Универзитет у Београду
Математички факултет

МАСТЕР РАД

Птоломејева теорема, њене последице и уопштења

Ментор: Мирослава Антић

Студент: Срђан Црногорац

Београд , 2022.

Садржај

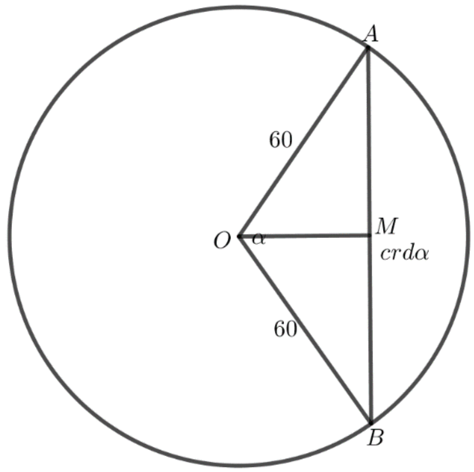
Увод

Клаудије Птоломеј (100–178. нове ере) је био грчки математичар, астроном, географ и астролог који је живео у граду Александрији, у провинцији Египат која је тада била под влашћу Римског царства. Негде између 146. и 170. године нове ере створио је Велику математичку збирку астрономије у 13 књига коју је назвао Алмагест повезујући арапско „al” са грчким „megiste” . Када су Арапи заузели Александрију, постали су наследници већег дела њеног интелектуалног наслеђа. Многа од најбољих дела грчких математичара преведена су на арапски (у многим случајевима то је био једини облик у којем су могли да преживе). Птоломејево дело је преведено као *Al magest* (највећи) и овај термин су касније усвојили Римљани под латинским именом *Almagestum*. У Алмагесту је користио не само астрономске моделе, већ и математичке алате елементарне геометрије, међу њима и тригонометрију, који су били потребни астрономији. Теорија која даје нумеричка решења геометријских проблема, укључујући углове, назива се тригонометрија. Ово буквално значи мерење троуглова. Птоломеј је обрадио ову тему у поглављима 10 и 11 прве књиге Алмагеста. Геометрија круга била је од виталног значаја за проучавање астрономије и географије (земља је округла, положај посматрача у односу на сферу). Грци нису користили модерне тригонометријске функције, али су користили акорде. За сврху астрономских прорачуна, Птолемеју је било потребно да упореди растојање између тачака на кругу или да пронађе дужину тетиве преко датог централног угла.

Птоломеј је направио табелу акорда која је била подељена у три колоне. Прва колона је приказивала углове од $(1/2)^{\circ}$ до 180° у интервалима од $(1/2)^{\circ}$. Друга колона је приказивала вредности акорда, а трећа колона је садржала шездесетине то је број који треба додати тетиви сваки пут кад се угао повећа за једну минуту. Узимајући у обзир математичке кораке које је пратио Птоломеј да би развио табеле акорда стиче се утисак да му нису били нови већ да су засновани на раније познатим теоријама које су развили Еуклид, Архимед, Аристарх, Хипарх. Али његов допринос у овом правцу био је неупитан, што се може уочити од сваког опрезног читаоца Алмагеста. Његова табела даје дужину тетиве у кругу у функцији централног угла (видети слику 1). Јасно је да је ово у својој суштини, функција синуса. Птоломеј је користио круг полупречника 60 највероватније зато што је основа Вавилонског бројевног система који је тада коришћен за рачунање. Савремени аутори означавају дужину акорда са crd (од енглеске речи chord).

У овом раду представљена је Птоломејева теорема, неке њене последице и примене. У првом поглављу је дато неколико доказа Птоломејеве теореме. У другом поглављу је изложен низ геометријских теорема које се могу извести помоћу Птоломејеве теореме. У трећем поглављу су приказана нека уопштења Птоломејеве теореме, као и теорема Тибоа.

У четвртом поглављу су наведени неки примери задатака који се решавају помоћу Птоломејеве теореме. Илустрације су израђене у Геогебри.



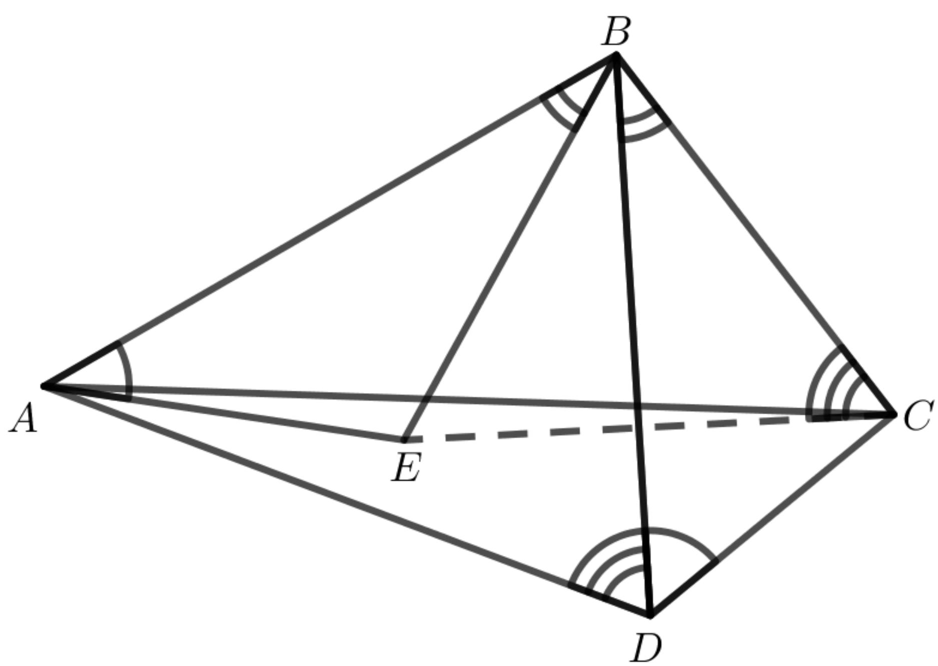
слика 1

1. Птоломејева неједнакост и једнакост за тетивне четвороуглове

У овом поглављу ћемо показати општи доказ Птоломејеве теореме као и доказе помоћу инверзије и доказ помоћу комплексних бројева.

1.1 Општи облик и доказ Птоломејеве теореме

Теорема 1. *У сваком оријентисаном конвексном четвороуглу ABCD важи следећа неједнакост:* $AB \cdot CD + DA \cdot BC \geq AC \cdot BD$, *где једнакост важи ако и само ако је четвороугао* $ABCD$ *тетиван.*



слика 2

Доказ: Нека је E тачка у равни датог четвороугла таква да су троуглови AEB и DCB слични, такви да важи $\measuredangle EBA = \measuredangle CBD$ и $\measuredangle BAE = \measuredangle BDC$ и нека је тачка E са исте стране AB као и тачке C и D(видети слику 2). Очигледно тачка E је различита од тачака A, B и C јер је $\measuredangle CBA > \measuredangle CBD$ (за прве две тачке је очигледно).

Дакле пошто је $\Delta AEB \sim \Delta DCB$, имамо $\frac{AE}{CD} = \frac{EB}{BC} = \frac{AB}{BD}$, па је

(1) $$BD = \frac{AB \cdot CD}{AE}.$$

Онда из $\measuredangle DBA = \measuredangle CBE$ и $\frac{EB}{BC} = \frac{AB}{BD}$ добијамо $\Delta ADB \sim \Delta ECB$, дакле $\frac{DA}{EC} = \frac{BD}{BC}$, па и

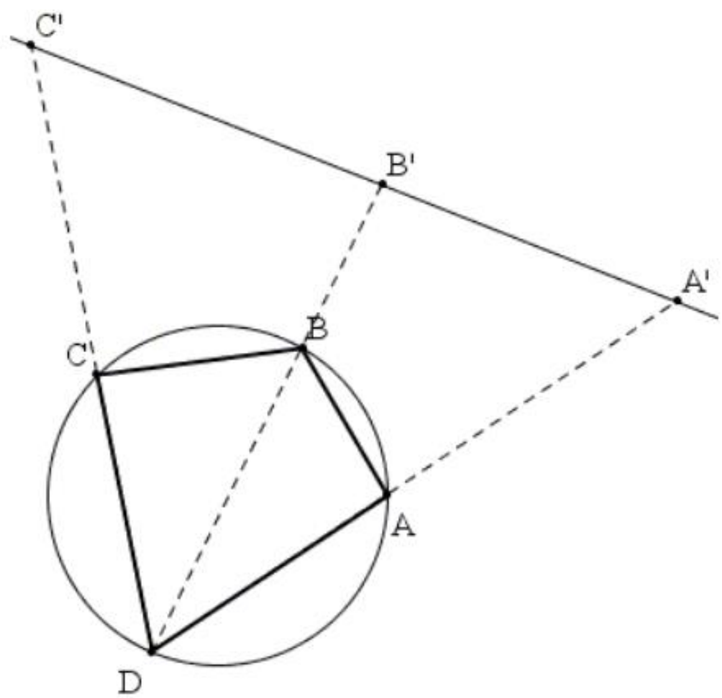
$$BD = \frac{DA \cdot BC}{EC}. \tag{2}$$

Коначно применом неједнакости троугла на тројку тачака A , E и C добијамо $AE + EC \geq AC$, што је еквивалентно са $AE \cdot BD + EC \cdot BD \geq AC \cdot BD$. Затим користећи (1) и (2) добијамо тражену неједнакост.

Уочимо да једнакост важи ако и само ако су тачке A , E и C колинеарне што је еквивалентно са $\measuredangle BAC = \measuredangle BAE = \measuredangle BDC$ тј. ако и само ако је четвороугао $ABCD$ тетиван. ■

1.2 Инверзија у односу на круг

Показаћемо сада тврђење помоћу инверзије у односу на круг. Инвертујемо целу конфигурацију у односу на круг са центром D и неким полупречником r.



слика 3

Том инверзијом се тачке A, B, C сликају у A', B' и C'. За те тачке важи $A'B' + B'C' \geq A'B'$. Присетимо се својства инверзије да чува углове и формуле за растојање:

$$P'Q' = r^2 \cdot \frac{PQ}{OP \cdot OQ}. \tag{3}$$

Односи се на дужину сегмента PQ и $P'Q'$ где су P' и Q' слике од P и Q при инверзији у односу на круг са центром O полупречника r.

Применом (3) добијамо:

$$A'B' = r^2 \cdot \frac{AB}{DA \cdot DB},$$

$$B'C' = r^2 \cdot \frac{BC}{DB \cdot DC},$$

$$A'C' = r^2 \cdot \frac{AC}{DA \cdot DC}.$$

Сада се неједнакост $A'B' + B'C' \geq A'B'$ своди на: $AB \cdot CD + DA \cdot BC \geq AC \cdot BD$. Једнакост важи ако и само ако су тачке A', B', C' колинеарне и то тако да је B' између A' и C'. Еквивалентно је да су A, B, C, D концикличне и то тако да је $ABCD$ тетивни четвороугао. ■

1.3 Доказ помоћу комплексних кордината

Сада ћемо представити доказ који користи комплексне координате тачака у равни. Подсетимо се да је једначина инверзије у односу на јединични круг дата следећом формулом:

$$\Psi_{к}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2}, \frac{x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}\right)$$

тј.

$$\Psi_{к}(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}},$$

где су (x_1, x_2) реалне координате, а $z = x_1 + ix_2$ комплексна координата произвољне тачке равни.

Нека су A, B, C и D тачке комплексне равни и нека је координатни систем такав да A има кординату 0, а B, C и D координате b, c и d. Инверзијом у односу на јединични круг тачке B, C и D се сликају у B_1, C_1, D_1 са координатама $b_1 = \frac{1}{\bar{b}}$ $c_1 = \frac{1}{\bar{c}}$ $d_1 = \frac{1}{\bar{d}}$.

