УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Невена Милановић

НУМЕРИЧКО РЕШАВАЊЕ ЕЛИПТИЧКИХ ЈЕДНАЧИНА СА ГРАНИЧНИМ УСЛОВОМ ТРЕЋЕ ВРСТЕ

мастер рад

Београд, 2022.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Александра Делић,
доцент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Александра Делић,
доцент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милан Дражић,
редовни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Сандра Живановић,
доцент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Садржај

1 Увод

Многе физичке, биолошке и друштвене појаве се математички моделирају парцијалним диференцијалним једначинама, па је због такве широке примене, њихова теорија једна од најважнијих области математике. У великом броју случајева, аналитичко решење ових једначина не можемо да одредимо, те се и велики део нумеричке анализе бави њиховим приближним решењем. Без обзира на врсту једначине која се разматра, конструкцији нумеричке методе за њено приближно решење често претходи математичка анализа проблема, како бисмо добили низ корисних информација о егзистенцији и јединствености решења, као и о осетљивости решења на глаткост улазних података. Основне алате за решавање и проучавање парцијалних диференцијалних једначина дају нам теорија оператора и функционална анализа, стога ћемо се у овом поглављу осврнути на појмове и резултате теорије оператора и функционалне анализе, који ће да нам користе у даљем раду.

1.1 Теорија оператора

Прво се упознајемо са просторима у којима ћемо да посматрамо за овај рад значајне особине оператора, које смо, уколико то није другачије назначено, преузели из [1].

1.1.1 Banach-ови и Hilbert-ови простори

Дефиниција 1.1. *За дати скуп V, функцију $d : V \times V \to [0, \infty)$ називамо метриком на V, а (V, d) метричким простором, ако је*

- $d(u, v) = 0$ *акко је* $u = v$,
- $d(u, v) = d(v, u)$ *за све* $u, v \in V$,
- $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ *за све* $u, v, w \in V$.

Дефиниција 1.2. *Нека је V реалан векторски простор. Функцију $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ која има особине*

- $\|u\| = 0$ *акко је* $u = 0$,
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ *за свако* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и свако* $u \in V$,
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *за све* $u, v \in V$,

називамо нормом на V, а простор V заједно са датом нормом називамо нормиран простор.

Став 1.1. *Две норме $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ на векторском простору V су еквивалентне акко постоје константе $0 < c \leq C < \infty$ такве да је $c\|u\|_1 < \|u\|_2 < C\|u\|_1$ за свако $u \in V$.*

Напоменимо да је у сваком нормираном простору V могуће да дефинишемо метрику формулом $d(u, v) = \|u - v\|$ за све $u, v \in V$.
За овако дефинисану метрику, у наредним дефиницијама и ставовима нормиран простор можемо заменити метричким.

Дефиниција 1.3. *За низ* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *у нормираном простору* V *кажемо да конвергира елементу* u *тог простора, ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$*, такав да је* $\|u_n - u\| < \varepsilon$ *за свако* $n > n_0$.

Дефиниција 1.4. *Низ* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *у нормираном простору* V *је Cauchy-јев, ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$*, такав да је* $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ *за све* $m, n > n_0$.

Став 1.2. *Сваки Cauchy-јев низ је ограничен.*

Став 1.3. *Сваки конвергентан низ је Cauchy-јев, а ако Cauchy-јев низ има конвергентан подниз, онда и сам конвергира.*

Дефиниција 1.5. *Нормиран простор* V *називамо комплетним уколико у њему сваки Cauchy-јев низ конвергира.*

Дефиниција 1.6. *Комплетан нормиран простор називамо Banach-овим простором.*

Дефиниција 1.7. *Скуп* K *у нормираном простору* V *зовемо компактним, ако сваки низ у* K *има подниз који конвергира елементу из* K.

Дефиниција 1.8. *За подскуп* K *нормираног простора* V *кажемо да је релативно компактан ако је* $\bar{K}$ *компактан.*

Став 1.4. *Сваки коначно димензионалан нормиран простор је Banach-ов.*

Став 1.5. *Све норме на истом коначно димензионалном простору су међусобно еквивалентне.*

Дефиниција 1.9. *Нормиран простор* V *називамо локално компактним ако је сваки ограничен затворен скуп у* V *компактан.*

Став 1.6. *Нормиран простор* V *је локално компактан акко је коначно димензионалан.*

Пређимо на дефиниције и теорему битну за Hilbert-ове просторе.

Дефиниција 1.10. *Нека је* V *реалан векторски простор. Функцију* $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ *која има особине*

- $(u, u) \geq 0$ *за свако* $u \in V$*, где је* $(u, u) = 0$ *акко је* $u = 0$,
- $(u, v) = (v, u)$ *за све* $u, v \in V$,
- $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ *за свако* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и све* $u, v \in V$,
- $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ *за све* $u, v, w \in V$,

називамо скаларни производ.

Теорема 1.7. *Ако је* $(\cdot,\cdot)$ *скаларни производ на* V*, тада са*

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad \text{за свако } u \in V,$$

дефинишемо скаларним производом индуковану норму.

Дефиниција 1.11. *Hilbert-овим простором називамо сваки Banach-ов простор чија је норма индукована неким скаларним производом тог простора.*

Дефиниција 1.12. *За векторе* u *и* v *из Hilbert-овог простора* V *кажемо да су узајамно ортогонални уколико је* $(u, v) = 0$.

1.1.2 Особине оператора

Дефиниција 1.13. *Функцију* $L : V \to U$ *између два векторска простора над истим пољем скалара* $\mathbb{F}$ *називамо линеарном ако је*

$$L(\lambda_u u + \lambda_v v) = \lambda_u L(u) + \lambda_v L(v) \quad \text{за све } \lambda_u, \lambda_v \in \mathbb{F} \text{ и све } u, v \in V.$$

Напоменимо да у случају оваквог линеарног пресликавања, када су U и V векторски простори, често користимо ознаку Lu уместо $L(u)$ и израз *линеаран оператор* уместо линеарна функција. У случају када је $U = \mathbb{F}$, говоримо о *линеарном функционалу* $u^\star : V \to \mathbb{F}$.

Дефиниција 1.14. *Простор свих ограничених линеарних функционала* $u^\star : V \to \mathbb{F}$ *називамо конјуговани или дуални простор* $V^\star$ *простора* V.

Дефиниција 1.15. *Линеаран оператор* $L : V \to U$ *је ограничен ако постоји позитивна константа* C *таква да за свако* $u \in V$ *важи* $\|Lu\| \leq C\|u\|$.
Инфимум константи C*, за које важи претходна неједнакост, називамо нормом оператора* L *и означавамо* $\|L\|$.

Став 1.8. *Ако је* L *линеаран оператор, тада важи*

$$\|L\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Lu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Lu\| = \sup_{\|u\| = 1} \|Lu\|.$$

Дефиниција 1.16. *Линеаран оператор* $L : V \to U$ *је непрекидан у тачки* $u \in V$*, ако за сваки низ* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ *где* $u_n \to u$ *када* $n \to \infty$*, важи да* $Lu_n \to Lu$ *када* $n \to \infty$.

Став 1.9. *Ако је* $L : V \to U$ *линеаран оператор и ако је непрекидан у једној тачки, тада је он непрекидан на читавом простору.*

Став 1.10. *Линеаран оператор* $L : V \to U$ *је непрекидан акко је ограничен.*

Дефиниција 1.17. *Нека је* $L : V \to U$ *линеаран оператор. Тада са* $\mathcal{D}(L)$ *означавамо област дефинисаности оператора* L*, са* $\mathcal{N}(L) = \{u \in \mathcal{D}(L) : Lu = 0\}$ *језгро, а са* $\mathcal{R}(L) = \{Lu : u \in \mathcal{D}(L)\}$ *слику оператора* L.

Лема 1.11. *Линеаран оператор* L *је „1-1 ", уколико му је језгро тривијално, тачније уколико је* $\mathcal{N}(L) = 0$.

Напоменимо да у том случају можемо да дефинишемо инверзно пресликавање $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to \mathcal{D}(L)$.

Дефиниција 1.18. *Два нормирана простора* V *и* U *су изоморфна, ако постоји линеаран непрекидан оператор* $L : V \to U$ *који је „1-1 " и „на " и чији је инверз* $L^{-1} : U \to V$ *непрекидан.*

Ставови који следе гарантују инвертибилност оператора.

Став 1.12. *[6] Линеаран оператор $L : V \to U$ има инверзни оператор $L^{-1} : U \to V$ акко је $Lu = 0$ само за $u = 0$.*

Дефиниција 1.19. *За непрекидан линеаран оператор $L : V \to U$ кажемо да је одоздо ограничен, ако за неко $c > 0$ важи да је $\|Lu\| \geq c\|u\|$ за свако $u \in V$.*

Став 1.13. *Линеаран оператор L, који пресликава нормиран простор V на нормиран простор U, има инверзни оператор који је линеаран и ограничен акко је одоздо ограничен.*

Дефиниција 1.20. *Линеаран оператор $L : V \to U$ је*

- *позитивно дефинисан уколико је $(Lu, u) \geq c\|u\|^2$ за $c > 0$,*
- *позитиван уколико је $(Lu, u) > 0$ за $u \neq 0$,*
- *ненегативан уколико је $(Lu, u) \geq 0$.*

Са $\mathcal{B}(V)$ означимо простор ограничених оператора на Hilbert-овом простору V.

Дефиниција 1.21. *Адјунговање као операција на $\mathcal{B}(V)$ описано је идентитетом*

$$(Lu, v) = (u, L^*v), \quad \text{за све} \quad u, v \in V,$$

где је L^* адјунговани оператор оператора L.

Дефиниција 1.22. *Оператор $L \in \mathcal{B}(V)$ је самоконјугован или симетричан уколико је $L = L^*$.*

Став 1.14. *Ако су за неки оператор $L \in \mathcal{B}(V)$ истовремено и L и L^* одоздо ограничени, онда су и L и L^* инвертибилни.*

Последица 1.15. *[6] Ако је $L : V \to V$ позитивно дефинисан линеаран оператор чија је област дефинисаности $\mathcal{D}(L) = V$, тада постоји инверзни оператор L^{-1} чија је област дефинисаности $\mathcal{D}(L^{-1}) = V$.*

У даљем раду од значаја ће нам бити наредна теорема.

Теорема 1.16. *[14]* **(Lax-Milgram).** *Нека је V Hilbert-ов простор са нормом $\|\cdot\|_V$ и нека су*

$$a : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad l : V \to \mathbb{R}$$

редом билинеарно и линеарно пресликавање. Претпоставимо да постоје позитивне константе C_1, C_2 и C_3 такве да је

- *$a(\cdot,\cdot)$ непрекидно(ограничено): $|a(u,v)| \leq C_1\|u\|_V\|v\|_V, \quad \forall u, v \in V$,*
- *$l(\cdot)$ непрекидно(ограничено): $|l(v)| \leq C_2\|v\|_V, \quad \forall v \in V$,*
- *$a(\cdot,\cdot)$ коерцивно(елиптично): $|a(u,u)| \geq C_3\|u\|_V^2, \quad \forall u \in V$.*

Тада постоји јединствено $u \in V$ такво да је

$$a(u, v) = l(v), \qquad \forall v \in V.$$

1.1.3 Steklov-љеви оператори усредњења

Дефинишимо симетричан облик једнодимензионог Steklov-љевог оператора као

$$Tu(x) = \frac{1}{h}\int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} u(t)dt.$$

Уколико уведемо смену $t = x + sh$, добијамо

$$Tu(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(x+sh)ds.$$

Његове асиметриче облике дефинишемо као

$$T_+u(x) = Tu(x+\frac{1}{2}h) = \frac{1}{h}\int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} u(t+\frac{1}{2}h)dt = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} u(s)ds,$$

$$T_-u(x) = Tu(x-\frac{1}{2}h) = \frac{1}{h}\int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} u(t-\frac{1}{2}h)dt = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u(s)ds,$$

док са сменом $s = x + th$ имамо

$$T_+u(x) = \int_0^1 u(x+th)dt,$$

$$T_-u(x) = \int_{-1}^0 u(x+th)dt.$$

У овом раду посебно ће нам бити значајан оператор $T^2 = T_+T_- = T_-T_+ = TT$, као и његови асиметрични облици T_+^2 и T_-^2. Пронађимо њихов експлицитни облик, при чему користимо парцијалну интеграцију (видети [13]).

$$\begin{aligned}
T^2u(x) = T_+T_-u(x) &= \frac{1}{h^2}\int_x^{x+h}\int_{t-h}^{t} u(s)dsdt \\
&= \frac{1}{h^2}\left[t\int_{t-h}^{t} u(s)ds\Big|_x^{x+h} - \int_x^{x+h} t\,\frac{d}{dt}\int_{t-h}^{t} u(s)dsdt\right] \\
&= \frac{1}{h^2}\left[(x+h)\int_x^{x+h} u(s)ds - x\int_{x-h}^{x} u(s)ds - \int_x^{x+h} t(u(t)-u(t-h))dt\right] \\
&= \frac{1}{h^2}\left[\int_{x-h}^{x}(s+h)u(s)ds - x\int_{x-h}^{x} u(s)ds + (x+h)\int_x^{x+h} u(s)ds - \int_x^{x+h} su(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h^2}\left[\int_{x-h}^{x}(s+h-x)u(s)ds + \int_x^{x+h}(x+h-s)u(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{x-h}^{x}\frac{h+s-x}{h}u(s)ds + \int_x^{x+h}\frac{h-s+x}{h}u(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{x-h}^{x}\left(1+\frac{s-x}{h}\right)u(s)ds + \int_x^{x+h}\left(1-\frac{s-x}{h}\right)u(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|s-x|}{h}\right)u(s)ds.
\end{aligned}$$

Дакле,

$$T^2u(x) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|s-x|}{h}\right)u(s)ds. \tag{1.1}$$

Његове асиметричне облике дефинишемо са

$$\begin{aligned} T_+^2u(x) &= \frac{2}{h}\int_{x}^{x+h}\left(1-\frac{s-x}{h}\right)u(s)ds,\\ T_-^2u(x) &= \frac{2}{h}\int_{x-h}^{x}\left(1+\frac{s-x}{h}\right)u(s)ds. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Смена $s = x + th$ нам даје

$$\begin{aligned} T^2u(x) &= \int_{-1}^{1}(1-|t|)\,u(x+th)dt,\\ T_+^2u(x) &= 2\int_{0}^{1}(1-t)\,u(x+th)dt,\\ T_-^2u(x) &= 2\int_{-1}^{0}(1+t)\,u(x+th)dt. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Због својих својстава, ови оператори имају важну улогу при апроксимацији коначним разликама. Наиме, ако знамо да је $u_{x\bar{x}} = h^{-2}\big[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\big]$, важи да је

$$T^2u''(x) = u_{x\bar{x}}(x). \tag{1.4}$$

Покажимо ово својство уз помоћ парцијалне интеграције.

$$\begin{aligned} T^2u''(x) &= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)u''(t)dt\\ &= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}\left(1+\frac{t-x}{h}\right)u''(t)dt + \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\left(1-\frac{t-x}{h}\right)u''(t)dt\\ &= \frac{1}{h}\left[\left(1+\frac{t-x}{h}\right)u'(t)\Big|_{x-h}^{x} - \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}u'(t)dt + \left(1-\frac{t-x}{h}\right)u'(t)\Big|_{x}^{x+h} + \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}u'(t)dt\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[\left(1+\frac{x-x}{h}\right)u'(x) - \left(1+\frac{x-h-x}{h}\right)u'(x-h) - \frac{1}{h}u(t)\Big|_{x-h}^{x}\right.\\ &\left. + \left(1-\frac{x+h-x}{h}\right)u'(x+h) - \left(1-\frac{x-x}{h}\right)u'(x) + \frac{1}{h}u(t)\Big|_{x}^{x+h}\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[u'(x) - \frac{1}{h}u(x) + \frac{1}{h}u(x-h) - u'(x) + \frac{1}{h}u(x+h) - \frac{1}{h}u(x)\right]\\ &= \frac{1}{h^2}\big[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\big] = u_{x\bar{x}}(x). \end{aligned}$$

Очигледно је и

$$T_+u'(x) = u_x(x) \quad \text{и} \quad T_-u'(x) = u_{\bar{x}}(x),$$

тачније,

$$\begin{aligned} T_+u'(x) &= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}u'(t)dt = \frac{1}{h}u(t)\Big|_{x}^{x+h} = \frac{1}{h}\big[u(x+h) - u(x)\big] = u_x(x),\\ T_-u'(x) &= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}u'(t)dt = \frac{1}{h}u(t)\Big|_{x-h}^{x} = \frac{1}{h}\big[u(x) - u(x-h)\big] = u_{\bar{x}}(x). \end{aligned}$$

1.2 Функционални простори

Како тачност апроксимација коначним разликама и коначним елементима код парцијалних диференцијалних једначина у великој мери зависи од глаткости аналитичког решења, које са собом повлачи и глаткост улазних података, прецизне претпоставке о регуларности решења и података можемо добити уколико посматрамо класе функција са специфичним својствима диференцијабилности и интеграбилности. Дакле, потребно је да посматрамо функционалне просторе, а у овом раду све функције које у њима посматрамо су реалних вредности, облика $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Материјал за даља излагања преузели смо из [14], [6], [11] и [9].

Отворен и повезан скуп $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ називамо *област*, док је скуп $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ *граница* те *области*, n-торку

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

називамо *мултииндекс*, а са $\mathbb{N}_0$ означавамо скуп ненегативних целих бројева. Ненегативан цео број $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ је *дужина мултииндекса.* У случају функција више променљивих, *парцијалне изводе* означавамо са

$$\partial^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

1.2.1 Простори непрекидних функција

Нека је Ω ограничена област у $\mathbb{R}^n$ и нека $k \in \mathbb{N}$. Са $C^k(\Omega)$ означавамо простор који чине функције u, дефинисане на Ω, које имају непрекидне све парцијалне изводе реда мањег или једнаког k. Уколико $\partial^\alpha u$ можемо непрекидно да продужимо са Ω на $\bar{\Omega}$ за сваки мултииндекс α, где је $|\alpha| \leq k$, говоримо о простору $C^k(\bar{\Omega})$. $C^k(\bar{\Omega})$ је Banach-ов простор у коме уводимо норму

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Специјално, када је $k = 0$, са $C(\bar{\Omega})$ означавамо простор свих непрекидних функција у коме норму рачунамо по формули

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|,$$

док је $C^\infty(\bar{\Omega})$ простор бесконачно диференцијабилних функција, кога дефинишемо са

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\bar{\Omega}).$$

Носач непрекидне функције u дефинисане на скупу Ω, дефинишемо као затворење скупа тачака у коме је $u(x) \neq 0$ и означавамо са $\operatorname{supp} u$. Тачније,

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Дакле, носач функције u је најмањи затворен подскуп скупа Ω, такав да је $u = 0$ у $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$.
Са $C_0^k(\Omega)$ означавамо простор свих функција које се налазе у $C^k(\Omega)$, а чији је носач компактан у Ω.

1.2.2 Простори интеграбилних функција

Нека је Ω ограничена област у $\mathbb{R}^n$ и нека $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Са $L^p(\Omega)$ означавамо простор функција u дефинисаних на Ω за које важи да је

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq \infty.$$

$L^p(\Omega)$ је Banach-ов простор са нормом

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Специјално, $L^2(\Omega)$ је Hilbert-ов простор са скаларним производом

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

и нормом

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Видимо да је

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}.$$

Издвајамо и простор $L^\infty(\Omega)$ који се састоји од функција u, дефинисаних на Ω, таквих да $|u|$ има коначан есенцијални супремум. Наиме, постоји константа C, таква да је $|u(x)| \leq C$ за скоро свако $x \in \Omega$. Најмање такво C називамо есенцијалним супремумом од $|u|$ и означавамо са $C = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|$. Норма простора $L^\infty(\Omega)$ је

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Значајну улогу у многим проценама у овом раду имају наредне две неједнакости.

Лема 1.17. (Cauchy-Schwarz-ова неједнакост). *Нека су функције u и v из простора $L^2(\Omega)$. Тада производ uv припада простору $L^1(\Omega)$, при чему је*

$$|(u,v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Лема 1.18. *[4]* **(ε-неједнакост).** *Нека $a, b \in \mathbb{R}$. Тада за произвољно $\varepsilon > 0$ важи да је*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2.$$

Теорема 1.19. *[4]* **(Green-ова формула за n = 2).** *Нека је Ω ограничена област у $\mathbb{R}^2$, а њена граница $\Gamma = \partial\Omega$ класе C^1. Тада је за $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$
$$= -\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right) v(x,y)dxdy + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y)v(x,y)d\Gamma,$$

где је ν јединични спољашњи вектор нормале на криву Γ.

1.2.3 Простори Sobolev-a

Најпре желимо да уведемо појам слабог извода, уопштења обичног извода. Полазимо од формуле парцијалне интеграције за функције $u \in C^k(\Omega)$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \partial^\alpha u(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\partial^\alpha v(x)dx, \quad |\alpha| \leq k.$$

Нека је сада функција u локално интеграбилна на Ω, односно, интеграбилна на свакој ограниченој подобласти области Ω. Претпоставимо да постоји локално интеграбилна функција w_α на скупу Ω таква да је

$$\int_\Omega w_\alpha v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\partial^\alpha v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тада за функцију w_α кажемо да је *слаби извод* функције u реда $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Напоменимо да у наставку, за овако уведени слаби извод, задржавамо обичну ознаку, тачније, $w_\alpha = \partial^\alpha u$.

Сада можемо да дефинишемо просторе Sobolev-a. Нека је k ненегативан цео број и $1 \leq p \leq \infty$. Простор Sobolev-a $W_p^k(\Omega)$ чине функције простора $L^p(\Omega)$ које имају слабе изводе реда мањег или једнаког k, који исто тако припадају простору $L^p(\Omega)$. Тачније,

$$W_p^k(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) :\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq k\right\}.$$

Простор $W_p^k(\Omega)$ је Banach-ов, са нормом

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{за} \quad 1 \leq p < \infty$$

и

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{за} \quad p = \infty.$$

Уколико уведемо ознаку

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|= k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{за} \quad 1 \leq p < \infty$$

и

$$|u|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|= k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{за} \quad p = \infty,$$

тада претходно уведене норме можемо записати као

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{j=0}^{k} |u|^p_{W_p^j(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{за} \quad 1 \leq p < \infty$$

и

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} |u|_{W_\infty^j(\Omega)} \quad \text{за} \quad p = \infty.$$

Када је $k \geq 1$, $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$ називамо *полунормом Sobolev-a* на $W_p^k(\Omega)$ и она, у поређењу са нормом, сумира само парцијалне изводе највишег реда.

Посматрамо важан специјалан случај када је $p = 2$. Тада је $W_2^k(\Omega)$ Hilbert-ов простор и означавамо га још и са $H^k(\Omega)$. У њему скаларни производ дефинишемо са

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx \quad \text{за} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Посебно, за $k = 1$ имамо да је

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, \dots, n \right\},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx.$$

Дефиниција 1.23. *Непрекидан идентички оператор $I : V \to U$ нормираног простора V у нормиран простор U, за које важи релација $V \subset U$, називамо потапањем простора V у простор U и означавамо са $V \hookrightarrow U$.*

Додатно, из непрекидности оператора потапања, следи да постоји константа C таква да је $\|u\|_U \le C\|u\|_V$ за свако $u \in V$.

Дефиниција 1.24. *Lipschitz-ова област је ограничен, отворен скуп са Lipschitz непрекидном границом, односно, са границом коју локално можемо да опишемо Lipschitz непрекидним функцијама.*

Сада можемо да формулишемо наредну теорему.

Теорема 1.20. (Теорема потапања). *Нека је Ω Lipschitz-ова област у $\mathbb{R}^n$, $k > 0$ и $1 \le p < \infty$. Тада важе наредна потапања*

- $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *за* $p \le q \le \frac{np}{n-kp}$, *ако је* $k - \frac{n}{p} < 0$,
- $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *за* $p \le q < \infty$, *ако је* $k - \frac{n}{p} = 0$,
- $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, *ако је* $k - \frac{n}{p} > 0$,

при чему број $sob_n(k,p) = k - \frac{n}{p}$, често називамо Sobolev број.

На основу претходне теореме, приметимо да од димензије простора зависи да ли ће функције истог простора бити непрекидне, па тако функције простора $H^1(\Omega)$ јесу непрекидне у једнодимензионом случају, док су у дводимензионом случају непрекидне функције простора $H^2(\Omega)$.

Како у раду посматрамо гранични проблем, значајне су нам наредне две теореме.

Теорема 1.21. *Нека је Ω Lipschitz-ова област у $\mathbb{R}^n$. Тада је простор $C^1(\bar{\Omega})$ густ у $H^1(\Omega)$.*

Теорема 1.22. (Теорема о трагу). *Нека $u \in W_p^s(\Omega)$, $s > \frac{1}{p}$, $s \neq$ цео број$+\frac{1}{p}$ и нека је граница домена Ω довољно глатка. Тада постоји траг функције u на граници Γ, који припада простору $W_p^{s-\frac{1}{p}}$ и важи оцена*

$$\|u\|_{W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{W_p^s(\Omega)}.$$

Више о просторима Sobolev-а разломљеног реда можемо да видимо у [7].
Код оцене грешке апроксимације методом коначних разлика, битна нам је следећа теорема.

Теорема 1.23. *[7] Ако са $\widehat{\Omega}_h$ означимо приграничнi појас ширине h области Ω и ако је граница $\partial\Omega$ део по део глатка, тада за $u \in H^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq 1$, важи да је*

$$\|u\|_{L^2(\widehat{\Omega}_h)} \leq C(h)\|u\|_{H^k(\Omega)}, \tag{1.5}$$

где је

$$C(h) = C \begin{cases} h^k, & 0 \leq k < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{h}|\ln h|, & k = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{h}, & \frac{1}{2} < k \leq 1, \end{cases}$$

а константа C не зависи од функције u.

1.3 Линеарне парцијалне диференцијалне једначине

У ограниченој области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ посматрамо линеарну парцијалну диференцијалну једначину другог реда

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)\,u(x) = f(x), \tag{1.6}$$

где су a_{ij}, b_i, c, f задате функције променљивих $x_i, i = 1, ..., n$, док је u непозната функција. Задати коефицијенти испуњавају следеће услове:

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &\in C^1\left(\bar{\Omega}\right), \quad i,j = 1,...,n, \\ b_i(x) &\in C\left(\bar{\Omega}\right), \quad i, = 1,...,n, \\ c(x) &\in C\left(\bar{\Omega}\right), \\ f(x) &\in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Посматрајући сопствене вредности матрице $A = A(x) = (a_{ij})$ можемо извршити класификацију једначине (1.6). У тачки $x = (x_1, ..., x_n)^T$ једначина је

- **елиптичког типа**: ако су све сопствене вредности матрице A позитивне,
- **параболичког типа**: ако је једна сопствена вредност једнака нули, а све остале су истог знака,

- **хиперболичког типа**: ако је једна сопствена вредност позитивна, а све остале негативне, или обрнуто.

Једначини (1.6) придружују се гранични (контурни) услови и тада говоримо о граничном (контурном) проблему. Разликујемо

- **Први (Dirichlet-ов) гранични услов**: $u(x) = g(x)$ на $\partial\Omega$,
- **Други (Neumann-ов) гранични услов**: $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x)$ на $\partial\Omega$,
- **Трећи (Robin-ов) гранични услов**: $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \sigma(x)\, u(x) = g(x)$ на $\partial\Omega$,

где $g(x) \in L^2(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \in L^\infty(\partial\Omega)$, $\sigma(x) > 0$, а $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ је извод функције u у правцу спољашње нормале на криву $\partial\Omega$. Уколико је $g \equiv 0$, гранични услови су *хомогени*, иначе су *нехомогени*.
Напоменимо да се други и трећи гранични услов могу уопштено записати као

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, cos\alpha_j + \sigma(x)\, u(x) = g(x)$$

где α_j представља угао између јединичног спољашњег вектора нормале ν на криву $\partial\Omega$ и осе x_j. За $\sigma \equiv 0$ добијамо други гранични проблем.

Једначине облика (1.6) које задовољавају услов

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega},$$

су елиптичке једначине, где је C_0 позитивна константа независна од x и ξ.

За даљу анализу узимамо елиптичку једначину, тачније, уопштење Poisson-ове диференцијалне једначине са граничним условима треће врсте:

$$\begin{aligned} -\triangle u + cu = f \qquad & \text{на} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0 \qquad & \text{на} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где је

$$c \geq 0, \;\; f \in C(\Omega), \;\; \sigma \in C(\partial\Omega), \; \sigma > 0. \tag{1.8}$$

Познато је да овај проблем има јединствено решење u класе $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, које се назива класичним решењем.

2 Варијациона формулација проблема

Желимо да превазиђемо ограничења класичне теорије, како би узели у обзир парцијалне диференцијалне једначине са „не тако глатким” функцијама, те уопштавамо појам решења, тако што слабимо захтев диференцијабилности на u. Отуда потреба за конструисањем слабе (варијационе) форме проблема (1.7).

У наредне две главе разматрамо једнодимензиони и дводимензиони случај, тачније, посматрамо уопштење Poisson-ове једначине на дужи и правоугаонику.

2.1 Једнодимензиони случај ($n = 1$)

Због једноставности, бирамо $\Omega = (0, 1)$. Бијекцијом $f(x) = (b-a)x+a$ увек можемо да пресликамо интервал $(0, 1)$ у произвољан интервал (a, b).
Наведени проблем (1.7) тада има облик

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) && \text{на} \quad (0,1), \\ -u'(0) + \sigma_0 u(0) &= 0, && \sigma_0 > 0, \\ u'(1) + \sigma_1 u(1) &= 0, && \sigma_1 > 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

при чему $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ скоро свуда на Ω и $f \in L^2(\Omega)$.

Најпре претпоставимо да функција $u \in H^2(\Omega)$, онда узмимо произвољну функцију $v \in H^1(\Omega)$, њом помножимо Poisson-ову једначину, а затим дати израз интегралимо по области Ω. Добијамо

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Напоменимо да је дате производе могуће интегралити, јер $u'' \in L^2(\Omega)$, па како и $v \in L^2(\Omega)$, имамо да $u''v \in L^1(\Omega)$. Такође, из $c \in L^\infty(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$ и $v \in L^2(\Omega)$ следи да $cuv \in L^1(\Omega)$, тако и из $f \in L^2(\Omega)$ следи да $fv \in L^1(\Omega)$. Парцијална интеграција нам даје

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Да би ова једнакост имала смисла, приметимо да више не морамо да претпостављамо да $u \in H^2(\Omega)$, већ нам је довољно да $u \in L^2(\Omega)$ и $u' \in L^2(\Omega)$, тачније, да $u \in H^1(\Omega)$.
Када изразимо извод функције u помоћу граничних услова, имамо

$$-(-\sigma_1 u(1))v(1) + \sigma_0 u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

На крају, варијациона формулација проблема (2.1) је

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx + \sigma_0 u(0)v(0) + \sigma_1 u(1)v(1) \\ = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Функције типа функције v, које смо користили при конструисању слабе форме, називамо још и *тест-функцијама* (видети [9]).
Овим смо показали да решење проблема (2.1) класе $H^1(\Omega)$ представља решење варијационог проблема.

2.1.1 Егзистенција и јединственост решења

За доказивање егзистенције и јединствености решења користимо Lax-Milgram-ову теорему 1.16, стога слабу форму проблема записујемо у мало апстрактнијем облику. Дакле, варијациона формулација проблема одређена је са

$$V = H^1(\Omega),$$

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx + \sigma_0 u(0)v(0) + \sigma_1 u(1)v(1), \tag{2.3}$$

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{2.4}$$

Варијациони проблем сада гласи: наћи $u \in H^1(\Omega)$ тако да задовољава

$$a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Покажимо прво да функција u задовољава наредну неједнакост.

