

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Проблемски задаци о полиномима на математичким такмичењима средњошколаца

МАСТЕР РАД

Професор: др Горан Ђанковић

Студент: Наташа Ђурчин 1117/2020

Београд, 2022.

ПРЕДГОВОР

У овом раду ћемо се упознати са базичним појмовима, који се тичу полинома, односно, покушаћу да једним другачијим приступом приближим свакоме ко буде држао овај текст у рукама основне операције које се користе у раду с полиномима. Такође бих желела да изразим наду да ће ово штиво бити од користи средњошколцима и талентованим ученицима, којима је првенствено намењено, али такође бити и занимљив увид о полиномима колегама, нарочито онима који тек започињу авантуру подучавања и приближавања истих алумнима.

Рад је организационо подељен на пет делова. У првом делу је кратак осврт на времена у којима су почела такмичења у нашој земљи у организацији Друштва математичара Србије, као и посебни модели приступа ученицима који су заинтересовани за учешћа на истим, тј. у кратким цртама су изложене психолошке и педагошке основе рада са талентованим ученицима за математику.

У другом делу се уводи појам полинома.

Циљ трећег дела је да се савладају операције за рад са полиномима, алати који нам користе за решавање задатака.

Четврти део се бави факторизацијом полинома, Основним ставом алгебре, као и упознавањем са Вијетовим правилима, која имају изузетну примену и заступљеност на такмичењима.

Пета целина садржи задатке са такмичења.

Част ми је да изразим дубоку захвалност мојим родитељима, који су током целог мог школовања били онај фактор који ми је давао ветар у леђа и омогућавао да сваки степенник ка врху буде стабилан и сигуран и у функцији што успешнијег завршетка започетог.

Њима придружујем свог супруга, Немању, моју сигурну луку у сваком трену, чија безрезервна подршка не изостаје ниједне секунде и који је својим присуством употпунио овај “круг живота”, у центру са нашом ћерком, Аурором, на коју само један поглед даје снагу и вољу за више и боље.

Такође, велику захвалност дугујем и колегама, пријатељима, ментору и члановима комисије, свим људима који су у мом животу, при чему је свако на свој начин дао изванредан допринос, често и не знајући, за сваки мој напор и неизоставан успех који је потом уследио.

Наташа Ћурчин

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР.....	2
1. УВОД.....	4
2. ТАКМИЧЕЊА	5
2.1. Математичка такмичења средњошколаца у Србији	5
2.2. Психолошке основе рада са даровитим ученицима.....	6
2.2.1. Опште интелектуалне карактеристике адолесцената	6
2.2.2. Интелектуалне карактеристике даровитих ученика.....	6
2.2.3. Педагошке основе рада са даровитим ученицима	7
3. ПОЛИНОМИ – дефиниција и основне особине	10
3.1.1. Квадрат бинома	13
3.1.2. Разлика квадрата.....	14
3.1.3. Збир и разлика кубова	15
3.2. Дељење полинома.....	16
3.2.1. Безуов став	18
3.2.2. Хорнерова шема.....	20
3.3. Најмањи заједнички садржалац и највећи заједнички делилац.....	21
3.4. Извод полинома	24
4. ФАКТОРИЗАЦИЈА	24
4.1. Основни став алгебре	24
4.2. Факторизација полинома.....	25
4.3. Нуле полинома.....	26
4.4. Вијетове формуле	27
5. ПОЛИНОМИ НА ТАКМИЧЕЊИМА СРЕДЊОШКОЛАЦА.....	29
5.1. Вијетове формуле и нуле полинома	29
5.2. Дељивост и факторизација	38
5.3. Полиноми с целим коефицијентима	44
5.4. Разно	47
6. ЗАКЉУЧАК	49
ЛИТЕРАТУРА	50

1. УВОД

Ми никад не постајемо математичари, чак и ако научимо све туђе доказе, ако наш ум није оспособљен да самостално решава постављене проблеме.

Рене Декарт

Опште је познато да математика игра важну улогу у томе како ће појединац решити различите проблеме пословног и друштвеног живота. Верује се да активно ангажовање ученика у математичким идејама, доводи до развоја специфичних способности и идентитета.

Овај рад је осмишљен као извесна врста помоћи у припреми ученика за математичка такмичења, као и у раду са талентовним ученицима. На готово свим такмичењима из математике, у области алгебре, јављају се задаци или проблеми из области полинома.

Циљ рада је представљање полинома на занимљив и пријемчив начин који ће додатно мотивисати и ангажовати ученике, а неке својим другачијим, иновативним приступом и по први пут заинтересовати за такмичење.

Полиноми се провлаче кроз многе гране математике. Једна од првих ствари, која је научена везано за геометрију, је површина квадрата, чија је формула полином, као и многе друге формуле за површину и запремину. Функције које чине неке реалне константе и променљива су полиноми, а њихова примена је широка, па све ново што се научи о полиномима биће од користи за тражење нових начина за решавање појединих задатака.

2. ТАКМИЧЕЊА

2.1. Математичка такмичења средњошколаца у Србији

Прва математичка такмичења у Србији у организацији Друштва математичара Србије: школско, општинско, окружно и републичко, одржавају се од 1958. године.

Прво Савезно такмичење СФРЈ одржано је 1960. године у Београду, тада само за ученике старијих разреда средњих школа. Први и други разред су укључени 1970., односно 1974. године. Екипа за међународна такмичења одређивана је на основу Савезног, а по потреби додатног изборног такмичења, тзв. Мале олимпијаде. Од 1999. године такмичења су подељена на А (ученици математичких школа/одељења) и Б категорију (остали). Од 2007. године Савезно и изборно такмичење замењени су Српском математичком олимпијадом. Додатно изборно такмичење је поново уведено 2017. године.

Математичка такмичења помажу у развијању аналитичког размишљања. На такмичењима се појављују занимљиви и нестандартни задаци који поред математичког образовања захтевају и креативност. Понекад су то прави мали научни радови. Најзад, припреме и учешће на такмичењима представљају забаву и изазов какав редовна настава није у могућности да приушти.

Како је рекао чувени математичар Џорџ Поља: „... и при најскромнијем задатку, ако он буди интересовање, ако покреће довитљивост, и ако га ученик решава сопственим снагама, доживеће напетост и тријумф проналазача. Такви доживљаји у периоду који је приступачан утисцима могу створити склоност ка умном раду и утиснути доживотни дух и карактер. ...Јер, окуси ли једном радост у математици, неће је лако заборавити...”

2.2. Психолошке основе рада са даровитим ученицима

Да би се извела методичка трансформација садржаја рада, неопходно је познавање интелектуалних карактеристика ученика посматраног узраста, коме је методичка трансформација намењена.

2.2.1. Опште интелектуалне карактеристике адолесцената

Доба адолесценције, узраст од 14 до 18 година, је доба наглог интелектуалног развоја сваког појединца и представља изузетно важан период.

На основу истраживања, добијен је резултат да се мишљење адолесцената разликује од мишљења детета. Адолесцент је у стању да гради системе и теорије, у стању је да формира своје мишљење и теорије, често невеште и неоригиналне. Ово је значајно јер се адолесцент уклапа у свет одраслих. То је за њега битно јер повећава мотивисаност за стицање нових знања и конструкцију нових теорија. Процес истраживања треба на све начине подстицати, утичући да се хаотичност која је карактеристична за овај период, усмери ка систематичности. У овом периоду изражена је тежња да се удружују са сличнима себи, па се тако стварају акционе и дискусионе групе, што омогућава тимски рад.

У доба адолесценције, па и раније, ученик је способан да размишља апстрактно, да поставља хипотезе, да логички исправно закључује. После петнаесте године, млади су интелектуално способни да са дедукције локалног карактера пређу на строго дедуктивно и аксиоматско мишљење.

2.2.2. Интелектуалне карактеристике даровитих ученика

Батлер и Врен у својој књизи „Настава математике у средњој школи” [10] наводе опште и посебне особине које поседују ученици надарени за математику.

Опште особине ученика:

- Брзо прави асоцијације
- Брзо уочава сличности и разлике
- Изврсно памћење, богат речник, широк распон пажње
- Има високу способност учења, следи своја интересовања са огромном енергијом и покретачком снагом
- Своје слободно време користи продуктивно

Специфичне особине ученика:

- Брзо уочава алгоритме и ужива у размишљању и уопштавању

- Релативно лако класификује посебне случајеве као специфичне случајеве општих ситуација
- Може да прати дуге низове резоновања, често предвиђајући и дајући свој допринос
- Често поставља суштинска питања
- Може да чита математичку литературу која је испред градива за свој разред
- Често је нестрпљив са увежбавањем и детаљима за које сматра да су неважни
- Способност проналажења оригиналних поступака за решавање проблема
- Досетљивост да се један задатак реши на два или више различитих начина
- Упорност, стрпљивост и истрајност у раду кад решење није на виду
- Способност анализе и синтезе, специјализације и генерализације, класификације и апстракције

Да би дете било успешно, поред интелектуалних способности, подједнако је важно поседовање вољно-радних особина. Приликом рада са оваквом децом обавезно је у једнакој мери развијати интелектуалне, вољне и радне способности како би се дошло до максималних резултата.

2.2.3. Педагошке основе рада са даровитим ученицима

Разматрајући истраживања више аутора Шефкет Арслановић у својој књизи „Аспекти математике за надарене ученике средњошколског узраста” [11] наводи 16 незаобилазних компоненти које чине основу доброг рада са даровитим ученицима:

- Квалитетан математички садржај

Прецизно планирање тема које су логички и математички повезане ради учинка тј. очекиваних резултата.

- Исправан педагошки приступ

Облици и методе, који се користе у раду са даровитим ученицима, морају бити пажљиво одабрани и што разноврснији, у складу са математичким садржајем на који се примењује. Не сме се занемарити и чињеница да ученици утичу на професора што чини да рад са даровитим ученицима буде један интерактиван процес.

- Способност професора

Један од основних услова рада са младим математичарима је професор који је добар методичар, познавалац психолошких и педагошких основа, како наставе, тако и рада са талентованим ученицима.

- Усмереност на решавање проблема и примене

Како се живот своди на решавање проблема, од изузетног значаја је да се ученици оспособе за то, као и да стекну значајно методолошко искуство за решавање нових проблема и примену наученог.

- Усмереност ка вишим нивоима мишљења

Значајна карика у раду са талентованим ученицима ради постављања вишег циља, ради нових резултата и открића.

- Добра комуникацијска вештина

Ова вештина је један од битних услова за учење математике, да би ученици били способни да читају и пишу, говоре и мисле као математичари, могуће је једино добром комуникацијом између професора и ученика, али и релацијом ученик ученик. Савремена средства комуникације, у првом реду интернет, добра су помоћ, при оспособљавању даровитих ученика за математичко комуницирање, али и комуницирање уопште.

- Вештина учења и радне навике

Подразумева се да даровити ученици поседују виши ниво способности учења и то је потребно развијати, подстицати и усавршавати. Посебну пажњу потребно је посветити доброј организацији учења и слободног времена у циљу развијања одговорности према сопственим обавезама.

- Индивидуалне разлике

Талентованим младим математичарима треба пружи подршку и помоћ да пронађу себе како у математичком свету, тако и у стварном свету, јер треба водити рачуна о социјалном статусу таквих ученика, да би израсли у успешне људе.

- Подстицање креативности

Инспирисати да налазе нове идеје, решења, да исказују своје утиске, да истражују, експериментишу.

- Помоћна средства

Помоћна средства за учење (математичка литература, часописи, компјутери, радио, телевизија, штампа и остала средства комуникације) су неизоставна код добро планираног часа са талентованим ученицима.

- Интеграција садржаја

Повезаност математичких садржаја, али и интеграција са другим наставним предметима.

- Планирање и развој

Програм рада мора бити развојни и усмерен ка откривању нових потенцијала талентованих ученика. План треба да садржи дефинисање наставних садржаја.

- Процена реализације плана

Процена реализације плана у смислу динамике и квалитета је један континуирани задатак у раду са младим математичарима јер тај процес обезбеђује ефикасан напредак, те је потребно да методе праћења буду разноврсне.

- Брига за ученике

Ова компонента је неизоставна, професори који раде са даровитом децом морају имати разумевања за њихове индивидуалне потребе и проблеме. Један од циљева је заштита од друштвене изолације и искључиво усмеравање само на математику.

- Мобилност и флексибилност програма

Потпуна слобода учешћа сваког даровитог ученика у оквиру планираних активности и процедура и изван њих.

- Статус програма за рад са даровитом децом

Ученицима и наставницима је веома важно да овај програм буде успешан, зато им треба пружити шансу да то и остваре учешћем на такмичењима, смотрема, конкурсима и слично.

