

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Милица Радојевић

**БИФУРКАЦИЈЕ У  
ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНИМ И  
ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИМ  
ДИНАМИЧКИМ СИСТЕМИМА**

мастер рад

Београд, 2022.

**Ментор:**

др Марија Микић, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије:**

проф. др Јелена Катић, ванредни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милан Перић, асистент са докторатом  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Датум одбране:**

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
1.1	Гранични цикл . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Бифуркације у једнодимензионалним динамичким системима</b>	<b>4</b>
2.1	Увод . . . . .	4
2.2	Седло–чвор бифуркација . . . . .	4
2.3	Транскритична бифуркација . . . . .	9
2.4	Виласта бифуркација . . . . .	11
2.4.1	Наткритична виласта бифуркација . . . . .	12
2.4.2	Поткритична виласта бифуркација . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Бифуркације у дводимензионалним динамичким системима</b>	<b>18</b>
3.1	Увод . . . . .	18
3.2	Седло–чвор бифуркација . . . . .	18
3.3	Транскритичне и виласте бифуркације . . . . .	21
3.4	Хопфове бифуркације . . . . .	24
3.4.1	Наткритична Хопфова бифуркација . . . . .	25
3.4.2	Поткритична Хопфова бифуркација . . . . .	27
3.5	Глобалне бифуркације циклала . . . . .	30
3.5.1	Седло–чвор бифуркација циклала . . . . .	30
3.5.2	Бифуркације са бесконачним периодом . . . . .	32
3.5.3	Хомоциклична бифуркација . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Бифуркације у применама</b>	<b>35</b>
4.1	Једнодимензионални динамички системи . . . . .	35
4.1.1	Кретање перле по ротирајућем обручу . . . . .	35
4.1.1.1	Анализа система првог реда . . . . .	37
4.1.2	Несавршене бифуркације и катастрофе . . . . .	41
4.1.2.1	Најезда инсеката . . . . .	49
4.2	Дводимензионални динамички системи . . . . .	56
4.2.1	Осцилаторна хемијска реакција . . . . .	56
	<b>Литература</b>	<b>62</b>

# Глава 1

## Увод

У овом раду ћемо видети шта су то *бифуркације* у контексту динамичких система, упознаћемо се са основним типовима бифуркација које се јављају у једнодимензионалним и дводимензионалним динамичким системима и видећемо њихову примену на неколико конкретних примера из различитих научних области.

Да би се могло говорити о бифуркацијама, неопходан је одређени ниво предзнања из области обичних диференцијалних једначина, са акцентом на линеарним и нелинеарним динамичким (аутономним) системима. У овом раду посматраћемо динамичке системе у  $\mathbb{R}$ , односно  $\mathbb{R}^2$ , са еуклидском метриком и стандардном диференцијабилном структуром. Како се највећи део појмова са којима ћемо се сусретати и важних тврђења у вези са њима обрађује на основним курсевима диференцијалних једначина на Математичком факултету, то ће се у овом раду ти појмови и тврђења сматрати познатим, уз препоруку да се за подсећање и проширивање знања из области динамичких система и обичних диференцијалних једначина уопште погледа [1], [2], [5], [6]. У овој глави ћемо се упознати само са појмом граничног циклa, будући да се на основним курсевима диференцијалних једначина он често не обрађује, а биће нам неопходан у неким деловима овог рада.

Друга глава овог рада посвећена је бифуркацијама у једнодимензионалним динамичким системима. Детаљно ћемо се упознати са најважнијим типовима ових бифуркација: седло–чвор, транскритичним и виластим бифуркацијама.

У трећој глави обрадићемо типове бифуркација карактеристичне за дводимензионалне динамичке системе. Најпре ћемо размотрити основне типове локалних бифуркација (при чему ће највише пажње бити посвећено Хопфовим бифуркацијама, које су специфичне искључиво за системе димензије веће од 1), а затим и неколико најважнијих типова глобалних бифуркација.

Последња, четврта глава посвећена је применама бифуркација у моделовању различитих научних феномена. Ова глава подељена је на два одељка – први је посвећен једнодимензионалним динамичким системима и ту су обрађена два примера, један из физике и један из биологије, а други део је посвећен дводимензионалним системима, где је приказан пример из области хемије.

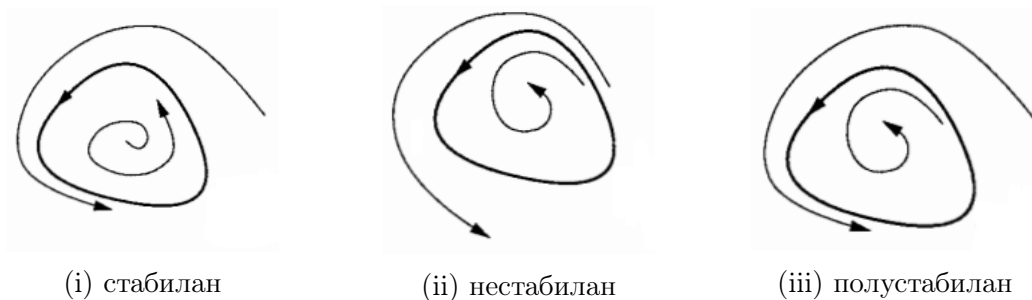
## 1.1 Гранични цикл

Дат је нелинеарни дводимензионални динамички систем

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где је  $f, g \in C^1(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  и  $t \in \mathbb{R}$ . **Гранични цикл** динамичког система (1.1) је изолована затворена фазна трајекторија тог система. Епитет *изолована* значи да у њеној околини не постоје друге затворене трајекторије, већ се, како време пролази, све трајекторије система (1.1) спирално приближавају или удаљавају од те затворене трајекторије.

Гранични цикл може да буде стабилан, нестабилан или полустабилан, у зависности од тога да ли се трајекторије из његове околине приближавају или удаљавају од њега (слика 1.1).



Слика 1.1: Стабилност граничног цикла

Гранични цикли су веома важни са научног становишта – они моделују системе у којима постоје *самоодрживе осцилације*. Такви системи осцилују чак и у одсуству спољне периодичне силе. Неки примери оваквих система су: откуцаји срца, дневне промене температуре тела и лучења хормона код човека, хемијске реакције које спонтано осцилују, потенцијално опасне вибрације у мостовима и крилима авиона итд. У сваком од ових случајева постоји стандардна осцилација за коју је познат период, облик таласа и амплитуда. Ако у систему дође до мале пертурбације, он ће се напослетку увек вратити у свој стандардни циклус.

Гранични цикли су искључиво нелинеарне појаве – они се не могу појавити у линеарним динамичким системима. Наравно, линеарни динамички систем облика  $X' = AX$  може да има затворене трајекторије, али оне неће бити *изоловане*, јер за линеарне динамичке системе важи да ако је  $X(t)$  периодично решење датог система, онда је и  $c \cdot X(t)$  такође периодично решење тог система, за сваки реалан број  $c \neq 0$ . Стога је свака затворена фазна трајекторија линеарног динамичког система окружена једнопараметарском фамилијом затворених трајекторија. Последица ове чињенице јесте да је амплитуда осцилација код линеарних динамичких система потпуно одређена почетним условима; свака и најмања промена амплитуде је трајна, тј. задржава се

заувек. Насупрот томе, осцилације граничних циклуса су одређене структуром самог система.

За потребе овог рада важно је да видимо како може да се докаже да у датом динамичком систему постоји затворена трајекторија. Наредна теорема даје један од малобројних резултата који се односе на овај проблем, а такође представља један од кључних теоријских резултата нелинеарне динамике, будући да имплицира да *хаос не може да се јави у фазној равни* (тј. у дводимензионалним динамичким системима).

**Теорема 1 (Поенкаре–Бендиксонова<sup>1</sup> теорема).** *Нека је  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$  затворена и ограничена област,  $F \in C^1(\mathcal{R})$  и нека област  $\mathcal{R}$  не садржи положаје равнотеже динамичког система  $X' = F(X)$ . Даље, нека постоји фазна трајекторија  $\gamma$  тог динамичког система која је „заробљена“ у области  $\mathcal{R}$ , у смислу да у почетном тренутку  $t_0$  креће из неке тачке области  $\mathcal{R}$  и остаје у тој области за свако  $t > t_0$ . Тада или је  $\gamma$  затворена трајекторија датог динамичког система или се она спирално приближава некој затвореној трајекторији тог система кад  $t \rightarrow \infty$ . У сваком случају, постоји гранични циклус у области  $\mathcal{R}$ .*

**Напомена:** Поенкаре–Бендиксонова теорема важи и кад имамо супротну временску оријентацију, тј. кад постоји трајекторија  $\gamma$  која у почетном тренутку  $t_0$  креће из неке тачке области  $\mathcal{R}$  и остаје у области  $\mathcal{R}$  за свако  $t < t_0$ .

Поенкаре–Бендиксонова теорема суштински каже да је динамика у фазној равни врло ограничена: ако је фазна трајекторија „заробљена“ у ограниченој области у којој нема положаја равнотеже, онда та трајекторија у неком тренутку мора тежити некој затвореној трајекторији или је она сама затворена трајекторија (није могуће никакво компликованије понашање од тога). То, међутим, важи искључиво у фазној равни, односно у дводимензионалним динамичким системима. У системима димензије три или више Поенкаре–Бендиксонова теорема престаје да важи, што ствара могућност потпуно новог понашања: трајекторије могу да „лутају“ околу заувек унутар ограничене области, не приближавајући се ни у једном тренутку неком положају равнотеже или затвореној трајекторији. У неким случајевима трајекторије привлачи сложен геометријски објекат који се назива *страни атрактор*. Осетљивост на почетне услове има за последицу да је кретање дугорочно непредвидиво – ова појава назива се *хаосом*. За упознавање са основама теорије хаоса погледати [1] и [2].

---

<sup>1</sup>Henri Poincaré (1854 – 1912) – француски математичар и физичар  
Ivar Otto Bendixson (1861 – 1935) – шведски математичар

## Глава 2

# Бифуркације у једнодимензионалним динамичким системима

### 2.1 Увод

Нека је дат једнодимензионални динамички систем

$$x' = f(x, r), \quad (2.1)$$

где је  $x = x(t)$  непозната функција,  $r \in \mathbb{R}^n$  параметар и  $f \in C^1(D)$ , при чему је  $D$  неки отворен подскуп од  $\mathbb{R}^2$ . Ако се квалитативна структура тока динамичког система (2.1) мења са променом вредности параметра  $r$ , кажемо да долази до **бифуркације**. Параметар  $r$  називамо *контролним параметром*, а вредност параметра за коју долази до бифуркације *бифуркационом тачком* или *бифуркационом вредношћу*.

У једнодимензионалним динамичким системима могуће су једино тзв. *локалне* бифуркације: то су бифуркације код којих услед промене вредности параметра долази до промене броја или стабилности положаја равнотеже. У случају вишедимензионалних динамичких система, под локалним бифуркацијама подразумевају се и промене броја или стабилности граничних циклуса услед промене вредности параметра. Поред локалних, постоје и *глобалне* бифуркације – то су бифуркације код којих се већи инваријантни скуп (нпр. гранични циклус) судара са положајем равнотеже, доводећи до глобалних промена у структури тока, а не само до промена у околини самог положаја равнотеже, односно граничног циклуса, али оне се јављају само у системима већих димензија.

У наставку ћемо детаљно размотрити типове бифуркација који су карактеристични за једнодимензионалне динамичке системе.

### 2.2 Седло–чвор бифуркација

Први и најједноставнији тип бифуркације који може да се јави у једнодимензионалним динамичким системима јесте **седло–чвор бифуркација**<sup>1</sup>. Порекло оваквог

---

<sup>1</sup>saddle–node bifurcation (енг.)

назива биће јасније када будемо посматрали дводимензионалне динамичке системе. Један од основних примера једнодимензионалног динамичког система у којем долази до ове бифуркације је

$$x' = r + x^2, \quad (2.2)$$

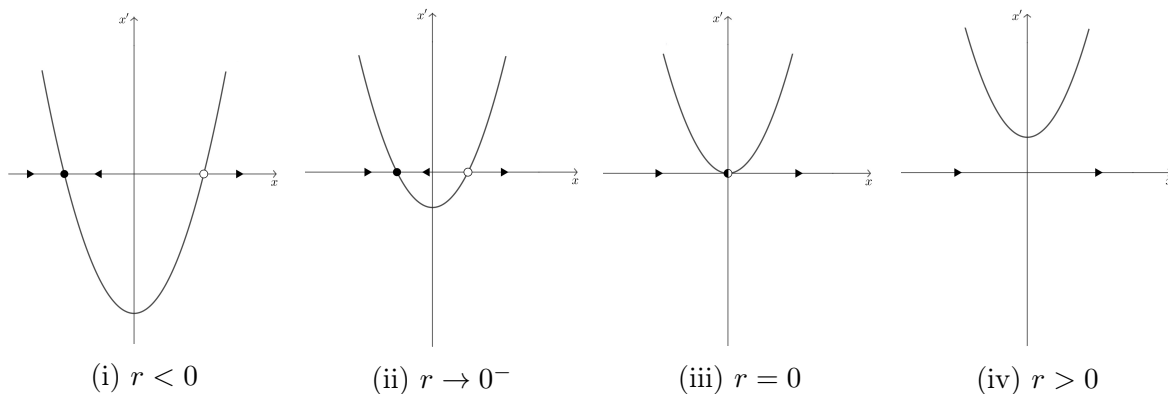
где је  $r$  реални контролни параметар.

Положаје равнотеже једначине (2.2) налазимо решавањем једначине  $r + x^2 = 0$ . За  $r < 0$  постоје два положаја равнотеже,  $x_1^* = -\sqrt{-r}$  и  $x_2^* = \sqrt{-r}$  (слика 2.1(i)). Њихову стабилност можемо утврдити на два начина. Први начин подразумева разматрање смера тока на  $x$ -оси (ток је усмерен надесно када је  $x' > 0$ , а налево када је  $x' < 0$ ) и утврђивање да ли су трајекторије усмерене ка или од положаја равнотеже. Други начин јесте да се испита знак израза  $f'(x_i^*)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , где је  $f(x) = r + x^2$ . Испоставља се да је положај равнотеже  $x_1^*$  стабилан, а  $x_2^*$  нестабилан. Стабилне положаје равнотеже представљаћемо пуним кружићима, нестабилне празним, а полустабилне напола испуњеним кружићима.

Када  $r \rightarrow 0^-$ , парабола  $f(x) = r + x^2$  се помера навише, а два положаја равнотеже се међусобно приближавају (слика 2.1(ii)).

За  $r = 0$  имамо само један положај равнотеже  $x^* = 0$  и он је полустабилан (слика 2.1(iii)).

Коначно, када је  $r > 0$  једначина  $x^2 = -r$  нема реалних решења, одакле следи да систем (2.2) нема положаје равнотеже. Како је тада  $x' > 0$ , све трајекторије су усмерене слева надесно, односно теже ка  $+\infty$  (слика 2.1(iv)).



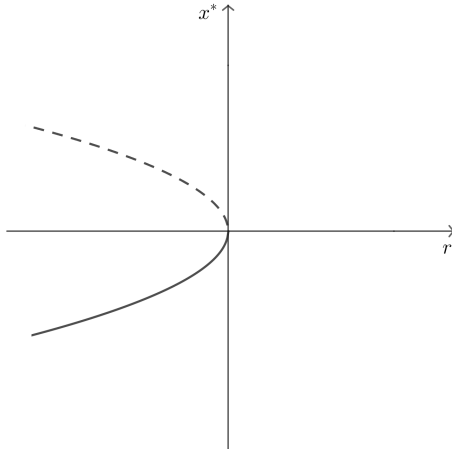
Слика 2.1: Фазни портрет једначине (2.2) за различите вредности параметра  $r$

Дакле, у овом случају до бифуркације долази за вредност параметра  $r = 0$ , јер су фазни портрети за  $r < 0$  и  $r > 0$  квалитативно различити: за  $r < 0$  имамо два положаја равнотеже (један стабилан, други нестабилан), за  $r = 0$  они се „сударају” и стапају у један полустабилан положај равнотеже, који потом у потпуности нестаје када  $r$  постане веће од нуле.

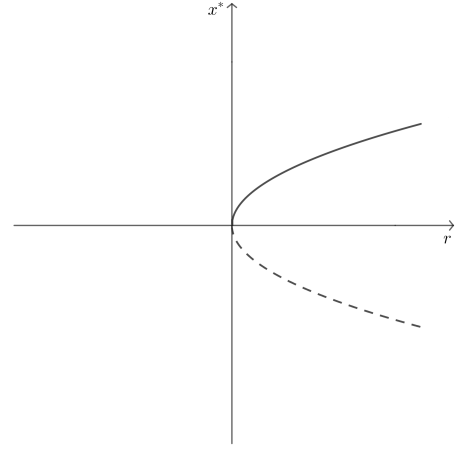
**Графичко представљање бифуркација** Постоји више различитих начина да се бифуркације представе графички. Ипак, најчешће се представљају у равни, тако што се контролни параметар  $r$  узме за независно променљиву, те се наноси на апсцису, док се положаји равнотеже  $x^*$  узимају за зависно променљиву и њихове вредности,



у зависности од  $r$ , наносе се на ординату. При том се испрекиданим линијама означавају нестабилни, а пуним линијама стабилни положаји равнотеже. Тиме се добија тзв. **бифуркациони дијаграм**. На слици 2.2 приказан је бифуркациони дијаграм једнодимензионалног динамичког система (2.2).



Слика 2.2: Бифуркациони дијаграм једначине (2.2)



Слика 2.3: Бифуркациони дијаграм једначине (2.3)

Још један пример једнодимензионалног динамичког система у којем долази до седло-чвор бифуркације дат је са

$$x' = r - x^2. \quad (2.3)$$

Анализом положаја равнотеже једначине (2.3) и њихове стабилности, аналогно као за једначину (2.2), долазимо до закључка да за  $r < 0$  нема положаја равнотеже, за  $r = 0$  постоји један полустабилан положај равнотеже  $x^* = 0$ , док за  $r > 0$  имамо два положаја равнотеже:  $x_1^* = \sqrt{r}$ , који је стабилан и  $x_2^* = -\sqrt{r}$ , који је нестабилан. Бифуркациони дијаграм једначине (2.3) приказан је на слици 2.3.

Посматрањем бифуркационих дијаграма на сликама 2.2 и 2.3 постаје јасно зашто се за овакве појаве користи термин *бифуркација*, који изворно значи *рачвање*, *гранане*.

Испоставља се да су системи дати једначинама (2.2) и (2.3) репрезентативни за све једнодимензионалне динамичке системе код којих долази до седло-чвор бифуркације. Зато се ови примери често називају прототипским примерима или *нормалним формама* седло-чвор бифуркације. Пре него што дамо објашњење овог тврђења у општем случају, размотримо један пример.

**Пример 1.** Дат је динамички систем првог реда

$$x' = r - x - e^{-x}, \quad (2.4)$$

где је  $r$  реални параметар. Докажимо да код овог система долази до седло-чвор бифуркације.

Положаје равнотеже  $x^*$  система (2.4) налазимо као решења једначине  $r - x - e^{-x} = 0$ . Међутим, у овом случају не можемо експлицитно изразити  $x^*$  у функцији од  $r$ , стога

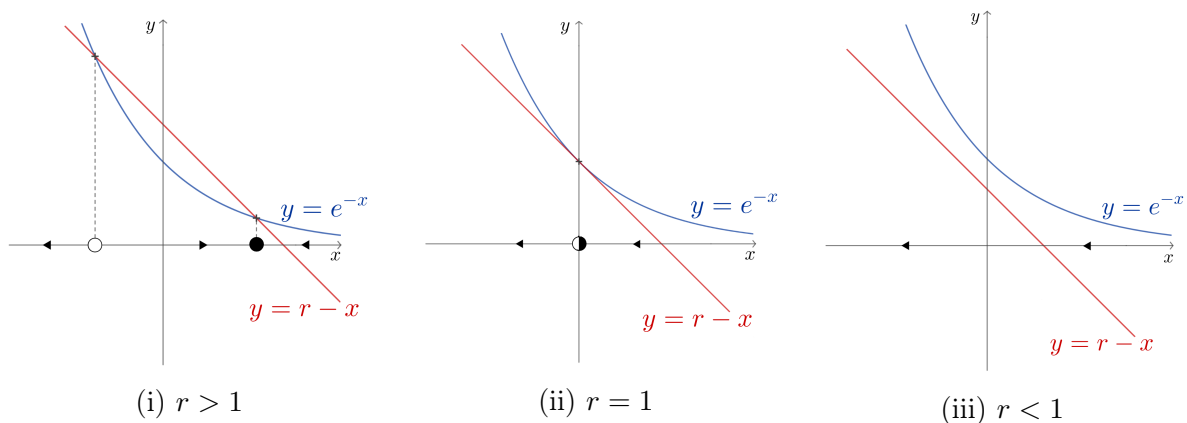
Ћемо се овде послужити геометријским приступом, који ће нам омогућити да на много једноставнији начин дођемо до закључака о броју и стабилности положаја равнотеже система (2.4) у зависности од вредности параметра  $r$ .

Наиме, приметимо да је много једноставније скицирати графике функција  $y = r - x$  и  $y = e^{-x}$  него функције  $f(x) = r - x - e^{-x}$ . Ако скицирамо графике ових двеју функција у истом координатном систему,  $x$ -координате тачака њиховог пресека даће нам управо положаје равнотеже система (2.4), будући да у тим тачкама важи да је  $r - x - e^{-x} = 0$ . Такође, са скице можемо да видимо и како ће бити усмерен ток система (2.4): биће усмерен налево када је  $x' < 0$ , односно  $r - x < e^{-x}$ , што графички значи да је права  $y = r - x$  испод графика криве  $y = e^{-x}$ , док ће ток бити усмерен надесно када је  $r - x > e^{-x}$ , односно када је права  $y = r - x$  изнад графика криве  $y = e^{-x}$ .

Ако, на пример, узмемо да је за почетак  $r > 1$ , имаћемо две пресечне тачке, односно два положаја равнотеже (слика 2.4(i)) – један негативан, који је нестабилан и други позитиван, који је стабилан.

Замислимо сада да постепено смањујемо вредност параметра  $r$ . Тада права  $y = r - x$  „клизи“ надолу, услед чега се положаји равнотеже приближавају један другом. За неку „критичну“ вредност параметра ( $r = r_c$ ) права  $y = r - x$  заузеће тачно тангентни положај у односу на криву  $y = e^{-x}$  (слика 2.4(ii)). Тада имамо само један положај равнотеже, који је полустабилан.

Коначно, када  $r$  постане мање од  $r_c$ , права  $y = r - x$  и крива  $y = e^{-x}$  више неће имати пресечних тачака, што значи да систем (2.4) нема положаје равнотеже (слика 2.4(iii)).