Став 2.1. *Нека $u \in H^1(\Omega)$. Тада је*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^1 (u'(x))^2dx + u^2(0) + u^2(1).$$

Доказ. На основу теореме 1.21, довољно је да доказ изведемо за $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Важи да је

$$u(x) = \int_0^x u'(t)dt + u(0) = u(1) - \int_x^1 u'(t)dt.$$

Мајорирамо десну страну прве једнакости, при чему користимо да је за $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ $(a^2+c^2)(b^2+d^2) = (ab+cd)^2 + (ad-bc)^2$, односно, $(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq (ab+cd)^2$. Добијамо

$$\begin{aligned} u^2(x) \leq & (1^2+1^2)\left[\left(\int_0^x u'(t)dt\right)^2 + u^2(0)\right] \leq 2\int_0^x 1^2dt \int_0^x (u'(t))^2dt + 2u^2(0) \\ =& 2x\int_0^x (u'(t))^2dt + 2u^2(0). \end{aligned}$$

Аналоган поступак применимо и на другу једнакост, што нам даје

$$\begin{aligned} u^2(x) \leq & ((-1)^2+1^2)\left[\left(\int_x^1 u'(t)dt\right)^2 + u^2(1)\right] \leq 2\int_x^1 1^2dt \int_x^1 (u'(t))^2dt + 2u^2(1) \\ =& 2(1-x)\int_x^1 (u'(t))^2dt + 2u^2(1). \end{aligned}$$

Проширимо границе интеграла и саберемо претходне две неједнакости, након чега имамо да је

$$\begin{aligned} u^2(x) &\leq \frac{1}{2}2(x+(1-x))\int_0^1 (u'(x))^2dx + \frac{1}{2}(2u^2(0) + 2u^2(1)) \\ &= \int_0^1 (u'(x))^2dx + u^2(0) + u^2(1). \end{aligned}$$

Како десна страна последње неједнакости не зависи од x, она ће важити и за

$$\max_{[0,1]} u^2(x) \leq \int_0^1 (u'(x))^2 dx + u^2(0) + u^2(1),$$

а тим пре ће важити и за L^2 норму која је мања од C норме, те је

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{C(\bar{\Omega})} \leq \int_0^1 (u'(x))^2 dx + u^2(0) + u^2(1).$$

$\square$

Имајући у виду Lax-Milgram-ову теорему 1.16, приметимо да је V Хилбертов простор, $a(u,v)$ је симетрична билинеарна форма на $V \times V$, а $l(v)$ је линеарна форма на V.
Како су полазне претпоставке теореме задовољене, следеће што треба да покажемо је **ограниченост** $a(\cdot,\cdot)$:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx + \sigma_0 u(0)v(0) + \sigma_1 u(1)v(1) \right| \\ &\leq \int_0^1 |u'(x)||v'(x)|dx + \int_0^1 |c(x)||u(x)||v(x)|dx + \sigma_0|u(0)||v(0)| + \sigma_1|u(1)||v(1)|. \end{aligned}$$

Применом Cauchy-Schwarz-ове неједнакости 1.17 на прва два сабирка добијамо

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u'(x)||v'(x)|dx + \int_0^1 |c(x)||u(x)||v(x)|dx &\leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max(1, \|c\|_{L^\infty(\Omega)})(\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})(\|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq \max(1, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

док за друга два сабирка користимо теорему потапања 1.20 (тачније, непрекидност оператора потапања). За $\sigma = \max(\sigma_0, \sigma_1)$, имамо

$$\begin{aligned} \sigma_0|u(0)||v(0)| + \sigma_1|u(1)||v(1)| &\leq \sigma(|u(0)||v(0)| + |u(1)||v(1)|) \leq 2\sigma \max_{[0,1]}|u(x)| \max_{[0,1]}|v(x)| \\ &= 2\sigma \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \|v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq 2\sigma C_u C_v \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Уколико означимо са $C_1 = \max\left(1, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right) + 2\sigma C_u C_v$ добијамо

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Затим показујемо **ограниченост** $l(\cdot)$:

$$\begin{aligned} |l(v)| = \left| \int_0^1 f(x)v(x)dx \right| &\leq \int_0^1 |f(x)||v(x)|dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Уколико означимо са $C_2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}$, добијамо

$$|l(v)| \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.7}$$

На крају, показујемо **коерцивност (елиптичност)** $a(\cdot,\cdot)$:

$$a(u,u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 c(x)u^2(x)dx + \sigma_0 u^2(0) + \sigma_1 u^2(1). \tag{2.8}$$

Како је $c(x) \geq 0$, $\sigma_0 > 0$ и $\sigma_1 > 0$ скоро свуда на Ω, сигурно је

$$a(u,u) \geq \int_0^1 (u'(x))^2 dx = \|u'\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Исто тако важи да је

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \sigma_0 u^2(0) + \sigma_1 u^2(1) \\ &\geq \min(1,\sigma_0,\sigma_1)\left(\int_0^1 (u'(x))^2 dx + u^2(0) + u^2(1)\right), \end{aligned}$$

те је на основу става 2.1

$$a(u,u) \geq \min(1,\sigma_0,\sigma_1)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Када саберемо неједнакости (2.9) и (2.10), добијамо да је

$$a(u,u) \geq \frac{1}{2}\min(1,\sigma_0,\sigma_1)\left(\|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Тачније,

$$a(u,u) \geq C_3\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \text{за} \quad C_3 = \frac{1}{2}\min(1,\sigma_0,\sigma_1). \tag{2.11}$$

Додатно, како једнакост варијационог проблема (2.5) треба да важи за сваку функцију $v \in H^1(\Omega)$, бирамо $v \equiv u$. Тада из ограничености линеарног оператора и коерцивности билинеарне форме, имамо да је

$$C_3\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u,u) = l(u) \leq C_2\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

односно,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_2}{C_3} = \frac{1}{C_3}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Дакле, управо смо показали наредно тврђење.

Теорема 2.2. *Нека је $\Omega = (0,1)$ отворен интервал у $\mathbb{R}$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ скоро свуда на Ω, $f \in L^2(\Omega)$, $\sigma_0 > 0$, $\sigma_1 > 0$. Тада проблем: наћи $u \in H^1(\Omega)$ такво да за свако $v \in H^1(\Omega)$ важи*

$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 cuvdx + \sigma_0 u(0)v(0) + \sigma_1 u(1)v(1) = \int_0^1 fvdx,$$

има јединствено решење које задовољава априорну оцену

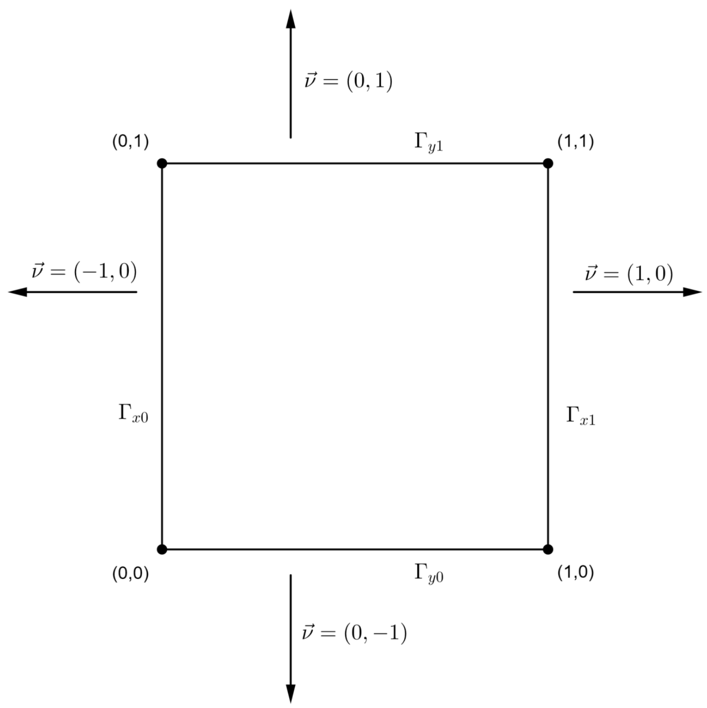
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C_3}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

2.2 Дводимензиони случај ($n = 2$)

Посматрамо област $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ и њену границу $\Gamma = \partial\Omega$, коју можемо да представимо као $\Gamma = \Gamma_{x0} \cup \Gamma_{x1} \cup \Gamma_{y0} \cup \Gamma_{y1}$, где је за $i = 0, 1$,

$$\Gamma_{xi} = \{(x,y) \in \Gamma \,:\, x = i, \quad 0 < y < 1\},$$

$$\Gamma_{yi} = \{(x,y) \in \Gamma \,:\, y = i, \quad 0 < x < 1\}.$$



Слика 1: Област Ω за $n = 2$

Проблем (1.7) сада има облик

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y), \quad && \text{на} \quad \Omega, \\
&\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) + \sigma(x,y)u(x,y) = 0, && \text{на} \quad \Gamma,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

при чему претпостављамо да $u \in H^2(\Omega)$ решава Poisson-ову једначину, $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ скоро свуда на Ω, $f \in L^2(\Omega)$, $\sigma \in L^\infty(\Gamma)$ и $\sigma > 0$ скоро свуда на Γ.
Имајући у виду слику 1, граничне услове можемо да запишемо као

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \nu}(0,y) + \sigma(0,y)u(0,y) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot (-1,0) + \sigma(0,y)u(0,y) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \sigma(0,y)u(0,y) = 0, \qquad \text{на} \quad \Gamma_{x0},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(1,y) + \sigma(1,y)u(1,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot (1,0) + \sigma(1,y)u(1,y)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) + \sigma(1,y)u(1,y) = 0, \qquad \text{на} \quad \Gamma_{x1},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,0) + \sigma(x,0)u(x,0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot (0,-1) + \sigma(x,0)u(x,0) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) + \sigma(x,0)u(x,0) = 0, \qquad \text{на} \quad \Gamma_{y0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,1) + \sigma(x,1)u(x,1) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot (0,1) + \sigma(x,1)u(x,1) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) + \sigma(x,1)u(x,1) = 0, \qquad \text{на} \quad \Gamma_{y1}. \end{aligned}$$

Аналогно једнодимензионом случају, сада уз помоћ Green-ове формуле 1.19, конструишемо слабу форму проблема (2.13). За произвољно $v \in H^1(\Omega)$, имамо

$$\begin{aligned} -\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right) v(x,y)dxdy + \int_0^1\int_0^1 c(x,y)u(x,y)v(x,y)dxdy \\ = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)v(x,y)dxdy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) dxdy - \int_0^1\left(-\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)\right)v(0,y)dy \\ - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(1,y)v(1,y)dy - \int_0^1\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\right)v(x,0)dx - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y}(x,1)v(x,1)dx \\ + \int_0^1\int_0^1 c(x,y)u(x,y)v(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)v(x,y)dxdy. \end{aligned}$$

Напоменимо да $v(0,y)$ представља траг функције v на кривој Γ_{x0}, $v(1,y)$ на Γ_{x1}, $v(x,0)$ на Γ_{y0}, а $v(x,1)$ на Γ_{y1}, као и да је сада довољно претпоставити да $u \in H^1(\Omega)$. Када изводе функције u изразимо помоћу одговарајућих граничних услова, добијамо варијациону формулацију проблема (2.13)

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) dxdy + \int_0^1\int_0^1 c(x,y)u(x,y)v(x,y)dxdy \\ + \int_0^1 \sigma(0,y)u(0,y)v(0,y)dy + \int_0^1 \sigma(1,y)u(1,y)v(1,y)dy + \int_0^1 \sigma(x,0)u(x,0)v(x,0)dx \\ + \int_0^1 \sigma(x,1)u(x,1)v(x,1)dx = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)v(x,y)dxdy. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Дакле, решење проблема (2.1) класе $H^1(\Omega)$ представља решење варијационог проблема.

2.2.1 Егзистенција и јединственост решења

За доказивање егзистенције и јединствености решења и сада користимо Lax-Milgram-ову теорему 1.16, те слабу форму записујемо уз помоћ билинеарне $(a(\cdot,\cdot))$

и линеарне форме ($l(\cdot)$) као

$$a(u,v) = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$
$$+\int_0^1\int_0^1 c(x,y)u(x,y)v(x,y)dxdy + \int_0^1 \sigma(0,y)u(0,y)v(0,y)dy \tag{2.15}$$
$$+\int_0^1 \sigma(1,y)u(1,y)v(1,y)dy + \int_0^1 \sigma(x,0)u(x,0)v(x,0)dx + \int_0^1 \sigma(x,1)u(x,1)v(x,1)dx,$$

$$l(v) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)v(x,y)dxdy. \tag{2.16}$$

Поново формулишемо варијациони проблем: наћи $u \in H^1(\Omega)$ тако да задовољава

$$a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.17}$$

Најпре покажимо да функција u задовољава наредне неједнакости.

Став 2.3. *Нека $u \in H^1(\Omega)$. Тада је*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1 u^2(0,y)dy + \int_0^1 u^2(1,y)dy, \tag{2.18}$$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1 u^2(x,0)dx + \int_0^1 u^2(x,1)dx. \tag{2.19}$$

Доказ. На основу теореме 1.21, довољно је да доказ изведемо за $u \in C^1(\bar{\Omega})$. За доказивање прве неједнакости, пратимо кораке из једнодимензионог случаја, осим што је сада u функција две променљиве, те важи да је

$$u(x,y) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(t,y)dt + u(0,y) = u(1,y) - \int_x^1 \frac{\partial u}{\partial t}(t,y)dt.$$

Дати израз квадрирамо, након чега га интегралимо по области Ω, а затим мајорирамо десну страну прве једнакости, те добијамо

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)dxdy \leq &(1^2+1^2)\left[\int_0^1\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(t,y)dt\right)^2 dxdy + \int_0^1\int_0^1 u^2(0,y)dxdy\right]\\ \leq &2\int_0^1\int_0^1 \left(\int_0^x 1^2 dt \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,y)\right)^2 dt\right) dxdy + 2\int_0^1 dx\int_0^1 u^2(0,y)dy\\ = &2\int_0^1\int_0^1 \left(x\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,y)\right)^2 dt\right) dxdy + 2\int_0^1 u^2(0,y)dy.\end{aligned}$$

Аналоган поступак применимо и на другу једнакост, што нам даје

$$\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)dxdy \leq 2\int_0^1\int_0^1 \left((1-x)\int_x^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,y)\right)^2 dt\right) dxdy + 2\int_0^1 u^2(1,y)dy.$$

Проширимо границе интеграла и саберемо последње две неједнакости, након чега имамо да је

$$\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)dxdy \leq \frac{1}{2}2\int_0^1\int_0^1 (x+(1-x))dx\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,y)\right)^2 dt\right)dy$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\left(2\int_0^1 u^2(0,y)dy + 2\int_0^1 u^2(1,y)dy\right)\\
&=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1 u^2(0,y)dy + \int_0^1 u^2(1,y)dy.
\end{aligned}
$$

Показујемо да важи и неједнакост (2.19). Како је

$$
u(x,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt + u(x,0) = u(x,1) - \int_y^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt,
$$

пратећи поступак аналоган претходном, добијамо неједнакост

$$
\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)dxdy \le \int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1 u^2(x,0)dx + \int_0^1 u^2(x,1)dx.
$$

□

Додатно, уколико саберемо неједнакости из става (2.3), имамо да је

$$
\begin{aligned}
2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le &\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy\\
&+\int_0^1 u^2(0,y)dy + \int_0^1 u^2(1,y)dy + \int_0^1 u^2(x,0)dx + \int_0^1 u^2(x,1)dx.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Полазне претпоставке Lax-Milgram-ове теореме 1.16 су испуњене, те нам остаје да покажемо **ограниченост** $a(\cdot,\cdot)$:

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| \le &\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right| dxdy + \int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right| dxdy\\
&+\int_0^1\int_0^1 |c(x,y)u(x,y)v(x,y)|\, dxdy + \int_0^1 |\sigma(0,y)u(0,y)v(0,y)|\, dy\\
&+\int_0^1 |\sigma(1,y)u(1,y)v(1,y)|\, dy + \int_0^1 |\sigma(x,0)u(x,0)v(x,0)|\, dx + \int_0^1 |\sigma(x,1)u(x,1)v(x,1)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Примена Cauchy-Schwarz-ове неједнакости на сваки од интеграла нам даје

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| \le &\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\
&+\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma_{x0})}\|u\|_{L^2(\Gamma_{x0})}\|v\|_{L^2(\Gamma_{x0})} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma_{x1})}\|u\|_{L^2(\Gamma_{x1})}\|v\|_{L^2(\Gamma_{x1})}\\
&+\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma_{y0})}\|u\|_{L^2(\Gamma_{y0})}\|v\|_{L^2(\Gamma_{y0})} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma_{y1})}\|u\|_{L^2(\Gamma_{y1})}\|v\|_{L^2(\Gamma_{y1})}\\
&\le \mu\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right)\\
&+4\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma)}\|u\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)},
\end{aligned}
$$

где је $\mu = \max\left(1, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$. Уколико на други сабирак применимо теорему о трагу 1.22 и означимо са $C_1 = \mu + 4\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma)} C_u C_v$, добијамо

$$
|a(u,v)| \le C_1\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.21}
$$

Даље, показујемо **ограниченост** $l(\cdot)$:

$$
|l(v)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}
$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

Уколико означимо са $C_2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}$, добијамо

$$|l(v)| \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.22}$$

На крају, показујемо **коерцивност (елиптичост)** $a(\cdot,\cdot)$:

$$\begin{aligned} a(u,u) = &\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy \\ &+ \int_0^1\int_0^1 c(x,y)u^2(x,y)dxdy + \int_0^1 \sigma(0,y)u^2(0,y)dy \\ &+ \int_0^1 \sigma(1,y)u^2(1,y)dy + \int_0^1 \sigma(x,0)u^2(x,0)dx + \int_0^1 \sigma(x,1)u^2(x,1)dx. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Како је $c \geq 0$ скоро свуда на Ω, а $\sigma > 0$ скоро свуда на Γ, сигурно је

$$a(u,u) \geq \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy = |u|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.24}$$

Даље, како $\sigma \in L^\infty(\Gamma)$, она је ограничена, те постоји константа $\sigma_{\min}$ таква да је $\sigma \geq \sigma_{\min}$ скоро свуда на Γ, те је и

$$\begin{aligned} a(u,u) \geq &\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy \\ &+\sigma_{\min}\left(\int_0^1 u^2(0,y)dy + \int_0^1 u^2(1,y)dy + \int_0^1 u^2(x,0)dx + \int_0^1 u^2(x,1)dx\right), \end{aligned}$$

односно,

$$\begin{aligned} a(u,u) \geq \min\bigl(1,\sigma_{\min}\bigr)\Biggl(&\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy + \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy \\ &+ \int_0^1 u^2(0,y)dy + \int_0^1 u^2(1,y)dy + \int_0^1 u^2(x,0)dx + \int_0^1 u^2(x,1)dx\Biggr). \end{aligned}$$

Време је да искористимо став 2.3, тачније, неједнакост (2.20). Сада је

$$a(u,u) \geq 2\min\bigl(1,\sigma_{\min}\bigr)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.25}$$

Када саберемо неједнакости (2.24) и (2.25), добијамо да је

$$a(u,u) \geq \min\bigl(1,\sigma_{\min}\bigr)\left(|u|^2_{H^1(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

На крају је

$$a(u,u) \geq C_3\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \text{за} \quad C_3 = \min\bigl(1,\sigma_{\min}\bigr). \tag{2.26}$$

Додатно, потпуно аналогно као у једнодимензионом случају, како једнакост варијационог проблема (2.5) треба да важи за сваку функцију $v \in H^1(\Omega)$, бирамо $v \equiv u$. Тада, из ограничености линеарног оператора и коерцивности билинеарне форме имамо да је

$$C_3\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u,u) = l(u) \leq C_2\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

односно,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_2}{C_3} = \frac{1}{C_3}\|f\|_{L^2(\Omega)} .$$

Дакле, управо смо показали и наредно тврђење за $n = 2$.

Теорема 2.4. *Нека је* $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ *отворен правоугаоник у* $\mathbb{R}^2$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ *скоро свуда на* Ω, $f \in L^2(\Omega)$, $\sigma \in L^\infty(\Gamma)$ *и* $\sigma > 0$ *скоро свуда на* Γ. *Тада проблем: наћи* $u \in H^1(\Omega)$ *такво да за свако* $v \in H^1(\Omega)$ *важи*

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 cuv dx dy + \int_0^1 \sigma_{x0} u_{x0} v_{x0} dy$$
$$+ \int_0^1 \sigma_{x1} u_{x1} v_{x1} dy + \int_0^1 \sigma_{y0} u_{y0} v_{y0} dx + \int_0^1 \sigma_{y1} u_{y1} v_{y1} dx = \int_0^1 \int_0^1 f v dx dy,$$

има јединствено решење које задовољава априорну оцену

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C_3} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.27}$$

где су $\sigma_{ij}, u_{ij}, v_{ij}$ *одговарајући трагови тих функција на кривој* $i = j$, $i = x, y$, $j = 0, 1$.

3 Апроксимација методом коначних разлика

Метода коначних разлика (метода мрежа) заснива се на замени извода количницима коначних разлика. Прво изаберемо коначно много тачака интервала $[0,1]$ које чине мрежу, а те изабране тачке називамо чворовима мреже. Чворови су равномерно распоређени, те је и наша мрежа равномерна и дефинисана кораком h, тачније, кораком између два суседна чвора.
Нека је $n \geq 2$. Мрежу дефинишемо као

$$\omega_h = \{x_i \mid x_i = ih,\ i = 1, ..., n-1,\ h = n^{-1}\},$$

док је

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{0,1\}\,.$$

У једнодимензионом случају ово ће бити наша мрежа, док у дводимензионом случају мрежу дефинишемо као директни производ $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_h$.
Када буде потребно, посматраћемо мреже

$$\omega_h^- = \omega_h \cup \{0\} \quad \text{и} \quad \omega_h^+ = \omega_h \cup \{1\}\,.$$

На равномерној мрежи $\bar{\omega}_h$ први извод функције u у тачки x_i $(u'(x_i))$ можемо апроксимирати на више начина, у зависности од тога да ли користимо

$$\begin{aligned}
u_{x,i} &= \frac{1}{h}[u(x_{i+1}) - u(x_i)], && \text{коначну разлику унапред,}\\
u_{\bar{x},i} &= \frac{1}{h}[u(x_i) - u(x_{i-1})], && \text{коначну разлику уназад,}\\
u_{\overset{\circ}{x},i} &= \frac{1}{2}(u_{x,i} + u_{\bar{x},i}) = \frac{1}{2h}[u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})], && \text{централну коначну разлику.}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

За апроксимацију другог извода функције u у тачки x_i $(u''(x_i))$ користимо централну коначну разлику, па имамо

$$u_{x\bar{x},i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})]. \tag{3.2}$$

Напоменимо да у дводимензионом случају дате дефиниције коначних разлика остају на снази, са том разликом што посматрамо парцијалне изводе по променљивим x и y, о чему ће касније бити више речи.

Уколико је функција $u(x)$ довољно глатка, можемо је развити у Taylor-ов ред и оценити грешку наведених апроксимација. Како је $u(x_{i+1}) = u(x_i + h)$, а $u(x_{i-1}) = u(x_i - h)$, за $0 < \theta < 1$ имамо

$$\begin{aligned}
u'(x_i) - u_{x,i} &= u'(x_i) - \frac{1}{h}\left[\left(u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i + \theta h)\right) - u(x_i)\right] = -\frac{h}{2}u''(x_i + \theta h),\\
u'(x_i) - u_{\bar{x},i} &= u'(x_i) - \frac{1}{h}\left[u(x_i) - \left(u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i + \theta h)\right)\right] = \frac{h}{2}u''(x_i + \theta h),\\
u'(x_i) - u_{\overset{\circ}{x},i} &= u'(x_i) - \frac{1}{2h}\left[2hu'(x_i) + 2\frac{h^3}{6}u'''(x_i + \theta h)\right] = -\frac{h^2}{6}u'''(x_i + \theta h),\\
u'(x_i) - u_{x\bar{x},i} &= u'(x_i) - \frac{1}{h^2}\left[u(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i + \theta h) - 2u(x_i) + u(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i + \theta h)\right]
\end{aligned}$$

$$= -\frac{h^2}{12} u''(x_i + \theta h).$$

Тако добијамо оцене

$$\begin{gathered} u'(x_i) = u_{x,i} + \mathcal{O}(h) = u_{\bar{x},i} + \mathcal{O}(h) = u_{\overset{\circ}{x},i} + \mathcal{O}(h^2), \\ u''(x_i) = u_{x\bar{x},i} + \mathcal{O}(h^2). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Примећујемо да, како се мрежа згушњава ($h \to 0$), апроксимације теже вредностима извода функције $u(x)$ у чворовима, при чему је конвергенција бржа код апроксимације централним количницима разлика.

У чворовима мреже вршимо дискретизацију трећег граничног проблема заменом функције u и њених извода са одговарајућим количницима коначних разлика. Континуалну величину u замењујемо вектором v, а гранични проблем замењујемо системом линеарних једначина по v који називамо *диференцијском схемом.*

Дискретизација је добро извршена уколико дискретни проблем има јединствено решење. Дакле, прво доказујемо *егзистенцију* и *јединственост* решења. Затим, неопходно је да решење дискретног проблема конвергира ка решењу полазног проблема (другим речима, да грешка $u - v$ тежи нули) када корак h тежи нули. Како је конвергенција испуњена уколико је схема конзистентна и стабилна, друго што доказујемо је *конзистентност* и *стабилност* схеме.
Уколико полазни проблем и схему овим редом запишемо у облику операторских једначина као $Lu = f$ и $L_h v = f_h$, конзистентност схеме у односу на проблем значи да

$$L_h u \to Lu, \qquad f_h \to f \qquad \text{када} \quad h \to 0,$$

што за нашу схему следи управо из оцена (3.3).
Стабилност схеме своди се на стабилност система линеарних једначина, а како релативна грешка система расте са порастом условљености матрице која је дефинисана као

$$cond(L_h) = \|L_h\| \|L_h^{-1}\|,$$

егзистенција и ограниченост L_h и L_h^{-1} обезбеђују нам и стабилност схеме.
На крају, како је схема конзистентна и стабилна, конвергенција непосредно следи јер је

$$L_h(u - v) = L_h u - L_h v = L_h u - f_h + f - Lu = (L_h u - Lu) + (f - f_h),$$

те

$$u - v = L_h^{-1}(L_h u - Lu) + L_h^{-1}(f - f_h) \to 0 \qquad \text{када} \quad h \to 0.$$

Егзистенцију и јединственост решења као и конвергенцију диференцијске схеме анализирамо посебно за сваку схему (видети [5]).

3.1 Једнодимензиони случај ($n = 1$)

Поново посматрамо проблем (2.1). Можемо га записати у облику операторске једначине

$$Lu = f, \tag{3.4}$$

где је

$$Lu = \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x), & 0 < x < 1, \\ -u'(0) + \sigma_0 u(0), & x = 0, \\ u'(1) + \sigma_1 u(1), & x = 1, \end{cases}$$

а

$$f = \begin{cases} f(x), & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

и важи да $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ скоро свуда на Ω, $f \in L^2(\Omega)$, и $\sigma_0, \sigma_1 > 0$.
Желимо да дискретизујемо овај проблем, те континуалну величину $u(x)$ замењујемо вектором $v = (v_0, \dots, v_n)^T$, при чему је $v_i \approx u(x_i)$, а гранични проблем замењујемо диференцијском схемом

$$\begin{aligned} -v_{x\bar{x},i} + c_i v_i &= f_i, \qquad && i = 1, \dots, n-1, \\ -v_{x,0} + \sigma_0 v_0 &= 0, && i = 0, \\ v_{\bar{x},n} + \sigma_n v_n &= 0, && i = n, \end{aligned} \tag{3.5}$$

код које је $c_i = c_h(x_i)$, $f_i = f_h(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, где су c_h и f_h редом одговарајуће апроксимације функција c и f, а $\sigma_n = \sigma_1$, због прегледности.

На основу 3.3, апроксимације граничних услова имају грешку $\mathcal{O}(h)$. С обзиром да је грешка апроксимације једначине $\mathcal{O}(h^2)$, гранични услови непотребно успоравају конвергенцију диференцијске схеме.
Желимо да искористимо једначину проблема $-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ да би и граничне услове апроксимирали са грешком $\mathcal{O}(h^2)$.

Како је $-u_{x,0} = -h^{-1}(u(h) - u(0))$, полазимо од развоја $u(h)$ у Taylor-ов ред око тачке 0, те добијамо

$$-u_{x,0} = -\frac{1}{h}\left[u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + O(h^3) - u(0)\right] = -u'(0) - \frac{h}{2}u''(0) + \mathcal{O}(h^2).$$

Први гранични услов користимо да изразимо $u'(0)$, док из диференцијалне једначине добијамо израз за $u''(0)$. Наиме,

$$\begin{aligned} u'(0) &= \sigma_0 u(0), \\ u''(0) &= c(0)u(0) - f(0). \end{aligned}$$

Сада је

$$-u_{x,0} = -\sigma_0 u(0) - \frac{h}{2}[c(0)u(0) - f(0)] + \mathcal{O}(h^2), \tag{3.6}$$

тако да са грешком $\mathcal{O}(h^2)$ гранични услов на левом крају интервала апроксимирамо са

$$-v_{x,0} + \left(\sigma_0 + \frac{h}{2}c_0\right)v_0 = \frac{h}{2}f_0.$$

Аналоган поступак примењујемо на десни крај интервала где је гранични услов $u_{\bar{x},1} = h^{-1}(u(1) - u(1-h))$, па у Taylor-ов ред развијамо $u(1-h)$ око тачке 1. Добијамо

$$u_{\bar{x},1} = \frac{1}{h}\left[u(1) - u(1) + hu'(1) - \frac{h^2}{2}u''(1) + O(h^3)\right] = u'(1) - \frac{h}{2}u''(1) + \mathcal{O}(h^2),$$

$$u'(1) = -\sigma_1 u(1),$$
$$u''(1) = c(1)u(1) - f(1),$$

$$u_{\bar{x},1} = -\sigma_1 u(1) - \frac{h}{2}[c(1)u(1) - f(1)] + \mathcal{O}(h^2), \tag{3.7}$$

па је

$$v_{\bar{x},1} + \left(\sigma_n + \frac{h}{2}c_n\right) v_n = \frac{h}{2} f_n.$$

Дакле, диференцијска схема која са грешком $\mathcal{O}(h^2)$ апроксимира проблем (2.1) је

$$\begin{aligned} -v_{x\bar{x},i} + c_i v_i = \ & f_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ -v_{x,0} + \left(\sigma_0 + \frac{h}{2}c_0\right)v_0 = \ & \frac{h}{2} f_0, \\ v_{\bar{x},n} + \left(\sigma_n + \frac{h}{2}c_n\right)v_n = \ & \frac{h}{2} f_n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.1.1 Стабилност диференцијске схеме

За доказивање егзистенције и јединствености решења лакше ће нам бити да схему посматрамо у облику операторске једначине

$$L_h v = f_h. \tag{3.9}$$

Пре него што уведемо оператор L_h, трансформишимо изразе (3.6) и (3.7). Најпре помножимо једнакости са $\frac{2}{h}$, а затим први и други сабирак пребацимо на леву страну. Имамо да је

$$\frac{2}{h}(-u_{x,0} + \sigma_0 u(0)) + c(0)u(0) = f(0) + O(h),$$

$$\frac{2}{h}(u_{\bar{x},1} + \sigma_1 u(1)) + c(1)u(1) = f(1) + O(h),$$

те је је сада диференцијска схема облика

$$\begin{aligned} -v_{x\bar{x},i} + c_i v_i = \ & f_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{2}{h}\big(-v_{x,0} + \sigma_0 v_0\big) + c_0 v_0 = \ & f_0, \\ \frac{2}{h}\big(v_{\bar{x},n} + \sigma_n v_n\big) + c_n v_n = \ & f_n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Приметимо да поново имамо смањење тачности код граничних услова. Сада можемо да дефинишемо линеаран оператор L_h као

$$L_h v = \begin{cases} -v_{x\bar{x},i} + c_i v_i & \text{за} \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{2}{h}(-v_{x,0} + \sigma_0 v_0) + c_0 v_0 & \text{за} \quad i = 0, \\ \frac{2}{h}(v_{\bar{x},n} + \sigma_n v_n) + c_n v_n & \text{за} \quad i = n. \end{cases} \tag{3.11}$$

Овај оператор пресликава простор дискретних функција $\overline{\mathcal{V}} = \{v \, : \, \bar{\omega}_h \to \mathbb{R}\}$ у самог себе. Додатно, означимо просторе $\mathcal{V}^- = \big\{v \, : \, \omega_h^- \to \mathbb{R}\big\}$ и $\mathcal{V}^+ = \big\{v \, : \, \omega_h^+ \to \mathbb{R}\big\}$.

Како функција $f \in L^2(\Omega)$, за њену рестрикцију на мрежу $\bar{\omega}_h$ не можемо да гарантујемо да ће бити дефинисана у сваком чвору мреже, те за њену апроксимацију f_h користимо Steklov-љеве операторе усредњења (1.1) и (1.2). Тачније,

$$f_h = \begin{cases} T^2 f & \text{за} \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ T_+^2 f & \text{за} \quad i = 0, \\ T_-^2 f & \text{за} \quad i = n. \end{cases}$$

У простору $\overline{\mathcal{V}}$ дефинишимо скаларни производ као

$$[v, w]_h = h \sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i + \frac{h}{2}(v_0 w_0 + v_n w_n) = (v, w)_h + \frac{h}{2}(v_0 w_0 + v_n w_n), \tag{3.12}$$

а у просторима $\mathcal{V}^-$ и $\mathcal{V}^+$ редом дефинишимо скаларне производе са

$$[v, w)_h = h \sum_{i=0}^{n-1} v_i w_i, \qquad (v, w]_h = h \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Сада у простору $\overline{\mathcal{V}}$ можемо дефинисати и норме

$$|[v]|_{C,h} = \max_{0 \le i \le n} |v_i|,$$

$$|[v]|_h = [v, v]_h^{\frac{1}{2}} = |[v]|_{L^2(\bar{\omega}_h)},$$

$$|[v\|_h = [v, v)_h^{\frac{1}{2}}, \quad \|v]|_h = (v, v]_h^{\frac{1}{2}},$$

$$|[v]|_{H^1(\bar{\omega}_h)} = \left(|[v]|_h^2 + |[v_x\|_h^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|[v]|_h^2 + \|v_{\bar{x}}]|_h^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Напоменимо да је у простору $\mathcal{V}$ норма дефинисана са $\|v\|_h = (v, v)_h^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{L^2(\omega_h)}$. Имајући у виду 1.14, желимо да покажемо самоконјугованост и позитивну дефинисаност оператора L_h.
Најпре ћемо да покажемо да важи наредни став који је уједно и дискретни аналогон оцене 2.1.