3. ПОЛИНОМИ – дефиниција и основне особине

Са појмом полинома ученици се први пут сусрећу у седмом разреду основне школе. Тада учимо ђаке да су полиноми математички објекти састављени од бројева, променљивих и знакова за операције: сабирања, одузимања и множења. Тада се уводе и појмови моном (полином у чијем запису нема операције сабирања и одузимања), бином (састоји се од два монома), трином (састоји се од три монома). Реч бином (binomium, binomius, binome, binomial) је настала прва од латинске речи bis што значи двапут и речи помен што значи име. Префикс моно - води порекло од грчке речи monos - један, једини. У сложеној речи означава један, једно, јединствено, само. Префикс поли - води порекло од грчке речи за много, а као део сложенице представља мноштво, вишеструкост онога што је исказано другим делом речи.

Франсоа Вијет (1540 - 1603), француски математичар који је ударио темеље развоју алгебре, први је употребио израз полином (polynomial). Он је популаризовао увођење слова у до тада реторичку алгебру (где су проблеми и решења дати речима) и синкопатску алгебру (где се поједини појмови и операције означавају скраћеницама).



Франсоа Вијет 1540 – 1603

Дефиниција. Прстен је структура у којој су дефинисане две асоцијативне операције $+$ и $\cdot$, повезане дистрибутивним законом операције $\cdot$ према операцији $+$. За сабирање важи још и комутативни закон.

Постоји неутрални елемент $0 \in \mathbf{K}$ такав да је $x + 0 = x$, за све $x \in \mathbf{K}$. За свако $x \in \mathbf{K}$ постоји супротни елемент $x' \in \mathbf{K}$ такав да важи $x + x' = 0$.

Дефиниција. Поље је прстен у којем постоје неутрални и инверзни елемент и за операцију $\cdot$, као и комутативност множења.

Свако поље је уједно и прстен, обрнуто не важи.

У наставку **K** означава прстен целих, рационалних, реалних или комплексних бројева (уколико није посебно наглашено подразумева се да је **K** поље комплексних бројева).

Дефиниција. Полином по променљивој x над прстеном K је израз

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

при чему је $n \in \mathbb{N}_0$ и $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$. Ако је $a_n \neq 0$ број n се назива степеном полинома $P(x)$, сабирак $a_n x^n$ се назива најстаријим чланом тог полинома, сабирак a_0 слободним, а коефицијент a_n најстаријим коефицијентом. Ознака за степен: $n = \deg\{P(x)\}$.

Пример. $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 7$

➤ овај полином је степена 3, најстарији коефицијент је 4, слободни члан је 7.

Пример. За све полиноме важи

➤ слободни члан се добија кад уместо x ставимо 0

$$P(0) = 4 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 7 = 7 \rightarrow P(0) = 7$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \rightarrow P(0) = a_0$$

➤ ако уместо x ставимо 1 имамо $P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

Полином $P(x)$ је нормиран (моничан) ако и само ако $a_n = 1$.

Полином $0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \dots + 0 \cdot x + 0$ је нула-полином, а степен тог полинома је $-\infty$.

Теорема. Ако је $K[x]$ скуп свих полинома по x над прстеном K , онда је $(K[x], +, \cdot)$ исто прстен. Тај прстен је

- комутативан
- са јединицом
- без делитеља нуле

ако и K поседује одговарајуће својство.

Доказ.

Сабирање и множење су унутрашње, комутативне и асоцијативне операције. Обе операције су асоцијативне, а важи и дистрибутивност. Неутрални елемент за сабирање је нула-полином, а супротни полином за $P(x)$ је $-P(x) := -a_0 - a_1 x - \dots - a_n x^n$.

Из дефиниције множења следи да се комутативност преноси са K на $K[x]$, као и да је јединица из K (ако постоји) неутрални елемент за множење у $K[x]$.

Ако у K нема делитеља нуле и $P(x), Q(x)$ су не-нула полиноми, онда ни полином $P(x)Q(x)$ није нула полином. Заиста, ако су $P(x)$ и $Q(x)$ редом степена m и n , онда су одговарајући коефицијенти a_m и b_n различити од нуле. Зато производ a_mb_n није нула, па је степен полинома $P(x)Q(x)$ број mn . ■

Нека је $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ и $Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$. Полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ су „формално” једнаки ако су истог степена и ако је $a_n = b_n$ за све n , $0 \leq n \leq \deg P(x)$. С друге стране, полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ су „функционално” једнаки ако за све вредности променљиве важи $P(x) = Q(x)$. Испоставља се да су ове две дефиниције једнакости (у случају прстена $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) еквивалентне, тј. два полинома су „формално” једнаки ако и само ако су „функционално” једнаки.

Сада ћемо приказати још један начин, еквивалентан претходном, да уведемо полиноме. Испоставља се да је овај начин погоднији за дефинисање операција са полиномима.

Будући да полином одређују његови коефицијенти из прстена, он се дефинише као низ на следећи начин.

Нека је K комутативан прстен са јединицом. Низ $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ над K који има само коначно много не-нула елемената је полином над K . Ако је $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ полином и a_n је елемент са највећим индексом који је различит од нуле, онда се тај индекс n назива степен полинома. Два полинома су једнака ако им се редом поклапају чланови. Скуп полинома над K означава се са $K[x]$.

Овакви низови се сабирају и множе по координатама

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, 0, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, 0, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (c_0, c_1, c_2, \dots) \text{ где је } c_k := a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0.$$

За $a \in K$, полином $(a, 0, 0, \dots)$ означава се са a . За полином $(0, a, 0, 0, \dots)$ уводи се ознака ax , полином $(0, 0, a, 0, 0, \dots)$ представља ax^2 , итд.

Будући да K има јединицу, у складу са претходним је $x := (0, 1, 0, 0, \dots)$. Одатле се добија

$x \cdot x = x^2 = (0, 0, 1, 0, \dots)$, $x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ итд. Величина x и њени степени су дакле само полиноми. Тако је

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

и добијен је полином према почетној дефиницији.

Овакав начин дефинисања полинома познат је као алгебарска дефиниција полинома.

Полином

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

из $K[x]$, где је K прстен, одређује полиномну функцију, пресликавање $f_p: K \rightarrow K$, дефинисано на следећи начин:

за свако $b \in \mathbb{R}$,

$$f_p(b) = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0.$$

Уобичајено је да се функција f_p означава исто као и полином, дакле са $P(x)$. Упркос истој ознаци, полиномна функција и полином су две различите ствари, јер је овај по дефиницији само формални израз.

3.1.1. Квадрат бинома

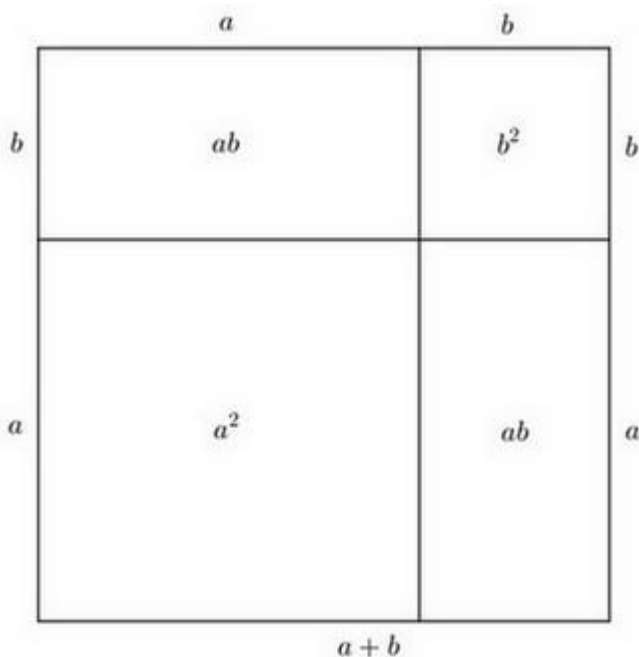
Када је реч о полиномима, у настави математике постоје две формуле које се често користе формула за квадрат бинома и формула за разлику квадрата. Примењујући знање о полиномима се изводе.

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^2 = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат бинома једнак је збиру квадрата првог члана, двоструком производу првог и другог члана и квадрата другог члана.



Када се посматра површина великог квадрата, његове странице су $a + b$. Површина квадрата се може посматрати и као збир две површине квадрата један странице a други странице b и два правоугаоника чије су странице a и b . Одатле следи формула за квадрат бинома $a + b$. Аналогно се геометријски доказује формула за квадрат бинома $a - b$.

Пример. Одредити квадрат бинома B ако је $B = 2m + 5n$.

На основу формуле $(2m + 5n)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 5n + (5n)^2$, тј.

$$(2m + 5n)^2 = 4m^2 + 20mn + 25n^2.$$

Формула за квадрат разлике бинома $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$

$$(a - b)^2 = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Пример. Одредити квадрат бинома R ако је $R = 7n - 3$.

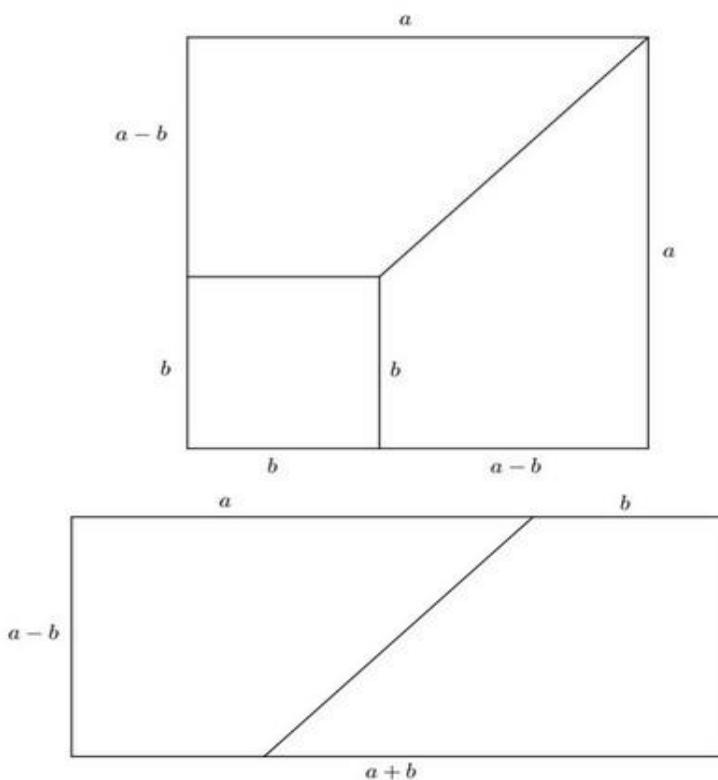
На основу формуле $(7n - 3)^2 = (7n)^2 - 2 \cdot 7n \cdot 3 + 3^2$, тј.

$$(7n - 3)^2 = 49n^2 - 42n + 9.$$

3.1.2. Разлика квадрата

Разлика квадрата два монома једнака је производу њиховог збира и разлике и гласи

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$



Посматрајмо геометријску интерпретацију овог појма. Нека је a^2 површина квадрата странице a и b^2 површина квадрата странице b , и нека је $a > b$. Наш задатак је да одредимо разлику површина ова два квадрата. Са слике се види да је она једнака двострукој површини правоуглог трапеза чије су основице a и b , а висина $a - b$. Уклапањем та два трапеза, добијамо правоугаоник чије су странице $a + b$ и $a - b$.

Поред геометријске интерпретације, формула за израз разлике квадрата може се доказати и математички, множењем два бинома:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Пример. Формула за разлику квадрата може олакшати рачунање неких бројевних израза

$$15 \cdot 25 = (20 - 5)(20 + 5) = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375.$$

3.1.3. Збир и разлика кубова

Поред једнакости за разлику квадрата, позната је и формула за збир и разлику кубова

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Доказ се лако изводи применом знања о множењу полинома.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3,$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3,$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

3.2. Делјење полинома

Делјење полинома се врши по алгоритму, који је сличан поступку делјења целих бројева, тако да подсетимо се делјења целих бројева.

$$\begin{array}{r} 2597:19 = 136 \\ \underline{-19} \\ 69 \\ \underline{-57} \\ 127 \\ \underline{-114} \\ 13 - \text{остатак} \end{array}$$

Можемо записати

$$\frac{\text{делјеник}}{\text{делилац}} = \text{количник} + \frac{\text{остатак}}{\text{делилац}}$$

$$\frac{2597}{19} = 136 + \frac{13}{19}$$

Или $2597 = 19 \cdot 136 + 13$.

Теорема. (Делјење са остатком) *За свака два полинома $P(x)$ и $G(x)$, над прстеном K , таква да $G(x)$ није нула-полином, постоје јединствени полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ такви да је*

$$P(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

при чему $R(x)$ је нула-полином или је $\deg R(x) < \deg G(x)$ (степен полинома $R(x)$ мањи од степена полинома $G(x)$). Полином $Q(x)$ се назива количником, а $R(x)$ остатком при делјењу полинома $P(x)$ полиномом $G(x)$.