Слика 2.4: Графици функција  $y = r - x$  и  $y = e^{-x}$  за различите вредности  $r$

Дакле, за  $r < r_c$  нема положаја равнотеже, за  $r = r_c$  појављује се један полустабилан положај равнотеже и коначно, за  $r > r_c$  имамо два положаја равнотеже – један стабилан и други нестабилан. Овакво понашање система потпуно је у складу са понашањем система (2.3). Стога закључујемо да код система (2.4) долази до седло-чвор бифуркације за вредност параметра  $r = r_c$ .

Да бисмо одредили бифуркациону вредност  $r_c$ , претпоставићемо да се графици кривих  $y = r - x$  и  $y = e^{-x}$  додирују. За  $x$ -координату додирне тачке тада мора важити

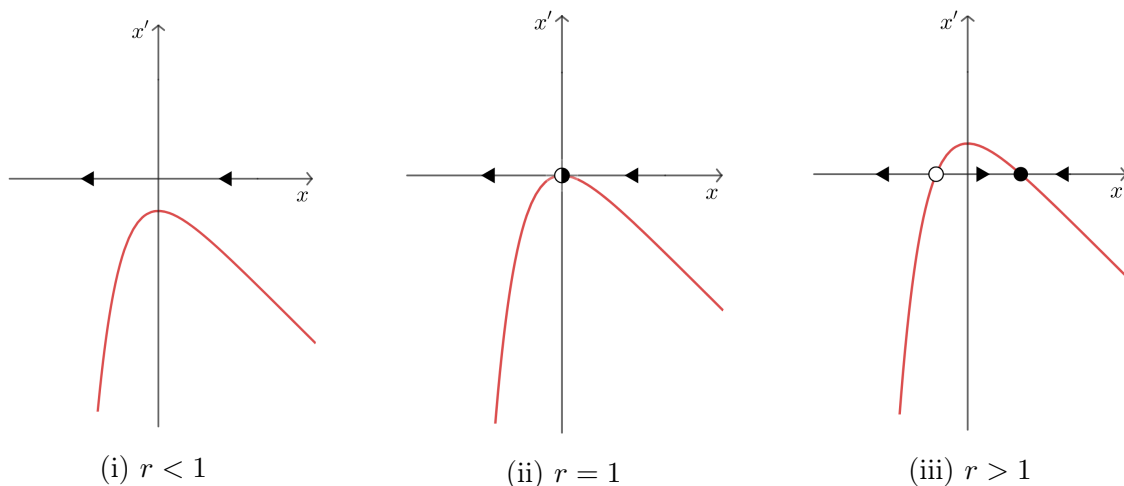
$r_c - x = e^{-x}$ . Но, како права  $y = r_c - x$  тангира криву  $y = e^{-x}$  у тачки  $x^*$ , а знамо да вредност првог извода неке функције у некој тачки представља управо коефицијент правца тангенте на график те функције у тој тачки, то мора важити и да је  $\left. \frac{d}{dx}(e^{-x}) \right|_{x=x^*} = -1$  (коефицијент правца праве  $y = r_c - x$  је  $-1$ ). Дакле, у тачки додира морају важити следеће једнакости:

$$r_c - x^* = e^{-x^*}, \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{d}{dx}(e^{-x}) \right|_{x=x^*} = -1. \quad (2.6)$$

Како је  $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$ , то из (2.6) налазимо да је  $x^* = 0$ . Стога из (2.5) добијамо да је  $r_c = 1$ , што је управо тражена бифуркациона вредност контролног параметра.

Наравно, до истих закључака о броју и стабилности положаја равнотеже система (2.4) могли смо доћи и скицарањем графика функције  $x'(x) = r - x - e^{-x}$  помоћу рачунара за различите вредности параметра  $r$  (слика 2.5).  $\triangle$



Слика 2.5: График функције  $x'(x) = r - x - e^{-x}$  за различите вредности параметра  $r$

Раније смо рекли да једначине (2.2) и (2.3) представљају нормалне форме за све једнодимензионалне динамичке системе у којима долази до седло-чвор бифуркације. Међутим, систем (2.4) из претходног примера очигледно није таквог облика (аналитичког израза), а ипак смо видели да и код њега долази до седло-чвор бифуркације. Сада желимо да покажемо како се помоћу Тејлоровог развоја у околини положаја равнотеже  $x^* = 0$  и одређених координатних трансформација тај систем може свести на један од поменутих прототипских облика. Наиме, развојем функције  $e^{-x}$  у Тејлоров ред у околини положаја равнотеже  $x^* = 0$  у којем долази до бифуркације, закључно са квадратним чланом, добијамо да је

$$x' = r - x - e^{-x} = r - x - \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = (r - 1) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Применом погодне координатне трансформације израз  $x' = (r - 1) - \frac{1}{2}x^2$  постаје еквивалентан изразу  $z' = m - z^2$ , што јесте нормална форма седло-чвор бифуркације.

Ову причу можемо и да уопшtimo. Претпоставимо да је дат једнодимензионални динамички систем (2.1), код којег долази до седло-чвор бифуркације за  $r = r_c$  и  $x = x^*$  ( $x^*$  је положај равнотеже датог система). Развојем у Тејлоров ред функције  $f(x, r)$ , посматране као функције од два аргумента, у околини тачке  $(x^*, r_c)$  добијамо

$$x' = f(x, r) = f(x^*, r_c) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, r_c)} + (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x^*, r_c)} + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x^*, r_c)} + \dots,$$

где смо занемарили све чланове развоја који нису тренутно наведени (квadratне по  $(r - r_c)$ , кубне по  $(x - x^*)$  и мешовите чланове). Како је  $x^*$  положај равнотеже система (2.1) за вредност параметра  $r = r_c$ , то је  $f(x^*, r_c) = 0$ . Додатно, тангентни услов седло-чвор бифуркације (крива  $f(x, r)$  мора да тангира  $x$ -осу када је  $r = r_c$ )

даје да мора важити и  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, r_c)} = 0$ . Ако уведемо ознаке

$$a = \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x^*, r_c)} \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x^*, r_c)},$$

добијамо да је

$$x' \approx a(r - r_c) + b(x - x^*)^2. \quad (2.7)$$

Једначина (2.7) се помоћу погодне одабраних координатних трансформација може свести на нормалну форму (2.2).

## 2.3 Транскритична бифуркација

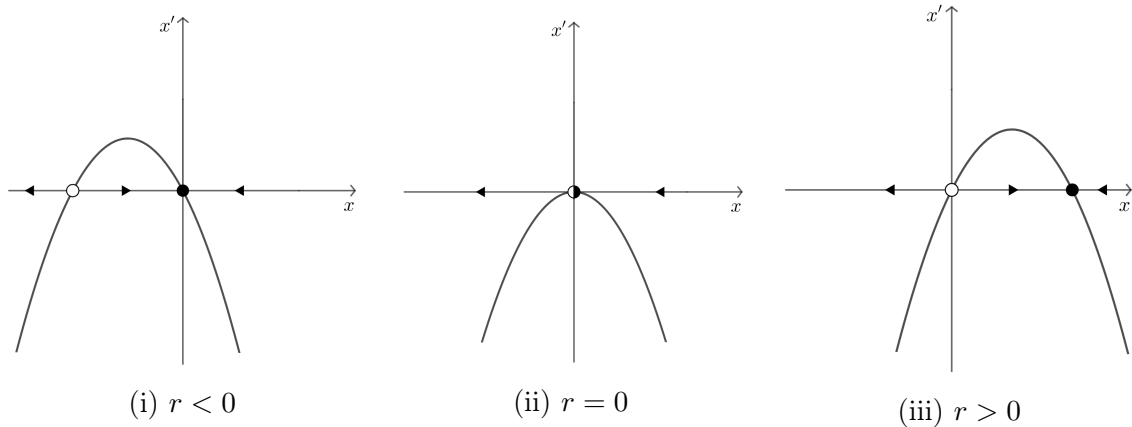
Постоје одређени научни или практични проблеми у чијим математичким моделима положаји равнотеже морају да постоје за све вредности контролног параметра, тј. никад потпуно не нестану. На пример, у логистичком моделу и другим моделима раста популације неке врсте, увек постоји бар један положај равнотеже, без обзира на вредност стопе раста те популације, а то је када је бројност популације једнака нули, односно када нема јединки у популацији. Међутим, тај положај равнотеже може да промени своју стабилност, односно да са променом вредности параметра пређе из стабилног у нестабилно стање или обратно. Стандардни механизам за такве промене стабилности представља **транскритична бифуркација**.

Основни пример једнодимензионалног динамичког система код којег долази до транскритичне бифуркације дат је једначином

$$x' = rx - x^2, \quad (2.8)$$

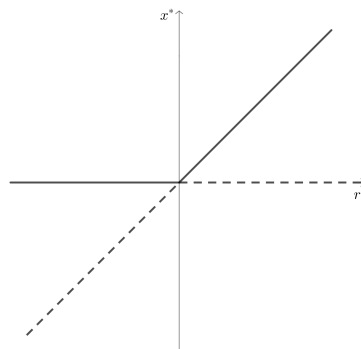
где је  $r$  реални контролни параметар.

Положаји равнотеже једначине (2.8) представљају решења једначине  $x(r - x) = 0$ . Јасно је да је  $x_1^* = 0$  положај равнотеже за све вредности параметра  $r$ . Када је  $r = 0$  то је и једини положај равнотеже, док за  $r \neq 0$  имамо и други положај равнотеже  $x_2^* = r$ . Може се показати да је за  $r < 0$  положај равнотеже  $x_1^* = 0$  стабилан, а  $x_2^* = r$  нестабилан, док за  $r > 0$  ова два положаја равнотеже „размењују” стабилност –  $x_1^*$  постаје нестабилан, а  $x_2^*$  стабилан (слика 2.6).



Слика 2.6: Фазни портрет једначине (2.8) за различите вредности параметра  $r$

Дакле, транскритичну бифуркацију карактерише следеће: за  $r < r_c$ , где је  $r_c$  бифуркациона тачка (у овом случају  $r_c = 0$ ), имамо два положаја равнотеже – један стабилан, други нестабилан; за  $r = r_c$  та два положаја равнотеже се „сударају” и стапају у један полустабилни положај равнотеже, док за  $r > r_c$  поново имамо два положаја равнотеже, само што су овог пута они променили стабилност у односу на случај када је  $r < r_c$  – онај који је био нестабилан сада постаје стабилан и обратно.



Слика 2.7: Бифуркациони дијаграм једначине (2.8)

Слично као код седло–чвор бифуркације и овде се испоставља да се једначине свих једнодимензионалних динамичких система код којих долази до транскритичне бифуркације погодним трансформацијама у близини бифуркационе тачке могу свести на облик (2.8), који се стога назива нормалном формом транскритичне бифуркације.

Истакнимо још једном важну разлику између седло–чвор и транскритичне бифуркације: за разлику од седло–чвор бифуркације, где у једном тренутку положаји равно-

теже нестају, код транскритичне се то никад не догађа, већ положаји равнотеже само „размењују” стабилност.

**Пример 2.** Дат је динамички систем првог реда

$$x' = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx}), \quad (2.9)$$

где су  $a$  и  $b$  реални параметри. Пре свега, приметимо да је  $x_1^* = 0$  положај равнотеже система (2.9) за све вредности параметара  $a$  и  $b$ , будући да је

$$0 \cdot (1 - 0^2) - a(1 - e^0) = 0 - a(1 - 1) = 0.$$

За вредности  $x$  које су блиске нули можемо применити Тејлоров развој за функцију  $e^{-bx}$  и добијамо да је

$$1 - e^{-bx} = 1 - \left( 1 - bx + \frac{b^2 x^2}{2} + o(x^2) \right) = bx - \frac{1}{2} b^2 x^2 + o(x^2).$$

Стога је

$$x' = x - x^3 - abx + \frac{1}{2} ab^2 x^2 + o(x^2) = (1 - ab)x + \left( \frac{1}{2} ab^2 \right) x^2 + o(x^2),$$

што може да се сведе на нормалну форму транскритичне бифуркације. Како је овде  $r = \frac{2(1 - ab)}{ab^2}$ , закључујемо да до бифуркације долази када је  $1 - ab = 0$ , тј.  $ab = 1$ .

Одредимо приближно и други, нетривијални положај равнотеже система (2.9). Добићемо га решавањем једначине  $1 - ab + \frac{1}{2} ab^2 x \approx 0$ , одакле је

$$x_2^* \approx \frac{2(ab - 1)}{ab^2}.$$

△

## 2.4 Виласта бифуркација

Још један тип бифуркације који може да се јави код једнодимензионалних динамичких система јесте тзв. **виласта бифуркација**<sup>2</sup>. Њена основна карактеристика је да се услед промене вредности параметра положаји равнотеже појављују, односно нестају у симетричним паровима. Зато је овај тип бифуркације типичан за физичке системе у којима постоји неки вид симетрије (нпр. просторна симетрија лево–десно).

Постоје два типа виласте бифуркације: **наткритична** (суперкритична) и **поткритична** (субкритична) виласта бифуркација. У наставку ћемо их засебно размотрити.

---

<sup>2</sup>pitchfork bifurcation (енг.)

### 2.4.1 Наткритична виласта бифуркација

Нормална форма наткритичне виласте бифуркације је

$$x' = rx - x^3, \quad (2.10)$$

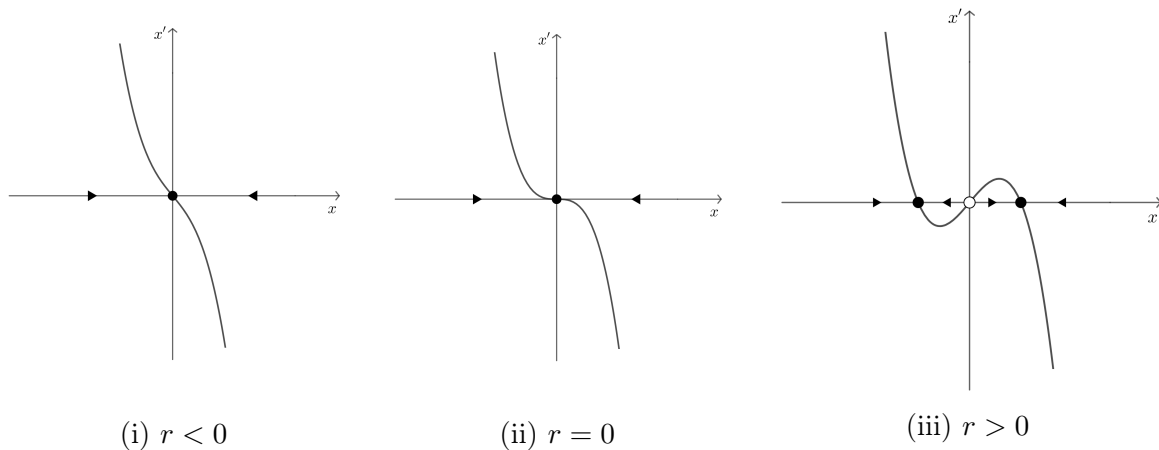
где је  $r$  реални контролни параметар.

Пре свега, приметимо да је једначина (2.10) инваријантна при смени  $x \mapsto -x$ . Заиста, имамо да је

$$(-x)' = -x' = r(-x) - (-x)^3 = -(rx - x^3),$$

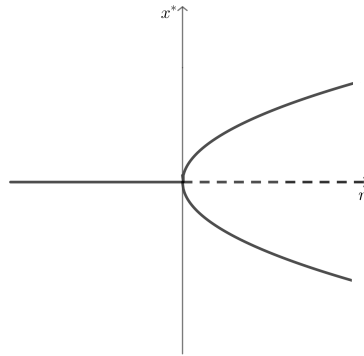
што након множења обе стране једнакости са  $-1$  даје управо једначину (2.10). Ова чињеница представља математички изражену симетрију коју смо раније споменули.

Одредимо сада положаје равнотеже једначине (2.10). Њих налазимо као решења једначине  $rx - x^3 = 0$ , тј.  $x(r - x^2) = 0$ . Јасно је да је  $x_1^* = 0$  положај равнотеже за све вредности параметра  $r$ . За  $r < 0$  једначина  $x^2 = r$  нема реалних решења, стога је  $x_1^* = 0$  у том случају једини положај равнотеже (и то стабилан). Исто важи и за  $r = 0$ . Али, за  $r > 0$  појављују се још два положаја равнотеже:  $x_2^* = \sqrt{r}$  и  $x_3^* = -\sqrt{r}$ , који су стабилни, док је тада  $x_1^* = 0$  нестабилан положај равнотеже.



Слика 2.8: Фазни портрет једначине (2.10) за различите вредности параметра  $r$

Порекло назива „виласта” јасније је када се погледа бифуркациони дијаграм ове бифуркације (слика 2.9). Епитет „наткритична” (или „суперкритична”) могао би се објаснити тиме што до „рачвања” долази *након* проласка кроз бифуркациону тачку  $r = 0$ , тј. за вредности параметра  $r$  *изнад* (односно *веће од*) бифуркационе (критичне) вредности.



Слика 2.9: Бифуркациони дијаграм једначине (2.10)

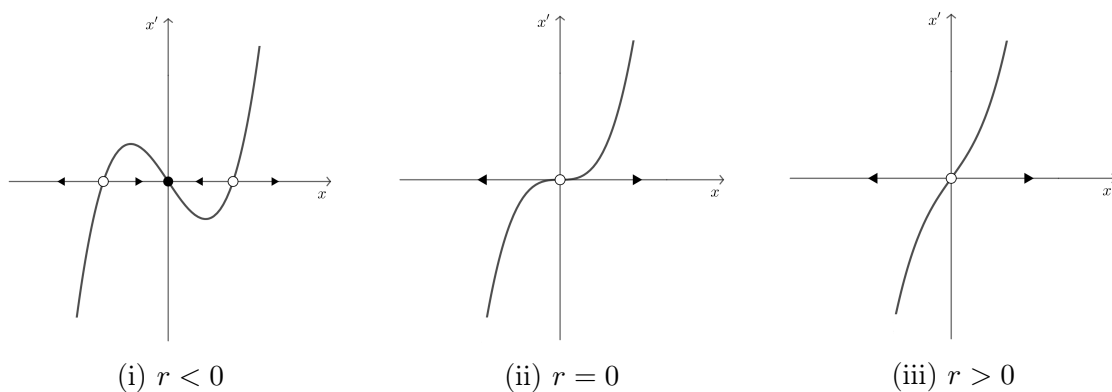
### 2.4.2 Поткритична виласта бифуркација

Нормална форма поткритичне виласте бифуркације је

$$x' = rx + x^3, \quad (2.11)$$

где је  $r$  реални контролни параметар.

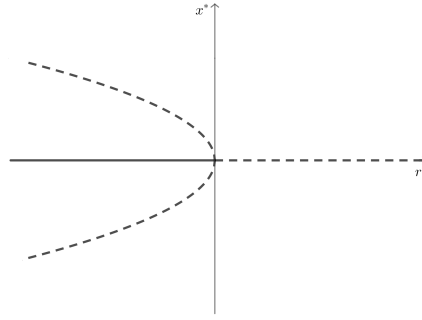
Положаје равнотеже једначине (2.11) налазимо решавањем једначине  $x(r + x^2) = 0$ . Јасно је да за сваку вредност параметра  $r$  имамо бар један положај равнотеже  $x_1^* = 0$ . За  $r < 0$  једначина  $r + x^2 = 0$  има два реална решења, која представљају два додатна положаја равнотеже:  $x_2^* = -\sqrt{-r}$  и  $x_3^* = \sqrt{-r}$ . Одређивањем знака  $f'(x_i^*)$  за  $i \in \{1, 2, 3\}$ , где је  $f(x) = rx + x^3$ , утврђујемо стабилност ових положаја равнотеже – испоставиће се да је  $x_1^*$  стабилан, док су преостала два нестабилна (слика 2.10(i)). За  $r = 0$  имамо само један положај равнотеже  $x_1^* = 0$ , који је нестабилан (слика 2.10(ii)), а исто важи и за  $r > 0$  (слика 2.10(iii)), будући да једначина  $r + x^2 = 0$  у том случају нема реалних решења.



Слика 2.10: Фазни портрет једначине (2.11) за различите вредности параметра  $r$

На слици 2.11 приказан је бифуркациони дијаграм поткритичне виласте бифуркације. Нетривијални положаји равнотеже  $x_2^* = -\sqrt{-r}$  и  $x_3^* = \sqrt{-r}$  појављују се за вредности параметра *испод* (тј. *мање од*) бифуркационе (критичне) вредности  $r = 0$ , па отуда потиче епитет „поткритична” (или „субкритична”).





Слика 2.11: Бифуркациони дијаграм система (2.11)

Дакле, у случају поткритичне виласте бифуркације, као и у случају наткритичне,  $x_1^* = 0$  је стабилан положај равнотеже за  $r < 0$ , а нестабилан за  $r > 0$ . Међутим, за разлику од наткритичног случаја, овде његова нестабилност за  $r > 0$  није последица кубног члана једначине (2.10); напротив, кубни члан сада доприноси да трајекторије иду у бесконачност. Овај ефекат доводи до „експлозије”: испоставља се да  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  за коначно време, без обзира на почетни услов  $x(0) = x_0 \neq 0$ .

Заиста, посматрајмо Кошијев проблем

$$x' = rx + x^3, \quad (2.12)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.13)$$

где је  $r > 0$  и  $x_0 \neq 0$ . Једначина (2.12) је диференцијална једначина која раздваја променљиве и њено опште решење је облика  $x(t) = \pm \sqrt{\frac{Cr}{e^{-2rt} - C}}$ , где је  $C > 0$ .

Из почетног услова (2.13) налазимо да је  $C = \frac{x_0^2}{r + x_0^2}$ , те је решење посматраног Кошијевог проблема дато са

$$x(t) = \sqrt{\frac{x_0^2 r}{(x_0^2 + r)e^{-2rt} - x_0^2}}$$

ако је  $x_0 > 0$ , односно

$$x(t) = -\sqrt{\frac{x_0^2 r}{(x_0^2 + r)e^{-2rt} - x_0^2}}$$

ако је  $x_0 < 0$ . У оба случаја добијено Кошијево решење дефинисано је када је  $(x_0^2 + r)e^{-2rt} - x_0^2 > 0$ , односно  $t \in (-\infty, t_c)$ , где је  $t_c = \frac{\ln \frac{x_0^2 + r}{x_0^2}}{2r}$ . Сада је јасно да када  $t \rightarrow t_c^-$  имамо да  $(x_0^2 + r)e^{-2rt} - x_0^2 \rightarrow 0^+$ , те стога  $x(t) \rightarrow +\infty$  ако је  $x_0 > 0$ , односно  $x(t) \rightarrow -\infty$  ако је  $x_0 < 0$ .

