funkcija sa indeksima većim od* n *nalaziti unutar* ε*-pojasa* $\mathbf{R}\times(f-\varepsilon, f+\varepsilon)$ *tj. u ovom slučaju unutar* ε*-pojasa* $\mathbf{R}\times(-\varepsilon, \varepsilon)$, *pa je zaključak da niz* (f_n) *konvergira ravnomerno ka funkciji* $f(x) = 0$ *na* $\mathbf{R}$.

Na slici 3.16 vidi se prvih nekoliko članova niza f_n, *kao i granična funkcija* $f(x) = 0$.



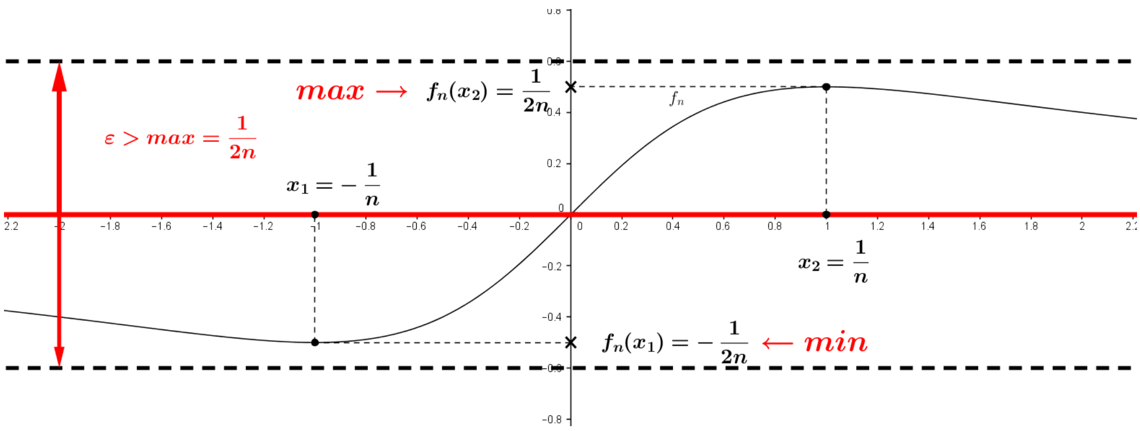
Slika 3.16: $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

Slika 3.17 ilustruje minimum i maksimum svake od pojedinačnih funkcija f_n *tj. njihovu ograničenosti vrednostima* $\pm\frac{1}{2n}$.



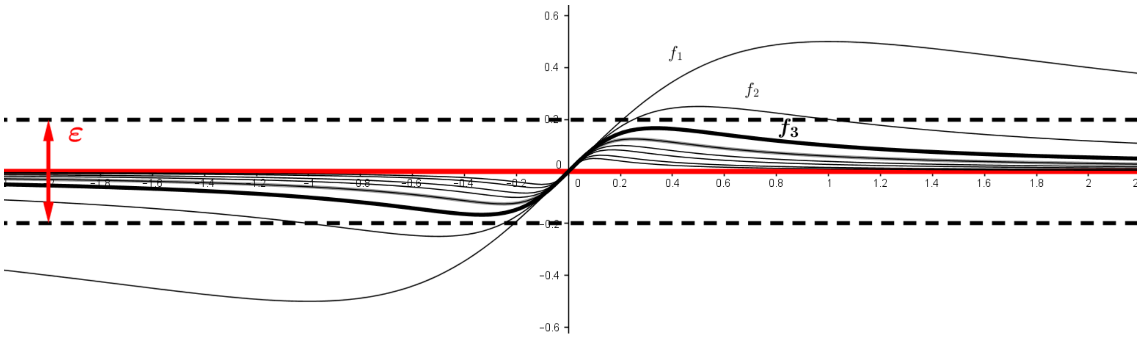
Slika 3.17: Ekstremne vrednosti funkcije f_n

Budući da niz f_n konvergira ka funkciji $f(x) = 0$, grafici svih funkcija sa indeksom većim od n nalaziće se unutar pojasa $\mathbf{R} \times (-\frac{1}{2n}, +\frac{1}{2n})$. Tada će za proizvoljno $\varepsilon > 0$ uvek postojati dovoljno veliko n takvo da se grafici svih funkcija sa indeksom većim od n nalaze unutar ε-pojasa $\mathbf{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, tako da niz zaista ravnomerno konvergira ka f na $\mathbf{R}$ (Slika 3.18).



Slika 3.18: Ograničenost funkcije $f_n(x)$ ε-pojasom $\mathbf{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

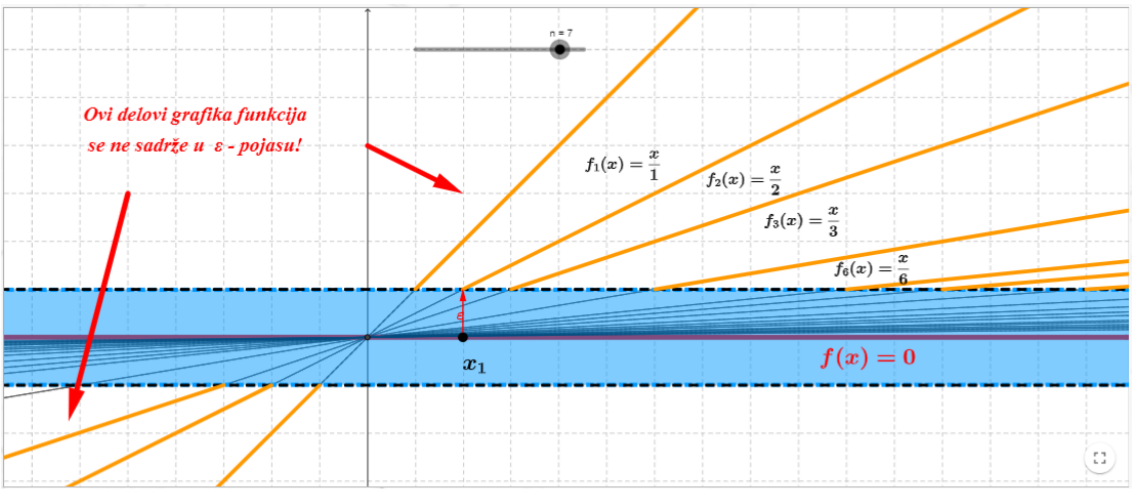
Na slici 3.19 vidi se da se za konkretno $\varepsilon = 0.2$ grafici svih funkcija počev od funkcije f_3 nalaze unutar ε-pojasa $\mathbf{R} \times (f - \varepsilon, f + \varepsilon)$ tj. (kako je $f(x) = 0$) unutar pojasa $\mathbf{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.



Slika 3.19: Ograničenost niza $(f_n(x))$ ε-pojasom $\mathbf{R} \times (-0.2, 0.2)$

$\triangle$

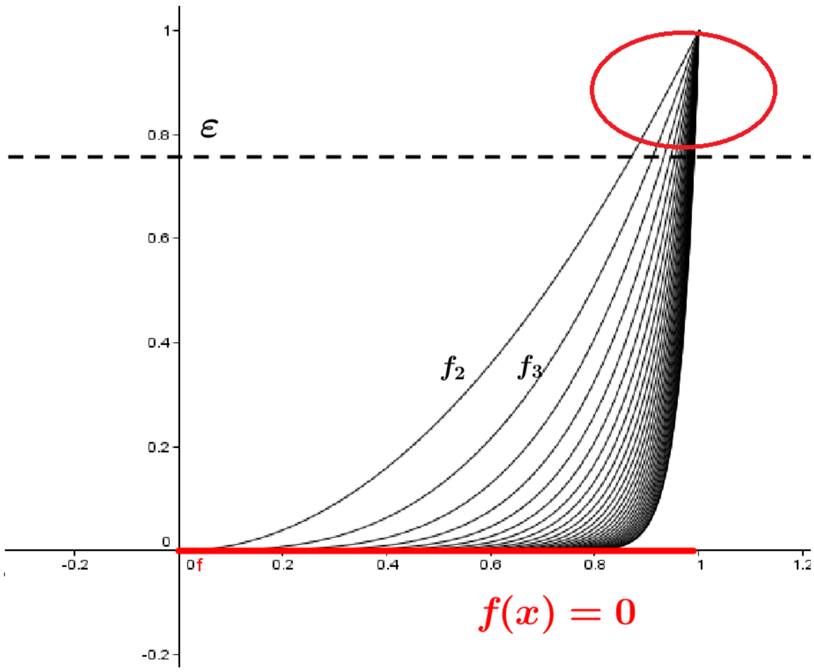
Primer 15. *Niz* $f_n = \frac{x}{n}$ *iz primera 6 očito ne konvergira ravnomerno jer za različite vrednosti promenljive* x*, različiti su indeksi funkcija članova niza, čije vrednosti zadovoljavaju uslov iz definicije 5. GeoGebra aplet prikazan na slici 3.20 ističe činjenicu se grafici funkcija* $f_n(x)$ *ni za jedno* $n \in \mathbf{N}$ *neće u celosti sadržati u proizvoljnoj* ε*-traci.*



Slika 3.20: članovi niza $f_n(x) = \frac{x}{n}$ i proizvoljni ε-pojas

$\triangle$

Primer 16. *U primeru 11, za* $x \in (0, 1)$*, ma koliko bilo veliko* n*, kriva* $y = x^n$ *će uvek imati deo (kad je* x *dovoljno blizu 1) koji će izlaziti izvan trake ograničene* x*-osom i pravom* $y = \varepsilon$ *pa niz* $f_n(x) = x^n$*, iako konvergira tačka-po-tačka, ne konvergira ravnomerno ka* $f(x)$ *na* $(0, 1)$ *(Slika 3.21).*



Slika 3.21: Konvergencija niza $f_n(x) = x^n$ za $x \in (0,\, 1)$

△

U nastavku biće navedena još jedna formulacija uslova ravnomerne konvergencije. Za dati niz $f_n(x)$ funkcija $f_n(x) : D \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ važi:

$$f_n(x) \to f(x)(n \to \infty)\, na\, D \Leftrightarrow (\forall x \in D) \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$
$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n \to \infty)\, na\, D \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

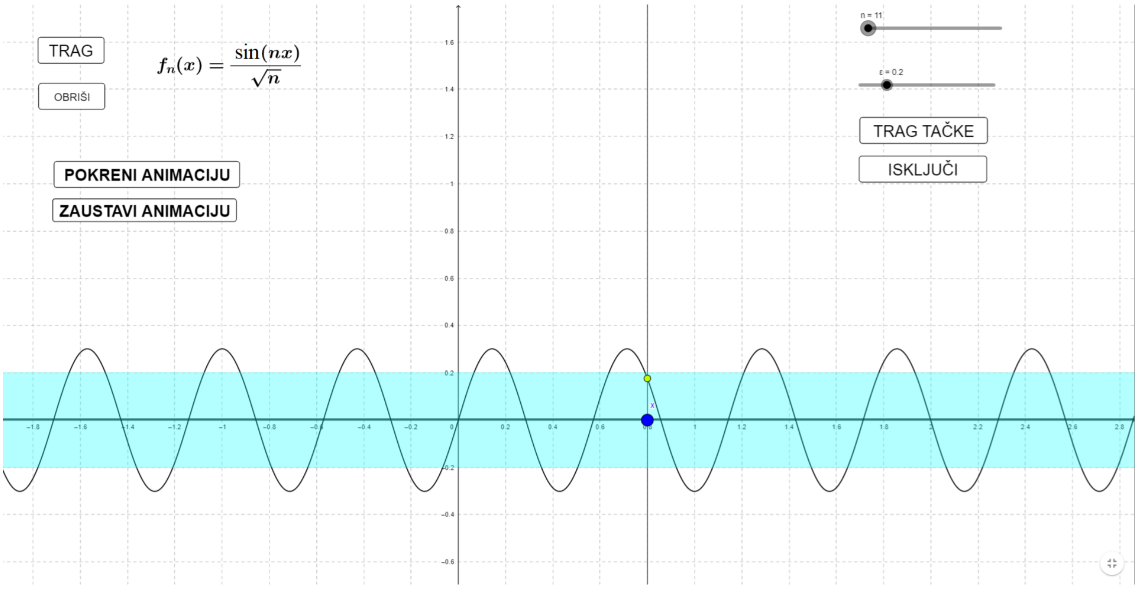
pa je i odatle jasno da $f_n \rightrightarrows f$ povlači $f_n \to f$, ali da obratno ne mora da važi.

Primer 17. *Neka je* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ *za* $n \in \mathbf{N}$ *i* $x \in \mathbf{R}$. *Za svako fiksirano* $x = x_0$ *biće* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin nx_0}{\sqrt{n}} = 0$ *(limes je jednak nuli kao proizvod nula-niza i ograničenog niza). Dakle niz* $f_n(x)$ *konvergira u običnom smislu ka graničnoj funkciji* $f(x) = 0$. *Uzimajući u obzir prethodno navedenu formulaciju biće*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Sada je evidentno da $f_n \rightrightarrows f$.

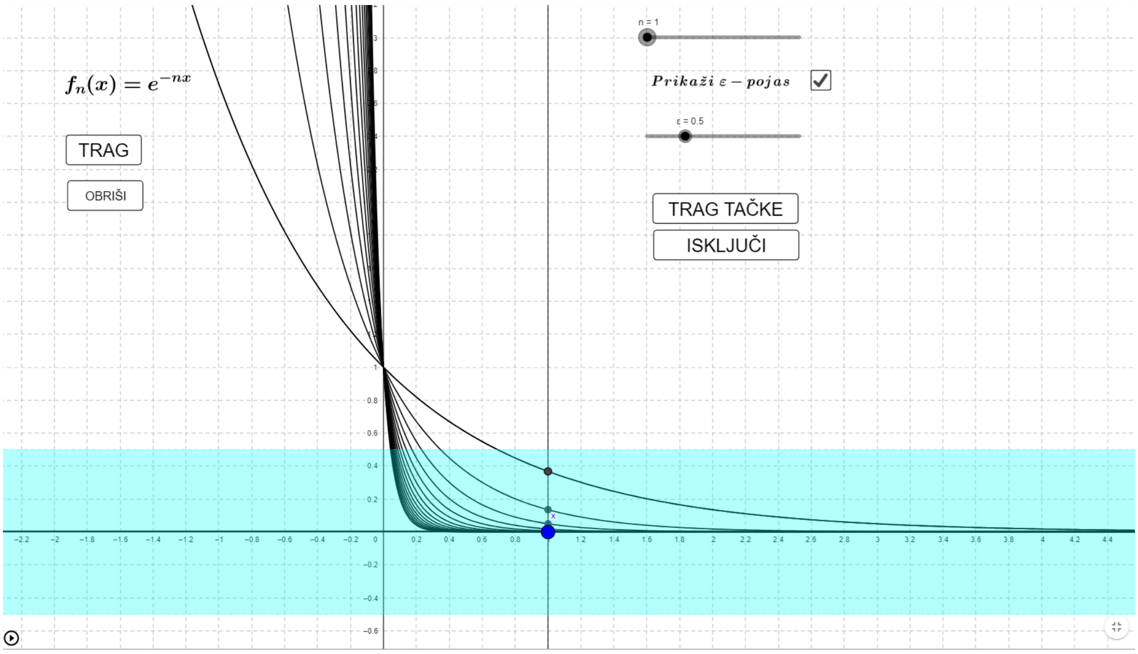
Koristeći funkcionalnosti apleta prikazanog na slici 3.22, korisnik može videti da se amplituda vrednosti funkcija za proizvoljnu poziciju tačke x smanjuje kada se n povećava i postepeno ulazi u proizvoljni ε pojas. Slično prethodnim apletima, korisnik ima mogućnost pomeranja tačke duž x ose, menjanja veličine ε pojasa, uključivanja vidljivosti traga tačke i funkcija kao i pokretanja animacije.



Slika 3.22: Niz $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

$\triangle$

Primer 18. *U ovom primeru ilustrovan je niz čiji se tip konvergencije menja u zavisnosti od izbora domena. Niz $f_n(x) = e^{-nx}$ (slika 3.23) konvergira tačka-po-tačka ka funkciji $f(x) = 0$ na $x \in (0, +\infty)$ kad $n \in \mathbf{N}$. Zaista, za svako fiksirano $x = x_0 \in (0, +\infty)$ biće $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-nx_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{e^{nx_0}} = 0$.*

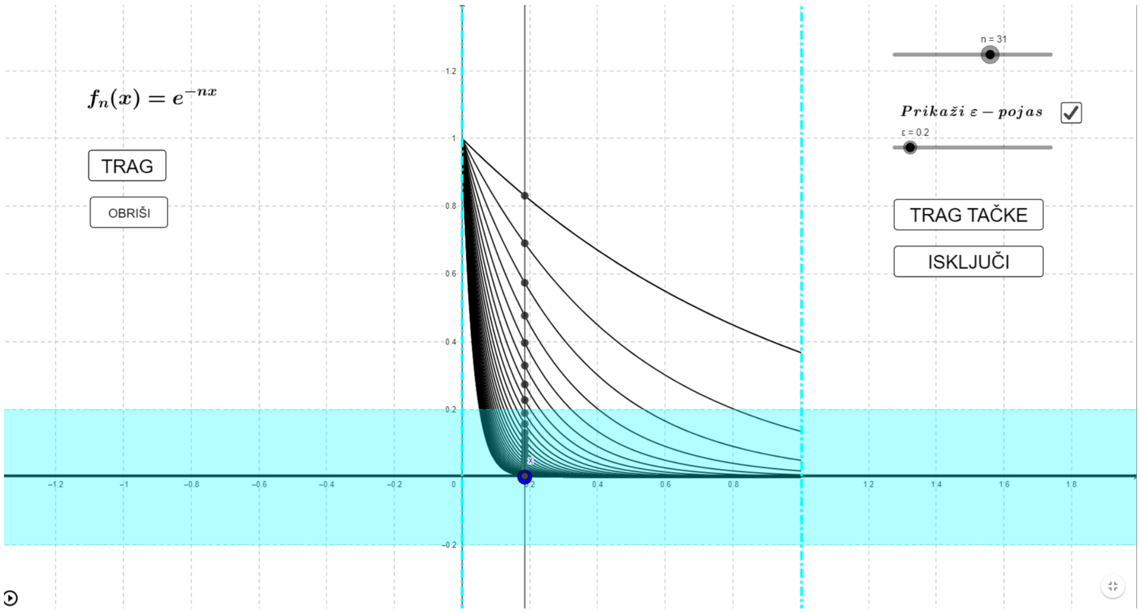


Slika 3.23: Niz $f_n(x) = e^{-nx}$

Ako posmatramo ponašanje niza na $(0, 1)$ *uočavamo da će za* $x = \frac{1}{n}$ *biti* $f_n(x) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e}$*, tako da svakako neće biti ispunjen uslov*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Dakle, niz ***ne konvergira ravnomerno*** *na* $(0, 1)$*. Ova situacija može se proveriti i grafički. Posmatrajući aplet na slici 3.24, gde se vide samo restrikcije funkcija (članova niza* (f_n)*) na* $(0, 1)$*, može se primetiti da se njihovi grafici neće u potpunosti sadržati u proizvoljnom* ε*-pojasu počev od nekog dovoljno velikog* $n \in \mathbf{N}$*.*

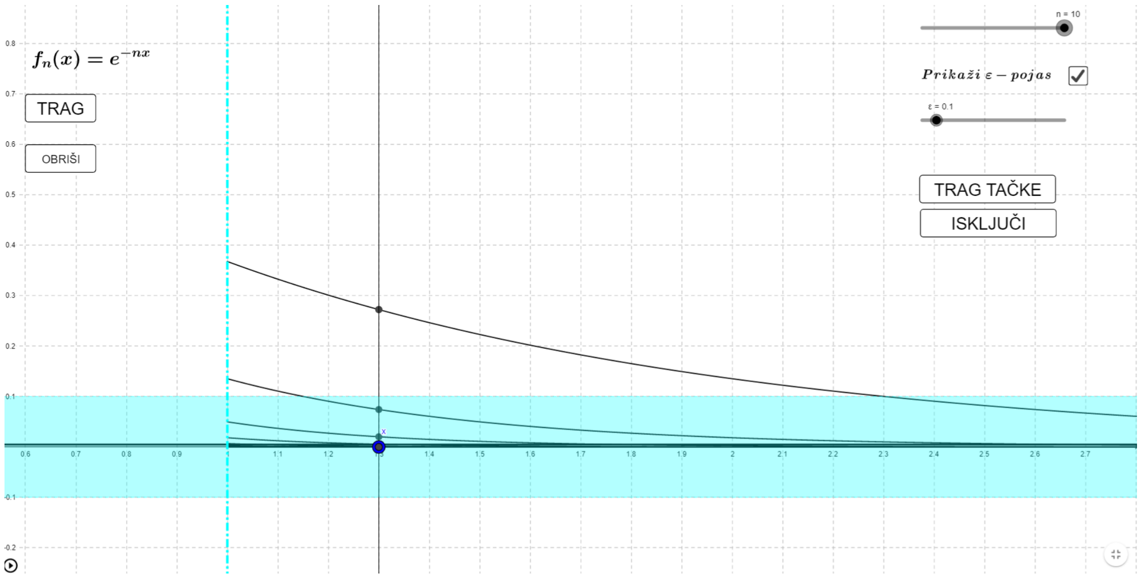


Slika 3.24: Konvergencija niza $f_n(x) = e^{-nx}$ za $x \in (0,\, 1)$

Međutim, ponašanje niza na $[1, +\infty)$ *je malo drugačije. Imamo*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} |e^{-nx}| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} \left|\frac{1}{e^{nx}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0.$$

Očigledno, niz $f_n(x)$ ***konvergira ravnomerno*** *na* $[1, +\infty)$*. To se može uočiti i na grafičkom prikazu na slici 3.25. Vrlo brzo, već posle nekoliko članova, grafici svih ostalih članova, tj. njihovih restrikcija na* $[1, +\infty)$*, u celosti će se sadržati u proizvoljno odabranom* ε*-pojasu.*



Slika 3.25: Konvergencija niza $f_n(x) = e^{-nx}$ za $x \in [1, +\infty)$

△

Košijev princip konvergencije

Kao i u slučaju realnih nizova, Košijev princip konvergencije funkcionalnih nizova omogućava da se o njihovoj ravnomernoj konvergenciji zaključuje na osnovu poznavanja osobina samih članova (realnih funkcija $f_n(x)$), ne nužno imajući informaciju o graničnoj funkciji $f(x)$.