Доказ.

Ако је $P(x)$ нула-полином, или ако је степен полинома $P(x)$ мањи од степена полинома $G(x)$, онда је тврђење о постојању полинома $Q(x)$ и $R(x)$ тачно, јер је

$$P(x) = G(x) \cdot 0 + P(x),$$

па улогу полинома $Q(x)$ и $R(x)$ играју редом 0 и $P(x)$.

Нека је m степен полинома $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ већи или једнак од степена n полинома $G(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$. Тада је степен полинома

$$R_1(x) = P(x) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}G(x)$$

мањи од m јер се од $P(x)$ одузима водећи члан a_mx^m . Зато је испуњена једнакост

$$P(x) = G(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x),$$

где је $Q_1(x) = \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$, а степен полинома $R_1(x)$ мањи од степена полинома $P(x)$. Ако је мањи и од n доказ је готов, а ако није, на аналоган начин се показује да важи

$$R_1(x) = G(x)Q_2(x) + R_2(x),$$

где је степен полинома $R_2(x)$ мањи од степена полинома $R_1(x)$. Настављањем овог дељења добија се низ полинома $R_1(x), R_2(x), \dots$ са опадајућим степенима, све до неког $R_k(x)$ чији је степен мањи од степена n полинома $G(x)$. При томе је

$$R_{k-1}(x) = G(x)Q_k(x) + R_k(x).$$

Из претходних једнакости следи

$$P(x) = G(x) \cdot (Q_1(x) + \dots + Q_k(x)) + R_k(x)$$

па ако је $Q(x) = Q_1(x) + \dots + Q_k(x)$ и $R(x) = R_k(x)$ доказ првог дела је готов. Заиста, степен полинома $R(x) = R_k(x)$ је мањи од степена полинома $G(x)$ или је $R(x) = 0$.

Потребно је још доказати јединственост полинома $Q(x)$ и $R(x)$. Претпоставимо да је

$$P(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{и} \quad P(x) = G(x) \cdot Q'(x) + R'(x),$$

при чему је степен полинома $R(x)$ и $R'(x)$ мањи од степена полинома $G(x)$.

Следи

$$G(x) \cdot Q(x) + R(x) = G(x) \cdot Q'(x) + R'(x),$$

па је

$$G(x)(Q(x) - Q'(x)) = R'(x) - R(x).$$

Степен полинома $R'(x) - R(x)$ је или 0 или је мањи од степена полинома $G(x)$. Следи да полином $Q(x) - Q'(x)$ мора бити нула-полином, јер би у противном степен полинома на десној страни једнакости био већи или једнак од степена полинома $G(x)$.

Дакле, $Q(x) = Q'(x)$, а одатле $R(x) = R'(x)$. ■

Дефиниција. Нека $P(x), G(x) \in K[X]$. Полином $P(x)$ је дељив полиномом $G(x)$ ако је остатак при дељењу $P(x)$ са $G(x)$ једнак нула полиному и означава се $G(x)|P(x)$.

Пример. Алгоритам дељења се може представити овако

$$(2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} -(2x^2 - 4x) \\ \hline -x + 6 \\ -(-x + 2) \\ \hline 4 \end{array}$$

$$(2x^2 - 5x + 6) = (x - 2) \cdot \overbrace{(2x - 1)}^{\text{количник}} + \underbrace{4}_{\text{остатак}}$$

Може се запазити да се у сваком кораку горњег дељења добијају полиноми $Q_1(x)$ и $R_1(x)$, $Q_2(x)$ и $R_2(x)$, баш као у доказу претходне теореме.

3.2.1. Безуов став

Безуов став. Остатак при дељењу полинома $P(x)$ биномом $(x - a)$ износи $P(a)$, или написано формулом $R(x) = P(a)$, где $R(x)$ представља остатак при дељењу полинома $P(x)$ биномом $(x - a)$ и пошто знамо да остатак мора бити полином чији је степен бар за један мањи од степена полинома делиоца, а степен полинома делиоца у овом случају је 1, следи да степен полинома $R(x)$ може бити једино 0 тј. $R(x)$ је константа.

Доказ.

У општем случају, ситуацију када би се приликом дељења полиномом $P(x)$ неким полиномом $Q(x)$ добио количник $G(x)$ и остатак $R(x)$ можемо записати на следећи начин $P(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

У посебном случају, када полиномом $P(x)$ делимо биномом $(x - a)$ тј. када је $G(x) = x - a$ то записујемо

$$P(x) = G(x) \cdot (x - a) + R(x)$$

Уврштавањем вредности a уместо x у горњу једнакост добијамо

$$P(a) = G(a) \cdot (a - a) + R(a)$$

$$P(a) = R(a)$$

А пошто је $R(x)$ константа, самим тим ће $R(a) = R(x)$ па следи $P(a) = R(x)$

и тиме је Безуова теорема доказана.



Етјен Безу 1730-1783

Последица. Полином $P(x)$ над прстеном K је дељив биномом $(x - a)$ ако и само ако $P(a) = 0$, а број a се зове нула или корен датог полинома.

Доказ.

($\Rightarrow$) Претпоставимо да је полином $P(x)$ дељив биномом $(x - a)$ тада важи

$P(x) = (x - a) Q(x)$, за неки полином $Q(x) \in K[X]$, онда $P(a) = (a - a) Q(a)$ тј. $P(a) = 0$.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је полином $P(a) = 0$. Према претходној теореме $R(x) = 0$ тј. $P(x)$ је дељив линеарним биномом $(x - a)$.

Пример. Одредити реалан параметар k тако да полином $P(x) = x^5 + kx^3 + 3x^2 - 2x + 8$ буде дељив са $x + 2$.

Одредимо нулу бинома $x + 2$, а то је $x = -2$ тј. $a = -2$. Да би дати полином био дељив биномом, нула бинома је уједно и нула датог полинома $P(x)$, тј.

$$(-2)^5 + k(-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) + 8 = 0, \text{ односно } -8k - 8 = 0. \text{ Следи да је } k = -1.$$

Општије од Безуовог става је да полином $P(x)$ дељив је полиномом $Q(x)$ ако и само ако је свака нула α полинома $Q(x)$ уједно и нула полинома $P(x)$ и при том ред вишеструкости броја α као нуле полинома $Q(x)$ није већи од његовог реда вишеструкости као нуле полинома $P(x)$.

Пример. Не изводећи дељење доказати да је полином $P(x) = (x^3 - 8)^5 + (x^2 - 4)^3$ дељив са $x - 2$.

Решење.

Користи се последица Безуовог става, тј. да би полином

$P(x) = (x^3 - 8)^5 + (x^2 - 4)^3$ био дељив са $x - 2$, потребно је да $P(2) = 0$ јер се из $x - 2$ закључује да је $a = 2$.

Пошто је $P(2) = 0$.

Следи да је полином $P(x)$ дељив полиномом $x - 2$.

Пример. За које n је полином $x^n + x - 1$ дељив са $x^2 - x + 1$.

Решење. Нуле полинома $x^2 - x + 1$ су $\varepsilon_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Ако $x^2 - x + 1$ дели $x^n + x - 1$, онда су $\varepsilon_{1,2}$ нуле полинома $x^n + x - 1$

тј. $\varepsilon_j^n = 1 - \varepsilon_j = \varepsilon_j^{-1}$ за $j \in \{1, 2\}$ одакле је $\varepsilon_j^{n+1} = 1$. Како је $\varepsilon_j^k = 1$ акко $6|k$ одговор је $n \equiv -1 \pmod{6}$.

Теорема. Полином је инвертибилан ако и само ако је константан и различит од нула-полинома.

Доказ. Само за константан полинома $r \neq 0$ постоји други, исто константан r' , тако да је $rr' = 1$. Будући да је $r \in K$, r' је очито његов инверзни елемент у том пољу.

3.2.2. Хорнерова шема

Енглески математичар Хорнер направио је шему за дељење полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ са $x - c$.

Идеју је добио у теорему о једнакости два полинома: Полиноми су идентични ако и само ако су истог степена и ако су им коефицијенти уз исте степене x једнаки.

Када делимо полином полиномом $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ који је n -тог степена са $x - c$ добијамо полином $Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ степена $n - 1$ и остатак r .

Написано формулом $P(x) = (x - c)Q(x) + r$. Одатле добијамо $P(x) + cQ(x) = xQ(x) + r$.

Хорнер је добио одређене формуле сређивањем и изједначавањем коефицијената у последњој једнакости.

Редом добијамо $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = a_k + c \cdot b_k$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$, $r = a_0 + c \cdot b_0$.

Шематски приказ

	a_n	a_{n-1}		a_k		a_0
c	b_{n-1}	$b_{n-2} = a_{n-1} + c \cdot b_{n-1}$		$b_{k-1} = a_k + c \cdot b_k$		$r = a_0 + c \cdot b_0$

Пример. Поделити полином $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ са $x - 1$.

Решење. Из полинома $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ следи да је

$$a_4 = 2$$

$$a_3 = -1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_1 = -4$$

$$a_0 = 1$$

А из $x - 1$ да је $c = 1$.

Хорнерова шема

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
c	b_3	b_2	b_1	b_0	r

	2	-1	3	-4	1
1	2	$-1 + 1 \cdot 2 = 1$	4	0	1

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x - 1)(2x^3 + x^2 + 4x) + 1.$$

3.3. Најмањи заједнички садржалац и највећи заједнички делилац

Између полинома над прстеном $\mathbb{Z}$ и скупа целих бројева има доста сличности, а ово су једне од њих.

Дефиниција. Најмањи заједнички садржалац у ознаци НЗС два или више полинома над прстеном K је полином најнижег степена који је дељив са сваким од њих и чији је водећи коефицијент 1.

Пример. Одредити најмањи заједнички садржалац полинома $A(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ и $B(x) = x^2 + 4x + 3$.

Раставимо на чиниоце полином $A(x) = x^2(x + 1) - 4(x + 1)$,

$$A(x) = (x + 1)(x^2 - 4),$$

$$A(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Раставимо на чиниоце полином $B(x) = x^2 + 4x + 3$, тј. решећемо квадратну једначину

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2},$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}, \text{ дакле, решења су } x_1 = -1 \text{ и } x_2 = -3.$$

После факторисања полином изгледа овако $B(x) = (x + 1)(x + 3)$.

Најмањи заједнички садржалац садржи све факторе који су било у $A(x)$ било у $B(x)$. Нпр. за полиноме $A(x), B(x)$ које смо управо видели важи
 $\text{НЗС}(A(x), B(x)) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$.

Дефиниција. Ако су $P(x)$ и $Q(x)$ два полинома над прстеном K и ако је $R(x) | P(x)$ и $R(x) | Q(x)$ кажемо да је $R(x)$ заједнички делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$.

Дефиниција. Полином $d(x)$ је највећи заједнички делилац, у ознаци НЗД, полинома $P(x)$ и $Q(x)$ над прстеном K ако је $d(x) | P(x)$ и $d(x) | Q(x)$ и ако је сваки заједнички делилац $R(x)$ полинома $P(x)$ и $Q(x)$ такође делилац и полинома $d(x)$.

Ако је $d(x)$ највећи заједнички делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$ тада је $ad(x), a \neq 0$ такође НЗД тих полинома.

Теорема. За било која два не-нула полинома над прстеном $\mathbb{Z}$ НЗД постоји, он је јединствен са тачношћу до једне мултипликативне константе.

Доказ.

Нека је $n = \deg P(x), m = \deg Q(x)$ и $n \geq m$. Применимо **Еуклидов алгоритам**. При дељењу полинома $P(x)$ са $Q(x)$ добијамо количник $Q_1(x)$ са остатком $R_1(x)$. Уколико је $R_1(x) = 0$, тада је $Q(x)$ највећи заједнички делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$. Уколико је $R_1(x) \neq 0$, настављамо поступак и делимо $Q(x)$ са $R_1(x)$. Нека је количник $Q_2(x)$ са остатком $R_2(x)$. Продужимо ли овај поступак, добијамо остатак $R_k(x)$ који се садржи у претходном остатку $R_{k-1}(x)$.

$$P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x)$$

$$Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

$$R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x)$$

·
·
·

$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x)$$

$$R_{k-1}(x) = R_k(x)Q_{k+1}(x)$$

Доказаћемо да је $R_k(x)$ највећи заједнички делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$. На основу последња два идентитета добијамо

$$R_{k-2}(x) = R_k(x)Q_{k+1}(x)Q_k(x) + R_k(x)$$

$$R_{k-2}(x) = R_k(x)(Q_{k+1}(x)Q_k(x) + 1)$$

Односно следи да $R_k(x)|R_{k-2}(x)$.

