O STANOVIŠTIMA U GEOMETRIJI

MILOŠ RADOJČIĆ, BEOGRAD

Ako je uopšte moguće reći u tri reči šta je geometrija, rekao bih: nauka o prostoru. Ona obuhvata razne i obimne matematičke teorije. Svud je reč o prostornim odnosima. Svud se polazi od prostornih pretstava i na njih se vazda vraća. Pa ipak, velika je raznovrsnost geometrijskih teorija. Ona proizlazi iz mnogih i raznih stanovišta u geometriji. Osvrnimo se jednom na ta stanovišta. Poklonimo im jedan čas pažnje. U nauci je uopšte važno uočiti, ne samo predmet koji posmatramo, već i naučno gledište s koga posmatramo, stanovište na kome stojimo. Time se stiče zreliji odnos prema predmetu. Svaka vrsta ili grana geometrije proizlazi iz svoga karakterističnog stanovišta. Mi ta stanovišta ne možemo ni razmotriti sva. O tome bi bilo potrebno više od jednog predavanja. No razmatrajući stanovišta imaćemo priliku i da bacimo letimične poglede na glavne grane geometrije.

Kad se u antičko doba razvila elementarna geometrija kao logička nauka, kad su geometri stare Grčke počeli dokazivati i nizati stavove, izvađajući jedne iz drugih po načelu dedukcije, polazeći od malog broja pretpostavki, to beše veliko otkriće. Otkrilo se novo stanovište na koje se uspela čovečja svest: stanovište logičke dedukcije. Pronalaskom toga stanovišta rodila se ne samo geometrija kao prava nauka, već i matematika uopšte u današnjem smislu reči. Jer mislim da imaju pravo oni koji smatraju da je deduktivna metoda glavno obeležje matematike.

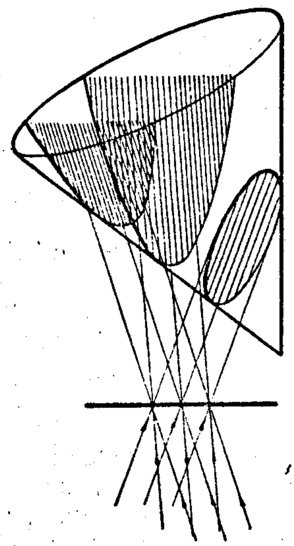
U ranija doba, kroz hiljade godina koje se gube u prehistoriji, ljudi su pronalazili i posmatrali geometrijske činjenice sa stanovišta života i mističkih pogleda na svet. Očiglednost beše jedina potpora, naslućena logička povezanost velika zagonetka. Geometrija je tada još na svome izvoru, naučne metode još nema, ona crpe iz iskustva svoje gradivo. Kako Herodot kaže, u premeravanju zemljišta poreklo je geometrije. To je dakle stanovište prakse više nego teorije, stanovište empirije, indukcije, koja tek sluti puteve dedukcije.

Iz tog prvobitnog stanja geometrija se razvila u Grčkoj upravo time što je praktičara nadjačao teoretičar, egipatsko-vavilonskog žreca grčki filosof i logičar. Ubrzo geometrija se razvila toliko da se moglo javiti delo kao što su „Elementi“ Euklida, gde se sistematski izlaže gradivo i dosledno sprovodi jedna metoda. To je stanovište nauke uopšte. Ono se prvi put javlja u geometriji.

Ali, naravno, pojavom novoga staro se ne gubi sasvim, nego se prožima novim i razvija dalje. Praksa se razvija dalje, indukcija ostaje u postulatima i aksiomama, na samom čelu dedukcije.

Za kratko vreme grčka geometrija se razvila do znatne visine. U Apolonijevoj teoriji konusnih preseka dostigla je uglavnom svoj vrhunac, koji se posle, vekovima, nije više dostizao a kamo li prestizao.

Možemo se diviti Apolonijevoj oštroumnosti u ispitivanju elipse, hiperbole, parabole, no svaka od tih krivih proučava se zasebno. Tek u 17. stoleću, u delima Keplera, Paskala, Dezarga sazreva ujedno stopljeno posmatranje tih triju krivih, što karakteriše p r o j e k t i v n u g e o m e t r i j u. Zbog te njene moći sinteze ona je nazvana još i sintetičkom geometrijom. Tu je novo stanovište. Ničući iz iskustva nauka je u davnini dohvatila prvo svako telo, svaki oblik zasebno, u njegovu odvojenom postojanju i nemenjanju. Teže je bilo pristupiti menjanju u prirodi i obuhvatanju mnoštava oblika u njihovim uzajamnim srodstvima. Zato se i razvila bila prvo elementarna geometrija, proučavajući oblike koji se takoreći ne kreću niti menjaju, izdvajajući prostorne odnose iz vremenskog toka, apstrahujući od činjenice da „sve teče". Reč „stereon", koja se javlja i u nazivu „stereometrija" i kojom su Grci nazivali geometrijsko telo, znači „čvrsto", „kruto". Cela elementarna geometrija izražava u neku ruku odnose u svetu uzajamno nepomičnih čvrstih materijalnih tela. Takvo je njeno stanovište.