Teorema 2. *(*Košijev princip konvergencije*) Funkcionalni niz $(f_n(x))$ realnih funkcija $f_n : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, ravnomerno konvergira na D kad $n \to \infty$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji indeks $n_0 \in \mathbf{N}$, takav da za svako $x \in D$ važi da je $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$ čim su indeksi n_1, n_2 veći od n_0. Dakle: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ na D ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n_1, n_2 \in \mathbf{N})(\forall x \in D)(n_1, n_2 > n_0 \Longrightarrow |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ na D. Za dato $\varepsilon > 0$ odaberimo indeks niza $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svako $x \in D$ i svako $n > n_0$ važi $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada će za proizvoljne $n_1, n_2 > n_0$ i za svako $x \in D$ važiti:

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| \leq |f_{n_1}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pa je uslov teoreme zadovoljen. Obratno, fiksiranjem $x \in D$, iz uslova teoreme, niz $f_n(x)$ posmatran kao funkcija od $n \in \mathbf{N}$, zadovoljava Košijev uslov (za realne nizove) za postojanje granične vrednosti $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Nejednakost $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, kao i u prethodnom slučaju, važi za svako $x \in D$ i svaki pogodno izabran par indeksa n_1, n_2. Kako je $\lim\limits_{n_2\to\infty} f_{n_2}(x) = f(x)$, biće $|f_{n_1}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ za svako $x \in D$, što povlači $(f_n \rightrightarrows f)$ $(n \to \infty)$ na D. $\square$

3.3 Neka funkcionalna svojstva granične funkcije

U ovom odeljku biće reči o ispitivanju nekih osobina same granične funkcije funkcionalnog niza, korišćenjem osobina opšteg člana tog niza. Biće razmatrani dovoljni uslovi pod kojim je moguća zamena poretka dva limesa, kao i uslovi koji garantuju neprekidnost granične funkcije. Takođe, naveden je i Dinijev stav koji se tiče specijalne situacije kada je ravnomerna konvergencija neophodan uslov neprekidnosti granične funkcije.

Zamena mesta limesa

Vratimo se ponovo na primer 11 gde je funkcionalni niz zadat opštim članom $f_n(x) = x^n$. Kao što je to ranije navedeno, taj niz konvergira u običnom smislu za $x \in (-1, 1]$ ka graničnoj funkciji:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \ x \in (-1,1), \\ \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$$

Pitanje neprekidnosti funkcije $f(x)$ u tački $x = 1$ se u stvari svodi na pitanje tačnosti jednakosti:

$$\lim_{x\to 1-0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-0} f_n(x).$$

Ovakva zamena mesta graničnih vrednosti u opštem slučaju nije moguća bez dodatnih pretpostavki. Naredna teorema definiše dovoljne uslove koji obezbeđuju takvu zamenu.

Teorema 3. *(*Zamena mesta limesa*) Neka je $(f_n(x))$ niz realnih funkcija $f_n : D \to$ $\mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ i $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka nagomilavanja skupa D. Ako*

1° $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ na D;

2° za svako $n \in \mathbf{N}$ postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = b_n$,

tada postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i važi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ tj.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Dokaz. Iz uslova 1°, na osnovu definicije 6 sledi da se za dato $\varepsilon > 0$ može odrediti indeks niza $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve indekse $n_1, n_2 > n_0$ i svako $x \in D$ važi $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$. Iz uslova 2° dobijamo da za sve $n_1, n_2 > n_0$ važi i $|b_{n_1} - b_{n_2}| \leq \varepsilon$. Dakle, niz brojeva (b_n) zadovoljava Košijev uslov za realne nizove (definicija 3 i teorema 1) za postojanje granične vrednosti $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Treba još dokazati da je i $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$. Za proizvoljno $n \in \mathbf{N}$ i $x \in D$ važi:

$$|f(x) - b| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|.$$

Svaki od sabiraka na desnoj strani može se učiniti proizvoljno malim. Na osnovu 1° može se odrediti takav indeks niza $n_0 \in \mathbf{N}$ počev od kog za svako $n > n_0$ i za svako $x \in \mathbf{R}$ važi $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Na osnovu $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, slično se može izvesti i za treći sabirak. Moguće je odrediti takav indeks $m_0 \in \mathbf{N}$ da za svako $n > m_0$ važi $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dalje, za proizvoljno $n > \max\{n_0, m_0\}$, na osnovu 2° , možemo odrediti okolinu W tačke x_0 takvu da je $|f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x \in W \cap D$. Za takve x je onda i $|f(x) - b| < \varepsilon$ pa važi $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$. □

Neprekidnost granične funkcije

Neposredna posledica prethodne teoreme je i sledeće važno tvrđenje koje se odnosi na pitanje neprekidnosti same granične funkcije.

Teorema 4. *(*Neprekidnost granične funkcije u tački*) Ako niz $(f_n(x))$ realnih funkcija $f_n : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ neprekidnih u tački $x_0 \in D$, ravnomerno konvergira na D kad $n \to \infty$ ka funkciji $f : D \to \mathbf{R}$, onda je sama funkcija f neprekidna u tački x_0.*

Dokaz. Kako je za svako $n \in \mathbf{N}$ funkcija $f_n : D \to \mathbf{R}$ neprekidna u $x_0 \in D$, sledi da je

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$$

za svako (fiksirano) $n \in \mathbf{N}$. Primetimo da je $f_n(x_0)$ realni niz. Prema teoremi o zameni mesta limesa sledi da postoje $\lim_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ i pri tome važi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$$

odnosno kako je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

dobijamo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dakle funkcija f je neprekidna u tački x_0. □

Posledica 1. *(*Neprekidnost granične funkcije na segmentu*)*

Ako niz $(f_n(x))$ *realnih funkcija* $f_n : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ *neprekidnih na* $[a, b] \subset D$, *ravnomerno konvergira na* $[a, b]$ *kad* $n \to \infty$ *ka funkciji* $f : D \to \mathbf{R}$, *onda je sama funkcija* f *neprekidna na* $[a, b]$.

Stav 2. *(*Dini[1]*)*

Neka je $D \subset \mathbf{R}$ *kompaktan (tj. zatvoren i ograničen) skup i neka je za svako* $x \in D$ *niz* $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ *monoton (po* n*) niz neprekidnih funkcija na* D. *Ako* $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ *na* D *i ako je* $f : D \to \mathbf{R}$ *neprekidna funkcija, tada* $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ *na* D.

Dokaz. Neka je, bez umanjenja opštosti, niz $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ rastući niz tj. pretpostavimo da počevši od nekog n za svako $x \in D$ važi $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Neka je $\varepsilon > 0$ dati realan broj. Za svako $x \in D$ moguće je naći indeks $n_x \in \mathbf{N}$, takav da važi $0 \leq f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon$. Funkcije f_n i f su neprekidne u tački x, pa će i nejednakost $0 \leq f(y) - f_{n_x}(y) < \varepsilon$ važiti za y iz neke okoline $U(x)$ tačke x. Takvu okolinu $U(x)$ možemo izabrati za svaku tačku $x \in D$ i dobijena familija $\{U(x) | x \in D\}$ čini pokrivač kompaktnog skupa D otvorenim skupovima $U(x)$. Kako je skup D kompaktan, može se izdvojiti konačno mnogo tačaka x_1, x_2, ... , $x_k \in D$, takvih da okoline $U(x_1)$, $U(x_2)$, ... , $U(x_k)$ same pokrivaju D. Neka je sada

$$n_0 = \max\{n_{x_1}, ..., n_{x_k}\}.$$

Tada će za $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$ važiti $0 \leq f(y) - f_n(y) < \varepsilon$ za sve $y \in D$ što znači da niz funkcija $f_n(y)$ ravnomerno konvergira ka funkciji $f(y)$ na D kad $(n \to \infty)$.

$\square$

Integracija i granični prelaz

Teorema 5. *(*Integrabilnost granične funkcije*) Neka su* $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$, $[a, b] \subset \mathbf{R}$, *integrabilne funkcije za svako* $n \in \mathbf{N}$. *Ako* $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ *na* $[a, b]$, *onda je i* f *integrabilna funkcija na* $[a, b]$ *i važi*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Dokaz. Prilikom dokaza integrabilnosti funkcije f biće korišćen kriterijum izložen u teoremi 8.1.1 iz [1].

[1] U. Dini (1845-1918), italijanski matematičar

Na osnovu ravnomerne konvergencije niza f_n, za dato $\varepsilon > 0$ može se odabrati takvo $n_0 \in \mathbf{N}$ da za svako $n > n_0$ i svako $x \in [a,b]$ važi

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{1}$$

Za svako takvo n, može se odabrati $\delta > 0$, tako da za Darbuove sume $S(f_n, P)$ i $s(f_n, P)$ funkcije f_n pri proizvoljnoj podeli P segmenta $[a,b]$ za koju je $\lambda(P) < \delta$ važi

$$S(f_n, P) - s(f_n, P) < \varepsilon. \tag{2}$$

Iz (1) sledi da je

$$s(f, P) \geq s(f_n, P) - \varepsilon \tag{3}$$

i

$$S(f, P) \leq S(f_n, P) + \varepsilon. \tag{4}$$

Zatim, proširujući obe strane nejednakosti (2) sa 2ε, na osnovu (3) i (4) sledi da je $S(f,P) - s(f,P) < 3\varepsilon$ za sve podele P za koje je $\lambda(P) < \delta$. Prema pomenutoj teoremi (8.1.1 iz [1]) funkcija f je integrabilna na $[a,b]$.
Na osnovu prethodnog biće

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon$$

odnosno

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

□

Diferenciranje i granični prelaz

Naredna teorema opisuje dovoljne uslove za diferencijabilnost kao i za određivanje izvoda granične funkcije. Treba istaći da u opštem slučaju pretpostavljena ravnomerna konvergencija funkcionalnog niza nije dovoljan uslov, iako to jeste bio slučaj u prethodnim situacijama kada je razmatrana neprekidnost i integrabilnost granične funkcije.

Teorema 6. *(*Diferencijabilnost granične funkcije*) Neka su $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$, $[a,b] \subset \mathbf{R}$, diferencijabilne funkcije za svako $n \in \mathbf{N}$. Ako*
1° niz (f_n) konvergira za neko $x_0 \in [a,b]$ kad $n \to \infty$;
2° niz izvodnih funkcija (f_n') konvergira ravnomerno na $[a,b]$ kad $n \to \infty$,
onda niz (f_n) takođe ravnomerno konvergira na $[a,b]$ ka nekoj diferencijabilnoj funkciji f i za svako $x \in [a,b]$ važi $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Dokaz. Prvi deo dokaza odnosi se na ravnomernu konvergenciju niza (f_n) na $[a,b]$. Za dato $\varepsilon > 0$, na osnovu 1°, može se odabrati takvo $n_0 \in \mathbf{N}$ da za sve $n_1, n_2 > n_0$ važi

$$\left|f_{n_1}(x_0) - f_{n_2}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Primenom teoreme o srednjoj vrednosti (teorema 6.6.2 iz [1]) na razliku funkcija $f_{n_1} - f_{n_2}$ na intervalu $[x_0, x]$ za proizvoljno $x \in [a,b]$, biće

$$\frac{(f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)) - (f_{n_1}(x_0) - f_{n_2}(x_0))}{x - x_0} = f'_{n_1}(c) - f'_{n_2}(c),$$

odnosno

$$\frac{f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x_0) + f_{n_2}(x_0)}{x - x_0} = f'_{n_1}(c) - f'_{n_2}(c), \tag{2}$$

za neko $c \in (x_0, x)$. Na osnovu 2°, pogodnim izborom indeksa n_0, može se postići da za sve $c \in [a,b]$ važi

$$\left|f'_{n_1}(c) - f'_{n_2}(c)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{3}$$

Tada iz (2) sledi

$$\left|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x_0) + f_{n_2}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon \cdot |x - x_0|}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Zatim, kako je

$$\left|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)\right| \leq \left|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x_0) + f_{n_2}(x_0)\right| + \left|f_{n_1}(x_0) - f_{n_2}(x_0)\right|$$

na osnovu (1) i (4) biće $\left|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)\right| < \varepsilon$ za svako $x \in [a,b]$ i sve $n_1, n_2 > n_0$, što znači da niz (f_n) ravnomerno konvergira na $[a,b]$ kad $n \to \infty$, ka nekoj funkciji $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, čime je prvi deo dokaza završen.

Neka je sada x proizvoljna tačka iz $[a,b]$ i neka je funkcija

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h},$$

definisana za one $h \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ za koje je $x+h \in [a,b]$. Očito je da je $\lim\limits_{h \to 0} \varphi_n(h) = f'_n(x)$. Potrebno je još dokazati i da niz (φ_n) ravnomerno konvergira po h kad $n \to \infty$ na pomenutom skupu. Primenom teoreme o srednjoj vrednosti na razliku funkcija $f_{n_1} - f_{n_2}$, ovoga puta na segmentu $[x, x+h]$, dobija se

$$\varphi_{n_1}(h) - \varphi_{n_2}(h) = \frac{f_{n_1}(x+h) - f_{n_1}(x)}{h} - \frac{f_{n_2}(x+h) - f_{n_2}(x)}{h} = f'_{n_1}(c) - f'_{n_2}(c)$$

za neko $c \in (x, x+h)$, pa iz (3) sledi

$$\left|\varphi_{n_1}(h) - \varphi_{n_2}(h)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

za proizvoljno, unapred zadato $\varepsilon > 0$ i sve $n_1, n_2 > n_0$.

Primenom teoreme 3 na niz $(\varphi_n(h))$ može se zaključiti da njena granična funkcija

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ima limes kad $h \to 0$ i da je on jednak $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{h\to 0} \varphi_n(h) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$. Dakle, funkcija f je diferencijabilna u tački x i važi

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

$\square$

Treba istaći značaj uslova 1° prethodne teoreme. Razmotrimo na prmer niz $f_n(x) = x+n$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}(x+n) = \infty$ tj. niz određeno divergira za svako $x \in \mathbf{R}$, niz očigledno ne konvergira ni za jedno $x \in \mathbf{R}$. Međutim niz izvodnih funkcija $f'_n(x) = 1$ ravnomerno konvergira (ka konstantoj funkciji $h(x) = 1$) na $\mathbf{R}$ kad $n \to \infty$. Očito je da zaključak teoreme ne važi jer niz $f_n(x) = x + n$ ne samo da ne konvergira ravnomerno, već kao što je ranije istaknuto, određeno divergira na $\mathbf{R}$ kad $n \to \infty$.

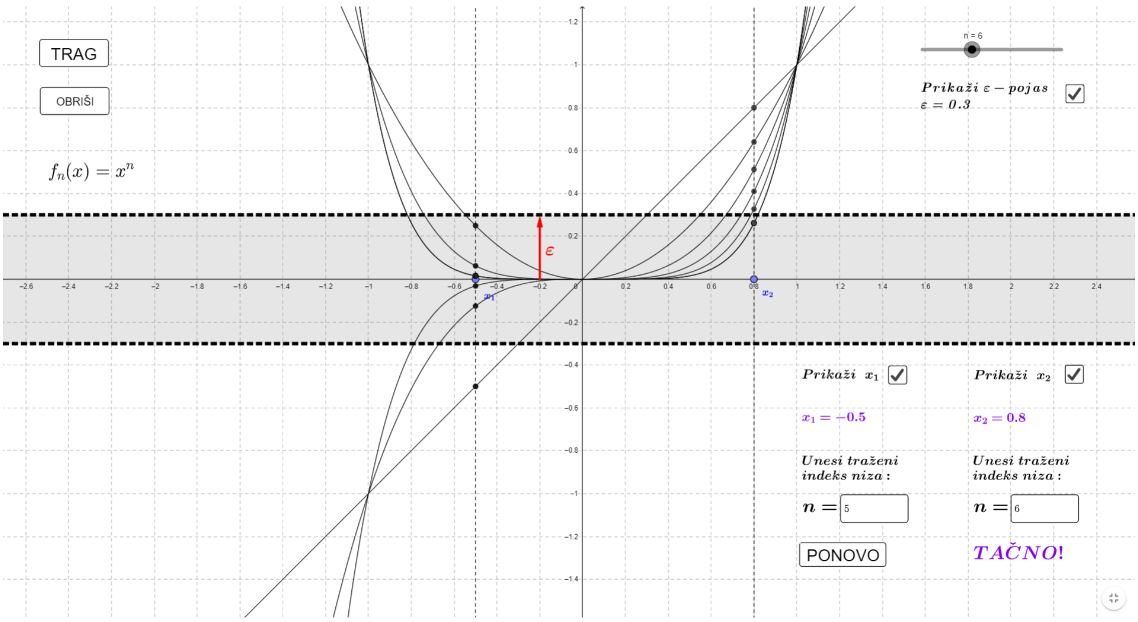
Sličan se zaključak može izveti i na primeru niza $f_n(x) = x + (-1)^n$. U ovom slučaju niz divergira za svako $x \in \mathbf{R}$ kad $n \to \infty$ (članovi ovog niza naizmenično su funkcije: $f_1(x) = x - 1$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = x + 1$, ...) dok niz izvodnih funkcija $f'_n(x) = 1$ takođe ravnomerno konvergira na $\mathbf{R}$ kad $n \to \infty$.