У реалним физичким системима оваквој експлозивној нестабилности се обично супротставља утицај чланова вишег реда. Како желимо да систем остане инваријантан у односу на смену  $x \mapsto -x$ , први стабилизирајући члан мора бити  $x^5$ . Тако добијемо један једнодимензионални динамички систем код којег долази до поткритичне

виласте бифуркације:

$$x' = rx + x^3 - x^5, \quad (2.14)$$

где без губитка општости можемо да претпоставимо да су коефицијенти уз  $x^3$  и  $x^5$  једнаки 1 (ако нису, одговарајућим скалирањем бисмо свели систем на облик у којем јесу).

Анализирајмо сада положаје равнотеже система (2.14) и њихову стабилност у зависности од вредности параметра  $r$ . Како је

$$rx + x^3 - x^5 = x(r + x^2 - x^4),$$

то је  $x_1^* = 0$  положај равнотеже за све вредности параметра  $r$ . Ако дефинишемо функцију  $f(x) = rx + x^3 - x^5$ , налазимо да је  $f'(x_1^*) = r$ , па је за  $r < 0$  положај равнотеже  $x_1^*$  стабилан, док је за  $r > 0$  нестабилан.

Преостали положаји равнотеже представљају решења биквадратне једначине

$$x^4 - x^2 - r = 0. \quad (2.15)$$

Како је дискриминанта једначине (2.15) једнака  $1 + 4r$ , закључујемо да за  $r < -\frac{1}{4}$  једначина (2.15) нема реалних решења, стога у том случају нема других положаја

равнотеже осим  $x_1^* = 0$ . Кад је  $r = -\frac{1}{4}$ , једначина (2.15) има једно двоструко решење  $x^2 = \frac{1}{2}$ , одакле следи да у том случају постоје два додатна положаја равнотеже

система (2.14),  $x_{2,3}^* = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Испоставиће се да су они полустабилни (то се најлакше

види са скице графика функције  $f(x)$  за  $r = -\frac{1}{4}$ , што је приказано на слици 2.12(ii)).

За  $r > -\frac{1}{4}$  из једначине (2.15) налазимо да је

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4r}}{2}.$$

За  $r > 0$  је  $1 - \sqrt{1 + 4r} < 0$ , тако да преостаје само решење  $x^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4r}}{2}$ , одакле закључујемо да за  $r > 0$  постоје још два положаја равнотеже

$$x_2^* = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4r}}{2}} \quad \text{и} \quad x_3^* = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4r}}{2}}.$$

За  $-\frac{1}{4} < r < 0$  имамо да је  $1 - \sqrt{1 + 4r} > 0$ , стога тада, поред  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  и  $x_3^*$ , постоје још

два положаја равнотеже, за које важи да је  $x^2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4r}}{2}$ , тј.

$$x_4^* = -\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 + 4r}}{2}} \quad \text{и} \quad x_5^* = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 + 4r}}{2}}.$$

Испитајмо сада стабилност ових положаја равнотеже. Налазимо да је

$$f'(x_2^*) = f'(x_3^*) = -(1 + 4r) - \sqrt{1 + 4r} < 0$$

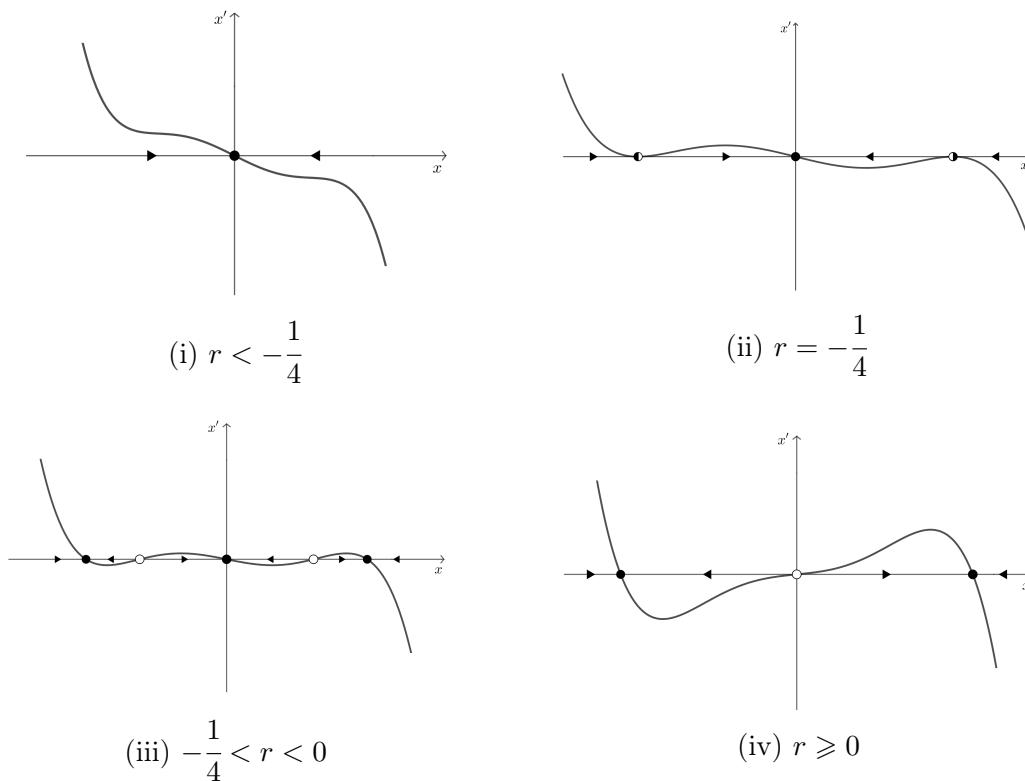
за све вредности  $r > -\frac{1}{4}$ , одакле следи да су положаји равнотеже  $x_2^*$  и  $x_3^*$  стабилни.

С друге стране, имамо да је

$$f'(x_4^*) = f'(x_5^*) = \sqrt{1 + 4r} - (1 + 4r),$$

те је  $f'(x_4^*) > 0$  за  $-\frac{1}{4} < r < 0$ , за које положаји равнотеже  $x_4^*$  и  $x_5^*$  постоје, одакле закључујемо да су ова два положаја равнотеже нестабилна.

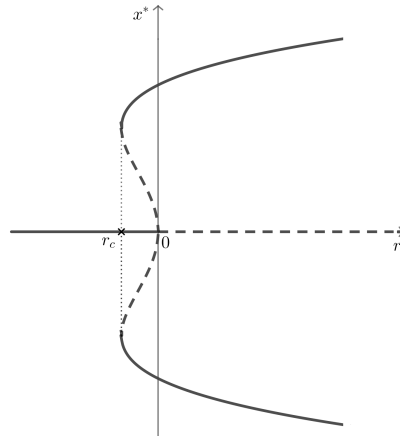
До закључака о броју и стабилности положаја равнотеже једначине (2.14) могли смо доћи и на лакши начин, скицирањем фазног портрета те једначине помоћу рачунара за различите вредности параметра  $r$  (слика 2.12).



Слика 2.12: Фазни портрет једначине (2.14) за различите вредности параметра  $r$

На слици 2.13 приказан је бифуркациони дијаграм једначине (2.14). Вредност  $r_c$

која је означена на слици је заправо  $-\frac{1}{4}$ . Када је  $r = 0$ , у систему (2.14) долази до поткритичне виласте бифуркације, што се види и са приказаног бифуркационог дијаграма.



Слика 2.13: Бифуркациони дијаграм једначине (2.14)

За  $r_c < r < 0$  постоје два квалитативно различита стабилна стања – једно је  $x_1^* = 0$ , а друго представљају положаји равнотеже  $x_2^*$  и  $x_3^*$ . Којем од ових стабилних положаја равнотеже ће тежити трајекторије динамичког система (2.14) кад  $t \rightarrow +\infty$  зависи од почетног услова  $x(0) = x_0$ . Одатле можемо закључити да је координатни почетак стабилан у односу на мале пертурбације, али не и у односу на велике – дакле, он је *локално* стабилан, али не и глобално.

Постојање различитих стабилних стања омогућава да са променом вредности параметра  $r$  долази до појаве скокова и *хистерезиса* (одсуства реверзибилности при промени вредности параметра  $r$ ).

Приметимо да бифуркација која се јавља за  $r = r_c$  јесте седло–чвор бифуркација, јер се стабилни и нестабилни положаји равнотеже појављују „као гром из ведре неба”, што је типично за овај тип бифуркације.

## Глава 3

# Бифуркације у дводимензионалним динамичким системима

### 3.1 Увод

У случају динамичких система димензије веће од 1 који зависе од једног или више параметара, услед варијације вредности параметара не само да може доћи до промене броја или стабилности положаја равнотеже, већ сада то исто може да се деси и са затвореним трајекторијама – граничним циклима.

Нека је дат динамички систем

$$x' = f(x, \mu), \quad (3.1)$$

при чему је  $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  непозната векторска функција,  $n \geq 2$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^k$  параметар и  $f \in C^1(D)$ , где је  $D$  отворен подскуп од  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Уобичајена дефиниција бифуркације у вишедимензионалном динамичком систему (3.1) укључује концепт *тополошке еквивалентности*: кажемо да у систему (3.1) долази до бифуркације за вредност параметра  $\mu = \mu_0$  ако постоји параметар  $\mu_1$  произвољно близу параметра  $\mu_0$  такав да динамички системи  $x' = f(x, \mu_0)$  и  $x' = f(x, \mu_1)$  нису тополошки еквивалентни.

У овом поглављу ћемо се ограничити на дводимензионалне динамичке системе. Размотрићемо различите типове бифуркација који могу да се јаве у њима (мада се аналогне бифуркације појављују и у системима већих димензија). Као што је речено у уводном делу главе 2, код дводимензионалних система, поред локалних, може да дође и до глобалних бифуркација, те ћемо њих такође размотрити у наставку.

### 3.2 Седло–чвор бифуркација

Бифуркације које смо разматрали у глави 2, типичне за једнодимензионалне динамичке системе, имају своје пандане и у системима већих димензија. Прва од тих бифуркација је седло–чвор бифуркација, која представља основни механизам за стварање, односно уништавање положаја равнотеже. Прототипски пример дводимензио-

налног динамичког система у којем долази до ове бифуркације дат је са

$$\begin{aligned}x' &= \mu - x^2, \\y' &= -y,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где је  $\mu$  реални контролни параметар. Приметимо да прва једначина система (3.2) представља раније разматрану нормалну форму седло-чвор бифуркације за једно-димензионалне динамичке системе, док је друга једначина линеарна и важи да  $y(t) \rightarrow 0$  кад  $t \rightarrow +\infty$ . То заправо значи да је динамика система (3.2) суштински одређена првом једначином тог система.

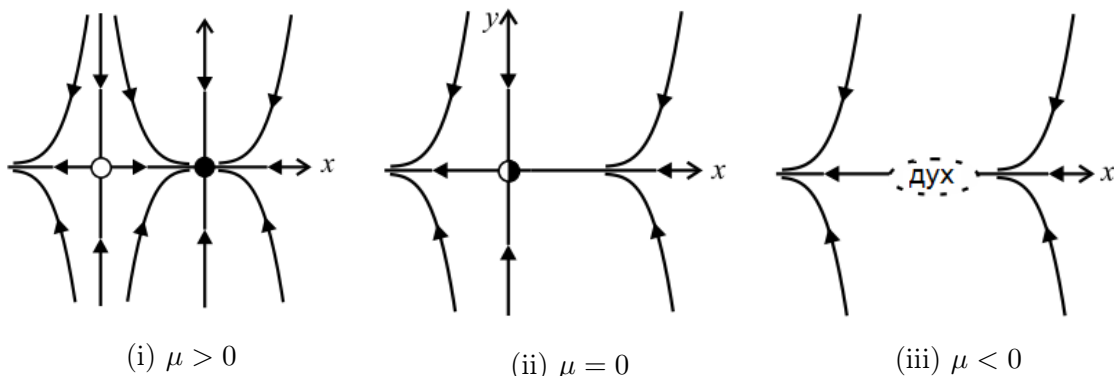
Анализирајмо фазни портрет динамичког система (3.2) у зависности од вредности параметра  $\mu$ . За  $\mu > 0$  дати систем има два положаја равнотеже,  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ . Јакобијева матрица система (3.2) је

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Када у матрицу  $J(x, y)$  уврстимо координате положаја равнотеже  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ , добијамо матрице

$$J_1 = J(\sqrt{\mu}, 0) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad J_2 = J(-\sqrt{\mu}, 0) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Сопствене вредности матрице  $J_1$  су  $-2\sqrt{\mu}$  и  $-1$ , које су обе реалне и негативне, одакле на основу теореме Љапунова следи да је положај равнотеже  $(\sqrt{\mu}, 0)$  асимптотски стабилан и представља стабилан чвор. С друге стране, матрица  $J_2$  има сопствене вредности  $2\sqrt{\mu}$  и  $-1$ , које су такође реалне, али различитог знака, те је положај равнотеже  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  нестабилан и представља седло (слика 3.1(i)). Смањивањем вредности параметра  $\mu$  седло и чвор се приближавају једно другом, стапајући се у један полустабилан положај равнотеже  $(0, 0)$  када је  $\mu = 0$  (слика 3.1(ii)) и најзад нестају за  $\mu < 0$ , када систем (3.2) нема положаје равнотеже (слика 3.1(iii)).



Слика 3.1: Фазни портрет система (3.2) за различите вредности параметра  $\mu$

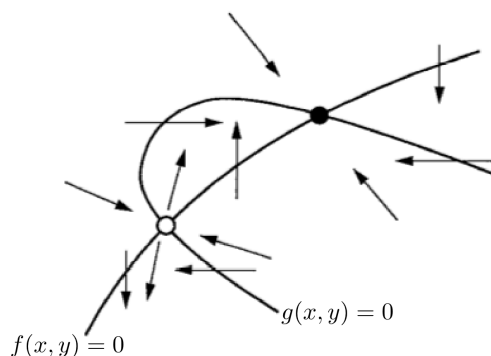
Чак и након што се положаји равнотеже међусобно „пониште” (за  $\mu < 0$ ), они настављају да утичу на фазни портрет – у околини места њиховог „судара” долази до

појаве тзв. *уског грла*<sup>1</sup>, које се назива и  $\partial ux^2$  и представља узак регион који „увлачи” трајекторије и значајно успорава њихов пролазак кроз тај део фазне равни.

Испоставља се да су фазни портрети свих дводимензионалних система у којима долази до седло–чвор бифуркације слични онима приказаним на слици 3.1. Размотримо сада општији случај. Нека је дат дводимензионални динамички систем

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), \\y' &= g(x, y),\end{aligned}\tag{3.3}$$

који зависи од реалног параметра  $\mu$ . Претпоставимо да се за неку вредност параметра  $\mu$   $x$ –нула и  $y$ –нула изоклина датог система секу као што је приказано на слици 3.2. Свака пресечна тачка изоклина одговара једном положају равнотеже система (3.3), јер је у њој истовремено  $f(x, y) = 0$  и  $g(x, y) = 0$ . Стога, да бисмо закључили како се при промени вредности параметра  $\mu$  мења број и стабилност положаја равнотеже система (3.3), довољно је да посматрамо шта се догађа са пресечним тачкама изоклина за различите вредности датог параметра. Претпоставимо сада да се са променом вредности параметра  $\mu$  изоклине удаљавају једна од друге, долазећи у једном тренутку, за вредност параметра  $\mu = \mu_c$ , у тангентни положај. Њиховим удаљавањем положаји равнотеже, тј. пресечне тачке изоклина, се међусобно приближавају, „сударујући” се и стапајући у јединствен положај равнотеже када је  $\mu = \mu_c$ . Са даљом променом вредности параметра  $\mu$  изоклине се потпуно раздвајају, тако да више немају пресечних тачака, те самим тим систем (3.3) више нема положаје равнотеже. Сви системи који пролазе кроз седло–чвор бифуркацију локално се понашају на описани начин.



Слика 3.2:  $x$ –нула и  $y$ –нула изоклина динамичког система (3.3)

<sup>1</sup>bottleneck (енг.)

<sup>2</sup>ghost (енг.)

### 3.3 Транскритичне и виласте бифуркације

Прототипски примери дводимензионалних динамичких система код којих долази до транскритичне или виласте бифуркације конструишу се аналогно као у случају седло–чвор бифуркације. Према томе, они су дати са:

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - x^2, & y' &= -y && \text{(транскритична бифуркација)} \\ x' &= \mu x + x^3, & y' &= -y && \text{(поткритична виласта бифуркација)} \\ x' &= \mu x - x^3, & y' &= -y && \text{(наткритична виласта бифуркација)} \end{aligned}$$

Анализа сваког од наведених система одвија се по истом шаблону, тако да ћемо посебно размотрити само наткритичну виласту бифуркацију.

Желимо, дакле, да скицирамо фазни портрет динамичког система

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - x^3, \\ y' &= -y \end{aligned} \tag{3.4}$$

за различите вредности реалног параметра  $\mu$ . Приметимо да је координатни почетак један положај равнотеже датог система за све вредности параметра  $\mu$ , док  $x$ -координате потенцијалних преосталих положаја равнотеже представљају решења једначине  $x^2 = \mu$ . Одатле закључујемо да када је  $\mu \leq 0$  не постоје други положаји равнотеже, осим  $(0, 0)$ , док за  $\mu > 0$  имамо два додатна положаја равнотеже,  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(\sqrt{\mu}, 0)$ . Јакобијева матрица система (3.4) је

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Заменом координата положаја равнотеже  $(0, 0)$  у матрицу  $J(x, y)$  добијамо матрицу

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

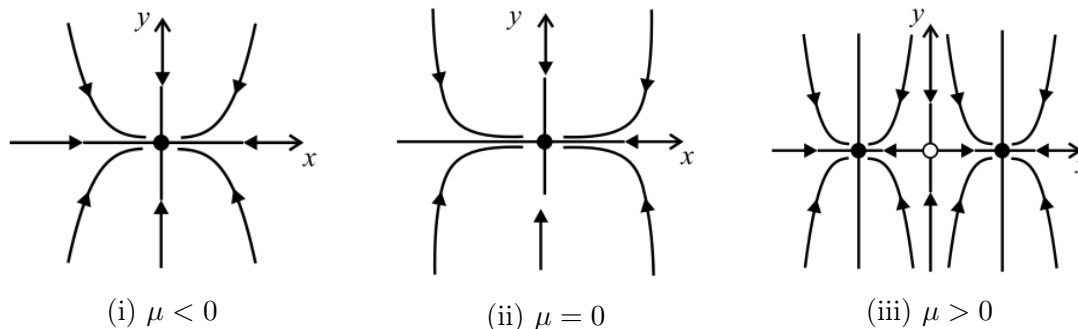
чије сопствене вредности су  $\mu$  и  $-1$ . Према томе, кад је  $\mu < 0$ , одговарајућа Јакобијева матрица има реалне и негативне сопствене вредности, одакле на основу теореме Љапунова следи да је положај равнотеже  $(0, 0)$  у том случају асимптотски стабилан и представља стабилан чвор (слика 3.3(i)). С друге стране, кад је  $\mu > 0$ , сопствене вредности одговарајуће Јакобијеве матрице су реалне, али супротног знака, па у том случају положај равнотеже  $(0, 0)$  је нестабилан и представља седло (слика 3.3(iii)). За  $\mu = 0$  координатни почетак је стабилан чвор, као и за  $\mu < 0$ , али у том случају имамо веома споро опадање у правцу  $x$ -осе, уместо дотадашњег експоненцијалног опадања (ова појава назива се *критичним успоравањем*) (слика 3.3(ii)).

Када у матрицу  $J(x, y)$  уврстимо координате преостала два положаја равнотеже система (3.4), која постоје за  $\mu > 0$ , добијамо матрицу



$$J(-\sqrt{\mu}, 0) = J(\sqrt{\mu}, 0) = \begin{bmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

чије сопствене вредности су  $-2\mu$  и  $-1$ , дакле, реалне су и негативне, одакле следи да положаји равнотеже  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(\sqrt{\mu}, 0)$  представљају стабилне чворове (слика 3.3(iii)).



Слика 3.3: Фазни портрет система (3.4) за различите вредности параметра  $\mu$

У глави 2, кад смо говорили о виластим бифуркацијама у једнодимензионалним динамичким системима, рекли смо да су оне карактеристичне за системе у којима постоји неки вид симетрије. Аналогно важи и за вишедимензионалне динамичке системе – наредни пример то и илуструје.

**Пример 3.** Дат је динамички систем

$$\begin{aligned} x' &= \mu x + y + \sin x, \\ y' &= x - y. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Показаћемо да у систему (3.5) долази до наткритичне виласте бифуркације у и скицираћемо фазни портрет датог система у околини координатног почетка (за вредност параметра  $\mu$  блиску бифуркационој вредности  $\mu_c$ ).

Приметимо најпре да је дати систем инваријантан при смени  $x \mapsto -x, y \mapsto -y$ , што значи да ће његов фазни портрет бити централно симетричан у односу на координатни почетак. Координатни почетак је положај равнотеже система (3.5) за све вредности параметра  $\mu$ . Јакобијева матрица датог система је

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \mu + \cos x & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

а кад у њу уврстимо координате положаја равнотеже  $(0, 0)$  добијамо матрицу

$$J_0 = J(0, 0) = \begin{bmatrix} \mu + 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Како је  $p = \text{Tr } J_0 = \mu$  и  $q = \det J_0 = -(\mu + 2)$ , те је  $\Delta = p^2 - 4q = (\mu + 2)^2 + 4 > 0$ , закључујемо да је положај равнотеже  $(0, 0)$  за  $\mu < -2$  стабилан чвор, а за  $\mu > -2$

седло. Стога у систему (3.5) долази до бифуркације за вредност параметра  $\mu_c = -2$ . Да бисмо показали да је у питању виласта бифуркација и утврдили да ли је она наткритична или поткритична, потребно је да пронађемо пар симетричних положаја равнотеже у близини координатног почетка и да видимо да ли се они појављују за вредност параметра  $\mu$  мању или већу од  $\mu_c$ . Положаји равнотеже  $(x, y)$  морају да задовољавају једначину  $x - y = 0$ , тј.  $x = y$ . Када у једначини  $\mu x + y + \sin x = 0$  ставимо да је  $y = x$ , добијамо једначину  $(\mu + 1)x + \sin x = 0$ . Једно решење ове једначине свакако је  $x = 0$ , али оно нам даје познат положај равнотеже  $(0, 0)$ . Сада нас интересују нетривијална решења ове једначине, али која су блиска нули, па ћемо применити Маклоренов развој на функцију  $\sin x$ . Добијамо

$$(\mu + 1)x + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = 0.$$

Дељењем последње једначине са  $x$  и занемаривањем чланова вишег реда добијамо

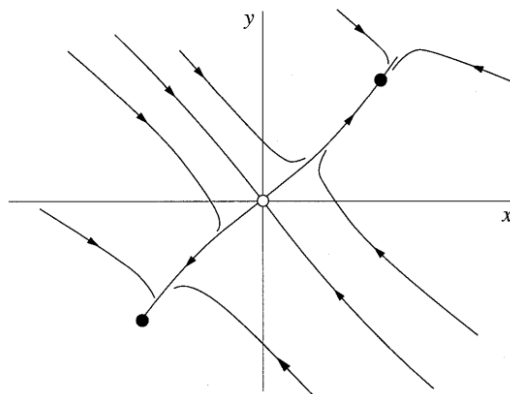
$$\mu + 2 - \frac{x^2}{6} \approx 0,$$

одакле налазимо да су  $x$ -координате траженог пара симетричних положаја равнотеже у близини координатног почетка приближно дате са  $x^* \approx \pm\sqrt{6(\mu + 2)}$  за  $\mu$  мало веће од  $\mu_c = -2$ . Стога закључујемо да је бифуркација до које долази у систему (3.5) за вредност параметра  $\mu = \mu_c = -2$  наткритична виласта (да је у питању поткритична виласта бифуркација, пар симетричних положаја равнотеже би постојао за  $\mu < \mu_c$ ). На основу својства наткритичне виласе бифуркације, без посебног испитивања, знамо да су два новонастала положаја равнотеже стабилна.