Тада је:

$$|B_1C_1| = |c_1 - b_1| = \left|\frac{\bar{c} - \bar{b}}{\bar{b}\bar{c}}\right| = \left|\frac{c - b}{bc}\right|,$$

$$|C_1D_1| = |d_1 - c_1| = \left|\frac{c - d}{cd}\right|,$$

$$|B_1D_1| = |d_1 - b_1| = \left|\frac{d - b}{db}\right|.$$

Применимо сада неједнакост троугла на тачке $B_1C_1D_1$:

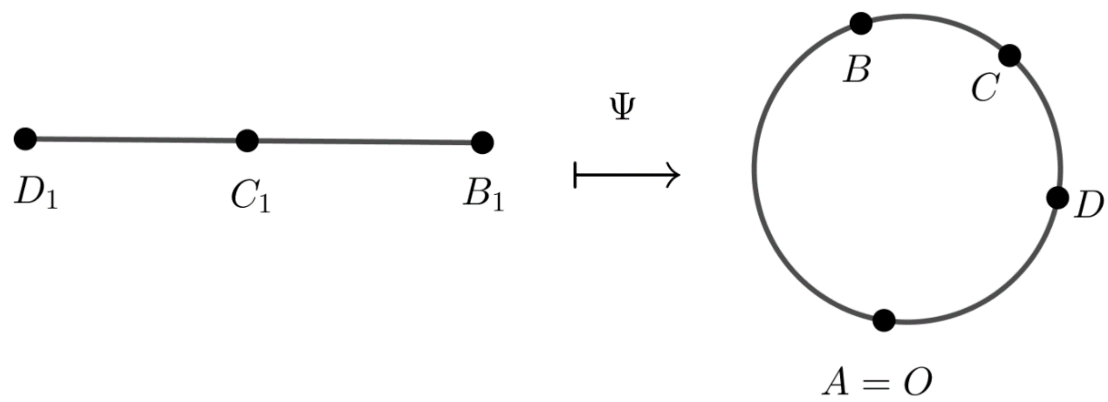
$$|B_1C_1| + |C_1D_1| \leq |B_1D_1|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{c - b}{bc}\right| + \left|\frac{c - d}{cd}\right| \leq \left|\frac{d - b}{db}\right|$$

$$\Leftrightarrow |d-0|\ |c-b| + |b-0|\ |c-d| \leq |c-0|\ \ |d-b|$$

$$\Leftrightarrow |DA|\ |BC| + |BA|\ |CD| \leq |CA|\ \ |DA|\ .$$

При томе једнакост важи ако и само ако је C_1 тачка дужи B_1D_1 тј. ако и само ако су A , B , C и D концикличне



слика 4

и A и C припадају разним луковима BD .

Дати докази преузети из [1] и [5] .

2. Примена Птоломејеве теореме

Помоћу Птоломејеве теореме може се доказати велики број других геометријских тврђења. Приказаћемо у овом поглављу неке од тих примена Птоломејеве теореме.

2.1 Примена на косинусну теорему и адиционе формуле

Многе теореме у тригонометрији могу се доказати као последице Птоломејеве теореме.

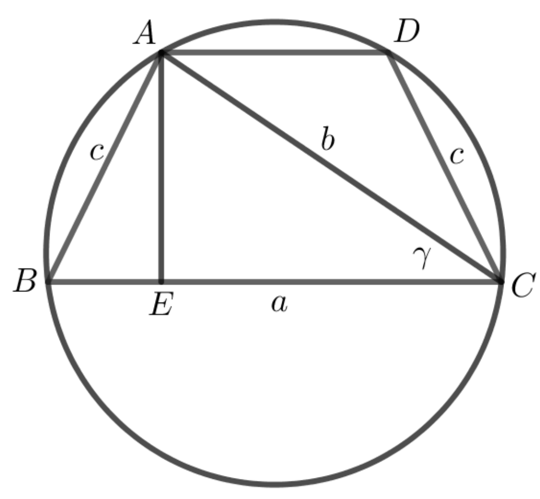
Теорема 2. (**Косинусна**): *Нека су* a , b *и* c *дужине страница троугла* ABC *и* α , β *и* γ *њима одговарајући углови тада важи:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ ,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad и$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \ .$$

Доказ: Посматрајмо троугао ABC у којем је угао $\gamma < 90°$ опишимо му кружницу. Кроз тачку A повуцимо паралелу странице BC и нека је тачка D пресек те паралеле и кружнице. Тиме смо добили једнакокраки трапез $ABCD$ у којем је $AB = CD = c$ и $BD = AC = b$ (видети слику 5).



слика 5

Кроз тачку A повуцимо нормалу на страницу BC. Означимо са E подножје те нормале. Троугао AEC је правоугли те важи $CE = b\cos\gamma$. Тада је

$$BE = a - CE = a - b\cos\gamma \ .$$

Како је $ABCD$ једнакокраки трапез важи $AD = BC - 2BE$ па користећи предходну једнакост имамо да је:

$$AD = a - 2(a - b\cos\gamma) = 2b\cos\gamma - a\,.$$

Применом Птоломејеве теореме на четвороугао $ABCD$ добијамо:

$$b^2 = c^2 + a(2b\cos\gamma - a)\,,$$

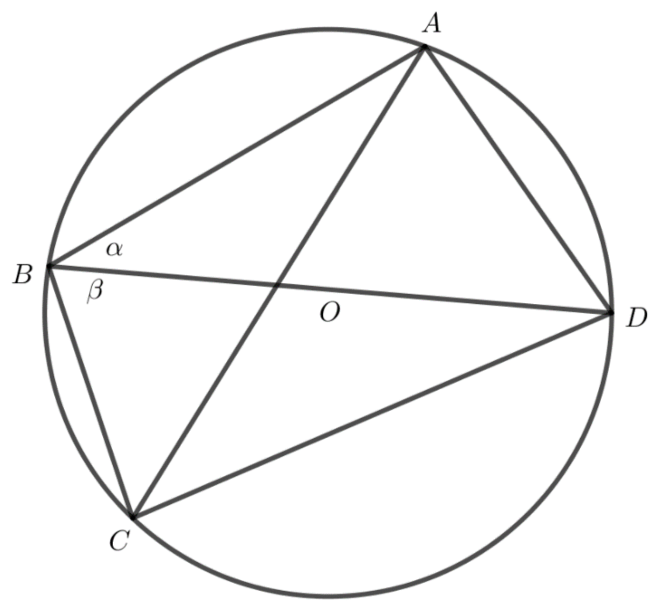
односно

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Сличан је поступак уколико је $\gamma > 90°$. ■

Теорема 3. (**Адициона формула за синус збира**): *Нека су дати углови* α *и* β *. Тада важи:*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.$$



слика 6

Доказ: Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао уписан у кружницу полупречника $r = \frac{1}{2}$ тако да је BD његов пречник. Уочимо углове $\measuredangle ABD = \alpha\,, \measuredangle DBC = \beta$ (видети слику 6). Како је периферијски угао над пречником прав следи троуглови ABD и BCD су правоугли па важе следеће једнакости:

$$BD = 1\,, \qquad AB = \cos\alpha, \quad AD = \sin\alpha\,, \quad BC = \cos\beta\,, \quad CD = \sin\beta\,.$$

Даље применом синусне теореме на троугао ABC имамо да је:

$$\frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = 2r\,,$$

односно

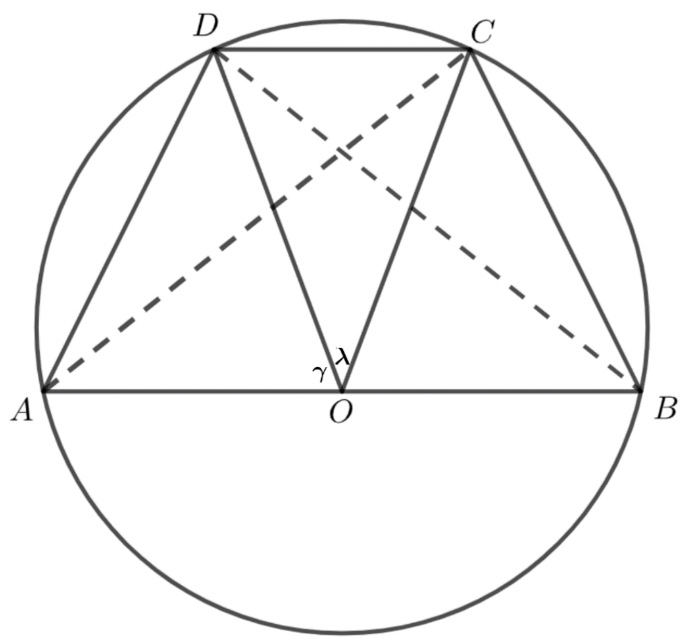
$$AC = \sin(\alpha + \beta)\,.$$

Коначно применом Птоломејеве теореме на четвороугао $ABCD$ добијамо:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,. \qquad \blacksquare$$

Теорема 4. (**Адициона формула за синус разлике**): *Нека су дати углови* α *и* β *. Тада важи:*

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.$$



слика 7

Доказ: Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао са пречником AB . Уочимо углове $\measuredangle AOD = \gamma$, $\measuredangle DOC = \lambda$ и нека је r полупречник његове описане кружнице који је дужине AO (видети слику 7). Како су углови $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB = 90°$ (периферијски угао над пречником је прав) следи троуглови ABC и ABD су правоугли па важе следеће једнакости:

$$AD = 2r\sin\frac{\gamma}{2}, \qquad DC = 2r\sin\frac{\lambda}{2}\,, \qquad AC = 2r\sin\frac{(\gamma+\lambda)}{2}\,,$$

$$DB = 2r\sin\frac{(180° \; - \gamma)}{2} = 2r\cos\frac{\gamma}{2}\,,$$

$$BC = 2r\sin\frac{(180° \ -\gamma-\lambda)}{2} = 2r\cos\frac{\gamma+\lambda}{2} \ .$$

Применом Птоломејеве теореме на $ABCD$ и користећи наведене једнакости добијамо:

$$\sin\frac{\gamma+\lambda}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\lambda}{2} + \sin\frac{\lambda}{2} \ .$$

Уводимо смену:

$$\frac{\gamma+\lambda}{2} = \alpha\ , \qquad \frac{\gamma}{2} = \beta\ ,$$

након чега последња једначина постаје

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)\ ,$$

што је требало и показати. ■

Дати докази су преузети из [1] и [3] .

2.2 Даља примена Птоломејеве теореме на нека посебна геометријска тврђења

Сада ћемо показати како се нека од специфичних геометријских тврђења могу доказати помоћу Птоломејеве теореме. Неки од ових доказа се могу наћи у [1] , [2] , [5] и [6] .

Теорема 5. (**Карноова**) *Ако је O центар кружнице описане око $\Delta A_1A_2A_3$, и d_1, d_2, d_3 су растојања тачке O од страница A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 редом тада је*

$$\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3 = R + r\ ,$$

где су R и r полупречници описане односно уписане кружнице троугла $\Delta A_1A_2A_3$ док је знак уз d_i „+“ уколико су тачка O и теме A_i са исте стране праве A_jA_k и „-“ у супротном.

Доказ: Обележимо са B_1 , B_2 , B_3 средине страница A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 , редом. Те тачке су истовремено и подножја нормала из центра O на странице троугла $A_1A_2A_3$. Нека је даље

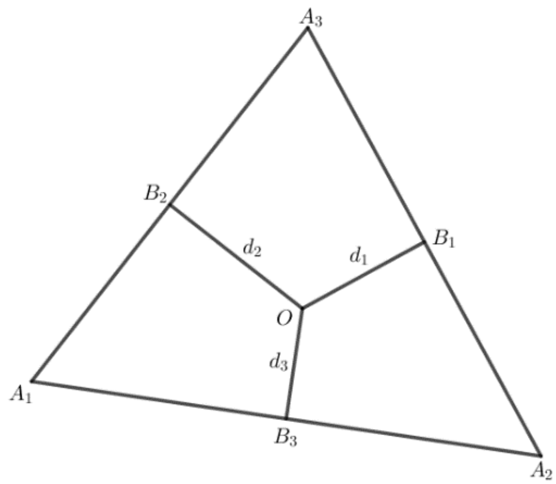
$$|A_2A_3| = a_1\ ,\ |A_3A_1| = a_2\ ,\ |A_1A_2| = a_3\ .$$

Нека је $\Delta A_1A_2A_3$ оштроугли. Примењујући Птоломејеву теорему на тетивне четвороуглове $OB_1A_3B_2$, $OB_2A_1B_3$, $OB_3A_2B_1$ добијамо редом:

$$\left(\frac{a_2}{2}\right)d_1 + \left(\frac{a_1}{2}\right)d_2 = \left(\frac{a_3}{2}\right)R\ , \tag{4}$$

$$\left(\frac{a_3}{2}\right)d_2 + \left(\frac{a_2}{2}\right)d_3 = \left(\frac{a_1}{2}\right)R\ , \tag{5}$$

$$\left(\frac{a_1}{2}\right)d_3 + \left(\frac{a_3}{2}\right)d_1 = \left(\frac{a_2}{2}\right)R\ . \tag{6}$$



слика 8

С обзиром да је O унутрашња тачка $\Delta A_1A_2A_3$, збир површина троуглова ΔOA_2A_3 , ΔOA_3A_1 , ΔOA_1A_2 једнак је површини $\Delta A_1A_2A_3$. Отуда је

(7) $$\left(\frac{a_1}{2}\right)d_1+\left(\frac{a_2}{2}\right)d_2+\left(\frac{a_3}{2}\right)d_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)\cdot r\ .$$

Из (4) , (5) , (6) , (7) следи

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)(d_1+d_2+d_3)=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)(R+r)\,.$$