3.4 Zadaci za samostalni rad

U ovom odeljku nalazi se 10 zadataka predviđenih za samostalni rad. Svaki zadatak prati i odgovarajući interaktivni GeoGebra aplet (na veb platformi) koji korisnik može upotrebiti da stekne intuitivnu predstavu o rešenju zadatka. Klikom na dugme **REŠENJE** prikazuje se odgovarajuće analitičko rešenje zadatka.

Zadatak 1. *Neka je $\varepsilon > 0$ dati broj. Odredi najmanji indeks n niza $(f_n(x))$ počev od kog su svi ostali članovi tog niza na udaljenosti manjoj od ε u tački x_1 odnosno x_2.*

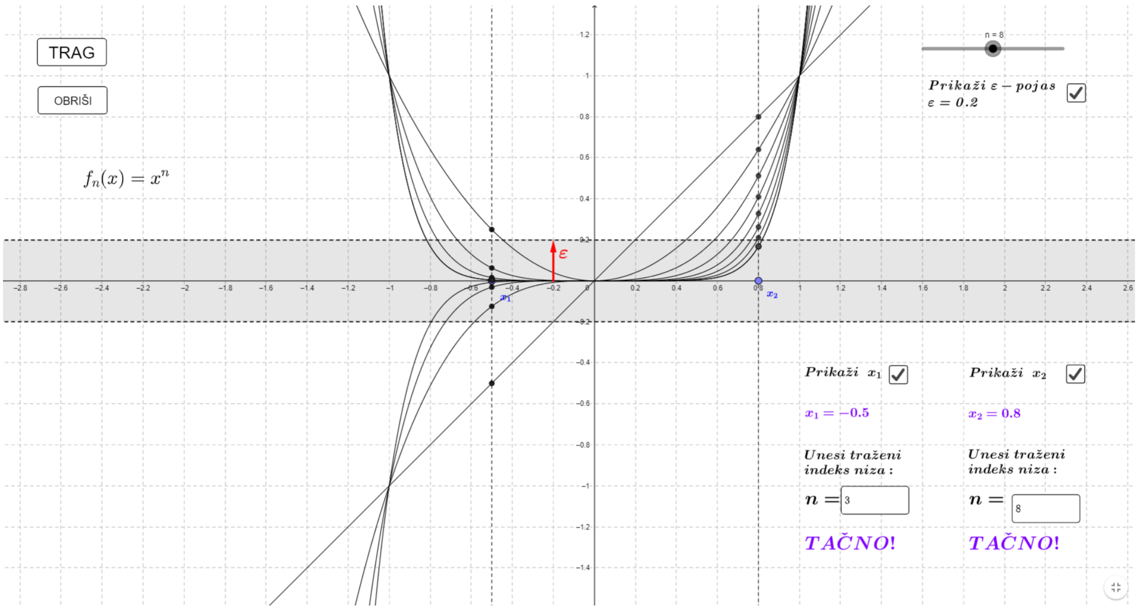
Odgovarajući GeoGebra aplet na veb platformi omogućava korisniku da unese vrednost za n koju smatra tačnom. U slučaju unete netačne vrednosti, prikazuje se dugme **PONOVO** čijim se pritiskom omogućava novi unos za promenljivu n. U slučaju tačnog odgovora, na ekranu se pojavljuje odgovarajuća informacija (slika 3.26).



Slika 3.26: Aplet koji prikazuje zadatak 1

Zadatak 2. *Neka je $\varepsilon > 0$ dati broj. Odredi najmanji indeks n niza $(f_n(x))$ počev od kog su svi ostali članovi tog niza na udaljenosti manjoj od ε u tački x_1 odnosno x_2. Na osnovu toga izvesti zaključak o konvergenciji datog niza.*

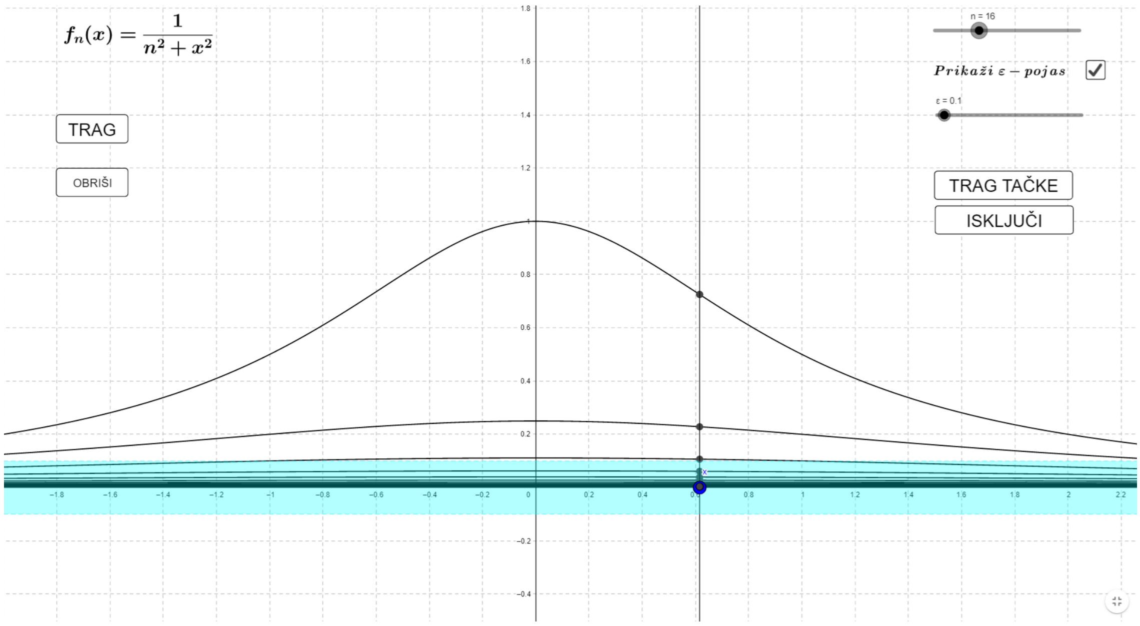
U ovom slučaju aplet funkcioniše na isti način ali je promenjena vrednost za ε. Na ovaj način korisnik može proveriti da li je zaista razumeo fundamentalne koncepte ove oblasti.



Slika 3.27: Aplet koji prikazuje zadatak 2

Zadaci koji slede predstavljaju klasične (računske) zadatke koji se mogu sresti na ispitima i kolokvijumima. Novina je ta, što je svaki zadatak propraćen odgovarajućim interaktivnim GeoGebra apletom. Na taj način podstiče se vizuelni pristup rešavanju problema, dublje razumevanje samog pojma (funkcionalnog niza) i omogućava formiranje inicijalne pretpostavke o graničnoj vrednosti odnosno vrsti konvergencije.

Zadatak 3. *Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza* $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$.



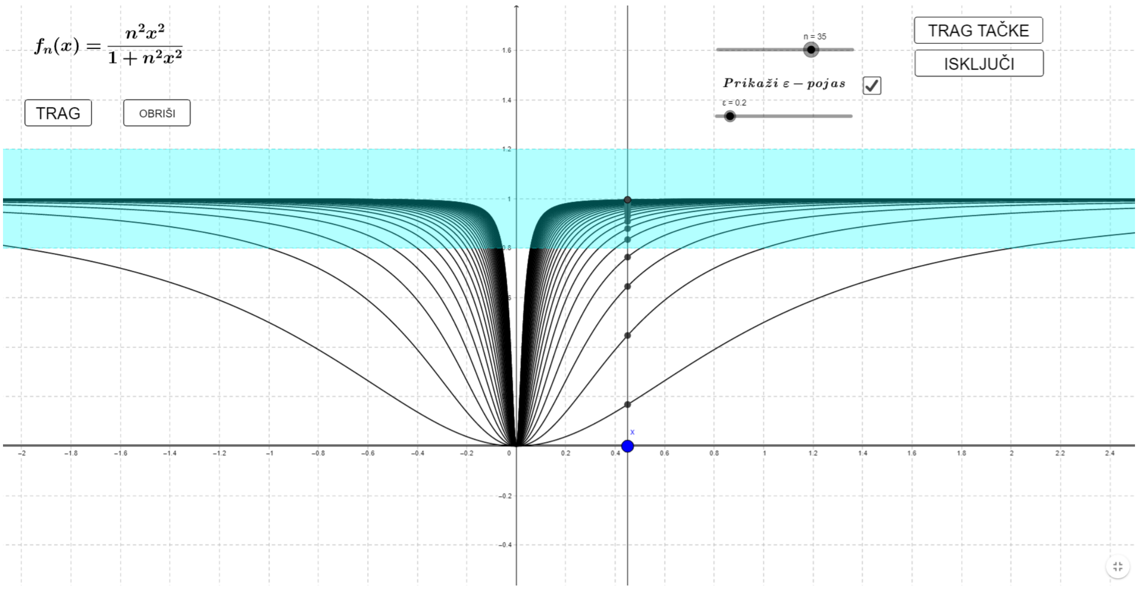
Slika 3.28: Aplet koji prikazuje zadatak 3

Rešenje.
Već posmatrajući grafike članova niza, može se izvesti zaključak da je granična funkcija ovog niza $f(x) = 0$. Zaista, kako je $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right|$ za svako $x \in \mathbf{R}$, biće

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Dakle $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbf{R}$ kad $n \to \infty$.

Zadatak 4. *Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza* $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$ *na:*
a) $(0, 1)$;
b) $[1, \infty)$.



Slika 3.29: Aplet koji prikazuje zadatak 4

Rešenje.
Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = 1$ za $x \in (0, 1)$, granična funkcija je $f(x) = 1$.
a) Uzimajući u obzir da je $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, biće

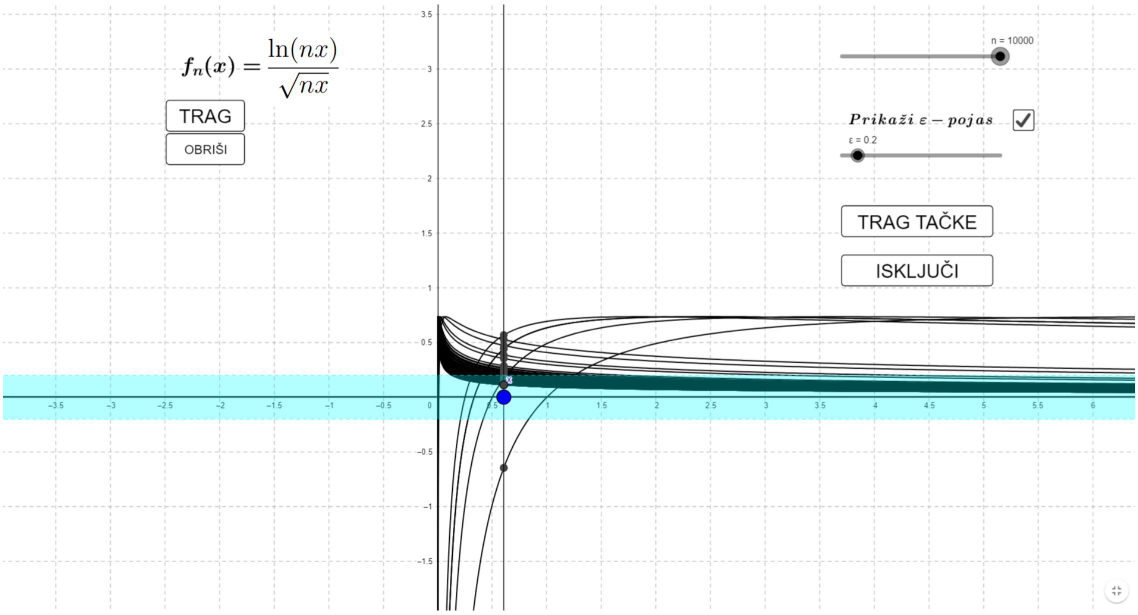
$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - 1| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} \neq 0$$

odnosno

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f| \neq 0$$

pa niz neće konvergirati ravnomerno na $(0, 1)$.
b) Granična funkcija je ista ali sada $x \in [1, \infty)$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[1,\infty)} \left| \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2} - 1 \right| =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[1,\infty)} \dfrac{1}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+n^2} = 0$ tj. niz konvergira ravnomerno na $[1, \infty)$.

Zadatak 5. *Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza* $f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$ *na:*
a) $(0,1)$;
b) $[1,\infty)$.

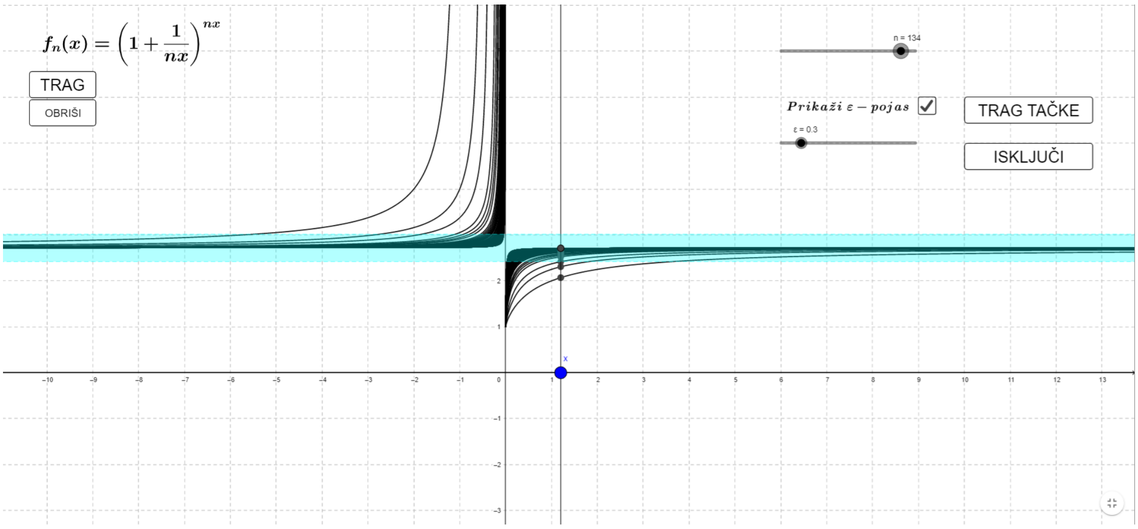


Slika 3.30: Aplet koji prikazuje zadatak 5

Rešenje.
a) Posmatrajući grafike funkcija f_n, može se intuitivno zaključiti da je granična funkcija $f(x) = 0$. Isto tako, korisnik može videti da se njihovi grafici na intervalu $(0,1)$ neće u potpunosti sadržati u proizvoljnom ε pojasu ni za jedno $n \in \mathbf{N}$. Tako da je reč samo o običnoj konvergenciji. Analitički, kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}} = 0$ za svako fiksirano $x \in (0,1)$, očigledno je da je $f(x) = 0$ granična funkcija datog niza. Takođe, imajući u vidu da je $f_n(\frac{1}{n^2}) = -\sqrt{n}\ln n$ i teži $-\infty$ kad n teži ∞ sledi da limes supremuma razlike opšteg člana niza i granične funkcije neće težiti nuli. Tako je i na ovaj način potvrđeno da niz ne konvergira ravnomerno već samo u običnom smislu tj. tačka-po-tačka na $(0,1)$.

b) Kako je $f_n' = \frac{2(2-\ln(nx))}{2\sqrt{(nx)^3}}$ za svako $x \in [1,\infty)$ i $n \in \mathbf{N}$, lako se zaključuje da svaka od funkcija f_n dostiže maksimum na $[1,\infty)$ u tački $x = \frac{e^2}{n}$ i da je $\max\limits_{x\geq 1} \dfrac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}} = \frac{2}{e}$. Dakle niz neće ravnomerno konvergirati ni na intervalu $[1,\infty)$.

Zadatak 6. *Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza* $f_n(x) = \left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx}$ *na* $(0,1)$.



Slika 3.31: Aplet koji prikazuje zadatak 6

Rešenje.
Granična funkcija niza $f_n(x)$ je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e = f(x).$$

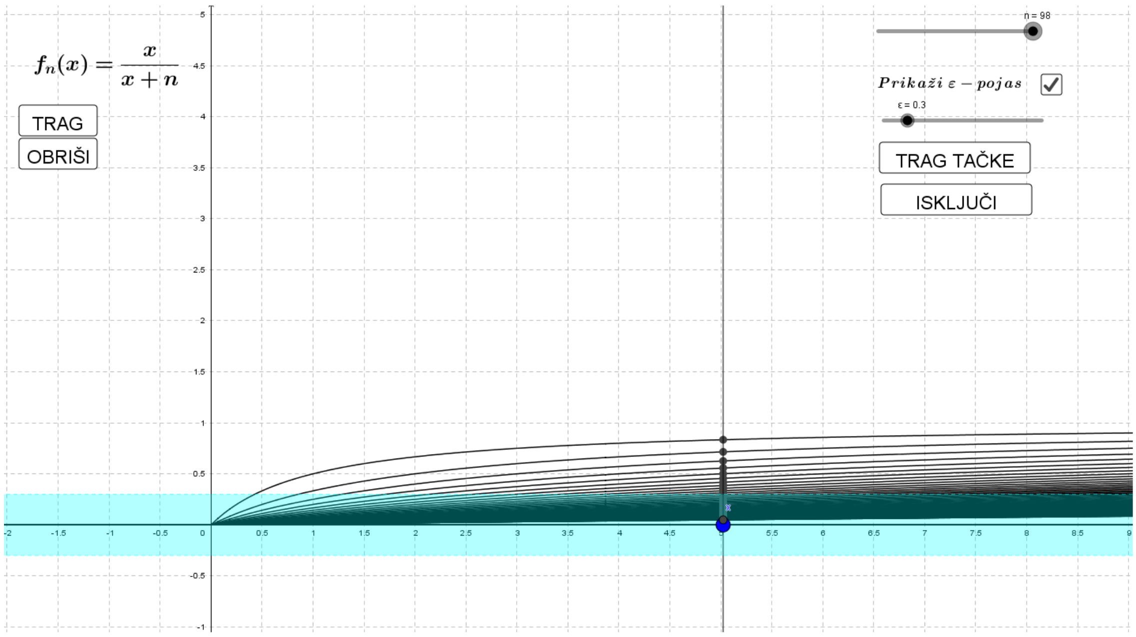
Međutim, kako je $f_n(\frac{1}{n}) = 2$, konvergencija nije ravnomerna jer limes supremuma razlike opšteg člana niza i granične funkcije neće težiti nuli. Odnosno

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - e| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - e \right| = |2-e| \neq 0$$

pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f| \neq 0.$$

Zadatak 7. *Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza* $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ *na:*
a) $[0, \infty)$*;*
b) $[0, 12]$.

