УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милош Зимоњић

ХАРТМАН-ГРОБМАНОВА ТЕОРЕМА И ПРИМЕНЕ

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

др Јелена Катић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Јована Николић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Игор Уљаревић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 30. септембар 2022.

Наслов мастер рада: Хартман-Гробманова теорема и примене

Резиме: Један од централних појмова које ћемо обрадити биће појам динамичког система тј. система у коме функција описује временску зависност позиције тачке у њеном амбијентном простору.

У првој глави посматраћемо особине нелинеарних система диференцијалних једначина. Ако систем са почетним условом има решење, онда ће бити могуће предвидети где ће се нека тачка система наћи после одређеног времена, тј. моћи ћемо посматрати трајекторије система - путање коју описују одређене тачке система током времена. Како многе нелинеарне диференцијалне једначине не могу бити решене фокусираћемо се на геометријску или квалитативну теорију нелинеарних диференцијалних једначина чији је зачетник Анри Поенкаре[1].

Циљ ће нам бити да опишемо квалитативно понашање скупа решења посматраног система диференцијалних једначина, укључујући и инваријантне скупове, гранично понашање динамичког система или тока дефинисаног том диференцијалном једначином. Да бисмо остварили циљ морамо прво засновати локалну теорију нелинеарних динамичких система. Касније ћемо доказати Хартман-Гробманову теорему која ће нам нешто рећи о квалитативном понашању решења система обичних нелинеарних једначина у околини хиперболичког еквилибријума система.

У другој глави ћемо изложити класични приступ Морсовој теорији и описати везу између критичних тачака Морсове функције и саме топологије многострукости M. Испоставиће се да ћемо на основу Морсове функције на M моћи да реконструишемо CW-комплекс који ћемо придружити многострукости M. Видећемо и да свакој критичној тачки индекса k одговара тачно једна k-ћелија у CW декомпозицији. Такође ћемо описати важне особине градијентног тока, повезаност са критичним тачкама што ће нам у наставку омогућити да се бавимо Морсовом хомологијом.

У трећој глави ћемо посматрати простор градијентих трајекторија које почињу у једној, а завршавају се у другој критичној тачки и видети како можемо извршити компактификацију претходно поменутог простора коришћењем изломљених трајекторија, при чему ћемо ово оправдати коришћењем Хартман-Гробманове теореме. Такође ћемо оправдати постојање Морсовог ланчастог комплекса који чине ланчасте групе генерисане скупом критичних тачака је-

[1] Jules Henri Poincaré (1854-1912) - француски математичар

днаког индекса и граничног оператора који се заснива на бројању градијентних трајекторија између критичних тачака чија је разлика индекса једнака 1. Последица претходног ће бити разматрање хомологије овог ланчастог комплекса. Пар примера ће нам дати идеју да ће се Морсова хомологија поклопити са стандардном сингуларном хомологијом и мотивисани тиме ћемо формулисати важну теорему која каже да су сингуларна и Морсова хомологија заправо изоморфне и више детаља о претходном се може наћи у [16] или у [17].

Помоћу Хартман-Гробманове теореме доказаћемо теорему о распадаању трајекторија, која чини важан корак у опису границе простора трајекторија, која се пак користи у дефиницији Морсове хомологије.

На крају бих желео да се захвалим својој менторки др Јелени Катић, на предложеној теми и великој посвећености, стрпљењу и саветима током израде овог рада. Такође се захваљујем члановима комисије др Јовани Николић и др Игору Уљаревићу на свим корисним сугестијама приликом читања рада.

Кључне речи: Динамички систем, диференцијална једначина, ток диференцијалне једначине, векторско поље, фазни простор, фазни портрет, еквилибријум, хомеоморфизам, Хартман-Гробманова теорема, многострукост, Морсова теорија, критичне тачке, хомотопски слој, CW-комплекс, градијентна трајекторија, ланчасти комплекс, хомологија.

Садржај

Глава 1

Нелинеарни системи

1.1 Увод

Нека је U отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$, I интервал који садржи t_0 и $F : U \times I \to \mathbb{R}^n$ нелинеарно векторско поље. Посматрамо следећи систем диференцијалних једначина са почетним условом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ако је F класе C^1 на $U \times I$ тада систем (1.1) има јединствено решење дефинисано на максималном интервалу егзистенције $(\alpha, \beta) \subset I$. Ако F не зависи од t реч је о **аутономном** нелинеарном систему диференцијалних једначина.

Дефиниција 1.1. *Пресликавање $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дефинисано са*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_t(x) &= F(\phi_t(x), t) \\ \phi_0(x) &= x \end{aligned}$$

*се назива **током** система диференцијалних једначина или ток дефинисан векторским пољем F.*

Решење система (1.1) у тачки t је јединствено одређено почетним условом $x(t_0) = x_0$ и дефинисано је на неком интервалу који зависи од тачке x_0, стога пресликавање из претходне дефиниције можемо видети као пресликавање чији је домен $J \times B$, где је B лопта око дате тачке и J интервал где је дефинисано решење, који притом зависи од x_0. Међутим, испоставља се да можемо постићи да интервал J не зависи од тачке x_0, што гарантује следећа теорема, чији се детаљан доказ може наћи у [9].

Теорема 1.1. *Нека је U отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$ и векторско поље $F : U \times I \to \mathbb{R}^n$ непрекидно и локално униформно (по $t \in I$) Липшицово по $x \in U$. Тада за свако $x_0 \in U$ постоји кугла B са центром у x_0 полупречника $\delta_0 > 0$, тако да једначина*

$$\dot{x} = F(x,t)$$

$$x(t_0) = y_0$$

има јединствено решење

$$y : [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \to U$$

дефинисано за свако $y_0 \in B$.

Наредне теореме које ћемо навести без доказа дају карактеризацију пресликавања ϕ_t у зависности од векторског поља F. Детаљни докази предстојећих теорема се могу наћи у [9].

Теорема 1.2. *Нека је F класе C^1 на $U \times I$. Тада је пресликавање ϕ_t диференцијабилно.*

Напомена 1.1. *Ако су задовољени услови претходне теореме може се чак показати да је ток класе C^1 на $U \times I$.*

Теорема 1.3. *Ако је F аутономно векторско поље класе C^1, онда је пресликавање ϕ_t* ***једнопараметарска фамилија дифеоморфизама****.*

У наставку ћемо подразумевати да је F аутономно векторско поље.

Дефиниција 1.2. *Нека су $U, V \subset \mathbb{R}^n$ и $F : U \to \mathbb{R}^n$, $G : V \to \mathbb{R}^n$ глатка векторска поља . За токове ϕ_t, ψ_t дефинисане векторским пољима F и G кажемо да су* ***конјуговани*** *или* ***еквивалентни*** *ако постоји бијективно пресликавање $\varphi : U \to V$ тако да важи: $\varphi \circ \phi_t = \psi_t \circ \varphi$.*

Додатно:

- Ако је φ линеарно онда кажемо да су токови ϕ_t, ψ_t линеарно еквивалентни.
- Ако је φ хомеоморфизам онда кажемо да су токови ϕ_t, ψ_t тополошки еквивалентни.

- Ако је φ дифеоморфизам онда кажемо да су токови ϕ_t, ψ_t диференцијално еквивалентни.

Дефиниција 1.3. *Нека је $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ диференцијабилно пресликавање и $F : U \to \mathbb{R}^n$ векторско поље. Векторско поље $\varphi_*(F)$ дато са:*

$$\varphi_*(F)(\varphi(x)) := d\varphi(x)(F(x))$$

*се назива **pushforward** векторског поља F пресликавањем φ.*

Следећи став се лако проверава.

Став 1.4. *Токови ϕ_t, ψ_t дефинисани векторским пољима F и G су диференцијално еквивалентни ако и само ако $G = \varphi_* F$, где је φ дифеоморфизам из дефиниције (1.2).*

Наредна теорема потпуно описује ток векторског поља у околини тачке x_0 за коју важи $F(x_0) \neq 0$.

Теорема 1.5 (Исправљивост векторског поља)**.** *Ако је $F : U \to \mathbb{R}^n$ векторско поље тако да $F(x_0) \neq 0$ за $x_0 \in U$, тада постоји околина V тачке x_0, $x_0 \in V \subset U$ и дифеоморфизам $\varphi : V \to \varphi(V)$ тако да је $\varphi_* F = \frac{\partial}{\partial x_1} = (1, 0, ..., 0)$.*

Дефиниција 1.4. *Тачка $x_* \in U \subset \mathbb{R}^n$ се назива **еквилибријум** или **критична тачка** система $\dot{x} = F(x)$ ако је $F(x_*) = 0$. Еквилибријум $x_* \in U$ је **хиперболички** ако за сваку сопствену вредност λ матрице $DF(x_*)$[1] важи $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$.*

Напомена 1.2. *Из претходне теореме следи да је ток векторског поља у околини некритичне тачке еквивалетан транслацији. Зато је понашање система у околини критичне тачке занимљивије о чему говори следећа теорема, која је један од главних резултата описаних у овом раду.*

[1] Систем $\dot{X} = AX$, где је $A = DF(x_*)$ се назива линеаризација система $\dot{x} = F(x)$ у тачки $x_* \in U$.

1.2 Хартман-Гробманова теорема

Теорема 1.6 (**Хартман**[2]**-Гробман**[3]). *Нека је E отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$ који садржи координатни почетак. Нека је $F \in C^1(E)$ и ϕ_t ток нелинеарног система*

$$\dot{x} = F(x). \tag{1.2}$$

Ако је $F(0) = 0$ и ако за сваку сопствену вредност λ матрице $DF(0)$ важи $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ тада постоје отворени скупови $U, V \subset \mathbb{R}^n$ који садрже координатни почетак и хомеоморфизам $H : U \to V$ тако да за свако $x_0 \in U$ постоји отворен интервал $0 \in I_0 \subset \mathbb{R}$ тако да је:

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0), \quad \text{где је } A{=}DF(0)$$

за свако $x_0 \in U$ и $t \in I_0$.

Напомена 1.3. *Теорема важи и ако је еквилибријум $x_* \neq 0$. Наиме можемо уочити транслацију $T_{-x_*}(x) = x - x_*$ и векторско поље $G = (T_{-x_*})_* F$ што нам даје: $G(x) = (T_{-x_*})_* F(x) = dT_{-x_*}(x + x_*)(F(x + x_*)) = F(x + x_*)$ одакле је $G(0) = F(x_*)$. Дакле када нађемо хомеоморфизам из теореме за G и еквилибријум 0, аутоматски добијамо и хомеоморфизам за F и $x_* \neq 0$.*

Доказ. Посматрамо систем (1.2), $F \in C^1(E), F(0) = 0$ и $A = DF(0)$. Доказ ћемо поделити на кораке:

Први корак (Прелазак на Жорданову нормалну форму)

Жорданова теорема нам гарантује да постоји инвертибилна матрица D тако да важи

$$D^{-1} A D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = A'$$

где за сопствене вредности λ_{p_j} матрице P важи $\operatorname{Re}\lambda_{p_j} < \alpha < 0$, за док сопствене вредности λ_{q_j} матрице Q важи $\operatorname{Re}\lambda_{q_j} > \beta > 0$.