Да бисмо скицирали фазни портрет система (3.5) у близини координатног почетка за вредност параметра  $\mu$  мало већу од  $-2$ , потражићемо сопствене векторе Јакобијеве матрице датог система у тачки  $(0, 0)$ . То може да се уради и прецизно, али можемо и да се послужимо једноставном апроксимацијом да је  $\mu \approx -2$ , одакле следи да је поменута Јакобијева матрица приближно дата са

$$J_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Сопствене вредности матрице  $J_0$  су  $0$  и  $-2$ , а одговарајући сопствени вектори су  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ , редом. За вредност параметра  $\mu$  мало већу од  $-2$  координатни почетак постаје седло, што значи да нулта сопствена вредност постаје позитивна. Сада имамо довољно информација за скицу фазног портрета система (3.5) (слика 3.4).



Слика 3.4: Фазни портрет динамичког система (3.5) у близини координатног почетка за вредност параметра  $\mu$  мало већу од  $-2$

Приметимо да је због апроксимација које смо направили слика 3.4 валидна само локално, како у параметарском, тако и у фазном простору. Дакле, ако се не налазимо у околини координатног почетка или вредност параметра  $\mu$  није близу  $\mu_c = -2$ , закључци до којих смо дошли више не важе.  $\triangle$

### 3.4 Хопфове бифуркације

У овом одељку бавићемо се једним типом бифуркација који је карактеристичан искључиво за динамичке системе димензије веће од 1. То су тзв. Хопфове<sup>3</sup> бифуркације, путем којих положај равнотеже може да изгуби своју стабилност без „сударња” са другим положајем равнотеже.

Претпоставимо да дводимензионални динамички систем који зависи од реалног параметра  $\mu$  има стабилан положај равнотеже за неку вредност тог параметра. Размотримо на које начине тај положај равнотеже може да буде дестабилизован. Одговор се крије у сопственим вредностима Јакобијеве матрице тог динамичког система у посматраном положају равнотеже. Како смо претпоставили да је положај равнотеже стабилан, то обе сопствене вредности одговарајуће Јакобијеве матрице морају лежати у левој полуравни комплексне равни (где је  $\text{Re} \lambda < 0$ ) или изузетно једна од њих може бити једнака нули. Према томе, сопствене вредности морају бити или обе реалне и негативне (слика 3.5(i)) или представљати конјуговано–комплексне бројеве са негативним реалним делом (слика 3.5(ii)). Да би положај равнотеже изгубио стабилност, потребно је да услед промене вредности параметра  $\mu$  једна или обе сопствене вредности Јакобијеве матрице „пређу” у десну полураван. Код свих до сада разматраних бифуркација (седло–чвор, транскритичне и виласте), у тренутку кад се бифуркација дешава, бар једна сопствена вредност Јакобијеве матрице била је једнака нули. Другим речима, до бифуркације је долазило кад бар једна реална сопствена

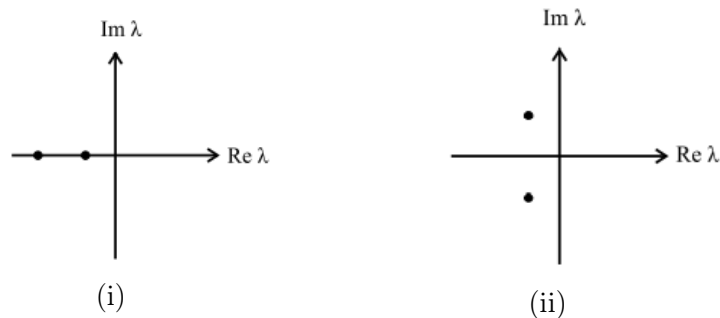
<sup>3</sup>Некад се називају и Поенкаре–Андронов–Хопфовим бифуркацијама.

Henri Poincaré (1854 – 1912) – француски математичар и физичар

Александр Александрович Андроноу (1901 – 1952) – совјетски математичар и физичар

Eberhard Hopf (1902 – 1983) – аустријски математичар и астроном

вредност прође кроз тачку  $\lambda = 0$  на реалној оси. Овде ћемо размотрити други могући сценарио, у којем две конјуговано–комплексне сопствене вредности истовремено прелазе преко имагинарне осе у десну полураван комплексне равни.



Слика 3.5: Сопствене вредности Јакобијеве матрице у стабилном положају равнотеже дводимензионалног динамичког система представљене у комплексној равни

Постоје два типа Хопфових бифуркација: **наткритична** (суперкритична) и **поткритична** (субкритична) Хопфова бифуркација.

### 3.4.1 Наткритична Хопфова бифуркација

До наткритичне Хопфове бифуркације долази када стабилан фокус постане нестабилан фокус, окружен малим, стабилним граничним циклом.

Пример дводимензионалног динамичког система у којем долази до наткритичне Хопфове бифуркације дат је у поларним координатама са

$$\begin{aligned} r' &= \mu r - r^3, \\ \theta' &= \omega + br^2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где су  $\mu$ ,  $\omega$  и  $b$  реални параметри.

Да бисмо видели како се мења тип и стабилност положаја равнотеже система (3.6) са променом вредности параметра  $\mu$ , најпре ћемо да одредимо опште решење датог система. Прва једначина система (3.6) представља диференцијалну једначину која раздваја променљиве и може се показати да је њено опште решење облика

$$r^2(t) = \frac{\mu}{1 - Ce^{-2\mu t}}.$$

Одавде закључујемо да за  $\mu < 0$  важи да  $r(t) \rightarrow 0$  кад  $t \rightarrow +\infty$ , док за  $\mu > 0$  имамо да  $r^2(t) \rightarrow \mu$  кад  $t \rightarrow +\infty$ , одакле следи да  $r(t) \rightarrow \sqrt{\mu}$  кад  $t \rightarrow +\infty$  (јер је  $r(t) \geq 0$  за свако  $t \in \mathbb{R}$ ), а  $r(t) \rightarrow 0$  кад  $t \rightarrow -\infty$ . Друга једначина система (3.6),

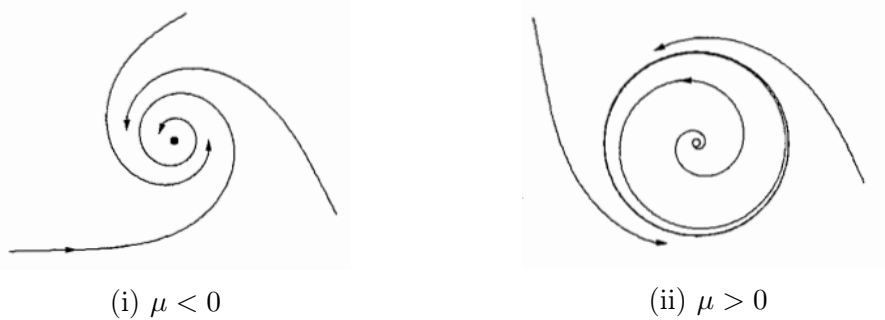
кад заменимо израз који смо добили за  $r^2$ , постаје  $\theta' = \omega + \frac{b\mu}{1 - Ce^{-2\mu t}}$ , што је такође диференцијална једначина која раздваја променљиве, те је и њу лако решити. Добија

се да је њено опште решење облика

$$\theta(t) = \omega t + \frac{b}{2} \ln |e^{2\mu t} - C|.$$

Одавде је јасно да  $|\theta(t)| \rightarrow +\infty$  кад  $t \rightarrow \pm\infty$ . Према томе, за  $\mu < 0$  координатни почетак је стабилан фокус, чији смер ротације зависи од знака параметра  $\omega$  (слика 3.6(i)), док је за  $\mu > 0$  координатни почетак нестабилан фокус, а у  $r = \sqrt{\mu}$  појављује се стабилан гранични цикл (слика 3.6(ii)).

За  $\mu = 0$ , аналогним поступком долази се до закључка да је координатни почетак стабилан фокус.



Слика 3.6: Фазни портрет динамичког система (3.6) за различите вредности параметра  $\mu$

Да бисмо видели како се у току бифуркације понашају сопствене вредности Јакобијеве матрице, напишимо динамички систем (3.6) у Декартовим координатама. Ако уврстимо да је  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$ , добијамо

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \theta - \underbrace{r \sin \theta}_{=y} \cdot \theta' = (\mu r - r^3) \cos \theta - y(\omega + br^2) = (\mu - r^2) \underbrace{r \cos \theta}_{=x} - y(\omega + b(x^2 + y^2)) \\ &= (\mu - (x^2 + y^2))x - y(\omega + b(x^2 + y^2)) = \mu x - \omega y + \text{кубни чланови} \end{aligned}$$

и аналогно

$$y' = \omega x + \mu y + \text{кубни чланови}.$$

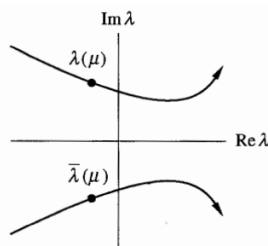
Одавде следи да је Јакобијева матрица система (3.6) у координатном почетку дата са

$$J = \begin{bmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{bmatrix}.$$

Његове сопствене вредности су  $\lambda = \mu \pm i\omega$ . Као што је и очекивано, кад се вредност параметра  $\mu$  мења из негативне у позитивну, сопствене вредности Јакобијеве матрице прелазе из леве у десну полураван комплексне равни.

„Идеализовани” случај наткритичне Хопфове бифуркације, представљен динамичким системом (3.6), илуструје два својства која важе генерално за сваку наткритичну Хопфову бифуркацију. Прво, величина граничног циклуса расте пропорционално са  $\sqrt{\mu - \mu_c}$ , за вредност параметра  $\mu$  блиску бифуркационој вредности  $\mu_c$ . Друго сво-

јство је да је фреквенција граничног циклa (угаона (кружна) фреквенција) приближно дата са  $\omega = \text{Im}\lambda$ , за  $\mu = \mu_c$ . Прецизније, наведена једнакост је тачна у тренутку настанка граничног циклa, а за вредност параметра  $\mu$  близу  $\mu_c$  одступање од једнакости је реда  $O(\mu - \mu_c)$ . Стога је период граничног циклa дат са  $T = \frac{2\pi}{\text{Im}\lambda} + O(\mu - \mu_c)$ . Међутим, посматрани „идеализовани” случај има и нека вештачка својства. Пре свега, у наткритичним Хопфовим бифуркацијама које се срећу у применама, гранични цикл је елипсаст, а не кружан и његов облик постаје дегенерисан како се вредност параметра  $\mu$  удаљава од бифуркационе вредности  $\mu_c$ . Дакле, пример који смо разма-трали типичан је у тополошком, али не и у геометријском смислу. Друго, у нашем идеализованом случају сопствене вредности Јакобијеве матрице се са променом вредности параметра  $\mu$  померају по правој линији у комплексној равни, зато што њихови имагинарни делови не зависе од параметра  $\mu$ . Међутим, у већини реалних ситуација сопствене вредности се крећу по кривој путањи, која имагинарну осу пресеца под нагибом различитим од нуле (слика 3.7).



Слика 3.7

### 3.4.2 Поткритична Хопфова бифуркација

Као и код виластих бифуркација, које такође долазе у наткритичном и поткритичном облику, и овде је поткритични случај сложенији, па чак и потенцијално опасан кад су у питању примене у инжењерству. Наиме, након што у неком динамичком систему дође до поткритичне Хопфове бифуркације, трајекторије тог система „скачу” на удаљени атрактор, што може бити стабилан положај равнотеже, стабилан гранични цикл, бесконачност или – у случају динамичких система димензије три или више – хаотични атрактор.

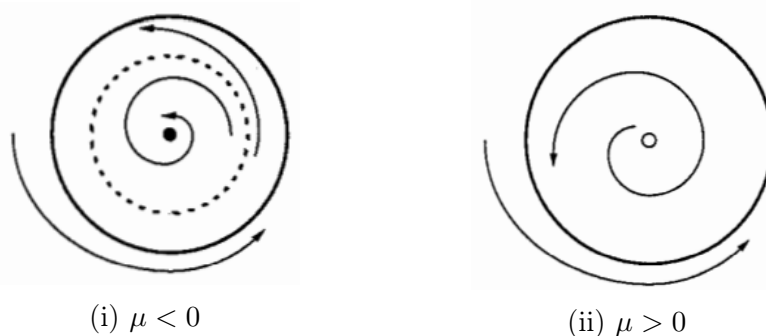
Посматрајмо дводимензионални динамички систем дат у поларним координатама са

$$\begin{aligned} r' &= \mu r + r^3 - r^5, \\ \theta' &= \omega + br^2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где су  $\mu$ ,  $\omega$  и  $b$  реални параметри. Битна разлика између система (3.7) и (3.6) јесте у томе што, за разлику од система (3.6), у систему (3.7) кубни члан  $r^3$  има дестабилизирајући ефекат, тј. он доприноси одвлачењу трајекторија од положаја равнотеже који је координатни почетак.

За  $\mu$  мало мање од нуле (прецизније, за  $-\frac{1}{4} < \mu < 0$ , о чему ће бити речи мало касније,

кад будемо говорили о седло–чвор бифуркацијама цикала) постоје два атрактора – стабилан гранични цикл и стабилан положај равнотеже који је координатни почетак. Између њих се налази нестабилан гранични цикл, који је на слици 3.8(i) представљен испрекиданом линијом. Како се вредност параметра  $\mu$  повећава, нестабилни цикл „стеже обруч” око стабилног положаја равнотеже. До поткритичне Хопфове бифуркације долази за вредност параметра  $\mu = 0$ , када се амплитуда нестабилног цикла смањује на нулу, тј. нестабилни гранични цикл нестаје, „прогутавши” до тада стабилни положај равнотеже у координатном почетку, који након тога постаје нестабилан. За  $\mu > 0$  стабилни гранични цикл остаје једини атрактор у посматраном систему (слика 3.8(ii)). Трајекторије које су раније биле у близини стабилног положаја равнотеже у координатном почетку сада су приморане на осцилације великих амплитуда.



Слика 3.8: Фазни портрети динамичког система (3.7) за различите вредности параметра  $\mu$

У систему (3.7) са променом вредности параметра  $\mu$  може да дође до хистерезиса – једном кад осцилације великих амплитуда почну, оне се не могу прекинути једноставним враћањем вредности параметра  $\mu$  на нулу. Заправо, испоставља се да ће се ове осцилације наставити све док не постане  $\mu = -\frac{1}{4}$ , када ће се стабилни и нестабилни гранични цикл „сударити” и ануирати. Процес „уништавања” осцилација са великим амплитудама одвија се путем једног другачијег типа бифуркације (у питању је *глобална* бифуркација), о којем ће бити речи мало касније.

Поставља се питање како да, уколико знамо да у неком динамичком систему долази до Хопфове бифуркације, утврдимо да ли је та бифуркација наткритична или поткритична. Линеаризација динамичког система нам не би дала одговор, будући да у оба случаја пар конјуговано–комплексних сопствених вредности прелази из леве у десну полураван комплексне равни. Аналитички критеријум који би нам помогао постоји, али он је обично компликован за примену (видети [1], стр. 289). Много бржи начин да дођемо до одговора на ово питање јесте да се послужимо рачунаром и скицирамо фазне портрете датог система за неколико различитих вредности контролног параметра, мањих и већих од бифуркационе вредности. Уколико се мали, стабилан гранични цикл појављује одмах након што положај равнотеже постане нестабилан и ако се његова амплитуда смањује до нуле кад се вредност параметра враћа на пређашњу, у питању је наткритична Хопфова бифуркација. У супротном, бифуркација је

највероватније поткритична и у том случају најближи атрактор (стабилан гранични цикл) може бити далеко од положаја равнотеже и може доћи до хистерезиса при враћању вредности параметра на пређашњу. Рачунарски експерименти нису доказ, али могу нам послужити да визуализујемо промене у фазном портрету система при промени вредности параметра и да на основу тога дођемо до одређених разумних претпоставки.

Важно је напоменути да, поред наткритичне и поткритичне, постоји и тзв. **дегенерисана Хопфова бифуркација**. Пример динамичког система у којем се јавља ова бифуркација је модел пригушених осцилација клатна:

$$x'' + \mu x' + \sin x = 0.$$

Са променом вредности параметра  $\mu$  (који представља коефицијент трења) од позитивне ка негативној, положај равнотеже у координатном почетку прелази из стабилног у нестабилан фокус. Међутим, за  $\mu = 0$  немамо праву Хопфову бифуркацију, јер нема граничних цикала ни за  $\mu < 0$  ни за  $\mu > 0$ . Уместо тога, кад је  $\mu = 0$ , координатни почетак је центар, што значи да је окружен непрекидном „траком” затворених трајекторија (а гранични цикл је *изолована* затворена трајекторија).

**Пример 4.** Нека је дат дводимензионални динамички систем

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y + xy^2, \\ y' &= x + \mu y + y^3, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где је  $\mu$  реални параметар. Очигледно је да је координатни почетак један положај равнотеже датог система. Јакобијева матрица датог система је

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \mu + y^2 & -1 + 2xy \\ 1 & \mu + 3y^2 \end{bmatrix}.$$

Заменом координата положаја равнотеже  $(0, 0)$  у матрицу  $J(x, y)$  добијамо матрицу

$$J_0 = J(0, 0) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}.$$

Имамо да је  $p = \text{Tr } J_0 = 2\mu$ ,  $q = \det J_0 = \mu^2 + 1 > 0$  и  $\Delta = p^2 - 4q = -4 < 0$ . Одатле следи да координатни почетак за  $\mu < 0$  представља стабилан фокус, а за  $\mu > 0$  нестабилан фокус. Стога за  $\mu = 0$  долази до неког типа Хопфове бифуркације. Сада желимо да утврдимо који је тип у питању.

Запишимо систем (3.8) у поларним координатама (заправо, биће нам довољно да одредимо само чему ће бити једнако  $r'$ ). Стављањем да је  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$ , имамо да је  $r^2 = x^2 + y^2$ , одакле диференцирањем добијамо да је  $rr' = xx' + yy'$ . Заменом  $x'$  и  $y'$  изразима са десних страна једначина система (3.8) налазимо да је

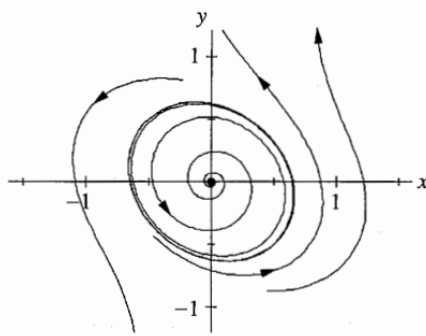
$$rr' = r \cos \theta (\mu r \cos \theta - r \sin \theta + r \cos \theta \cdot r^2 \sin^2 \theta) + r \sin \theta (r \cos \theta + \mu r \sin \theta + r^3 \sin^3 \theta),$$

односно



$$\begin{aligned} r' &= \mu r \cos^2 \theta - r \sin \theta \cos \theta + r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta + \mu r \sin^2 \theta + r^3 \sin^4 \theta \\ &= \mu r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^3 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + r^3 \sin^4 \theta = \mu r + \underbrace{r^3 \sin^2 \theta}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је  $r' \geq \mu r$ , што значи да за  $\mu > 0$   $r(t)$  расте у најмању руку једнако брзо као  $r_0 e^{\mu t}$ , а како за  $\mu > 0$  имамо да  $r_0 e^{\mu t} \rightarrow +\infty$  кад  $t \rightarrow +\infty$ , то значи да у том случају и  $r(t) \rightarrow +\infty$  кад  $t \rightarrow +\infty$ , тј. све трајекторије бивају „одвучене” у бесконачност. Стога кад је  $\mu > 0$  сигурно неће постојати затворене трајекторије, односно, прецизније, нестабилни фокус у координатном почетку неће бити окружен стабилним граничним циклом, одакле закључујемо да Хопфова бифуркација до које долази не може бити наткритична. Такође, не може бити ни дегенерисана, јер је неопходан услов за то да координатни почетак за  $\mu = 0$  буде нелинеарни центар. Међутим, овде имамо да је  $r' > 0$  ван  $x$ -осе, тако да постојање затворених трајекторија није могуће. Методом елиминације долазимо до закључка да је Хопфова бифуркација која се јавља у систему (3.8) највероватније поткритична. Да бисмо се уверили у овај закључак, скицираћемо (помоћу рачунара) фазни портрет система (3.8) за, нпр.,  $\mu = -0.2$  (слика 3.9). Са слике 3.9 видимо да нестабилан гранични цикл окружује стабилан положај равнотеже, баш као што је и очекивано за поткритичну Хопфову бифуркацију, за вредност параметра мало мању од бифуркационе вредности.  $\triangle$



Слика 3.9: Фазни портрет динамичког система (3.8) за  $\mu = -0.2$

## 3.5 Глобалне бифуркације цикала

У дводимензионалним динамичким системима постоје четири уобичајена начина да гранични цикли настану или нестану. Један од њих јесте путем Хопфове бифуркације, док су остала три начина нешто тежа за откривање, будући да захтевају посматрање понашања система у великим областима фазне равни, уместо само у непосредној околини положаја равнотеже. Стога се они називају **глобалним бифуркацијама**. У наставку ћемо размотрити прототипске примере динамичких система у којима долази до сваке од три глобалне бифуркације којима ћемо се бавити.