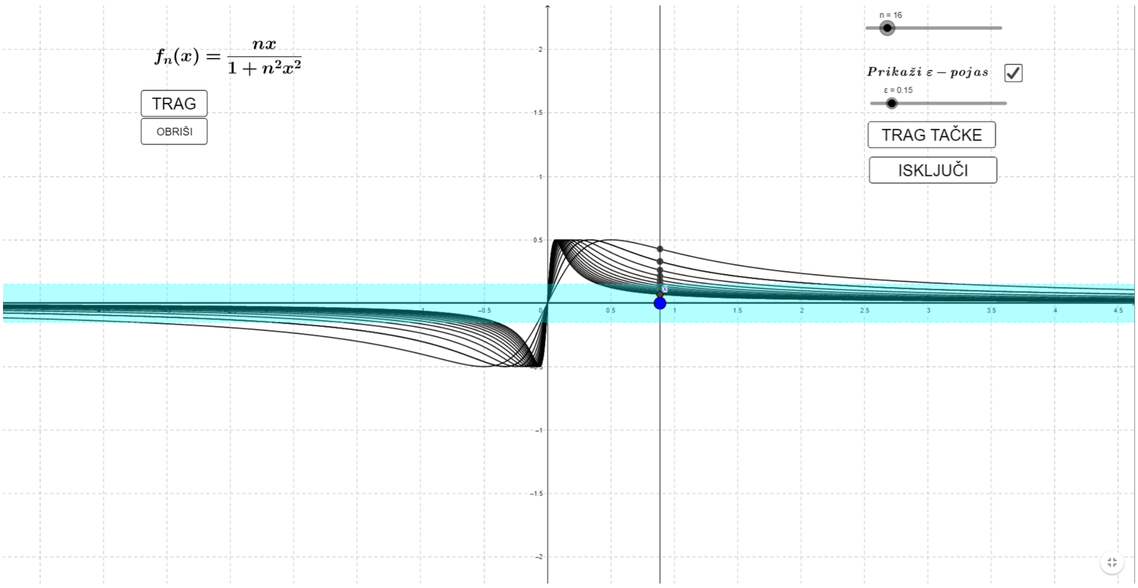


Slika 3.32: Aplet koji prikazuje zadatak 7

Rešenje.
Granična funkcija niza $f_n(x)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{x+n} = 0 = f(x)$ za svako $x \in [0, \infty)$.
a) Članovi niza $f_n(x)$ su rastuće funkcije (jer je $f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$ za svako $x \in [0, \infty)$ i $n \in \mathbf{N}$). Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+n} = 1$ biće $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$. Dakle, niz ne konvergira ravnomerno na $[0, \infty)$.

b) Kako je već ustanovljeno da su članovi niza $f_n(x)$ rastuće funkcije, maksimum će biti dostignut u rubnoj tački tj. u $x = 12$. Tada će biti $\max\limits_{x\in[0,12]} \dfrac{x}{x+n} = \dfrac{12}{12+n}$. Ovaj izraz teži nuli kad $n \to \infty$ pa je $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,12]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Dakle, niz konvergira ravnomerno na $[0, 12]$.

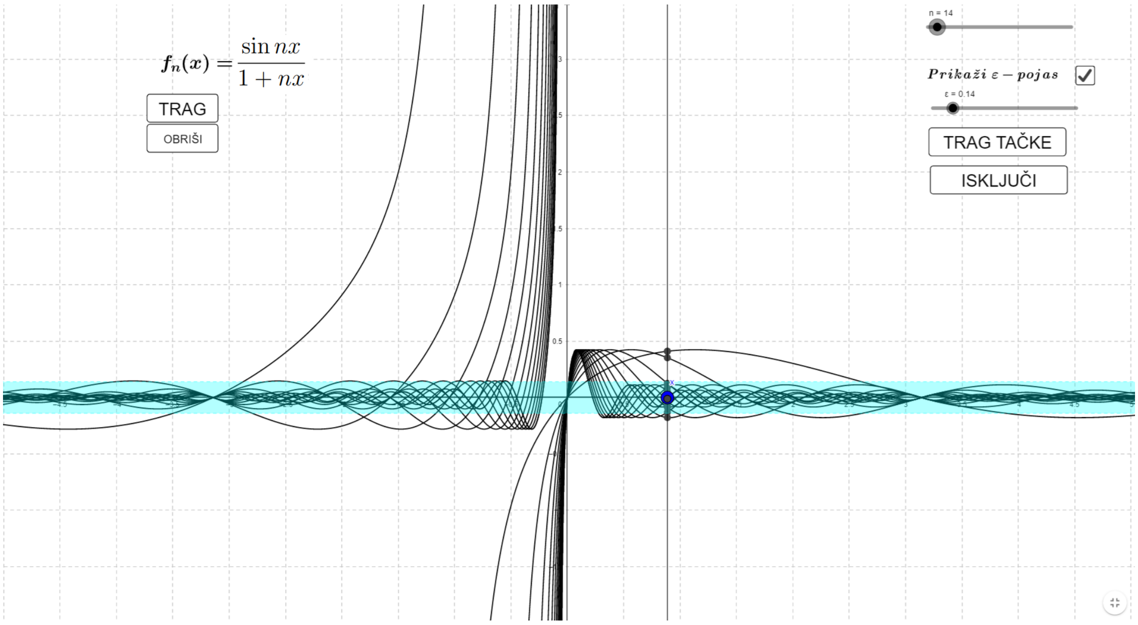
Zadatak 8. *Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza* $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ *na* $[0, \infty)$.



Slika 3.33: Aplet koji prikazuje zadatak 8

Rešenje.
Granična funkcija niza $f_n(x)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$. Kako se maksimalna vrednost funkcije f_n dostiže u tački $x = \frac{1}{n}$ i iznosi $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$, jasno je da $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{2} \neq 0$, odnosno niz neće konvergirati ravnomerno na $[0, \infty)$.

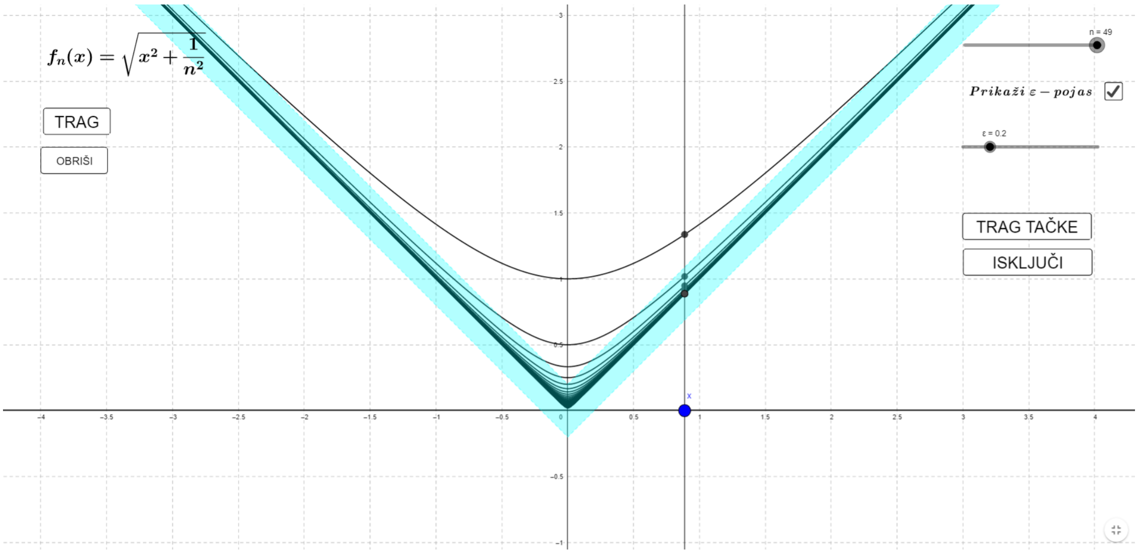
Zadatak 9. *Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+nx}$ *na* $(0, \infty)$.



Slika 3.34: Aplet koji prikazuje zadatak 9

Rešenje.
Granična funkcija niza $f_n(x)$ ponovo je $f(x) = 0$. Kako je $f_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{2+\pi}$ biće $\sup\limits_{x\in(0,\infty)} \left| \dfrac{\sin nx}{1+nx} - 0 \right| \geq \left| f_n(\frac{\pi}{2n}) \right| = \frac{2}{2+\pi} \neq 0$, tako da niz ne konvergira ravnomerno na $(0, \infty)$.

Zadatak 10. *Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza* $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.



Slika 3.35: Aplet koji prikazuje zadatak 10

Rešenje.
Niz $f_n(x)$ teži ka funkciji $f(x) = |x|$ kad n teži ∞ na $x \in \mathbf{R}$. Kako je

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{1}{n}$$

biće $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Dakle $f_n(x) \rightrightarrows |x|$ na $\mathbf{R}$.

Glava 4

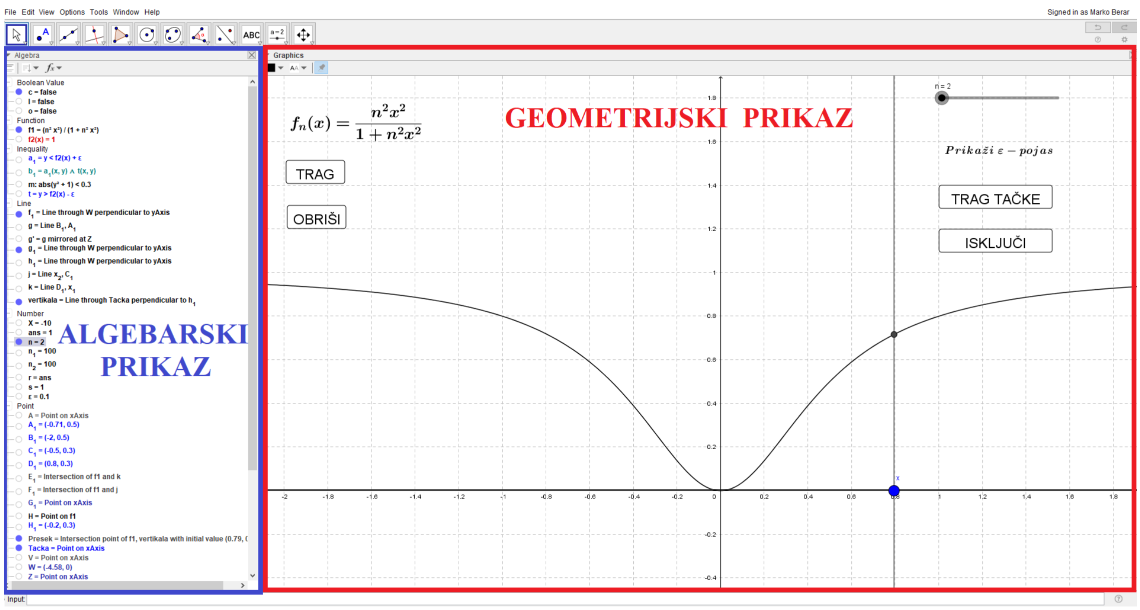
Kreiranje i implementacija interaktivnih sadržaja korišćenjem programskog paketa GeoGebra

4.1 Programski paket GeoGebra

GeoGebra je interaktivni matematički softverski alat koji objedinjuje elemente geometrije, algebre i matematičke analize. Na to ukazuje i sam naziv koji predstavlja kombninaciju reči geometrija i algebra. Dizajniran prvenstveno kao sredstvo u nastavi matematike na svim nivoima obrazovanja, efikasno doprinosi unapređivanju nastavnog procesa i u drugim granama prirodne i tehničke orijentacije. Idejni tvorac je prof. Markus Hohenvarter koji je u sklopu svog master rada 2001. godine, na Univerzitetu u Salcburgu, započeo razvoj ovog programskog paketa. Unapređivanje programa nastavio je kroz izradu doktorske disertacije. Danas je GeoGebra vodeći svetski *OpenSource* projekat u domenu nastave matematike u čijem daljem razvoju učestvuju desetine programera iz celog sveta. Dostupan je na preko 50 svetskih jezika (uključujući i srpski) i dobitnik brojnih nagrada na polju edukacije sa preko 100 miliona korisnika iz više od 190 zemalja ([21]). Pisan je u programskom jeziku JAVA i kompatibilan sa svim desktop i mobilnim operativnim sistemima, kao i internet pretraživačima u široj upotrebi. Za izradu apleta zastupljenih u ovom radu kao i na veb-sajtu [31] korišćena je verzija GeoGebra 5 Classic [22]. U nastavku biće istaknut samo mali skup funkcionalnosti koje GeoGebra obezbeđuje tj. ona svojstva i pojedinosti neposredno vezane za kreiranje pomenutih apleta. Zainteresovani čitalac može se podrobnije upoznati sa mogućnostima softvera pomoću [13], [36] i [12].

4.2 Upotreba softvera i kreiranje interaktivnih primera

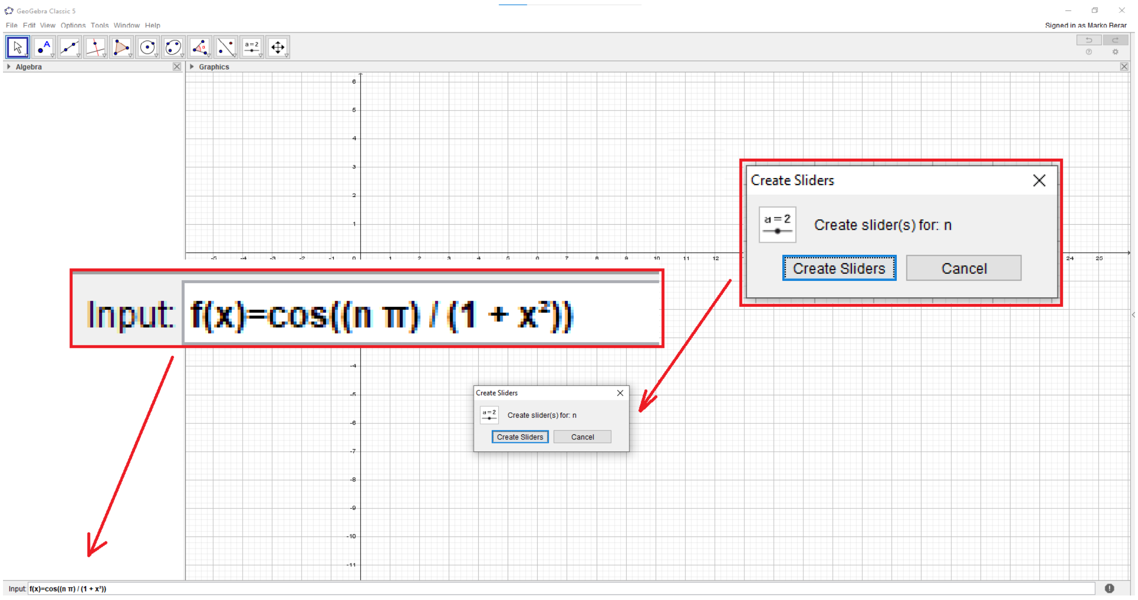
Jedna od osnovnih funkcionalnih prednosti GeoGebra softverskog paketa jeste činjenica da program omogućava različite prikaze matematičkih objekata (poput algebarskog, geometrijskog, tabelarnog...) pritom čuvajući njihovu povezanost. Izmena objekta u jednom od prikaza rezultuje automatskom adekvatnom promenom u ostalim. Na slici 4.1 može se videti istovremeni algebarski i geometrijski prikaz. Geogebra nudi veliku fleksibilnost u radu kroz brojna dostupna podešavanja.



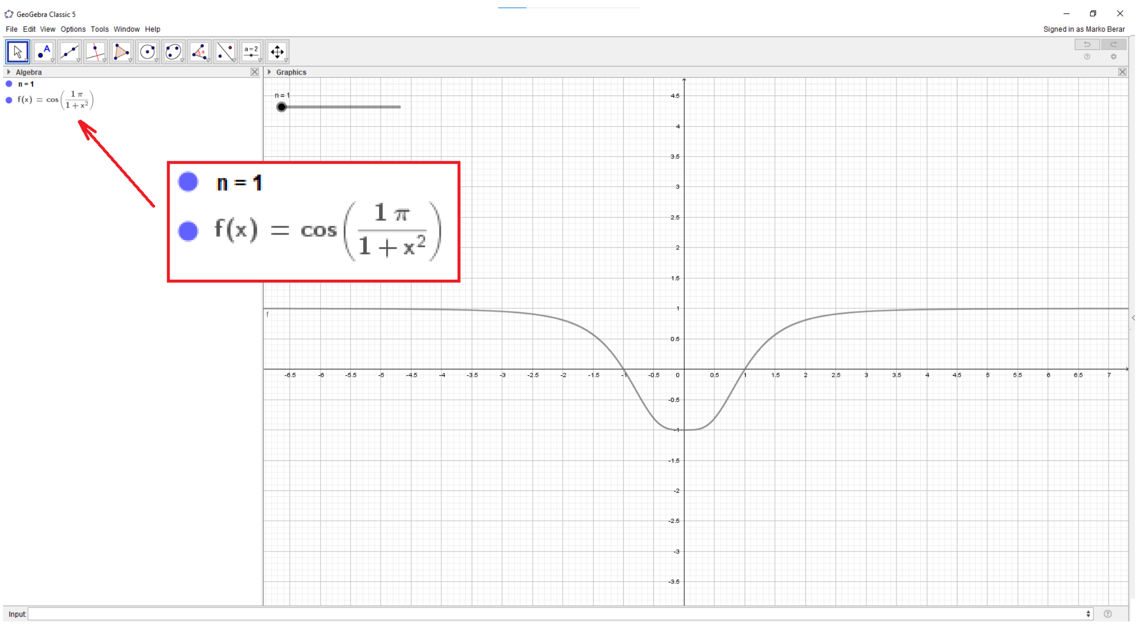
Slika 4.1: Algebarski i geometrijski prikaz GeoGebra radnog okruženja

Funkcionalni nizovi i GeoGebra

Kreiranje funkcionalnog niza je jednostavno budući da GeoGebra podržava opciju višeparametarskog definisanja funkcije. U slučaju funkcionalnog niza, prilikom definisanja pomoću komandne linije naglašavamo da je u pitanju funkcija po x u čijem zapisu figurira parametar n. Tom prilikom automatski se definišu dva objekta u algebarskom prikazu, realna funkcija koja zavisi od parametra n, kao i broj n. Istovremeno se na grafičkom prikazu generiše slajder za promenu vrednosti promenljive n kao i grafik funkcije f za zadato n (slike 4.2 i 4.3).

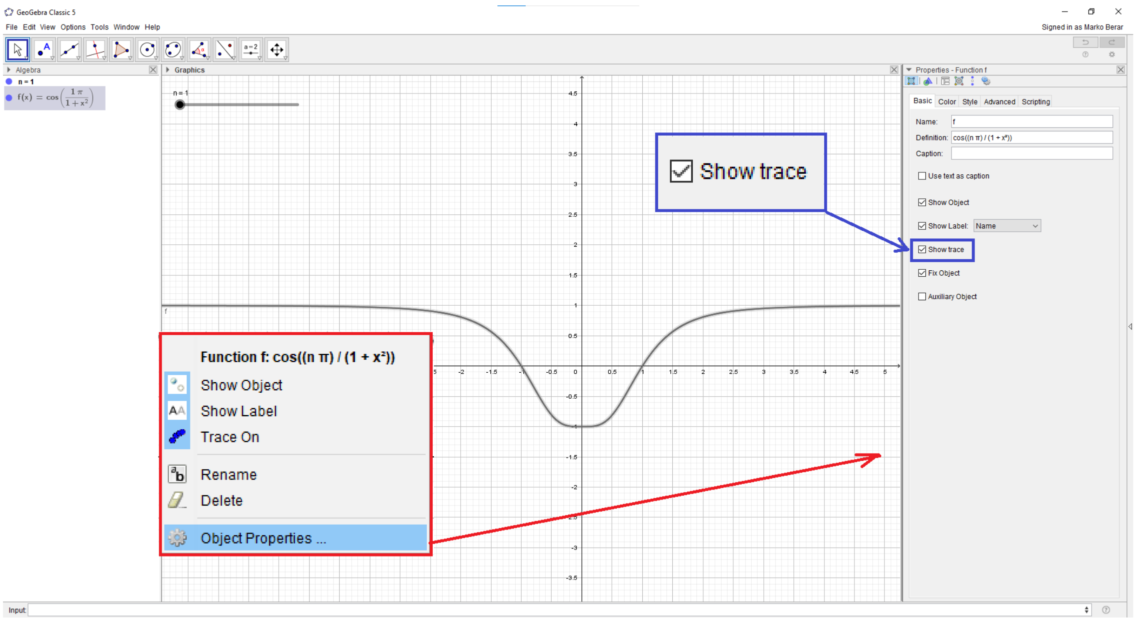


Slika 4.2: Zadavanje funkcije preko komandne linije



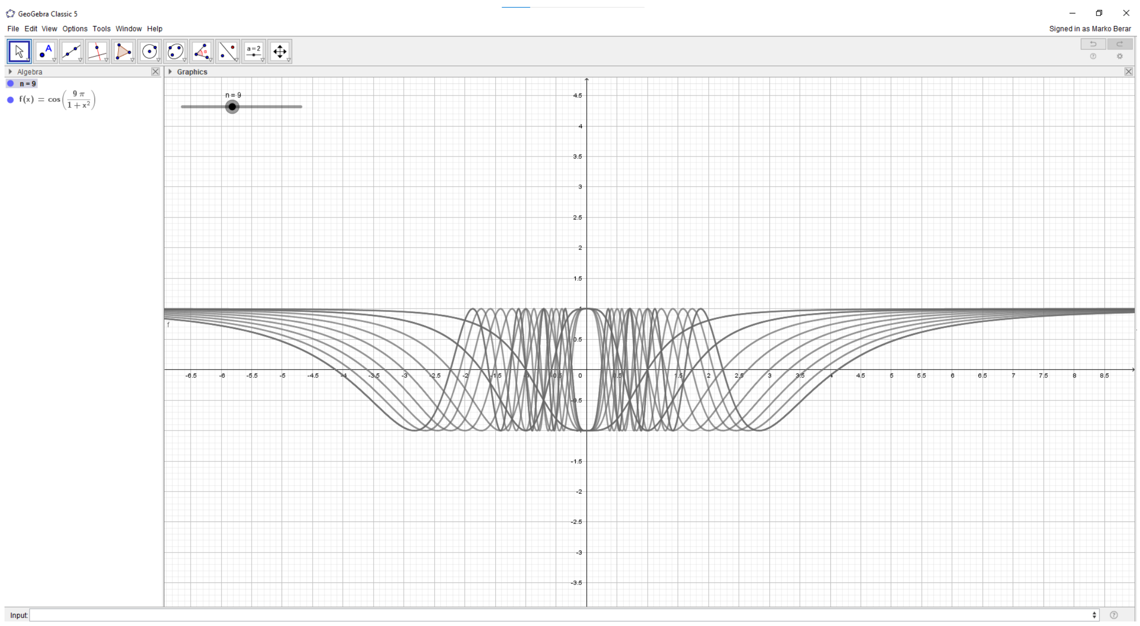
Slika 4.3: Algebarski i geometrijski prikaz zadate funkcije

Za svaki kreiran objekat na raspolaganju su brojne opcije dostupne desnim klikom na objekat (u bilo kom od prikaza). Odabir poslednje stavke *Object Properties* otvara prozor sa desne strane ekrana i omogućava pristup svim funkcionalnostima objekta (slika 4.4). Opcija *Show trace* je od posebnog značaja za vizuelnu reprezentaciju funkcionalnog niza.