Дакле, матрице A и A' су сличне што имплицира да су системи $\dot{x} = Ax$ и $\dot{x} = A'x$ линеарно еквивалентни, а самим тим и тополошки, па без умањења општости можемо сматрати да је:

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}.$$

[2] Philip Hartman(1915 - 2015) - амерички математичар

[3] David Grobman - руски математичар

Други корак (Дефинисање пресликавања Y и Z)

Нека је ϕ_t ток нелинеарног система (1.2). Тада је:

$$x(x_0,t) = \phi_t(x_0) = \begin{bmatrix} y(y_0,z_0,t) \\ z(y_0,z_0,t) \end{bmatrix}, \quad \text{где је} \quad x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

при чему $y_0 \in E^s$ (стабилан потпростор од A) и $z_0 \in E^u$ (нестабилан потпростор од A)[4].

Напомена: За сваку матрицу A важи: $\mathbb{R}^n = E^s \bigoplus E^u \bigoplus E^c$, где су E^s, E^u, E^c стабилни, нестабилни, централни потпростор од A. Како је у нашем случају матрица хиперболичка важи $E^c = 0$ што повлачи да је $\mathbb{R}^n = E^s \bigoplus E^u$ и за свако $x \in \mathbb{R}^n$ разлагање $x = (y,z)$ је јединствено.

Уочимо сада израз $x(x_0,1) - e^A x_0$ који кад запишемо у матричном облику добијамо:

$$\begin{bmatrix} y(y_0,z_0,1) \\ z(y_0,z_0,1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^P & 0 \\ 0 & e^Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(y_0,z_0,1) - e^P y_0 \\ z(y_0,z_0,1) - e^Q z_0 \end{bmatrix}.$$

Стога уочимо следећа два пресликавања:

$$\tilde{Y}(y_0,z_0) := y(y_0,z_0,1) - e^P y_0, \quad \tilde{Z}(y_0,z_0) := z(y_0,z_0,1) - e^Q z_0.$$

Како је 0 еквилибријум система то повлачи да је $x(0,t) = 0$ што аутоматски повлачи да $\tilde{Y}(0) = 0$ и $\tilde{Z}(0) = 0$. Такође важи да је $D\tilde{Y}(0) = 0$ и $D\tilde{Z}(0) = 0$. Претходна тврдња је еквивалентна са $0 = d(\phi_1(x) - e^A x)(0) = d\phi_1(0) - e^A$ па је довољно доказати да је $d\phi_1(0) = e^A$. Стога уочимо следећу варијациону једначину:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(\xi) = A(t)\varphi_t(\xi)$$
$$\varphi_0(\xi) = \xi$$

где је $A(t) = \frac{d}{dx}F(\phi_t(x))$. Заменом $x = 0$ добијамо $A(t) = \frac{d}{dx}F(0) = A$, па се решавање претходне варијационе једначине своди на решавање $\frac{d}{dt}\varphi_t = A\varphi_t$ чије је решење $\varphi_t = e^{At}$. Из доказа теореме 1.2 знамо да је $\varphi_1 = d\phi_1(0)$ стога закључујемо да је $d\phi_1(0) = e^A$, чиме смо оправдали наведену тврдњу.

[4] Стабилан потпростор од A представља линеарни потпростор генерисан сопственим векторима који одговарају сопственим вредностима које задовољавају $\operatorname{Re}\lambda < 0$, док је нестабилан генерисан сопственим векторима чије сопствене вредности задавољавају $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$\tilde{Y}(y_0, z_0)$ и $\tilde{Z}(y_0, z_0)$ су непрекидно диференцијабилна пресликавања јер је F класе C^1на E па на компактном скупу $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq {s_0}^2$ имамо:

$$\|D\tilde{Y}(y_0, z_0)\| \leq a \quad \|D\tilde{Z}(y_0, z_0)\| \leq a$$

Константу a по потреби можемо смањити тако што ћемо смањити s_0. Дефинишемо глатке функције $Y(y_0, z_0)$ и $Z(y_0, z_0)$ са $\tilde{Y}(y_0, z_0)$ и $\tilde{Z}(y_0, z_0)$ на $|y_0|^2+|z_0|^2 \leq (\frac{s_0}{2})^2$ и нулом на $|y_0|^2 + |z_0|^2 \geq {s_0}^2$. Како је DY ограничено на $\mathbb{R}^n$ теорема о средњој вредности нам за свако $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n$ даје:

$$|Y(y_0, z_0)| = |Y(y_0, z_0) - Y(0, 0)| \leq a\sqrt{|y_0|^2 + |z_0|^2} \leq a(|y_0| + |z_0|)$$

и слично $|Z(y_0, z_0)| \leq a(|y_0| + |z_0|)$.

Трећи корак (Дефинисање пресликавања L и T)
У овом кораку ћемо искористити помоћну лему, чији се доказ може наћи у [9].

Лема 1.1. *За свако $\varepsilon > 0$ матрица A је слична матрици $P'+\varepsilon Q'$, где је $P'+Q'$*[5] *Жорданова*[6] *нормална форма матрице A.*

Ако су λ_{p_j} и λ_{q_j} сопствене вредности матрица P и Q из корака 1 ($\operatorname{Re}\lambda_{p_j} < \alpha < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{q_j} > \beta > 0$), тада су $e^{\lambda_{p_j}}$ и $e^{\lambda_{q_j}}$ сопствене вредности матрица $B := e^P$ и $C := e^Q$ при чему важи:

$$0 < |e^{\lambda_{p_j}}| = |e^{\operatorname{Re}\lambda_{p_j} + i\operatorname{Im}\lambda_{p_j}}| = |e^{\operatorname{Re}\lambda_{p_j}}||e^{i\operatorname{Im}\lambda_{p_j}}| \leq e^{\alpha} < 1, \quad |e^{\lambda_{q_j}}| \geq e^{\beta}.$$

За $\varepsilon > 0$ лема 1.1 каже да постоје инвертибилне матрице N_1 и N_2 тако да: ${N_1}^{-1}BN_1 = e^{{N_1}^{-1}PN_1}$ има норму[7] $\leq e^{\alpha+\varepsilon}$ и ${N_2}^{-1}C^{-1}N_2 = e^{{N_2}^{-1}Q^{-1}N_2}$ има норму $\leq e^{-\beta+\varepsilon}$. За довољно мало ε можемо постићи да

$$b = ||B|| \leq 1, \quad c = ||C^{-1}|| \leq 1.$$

Дефинишемо пресликавања:

$$L(y, z) = \begin{bmatrix} By \\ Cz \end{bmatrix}, \qquad T(y, z) = \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

тј. $L(x) = e^A x$ и локално $T(x) = \phi_1(x)$.

[5]Матрица P' се састоји од сопствених вредности, док матрицу Q' сачињавају нуле и евентуално по нека јединица изнад дијагонале.
[6]Marie Ennemond Camille Jordan(1838-1922) - француски математичар
[7]$||A|| = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$, где је $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$

Лема 1.2. *Постоји хомеоморфизам* $H : U \to V$, $0 \in U, V$ *тако да важи:*

$$H \circ T = L \circ H.$$

Претходну лему ћемо доказати у корацима 4 и 5.

Четврти корак:

Нека је:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \Phi(y,z) \\ \Psi(y,z) \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Тада је $H \circ T = L \circ H$ еквивалентно са:

$$B\Phi(y,z) = \Phi(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z)) \tag{1.3}$$

$$C\Psi(y,z) = \Psi(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z)). \tag{1.4}$$

За другу једначину рекурентно дефинишемо низ Ψ_k:

$$\Psi_0(y,z) = z \tag{1.5}$$

$$\Psi_{k+1}(y,z) = C^{-1}\Psi_k(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z)). \tag{1.6}$$

Индукцијом ћемо доказати да су функције $\Psi_k(y,z)$ непрекидне и задовољавају $\Psi_k(y,z) = z$ за $|y| + |z| \geq 2s_0$ за $k = 0, 1, 2...$

– база:

  $\Psi_0(y,z)$ је непрекидно као пројекција и свакако задовољава услов за $|y| + |z| \geq 2s_0$

– корак:

  Одмах имамо да су $\Psi_k(y,z)$ непрекидне. За s_0 довољно мало (нпр. мање од 1) важи ${s_0}^2 < s_0 < 2s_0$ и због начина како смо дефинисали функцију $Z(y,z)$ важи $Z(y,z) = 0$ за $|y| + |z| \geq 2s_0$ што нам даје:
  $\Psi_{k+1}(y,z) = C^{-1}\Psi_k(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z)) \overset{\text{и.х.}}{=} C^{-1}(Cz + Z(y,z)) = z + C^{-1}Z(y,z) = z$ за $|y| + |z| \geq 2s_0$

Такође, користећи индукцију доказаћемо

$$|\Psi_j(y,z) - \Psi_{j-1}(y,z)| \leq Mr^j(|y| + |z|)^\delta, \quad j = 1, 2, ...$$

где су $r = c(4\max(a,b,c))^\delta, \delta \in (0,1)$ довољно мало тако да $r < 1$ (што је могуће јер $c < 1$) и $M = ac(2s_0)^{1-\delta}/r$.

Како је за $|y| + |z| \geq 2s_0$ $\Psi_k(y,z) = z$ за $k = 0, 1, 2...$ одмах следи да је $\Psi_{k+1}(y,z) - \Psi_k(y,z) = z - z = 0$ за $k = 0, 1, 2...$ тако да ћемо у следећем доказу сматрати да је $|y| + |z| \leq 2s_0$.