Односно

$$d_1+d_2+d_3=R+r.$$

Ако је $\Delta A_1A_2A_3$ тупоугли са тупим углом код темена A_1 тада уместо (4) , (5) , (6) , (7) , имамо

$$\left(\frac{a_2}{2}\right)d_1+\left(\frac{a_3}{2}\right)R=\left(\frac{a_1}{2}\right)d_2\,,$$

$$\left(\frac{a_3}{2}\right)d_2+\left(\frac{a_2}{2}\right)d_3=\left(\frac{a_1}{2}\right)R\,,$$

$$\left(\frac{a_2}{2}\right)R+\left(\frac{a_3}{2}\right)d_1=\left(\frac{a_1}{2}\right)d_3\,,$$

$$-\left(\frac{a_1}{2}\right)d_1+\left(\frac{a_2}{2}\right)d_2+\left(\frac{a_3}{2}\right)d_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)(R+r)\,.$$

Ово важи јер је тачка O изван $\Delta A_1A_2A_3$ и његова површина једнака је збиру површина троуглова ΔOA_3A_1 и ΔOA_1A_2 умањеном за површину ΔOA_2A_3. Тако добијамо

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(-d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(R + r)$$

односно

$$-d_1 + d_2 + d_3 = R + r\,.$$

Ако је туп угао код A_2 или A_3 , добија се формула слична предходној, само што је знак – испред d_2 односно d_3. Уочимо и то да највише један од сабирака d_1 , d_2 , d_3 може да буде негативан. То је управо онај d_i за који је $\sphericalangle A_i$ туп. ■

Теорема 6. (**Јапанска**) *У тетивном четвороуглу $ABCD$ збир полупречника кружница уписаних у троуглове ABC и ADC једнак је збиру полупречника кружница уписаних у троуглове ABD и BCD .*

Доказ: Нека је O центар описане кружнице око четвороугла $ABCD$ нека су d_1 , d_2 , d_3 , d_4 и e , f растојања тачке O од страница AB , BC , CD , DA и дијагонала AC и BD , редом. Ако са r_1 , r_2 , r_3 , r_4 обележимо полупречнике кружница уписаних у троуглове ABC , ADC , ABD , BCD , редом и са R полупречник кружнице описане око четвороугла $ABCD$, тада на основу **Теореме 5** имамо:

$$r_1 + r_2 = (d_1 + d_2 \mp e - R) + (d_3 + d_4 \mp e - R)\,,$$
$$r_3 + r_4 = (d_1 + d_4 \mp f - R) + (d_2 + d_3 \mp f - R)\,.$$

Заиста ако су тачке O и B са исте стране дијагонале AC тада су O и D са разних страна AC и обрнуто. Према томе ако растојање e учествује у ΔABC са знаком „+“ тада у ΔADC учествује у са знаком „-“ и обрнуто. Ако пак O лежи на AC, e је једнако 0 за оба троугла. У свим случајевима добијамо да је допринос растојања e десној страни прве једнакости једнак 0 . Слично је и са f у другој једнакости. Отуда је

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - 2R\,. \qquad ■$$

Теорема 7. (**Бретшнајдер**) *Предпоставимо да је $ABCD$ конвексни четвороугао онда је*

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot cos(\measuredangle B + \measuredangle D)\,,$$

где су $\measuredangle B$ и $\measuredangle D$ наспрамни унутрашњи углови четвороугла.

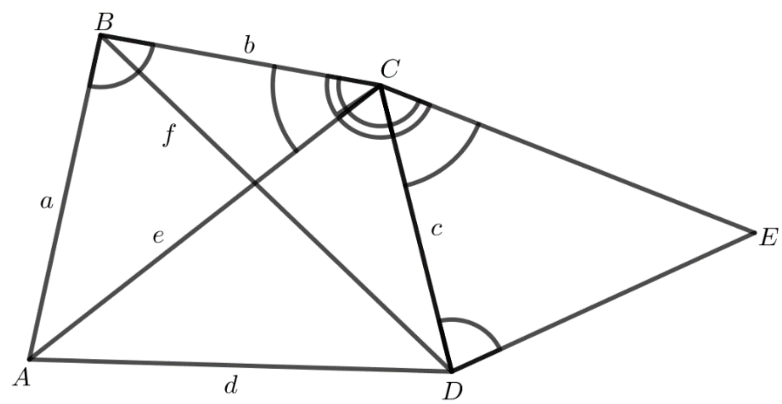
Доказ: Означимо дужине странице AB , BC , CD , DA , AC , BD датог четвороугла односно са a , b , c , d. Уочимо тачку E изван датог четвороугла $ABCD$ такву да је $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBA$ и $\sphericalangle DCE = \sphericalangle BCA$, онда $\Delta CDE \sim \Delta CBA$ (видети слику 9).

Онда $\frac{CD}{CB} = \frac{DE}{BA} = \frac{EC}{AC}$, односно $\frac{c}{b} = \frac{DE}{a} = \frac{EC}{e}$ што подразумева $DE = \frac{ac}{b}$ и $EC = \frac{ce}{b}$. Из једнакости углова $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACE$ и пропорције $\frac{BC}{AC} = \frac{CD}{CE}$ следи $\Delta BCD \sim \Delta ACE$. Отуда $\frac{BC}{AC} = \frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE}$, односно $\frac{b}{e} = \frac{c}{CE} = \frac{f}{AE}$. Значи $CE = \frac{ce}{b}$ и $AE = \frac{ef}{b}$. Примењујући косинусну теорему на троугао ADE , добијамо:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2 \cdot AD \cdot DE \cdot \cos(\measuredangle ADE)\ ,$$

односно

$$\frac{e^2f^2}{b^2} = d^2 + \frac{a^2c^2}{b^2} - 2 \cdot d \cdot \frac{ac}{b} \cdot \cos(\measuredangle B + \measuredangle D)\ .$$



слика 9

Следи

$$e^2f^2 = b^2d^2 + a^2c^2 - 2 \cdot abcd \cdot \cos(\measuredangle B + \measuredangle D). \qquad \blacksquare$$

Имајмо на уму ако је четвороугао $ABCD$ тетиван, његови супротни углови су суплементи, тако да $e^2f^2 = b^2d^2 + a^2c^2 - 2 \cdot abcd \cdot \cos(180°) = (ac + bd)^2$ даје $ef = ac + bd$. У општем случају пошто $\cos(\measuredangle B + \measuredangle D) \geq -1$ добијамо $ef \geq ac + bd$ па из предходне и косинусне теореме можемо извести Птоломејеву теорему.

Теорема 8. (**Фурман о тетивном шестоуглу**) *Нека је $LMNPQR$ конвексан шестоугао уписан у круг чије су странице $a = LM$, $b = QR$, $c = NP$, $a' = PQ$, $b' = MN$, $c' = LR$ и нека су његове дијагонале $e = NR$, $f = LP$, $g = MQ$ (тако да a , a' и e немају заједничко теме , исто важи и за b , b' и f). Тада важи:*

$$efg = aa'e + bb'f + cc'g + abc + a'b'.$$

Доказ: Уочимо унутар датог шетстоугла четвороуглове $LMNP$ и $MNPQ$ (видети слику 10). Применом Птоломејеве теореме на уочене четвороуглове следи:

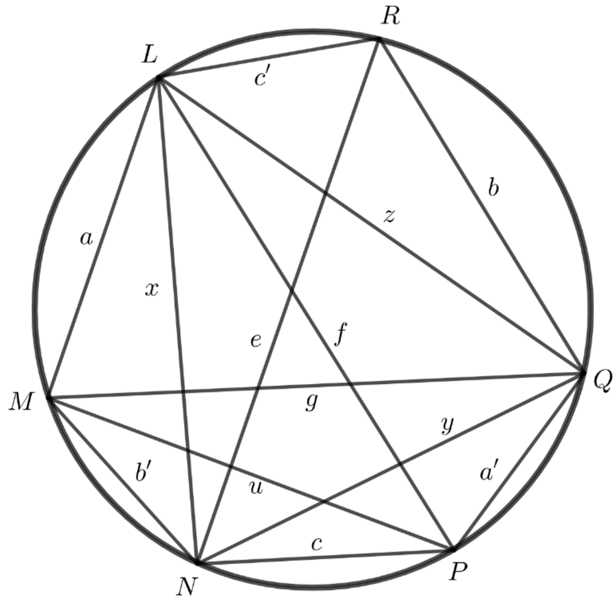
$$b'f + ac = ux \text{ и } cg + a'b' = uy\ .$$

Множењем са b и c' односно сабирањем добијамо:

$$cc'g + bb'f + abc + a'b'c' = u(bx + c'y) = uez = euz = e(fg - aa')\ ,$$

што доводи до жењене формуле. $\blacksquare$

Ова теорема може се сматрати проширењем Птоломејеве теореме на шестоугао.

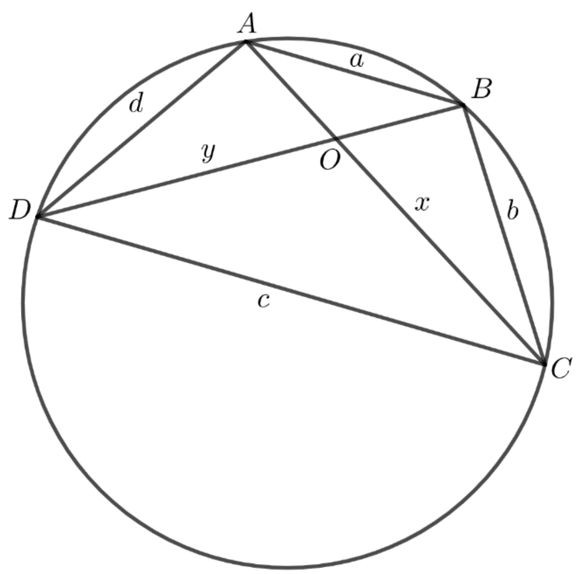


слика 10

Теорема 9. (**Брахмагупта-Алади**) За тетиван четвороугао чије су странице a, b, c, d важи

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

где су x и y дијагонале датог четвороугла.



слика 11

Доказ: Нека је $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = x$, $DB = y$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ADC = 180° - \beta$. Применимо косинусну теорему на троуглове ABC и ADC

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\beta \qquad / \cdot cd$$
$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cdcos\beta . \qquad / \cdot ab$$

Сабирањем ових једнакости добијамо:

$$x^2(cd + ab) = a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab = ad(ac + bd) + bc(ac + bd)$$

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{cd+ab},$$

као и

$$y^2 = \frac{(ac+bd)(cd+ab)}{ad+bc},$$

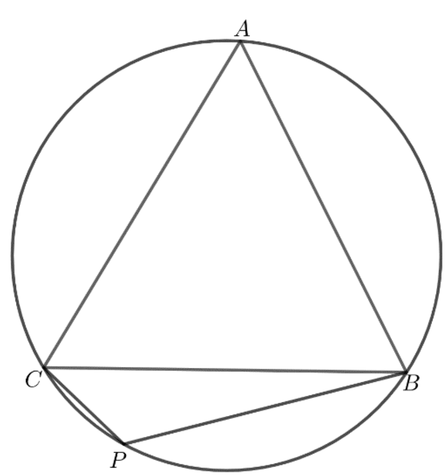
$x^2 \cdot y^2 = (ac + bd)^2$, односно $x \cdot y = ac + bd$.

Производ једнакости x^2 и y^2 даје Птоломејеву теорему, а њихов количник даје Брахмагуптину теорему. ■

Теорема 10. (**Ван-Схотен**) *Нека је P тачка на краћем луку BC круга описаног око једнакостраничног троугла ABC тада је $PB + PC = PA$.*

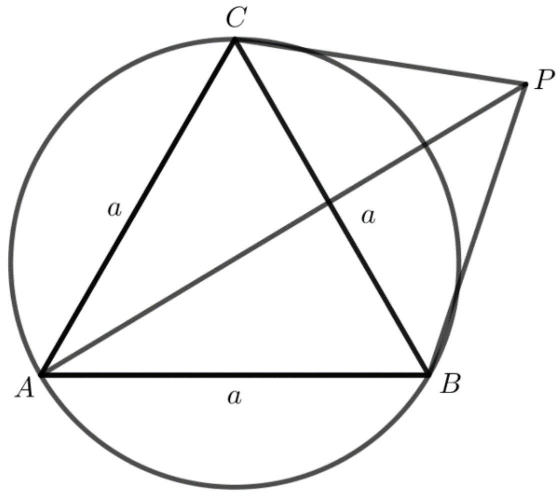
Доказ: Четвороугао $ABPC$ је тетиван. Нека $BC = AC = AB = a$. Из Птоломејеве теореме следи $BC \cdot PA = AC \cdot BP + AB \cdot PC$ тј. $a \cdot PA = a \cdot PB + a \cdot PC$ одакле даље добијамо

$$PB + PC = PA.$$ ■



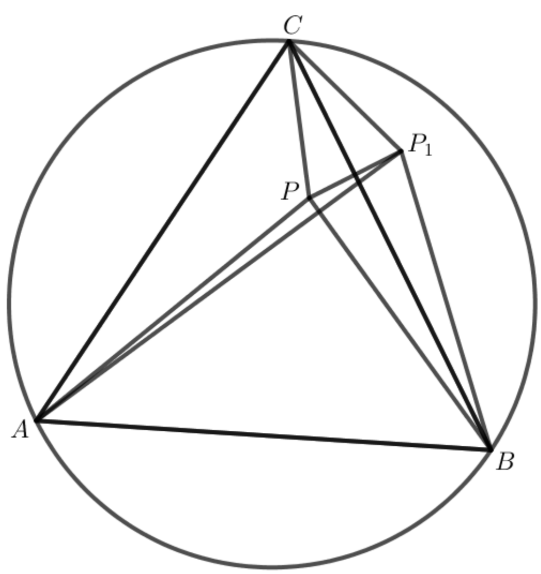
слика 12

Теорема 11. (**Помпеју**) *Ако P не припада описаном кругу око једнакостраничног троугла ABC онда постоји троугао са странама PA, PB, PC.*



слика 13

Доказ: Нека се тачка P налази изван троугла ABC и нека припада углу $\measuredangle BAC$. У троуглу BAP је $\measuredangle BAP \leq 60°$ а $\measuredangle ABP \geq 60°$ па је $\measuredangle BAP \leq \measuredangle ABP$ а самим тим је $AP > BP$. Слично $AP > PC$. Четвороугао $ABPC$ је конвексан па важи коришћењем Птоломејеве неједнакости да је $a \cdot PB + a \cdot PC \geq a \cdot PA$. При томе како тачка P не припада кругу описаном око троугла ABC важи строга неједнакост. Зато је $PB + PC \geq PA$. А како су дужи PB и PC краће од PA важе и остале неједнакости троугла.