Из идентитета

$$R_{k-3}(x) = R_{k-2}(x)Q_{k-1}(x) + R_{k-1}(x)$$

добивамо $R_k(x)|R_{k-1}(x)$ и $R_k(x)|R_{k-2}(x)$

Даље се добија

$$R_k(x)|R_{k-4}(x), R_k(x)|R_{k-5}(x), \dots, R_k(x)|Q(x), R_k(x)|P(x).$$

Овим је доказано да је $R_k(x)$ заједнички делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$.

Докажимо сада да је и највећи заједнички делилац. Нека је $r(x)$ делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$, тада $r(x)|R_1(x), r(x)|R_2(x), \dots, r(x)|R_k(x)$. Сваки делилац $r(x)$ полинома $P(x)$ и $Q(x)$ је истовремено и делилац полинома $R_k(x)$ па на основу претходне дефиниције $R_k(x)$ највећи заједнички делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$.

Докажимо најзад да је највећи заједнички делилац полинома $P(x)$ и $Q(x)$ јединствен са тачношћу до једне мултипликативне константе. Нека су $d_1(x)$ и $d_2(x)$ два највећа заједничка делиоца полинома $P(x)$ и $Q(x)$. Тада мора бити $d_1(x)|d_2(x)$ и $d_2(x)|d_1(x)$, а то је могуће ако и само ако је $d_1(x) = C d_2(x)$, $C = \text{const}$.

Тиме је доказ завршен. ■

Дефиниција. Два полинома над прстеном K су узајамно проста ако им је 1 највећи заједнички делилац.

Пример. Одредимо највећи заједнички делилац полинома.

а) Нека је $A(x) = x^2 - 7x + 10$ и $B(x) = x^2 + 7x + 10$. Факторизацијом датих полинома добијамо $A(x) = (x - 2)(x - 5)$ и $B(x) = (x + 2)(x + 5)$.

Ова два полинома су узајамно прости гј. $\text{НЗД}(A(x), B(x)) = 1$.

б) Нека је $A(x) = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ и $B(x) = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Факторизацијом датих полинома добијамо $A(x) = (x - 3)(x + 3)$ и $B(x) = (x - 1)(x + 3)$. Зато је $\text{НЗД}(A(x), B(x)) = (x + 3)$.

3.4. Извод полинома

Дефиниција. Извод у тачки a реалне или комплексне функције f дефинисане на скупу $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ је $f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$, ако постоји, и за такву функцију f кажемо да је диференцијабилна у тачки a .

Теорема. За произвољне диференцијабилне функције f и g и $c \in \mathbb{R}$ важи

$$(cf)' = cf',$$

$$(c + f)' = c' + f',$$

$$(fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, g \neq 0.$$

Теорема. Ако је полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ било који полином из $K[x]$, тада је полином $P'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1$ извод полинома $P(x)$.

Дефиниција. Пресликавање $P \rightarrow P'$ назива се диференцирањем у прстену $K[x]$.

4. ФАКТОРИЗАЦИЈА

4.1. Основни став алгебре

Дефиниција. Нула (корен) полинома $P(x)$ над прстеном K је било које решење једначине $P(x) = 0$ у прстену K .

Посебно место у историји математике заузима питање да ли сваки не-нула полином са коефицијентима из прстена K има бар једну нулу у том прстену. Довољно је уочити полином $x^2 + 1$ са целобројним коефицијентима који нема корене у $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. У пољу комплексних бројева ситуација је другачија.

Теорема. (Основни став алгебре) Сваки полином степена $n \geq 1$ са коефицијентима из поља комплексних бројева има бар једну нулу у пољу $\mathbb{C}$.

Постоје разни докази овог става од којих је само Гаус дао четири (1799, 1815, 1816, 1849. године).

Идеја доказа. Нека је

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0, n > 1$$

произвољан полином над пољем $\mathbb{C}$. Како је $P(0) = a_0$, претпостављамо да је $a_0 \neq 0$, у противном је 0 тражена нула полинома и доказ је готов.

Променљива z и вредност $P(z)$ одговарају тачкама у комплексној равни. Тврђење је доказано ако се покаже да је за неко z вредност (тачка) $P(z)$ баш координатни почетак, нула.

Када тачка z описује криву, тада се и $P(z)$ креће по некој кривој. Конкретно, ако z описује кружницу полупречника r око координатног почетка, онда тачка $P(z)$ описује у тој комплексној равни неку затворену криву. Како је r модуо комплексног броја z , када r тежи нули, онда и z тежи нули, а кружница се сажима у тачку 0. Тада се и крива коју описује $P(z)$ своди исто на тачку, тј. на a_0 (због $P(0) = a_0$).

Напишимо сада полином у облику $P(z) = a_n z^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n})$.

Нека z и даље описује кружницу полупречника r . Ако се r повећава, вредност у загради приближава се јединици, јер се вредност збира $\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}$ смањује, за довољно велико r може се сматрати да вредност полинома приближно одговара вредности члана $a_n z^n$. И док z описује кружницу око нуле, $a_n z^n$ по Моавровој формули описује n пута кружницу, такође око координатног почетка.

Имамо дакле кружницу полупречника r коју око нуле описује тачка z и затворену криву (приближно кружницу), коју око нуле n пута описује $P(z)$. Ако се сада r смањује и тежи ка 0, онда се ова затворена крива сажима у тачку a_0 , описујући, са променом полупречника r , затворене криве у комплексној равни. Због непрекидности¹ функције $P(z)$, једна од тих затворених кривих пролази кроз координатни почетак. Вредност z_0 , за коју је $P(z_0) = 0$, јесте тражена нула полинома $P(z)$.

4.2. Факторизација полинома

Дефиниција. Ако је x_1 нула полинома

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

разлика $x - x_1$ зове се корени чинилац или линеарни фактор полинома $P(x)$.

Теорема. Сваки полином $P(x)$ дељив је сваким од својих корених чинилаца.

Доказ. Следи из Безуовог става.

¹ То је један од изостављених делова у потпуном доказу тврђења.

Теорема (Теорема о факторизацији полинома). *Сваки полином*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

степен $n \geq 1$ са коефицијентима из поља комплексних бројева има тачно n корена у том пољу, при чему је сваки корен рачунат онолико колика је његова вишеструкост, тј. тај полином се може представити у облику $P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, где су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ његове нуле.

Може се десити да су неки од бројева $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ једнаки па се наведена факторизација може написати у облику $P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m}$, где су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ међусобно различите нуле полинома, $k_1, k_2, \dots, k_m$ су природни бројеви и $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, а овакво представљање се назива **канонска факторизација полинома $P(x)$** .

Доказ.

Према основној теореме алгебре, $P(x)$ има бар једну нулу. Означимо је са α_1 , а $P(x)$ означимо са $P_n(x)$. Према Безуовој теореме $P_n(x)$ је дељив са $(x - \alpha_1)$, па одатле следи $P_n(x) = (x - \alpha_1)Q(x)$, сад $Q(x)$ означимо са $P_{n-1}(x)$ који према основној теореме алгебре, има бар једну нулу α_2 , настављамо аналогно.

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)P_{n-1},$$

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)P_{n-2},$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n), \text{ што је и требало доказати. } \blacksquare$$

4.3. Нуле полинома

Теорема. *Број α је нула полинома $P(x)$ над прстеном K ако и само $x - \alpha \mid P(x)$ односно $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ за неки полином $Q(x)$.*

Доказ. Према дефиницији број α је нула полинома $P(x)$ ако $P(\alpha) = 0$.

$$P(x) - P(\alpha) = (x - \alpha)Q(x),$$

где је $Q(x)$ полином чији је степен за 1 мањи од степена полинома $P(x)$. Ако је α нула полинома $P(x)$, тада је $P(\alpha) = 0$ и $P(x) - P(\alpha) = (x - \alpha)Q(x)$ постаје $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ одакле следи $x - \alpha \mid P(x)$.

Ако је $x - \alpha \mid P(x)$, то значи да је остатак дељења $P(x)$ са $x - \alpha$ једнак 0, што повлачи $P(\alpha) = 0$. Дакле, α је нула полинома $P(x)$. $\blacksquare$

Теорема. Ако су α и β две различите нуле полинома $P(x)$ над прстеном K тада је $P(x)$ дељив са $(x - \alpha)(x - \beta)$.

Доказ. На основу претходне теореме следи да је $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$. Ако $x = \beta$ заменимо добијамо $P(\beta) = (\beta - \alpha)Q(\beta)$ тј. $(\beta - \alpha)Q(\beta) = 0$, пошто је $\beta \neq \alpha$, онда је $Q(\beta) = 0$, па опет користимо претходну теорему из које следи $Q(x) = (x - \beta)R(x)$.

Добијамо $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)R(x)$ и на основу тога $(x - \alpha)(x - \beta) | P(x)$.

Дефиниција. Број α је нула k тог реда полинома $P(x)$ ако је $(x - \alpha)^k | P(x)$ и $(x - \alpha)^{k+1} \nmid P(x)$.

Пример. Одредити бар један полином чија је двострука нула $\alpha = 1$ и друга нула $\beta = 2$.

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 2)$$

$$P(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 2)$$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2$$

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

4.4. Вијетове формуле

Вијетове формуле повезују коефицијенте полинома са његовим нулама.

Вијетове формуле за квадратни трином $a_2x^2 + a_1x + a_0$ ($a_2 \neq 0$)

су $x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}$, ако су x_1 и x_2 корени посматраног полинома.

Сваки полином се може представити у облику $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$,

$a_n \neq 0$. Након факторизације полином изгледа $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, где су $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуле полинома које међусобно могу бити једнаке.

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$n = 2$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - x_1)(x - x_2), \quad a_2 \neq 0$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2x^2 - a_2(x_1 + x_2)x + a_2x_1x_2.$$

Изједначимо и добијемо Вијетове формуле за квадратни трином.

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Исти поступак се примењује и када је полином трећег степена:

$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ и добијамо

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3},$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \frac{a_1}{a_3},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Уопштени облик полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ изједначимо са

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$a_n \neq 0$ бројеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ су корени полинома и добијамо

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

⋮

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Пример. Дужине страница неког троугла су решења једначине

$$x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0. \text{ Наћи површину тог троугла.}$$

Решење. На основу Вијетових формула

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3},$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \frac{a_1}{a_3},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_0}{a_3},$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 42,$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = 587,$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2730.$$

Полуобим троугла је $s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} = \frac{42}{2} = 21$, па применом Херонове формуле за површину добијамо $P^2 = s(s - x_1)(s - x_2)(s - x_3) = 21(21 - x_1)(21 - x_2)(21 - x_3)$ тј. $P^2 = 21^4 - 21^3(x_1 + x_2 + x_3) + 21^2(x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) - 21 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, одакле је $P = 84$.

5. ПОЛИНОМИ НА ТАКМИЧЕЊИМА СРЕДЊОШКОЛАЦА

5.1. Вијетове формуле и нуле полинома

1. (Општинско такмичење 21.1.2012., трећи разред - А категорија) *Одредити све $a \in \mathbb{R}$ за које корени x_1, x_2, x_3 полинома $x^3 - 4x^2 - ax + a$ задовољавају једнакост $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 0$.*

Решење.

На основу Вијетових формула важе једнакости

$$x_1 + x_2 + x_3 = -(-4)$$

$$\text{и } x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -a,$$

а из услова задатка имамо $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 0$.

Користимо $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca$.

Добијамо

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 =$$

$$(x_1 - 2 + x_2 - 2 + x_3 - 2)^2 - 2(x_1 - 2)(x_2 - 2) - 2(x_1 - 2)(x_3 - 2) - 2(x_2 - 2)(x_3 - 2) =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 - 6)^2 - 2(x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4) - 2(x_1x_3 - 2x_1 - 2x_3 + 4) - 2(x_2x_3 - 2x_2 - 2x_3 + 4) =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 12(x_1 + x_2 + x_3) + 36 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 8(x_1 + x_2 + x_3) - 24 =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 12.$$

Значи, $0 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 4^2 - 4 \cdot 4 - 2(-a) + 12$, одакле је $0 = 2a + 12$, тј. $a = -6$ је решење задатка.

2. (Општинско такмичење 5.2.2022., четврти разред – Б категорија) *Нека су дати $b, c, d \in \mathbb{R}$. Одредити све $a \in \mathbb{R}$, такве да су сви корени полинома $p(x) = x^6 - 16x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 36$ природни бројеви.*

Решење.

На основу Вијетових правила је $x_1 + \dots + x_6 = 16$, $x_1 \cdot \dots \cdot x_6 = 36$, где су

$$x_1 \geq \dots \geq x_6 \quad (*)$$

корени полинома $p(x)$. Како су у питању природни бројеви морају бити делиоци броја 36, односно из скупа $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. С обзиром на неједнакости (*) следи да је $x_1 \in \{3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

Не може бити $x_1 = 36$ и $x_1 = 18$ јер би у том случају збир био већи од 16.