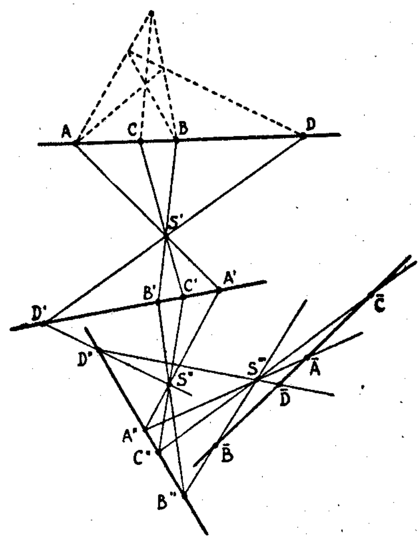
Sl. 1

Naprotiv, u projektivnoj geometriji napuštamo čvrsto telo, nema više kongruentnih oblika, jedino što prava linija ostaje prava. To nije više svet čvrstih tela u miru, već u neku ruku igra pravolinijskih zraka svetlosti u plinovitu svetu. Elipsa se tu takoreći kreće i pretvara u hiperbolu prošavši kroz oblik parabole (sl. 1); no sa stanovšita projektivne geometrije pred nama je ipak neprestano isto: konusni presek. Tu je stupilo na snagu novo načelo, koje karakteriše možda najdublje veliki preokret u matematici, koji se zgusnuo oko 17. stoleća i znači ujedno pojavu infinitezimalnog računa i njegovih dalekosežnih primena u prirodnim naukama. To je stanovište koje ubuhvata b i v a n j e, k r e t a n j e, p r e t v a r a n j e. No pri tome, saobrazno logičkoj dedukciji, geometrija nalazi i u kretanju mir, i u menjanju ono što se ne menja. Tako je npr. kad se posle ma koliko sečenja i projektovanja dobiva u projektivnoj geometriji iz harmonijske grupe tačaka A, B, C, D opet harmonijska grupa $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ (sl. 2).

Ali s tim u vezi moralo se u projektivnoj geometriji pojimanje prostora duboko izmeniti dodavanjem beskrajno dalekih, tobožnjih tačaka, tobožnjih pravih i jedne tobožnje ravni, apstraktno dodane i usled koje prostor postaje zatvoren u sebi samom, donekle analogno sferi ili drugoj zatvorenoj površi. Tako ulazi u pojam prostora već nešto što ne odgovara više našim pretstavama. Odustajemo od toga da geometrija tumači neposredno iskustvo. Tu se javlja prvi put s t a n o v i š t e n a p u š t a n j a p r o s t o r n i h p r e t s t a v a i usvajanja geometrijskih odnosa koji, štaviše, protivreče pretstavama.

Pre toga stojalo se naivno na stanovištu da geometrija mora biti veran odraz našeg iskustva u okolnom prostoru. No veliki napreci geometrije u novije doba proistekli su znatnim delom iz napuštanja toga starog stanovišta i usvajanja novog, mnogo šireg.

To se osobito pokazalo u neeuklidskim geometrijama. One se izgrađuju apstraktno logički. Kad su, vekovima, geometri pokušavali uzalud da pomoću ostalih Euklidovih pretpostavki dokažu njegov peti postulat — koji znači da postoji kroz zadatu tačku samo jedna prava paralelna datoj pravoj — nisu znali ni koliko se i kakvih problema iza toga skriva, niti da im neuspeh dolazi otud što su još sputani čulnim pretstavama, što se nisu dovoljno uzdigli do nezavisnog, čistijeg logičkog stanovišta.



Sl. 2

No ti uzaludni pokušaji doveli su, kako znamo, početkom prošlog stoleća Gausa, Lobačevskog i druge do prvih neeuklidskih geometrija. Pri tome je došlo do izraza sledeće stanovište, koje karakteriše tačnije takozvanu višu geometriju. U euklidskoj, elementarnoj geometriji nastojimo da u početku iznesemo sve pretpostavke, potrebne da bi se na njima sagradila cela zgrada elementarne, iskustvu saobrazne geometrije. U neeuklidskim geometrijama, naprotiv, uzimamo samo jedan deo tih polaznih pretpostavki, tih aksioma, postulata — a izvesnu aksiomu ili celu grupu aksioma izostavljamo ili preinačujemo. Tako nastaje takozvana apsolutna geometrija kad odbacimo aksiomu paralelnosti. Ako pak unesemo stav: da se kroz tačku van prave može povući više od jedne paralele, ili pak samo jedna, ili čak nijedna, dobivamo redom: hiperbolnu geometriju Lobačevskoga, našu euklidsku geometriju, koja se u tom sklopu ideja naziva parabolnom, i elipsnu geometriju Rimana, u kojoj prave linije nisu više beskrajne.

Isto stanovište odbacivanja i menjanja aksioma nalazimo i u projektivnoj geometriji. Ova se osniva samo na aksiomama pripadanja, rasporeda i neprekidnosti, kontinualnosti, dok su aksiome kongruentnosti i aksioma paralelnosti odbačene. Isto tako nastaje i nearhimedovska geometrija izostavljanjem Arhimedove aksiome neprekidnosti, i razne druge geometrije u savremenoj matematici.