Став 3.1. *За сваку функцију v дефинисану на мрежи $\bar{\omega}_h$ важи неједнакост*

$$v_i^2 \le \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)(v_0^2 + v_n^2) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|v_{\bar{x}}]|_h^2, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Доказ. Оценимо величину v_i^2. Можемо је записати као

$$v_i^2 = v(x_i)^2 = \left(v(x_0) + \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h\right)^2 = v_0^2 + 2v_0 \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h + \left(\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h\right)^2.$$

На други сабирак применимо ε-неједнакост 1.18 са $\frac{\varepsilon}{2}$ и добијамо

$$v_i^2 \le v_0^2 + 2\left[\frac{\varepsilon}{2} v_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h\right)^2\right] + \left(\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h\right)^2$$

$$= (1+\varepsilon)v_0^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}h\right)^2.$$

На основу Cauchy-Schwarz-ове неједнакости 1.17 је

$$\left(\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}h\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{i} 1^2 h \sum_{j=1}^{i} (v_{\bar{x},j})^2 h \leq ih \sum_{j=1}^{n} v_{\bar{x},j}^2 h,$$

те како је $ih = x_i$, имамо да је

$$v_i^2 \leq (1+\varepsilon)v_0^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) x_i \sum_{j=1}^{n} v_{\bar{x},j}^2 h. \tag{3.14}$$

Величину v_i^2 можемо записати и као

$$v_i^2 = \left(\sum_{j=i+1}^{n} v_{\bar{x},j}h - v(x_n)\right)^2 \leq v_n^2 + 2v_n \sum_{j=i+1}^{n} v_{\bar{x},j}h + \left(\sum_{j=i+1}^{n} v_{\bar{x},j}h\right)^2.$$

Аналогно претходном поступку, како је $nh - ih = 1 - x_i$, добијамо да је

$$v_i^2 \leq (1+\varepsilon)v_n^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)(1-x_i) \sum_{j=1}^{n} v_{\bar{x},j}^2 h. \tag{3.15}$$

Када саберемо неједнакости (3.14) и (3.15), видимо да је

$$v_i^2 \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)(v_0^2 + v_n^2) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \sum_{j=1}^{n} v_{\bar{x},j}^2 h,$$

односно,

$$v_i^2 \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)(v_0^2 + v_n^2) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \|v_{\bar{x}}]|_h^2.$$

□

Оно што ће нам исто тако значити приликом доказивања самоконјугованости и позитивне дефинисаности оператора L_h је дискретан аналогон парцијалне интеграције. Наиме, важи да је

$$h\sum_{i=1}^{n-1}(-v_{x\bar{x},i})w_i = h\sum_{i=1}^{n} v_{\bar{x},i}w_{\bar{x},i} + v_{x,0}w_0 - v_{\bar{x},n}w_n. \tag{3.16}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}
h\sum_{i=1}^{n-1}(-v_{x\bar{x},i})w_i &= -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n-1}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1})w_i = -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n-1}(v_{i+1} - v_i)w_i + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n-1}(v_i - v_{i-1})w_i \\
&= -\frac{1}{h}\sum_{i=2}^{n}(v_i - v_{i-1})w_{i-1} + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n-1}(v_i - v_{i-1})w_i \\
&= -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}(v_i - v_{i-1})w_{i-1} + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}(v_i - v_{i-1})w_i + \frac{1}{h}(v_1 - v_0)w_0 - \frac{1}{h}(v_n - v_{n-1})w_n \\
&= h\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}(v_i - v_{i-1})\frac{1}{h}(w_i - w_{i-1}) + \frac{1}{h}(v_1 - v_0)w_0 - \frac{1}{h}(v_n - v_{n-1})w_n \\
&= h\sum_{i=1}^{n} v_{\bar{x},i}w_{\bar{x},i} + v_{x,0}w_0 - v_{\bar{x},n}w_n.
\end{aligned}$$

Теорема 3.2. *Диференцијска схема одређена линеарним оператором* (3.11) *има јединствено решење.*

Доказ. Довољно је показати да је оператор L_h самоконјугован и позитивно дефинисан у односу на скаларни производ $[\cdot,\cdot]_h$ дефинисан са (3.12).
Посматрамо скаларни производ

$$[L_h v, w]_h = h\sum_{i=1}^{n-1}(-v_{x\bar{x},i}+c_i v_i)w_i + \frac{h}{2}\left(\frac{2}{h}(-v_{x,0}+\sigma_0 v_0)+c_0 v_0\right)w_0 +$$
$$\frac{h}{2}\left(\frac{2}{h}(v_{\bar{x},n}+\sigma_n v_n)+c_n v_n\right)w_n = h\sum_{i=1}^{n-1}(-v_{x\bar{x},i})w_i + h\sum_{i=1}^{n-1}c_i v_i w_i$$
$$+\left(-\frac{v_1-v_0}{h}\right)w_0+\sigma_0 v_0 w_0+\frac{h}{2}c_0 v_0 w_0+\left(\frac{v_n-v_{n-1}}{h}\right)w_n+\sigma_n v_n w_n+\frac{h}{2}c_n v_n w_n.$$

Уколико за први сабирак искористимо (3.16), видимо да ће се други и трећи сабирак скратити са трећим и шестим сабирком скаларног производа, те нам остаје

$$[L_h v, w]_h = h\sum_{i=1}^{n} v_{\bar{x},i}w_{\bar{x},i} + h\sum_{i=1}^{n-1}c_i v_i w_i + \frac{h}{2}(c_0 v_0 w_0 + c_n v_n w_n) + \sigma_0 v_0 w_0 + \sigma_n v_n w_n.$$

Због симетричности билинеарне форме можемо да закључимо да је

$$[L_h v, w]_h = [v, L_h w]_h, \quad \text{а како је и} \quad [L_h v, w]_h = [v, L_h^* w]_h, \quad \text{следи да је} \quad L_h = L_h^*.$$

Сада посматрамо скаларни производ

$$[L_h v, v]_h = h\sum_{i=1}^{n-1}(-v_{x\bar{x},i}+c_i v_i)v_i + \frac{h}{2}\left(\frac{2}{h}(-v_{x,0}+\sigma_0 v_0)+c_0 v_0\right)v_0 +$$
$$\frac{h}{2}\left(\frac{2}{h}(v_{\bar{x},n}+\sigma_n v_n)+c_n v_n\right)v_n = h\sum_{i=1}^{n-1}(-v_{x\bar{x},i})v_i + h\sum_{i=1}^{n-1}c_i v_i^2$$
$$+\left(-\frac{v_1-v_0}{h}\right)v_0+\sigma_0 v_0^2+\frac{h}{2}c_0 v_0^2+\left(\frac{v_n-v_{n-1}}{h}\right)v_n+\sigma_n v_n^2+\frac{h}{2}c_n v_n^2.$$

На основу (3.16), видимо да је

$$h\sum_{i=1}^{n-1}(-v_{x\bar{x},i})v_i = h\sum_{i=1}^{n} v_{\bar{x},i}^2 + v_{x,0}v_0 - v_{\bar{x},n}v_n.$$

Приметимо да ће се као у претходном случају други и трећи сабирак скратити са трећим и шестим сабирком скаларног производа, а како је $c \geq 0$, имамо да је

$$\begin{aligned}
[L_h v, v]_h &= h\sum_{i=1}^{n} v_{\bar{x},i}^2 + h\sum_{i=1}^{n-1}c_i v_i^2 + \frac{h}{2}(c_0 v_0^2 + c_n v_n^2) + \sigma_0 v_0^2 + \sigma_n v_n^2 && (3.17)\\
&\geq \|v_{\bar{x}}]|_h^2 + \sigma_{\min}(v_0^2+v_n^2) && (3.18)\\
&\geq \min\big(1,\sigma_{\min}\big)\big(\|v_{\bar{x}}]|_h^2 + v_0^2 + v_n^2\big),
\end{aligned}$$

где је $\sigma_{\min} = \min(\sigma_0,\sigma_n)$, $\sigma_{\min} > 0$.

Из (3.13) за $\varepsilon = 1$ имамо да је

$$\begin{aligned} v_i^2 &\leq \frac{1}{2} 2(v_0^2 + v_n^2) + \frac{1}{2} 2 \|v_{\bar{x}}]|_h^2 \\ &= v_0^2 + v_n^2 + \|v_{\bar{x}}]|_h^2 \\ &= \frac{1}{\min\big(1, \sigma_{\min}\big)} \min\big(1, \sigma_{\min}\big) \big(v_0^2 + v_n^2 + \|v_{\bar{x}}]|_h^2\big) \\ &\leq \frac{1}{C} [L_h v, v]_h, \qquad \text{где је} \quad C = \min\big(1, \sigma_{\min}\big). \end{aligned}$$

Како десна страна неједнакости не зависи од i, важи да је

$$\max_{0 \leq i \leq n} v_i^2 \leq \frac{1}{C} [L_h v, v]_h,$$

односно,

$$[L_h v, v]_h \geq C |[v]|_{C,h}^2.$$

Даље, видимо да је

$$\begin{aligned} |[v]|_h^2 = |[v]|_{L^2(\bar{\omega}_h)}^2 = h \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 + \frac{h}{2}(v_0^2 + v_n^2) &\leq h(n-1) \max_{1 \leq i \leq n-1} v_i^2 + \frac{h}{2} 2 \max_{0 \leq i \leq n} v_i^2 \\ &\leq (1 - h + h) \max_{0 \leq i \leq n} v_i^2 = |[v]|_{C,h}^2, \end{aligned}$$

па је

$$|[v]|_h^2 \leq |[v]|_{C,h}^2 \leq \frac{1}{C} [L_h v, v]_h, \tag{3.19}$$

тачније,

$$[L_h v, v]_h \geq C |[v]|_h^2. \tag{3.20}$$

Из (3.18), како је $\sigma_{\min} > 0$, следи да је

$$[L_h v, v]_h \geq \|v_{\bar{x}}]|_h^2,$$

што нам сабрано са (3.20) даје

$$\left(1 + \frac{1}{C}\right) [L_h v, v]_h \geq \|v_{\bar{x}}]|_h^2 + |[v]|_h^2,$$

односно, имамо да је

$$[L_h v, v]_h \geq \frac{C}{1 + C} |[v]|_{H^1(\bar{\omega}_h)}^2, \tag{3.21}$$

где је $C = \min\big(1, \sigma_{\min}\big)$.

Дакле, оператор L_h је самоконјугован и позитивно дефинисан, па нам став (1.14) гарантује постојање ограниченог инверза L_h^{-1}, стога једначина (3.9) има решење и оно је јединствено. □

Теорема 3.3. *Диференцијска схема је стабилна у нормама $|[\cdot]|_h$ и $|[\cdot]|_{H^1(\bar{\omega}_h)}$, при чему важе априорне оцене*

$$|[v]|_h \leq \frac{1}{C} |[f]|_h \quad \text{и} \quad |[v]|_{H^1(\bar{\omega}_h)} \leq \left(1 + \frac{1}{C}\right) |[f]|_h, \tag{3.22}$$

где је $C = \min\big(1, \sigma_{\min}\big)$.

Доказ. Приметимо да из (3.20), уз примену Cauchy-Schwarz-ове неједнакости 1.17, имамо да је

$$C|[v]|_h^2 \leq [L_h v, v]_h = [f, v]_h \leq |[f]|_h |[v]|_h. \tag{3.23}$$

Тачније, добијамо оцену

$$|[v]|_h \leq \frac{1}{C} |[f]|_h.$$

Даље, из (3.21), уз примену Cauchy-Schwarz-ове неједнакости 1.17, имамо да је

$$\frac{C}{1+C} |[v]|_{H^1(\bar{\omega}_h)}^2 \leq [L_h v, v]_h = [f, v]_h \leq |[f]|_h |[v]|_h \leq |[f]|_h |[v]|_{H^1(\bar{\omega}_h)}. \tag{3.24}$$

Дакле, добијамо оцену

$$|[v]|_{H^1(\bar{\omega}_h)} \leq \left(1 + \frac{1}{C}\right) |[f]|_h,$$

која уједно представља дискретан аналогон оцене (2.12). □

3.1.2 Оцена грешке

Грешка апроксимације $z = u - v$, дефинисана је као и v само у чворовима мреже и задовољава исту диференцијску схему са оператором L_h дефинисаним са (3.11), док се десна страна схеме разликује. Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned} &-z_{x\bar{x},i} + c_{h,i} z_i = \varphi_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \\ &\frac{2}{h}(-z_{x,0} + \sigma_0 z_0) + c_{h,0} z_0 = \varphi_0, \quad i = 0, \\ &\frac{2}{h}(z_{\bar{x},n} + \sigma_n z_n) + c_{h,n} z_n = \varphi_n, \quad i = n, \end{aligned} \tag{3.25}$$

где је

$$\begin{aligned} \varphi_i &= L_h(u_i - v_i) = L_h u_i - L_h v_i = L_h u_i - f_{h,i} = -f_{h,i} - u_{x\bar{x},i} + c_{h,i} u_i, && i = 1, \ldots, n-1, \\ \varphi_0 &= L_h(u_0 - v_0) = L_h u_0 - L_h v_0 = L_h u_0 - f_{h,0} = -f_{h,0} + \frac{2}{h}(-u_{x,0} + \sigma_0 u_0) + c_{h,0} u_0, && i = 0, \\ \varphi_n &= L_h(u_n - v_n) = L_h u_n - L_h v_n = L_h u_n - f_{h,n} = -f_{h,n} + \frac{2}{h}(u_{\bar{x},n} + \sigma_n u_n) + c_{h,n} u_n, && i = n. \end{aligned}$$

Како је диференцијска схема иста, за њу мора да важи и иста априорна оцена (3.22) као за схему дефинисану оператором L_h, односно важи наредна теорема.

Теорема 3.4. *Диференцијска схема* (3.25) *задовољава априорну оцену*

$$|[z]|_{H^1(\bar{\omega}_h)} \leq \left(1 + \frac{1}{C}\right) |[\varphi_h]|_h, \tag{3.26}$$

где је

$$\varphi_h = \begin{cases} \varphi_i, & \text{за} \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \varphi_0, & \text{за} \quad i = 0, \\ \varphi_n, & \text{за} \quad i = n. \end{cases}$$

За оцену брзине конвергенције користићемо и показати наредну априорну оцену.

Теорема 3.5. *[12] Диференцијска схема* (3.25) *задовољава априорну оцену*

$$|[z]|_h \leq \frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{\frac{1}{C}+\frac{1}{\sigma_{\min}}}\left(\left|\frac{h}{2}\varphi_0\right|+\left|\frac{h}{2}\varphi_n\right|+\|\varphi\|_h\right). \tag{3.27}$$

Доказ. Диференцијску схему (3.25) можемо написати и у облику операторске једначине као

$$L_h z = \varphi_h. \tag{3.28}$$

Приметимо да је на основу (3.12)

$$[L_h z, z]_h = [\varphi_h, z]_h = \frac{h}{2}\varphi_0 z_0 + \frac{h}{2}\varphi_n z_n + (\varphi, z)_h.$$

Када на трећи сабирак применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17, а затим на сваки од производа у збиру применимо ε-неједнакост (1.18), добијамо

$$[\varphi_h, z]_h \leq \varepsilon\left(z_0^2+z_n^2+(z,z)_h\right)+\frac{1}{4\varepsilon}\left(\left(\frac{h}{2}\varphi_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\varphi_n\right)^2+(\varphi,\varphi)_h\right),$$

те како је из (3.20)

$$(z,z)_h \leq [z,z]_h \leq \frac{1}{C}[L_h z, z]_h,$$

а

$$z_0^2+z_n^2 \leq \frac{1}{\sigma_{\min}}(\sigma_0 z_0^2+\sigma_n z_n^2) \leq \frac{1}{\sigma_{\min}}[L_h z, z]_h,$$

имамо да је

$$z_0^2+z_n^2+(z,z)_h \leq \tilde{C}[L_h z, z]_h,$$

где је $\tilde{C} = \frac{1}{C}+\frac{1}{\sigma_{\min}}$.
Сада је

$$[L_h z, z]_h = [\varphi_h, z]_h \leq \varepsilon\tilde{C}\,[L_h z, z]_h + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\left(\frac{h}{2}\varphi_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\varphi_n\right)^2+(\varphi,\varphi)_h\right),$$

тачније

$$\left(1-\varepsilon\tilde{C}\right)[L_h z, z]_h \leq \frac{1}{4\varepsilon}\left(\left(\frac{h}{2}\varphi_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\varphi_n\right)^2+(\varphi,\varphi)_h\right).$$

Дакле,

$$[L_h z, z]_h \leq \frac{1}{4\,\varepsilon\left(1-\varepsilon\tilde{C}\right)}\left(\left(\frac{h}{2}\varphi_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\varphi_n\right)^2+(\varphi,\varphi)_h\right).$$

Нека је

$$g(\varepsilon) = \varepsilon\left(1-\varepsilon\tilde{C}\right).$$

Имајући у виду да је

$$g'(\varepsilon) = 1-2\varepsilon\tilde{C}, \quad \text{а} \quad g''(\varepsilon) = -2\tilde{C} < 0,$$

константа на десној страни последње неједнакости биће минимална у тачки у којој израз чије смо изводе тражили достиже свој максимум, односно у тачки

$$\varepsilon = \frac{1}{2\tilde{C}} = \frac{1}{2}\frac{C\sigma_{\min}}{C+\sigma_{\min}},$$

где сам израз има вредност

$$\varepsilon\left(1-\varepsilon\,\frac{C+\sigma_{\min}}{C\sigma_{\min}}\right)=\frac{1}{4}\frac{C\sigma_{\min}}{C+\sigma_{\min}},$$

те као резултат добијамо неједнакост

$$C[z,z]_h\le [L_hz,z]_h\le \frac{C+\sigma_{\min}}{C\sigma_{\min}}\left(\left(\frac{h}{2}\varphi_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\varphi_n\right)^2+(\varphi,\varphi)_h\right).$$

На крају, закључујемо да је

$$|[z]|_h\le \frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{\frac{1}{C}+\frac{1}{\sigma_{\min}}}\left(\left|\frac{h}{2}\varphi_0\right|+\left|\frac{h}{2}\varphi_n\right|+\|\varphi\|_h\right).$$

□

Теорема 3.6. *Нека решење* u *граничног проблема* (2.1) *припада простору* $C^4(\bar{\Omega})$ *и нека* $c\in C(\bar{\Omega})$ *и* $f\in C(\bar{\Omega})$. *Тада решење* v *диференцијске схеме* (3.10) *конвергира ка* u *при чему је оцена брзине конвергенције*

$$|[u-v]|_h\le \mathcal{O}(h^2).$$

Доказ. За оцену грешке, пођимо најпре од претпоставке да су c и f непрекидне функције на $[0,1]$. Тада је $c_h=c$ и $f_h=f$, а

$$\varphi_i=\varphi(x_i)=-f(x_i)-u_{x\bar{x}}(x_i)+c(x_i)u(x_i)=u''(x_i)-u_{x\bar{x}}(x_i),\qquad i=1,\dots,n-1,$$
$$\varphi_0=\varphi(x_0)=-f(0)+\frac{2}{h}(-u_x(0)+\sigma_0u(0))+c(0)u(0)=u''(0)-\frac{2}{h}u_x(0)+\frac{2}{h}u'(0),\qquad i=0,$$
$$\varphi_n=\varphi(x_n)=-f(1)+\frac{2}{h}(u_{\bar{x}}(1)+\sigma_1u(1))+c(1)u(1)=u''(1)+\frac{2}{h}u_{\bar{x}}(1)-\frac{2}{h}u'(1),\qquad i=n.$$

Напоменимо да смо користили полазну једначину проблема (2.1), тачније, чињеницу да је $u''(x)=-f(x)+c(x)u(x)$, а у последња два израза редом и граничне услове $u'(0)=\sigma_0u(0)$ и $-u'(1)=\sigma_1u(1)$.
Када напишемо изразе за коначне разлике и у одговарајућим тачкама развијемо функцију u у Taylor-ов ред, добијамо

$$\begin{aligned}\varphi_i&=u''(x_i)-\frac{1}{h^2}\left[u(x_i+h)-2u(x_i)+u(x_i-h)\right]\\&=u''(x_i)-\frac{1}{h^2}\Bigg[u(x_i)+hu'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)+\frac{h^3}{6}u'''(x_i)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_1)-u(x_i)\\&-u(x_i)+u(x_i)-hu'(x_i)+\frac{h^2}{2}u''(x_i)-\frac{h^3}{6}u'''(x_i)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_2)\Bigg]=-\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi),\end{aligned}$$

где $\xi_1\in(x_i,x_i+h)$, $\xi_2\in(x_i-h,x_i)$, а $\xi\in(x_i-h,x_i+h)$, $i=1,\dots,n-1$.
Приметимо да је потребно да $u\in C^4(\bar{\Omega})$. Даље је

$$\begin{aligned}\varphi_0&=u''(0)+\frac{2}{h}u'(0)-\frac{2}{h}\frac{1}{h}[u(h)-u(0)]\\&=u''(0)+\frac{2}{h}u'(0)-\frac{2}{h^2}\left[u(0)+hu'(0)+\frac{h^2}{2}u''(0)+\frac{h^3}{6}u'''(\xi_0)-u(0)\right]=\\&=-\frac{h}{3}u'''(\xi_0),\qquad \xi_0\in(0,h),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_n &= u''(1) - \frac{2}{h}u'(1) + \frac{2}{h}\frac{1}{h}[u(1) - u(1-h)] \\
&= u''(1) - \frac{2}{h}u'(1) + \frac{2}{h^2}\left[u(1) - u(1) + hu'(1) - \frac{h^2}{2}u''(1) + \frac{h^3}{6}u'''(\xi_1)\right] = \\
&= \frac{h}{3}u'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (1-h, 1).
\end{aligned}
$$

Видимо да је

$$
|\varphi_i| = \mathcal{O}(h^2), \quad |\varphi_0| = \mathcal{O}(h) \quad \text{и} \quad |\varphi_n| = \mathcal{O}(h), \tag{3.29}
$$

а како је

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_h = (\varphi_i, \varphi_i)_h^{\frac{1}{2}} &= \left(h\sum_{i=1}^{n-1}|\varphi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{12^2}h\sum_{i=1}^{n-1}h^4\|u^{(4)}\|^2_{C[x_{i-1},x_{i+1}]}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{12^2}h(n-1)h^4\|u^{(4)}\|^2_{C[0,1]}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{12^2}(nh)h^4\|u^{(4)}\|^2_{C[0,1]}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}h^2\|u^{(4)}\|_{C[0,1]} = \mathcal{O}(h^2),
\end{aligned}
$$

на основу (3.27), важи да је

$$
|[z]|_h = |[u-v]|_h \leq \mathcal{O}(h^2).
$$

□

Желимо да ослабимо услов $u \in C^4(\bar{\Omega})$. Покажимо да важи наредна теорема.

Теорема 3.7. *Нека решење u граничног проблема (2.1) припада простору $H^4(\Omega)$ и нека $c \in C(\bar{\Omega})$ и $f \in C(\bar{\Omega})$. Тада решење v диференцијске схеме (3.10) конвергира ка u при чему је оцена брзине конвергенције*

$$
|[u-v]|_h \leq \mathcal{O}(h^2).
$$

Доказ. Дакле, $c = c_h$, $f = f_h$, а на функцију u примењујемо Steklov-љев оператор T^2 (1.1), тачније, желимо да искористимо својство (1.4) $T^2u''(x) = u_{x\bar{x}}(x)$.
Сада је

$$
\varphi = -f_h - u_{x\bar{x}} + c_h u = -f - u_{x\bar{x}} + cu = u'' - cu - T^2u'' + cu = u'' - T^2u''.
$$

Ову величину желимо да оценимо користећи интегралну репрезентацију

$$
\varphi(x) = u''(x) - T^2u''(x) = u''(x) - \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)u''(t)dt. \tag{3.30}
$$

Како важи да је

$$
\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)dt = 1,
$$

искористимо ову чињеницу и запишимо φ као

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)u''(x)dt - \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)u''(t)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)(u''(x) - u''(t))dt \\
&= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x u'''(s)dsdt.
\end{aligned}
$$

Даље користимо да је

$$\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)(t-x)dt=0,$$

те је

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x u'''(s)dsdt-\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x u'''(x)dsdt\\&=-\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x\int_s^x u^{(4)}(z)dzdsdt.\end{aligned}$$

Сада можемо да оценимо φ. Проширимо границе интеграла и на последњи интеграл применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|&\leq\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)dt\int_{x-h}^{x+h}ds\left(\int_{x-h}^{x+h}1^2dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x-h}^{x+h}\left|u^{(4)}(z)\right|^2dz\right)^{\frac{1}{2}}\\&=(2h)^{\frac{3}{2}}\|u^{(4)}\|_{L^2(x-h,x+h)}.\end{aligned}$$

Означимо са $e_i=(x_i-h,x_i+h)$. Сада је

$$(\varphi_i,\varphi_i)_h\leq 8h\sum_{i=1}^{n-1}h^3|u|^2_{H^4(e_i)}\leq 8h^4\sum_{i=1}^{n-1}|u|^2_{H^4(e_i)}\leq\bar{C}h^4|u|^2_{H^4(0,1)},$$

тачније,

$$\|\varphi\|_h\leq\bar{\bar{C}}h^2\|u\|_{H^4(0,1)},$$

односно,

$$\|\varphi\|_h\leq\mathcal{O}(h^2). \tag{3.31}$$

Погледајмо шта се дешава са φ_0.

$$\begin{aligned}\varphi_0&=-f_{h,0}-\frac{2}{h}u_{x,0}+\frac{2}{h}\sigma_0u_0+c_{h,0}u_0=-f_0-\frac{2}{h}u_{x,0}+\frac{2}{h}\sigma_0u_0+c_0u_0\\&=-(-u''+cu)_0-\frac{2}{h}u_{x,0}+\frac{2}{h}\sigma_0u_0+c_0u_0=u_0''-c_0u_0-\frac{2}{h}u_{x,0}+\frac{2}{h}\sigma_0u_0+c_0u_0\\&=u_0''-\frac{2}{h}u_{x,0}+\frac{2}{h}\sigma_0u_0.\end{aligned}$$

Приметимо да је

$$\begin{aligned}T_+^2u''(x)&=\frac{2}{h}\int_x^{x+h}\left(1-\frac{t-x}{h}\right)u''(t)dt\\&=\frac{2}{h}\left[\left(1-\frac{t-x}{h}\right)u'(t)\Big|_x^{x+h}+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}u'(t)dt\right]\\&=\frac{2}{h}\left[\left(1-\frac{x+h-x}{h}\right)u'(x+h)-\left(1-\frac{x-x}{h}\right)u'(x)+\frac{1}{h}\big(u(x+h)-u(x)\big)\right]\\&=\frac{2}{h}\left[-u'(x)+u_x(x)\right],\end{aligned}$$

односно,

$$(T_+^2u'')_0=\frac{2}{h}\big[-u'(0)+u_{x,0}\big]. \tag{3.32}$$

Како из граничних услова знамо да је $u'(0) = \sigma_0 u_0$, имамо да је

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= u_0'' - \frac{2}{h}\big[u_{x,0} - u'(0)\big] = u_0'' - T_+^2 u_0''\\ &= u''(0) - \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) u''(t)dt.\end{aligned}$$

Уочимо да је

$$\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) dt = h - \frac{1}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}.$$

Сада φ_0 можемо да запишемо као

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) u''(0)dt - \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) u''(t)dt\\ &= \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) (u''(0) - u''(t))dt\\ &= -\frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) \int_0^t u'''(s)dsdt.\end{aligned}$$

Оценимо φ_0. Проширимо границе интеграла, а онда применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$\begin{aligned}|\varphi_0| &\le \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) \int_0^h |u'''(s)|dsdt = \frac{2}{h}\frac{h}{2}\int_0^h |u'''(s)|ds\\ &\le \left(\int_0^h 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h |u'''(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}}\|u'''\|_{L^2(0,h)}.\end{aligned}$$

Користимо (1.5), што би у нашем случају значило да је

$$\|u'''\|_{L^2(0,h)} \le C_0\sqrt{h}\|u'''\|_{H^1(0,1)} \le C_0 h^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^4(0,1)},$$

те је

$$|\varphi_0| \le C_0 h\|u\|_{H^4(0,1)},$$

односно,

$$|\varphi_0| \le \mathcal{O}(h). \tag{3.33}$$

Аналогно поступамо са φ_n.

$$\begin{aligned}\varphi_n &= -f_{h,n} + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + c_{h,n}u_n = -f_n + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + c_n u_n\\ &= -(-u'' + cu)_n + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + c_n u_n = u_n'' - c_n u_n + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + c_n u_n\\ &= u_n'' + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n.\end{aligned}$$

Имајући у виду да је

$$\begin{aligned}T_-^2 u''(x) &= \frac{2}{h}\int_{x-h}^x \left(1 + \frac{t-x}{h}\right) u''(t)dt\\ &= \frac{2}{h}\left[\left(1 + \frac{t-x}{h}\right) u'(t)\Big|_{x-h}^x - \frac{1}{h}\int_{x-h}^x u'(t)dt\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{h}\left[\left(1+\frac{x-x}{h}\right)u'(x)-\left(1+\frac{x-h-x}{h}\right)u'(x-h)-\frac{1}{h}\big(u(x)-u(x-h)\big)\right]$$
$$= \frac{2}{h}\left[u'(x)-u_{\bar{x}}(x)\right],$$

односно,

$$(T_-^2 u'')_n = \frac{2}{h}\big[u'(1)-u_{\bar{x},n}\big], \tag{3.34}$$

и с обзиром да је $-u'(1)=\sigma_n u_n$, добијамо да је

$$\varphi_n = u''_n - \frac{2}{h}\big[-u_{\bar{x},n}+u'(1)\big] = u''_n - T_-^2 u''_n$$
$$= u''(1) - \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)u''(t)dt.$$

Приметимо да је

$$\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)dt = 1-1+h+\frac{1^2}{2h}-\frac{(1-h)^2}{2h}-\frac{1}{h}+\frac{1-h}{h} = h+\frac{1}{2h}-\frac{1-2h+h^2}{2h}-1=\frac{h}{2}.$$

Сада је

$$\varphi_n = \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)u''(1)dt - \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)u''(t)dt$$
$$= \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)(u''(1)-u''(t))dt$$
$$= \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)\int_{t}^{1}u'''(s)dsdt.$$

Оценимо φ_n. Проширимо границе интеграла, а онда применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$|\varphi_n| \le \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)\int_{1-h}^{1}|u'''(s)|dsdt = \frac{2}{h}\frac{h}{2}\int_{1-h}^{1}|u'''(s)|ds$$
$$\le \left(\int_{1-h}^{1}1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{1-h}^{1}|u'''(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}}\|u'''\|_{L^2(1-h,1)}.$$

Користимо (1.5), па имамо да је

$$\|u'''\|_{L^2(1-h,1)} \le C_n\sqrt{h}\|u'''\|_{H^1(0,1)} \le C_n h^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^4(0,1)},$$

а

$$|\varphi_n| \le C_n h\|u\|_{H^4(0,1)},$$

односно,

$$|\varphi_n| \le \mathcal{O}(h). \tag{3.35}$$

Када у изразу (3.27) искористимо оцене (3.31), (3.33) и (3.35), можемо да закључимо да је

$$|[z]|_h = |[u-v]|_h \le \mathcal{O}(h^2).$$

□

На крају, поред услова да $u \in H^4(\Omega)$, желимо да ослабимо глаткост функција c и f. Покажимо да важи наредна теорема.

Теорема 3.8. *Нека решење* u *граничног проблема* (2.1) *припада простору* $H^2(\Omega)$ *и нека* $c \in H^1(\Omega)$ *и* $f \in L^2(\Omega)$. *Тада решење* v *диференцијске схеме* (3.10) *конвергира ка* u *при чему је оцена брзине конвергенције*

$$|[u-v]|_h \leq \mathcal{O}(h^2).$$

Доказ. Сада је $c_h = T^2c$, $f_h = T^2f$, а имамо и апроксимацију $T^2(cu) \approx (T^2c)u$. Посматрамо

$$\begin{aligned}\varphi &= -f_h - u_{x\bar{x}} + c_h u = -T^2 f - u_{x\bar{x}} + (T^2c)u = T^2u'' - T^2(cu) - u_{x\bar{x}} + (T^2c)u \\ &= -T^2(cu) + (T^2c)u = (T^2c)u - (T^2c)(T^2u) + (T^2c)(T^2u) - T^2(cu).\end{aligned}$$

Означимо са

$$\begin{aligned}\eta_1 &= (T^2c)u - (T^2c)(T^2u) = (T^2c)(u - T^2u), \\ \eta_2 &= (T^2c)(T^2u) - T^2(cu).\end{aligned}$$

Нека је $\eta_{11} = u - T^2u$. За њену оцену користимо интегралну репрезентацију

$$\eta_{11}(x) = u(x) - T^2u(x) = u(x) - \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)u(t)dt.$$

Приметимо да заменом функције u са њеним другим изводом u'' добијамо интегралну репрезентацију (3.30), те ће поступак добијања оцене за η_{11} бити идентичан оном за φ у случају када $u \in H^4(\Omega)$. Дакле, добијамо да је

$$|\eta_{11}(x)| \leq (2h)^{\frac{3}{2}}\|u''\|_{L^2(x-h,x+h)},$$

те је

$$(\eta_{11,i}, \eta_{11,i})_h \leq 8h\sum_{i=1}^{n-1} h^3|u|^2_{H^2(e_i)} \leq 8h^4\sum_{i=1}^{n-1}|u|^2_{H^2(e_i)} \leq \bar{C}_1 h^4|u|^2_{H^2(0,1)},$$

односно,

$$\|\eta_{11}\|_h \leq \sqrt{\bar{C}_1}h^2\|u\|_{H^2(0,1)},$$

а самим тим је и

$$\|\eta_1\|_h \leq \sqrt{\bar{C}_1}h^2\|c\|_{C,h}\|u\|_{H^2(0,1)} \leq \bar{\bar{C}}_1 h^2\|u\|_{H^2(0,1)}. \tag{3.36}$$

Посматрајмо интегралну репрезентацију величине η_2 и трансформишимо је у облик који ћемо лакше да оценимо. Имамо да је

$$\begin{aligned}\eta_2(x) &= (T^2c(x))(T^2u(x)) - T^2(c(x)u(x)) \\ &= \frac{1}{h^2}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)\left(1 - \frac{|s-x|}{h}\right)c(t)u(s)dtds \\ &- \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)c(t)u(t)dt\,\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|s-x|}{h}\right)ds \\ &= -\frac{1}{2h^2}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)\left(1 - \frac{|s-x|}{h}\right)(c(t)-c(s))(u(t)-u(s))dtds \\ &= -\frac{1}{2h^2}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x-h}^{x+h}\int_s^t\int_s^t\left(1 - \frac{|t-x|}{h}\right)\left(1 - \frac{|s-x|}{h}\right)c'(z)u'(\bar{z})dzd\bar{z}dtds.\end{aligned}$$

Сада можемо да оценимо η_2. Проширимо границе интеграла, а онда применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$\begin{aligned}
|\eta_2(x)| &\leq \frac{1}{2h^2}\max_{[x-h,x+h]}|c'|\int_{x-h}^{x+h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\left(1-\frac{|s-x|}{h}\right)u'(\bar{z})dzd\bar{z}dtds \\
&= \frac{1}{2h^2}\max_{[x-h,x+h]}|c'|\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)dt\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|s-x|}{h}\right)ds\int_{x-h}^{x+h}dz\int_{x-h}^{x+h}u'(\bar{z})d\bar{z} \\
&\leq \frac{1}{2h^2}\|c\|_{C^1[x-h,x+h]}hh2h\int_{x-h}^{x+h}u'(\bar{z})d\bar{z} \leq h\|c\|_{C^1[x-h,x+h]}\left(\int_{x-h}^{x+h}1^2d\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{x-h}^{x+h}|u'(\bar{z})|^2d\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2}h^{\frac{3}{2}}\|c\|_{C^1[x-h,x+h]}\|u'\|_{L^2(x-h,x+h)},
\end{aligned}$$

а онда је

$$(\eta_{2,i},\eta_{2,i})_h \leq h\sum_{i=1}^{n-1}2\|c\|^2_{C^1(\bar{e}_i)}h^3|u|^2_{H^1(e_i)} \leq 2h^4\sum_{i=1}^{n-1}\|c\|^2_{C^1(\bar{e}_i)}|u|^2_{H^1(e_i)} \leq \bar{C}_2h^4|u|^2_{H^1(0,1)},$$

односно,

$$\|\eta_2\|_h \leq \sqrt{\bar{C}_2}h^2\|u\|_{H^1(0,1)} \leq \bar{\bar{C}}_2h^2\|u\|_{H^2(0,1)}.$$

Како је $\varphi = \eta_1+\eta_2$, а $\|\varphi\|_h \leq \|\eta_1\|_h + \|\eta_1\|_h$, можемо да закључимо да је

$$\|\varphi\|_h \leq \mathcal{O}(h^2). \tag{3.37}$$

Погледајмо шта се дешава са φ_0.