Уколико је $x_1 = 12$, тада је $x_2 \cdot \dots \cdot x_6 = 3$ и $x_2 = 3$, остали су 1, па је $x_1 + \dots + x_6 \neq 16$ па не постоји полином с наведеним особинама.

Уколико је $x_1 = 9$, тада је $x_2 \cdot \dots \cdot x_6 = 4$ и $x_2 = 4$, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1$ и $x_1 + \dots + x_6 \neq 16$ па не постоји полином с наведеним особинама или $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, $x_1 + \dots + x_6 = 16$ што је у овом случају испуњено и доводи до решења $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (9, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Уколико је $x_1 = 6$, тада је $x_2 \cdot \dots \cdot x_6 = 6$ па је или $x_2 = 6$ $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1$ и $x_1 + \dots + x_6 = 16$ што доводи до решења $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6, 6, 1, 1, 1, 1)$ или $x_2 = 3$, $x_3 = x_4 = 2$, $x_5 = x_6 = 1$, $x_1 + \dots + x_6 \neq 16$ па не постоји полином с наведеним особинама.

Уколико је $x_1 = 4$, тада је $x_2 \cdot \dots \cdot x_6 = 9$ онда је $x_2 = x_3 = 3$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$ и $x_1 + \dots + x_6 \neq 16$ и не постоји полином с наведеном особиниом.

Уколико је $x_1 = 3$, тада је $x_2 \cdot \dots \cdot x_6 = 12$ онда је $x_2 = 3$, $x_3 = x_4 = 2$, $x_5 = x_6 = 1$ и $x_1 + \dots + x_6 \neq 16$ тако да ни у овом случају не постоји полином с наведеном особиниом.

Постоји два полинома са наведеним особинама

$$(x - 9)(x - 2)^2(x - 1)^3 = x^6 - 16x^5 + 82x^4 - 196x^3 + 241x^2 - 148x + 36$$

$$(x - 6)^2(x - 1)^4 = x^6 - 16x^5 + 90x^4 - 220x^3 + 265x^2 - 156x + 36$$

па је $a \in \{82, 90\}$.

3. (Окружно такмичење 19.2.2017., други разред - Б категорија) *Одредити вредност параметра $k \in \mathbb{R}$ тако да за решења x_1 и x_2 једначине*

$$2x^2 + 3x + 3k + 1 = 0$$

$$\text{важи } 2x_1 - x_2 = 3.$$

Решење.

На основу Вијетових формула следи да је $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$ тј. $2(x_1 + x_2) = -3$.

Једнакост $2x_1 - x_2 = 3$ напишемо другачије да бисмо искористили Вијетове формуле $3 = 2(x_1 + x_2) - 3x_2 = -3 - 3x_2$, одакле је $x_2 = -2$.

Уврстимо $x_2 = -2$ у полазну једначину. Добијамо, $2(-2)^2 + 3(-2) + 3k + 1 = 0$, одакле лако налазимо $k = -1$.

4. (Окружно такмичење 24.2.2007., трећи разред - А категорија) *Наћи све полиноме облика*

$$x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \dots \pm x \pm 1$$

чији су сви корени реални.

Решење.

Нека су $x_1, \dots, x_n$ корени полинома $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, где је $a_i = \pm 1$.

У случају $n = 1$ су решења $x \pm 1$. Претпоставимо сада да је $n > 1$.

Користећи Вијетове формуле имамо

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n) = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 1 \pm 2.$$

На основу услова задатка, сви корени су реални, збир квадрата мора бити ненегативан, па имамо да $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 3, a_{n-2} = -1$. С обзиром да смо одредили збир и производ бројева $x_i^2, i = 1, \dots, n$, долазимо на идеју да искористимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине.

Слично је $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \dots \cdot x_n^2 = a_0^2 = 1$. Користећи ту неједнакост добијамо:

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq \sqrt[n]{x_1^2 \dots x_n^2} = 1, \text{ што имплицира}$$

$$\frac{3}{n} \geq 1.$$

Одатле је $n \leq 3$, при чему једнакост $n = 3$ важи ако и само ако $x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2 = 1$.

Следи да за случај да је $n = 3$ два решења $(x^2 - 1)(x \pm 1)$. У случају $n = 2$ лако се добијају још два решења $x^2 \pm x - 1$, док у случају $n = 1$ имамо такође два решења $x \pm 1$.

5. (Окружно такмичење 23.1.2016., четврти разред – Б категорија) *Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима степена n чије су све нуле реалне и веће од 1. Доказати да $P(x)$ има нулу која није мања од $1 + n \left| \frac{P(1)}{P'(1)} \right|$.*

Решење.

Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуле посматраног полинома, и нека важи, без умањења општости,

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad (*)$$

(при овим ознакама, како је x_n највећа нула, треба доказати $x_n \geq 1 + n \left| \frac{P(1)}{P'(1)} \right|$). Идеја је да

запишемо $P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ јер тада имамо

$$P'(x) = c(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + c(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n) + \dots + c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

па ће количник $\frac{P'(x)}{P(x)}$ имати облик из којег ћемо лако видети решење.

Имамо

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{c(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + c(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + \cdots + c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}.$$

Уврштавајући $x = 1$, добијамо

$$\frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_n} = -\left(\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1}\right).$$

Пошто су све нуле реалне и веће од 1, сви сабирци у загради су позитивни, па на основу неједнакости (*) даље имамо

$$\left| \frac{P'(1)}{P(1)} \right| = \frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1} \geq \frac{1}{x_n-1} + \frac{1}{x_n-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1} = \frac{n}{x_n-1} > 0.$$

Одавде следи

$$\frac{x_n-1}{n} \geq \left| \frac{P(1)}{P'(1)} \right| > 0,$$

$$x_n-1 \geq n \left| \frac{P(1)}{P'(1)} \right|,$$

$$x_n \geq 1 + n \left| \frac{P(1)}{P'(1)} \right|.$$

Што је и требало доказати.

6. (Републичко такмичење 19.3.2006., четврти разред - А категорија) Ако су x_i ($i = 1, 2, \dots, 48$) нуле полинома $P(x) = 18x^{48} + 3x + 2006$, израчунати $\sum_{i=1}^{48} \frac{x_i}{1+x_i}$.

Решење.

Идеја је да $\frac{x_i}{1+x_i}$ буду нуле неког другог полинома, па да онда искористимо Вијетове формуле за тај полином.

Приметимо да $x_i \notin \{-1, 0\}$ и да је $\frac{x_i}{1+x_i} = \frac{1}{1+x_i^{-1}}$.

Користимо следеће две чињенице:

а) Ако су $y_i \neq 0$ нуле полинома $A(x)$ n -тог степена, онда су y_i^{-1} нуле полинома $x^n A(x^{-1})$.

б) Ако су y_i нуле полинома $A(x)$, онда су $y_i + 1$ нуле полинома $A(x - 1)$.

Из а) следи да су x_i^{-1} нуле полинома $Q(x) = x^{48}P(x^{-1})$.

Из б) следи да су $1 + x_i^{-1}$ нуле полинома $R(x) = Q(x - 1)$.

Коначно, из а) следи да су $\frac{1}{1+x_i^{-1}}$ нуле полинома

$x^{48}R(x^{-1}) = x^{48}Q(x^{-1} - 1) = x^{48}(x^{-1} - 1)^{48}P((x^{-1} - 1)^{-1})$ који је даље једнак

$x^{48}R(x^{-1}) = 18x^{48} + 3x(1 - x)^{47} + 2006(1 - x)^{48}$. На основу биномне формуле добијамо

$x^{48}R(x^{-1}) = 2021x^{48} - 96147x^{47} + \dots + 2006$.

Из Вијетових формула за овај полином, добијамо да је тражени збир једнак $\frac{96147}{2021}$.

7. (Државно такмичење 17.3.2012., четврти разред - Б категорија) Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима. Наћи збир квадрата његових нула уколико је познато да важи

$P(x)^3 = x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + 15x + 1$
за неке $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 \in \mathbb{R}$ и да је збир коефицијената полинома $P(x)^3$ једнак 216.

Решење.

Како је $P(x)^3$ полином деветог степена, то је $P(x)$ полином трећег степена, па је

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, за неке $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Посматрањем коефицијента уз x^9 полинома $P(x)^3$ добијамо да је $a^3 = 1$, тј. $a = 1$, а слободног члана добијамо да је $d^3 = 1$, тј. $d = 1$. Одредимо коефицијент уз x полинома $P(x)$. Да бисмо у развоју

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

добили моном првог степена, потребно је да из два чинилаца датог производа „изаберемо” d , а из једног cx . Дакле, у развоју постоје $\frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$ три монома степена 1 и сваки од њих је једнак cd^2x , па је $3cd^2 = 15$, тј. $c = 5$.

Даље, како је збир коефицијената полинома $P(x)^3$ једнак $P(1)^3$ имамо да је

$6 = P(1) = 1^3 + b \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1$, тј. $b = -1$. Тиме смо добили да је

$P(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1$. Даље, из Вијетових формула имамо да је $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ и $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{5}{1}$, где су x_1, x_2, x_3 нуле полинома $P(x)$, па је

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 1^2 - 2 \cdot 5 = -9.$$

8. (Додатно изборно такмичење за ММО, Београд, 16.5.2012.) Нека је $P(x)$ полином степена 2012 са реалним коефицијентима, такав да за све реалне бројеве a, b, c за које је $a + b + c = 0$ важи:

$P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 \geq 3P(a)P(b)P(c)$. Може ли полином $P(x)$ имати тачно 2012 различитих реалних нула?

Решење.

С обзиром на неједнакости коју треба доказати факторишимо израз $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ на следећи начин

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2), \text{ следи да је}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \text{ ако и само ако је } x + y + z \geq 0 \text{ или } x = y = z.$$

Према томе, услов задатка је еквивалентан са:

$$P(a) + P(b) + P(c) \geq 0 \text{ кад год је } a + b + c = 0. \quad (*)$$

Докажимо да полином $P(x) = \prod_{k=0}^{2011} \left(x - 1 - \frac{k}{4022}\right)$, који има 2012 реалних нула, задовољава услов (*).

- За $x \leq 1$ или $x \geq \frac{3}{2}$ је $P(x) \geq 0$ штавише, за $x \leq 0$ је $P(x) > 1$.
- За $1 < x < \frac{3}{2}$ важи $\left|x - 1 - \frac{k}{4022}\right| < \frac{1}{2}$ за $0 \leq k \leq 1$, те је $P(x) > -\frac{1}{2^{2012}}$.

Ако је $a + b + c = 0$, бар један од бројева a, b, c рецимо a , није позитиван, те је $P(a) > 1$, и одатле је

$$P(a) + P(b) + P(c) > 1 - \frac{1}{2^{2012}} - \frac{1}{2^{2012}} > 0.$$

9. (Државно такмичење 5.3.2016., четврти разред – Б категорија) Дат је полином

$$P(x) = 3x^5 + ax^4 - 35x^3 + bx^2 + 32x + c$$

чије су две нуле $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ и важи $x_3x_4x_5 = 2$.

Наћи коефицијенте $a, b, c \in \mathbb{R}$ и преостале нуле.

Решење.

На основу Вијетових формула следи да је

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = -\frac{c}{3}$$

На основу услова добијамо $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 1 \cdot 2 \cdot 2$ тј. $-\frac{c}{3} = 4$, $c = -12$.

Пошто су $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ корени зна се да је $P(1) = 0$ и $P(2) = 0$ и да важи

$$P(1) = 3 + a - 35 + b + 32 - 12 = 0 \quad \text{и} \quad P(2) = 96 + 16a - 280 + 4b + 64 - 12 = 0.$$

На основу тога је $a + b = 12$ и $16a + 4b = 132$. Решавањем овог система једначина добијамо $a = 7$ и $b = 5$.

Уврштавањем a, b, c налазимо да је је полином

$$P(x) = 3x^5 + 7x^4 - 35x^3 + 5x^2 + 32x - 12.$$

$$(3x^5 + 7x^4 - 35x^3 + 5x^2 + 32x - 12) : (x - 2) = 3x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 13x + 6$$

$$\underline{-3x^5 + 6x^4}$$

$$13x^4 - 35x^3$$

$$\underline{-13x^4 + 26x^3}$$

$$-9x^3 + 5x^2$$

$$\underline{9x^3 - 18x^2}$$

$$-13x^2 + 32x$$

$$\underline{13x^2 - 26x}$$

$$6x - 12$$

$$\underline{-6x + 12}$$

$$0$$

Аналогно $(3x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 13x + 6) : (x - 1) = 3x^3 + 16x^2 + 7x - 6$.

Пошто су $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ нуле полинома, након дељења $P(x)$ са $(x - 1)$ и $(x - 2)$ добија се да полином $P(x)$ можемо записати у облику

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(3x^3 + 16x^2 + 7x - 6).$$

Како важи

$$3x^3 + 3x^2 + 13x^2 + 13x - 6x - 6 = 3x^2(x + 1) + 13x(x + 1) - 6(x + 1) =$$

$$(x + 1)(3x^2 + 13x - 6)$$

онда је још једна нула $x_3 = -1$.