I u topologiji, koja se razvila tek od polovine prošlog veka, stojimo na tom istom stanovištu. Topologija ne zna ni za podudarne oblike, ni za pravu i ravan: u njoj se zadržala samo neprekidnost. Ona se bavi, kao što znamo, geometrijskim osobinama koje se održavaju pri makakvim neprekidnim transformacijama. Sa stanovišta topologije krug, trougao i kvadrat su isto, jer se kontinualnim transformacijama dobivaju jedno iz drugoga. Takvi oblici zovu se homeomorfnim. I sfera, elipsoid i tetraedar su među sobom homeomorfni, ali torus nije: ne možemo ga neprekidnom transformacijom pretvoriti u sferu. Predmet topologije je, takoreći svet mekanih, deformabilnih, elastičnih tela, koja se ne kidaju niti igde slepljuju, ali gde stalnih oblika nema. Dakle i pomenuto stanovište kretanja, pretvaranja nalazimo tu ponovo.

Unesemo li u topologiju projektivne aksiome, nastaće kao njen posebni slučaj projektivna geometrija; unesemo li u projektivnu geometriju aksiome podudarnosti i uporednosti, nastaće, tek tada, kao još posebniji slučaj naša euklidska geometrija. Tako se naša obična geometrija rađa iz mnogo opštijih geometrija. Uopštavanje je, razume se, jedno od glavnih načela u matematici i jedno od najplodnijih stanovišta savremene geometrije.

Ali proučavajući opšte prostore stali smo već i na stanovište teorije množina, mnoštava, skupova, te osnovne matematičke nauke. U njoj je reč o svima mogućim, najčešće beskrajnim mnoštvima kakvih bilo elemenata, pa i geometrijskih. U njoj dolazi do pravog izraza osnovna uloga beskrajnosti u matematici uopšte. Jedan od njenih prvih i glavnih tvoraca, Kantor, pokrenuo je krajem prošlog veka time silan razvoj, kako u geometriji tako i u algebri i analizi. Teorija množina je omogućila mnogo veću oštrinu i dubinu rasuđivanja. Setimo se samo beskrajnih množina tačaka na pravoj i u ravni: tačaka nagomilavanja, otvorenih i zatvorenih mnoštava, svugde gustih i nigde gustih, perfektnih, kontinuuma i njegovih međa itd. I što se tiče same geometrije to je veličanstvena zgrada koja kristalnom jasnošću obuhvata najopštija mnoštva geometrijskih elemenata. Kako je uzan bio izbor onih oblika koji su se proučavali nekad! Počelo se u davnini s najjednostavnijim telima kao što su kocka, lopta; prešlo se na razne poliedre itd.; počelo se s pravom, tačkom, ravni, krugom; prešlo se na konusne preseke i još neke linije. Nije li jedno od glavnih obeležja grčke geometrije u zahtevu da se konstrukcije imaju vršiti samo lenjirom i šestarom? No umesto toga uzanog stanovišta, koje daje antičkoj geometriji njen stil, stali smo u teoriji geometrijskih mnoštava na obratno stanovište: ne pitamo, kako ćemo praktički konstruisati neki lik; zar bi se ona beskrajna mnoštva tačaka mogla uopšte konstruisati potpuno? Tražimo samo da ih definišemo. I ne biramo koje ćemo oblike proučavati, već razvijamo teoriju najopštijih oblika i množina oblika. U teoriji geometrijskih množina stojimo dakle na stanovištu sistematskog proučavanja makakvih, najopštijih geometrijskih tvorevina.

Razume se da i malopre spomenuta stanovišta o napuštanju prostornih pretstava i o menjanju i odbacivanju aksioma dolaze u geometrijskoj teoriji mnoštava do mnogostrukog izraza. No ta stanovišta došla su do svog najpotpunijeg izraza u proučavanju osnova i same elementarne geometrije, u aksiomatici geometrije, koja se razvila krajem prošlog i početkom ovog stoleća iz ispitivanja pokrenutih pronalaskom neeuklidske geometrije. Osobito Hilbert i njegova škola prokrčili su u tom pravcu znatan put, koji ih je doveo do ispitivanja osnova matematike uopšte, do tako zvane matematičke logike, koja, možda, više od svega drugog karakteriše matematičko istraživanje danas.

U aksiomatičkom zasnivanju i građenju geometrije apstrahujemo potpuno od neposrednog sadržaja geometrijskih pojmova i zadržavamo samo logičke oblike geometrijskih stavova. To je stanovište potpunog napuštanja geometrijskih pretstava. Ne gledamo takoreći više na geometriju kao na nauku o prostornim odnosima, već kao na posve apstraktnu nauku o praznom logičkom ustrojstvu tih odnosa. Osnovni zadaci aksiomatike sastoje se, kao što je poznato, iz tri pitanja: 1. je li aksiomama obuhvaćeno sve što je potrebno da bi se iz njih izveli svi stavovi dotične geometrije? 2. ne protivreče li aksiome jedna drugoj? i 3. ne sadrži li sistem aksioma više nego što je neophodno? — Stojeći na stanovištu odbacivanja i menjanja aksioma, aksiomatika iznalazi dokaze da je sistem aksioma potpun, neprotivrečan, i da su aksiome nezavisne među sobom. To je mnogo viši stepen apstrakcije nego što se u Euklidovo doba moglo dostići. Tek tu je logika došla do svoje prave čistote, i razumljivo je što se time pokrenuo moćan razvoj u istraživanju osnova cele matematike, koji je dubinom i oštroumnošću nadmašio, može biti, sva ranija matematička dostignuća.