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= -f_{h,0} - \frac{2}{h}u_{x,0} + \frac{2}{h}\sigma_0u_0 + c_{h,0}u_0 \\
&= -T_+^2f_0 - \frac{2}{h}u_{x,0} + \frac{2}{h}\sigma_0u_0 + (T_+^2c)_0u_0 \\
&= -T_+^2(-u''+cu)_0 - \frac{2}{h}u_{x,0} + \frac{2}{h}\sigma_0u_0 + (T_+^2c)_0u_0 \\
&= T_+^2u_0'' - T_+^2(cu)_0 - \frac{2}{h}u_{x,0} + \frac{2}{h}\sigma_0u_0 + (T_+^2c)_0u_0 \\
&= T_+^2u_0'' - \frac{2}{h}u_{x,0} + \frac{2}{h}\sigma_0u_0 + (T_+^2c)_0u_0 - T_+^2(cu)_0.
\end{aligned}$$

Означимо са

$$\begin{aligned}
\zeta^0 &= T_+^2u_0'' - \frac{2}{h}u_{x,0} + \frac{2}{h}\sigma_0u_0, \\
\xi^0 &= (T_+^2c)_0u_0 - T_+^2(cu)_0.
\end{aligned}$$

Уколико искористимо (3.32), добијамо да је

$$\zeta^0 = \frac{2}{h}\left(-u'(0)+u_{x,0}\right) - \frac{2}{h}u_{x,0} + \frac{2}{h}\sigma_0u_0 = \frac{2}{h}\left(-u'(0)+\sigma_0u_0\right) = 0.$$

ξ^0 можемо записати као

$$\xi^0 = (T_+^2c_0)u_0 - T_+^2c_0T_+^2u_0 + T_+^2c_0T_+^2u_0 - T_+^2(cu)_0.$$

Означимо сада са

$$\xi_1^0 = (T_+^2c_0)u_0 - T_+^2c_0T_+^2u_0 = (T_+^2c_0)(u_0 - T_+^2u_0),$$

$$\xi_2^0 = T_+^2 c_0 T_+^2 u_0 - T_+^2 (cu)_0.$$

Нека је

$$\xi_{11}^0 = u_0 - T_+^2 u_0 = u_0 - \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) u(t)dt.$$

Приметимо да је

$$\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) dt = h - \frac{1}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2},$$

што ћемо да искористимо да ξ_{11}^0 запишемо као

$$\begin{aligned}\xi_{11}^0 &= \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) u(0)dt - \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) u(t)dt \\ &= \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) (u(0) - u(t))dt = -\frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) \int_0^t u'(s)dsdt.\end{aligned}$$

Када проширимо границе интеграла и применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17, добијамо оцену

$$\begin{aligned}|\xi_{11}^0| &\le \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) \int_0^h |u'(s)|dsdt = \frac{2}{h}\frac{h}{2}\int_0^h |u'(s)|ds \\ &\le \left(\int_0^h 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h |u'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}}\|u'\|_{L^2(0,h)}.\end{aligned}$$

Користимо (1.5), па имамо да је

$$\|u'\|_{L^2(0,h)} \le C\sqrt{h}\|u'\|_{H^1(0,1)} \le C\sqrt{h}\|u\|_{H^2(0,1)},$$

односно, имамо да је

$$|\xi_{11}^0| \le Ch\|u\|_{H^2(0,1)},$$

а онда је

$$|\xi_1^0| \le Ch\|c\|_{C,h}\|u\|_{H^2(0,1)} \le \bar{C}h\|u\|_{H^2(0,1)}.$$

Пређимо на интегралну репрезентацију ξ_2^0.

$$\begin{aligned}\xi_2^0 &= T_+^2 c_0 T_+^2 u_0 - T_+^2 (cu)_0 \\ &= \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) c(t)dt \int_0^h \left(1 - \frac{s}{h}\right) u(s)ds - \left(\frac{2}{h}\right)^2 \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) c(t)u(t)dt \int_0^h \left(1 - \frac{s}{h}\right) ds \\ &= -\left(\frac{2}{h}\right)^2 \frac{1}{2}\left[\int_0^h \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)\left(1 - \frac{s}{h}\right)(c(t) - c(s))(u(t) - u(s))\right] dtds \\ &= -\frac{2}{h^2}\int_0^h \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)\left(1 - \frac{s}{h}\right)\int_s^t \int_s^t c'(z)u'(\bar{z})dzd\bar{z}dtds.\end{aligned}$$

Проширимо границе интеграла, а онда применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$\begin{aligned}|\xi_2^0| &\le \frac{2}{h^2}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) dt \int_0^h \left(1 - \frac{s}{h}\right) ds \int_0^h |c'(z)|dz \int_0^h |u'(\bar{z})|d\bar{z} \\ &\le \frac{2}{h^2}\frac{h}{2}\frac{h}{2}\left(\int_0^h 1^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h |c'(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h 1^2 d\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h |u'(\bar{z})|^2 d\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}\|c'\|_{L^2(0,h)}h^{\frac{1}{2}}\|u'\|_{L^2(0,h)} \leq \frac{1}{2}h\|c'\|_{L^2(0,h)}\|u\|_{H^1(0,h)} \\
&\leq \bar{\bar{C}}h\|u\|_{H^2(0,1)}.
\end{aligned}
$$

Како је $\varphi_0 = \zeta^0 + \xi_1^0 + \xi_2^0$, а $|\varphi_0| \leq |\xi_1^0| + |\xi_2^0|$, закључујемо да је

$$
|\varphi_0| \leq \mathcal{O}(h). \tag{3.38}
$$

Аналогно, посматрамо

$$
\begin{aligned}
\varphi_n &= -f_{h,n} + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + c_{h,n}u_n = -T_-^2 f_n + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + (T_-^2 c)_n u_n \\
&= -T_-^2(-u'' + cu)_n + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + (T_-^2 c)_n u_n \\
&= T_-^2 u_n'' - T_-^2(cu)_n + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + (T_-^2 c)_n u_n \\
&= T_-^2 u_n'' + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n + (T_-^2 c)_n u_n - T_-^2(cu)_n.
\end{aligned}
$$

Означимо са

$$
\begin{aligned}
\zeta^n &= T_-^2 u_n'' + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n, \\
\xi^n &= (T_-^2 c)_n u_n - T_-^2(cu)_n.
\end{aligned}
$$

Уколико искористимо (3.34), добијамо да је

$$
\zeta^n = T_-^2 u_n'' + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n = \frac{2}{h}\left(u'(1) - u_{\bar{x},n}\right) + \frac{2}{h}u_{\bar{x},n} + \frac{2}{h}\sigma_n u_n = \frac{2}{h}\left(u'(1) + \sigma_n u_n\right) = 0.
$$

ξ^n можемо записати као

$$
\xi^n = (T_-^2 c_n)u_n - T_-^2 c_n T_-^2 u_n + T_-^2 c_n T_-^2 u_n - T_-^2(cu)_n.
$$

Означимо сада са

$$
\begin{aligned}
\xi_1^n &= (T_-^2 c_n)u_n - T_-^2 c_n T_-^2 u_n = (T_-^2 c_n)(u_n - T_-^2 u_n), \\
\xi_2^n &= T_-^2 c_n T_-^2 u_n - T_-^2(cu)_n.
\end{aligned}
$$

Нека је

$$
\xi_{11}^n = u_n - T_-^2 u_n = u_n - \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1 + \frac{t-1}{h}\right)u(t)dt.
$$

Приметимо да је

$$
\int_{1-h}^{1}\left(1 + \frac{t-1}{h}\right)dt = 1 - 1 + h + \frac{1^2}{2h} - \frac{(1-h)^2}{2h} - \frac{1}{h} + \frac{1-h}{h} = h + \frac{1}{2h} - \frac{1-2h+h^2}{2h} - 1 = \frac{h}{2},
$$

те је сада

$$
\begin{aligned}
\xi_{11}^n &= \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1 + \frac{t-1}{h}\right)u(1)dt - \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1 + \frac{t-1}{h}\right)u(t)dt \\
&= \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1 + \frac{t-1}{h}\right)(u(1) - u(t))dt = \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1 + \frac{t-1}{h}\right)\int_{t}^{1}u'(s)dsdt,
\end{aligned}
$$

а оцена

$$\begin{aligned} |\xi_{11}^n| &\le \frac{2}{h}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)\int_{1-h}^{1}|u'(s)|dsdt = \frac{2}{h}\frac{h}{2}\int_{1-h}^{1}|u'(s)|ds \\ &\le \left(\int_{1-h}^{1}1^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{1-h}^{1}|u'(s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}}\|u'\|_{L^2(1-h,1)}. \end{aligned}$$

Користимо (1.5) и имамо да је

$$\|u'\|_{L^2(1-h,1)} \le C\sqrt{h}\|u'\|_{H^1(0,1)} \le C\sqrt{h}\|u\|_{H^2(0,1)},$$

односно,

$$|\xi_{11}^n| \le Ch\|u\|_{H^2(0,1)},$$

а

$$|\xi_1^n| \le Ch\|c\|_{C,h}\|u\|_{H^2(0,1)} \le \bar{C}h\|u\|_{H^2(0,1)}.$$

Интегрална репрезентација ξ_2^n је

$$\begin{aligned} \xi_2^n &= T_-^2 c_n T_-^2 u_n - T_-^2(cu)_n \\ &= \left(\frac{2}{h}\right)^2\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)c(t)dt\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{s-1}{h}\right)u(s)ds \\ &- \left(\frac{2}{h}\right)^2\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)c(t)u(t)dt\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{s-1}{h}\right)ds \\ &= -\left(\frac{2}{h}\right)^2\frac{1}{2}\left[\int_{1-h}^{1}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)\left(1+\frac{s-1}{h}\right)(c(t)-c(s))(u(t)-u(s))\right]dtds \\ &= -\frac{2}{h^2}\int_{1-h}^{1}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)\left(1+\frac{s-1}{h}\right)\int_s^t\int_s^t c'(z)u'(\bar{z})dzd\bar{z}dtds, \end{aligned}$$

а оцена

$$\begin{aligned} |\xi_2^n| &\le \frac{2}{h^2}\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{t-1}{h}\right)dt\int_{1-h}^{1}\left(1+\frac{s-1}{h}\right)ds\int_{1-h}^{1}|c'(z)|dz\int_{1-h}^{1}|u'(\bar{z})|d\bar{z} \\ &\le \frac{2}{h^2}\frac{h}{2}\frac{h}{2}\left(\int_{1-h}^{1}1^2dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{1-h}^{1}|c'(z)|^2dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{1-h}^{1}1^2d\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{1-h}^{1}|u'(\bar{z})|^2d\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}\|c'\|_{L^2(1-h,1)}h^{\frac{1}{2}}\|u'\|_{L^2(1-h,1)} \le \frac{1}{2}h\|c'\|_{L^2(1-h,1)}\|u\|_{H^1(1-h,1)} \\ &\le \bar{\bar{C}}h\|u\|_{H^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Како је $\varphi_n = \zeta^n + \xi_1^n + \xi_2^n$, а $|\varphi_n| \le |\xi_1^n| + |\xi_2^n|$, закључујемо да је

$$|\varphi_n| \le \mathcal{O}(h). \tag{3.39}$$

Када у изразу (3.27) искористимо оцене (3.37), (3.38) и (3.39), можемо да закључимо да је

$$|[z]|_h = |[u-v]|_h \le \mathcal{O}(h^2).$$

□

3.2 Дводимензиони случај ($n = 2$)

Посматрајмо проблем (2.13) на $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Имајући у виду слику 1, можемо га записати у облику операторске једначине

$$Lu = f, \tag{3.40}$$

где је

$$Lu = \begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + c(x,y)u(x,y), & \text{на} \quad \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \sigma(0,y)u(0,y), & \text{на} \quad \Gamma_{x0}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) + \sigma(1,y)u(1,y), & \text{на} \quad \Gamma_{x1}, \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) + \sigma(x,0)u(x,0), & \text{на} \quad \Gamma_{y0}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) + \sigma(x,1)u(x,1), & \text{на} \quad \Gamma_{y1}, \end{cases}$$

а

$$f = \begin{cases} f(x,y), & \text{на} \quad \Omega, \\ 0, & \text{на} \quad \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

и важи да $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ скоро свуда на Ω, $f \in L^2(\Omega)$, $\sigma \in L^\infty(\Gamma)$ и $\sigma > 0$ скоро свуда на Γ.

Желимо да дискретизујемо овај проблем, те континуалну функцију u замењујемо дискретном функцијом v, тако да важи $v_{ij} = v(x_i, y_j) \approx u(x_i, y_j)$, а изводе замењујемо коначним разликама, с тим што сада разликујемо да ли посматрамо коначну разлику по првој или другој промењљивој. Дакле, разликујемо

$$v_{x,ij} = \frac{1}{h}\left(v_{i+1,j} - v_{ij}\right) = v_{\bar{x},i+1,j},$$

$$v_{y,ij} = \frac{1}{h}\left(v_{i,j+1} - v_{ij}\right) = v_{\bar{y},i,j+1}.$$

Гранични проблем (2.13) сада посматрамо на мрежи $\bar{\Omega}_h = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_h$, где са $\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega$ означавамо унутрашње, а са $\bar{\Gamma}_h = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma = \bar{\Omega}_h \backslash \Omega_h$ граничне чворове мреже. Проблем можемо да заменимо диференцијском схемом

$$\begin{aligned} -v_{x\bar{x},ij} - v_{y\bar{y},ij} + c_{ij}v_{ij} &= f_{ij}, & i,j &= 1,\dots,n-1, \\ -v_{x,0j} + \sigma_{0j}v_{0j} &= 0, & i &= 0,\ j = 0,\dots,n, \\ v_{\bar{x},nj} + \sigma_{nj}v_{nj} &= 0, & i &= n,\ j = 0,\dots,n, \\ -v_{y,i0} + \sigma_{i0}v_{i0} &= 0, & j &= 0,\ i = 0,\dots,n, \\ v_{\bar{y},in} + \sigma_{in}v_{in} &= 0, & j &= n,\ i = 0,\dots,n, \end{aligned} \tag{3.41}$$

код које је $c_{ij} = c_h(x_i, y_j)$, $f_{ij} = f_h(x_i, y_j)$, $i,j = 1,\dots,n-1$, где су c_h и f_h редом одговарајуће апроксимације функција c и f, што ћемо посебно да нагласимо код оцене грешке. Исто тако, посматрамо и апроксимацију σ_h функције σ на граничним чворовима мреже.

Аналогно једнодимензионом случају, апроксимација граничних услова успорава конвергенцију диференцијске схеме, те ћемо корацима као за $n = 1$ покушати да је побољшамо.

Полазимо од апроксимације на ивици Γ_{x0}, па како је $-u_{x,0j} = -h^{-1}\big(u(h,y) - u(0,y)\big)$, полазимо од развоја $u(h,y)$ у Taylor-ов ред око тачке $(0,y)$ и добијамо

$$-u_x(0,y) = -\frac{1}{h}\left[u(0,y) + h\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,y) + O(h^3) - u(0,y)\right]$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,y) + \mathcal{O}(h^2).$$

Први гранични услов користимо да изразимо $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)$, док из парцијалне диференцијалне једначине добијамо израз за $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,y)$. Наиме,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \sigma(0,y)u(0,y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,y) = c(0,y)u(0,y) - f(0,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y).$$

Сада је

$$-u_x(0,y) = -\sigma(0,y)u(0,y) - \frac{h}{2}\left[c(0,y)u(0,y) - f(0,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y)\right] + \mathcal{O}(h^2), \tag{3.42}$$

тако да када и други извод по y апроксимирамо коначном разликом, гранични услов у унутрашњим тачкама ивице Γ_{x0}, са грешком $\mathcal{O}(h^2)$, апроксимирамо са

$$-u_x(0,y) + \left(\sigma(0,y) + \frac{h}{2}\,c(0,y)\right)u(0,y) - \frac{h}{2}u_{y\bar{y}}(0,y) = \frac{h}{2}f(0,y). \tag{3.43}$$

Потпуно аналогно, граничне услове у унутрашњим тачкама ивица Γ_{x1}, Γ_{y0} и Γ_{y1} редом апроксимирамо са

$$u_{\bar{x}}(1,y) + \left(\sigma(1,y) + \frac{h}{2}\,c(1,y)\right)u(1,y) - \frac{h}{2}u_{y\bar{y}}(1,y) = \frac{h}{2}f(1,y), \tag{3.44}$$

$$-u_y(x,0) + \left(\sigma(x,0) + \frac{h}{2}\,c(x,0)\right)u(x,0) - \frac{h}{2}u_{x\bar{x}}(x,0) = \frac{h}{2}f(x,0), \tag{3.45}$$

$$u_{\bar{y}}(x,1) + \left(\sigma(x,1) + \frac{h}{2}\,c(x,1)\right)u(x,1) - \frac{h}{2}u_{x\bar{x}}(x,1) = \frac{h}{2}f(x,1). \tag{3.46}$$

Дакле, крајњи облик апроксимација у унутрашњим тачкама ивица области Ω је

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{h}\big(-v_{x,0j} + \sigma_{0j}v_{0j}\big) + c_{0j}v_{0j} - v_{y\bar{y},0j} = f_{0j} + \mathcal{O}(h), && j = 1,\dots,n-1,\\
&\frac{2}{h}\big(v_{\bar{x},nj} + \sigma_{nj}v_{nj}\big) + c_{nj}v_{nj} - v_{y\bar{y},nj} = f_{nj} + \mathcal{O}(h), && j = 1,\dots,n-1,\\
&\frac{2}{h}\big(-v_{y,i0} + \sigma_{i0}v_{i0}\big) + c_{i0}v_{i0} - v_{x\bar{x},i0} = f_{i0} + \mathcal{O}(h), && i = 1,\dots,n-1,\\
&\frac{2}{h}\big(v_{\bar{y},in} + \sigma_{in}v_{in}\big) + c_{in}v_{in} - v_{x\bar{x},in} = f_{in} + \mathcal{O}(h), && i = 1,\dots,n-1.
\end{aligned}$$

Посебно посматрамо шта се дешава у теменима области Ω, тачније, у тачкама $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. Наиме, како се тачка $(0,0)$ налази на пресеку ивица $\bar{\Gamma}_{x0}$ и $\bar{\Gamma}_{y0}$, за њу важе два гранична услова, односно, за њу су тачне две апроксимације. Уколико посматрамо једначину (3.42) и одговарајућу једначину за $\bar{\Gamma}_{y0}$, те искористимо полазну једначину где је $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) + c(0,0)u(0,0) = f(0,0)$, имамо да важе једнакости

$$\frac{2}{h}\left(-u_x(0,0) + \sigma(0,0)u(0,0)\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + \mathcal{O}(h),$$

$$\frac{2}{h}\left(-u_y(0,0)+\sigma(0,0)u(0,0)\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0)+\mathcal{O}(h).$$

Након што их саберемо, добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{2}{h}\left(-u_x(0,0)-u_y(0,0)+2\sigma(0,0)u(0,0)\right)&=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0)+\mathcal{O}(h),\\ &=f(0,0)-c(0,0)u(0,0)+\mathcal{O}(h),\end{aligned}$$

односно, апроксимација у тачки $(0,0)$ је

$$\frac{2}{h}\left(-v_{x,00}-v_{y,00}+2\sigma_{00}v_{00}\right)+c_{00}v_{00}=f_{00}+\mathcal{O}(h).$$

Аналогно, за тачке $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$ важе редом апроксимације

$$\begin{aligned}&\frac{2}{h}\left(-v_{x,0n}+v_{\bar{y},0n}+2\sigma_{0n}v_{0n}\right)+c_{0n}v_{0n}=f_{0n}+\mathcal{O}(h),\\ &\frac{2}{h}\left(v_{\bar{x},n0}-v_{y,n0}+2\sigma_{n0}v_{n0}\right)+c_{n0}v_{n0}=f_{n0}+\mathcal{O}(h),\\ &\frac{2}{h}\left(v_{\bar{x},nn}+v_{\bar{y},nn}+2\sigma_{nn}v_{nn}\right)+c_{nn}v_{nn}=f_{nn}+\mathcal{O}(h).\end{aligned}$$

3.2.1 Стабилност диференцијске схеме

За доказивање егзистенције и јединствености решења, као и стабилности диференцијске схеме и сада ће нам лакше бити уколико схему посматрамо у облику операторске једначине

$$L_h v = f_h. \tag{3.47}$$

Линеаран оператор L_h можемо да дефинишемо као

$$L_h v=\begin{cases}-v_{x\bar{x},ij}-v_{y\bar{y},ij}+c_{ij}v_{ij} & \text{за}\quad i,j=1,\dots,n-1,\\ \frac{2}{h}\big(-v_{x,0j}+\sigma_{0j}v_{0j}\big)+c_{0j}v_{0j}-v_{y\bar{y},0j} & \text{за}\quad i=0, j=1,\dots,n-1,\\ \frac{2}{h}\big(v_{\bar{x},nj}+\sigma_{nj}v_{nj}\big)+c_{nj}v_{nj}-v_{y\bar{y},nj} & \text{за}\quad i=n, j=1,\dots,n-1,\\ \frac{2}{h}\big(-v_{y,i0}+\sigma_{i0}v_{i0}\big)+c_{i0}v_{i0}-v_{x\bar{x},i0} & \text{за}\quad j=0, i=1,\dots,n-1,\\ \frac{2}{h}\big(v_{\bar{y},in}+\sigma_{in}v_{in}\big)+c_{in}v_{in}-v_{x\bar{x},in} & \text{за}\quad j=n, i=1,\dots,n-1,\\ \frac{2}{h}\left(-v_{x,00}-v_{y,00}+2\sigma_{00}v_{00}\right)+c_{00}v_{00} & \text{за}\quad i=0, j=0,\\ \frac{2}{h}\left(-v_{x,0n}+v_{\bar{y},0n}+2\sigma_{0n}v_{0n}\right)+c_{0n}v_{0n} & \text{за}\quad i=0, j=n,\\ \frac{2}{h}\left(v_{\bar{x},n0}-v_{y,n0}+2\sigma_{n0}v_{n0}\right)+c_{n0}v_{n0} & \text{за}\quad i=n, j=0,\\ \frac{2}{h}\left(v_{\bar{x},nn}+v_{\bar{y},nn}+2\sigma_{nn}v_{nn}\right)+c_{nn}v_{nn} & \text{за}\quad i=n, j=n.\end{cases} \tag{3.48}$$

Овај оператор пресликава простор дискретних функција $\overline{\mathcal{V}}=\left\{v:\bar{\Omega}_h\to\mathbb{R}^{n+1}\right\}$ у самог себе.

Како функција $f\in L^2(\Omega)$, за њену рестрикцију на мрежу $\bar{\Omega}_h$ не можемо да гарантујемо да ће бити дефинисана у сваком чвору мреже, те за њену апроксимацију f_h користимо Steklov-љеве операторе усредњења (1.1) и (1.2), с тим што разликујемо да ли оператор примењујемо на прву или на другу променљиву. Тачније,

$$
f_h = \begin{cases}
T_x^2 T_y^2 f & \text{за} \quad i,j = 1,\dots,n-1, \\
T_{+x}^2 T_y^2 f & \text{за} \quad i = 0, j = 1,\dots,n-1, \\
T_{-x}^2 T_y^2 f & \text{за} \quad i = n, j = 1,\dots,n-1, \\
T_x^2 T_{+y}^2 f & \text{за} \quad j = 0, i = 1,\dots,n-1, \\
T_x^2 T_{-y}^2 f & \text{за} \quad j = n, i = 1,\dots,n-1, \\
T_{+x}^2 T_{+y}^2 f & \text{за} \quad i = 0, j = 0, \\
T_{+x}^2 T_{-y}^2 f & \text{за} \quad i = 0, j = n, \\
T_{-x}^2 T_{+y}^2 f & \text{за} \quad i = n, j = 0, \\
T_{-x}^2 T_{-y}^2 f & \text{за} \quad i = n, j = n.
\end{cases}
$$

У простору $\overline{\mathcal{V}}$ дефинишимо скаларни производ као

$$
\begin{aligned}
[v,w]_h = h^2 \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} v_{ij}w_{ij} &+ \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(v_{0i}w_{0i} + v_{ni}w_{ni} + v_{i0}w_{i0} + v_{in}w_{in}\right) \\
&+ \frac{h^2}{4}\left(v_{00}w_{00} + v_{0n}w_{0n} + v_{n0}w_{n0} + v_{nn}w_{nn}\right),
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

а одговарајућу норму као

$$
|[v]|_h = [v,v]_h^{\frac{1}{2}} = |[v]|_{L^2(\bar{\Omega}_h)}. \tag{3.50}
$$

Додатно,

$$
|[v]|_{C,h} = \max_{0\le i,j\le n} |v_{ij}|.
$$

Желимо да успоставимо везу између скаларних производа у обе димензије, те (3.49) можемо да запишемо као

$$
[v,w]_h = h\sum_{i=1}^{n-1}[v(x_i,\cdot), w(x_i,\cdot)]_h + \frac{h}{2}\big([v(x_0,\cdot), w(x_0,\cdot)]_h + [v(x_n,\cdot), w(x_n,\cdot)]_h\big), \tag{3.51}
$$

где је

$$
[v(x_i,\cdot), w(x_i,\cdot)]_h = h\sum_{j=1}^{n-1} v_{ij}w_{ij} + \frac{h}{2}\big(v_{i0}w_{i0} + v_{in}w_{in}\big), \quad i = 0,\dots,n,
$$

скаларни производ на слоју $x = ih$. Аналогно,

$$
[v,w]_h = h\sum_{j=1}^{n-1}[v(\cdot,y_j), w(\cdot,y_j)]_h + \frac{h}{2}\big([v(\cdot,y_0), w(\cdot,y_0)]_h + [v(\cdot,y_n), w(\cdot,y_n)]_h\big), \tag{3.52}
$$

где је

$$
[v(\cdot,y_j), w(\cdot,y_j)]_h = h\sum_{i=1}^{n-1} v_{ij}w_{ij} + \frac{h}{2}\big(v_{0j}w_{0j} + v_{nj}w_{nj}\big), \quad j = 0,\dots,n,
$$

скаларни производ на слоју $y = jh$ (видети [10]).
Затим желимо да уведемо дискретну H^1-норму у дводимензионом случају. Прво, за полунорму нам треба

$$
[v,w)_{h,x} = h\sum_{i=0}^{n-1}[v(x_i,\cdot), w(x_i,\cdot)]_h = h\sum_{i=0}^{n-1}\left(h\sum_{j=1}^{n-1} v_{ij}w_{ij} + \frac{h}{2}\big(v_{i0}w_{i0} + v_{in}w_{in}\big)\right)
$$

$$= h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} v_{ij} w_{ij} + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \big(v_{i0} w_{i0} + v_{in} w_{in} \big),$$

$$[v, w)_{h,y} = h \sum_{j=0}^{n-1} [v(\cdot, y_j), w(\cdot, y_j)]_h = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} v_{ij} w_{ij} + \frac{h^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \big(v_{0j} w_{0j} + v_{nj} w_{nj} \big),$$

$$(v, w]_{h,x} = h \sum_{i=1}^{n} [v(x_i, \cdot), w(x_i, \cdot)]_h = h^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} v_{ij} w_{ij} + \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \big(v_{i0} w_{i0} + v_{in} w_{in} \big),$$

$$(v, w]_{h,y} = h \sum_{j=1}^{n} [v(\cdot, y_j), w(\cdot, y_j)]_h = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} w_{ij} + \frac{h^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \big(v_{0j} w_{0j} + v_{nj} w_{nj} \big).$$

Сада је

$$\| v_{\bar{x}}]|^2_{h,x} = h^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} v^2_{\bar{x},ij} + \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \big(v^2_{\bar{x},i0} + v^2_{\bar{x},in} \big),$$

$$\| v_{\bar{y}}]|^2_{h,y} = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} v^2_{\bar{y},ij} + \frac{h^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \big(v^2_{\bar{y},0j} + v^2_{\bar{y},nj} \big),$$

а норма је

$$|[v]|_{H^1(\bar{\Omega}_h)} = \big(|[v]|^2_h + \| v_{\bar{x}}]|^2_{h,x} + \| v_{\bar{y}}]|^2_{h,y} \big)^{\frac{1}{2}}.$$

Најпре желимо да покажемо самоконјугованост и позитивну дефинисаност оператора L_h, стога, по угледу на једнодимензиони случај, показујемо да важи наредни став.

Став 3.9. *За сваку функцију v дефинисану на мрежи $\bar{\Omega}_h$ важе неједнакости*

$$v^2_{ij} \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)(v^2_{0j} + v^2_{nj}) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \sum_{k=1}^{n} v^2_{\bar{x},kj} h, \tag{3.53}$$

за $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 0, \ldots, n$ и $\varepsilon > 0$, као и

$$v^2_{ij} \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)(v^2_{i0} + v^2_{in}) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \sum_{k=1}^{n} v^2_{\bar{y},ik} h, \tag{3.54}$$

за $i = 0, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$ и $\varepsilon > 0$.

Доказ. Приметимо да величину v^2_{ij} можемо да запишемо као

$$v^2_{ij} = \big(v(x_i, y_j) \big)^2 = \left(v(x_0, y_j) + \sum_{k=1}^{i} v_{\bar{x},kj} h \right)^2 = \left(\sum_{k=i+1}^{n} v_{\bar{x},kj} h - v(x_n, y_j) \right)^2$$
$$= \left(v(x_i, y_0) + \sum_{k=1}^{j} v_{\bar{y},ik} h \right)^2 = \left(\sum_{k=j+1}^{n} v_{\bar{y},ik} h - v(x_i, y_n) \right)^2.$$

Даље, доказ би ишао потпуно аналогно као у једнодимензионом случају. $\square$
Оно што ће нам исто тако значити приликом доказивања самоконјугованости и позитивне дефинисаности оператора L_h је дискретан аналогон парцијалне интеграције у дводимензионом случају. Наиме, важи да је

$$h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (-v_{x\bar{x},ij}) w_{ij} = h^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} v_{\bar{x},ij} w_{\bar{x},ij} + h \sum_{j=1}^{n-1} v_{x,0j} w_{0j} - h \sum_{j=1}^{n-1} v_{\bar{x},nj} w_{nj}, \tag{3.55}$$

$$h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (-v_{y\bar{y},ij}) w_{ij} = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} v_{\bar{y},ij} w_{\bar{y},ij} + h \sum_{i=1}^{n-1} v_{y,i0} w_{i0} - h \sum_{i=1}^{n-1} v_{\bar{y},in} w_{in}. \tag{3.56}$$

Напоменимо да би доказ био идентичан оном у једнодимензионом случају, с тим што би сада у изразу имали још једну суму.