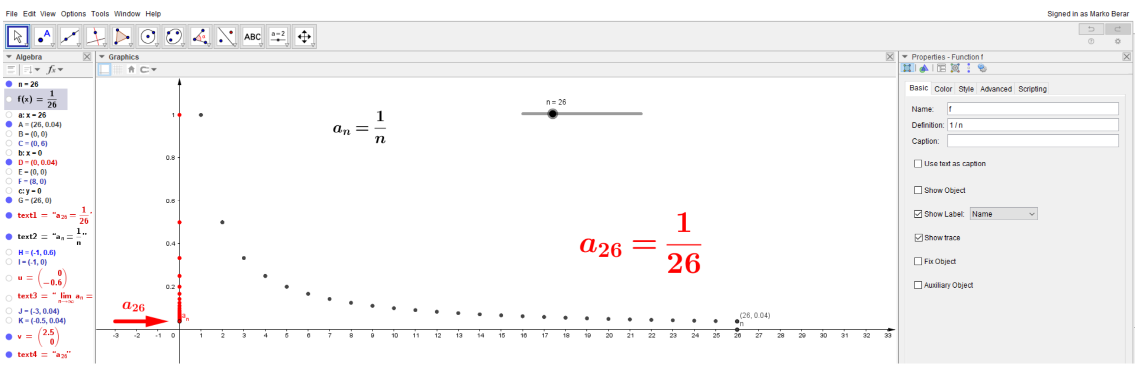
Slika 4.4: *Object Properties* i *Show trace* opcija

Show trace opcija omogućava prikazivanje traga objekta, u ovom slučaju grafika funkcije, te se promenom parametra n vide svi prethodni grafici funkcija (za svaku vrednost n dostupnu na slajderu). Upotreba ove opcije vidi se na slici 4.5.



Slika 4.5: Generisanje grafika članova funkcionalnog niza upotrebom opcije *Show trace*

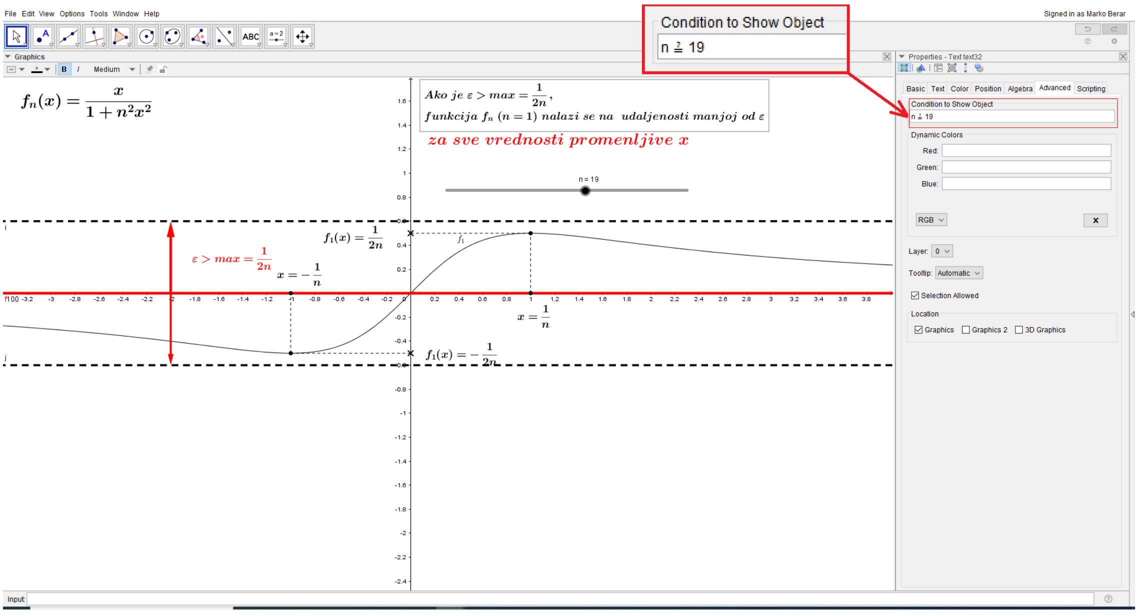
U slučaju realnog niza, ovaj efekat generiše „tačkast“ grafik budući da je domen realnog niza skup prirodnih brojeva (slika 4.6).



Slika 4.6: Generisanje grafika realnog niza upotrebom opcije *Show trace*

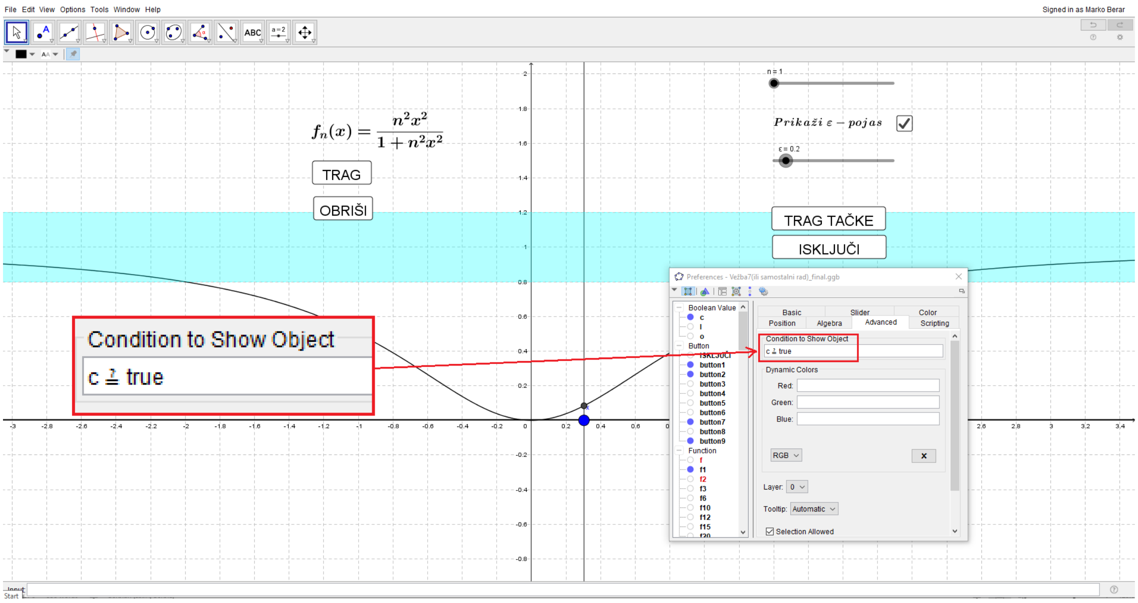
Vidljivost objekta

Naredna opcija često korišćena u izradi ovih apleta je i mogućnost opcionog prikazivanja i sakrivanja objekta. Odabirom kartice *Advanced* korisniku je dostupna mogućnost zadavanja uslova pod kojim će određeni grafički element biti vidljiv. Uslov može biti jednostavan ili pak prilično složen logički izraz. Na slici 4.7 vidi se upotreba ovog uslova u okviru primera 13 gde je označeni tekst vidljiv samo kada je vrednost promenljive $n = 19$.



Slika 4.7: Definisanje uslova vidljivosti objekta

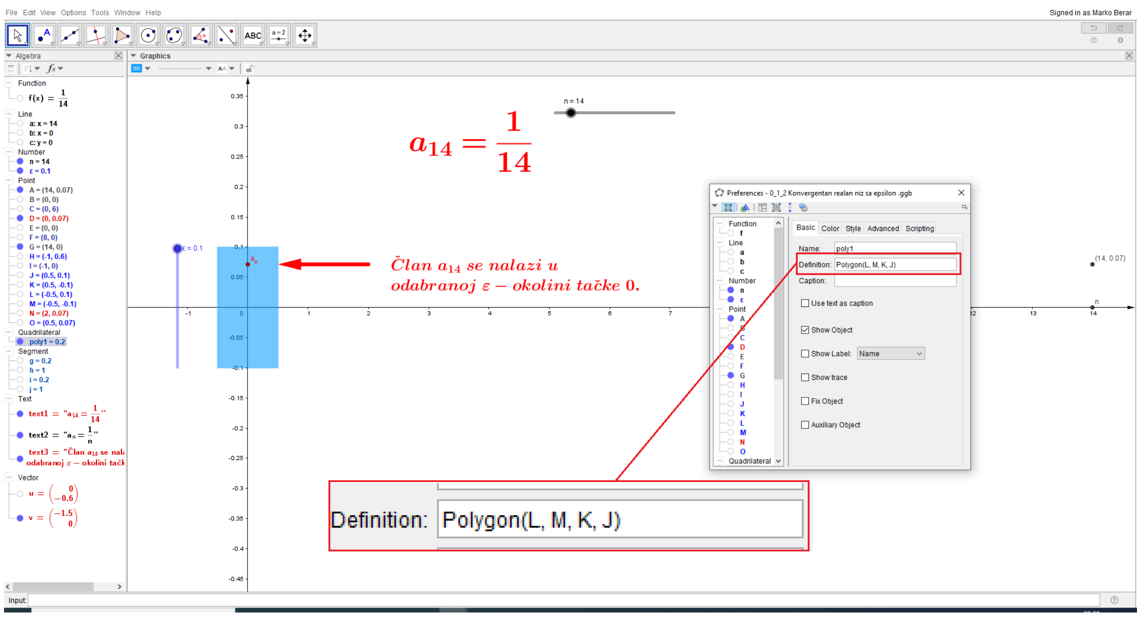
Uslov može predstavljati i *boolean* vrednost koju automatski generiše *checkbox*. Na slici 4.8 vidljivost ε-pojasa i odgovarajućeg slajdera uslovljena je *true* vrednošću promenljive c koja odgovara *checkbox* objektu na slici.



Slika 4.8: Definisanje uslova vidljivosti objekta

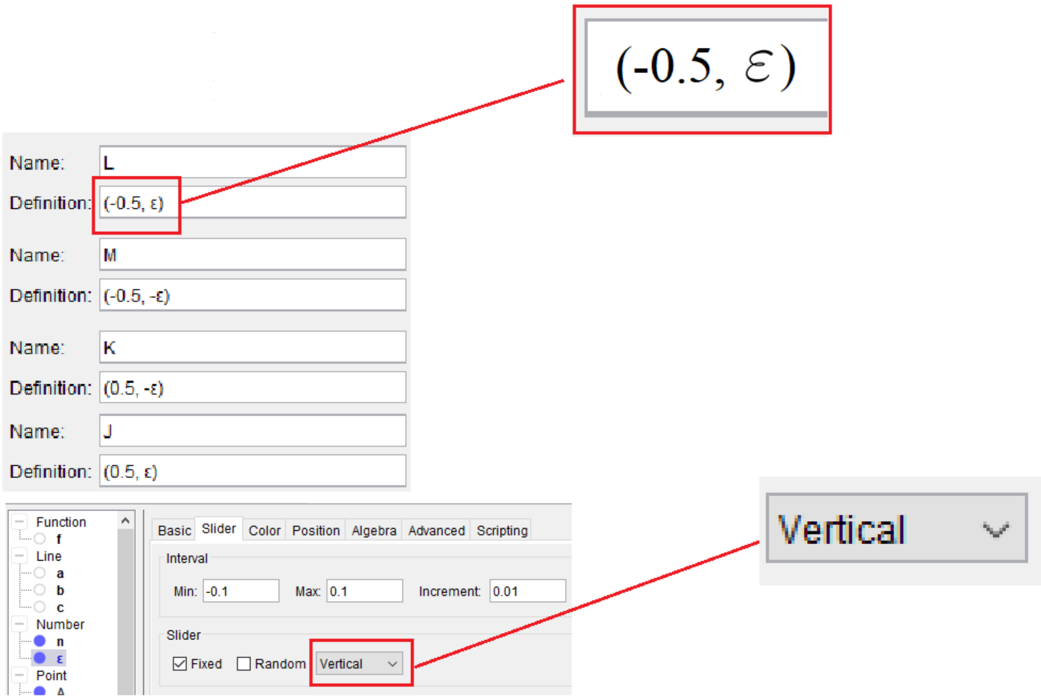
Kreiranje podesivog ε-pojasa

U primeru 3 podesivi ε-pojas predstavljen je poligonom (pravougaonikom) sa temenima L, M, K, J (slika 4.9).



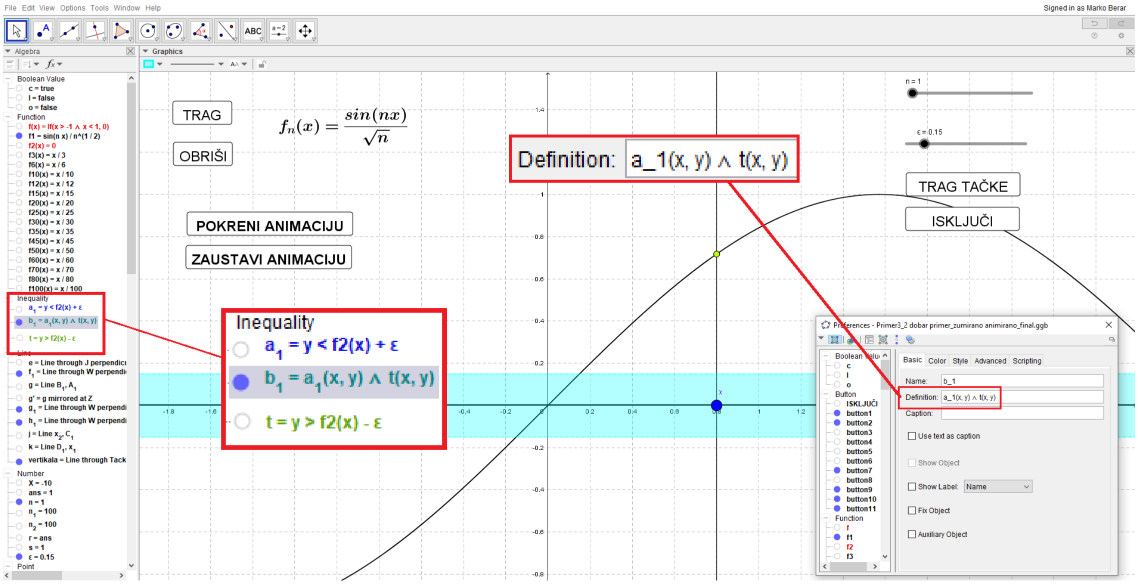
Slika 4.9: ε-pojas predstavljen poligonom

Promenljiva veličina poligona realizuje se tako što su y koordinate temena zavisne od ε. Radi preglednije vizualizacije zavisnosti, slajder za ε je postavljen vertikalno i dužine koja odgovara stranici pravougaonika. (slika 4.10) .



Slika 4.10: Temena poligona zavisna od ε

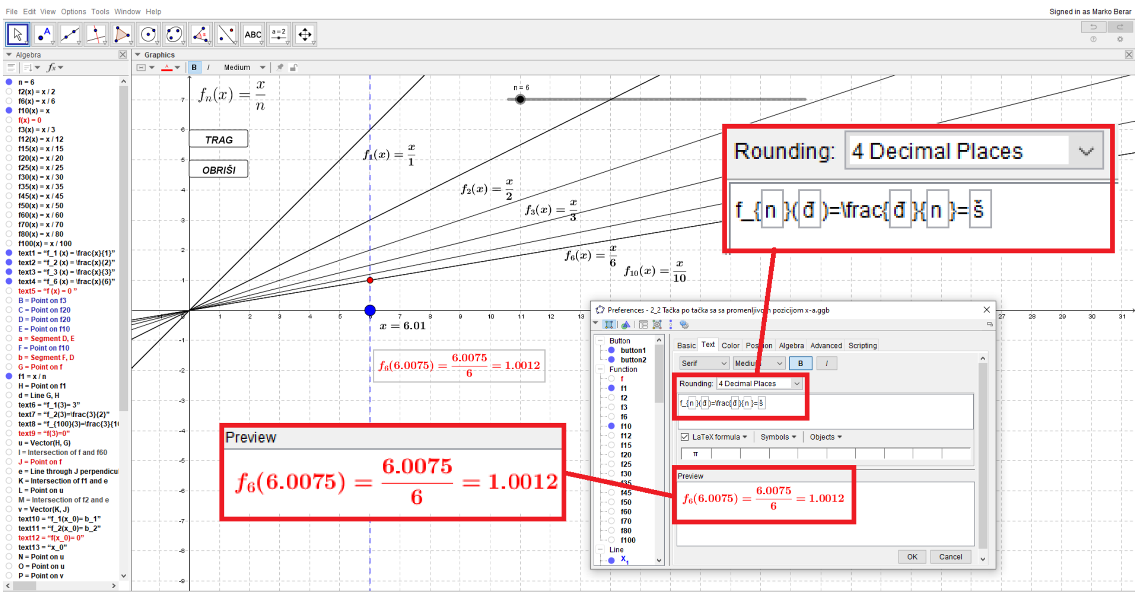
U primeru 16 promenljivi ε pojas realizovan je kao presek dve nejednakosti, čija je vidljivost uslovljena *true boolean* vrednošću *checkbox*-a (slika 4.11).