Последње две нуле добијамо решавањем квадратне једначине

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 13x - 6 &= 0, \\
 x_{4,5} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\
 x_{4,5} &= \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}, \\
 x_{4,5} &= \frac{-13 \pm \sqrt{241}}{6}.
 \end{aligned}$$

Дакле, сви корени полинома $P(x)$ су $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = \frac{-13+\sqrt{241}}{6}, x_5 = \frac{-13-\sqrt{241}}{6}$.

10. (Државно такмичење 28.2.2015., четврти разред - Б категорија) *Одредити све могуће вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ такве да све нуле полинома $P(x) = x^4 + ax^2 + a^2x - 1$ имају међусобно једнаке модуле.*

Решење.

Нека је a тражена вредност параметра и нека су x_1, x_2, x_3 и x_4 нуле датог полинома. Из Вијетових формула имамо $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -1$, одакле следи

$$|x_1|^4 = |x_1 x_2 x_3 x_4| = |-1| = 1.$$

У претходној једнакости користили смо услов задатка да све нуле полинома $P(x)$ имају једнаке модуле. Одатле добијамо $|x_1| = |x_2| = |x_3| = |x_4| = 1$. Посматармо функцију $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисану са $P(x) = x^4 + ax^2 + a^2x - 1$. Ова функција је непрекидна, па како важи $P(0) = -1 < 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$, закључујемо да има бар једну нулу на интервалу $(0, \infty)$. Међутим, како су нуле јединичног модула добијамо да број 1 мора бити нула посматраног полинома. Из $P(1) = 0$ налазимо $a = 0$ или $a = -1$. Остаје да за ове вредности проверимо да ли су заиста решења задатка. За $a = 0$ полазни полином једнак је $P(x) = x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$, па су заиста све његове нуле истог модула. За $a = 1$ полазни полином једнак је $P(x) = x^4 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + 1)$.

Полином $Q(x) = x^3 + x^2 + 1$ има бар једну реалну нулу, као полином непарног степена са реалним коефицијентима. Како важи $Q(1) \neq 0$ и $Q(-1) \neq 0$, закључујемо да 1 и -1 нису реалне нуле. Дакле, реална нула полинома $Q(x)$ није јединичног модула, што значи да нису све нуле полинома $P(x)$ истог модула, а тиме $a = -1$ није решење. Једина вредност траженог параметра a је $a = 0$.

11. (Државно такмичење 19.3.2011., трећи разред - А категорија) Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ нуле полинома

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n.$$

Пронаћи најмањи природан број m такав да тачке $a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m$ у комплексној равни леже на истој правој, ако је $n = 2011$.

Решење.

У ком идентитету се појављује израз $1 + x + \dots + x^{2011}$? Шта су решења и колико их има једначина $x^{2012} - 1 = 0$ и где се налазе у комплексној равни? А где ће се налазити њихови m -ти степени? Пошто се у задатку тражи да они буду на једној правој, када је то могуће?

Нека је $P(x) = 1 + x + \dots + x^{2011}$. Како су бројеви $a_1, \dots, a_{2011}$ нуле полинома $P(x)$, то су нуле и полинома $x^{2012} - 1 = (x - 1)(1 + x + \dots + x^{2011})$, па је модуо сваког од њих једнак 1. Након степеновања са m , њихов модуо ће и даље бити једнак 1, односно, оне ће бити на јединичном кругу. Претпоставимо да сви бројеви $a_1^m, a_2^m, \dots, a_{2011}^m$ припадају некој правој p . Како права p може да пресеца јединични круг у највише две различите тачке, A и B , следи да сваки од бројева $a_1^m, a_2^m, \dots, a_{2011}^m$ мора бити једнак A или B . Без губитка општости, можемо претпоставити да је барем 1006 од бројева $a_1^m, a_2^m, \dots, a_{2011}^m$ једнако A , рецимо $a_1^m, a_2^m, \dots, a_{1006}^m$. Тада су бројеви $a_1, a_2, \dots, a_{1006}$ нуле полинома $x^m - A$, па је зато

$m \geq 1006$. Да је $m = 1006$ уверавамо се из чињенице да су бројеви $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ нуле полинома $x^{2012} - 1 = (x^{1006} - 1)(x^{1006} + 1)$. Зато је сваки од бројева $a_1^{1006}, a_2^{1006}, \dots, a_{2011}^{1006}$ једнак или 1 или -1, односно сви припадају једној правој.

12. (Изборно такмичење за екипу Србије за Европску математичку олимпијаду за девојке, Београд, 15.11.2015.) Наћи све полиноме $P(x)$ над прстеном $\mathbb{R}$ такве да важи $(x + 100)P(x) - xP(x + 1) = 1$ за сваки реалан број x .

Решење.

Уводимо смену $P(x) = Q(x) + \frac{1}{100}$ којом смо наслутили да ће се нешто поједноставити и добијамо $(x + 100)Q(x) = xQ(x + 1)$. Убацивањем $x = 0$ и $x = -100$ добијамо $Q(0) = Q(-99) = 0$.

Даље за $x = -1$ и $x = -99$ добијамо $99Q(-1) = -Q(0) = 0$ и

$0 = Q(-99) = -99Q(-98)$, па је $Q(-1) = Q(-98) = 0$.

Слично, за $x = -2$ и $x = -98$ добијамо $Q(-2) = Q(-97) = 0$, итд. После 50 итерација имаћемо $Q(0) = Q(-1) = Q(-2) = \dots = Q(-99) = 0$, тако да је

$$Q(x) = x(x + 1)(x + 2) \dots (x + 99)R(x).$$

Замена у полазну једначину за Q

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+99)R(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+99)R(x+1) \text{ даје}$$

$R(x) = R(x+1)$, одатле је $R(x) = c$ константа, јер би у супротном полином $R(x)$ имао бесконачно много различитих нула. Према томе, $P(x) = cx(x+1)(x+2)\cdots(x+99) + \frac{1}{100}$.

5.2. Дељивост и факторизација

1. (Општинско такмичење 13.1.2018., други разред – Б категорија) Ако је полином $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$

дељив полиномом

$$x^2 + 2ax + b,$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ онда је први полином потпун куб, а други потпун квадрат. Доказати.

Решење.

$$(x^3 + 3ax^2 + 3bx + c) : (x^2 + 2ax + b) = x + a$$

$$\begin{array}{r} -x^3 \mp 2ax^2 \mp bx \\ \quad ax^2 + 2bx + c \\ \quad -ax^2 \mp 2a^2x \mp ab \\ \hline (2b - 2a^2)x + (c - ab) \quad \leftarrow \text{остатак} \end{array}$$

Дељењем два задата полинома добија се количник $x + a$ и остатак $2x(b - a^2) + (c - ab)$. Пошто је први полином дељив другим остатак мора бити 0, дакле, имамо једнакост $2x(b - a^2) + (c - ab) = 0$, одакле добијамо да мора бити $b - a^2 = 0$ и $c - ab = 0$. Значи, $b = a^2$ и $c = ab = a \cdot a^2 = a^3$.

Дакле, први полином износи $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ тј. $(x + a)^3$, а други $x^2 + 2ax + a^2$ тј. $(x + a)^2$.

2. (Окружно такмичење 27.2.2021., први разред - А категорија) Одредити све вредности реалног параметра a за које је полином

$$P(x) = x^{2021} - 2x^2 + x + a^3 - a$$

$$\text{дељив полиномом } Q(x) = x^2 - (a + 1)x + a.$$

Решење.

Пошто је $Q(1) = 0$, следи да је полином $Q(x)$ дељив са $x - 1$, па се дељењем добија да је $Q(x) = (x - 1)(x - a)$.

Уколико је полином $P(x)$ дељив са $Q(x)$ следи да је дељив и са $(x - 1)$ и са $(x - a)$, односно 1 и a су нуле полинома. За $a = 1$ директно проверавамо да $Q(x)$ не дели $P(x)$.

Како је $P(1) = 1^{2021} - 2 \cdot 1^2 + 1 + a^3 - a = a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1)$, следи

$$a(a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow a \in \{-1, 0, 1\}.$$

Тада је $P(x) = x(x^{2020} - 2x + 1) = x(x-1)R(x)$, где је

$$R(x) = \frac{x^{2020}-1}{x-1} - 2 = x^{2019} + x^{2018} + \dots + x - 1.$$

Очигледно да је решење $a = 0$. То је и једино решење. Заиста $R(-1)$ и $R(1)$ су различити од нуле, па $a \in \{-1, 1\}$ нису решења.

3. (Државно такмичење 5.3. 2016., први разред - Б категорија) *Полином $x^8 + x^4 + 1$ представити као производ три полинома степена бар 1 над прстеном $\mathbb{R}$.*

Решење.

Израз $x^8 + x^4 + 1$ подсећа на формулу за квадрат бинома, па покушавамо да на њу сведемо $x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4$. Користећи и формулу за разлику квадрата, редом добијамо

$$\begin{aligned} x^8 + x^4 + 1 &= (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = \\ &= (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2) = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) = \\ &= (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) = (x^4 - x^2 + 1)((x^2 + 1)^2 - x^2) = \\ &= (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

4. (Српска математичка олимпијада ученика средњих школа, 24.8.2020.) *Наћи све моничне полиноме $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ такве да је полином $P(x)^2 - 1$ дељив полиномом $P(x-1)$.*

Решење.

Моничан полином је полином чији је коефицијент уз највећи степен једнак 1.

Видимо да су полиноми $Q(x) = 1$ и $R(x) = x - c$, где је c константа, сигурно решења. Претпоставимо да је $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ неконстантан полином, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Одређености ради претпоставимо да x_1 има реални део мањи од реалних делова бројева $x_2, \dots, x_n$. Ставимо $x_1 = c$.

По услову задатка, $x - (1 - c)$ дели $P(x)^2 - 1$, па $P(1 - c)^2 = 1$ одакле је $P(1 - c) = \pm 1$. С друге стране, за $2 \leq i \leq n$ важи $|c - 1 - x_i| \geq 1$, на основу избора c , па је $|P(c - 1)| = \prod_{i=2}^n |c - 1 - x_i| \geq 1$, а то је могуће само ако је $|c - 1 - x_i| = 1$, тј. $x_i = c$ За све i .

Следи да је $P(x) = (x - c)^n$. Међутим $P(x + c)^2 - 1 = x^{2n} - 1$ није дељиво са $P(x + c + 1) = (x + 1)^n$ ако је $n \geq 2$ па је једина могућност $n = 1$.

Напомена. Ако се искључи услов моничности, има и нетривијалних решења. На пример, до на замену променљиве x са $x + c$, (једина) решења степена 3 и 4 су

$$P(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}(x^3 - 3x^2 + 8x), \text{ односно}$$

$$P(x) = \frac{1}{36}(x^4 - 2x^3 - x^2 - 10x - 12) \quad \text{и} \quad P(x) = \frac{i\sqrt{2}}{36}\left(x^4 - 2x^3 + 8x^2 - x + \frac{33}{4}\right), \quad \text{док}$$

решења степена 2 нема.

5. (Припреме за ММО – Београд, јун 2016.) *Одредити све реалне полиноме P , такве да важи $P(x^2) = P\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, за све x .*

Решење.

Једини такви константни полиноми су $P \equiv 0$ и $P \equiv 1$. Претпоставимо да P није константан и посматрајмо његову нулу с највећим модулом. Заменом $x = c \pm \frac{1}{2}$ добијамо да су и $\left(c \pm \frac{1}{2}\right)^2$ нуле полинома P , па је $\left|c \pm \frac{1}{2}\right|^2 \leq |c|$. Међутим, како је $(c + \frac{1}{2})^2 - (c - \frac{1}{2})^2 = 2c$, ово је могуће једино ако је $(c + \frac{1}{2})^2 = c$ и $(c - \frac{1}{2})^2 = -c$, тј. $c = \frac{1}{2}i$. Следи да су $\pm \frac{1}{2}i$ нуле полинома P , па $x^2 + \frac{1}{4}|P(x)$. Стављањем $P(x) = (x^2 + \frac{1}{4})Q(x)$ у полазну једначину, добијамо да и полином Q задовољава услове задатка. На овај начин индуктивно добијамо да су једина решења задатка $P \equiv 0$ и $P = (x^2 + \frac{1}{4})^n$, за $n \in \mathbb{N}_0$.

6. (Републичко такмичење 28.2.2015., први разред - Б категорија) *Ако је полином $ax^5 + bx^4 + bx^3 + ax^2 + cx - 62$ дељив полиномом $2x^2 - 5x + 2$ израчунати $3a + 2b$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Решење.