Теорема 3.10. *Диференцијска схема одређена линеарним оператором* (3.48) *има јединствено решење.*

Доказ. Довољно је да покажемо да је оператор L_h самоконјугован и позитивно дефинисан у односу на скаларни производ $[\cdot,\cdot]_h$ дефинисан са (3.49).
Посматрамо скаларни производ

$$[L_h v, w]_h = h^2 \sum_{\Omega_h} L_h v\, w + \frac{h^2}{2} \sum_{\Gamma_h} L_h v\, w + \frac{h^2}{4} \sum_{\Gamma^*} L_h v\, w, \tag{3.57}$$

где је $\Gamma_h = \bar{\Gamma}_h \backslash \Gamma^*$, а са Γ^* смо означили скуп темена области Ω. Најпре израчунајмо први сабирак

$$\begin{aligned} h^2 \sum_{\Omega_h} L_h v\, w &= h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \big(- v_{x\bar{x},ij} - v_{y\bar{y},ij} + c_{ij} v_{ij} \big) w_{ij} \\ &= -h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} v_{x\bar{x},ij} w_{ij} - h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} v_{y\bar{y},ij} w_{ij} + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} v_{ij} w_{ij}. \end{aligned}$$

За прва два сабирка искористимо (3.55) и (3.56) и имамо да је

$$\begin{aligned} h^2 \sum_{\Omega_h} L_h v\, w = h^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} v_{\bar{x},ij} w_{\bar{x},ij} + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} v_{\bar{y},ij} w_{\bar{y},ij} + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} v_{ij} w_{ij} \\ + h \sum_{j=1}^{n-1} v_{x,0j} w_{0j} - h \sum_{j=1}^{n-1} v_{\bar{x},nj} w_{nj} + h \sum_{i=1}^{n-1} v_{y,i0} w_{i0} - h \sum_{i=1}^{n-1} v_{\bar{y},in} w_{in}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

За други сабирак скаларног производа (3.57) суму раздвајамо у односу на ивице којима унутрашњи гранични чворови припадају, па тако имамо да је

$$\frac{h^2}{2} \sum_{\Gamma_h} L_h v\, w = \frac{h^2}{2} \sum_{\Gamma_{h,x0}} L_h v\, w + \frac{h^2}{2} \sum_{\Gamma_{h,x1}} L_h v\, w + \frac{h^2}{2} \sum_{\Gamma_{h,y0}} L_h v\, w + \frac{h^2}{2} \sum_{\Gamma_{h,y1}} L_h v\, w.$$

Даље је

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{2}\sum_{\Gamma_{h,x0}} L_h v\, w &= \frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{2}{h}\big(-v_{x,0j}+\sigma_{0j}v_{0j}\big)+c_{0j}v_{0j}-v_{y\bar{y},0j}\right]w_{0j}\\ &= -h\sum_{j=1}^{n-1}v_{x,0j}w_{0j}+h\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_{0j}v_{0j}w_{0j}+\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{n-1}c_{0j}v_{0j}w_{0j}-\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{n-1}v_{y\bar{y},0j}w_{0j}\end{aligned}$$

$$= -h\sum_{j=1}^{n-1}v_{x,0j}w_{0j}+h\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_{0j}v_{0j}w_{0j}+\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{n-1}c_{0j}v_{0j}w_{0j}+\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{n}v_{\bar{y},0j}w_{\bar{y},0j}+\frac{h}{2}v_{y,00}w_{00}-\frac{h}{2}v_{\bar{y},0n}w_{0n}.$$

Аналогно, за преостале три ивице добијамо

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{2}\sum_{\Gamma_{h,x1}} L_h v\, w &= h\sum_{j=1}^{n-1}v_{\bar{x},nj}w_{nj}+h\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_{nj}v_{nj}w_{nj}+\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{n-1}c_{nj}v_{nj}w_{nj}\\ &\quad+\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{n}v_{\bar{y},nj}w_{\bar{y},nj}+\frac{h}{2}v_{y,n0}w_{n0}-\frac{h}{2}v_{\bar{y},nn}w_{nn},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{2}\sum_{\Gamma_{h,y0}} L_h v\, w &= -h\sum_{i=1}^{n-1}v_{y,i0}w_{i0}+h\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i0}v_{i0}w_{i0}+\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}c_{i0}v_{i0}w_{i0}\\ &\quad+\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n}v_{\bar{x},i0}w_{\bar{x},i0}+\frac{h}{2}v_{x,00}w_{00}-\frac{h}{2}v_{\bar{x},n0}w_{n0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{2}\sum_{\Gamma_{h,y1}} L_h v\, w &= h\sum_{i=1}^{n-1}v_{\bar{y},in}w_{in}+h\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{in}v_{in}w_{in}+\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}v_{in}w_{in}\\ &\quad+\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n}v_{\bar{x},in}w_{\bar{x},in}+\frac{h}{2}v_{x,0n}w_{0n}-\frac{h}{2}v_{\bar{x},nn}w_{nn}.\end{aligned}$$

Приметимо да ће се први сабирци у претходна четири израза скратити са последња четири сабирка једначине (3.58).
Прелазимо на трећи сабирак скаларног производа (3.57), где деловање оператора L_h раздвајамо на четири темена, те у тачки $(0,0)$ имамо да је

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{4}(L_h v\, w)(0,0) &= \frac{h^2}{4}\left[\frac{2}{h}\left(-v_{x,00}-v_{y,00}+2\sigma_{00}u_{00}\right)+c_{00}v_{00}\right]w_{00}\\ &= -\frac{h}{2}v_{x,00}w_{00}-\frac{h}{2}v_{y,00}w_{00}+h\sigma_{00}u_{00}w_{00}+\frac{h^2}{4}c_{00}v_{00}w_{00},\end{aligned}$$

док за преостале три тачке важи да је

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{4}(L_h v\, w)(0,1) &= -\frac{h}{2}v_{x,0n}w_{0n}+\frac{h}{2}v_{\bar{y},0n}w_{0n}+h\sigma_{0n}u_{0n}w_{0n}+\frac{h^2}{4}c_{0n}v_{0n}w_{0n},\\ \frac{h^2}{4}(L_h v\, w)(1,0) &= \frac{h}{2}v_{\bar{x},n0}w_{n0}-\frac{h}{2}v_{y,n0}w_{n0}+h\sigma_{n0}u_{n0}w_{n0}+\frac{h^2}{4}c_{n0}v_{n0}w_{n0},\\ \frac{h^2}{4}(L_h v\, w)(1,1) &= \frac{h}{2}v_{\bar{x},nn}w_{nn}+\frac{h}{2}v_{\bar{y},nn}w_{nn}+h\sigma_{nn}u_{nn}w_{nn}+\frac{h^2}{4}c_{nn}v_{nn}w_{nn}.\end{aligned}$$

Можемо видети да ће се прва два сабирка ова четири израза скратити са последња два сабирка претходне четири једначине. На крају нам остаје

$$[L_h v, w]_h = (v_{\bar{x}}, w_{\bar{x}}]_{h,x} + (v_{\bar{y}}, w_{\bar{y}}]_{h,y} + [cv, w]_h + h \sum_{\bar{\Gamma}_h} \sigma v w.$$

Због симетричости билинеарне форме можемо да закључимо да је

$$[L_h v, w]_h = [v, L_h w]_h, \quad \text{а како је и} \quad [L_h v, w]_h = [v, L_h^* w]_h, \quad \text{следи да је} \quad L_h = L_h^*.$$

Сада посматрамо скаларни производ

$$[L_h v, v]_h = (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}]_{h,x} + (v_{\bar{y}}, v_{\bar{y}}]_{h,y} + [cv, v]_h + h \sum_{\bar{\Gamma}_h} \sigma v^2.$$

Како је $c \geq 0$, а $\sigma_{\min} = \min_{\bar{\Gamma}_h} \sigma > 0$, видимо да је

$$[L_h v, v]_h \geq \|v_{\bar{x}}]|^2_{h,x} + \|v_{\bar{y}}]|^2_{h,y} + \sigma_{\min} h \sum_{\bar{\Gamma}_h} v^2 \tag{3.59}$$

$$\geq \min\big(1, \sigma_{\min}\big) \left(\|v_{\bar{x}}]|^2_{h,x} + \|v_{\bar{y}}]|^2_{h,y} + h \sum_{\bar{\Gamma}_h} v^2 \right). \tag{3.60}$$

Из (3.53) за $\varepsilon = 1$ имамо да је

$$v_{ij}^2 \leq v_{0j}^2 + v_{nj}^2 + \sum_{k=1}^{n} v_{\bar{x},kj}^2 h.$$

Уколико дату неједнакост помножимо са h за $j = 1, \ldots, n-1$, а са $\frac{h}{2}$ за $j = 0$ и $j = n$, а затим их сумирамо, добијамо да је

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^{n-1} v_{ij}^2 + \frac{h}{2}\big(v_{i0}^2 + v_{in}^2\big) \leq h \sum_{j=1}^{n-1} \big(v_{0j}^2 + v_{nj}^2\big) + \frac{h}{2}\big(v_{00}^2 + v_{n0}^2 + v_{0n}^2 + v_{nn}^2\big) \\ + h^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} v_{\bar{x},kj}^2 + \frac{h^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \big(v_{\bar{x},k0}^2 + v_{\bar{x},kn}^2\big), \end{aligned}$$

односно,

$$|[v(x_i, \cdot)]|^2_h \leq |[v(x_0, \cdot)]|^2_h + |[v(x_n, \cdot)]|^2_h + \|v_{\bar{x}}]|^2_{h,x}. \tag{3.61}$$

Уколико ову неједнакост помножимо са h за $i = 1, \ldots, n-1$, а са $\frac{h}{2}$ за $i = 0$ и $i = n$, а затим их сумирамо, имајући у виду (3.51), добијамо да је

$$\begin{aligned} |[v]|^2_h &\leq \big(|[v(x_0, \cdot)]|^2_h + |[v(x_n, \cdot)]|^2_h + \|v_{\bar{x}}]|^2_{h,x}\big)\big(h(n-1) + h\big) \\ &= |[v(x_0, \cdot)]|^2_h + |[v(x_n, \cdot)]|^2_h + \|v_{\bar{x}}]|^2_{h,x}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Аналогно, из (3.54) за $\varepsilon = 1$ имамо да је

$$|[v(\cdot, y_j)]|^2_h \leq |[v(\cdot, y_0)]|^2_h + |[v(\cdot, y_n)]|^2_h + \|v_{\bar{y}}]|^2_{h,y}, \tag{3.63}$$

као и да је

$$|[v]|^2_h \leq |[v(\cdot, y_0)]|^2_h + |[v(\cdot, y_n)]|^2_h + \|v_{\bar{y}}]|^2_{h,y}. \tag{3.64}$$

Искористимо сада (3.62) и (3.64) у (3.60). Дакле, важи да је

$$[L_h v, v]_h \geq C \left(\|v_{\bar{x}}]|^2_{h,x} + \|v_{\bar{y}}]|^2_{h,y} + |[v(x_0, \cdot)]|^2_h + |[v(x_n, \cdot)]|^2_h + |[v(\cdot, y_0)]|^2_h + |[v(\cdot, y_n)]|^2_h \right),$$

односно,

$$[L_h v, v]_h \geq 2C|[v]|^2_h, \tag{3.65}$$

где је $C = \min\bigl(1, \sigma_{\min}\bigr)$.
Даље, из (3.59), како је $\sigma_{\min} > 0$, следи да је

$$[L_h v, v]_h \geq \|v_{\bar{x}}]|^2_{h,x} + \|v_{\bar{y}}]|^2_{h,y},$$

што нам сабрано са (3.65) даје

$$\left(1 + \frac{1}{2C}\right) [L_h v, v]_h \geq \|v_{\bar{x}}]|^2_{h,x} + \|v_{\bar{y}}]|^2_{h,y} + |[v]|^2_h,$$

односно, имамо да је

$$[L_h v, v]_h \geq \frac{2C}{1 + 2C} |[v]|^2_{H^1(\bar{\Omega}_h)}, \tag{3.66}$$

где је $C = \min\bigl(1, \sigma_{\min}\bigr)$.
Дакле, оператор L_h је самоконјугован и позитивно дефинисан, па нам став (1.14) гарантује постојање ограниченог инверза L_h^{-1}, стога једначина (3.47) има решење и оно је јединствено. □

Теорема 3.11. *Диференцијска схема је стабилна у нормама $|[\cdot]|_h$ и $|[\cdot]|_{H^1(\bar{\Omega}_h)}$, при чему важе априорне оцене*

$$|[v]|_h \leq \frac{1}{2C} |[f]|_h \quad \text{и} \quad |[v]|_{H^1(\bar{\Omega}_h)} \leq \left(1 + \frac{1}{2C}\right) |[f]|_h, \tag{3.67}$$

где је $C = \min\bigl(1, \sigma_{\min}\bigr)$.

Доказ. Приметимо да из (3.65), уз примену Cauchy-Schwarz-ове неједнакости 1.17, имамо да је

$$2C|[v]|^2_h \leq [L_h v, v]_h = [f, v]_h \leq |[f]|_h |[v]|_h. \tag{3.68}$$

Тачније, добијамо оцену

$$|[v]|_h \leq \frac{1}{2C} |[f]|_h.$$

Даље, из (3.66), уз примену Cauchy-Schwarz-ове неједнакости 1.17, имамо да је

$$\frac{2C}{1 + 2C} |[v]|^2_{H^1(\bar{\Omega}_h)} \leq [L_h v, v]_h = [f, v]_h \leq |[f]|_h |[v]|_h \leq |[f]|_h |[v]|_{H^1(\bar{\Omega}_h)}. \tag{3.69}$$

Дакле, добијамо оцену

$$|[v]|_{H^1(\bar{\Omega}_h)} \leq \left(1 + \frac{1}{2C}\right) |[f]|_h,$$

која уједно представља дискретан аналогон оцене (2.27). □

3.2.2 Оцена грешке

Аналогно једнодимензионом случају, грешка апроксимације $z = u - v$, дефинисана је као и v само у чворовима мреже и задовољава исту диференцијску схему са оператором L_h дефинисаним са (3.48), док се десна страна схеме разликује. Дакле, имамо да је

$$
\begin{aligned}
& -z_{x\bar{x},ij} - z_{y\bar{y},ij} + c_{h,ij}z_{ij} = \varphi_{ij}, && i,j = 1,\ldots,n-1,\\
& \frac{2}{h}(-z_{x,0j} + \sigma_{h,0j}z_{0j}) + c_{h,0j}z_{0j} - z_{y\bar{y},0j} = \varphi_{0j}, && i=0, j = 1,\ldots,n-1,\\
& \frac{2}{h}\big(z_{\bar{x},nj} + \sigma_{h,nj}z_{nj}\big) + c_{h,nj}z_{nj} - z_{y\bar{y},nj} = \varphi_{nj}, && i=n, j = 1,\ldots,n-1,\\
& \frac{2}{h}\big(-z_{y,i0} + \sigma_{h,i0}z_{i0}\big) + c_{h,i0}z_{i0} - z_{x\bar{x},i0} = \varphi_{i0}, && j=0, i = 1,\ldots,n-1,\\
& \frac{2}{h}\big(z_{\bar{y},in} + \sigma_{h,in}z_{in}\big) + c_{h,in}z_{in} - z_{x\bar{x},in} = \varphi_{in}, && j=n, i = 1,\ldots,n-1,\\
& \frac{2}{h}\big(-z_{x,00} - z_{y,00} + 2\sigma_{h,00}z_{00}\big) + c_{h,00}z_{00} = \varphi_{00}, && i=0, j=0,\\
& \frac{2}{h}\big(-z_{x,0n} + z_{\bar{y},0n} + 2\sigma_{h,0n}z_{0n}\big) + c_{h,0n}z_{0n} = \varphi_{0n}, && i=0, j=n,\\
& \frac{2}{h}\big(z_{\bar{x},n0} - z_{y,n0} + 2\sigma_{h,n0}z_{n0}\big) + c_{h,n0}z_{n0} = \varphi_{n0}, && i=n, j=0,\\
& \frac{2}{h}\big(z_{\bar{x},nn} + z_{\bar{y},nn} + 2\sigma_{h,nn}z_{nn}\big) + c_{h,nn}z_{nn} = \varphi_{nn}, && i=n, j=n.
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
\varphi_{ij} &= L_h(u_{ij} - v_{ij}) = L_h u_{ij} - L_h v_{ij} = L_h u_{ij} - f_{h,ij}\\
&= -f_{h,ij} - u_{x\bar{x},ij} - u_{y\bar{y},ij} + c_{h,ij}u_{ij}, && i,j = 1,\ldots,n-1,\\
\varphi_{0j} &= L_h(u_{0j} - v_{0j}) = L_h u_{0j} - L_h v_{0j} = L_h u_{0j} - f_{h,0j}\\
&= -f_{h,0j} + \frac{2}{h}(-u_{x,0j} + \sigma_{h,0j}u_{0j}) + c_{h,0j}u_{0j} - u_{y\bar{y},0j}, && i=0, j = 1,\ldots,n-1,\\
\varphi_{nj} &= -f_{h,nj} + \frac{2}{h}\big(u_{\bar{x},nj} + \sigma_{h,nj}u_{nj}\big) + c_{h,nj}u_{nj} - u_{y\bar{y},nj}, && i=n, j = 1,\ldots,n-1,\\
\varphi_{i0} &= -f_{h,i0} + \frac{2}{h}\big(-u_{y,i0} + \sigma_{h,i0}u_{i0}\big) + c_{h,i0}u_{i0} - u_{x\bar{x},i0}, && j=0, i = 1,\ldots,n-1,\\
\varphi_{in} &= -f_{h,in} + \frac{2}{h}\big(u_{\bar{y},in} + \sigma_{h,in}u_{in}\big) + c_{h,in}u_{in} - u_{x\bar{x},in}, && j=n, i = 1,\ldots,n-1,\\
\varphi_{00} &= L_h(u_{00} - v_{00}) = L_h u_{00} - L_h v_{00} = L_h u_{00} - f_{h,00}\\
&= -f_{h,00} + \frac{2}{h}(-u_{x,00} - u_{y,00} + 2\sigma_{h,00}u_{00}) + c_{h,00}u_{00} && i=0, j=0,\\
\varphi_{0n} &= -f_{h,0n} + \frac{2}{h}\,(-u_{x,0n} + u_{\bar{y},0n} + 2\sigma_{h,0n}u_{0n}) + c_{h,0n}u_{0n}, && i=0, j=n,\\
\varphi_{n0} &= -f_{h,n0} + \frac{2}{h}\,(u_{\bar{x},n0} - u_{y,n0} + 2\sigma_{h,n0}u_{n0}) + c_{h,n0}u_{n0}, && i=n, j=0,\\
\varphi_{nn} &= -f_{h,nn} + \frac{2}{h}\,(u_{\bar{x},nn} + u_{\bar{y},nn} + 2\sigma_{h,nn}u_{nn}) + c_{h,nn}u_{nn}, && i=n, j=n.
\end{aligned}
$$

Како је диференцијска схема иста, за њу мора да важи и иста априорна оцена (3.67) као за схему дефинисану оператором L_h, односно важи наредна теорема.

Теорема 3.12. *Диференцијска схема* (3.70) *задовољава априорну оцену*

$$|[z]|_{H^1(\bar{\Omega}_h)} \leq \left(1 + \frac{1}{2C}\right)|[\varphi_h]|_h, \tag{3.71}$$

где је

$$\varphi_h = \begin{cases} \varphi_{ij} & \text{за} \quad i, j = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_{0j} & \text{за} \quad i = 0, j = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_{nj} & \text{за} \quad i = n, j = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_{i0} & \text{за} \quad j = 0, i = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_{in} & \text{за} \quad j = n, i = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_{00} & \text{за} \quad i = 0, j = 0, \\ \varphi_{0n} & \text{за} \quad i = 0, j = n, \\ \varphi_{n0} & \text{за} \quad i = n, j = 0, \\ \varphi_{nn} & \text{за} \quad i = n, j = n. \end{cases}$$

За оцену брзине конвергенције прво ћемо да покажемо, а затим и да користимо наредну априорну оцену.

Теорема 3.13. *[12] Диференцијска схема* (3.70) *задовољава априорну оцену*

$$|[z]|_h \leq \bar{\bar{C}}\left(\frac{h}{2}\big(\,|\varphi_{00}| + |\varphi_{0n}| + |\varphi_{n0}| + |\varphi_{nn}|\,\big) + \frac{h}{\sqrt{2}}\big(\,|\varphi_{0j}| + |\varphi_{nj}| + |\varphi_{i0}| + |\varphi_{in}|\,\big) + \|\varphi\|_h\right), \tag{3.72}$$

за $i, j = 1, \dots, n-1$, *где је*

$$\bar{\bar{C}} = \frac{1}{\sqrt{2C}}\sqrt{\frac{1}{2C} + \frac{1}{\sigma_{\min}}}.$$

Доказ. Диференцијску схему (3.70) можемо написати и у облику операторске једначине као

$$L_h z = \varphi_h. \tag{3.73}$$

Приметимо да је на основу (3.49)

$$[L_h z, z]_h = [\varphi_h, z]_h = \frac{h^2}{4}\left(\varphi_{00}z_{00} + \varphi_{0n}z_{0n} + \varphi_{n0}z_{n0} + \varphi_{nn}z_{nn}\right)$$
$$+ \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\varphi_{0i}z_{0i} + \varphi_{ni}z_{ni} + \varphi_{i0}z_{i0} + \varphi_{in}z_{in}\right) + (\varphi, z)_h.$$

Када на трећи сабирак применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17, а затим на сваки од производа у збиру применимо ε-неједнакост (1.18), добијамо

$$[\varphi_h, z]_h \leq \varepsilon\left(z_{00}^2 + z_{0n}^2 + z_{n0}^2 + z_{nn}^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(z_{0i}^2 + z_{ni}^2 + z_{i0}^2 + z_{in}^2\right) + (z, z)_h\right)$$
$$+ \frac{1}{4\varepsilon}\left(\frac{h^2}{4}\left(\varphi_{00}^2 + \varphi_{0n}^2 + \varphi_{n0}^2 + \varphi_{nn}^2\right) + \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\varphi_{0i}^2 + \varphi_{ni}^2 + \varphi_{i0}^2 + \varphi_{in}^2\right) + (\varphi, \varphi)_h\right),$$

те како је

$$(z, z)_h \leq [z, z]_h \leq \frac{1}{2C}[L_h z, z]_h,$$

а

$$\begin{aligned}
&z_{00}^2+z_{0n}^2+z_{n0}^2+z_{nn}^2+\sum_{i=1}^{n-1}\left(z_{0i}^2+z_{ni}^2+z_{i0}^2+z_{in}^2\right)\\
&\le \frac{1}{\sigma_{\min}}\left(\sigma_{00}z_{00}^2+\sigma_{0n}z_{0n}^2+\sigma_{n0}z_{n0}^2+\sigma_{nn}z_{nn}^2+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sigma_{0i}z_{0i}^2+\sigma_{ni}z_{ni}^2+\sigma_{i0}z_{i0}^2+\sigma_{in}z_{in}^2\right)\right)\\
&\le \frac{1}{\sigma_{\min}}[L_hz,z]_h,
\end{aligned}$$

имамо да је

$$z_{00}^2+z_{0n}^2+z_{n0}^2+z_{nn}^2+\sum_{i=1}^{n-1}\left(z_{0i}^2+z_{ni}^2+z_{i0}^2+z_{in}^2\right)+(z,z)_{h^2}\le \bar{C}[L_hz,z]_h,$$

где је $\bar{C}=\left(\frac{1}{2C}+\frac{1}{\sigma_{\min}}\right)$.
Сада је

$$\begin{aligned}
[L_hz,z]_h=[\varphi_h,z]_h\le \varepsilon\bar{C}\,[L_hz,z]_h+\frac{1}{4\varepsilon}\Bigg(&\frac{h^2}{4}\left(\varphi_{00}^2+\varphi_{0n}^2+\varphi_{n0}^2+\varphi_{nn}^2\right)\\
&+\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\varphi_{0i}^2+\varphi_{ni}^2+\varphi_{i0}^2+\varphi_{in}^2\right)+(\varphi,\varphi)_h\Bigg).
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}
[L_hz,z]_h\le \frac{1}{4\,\varepsilon\big(1-\varepsilon\bar{C}\big)}\Bigg(&\frac{h^2}{4}\left(\varphi_{00}^2+\varphi_{0n}^2+\varphi_{n0}^2+\varphi_{nn}^2\right)\\
&+\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\varphi_{0i}^2+\varphi_{ni}^2+\varphi_{i0}^2+\varphi_{in}^2\right)+(\varphi,\varphi)_h\Bigg).
\end{aligned}$$

На исти начин као у једнодимензионом случају, проналазимо где константа на десној страни последње неједнакости достиже свој минимум, те као резултат добијамо неједнакост

$$\begin{aligned}
2C[z,z]_h\le[L_hz,z]_h\le\frac{2C+\sigma_{\min}}{2C\sigma_{\min}}\Bigg(&\frac{h^2}{4}\left(\varphi_{00}^2+\varphi_{0n}^2+\varphi_{n0}^2+\varphi_{nn}^2\right)\\
&+\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\varphi_{0i}^2+\varphi_{ni}^2+\varphi_{i0}^2+\varphi_{in}^2\right)+(\varphi,\varphi)_h\Bigg).
\end{aligned}$$

На крају, закључујемо да је за $i,j=1,\dots,n-1$,

$$\begin{aligned}
|[z]|_h\le\frac{1}{\sqrt{2C}}\sqrt{\frac{1}{2C}+\frac{1}{\sigma_{\min}}}\Bigg(&\frac{h}{2}\big(\,|\varphi_{00}|+|\varphi_{0n}|+|\varphi_{n0}|+|\varphi_{nn}|\,\big)\\
&+\frac{h}{\sqrt{2}}\big(\,|\varphi_{0j}|+|\varphi_{nj}|+|\varphi_{i0}|+|\varphi_{in}|\,\big)+\|\varphi\|_h\Bigg).
\end{aligned}$$

□

Нагласимо да ћемо у доказима наредних теорема детаљну процену да извршимо у унутрашњости области (односно, у унутрашњим чворовима мреже), на једној ивици ($\Gamma_{h,x0}$, односно за $i = 0, j = 1, \ldots, n-1$) и у једном темену ((0,0), односно за $i = 0, j = 0$), с обзиром на то да се оцене на преостале три ивице и три темена изводе аналогно.

Теорема 3.14. *Нека решење u граничног проблема* (2.13) *припада простору* $C^4(\bar{\Omega})$ *и нека* $c \in C(\bar{\Omega})$, $f \in C(\bar{\Omega})$ *и* $\sigma \in C(\partial\Omega)$. *Тада решење* v *диференцијске схеме одређене оператором* (3.48) *конвергира ка* u *при чему је оцена брзине конвергенције*

$$|[u - v]|_h \leq \mathcal{O}(h^2).$$

Доказ. За оцену грешке, пођимо најпре од претпоставке да су c и f непрекидне функције на $\bar{\Omega}$, а функција σ непрекидна на $\partial\Omega$. Тада је $c_h = c$, $f_h = f$ и $\sigma_h = \sigma$, а

$$\begin{aligned}\varphi_{ij} &= \varphi(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j) - u_{x\bar{x}}(x_i, y_j) - u_{y\bar{y}}(x_i, y_j) + c(x_i, y_j)u(x_i, y_j)\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) - u_{x\bar{x}}(x_i, y_j) - u_{y\bar{y}}(x_i, y_j), \qquad i, j = 1, \ldots, n-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{0j} &= \varphi(0, y_j) = -f(0, y_j) + \frac{2}{h}\big(- u_x(0, y_j) + \sigma(0, y_j)u(0, y_j)\big) + c(0, y_j)u(0, y_j) - u_{y\bar{y}}(0, y_j)\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) + \frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial x}(0, y_j) - \frac{2}{h}u_x(0, y_j) - u_{y\bar{y}}(0, y_j), \quad i = 0, j = 1, \ldots, n-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{00} &= \varphi(0, 0) = -f(0, 0) + \frac{2}{h}(-u_x(0, 0) - u_y(0, 0) + 2\sigma(0, 0)u(0, 0)) + c(0, 0)u(0, 0)\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, 0) + \frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) - \frac{2}{h}u_x(0, 0) + \frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) - \frac{2}{h}u_y(0, 0), \quad i = 0, j = 0.\end{aligned}$$

Напоменимо да смо користили полазну једначину проблема (2.13), тачније, чињеницу да је $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -f(x, y) + c(x, y)u(x, y)$, као и граничне услове на Γ_{x0} где је $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \sigma(0, y)u(0, y)$, посебно и за $y = 0$, као и на Γ_{y0}, где је за $x = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \sigma(0, 0)u(0, 0)$.
Када напишемо изразе за коначне разлике и у одговарајућим тачкама развијемо функцију u у Taylor-ов ред, добијамо

$$\begin{aligned}\varphi(x_i, y_j) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)\\ -\frac{1}{h^2}\big[u(x_i + h, y_j) &- 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)\big] - \frac{1}{h^2}\big[u(x_i, y_j + h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - h)\big]\\ = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &- \frac{1}{h^2}\Bigg[u(x_i, y_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, y_j)\\ -u(x_i, y_j) - u(x_i, y_j) &+ u(x_i, y_j) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2, y_j)\Bigg]\\ +\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &- \frac{1}{h^2}\Bigg[u(x_i, y_j) + h\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_3)\\ -u(x_i, y_j) - u(x_i, y_j) &+ u(x_i, y_j) - h\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_4)\Bigg]\end{aligned}$$

$$= -\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_x, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \xi_y)\right),$$

где $\xi_1 \in (x_i, x_i + h)$, $\xi_2 \in (x_i - h, x_i)$, $\xi_3 \in (y_j, y_j + h)$, $\xi_4 \in (y_j - h, y_j)$,
а $\xi_x \in (x_i - h, x_i + h)$, $\xi_y \in (y_j - h, y_j + h)$, $i, j = 1, \ldots, n-1$.
Приметимо да је потребно да $u \in C^4(\bar{\Omega})$. Даље је

$$\varphi_{0j} = \varphi(0, y_j) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) + \frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial x}(0, y_j)$$

$$-\frac{2}{h}\frac{1}{h}\big[u(h, y_j) - u(0, y_j)\big] - \frac{1}{h^2}\big[u(0, y_j + h) - 2u(0, y_j) + u(0, y_j - h)\big]$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) + \frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial x}(0, y_j) - \frac{2}{h^2}\left[u(0, y_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(0, y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_{0x}, y_j) - u(0, y_j)\right]$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) - \frac{1}{h^2}\left[u(0, y_j) + h\frac{\partial u}{\partial y}(0, y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0, y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0, \xi_3)\right.$$

$$\left. -u(0, y_j) - u(0, y_j) + u(0, y_j) - h\frac{\partial u}{\partial y}(0, y_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0, y_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0, \xi_4)\right]$$

$$= -\frac{h}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_{0x}, y_j) - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0, \xi_y),$$

$$\varphi_{00} = \varphi(0, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, 0)$$

$$+\frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) - \frac{2}{h}\frac{1}{h}\big[u(h, 0) - u(0, 0)\big] + \frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) - \frac{2}{h}\frac{1}{h}\big[u(0, h) - u(0, 0)\big]$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) - \frac{2}{h^2}\left[u(0, 0) + h\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_{0x}, 0) - u(0, 0)\right]$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, 0) + \frac{2}{h}\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) - \frac{2}{h^2}\left[u(0, 0) + h\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, 0) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0, \xi_{0y}) - u(0, 0)\right]$$

$$= -\frac{h}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_{0x}, 0) + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0, \xi_{0y})\right),$$

где $\xi_{0k} \in (0, h)$, $k = x, y$.
Видимо да је

$$|\varphi_{ij}| = \mathcal{O}(h^2), \quad |\varphi_{0j}| = \mathcal{O}(h) \quad \text{и} \quad |\varphi_{00}| = \mathcal{O}(h). \tag{3.74}$$

Аналогно су и

$$|\varphi_{nj}| = \mathcal{O}(h), \ |\varphi_{i0}| = \mathcal{O}(h), \ |\varphi_{in}| = \mathcal{O}(h) \quad \text{и} \quad |\varphi_{0n}| = \mathcal{O}(h), \ |\varphi_{n0}| = \mathcal{O}(h), \ |\varphi_{nn}| = \mathcal{O}(h).$$

Како је

$$\|\varphi\|_h = (\varphi, \varphi)_h^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{12^2}h^2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}h^4\left(\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{C(\widehat{\Omega}_{2h,i})} + \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right\|_{C(\widehat{\Omega}_{2h,j})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{12^2}h(n-1)h(n-1)h^4\left(\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{C(\bar{\Omega})} + \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right\|_{C(\bar{\Omega})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{12^2}(nh)^2h^4\left(\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{C(\bar{\Omega})}+\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right\|_{C(\bar{\Omega})}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}h^2\left(\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{C(\bar{\Omega})}+\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right\|_{C(\bar{\Omega})}\right) = \mathcal{O}(h^2),$$

где су

$$\widehat{\Omega}_{2h,i} = \{(x,y):\ x_i - h < x < x_i + h,\ 0 < y < 1\},\ i = 1,\dots,n-1,$$
$$\widehat{\Omega}_{2h,j} = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y_j - h < y < y_j + h\},\ j = 1,\dots,n-1,$$

на основу (3.72), важи да је

$$|[z]|_h = |[u-v]|_h \leq \mathcal{O}(h^2).$$

□

Желимо да ослабимо услов $u \in C^4(\bar{\Omega})$. Покажимо да важи наредна теорема.