### 3.5.1 Седло–чвор бифуркација цикала

Бифуркација код које се два гранична цикла сударају и међусобно анулирају назива се **седло–чвор бифуркација цикала**, по аналогији са сличним феноменом код

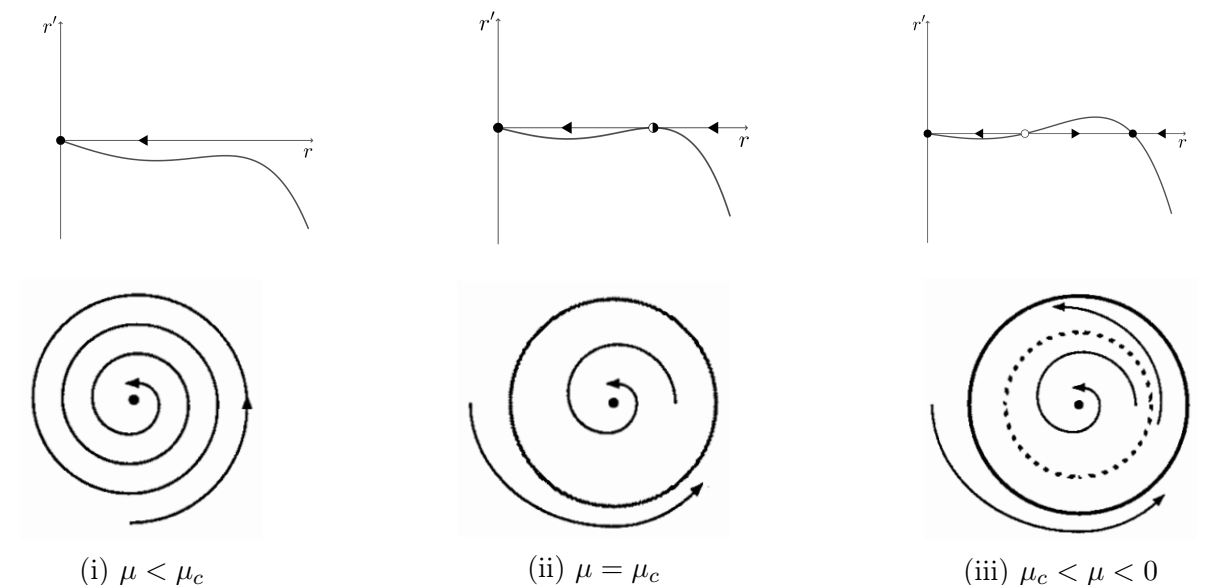
положаја равнотеже. Пример динамичког система у којем долази до ове бифуркације већ смо разматрали кад смо говорили о поткритичној Хопфовој бифуркацији – дакле, реч је о систему (3.7), датом у поларним координатама са

$$\begin{aligned} r' &= \mu r + r^3 - r^5, \\ \theta' &= \omega + br^2. \end{aligned}$$

Међутим, за разлику од раније анализе, где смо били фокусирани на поткритичну Хопфову бифуркацију која се догађа кад је  $\mu = 0$ , сада ћемо се бавити динамиком датог система за  $\mu < 0$ .

Једначину  $r' = \mu r + r^3 - r^5$  можемо посматрати као једнодимензионални динамички систем. У том систему долази до седло-чвор бифуркације за вредност параметара  $\mu = -\frac{1}{4} = \mu_c$ , што је јасно кад се погледа скица фазног портрета дате једначине за различите вредности параметра  $\mu$  (горњи ред на слици 3.11). Положајима равнотеже једнодимензионалног система  $r' = \mu r + r^3 - r^5$  који су различити од нуле одговарају кружни гранични цикли полазног, дводимензионалног система (3.7). На слици 3.11 приказани су фазни портрети једначине  $r' = \mu r + r^3 - r^5$  и одговарајући фазни портрети система (3.7) за различите вредности параметра  $\mu$ .

Кад је  $\mu = \mu_c$ , полустабилни гранични цикл појављује се „као гром из ведра неба” (сетимо се да је то било карактеристично и за положаје равнотеже код локалних седло-чвор бифуркација). Са повећањем вредности параметра  $\mu$  он се „рачва” на два гранична цикла, од којих је један стабилан, а други нестабилан. Ако бисмо посматрали ситуацију у обрнутом смеру, полазећи од  $\mu \in (\mu_c, 0)$ , могли бисмо рећи да се два гранична цикла, стабилан и нестабилан, међусобно приближавају како се вредност параметра  $\mu$  смањује, затим „сударају” кад је  $\mu = \mu_c$  и коначно нестају кад вредност параметра  $\mu$  постане мања од  $\mu_c$ .



Слика 3.11: Фазни портрет једначине  $r' = \mu r + r^3 - r^5$  и одговарајуће понашање система (3.7) у фазној равни за различите вредности параметра  $\mu$

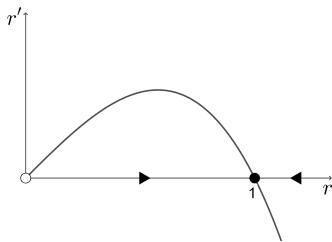
Приметимо још да у тренутку свог настанка гранични цикл има амплитуду реда  $O(1)$ , за разлику од Хопфове бифуркације, где гранични цикл у тренутку настанка има малу амплитуду, пропорционалну са  $\sqrt{\mu - \mu_c}$ .

### 3.5.2 Бифуркације са бесконачним периодом

Посматрајмо динамички систем дат у поларним координатама са

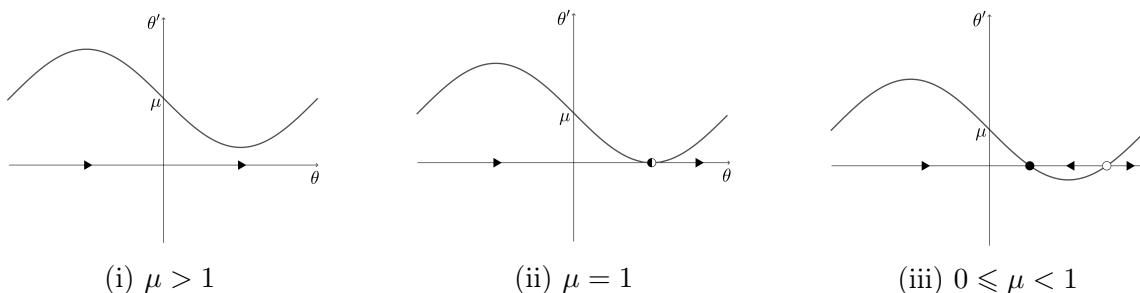
$$\begin{aligned} r' &= r(1 - r^2), \\ \theta' &= \mu - \sin \theta, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где је  $\mu$  реалан ненегативан параметар. Дати систем је комбинација два једнодимензионална динамичка система, која можемо одвојено да анализирамо. Скицирањем фазног портрета једнодимензионалног динамичког система  $r' = r(1 - r^2)$  (слика 3.12) долазимо до закључка да је  $r^* = 0$  нестабилан, а  $r^* = 1$  стабилан положај равнотеже овог система. За дводимензионални систем (3.9) то значи да све његове трајекторије, осим  $r^* = 0$ , теже јединичном кругу ( $r^* = 1$ ) кад  $t \rightarrow +\infty$ .



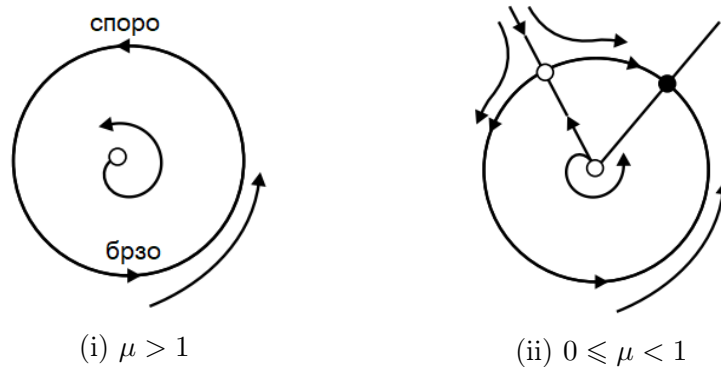
Слика 3.12: Фазни портрет једначине  $r' = r(1 - r^2)$

На основу скице фазног портрета једначине  $\theta' = \mu - \sin \theta$  (слика 3.13) закључујемо да за  $\mu > 1$  дата једначина нема положаје равнотеже и све трајекторије усмерене су надесно, кад је  $\mu = 1$  постоји један полустабилан положај равнотеже и коначно, за  $0 \leq \mu < 1$  имамо два положаја равнотеже, један стабилан, други нестабилан.



Слика 3.13: Фазни портрет једначине  $\theta' = \mu - \sin \theta$  за различите вредности  $\mu$

За дводимензионални динамички систем (3.9) то значи да су за  $\mu > 1$  све трајекторије усмерене у математички позитивном смеру (супротно од смера кретања казаљки на сату), док за  $0 \leq \mu < 1$  постоје два могућа смера трајекторија. Стога се са променом вредности параметра  $\mu$  фазни портрет динамичког система (3.9) мења као на слици 3.14.



Слика 3.14: Фазни портрет динамичког система (3.9) за различите вредности параметра  $\mu$

Када  $\mu \rightarrow 1^+$ , на граничном циклусу  $r^* = 1$  појављује се уско грло за  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , које све више успорава трајекторије, односно продужава период осцилације. За  $\mu = 1 = \mu_c$  период осцилација постаје бесконачан и тада се на кругу појављује положај равнотеже. Стога се овај тип бифуркације и назива **бифуркацијом са бесконачним периодом**. Када  $\mu$  постане мање од 1, тај положај равнотеже рачва се на два (седло и стабилан чвор).

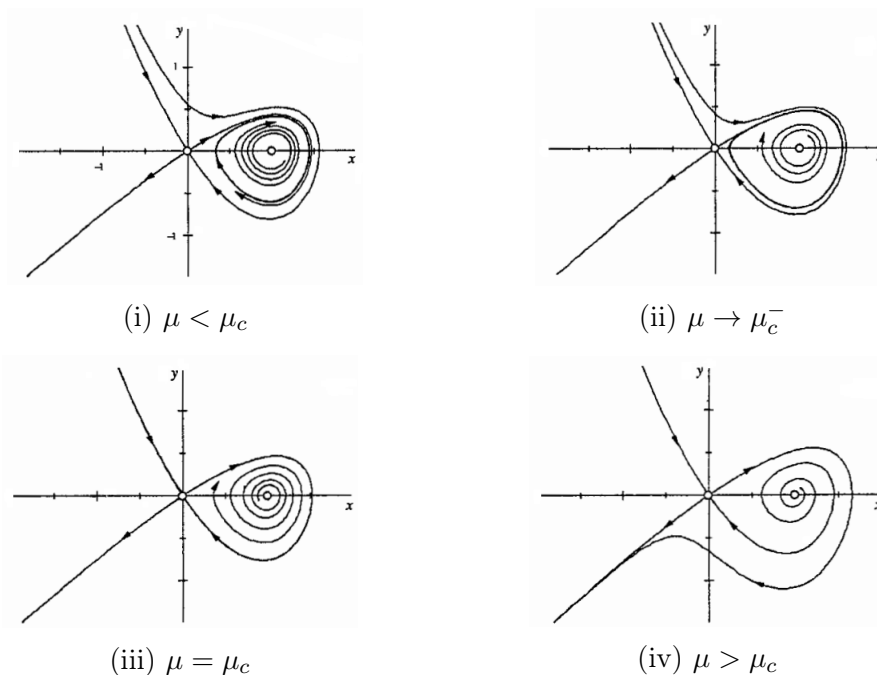
Како се приближавамо бифуркационој тачки, амплитуда осцилација остаје реда  $O(1)$ , али период се повећава пропорционално са  $(\mu - \mu_c)^{-1/2}$ .

### 3.5.3 Хомоциклична бифуркација

Код овог типа глобалних бифуркација, део граничног циклуса се све више приближава седлу, а у самом тренутку бифуркације он додирује седло и долази до настанка хомоцикличне трајекторије. Ово је такође бифуркација са бесконачним периодом, али је суштински различита од оних које носе баш такав назив, па да их не бисмо мешали, ове бифуркације назваћемо **хомоцикличним бифуркацијама**. За овај тип бифуркација тешко је пронаћи пример који би био погодан за анализу уобичајеним аналитичким методама, па ћемо се послужити рачунаром како бисмо дошли до одређених закључака. Посматраћемо динамички систем

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= \mu y + x - x^2 + xy. \end{aligned} \tag{3.10}$$

На слици 3.15 приказани су фазни портрети система (3.10) пре, у току и након бифуркације.



Слика 3.15: Фазни портрети динамичког система (3.10) за различите вредности параметра  $\mu$

Нумеричким методама долази се до закључка да је бифуркациона вредност контролног параметра  $\mu_c \approx -0.8645$ . За  $\mu < \mu_c$ , на пример  $\mu = -0.92$ , стабилан гранични цикл пролази близу седла у координатном почетку (слика 3.15(i)). Како се вредност параметра  $\mu$  све више приближава бифуркационој вредности  $\mu_c$ , гранични цикл се повећава и прилази све ближе седлу (слика 3.15(ii)). Када постане  $\mu = \mu_c$ , он „удара” у седло, при чему настаје хомоциклична трајекторија (слика 3.15(iii)). За  $\mu > \mu_c$  веза са седлом се прекида и хомоциклична трајекторија нестаје (слика 3.15(iv)).

## Глава 4

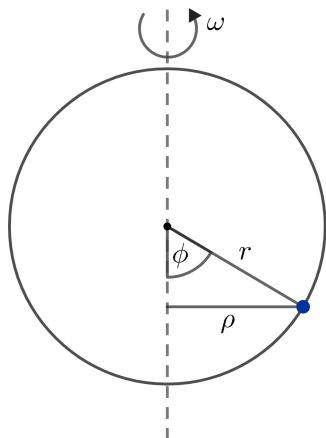
# Бифуркације у применама

### 4.1 Једнодимензионални динамички системи

#### 4.1.1 Кретање перле по ротирајућем обручу

У овом одељку ћемо на једном релативно једноставном примеру показати како изгледа бифуркациона анализа једног једнодимензионалног динамичког система којим се моделује одређена физичка појава. Претпоставимо да се перла (или неко друго круто тело) масе  $m$  налази на обручу полупречника  $r$ , који ротира константном угаоном брзином  $\omega$  око вертикалне осе која пролази кроз центар круга који одговара обручу. Желимо да анализирамо кретање перле, која ће клизити дуж обруча док се он ротира, ако претпоставимо да на њу делују гравитациона, центрифугална и сила трења. При том можемо да сматрамо да је то трење суво трење клизања или, пак, што нам је погодније за даље разматрање, да замислимо да је цео наш систем „уроњен” у неку врло вискозну течност (на пример, мед), те је то трење заправо вискозно трење.

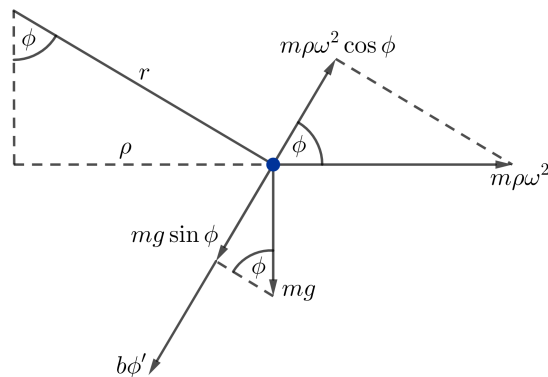
Нека је  $\phi$  угао између вертикалне осе обруча и правца перла–центар обруча. Сматраћемо да је  $-\pi < \phi \leq \pi$ , јер тако свакој позицији перле на обручу одговара тачно један угао  $\phi$ . Додатно, означимо са  $\rho$  растојање перле од вертикалне осе (слика 4.1). Јасно је да је  $\rho = r \sin \phi$ .



Слика 4.1

Циљ нам је да применимо други Њутнов закон на дати систем, који ће нам дати једначину која моделује кретање перле. Стога најпре морамо анализирати које све силе делују на перлу у сваком тренутку њеног кретања по обручу. Пре свега, имамо гравитациону силу, интензитета  $mg$ , која је усмерена надоле. Даље, ту је и центрифугална сила, која се јавља као последица ротације обруча око вертикалне осе. Њен правац је ортогоналан на осу ротације, а усмерена је од осе ротације. Интензитет центрифугалне силе једнак је  $\frac{mv^2}{\rho}$ , где  $v$  представља линијску брзину перле. Међутим, како ми желимо да изразимо интензитет ове силе преко угаоне брзине перле, то ћемо искористити везу између угаоне и линијске брзине ( $v = \rho\omega$ ), чиме добијамо да је интензитет центрифугалне силе која делује на перлу једнак  $m\rho\omega^2$ . Коначно, последња сила коју укључујемо у ово разматрање јесте сила (вискозног) трења, која је сразмерна брзини кретања перле по обручу ( $\phi'$ ), има тангентни правац у односу на обруч, а смера је супротног од смера вектора брзине перле. Нека је њен интензитет једнак  $b\phi'$ , где је  $b > 0$  коефицијент трења.

При овом разматрању од интереса су нам само силе које делују дуж тангентног правца на обруч, тако да ћемо све силе које делују на перлу разложити на компоненте које леже на одговарајућем тангентном правцу (слика 4.2).



Слика 4.2: Силе које делују на перлу дуж тангентног правца

Како интензитет тангентног убрзања перле износи  $r\phi''$ , применом другог Њутновог закона добијамо да важи

$$mr\phi'' = -b\phi' - mg \sin \phi + m\rho\omega^2 \cos \phi,$$

односно, када искористимо да је  $\rho = r \sin \phi$ , добија се

$$mr\phi'' = -b\phi' - mg \sin \phi + mr\omega^2 \sin \phi \cos \phi. \quad (4.1)$$

Једначина (4.1) је диференцијална једначина другог реда. Међутим, наш циљ је да утврдимо да ли и под којим условима смемо да „занемаримо“ члан  $mr\phi''$ , те да уместо једначине (4.1) посматрамо једначину првог реда, која ће бити једноставнија за даљу анализу. Наравно, ово неће увек бити могуће, али за сад ћемо само занемарити члан који нам „смета“, а касније ћемо детаљно размотрити који услови морају да буду задовољени да би такав поступак био валидан.

### 4.1.1.1 Анализа система првог реда

Дакле, за почетак ћемо у једначини (4.1) „одбацити“ члан у којем се јавља  $\phi''$  и добити једначину

$$b\phi' = -mg \sin \phi + mr\omega^2 \sin \phi \cos \phi = mg \sin \phi \left( \frac{r\omega^2}{g} \cos \phi - 1 \right). \quad (4.2)$$

Одредимо положаје равнотеже једначине (4.2) (то је динамички систем првог реда). Интуитивно је јасно да ће перла бити у равнотежном положају када се нађе на самом дну, односно врху обруча – дакле, за  $\phi = 0$ , односно  $\phi = \pi$ . Стога ће  $\phi_1^* = 0$  и  $\phi_2^* = \pi$  бити два положаја равнотеже, што се лако види и из једначине (4.2), јер је управо за те вредности  $\sin \phi = 0$ .

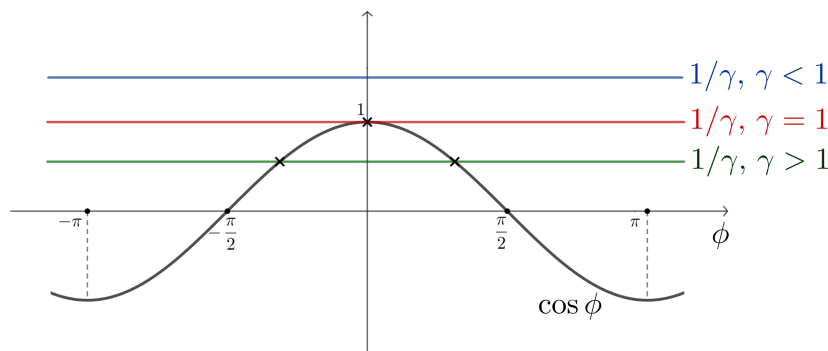
Остали положаји равнотеже представљају решења једначине  $\frac{r\omega^2}{g} \cos \phi - 1 = 0$ , тј.

$$\cos \phi = \frac{g}{r\omega^2}. \quad (4.3)$$

Да би једначина (4.3) имала решења, мора да буде  $\frac{g}{r\omega^2} \leq 1$ , односно обруч мора да се ротира *довољно* брзо. Број решења једначине (4.3) одредићемо помоћу геометријског приступа. Уведимо најпре ознаку  $\gamma = \frac{r\omega^2}{g}$ . Једначина (4.3) сада постаје

$$\cos \phi = \frac{1}{\gamma}. \quad (4.4)$$

Скицирајмо у равни (где вредности  $\phi$  наносимо на апсцису) график функције  $y = \cos \phi$  (за  $-\pi < \phi \leq \pi$ ) и константне функције  $y = \frac{1}{\gamma}$  за различите вредности  $\gamma$  (слика 4.3). Апсцисе пресечних тачака та два графика представљаће тражена решења једначине (4.4), односно додатне положаје равнотеже једначине (4.2).



Слика 4.3

Као што смо и очекивали, за  $\frac{1}{\gamma} > 1$ , тј.  $\gamma < 1$  нема пресечних тачака, па једначина (4.4) нема решења, што значи да су тада једини положаји равнотеже једначине (4.2)  $\phi_1^* = 0$  и  $\phi_2^* = \pi$ .



За  $\gamma = 1$  имамо тачно једну пресечну тачку, али она нам не даје нови положај равнотеже (поново се добија  $\phi_1^* = 0$ ).

Коначно, кад је  $\gamma > 1$ , постоје две пресечне тачке, које дају два додатна положаја равнотеже једначине (4.2):  $\phi_3^* = -\arccos \frac{1}{\gamma}$  и  $\phi_4^* = \arccos \frac{1}{\gamma}$ . Ове две тачке су очигледно симетричне у односу на  $\phi_1^* = 0$ . Приметимо још да кад  $\gamma \rightarrow +\infty$  важи да  $\phi_3^* \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ , а  $\phi_4^* \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Испитајмо сада стабилност ових положаја равнотеже. Нека је

$$f(\phi) = \frac{mr\omega^2}{b} \sin \phi \cos \phi - \frac{mg}{b} \sin \phi,$$

односно, након што заменимо  $\gamma = \frac{r\omega^2}{g}$ ,

$$f(\phi) = \frac{mg\gamma}{b} \sin \phi \cos \phi - \frac{mg}{b} \sin \phi.$$

Дакле, једначина (4.2) сада гласи  $\phi' = f(\phi)$ . Налазимо да је

$$f'(\phi) = \frac{mg}{b} (\gamma(2 \cos^2 \phi - 1) - \cos \phi).$$

Како је

$$f'(\phi_1^*) = f'(0) = \frac{mg}{b}(\gamma - 1),$$

следи да је  $\phi_1^* = 0$  (дно обруча) стабилан положај равнотеже кад је  $\gamma < 1$ , а нестабилан кад је  $\gamma > 1$ .