Slika 4.11: ε-pojas zadat kao presek nejednakosti

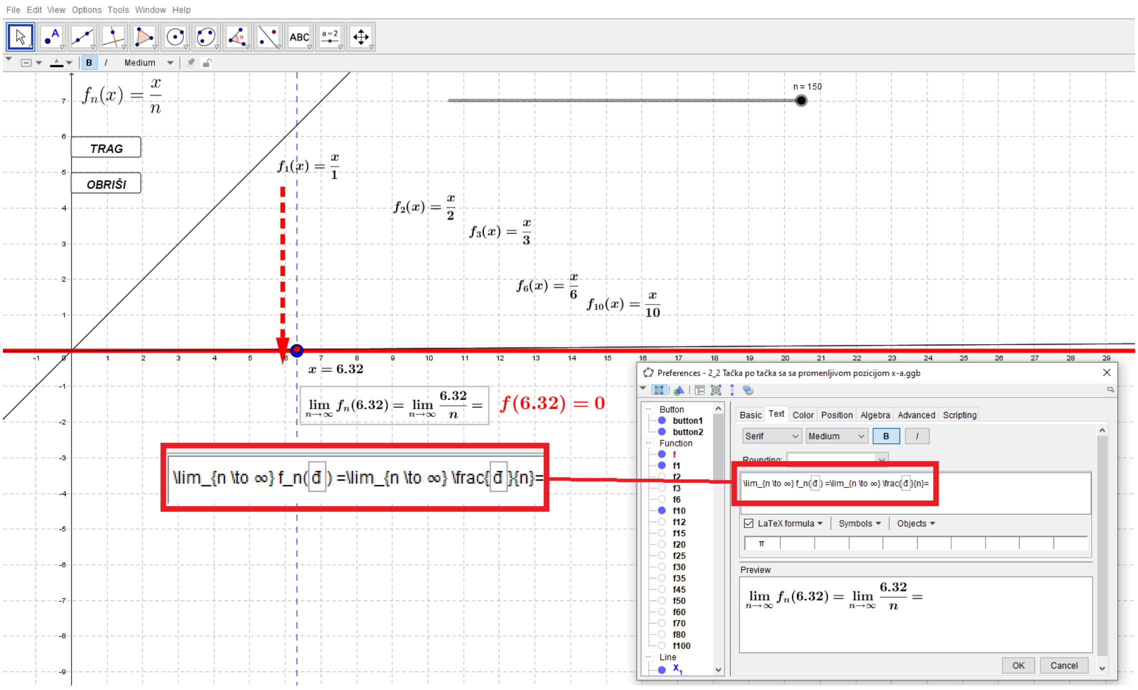
Promenljiva pozicija tačke x

U primeru 7 korišćena je osobina tekstualnih objekata da sadrže i zavise od promenljivih. Na taj način tekst koji saopštava vrednost funkcije u tački zavisi od promenljivih n, $đ$ i $š$ (slika 4.12). Takođe primetna je i kompletna podrška za *LaTeX* zapis i simboliku, kao i za srpsku latinicu.



Slika 4.12: Upotreba promenljivih u tekst objektima

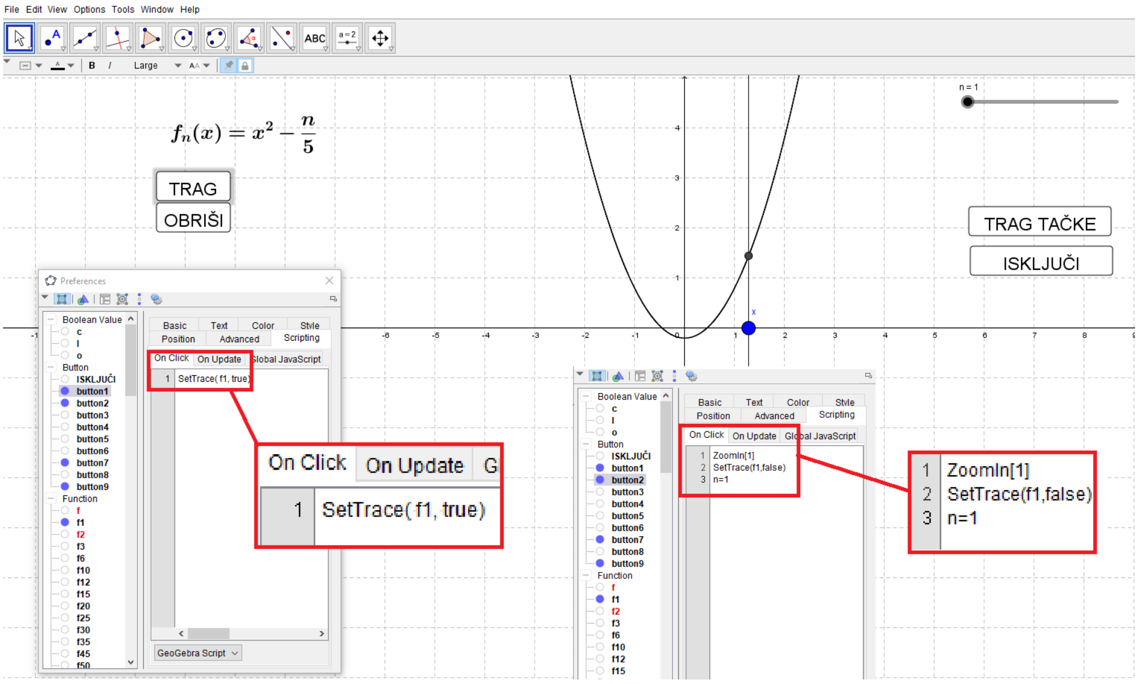
Korisnik ima mogućnost manuelnog pomeranja tačke x uz istovremeno očitavanje vrednosti funkcije u toj tački. Kad vrednost promenjljive n dostigne 150, aplet prikazuje i odgovarajuću graničnu vrednost preko tekstualnog objekta kreiranog na sličan način kao na prethodnoj slici (4.13).



Slika 4.13: Upotreba promenljivih u tekst objektima

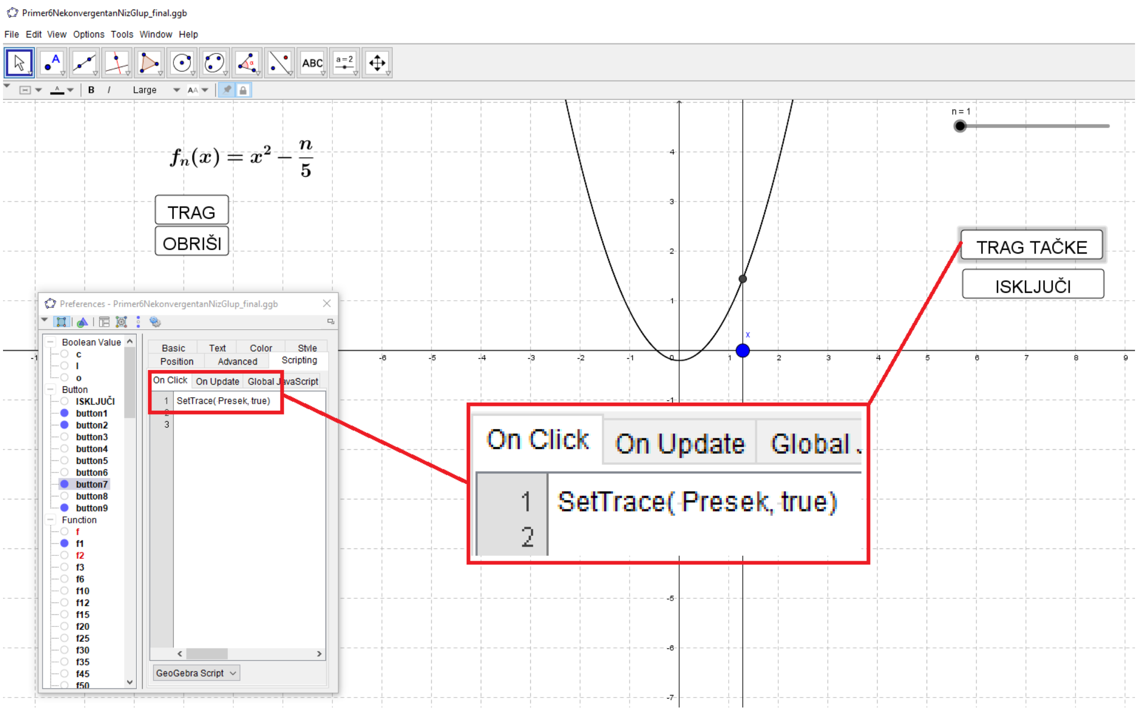
Programibilnost objekata

U primeru 9 može se videti više objekata tipa *BUTTON* (dugme). Odabirom kartice *Scripting* (u okviru panela opcija objekta) korisnik može progamirati metodu *OnClick()* koja se izvršava onda kada se na objekat klikne. Dugme *TRAG* u okviru *OnClick()* metode sprovodi funkciju *SetTrace(f1, true)* koja zapravo uključuje trag za objekat $f1$. Dugme *OBRIŠI* pak, u okviru *OnClick()* metode sadrži tri naredbe: *ZoomIn[1]* koji se resetuje grafički prikaz na ekranu, *SetTrace(f1, false)* kojim se isključuje trag za objekat $f1$, kao i naredbu $n = 1$ koja vraća slajder u početni položaj (4.14).



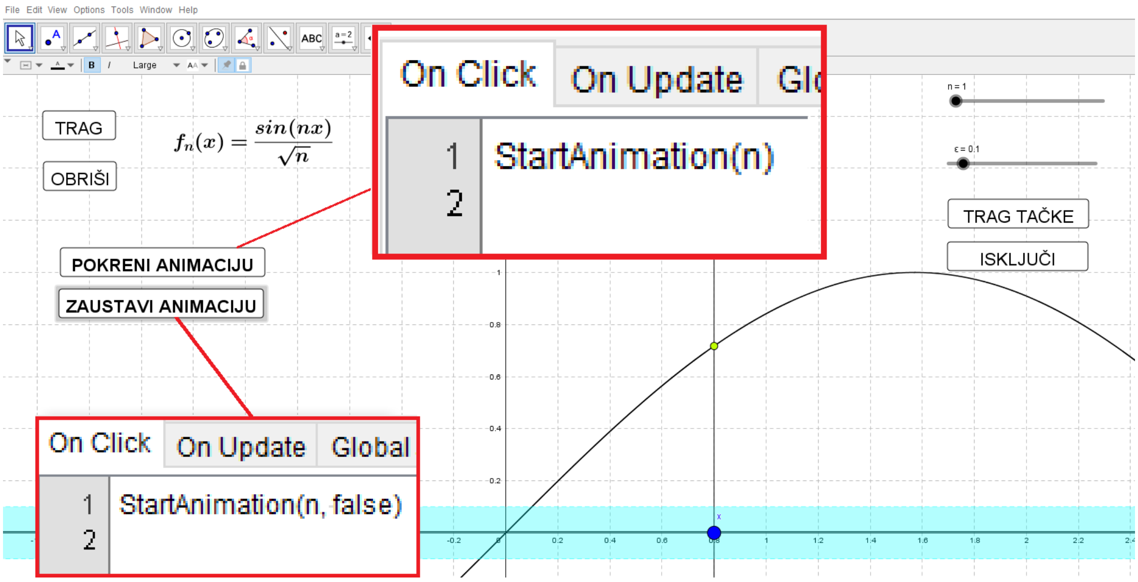
Slika 4.14: Upotreba *OnClick()* metode

Dugme *TRAG TAČKE* omogućava vrlo lep grafički prikaz konvergencije za fiksiranu vrednost promenljive x. Realizuje se pozivanjem funkcije *SetTrace(presek, true)* ali za ulazni argument *presek* koji predstavlja tačku preseka funkcije $f_n(x)$ i prave paralelne y –osi koja sadži tačku x (4.15). Dugme *ISKLJUČI* funkcioniše na sličan način kao i dugme *OBRIŠI* sa tom razlikom što samo zaustavlja dalje iscrtavanje traga ali ne resetuje ni grafiči prikaz ni slajder za n.



Slika 4.15: Upotreba *OnClick()* metode

U primeru 16 vidljivo je dugme *POKRENI ANIMACIJU* koje pozivom funkcije *StartAnimation(n)* automatski pokreće slajder za n i sa njim sve zavisne elemente. Dugme *ZAUSTAVI ANIMACIJU* zaustavlja animaciju pozivom iste funkcije ali sa dodatnim parametrom *false* (4.16). Kompletna dokumentacija dostupnih funkcija može se naći na [23].



Slika 4.16: Upotreba *StartAnimation(n)* metode

4.3 Generisanje GeoGebra apleta

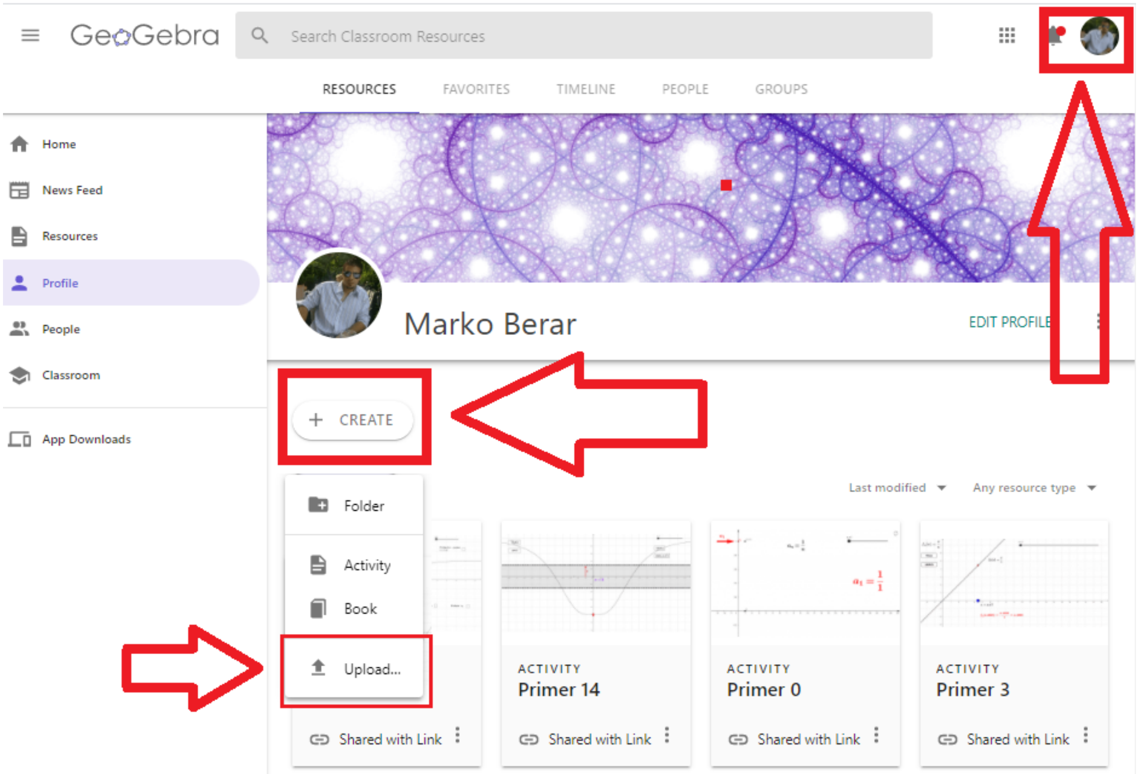
Nakon što je GeoGebra fajl kreiran, da bi mogao biti ugrađen na veb-sajt, potrebno je sprovesti nekoliko koraka:

- učiniti fajl dostupnim onlajn preko zvaničnog GeoGebra portala www.geogebra.org;
- generisati link za ugrađivanje u izvorni html kod veb-strane;
- ugraditi link u html kod.

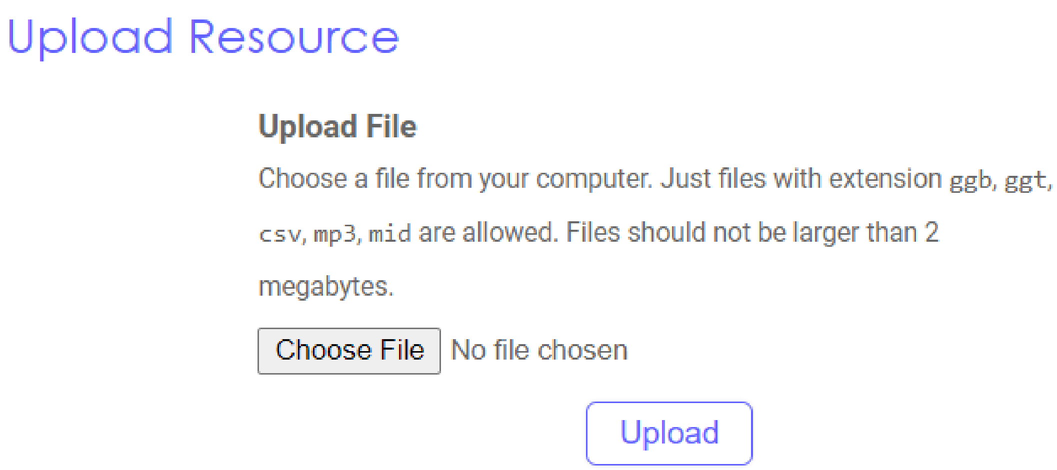
Postavljanje GeoGebra fajla na GeoGebra portal

Postavljanje (*upload*) je moguće izvesti na nekoliko načina. Ovde će biti predstavljen jedan od njih. Postupak je sledeći:

- potrebno je da korisnik ima aktivan nalog na geogebra.org;
- klikom na sliku u gornjem desnom uglu otvara se stranica sa materijalima korisnika;
- klikom na dugme *CREATE* otvara se padajući meni sa opcijom *UPLOAD* (slika 4.17) nakon čega se otvara prozor za postavljanje .ggb fajla (slika 4.18).