– база ($j = 1$)

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(y,z) - \Psi_0(y,z)| &= |C^{-1}\Psi_0(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z)) - z| \\
&= |C^{-1}(Cz + Z(y,z)) - z| = |C^{-1}Z(y,z)| \\
&\leq ||C^{-1}|||Z(y,z)| \leq ca(|y| + |z|) \\
&= ca\frac{r(|y| + |z|)}{r(|y| + |z|)^\delta}(|y| + |z|)^\delta \\
&\leq \frac{ca}{r}(2s_0)^{1-\delta}r(|y| + |z|)^\delta \\
&= Mr(|y| + |z|)^\delta
\end{aligned}$$

– корак

$|\Psi_{k+1}(y,z) - \Psi_k(y,z)| \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq |C^{-1}\Psi_k(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z)) - C^{-1}\Psi_{k-1}(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z))| \\
&\leq \|C^{-1}\||\Psi_k(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z)) - \Psi_{k-1}(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z))| \\
&\overset{\text{и.х.}}{\leq} cMr^k\Big(|By + Y(y,z)| + |Cz + Z(y,z)|\Big)\Big)^\delta \\
&\leq cMr^k\Big(b|y| + 2a(|y| + |z|) + c|z|\Big)^\delta \\
&\leq cMr^k\Big(b(|y| + |z|) + 2a(|y| + |z|) + c(|y| + |z|)\Big)^\delta \\
&= cMr^k\Big((|y| + |z|)(2a + b + c)\Big)^\delta \\
&\leq cMr^k\Big(4\max(a,b,c)\Big)^\delta(|y| + |z|)^\delta \\
&= Mr^{k+1}(|y| + |z|)^\delta,
\end{aligned}$$

чиме смо доказали жељено тврђење

$$\begin{aligned}
&\|\Psi_{k+1} - \Psi_k\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\Psi_{k+1}(y,z) - \Psi_k(y,z)| = \sup_{|y|+|z|\leq 2s_0} Mr^{k+1}(|y| + |z|)^\delta \\
&= Mr^{k+1}(2s_0)^\delta = \frac{ac(2s_0)^{1-\delta}}{r}r^{k+1}(2s_0)^\delta = 2acs_0r^k \to 0, \quad k \to \infty.
\end{aligned}$$

Добили смо да је Ψ_k Кошијев[8] у простору $\Big(C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m), ||\cdot||_\infty\Big)$. Како је претходно поменути простор комплетан Ψ_k конвергира ка функцији Ψ (у норми

[8] Augustin Louis Cauchy(1789 - 1857) - француски математичар

$||\cdot||_\infty$) тј. Ψ_k равномерно конвергира ка функцији Ψ. Пуштањем да $t \to +\infty$ у (1.6) добијамо да гранична функција $\Psi(y,z)$ задовољава једначину (1.4).

Пети корак:

На крају **другог корака** доказали смо $|Y(y_0,z_0)| \leq a(|y_0| + |z_0|)$ (слично за $Z(y,z)$). За довољно мало a (што можемо постићи смањивањем s_0) имаћемо да су Y и Z (локално) Липшицове[9]. То ће бити довољно да T има инверз (детаљан доказ ове тврдње се може наћи у [5], [7]):

$$T^{-1}(y,z) = \begin{bmatrix} B^{-1}y + Y_1(y,z) \\ C^{-1}z + Z_1(y,z) \end{bmatrix}, \quad \text{и свакако имамо:} \quad L^{-1}(y,z) = \begin{bmatrix} B^{-1}y \\ C^{-1}z \end{bmatrix},$$

Сада ће израз $H \circ T = L \circ H$ бити еквивалентан изразу $L^{-1} \circ H = H \circ T^{-1}$. Када ово распишемо видимо да једначина (1.3) заправо еквивалентна са

$$B^{-1}\Phi(y,z) = \Phi(B^{-1}y + Y_1(y,z), C^{-1}z + Z_1(y,z)).$$

Уз услов $\Phi_0(y,z) = y$ претходну једначину можемо решити методом итерације (као за Ψ), а то ћемо моћи јер $b = ||B|| < 1$.
Дакле добили смо тражено непрекидно пресликавање

$$H(x) = \begin{bmatrix} \Phi(y,z) \\ \Psi(y,z) \end{bmatrix}.$$

Ови итеративни поступци су заправо имитација доказа Банаховог става о фиксној тачки. Наиме $\Psi(y,z)$ ће бити фиксна тачка пресликавања α, где је

$$\alpha(F)(y,z) = C^{-1}F(By + Y(y,z), Cz + Z(y,z))$$

и слично за $\Phi(y,z)$. Јединственост фиксне тачке даје јединствено H.
С друге стране, уз замену места L и T добијамо јединствени H_1 за који важи $T \circ H_1 = H_1 \circ L$. Кратким рачуном добијамо:

$$H \circ T = L \circ H \Rightarrow L^{-1} \circ H = H \circ T^{-1},$$

$$T \circ H_1 = H_1 \circ L \Rightarrow H_1^{-1} \circ T^{-1} = L^{-1} \circ H_1^{-1}.$$

Из претходне две једнакости закључујемо да H и H_1^{-1} успостављају исту конјугацију па због јединствености следи:

$$H^{-1} = H_1.$$

[9]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz(1832 - 1903) - немачки математичар

Како је H_1 непрекидно јер је добијено као равномерни лимес непрекидних функција можемо закључити да је H хомеоморфизам.

Шести корак:
Уочимо хомеморфизам из леме (1.2) и означимо га са H_0. Нека су L^t и T^t једнопараметарске фамилије дефинисане са:

$$L^t(x_0) = e^{At}x_0 \quad \text{и} \quad T^t(x_0) = \phi_t(x_0)$$

и дефинишемо пресликавање $H := \int_0^1 L^{-s}H_0T^s\,ds$.
Кратким рачуном добијамо:

$$\begin{aligned}
L^tH &= \int_0^1 L^{t-s}H_0T^s\,ds = \int_0^1 L^{t-s}H_0T^{s-t}\,dsT^t \overset{\text{y=s-t}}{=\!=\!=} \int_{-t}^{1-t} L^{-y}H_0T^y\,dyT^t \\
&= \Big(\int_{-t}^{0} L^{-s}H_0T^s\,ds + \int_0^{1-t} L^{-s}H_0T^s\,dy\Big)T^t \\
&\overset{(\star)}{=\!=} \Big(\int_{1-t}^{1} L^{-s}H_0T^s\,ds + \int_0^{1-t} L^{-s}H_0T^s\,ds\Big)T^t \\
&= \Big(\int_0^1 L^{-s}H_0T^s\,ds\Big)T^t = HT^t.
\end{aligned}$$

Како је $H_0 = L^{-1}H_0T$ тада важи:

$$\int_{-t}^{0} L^{-s}H_0T^s\,ds = \int_{-t}^{0} L^{-s-1}H_0T^{s+1}\,ds \overset{\text{y=s+1}}{=\!=\!=} \int_{1-t}^{1} L^{-y}H_0T^y\,dy$$

па је $(\star)$ оправдана.

Дакле доказали смо $H \circ T^t = L^t \circ H$ или еквивалентно $H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$. За $t = 1$ последња једнакост постаје $H \circ T(x_0) = L \circ H(x_0)$. Хомеоморфизам H_0 задовољава претходну једнакост и његова јединственост имплицира $H = H_0$. Добили смо тражени хомеоморфизам, чиме смо комплетирали доказ.

$\square$

Пример 1.1. *Размотримо следећи систем диференцијалних једначина*

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -y\\ \dot{z} &= z + y^2.\end{aligned}$$

Иако друга једначина зависи од y, овај систем можемо решити тако што решимо сваку једначину понаособ. Наиме, прва једначина је диференцијална једначина која раздваја промењљиве, док се заменом y друга једначина своди на линеарну диференцијалну једначину првог реда. После кратког рачуна добијамо да је решење система:

$$\begin{aligned}y &= y_0e^{-t}\\ z &= z_0e^t + \frac{y_0^2}{3}(e^t - e^{-2t}).\end{aligned}$$

Јасно је да тачка 0 еквилибријум датог система и како је још $\mathrm{A} = \mathrm{DF}(0) = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ видимо да је реч о хиперболичком еквилибријуму.

Претходна теорема нам гарантује да постоји јединствени хомеоморфизам H у околини координатног почетка са горе описаним својствима. Имитирањем итеративног поступка из претходне теореме ћемо га експлицитно израчунати и показати да је у овом случају реч о глобалном хомеоморфизму који слика решења овог нелинеарног система у решења његовог линеаризованог система за свако $x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$.
Како је матрица A већ у Жордановој форми добијамо:
$B = e^P = e^{-1}$, $b = \|B\| = \frac{1}{e} < 1$, $C = e^Q = e^1 = e$, $c = \|C^{-1}\| = \frac{1}{e} < 1$.
Наредни корак се односи на одређивање пресликавања $Y(y_0, z_0)$ и $Z(y_0, z_0)$.

$$\tilde{Y}(y_0, z_0) = y(1, y_0, z_0) - e^P y_0 = y_0e^{-1} - y_0e^{-1} = 0$$

$$\tilde{Z}(y_0, z_0) = z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0 = z_0e + \frac{y_0^2}{3}(e - e^{-2}) - z_0e = ky_0^2, \quad k = \frac{e^3 - 1}{3e^2}.$$

Коришћењем **„bump”** функција, тј. засецањем као у теореми добијамо Y и Z.
Решавање

$$C\Psi(y, z) = \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))$$

се своди на решавање

$$\Psi(y, z) = e^{-1}\Psi(e^{-1}y, ez + ky^2).$$

Сада можемо да применимо итеративни поступак да бисмо нашли преликавање Ψ.

$$\Psi_0(y,z) = z$$
$$\Psi_{k+1}(y,z) = e^{-1}\Psi_k(e^{-1}y, ez + ky^2).$$

Добијамо:

$$\begin{aligned}
&\Psi_0(y,z) = z\\
&\Psi_1(y,z) = e^{-1}\Psi_0(e^{-1}y, ez+ky^2) = e^{-1}(ez+ky^2) = z + ke^{-1}y^2\\
&\Psi_2(y,z) = e^{-1}\Psi_1(e^{-1}y, ez+ky^2) = e^{-1}(ez+ky^2+e^{-1}ke^{-2}y^2) = z + ke^{-1}(1+e^{-3})y^2\\
&\qquad\vdots\\
&\Psi_n(y,z) = z + ke^{-1}(1+e^{-3}+\ldots+(e^{-3})^{n-1})y^2.
\end{aligned}$$

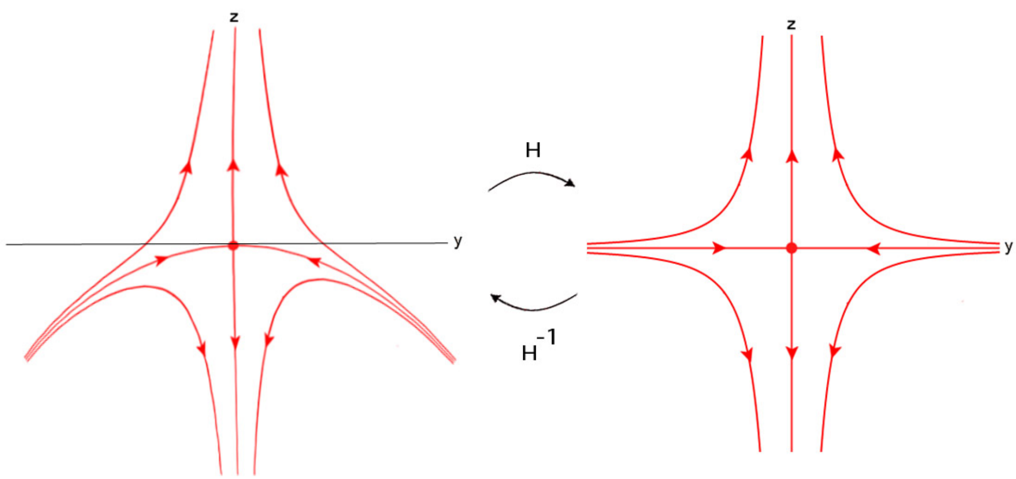
Пуштањем да $n \to +\infty$ и сумирањем претходног геометријског реда добијамо да $\Psi_n(y,z) \to \Psi(y,z) = z + \frac{y^2}{3}$ униформно за свако $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. Слично добијамо $\Phi(y,z) = y$ за свако $(y,z) \in \mathbb{R}^2$, па је тражено пресликавање H_0 дато са:

$$H_0(y,z) = \begin{bmatrix} y \\ z + \frac{y^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Јасно је да је H_0 непрекидно и да му је инверз

$$H_0^{-1}(y,z) = \begin{bmatrix} y \\ z - \frac{y^2}{3} \end{bmatrix}$$

који је такође непрекидан. Из теореме знамо да је $H_0 = H$ и како имамо равномерну конвергенцију на целом домену, нашли смо експлицитно жељени глобални хомеморфизам који остварује потребну конјугацију.