слика 14

Нека тачка P припада унутрашњости троугла ABC и нека су нпр. PB и PC мање од PA. Нека је P_1 тачка симетрична P у односу на BC (видети слику 14). Тада је $PB = P_1B$, $PC = P_1C$, а из претходног $P_1\,B\ + P_1\,C\ > P_1\,A$. Угао који PA заклапа са висином троугла ABC из A је мањи од 60°, док је угао $\measuredangle APP_1$, њему суплементан, већи од 120° степени. Зато је он највећи угао у троуглу APP_1 , а самим тим AP_1 је највећа страна тог троугла. Зато је $APP_1 > AP$. Овим је доказ завршен. ■

Теорема 12. *Нека је M тачка мањег лука A_1A_{2n+1} кружнице описане око правилног $2n+1$-угла $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$ $(n \geq 1)$. Тада је*

$$|MA_1| + |MA_3| + \ldots + |MA_{2n+1}| = |MA_2| + |MA_4| + \ldots |MA_{2n}| .$$

Доказ: Означимо са a страницу, са b најмању дијагоналу $(2n+1)$-угла $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n+1}$ и применимо Птоломејеву теорему на четвороуглове $MA_1A_2A_3$, $MA_2A_3A_4$, … , $MA_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$, $A_{2n}A_{2n+1}MA_1$, $A_{2n+1}MA_1A_2$. Добијамо редом

$$|MA_1| \cdot a + |MA_3| \cdot a = |MA_2| \cdot b \,,$$

$$|MA_3| \cdot b = |MA_2| \cdot a + |MA_4| \cdot b \,,$$

$$|MA_3| \cdot a + |MA_5| \cdot a = |MA_4| \cdot b \,,$$

$$|MA_5| \cdot b = |MA_4| \cdot a + |MA_6| \cdot b \,,$$

……………………………………………

$$|MA_{2n-1}| \cdot a + |MA_{2n+1}| \cdot a = |MA_{2n}| \cdot b \,,$$

$$|MA_{2n+1}| \cdot b + |MA_1| \cdot a = |MA_{2n}| \cdot b \,,$$

$$|MA_1| \cdot b + |MA_{2n+1}| \cdot a = |MA_2| \cdot a \,,$$

односно

$$(2a+b)\,(|MA_1| + |MA_3| + \ldots + |MA_{2n+1}|) = (2a+b)\,(|MA_2| + |MA_4| + |MA_{2n}|\,) \,.$$

Отуда је

$$|MA_1| + |MA_3| + \ldots + |MA_{2n+1}| = |MA_2| + |MA_4| + |MA_{2n}| \,. \qquad ■$$

3. Уопштење Птоломејеве теореме

У овом поглављу представићемо неколико резултата који су уопштења Птоломејеве теореме или њених последица.

Дефиниција 1. *Нека два круга додирују круг k. Ако се оба налазе у његовој унутрашњости, или оба у његовој спољашњости рећи ћемо да су са исте стране круга k. У супротном су са разних страна круга k .*

Теорема 13. (**Кејси**) *Нека су четири круга c_1, c_2, c_3 , c_4 тангентна на круг или праву линију и нека је t_{ij} дужина заједничке тангенте кругова c_i и c_j . Тада је:*

$$t_{12}t_{34} + \varepsilon_1 t_{13}t_{24} + \varepsilon_2 t_{14}t_{23} = 0 \ ,$$

где је ε_1 , ε_2 $\in \{-1, 1\}$ уколико важи један од наведених услова:

1. сви кругови са исте стране k и све тангенте у изразу су спољашње,

2. три круга су са једне стране k , док је четврти са друге стране k , а при том су њему одговарајуће тангенте унутрашње, док су преостале тангенте у изразу спољашње,

3. један пар кругова је се једне стране k , а други са друге стране k , а одговарајућа тангента два круга је спољашња, односно унутрашња ако су кругови са исте, односно са разних страна k .

При томе:

а) ако додирне тачке кругова c_1 и c_2 раздвајају додирне тачке кругова c_3 , c_4 онда је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$,

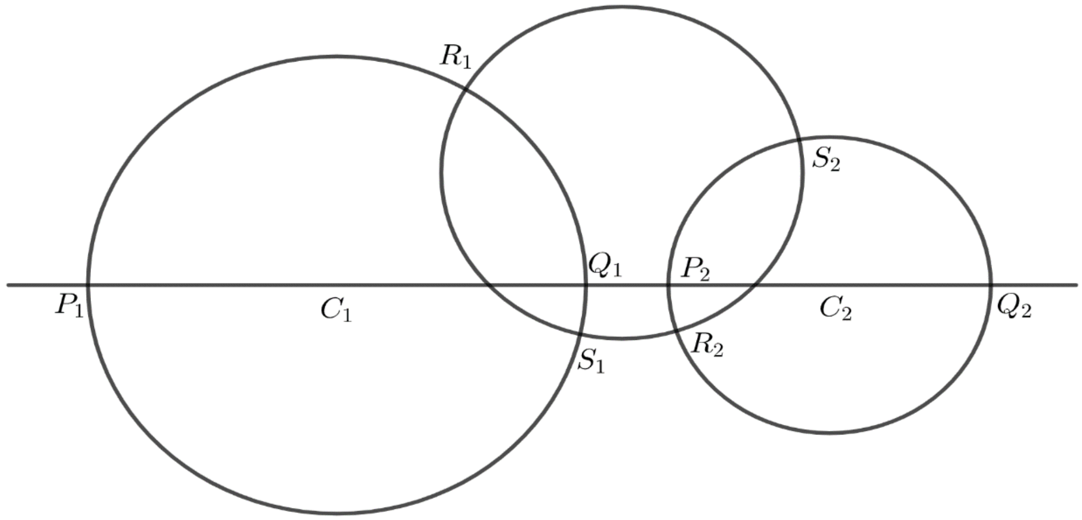
б) ако додирне тачке кругова c_1 и c_3 раздвајају додирне тачке c_2 и c_4 , онда је $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$,

ц) ако додирне тачке кругова c_1 и c_4 раздвајају додирне тачке кругова c_2 и c_3, онда је $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$.

Да бисмо доказали ову теорему показаћемо следећу лему.

Лема: *Нека су у једној равни дати кругови k_1 и k_2 полупречника r_1 и r_2 . Нека је тачка O, центар инверзије у односу на круг, или унутар или изван оба круга k_1 , k_2 и $r_1{}'$, $r_2{}'$ полупречници њихових слика. Нека су t_{12} и $\overline{t_{12}}$, $t_{12}{}'$ и $\overline{t_{12}}{}'$ (уколико постоје), дужине заједничких спољашњих, односно унутрашњих тангенти кругова k_1 и k_2 , тј. њихових слика. Тада важи да је $\frac{t_{12}{}^2}{r_1 r_2} = \frac{t_{12}{}'^2}{r_1{}' r_2{}'}$, $\frac{\overline{t_{12}}^2}{r_1 r_2} = \frac{\overline{t_{12}{}'}^2}{r_1{}' r_2{}'}$ где је центар инверзије или унутар оба круга или изван оба круга.*

Доказ Леме: Нека су дати кругови k_1 и k_2 са центрима C_1 и C_2. Нека права C_1C_2 сече редом ове кругове у паровима тачака P_1, Q_1 и P_2, Q_2, тако да су дужи C_1C_2, P_1Q_1 и P_2Q_2 исто оријентисане. Онда ако $d = \overline{C_1C_2}$,



слика 15

$$\frac{\overline{P_1Q_2}\cdot\overline{Q_1P_2}}{\overline{P_1Q_1}\cdot\overline{P_2Q_2}} = \frac{(d+r_1+r_2)\,(d-r_1-r_2)}{2r_1\cdot 2r_2} = \frac{d^2-(r_1+r_2)^2}{4r_1r_2},$$

$$\frac{\overline{P_1P_2}\cdot\overline{Q_1Q_2}}{\overline{P_1Q_1}\cdot\overline{P_2Q_2}} = \frac{(d+r_1-r_2)\,(d-r_1+r_2)}{2r_1\cdot 2r_2} = \frac{d^2-(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2}.$$

Ови бројеви, ако су позитивни, представљају квадрат заједничке унутрашње и спољашње тангенте. Нека је k произвољни круг ортогоналан на k_1 и k_2. Његов центар O тада припада радикалној оси кругова k_1 и k_2. Нека је Y пресек те осе и праве C_1C_2, а X тачка круга k таква да су X и Y са разних страна O. Нека су R_1, S_1, R_2, S_2 тачке у којима је k нормално на k_1 и k_2. Троуглови $P_1R_1C_1$ и XR_1O су једнакокраки са угловима на основици φ и ψ, редом. Зато су углови $\measuredangle R_1C_1Y$ и $\measuredangle P_1OY$ редом једнаки 2φ и 2ψ. При томе , како су углови $\measuredangle C_1R_1O$ и $\measuredangle C_1YO$ прави, четвороугао R_1C_1YO је тетивни па је $2\varphi + 2\psi = 180°$, тј. $\varphi + \psi = 90°$. Зато је угао $\measuredangle P_1R_1X$= $\varphi + 90° + \psi = 180°$, односно права P_1R_1 садржи тачку X. Слично, праве Q_1S_1, $P_2\,R_2$ и S_2Q_2 садрже X.

Нека је један од пресека k и C_1C_2 тачка T, а Z дијаметрално супротна тачка тачки Y у k. Нека је l круг са центром X и полупречником XT. Како је угао $\measuredangle ZTX$ прав, ZT је тангента на l, па се инверзијом ψ_l Z слика у Y. Слика од l је права ортогонална на XO, па је то права C_1C_2.Тада су слике тачака R_1, C_1, R_2 и C_2 у инверзији ψ_l, редом, тачке P_1, Q_1, P_2 и Q_2. С обзиром да инверзија чува дворазмеру компланарних тачака онда важи:

$$\frac{\overline{R_1S_2}\cdot\overline{S_1R_2}}{\overline{R_1S_1}\cdot\overline{R_2S_2}}=\frac{\overline{P_1Q_2}\cdot\overline{Q_1P_2}}{\overline{P_1Q_1}\cdot\overline{P_2Q_2}},$$

$$\frac{\overline{R_1R_2}\cdot\overline{S_1S_2}}{\overline{R_1S_1}\cdot\overline{R_2S_2}}=\frac{\overline{P_1P_2}\cdot\overline{Q_1Q_2}}{\overline{P_1Q_1}\cdot\overline{P_2Q_2}}.$$

Сада нека се дати кругови трансформишу неком произвољном инверзијом ψ у $C_1'(r_1')$, $C_2'(r_2')$, $k_1'(r_1')$, $k_2'(r_2')$ и нека R_1, S_1, R_2, S_2 прелазе у R_1', S_1', R_2', S_2'. Онда је

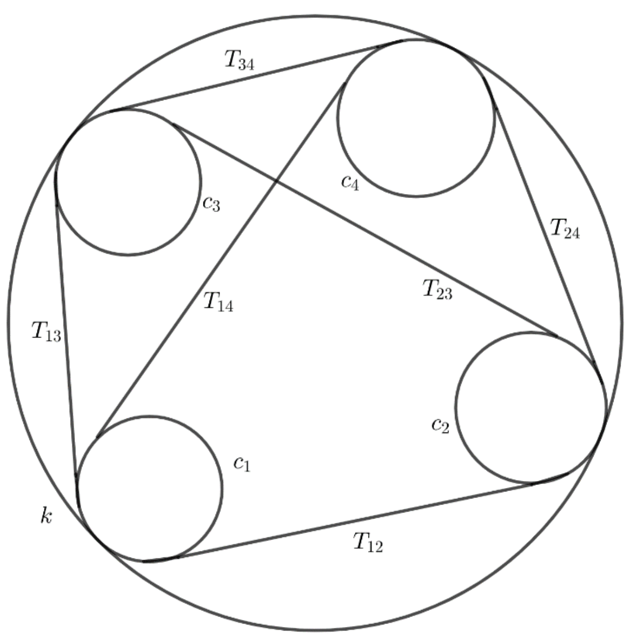
$$\frac{\overline{t_{12}}^2}{4r_1r_2}=\frac{\overline{R_1S_2}\cdot\overline{S_1R_2}}{\overline{R_1S_1}\cdot\overline{R_2S_2}}=\frac{\overline{R_1'S_2'}\cdot\overline{S_1'R_2'}}{\overline{R_1'S_1'}\cdot\overline{R_2'S_2'}}=\frac{\overline{t_{12}'}^2}{4r_1'r_2'}$$

и слично за t_{12}. ■

Овде ћемо доказати један од случајева Кејсијеве теореме, остали се слично доказују.