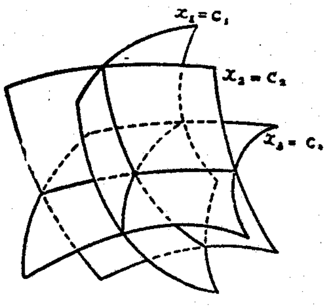
No vratimo se u prošlost. Jedan od najvažnijih događaja u razviću geometrije nastupio je u 17. stoleću otkrićem a n a l i t i č k e g e o m e t r i j e. Usled razvitka algebre u prethodnom veku nastalo je, neizbežno, prodiranje geometrije algebrom; prvo po načinu Vieta i Getaldića, koji prilaze još bez koordinatnog sistema algebarskom rešavanju geometrijskih zadataka, a uskoro potom objavljuje Dekart načela svoje geometrije, koja se temelji na koordinatnim sistemima i gde se svaki geometrijski oblik razlaže na koordinate svojih elemenata. Umesto geometrijskih konstrukcija sad se izvodi algebra, kasnije i analiza, s jednačinama u kojima se pojavljuju koordinate kao poznate i nepoznate veličine. To je k o o r d i n a t n a g e o m e t r i j a. Novo stanovište. Geometrija putem algebre, ali gde ne računamo sa svima mogućim dužima, uglovima itd., već sistematski svodimo sve veličine na samo neke, kao što su koordinate tačaka ili oni koeficijenti koji nam se u jednačinama nameću sami. Dotada sputana složenošću svojih konstrukcija, sad je geometrija mogla poći pobednički na osvajanje mnogih problema pred kojima je vekovima stojala nemoćna. Njen domašaj se umnogostručio. Stanovište takozvane čiste, tj. k o n s t r u k t i v n e g e o m e t r i j e beše zamenjeno novim, stanovištem koordinatne, analitičke geometrije.

U njoj se nastoji pre svega da se svakom geometrijskom problemu nađe odgovarajući algebarsko-analitički izraz. Pri tome je trebalo razraditi temelj novom stanovištu: ideju koordinata i njihovih uzajamnih preobražavanja. Posle Dekartovih pravolinijskih koordinata prešlo se na polarne i druge, u ravni i prostoru, dok se najzad ta središnja ideja nije shvatila u svojoj opštoj srži. Svaki postupak po kome dodeljujemo tačkama ravni parove brojeva ili tačkama prostora trojke brojeva, i obratno, daje nam izvestan koordinatni sistem u opštem smislu reči. Ako su x_1, x_2, x_3 kakve bilo koordinate tačaka u prostoru, veza s koordinatama x, y, z izvesnog pravolinijskog sistema data je određenim funkcijama opšte vrste:

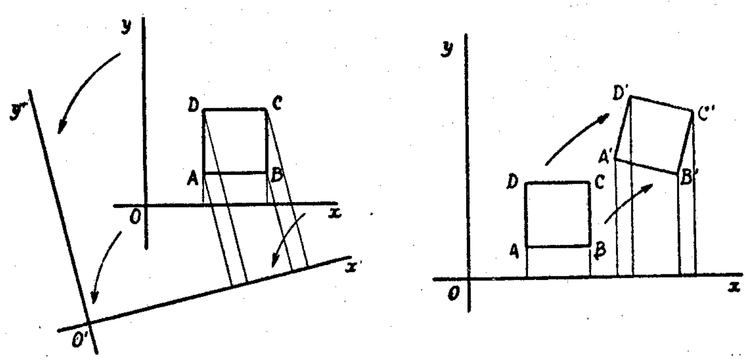
$$x_i = f_i(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3.$$

Za svaku trojku brojeva x_1, x_2, x_3 imamo tri površi (plohe) koje se seku (sl. 3), opšte uzevši, u jednoj tački, čije su to koordinate. Pravolinijski i polarni koordinatni sistem javljaju se kao posebne vrste toga opšteg, krivolinijskog sistema.

Menjanjem koordinatnih sistema postiže se velika pokretnost, koja je neophodna u rešavanju mnogih zadataka geometrije. Stanovište kretanja i pretvaranja dolazi tu do vidnog izraza. Štaviše, zanimljivo je da to isto možemo posmatrati sa još jednog stanovišta, dajući istim računskim radnjama drugo geometrijsko tumačenje: umesto da transformaciju koordinata shvatimo kao promenu koordinatnog sistema u odnosu na iste tačke, možemo je shvatiti i kao promenu tačaka u istom koordinatnom sistemu. Tada nam isti obrasci pretstavljaju nekakvo preslikavanje u ravni ili prostoru. Evo dakle dva razna stanovišta pred istim analitičkim izrazima. Tako npr. prelaz iz jednog u drugi pravougli sistem s jednakim jediničnim dužima dobiva značenje premeštanja figura (sl. 4), a prelaz iz pravouglog u kosougli sistem dobiva značenje afinog preslikavanja, kakvo vidimo npr. u odnosu nekog ravnog lika obasjanog suncem i njegove senke (sl. 5). Stanovište preslikavanja jedno je od osnovnih u savremenoj geometriji.