На претходној слици су дати фазни портрети посматраног нелинеарног система и његове линеаризације. Приметимо да се права $z = 0$ линеарног система са H^{-1} слика на криву $z = -\frac{y^2}{3}$ нелинеарног система. Права $y = 0$ се са H^{-1} слика на саму себе, док се трајекторије линеарног система облика $z = \frac{1}{y}$ са H^{-1} сликају на трајекторије $z = \frac{1}{y} - \frac{y^2}{3}$.

Глава 2

Преглед класичне Морсове теорије

2.1 Увод

Нека је M многострукост димензије n и $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција.

Дефиниција 2.1. *Тачка $p \in M$ је* ***критична тачка*** *функције f ако је $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ нула пресликавање.*

Нека је (U, φ) карта око тачке $p \in M$ и $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$. Тада је $p \in M$ критична тачка ако важи:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\varphi(p)) = 0$$

за свако $i = \overline{1, n}$.

Дефиниција 2.2. *Критична тачка $p \in M$ је* ***недегенерисана*** *ако је матрица другог извода*

$$D^2 \tilde{f} = \Big[\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p))\Big]_{\overline{1,n}}$$

недегенерисана, односно ранга n.

Како смо недегенерисаност дефинисали у карти, занима нас шта се дешава када променимо карту тј. да ли се може десити да у некој карти изгубимо недегенерисаност матрице другог извода. Испоставља се да недегенерисаност неће зависити од карте и ову тврдњу ћемо оправдати увођењем наредног билинеарног пресликавања.

Дефиниција 2.3. ***Хесијан*** *глатке функције f у критичној тачки $p \in M$ је симетрично билинеарно пресликавање $H_p(f) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ дефинисано са $H_p(f)(X_p, Y_p) = \tilde{X}(\tilde{Y}f)(p)$, где су $\tilde{Y}, \tilde{X} : M \to TM$ произвољна векторска поља која задовољаваји $\tilde{Y}(p) = Y_p, \tilde{X}(p) = X_p$.*

Напомена 2.1. *Приметимо да из чињенице да је $p \in M$ критична тачка добијамо $X_p(\tilde{Y}f) - Y_p(\tilde{X}f) = \tilde{X}(\tilde{Y}f)(p) - \tilde{Y}(\tilde{X}f)(p) = [\tilde{X}, \tilde{Y}](p)(f) = df_p[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ тј. важи:*

$$X_p(\tilde{Y}f) = Y_p(\tilde{X}f).$$

Како лева страна претходне једнакости не зависи од продужења $\tilde{X}$, а десна од продужења $\tilde{Y}$ закључујемо да обе стране не зависе од продужења $\tilde{X}, \tilde{Y}$. Дакле претходна дефиниција не зависи од избора продужења $\tilde{X}, \tilde{Y}$.

Ако узмемо произвољну карту (U, φ) у критичној тачки $p \in M$, ту ћемо имати дефинисане парцијалне изводе који разапињу T_pM стога добијамо:

$$X_p = \sum a_i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p, Y_p = \sum b_i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p, \quad \text{где су } a_i, b_i \text{ глатке функције.}$$

Одатле следи

$$H_p(f)(X_p, Y_p) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p)).$$

Ако уочимо другу карту (V, ϕ) у критичној тачки p тако да је $\phi = \psi \circ \varphi$, за неки дифеоморфизам ψ и $\widehat{f} = f \circ \phi^{-1}$ кракtим рачуном добијамо.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\widehat{f} \circ \phi) = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \widehat{f}(\phi)}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial \widehat{f}(\phi)}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \Big(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\Big).$$

Како у критичној тачки p други сабирак нестаје, закључујемо да ће Хесијан у недегенерисаној тачки бити изражен преко матрице другог извода функције $\widehat{f}$. Са друге стране знамо да је у фиксираној бази билинеарно пресликавање одређено својом матрицом и да ће инвертибилност самог пресликавања бити еквивалентно са инвертибилношћу матрице, у нашем случају матрице другог извода функције $\widehat{f}$.

Сада видимо да је недегенерисаност критичне тачке у смислу дефиниције (2.2) еквивалентна са недегенерисаношћу Хесијана, а како је он дефинисан глобално и не зависи од избора карте тако ни недегенерисаност критичне тачке не зависи од избора карте. Мотивисани претходним уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 2.4. *Критична тачка p глатке функције $f : M \to \mathbb{R}$ је недегенерисана ако је $det(M_p(f)) \neq 0$, где је $M_p(f) = \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p))\right)_{n\times n}$*

Напомена 2.2. *Матрица $M_p(f)$ је симетрична са реалним сопственим вредностима и знакови сопствених вредности су одређени са $H_p(f)$, док ће једино вредности зависити од избора карте. Одавде примећујемо да у погодној карти претходну матрицу можемо видети као дијагоналну са ± 1 на дијагонали.*

У наредним дефиницијама дефинисаћемо појмове који ће бити кључни за наше даље разматрање Морсове теорије.

Дефиниција 2.5. *Димензија максималног потпростора од T_pM где је $H_p(f)$ негативно дефинитан назива се* ***индекс*** *критичне тачке p.*

Дефиниција 2.6. *Глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ је* ***Морсова*** *ако су све њене критичне тачке недегенерисане.*

Може се показати да важи следеће тврђење, чији се доказ може наћи у [14].

Теорема 2.1. *Глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ је Морсова ако и само ако је диференцијал df трансверзалан*[1] *на нулто сечење котангентног раслојења T^*M.*

У наставку ћемо доказати битну особину критичних тачака Морсове функције.

Став 2.2. *Недегенерисане критичне тачке глатке функције $f : M \to \mathbb{R}$ су изоловане.*

Доказ. Нека је $p \in M$ недегенерисана критична тачка функције f. Без умањења општости уочимо карту (U, φ) у тачки p центрирану у нули тј. $\varphi(p) = 0$.

Посматрајмо пресликавање $F : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ дато са

$$F(x) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \varphi^{-1})(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f \circ \varphi^{-1})(x)\Big)$$

Приметимо да је $F(0) = 0$ и $DF(0) = M_p(f)$. Како је тачка p недегенерисана на основу теореме о инверзној функцији закључујемо да постоје околине $U_1 \ni 0$ и $U_2 \ni 0$ тако да је $F \restriction_{U_1}$ дифеоморфизам, па специјално и $1-1$. Тада за

[1]Пресликавања $F : R \to M$ и $G : S \to M$ су трансверзална ако је $F(R) \cap G(s) = \emptyset$ или ако је $F_*(a)T_a(R) + G_*(b)T_bS = T_pM$, за све a, b, p такве да је $F(a) = G(b) = p$. Специјално пресликавање $F : R \to M$ је трансверзално на подмногострукост $S \subset M$ ако су F и инклузија $i_S : S \hookrightarrow M$ трансверзална пресликавања.

свако $x \in U_1 \setminus \{0\}$ имамо $F(x) \neq F(0) = 0$ из чега закључујемо да у околини нуле немамо критичних тачака, тј. x није критична тачка од $f \circ \varphi^{-1}$. Дакле, закључујемо да постоји околина тачке p у којој нема других критичних тачака функције f.

□

Последица 2.3. *Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ на компактној многострукости има коначан број критичних тачака.*

Доказ. Претпоставимо да Морсова функција f има бесконачно много критичних тачака. Поређајмо их у низ и означимо га са x_n. Како је M компактна многострукост тај низ има конвергирајући подниз $x_{n_k} \to x$. Чињеница да је df непрекидно пресликавање повлачи да је $df(x) = 0$, тј. x је критична тачке функције f. Како је она добијена из граничне вредности подниза недегенерисаних критичних тачака, она не може бити изолована што је контрадикција са претходним ставом. □

У наставку ћемо видети пар основних примера Морсових функција.

Пример 2.1. *Посматрајмо функције $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дате са $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^2$. Тачка 0 ће бити једина критична за обе функције, али како имамо $f''(0) = 0$ и $g''(0) = 2$ закључујемо да је g Морсова, док f није.*

Пример 2.2. *Нека су $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ функције дате са*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}, \qquad g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_{n+1})^2.$$

Тачке $(0, 0, \ldots, \pm 1)$ ће бити једине критичне тачке функције f које ће бити недегенерисане, па ће f бити Морсова. Са друге стране тачке $(0, 0, \ldots, \pm 1)$ и све тачке са екватора биће критичне тачке за функцију g. Како је сфера $\mathbb{S}^n$ компактна на основу претходне последице број критичних тачака би морао бити коначан. Функција g има бесконачан број критичних тачака што повлачи да не може бити Морсова.

Сада можемо поставити следеће питање. Колико постоји Морсових функција, тј. да ли на свакој многострукости можемо наћи Морсову функцију? Одговор ће нам дати следеће теореме чији се детаљни докази могу наћи у [2] или у [16].

Како сваку глатку многострукост димензије n можемо уложити у $\mathbb{R}^m$ за неко $m > n$ (за детаље погледати [3]) може се доказати следећа теорема.

Теорема 2.4. *За скоро све* $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ *у смислу Лебегове*[2] *мере на* $\mathbb{R}^m$ *функција* $f : M \to \mathbb{R}$ *дата са* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$ *је Морсова функција.*

Следећа теорема оправдава егзистенцију Морсових функција на затвореној[3] многострукости M.

Теорема 2.5. *Скуп свих Морсових функција на затвореној многострукости је отворен и свуда густ у* $C^2(M)$.

2.2 Морсова лема

Ако посматрамо бесконачно пута глатку функцију $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ знамо да у околини 0 наша функција има следећи облик

$$f(x) = f(0) + df_0x + \frac{1}{2}x^T d^2 f_0 x + o(\|x\|^2)$$

где смо користили матричну нотацију због једноставнијег записа.