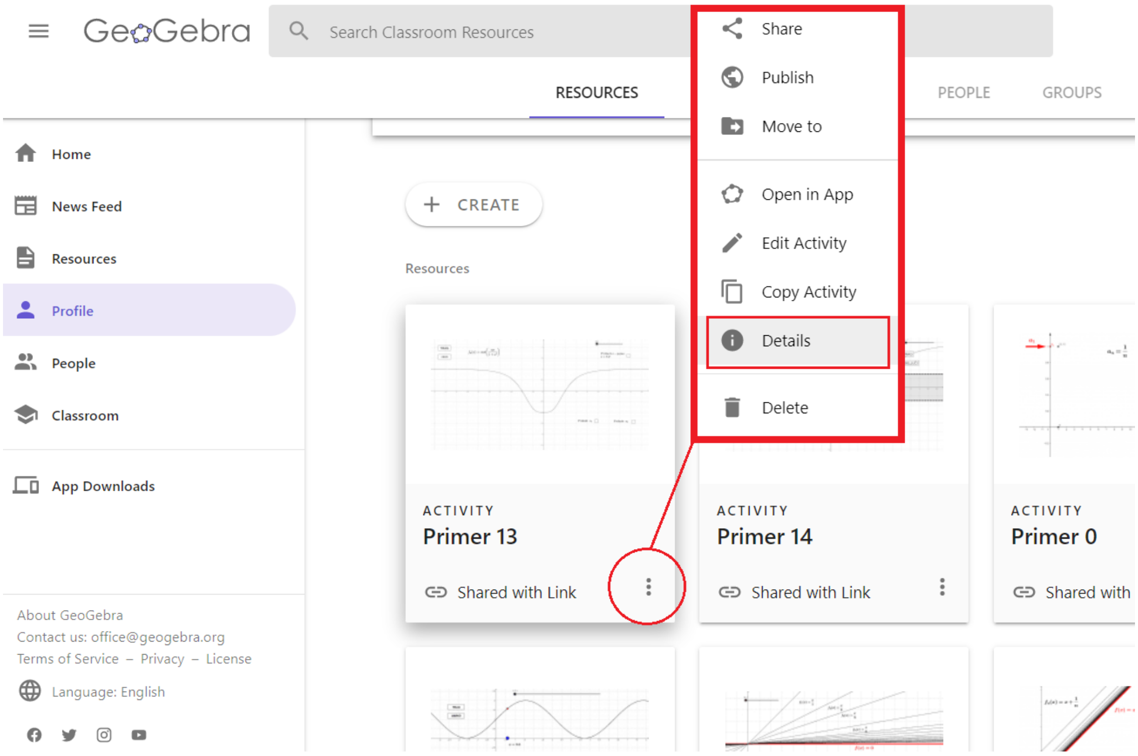
Slika 4.17: Postavljanje .ggb fajla na www.geogebra.org



Slika 4.18: Postavljanje .ggb fajla na www.geogebra.org

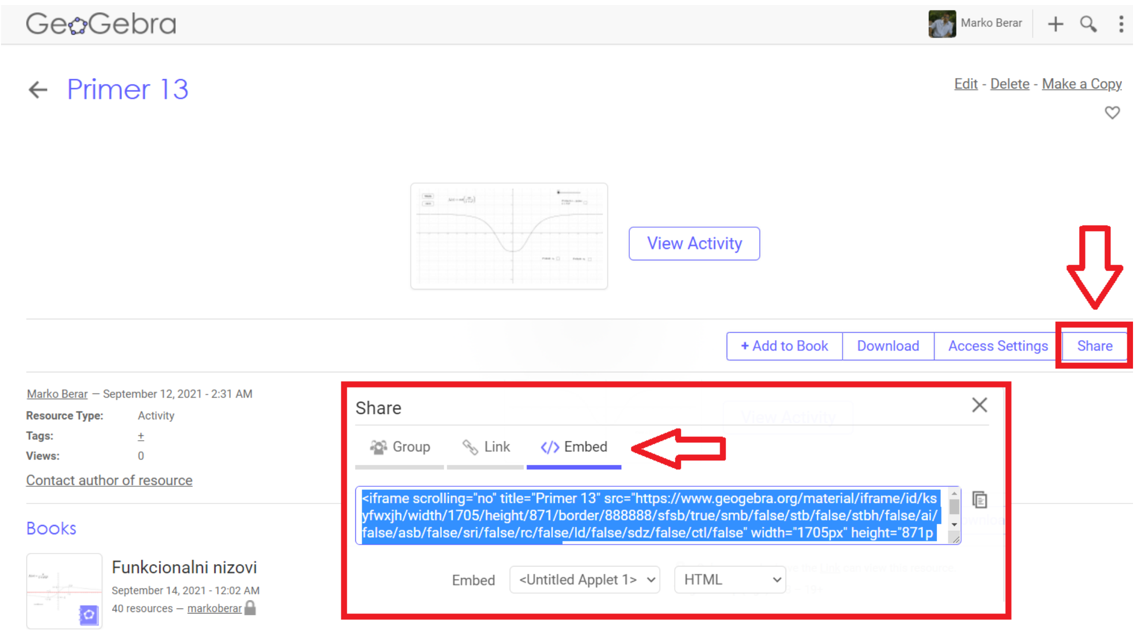
Generisanje linka potrebnog za ugradnju na veb stranu

Nakon uspešnog postavljanja, fajl će biti vidljiv na panelu materijala korisnika. Klikom na tri tačke u donjem levom uglu ikonice postavljenog fajla otvara se prozor sa opcijama. Potrebno je odabrati opciju *DETAILS* (prikazanu na slici 4.19).



Slika 4.19: Generisanje linka za ugradnju na veb stranu

Klikom na opciju *SHARE* otvara se prozor sa dodatnim opcijama za deljenje materiajala. Odabirom opcije *EMBED* generiše se link za ugradnju apleta, u formi html koda u okviru *<iframe>* etikete (slika 4.20). Aplet će biti vidljiv na veb-strani nakon kopiranja linka u html kod željene veb-strane.



Slika 4.20: Generisanje linka za ugradnju na veb-stranu

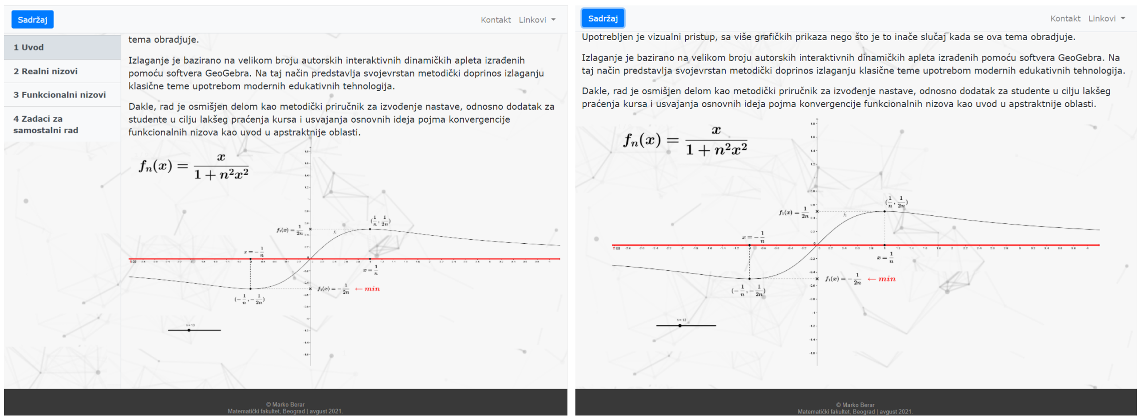
4.4 Veb-sajt

Pregled osnovnih funkcionalnosti

Za potrebe rada kreiran je veb-sajt sa responzivnim dizajnom, u potpunosti prilagođen za upotrebu na svim platformama i veličinama ekrana (desktop, laptop, tablet i mobilni uređaji). Dostupan je na adresi `http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml05184`. Sadrži sve primere i kompletan matematički sadržaj izložen u ovom radu. U nastavku teksta biće naveden pregled osnovnih funkcionalnosti sajta.

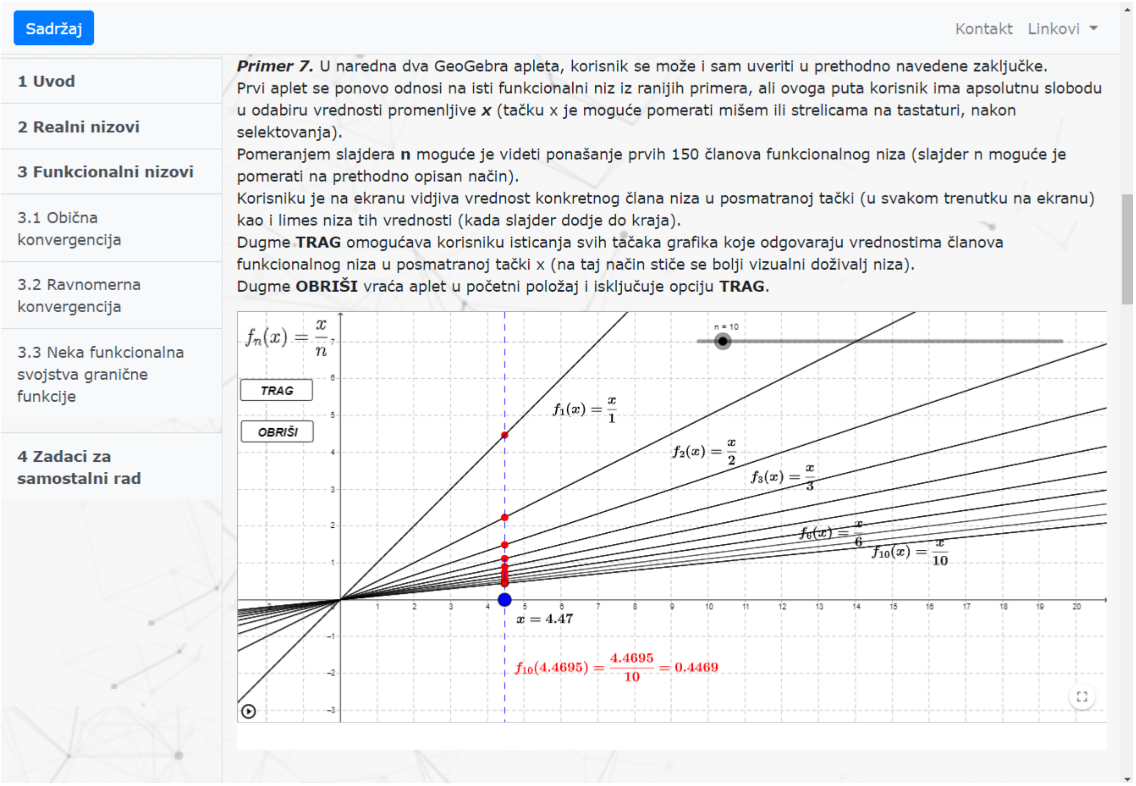
Na slici 4.21 vidi se početna strana koja sadrži navigacijski meni (*navbar*) kao i bočni osnovni meni (*sidebar*) pomoću kog se može pristupiti celokupnom matematičkom sadržaju rada. Bočni meni se u svakom trenutku može sakriti iz vidnog polja klikom na dugme *SADRŽAJ* i na taj način proširiti centralni prostor koji sadrži izlagani materijal (slika 4.22).

Slika 4.21: Početna strana veb sajta



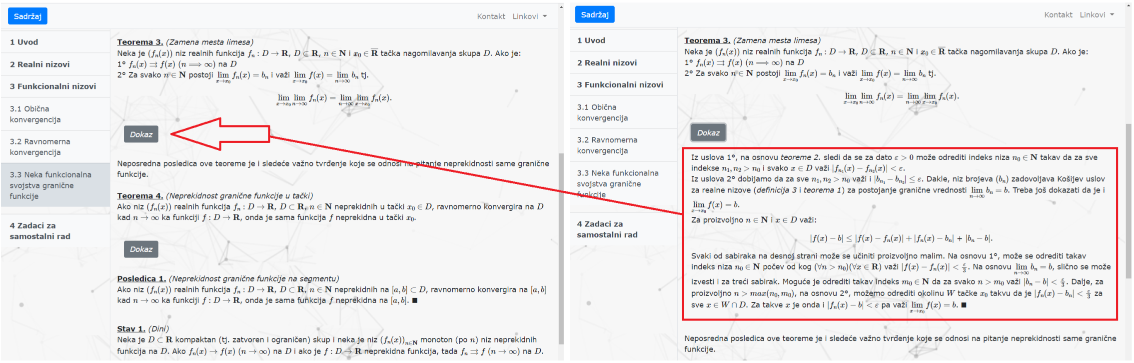
Slika 4.22: Prikazan i sakriven bočni meni

Sajt sadrži veliki broj autorskih dinamičkih GeoGebra apleta integrisanih u veb-strane (slika 4.23).

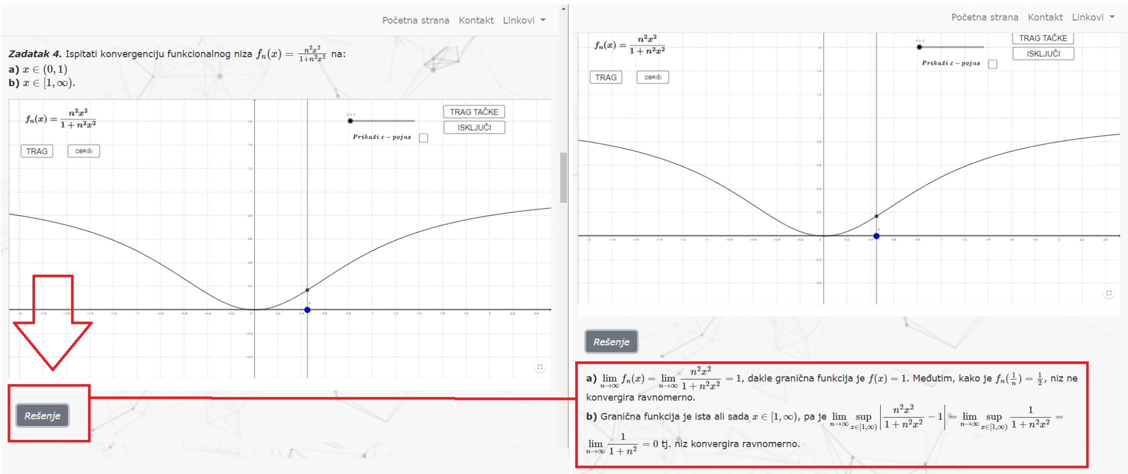


Slika 4.23: Implementirani GeoGebra aplet

Dokazi teorema kao i rešenja zadataka za samostalni rad u primarnom prikazu nisu vidljivi, već je ta opcija omogućena klikom na odgovarajuće dugme. To je urađeno iz metodičkih razloga. U prvom čitanju, korisnički ekran ne bi trebalo preopterećivati formalnim dokazima već istaći suštinu kroz teoreme i primere, dok su rešenja zadataka van vidnog polja da bi se podstaklo samostalno rešavanje zadataka koje se naravno, u svakom trenutku može proveriti klikom na odgovarajuće dugme (slike 4.24 i 4.25).

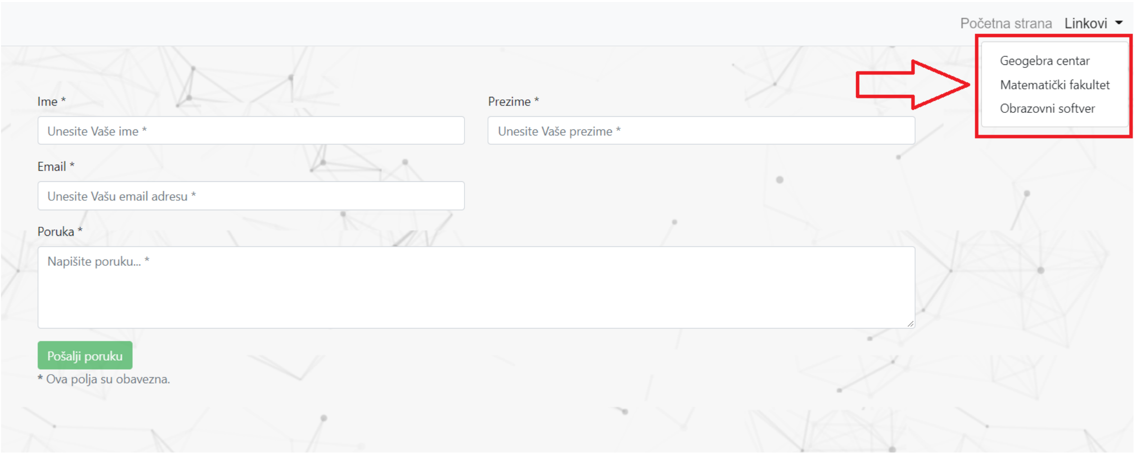


Slika 4.24: Prikazivanje dokaza



Slika 4.25: Prikazivanje rešenja

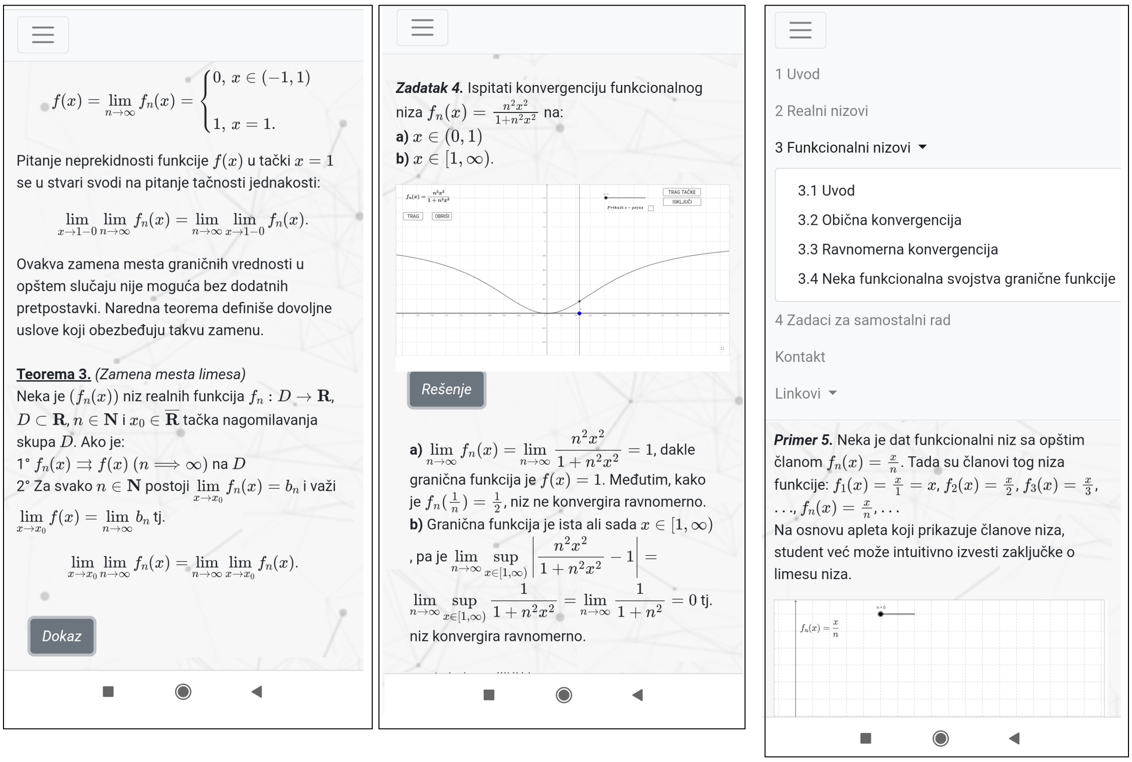
Osim odeljaka zastupljenih u ovom radu, na sajtu se nalazi i u potpunosti funkcionalna kontakt strana, kao i kartica sa linkovima ka veb-stranicama Matematičkog fakulteta u Beogradu, GeoGebra centra, odnosno ka veb-stranici radne grupe za obrazovni softver pri Matematičkom fakultetu.