Теорема 3.15. *Нека решење u граничног проблема (2.13) припада простору $H^4(\Omega)$, а траг тог решења нека припада простору $H^4(\partial\Omega)$. Нека $c \in C(\bar{\Omega})$, $f \in C(\bar{\Omega})$ и $\sigma \in C(\partial\Omega)$. Тада решење v диференцијске схеме одређене оператором (3.48) конвергира ка u при чему је оцена брзине конвергенције*

$$|[u-v]|_h \leq \mathcal{O}(h^2).$$

Доказ. Дакле, $c = c_h$, $f = f_h$, $\sigma = \sigma_h$, а на функцију u примењујемо Steklov-љев оператор T^2 (1.1), тачније, желимо да искористимо својство (1.4), које би у дводимензионом случају било

$$T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = u_{x\bar{x}}(x,y), \qquad T_y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = u_{y\bar{y}}(x,y).$$

Сада је

$$\varphi = -f_h - u_{x\bar{x}} - u_{y\bar{y}} + c_h u = -f - u_{x\bar{x}} - u_{y\bar{y}} + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Означимо са

$$\varphi_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\varphi_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - T_y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Даље је

$$\varphi_1 = T_y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right).$$

Означимо сада са

$$\varphi_{11} = T_y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$
$$\varphi_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

Користимо резултате које смо добили у једнодимензионом случају, те за величину φ_{11} имамо да је

$$\varphi_{11}(x,y) = \frac{1}{h}\int_{y-h}^{y+h}\left(1 - \frac{|\xi - y|}{h}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - T_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x,\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{h}\int_{y-h}^{y+h}\left(1-\frac{|\xi-y|}{h}\right)\frac{(-1)}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x\int_s^x\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(z,\xi)dzdsdtd\xi.$$

Оценимо φ_{11}. Проширимо границе интеграла, а онда приметимо да је прва подинтегрална функција мања од 1, док други интеграл има вредност h, а затим применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$\begin{aligned}
|\varphi_{11}(x,y)| &\le \frac{1}{h^2}\int_{y-h}^{y+h}\left(1-\frac{|\xi-y|}{h}\right)\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_{x-h}^{x+h}\int_{x-h}^{x+h}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(z,\xi)\right|dzdsdtd\xi\\
&\le \frac{1}{h^2}\int_{y-h}^{y+h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)dt\int_{x-h}^{x+h}ds\int_{x-h}^{x+h}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(z,\xi)\right|dzd\xi\\
&= \frac{1}{h^2}h\,2h\int_{y-h}^{y+h}\int_{x-h}^{x+h}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(z,\xi)\right|dzd\xi\\
&\le 2\left(\int_{y-h}^{y+h}\int_{x-h}^{x+h}1^2dzd\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y-h}^{y+h}\int_{x-h}^{x+h}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(z,\xi)\right|^2dzd\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le 2\sqrt{4h^2}\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{L^2((x-h,x+h)\times(y-h,y+h))}.
\end{aligned}$$

Уколико означимо са $\widehat{\Omega}_{2h,ij} = \{(x,y):\ x_i-h<x<x_i+h,\ y_j-h<y<y_j+h\}$, за $i,j=1,\dots,n-1,$, важи да је

$$|\varphi_{11}(x_i,y_j)| \le 4h\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{L^2(\widehat{\Omega}_{2h,ij})},$$

а

$$(\varphi_{11,ij},\varphi_{11,ij})_h = h^2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}|\varphi_{11}(x_i,y_j)|^2 \le 16h^4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|^2_{L^2(\widehat{\Omega}_{2h,ij})} \le 16h^4\,4\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Дакле,

$$\|\varphi_{11}\|_h \le 8h^2\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_{L^2(\Omega)} \le 8h^2\|u\|_{H^4(\Omega)}.$$

За величину φ_{12} имамо да је

$$\begin{aligned}
\varphi_{12}(x,y) &= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s,y)dsdt\,\frac{1}{h}\,h\\
&-\frac{1}{h}\int_{y-h}^{y+h}\left(1-\frac{|\xi-y|}{h}\right)\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s,\xi)dsdtd\xi\\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s,y)dsdt\int_{y-h}^{y+h}\left(1-\frac{|\xi-y|}{h}\right)d\xi\\
&-\frac{1}{h^2}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x\int_{y-h}^{y+h}\left(1-\frac{|\xi-y|}{h}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s,\xi)d\xi dsdt\\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x\int_{y-h}^{y+h}\left(1-\frac{|\xi-y|}{h}\right)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s,y)-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s,\xi)\right)d\xi dsdt\\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)\int_t^x\int_{y-h}^{y+h}\left(1-\frac{|\xi-y|}{h}\right)\int_\xi^y\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}(s,\eta)d\eta d\xi dsdt.
\end{aligned}$$

Оценимо и φ_{12}. Проширимо границе интеграла, а онда приметимо да први и трећи интеграл имају вредност h, а затим применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$\begin{aligned}
|\varphi_{12}(x,y)| &\le \frac{1}{h^2}\int_{x-h}^{x+h}\left(1-\frac{|t-x|}{h}\right)dt\int_{x-h}^{x+h}\int_{y-h}^{y+h}\left(1-\frac{|\xi-y|}{h}\right)d\xi\int_{y-h}^{y+h}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}(s,\eta)\right|d\eta ds\\
&= \int_{x-h}^{x+h}\int_{y-h}^{y+h}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}(s,\eta)\right|d\eta ds\\
&\le \left(\int_{x-h}^{x+h}\int_{y-h}^{y+h}1^2 d\eta ds\right)^{\frac12}\left(\int_{x-h}^{x+h}\int_{y-h}^{y+h}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}(s,\eta)\right|^2 d\eta ds\right)^{\frac12}\\
&= 2h\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}\right\|_{L^2((x-h,x+h)\times(y-h,y+h))},
\end{aligned}$$

а

$$(\varphi_{12,ij},\varphi_{12,ij})_h = h^2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}|\varphi_{12}(x_i,y_j)|^2 \le 4h^4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}\right\|^2_{L^2(\widehat{\Omega}_{2h,ij})} \le 4h^4\,4\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Дакле,

$$\|\varphi_{12}\|_h \le 4h^2\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \le 4h^2\,\|u\|_{H^4(\Omega)}.$$

Аналогно бисмо оценили и φ_2, те како је $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, а $\|\varphi\|_h \le \|\varphi_1\|_h+\|\varphi_2\|_h$, имамо да је

$$\|\varphi\|_h \le Ch^2\|u\|_{H^4(\Omega)},$$

односно,

$$\|\varphi\|_h \le \mathcal{O}(h^2). \tag{3.75}$$

Погледајмо шта се дешава са $\varphi_{0j},\ j=0,\dots,n$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{0j} &= -f_{h,0j}-\frac{2}{h}u_{x,0j}+\frac{2}{h}\sigma_{h,0j}u_{0j}+c_{h,0j}u_{0j}-u_{y\bar{y},0j} = -f_{0j}-\frac{2}{h}u_{x,0j}+\frac{2}{h}\sigma_{0j}u_{0j}+c_{0j}u_{0j}-u_{y\bar{y},0j}\\
&= -\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+cu\right)_{0j}-\frac{2}{h}u_{x,0j}+\frac{2}{h}\sigma_{0j}u_{0j}+c_{0j}u_{0j}-u_{y\bar{y},0j}\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,y_j)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y_j)-\frac{2}{h}u_x(0,y_j)+\frac{2}{h}\sigma(0,y_j)u(0,y_j)-u_{y\bar{y}}(0,y_j).
\end{aligned}$$

Приметимо да је

$$\begin{aligned}
T^2_{+x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{2}{h}\int_x^{x+h}\left(1-\frac{t-x}{h}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,y)dt\\
&= \frac{2}{h}\left[\left(1-\frac{t-x}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\Big|_x^{x+h}+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)dt\right]\\
&= \frac{2}{h}\left[\left(1-\frac{x+h-x}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x+h,y)-\left(1-\frac{x-x}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{h}\big(u(x+h,y)-u(x,y)\big)\right] = \frac{2}{h}\left[-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+u_x(x,y)\right],
\end{aligned}$$

односно,

$$T_{+x}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) = \frac{2}{h}\left[-\frac{\partial u}{\partial x}(0, y_j) + u_x(0, y_j)\right]. \tag{3.76}$$

Како из граничних услова знамо да је $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y_j) = \sigma(0, y_j)u(0, y_j)$, имамо да је

$$\begin{aligned}
\varphi_{0j} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) - \frac{2}{h}\left[u_x(0, y_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, y_j)\right] - u_{y\bar{y}}(0, y_j) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) - T_{+x}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) - T_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j).
\end{aligned}$$

Означимо са

$$\begin{aligned}
\varphi_{0j,1} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) - T_{+x}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j), \\
\varphi_{0j,2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) - T_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j).
\end{aligned}$$

Величину $\varphi_{0j,1}$ оцењујемо користећи интегралну репрезентацију

$$\varphi_{0j,1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) - \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, y_j)dt.$$

Аналогно као у једнодимензионом случају, $\varphi_{0j,1}$ можемо да запишемо као

$$\begin{aligned}
\varphi_{0j,1} &= \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, y_j)\right)dt \\
&= -\frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)\int_0^t \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s, y_j)ds dt.
\end{aligned}$$

Оценимо $\varphi_{0j,1}$. Проширимо границе интеграла, а онда применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_{0j,1}\right| &\le \frac{2}{h}\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)\int_0^h \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s, y_j)\right| ds dt = \frac{2}{h}\frac{h}{2}\int_0^h \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s, y_j)\right| ds \\
&\le \left(\int_0^h 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^h \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(s, y_j)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\,\cdot\,, y_j)\right\|_{L^2(0,h)}.
\end{aligned}$$

Користимо (1.5), што би у нашем случају значило да је

$$\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\,\cdot\,, y_j)\right\|_{L^2(0,h)} \le C_{0j,1}\sqrt{h}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\,\cdot\,, y_j)\right\|_{H^1(0,1)} \le C_{0j,1}\, h^{\frac{1}{2}}\|u(\,\cdot\,, y_j)\|_{H^4(0,1)},$$

те је

$$\left|\varphi_{0j,1}\right| \le C_{0j,1}\, h\|u(\,\cdot\,, y_j)\|_{H^4(0,1)}.$$

Дакле,

$$\left|\varphi_{0j,1}\right| \le \mathcal{O}(h).$$

Величину $\varphi_{0j,2}$ оцењујемо користећи интегралну репрезентацију

$$\varphi_{0j,2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j) - \frac{1}{h}\int_{y_j-h}^{y_j+h}\left(1 - \frac{|t - y_j|}{h}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, y_j)dt,$$

те аналогно једнодимензионом случају, $\varphi_{0j,2}$ можемо да запишемо као

$$\varphi_{0j,2} = \frac{1}{h}\int_{y_j-h}^{y_j+h}\left(1-\frac{|t-y_j|}{h}\right)\int_t^{y_j}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0,s)dsdt.$$

Оценимо сада $\varphi_{0j,2}$. Проширимо границе интеграла, а онда применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17. Добијамо да је

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{0j,2}\right| &\le \frac{1}{h}\int_{y_j-h}^{y_j+h}\left(1-\frac{|t-y_j|}{h}\right)\int_{y_j-h}^{y_j+h}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0,s)\right|dsdt = \frac{1}{h}\,h\int_{y_j-h}^{y_j+h}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0,s)\right|ds\\ &\le \left(\int_{y_j-h}^{y_j+h}1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{y_j-h}^{y_j+h}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0,s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} = (2h)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0,\,\cdot\,)\right\|_{L^2(y_j-h,y_j+h)}.\end{aligned}$$

На основу (1.5), имамо да је

$$\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(0,\,\cdot\,)\right\|_{L^2(y_j-h,y_j+h)} \le C_{0j,2}\sqrt{2h}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right\|_{H^1(0,1)} \le C_{0j,2}(2h)^{\frac{1}{2}}\|u(0,\,\cdot\,)\|_{H^4(0,1)},$$

те је и

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{0j,2}\right| &\le C_{0j,2}\,2h\|u(0,\,\cdot\,)\|_{H^4(0,1)},\\ \left|\varphi_{0j,2}\right| &\le C\,h\|u\|_{H^5(\Omega)},\end{aligned}$$

односно,

$$\left|\varphi_{0j,2}\right| \le \mathcal{O}(h).$$

Закључујемо да је

$$\left|\varphi_{0j}\right| \le \left|\varphi_{0j,1}\right| + \left|\varphi_{0j,2}\right| \le \mathcal{O}(h). \tag{3.77}$$

Аналогно су

$$|\varphi_{nj}| \le \mathcal{O}(h), \quad |\varphi_{i0}| \le \mathcal{O}(h) \quad \text{и} \quad |\varphi_{in}| \le \mathcal{O}(h) \quad \text{за} \quad i,j = 1,\dots,n-1.$$

Проценимо φ_{00}.

$$\begin{aligned}\varphi_{00} &= -f_{h,00} + \frac{2}{h}(-u_{x,00} - u_{y,00} + 2\sigma_{h,00}u_{00}) + c_{h,00}u_{00}\\ &= -f_{00} + \frac{2}{h}(-u_{x,00} + \sigma_{00}u_{00} - u_{y,00} + \sigma_{00}u_{00}) + c_{00}u_{00}\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) - \frac{2}{h}\big(u_x(0,0) - \sigma(0,0)u(0,0)\big)\\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) - \frac{2}{h}\big(u_y(0,0) - \sigma(0,0)u(0,0)\big).\end{aligned}$$

Приметимо да је на основу (3.76)

$$T_{+x}^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) = \frac{2}{h}\left[-\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + u_x(0,0)\right],$$

а аналогно је

$$T_{+y}^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) = \frac{2}{h}\left[-\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) + u_y(0,0)\right].$$

Уз граничне услове на Γ_{x0} и Γ_{y0}, где су редом

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \sigma(0,0)u(0,0) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \sigma(0,0)u(0,0),$$

φ_{00} можемо да запишемо као

$$\varphi_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) - T_{+x}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) - T_{+y}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0).$$

Уколико означимо са

$$\varphi_{00,1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) - T_{+x}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0),$$
$$\varphi_{00,2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) - T_{+y}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0),$$

можемо да видимо да је $\varphi_{00,1} = \varphi_{0j,1}$ за $y_j = 0$, док аналогно, само за променљиву y можемо да проценимо и $\varphi_{00,2}$, те је

$$\left|\varphi_{00}\right| \leq \left|\varphi_{00,1}\right| + \left|\varphi_{00,2}\right| \leq \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h),$$

тачније,

$$\left|\varphi_{00}\right| \leq \mathcal{O}(h). \tag{3.78}$$

Аналогно су

$$|\varphi_{0n}| \leq \mathcal{O}(h), \quad |\varphi_{n0}| \leq \mathcal{O}(h) \quad \text{и} \quad |\varphi_{nn}| \leq \mathcal{O}(h).$$

Када у изразу (3.72) искористимо оцене (3.75), (3.77) и (3.78), уз аналогне оцене за преостале три ивице и три темена, можемо да закључимо да је

$$|[z]|_h = |[u-v]|_h \leq \mathcal{O}(h^2).$$

□

Додатно, у [13], користећи Bramble-Hilbert-ову лему, показали су да важи наредна теорема.

Теорема 3.16. *Нека решење u граничног проблема* (2.13) *припада простору* $H^m(\Omega)$, $1.5 \leq m \leq 4$. *Нека је* $c = 0$, $f \in L^2(\Omega)$ *и* $\sigma = const \geq 0$. *Тада решење v диференцијске схеме одређене оператором* (3.48) *конвергира ка u при чему је оцена брзине конвергенције у норми* $|[\cdot]|_{H^s(\bar{\Omega}_h)}$

$$|[u-v]|_{H^s(\bar{\Omega}_h)} \leq Ch^{m-s}\|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad \text{где је} \quad \max(0, m-2) \leq s \leq 2.$$

Специјално, за решење u из простора $H^2(\Omega)$, схема је реда конвергенције два у норми $|[\cdot]|_{L^2(\bar{\Omega}_h)}$. Дакле, важи да је

$$|[u-v]|_{L^2(\bar{\Omega}_h)} \leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)},$$

односно,

$$|[u-v]|_h \leq \mathcal{O}(h^2).$$

4 Апроксимација методом коначних елемената

Систематична конструкција методе коначних елемената састоји се из два корака. У првом кораку потребно је да заменимо полазни проблем (1.7) његовом варијационом формулацијом (2.5) у једнодимензионом, или (2.17) у дводимензионом случају.
У другом кораку потребно је да заменимо простор V, односно $H^1(\Omega)$, коначнодимензионим векторским потпростором $V_h \subset V$ који се састоји од део по део глатких полиномијалних функција. Ове функције су унапред одређеног степена који је у директној вези са доменом посматраног проблема. Затим, треба да разматрамо апроксимацију: наћи $u_h \in V_h$ тако да задовољава

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{4.1}$$

У овом раду, за даљу анализу, за V_h бирамо простор непрекидних део по део линеарних функција, па тако, нека је

$$\dim V_h = n + 1 \quad \text{и} \quad V_h = \mathfrak{Lin}\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\},$$

где су ϕ_i, $i = 0, \ldots, n$, линеарно независне базне функције са малим носачем.
Уколико решење апроксимације u_h изразимо помоћу базних функција ϕ_i, добијамо да је

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{n} U_i \phi_i(x), \tag{4.2}$$

где су U_i, $i = 0, \ldots, n$, коефицијенти које треба да одредимо. Сада проблем (4.1) може да гласи: наћи $(U_0, \ldots, U_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ тако да задовољава

$$\sum_{i=0}^{n} a(\phi_i, \phi_j) U_i = l(\phi_j), \quad j = 0, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Ово је систем линеарних једначина за $U = (U_0, \ldots, U_n)^T$, са матрицом $A = (a_{ji})$ димензије $(n+1) \times (n+1)$, где је $a_{ji} = a(\phi_i, \phi_j)$. Како функције ϕ_i имају мали носач, $a(\phi_i, \phi_j) = 0$ за већину парова i и j, тако да је матрица A ретка, тачније, велики број њених елемената је једнак нули. Ова особина матрице значајно доприноси ефикасном проналажењу решења система. Када решимо проблем (4.3) и добијемо U, веза (4.2) нам даје тражену апроксимацију решења u.

4.1 Једнодимензиони случај ($n = 1$)

Посматрамо проблем (2.5), односно, његову варијациону формулацију (2.2). Дакле, тражимо функцију $u \in H^1(\Omega)$ која задовољава

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx + \sigma_0 u(0)v(0) + \sigma_1 u(1)v(1) \\ = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ скоро свуда на Ω и $f \in L^2(\Omega)$.
Желимо да конструишемо апроксимацију овог проблема коначним елементима,

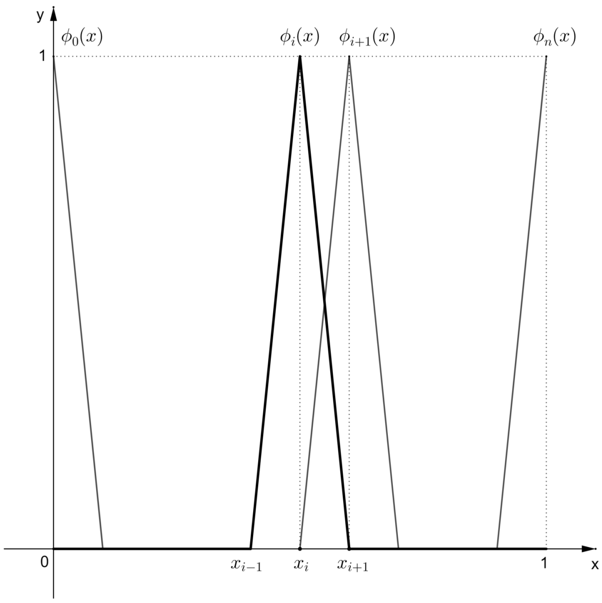
стога ћемо на интервалу $\bar{\Omega} = [0,1]$ да уведемо равномерну мрежу $\bar{\omega}_h$ са кораком $h = n^{-1}$. Односно, као и код коначних разлика имамо

$$\omega_h = \{x_i \,|\, x_i = ih,\ i = 1, ..., n-1,\ h = n^{-1}\},$$

док је

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{0, 1\}\,.$$

Чворовима x_i интервал је подељен на n подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Управо ти подинтервали су *коначни елементи*.
За простор V_h бирамо простор „кров” функција, тачније, простор непрекидних функција које су на два суседна елемента линеарне, а на осталим идентички једнаке нули, као што је приказано на наредној слици.



Слика 2: Базна функција коначног елемента $\phi_i(x)$

Дакле, за $i = 1, \ldots, n-1$,

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 1 - \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \tag{4.5}$$

док су $\quad \phi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1], \end{cases} \qquad \phi_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{h}, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \notin [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$

Приметимо да $\phi_i \in H^1(\Omega)$, $\operatorname{supp} \phi_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и функције $\phi_i,\ i = 0, \ldots, n$, су линеарно независне, те је $V_h = \mathfrak{Lin}\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ потпростор од $H^1(\Omega)$ димензије $n+1$.
Апроксимација коначним елементима за проблем (4.4) би гласила: наћи $u_h \in V_h$ тако да задовољава

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 c(x) u_h(x) v_h(x) dx + \sigma_0 u_h(0) v_h(0) + \sigma_1 u_h(1) v_h(1) \\ = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx, \qquad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Како $u_h \in V_h$, приближно решење можемо да запишемо као линеарну комбинацију базних функција коначних елемената. Наиме,

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{n} U_i \phi_i(x),$$

а како је $\phi_i(x_j) = \delta_{ij},\ i,j = 0,\dots,n$, где је δ_{ij} Kronecker-ов делта симбол за који важи да је

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

коефицијенти U_i представљају приближне вредности решења граничног проблема у чворовима мреже $\bar{\omega}_h$, односно $U_i = u_h(x_i) = u_{h,i},\ \ i = 0,\dots,n$.
Уколико је (4.6) задовољено за све функције $\phi_i,\ i = 0,\dots,n$, биће задовољено и за све њихове линеарне комбинације, па је за v_h најједноставније да изаберемо саме функције ϕ_i.
Сада проблем (4.6) можемо формулисати као: наћи $U = (U_0,\dots,U_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ тако да задовољава

$$\sum_{i=0}^{n} U_i \int_0^1 \big[\phi_i'(x)\phi_j'(x) + c(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\big]dx + \sigma_0 U_0 \phi_0(0)\phi_j(0) + \sigma_1 U_n \phi_n(1)\phi_j(1)$$
$$= \int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx, \quad \text{за} \quad j = 0,\dots,n,$$

а како је $\phi_0(0) = 1$ и $\phi_n(1) = 1$, то је

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} U_i \int_0^1 \big[\phi_i'(x)\phi_j'(x) + c(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\big]dx + \sigma_0 U_0 \phi_j(0) + \sigma_1 U_n \phi_j(1) \\ = \int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx \quad \text{за} \quad j = 0,\dots,n. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ако означимо са

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \int_0^1 \big[\phi_i'(x)\phi_j'(x) + c(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\big]dx, \quad i,j = 0,\dots,n, \\ r_{ji} &= \sigma_0\, \phi_i(0)\phi_j(0) + \sigma_1\, \phi_i(1)\phi_j(1), \quad i,j = 0,\dots,n, \\ F_j &= \int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx, \quad j = 0,\dots,n, \end{aligned}$$

проблем (4.7) можемо да запишемо као систем линеарних једначина

$$(A + R)\, U = F, \tag{4.8}$$

где су $A = (a_{ji})$ и $R = (r_{ji})$ симетричне матрице димензија $(n+1) \times (n+1)$, док су $F = (F_0,\dots,F_n)^T$ и $U = (U_0,\dots,U_n)^T$ вектори димензије $(n+1)$, при чему је U вектор који треба да одредимо.
Када је $|i - j| > 1$, $\operatorname{supp}\phi_i \cap \operatorname{supp}\phi_j$ има празну унутрашњост, што би значило да је матрица A тродијагонална, јер је $a_{ji} = 0$, осим када је $|i - j| \leq 1$.
Осим у посебним случајевима, када је могуће да их тачно израчунамо, елементе матрице A и вектора F рачунамо приближно помоћу нумеричке интеграције, пре свега квадратурних правила (видети [8]).

4.1.1 Оцена грешке

По узору на методу коначних разлика могли бисмо систем (4.8) да трансформишемо у диференцијску схему, а затим њу да оцењујемо, али нам познати теоријски резултати из ове области омогућавају да до оцена дођемо на лакши начин.

Став 4.1. *[2]* **(Galerkin-ова ортогоналност).** *Нека су u и u_h редом решења проблема* (2.5) *и* (4.1). *Тада је*

$$a(u-u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Доказ. Како једнакост (2.5) важи за свако $v \in V = H^1(\Omega)$, посебно ће важити за $v = v_h \in V_h$, јер је $V_h \subset V$. Наиме, имамо да је

$$a(u, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Када од овог израза одузмемо (4.1), добијамо тражено тврђење, односно, добијамо да је

$$a(u-u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

□

У наставку ћемо се уверити да ова особина има важну улогу у оцени грешке. Изузетно нам је битна и наредна лема.

Лема 4.2. *[14]* **(Лема Céa).** *Апроксимација коначним елементима $u_h \in V_h$ је елемент скоро најбоље апроксимације функције $u \in H^1(\Omega)$, која је слабо решење проблема* (2.1), *у односу на норму $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, односно, важи да је*

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{C_1}{C_3} \min_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

где су C_1 и C_3 одговарајући коефицијенти из теореме 1.16.

Доказ. Имајући у виду коерцивност билинеарне форме (2.11) за $u - u_h \in H^1(\Omega)$, уз Galerkin-ову ортогоналност 4.1 и ограниченост билинеарне форме (2.6), добијамо да је

$$\begin{aligned} C_3\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)} &\le a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h+v_h-u_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, v_h) - a(u-u_h, u_h) \\ &= a(u-u_h, u-v_h) \le C_1\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}\|u-v_h\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Дакле, можемо да закључимо да је

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{C_1}{C_3}\|u-v_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.9}$$

□

Даље, желимо да покажемо да важи још бољи резултат, тачније, да је у нашем случају, када је билинеарна форма (2.3) симетрична, функција u_h елемент најбоље апроксимације за функцију $u \in V_h$.
Посматрајмо форму

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx + \sigma_0 u(0)v(0) + \sigma_1 u(1)v(1).$$

У одељку 2.1.1 смо видели да је она симетрична, билинеарна и коерцивна, те када дефинишемо пресликавање $(\cdot,\cdot)_a$ са

$$(u,v)_a = a(u,v), \quad \text{за} \quad u,v \in H^1(\Omega),$$

оно задовољава све аксиоме скаларног производа. Њему можемо да придружимо енергетску норму дефинисану са

$$\|u\|_a = (u,u)_a^{\frac{1}{2}} = \big(a(u,u)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Као што смо наговестили, желимо да покажемо да важи следећа лема.

Лема 4.3. *[14] Апроксимација коначним елементима $u_h \in V_h$ је елемент најбоље апроксимације функције $u \in H^1(\Omega)$ у односу на енергетску норму $\|\cdot\|_a$, односно, важи да је*

$$\|u-u_h\|_a = \min_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_a.$$

Доказ. Galerkin-ова ортогоналност (4.1) остаје на снази, а с обзиром на управо дефинисани скаларни производ, ову особину можемо записати и као

$$(u-u_h, v_h)_a = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.10}$$

Дакле, грешка $u-u_h$ је ортогонална на простор V_h у односу на скаларни производ $(\cdot,\cdot)_a$. Користећи ову ортогоналност и Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17, добијамо да је

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_a^2 &= (u-u_h, u-u_h)_a = (u-u_h, u)_a - (u-u_h, u_h)_a \\ &= (u-u_h, u)_a - (u-u_h, v_h)_a = (u-u_h, u-v_h)_a \\ &\le \|u-u_h\|_a \|u-v_h\|_a, \quad \forall v_h \in V_h.\end{aligned}$$

Стога је

$$\|u-u_h\|_a^2 \le \|u-u_h\|_a \|u-v_h\|_a, \quad \forall v_h \in V_h,$$

па можемо да закључимо да је

$$\|u-u_h\|_a = \min_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_a.$$

□

Уколико је u решење проблема (2.5), *интерполант функције* u у V_h је дефинисан са

$$\mathcal{I}_h u(x) = \sum_{i=0}^{n} u(x_i)\phi_i(x), \tag{4.11}$$

где су ϕ_i базне функције простора коначних елемената V_h дефинисане са (4.5). Видимо да је и интерполант непрекидна, део по део линеарна функција на мрежи $\bar{\omega}_h$, чије се вредности поклапају са вредностима функције u у чворовима мреже x_i, $i=0,\dots,n$.
Када у неједнакости (4.9) за v_h изаберемо $\mathcal{I}_h u$, добијамо да је

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{C_1}{C_3}\|u-\mathcal{I}_h u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.12}$$

те је довољно да оценимо грешку интерполанта $u-\mathcal{I}_h u$ у норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, како бисмо добили оцену грешке $u-u_h$ у истој тој норми.
Најпре, показујемо да важи наредно тврђење.

Теорема 4.4. *Нека $u \in H^2(\Omega)$. Тада је*

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Доказ. Из (2.11) видимо да је

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C_3}\|u - \mathcal{I}_h u\|^2_a = \frac{1}{C_3}\left[\int_0^1 \big((u - \mathcal{I}_h u)'(x)\big)^2 dx + \int_0^1 c(x)(u - \mathcal{I}_h u)^2(x)dx\right.$$
$$\left.+\sigma_0(u - \mathcal{I}_h u)^2(0) + \sigma_1(u - \mathcal{I}_h u)^2(1)\right] \leq \frac{1}{C_3}\left[\int_0^1 \big((u - \mathcal{I}_h u)'(x)\big)^2 dx\right.$$
$$\left.+\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^1 (u - \mathcal{I}_h u)^2(x)dx + \sigma_0(u - \mathcal{I}_h u)^2(0) + \sigma_1(u - \mathcal{I}_h u)^2(1)\right].$$

Прво, како $u - \mathcal{I}_h u \in H^2(x_i, x_{i+1}) \subset H^1(x_i, x_{i+1})$, на основу става 2.1, имамо да је

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u - \mathcal{I}_h u)^2(x)dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big((u - \mathcal{I}_h u)'(x)\big)^2 dx + (u - \mathcal{I}_h u)^2(x_i) + (u - \mathcal{I}_h u)^2(x_{i+1}).$$

Друго, како су x_i и x_{i+1} чворови мреже $\bar{\omega}_h$, важи да је за свако $i = 0, \dots, n-1$, $(u - \mathcal{I}_h u)^2(x_i) = 0$ и $(u - \mathcal{I}_h u)^2(x_{i+1}) = 0$, па је након сумирања неједнакости по i

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \bar{C}\int_0^1 \big((u - \mathcal{I}_h u)'(x)\big)^2 dx, \quad \text{за} \quad \bar{C} = \frac{1}{C_3}\big(1 + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\big).$$

Дакле,

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \bar{C}\int_0^1 \big((u - \mathcal{I}_h u)'(x)\big)^2 dx = \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big((u - \mathcal{I}_h u)'(x)\big)^2 dx$$
$$= \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\left(u(x) - \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\phi_j(x)\right)'\right)^2 dx$$
$$= \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\left(u(x) - \sum_{j=0}^{n} u_j\phi_j(x)\right)'\right)^2 dx$$
$$= \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big((u(x) - u_i\phi_i(x) - u_{i+1}\phi_{i+1}(x))'\big)^2 dx$$
$$= \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(u'(x) - u_i\left(-\frac{1}{h}\right) - u_{i+1}\frac{1}{h}\right)^2 dx$$
$$= \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(u'(x) - \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i)\right)^2 dx$$
$$= \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(u'(x) - \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(t)dt\right)^2 dx$$
$$= \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(u'(x) - u'(t)\big)dt\right)^2 dx$$
$$= \bar{C}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_t^x u''(s)ds\right) dt\right)^2 dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \bar{C} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)| ds \right) dt \right)^2 dx \\
&\leq \bar{C} h \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 ds \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds = \bar{C} h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \\
&= \bar{C} h^2 \|u''\|^2_{L^2(\Omega)} = \bar{C} h^2 |u|^2_{H^2(\Omega)} \leq \bar{C} h^2 \|u\|^2_{H^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

што нам даје тражену оцену

$$
\|u - \mathcal{I}_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq C h \|u''\|_{L^2(\Omega)} \leq C h \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \text{за} \quad C = \sqrt{\bar{C}}. \qquad \square
$$

Напоменимо да из доказа можемо да издвојимо и оцену у енергетској норми $\|\cdot\|_a$. Наиме, важи да је

$$
\|u - \mathcal{I}_h u\|_a \leq C_a h \|u''\|_{L^2(\Omega)} \leq C_a h \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \text{за} \quad C_a = \sqrt{1 + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}}. \tag{4.13}
$$

Исто тако, на основу леме 4.3, видимо да грешка $u - u_h$ задовољава исту оцену, тачније

$$
\|u - u_h\|_a \leq C_a h \|u''\|_{L^2(\Omega)} \leq C_a h \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \text{за} \quad C_a = \sqrt{1 + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}}. \tag{4.14}
$$

Сада можемо да покажемо да важи наредна оцена.

Теорема 4.5. *Нека решење u граничног проблема* (2.1) *припада простору $H^2(\Omega)$ и нека $c \in L^\infty(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. Тада решење u_h апроксимације* (4.1) *конвергира ка u при чему је оцена брзине конвергенције у норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$*

$$
\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h).
$$

Доказ. Имајући у виду (4.12) и теорему 4.4, добијамо да је

$$
\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_1}{C_3} C\, h \|u''\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{C_3} C\, h \|u\|_{H^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h). \tag{4.15}
$$

Можемо да закључимо да уколико $u \in H^2(\Omega)$, односно $u'' \in L^2(\Omega)$, грешка методе коначних елемената, мерена у норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, конвергира ка 0 брзином $\mathcal{O}(h)$, када $h \to 0$. $\square$

Приметимо да наша полазна претпоставка да $f \in L^2(\Omega)$ имплицира да $u \in H^2(\Omega)$, а притом важи и **оцена елиптичке регуларности**. Односно, у претходној теореми решење u може да припада простору $H^1(\Omega)$, а важи и следећа теорема.

Теорема 4.6. *Нека $u \in H^1(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. Тада је*

$$
\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{er} h \|f\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Доказ. Посматрајмо варијациону формулацију проблема (2.1) за $v = u$

$$
a(u, u) = l(u),
$$

односно,

$$
\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 c(x) u^2(x) dx + \sigma_0 u^2(0) + \sigma_1 u^2(1) = \int_0^1 f(x) u(x) dx.
$$

Када на десну страну применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17, имамо да је

$$\int_0^1 |u'(x)|^2dx + \int_0^1 c(x)|u(x)|^2dx + \sigma_0 u^2(0) + \sigma_1 u^2(1) \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.16}$$

Како је $c \geq 0$, важи да је

$$\int_0^1 |u'(x)|^2dx + \sigma_0 u^2(0) + \sigma_1 u^2(1) \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

а свакако је и

$$\min(1,\sigma_0,\sigma_1)\left(\int_0^1 |u'(x)|^2dx + u^2(0) + u^2(1)\right) \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

На основу става 2.1, тада је и

$$\min(1,\sigma_0,\sigma_1)\left(\int_0^1 |u(x)|^2dx\right) \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

тачније,

$$\left(\int_0^1 |u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq (\min(1,\sigma_0,\sigma_1))^{-1} \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Како су и $\sigma_0, \sigma_1 > 0$, из (4.16) је сада

$$\int_0^1 |u'(x)|^2dx \leq (\min(1,\sigma_0,\sigma_1))^{-1} \int_0^1 |f(x)|^2dx.$$

Дакле,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C}\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

и

$$\|u'\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\bar{C}}\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

за $\bar{C} = (\min(1,\sigma_0,\sigma_1))^{-1}$.
Из полазне диференцијалне једначине имамо да је $u'' = cu - f$, те је

$$\|u''\|_{L^2(\Omega)} = \|cu - f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \big(1 + \bar{C}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\big)\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.17}$$

Управо смо показали да $u'' \in L^2(\Omega)$, а с обзиром да из претходне две неједнакости видимо да $u \in L^2(\Omega)$ и $u' \in L^2(\Omega)$, показали смо и да $u \in H^2(\Omega)$ (видети [14]).
Када оцену за $\|u''\|_{L^2(\Omega)}$ заменимо у (4.15), добијамо да је

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_1}{C_3}C\big(1 + \bar{C}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\big)\, h\|f\|_{L^2(\Omega)} = C_{er}h\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.18}$$

где је $C_{er} = \frac{C_1}{C_3}C\big(1+\bar{C}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\big)$, што је и требало да покажемо. □

Како је f позната функција, претходна теорема нам заправо даје горњу границу за грешку $u - u_h$ у норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ коју можемо да израчунамо, за било коју поделу $\bar{\Omega} = [0,1]$.
Додатно, погледајмо шта се дешава са грешком $u - u_h$ у норми $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Прво ћемо показати да важи наредна оцена.

Теорема 4.7. *Нека решење u граничног проблема (2.1) припада простору $H^1(\Omega)$ и нека $c \in L^\infty(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. Тада решење u_h апроксимације (4.1) конвергира ка u при чему је оцена брзине конвергенције у норми $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h).$$

Доказ. За $u - u_h \in H^1(\Omega)$ свакако важи да је

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Када овим ограничимо леву страну неједнакости (4.15), добијамо да је

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{C_3} C\, h \|u\|_{H^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h). \tag{4.19}$$

□

Уколико искористимо **Aubin-Nitsche-ов аргумент дуалности**, можемо показати да важи боља оцена брзине конвергенције.