Теорема 14. *Нека су четири кружнице c_1, c_2, c_3, c_4 тангенте на кружницу k, и при томе су или све унутар или све четри изван k. Нека T_{12} означава заједничку спољашњу тангенту на c_1 и c_2. Тада ако додирне тачке c_1 и c_4 раздвоје c_2 и c_3 на k важи:*

$$T_{12}T_{34}+T_{13}T_{24}-T_{14}T_{23}=0.$$



слика 16

Доказ: Нека је O тачка круга k која се налази изван c_1 , c_2 , c_3 , c_4 . Посматрајмо инвезрију са центром у O . Ова инверзија слика k у праву , а c_1 , c_2 , c_3 , c_4 у кругове који додирују ту праву у A_1 , A_2 , A_3 и A_4 . При том, тада A_1 и A_4 раздвајају A_2 и A_3 . Нека су дате тачке у следећем распореду $A_1 - A_2 - A_4 - A_3$. Тада директно следи да је

$$\overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_3 A_4} + \overline{A_1 A_3} \cdot \overline{A_2 A_4} - \overline{A_1 A_4} \cdot \overline{A_2 A_3} = 0 \,.$$

При том $A_1 A_2$ је заједничка спољашња тангента кругова c_1' и c_2' . Зато је

$$A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 = t_{12} \cdot t_{34} \sqrt{\frac{r_1' \cdot r_2' \cdot r_3' \cdot r_4'}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4}}.$$

Када заменимо изразе и за остале спољашње тангенте добијамо тврђење. ■

Може се показати да важи и обрнуто што казује следећа теорема.

Теорема 15. Нека су c_1 , c_2 , c_3 , c_4 четири круга и T_{ij} заједничка тангента (унутрашња или спољашња) кругова c_i и c_j . Тада уколико важи:

$$T_{12}T_{34} + \varepsilon_1 T_{13}T_{24} + \varepsilon_2 T_{14}T_{23} = 0 \ ,$$

где је $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ *и није* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ *онда*

1. *ако су све тангенте у изразу спољашње постоји круг* k *који додирују* c_1 , c_2 , c_3 , c_4 *и то тако да су сви са исте стране* k *,*

2. *ако за један од кругова важи да су њему одговарајуће тангенте у изразу унутрашње, док су преостале тангенте у изразу спољашње, онда постоји круг* k *који додирује* c_1 , c_2 , c_3 , c_4 *и то тако да је круг коме одговарају унутрашње тангенте са једне стране* k *, док су преостала три круга са друге стране* k *,*

3. *ако кругове можемо поделити у два пара, тако да су одговарајуће тангенте у изразу за сваки такав пар спољашње, док су тангенте за кругове из различитих парова унутрашње, онда постоји круг* k *који додирује* c_1 , c_2 , c_3 , c_4 *и то тако да су кругови једног пара са једне стране* k *, а кругови другог пара са друге стране* k *.*

Уколико у Кејсијевој теореми допустимо да се три круга из скупа $\{c_1 , c_2 , c_3 , c_4\}$ дегенеришу у тачку добијамо следећу теорему.

Теорема 16. (**Кејсијева о три тачке**) *Нека је* s *круг тангентан на круг описан око троугла* ABC *у тачки* M *, тако да* A *и* B *раздвајају* M *и* C *. Нека су* AT_a , BT_b и CT_c *тангенте на* s *. Тада важи:*

$$BC \cdot AT_a + AC \cdot BT_b = AB \cdot CT_c \,.$$

Доказ: Постоји сличност са центром у M која слика круг описан око ABC у s. Нека су други пресеци правих AM, BM и CM са s тачке A' , B' и C'. Тада је

$$\frac{A'M}{AM} = \frac{B'M}{BM} = \frac{C'M}{CM} = \frac{\rho}{r},$$

где су r и ρ полупречници круга описаног око троугла ABC и s , респективно. Следи да је

$$\frac{A'M}{AM} = \frac{B'M}{BM} = \frac{C'M}{CM} = \frac{r \pm \rho}{\rho},$$

где знак зависи од тога да ли круг s додирује описани круг троугла ABC споља или изнутра. С друге стране из потенције тачака A , B и C у односу на s имамо:

$$AM \cdot AA' = (ATa)^2,$$
$$BM \cdot BB' = (BTb)^2,$$
$$CM \cdot CC' = (CTc)^2,$$

тако да

$$\frac{AM^2}{(ATa)^2} = \frac{AM}{AA'},$$

$$\frac{BM^2}{(BTb)^2} = \frac{BM}{BB'},$$

$$\frac{CM^2}{(CTc)^2} = \frac{CM}{CC'}.$$

Зато важи:

$$\frac{AM}{ATa} = \frac{BM}{BTb} = \frac{CM}{CTc} = \sqrt{\frac{\rho}{(r \pm \rho)}}.$$

Сада коришћењем Птоломејеве теореме на четвороугао $ABCM$:

$$BC \cdot AM + AC \cdot BM = AB \cdot CM,$$

што нас доводи до траженог идентитета:

$$BC \cdot ATa + AC \cdot BTb = AB \cdot CTc. \qquad \blacksquare$$

Сада ћемо се бавити Теоремом Тибоа. Ово тврђење је своју поставку добило средином 20. века и било је доказано аналитичким путем. Синтетички геометријски доказ, видети [7] , теорема је добила тек четрдесетак година касније. Тај доказ, слично Кејсијевој теореми заснива се на односима четири круга који додирују пети.

Дефиниција 2. *Нека права p кроз S сече круг k у тачкама P и Q . Тачка R таква да је дворазмера $(P,\ Q,\ S,\ R) = -1$ хармонијски спрегнута са S у односу на круг k. Скуп свих тачака равни хармонијски спрегнутих са S у односу на круг k је права коју називамо поларом тачке S у односу на круг k.*

Теорема 17. (**Тибо**) *Нека је M произвољна тачка ивице BC троугла ABC и k и s описани и уписани круг тог троугла. Нека су l_1 и l_2 кругови који додирују AM , BC и круг k. Тада су центри кругова l_1 и l_2 и s колинеарне тачке.*

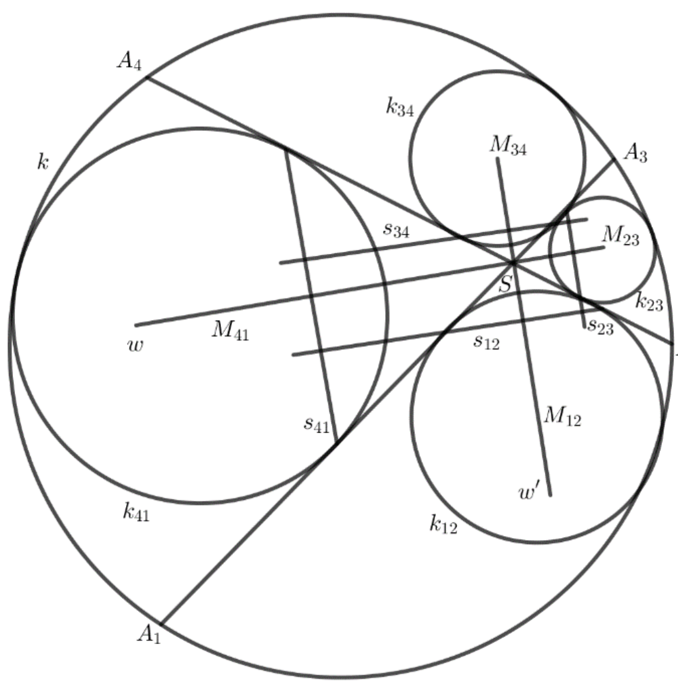
Доказаћемо заправо нешто шире тврђење.

Теорема 18. *Нека се тетиве A_1A_3 и A_2A_4 круга k секу у тачки S и нека су симетрале углова између њих w и w'. Нека k_{12} додирује дужи SA_1 , SA_2 и круг k . Слично k_{23} , k_{34} и k_{41} . Њихови центри су M_{12} , M_{23} , M_{34} и M_{41} . Поларе тачке S у односу на ове кругове су s_{12} , s_{23} , s_{34} и s_{41} . Нека су I_{123} , I_{234} , I_{341} , I_{412} центри кругова уписаних у $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$. Тада важи:*

(1) Тачке I_{123} , I_{234} , I_{341} , I_{412} одређују правоугаоник чије су стране паралелне правама w и w',

(2) Тачка I_{pqr} припада правама s_{pq} и s_{qr} ,

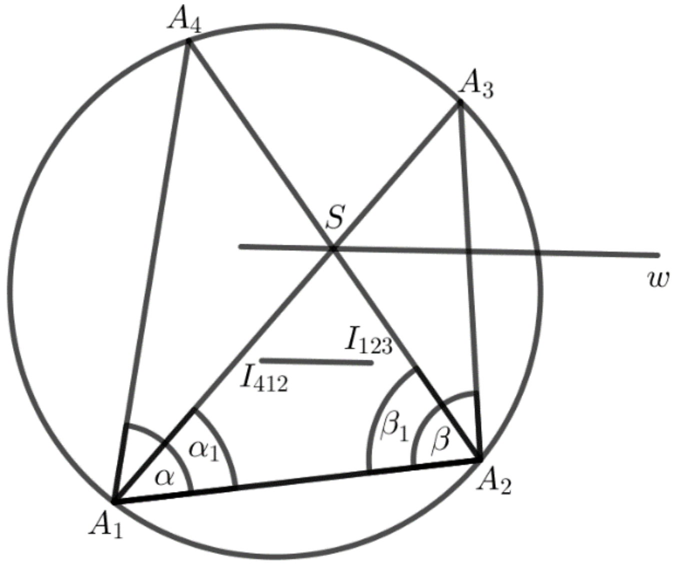
(3) Тачка I_{pqr} припада дужи са теменима M_{pq} и M_{qr} (Тврђење Тибоове теореме).



слика 17

Доказ: (1) Углови $\measuredangle A_1A_3A_2$ и $\measuredangle A_1A_4A_2$ су подударни (периферијски над истим луком $\widehat{A_1A_2}$) означимо их са δ . Угао $\measuredangle A_1I_{123}A_2$ из ког се страна види из центра уписаног круга је $90° + \frac{\delta}{2}$, па су углови $\measuredangle A_1I_{412}A_2$ и $\measuredangle A_1I_{123}A_2$ подударни, следи да је четвороугао $A_1A_2I_{123}I_{124}$ тетиван. Нека су углову у теменима A_1 и A_2 полазног четвороугла α и β. Нека $I_{123}\,I_{412}$ сече A_1A_2 у X тако да је распоред тачака $A_1 - A_2 - X$. Тада су због тетивног четвороугла

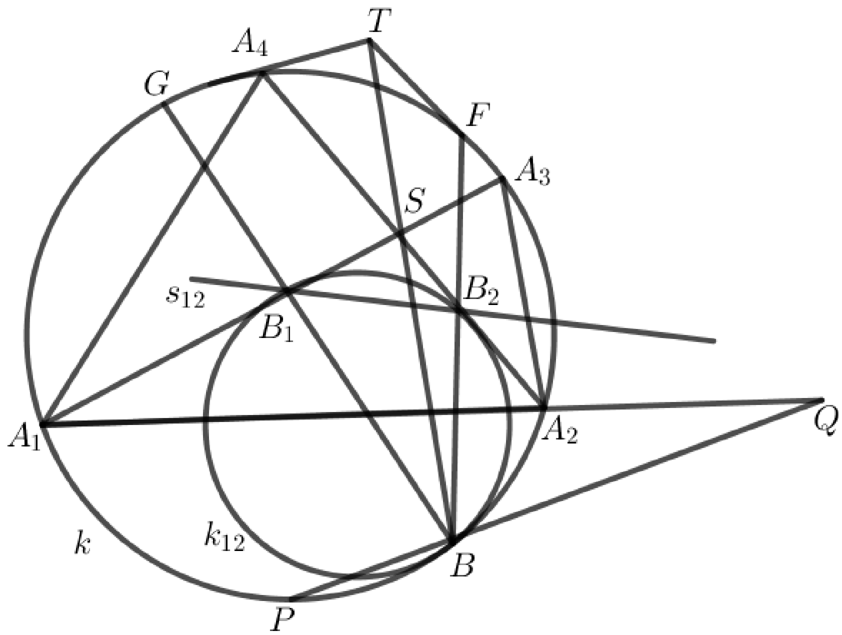
$A_1A_2I_{123}I_{412}$ углови $\measuredangle A_2\ I_{123}X = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle I_{123}A_2X = \frac{\beta}{2}$ па се $I_{123}I_{412}$ и A_1A_2 секу под углом $\frac{\beta-\alpha}{2}$.