Означимо $P(x) = ax^5 + bx^4 + bx^3 + ax^2 + cx - 62$ и $Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Приметимо да се може Q факторисати $2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$, па су његове нуле 2 и $\frac{1}{2}$. Будући да је полином $P(x)$ дељив полиномом $Q(x)$ следи да су и његове нуле 2 и $\frac{1}{2}$.

Услови $P(2) = 0$ и $P(\frac{1}{2}) = 0$ се свODE на $36a + 24b + 2c - 62 = 0$ и

$$\frac{9a}{32} + \frac{3b}{16} + \frac{c}{2} - 62 = 0. \text{ Уводимо смену } t = 3a + 2b. \text{ Тада се добијене једначине свODE на } 12t + 2c - 62 = 0 \text{ и } \frac{3t}{32} + \frac{c}{2} - 62 = 0.$$

Решавањем датог система добијамо $t = -16$.

7. (Изборно такмичење за избор екипе Србије и Црне Горе, Нови Сад, 20.4.2003.) Нека је $p(x)$ полином. Означимо $p^n(x) = \underbrace{p(p(\cdots p(x) \cdots))}_n$. Доказати да је полином $p^{2003}(x) - 2p^{2002}(x) + p^{2001}(x)$ дељив са $p(x) - x$.

Решење.

Познато је да $p(x) - x \mid k_n(x) = p^{n+1}(x) - p^n(x)$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$: заиста, ако запишемо $p^n(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, онда је $k_n(x) = p^n(p(x)) - p^n(x) = \sum_{i=0}^m a_i (p(x)^i - x^i)$ при чему $p(x) - x \mid p(x)^i - x^i$ за све i . Зато је и

$$p^{2003}(x) - 2p^{2002}(x) + p^{2001}(x) = k_{2002}(x) - k_{2001}(x) \text{ дељиво са } p(x) - x.$$

8. (Додатно изборно такмичење за учешће на 33. БМО и 57. ММО, 5.4.2016.) Низ полинома $P_n(x)$ је одређен условима $P_0(x) = x^3 - 4x$ и $P_{n+1}(x) = P_n(1+x)P_n(1-x) - 1$. Доказати да је полином $P_{2016}(x)$ дељив полиномом x^{2016} .

Решење.

За $n \geq 1$ из рекурентне везе следи да је полином P_n паран, отуда

$$P_{n+2}(x) = (P_n(2+x)P_n(-x) - 1)(P_n(2-x)P_n(x) - 1) - 1 =$$

$$P_n(2+x)P_n(2-x)P_n^2(x) - (P_n(2+x) + P_n(2-x))P_n(x), \text{ одавде } P_n \mid P_{n+2}.$$

Полином $P_n(2+x) + P_n(2-x)$ је дељив са x ако $x-2 \mid P_n(x)$.

Биће дељив и са x^2 зато што је паран. Дакле, ако $x^k(x-2) \mid P_n(x)$ за неко $k \geq 2$, онда $x^{k+2}(x-2) \mid P_{n+2}(x)$.

Како је P_0 непаран полином,

$$P_2(x) = P_0(x+2)P_0(x-2)P_0(x)^2 + (P_0(x+2) + P_0(x-2))P_0(x), \text{ одавде } x^2(x-2) \mid P_2(x).$$

Даље једноставна индукција даје $x^n(x-2) \mid P_n(x)$ за $2 \mid n, n \in \mathbb{N}$.

9. (57. ММО, Хонг Конг, Кина – понедељак, 11.7.2016.) На табли је написана једначина $(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$ са по 2016 линеарних фактора на свакој страни. Која је најмања вредност k за коју је могуће обрисати тачно k од ових 4032 линеарних фактора тако да на свакој страни остане бар један фактор и да притом добијена једначина нема реалних решења?

Решење.

Пошто ниједан фактор не сме да се појави на обе стране једначине, морамо обрисати бар 2016 фактора. Да бисмо показали да је 2016 довољно, обрисаћемо са леве стране факторе $x - k$ са $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$, а са десне стране факторе $x - l$ са $l \equiv 1, 4 \pmod{4}$.

Добијамо једначину $A(x) = B(x)$, где су

$$A(x) = \prod_{i=0}^{503} (x - 4i - 1)(x - 4i - 4) \text{ и}$$

$$B(x) = \prod_{i=0}^{503} (x - 4i - 2)(x - 4i - 3).$$

Тврдимо да ова једначина нема реалних решења.

- 1) За $x = 1, 2, \dots, 2016$ једна страна горње једначине је нула, а друга није.
- 2) За $2k - 1 < x < 2k$, за неко $k = 1, 2, \dots, 1008$, онда је $A(x) < 0 < B(x)$.
- 3) Нека је $x < 1$ или $x > 2016$ или $4k < x < 4k + 1$, за неко $k = 1, 2, \dots, 503$.

Тада важи:

$0 < (x - 4i - 1)(x - 4i - 4) < (x - 4i - 2)(x - 4i - 3)$, за $i = 0, 1, \dots, 503$, а множењем ових неједнакости добија се:

$$0 < A(x) < B(x).$$

- 4) Нека је $4k + 2 < x < 4k + 3$, за неко $k = 1, 2, \dots, 503$. Тада важи:

$$(x - 1)(x - 2016) < (x - 2)(x - 2015) < 0 \text{ и}$$

$(x - 4i)(x - 4i - 1) > (x - 4i + 1)(x - 4i - 2) > 0, i = 0, 1, \dots, 503$, а множењем ових неједнакости добија се $A(x) < B(x) < 0$.

Овим су сви случајеви испитани. Одговор је 2016.

Напомена. Ако је $A(x) \neq B(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$, лако се види да између сваке две нуле једног полинома има паран број нула другог. Ово наводи на конструкцију из решења.

10. (Српска математичка олимпијада 31.3.2018.) Доказати да постоји тачно један полином $P(x)$ с реалним коефицијентима за који је полином

$$(x + y)^{1000} - P(x) - P(y)$$

дељив полиномом $xy - x - y$.

Решење.

Тражимо полиноме $P(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i$ и $Q(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ такве да је $A(x, y) = (xy - x - y)Q(x, y) = (x + y)^{1000} - P(x) - P(y)$. Приметимо да је $\deg Q \leq 998$. Заиста, ако је $a_{i,j} x^i y^j$ моном највећег степена у $Q(x, y)$, онда је коефицијент уз $x^i y^j$ у $A(x, y)$ једнак $a_{i,j} \neq 0$, па је $i + j + 2 \leq 1000$. Следи да је $\deg A \leq 1000$, па је и $\deg P \leq 1000$.

Изједначавање коефицијената уз $x^i y^j$ у

$A(x, y) = (xy - x - y)Q(x, y) = (x + y)^{1000} - P(x) - P(y)$ даје једнакости

$a_{i-1,j-1} = \binom{1000}{i}$ за $i + j = 998, (i, j > 0)$, $a_{i-1,j-1} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ за $i + j < 998 (i, j > 0)$ и $a_{i-1,0} = a_{0,i-1} = p_i$, одакле једноставном индукцијом налазимо

$a_{i-1,j-1} = \binom{2000-i-j}{1000-i}$ и $i + j \leq 1000 (i, j > 0)$ и $p_i = \binom{1999-i}{999}$, тј.

$P(x) = x^{1000} + \binom{1000}{999} x^{999} + \binom{1001}{999} x^{998} + \dots + \binom{1998}{999} x$.

Из конструкције следи да овај полином задовољава услове задатка.

11. (Изборно такмичење за избор екипе Србије и Црне Горе за ММО, 31.5.2005.)

Наћи све полиноме са реалним коефицијентима, такве да за свако реално x важи $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$.

Решење.

Из $P(x)^2 = P(-x)^2 = P(x^2 + 1) - 1$ следи да је полином $P(-x)$ идентички једнак $P(x)$ или $-P(x)$.

Ако је $P(x) = -P(-x)$ за све x , заменом $x = 0$ добијамо $P(0) = 0$. Дефинишимо низ

$x_0 = 0$ и $x_{n+1} = x_n^2 + 1$.

Индукцијом следи $P(x_n) = x_n$ за све n , па како је низ (x_n) растући, следи да је $P(x) = x$ за бесконачно много бројева x , дакле $P(x) \equiv x$ што очигледно задовољава дату једнакост.

Претпоставимо сада да је $P(x) = P(-x)$ за све x .

Нека је $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. Тада је полином

$P(x) - P(-x) = 2(a_1 x + a_3 x^3 + \dots)$ идентички нула, па је $a_1 = a_3 = \dots = 0$ тј. $P(x)$ је полином по x^2 . Следи да постоји полином Q такав да је $P(x) = Q(x^2 + 1)$.

Тада је $Q((x^2 + 1)^2 + 1) = Q(x^2 + 1) - 1$, што се сменом $x^2 + 1 = y$ своди на

$Q(y^2 + 1) = Q(y)^2 + 1$ тј. Q задовољава исту полиномну једначину као P , али је мањег степена.

Настављајући овај поступак закључујемо да су сва решења полиноми по x , где је $T(x)$, $T(T(x))$, $T(T(T(x)))$, ..., где је $T(x) = x^2 + 1$.

12. (Државно такмичење 24.3.2007., четврти разред - А категорија) *Доказати да постоји полином облика*
 $x^n + 2007x^{n-1} + \dots$
који дели полином $x^m - 1$ за неко $m \in \mathbb{N}$.

Решење.

Ако је p прост делилац броја m , онда полином $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1$ дели $x^p - 1$ што дели $x^m - 1$. Нека је сад $m = p_1 p_2 \dots p_{2007}$, где су p_i различити прости бројеви. Сваки од полинома $P_i(x) = x^{p_i-1} + x^{p_i-2} + \dots + 1$ дели полином $x^m - 1$. Такође, свака два полинома P_i и P_j ($i \neq j$) су узајамно проста, јер немају заједничке нуле (нуле првог су примитивни p_i - ти корени јединице, а нуле другог p_i - ти корени, а ова два скупа су наравно дисјунктни). То значи да је $x^m - 1$ дељив и производом $P_1(x)P_2(x) \dots P_{2007}(x)$ чији је први коефицијент иза водећег управо једнак 2007.

5.3. Полиноми с целим коефицијентима

1. (Општинско такмичење 6.2.2021., четврти разред - Б категорија) *Постоји ли полином $f(x)$ са целим коефицијентима такав да је*
 $f(1) = f(5) = -1$, $f(2) = f(4) = 2$ и $f(3) = 2021$?

Решење.

Пошто је $f(1) + 1 = 0$ за $x = 1$ и $x = 5$, полином $f(x) + 1$ је дељив са $(x - 1)(x - 5)$. То значи да је $f(x) = (x - 1)(x - 5)g(x) - 1$ при чему полином g има такође целе коефицијенте што следи из стандардног алгорита за дељење полинома.

Међутим, заменом $x = 3$ добија се $2021 = f(3) = -4g(3) - 1$, одакле је даљим сређивањем $2022 = -4g(3) \div 2$. Ово имплицира $g(3) = -\frac{1011}{2}$, што је немогуће.

Према томе, одговор је не.

2. (Окружно такмичење 11.2.2012., први разред - А категорија) *Дати су полиноми $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ и $Q(x) = x^3 - x + 3$. Да ли постоји цео број m тако да $Q(m) \mid P(m)$?*

Решење.

Претпоставимо да постоји цео број m тако да $Q(m) \mid P(m)$. Имамо да

$$Q(x) = x^3 - x + 3 = x(x^2 - 1) + 3 = x(x - 1)(x + 1) + 3.$$

Знамо, $Q(m) = m(m - 1)(m + 1) + 3$ је дељиво са 3 ($m(m - 1)(m + 1)$ је производ три узастопна броја па је дељив са 3), а онда следи да $3 \mid P(m)$ и да 3 дели разлику полинома $P(m)$ и $Q(m)$.

Дакле, $3 \mid P(m) - Q(m) = m^2 + 2m - 1 = 3m + (m^2 - m - 1)$, па имамо да $3 \mid m^2 - m - 1$. Видимо да $3 \nmid m$. Пошто m није дељиво са 3, важи $m^2 \equiv 1 \pmod{3}$ па имамо $m^2 - m - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, односно $m \equiv m^2 - 1 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{3}$ тј. $3 \mid m$. Контрадикција.

3. (Државно такмичење 19.3.2011., четврти разред - Б категорија) Нека је a цео број. Одредити нуле полинома

$$x^3 + ax - 13x + 42$$

ако је познато да су све оне цели бројеви.

Решење.

Нека су $p, q, r \in \mathbb{Z}$ нуле полинома $x^3 + ax - 13x + 42$. Према Вијетовим правилима је $pqr = -42$ и

$$pq + qr + rp = -13.$$

Из прве можемо закључити да је барем један од бројева p, q, r дељив са 7, нека је без умањења општости број r . Сада је из прве једнакости $|pq| = \left| -\frac{42}{r} \right| \leq 6$ па је

$-7 \geq -13 - pq \geq -19$. Из друге једнакости закључујемо да је $r(p + q) = -13 - pq$, па на основу претходног $-13 - pq = -7$ или $-13 - pq = -14$. Размотримо ова два случаја: Први случај.