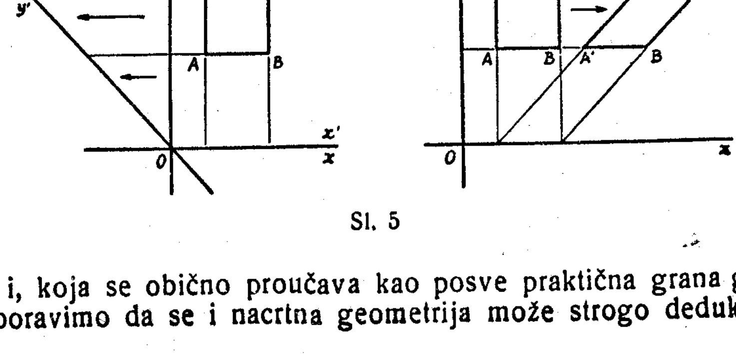


Sl. 3



Sl. 4

Projektivna geometrija je sva u tome. I proistekla je iz projektovanja likova jedne ravni na drugu ravan. Projektovanje je preslikavanje. Pravo poreklo projektivne geometrije je u perspektivi, u nacrtnoj geometriji, koja se obično proučava kao posve praktična grana geometrije. Ali ne zaboravimo da se i nacrtna geometrija može strogo deduktivno raz-



Sl. 5

viti. To je euklidska geometrija u prostoru, no izvođena putem projektovanja, konstruktivno, u ravni. To su preslikavanja prostornih oblika na ravni. Postoji dakle posebno stanovište nacrtne geometrije. S njega se ne posmatraju samo projektivni odnosi, već i afini i kongruentni.

Projektivna geometrija bavi se samo projektivnim preslikavanjem. Pri tome pravoj odgovara prava, ravni ravan, no beskrajno dalekoj, tobožnoj tački može odgovarati obična tačka i obratno. Da bi se svemu tome dao pogodan analitički izraz, moraju se uvesti svima poznate homogene koordinate, kojih ima jedna više od običnih, nehomogenih. U najprostijem slučaju to su za tačke prostora četiri koordinate X, Y, Z, U, koje stoje s običnim koordinatama x, y, z u vezama

$$x = \frac{X}{U},\ y = \frac{Y}{U},\ z = \frac{Z}{U}.$$

Tada tačku ne karakterišu više same vrednosti koordinata, već njihove razmere. Beskrajno daleke tačke su one za koje je $U = 0$. Ovo je jednačina tobožne ravni. — U opštem slučaju to su projektivne koordinate x_1, x_2, x_3, x_4, određene vezama

$$x_i = a_i\, x + b_i\, y + c_i\, z + d_i\,,\quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Jednačina ravni glasi tada

$$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 + u_4\, x_4 = 0.$$

Koeficijenti u_i određuju ravan kao što veličine x_i određuju tačku. Otud nazivamo te koeficijente projektivnim koordinatama ravni, dakle u još jednom smislu proširujemo pojam koordinata. Isto tako imamo u ravni koordinate pravih. Zakon dualnosti dobiva time usled simetrije formula svoj analitički izraz. A s t a n o v i š t e d u a l n o s t i jedno je od glavnih u projektivnoj geometriji. S njega cela ta oblast pokazuje svu svoju jednostavnu lepotu. U ideji izomorfnih grupa i ekvivalentnih geometrija dobilo je stanovište dualnosti svoj opšti oblik i značaj.

Transformacije koordinata, koje u prostoru određuju projektivno preslikavanje, su makakve homogene linearne supstitucije:

$$x'_i = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + a_{i3}\, x_3 + a_{i4}\, x_4,\quad i = 1, 2, 3, 4$$

i

$$u'_i = \alpha_{i1}\, u_1 + \alpha_{i2}\, u_2 + \alpha_{i3}\, u_3 + \alpha_{i4}\, u_4,\quad i = 1, 2, 3, 4$$

za kolineacije, a

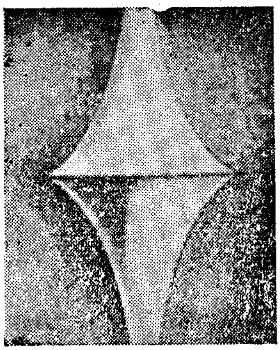
$$u'_i = b_{i1}\, x_1 + b_{i2}\, x_2 + b_{i3}\, x_3 + b_{i4}\, x_4,\quad i = 1, 2, 3, 4$$

ili

$$x'_i = \beta_{i1}\, u_1 + \beta_{i2}\, u_2 + \beta_{i3}\, u_3 + \beta_{i4}\, u_4,\quad i = 1, 2, 3, 4$$

za korelacije, koje pretvaraju tačku u ravan i obratno, u skladu s načelom dualnosti. Ali ne zaboravimo da se u geometriji proučavaju i svakovrsne opštije transformacije koje definišu opštija i drugačija preslikavanja, druge i opštije geometrije i prostore. Tako npr. imamo za obostrano jednoznačne algebarske transformacije a l g e b a r s k u g e o m e t r i j u, a za konformno preslikavanje u ravni, na površi ili u prostoru k o n f o r m n u g e o m e t r i j u.