Даље, како је

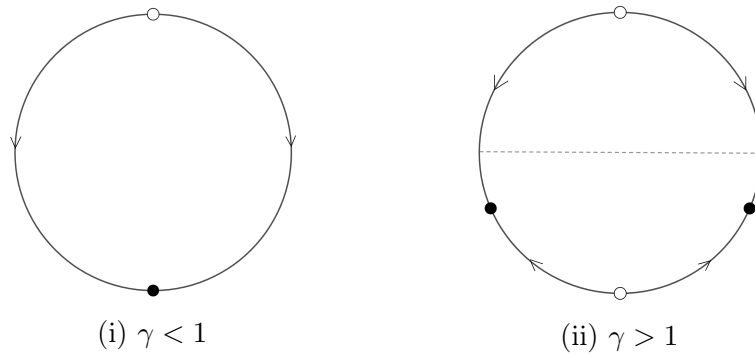
$$f'(\phi_2^*) = f'(\pi) = \frac{mg}{b}(\gamma + 1) > 0,$$

то је положај равнотеже  $\phi_2^* = \pi$  (врх обруча) увек нестабилан.

Остаје још да испитамо стабилност положаја равнотеже  $\phi_{3,4}^*$ , за које важи да је  $\cos \phi_{3,4}^* = \frac{1}{\gamma}$  и који постоје само за  $\gamma > 1$ . Налазимо да је

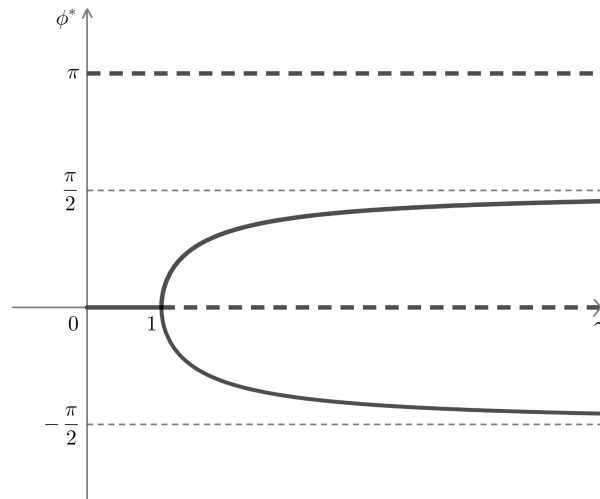
$$f'(\phi_{3,4}^*) = \frac{mg}{b} \cdot \frac{1 - \gamma^2}{\gamma},$$

одакле је очигледно да је  $f'(\phi_{3,4}^*) < 0$  за  $\gamma > 1$ , те су ова два положаја равнотеже стабилна.



Слика 4.4: Положаји равнотеже на обручу за различите вредности  $\gamma$

Ако представимо у равни све положаје равнотеже једначине (4.2) у функцији од параметра  $\gamma$ , добићемо одговарајући бифуркациони дијаграм (слика 4.5).



Слика 4.5: Бифуркациони дијаграм једначине (4.2)

Са слике 4.5 се види да за  $\gamma = 1$  долази до наткритичне виласте бифуркације: положај равнотеже  $\phi_1^* = 0$ , који је до тада био стабилан, „предаје” своју стабилност двама новонасталим положајима равнотеже.

Размотримо сада физичку интерпретацију досадашњих закључака. Како смо  $\gamma$  дефинисали тако да се повећава ако се угаона брзина обруча повећава, то услов  $\gamma < 1$  заправо значи да се обруч ротира споро и тада центрифугална сила није довољно јака да избалансира гравитациону силу – стога ће перла под утицајем гравитационе силе да склизне на дно обруча (стабилан положај равнотеже) и да остане ту. Међутим, уколико је  $\gamma > 1$ , обруч се креће довољно брзо да дно обруча постане нестабилно. Како интензитет центрифугалне силе расте са удаљавањем перле од дна обруча (јер је он сразмеран растојању перле од вертикалне осе обруча), то ће било какав померај перле, колико год мали био, бити појачан, због чега перла бива „приморана” да се креће уз обруч. То кретање ће се дешавати све док гравитациона сила не избалансира центрифугалну, што се догађа када је  $\phi = \phi_{3,4}^* = \pm \arccos \frac{g}{r\omega^2}$ . У којем ће се од ова два положаја равнотеже перла наћи зависи од  $\phi(0)$ .

Приметимо да су лева и десна половина обруча потпуно симетричне – та симетрија огледа се у инваријантности једначина (4.1) и (4.2) у односу на смену  $\phi \mapsto -\phi$ . Дакле, овај пример представља добру илустрацију раније поменуте чињенице да су виласте бифуркације типичне за проблеме у којима постоји неки вид симетрије.

Сада ћемо се позабавити питањем под којим условима је оправдано занемаривање инерционог фактора  $mr\phi''$  у једначини (4.1). Природно се намеће идеја да поставимо услов да  $m \rightarrow 0$ , међутим, тада би и гравитациона и центрифугална сила тежиле нули, будући да су оне сразмерне маси перле. Стога морамо потражити неки други, прихватљивији услов.

Како бисмо дошли до траженог одговора, трансформисаћемо једначину (4.1) у бездимензионални облик. Предност бездимензионалног облика је пре свега у томе што нам омогућава да једноставно дефинишемо појам „малог” – „мало” ће бити нешто што је много мање од 1 (а веће од нуле). Такође, свођењем на бездимензионални облик смањићемо број параметара који фигуришу у једначини (4.1), тако што ћемо их груписати у бездимензионалне скупе.

Свођење на бездимензионални облик започињемо дефинисањем бездимензионалног времена  $\tau = \frac{t}{T}$ , где је  $T$  карактеристична временска скала коју ћемо накнадно изабрати (када видимо шта ће бити најпогодније да узмемо за  $T$ ). Ако  $T$  одаберемо на прави начин, изводи  $\frac{d\phi}{d\tau}$  и  $\frac{d^2\phi}{d\tau^2}$  биће реда јединице, тј  $O(1)$ .

На основу правила о диференцирању сложене функције налазимо да је

$$\phi' = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \cdot \frac{d\phi}{d\tau}$$

и

$$\phi'' = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{T} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{T} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} \right) \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T^2} \cdot \frac{d^2\phi}{d\tau^2}.$$

Када ове везе између „нових” и „старих” извода уврстимо у једначину (4.1), добијамо

$$\frac{mr}{T^2} \cdot \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{b}{T} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} - mg \sin \phi + mr\omega^2 \sin \phi \cos \phi.$$

Поделимо сада последњу једначину са  $mg$  (тима ћемо елиминисати димензије у тој једначини). Добијамо једначину

$$\left( \frac{r}{gT^2} \right) \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = - \left( \frac{b}{mgT} \right) \frac{d\phi}{d\tau} - \sin \phi + \left( \frac{r\omega^2}{g} \right) \sin \phi \cos \phi. \quad (4.5)$$

Једначина (4.5) представља бездимензионални облик једначине (4.1) којем смо тежили – сви изрази у заградама представљају бездимензионалне скупе (приметимо да је бездимензионална скупина у последњем члану на десној страни једнакости заправо наше раније дефинисано  $\gamma$ ).

Сада желимо да утврдимо услове под којима ће лева страна једначине (4.5) бити

занемарљива у поређењу са осталим члановима у једначини, а сви чланови на десној страни једначине бити истог реда величине. Како су изводи, према претпоставци, реда јединице, тј.  $O(1)$  и како је  $\sin \phi \approx O(1)$ , потребно је да важи

$$\frac{b}{mgT} \approx O(1) \quad (4.6)$$

и

$$\frac{r}{gT^2} \ll 1. \quad (4.7)$$

Из (4.6) закључујемо да је потребно да узмемо

$$T = \frac{b}{mg}.$$

Сада услов (4.7) постаје

$$\frac{r}{g} \left( \frac{mg}{b} \right)^2 \ll 1 \quad (4.8)$$

или, еквивалентно,

$$b^2 \gg m^2 gr.$$

Из последњег услова закључујемо да је за оправдање занемаривања инерционог члана у једначини (4.1) потребно да треће буде веома јако или, пак, да маса перле буде веома мала (што смо на почетку и наслутили).

Услов (4.8) мотивише нас да уведемо бездимензионални параметар

$$\varepsilon = \frac{m^2 gr}{b^2}.$$

Једначина (4.5) сада постаје

$$\varepsilon \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\frac{d\phi}{d\tau} - \sin \phi + \gamma \sin \phi \cos \phi. \quad (4.9)$$

Једначина (4.9) је очигледно једноставнија од једначине (4.1) – 5 параметара из једначине (4.1) ( $m$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $\omega$  и  $b$ ) су сада замењени са само 2 параметра ( $\varepsilon$  и  $\gamma$ ).

Дакле, да закључимо: у условима када је треће велико (тј. кад  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), једначина другог реда (4.9) може се добро апроксимирати једначином првог реда

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\sin \phi + \gamma \sin \phi \cos \phi = \sin \phi (\gamma \cos \phi - 1).$$

### 4.1.2 Несавршене бифуркације и катастрофе

Као што смо већ више пута рекли, виласте бифуркације су карактеристичне за системе у којима постоји неки вид симетрије – у проблему перле која клизи по ротирајућем обручу постојала је симетрија између леве и десне стране обруча. Међутим, у већини

случајева у реалном животу ова симетрија је само приближна – мала несавршеност нарушава ту симетрију. У наставку ћемо размотрити пример динамичког система у којем је присутна таква несавршеност.

Посматрајмо једнодимензионални динамички систем

$$x' = h + rx - x^3, \quad (4.10)$$

где су  $h$  и  $r$  реални параметри.

За  $h = 0$  једначина (4.10) постаје у ствари једначина (2.10), која представља нормалну форму система са наткритичном виластом бифуркацијом. У том случају, дакле, имамо савршену симетрију између  $x$  и  $-x$ . Међутим, када је  $h \neq 0$ , ова симетрија се нарушава. Зато се параметар  $h$  некад назива *параметром нарушавања симетрије* или *параметром несавршености*.

Једначина (4.10) је компликованија за анализу од осталих једначина првог реда којима смо се до сад бавили, будући да у њој фигуришу два независна параметра. Да бисмо мало поједноставили ситуацију, можемо један од параметара, на пример  $r$ , да фиксирамо, а затим да разматрамо понашање система (4.10) када се вредност другог параметра ( $h$ ) мења.

Одредимо најпре положаје равнотеже система (4.10). Њих налазимо као решења једначине

$$h + rx - x^3 = 0. \quad (4.11)$$

Они се, наравно, могу одредити и експлицитно, помоћу Карданових формула за корене кубне једначине, што ћемо и урадити мало касније, како бисмо могли да нацртамо одговарајуће бифуркационе дијаграме. Међутим, за почетак само желимо да анализирамо њихов број и стабилност у зависности од вредности параметара  $h$  и  $r$ , а за ту сврху једноставније је да користимо геометријски приступ решавања једначине (4.11). Најпре ћемо у истом координатном систему скицирати графике функција  $y = rx - x^3$  и  $y = -h$ , а затим разматрати број пресечних тачака тих графика.  $x$ -координате пресечних тачака представљаће управо положаје равнотеже система (4.10), будући да оне задовољавају једначину  $h + rx - x^3 = 0$ .

Када је  $r \leq 0$ , за све вредности параметра  $h$  постојаће тачно једна пресечна тачка праве  $y = -h$  и криве  $y = rx - x^3$  (слика 4.6(i)). Дакле, у овом случају постоји само један положај равнотеже једначине (4.10), који је стабилан.

Случај  $r > 0$  је нешто сложенији за анализу. Тада број пресечних тачака може да буде 1, 2 или 3, у зависности од вредности параметра  $h$  (слика 4.6(ii)). Гранични случај је када права  $y = -h$  заузима тачно тангентни положај на криву  $y = rx - x^3$  у тачкама њеног локалног максимума, односно минимума. Да бисмо одредили тачне вредности параметра  $h$  за које се то дешава, приметимо да у тачкама локалних екстремума функције  $y = rx - x^3$  важи да је

$$\frac{d}{dx}(rx - x^3) = 0,$$

одакле налазимо да су одговарајуће вредности  $x$ -координата за које посматрана функција достиже локални максимум, односно минимум једнаке

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{r}{3}}, \text{ односно } x_{\min} = -\sqrt{\frac{r}{3}}.$$

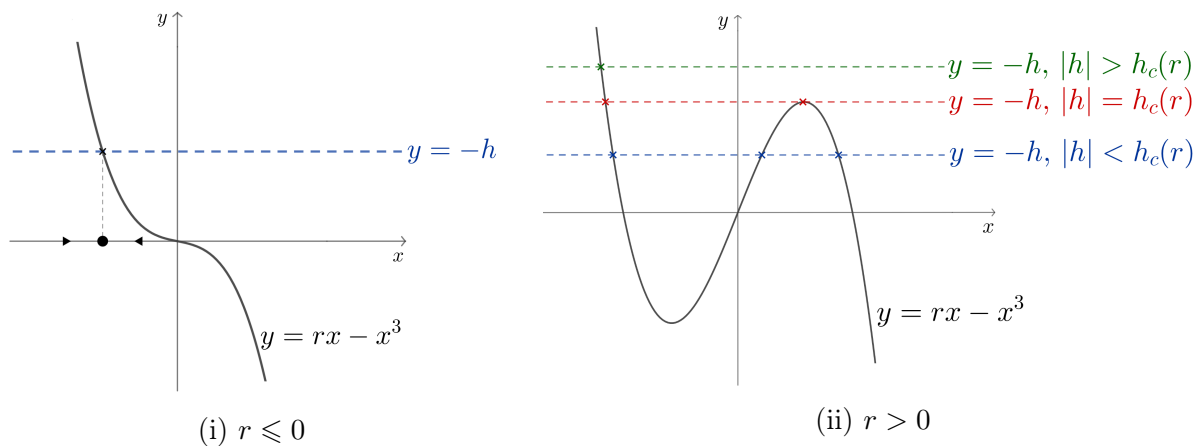
Одговарајуће вредности функције  $y = rx - x^3$  у тим тачкама су

$$y_{\max} = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}}, \text{ односно } y_{\min} = -\frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}}.$$

Дакле, ако означимо са

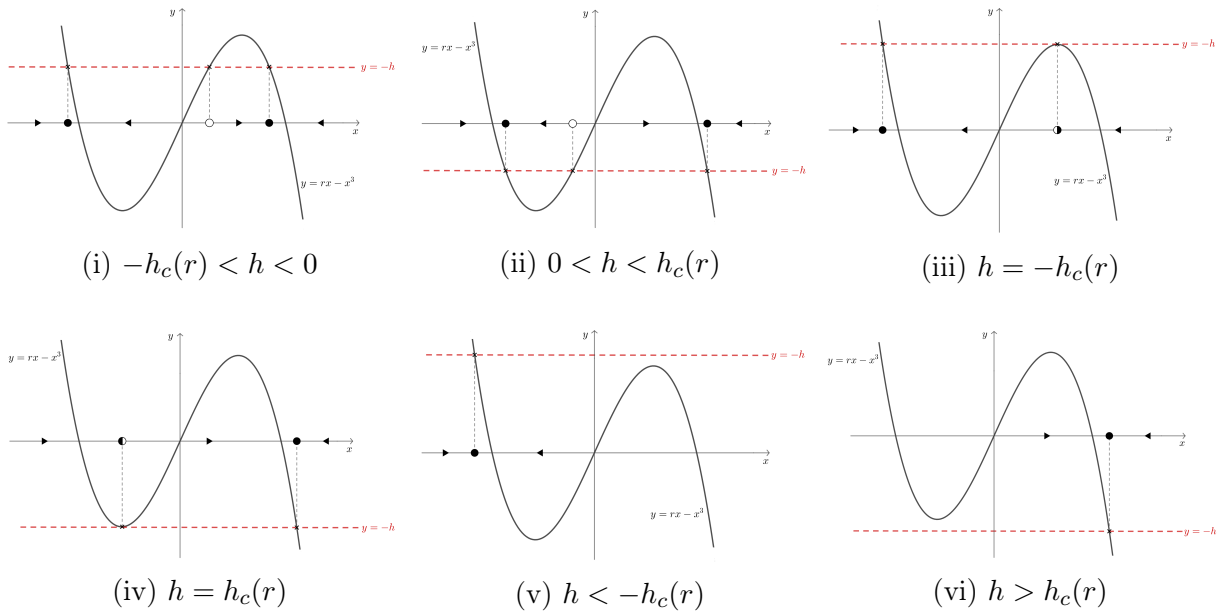
$$h_c(r) = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}},$$

можемо да закључимо да за  $|h| < h_c(r)$  постоје три положаја равнотеже, за  $|h| = h_c(r)$  два, док за  $|h| > h_c(r)$  постоји само један положај равнотеже једначине (4.10).



Слика 4.6: Положаји равнотеже једначине (4.10) при фиксираној вредности параметра  $r$  за различите вредности параметра  $h$

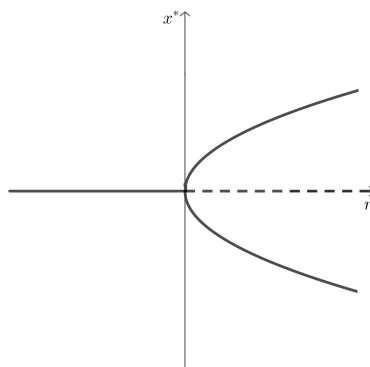
Да бисмо испитали стабилност положаја равнотеже за  $r > 0$ , најједноставније је да се поново послужимо геометријским приступом, те да на основу знака  $x'$  утврдимо смер тока дуж  $x$ -осе. Приметимо да је  $x' < 0$  ако и само ако је  $rx - x^3 < -h$ , односно, геометријски, ако се крива  $y = rx - x^3$  налази испод праве  $y = -h$  и тада ће ток бити усмерен налево. У супротном, ток ће бити усмерен надесно. На следећој слици приказани су сви могући случајеви. Стандардно, стабилни положаји равнотеже означени су пуним кружићима, нестабилни празним, а полустабилни напола испуњеним кружићима.



Слика 4.7: Фазни портрет динамичког система (4.10) при фиксираној вредности параметра  $r > 0$  за различите вредности параметра  $h$

Сада желимо да досадашње резултате представимо графички помоћу бифуркационог дијаграма. При том, да бисмо добили класичан бифуркациони дијаграм, један параметар ћемо морати да фиксирамо, а затим да положаје равнотеже представимо као функцију од другог параметра. Покажимо, на пример, како се долази до бифуркационог дијаграма који представља зависност положаја равнотеже  $x^*$  система (4.10) од параметра  $r$ , за фиксирану вредност параметра  $h$ .

Пре свега, већ смо рекли да за  $h = 0$  систем (4.10) представља нормалну форму наткритичне виласте бифуркације, па у том случају већ знамо како ће да изгледа бифуркациони дијаграм (слика 4.8).



Слика 4.8: Бифуркациони дијаграм једначине (4.10) у зависности од вредности параметра  $r$  кад је  $h = 0$

Нека је сада  $h \neq 0$  и фиксирајмо га. На пример, нека је  $h = 1$ . Систем (4.10) тада постаје облика

$$x' = 1 + rx - x^3, \tag{4.12}$$

па су одговарајући положаји равнотеже решења кубне једначине

$$x^3 - rx - 1 = 0. \quad (4.13)$$

Анализирајмо сада природу решења једначине (4.13) у зависности од вредности параметра  $r$ . Дискриминанта ове једначине је

$$D = \frac{1}{4} - \frac{r^3}{27} = \frac{27 - 4r^3}{108}.$$

Одатле следи да је  $D > 0$  ако и само ако је  $r < \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = r_c$  и тада једначина (4.13) има једно реално решење, па систем (4.12) има један положај равнотеже  $x^*$ . Помоћу Карданових формула можемо експлицитно да изразимо то решење у функцији од  $r$ :

$$x^* = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{D}},$$

што нам омогућава да помоћу рачунара скицирамо бифуркациони дијаграм за  $r < r_c$ .

Испитајмо стабилност овог положаја равнотеже. Нека је

$$f(x) = 1 + rx - x^3.$$

Тада је  $f'(x) = r - 3x^2$ , па је

$$\begin{aligned} f'(x^*) &= r - 3 \left( \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{D}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{D}\right)^2} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{4} - D} \right) \\ &= r - 3 \left( \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{D}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{D}\right)^2} + \frac{2r}{3} \right) \\ &= -r - 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{D}\right)^2} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{D}\right)^2}. \end{aligned}$$

Након краћег рачуна добија се да важи

$$f'(x^*) < 0 \iff 27 - r^3 + \frac{r^2}{9} \left( \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{D}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{D}\right)^2} \right) > 0.$$

Како је  $r < r_c = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ , то је  $r^3 < \frac{27}{4}$ , те је  $27 - r^3 > 27 - \frac{27}{4} > 0$ . Према томе,

неједнакост  $27 - r^3 + \frac{r^2}{9} \left( \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{D}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{D}\right)^2} \right) > 0$  је тачна, одакле



следи да је  $f'(x^*) < 0$ , тј. положај равнотеже  $x^*$  је стабилан за  $r < r_c$ .