Теорема 4.8. *Нека решење u граничног проблема (2.1) припада простору $H^1(\Omega)$ и нека $c \in L^\infty(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. Тада решење u_h апроксимације (4.1) конвергира ка u при чему је оцена брзине конвергенције у норми $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h^2).$$

Доказ. Нека су $c \in L^\infty(\Omega)$ и $g \in L^2(\Omega)$ дате функције, а $w \in H^1(\Omega)$ слабо решење граничног проблема

$$\begin{aligned} -w''(x) + c(x)w(x) &= g(x) && \text{на} \quad (0,1), \\ -w'(0) + \sigma_0 w(0) &= 0, && \sigma_0 > 0, \\ w'(1) + \sigma_1 w(1) &= 0, && \sigma_1 > 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Тада $w \in H^2(\Omega)$ и на основу (4.17) је

$$|w|_{H^2(\Omega)} = \|w''\|_{L^2(\Omega)} \leq \big(1 + \bar{C}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\big)\|g\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.21}$$

Даље, према Cauchy-Schwarz-овој неједнакости 1.17 за L^2-скаларни производ $(\cdot,\cdot)$, важи да је

$$(u - u_h, g) \leq \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall g \in L^2(\Omega).$$

Одатле је

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{(u - u_h, g)}{\|g\|_{L^2(\Omega)}}. \tag{4.22}$$

Како је w слабо решење проблема (4.20), оно задовољава и варијациони проблем

$$a(w, v) = l_g(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{4.23}$$

где су

$$a(w,v) = \int_0^1 w'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)w(x)v(x)dx + \sigma_0 w(0)v(0) + \sigma_1 w(1)v(1), \tag{4.24}$$

$$l_g(v) = \int_0^1 g(x)v(x)dx. \tag{4.25}$$

Апроксимација коначним елементима проблема (4.23) гласи: наћи $w_h \in V_h$ тако да задовољава

$$a(w_h, v_h) = l_g(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4.26}$$

Из (4.23), (4.26), као и оцене (4.14), важи да је

$$\|w - w_h\|_a \leq C_a h \|w''\|_{L^2(\Omega)},$$

те из (4.21), имамо да је

$$\|w - w_h\|_a \leq \bar{C}_a h \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{за} \quad \bar{C}_a = \left(\sqrt{1 + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)\left(1 + \bar{C}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right). \tag{4.27}$$

Сада је

$$(u - u_h, g) = (g, u - u_h) = l_g(u - u_h) = a(w, u - u_h) = a(u - u_h, w). \tag{4.28}$$

Имајући у виду да $w_h \in V_h$, из става 4.1 следи да је

$$a(u - u_h, w_h) = 0.$$

Искористимо ово и билинеарност форме $a(\cdot, \cdot)$ у (4.28) и видимо да је

$$\begin{aligned}
(u - u_h, g) &= a(u - u_h, w) - a(u - u_h, w_h) \\
&= a(u - u_h, w - w_h) \\
&= (u - u_h, w - w_h)_a.
\end{aligned}$$

Применимо Cauchy-Schwarz-ову неједнакост 1.17 на десну страну овог израза, а затим и оцене (4.14) и (4.27) и имамо да је

$$\begin{aligned}
(u - u_h, g) &\leq \|u - u_h\|_a \|w - w_h\|_a \\
&\leq C_a \bar{C}_a \, h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(1 + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\left(1 + \bar{C}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right) h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Када заменимо (4.29) у (4.22), добијамо да је

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{C_a \bar{C}_a \, h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} = C_a \bar{C}_a \, h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^2).$$

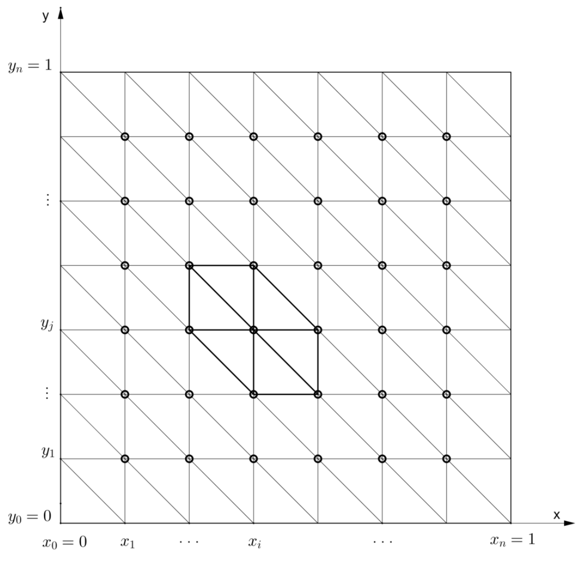
$\square$

4.2 Дводимензиони случај ($n = 2$)

Посматрамо проблем (2.17), односно, његову варијациону формулацију (2.14). Дакле, тражимо функцију $u \in H^1(\Omega)$ која задовољава

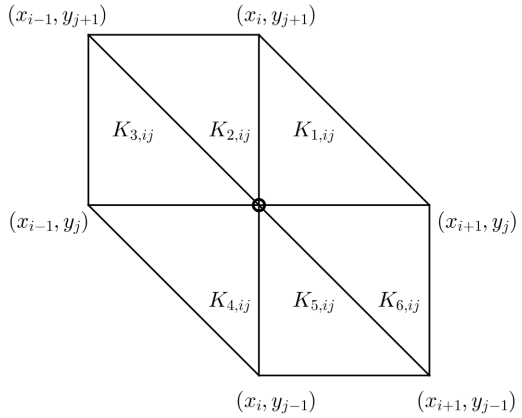
$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)dxdy + \int_0^1\int_0^1 c(x,y)u(x,y)v(x,y)dxdy$$
$$+\int_0^1 \sigma(0,y)u(0,y)v(0,y)dy + \int_0^1 \sigma(1,y)u(1,y)v(1,y)dy + \int_0^1 \sigma(x,0)u(x,0)v(x,0)dx$$
$$+\int_0^1 \sigma(x,1)u(x,1)v(x,1)dx = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)v(x,y)dxdy, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{4.30}$$

при чему $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ скоро свуда на Ω, $f \in L^2(\Omega)$, $\sigma \in L^\infty(\Gamma)$ и $\sigma > 0$ скоро свуда на Γ.
Желимо да конструишемо апроксимацију овог проблема коначним елементима, стога ћемо на интервалу $\bar{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$ да уведемо равномерну мрежу $\bar{\Omega}_h$ са кораком $h = n^{-1}$. Односно, као и код коначних разлика имамо да је $\bar{\Omega}_h = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_h$, где са $\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega$ означавамо унутрашње, а са $\bar{\Gamma}_h = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma = \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$ граничне чворове мреже.
Чворовима (x_i, y_j) област је подељена на $n \times n$ елементарних квадрата. Поделимо сваки елементарни квадрат мреже $\bar{\Omega}_h$ дијагоналом која спаја његово доње десно и горње лево теме. На овај начин, као што је приказано на наредној слици, добијамо поделу мреже $\bar{\Omega}_h$ на елементарне троуглове које називамо *коначним елементима.*



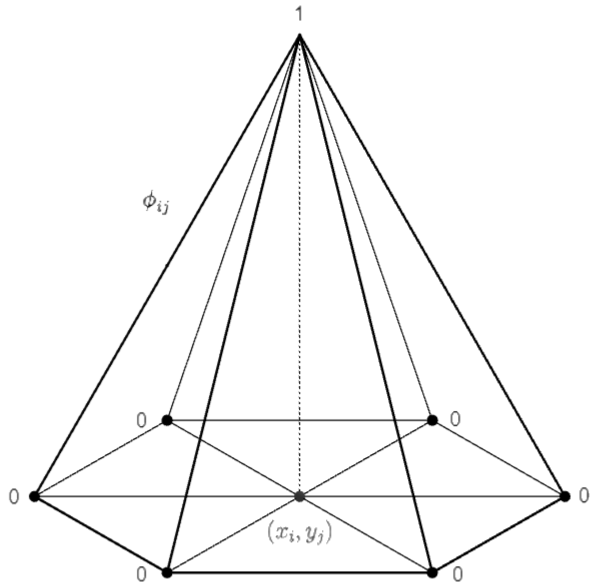
Слика 3: Триангулација области $\bar{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$

Сваки унутрашњи чвор (x_i, y_j), $i, j = 1 \ldots, n-1$, мреже Ω_h представља заједничко теме за шест елементарних троуглова које ћемо да означимо са $K_{k,ij}$, $k = 1, \ldots 6$, као што је приказано на слици испод.



Слика 4: Троуглови који окружују чвор (x_i, y_j)

За простор V_h бирамо простор функција ϕ_{ij}, које везујемо за сваки унутрашњи чвор (x_i, y_j), која је линеарна на сваком од троуглова $K_{1,ij}, \ldots, K_{6,ij}$, једнака јединици у самом чвору, једнака нули у теменима шестоугла састављеног из ових троуглова, а исто тако је једнака нули ван овог шестоугла, што можемо да видимо на наредној слици.



Слика 5: Базна функција коначног елемента ϕ_{ij}

Дакле, за $i, j = 1, \ldots, n-1$,

$$\phi_{ij}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{x-x_i}{h} - \frac{y-y_j}{h}, & (x,y) \in K_{1,ij}, \\ 1 - \frac{y-y_j}{h}, & (x,y) \in K_{2,ij}, \\ 1 - \frac{x_i-x}{h}, & (x,y) \in K_{3,ij}, \\ 1 - \frac{x_i-x}{h} - \frac{y_j-y}{h}, & (x,y) \in K_{4,ij}, \\ 1 - \frac{y_j-y}{h}, & (x,y) \in K_{5,ij}, \\ 1 - \frac{x-x_i}{h}, & (x,y) \in K_{6,ij}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{4.31}$$

док су за $j = 1, \ldots n-1$,

$$\phi_{0j}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} - \frac{y-y_j}{h}, & (x,y) \in K_{1,0j}, \\ 1 - \frac{y_j-y}{h}, & (x,y) \in K_{5,0j}, \\ 1 - \frac{x}{h}, & (x,y) \in K_{6,0j}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \phi_{nj}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{y-y_j}{h}, & (x,y) \in K_{2,nj}, \\ 1 - \frac{1-x}{h}, & (x,y) \in K_{3,nj}, \\ 1 - \frac{1-x}{h} - \frac{y_j-y}{h}, & (x,y) \in K_{4,nj}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

а за $i = 1, \ldots n-1$,

$$\phi_{i0}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{x-x_i}{h} - \frac{y}{h}, & (x,y) \in K_{1,i0}, \\ 1 - \frac{y}{h}, & (x,y) \in K_{2,i0}, \\ 1 - \frac{x_i-x}{h}, & (x,y) \in K_{3,i0}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \phi_{in}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{x_i-x}{h} - \frac{1-y}{h}, & (x,y) \in K_{4,in}, \\ 1 - \frac{1-y}{h}, & (x,y) \in K_{5,in}, \\ 1 - \frac{x-x_i}{h}, & (x,y) \in K_{6,in}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Посебно су

$$\phi_{0n}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{1-y}{h}, & (x,y) \in K_{5,0n}, \\ 1 - \frac{x}{h}, & (x,y) \in K_{6,0n}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \phi_{n0}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{y}{h}, & (x,y) \in K_{2,n0}, \\ 1 - \frac{1-x}{h}, & (x,y) \in K_{3,n0}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\phi_{00}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} - \frac{y}{h}, & (x,y) \in K_{1,00}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \phi_{nn}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{1-y}{h}, & (x,y) \in K_{5,nn}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Приметимо да $\phi_{ij} \in H^1(\Omega)$, $\operatorname{supp} \phi_{ij} = \{K_{1,ij}, \ldots, K_{6,ij}\}$ и функције ϕ_{ij}, $i, j = 0, \ldots, n$, су линеарно независне, те је $V_h = \mathfrak{Lin}\{\phi_{ij} : i, j = 0, \ldots, n\}$ потпростор од $H^1(\Omega)$ димензије $(n+1) \times (n+1)$.

Апроксимација коначним елементима за проблем (4.30) би гласила: наћи $u_h \in V_h$ тако да задовољава

$$\begin{gathered} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x,y) \frac{\partial v_h}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u_h}{\partial y}(x,y) \frac{\partial v_h}{\partial y}(x,y) \right) dxdy + \int_0^1 \int_0^1 c(x,y) u_h(x,y) v_h(x,y) dxdy \\ + \int_0^1 \sigma(0,y) u_h(0,y) v_h(0,y) dy + \int_0^1 \sigma(1,y) u_h(1,y) v_h(1,y) dy + \int_0^1 \sigma(x,0) u_h(x,0) v_h(x,0) dx \\ + \int_0^1 \sigma(x,1) u_h(x,1) v_h(x,1) dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) v_h(x,y) dxdy, \qquad \forall v_h \in V_h. \end{gathered} \tag{4.32}$$

Како $u_h \in V_h$, приближно решење можемо да запишемо као линеарну комбинацију базних функција коначних елемената. Наиме,

$$u_h(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} U_{ij} \phi_{ij}(x,y),$$

а како је $\phi_{ij}(x_k, y_l) = \delta_{ij,kl},\ i,j,k,l = 0,\dots,n$, где је $\delta_{ij,kl}$ Kronecker-ов делта симбол за који важи да је

$$\delta_{ij,kl} = \begin{cases} 1, & i = k, j = l, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

коефицијенти U_{ij} представљају приближне вредности решења граничног проблема у чворовима мреже $\bar{\Omega}_h$, односно $U_{ij} = u_h(x_i, y_j) = u_{h,ij},\ \ i,j = 0,\dots,n$.
Уколико је (4.32) задовољено за све функције $\phi_{ij},\ i,j = 0,\dots,n$, биће задовољено и за све њихове линеарне комбинације, те и сада за v_h бирамо функције ϕ_{ij}.
Сада проблем (4.32) можемо формулисати као: наћи
$U = (U_{00}, U_{01}, \dots, U_{0n}, U_{10}, \dots, U_{i0}, \dots, U_{in}, \dots, U_{n0}, \dots, U_{nn})^T \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ тако да задовољава

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} U_{ij} \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial y}(x,y)\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial y}(x,y) + c(x,y)\phi_{ij}(x,y)\phi_{kl}(x,y)\right] dxdy \\ + \sum_{j=0}^{n}\left[U_{0j}\int_0^1 \sigma(0,y)\phi_{0j}(0,y)\phi_{kl}(0,y)dy + U_{nj}\int_0^1 \sigma(1,y)\phi_{nj}(1,y)\phi_{kl}(1,y)dy\right] \\ + \sum_{i=0}^{n}\left[U_{i0}\int_0^1 \sigma(x,0)\phi_{i0}(x,0)\phi_{kl}(x,0)dx + U_{in}\int_0^1 \sigma(x,1)\phi_{in}(x,1)\phi_{kl}(x,1)dx\right] \\ = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\phi_{kl}(x,y)dxdy, \quad \text{за} \quad k,l = 0,\dots,n. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Ако означимо са

$$a_{kl,ij} = \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial y}(x,y)\frac{\partial \phi_{kl}}{\partial y}(x,y) + c(x,y)\phi_{ij}(x,y)\phi_{kl}(x,y)\right] dxdy,$$

$$\begin{aligned} r_{kl,ij} = \int_0^1 \sigma(0,y)\phi_{ij}(0,y)\phi_{kl}(0,y)dy + \int_0^1 \sigma(1,y)\phi_{ij}(1,y)\phi_{kl}(1,y)dy \\ + \int_0^1 \sigma(x,0)\phi_{ij}(x,0)\phi_{kl}(x,0)dx + \int_0^1 \sigma(x,1)\phi_{ij}(x,1)\phi_{kl}(x,1)dx, \\ \text{за} \quad i,j,k,l = 0,\dots,n, \end{aligned}$$

$$F_{kl} = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\phi_{kl}(x,y)dxdy, \quad \text{за} \quad k,l = 0,\dots,n.$$

проблем (4.33) можемо да запишемо као систем линеарних једначина

$$(A + R)\,U = F, \tag{4.34}$$

где су $A = (a_{kl,ij})$ и $R = (r_{kl,ij})$ симетричне матрице димензија $(n+1)^2 \times (n+1)^2$, док су $F = (F_{00}, F_{01}, \dots, F_{0n}, F_{10}, \dots, F_{n0}, \dots, F_{nn})^T$ и $U = (U_{00}, U_{01}, \dots, U_{0n}, U_{10}, \dots, U_{n0}, \dots, U_{nn})^T$ вектори димензије $(n+1)^2$, при чему је U вектор који треба да одредимо.
Када су $|i-k| > 1$ и $|j-l| > 1$, $\operatorname{supp}\phi_{ij} \cap \operatorname{supp}\phi_{kl}$ има празну унутрашњост, што би значило да је матрица A петодијагонална, јер је $a_{kl,ij} = 0$, осим када је $|i-k| \le 1$ или $|j-l| \le 1$.
Осим у посебним случајевима, када је могуће да их тачно израчунамо, елементе матрице A и вектора F рачунамо приближно помоћу нумеричке интеграције, пре свега квадратурних правила.

4.2.1 Оцена грешке

Приметимо да и у дводимензионом случају на снази остају и Galerkin-ова ортогоналност и Лема Céa, при чему сада посматрамо једнакост (2.17) и форму (2.15). У одељку 2.2.1 смо видели да је она симетрична, билинеарна и коерцивна, те уколико дефинишемо скаларни производ $(\cdot,\cdot)_a$ и енергетску норму $\|\cdot\|_a$ као и у једнодимензионом случају, можемо да закључимо да ће и сада да важи лема 4.3. Уколико је u решење проблема (2.17), *интерполант функције* u у V_h је дефинисан са

$$\mathcal{I}_h u(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u(x_i,y_j)\phi_{ij}(x,y), \tag{4.35}$$

где су ϕ_{ij} базне функције простора коначних елемената V_h дефинисане са (4.31). Видимо да је и интерполант непрекидна, део по део линеарна функција на мрежи $\bar{\Omega}_h$, чије се вредности поклапају са вредностима функције u у чворовима мреже $(x_i,y_j),\ i,j=0,\dots,n$.
По узору на једнодимензиони случај, како је

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \le \frac{C_1}{C_3}\|u-\mathcal{I}_h u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.36}$$

и сада је довољно да оценимо грешку интерполанта $u-\mathcal{I}_h u$ у норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, како бисмо добили оцену грешке $u-u_h$ у истој тој норми.
Најпре, показујемо да важи наредно тврђење.

Теорема 4.9. *Нека $u \in H^3(\Omega)$. Тада је*

$$\|u-\mathcal{I}_h u\|_{H^1(\Omega)} \le Ch\|u\|_{H^3(\Omega)}.$$

Доказ. Из (2.26) видимо да је

$$\begin{aligned}\|u-\mathcal{I}_h u\|^2_{H^1(\Omega)} &\le \frac{1}{C_3}\|u-\mathcal{I}_h u\|^2_a\\
= \frac{1}{C_3}\Bigg[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy &+ \int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy\\
+\int_0^1\int_0^1 c(x,y)(u-\mathcal{I}_h u)^2(x,y)dxdy &+ \int_0^1 \sigma(0,y)(u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y)dy\\
+\int_0^1 \sigma(1,y)(u-\mathcal{I}_h u)^2(1,y)dy + \int_0^1 \sigma(x,0)(u-\mathcal{I}_h u)^2(x,0)dx &+ \int_0^1 \sigma(x,1)(u-\mathcal{I}_h u)^2(x,1)dx\Bigg].\end{aligned}$$

Како $u-\mathcal{I}_h u \in H^2(\Omega_{ij}) \subset H^1(\Omega_{ij})$, где је $\Omega_{ij} = \{(x,y):\ x_i<x<x_{i+1},\ y_j<y<y_{j+1}\}$, на основу става 2.3, тачније израза 2.20 имамо да је

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(u-\mathcal{I}_h u)^2(x,y)dxdy &\le \frac{1}{2}\Bigg[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy\\
+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy &+ \int_{y_j}^{y_{j+1}}(u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y)dy\\
+\int_{y_j}^{y_{j+1}}(u-\mathcal{I}_h u)^2(1,y)dy + \int_{x_i}^{x_{i+1}}(u-\mathcal{I}_h u)^2(x,0)dx &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}}(u-\mathcal{I}_h u)^2(x,1)dx\Bigg].\end{aligned}$$

Сумирањем ове неједнакости по i и по j, а затим и одговарајућој замени у претходној неједнакости, добијамо да је

$$\|u-\mathcal{I}_h u\|^2_{H^1(\Omega)} \le \frac{1}{C_3}\Bigg[\left(1+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\left(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy\right.$$
$$\left.+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy\right)+\left(\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma)}+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\left(\int_0^1 (u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y)dy\right.$$
$$\left.+\int_0^1 (u-\mathcal{I}_h u)^2(1,y)dy+\int_0^1 (u-\mathcal{I}_h u)^2(x,0)dx+\int_0^1 (u-\mathcal{I}_h u)^2(x,1)dx\right)\Bigg]. \tag{4.37}$$

Уколико посматрамо интеграле по ивици области Ω, можемо да приметимо да се траг граничних базних функција своди на једнодимензионе „кров” функције, па с обзиром да $u-\mathcal{I}_h u \in H^2(\Omega_{ij})$, следи да $(u-\mathcal{I}_h u)(0,y)\in H^1(\Gamma_{x0j})$, где је $\Gamma_{x0j}=\{(x,y)\in\Gamma\,:\, x=0,\quad y_j<y<y_{j+1}\}$, $j=0,\dots,n-1$.
Дакле, можемо да искористимо став 2.1, што нам даје

$$\int_0^1 (u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y)dy=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y)dy \le \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial y}^2(0,y)dy$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\left((u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y_j)+(u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y_{j+1})\right).$$

Како су $(0,y_j)$ и $(0,y_{j+1})$ чворови мреже $\bar{\Omega}_h$, за свако $j=0,\dots,n$, важи да је $(u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y_j)=0$ и $(u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y_{j+1})=0$, те имамо да је

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y)dy &= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(u-\mathcal{I}_h u)^2(0,y)dy \le \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial y}^2(0,y)dy\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(u(0,y)-\sum_{k=0}^{n}u(0,y_k)\phi_{0k}(0,y)\right)\right)^2 dy\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(u(0,y)-\sum_{k=0}^{n}u_{0k}\phi_{0k}(0,y)\right)\right)^2 dy\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\big(u(0,y)-u_{0j}\phi_{0j}(0,y)-u_{0,j+1}\phi_{0,j+1}(0,y)\big)\right)^2 dy\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)-u_{0j}\left(-\frac{1}{h}\right)-u_{0,j+1}\frac{1}{h}\right)^2 dy\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)-\frac{1}{h}\left(u_{0,j+1}-u_{0j}\right)\right)^2 dy\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)-\frac{1}{h}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial u}{\partial y}(0,t)dt\right)^2 dy\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{1}{h}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial u}{\partial y}(0,t)\right)dt\right)^2 dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h^2} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\int_t^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,s) ds \right) dt \right)^2 dy \\
&\le \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h^2} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,s) \right| ds \right) dt \right)^2 dy \\
&\le h \sum_{j=0}^{n-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} 1^2 ds \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,s) \right|^2 ds = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,s) \right|^2 ds \\
&= h^2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,\,\cdot\,) \right\|^2_{L^2(\Gamma_{x0})} \le h^2 \left\| u(0,\,\cdot\,) \right\|^2_{H^2(\Gamma_{x0})}.
\end{aligned}
$$

На основу теореме о трагу 1.22, можемо да закључимо да је

$$
\int_0^1 (u - \mathcal{I}_h u)^2(0,y) dy \le h^2 \left\| u(0,\,\cdot\,) \right\|^2_{H^2(\Gamma_{x0})} \le \bar{C} h^2 \left\| u \right\|^2_{H^3(\Omega)} . \tag{4.38}
$$

Аналогно бисмо оценили и преостала три гранична интеграла, где би се код последња два у процени појавио парцијални извод по x.
Вратимо се на прва два сабирка, односно посматрајмо

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial(u - \mathcal{I}_h u)}{\partial x}(x,y) \right)^2 dxdy + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial(u - \mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x,y) \right)^2 dxdy \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2 \left(\int_{K_{ij}} \left(\frac{\partial(u - \mathcal{I}_h u)}{\partial x}(x,y) \right)^2 dxdy + \int_{K_{ij}} \left(\frac{\partial(u - \mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x,y) \right)^2 dxdy \right),
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

где је K_{ij} троугао у подели области $\bar{\Omega}$. Тачније,

$$
K_{ij} = \{(x,y) :\ x_i \le x \le x_{i+1},\ \ y_j \le y \le y_{j+1} + x_i - x\}.
$$

Да бисмо их проценили, дефинишимо канонски троугао (видети [14])

$$
\mathcal{K} = \{(\xi,\eta) :\ 0 \le \xi \le 1,\ \ 0 \le \eta \le 1 - \xi\},
$$

као и афино пресликавање из K_{ij} у $\mathcal{K}$ са

$$
x = x_i + \xi h, \quad 0 \le \xi \le 1,
$$

$$
y = y_j + \eta h, \quad 0 \le \eta \le 1.
$$

Приметимо да је $dx = hd\xi$ и $dy = hd\eta$.
Нека је $\bar{u}(\xi,\eta) = u(x,y)$. Тада је

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{h}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi},
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{h}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta},
$$

а $\mathcal{I}_h \bar{u}$ можемо да напишемо као линеарну комбинацију чворних базних функција, односно,

$$
\mathcal{I}_h \bar{u} = \bar{u}(0,0)(1 - \xi - \eta) + \bar{u}(1,0)\xi + \bar{u}(0,1)\eta.
$$

Сада је први сабирак

$$
\begin{aligned}
&\int_{K_{ij}}\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy=\int_{\mathcal{K}}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial(\bar u-\mathcal{I}_h\bar u)}{\partial \xi}(\xi,\eta)\right)^2 hd\xi hd\eta\\
&=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\big(\bar u(\xi,\eta)-\big(\bar u(0,0)(1-\xi-\eta)+\bar u(1,0)\xi+\bar u(0,1)\eta\big)\big)\right)^2 h^2 d\xi d\eta\\
&=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(\xi,\eta)-\big(\bar u(1,0)-\bar u(0,0)\big)\right)^2 d\xi d\eta=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(\xi,\eta)-\int_0^1\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(t,0)dt\right)^2 d\xi d\eta\\
&=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(\xi,\eta)-\int_0^1\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(s,\eta)ds+\int_0^1\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(s,\eta)ds-\int_0^1\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(t,0)dt\right)^2 d\xi d\eta\\
&=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\left(\int_0^1\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(\xi,\eta)-\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(s,\eta)\right)ds+\int_0^1\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(s,\eta)-\frac{\partial\bar u}{\partial\xi}(s,0)\right)ds\right)^2 d\xi d\eta\\
&=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\left(\int_0^1\int_s^{\xi}\frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi^2}(z,\eta)dzds+\int_0^1\int_0^{\eta}\frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\partial\eta}(s,\zeta)d\zeta ds\right)^2 d\xi d\eta\\
&\le 2\int_0^1\int_0^{1-\xi}\int_0^1\int_s^{\xi}\left(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi^2}(z,\eta)\right)^2 dzdsd\xi d\eta+2\int_0^1\int_0^{1-\xi}\int_0^1\int_0^{\eta}\left(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\partial\eta}(s,\zeta)\right)^2 d\zeta dsd\xi d\eta\\
&\le 2\int_0^1 d\xi\int_0^{1-\xi}\int_0^1 ds\int_0^1\left(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi^2}(z,\eta)\right)^2 dzd\eta+2\int_0^1\int_0^{1-\xi}d\eta d\xi\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\partial\eta}(s,\zeta)\right)^2 d\zeta ds\\
&\le 2\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi^2}(z,\eta)\right)^2 dzd\eta+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\partial\eta}(s,\zeta)\right)^2 dsd\zeta\\
&=2\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\right)^2\frac{1}{h}dx\frac{1}{h}dy+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2\frac{1}{h}dx\frac{1}{h}dy.
\end{aligned}
$$

Дакле,

$$
\int_{K_{ij}}\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy\le 2h^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2\right)dxdy.
$$

Аналогно је

$$
\int_{K_{ij}}\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy\le 2h^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2\right)dxdy.
$$

Када последње две неједнакости заменимо у (4.39), добијамо да је

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial x}(x,y)\right)^2 dxdy+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial(u-\mathcal{I}_h u)}{\partial y}(x,y)\right)^2 dxdy\\
&\le 4h^2\int_0^1\int_0^1\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right|^2\right)dxdy\\
&=4h^2\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\le 4h^2|u|^2_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

На крају, ако добијене резултате искористимо у (4.37), имамо да је

$$
\|u-\mathcal{I}_h u\|^2_{H^1(\Omega)}\le\frac{1}{C_3}\left[4h^2\left(1+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)|u|^2_{H^2(\Omega)}+\bar{\bar{C}}h^2\left(\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma)}+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|^2_{H^3(\Omega)}\right]
$$

$$\leq \frac{1}{C_3}h^2\left[4\left(1+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|^2_{H^3(\Omega)}+\bar{\bar{C}}\left(\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma)}+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|^2_{H^3(\Omega)}\right], \tag{4.40}$$

односно,

$$\|u-\mathcal{I}_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^3(\Omega)}, \tag{4.41}$$

где је $C=\frac{1}{\sqrt{C_3}}\left(\left(4+2\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)+\bar{\bar{C}}\left(\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma)}+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. □

Напоменимо да из доказа можемо да издвојимо и оцену у енергетској норми $\|\cdot\|_a$. Наиме, важи да је

$$\|u-\mathcal{I}_h u\|_a \leq C_a h\|u\|_{H^3(\Omega)}, \quad \text{за} \quad C_a=\left(\left(4+2\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)+\bar{\bar{C}}\left(\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma)}+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.42}$$

Исто тако, на основу леме 4.3, видимо да грешка $u-u_h$ задовољава исту оцену, тачније

$$\|u-u_h\|_a \leq C_a h\|u\|_{H^3(\Omega)}, \quad \text{за} \quad C_a=\left(\left(4+2\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)+\bar{\bar{C}}\left(\|\sigma\|_{L^\infty(\Gamma)}+\frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.43}$$

Сада можемо да покажемо да важи наредна оцена.

Теорема 4.10. *Нека решење u граничног проблема* (2.13) *припада простору* $H^3(\Omega)$ *и нека* $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ *и* $\sigma \in L^\infty(\Gamma)$. *Тада решење* u_h *апроксимације* (4.1) *конвергира ка u при чему је оцена брзине конвергенције у норми* $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h).$$

Доказ. Имајући у виду (4.36) и теорему 4.9, добијамо да је

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C_1}{C_3}C\,h\|u\|_{H^3(\Omega)}=\mathcal{O}(h). \tag{4.44}$$

Можемо да закључимо да уколико $u \in H^3(\Omega)$, грешка методе коначних елемената, мерена у норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, конвергира ка 0 брзином $\mathcal{O}(h)$, када $h \to 0$. □

Подсетимо се да смо у једнодимензионом случају показали да полазна претпоставка да $f \in L^2(\Omega)$ имплицира да $u \in H^2(\Omega)$ и да притом важи оцена елиптичке регуларности, док у дводимензионом случају није једноставно извести процену облика $|u|_{H^2(\Omega)} \leq \bar{C}_{er}\|f\|_{L^2(\Omega)}$ (видети [3] и [14]).

Даље, оцена за грешку $u-u_h$ у норми $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, као и њен доказ, идентичан је као и у једнодимензионом случају. Наиме, важи наредна оцена.

Теорема 4.11. *Нека решење u граничног проблема* (2.13) *припада простору* $H^3(\Omega)$ *и нека* $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ *и* $\sigma \in L^\infty(\Gamma)$. *Тада решење* u_h *апроксимације* (4.1) *конвергира ка u при чему је оцена брзине конвергенције у норми* $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$

$$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{O}(h).$$

5 Нумерички експерименти

У овом поглављу желимо да тест примерима и нумеричким резултатима потврдимо претходно добијене оцене брзине конвергенције у зависности од глаткости улазних података. На истим проблемима посматрамо понашање методе коначних разлика и методе коначних елемената, како бисмо могли да анализирамо њихове предности и мане.

Грешке метода рачунамо у три норме: униформној C-норми $\|\cdot\|_{C(\cdot)}$, L^2-норми $\|\cdot\|_{L^2(\cdot)}$, H^1-норми $\|\cdot\|_{H^1(\cdot)}$, те у зависности од примењене методе, оне су у дискретном или континуалном облику.

Нумерички ред конвергенције рачунамо у односу на све три норме, по формули

$$R_N = \log_2 \frac{\|e(h)\|_N}{\|e(\frac{h}{2})\|_N},$$

где је код методе коначних разлика

$$e(h) = z = u - v,$$

а код методе коначних елемената

$$e(h) = u - u_h,$$

на $\bar{\omega}_h$, у једнодимензионом, или на $\bar{\Omega}_h$, у дводимензионом случају, за тачно решење u и одговарајуће апроксимације v и u_h, док је $N = C(\cdot), L^2(\cdot)$ или $H^1(\cdot)$.

5.1 Једнодимензиони случај $(n = 1)$

Посматрамо проблем

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) \qquad && \text{на} \quad \Omega, \\ -u'(0) + \sigma_0 u(0) &= 0, && \sigma_0 > 0, \\ u'(1) + \sigma_1 u(1) &= 0, && \sigma_1 > 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где је $\Omega = (0, 1)$.
Подсетимо се да за $n = 1$, код примене методе коначних разлика, дискретне норме рачунамо по формулама

$$|[z]|_{C,h} = \max_{0\le i\le n} |z_i|,$$

$$|[z]|_{L^2(\bar{\omega}_h)} = |[z]|_h = [z,z]_h^{\frac{1}{2}},$$

$$|[z]|_{H^1(\bar{\omega}_h)} = \left(|[z]|_h^2 + |[z_x\|_h^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|[z]|_h^2 + \|z_{\bar{x}}]|_h^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где је

$$[z,z]_h = h\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + \frac{h}{2}(z_0^2 + z_n^2),$$

док код примене методе коначних елемената, континуалне норме рачунамо по формулама

$$\|u-u_h\|_{C(\bar{\Omega})}=\max_{x\in\bar{\Omega}}|u(x)-u_h(x)|,$$

$$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}=\left(\int_0^1|u(x)-u_h(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}=\left(\int_0^1|u(x)-u_h(x)|^2dx+\int_0^1|u'(x)-u_h'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Напоменимо да смо интеграле који се појављују у датим нормама у *MATLAB*-у рачунали помоћу уграђене функције *integral*.