слика 18

Уколико се секу са друге стране A_1 или се не секу тј. паралелне су, можемо писати да је то угао $|\frac{\beta-\alpha}{2}|$. Нека су углови $\measuredangle A_2A_1A_3 = \alpha_1$ и $\measuredangle A_4A_2A_1 = \beta_1$. Тада је угао $\measuredangle A_2SA_3$=$\alpha_1 + \beta_1$, а угао између SA_2 и симетрале w угла $\measuredangle A_2SA_3$ је $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$. Ако w сече A_1A_2 у Y тако да је распоред тачака $A_1 - A_2 - Y$ из троугла SA_2Y, из спољашњег и унутрашњег угла имамо да се w и A_1A_2 секу под углом $\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}$, па поново због преосталих могућности, узмемо апсолутну вредност. Из тетивног четвороугла $A_1A_2A_3A_4$ над тетивом A_3A_4 имамо да је $\alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1$ па $I_{123}I_{412}$ и w секу A_1A_2 под истим углом (или су обе паралелне A_1A_2), зато су међусобно паралелне. С обзиром да се w и w' секу под правим углом, следи (1).

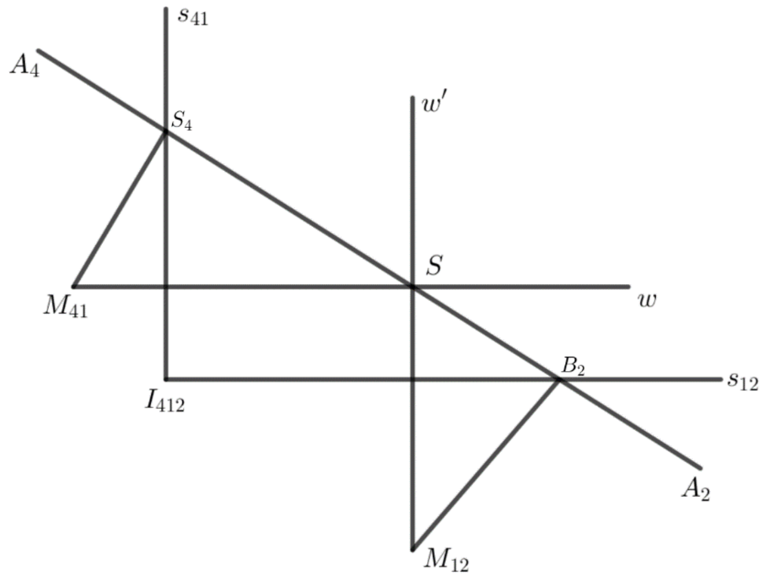
(2) Нека k_{12} додирује SA_1, SA_2 и k редом у тачкама B_1, B_2, B. Нека је t заједничка тангента за k и k_{12} у B. Нека права BB_1 сече k у тачки G. Хомотетијом са центром у B којом се B_1 слика у G се круг k_{12} слика у k, тачка B_2 у пресек BB_2 и k, означимо са F, а праве A_1A_3 и A_2A_4 тангентне на k_{12} се сликају у њима паралелне праве тангентне на k. Нека се те праве секу у T. Онда се хомотетијом S слика у T, па су B, S, T колинеарне. Нека је K пресек BA_4 и k_{12}. Угао B_2BA_2 је разлика углова између BB_2 и t, и BA_2 и t. Ти углови су између тангенте и тетива кругова k_{12} и k, па су редом једнаки BKB_2 и BA_4B_2. Њихова разлика је дакле једнака углу $\measuredangle KB_2A_4$. Са друге стране $\measuredangle KB_2A_4$ је угао између тетиве и тангенте k_{12} у тачки B_2 па је подударан углу KBB_2. Зато је BB_2 симетрала угла $\measuredangle A_2BA_4$ а тачка њеног пресека са описаним кругом, тачка F, је средиште лука $\widehat{A_2A_4}$. Слично је и G средиште лука $\widehat{A_1A_3}$.



слика 19

Симетрала угла $\measuredangle A_2A_1A_4$ такође онда пролази кроз средиште лука $\widehat{A_2A_4}$, тачку F, а садржи и тачку I_{412}. Зато су A_1, I_{412} и F колинеарне. Слично A_2, I_{123} и F су колинеарне. Слично права A_4I_{124} је симетрала угла $\measuredangle A_1A_4A_2$ па следи $A_4I_{412} \cap \widehat{A_1A_2} = \{P\}$ која је средиште тог лука, па из истог разлога важи $P \in A_3I_{123}$. Нека $PB \cap A_1A_2 = \{Q\}$. Применимо Паскалову теорему на шесторку $A_1FBPA_4A_2$. Добијамо да су тачке I_{124}, B_2 и Q колинеарне. Слично су колинеарне и тачке I_{123}, B_1 и Q. Због (1) $I_{123}I_{421} \parallel w$ знамо да је $w \parallel B_1B_2$. Важе распореди тачака $Q - I_{123} - B_1$ и $Q - B_2 - I_{124}$. Ако су B_1B_2 и $I_{123}I_{412}$ разне праве онда добијамо контрадикцију везано са које стране праве се налази Q, зато је свих 5 тачака колинеарно па тачке $I_{123}, I_{124} \in s_{12}$ јер је $s_{12} = B_1B_2$.

(3) Због (2) тачка I_{412} припада правама s_{12} и s_{41}. Нека је $\{S_4\} = s_{41} \cap A_2A_4$, за B_2 већ знамо да је $\{B_2\} = s_{12} \cap A_2A_4$. Нека је $\{I\} = s_{41} \cap M_{41}\ M_{12}$. Тада је $S_4I \parallel SM_{12}$, $S_4M_{41} \parallel B_2M_{12}$ следи и трећи пар треба да буде паралелан тј. $SM_{41} \parallel B_2I$. Зато је $I = I_{412}$. ∎



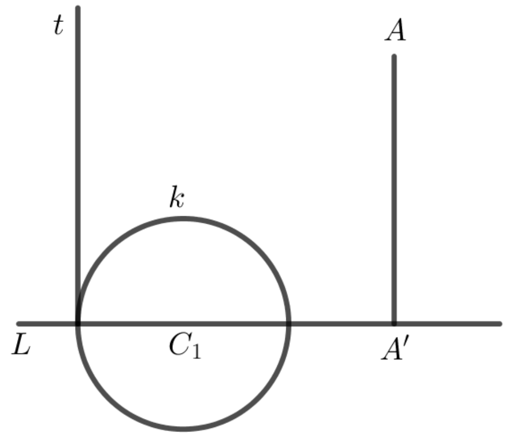
слика 20

Теорема 19*. Ако су AP , BQ , CR тангенте на круг k из три тачке A , B , C . Круг кроз A , B , C је тангентан на k ако и само ако $AB \cdot CR \pm AC \cdot BQ \pm BC \cdot AP = 0$.*

Доказ: ⇒) Означавајући са j круг коме припадају тачке A , B , C , прво претпоставимо да је овај круг тангентан на k у тачки L . Зато можемо сматрати L нултим кругом. Применом Питагорине теореме на троугао LAA' и формуле за потенцију тачке A у односу на k (видети слику 21) добијамо:

$$AL^2 = AA'^2 + LA'^2$$

$$\begin{aligned} p(A,k) &= {AC_1}^2 - {r_1}^2 \\ &= {AC_1}^2 - {LC_1}^2 \\ &= AA'^2 + C_1A'^2 - {LC_1}^2 \\ &= AA'^2 + (C_1A' + LC_1) \cdot (C_1A' - LC_1) \\ &= AA'^2 + LA' \cdot (LA' - 2LC_1)\,. \end{aligned}$$

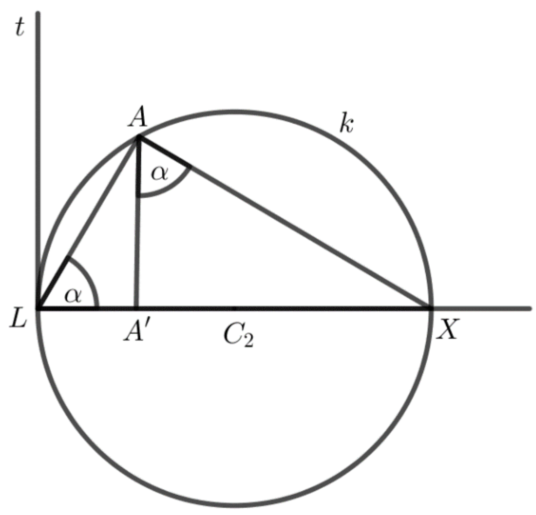


слика 21

Следи

$$\begin{aligned} & AL^2 - p(A,k) \\ &= LA'^2 - LA' \cdot (LA' - 2LC_1) \\ &= 2LA' \cdot LC_1 \\ &= 2LA' \cdot r_1 \ . \end{aligned}$$

Нека A припада кругу који додирује t и L са центром C_2 и полупречником r_2 .



слика 22

Како су $\Delta ALA' \sim \Delta XLA$ (видети слику 22) следи:

$$\frac{LX}{LA} = \frac{LA}{LA'}$$

односно

$$LA^2 = LX \cdot LA'$$

$$= 2r_2 \cdot LA' .$$

$$p(A,k) = AL^2 - 2LA' \cdot r_1$$

$$= 2r_2 \cdot LA' - 2LA' \cdot r_1$$

$$= LA' \cdot (2r_2 - 2r_1) ,$$

следи

$$\frac{p(A,k)}{AL^2} = \frac{2r_2 - 2r_1}{2r_2} = c^2.$$

Ако је P додирна тачка тангенте из A на k тада је

$$\frac{AP}{AL} = c ,$$

слично се показује да важи

$$BQ = c \cdot BL , \ CR = c \cdot CL .$$

Како су A , B , C , L концикличне тачке следи четвороугао $ABCL$ је тетиван. Претпоставимо да је B наспрам L , применом Птоломејеве теореме на $ABCL$ добијамо:

$$BL \cdot AC = AL \cdot BC + CL \cdot AB .$$

Множњем са константом c и применом предходно доказаних једнакости добијамо:

$$BQ \cdot AC = AP \cdot BC + CR \cdot AB ,$$

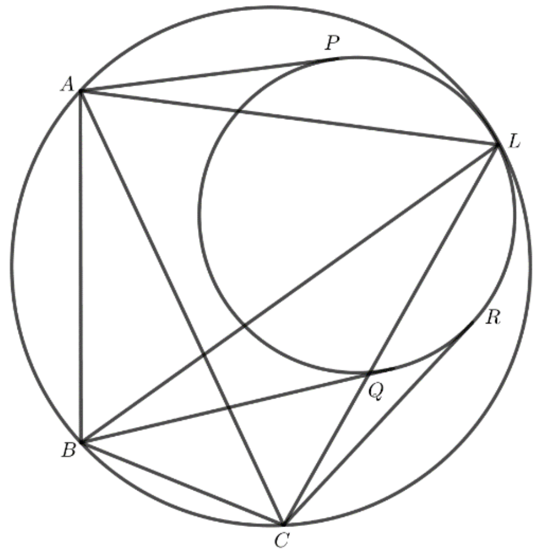
што је требало показати.