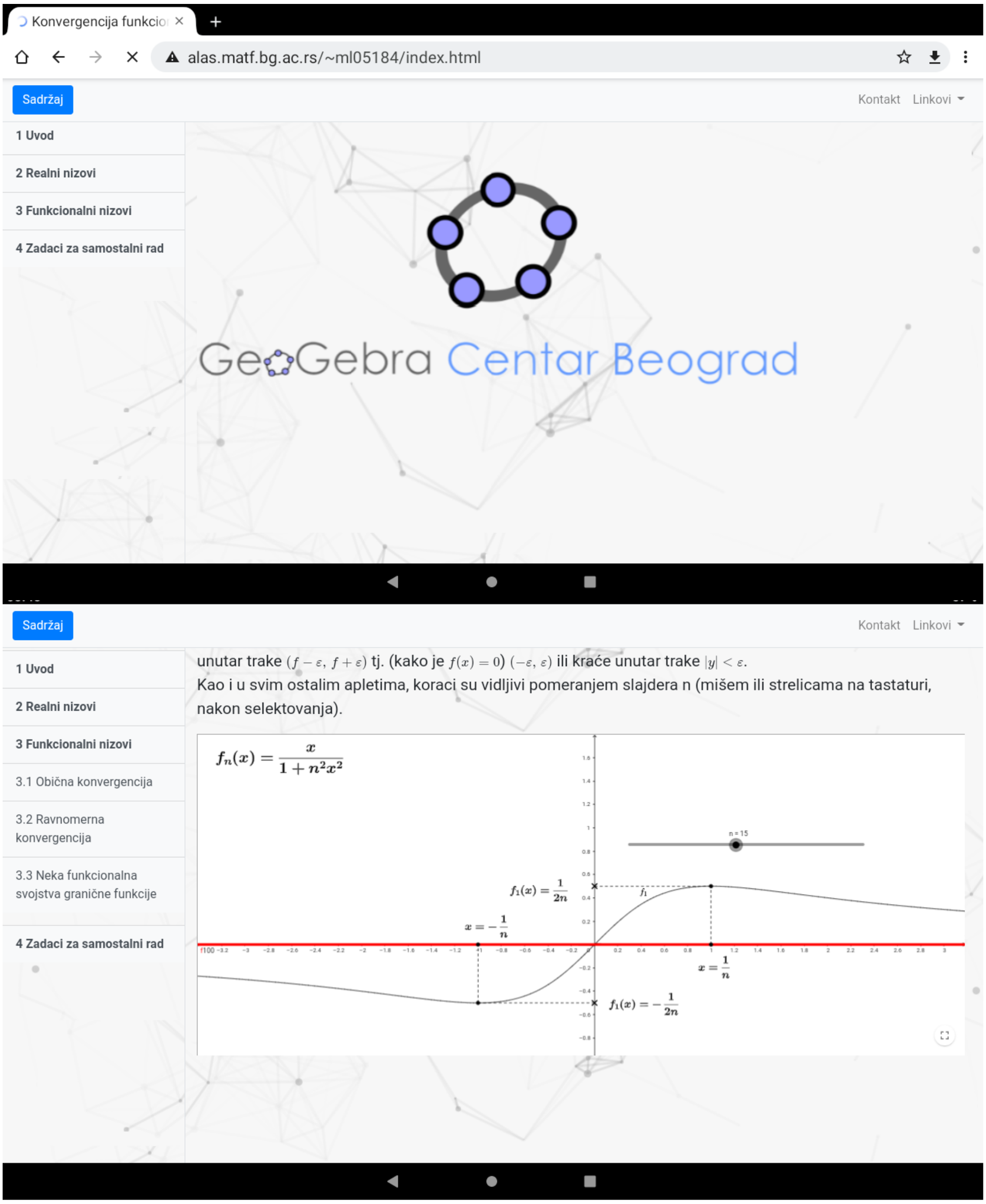
Slika 4.26: Linkovi

Responzivan dizajn

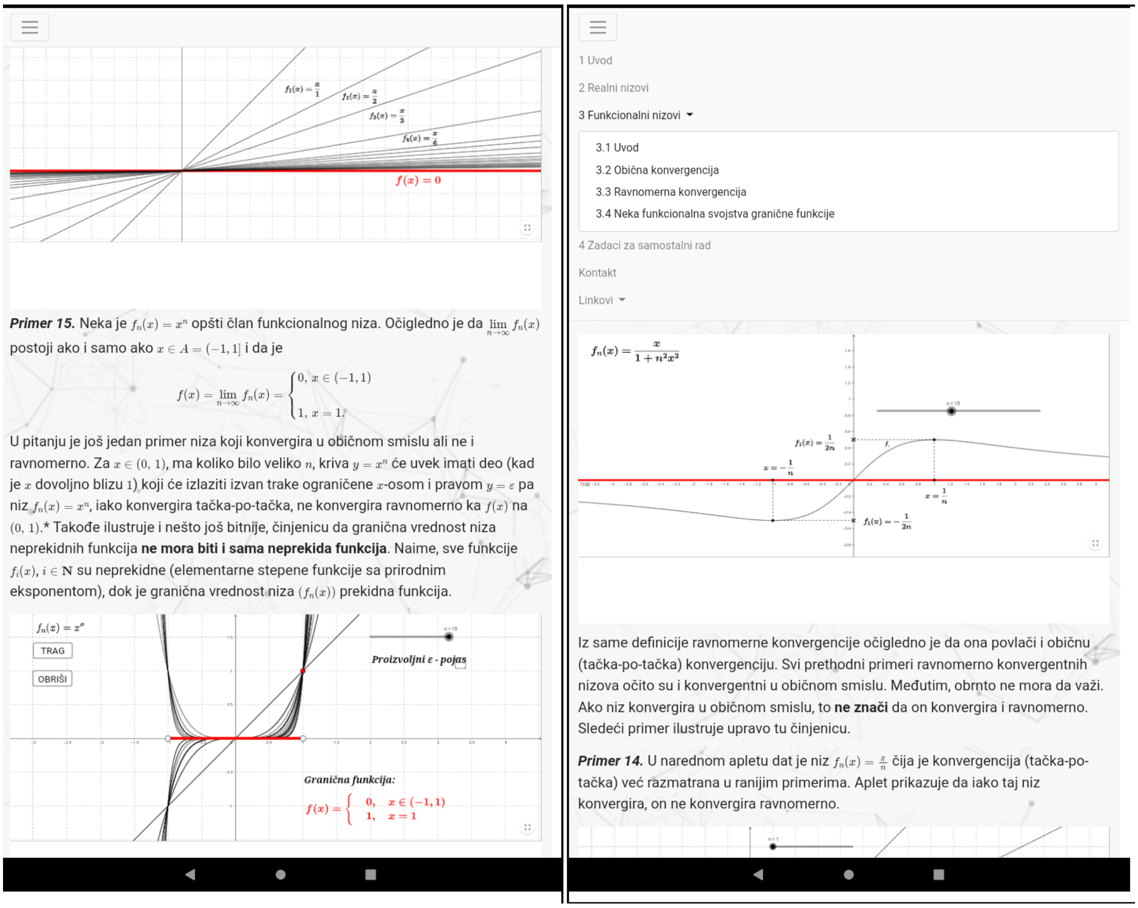
Dizajn veb-sajta je u potpunosti responzivan, odnosno sadržaj strana je, uključujući aplete, navigacijske elemente, tekst itd., prilagođen radu na različitim veličinama ekrana. Bočni meni na manjim ekranima, zbog preglednosti postaje deo navigacijskog menija, koji se i sam transformiše u odgovarajuću svedenu verziju na mobilnim uređajima (*hamburger menu*). Na narednim slikama vidljiv je izgled veb-strane na ekranu mobilnog telefona (6¨) kao i na ekranu tableta (10¨).



Slika 4.27: Izgled veb-strana na ekranu mobilnog uređaja

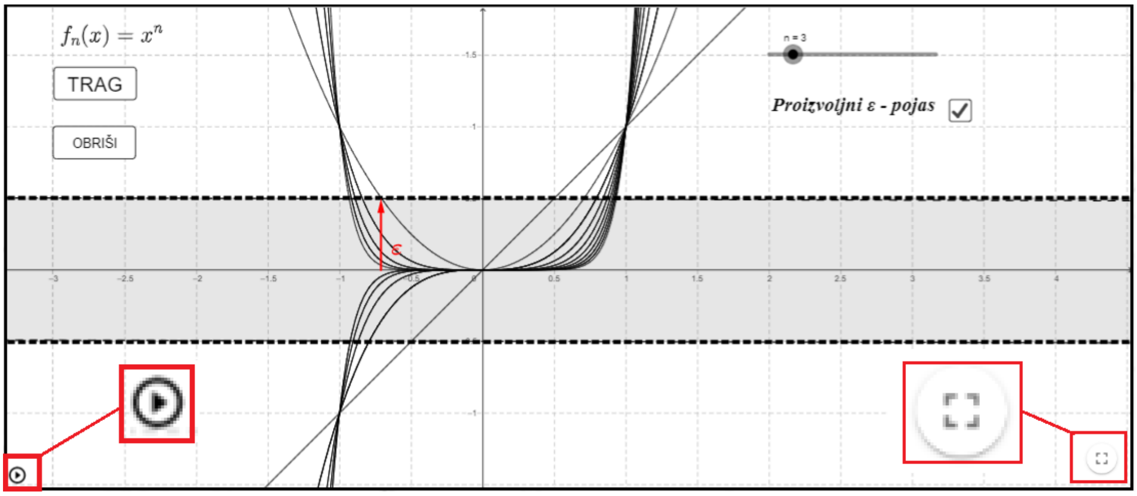


Slika 4.28: Izgled veb-strana na ekranu tablet uređaja u horizontalnom položaju



Slika 4.29: Izgled veb-strana na ekranu tablet uređaja u vertikalnom položaju

Funkcionalnost apleta je zadržana i na ekranima manjih dimezija budući da je u svaki aplet inkorporirana opcija prikaza preko celog ekrana (*fullscreen* opcija). Većina apleta ima ugrađenu i opciju pokretanja animacije jer na manjim ekranima kontrola slajdera promenljive može predstavljati otežavajuću okolnost.



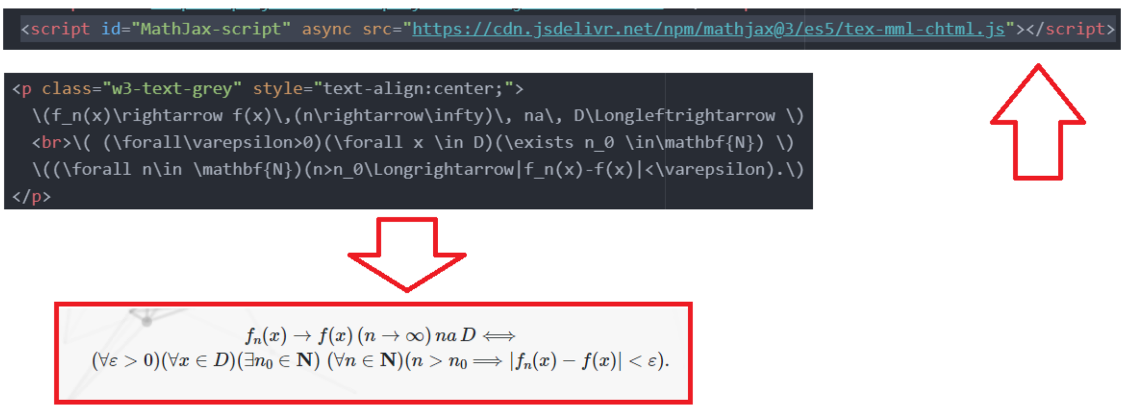
Slika 4.30: Opcije za pokretanje animacije i prikaz apleta na celom ekranu

Veb-tehnologije korišćene prilikom izrade veb-sajta

Za izradu veb-sajta korišćene su veb-tehnologije poput *HTML* (*Hyper Text Markup Language*), *CSS* (*Cascade Style Sheets*), *JavaScript* programski jezik koji programira dinamično ponašanje veb stranica sa klijentske strane, *Bootstrap 4*, radno okruženje koje funkcioniše na bazi HTML, CSS i JavaSript komponenti za kreiranje veb stranica čiji je prikaz prilagodljiv na uređajima svih rezolucija, kao i u manjoj meri *PHP* (*PHP: Hypertext Preprocessor*) serverski orijentisan programski jezik korišćen u izradi kontakt strane. Više o ovim tehnologijama dostupno je na: [32], [33], [38], [39] i [40].

Implementacija matematičke notacije u veb-stranu

Sav matematički tekst realizovan je upotrebom *MathJax* javascript mehanizma otvorenog koda za prikaz *LaTeX*, *MathML* i *AsciiMath* notacije koji obezbeđuje podršku za sve veb-pregledače u široj upotrebi. Na slici 4.31 vidi se kod u okviru <script> etikete u zaglavlju html dokumenta koji se odnosi na implemetiranje MathJax funkcionalnosti, kao i primer konkretnog koda odnosno njegove grafiče interpretacije na veb-strani.



Slika 4.31: Izvorni MathJax kod i njegova vizuelna interpetacija na veb-strani

Glava 5

Zaključak

Stanovište da studenti bolje usvajaju matematičke sadržaje ako sadrže vizuelnu komponentu nije novost. Brojna istraživanja i članci poput [15], [24], [26], to potvrđuju. Poseban značaj upotrebe vizuelnih alata prisutan je kod obrade složenijih, apstraktnijih tema naprednih kurseva matematike (poput kurseva na višim godinama studija Matematičkog fakulteta). Uzevši u obzir da je veliki broj tema na višim nivoima izučavanja matematike teško, ili čak nemoguće, adekvatno vizuelno predstaviti, potrebno je iskoristi što je moguće više, sve one situacije gde se neki matematički elementi ipak mogu vizuelizovati. Takve prilike su dragocene, te ih ne bi trebalo propuštati u nastavi. Tehnološki razvoj, kao i razvoj kvalitetnih softverskih alata, umnogome je olakšao mogućnosti grafičke realizacije matematičkog sadržaja. Takođe, nedavna pandemija virusa SARS-CoV-2 unela je tektonske promene i u način na koji percipiramo i pristupamo izvođenju obrazovnog procesa. U momentu kada se težište nastave premešta iz školskih okvira u kućne uslove, još je izraženija potreba za dostupnošću onlajn materijala, pogotovo interaktivnih. U praksi se pokazalo da GeoGebra predstavlja odličan alat za izlaganje matematičkog sadržaja. Gotovo da nema oblasti matematike koja se ne može efikasno obraditi pomoću ovog softverskog alata. Poseban je značaj upotrebe vizuelnih alata poput GeoGebre prilikom obrade tema matematičke analize. Budući da osnovni koncepti i ideje ove oblasti često predstavljaju kamen spoticanja za većinu studenata i vrlo brzo prerastaju u dosta apstraktnije i složenije konstrukte, od velikog je značaja dobro ih razumeti i usvojiti u ranoj fazi učenja. Geometrijske interpretacije fundamentalnih pojmova poput graničnih vrednosti, izvoda, određenog integrala itd.([10], [11], [14], [18], [29], [35]) vrlo se lepo i jednostavno mogu realizovati pomoću GeoGebre i na taj način predstavljaju izuzetno važan doprinos lakšem savladavanju ovih pojmova. Pozitivni efekti na razvoj, pre svega, konceputalnog znanja i intuitivnog razumevanja pojmova su očigledni (članci poput [4], [5],[20], [30], [34]). Uzevši u obzir sve navedeno, kao i činjenicu da se matematički sadržaji na višim nivoima, retko kad temeljno vizuelno obrađuju, posebno u domaćoj literaturi, ovaj rad predstavlja pokušaj da se ostvari doprinos na tom polju. Izbor je pao na razmatranje pitanja konvergencije funkcionalnih nizova, jer su oni veoma pogodan, sa stanovišta mogućnosti vizuelne obrade teme, primer apstraktnijeg pojma familije funkcija. Sve ključne ideje, koje se kasnije mogu translirati na apstraktnije i manje vizuelno dostupne tipove familija funkcija, mogu se adekvatno grafički predstaviti na primeru funkcionalnih nizova.

Bibliografija

[1] Adnadjević D., Kadelburg Z., Matematička analiza I, Matematički fakultet, Beograd, sedmo izdanje 2004.

[2] Adnadjević D., Kadelburg Z., Matematička analiza II, Matematički fakultet, Beograd, peto izmenjeno izdanje 2008.

[3] Abadi, Fardah D., Students' activities for understanding function shifting by using GeoGebra, Journal of Physics: Conference Series, Volume 1108, Mathematics, Informatics, Science and Education International Conference (MISEIC) 2018 21 July 2018, Surabaya, Indonesia.

[4] Arbain, N., Shukor, N. A. (2015). The Effects of GeoGebra on Students Achievement. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 172(2007), 208–214.

[5] Bakar, K. A., Ayub, A. F. M., and Tarmizi, R. A. (2010). Exploring the effectiveness of using geogebra and e-transformation in teaching and learning mathematics. Proc. of Intl. Conf. of Advanced Educational Technologies EDUTE, 2, 19–23.

[6] Das K., Role of ICT for Better Mathematics Teaching, Shanlax International Journal of Education, vol. 7, no. 4, 2019, pp. 19-28.

[7] Demidovič B.P., Zbirka zadataka iz matematičke analize, (na ruskom), Nauka, Moskva 1972.

[8] Diković Lj., Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level, Computer Science and Information Systems 2009 Volume 6, Issue 2, Pages: 191-203.

[9] Fihtengoljc G.M., Kurs diferencijalnog i integralnog računa, I, II, (na ruskom), Nauka, Moskva 1970.

[10] Herceg D., Herceg Đ., The definite integral and computer, Teaching of Mathemathics, 2009, Vol. XII, 1, pp. 33-44.

[11] Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., Lavicza, Z., Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra, 11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11), 2008.

[12] Judith and Markus Hohenwarter, Introduction to GeoGebra4, www.geogebra.org, 2011.

[13] Judith Preiner, Introdusing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra, Dissertation in Mathematics Education, Faculty of Natural Sciences, University of Salzburg, Salzburg, 2008.

[14] Kostić, V., Sekulić, T.(2014). Extreme Values of Function in GeoGebra Style. VisMath, 16(1), Mathematical Institute SASA, Belgrade.

[15] Lemanska M., Semanišinova I., Calvo C., Salorio M., Tobar A., Geometrical versus analytical approach in problem solving – an exploratory study, Teaching of Mathemathics, 2014, Vol. XVII, 2, pp. 84-95.

[16] Ljaško I.I., i ostali, Zbirka zadataka iz matematičke analize, (na ruskom), Viša škola, Kiev, I-1977, II-1979.

[17] Marjanović M., Matematička analiza: priručnik za učenike, studente i nastavnike, Zavod za udžbenike, Beograd, prvo izdanje 2011.

[18] Machromah I., Purnomo M., Sari C., Learning calculus with geogebra at college, Journal of Physics: Conference Series, Volume 1180, The International Conference on Mathematical Analysis, its Applications and Learning 15 September 2018, Yogyakarta, Indonesia.

[19] Merkle M., Matematička analiza, pregled teorije i zadaci, Gros knjiga, Beograd 1994.

[20] Ocal, Fatih M., The Effect of Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Applications of Derivative, Higher Education Studies, v7 n2 p67-78 2017.

[21] Osnovne informacije o programskom paketu GeoGebra: https://www.geogebra.org/about

[22] Pregled unapređenih karakteristika verzije 5.0 paketa GeoGebra: https://wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_5.0

[23] Pregled GeoGebra skript komandi: https://wiki.geogebra.org/en/Scripting_Commands

[24] Presmeg, N, (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. Emergence from Psychology. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), Handbook of research on the Psy- chology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

[25] Radenović S.,Matematička analiza II, Metodska zbirka zadataka, Studentski trg, Beograd, treće izdanje 2002.

[26] Rösken B., Rolka K., Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 457-464. Prague, 2006.

[27] Slaviša Radović, Aleksandra Stevanović, Marija Radojičić, Miroslav Marić, Programski paket GeoGebra kao interaktivni alat za izučavanje površine geometrijskih figura, Inovacije u nastavi, Vol. 26, Facs. 3, pp. 135-145, 2013.

[28] Takači Đ., Takači A., Zbirka zadataka iz analize I, prvi deo, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1997.

[29] Takači, Đ., Sekulić, T. (2014). From Real World to Derivative – How to Effectively Include Mathematical Modeling and GeoGebra in Mathematics Education. Fifth Central and Eastern European Conference on Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education (Poster section), Halle (Saale), Germany.

[30] Tatar, E., Zengin, Y. (2016). Conceptual understanding of definite integral with Geogebra. Computers in the Schools, 33(2), 120-132. https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1177480

[31] Veb sajt koji sadrži ceo materijal izložen u radu: http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml05184

[32] Veb sajt elektronske platforme za interaktivno učenje, pri Matematičkom fakultetu u Beogradu: http://www.edusoft.matf.bg.ac.rs/eskola_veba

[33] Veb sajt elektronske platforme za interaktivno učenje veb tehnologija: https://www.w3schools.com

[34] Zulnaidi, H., Zakaria, E. (2012). The effect of using Geogebra on conceptual and procedural knowledge of high school mathematics students. Asian Social Science, 8(11), 102-110. https://doi.org/10.5539/ass.v8n11p102

[35] Zulnaidi H., Oktavika E., (2012). The effect of geogebra on students' misconceptions of limit function topic. Indian Journal of Science and Technology. 5. 3802-3808.

[36] Zvanični GeoGebra veb sajt: https://www.geogebra.org

[37] Zvanični priručnik za programski paket GeoGebra: https://wiki.geogebra.org/en/Book

[38] Zvanični veb sajt posvećen programskom jeziku PHP: https://www.php.net

[39] Zvanični veb sajt posvećen programskom jeziku JavaScript: https://www.javascript.com

[40] Zvanični veb sajt posvećen alatu Bootstrap: https://www.getbootstrap.com