Сада посматрамо функцију на многострукости. У недегенерисаној критичној тачки имаћемо да је $df_0 = 0$ док ћемо у погодној карти имати да је матрица Хесијана дијагонална са ± 1 на дијагонали. Али због недегенерисаности критичне тачке важиће и више о чему говори наредна лема.

Лема 2.1 (Морсова[4]лема)**.** *Нека је* $p \in M$ *недегенерисана критична тачка функције* $f : M \to \mathbb{R}$ *индекса* k. *Тада у* $p \in M$ *постоји карта* (U, φ), $\varphi(p) = 0$ *тако да важи*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(p) - {x_1}^2 - \cdots - {x_k}^2 + {x_{k+1}}^2 + \cdots + {x_n}^2.$$

Доказ. Како је тврђење локалног карактера можемо посматрати $M = \mathbb{R}^n$. Такође, без умањења општости можемо претпоставити да је $p = f(p) = 0$, јер у противном можемо извршити трансформацију координатног система тако да то важи.

Нека је $g(x) = d^2 f(0)(x, x)$ и дефинишемо $\omega_0 = dg, \omega_1 = df$.

[2] Henri Léon Lebesgue(1875 – 1941) - француски математичар
[3] Многострукост је затворена ако је компактна и без границе
[4] Harold Calvin Marston Morse(1892 – 1977) - амерички математичар

Да бисмо доказали жељено тврђење довољно је наћи дифеомерфизам ϕ који задовољава $\phi^*\omega_1 = \omega_0$ и $\phi(0) = 0$ јер тада добијамо

$$\phi^*\omega_1 = \omega_0 \iff \phi^*df = dg \iff d(f \circ \phi) = dg$$

што нам уз услов $\phi(0) = 0$ даје $f \circ \phi = g$ и уз погодну линеарну трансформацију добијамо жељени резултат.

Уочимо фамилију диференцијалних форми $\omega_t : M \to T^*M$ дефинисану са $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Ако једнопараметарска фамилија дифеоморефизама ϕ_t задовољава ${\phi_t}^*\omega_t = \omega_0, \phi_0(x) = x$ то повлачи да је

$$\frac{d}{dt}{\phi_t}^*\omega_t = 0$$

.

Са друге стране како је $\dfrac{d\omega_t}{dt} = \omega_1 - \omega_0$ и $d\omega_t = 0$ (због тачности форми ω_1 и ω_0) Картанова формула нам даје

$$0 = \frac{d}{dt}{\phi_t}^*\omega_t = {\phi_t}^*(d(i_{X_t}\omega_t) + i_{X_t}d\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}) = {\phi_t}^*(d(i_{X_t}\omega_t) + d(f-g)) =$$
$$= {\phi_t}^*(d(i_{X_t}\omega_t + f - g)))$$

. Сада је довољно наћи векторско поље тако да важи:

$$i_{X_t}\omega_t = g - f, \quad X_t(0) = 0$$

што ће нам аутоматски дати тражени дифеоморфизам. Овако поље се може наћи и за детаље погледати [2]. □

2.3 Градијентни ток и Томова декомпозиција

Дефиниција 2.7. *Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција на Римановој многострукости (M, g). Градијент од f у односу на метрику g, у ознаци ∇f је јединствено векторско поље које задовољава*

$$g(\nabla f, V) = df(V)$$

за свако векторско поље V на многострукости M.

Посматрајмо $\phi_t : M \to M$ једнопараметарску фамилију дифеоморфизама генерисану са $-\nabla f$, односно посматрамо ϕ_t која је решење једначине:

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -\nabla f(\phi_t(x))$$
$$\phi_0(x) = x$$

које називамо **градијентним током**, док за фиксирано $x \in M$ интегралну криву $\gamma : (a,b) \to M$ дату са $\gamma(t) = \phi_t(x)$ називамо негативна градијентна **трајекторија**.

У наставку ћемо размотрити неке важније особине градијентног тока.

Став 2.6. *Глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ на Римановој многострукости (M, g) опада дуж негативне градијентне трајекторије.*

Доказ.

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(x)) = df(\gamma(t))(\frac{d}{dt}(\phi_t(x)) = g(\nabla f(\phi_t(x)), -\nabla f(\phi_t(x)))$$
$$= -\|\nabla f(\phi_t(x))\|^2 \leq 0.$$

□

Напомена 2.3. *Критична тачка Морсове функције је хиперболички еквилибријум градијентног система, јер је Хесијан линеаризација градијентног векторског поља.*

Како смо у ранијим поглављима показали да су критичне тачке Морсове функције изоловане може се показати следеће тврђење чији се детаљан доказ може пронаћи у [10], или у [17].

Лема 2.2. *Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција на компактној Римановој многострукости (M, g). Тада свака градијентна трајекторија почиње и завршава се у критичној тачки функције f.*

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција, $p \in M$ критична тачка и ϕ_t генерисано са $-\nabla f$. Тада дефинишемо:

$$W^s(p) = \{x \in M | \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = p\}$$

$$W^u(p) = \{x \in M | \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = p\}$$

стабилну и нестабилну многострукост тачке p, респективно. Ако са $Crit(f)$ означимо критичне тачке функције f, на основу претходне леме уочавамо декомпозицију:

$$M = \bigcup_{p \in Crit(f)} W^u(p).$$

Напомена 2.4. *Претпоставимо да се налазимо у $\mathbb{R}^n$ и посматрајмо линеарни систем $X' = AX$, где је A хиперболичка матрица, односно матрица која задовољава $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ за свако $\lambda \in \sigma(A)$*[5]*. Тада се стабилна и нестабилна многострукост координатног почетка дефинишу на исти начин:*

$$W^s(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = 0\}$$

$$W^u(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = 0\}.$$

Можемо се лако уверити да ће важити: $\mathbb{R}^n = W^s(0) \oplus W^u(0)$ и $W^s(0) \cong \mathbb{R}^k$, $W^u(0) \cong \mathbb{R}^{n-k}$, где је k број сопствених вредности матрице A са негативним реалним делом.

Заиста, ако претпоставимо да је $A = diag[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, таква да је $\operatorname{Re}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) < 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) > 0$, за $k \leq n$ тада је ток горе наведене линеарне једначине облика:

$$\phi_t(x) = (e^{\lambda_1 t} x_1, \dots, e^{\lambda_n t} x_n), \quad \text{где је } x = (x_1.x_2, \dots, x_n).$$

Ако $x \in W^u(0)$ по дефиницији знамо да је $\phi_t(x) \xrightarrow{t \to -\infty} 0$.

Како $e^{\lambda_{k+1} t} x_{k+1}, \dots, e^{\lambda_n t} x_n \xrightarrow{t \to -\infty} 0$, онда је $x \in W^u(0)$ еквивалентно са $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$. Дакле имамо:

$$W^u(0) = \{(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) | x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^{n-k}.$$

Слично, $W^s(0) \cong \mathbb{R}^k$.

Дефиниција 2.8. *Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ на коначно-димензионој Римановој многострукости (M, g) је* ***Морс-Смејлова*** *ако задовољава*

$$W^s(p) \pitchfork W^u(q),$$

за све $p, q \in Crif(f)$.

[5] $\sigma(A)$ - скуп свих сопствених вредности матрице A

Напомена 2.5. *Ако Морсова функција f на многострукости не задовољава претходну дефиницију, могуће је уз мале пертурбације функције f постићи да она задовољава претходно наведени услов.*

Уз претодну дефиницију може се показати да је горе наведена декомпозиција многострукости M хомотопски еквивалентна ћелијској декомпозицији многострукости коју ћемо видети у наредном поглављу. О претходном за више детаља погледати [2].

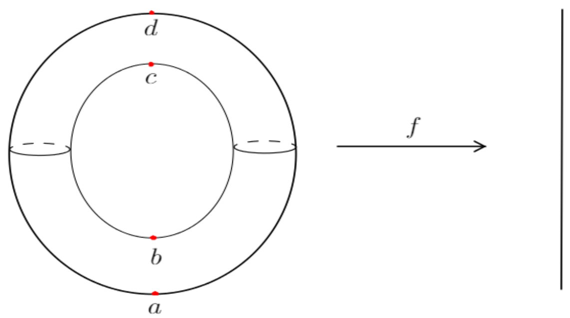
2.4 Ћелијска декомпозиција придружена Морсовој функцији

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Посматрамо скуп

$$M^r = f^{-1}(-\infty, r] = \{x \in M | f(x) \leq r\}.$$

Занимаће нас како промена вредности $r \in \mathbb{R}$ утиче на промену хомотопског типа M^r. Испоставиће се да ћемо на основу Морсове функције на M моћи да реконструишемо CW-комплекс који ћемо придружити многострукости M. Како од раније знамо да градијентне трајекторије почињу и завршавају се у критичним тачкама, видећемо да се сама топологија простора не мења између 2 критичне тачке, док ће се значајне промене дешавати преласком преко критичне тачке. Такође видећемо везу критичних тачака одговарајућег индекса и одговарајућих ћелија[6] у нашој декомпозицији. Претходне појмове ћемо детаљније размотрити на следећем примеру.

Пример 2.3. *Посматрамо $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ функцију висине на торусу.*



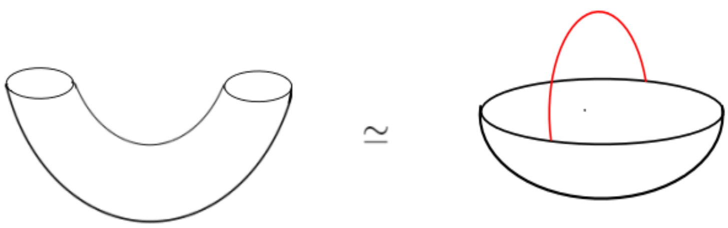
[6] У општем случају $k-$ ћелију можемо схватити као унутрашност диска $\mathbb{D}^k$.

Недегенерисане критичне тачке наше функције су на слици означене са a, b, c и d. Раније смо разматрали индекс критичних тачака, који можемо схватити као број линеарно независних праваца дуж којих функција опада. Лако видимо да је индекс тачке a једнак 0, тачке b и c су индекса 1, а како за тачку d имамо дводимензион потпростор праваца дуж којих функција опада, закључујемо да је њен индекс 2. Погледајмо шта се дешава са M^r у зависности од r. Имаћемо 4 случаја.

1. $f(a) < r < f(b)$

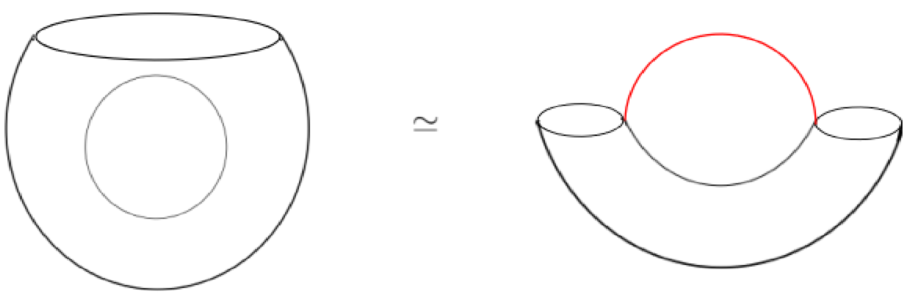
Како је M^r хомеоморфно диску $\mathbb{D}^2$, а диск контрактибилан закључујемо да је хомотопски тип од M^r заправо 0-ћелија.