$\Longleftarrow$) Обрнуто, сада ћемо претпоставити да је ова једначина тачна и доказати да су кружнице тангенте. Нека је тачка X таква да важи:

$$\frac{AX}{CX} = \frac{AP}{CR} ,$$

овај круг сече круг ABC једном са сваке стране AC. Нека је M пресек насупрот B . Онда

$$\frac{AM}{AP} = \frac{CM}{CR} = t .$$



слика 23

Из Птоломејеве теореме следи:

$$BM \cdot AC = AM \cdot BC + CM \cdot AB \ ,$$

заменом

$$BM \cdot AC = t \cdot AP \cdot BC + t \cdot CR \cdot AB \ .$$

Упоређујући ово са предпоставком једначине важи:

$$BM = t \cdot BQ \ ,$$

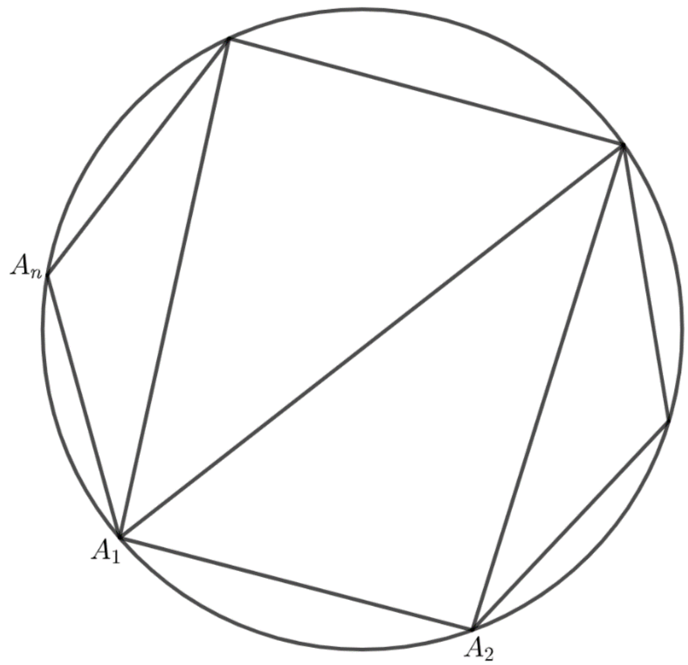
ако да је B такође тачка на истој кружници ACM. То је кружница кроз AB тагентна на k и нулта кружница M. С обзиром да је M на кружници ABC ови кругови су тангентни у M.

■

Теореме и докази у овом поглављу преузети су из [1] , [4] и [8] .

4. Задаци

1. ([6]) Тетивни n —тоугао $(\mathrm{n} \geq 3)$ разложен је на $\mathrm{n}-2$ троуглова повлачањем $\mathrm{n}-3$ дијагонале од којих се никоје две не секу унатар n —тоугла. Тада збир полупречника кружница уписаних у добијене троуглове не зависи од избора повучених дијагонала.



слика 24

Решење: Нека је $A_1 A_2 \dots A_n$ тетивни n —тоугао и O центар његове описане кружнице. Нека су $b_1, b_2, \dots b_{n-3}$ његове дијагонале које немају заједничких унутрашњих тачака има их $n-3$, оне деле n —тоугао на $n-2$ троуглова. Обележимо са $r_1, r_2, \dots r_{n-2}$ полупречнике уписаних кружница у тако добијене троуглове. Обележимо даље са $d_1, d_2 \dots d_n$ растојања тачке O од страница A_1A_2, $A_2A_3 \dots A_nA_1$ редом, и са $e_1, e_2 \dots e_{n-3}$ растојања тачке O од дијагонала $b_1, b_2, \dots b_{n-3}$ редом. Ако се на сваки од ових троуглова примени **Теорема 5** добијамо:

$$d_1 + d_2 \dots + d_n = (n-2)R + r_1 + r_2, \dots + r_{n-2}\,.$$

Заиста свака од страница n —тоугоула припада тачно једном троуглу, а свака од дијагонала $b_1, b_2, \dots b_{n-3}$ у тачно два троугла. Зато се свако од растојања $d_1, d_2 \dots d_n$ појављује на левој страни тачно једанпут. Свако од растојања $e_1, e_2 \dots e_{n-3}$ појављује се на левој страни тачно два пута и то једанпут са знаком „+“ и други пут са „−“ или је пак једнако 0. Отуда је

$$r_1 + r_2 \ \dots + r_{n-2} = d_1 + d_2 \dots + d_n - (n-2)R = const.$$

2. ([5]) Ако је h дужина најдуже висине оштроуглог троугла ABC , онда важи:

$$R + r \leq h\,,$$

где су R и r полупречници описаног и уписаног круга троугла, респективно.

Решење: Означимо са a дужину странице троугла ABC којој одговара најдужа висина h (видети слику 25). Како најкраћа страница троугла одговара најдужој висини, a је најкраћа страница, тј. $a \leq b$ и $a \leq c$, где су b и c дужине других двају страница овог троугла. Такође, како је троугао ABC оштроугли, центар његов описаног круга, тј. тачка O, лежи у унутрашњости овог троугла. Онда, површина троугла ABC једнака је збиру површина троуглова $BC\mathrm{O}$, $CA\mathrm{O}$ и $AB\mathrm{O}$, тј.

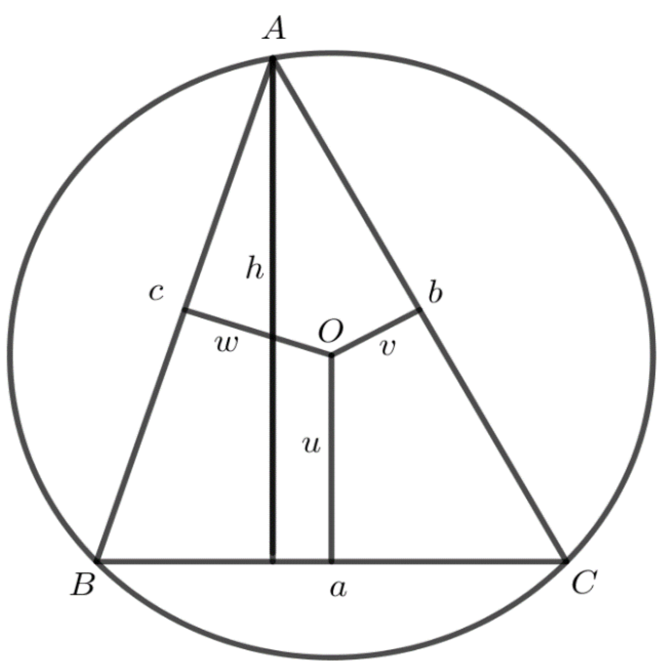
$$P(\Delta ABC) = P(\Delta BC\mathrm{O}) + P(\Delta CA\mathrm{O}) + P(\Delta AB\mathrm{O})\,.$$

Односно,

$$\frac{ah}{2} = \frac{au}{2} + \frac{bv}{2} + \frac{cw}{2}\,,$$

тј.

$$a(R + r) = a(u + v + w) \leq au + bv + cw = ah\,.$$



слика 25

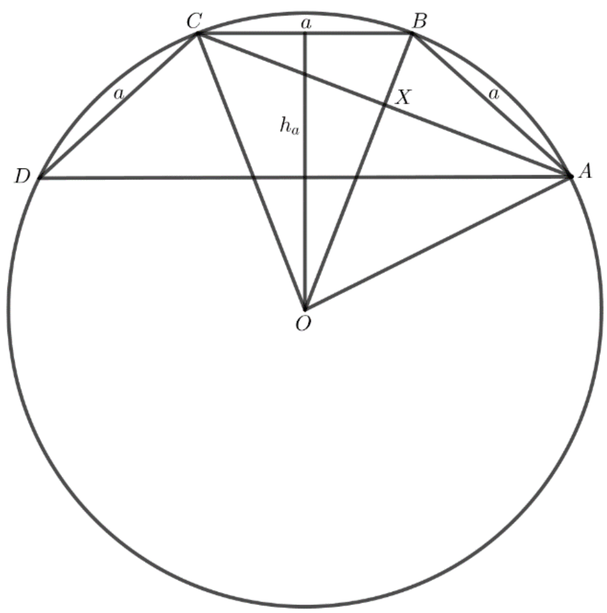
3. ([5]) Четвороугао је уписан у круг полупречника $200\sqrt{2}$. Три странице овог троугла имају дужину 200 . Колика је дужина четврте странице?

Решење: Нека је O центар круга и нека је

$$AB = BC = CD = 200 .$$

Онда је

$$OA = OB = OC = OD = 200\sqrt{2} .$$



слика 26

Означимо са X пресечну тачку дијагонала AC и OB четвороугла $OABC$. Овај четвороугао је делтоид, па је $CA = 2 \cdot CX$. Хајде да изразимо дужину h_a висине, која одговара страни BC троугла OBC , коришћењем Питагорине теореме. Дакле, из једнакокраког троугла OBC , можемо добити

$$h_a = \sqrt{(200\sqrt{2})^2 - 100^2} = 100\sqrt{7} .$$

Даље, добијамо

$$\frac{CX \cdot OB}{2} = \frac{CB \cdot h_a}{2} ,$$

тј.

$$\frac{CX \cdot 200\sqrt{2}}{2} = \frac{200 \cdot 100\sqrt{7}}{2} ,$$

и такође

$$CX = 50\sqrt{14} \text{ и } AC = 100\sqrt{14}\ .$$

Применом Птоломејеве теореме на тетивни четвороугао $ABCD$ добијамо

$$CA^2 = AD \cdot BC + AB \cdot CD\ ,$$

Дакле,

$$(100\sqrt{14})^2 = AD \cdot 200 + 200 \cdot 200\ .$$

Одакле је

$$AD = 500\ .$$

4. ([5]) Четвороугао $ABCD$ је уписан у кругу са центром O и има дужине страница $AB = 3, BC = 2,\ CD = 6$ и $DA = 8$. Нека су X и Y тачке сегмента BD такве да је $\frac{DX}{BD} = \frac{1}{4}$ и $\frac{BY}{BD} = \frac{11}{36}$. Нека је тачка E пресек праве AX и праве кроз Y паралелно са AD. Нека је F тачка пресека праве CX и права кроз E паралелна са AC. Нека је G тачка на кругу, различита од C, која припада линији CX . Која је вредност $XF \cdot XG$?

Решење: Нека је Z пресек дужи BD и AC. Онда $\triangle BCZ \sim \triangle ADZ$ па следи да је $\frac{BC}{AD} = \frac{BZ}{AZ}$

тј.

$$\frac{2}{8} = \frac{BZ}{AZ}$$

Такође користећи сличност $\triangle BCA \sim \triangle CZD$ имамо

$$\frac{CD}{BA} = \frac{CZ}{BZ} \text{ и } \frac{CD}{BA} = \frac{DZ}{AZ},$$

тј.

$$\frac{6}{3} = \frac{CZ}{BZ} \quad \text{и} \quad \frac{6}{3} = \frac{DZ}{AZ}.$$

Из предходних једнакости добијамо да важи:

$$AZ = 4BZ\ ,\ CZ = 2BZ \text{ и } DZ = 2AZ = 8BZ\ .$$

Коначно, применом Птоломејеве теореме на тетивни четвороугао $ABCD$, следи да је

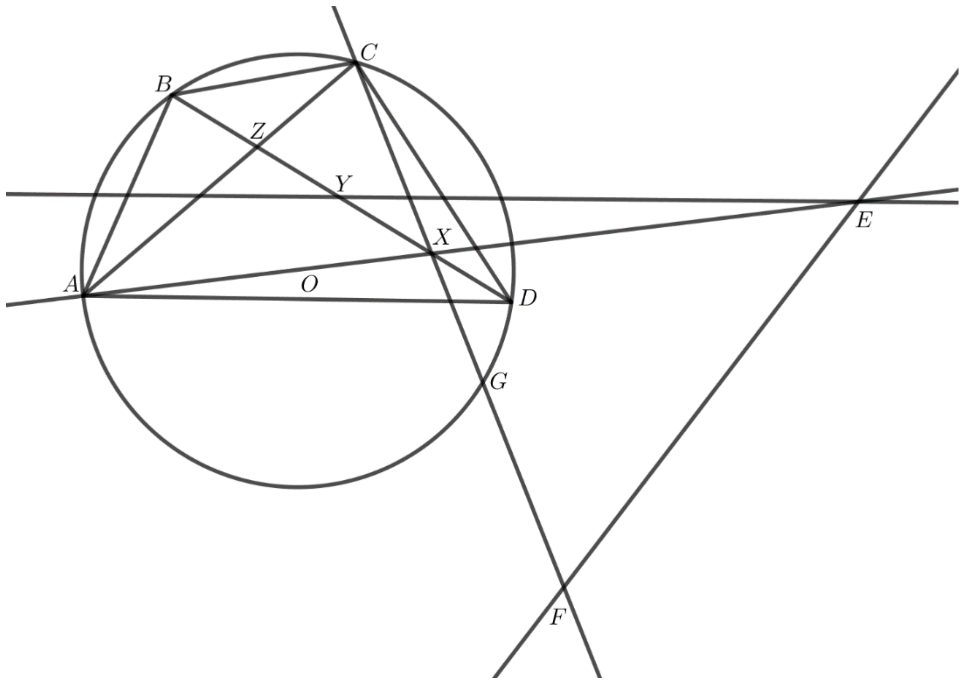
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD = (AZ + ZC) \cdot (BZ + ZD)\ .$$

Дакле,

$$3 \cdot 6 + 8 \cdot 2 = (4BZ + 2BZ) \cdot (BZ + 8BZ) = 54BZ^2.$$

Отуда

$$BZ^2 = \frac{34}{54}.$$



слика 27

Користећи потенцију тачке X у односу на дати круг, добијамо

$$GX \cdot XC = BX \cdot XD = \frac{3}{4}BD \cdot \frac{1}{4}BD = \frac{3}{16}BD^2 = \frac{3}{16}(BZ + ZD)^2 = \frac{3}{16}(BZ + 8BZ)^2 =$$

$$\frac{3}{16} \cdot 81BZ^2 = \frac{9 \cdot 17}{16},$$

тј.