Posebni značaj dobiva stanovište preslikavanja u neeuklidskoj geometriji kada tražimo da neeuklidsku ravan preslikamo na euklidsku i neeuklidski prostor u euklidski. Na taj način dobivamo, ipak, pretstave o prostorima koje ne možemo neposredno sebi predočiti. Tako je npr. u geometriji na sferi ostvarena planimetrija Rimanove sferne geometrije: sfera je euklidska slika ravni sfernog prostora. Tako je Beltrami ukazao na pseudosferu (sl. 6)



Sl. 6

kao na sliku jednog dela ravni Lobačevskog. Poenkare je štaviše dokazao unutarnju neprotivrečnost geometrije Lobačevskoga, preslikavši na izvestan način beskrajni prostor te geometrije u unutrašnjost lopte našeg euklidskog prostora. Pri tome odgovaraju ravnima delovi sfera a pravim kružni lukovi. Zaključio je iz mogućnosti te trodimenzione slike da je hiperbolna geometrija u sebi neprotivrečna, kao i sama euklidska geometrija.

Najzad i u aksiomatici geometrije uopšte, kad za aksiome dokazujemo neprotivrečnost, nezavisnost i potpunost, preslikavamo jednu oblast na drugu i geometriju uopšte na izvesnu oblast aritmetike, a iz neprotivrečnosti aritmetike zaključujemo da nam je i geometrija neprotivrečna. Pri tome, u stvari, stojimo istovremeno na stanovištu analitičke geometrije.

Tako se stanovišta vazda ukrštaju, udružuju i sadrže jedna u drugima, obasjavajući sve nove sklopove činjenica. Vratimo se stanovištu analitičke geometrije. Ono je omogućilo ne samo uspešno rešavanje mnogih „nerešljivih“ problema, već i otkrivanje novih oblasti geometrijskog istraživanja. I sam pojam prostora proširio se u nedogled. Pre svega, obrazovanjem pojma višedimenzionog prostora. Zatim, svakojakim menjanjem i uopštavanjem predmeta pa i osnovnih svojstava prostora. Naravno, čim smo napustili trodimenzioni prostor mogućnost predočavanja prestala je takoreći potpuno. Ali tu je upravo snaga analitičke geometrije, što su njeni računi nezavisni od prostornih pretstava i prema tome naši zaključci ostaju isto tako tačni kao da u svim tim izmišljenim prostorima konkretno živimo. Bavimo se u stvari algebrom i analizom, i rekli bismo da samo pogodni nazivi i obeležavanja čine naš rad geometrijskim, ali često su nas ta uopštenja dovela do vrlo konkretnih saznanja. Stanovište analitičke geometrije sjedinjeno sa stanovištima uopštavanja, preslikavanja itd. vode pouzdanim putovima naučnog istraživanja.

Nije uvek lako ni sagledati stanovište na kome stojimo. Obično se nova problematika počne razvijati prema još nejasnoj težnji uperenoj u izvesnom pravcu. Načela se tek utvrđuju. No u nejasnoj težnji stanovište na koje se staje već postoji skriveno. Podići u svest to stanovište znači osvrnuti se na već sagrađeno delo i tek sad ga svesno izgrađivati. Jesmo li uopšte sagledali jedno stanovište do kraja? To je, strogo uzev, nemoguće ako se ne vidi i suprotno stanovište i uzajamni odnos svih stanovišta koja s prvim imaju veze.

Tako, kad smo dodirnuli geometriju starih Grka, izneli smo neka njena stanovišta. Nismo ih pobrojali sva. Nešto najosnovnije, što ne rekosmo, je sama opštost geometrijskih istina. Još i ne sluteći Pitagorin stav biće da su sumersko-egipatski harpedonapti pokazivali najpre, možda zatezanjem konopca, na trouglu čije su strane imale dužinu tri, četiri i pet „prutova", da je jedan ugao prav. Posle se uvidelo da to vredi za sve trougle kojima se strane odnose kao 3 : 4 : 5 i da je osim toga kvadrat sagrađen nad hipotenuzom jednak zbiru kvadrata nad obema katetama. Od toga, već prilično opšteg saznanja dospelo se vremenom do još mnogo opštijeg, do Pitagorina stava za sve pravougle trougle. Put do njega bio je dug. No predmet geometrije je proučavanje tih opštih činjenica, zajedničkih svim geometrijskim objektima izvesne vrste. Te objekte možemo menjati, transformovati u izvesnim granicama — opšta činjenica ostaje. Tako npr. možemo menjati i položaj i veličinu i oblik trougla — činjenica da njegovi uglovi iznose zajedno dva prava ugla ostaje. Stanovište menjanja i preobražavanja bilo je u stvari skriveno sadržano u geometriji još od prvih njenih početaka. I, stojalo se već i na stanovištu uopštavanja, koje odlikuje svako mišljenje u pojmovima. Mi smo ga malopre našli i u visinama složenih problema savremene geometrije.