2. $f(b) < r < f(c)$



У овом случају M^r је хомотопно са $\mathbb{D}^2 \cup e^1$. Приметимо да како смо прошли критичну тачку индекса 1 на M^r из претходног случаја лепимо 1−ћелију.

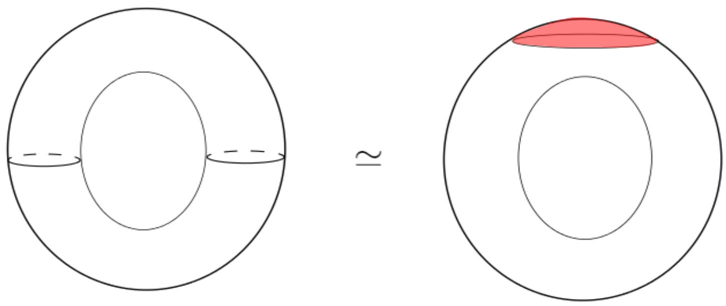
3. $f(c) < r < f(d)$



Како опет пролазимо тачку индекса 1 на претходно лепимо 1-ћелију.

4. $r > f(d)$

У последњем случају прелазимо преко критичне тачке индекса 2, стога лепимо 2−ћелију на претходно и како смо покупили све критичне тачке успешно смо реконструисали полазну многострукост.



Идеју из претходног примера ћемо уопштити наредним тврђењима.

Теорема 2.7. *Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и нека је скуп $f^{-1}[a, b]$ компактан који не садржи критичне тачке. Тада важи:*

1. M^a је дифеоморфно са M^b

2. M^a је деформациони ретракт од M^b

3. Постоји дифеоморфизам F тако да наредни дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(a) \times [a,b] \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & f^{-1}[a,b] \arrow[d, "f"] \\ & {[a,b]} \end{tikzcd}$$

Доказ. Дефинишемо глатку функцију $\alpha : M \to \mathbb{R}$ са $\alpha(x) = \frac{1}{\|\nabla f(x)\|^2}$ на $f^{-1}[a, b]$ која се анулира ван компактне околине скупа $f^{-1}[a, b]$. Како скуп $f^{-1}[a, b]$ нема критичних тачака, ту се градијент ∇f не анулира стога је претходна функција коректно дефинисана.

Уочимо векторско поље X дефинисано са $X(x) = \alpha(x)\nabla f(x)$ и једнопараметарску фамилију дифеоморфизама генерисану са X тј. посматрамо Φ_t које задовољава

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = X(\Phi_t(x))$$
$$\Phi_0(x) = x.$$

Из Пикарове[7] теореме знамо да постоји јединствено решење на неком интервалу, али како је векторско поље X са компактним носачем, ово решење ће бити дефинисано за свако $t \in \mathbb{R}$, тј. имаћемо глобалну једнопараметарску фамилију дифеоморфизама. О претходном више детаља се може наћи у [9] или у [2].

За фиксирано $x \in M$ посматрамо криву c дефинисану са $c(t) = f(\Phi_t(x))$. На основу претходног крива c је дефинисана за свако $t \in \mathbb{R}$. Приметимо да је:

$$\frac{d}{dt}c(t) = df(\Phi_t(x))(\frac{d}{dt}\Phi_t(x)) = g(\nabla f(\Phi_t(x)), X(\Phi_t(x))).$$

Стога за $\Phi_t(x) \in f^{-1}[a,b]$ добијамо:

$$\frac{d}{dt}c(t) = g(\nabla f(\Phi_t(x)), X(\Phi_t(x))) = g(\nabla f(\Phi_t(x)), \frac{\nabla f(\Phi_t(x))}{\|\nabla f(\Phi_t(x))\|^2}) = 1.$$

Даље, из $c(t) - c(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}c(s)\,ds = t$ и $c(0) = f(\Phi_0(x)) = f(x)$ закључујемо да је:

$$c(t) = f(x) + t.$$

Ако претпоставимо да је $f(x) = a$, тада је $c(t) = a + t$ и следи да $c(b-a) = a + (b-a) = b$. Дакле чињеница да $x \in f^{-1}(a)$ и $y = \Phi_{b-a}(x)$ повлачи да је $f(y) = b$. Сада можемо доказати први део теореме.

Уочимо дифеморфизам $\Phi_{b-a} : M \to M$. У претходном разматрању смо видели да се свако $x \in M$ за које је $f(x) = a$ слика у y за које важи $f(y) = b$. Такође ако је $f(x) \leq a$ тада је: $f(\Phi_{b-a}(x)) = f(x) + b - a \leq b$ што значи да $\Phi_{b-a}(x) \in M^b$.

Из претходног закључујемо да Φ_{b-a} слика M^a на M^b и сличним резоном закључујемо да $(\Phi_{b-a})^{-1} = \Phi_{a-b}$ слика M^b на M^a. Дакле посматрајући рестрикцију дифеоморфизма Φ_{b-a} на M^a закључујемо да су M^a и M^b дифеоморфни.

У сврху доказивања другог дела теореме уочићемо $H : M^b \times [0,1] \to M^a$ дато са:

$$H(x,t) = \begin{cases} x, & x \in M^a \\ \Phi_{t(a-f(x))}(x), & x \in M^b \setminus M^a \end{cases}.$$

H је добро дефинисано јер за $x \in M^b \setminus M^a$ имамо:

$$f(\Phi_{t(a-f(x))}(x)) = f(x) + t(a - f(x)) \leq f(x) + a - f(x) \leq a,$$

[7] Charles Emile Picard(1856 – 1941) - француски математичар

што значи да $\Phi_{t(a-f(x))}(x) \in M^a$. Приметимо и да је непрекидно јер ако је $f(x) = a$ тада је $\Phi_{t(a-f(x))}(x) = \Phi_0(x) = x$.

Нека је $r : M^b \to M^a$ дато са $r(x) = H(x, 1)$. Приметимо да је $r \circ i = Id_{M^a}$ што значи да је r ретракција. С друге стране како је $H(x, 0) = Id_{M^b}$ и H непрекидно закључујемо да је H хомотопија између $i \circ r$ и Id_{M^b}, што нам даје да је r деформациона ретракција, односно M^a је деформациони ретракт од M^b.

За доказ трећег дела теореме потребно је наћи дифеоморфизам $F : f^{-1}(a) \times [a, b] \to f^{-1}[a, b]$ тако да горњи дијаграм комутира. Може се проверити да ће $F(x, t) = \Phi_{t-a}(x)$ бити тражени дифеоморфизам и за више техничких детаља погледати [2].

$\square$

Последица 2.8. *Нека је M компактна многострукост таква да је $\partial M = A \cup B, A \cap B = \emptyset$. Претпоставимо да постоји глатка функција $f : M \to [0, 1]$ која нема критичних тачака и која задовољава $f^{-1}(0) = A$ и $f^{-1}(1) = B$. Тада је M дифеоморфно са $A \times [0, 1] \approx B \times [0, 1]$.*

Последица 2.9. *Нека је M затворена многострукост димензије n и нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција са тачно 2 критичне тачке. Тада је M хомеоморфно сфери $\mathbb{S}^n$.*

Напомена 2.6. *Није увек могуће успоставити дифеоморфизам између M и $\mathbb{S}^n$. Испоставља се да постоји многострукост која је хомеоморфна сфери $\mathbb{S}^7$, али није дифеоморфна. За више детаља погледати [13].*

На основу претходне теореме знамо да се ништа значајно тополошки не дешава у слоју где немамо критичних тачака, док ће наредна теорема рећи нешто више о случају када у $f^{-1}[a, b]$ имамо једну критичну тачку и у том случају видећемо везу између M^a и M^b.

Теорема 2.10. *Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и $a < b$. Претпоставимо да је $f^{-1}[a, b]$ компактан и да садржи једну критичну тачку индекса k. Тада је M^b хомотопно са M^a са залепљеном $k-$ћелијом e^k.*

Скица доказа.
Нека је $p \in int(f^{-1}[a, b])$ јединствена критична тачка и нека је $f(p) = c$. Могуће је конструисати функцију $F : M \to \mathbb{R}$ која ће „личити" на полазну функцију f. Наиме, можемо постићи да су поменуте две функције једнаке свуда осим у

малој околини критичне тачке где ће важити $F < f$. О детаљнијој конструкцији функције F погледати [2].

За мало $\varepsilon > 0$ може се показати:

1° $F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon] = M^{c+\varepsilon}$

2° $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ нема критичних тачака.

На основу 2° и теореме 2.7 знамо да је $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ деформациони ретракт од $F^{-1}(-\infty, c+\varepsilon]$ тј. од $M^{c+\varepsilon}$ на основу 1°.

Приметимо да $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$ можемо написати као $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon] = M^{c-\varepsilon} \cup H$, где је $H = \overline{F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon] \setminus M^{c-\varepsilon}}$. Испоставља се да у скупу H можемо наћи $k-$ћелију која се лепи на $M^{c-\varepsilon}$ и за коју важи $\partial e^k \subset f^{-1}(c-\varepsilon)$. Такође, није тешко показати да је $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ деформациони ретракт од $M^{c-\varepsilon} \cup H$, па на основу претходног закључујемо да је $M^{c-\varepsilon} \cup e^k$ деформациони ретракт од $M^{c+\varepsilon}$, па самим тим и од M^b јер $f^{-1}[c+\varepsilon, b]$ нема критичних тачака на основу претпоставке. Такође, $f^{-1}[a, c-\varepsilon]$ нема критичних тачака па уз мало разматрања можемо закључити да је: $M^a \cup e^k$ хомотопно са M^b.

На основу математичке индукције и претходне теореме се може показати следеће тврђење.

Теорема 2.11. *Ако је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и $f^{-1}(c) = \{p_1, \dots, p_l\}$, где су $p_1, \dots, p_l$ недегенерисане критичне тачке индекса $k_1, \dots, k_l$ редом и нека за довољно мало $\varepsilon > 0$ скуп $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ нема других критичних тачака и компактан је. Тада је $M^{c+\varepsilon}$ хомотопно са $M^{c-\varepsilon} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_l}$.*

У наставку ћемо навести једну лему која ће бити значајан алат у доказивању главне теореме ове секције. За детаље погледати [12].