$$GX = \frac{9 \cdot 17}{16 \cdot XC}.$$

С друге стране

$$XY = BD - BY = BD - \frac{11}{36}BD - \frac{1}{4}BD = \frac{16}{36}BD.$$

Како су троуглови AXD и EXY слични важи:

$$\frac{AD}{EY} = \frac{XD}{XY}$$

тј.

$$\frac{8}{EY} = \frac{\frac{1}{4}BD}{\frac{4}{9}BD} = \frac{9}{16}\,.$$

Отуда

$$EY = \frac{128}{9}\,.$$

Даље имамо

$$\frac{AD}{EY} = \frac{AX}{EX}$$

тј.

$$\frac{AX}{EX} = \frac{9}{16}\,.$$

Такође, из сличност троуглова ACX и EFX важи:

$$\frac{XF}{XC} = \frac{EF}{CA} = \frac{EX}{AX} = \frac{16}{9}\,.$$

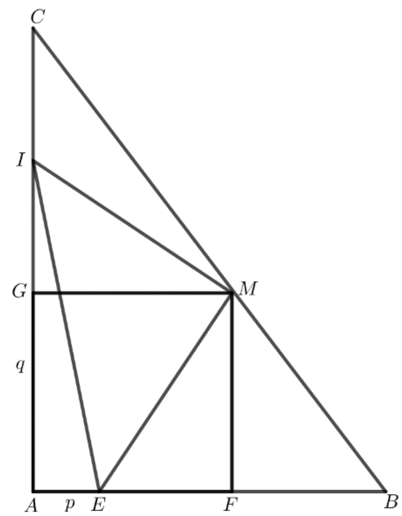
Отуда

$$XF = \frac{16}{9}XE\,,$$

коначно

$$XF \cdot XG = \frac{16}{9}XC \cdot \frac{9 \cdot 17}{16 \cdot XC} = 17.$$

5. ([5]) Троугао ABC је једнакокраки и правоугли троугао са страница $AB = AC = 3$. Нека је M средина хипотенузе BC. Тачке I и E леже на страницама AC и AB , респективно, тако да је $AI > A\mathrm{E}$, а $AIME$ је тетивни четвороугао. Троугао EMI има површину 2 и дужину CI можемо написати као $\frac{a-\sqrt{b}}{c}$, где су a , b и c позитивни цели бројеви и b није дељив квадратом ниједног простог броја. Колика је вредност $a + b + c$?



слика 28

Решење: Означимо са F и G тачке на страницама AB и AC, респективно , тако да $MF \perp AB$ и $MG \perp AC$ (видети слику 28). Тачка M је на симетрали $\measuredangle BAC$, дакле $MF = MG$. Пошто је $AIME$ тетивни четвороугао, следи да је $\sphericalangle EMI = 90°$. $\sphericalangle EMF = 90° - \sphericalangle GME = \sphericalangle IMG$. Из подударности троуглова EMF и IMG , добијамо $ME = MI$. Дакле, троугао EMI је једнакокраки и правоугли. Из унутрашњости троугла EMI , важи да је $MI = ME = 2$ и $EI = 2\sqrt{2}$ и пошто је M средиште хипотенузе BC,

$$\text{AM} = \text{MB} = \frac{BC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Означимо са p и q дужине сегмената AE и AI, респективно. Применом Птоломејеве теореме на тетивни четвороугао $AIME$ добијамо

$$MI \cdot AE + ME \cdot AI = EI \cdot AM ,$$

тј.

$$2 \cdot p + 2 \cdot q = 6 \text{ тј. } p + q = 3 .$$

Даље, применом Питагорине теореме на троугао AEI добијамо

$$p^2 + q^2 = 8 .$$

Дакле, треба да решимо систем једначина

$$p + q = 3 \text{ и } p^2 + q^2 = 8 ,$$

чија су решења

$$q = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \text{ и } p = \frac{3-\sqrt{7}}{2}.$$

Дакле, тражена дужина (користећи претпоставке) је

$$CI = 3 - q = \frac{3-\sqrt{7}}{2},$$

па је

$$a + b + c = 12 .$$

6. ([5]) Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао са $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle EFA = 60°$. Тачке G и H, унутар шестоугла, су такви да су углови $\measuredangle AGB$ и $\measuredangle DHE$ једнаки $120°$. Доказати да је

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CE.$$

Решење: Троуглови BCD и AFE су једнакостранични, јер су оба једнакокраки и имају један угао од $60°$. Права BE је оса симетрије четвороугла $ABDE$ ($BA = BD$ и $EA = ED$). Симетријом се могу пресликати троуглови BCD и AEF, у односу на праву BE, на троуглове $BC'A$ и DEF' (видети слику 29). Пошто је $\measuredangle AGB + \measuredangle BC'A = 180°$, онда је $AC'BG$ тетивни четвороугао па применом Птолемејеве теореме добијамо

$$AC' \cdot BG + BC' \cdot AG = AB \cdot C'G,$$

тј.

$$BG + AG = C'G .$$

Слично

$$EF' \cdot HD + F'D \cdot EH = ED \cdot HF',$$

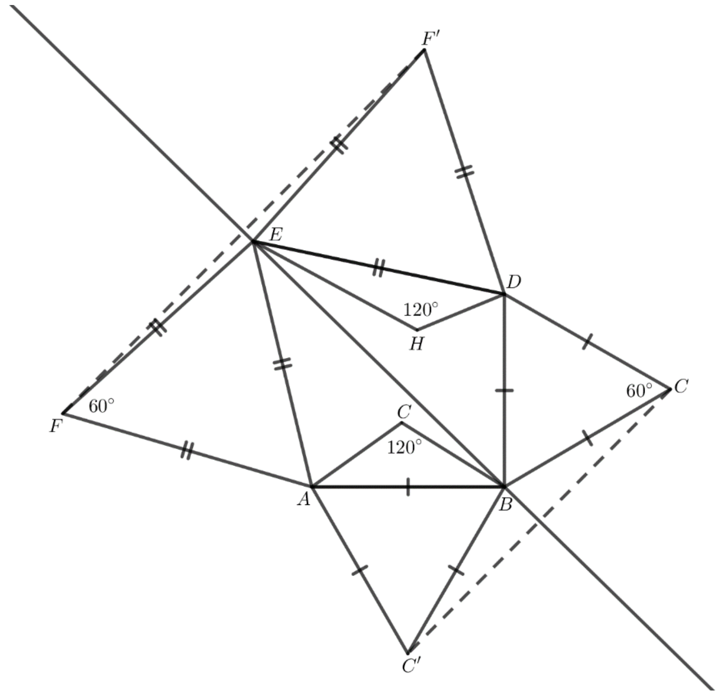
тј.

$$HD + EH = HF' .$$

Следи да је

$$AG + GB + GH + DH + HE = C'G + GH + HF' \geq C'F' = CF .$$

Једнакост важи ако и само ако тачке G и H припадају правој $C'F'$.



слика 29

7. ([5]) Нека су a , b , c и d природни бројеви такви да важи $a > b > c > d$ и нека $ac + bd = (b + d + a - c) \cdot (b + d - a + c)$. Доказати да $ab + cd$ није прост број.

Решење: Дату једнакост трансформишемо у

$$ac + bd = b^2 + 2bd + d^2 - a^2 + 2ac - c^2.$$

Отуда једнакост

$$ac + bd = (b + d + a - c) \cdot (b + d - a + c) ,$$

је еквивалентна са

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2. \tag{8}$$

Нека је $ABCD$ четвороугао са страницама $AB = a$, $BC = d$, $AD = c$ и нека је $\measuredangle BAD = 60°$ и $\measuredangle BCD = 120°$ (видети слику 30). Нека је k круг око описаног троугла ABD. Из $a > b > c > d$ и применом косинусне теореме на ABD:

$$BD = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos 60°} > \sqrt{c^2 + c^2 - 2cc\frac{1}{2}} = \sqrt{c^2} = c > d .$$

Круг са центром у B полупречника d сече k у двема тачкама које се налазе са разних страна BD. Нека је C једна од њих таква да важи $C, A \div BD$. Нека је $CD = b_1$

$$BD = \sqrt{d^2 + {b_1}^2 - 2db_1\cos 120°} > \sqrt{d^2 + {b_1}^2 - 2db_1(-\tfrac{1}{2})} = \sqrt{d^2 + {b_1}^2 + db_1} ,$$

па је

$$a^2 + c^2 - ac = d^2 + {b_1}^2 + db_1 \ .$$

Због (8) важи:

$$b^2 + bd + d^2 = d^2 + {b_1}^2 + db_1$$

$$b^2 + bd + d^2 - d^2 - {b_1}^2 - db_1 = 0$$

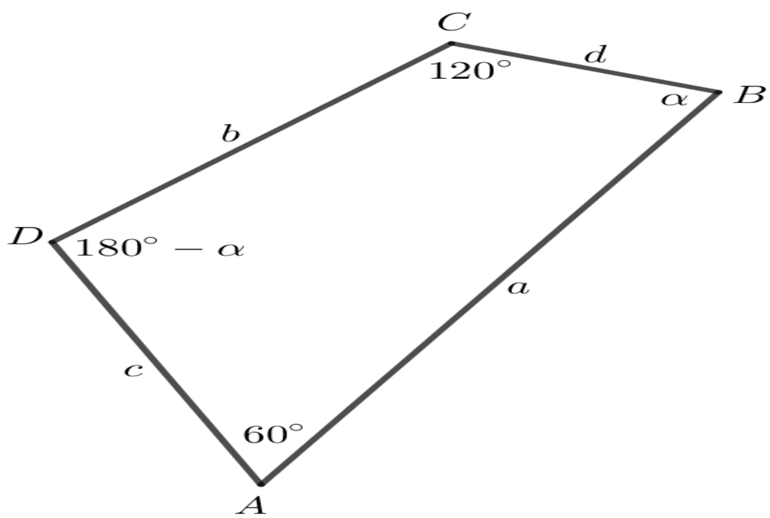
$$(b - b_1)(b + b_1 + d) = 0$$

$$b - b_1 = 0$$

$$b = b_1.$$

На основу предходно доказаног, такав четвороугао постоји. Означимо са $\measuredangle ABC = \alpha$, $\measuredangle CDA = 180° - \alpha$. Применом косинусне теореме на троугао ABC добијамо

(9) $$AC^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$



слика 30

Слично, из троугла ACD налазимо

(10) $$AC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$

Затим, коришћењем једнакости (9) и (10) , добијамо

$$b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

тј.

$$2\cos\alpha \cdot (bc + ad) = a^2 + d^2 - b^2 - c^2.$$

Отуда

$$2\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{bc+ad}\,.$$

Зато,

$$AC^2 = a^2 + d^2 - ad\,\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{bc+ad} = \frac{ab(ac+bd)+cd(bd+ac)}{bc+ad} = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}\,.$$

Како је четвороугао $ABCD$ тетиван ($\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = 180°$), применом Птоломејеве теореме, добијамо

$$AC^2 + BC^2 = (ab+cd)^2\,,$$

тј.

$$\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}(a^2 + c^2 - 2ac\cos 60°) = (ab+cd)^2.$$

Отуда

(11) $$(ac+bd)\cdot(a^2+c^2-ac) = (bc+ad)\cdot(ab+cd)\,.$$

Из $a > b > c > d$ следи

$$(a-d)\cdot(b-c) > 0\,,$$

тј.

$$ab + cd > ac + bd\,.$$

Такође

$$(a-b)\cdot(c-d) > 0\,,$$

тј.

$$ac + bd > ad + bc\,.$$

Онда

(12) $$ab + cd > ac + bd > ad + bc\,.$$

Коначно, нека је $ab + cd$ прост број онда из (12) имамо да су $ab + cd$ и $ac + bd$ међусобно прости. Дакле, из (11) важи $ac + bd$ дели $ad + bc$, али то не може бити тачно према (12).

Литература

[1] Ptolemy's Theorem: http://www.cut-the-knot.org/proofs/ptolemy.shtml.

[2] R. Askey, Completing Brahmagupta’s Extension in *The Legacy of Alladi Ramakhrishan in the Mathematical Sciences*, Springer, New York 2010, 190-197.

[3] J. L. Helibron, Geometry Civilized, Clarendon Press, Oxford 1998.

[4] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean geometry*, Dover publication, New York 2007, 80-92.

[5] M. Knežević и D. Savić, Some remark of Ptolomey's theorem and its applications, The teachings of mathematics, 23(1), 2020, 57-70.

[6] V. Petrović, Nastava matematike u srednjoj školi, *Ptolomejeva teorema i neke njene primene*, Nastava matematike, 202, 1993, 23-27.

[7] W. Reyes, An Application of Thebault’s Theorem, Forum Geometricorum, 2, 2002, 183-185.

[8] R. Stärk, Eine weitere Lösung der Thebault'schen Aufgabe, Elemente der Mathematik, 44, 1989, 130-133