Ali ovim razmatranjem prilazimo istodobno stanovištu teorije grupa. Ono je dovelo krajem prošlog veka Klajna da odredi na izvestan način predmet elementarne geometrije. Ako se zapitamo kako smemo menjati figure da bi se održale osobine koje proučava elementarna geometrija, vidimo da položaj i veličinu figure smemo kako bilo menjati, samo „oblik" ne, jer npr. krug treba da ostaje krug. Polazna i promenjena figura moraju biti slične. Transformacije koje održavaju sličnost zovu se ekviformnim. Tačnije, one se sastoje iz translacija, rotacija oko osa, simetrija u odnosu na ravan i homotetija. Ono što se postiže uzastopnim ekviformnim transformacijama može se postići i jednom takvom transformacijom ili, kako se u teoriji grupa kaže, proizvod ekviformnih transformacija je opet ekviformna transformacija. To je ono glavno svojstvo koje odlikuje takozvanu grupu uopšte. Elementarna geometrija proučava osobine koje ostaju invarijantne spram svih ekviformnih transformacija. Nju definiše grupa tih transformacija. Tako je svaka vrsta geometrije okarakterisana izvesnom grupom transformacija prostora ili u prostoru.

Ovo stanovište je unelo mnogo svetlosti u pojedine geometrije i u njihove uzajamne odnose. Ono npr. uvršćuje u grupu topoloških transformacija projektivnu grupu kao podgrupu, afinu grupu kao podgrupu projektivne, ekviformnu kao još užu podgrupu. Tako se štaviše i elipsna i hiperbolna geometrija mogu izvesti iz projektivne grupe.

No vratimo se još jednom u 17. stoleće. Samo na pola veka iza otkrića analitičke geometrije dolazi u radovima Njutna i Lajbnica do izraza novo otkriće, jedno od najvećih u povesti matematike: pronašla se takozvana infinitezimalna metoda, matematička analiza. U njenom postanku je geometrija već imala osnovnu ulogu. Setimo se samo problema tangente, rektifikacije i kvadrature. Sad je trebalo da infinitezimalni račun prožme geometriju. Opštu osnovu je pružala analitička geometrija. Tako se razvila primena analize na geometriju, istinsko ispitivanje krivih linija, krivih površi, geometrijskih oblika vrlo opštih vrsta, pred kojima je do tog časa misao stojala nemoćna, ograničena na mali broj pristupačnih primera. Infinitezimalni račun je doneo novo stanovište s nedoglednim vidicima na sve strane.

U geometriji bilo je osobito pogodno posmatrati takozvane beskrajno male veličine, bolje reći diferencijale. U početku je analitička geometrija proučavala oblike samo u njihovoj celini, no u mnogim i nekim glavnim pitanjima behu teškoće nesavladive. One su se savladale tek kada se našao put da se zaobiđu. Trebalo je po infinitezimalnoj metodi posmatrati geometrijske odnose o malome, u blizini pojedinih tačaka, gde se beskrajno male veličine višeg reda mogu zanemariti, te se oblici uprošćavaju, krivo se može zameniti pravim i računski izrazi postaju osobito jednostavni. To je stanovište diferencijalne geometrije. Ono nas je odvelo u proširivanju i produbljivanju pojimanja prostora dalje no što bi sva ranije pomenuta stanovišta mogla zajedno sama. S pravom se smatra da je uloga diferencijalne geometrije najznačajnija u obrazovanju savremenog pojma prostora.

Potsetimo se prvo teorije krivih površi. Ako su tačke jedne površi određene u dekartovskom koordinatnom sistemu funkcijama

$$x = x\ (u,\ v),\ y = y\ (u,\ v),\ z = z\ (u,\ v)$$

dvaju parametara, imamo za svaku stalnu vrednost u ili v izvesnu liniju na površi. Sve te linije obrazuju mrežu izvesnog krivolinijskog koordinatnog sistema na površi. Diferencijal ds dužine kakve bilo krive na površi dobiva se u zavisnosti od diferencijala du i dv, kao što je poznato, iz odnosa

$$ds^2 = g_{11}\ du^2 + 2\,g_{12}\ du\ dv + g_{22}\ dv^2,$$

gde su g_{11}, g_{12}, g_{22} izvesne funkcije parametara u i v. Desni analitički izraz ima zaista osnovnu ulogu u celokupnoj teoriji površi. Ta homogena forma zove se osnovna metrička forma površi. Merenje dužina, uglova i površina površi, celokupna metrika površi potpuno je određena koeficijentima g_{ik}.

Da bi se razradila geometrija na nekoj površi nije dakle potrebno poći od koordinata x, y, z, od oblika i položaja površi u prostoru. Dovoljno je utvrditi kakve bilo koordinate u, v na površi i pronaći funkcije g_{ik}. Ove se mogu izračunati samim merenjem diferencijala ds. Dakle, da bi se razvila geometrija na površi dovoljna su merenja na samoj njoj, ne mora se izlaziti van nje u prostor. To je takozvano unutarnje stanovište, s koga razvijamo unutarnju geometriju neke površi.

Napuštanje spoljnjeg stanovišta i prihvatanje unutarnjeg postaje osobito potrebno kad se prethodno promatranje prenese na prostore triju i više dimenzija. Mogu se, pre svega, po analogiji na krive površi, zamisliti krivi prostori, koji stoje u euklidskim prostorima s više dimenzija kao što neka površ stoji u trodimenzionom euklidskom prostoru. Gledajući s unutarnjeg stanovišta, potrebne su za trodimenzioni krivi prostor tri kakve bilo koordinate u_1, u_2, u_3. Tada se metrička forma neposredno uopštava:

$$ds^2 = \sum_1^3{}_{ik}\, g_{ik}\, du_i\, du_k.$$

Njom je unutarnja geometrija krivog prostora potpuno određena.