Лема 2.3 (Хилтон)**.** *Ако је $\varphi : e^k \to X$ функција лепљења, онда се свака хомотопска еквиваленција $f : X \to Y$ може проширити до хомотопске еквиваленције $F : X \cup_\varphi e^k \to Y \cup_{f \circ \varphi} e^k$.*

Сада можемо доказати главну теорему ове секције, која ће нам гарантовати да ћемо помоћу критичних тачака Морсове функције у потпуности моћи одредити хомотопски тип компактне многострукости M. Теорему ћемо формулисати за многострукост без границе, али уз мале измене теорема се може доказати и за многострукост са границом, погледати [12].

Теорема 2.12. *Нека је M компактна многострукост без границе и $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Тада M има структуру CW комплекса тако да за сваку критичну тачку индекса k постоји тачно једна $k-$ћелија e^k.*

Доказ. У претходној секцији смо видели да је број критичних тачака Морсове функције коначан, па самим тим имамо и коначан број критичних вредности и нека су то $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$.

Како је M компактна, f глатка, самим тим и непрекидна у неким критичним тачкама ће се достизати минимум и максимум. Нека је $c_1 = minf$, и $c_m = maxf$ и приметимо да је $M^{c_1} = f^{-1}(c_1)$ и $M^{c_m} = M$.

Следећу тврдњу ћемо доказати индукцијом:

$$c_{n-1} < a < c_n \Rightarrow M^a \text{ има структуру } CW \text{ комплекса} \quad (*).$$

База: Ако је $a < c_1$, тада је $M^a = \emptyset$, па M^a тривијално има CW структуру. Нека је $c_{n-1} < a' < c_n < a < c_{n+1}$ и препоставимо да $M^{a'}$ има структуру CW комплекса. Потребно је доказати да и M^a има структуру CW комплекса.

Из претпоставке знамо да постоји хомотопска еквиваленција $h' : M^{a'} \to K$, где је K CW копмлекс. Уочимо $\varepsilon > 0$ тако да важи:

$$a' < c_n - \varepsilon < c_n < c_n + \varepsilon < a < c_{n+1}.$$

Како је скуп $f^{-1}[c_n + \varepsilon, a]$ компактан и без критичних тачака на основу теореме 2.7 добијамо да је $M^{c_n+\varepsilon}$ дифеоморфно, па самим тим и хомотопски еквивалентно са M^a, што значи да ће M^a бити CW типа ако и само је је $M^{c_n+\varepsilon}$ CW типа. Слично, како је $f^{-1}[a', c_n - \varepsilon]$ компактан без критичних тачака закључујемо да је $M^{a'}$ хомотопно са $M^{c_n-\varepsilon}$ тј. постоји хомотопска еквиваленција $h : M^{c_n-\varepsilon} \to M^{a'}$.

Ако су $p_1, \ldots, p_l \in f^{-1}(c_n)$ критичне тачке са индексима $k_1, \ldots, k_l$, онда на основу теореме 2.11 добијамо да је $M^{c_n+\varepsilon}$ хомотопно са $M^{c_n-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{k_1} \cup \cdots \cup_{\varphi_l} e^{k_l}$, где су $\varphi_i, i = \overline{1,l}$ одговарајуће функције лепљења. Како су h и h' хомотопске еквиваленције онда је и $h' \circ h : M^{c_n-\varepsilon} \to K$ хомотопска еквиваленција која се на основу леме 2.3 може продужити до хомотопске еквиваленције

$$H : M^{c_n-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{k_1} \cup \cdots \cup_{\varphi_l} e^{k_l} \to K \cup_{h' \circ h \circ \varphi_1} e^{k_1} \cup \cdots \cup_{h' \circ h \circ \varphi_l} e^{k_l}.$$

Враћајући се уназад закључујемо да је M^a CW типа, стога смо доказали $(*)$.

Коначно како M^a има CW структуру за свако $a \in [c_{m-1}, c_m]$ и како је на основу теореме 2.11 $M = M^{c_m} = M^a \cup e^{k_1} \cup \cdots \cup e^{k_q}$ закључујемо да је M CW типа, чиме смо комплетирали доказ.

$\square$

Закључак: Како смо раније видели, скуп Морсових функција је свуда густ у $C^2(M)$, стога на затвореној многострукости можемо наћи Морсову функцију, применити претходну теорему и закључити да M има структуру CW комплекса, где критична тачка индекса k одговара $k-$ћелији у CW декомпозицији.

2.5 Морсове неједнакости

У овој секцији видећемо јачу везу између саме топологије многострукости M и критичних тачака Морсове функције.

Дефиниција 2.9. *Нека је X CW комплекс димензије n, тј. $X = X^n$ и $\mathbb{F}$ поље. Дефинишемо $k-$те* ***Бетијеве бројеве*** *са:*

$$b_k(X;\mathbb{F}) = dim(H_k(X;\mathbb{F}))$$
$$b_k(X^k, X^{k-1};\mathbb{F}) = dim(H_k(X^k, X^{k-1};\mathbb{F})),$$

где је $H_k(X;\mathbb{F})$ $k-$та хомолошка група простора X и $H_k(X^k, X^{k-1};\mathbb{F})$ $k-$та хомолошка група пара (X^k, X^{k-1}) са коефицијентима у пољу $\mathbb{F}$.

Напомена 2.7. *У наставку ћемо изостављати $\mathbb{F}$ ради једноставнијег записа.*

За почетак доказаћемо једноставан став.

Став 2.13. *Ако је X CW комплекс димензије n тада важи:*

$$b_k(X) \leq b_k(X^k, X^{k-1}).$$

Доказ. Како је $X^{k-2} \subseteq X^{k-1} \subseteq X^k$ тројка (X^{k-2}, X^{k-1}, X^k) у хомологији индукује дуги тачни низ.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(X^{k-1}, X^{k-2}) \xrightarrow{i_*} H_k(X^k, X^{k-2}) \xrightarrow{j_*} H_k(X^k, X^{k-1}) \to \cdots$$

Прва теорема о изоморфизму група нам даје $H_k(X^k, X^{k-2}) \Big/ ker(j_*) \cong im(j_*)$, а из тачности низа имамо $im(i_*) = ker(j_*)$. Комбинујући претходно добијамо да је $dim(H_k(X^k, X^{k-2})) - rank(i_*) = rank(j_*)$. Како је ранг инклузије највише једнак димензији домена и како је ранг произвољног пресликавања највише димензије кодомена коначно добијамо:

$$b_k(X^k, X^{k-2}) \leq b_k(X^k, X^{k-1}) + b_k(X^{k-1}, X^{k-2}).$$

Означимо $X^{-1} = \emptyset$ и на тројку (X^{-1}, X^{n-1}, X^n) применимо претходни резон. Уз мало разматрања индукцијом добијамо:

$$b_k(X^n, X^{-1}) \leq \sum_{i=0}^{n} b_k(X^i, X^{i-1}).$$

Приметимо да је $H_n(X) = H_n(X^n) = H_n(X^n, X^{-1})$ што повлачи $b_k(X^n, X^{-1}) = b_k(X)$. Са друге стране како је $H_k(X^i, X^{i-1}) = 0$, за $i \neq k$ коначно добијамо

$$b_k(X) \leq b_k(X^k, X^{k-1}).$$

чиме смо комплетирали доказ. □

Означимо са $c_k(f)$ број критичних тачака функције f индекса k. Тада важи следећа теорема.

Теорема 2.14 (Слабе Морсове неједнакости). *Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Тада је:*

$$b_k(M) \leq c_k(f).$$

Доказ. Нека је X ћелијски комплекс придружен многструкости M (теорема 2.12). Даље, $H_k(X^k, X^{k-1})$ је слободна Абелова група која је у бијекцији са скупом свих $k-$ћелија ћелијског комплекса (погледати [8]) што повлачи да је $dim(H_k(X^k, X^{k-1}))$ једнак броју $k-$ћелија, односно имамо $c_k(f) = b_k(X^k, X^{k-1})$. Са друге стране, како је $M \simeq X$ добијамо $b_k(M) = b_k(X)$ што нам уз претходни став комплетира доказ. □

Напомена 2.8. *Претходна теорема имплицира*

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(f) \geq \sum_{k=0}^{n} b_k(M).$$

Приметимо да $c_k(f)$ зависи од Морсове функције $f : M \to \mathbb{R}$, али не од поља $\mathbb{F}$. Док са друге стране $b_k(M)$ зависи од топологије многострукости M, поља $\mathbb{F}$, али не зависи од Морсове функције.

Дефиниција 2.10. ***Ојлерова карактеристика*** *многострукости M је*

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k(M).$$

Теорема 2.15 (Јаке Морсове неједнакости)**.** *За сваку Морсову функцију $f : M \to \mathbb{R}$ на компактној многострукости димензије n важи:*

1) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(f) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k(M)$

2) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+m} c_k(f) \geq \sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+m} b_k(M)$*, за свако* $m = \overline{0,n}$*.*

Доказ. Погледати [12]. □

Напомена 2.9. *Раније смо видели да $c_k(f)$ не зависи од поља, па на основу дела 1) претходне теореме закључујемо да Ојлерова карактеристика неће зависити од поља $\mathbb{F}$, иако сами Бетијеви бројеви зависе од поља $\mathbb{F}$.*

Последица 2.16. *Ако је M компактна многострукост непарне димензије онда је $\chi(M) = 0$.*

Доказ. Нека је $dimM = n$. Уочимо произвољну Морсову функцију f на M и произвољну критичну тачку p индекса k. То значи да у тој тачки имамо $k-$димензиони простор праваца дуж којих функција f опада. Посматрајмо сада функцију $-f$. Прво што можемо приметити да ове функције имају исте критичне тачке. Како смо променили знак, у тачки p имаћемо $(n-k)$-димензиони простор праваца дуж којих функција $-f$ опада. Дакле, закључујемо $c_k(f) = c_{n-k}(-f)$. Стога, имамо:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(f) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_{n-k}(-f) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} c_{n-k}(-f) =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(-f) = (-1)^n \chi(M).$$

Сада како је n непарно закључујемо да је $\chi(M) = 0$. □

У наставку ове секције даћемо још једну еквивалентну формулацију теореме 2.15 и у ту сврху дефинишемо наредне појмове. Посматрајамо:

$$P_t(M) = \sum_{k=0}^{n} b_k(M) t^k$$

$$M_t(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) t^k.$$

$P_t(M)-$ Поенкареов понином, $M_t(f)-$ Морсов полином. Може се показати да важи следећа теорема.

Теорема 2.17 (Полиномијална Морсова неједнакост)**.** *Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ произвољна Морсова функција. Тада је:*

$$M_t(f) = P_t(M) + (1+t)R(t),$$

где је $R(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k t^k$, $r_k \in \mathbb{Z}$ и $r_k \geq 0$, за свако $k = \overline{0, n-1}$.

Напомена 2.10. *Морсову функцију која задовољава $M_t(f) = P_t(M)$ називамо* ***савршена Морсова функција****.*

Претходна теорема биће еквивалентна теореми 2.15. За више детаља о претходним теоремама и појмовима погледати [2].