Када је  $r > r_c$ , биће  $D < 0$ , па тада једначина (4.13) има три реална и различита решења, односно систем (4.12) има три различита положаја равнотеже  $x_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Ова решења су облика

$$x_1^* = 2\sqrt{\frac{r}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad x_2^* = 2\sqrt{\frac{r}{3}} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} \quad \text{и} \quad x_3^* = 2\sqrt{\frac{r}{3}} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3},$$

где је

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( -\frac{2\sqrt{-D}}{-1} \right) = \operatorname{arctg} 2\sqrt{-D}.$$

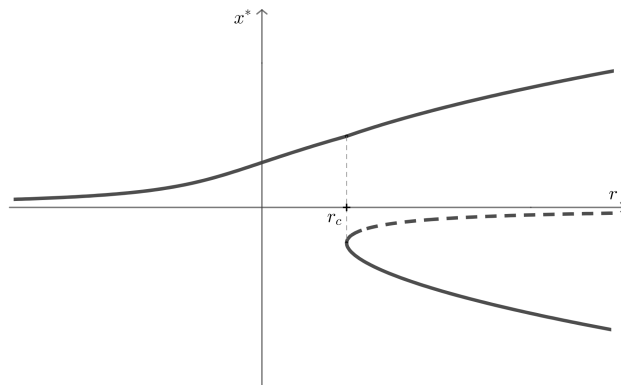
Анализирајмо сада стабилност ових положаја равнотеже. Како је

$$f'(x_1^*) = r - 3 \cdot \frac{4r}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3} = r \left( 1 - 4 \cos^2 \frac{\varphi}{3} \right),$$

имамо да је  $f'(x_1^*) < 0$  ако и само ако је  $\cos^2 \frac{\varphi}{3} > \frac{1}{4}$ , односно ако и само ако је  $\cos \frac{\varphi}{3} < -\frac{1}{2}$  или  $\cos \frac{\varphi}{3} > \frac{1}{2}$ . Међутим, како је  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , то је  $0 < \frac{\varphi}{3} < \frac{\pi}{6}$ , одакле следи да  $\cos \frac{\varphi}{3} \in \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$ . Дакле,  $\cos \frac{\varphi}{3} > \frac{1}{2}$ , те је  $f'(x_1^*) < 0$ , тј. положај равнотеже  $x_1^*$  је стабилан.

Слично се утврђује да је положај равнотеже  $x_2^*$  такође стабилан, док је положај равнотеже  $x_3^*$  нестабилан.

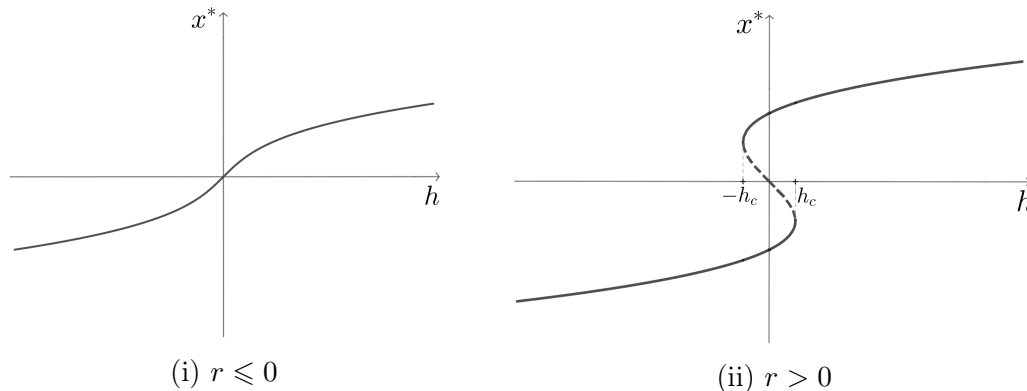
На основу претходног разматрања можемо да скицирамо бифуркациони дијаграм једначине (4.12), где је  $h = 1$  фиксирано, а положаји равнотеже су представљени у зависности од вредности параметра  $r$ .



Слика 4.9: Бифуркациони дијаграм једначине (4.10) у зависности од вредности параметра  $r$  кад је  $h = 1$

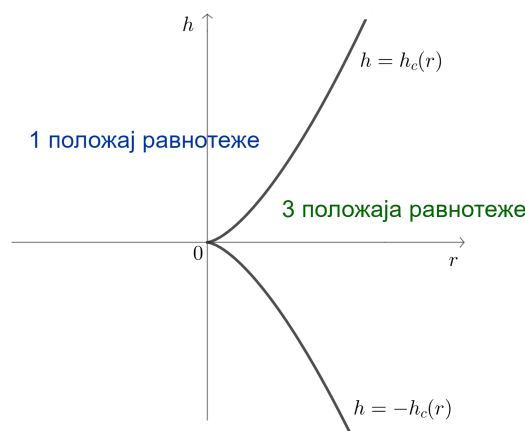
Алтернативно, могли бисмо да представимо положаје равнотеже система (4.10) у функцији од параметра  $h$ , за фиксирану вредност параметра  $r$ . Слично као у пре-

тходном разматрању, долази се до бифуркационих дијаграма приказаних на слици 4.10.



Слика 4.10: Бифуркациони дијаграми једначине (4.10) у зависности од вредности параметра  $h$  при фиксираној вредности параметра  $r$

Још један начин графичког представљања досадашњих резултата анализе динамичког система (4.10) у зависности од вредности параметара  $r$  и  $h$  јесте да у  $(r, h)$ –равни скицирамо бифуркационе криве  $h = \pm h_c(r)$ . Тако добијена слика назива се **дијаграм стабилности** – он показује како се мења понашање трајекторија система (4.10) када се крећемо у параметарском простору  $(r, h)$  (слика 4.11).



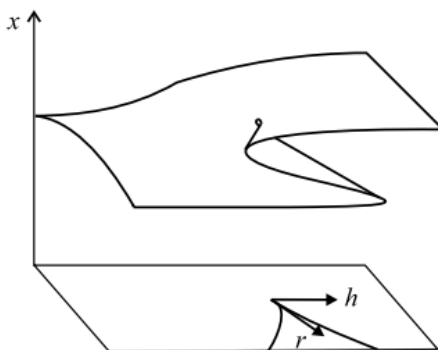
Слика 4.11: Дијаграм стабилности за динамички систем (4.10)

Приметимо да се две бифуркационе криве на претходној слици додирују у тачки  $(0, 0)$  – ова тачка назива се **тачка–шиљак**<sup>1</sup>. На слици 4.11 означене су и области на које бифуркационе криве деле  $(r, h)$ –раван, а које се разликују по броју положаја равнотеже. Дуж бифуркационих кривих  $h = \pm h_c(r)$  се јављају седло–чвор бифуркације, осим у тачки–шиљку, где се јавља тзв. **бифуркација кодимензије 2** – тако се назива зато што настаје подешавањем вредности два различита параметра, за разлику од осталих бифуркација које смо до сад спомињали, које су биле **бифуркације кодимензије 1**, јер су се јављале као последица варирања само једног параметра.

За крај овог одељка размотрићемо још један начин представљања резултата до којих

<sup>1</sup>cusp point (енг.)

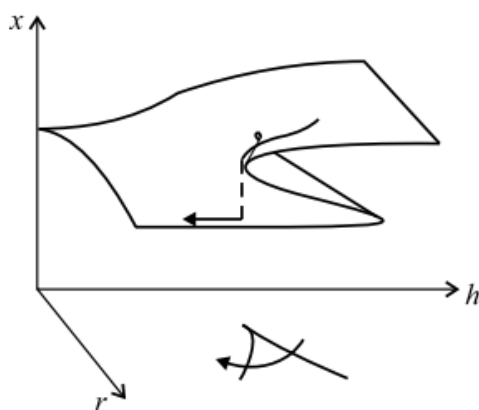
смо дошли бифуркационом анализом система (4.10) – у тродимензионалном простору. Премда је то доста сложеније за скицирање, уколико бисмо нацртали положаје равнотеже система (4.10), посматране као функције од два аргумента  $r$  и  $h$ , добили бисмо површ која се назива **шиљак–катастрофа**<sup>2</sup> (слика 4.12).



Слика 4.12: Површ шиљак–катастрофа

Пројектовањем превоја површи шиљак–катастрофа на  $(r, h)$ –раван добили бисмо бифуркационе криве приказане на слици 4.11. Попречни пресек површи за фиксирану вредност параметра  $h$  даје слике 4.8 и 4.9, док попречни пресек за фиксирану вредност параметра  $r$  даје слику 4.10.

Термин „катастрофа” у називу ове површи односи се на чињеницу да са променом вредности параметара стање система (4.10) може у једном тренутку да „претрчи” преко горње ивице површи, након чега оно нагло „пада” на доњи део површи (слика 4.13). Овај пад може бити заиста катастрофалан када се ради о положајима равнотеже неког моста или зграде.



Слика 4.13: Пад стања система са горњег на доњи део површи шиљак–катастрофа

У наставку ћемо размотрити један пример несавршене бифуркације и катастрофе из области биологије – најезду једне врсте инсеката.

<sup>2</sup>cusp catastrophe surface (енг.)

## 4.1.2.1 Најезда инсеката

У овом одељку бавићемо се анализом динамичког модела раста популације врсте инсеката латинског назива *Choristoneura fomiferana*<sup>3</sup> – то је један од највећих штеточина међу инсектима, који типично напада врсту четинара по имену *Abies balsamea*<sup>4</sup>, а карактеристичан је за источне делове северноамеричког континента. Кад дође до великог повећања популације овог инсекта (које називамо *најездом*), што се дешава у релативно правилним временским периодима, они могу да униште готово читаву популацију *Abies balsamea* у једној шуми за око 4 године.

Лудвиг и др.<sup>5</sup> су предложили један од могућих модела интеракције *Choristoneura fomiferana* и *Abies balsamea* у једној шуми. Пре него што пређемо на анализу самог модела, рећи ћемо нешто о основним претпоставкама којима су се они служили при конструкцији овог модела. Пре свега, сваком од параметара од којих зависи та интеракција, односно промена бројности популације *Choristoneura fomiferana*, може се придружити карактеристична временска скала, током које одређени параметар бележи значајније промене. Лудвиг и др. су раздвојили све параметре који учествују у формирању модела у две категорије: оне који се развијају на брзој и оне који се развијају на спорој временској скали. Популација *Choristoneura fomiferana* може увећати своју густину петоструко у року од годину дана – зато ће инсектима бити придружена брза временска скала у месецима. С друге стране, стаблима *Abies balsamea* потребно је 7 – 10 година да потпуно замене своје четине, а њихов просечан животни век, у одсуству штеточина, износи 100 – 150 година. Стога ћемо сматрати да се параметри који се односе на *Abies balsamea* мењају на спорој временској скали у деценијама. Ово заправо значи да, када се говори о динамици инсеката, параметри који се односе на дрвеће могу да се третирају као константе (зато што се на брзој временској скали они неће значајно променити). Ипак, пред крај анализе допустићемо да се и ови параметри полако мењају и видећемо како ће те промене утицати на популацију *Choristoneura fomiferana*.

Као модел за раст популације ових инсеката Лудвиг и др. предложили су познати логистички модел – дакле, ако са  $N(t)$  означимо бројност популације инсеката у тренутку  $t \geq 0$ , са  $R$  стопу раста ове популације, а са  $K$  капацитет популације, одговарајући модел биће дат једначином

$$N' = RN \left( 1 - \frac{N}{K} \right). \quad (4.14)$$

Капацитет популације представља максималну бројност популације коју ресурси природне средине могу да издрже – у овом случају он зависи од броја четина које су преостале на стаблима *Abies balsamea* у шуми (зато што се *Choristoneura fomiferana* храни управо њима), те је  $K$  параметар који се односи на дрвеће, тј. који се мења на

<sup>3</sup>spruce budworm (енг.)

<sup>4</sup>balsam fir (енг.)

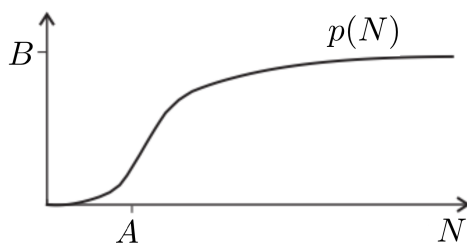
<sup>5</sup>D. Ludwig, D. D. Jones, C. S. Holling, *Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest*, Journal of Animal Ecology, 1978

спорој временској скали.

Међутим, на динамику популације инсеката утичу и грабљивци, тј. предатори (првенствено птице) који се хране њима и тако доводе до опадања бројности њихове популације. Зато ћемо у једначину (4.14) укључити и утицај предатора, тако што ћемо од десне стране једнакости (4.14) одузети тзв. стопу смртности која зависи од самог броја инсеката у датом тренутку, чиме добијамо следећи модел:

$$N' = RN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - p(N). \quad (4.15)$$

Како би отприлике требало да изгледа функција  $p(N)$ ? Јасно је да када инсеката има врло мало, предатора готово да неће бити – они ће вероватно храну за себе потражити негде другде, где је има више, а инсекте ће ловити тек спорадично. Међутим, када популација инсеката достигне одређени критични ниво  $N = A$ , утицај предатора ће нагло почети да расте, зато што ће они, кад схвате да међу инсектима имају значајан извор хране, све више наменски да лове баш њих. Ипак, тај раст се неће наставити неограничено, тј. стопа смртности услед утицаја предатора неће расти сразмерно порасту популације инсеката – наиме, у једном тренутку код предатора ће доћи до засићења, односно они ће јести онолико брзо колико могу, без обзира на то што инсеката има све више. Дакле, стопа смртности *Choristoneura fomiferana* услед утицаја предатора биће ограничена одозго, односно приближаваће се некој вредности  $B$  кад  $N \rightarrow +\infty$ . На основу свега наведеног, можемо да закључимо да график функције  $p(N)$  треба да изгледа слично као што је приказано на слици 4.14.



Слика 4.14

Лудвиг и др. предложили су следећи аналитички облик функције  $p(N)$ :

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2},$$

где су  $A, B > 0$ . Заменом овог израза у једначину (4.15) добијамо једначину

$$N' = RN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}. \quad (4.16)$$

Раније смо споменули појам *најезде* инсеката – интуитивно, могли бисмо рећи да до најезде долази када услед промене вредности параметара бројност популације нагло

скочи са „ниског” на „висок” ниво. Међутим, намеће се питање како да интерпретирамо шта је то „низак”, а шта „висок” ниво популације у овом контексту. Да бисмо одговорили на ово питање, трансформисаћемо једначину (4.16) у бездимензионалан облик.

У једначини (4.16) фигуришу 4 параметра:  $R$ ,  $K$ ,  $A$  и  $B$ . Идеја је да свођење на бездимензионалан облик извршимо тако да елиминишемо два параметра, односно да у новонасталој једначини фигуришу само два бездимензионална параметра, и то да оба буду у „логистичком делу” те једначине. Дакле, желимо да потпуно елиминишемо параметре из „предаторског дела” једначине (4.16), а разлог такве жеље биће јасан ускоро.

Приметимо да  $K$  и  $A$  имају исту димезију – оба параметра односе се на број јединки популације инсеката. Стога за бездимензионални ниво популације инсеката можемо да узмемо било који од израза  $\frac{N}{K}$  или  $\frac{N}{A}$ . Узмимо, на пример,  $\frac{N}{A}$  за бездимензионални ниво популације.

Да бисмо се решили параметара у „предаторском делу” једначине (4.16), поделимо обе стране ове једначине са  $B$  и уведемо смену  $x = \frac{N}{A}$ . Добија се

$$\frac{A dx}{B dt} = \frac{R}{B} Ax \left( 1 - \frac{Ax}{K} \right) - \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Уведемо сада бездимензионално време  $\tau = \frac{Bt}{A}$  и бездимензионалне параметре

$$r = \frac{RA}{B} \quad \text{и} \quad k = \frac{K}{A}.$$

Сада последња једначина постаје

$$\frac{dx}{d\tau} = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{x^2}{1 + x^2}. \quad (4.17)$$

Једначина (4.17) представља коначан бездимензионални облик који смо желели да добијемо и који је знатно једноставнији за даљу анализу од једначине (4.16). Параметри  $r$  и  $k$  у овој једначини представљају редом бездимензионалну стопу раста популације инсеката и бездимензионални капацитет популације и они су увек позитивни.

Анализирајмо сада положаје равнотеже једначине (4.17) и њихову стабилност у зависности од вредности параметара  $r$  и  $k$ . Како је

$$x' = x \left( r \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{x}{1 + x^2} \right),$$

то је  $x_1^* = 0$  увек један положај равнотеже једначине (4.17). Ако означимо са

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2},$$

налазимо да је

$$f'(x) = r - \frac{2r}{k}x - \frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

те је  $f'(0) = r > 0$ , одакле следи да је положај равнотеже  $x_1^* = 0$  увек нестабилан. Остали положаји равнотеже представљају решења једначине

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{1+x^2} = 0,$$

односно

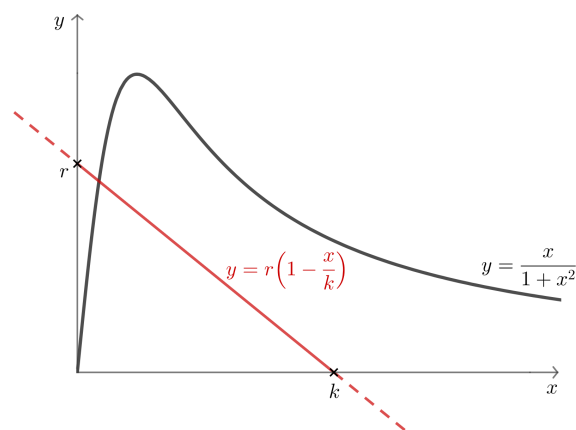
$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2}. \quad (4.18)$$

Број решења једначине (4.18) у зависности од вредности параметара  $r$  и  $k$  најједноставније ћемо одредити помоћу геометријског приступа, скицирањем графика функција које су задате аналитичким изразима на левој и десној страни те једначине и одређивањем броја пресечних тачака тих графика (чије ће  $x$ -координате управо одговарати траженим положајима равнотеже).

График функције која је задата аналитичким изразом на левој страни једначине

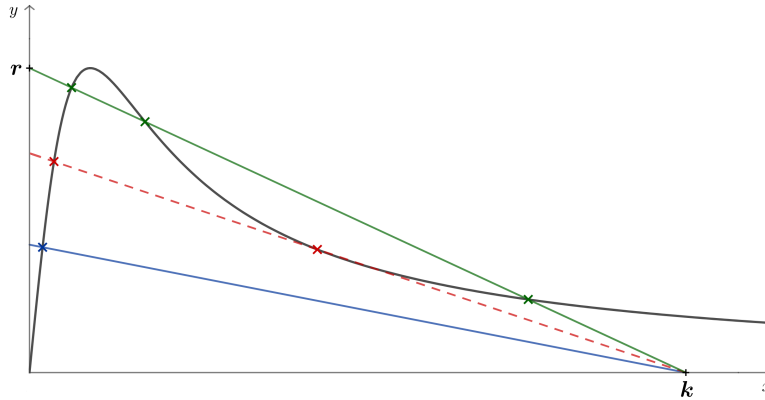
(4.18) представља праву  $y = -\frac{r}{k}x + r$ , која  $x$ -осу сече у тачки  $k$ , а  $y$ -осу у тачки  $r$ , док график функције која је задата аналитичким изразом на десној страни исте једначине представља криву која не зависи од вредности параметара  $r$  и  $k$  (слика 4.15). Стога ће се варирањем вредности параметара  $r$  и  $k$  померати само права, док

крива  $y = \frac{x}{1+x^2}$  остаје фиксна, што знатно олакшава дискусију о броју пресечних тачака. Ово лепо својство управо је и било мотивација за елиминисање параметара из „предаторског дела” једначине (4.16).



Слика 4.15

Са слике 4.15 је јасно да ће за довољно малу вредност параметра  $k$  постојати тачно једна пресечна тачка, тј. тачно један положај равнотеже једначине (4.17) (поред, наравно,  $x_1^* = 0$ ), без обзира колико је  $r$ . Међутим, за велику вредност параметра  $k$  (касније ћемо прецизирати шта под *великим* подразумевамо) број пресечних тачака може бити 1, 2 или 3, у зависности од вредности параметра  $r$  (слика 4.16).



Слика 4.16

Да бисмо утврдили који положаји равнотеже су стабилни, а који нестабилни, приметимо да ће ток на  $x$ -оси бити усмерен надесно када је  $x' > 0$ , тј. када

$$r \left( 1 - \frac{x}{k} \right) > \frac{x}{1 + x^2},$$

односно, геометријски, кад се права  $y = r \left( 1 - \frac{x}{k} \right)$  налази изнад криве  $y = \frac{x}{1 + x^2}$ , док ће бити усмерен налево кад је права испод криве. Утврђивањем да ли трајекторије теже ка положају равнотеже или „извиру” из њега, долазимо до закључака о стабилности положаја равнотеже. Најпре, ако су вредности параметара  $r$  и  $k$  такве да постоје 3 пресечне тачке, онда имамо укупно 4 положаја равнотеже (један једнак нули и три позитивна), чија се стабилност наизменично мења: нестабилан – стабилан – нестабилан – стабилан. Са смањивањем вредности параметра  $r$ , 3. и 4. положај равнотеже се приближавају, све до тренутка кад права  $y = r \left( 1 - \frac{x}{k} \right)$

заузме тачно тангентни положај у односу на криву  $y = \frac{x}{1 + x^2}$ . Тада се ова два положаја равнотеже стапају у један, који је полустабилан. Са даљим смањивањем вредности параметра  $r$  тај полустабилни положај равнотеже нестаје, па преостају само два положаја равнотеже: нестабилни  $x_1^* = 0$  и један позитиван који је стабилан.

Дакле, можемо приметити да у тренутку када права  $y = r \left( 1 - \frac{x}{k} \right)$  додирује криву

$y = \frac{x}{1 + x^2}$ , систем (4.16) пролази кроз седло–чвор бифуркацију.

Уколико бисмо кренули од вредности параметара  $r$  и  $k$  за које постоје 3 положа-



ја равнотеже различита од нуле, а затим постепено повећавали вредност параметра  $r$ , аналогно бисмо дошли до закључка да се при том прва два позитивна положаја равнотеже све више приближавају један другом, до тренутка када права тангира криву, кад се стапају у један кроз седло–чвор бифуркацију, а потом нестају, када се вредност параметра  $r$  још повећа.

За вредности параметара за које постоје 3 позитивна положаја равнотеже, означимо те положаје редом са  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ( $a < b < c$ ). Положаји равнотеже  $a$  и  $c$  су стабилни, док је  $b$  нестабилан. Мањи стабилни положај равнотеже  $a$  се назива *безбедним нивоом* популације инсеката, док се већи стабилни положај равнотеже  $c$  назива *нивоом најезде*. Са становишта контроле штеточина, било би пожељно да популација *Choristoneura fomiferana* буде око  $a$ , а што даље од  $c$  (улево). Да ли ће доћи до најезде или ће се популација одржавати око безбедног нивоа, зависи од почетног услова  $x_0 = x(0)$ . Ако је  $x_0 > b$ , трајекторије система (4.17) тежиће ка  $c$ , што значи да ће после одређеног времена доћи до најезде.

Најезда може наступити и као последица седло–чвор бифуркације: ако се параметри  $r$  и  $k$  тако мењају да у једном тренутку положај равнотеже  $a$  нестане, ниво популације ће нагло скочити на ниво најезде  $c$ . Овде је присутан и ефекат хистерезиса – чак и ако се параметри врате на своје вредности непосредно пре најезде, ниво популације неће одмах опасти на безбедан ниво, већ ће бити потребно њихово додатно смањење како би се то десило.