Полазимо од најјачег услова, тачније простора бесконачно диференцијабилних функција $\mathbf{C}^{\infty}(\bar{\boldsymbol{\Omega}})$, а оне свакако припадају простору $\mathbf{C}^{\mathbf{4}}(\bar{\boldsymbol{\Omega}})$.
За тест проблем смо изабрали функције

$$c(x)=x-2,$$

$$f(x)=(x+2)\cos^2(x)+(x-1)\sin(x)-2,$$

константе

$$\sigma_0=1>0,\quad \sigma_1=\frac{\sin(2)-\cos(1)}{\cos^2(1)+\sin(1)}>0,$$

тако да је тачно решење проблема (5.1)

$$u(x)=\cos^2(x)+\sin(x).$$

Прво слабљење услова глаткости доводи нас до простора $\mathbf{H}^{\mathbf{4}}(\boldsymbol{\Omega})$ у коме посматрамо тест проблем где су

$$c(x)=x+25,$$

$$f(x)=\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-5x}\left(9x^{\frac{16}{3}}+390x^{\frac{10}{3}}-130x^{\frac{7}{3}}\right),$$

константе

$$\sigma_0=3>0,\quad \sigma_1=\frac{2}{3}>0,$$

а тачно решење проблема (5.1)

$$u(x)=\mathrm{e}^{-5x}x^{\frac{13}{3}}.$$

Затим још више слабимо услов глаткости и посматрамо простор $\mathbf{H}^{\mathbf{3}}(\boldsymbol{\Omega})$, а у њему тест проблем са функцијама

$$c(x)=x-4\pi^2,$$

$$f(x)=\left(x^{\frac{9}{2}}+14\pi x^{\frac{5}{2}}-\frac{35}{4}x^{\frac{3}{2}}\right)\cos(2\pi x)+\left(-x^{\frac{9}{2}}+14\pi x^{\frac{5}{2}}+\frac{35}{4}x^{\frac{3}{2}}\right)\sin(2\pi x),$$

константама

$$\sigma_0=7>0,\quad \sigma_1=2\pi-\frac{7}{2}>0,$$

где је тачно решење проблема (5.1)

$$u(x)=x^{\frac{7}{2}}\left(\cos(2\pi x)-\sin(2\pi x)\right).$$

Следећи је простор $\mathbf{H^2(\Omega)}$, где смо за тест проблем узели функције

$$c(x) = x + 9,$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3x}\left(4x^{\frac{7}{2}} + 60x^{\frac{3}{2}} - 15x^{\frac{1}{2}}\right),$$

константе

$$\sigma_0 = 1 > 0, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2} > 0,$$

да би тачно решење проблема (5.1) било

$$u(x) = \mathrm{e}^{-3x}x^{\frac{5}{2}}.$$

У овом и сваком наредном посматраном простору, класична метода коначних разлика нам не даје брзину конвергенције коју бисмо очекивали, стога на функције u, c и f делујемо Steklov-љевим оператором усредњења

$$T^2u(x_i) = \frac{1}{h}\int_{x_i-h}^{x_i+h}\left(1 - \frac{|s - x_i|}{h}\right)u(s)ds, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

а на границама његовим асиметричним облицима

$$T_+^2u(x_0) = \frac{2}{h}\int_0^h\left(1 - \frac{s}{h}\right)u(s)ds,$$
$$T_-^2u(x_n) = \frac{2}{h}\int_{1-h}^1\left(1 + \frac{s-1}{h}\right)u(s)ds.$$

У Табели 1 су дати експериментални резултати за различите вредности корака h, при решавању тест проблема у одговарајућим просторима, методом коначних разлика, док у Табели 2 посматрамо експерименталне резултате за методу коначних елемената. Дакле, погледајмо шта се дешава са грешком и редом конвергенције.

Табела 1: Експериментални резултати за грешку $\|e(h)\|_N$ и ред конвергенције R_N, код методе коначних разлика, у дискретним облицима норми $N = C(\cdot), L^2(\cdot)$ и $H^1(\cdot)$

u	h	$\|e(h)\|_{C,h}$	$R_{C,h}$	$\|e(h)\|_{L^2(\bar{\omega}_h)}$	$R_{L^2(\bar{\omega}_h)}$	$\|e(h)\|_{H^1(\bar{\omega}_h)}$	$R_{H^1(\bar{\omega}_h)}$
$C^\infty(\bar{\Omega})$	2^{-5}	9.6445e-4	2.00	8.8765e-4	2.00	1.0232e-3	2.00
	2^{-6}	2.4103e-2	2.00	2.2183e-4	2.00	2.5571e-4	2.00
	2^{-7}	6.0251e-5	2.00	5.5451e-5	2.00	6.3922e-5	2.00
$H^4(\Omega)$	2^{-5}	3.0065e-6	2.00	1.5094e-6	2.01	1.3976e-5	1.99
	2^{-6}	7.5122e-7	2.00	3.7491e-7	2.00	3.5077e-6	2.00
	2^{-7}	1.8722e-7	2.00	9.3505e-8	2.00	8.7822e-7	2.00
$H^3(\Omega)$	2^{-5}	1.0163e-2	2.01	4.9829e-3	2.01	3.6645e-2	2.01
	2^{-6}	2.5227e-3	2.00	1.2375e-3	2.00	9.1168e-3	2.00
	2^{-7}	6.2952e-4	2.00	3.0886e-4	2.00	2.2764e-3	2.00
$H^2(\Omega)$	2^{-5}	1.0375e-3	1.47	4.1689e-4	1.47	1.3646e-3	1.48
	2^{-6}	3.7380e-4	1.49	1.5015e-4	1.48	4.9016e-4	1.49
	2^{-7}	1.3326e-4	1.49	5.3657e-5	1.49	1.7401e-4	1.50
$H^2(\Omega)$	2^{-5}	1.1959e-5	1.99	6.1129e-6	2.00	2.8401e-5	2.00
	2^{-6}	3.0045e-6	2.00	1.5323e-6	2.00	7.1143e-6	2.00
	2^{-7}	7.5229e-7	2.00	3.8345e-7	2.00	1.7798e-6	2.00

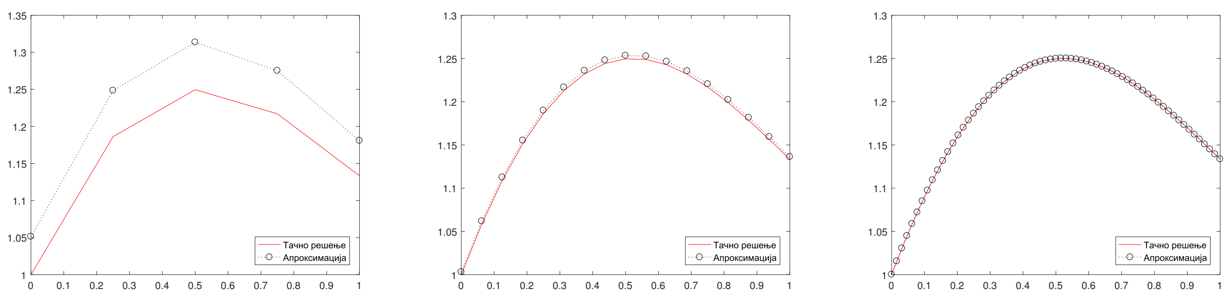
Приметимо да смо за простор $H^2(\Omega)$ два пута рачунали грешку и ред конвергенције, те да смо услед лошијих резултата при примени класичне методе коначних разлика, након примене оператора усредњења добили нумеричке резултате који потврђују теоријски изведене редове конвергенције.

Табела 2: Експериментални резултати за грешку $\|e(h)\|_N$ и ред конвергенције R_N, код методе коначних елемената, у континуалним облицима норми $N = C(\cdot), L^2(\cdot)$ и $H^1(\cdot)$

u	h	$\|e(h)\|_{C(\bar{\Omega})}$	$R_{C(\bar{\Omega})}$	$\|e(h)\|_{L^2(\Omega)}$	$R_{L^2(\Omega)}$	$\|e(h)\|_{H^1(\Omega)}$	$R_{H^1(\Omega)}$
$C^\infty(\bar{\Omega})$	2^{-5}	5.4071e-4	2.00	4.0553e-4	2.00	1.3693e-2	1.00
	2^{-6}	1.3516e-4	2.00	1.0114e-4	2.01	6.8438e-3	1.00
	2^{-7}	3.3787e-5	2.00	2.5107e-5	1.95	3.4215e-3	1.00
$H^4(\Omega)$	2^{-5}	2.5851e-6	2.00	2.1203e-6	2.10	3.4881e-4	1.00
	2^{-6}	6.4628e-7	2.00	4.9547e-7	1.86	1.7445e-7	1.00
	2^{-7}	1.6159e-7	2.00	1.3669e-7	2.17	8.7229e-5	1.00
$H^3(\Omega)$	2^{-5}	4.0509e-3	1.99	4.1214e-3	1.99	1.8886e-1	1.00
	2^{-6}	1.0196e-3	2.00	1.0393e-3	2.00	9.4231e-2	1.00
	2^{-7}	2.5553e-4	2.00	2.6043e-4	1.98	4.7089e-2	1.00
$H^2(\Omega)$	2^{-5}	1.0447e-5	2.00	1.8534e-5	2.04	2.4847e-3	1.00
	2^{-6}	2.6052e-6	2.00	4.5167e-6	2.03	1.2420e-3	1.00
	2^{-7}	6.5018e-7	2.00	1.1056e-6	2.00	6.2105e-4	1.00

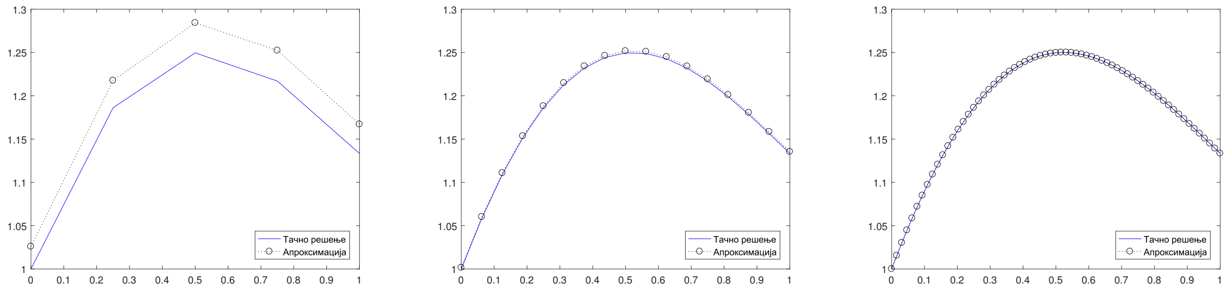
Видимо да, осим у случају H^1-норме $\|\cdot\|_{H^1(\cdot)}$, када је код методе коначних елемената ред конвергенције 1 (што смо и очекивали на основу теореме 4.5), уколико посматрамо вредност функције у тачки, резултати метода коначних разлика и коначних елемената се занемарљиво разликују.

На Сликама 6-11 приказани су графици тачног решења u и апроксимације v код методе коначних разлика, или u_h код методе коначних елемената, редом, за просторе $C^\infty(\bar{\Omega})$, $H^3(\Omega)$ и $H^2(\Omega)$, када је $h = 2^{-2}, h = 2^{-4}$ и $h = 2^{-6}$. За простор $H^2(\Omega)$ приказана је метода коначних разлика са оператором усредњења T^2.



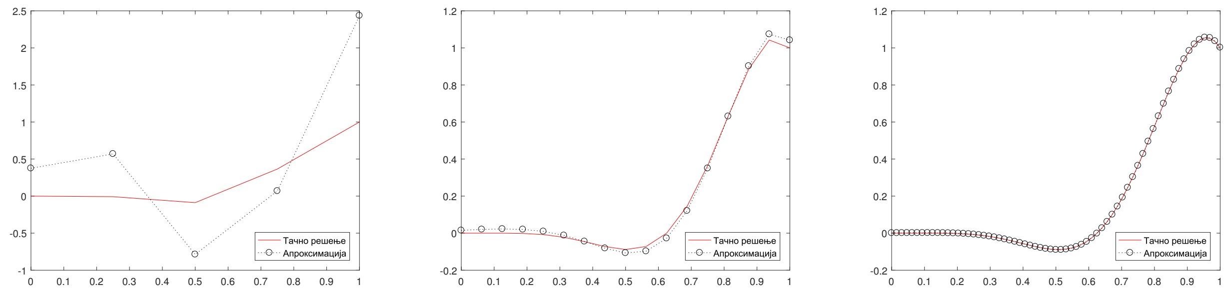
(а) $h = 2^{-2}$ (б) $h = 2^{-4}$ (ц) $h = 2^{-6}$

Слика 6: График тачног решења u и апроксимације v, метода коначних разлика, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$



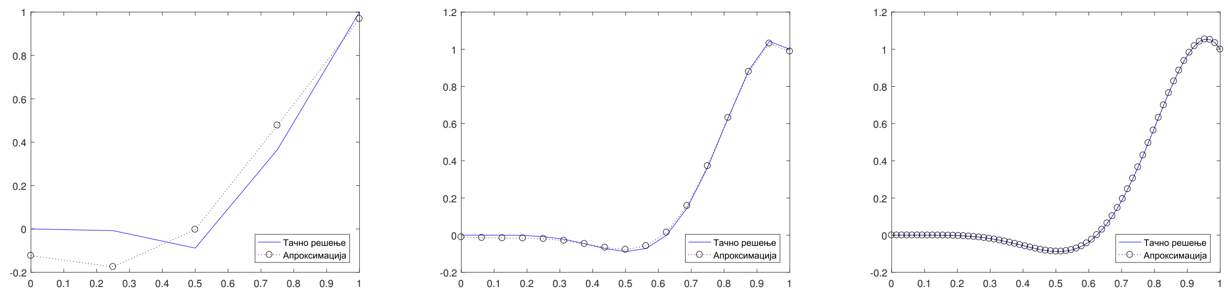
(а) $h = 2^{-2}$ (б) $h = 2^{-4}$ (ц) $h = 2^{-6}$

Слика 7: График тачног решења u и апроксимације u_h, метода коначних елемената, $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$



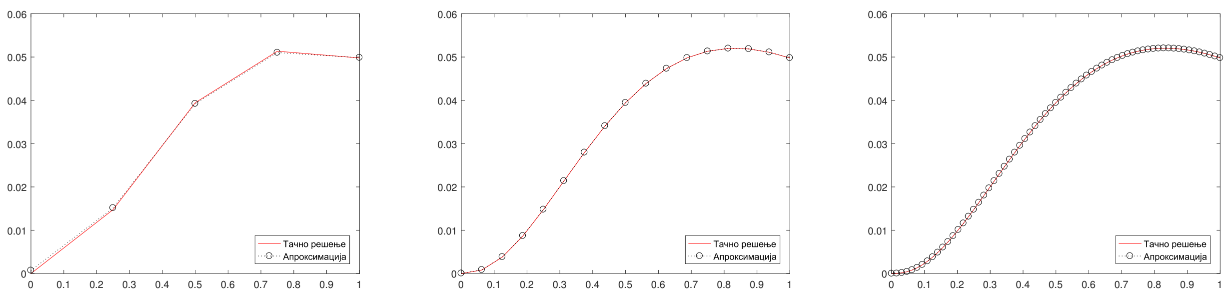
(а) $h = 2^{-2}$ (б) $h = 2^{-4}$ (ц) $h = 2^{-6}$

Слика 8: График тачног решења u и апроксимације v, метода коначних разлика, $u \in H^3(\Omega)$



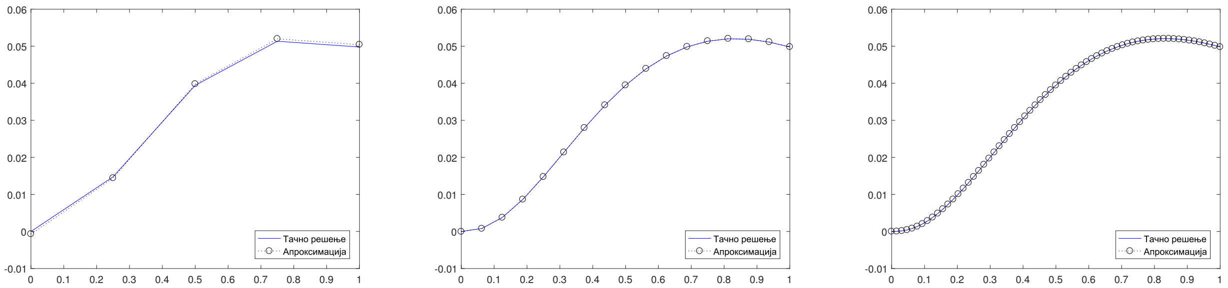
(а) $h = 2^{-2}$ (б) $h = 2^{-4}$ (ц) $h = 2^{-6}$

Слика 9: График тачног решења u и апроксимације u_h, метода коначних елемената, $u \in H^3(\Omega)$



(а) $h = 2^{-2}$ (б) $h = 2^{-4}$ (ц) $h = 2^{-6}$

Слика 10: График тачног решења u и апроксимације v, метода коначних разлика са T^2, $u \in H^2(\Omega)$



(а) $h = 2^{-2}$ (б) $h = 2^{-4}$ (ц) $h = 2^{-6}$

Слика 11: График тачног решења u и апроксимације u_h, метода коначних елемената, $u \in H^2(\Omega)$

Можемо да потврдимо да како корак h тежи нули, апроксимације v и u_h конвергирају ка тачном решењу u, при чему се приметна одступања ($h = 2^{-2}$), јављају на крајевима интервала.

5.2 Дводимензиони случај ($n = 2$)

Посматрамо проблем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + c(x,y)u(x,y) &= f(x,y), \quad \text{на} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) + \sigma(x,y)u(x,y) &= 0, \quad \text{на} \quad \Gamma, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где је $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, а $\Gamma = \partial\Omega$.
Подсетимо се да за $n = 2$, код примене методе коначних разлика, дискретне норме рачунамо по формулама

$$|[z]|_{C,h} = \max_{0 \le i,j \le n} |z_{ij}|,$$

$$|[z]|_{L^2(\bar{\Omega}_h)} = |[z]|_h = [z,z]_h^{\frac{1}{2}},$$

$$|[z]|_{H^1(\bar{\Omega}_h)} = \left(|[z]|_h^2 + |[z_x\|_{h,x}^2 + |[z_y\|_{h,y}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|[z]|_h^2 + \|z_{\bar{x}}]|_{h,x}^2 + \|z_{\bar{y}}]|_{h,y}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где је

$$[z,z]_h = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}^2 + \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(z_{0i}^2 + z_{ni}^2 + z_{i0}^2 + z_{in}^2\right) + \frac{h^2}{4}\left(z_{00}^2 + z_{0n}^2 + z_{n0}^2 + z_{nn}^2\right),$$

док код примене методе коначних елемената, у дводимензионом случају, посматрамо једино униформну норму

$$\|u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x,y \in \bar{\Omega}} |u(x,y) - u_h(x,y)|.$$

Полазимо од најјачег услова, тачније простора бесконачно диференцијабилних функција $\mathbf{C}^\infty(\bar{\boldsymbol{\Omega}})$.
За тест проблем смо изабрали функције

$$c(x,y) = 40x - 4\pi^2,$$

$$f(x,y) = 40x \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y) - 2\pi^2 \sin^2(\pi x)\cos^2(\pi y) - 2\pi^2 \cos^2(\pi x)\sin^2(\pi y),$$

$$\sigma(x,y) = x + y + 1 > 0,$$

тако да је тачно решење проблема (5.2)

$$u(x,y) = \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y).$$

Прво слабљење услова глаткости у дводимензионом случају доводи нас до простора $\mathbf{H^3(\Omega)}$ у коме посматрамо тест проблем где су

$$c(x,y) = x - 4\pi^2,$$

$$f(x,y) = \left[\left(x^{\frac{9}{2}} + 14\pi x^{\frac{5}{2}} - \frac{35}{4}x^{\frac{3}{2}}\right)\cos(2\pi x) + \left(-x^{\frac{9}{2}} + 14\pi x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{4}x^{\frac{3}{2}}\right)\sin(2\pi x)\right]\sin^2(\pi y)$$
$$+2\pi^2 x^{\frac{7}{2}}\big(\cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)\big)\cos(2\pi y),$$

$$\sigma(x,y) = 2\pi - \frac{7}{2}x > 0,$$

где је тачно решење проблема (5.2)

$$u(x,y) = x^{\frac{7}{2}}\big(\cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)\big)\sin^2(\pi y).$$

Следећи је простор $\mathbf{H^2(\Omega)}$, где смо за тест проблем узели функције

$$c(x,y) = y + 9,$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\sin^2(\pi x)\mathrm{e}^{-3y}\left(4y^{\frac{7}{2}} + 60y^{\frac{3}{2}} - 15y^{\frac{1}{2}}\right) - 2\pi^2\cos(2\pi x)\mathrm{e}^{-3y}y^{\frac{5}{2}},$$

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4} > 0,$$

да би тачно решење проблема (5.2) било

$$u(x,y) = \sin^2(\pi x)\mathrm{e}^{-3y}y^{\frac{5}{2}}.$$

У овом простору, класична метода коначних разлика нам не даје брзину конвергенције коју бисмо очекивали, те аналогно једнодимензионом случају, на функције u, c, f и σ увек можемо да делујемо Steklov-љевим операторима усредњења.

У Табели 3 су дати експериментални резултати за различите вредности корака h, при решавању тест проблема у одговарајућим просторима, методом коначних разлика, док у Табели 4 посматрамо експерименталне резултате за методу коначних елемената. Дакле, погледајмо шта се дешава са грешком и редом конвергенције.

Табела 3: Експериментални резултати за грешку $\|e(h)\|_N$ и ред конвергенције R_N, код методе коначних разлика, у дискретним облицима норми $N = C(\cdot), L^2(\cdot)$ и $H^1(\cdot)$

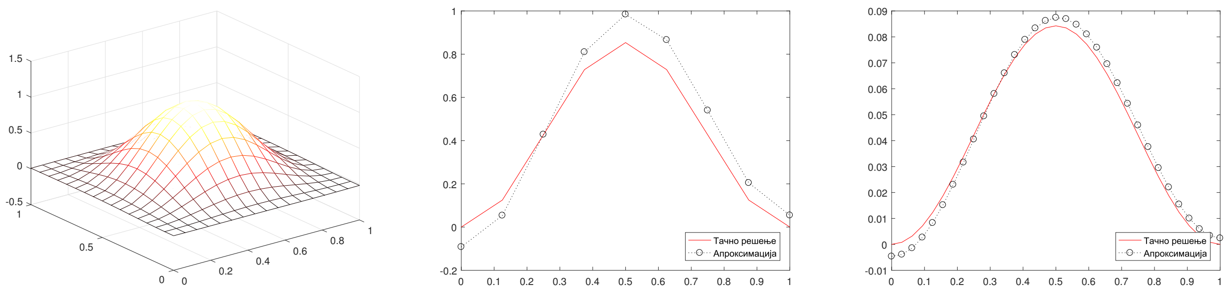
u	h	$\|e(h)\|_{C,h}$	$R_{C,h}$	$\|e(h)\|_{L^2(\bar\Omega_h)}$	$R_{L^2(\bar\Omega_h)}$	$\|e(h)\|_{H^1(\bar\Omega_h)}$	$R_{H^1(\bar\Omega_h)}$
$C^\infty(\bar\Omega)$	2^{-4}	3.2313e-2	2.03	1.7138e-2	2.04	1.7795e-2	2.08
	2^{-5}	7.9097e-3	2.01	4.1582e-3	2.01	4.1990e-3	2.02
	2^{-6}	1.9684e-3	2.00	1.0319e-3	2.00	1.0345e-3	2.01
$H^3(\Omega)$	2^{-4}	3.6682e-2	2.03	1.0857e-2	2.03	1.2004e-2	2.13
	2^{-5}	8.9929e-3	2.01	2.6641e-3	2.01	2.7378e-3	2.04
	2^{-6}	2.2373e-3	2.00	6.6298e-4	2.00	6.6762e-4	2.01
$H^2(\Omega)$	2^{-4}	2.5338e-3	1.44	7.1983e-4	1.47	7.3982e-4	1.50
	2^{-5}	9.3471e-4	1.48	2.5960e-4	1.48	2.6143e-4	1.49
	2^{-6}	3.3557e-4	1.49	9.2771e-5	1.49	9.2932e-5	1.49

Табела 4: Експериментални резултати за грешку $\|e(h)\|_{C(\bar{\Omega})}$ и ред конвергенције $R_{C(\bar{\Omega})}$, код методе коначних елемената

u	h	$\|e(h)\|_{C(\bar{\Omega})}$	$R_{C(\bar{\Omega})}$
$C^\infty(\bar{\Omega})$	2^{-4}	2.9363e-2	1.94
	2^{-5}	7.6719e-3	1.99
	2^{-6}	1.9361e-3	2.00
$H^3(\Omega)$	2^{-4}	2.9368e-2	1.87
	2^{-5}	8.0234e-3	1.96
	2^{-6}	2.0611e-3	1.99
$H^2(\Omega)$	2^{-4}	4.6678e-4	1.61
	2^{-5}	1.5265e-4	1.70
	2^{-6}	4.6988e-5	1.75

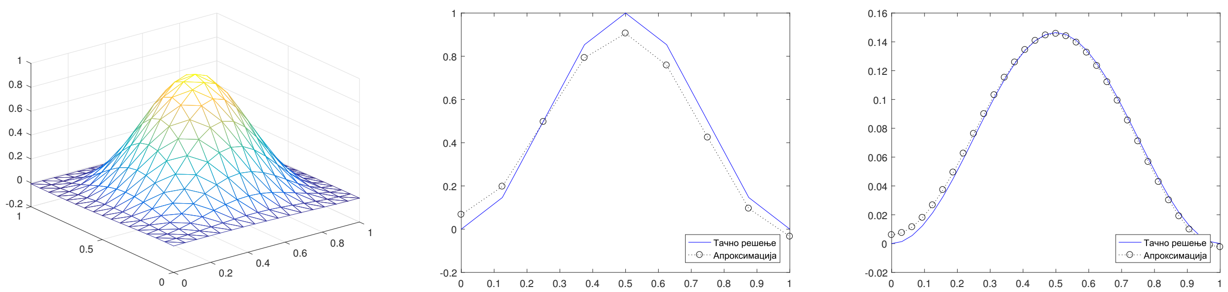
Као и у једнодимензионом случају, видимо да се у случају униформне C-норме $\|\cdot\|_{C(\cdot)}$, уколико посматрамо вредност функције у тачки, резултати метода коначних разлика и коначних елемената занемарљиво разликују.

На Сликама 12-17 најпре је приказан график апроксимације у три димензије за $h = 2^{-4}$, а затим је урађен пресек на слоју $y = 4h$, где су приказани графици тачног решења u и апроксимације v код методе коначних разлика, или u_h код методе коначних елемената, редом, за просторе $C^\infty(\bar{\Omega})$, $H^3(\Omega)$ и $H^2(\Omega)$, када је $h = 2^{-3}$ и $h = 2^{-5}$.



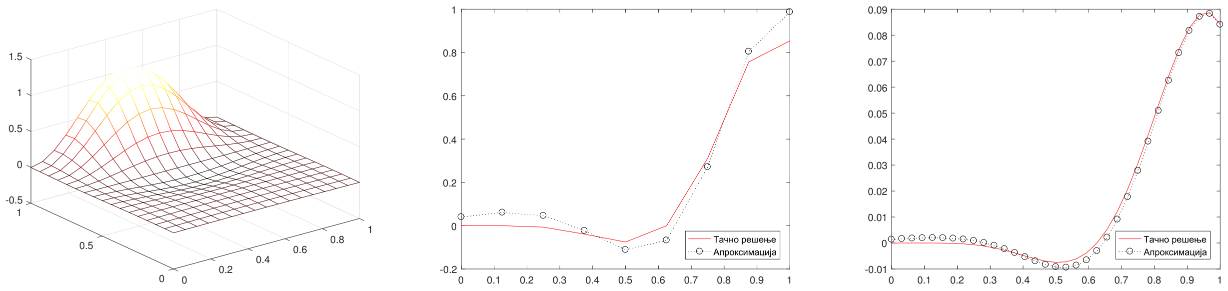
(а) апроксимација v (б) $h = 2^{-3}$ (ц) $h = 2^{-5}$

Слика 12: Метода коначних разлика, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$



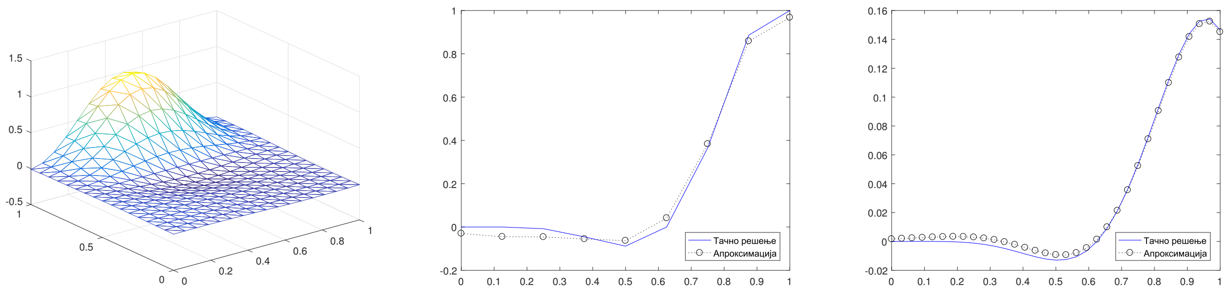
(а) апроксимација u_h (б) $h = 2^{-3}$ (ц) $h = 2^{-5}$

Слика 13: Метода коначних елемената, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$



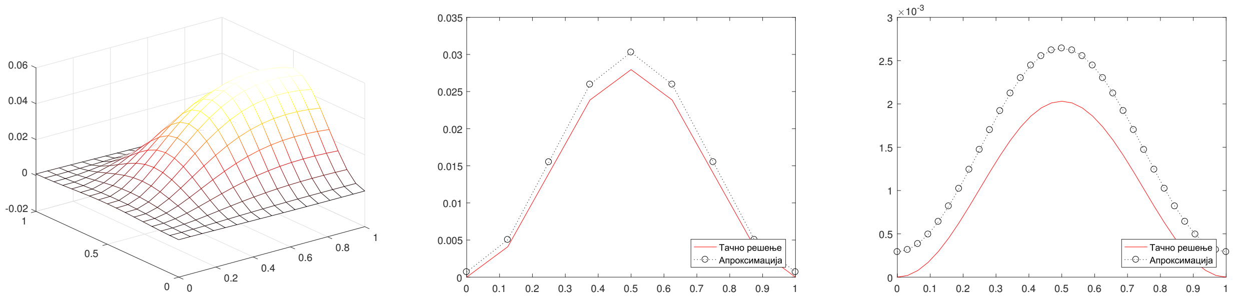
(а) апроксимација v (б) $h = 2^{-3}$ (ц) $h = 2^{-5}$

Слика 14: Метода коначних разлика, $u \in H^3(\Omega)$



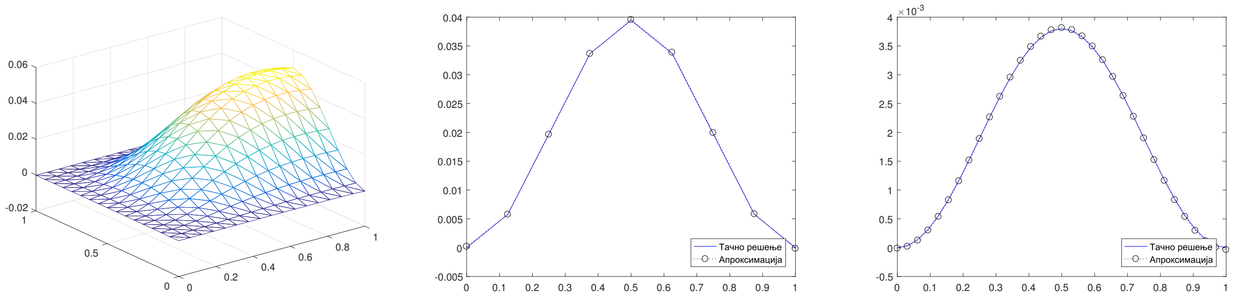
(а) апроксимација u_h (б) $h = 2^{-3}$ (ц) $h = 2^{-5}$

Слика 15: Метода коначних елемената, $u \in H^3(\Omega)$



(а) апроксимација v (б) $h = 2^{-3}$ (ц) $h = 2^{-5}$

Слика 16: Метода коначних разлика, $u \in H^2(\Omega)$



(а) апроксимација u_h (б) $h = 2^{-3}$ (ц) $h = 2^{-5}$

Слика 17: Метода коначних елемената, $u \in H^2(\Omega)$

Литература

[1] M. Arsenović, M. Dostanić, D. Jocić. *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora.* Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[2] S. C. Brenner, L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[3] A. Ern, J. L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements.* Springer, New York, 2004.

[4] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 02904-2294, USA, 2010.

[5] B. Jovanović, D. Radunović. *Numerička analiza.* Matematički fakultet, Beograd, 2003.

[6] B. S. Jovanović. *Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina.* Matematički institut, Beograd, 1989.

[7] B. S. Jovanović, E. Süli. *Analysis of Finite Difference Schemes for Linear Partial Differential Equations with Generalized Solutions.* Springer, London, 2012.

[8] M. G. Larson, F. Bengzon. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Practice.* Springer, London, 2010.

[9] H. Le Dret, B. Lucquin. *Partial Differential Equations: Modeling, Analysis and Numerical Approximation.* Springer International Publishing, Switzerland, 2016.

[10] B. Z. Popović. *Aproksimacija generalisanih rešenja trećeg graničnog problema za jednačinu Puasona.* Matematički fakultet, Beograd, 1987.

[11] M. Renardy, R. C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2004.

[12] A. A. Samarskiĭ, A. V. Gulin. *Stability of Difference Schemes.* Nauka, Moscow, 1973 (Russian).

[13] A. A. Samarskiĭ, R. D. Lazarov, V. L. Makarov. *Finite Difference Schemes for Differential Equations with Weak Solutions.* Visshaya Shkola, Moscow, 1987 (Russian).

[14] E. Süli. *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations.* Mathematical Institute, University of Oxford, 2012.