Značajnu ulogu ima pojam krivine takvog prostora. To je uopštenje Gausove potpune krivine krivih površi. Sfera, pseudosfera i ravan su površi čija je potpuna krivina u svim tačkama jednaka, stalna: za sferu pozitivna, za pseudosferu negativna, za ravan nula. Tako je i u one tri neeuklidske geometrije: odlikuje ih stalnost potpune krivine; u elipsnom prostoru ona je pozitivna, u hiperbolnom negativna, u euklidskom (parabolnom) nula. Riman, koji je te odnose prozreo, mogao je tada lako izgraditi ideju svoga opšteg, rimanskog prostora, u kome se krivina menja od tačke do tačke, kao na makakvoj obloj površi. Pri tome je uzeo u obzir koji bilo broj dimenzija. Polazna tačka je uvek metrička forma

$$ds^2 = \sum_1^n{}_{ik}\, g_{ik}\, du_i\, du_k.$$

Veličanstvena je opštost tih rimanskih prostora. Euklidski prostor i dva njemu srodna neeuklidska su sasvim posebni slučaji. — No činilo se da nikad matematička misao nije u smelosti svojoj otišla dalje od realnosti, nego tada. Nije li već Lobačevski bio u očima sveta tvorac praznih, nepotrebnih apstrakcija? Pa ipak, upravo ti najapstraktniji Rimanovi prostori pokazali su se u Ajnštajnovoj opštoj teoriji relativnosti najbliži zbilji. Njihov proizvoljni oblik bio je upravo potreban da bi se mogao prilagoditi složenoj stvarnosti svemira.

Tu dobiva kako uopštavanje tako i unutarnje stanovište najkonkretniji značaj. Hoćemo li da konkretnim merenjem, recimo u smislu astrofizike, utvrdimo geometriju koja u svetu vlada, moramo merenja vršiti u njemu; ne možemo izići iz prirodnog prostora u nekakav četvorodimenzioni prostor i odonud proučavati ustrojstvo našeg prostora. Tu je dakle unutarnje stanovište jedino moguće.

U tom krugu problema, koji je došao do veličanstvenog izraza u teoriji relativnosti, stali smo s geometrijom na novo stanovište, jedno od najznačajnijih, na fizičko stanovište. Pitamo se kakva geometrija vlada u realnom prostoru i znamo da nam odgovor mogu dati samo posmatranja i eksperimenti. Već u specijalnoj teoriji relativnosti primoravaju nas činjenice fizike da prostor ne posmatramo odvojeno, već u jedinstvu s fizičkim zbivanjima. Nisu zbivanja podvrgnuta prostoru, već je prostor organski deo jedne, nerazdvojne vasionske zbilje. Činjenice traže da prostor i vreme stopimo u jedinstvo zasnovano na rasprostiranju svetlosti i tako izgradimo širu, prirodi srodniju matematičku teoriju. No i tada obuhvata geometrija sve svojom neeuklidskom četvorodimenzionom prostornom shemom, koja se u teoriji relativnosti naziva „svet."

U opštoj teoriji relativnosti ide to veliko stapanje dalje; gravitacija prilazi jedinstvu; geometrija gubi još više od svoje apstraktne nezavisnosti; ali opet biva u stanju da obuhvati sve snagom opštih rimanskih ili još opštijih prostora. Prostorno-vremenski svet je četvorodimenziono rimansko prostranstvo, njegova promenljiva krivina zavisi od gustine materije na pojedinim mestima. Usled postojanja toga stanovišta može se reći da geometrija uvire u fiziku; u jedinstveno gledanje na prirodu, iz koga je nekad, pre više od dve hiljade godina geometrija potekla. Ali, sad su to ogromne oblasti matematičkih teorija, koje protkivaju naša duboka saznanja o svetu.

Dalje u posmatranju raznih stanovišta u geometriji nećemo ići. Osvrnimo se samo još na vektorski i tenzorski račun, koji se često ubraja u geometriju, i na široko polje primena geometrije. Vektori nisu čisto geometrijski objekti, tenzori još manje. Opšte stanovište je matematičko, ali ne geometrijsko. Vektori su doduše smešteni u prostoru, imaju svoj smer, ali nisu nikakve duži. Npr. u mehanici sila je vektor, ali nije duž, nije geometrijski objekt, ma da ima smer i napadnu tačku. No vektori se mogu primeniti u geometriji, kao i u raznim oblastima teorijske fizike, i prikazati orijentisanim dužima.

Primene geometrije su nebrojene, ali s njima napuštamo polje same geometrije pa i predmet ovog razmatranja. O geometrijskim stanovištima u drugim naukama i oblastima ljudske delatnosti nismo nameravali govoriti. Svakom je poznato da se geometrijski mogu prikazati razne vrste objekata i u matematici i van nje, i da se razni predmeti mogu proučavati metodama geometrije. No osvrnuvši se ukratko na stanovišta u geometriji, izneli smo letimičan pregled i same geometrije i njenog razvoja ukoliko nam je to u tako zbijenom posmatranju bilo moguće.

SUR LES POINTS DE VUE QUI DOMINENT LA GÉOMÉTRIE

PAR M. RADOJČIĆ

Conférence, donnant un aperçu des diverses branches de la géométrie en considérant les principaux points de vue auxquels on ce place en géométrie.