Одредимо сада криве у  $(k, r)$  простору које представљају скуп вредности параметара  $k$  и  $r$  за које систем (4.17) пролази кроз седло–чвор бифуркацију. Испоставиће се да нећемо моћи експлицитно да изразимо  $r$  као функцију од  $k$  или обрнуто, већ ћемо добити једначине тражених кривих у параметарском облику, тј. као  $(k(x), r(x))$ , где је  $x > 0$ .

Услов за седло–чвор бифуркацију јесте да права  $y = r \left(1 - \frac{x}{k}\right)$  тангира криву  $y = \frac{x}{1 + x^2}$ . Стога захтевамо да важе следећи услови:

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1 + x^2} \quad (4.19)$$

и

$$\frac{d}{dx} \left[ r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \right] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{x}{1 + x^2} \right]. \quad (4.20)$$

Из (4.20) налазимо да је

$$-\frac{r}{k} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}. \quad (4.21)$$

Заменом (4.21) у (4.19) добијамо да је

$$r + \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} x = \frac{x}{1 + x^2},$$

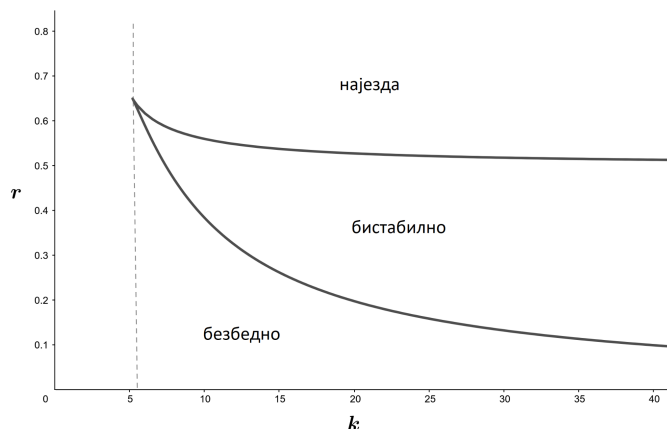
одакле следи да је

$$r = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2}. \quad (4.22)$$

Коначно, из (4.22) и (4.21) налазимо да је

$$k = \frac{2x^3}{x^2 - 1}. \quad (4.23)$$

Због услова да је  $k > 0$  закључујемо да мора бити  $x > 1$ . Једначине (4.22) и (4.23) дефинишу тражене бифуркационе криве. На слици 4.17 приказане су ове бифуркационе криве и означене одговарајуће области на које те криве деле  $(k, r)$  параметарски простор, чиме је добијен дијаграм стабилности динамичког система (4.17). У „безбедној” области (где је  $r$  мало) једини стабилан положај равнотеже је безбедни ниво (раније означен са  $a$ ), у области „најезде” једини стабилан положај равнотеже је ниво најезде (раније означен са  $c$ ), док у „бистабилном” региону постоје оба стабилна положаја равнотеже.



Слика 4.17: Дијаграм стабилности динамичког система (4.17)

За крај овог одељка желимо да видимо које су то веродостојне вредности бездимензионалних параметара  $r = \frac{RA}{B}$  и  $k = \frac{K}{A}$  са биолошког становишта. Ови параметри се полако мењају како се мењају услови у шуми. Према Лудвигу и др., вредност параметра  $r$  се повећава како шума расте, док вредност параметра  $k$  остаје фиксна. Наиме, нека је  $S$  просечна величина дрвета, схваћена као укупна површина обухваћена гранама једног дрвета. Капацитет популације инсеката  $K$  требало би да буде пропорционалан количини четина на гранама дрвећа, која је сразмерна површини  $S$ , стога закључујемо да би требало да важи да је

$$K = K'S. \quad (4.24)$$

Слично важи и за параметар  $A$  из предаторског дела једначине (4.16). Тражећи инсекте, предатори (попут птица) претражују гране дрвећа, а не читаву површину шуме, тако да би  $A'$  требало да има димензију броја јединки инсеката по јединици

површине коју обухватају гране дрвећа, одакле следи да је

$$A = A'S. \quad (4.25)$$

Из (4.24) и (4.25) налазимо да је

$$r = \frac{RA'}{B}S \quad \text{и} \quad k = \frac{K'}{A'}.$$

Експерименталним путем дошло се до закључка да за младу шуму *Abies balsamea* важи да је  $k \approx 300$  и  $r < \frac{1}{2}$ . Са слике (4.17) може се закључити да тада тачка  $(k, r)$  лежи у бистабилном региону. Кад је шума млада, предаторима је лако да претраже релативно мали број грана по јединици површине шуме, те они популацију *Choristoneura fomiferana* одржавају на ниском нивоу. Међутим, како шума расте и увећава се, повећава се и  $S$  и тачка  $(k, r)$  се помера нагоре у параметарском простору, приближавајући се области најезде (слика 4.17). Лудвиг и др. претпостављају да за потпуно зрелу шуму важи да је  $r \approx 1$ , што одговара области најезде. Након што се најезда деси, стабла *Abies balsamea* умиру и шуму у потпуности преузимају стабла брезе. Међутим, бреза је мање ефикасна у коришћењу хранљивих материја, тако да се ипак у неком тренутку стабла *Abies balsamea* враћају и поново преузимају шуму. Њихов опоравак траје 50 – 100 година.

## 4.2 Дводимензионални динамички системи

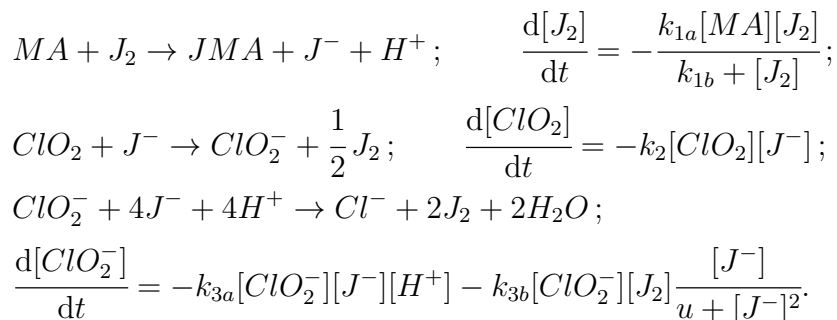
### 4.2.1 Осцилаторна хемијска реакција

Све до двадесетих година 20. века се сматрало да у току хемијске реакције концентрације реактаната могу једино да монотонно опадају, концентрације продуката да монотонно расту, а ако се хемијска реакција одвија преко интермедијерних врста (хемијских врста које настају и нестају у току реакције), чије су концентрације у почетном тренутку једнаке нули, концентрације тих врста ће најпре монотонно да расту, у неком тренутку ће да достигну свој максимум, а потом монотонно да опадају. Међутим, почетком двадесетих година прошлог века, амерички хемичар Бреј<sup>6</sup> уочио је немонотонно (тачније *каскадно*) настајање гасовитог кисеоника при такође немонотонном (каскадном) разлагању водоник–пероксида у киселој средини у присуству јодата, што се сматра првом откривеном осцилаторном хемијском реакцијом, јер се она одвијала преко интермедијера чија се концентрација у току реакције мењала периодично (наизменично је расла и опадала у правилним временским размацима). Дакле, осцилаторне хемијске реакције јесу хемијске реакције у којима се концентрације реактаната и продуката мењају каскадно, а концентрације интермедијерних врста периодично, тј. осцилаторно.

У овом поглављу анализираћемо једну конкретну такву хемијску реакцију, а то је реакција настанка хлор–диоксид–јод–малонске киселине ( $ClO_2 - J_2 - MA$ ). Модел

<sup>6</sup>William C. Bray (1879 – 1946)

ове хемијске реакције предложили су Ленгјел и др.<sup>7</sup> 1990. године и он је дат следећим једначинама:



Типичне вредности концентрација (вредности задате у угластим заградама) и кинетичких параметара могу се пронаћи у делима Ленгјела и др. (1990), односно Ленгјела и Епстајна (1991)<sup>8</sup>. Међутим, наведени модел није погодан за анализу. Да би га поједноставили, Ленгјел и др. (1990) су искористили откриће до којег су дошли у својим симулацијама: концентрације реактаната ( $MA$ ,  $J_2$  и  $ClO_2$ ) мењају се знатно спорије него концентрације интермедијера ( $J^-$  и  $ClO_2^-$ ). Апроксимацијом концентрација спорих реактаната константама, уз још неке разумне претпоставке, успели су да редукују полазни модел на систем са две променљиве. После свођења на погодан бездимензионални облик, добили су динамички систем

$$\begin{aligned} x' &= a - x - \frac{4xy}{1 + x^2}, \\ y' &= bx \left( 1 - \frac{y}{1 + x^2} \right), \end{aligned} \tag{4.26}$$

где  $x$  и  $y$  представљају бездимензионалне концентрације  $J^-$  и  $ClO_2^-$ , редом, а параметри  $a$ ,  $b > 0$  одређују се емпиријски и зависе од претпостављених концентрација за споре реактанте.

Најпре ћемо да покажемо да систем (4.26) има затворену трајекторију (за коју ће се испоставити да је стабилан гранични цикл) у првом квадранту, уколико параметри  $a$  и  $b$  задовољавају одређене услове. То ћемо доказати применом Поенкаре–Бендиксонове теореме. Стога је потребно да конструишемо замку за трајекторију система (4.26), која ће задовољавати услове ове теореме. Кренимо од налажења једначина изоклина датог система.  $x$ -нула изоклина задовољава једначину

$$a - x - \frac{4xy}{1 + x^2} = 0,$$

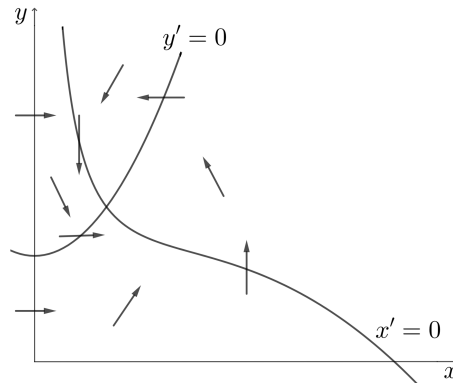
<sup>7</sup>I. Lengyel, G. Rabai, I. R. Epstein, *Experimental and modeling study of oscillations in the chlorine dioxide-iodine-malonic acid reaction*, Journal of American Chemical Society, 1990

<sup>8</sup>I. Lengyel, I. R. Epstein, *Modeling of Turing structures in the chlorite-iodide-malonic acid-starch reaction*, Science 251, 1991

тј.  $y = \frac{(a-x)(1+x^2)}{4x}$ , док  $y$ -нула изоклине задовољавају једначину

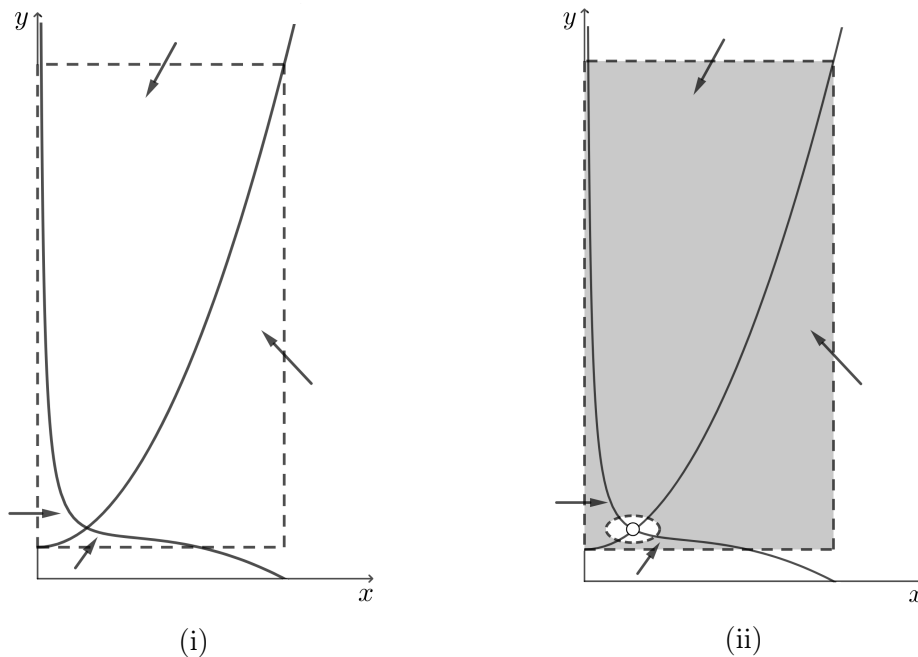
$$bx \left( 1 - \frac{y}{1+x^2} \right) = 0,$$

одакле следи да су то  $y$ -оса (права  $x = 0$ ) и парабола  $y = 1 + x^2$ . На слици 4.18 приказане су  $x$ -нула и  $y$ -нула изоклине система (4.26), са назначеним смеровима трајекторија у свакој од области (басена) на које те изоклине деле први квадрант.



Слика 4.18:  $x$ -нула и  $y$ -нула изоклине и смер трајекторија система (4.26)

Уочимо правоугаону област означену испрекиданом линијом на слици 4.19(i). То ће управо бити тражена замка за трајекторију система (4.26). Заиста, приметимо да су сви вектори на рубу ове области усмерени ка њеној унутрашњости – стога ће све трајекторије система (4.26) које започињу у овој области остати све време у њој „заробљене”.



Слика 4.19: Замка за трајекторије система (4.26)

Иако смо успели да конструишемо жељену замку, још увек не можемо да применимо Поенкаре–Бендиксонову теорему, зато што у унутрашњости наше замке постоји положај равнотеже (он се налази у пресеку  $x$ –нула и  $y$ –нула изоклине). Међутим, уколико би се испоставило да је тај положај равнотеже нестабилан, могли бисмо да применимо ту теорему на *пробушену* област, која се добија тако што из првобитне области, тј. замке избацимо положај равнотеже са његовом малом околином (осенчена област са слике 4.19(ii)). „Рупа” која настаје избацавањем положаја равнотеже је инфинитезимална, али смо је на слици 4.19(ii) нацртали већу због прегледности. Све трајекторије из околине положаја равнотеже, ако је он нестабилан, бивају одвучене у осенчени део области, а због смера трајекторија на рубу те области, не могу је никад напустити, тј. биће „заробљене” у њој. Како у том осенченом делу нема положаја равнотеже, испуњени су сви услови за примену Поенкаре–Бендиксонове теореме, која нам гарантује постојање затворене трајекторије система (4.26) унутар те области. Сада ћемо да одредимо услове које параметри  $a$  и  $b$  морају да задовоље да би положај равнотеже система (4.26) био нестабилан. Нађимо најпре координате тог положаја равнотеже, које ћемо означити са  $(x^*, y^*)$ . Оне представљају решење система једначина

$$a - x - \frac{4xy}{1 + x^2} = 0, \quad (4.27)$$

$$bx \left( 1 - \frac{y}{1 + x^2} \right) = 0. \quad (4.28)$$

Из једначине (4.28) налазимо да је  $x = 0$  или  $y = 1 + x^2$ . Како је  $a > 0$ , решење  $x = 0$  одбацујемо, а заменом  $y = 1 + x^2$  у једначину (4.27) добијамо  $a - x - \frac{4x(1 + x^2)}{1 + x^2} = 0$ , тј.  $a - 5x = 0$ , одакле налазимо да је  $x$ –координата траженог положаја равнотеже  $x^* = \frac{a}{5}$ . Сада лако налазимо да је одговарајућа  $y$ –координата дата са  $y^* = 1 + (x^*)^2 = 1 + \frac{a^2}{25}$ , те је тражени положај равнотеже

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{a}{5}, 1 + \frac{a^2}{25} \right).$$

Одредимо сада услове под којима је положај равнотеже  $(x^*, y^*)$  нестабилан. Јакобијева матрица система (4.26) дата је са

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -1 - 4y \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & -\frac{4x}{1+x^2} \\ b - by \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & -\frac{bx}{1+x^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{1+x^2} \begin{bmatrix} -1 - x^2 - 4y \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} & -4x \\ b + bx^2 - by \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} & -bx \end{bmatrix}.$$

Заменом координата положаја равнотеже, уз коришћење релације  $y^* = 1 + (x^*)^2$ , добијамо да је

$$J(x^*, y^*) = \frac{1}{1 + (x^*)^2} \begin{bmatrix} 3(x^*)^2 - 5 & -4x^* \\ 2b(x^*)^2 & -bx^* \end{bmatrix}.$$

Сада налазимо да су траг и детерминанта Јакобијеве матрице у положају равнотеже једнаки

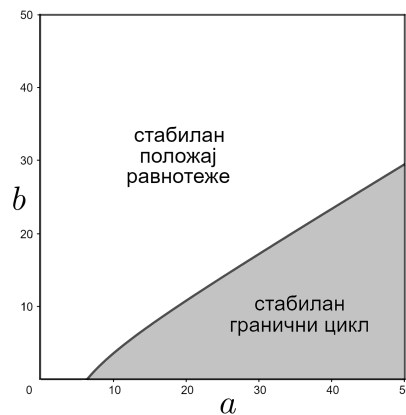
$$p = \text{Tr}(J(x^*, y^*)) = \frac{3(x^*)^2 - 5 - bx^*}{1 + (x^*)^2} \quad \text{и} \quad q = \det(J(x^*, y^*)) = \frac{5bx^*}{1 + (x^*)^2} > 0.$$

Како је  $q > 0$ , то положај равнотеже  $(x^*, y^*)$  не може бити седло. Закључујемо да је ће  $(x^*, y^*)$  бити нестабилан положај равнотеже (нестабилан фокус или нестабилан чвор) уколико је  $p > 0$ , тј.  $3(x^*)^2 - 5 > bx^*$ , одакле, када заменимо  $x^* = \frac{a}{5}$ , добијамо услов који морају да задовољавају параметри  $a$  и  $b$ :

$$b < \frac{3a}{5} - \frac{25}{a} = b_c. \quad (4.29)$$

Дакле, кад је испуњен услов (4.29), Поенкаре–Бендиксонова теорема нам гарантује постојање затворене трајекторије унутар пробушене области са слике 4.19(ii). Испоставиће се да та трајекторија представља стабилан гранични цикл, што ће бити јасно ускоро, кад помоћу рачунара скицирамо фазни портрет система (4.26) за одговарајуће вредности параметара  $a$  и  $b$ .

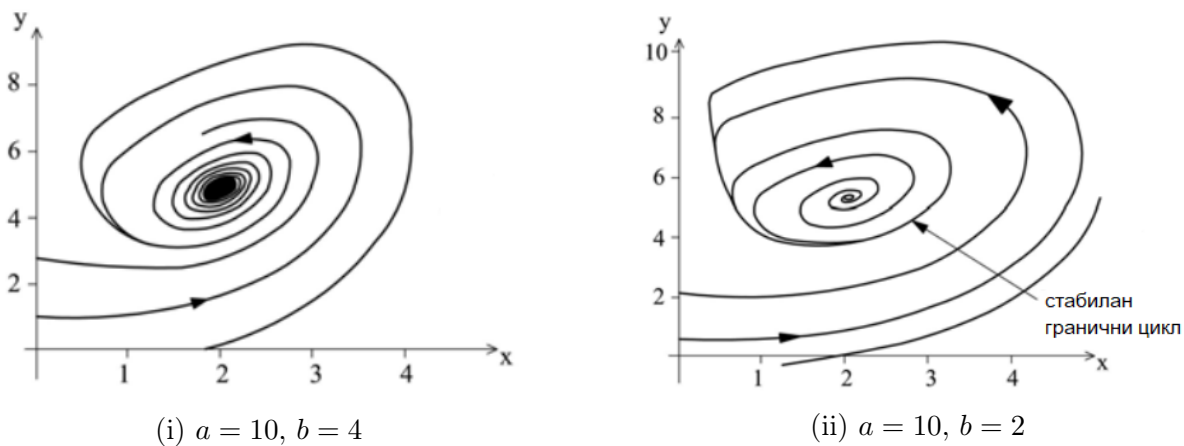
Ако у  $(a, b)$ –равни скицирамо криву  $b = b(a) = \frac{3a}{5} - \frac{25}{a}$ , добијамо дијаграм стабилности приказан на слици 4.20, на којем смо назначили области којима параметри  $a$  и  $b$  треба да припадају како би систем (4.26) имао стабилан положај равнотеже, односно стабилан гранични цикл (и нестабилан положај равнотеже).



Слика 4.20: Дијаграм стабилности за динамички систем (4.26)

Сада ћемо показати да за вредност параметра  $b = b_c$  у систему (4.26) долази до Хопфове бифуркације и утврдити да ли је та бифуркација наткритична или поткритична. Скицирајмо помоћу рачунара два фазна портрета система (4.26) за, на пример,  $a = 10$  и за  $b$  мање, односно веће од одговарајуће вредности  $b_c(a)$  (добија се да је у том случају  $b_c = 3.5$ ). Испоставља се да за  $b > b_c$  (слика 4.21(i)) стабилни положај равнотеже представља стабилан фокус, док за  $b < b_c$  (слика 4.21(ii)) положај равнотеже представља нестабилан фокус, а све трајекторије теже стабилном граничном цикл. Овакво понашање одговара Хопфовој бифуркацији, и то је у пи-

тању наткритична Хопфова бифуркација – након што положај равнотеже (стабилан фокус) постане нестабилан, појављује се стабилан гранични цикл који га окружује. Скицирањем фазних портрета система (4.26) кад  $b \rightarrow b_c$  одоздо, може се видети да се амплитуда стабилног граничног циклуса све више смањује, све док од њега не остане само тачка (кад постане  $b = b_c$ ).



Слика 4.21: Фазни портрети динамичког система (4.26) за различите вредности параметара  $a$  и  $b$



# Литература

- [1] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos (With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering)*, Perseus Books, 1994
- [2] Д. Кузмановић, Н. Васовић, С. Костић, С. Симић, И. Франовић, И. Гроздановић, К. Тодоровић–Васовић, Б. Ранковић Плазинић, *Увод у теорију хаоса*, Универзитет у Београду, Саобраћајни факултет и Рударско–геолошки факултет, 2013
- [3] J. K. Hale, Н. Коџак, *Dynamics and Bifurcations*, Springer, 1991
- [4] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001
- [5] <http://poincare.matf.bg.ac.rs/~jelenak//DJ/dj.pdf>
- [6] <https://www.pmf.ni.ac.rs/predmeti/materijali/?idp=1651>
- [7] [https://cdn.intechopen.com/pdfs/39234/InTech-Bifurcation\\_analysis\\_and\\_its\\_applications.pdf](https://cdn.intechopen.com/pdfs/39234/InTech-Bifurcation_analysis_and_its_applications.pdf)
- [8] П. Ђирковић, *Бифуркациона анализа SIR епидемиолошког модела са медицинским третманом*, мастер рад, Природно–математички факултет, Универзитет у Нишу, 2020