Имамо $pq = -6$, односно $r = 7$, па из друге једначине $p + q = -1$. Самим тим, по Вијетовим правилима p и q су корени квадратне једначине $t^2 + t - 6 = 0$, па је $\{p, q\} = \{2, -3\}$, а корени датог полинома су 2, -3 и 7.

Други случај.

Имамо $pq = 1$, односно $r = -42$, па из друге једначине $p + q = \frac{1}{3}$, што је немогуће, јер су p и q цели бројеви. Дакле, нуле датог полинома су 2, -3 и 7.

4. (Државно такмичење 15.3.2014., први разред - А категорија) Одредити све полиноме $R(x)$ чији су сви коефицијенти из скупа $\{-1, 1\}$ и за које важи $R(3) = 130$ и $R(-2) = -45$.

Решење.

Нека је $R(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ полином са наведеним особинама. Очито $R(x)$ није константан полином. Ако је $a_n = -1$, тада важи

$$130 = R(3) \leq -3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^1 + 1 = -3^n + \frac{3^n - 1}{2} < 0,$$

Што није могуће. Зато је

$$130 = R(3) \geq 3^n - (3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^1 + 1) = 3^n - \frac{3^n - 1}{2} = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Из неједнакости $130 \geq \frac{3^n + 1}{2}$ добијамо $n \leq 5$. За $n < 5$ важи

$130 = R(3) \leq 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 1 = 121$, те је $n = 5$. Знамо $a_5 = 1$. Како је

$3^5 + 3^4 - 3^3 - 3^2 - 3 - 1 > 130$ закључујемо да је $a_4 = -1$. Сада је

$130 = R(3) = 3^5 - 3^4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0$, односно $27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = -32$.

На сличан начин налазимо да важи $a_3 = -1, a_2 = -1, a_1 = 1$ и $a_0 = 1$. Дакле, једини полином који може да задовољава све услове задатка је $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$. Непосредном провером утврђујемо да за њега важи и $R(-2) = -45$, те је он једини полином са траженим особинама.

5. (Савезно такмичење 15.4.2006., први разред) *Татјана је замислила полином $P(x)$ чији су коефицијенти из скупа $\mathbb{N}_0$. Даница жели да одреди тај полином. Она у једном потезу изговара цео број k , а Татјана јој је саопштила вредност $P(k)$. Наћи најмањи број потеза потребних Даници да открије полином који је Татјана замислила.*

Решење.

Даница може да одгонетне полином у два потеза. На пример, да у првом потезу затражи од Татјане да јој саопшти $P(1)$ (ово питање треба да процени величину коефицијената полинома $P(x)$); како је полином са коефицијентима из $\mathbb{N}_0$, сваки коефицијент је не већи од a , а затим нпр. $P(10^a)$, где је $a = P(1)$.

Нека је $b = P(10^a)$. Сваки природан број има јединствено представљање у систему са основом 10^a , па како је $10^a > a$, коефицијенти полинома $P(x)$ су „цифре” у представљању броја b у систему са основом 10^a .

Потребно је још показати да је један потез недовољан да Даница утврди замишљени полином, тј. да за свако $k \in \mathbb{Z}$ постоји бар два полинома са коефицијентима у $\mathbb{N}_0$, који имају једнаке вредности у k . Ако је $k \geq 0$ такви полиноми су $2k$ и $x + k$, а за $k < 0$ такви су $x + (-k)$ и $x^2 + (-k + 1)x + (-k)$.

6. (Државно такмичење 24.3.2007., други разред - А категорија) *Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Ако за неке различите целе бројеве a и b важи $P(a) \cdot P(b) = -(a - b)^2$, доказати да је $P(a) + P(b) = 0$.*

Решење.

Користећи чињеницу да за свака два различита цела броја a и b и $P \in \mathbb{Z}[x]$ важи $a - b \mid P(a) - P(b)$. Дакле, постоји $k \in \mathbb{Z}$ тако да је $P(a) - P(b) = k(a - b)$. Зато је $P(a) \cdot (P(a) - k(a - b)) = -(a - b)^2$. Последња једначина је квадратна (по $P(a)$) и лако закључујемо да неопходан услов да би $P(a)$ био цео број, да цео број буде и $\sqrt{D} = |a - b|\sqrt{k^2 - 4}$. Дакле, $\sqrt{k^2 - 4} \in \mathbb{Q}$ одакле је $\sqrt{k^2 - 4} \in \mathbb{Z}$. Није тешко закључити да је израз потпун квадрат само за $k = \pm 2$. Из поменуте квадратне једначине је тада $P(a) = \pm(a - b)$ те из $P(a) - P(b) = k(a - b)$ налазимо да је $P(b) = \mp(a - b)$. Овим је доказано да је $P(a) + P(b) = 0$.

7. (Балканска математичка олимпијада, 7.5.2016.) *Одредити све моничне полиноме f са целим коефицијентима који имају следеће својство: постоји природан број N такав да је $2(f(p)!) + 1$ дељиво са p за сваки прост број $p > N$ за који је $f(p)$ природан број.*

Решење.

Јасно је да полином f није константан. С друге стране, из услова задатка следи $p \nmid f(p)!$, тј. $f(p) < p$ за све $p > N$, па мора бити $\deg f = 1$, одакле је $f(x) = x - c$ за неко $c \in \mathbb{N}$. Како је по Вилсоновој теореме

$$2(p - c)! \equiv -1 \equiv (p - 1)! \equiv (-1)^{c-1}(c - 1)!(p - c)! \pmod{p}.$$

За сваки прост број $p > N$, следи да је $(-1)^{c-1}(c - 1)! \equiv 2 \pmod{p}$,

тј. $(-1)^{c-1}(c - 1)! = 2$, одакле је $c = 3$. Према томе, $f(x) = x - 3$.

5.4. Разно

У посебном одељку илуструјемо важност полинома на примеру задатка који није из полинома, али се преко њих решава.

1. (Српска математичка олимпијада ученика средњих школа, 6.4.2019.) *Низови $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ дефинисани су рекурентним релацијама*

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2018}{n} a_n + a_{n-1} \text{ за } n \geq 1,$$

и

$$b_0 = 0, b_1 = 1, b_{n+1} = \frac{2020}{n} b_n + b_{n-1} \text{ за } n \geq 1.$$

Доказати:

$$\frac{b_{1010}}{1010} = \frac{a_{1009}}{1009}.$$

Решење.

Приметимо да су низови (a_n) и (b_n) дефинисани сличним релацијама, због тога долазимо на идеју да дефинишемо низ $(c_{m,n})$ са двоструким индексима тако да су низови (a_n) и (b_n) садржани у низу $(c_{m,n})$. Дефинишемо низ $(c_{m,n})(m, n \in \mathbb{N}_0)$ условима

$$c_{m,0} = 0, c_{m,1} = 1, c_{m,n+1} = \frac{2m}{n} c_{m,n} + c_{m,n-1} \text{ за } n \geq 1.$$

Тада је $a_n = c_{1010,n}$ и $b_n = c_{1009,n}$.

Видимо да је нпр. $c_{1,n} = n, c_{2,n} = n^2$ и $c_{3,n} = \frac{2n^3+n}{3}$. Тврдимо да за свако $m \in \mathbb{N}$ постоји моничан полином $P_m(x)$ такав да је

$$P_m(x+1) = \frac{2m}{x} P_m(x) + P_m(x-1) \quad (1)$$

пошто је очигледно $P_m(0) = 0$, индукцијом ће следити $c_{m,n} = \frac{P_m(n)}{P_m(1)}$.

Лема. Дефинишемо низ полинома P_k условима $P_0(x) = 0, P_1(x) = x$ и $P_{k+1}(x) = xP_k(x) + \frac{k(k-1)}{4} \cdot P_{k-1}(x)$. (2) Тада полиноми P_k задовољавају (1).

Шта више, важи $P_k(x+1) - 2P_k(x) + P_k(x-1) = \frac{k(k-1)}{x} \cdot P_{k-1}(x)$.

Из (2) следи да полином $Q_0(x) = 0$ и $Q_k(x) = \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} P_k(x)$ задовољавају везу

$$Q_{k+1}(x) = \frac{2x}{k} Q_k(x) + Q_{k-1}(x) \text{ па индукцијом } Q_k(x) = xc_{x,k} \text{ добијамо за све } x \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Одавде је } P_k(x) = \frac{(k-1)!}{2^{k-1}} \cdot xc_{x,k} \text{ и } \frac{c_{m,n}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{P_m(n)}{P_m(1)} = \frac{c_{n,m}}{c_{1,m}} = \frac{c_{n,m}}{m}.$$

Тврђење задатка се добија за $m = 1010$ и $n = 1009$.

6. ЗАКЉУЧАК

Идеја овог рада је била да се полиноми уведу као појам, као и да се прикаже њихова заступљеност на такмичењима различитих нивоа у средњој школи.

Са полиномима се ученици упознају још у седмом разреду основне школе, кад би требало и направити базу за добро разумевање ових математичких проблема и интересовање за надоградњу које се огледа у додатном усавршавању и жељи за одласком на математичка такмичења.

У овом раду су, у првом реду, дати практични савети за савладавање основних операција за рад са полиномима, објашњени алати и модели који служе за решавање задатака, а затим, као виши ниво и својеврсна надоградња за талентоване ученике и оне који се спремају за такмичења. Кроз цео рад провејава велика жеља аутора да полиноме приближи сваком ученику, талентованом или мање талентованом и нада да ће се што већи број њих заразити математиком кроз упознавање са овим скромним делом науке, званим – полиноми.

Завршићу овај рад Пикаровом поруком средњошколској омладини

Пикарова порука средњошколској омладини

...Изгледа да смо ми у Француској нарочито осетљиви на дух, живост и блесак интелигенције, док мање ценимо стрпљивост и одважност у напору. Међутим, ове две особине доминирају у свакој каријери.

...Интелигенција у животу није једина снага и има много примера где је она остала неплодна. Колико младих интелигентних људи, врло талентованих, нису дали оно што се од њих очекивало! Дуго стрпљење је неопходно да би учинило плодним најсрећније дарове: оно само по себи није геније, али је понекад таленат. Да би се створило једно дело или извршила једна акција, треба имати истрајну и непрекидну вољу.

Сталним радом изграђују се добри изгледи чији плодови припадају онима који су их дуго тражили: ова истина симболизована је у Њутновом одговору који је рекао да је законе света открио на начин што је о њима стално мислио.

Из беседе коју је Пикар одржао 30. јула 1898. ученицима чувеног лицеја Хенри IV у Паризу.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. ИКОДИНОВИЋ, С. ДИМИТРИЈЕВИЋ, *Математика 7*, уџбеник за седми разред основне школе, Klett, Београд, 2019.
- [2] С. МИЛОЈЕВИЋ, Н. ВУЛОВИЋ, *Математика 7*, збирка задатака за седми разред основне школе, Klett, 2016.
- [3] А. ЗОРИЋ, З. КАДЕЛБЕРГ, С. ОГЊАНОВИЋ, *Анализа са алгебром 1*, Круг, Београд, 2011.
- [4] З. КАДЕЛБЕРГ, В. МИЋИЋ, С. ОГЊАНОВИЋ, *Анализа са алгебром 3*, Круг, Београд, 2011.
- [5] П. МЛАДЕНОВИЋ, С. ОГЊАНОВИЋ, *Припремни задаци за математичка такмичења за ученике за ученике средњих школа*, ДМС, Београд, 1991.
- [6] Д. С. МИТРИНОВИЋ, Д. Ж. ЂОКОВИЋ, *Полиноми и матрице*, Београд, 1986.
- [7] Б. ШЕШЕЉА, А. ТЕПАВЧЕВИЋ, *Алгебра 1*, Нови Сад, 2004.
- [8] В. СТОЈАНОВИЋ, *Математика уџбеник за седми разред основне школе*, Математископ, Београд, 2020.
- [9] Г. ВОЈНОВИЋ, Б. ШОБОТ, *Збирка задатка из математичке логике и алгебре*, Завод за уџбенике, Београд, 2011.
- [10] Ч. БАТЛЕР, Л. ВРЕН, *Настава математике у средњој школи (програм и методи)* „Вук Караџић” Београд 1967.
- [11] Ш. АРСЛАНОВИЋ, *Аспекти математике за надарене ученике средњошколског узраста*, Удружење математичара БИХ, Сарајево, 2001.
- [12] <https://dms.rs/matematika-srednje-skole/>
- [13] <https://imomath.com/srb/index.cgi?page=zadaciSaTakmichenja>
- [14] https://imomath.com/srb/dodatne/polinomi_ddj.pdf