Глава 3

Морсова хомологија

3.1 Увод

У претходним главама смо разматрали појам стабилне и нестабилне многострукости критичне тачке Морсове функције.

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морс-Смејлова функција на компактној оријентабилној многострукости (M, g) димензије n. Дефинишимо

$$\mathcal{M}_{xy} = W^u(x) \cap W^s(y)$$

скуп свих градијентних трајекторија које почињу у x и завршавају се у y. Може се показати да је $dimW^u(x) = ind(x)$ и $dimW^s(y) = n - ind(y)$, где $ind(x)$ и $ind(y)$ означавају индексе критичних тачака x и y, редом. Даље, уз чињеницу да се уз мале пертурбације Морсове функције овај пресек може направити трансверзалним добијамо да је:

$$dim\mathcal{M}_{xy} = dimW^u(x) + dimW^s(y) - n = ind(x) - ind(y).$$

Ако уочимо произвољну критичну тачку $z \in M$, можемо изабрати произвољну оријентацију на $W^u(z)$ која ће дати оријентацију на комплементарној многострукости $W^s(z)$. Испоставља се да ће претходно бити довољно да закључимо да ће и $\mathcal{M}_{xy}$ бити оријентабилно за свако $x, y \in Crit(f)$.

Даље, нека је $a \in (f(x), f(y))$ произвољна регуларна вредност тада дефинишимо

$$\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \widehat{\mathcal{M}}_{xy}(f, g, a) = \mathcal{M}_{xy} \cap f^{-1}(a).$$

Претходно дефинисан скуп представља баш путање негативног градијентног тока који крећу из x и завршавају се у y, јер свака путања сече ниво хиперповрши само једном. Због самог тока одговарајући скупови $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}(f, g, a)$ ће бити природно идентификовани за различите изборе a. Може се показати да је $dim\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = dim\mathcal{M}_{xy} - 1$.

У наставку ћемо видети везу између тополошке границе многострукости $\mathcal{M}_{xy}$ и како нас то доводи до природне компактификације $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. О најједноставнијем случају тј. када је $ind(x) - ind(y) = 1$ говори наредни став.

Став 3.1. *Ако је $ind(x) - ind(y) = 1$ тада је $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ коначан скуп.*

Доказ. На основу претходне дискусије знамо да је $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ многострукост димензије нула, самим тим изолован скуп тачака. Ако би овај скуп био бесконачан, због компактности полазне многострукости M би следило да овај скуп има тачку нагомилавања, што је контрадикција са чињеницом да је изолован. □

Са друге стране ако је $ind(x) - ind(z) = 2$ видећемо да су повезане компоненте $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ дифеоморфне $1-$сфери или интервалу $(0, 1)$, а ова тврдња следи из чињенице да су ово једина два типа повезане једнодимензионе многострукости без границе.

Видећемо да сваком крају отворене компоненте $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ одговара тачно један пар изломљених трајекторија $(u, v) \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yz}$ где је y критична тачка индекса $ind(z) < ind(y) < ind(x)$ и у овом делу ћемо као једну од алатки користити Хартман-Гробманову теорему.

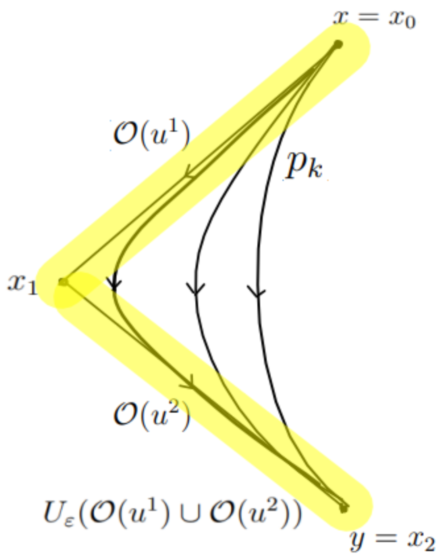
У наредној секцији ћемо размотрити општији случај.

3.2 Компактност и лепљење

Дефиниција 3.1. *За подскуп $P \subset \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ кажемо да је компактан до на изломљене трајекторије, ако сваки низ $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset P$ или конвергира ка елементу из $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, или постоји његов подниз(исто означен са p_k) и постоје критичне тачке $x = x_0, x_1, \ldots, x_l = y$ и повезујуће трајекторије $u^j \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_{j-1}x_j}$, $j = 1, \ldots, l$ такве да $p_k \to (u^1, \ldots, u^l)$ кад $k \to \infty$ или прецизније:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0) \Rightarrow \mathcal{O}(p_k) \subset U_\varepsilon(\mathcal{O}(u^1) \cup \cdots \mathcal{O}(u^l)).$$

Напомена 3.1. *У претходној дефиницији $U_\varepsilon(S)$ означава ε-околину подскупа $S \subset M$, док $\mathcal{O}(p)$ за трајекторију p представља траг тј. скуп $\{p(t) | t \in \mathbb{R}\}$. Такође кажемо да низ p_k конвергира ка изломљеној трајекторији $(u^1, \ldots, u^l)$ реда l.*



На претходној слици је приказана конвергенција низа p_k ка изломљеној трајекторији (u^1, u^2) реда 2.

У наставку ћемо навести битну теорему чији се доказ заснива на Хартман-Гробмановој теореми.

Теорема 3.2. *(Компактност) Ако на компактној многострукости M имамо Морс-Смејлову функцију онда је $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ компактно до на изломљене трајекторије реда највише $ind(x) - ind(y)$.*

Доказ. **Први корак.**

Фиксираћемо регуларну вредност a од f и уочимо $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \mathcal{M}_{xy} \cap f^{-1}(a)$. Претпоставићемо да је $ind(x) > ind(y)$ јер ће у супротном због трансверзалности стабилне и нестабилне многострукости бити $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \emptyset$ чиме би доказ био завршен. За произвољно уочен низ $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ постоји подниз који конвергира ка неком елементу u и тај добијени подниз ћемо исто означавати са p_k. Даље знамо да се u налази на некој градијентној трајекторији γ, где је $\gamma \in \mathcal{M}_{z'z}$ за неке критичне тачке z, z', на основу леме 2.2. Како је ϕ_t непрекидно следи да се $\phi_t u$ налази у затворењу $\overline{\mathcal{M}_{xy}}$ за свако $t \in \mathbb{R}$ што значи да и $z \in \overline{\mathcal{M}_{xy}}$. Доказаћемо да за $z \neq y$ постоји $v \in W^u(z) \cap \overline{\mathcal{M}_{xy}}$, при чему је $v \neq z$.

Нека је U_z околина тачке z из Хартман-Гробманове теореме. Без умањења општости можемо претпоставити да $u, p_k \in U_z$, јер у супротном за довољно велике k и $T > 0$ можемо постићи да $\phi_T(p_k) \in U_z$. Како знамо да су $W^u(z)$ и $\overline{\mathcal{M}_{xy}}$ инваријантни у односу на ϕ_T цео резон можемо применити на $\phi_T(M)$. У наставку посматрајмо линеаризацију негативног градијентног поља у тачки z

$$X' = AX,$$

где је $A = diag[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, недегенерисана и важи

$$\text{Re}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) < 0, \quad \text{Re}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) > 0.$$

Ако овде успемо да нађемо v то ће бити довољно јер ће нам $h^{-1}(v)$ комплетирати доказ, где је h хомеоморфизам из Хартман-Гробманове теореме.

Приметимо да $p_k \notin W^s(z)$, јер $p_k \in W^s(y)$ и $W^s(y) \cap W^s(z) = \emptyset$, за $y \neq z$.

Ради једноставности претпоставимо да се налазимо у $\mathbb{R}^n$ и $z = 0$ и задржаћемо исте ознаке за u и p_k при пресликавању h.

Како из претходног знамо да $p_k \notin W^s(0)$ напомена 2.4 нам гарантује да је $W^u(0) \neq \{0\}$.

Претпоставимо супротно, односно да важи $W^u(0) \cap \overline{\mathcal{M}_{xy}} = \emptyset$. Одавде знамо да свака тачка из $W^u(0)$ има околину која је дисјунктна са $\mathcal{M}_{xy}$. Уочимо сферу S_ε полупречника ε у $W^u(0)$ и свакој тачки сфере придружимо околину која не сече $\mathcal{M}_{xy}$. Како знамо да је сфера S_ε компактна постоји коначно много лопти које је прекривају. Од свих тих лопти уочимо ону са најмањим полупречником и тај полупречник означимо са δ. Даље, знамо да скуп $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, S_\varepsilon) < \delta\}$ неће сећи $\mathcal{M}_{xy}$.

Како се $\phi_t(u)$ приближава координатном почетку како t расте постоји довољно велико $T > 0$ такво да је $||\phi_T(u)|| < \delta$.

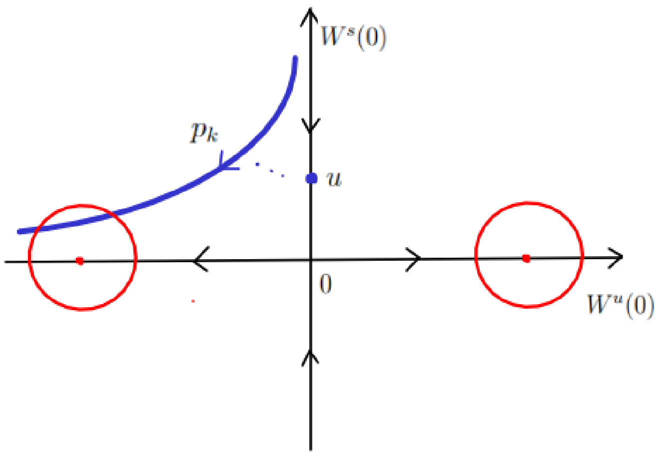
Означимо $u' := \phi_T(u)$ и $p'_k = \phi_T(p_k)$.

Због непрекидности тока знамо да $p'_k \xrightarrow{k \to +\infty} u'$.

Ако означимо $A^- := diag[\lambda_1, \dots, \lambda_k]$, $A^+ := diag[\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n]$, $B^-(t) := e^{A^- t}$ и $B^+(t) := e^{A^+ t}$ тада је $e^{At} = \begin{bmatrix} B^-(t) & 0 \\ 0 & B^+(t) \end{bmatrix}$.

За $k \geq k_0$ имамо $||p'_k|| < \delta$ што повлачи и да је $||B^-(t)(p'_k)|| < \delta$, јер $B^-(t)(p'_k)$ опада за свако $t \geq 0$ док са друге стране $||B^+(t)(p'_k)|| \xrightarrow{t \to +\infty} \infty$ па за $t \geq t_0$ имамо да је $||B^+(t)(p'_k)|| > \varepsilon$.

Из претходног можемо закључити да $e^{At} p'_k = \begin{bmatrix} B^-(t) & 0 \\ 0 & B^+(t) \end{bmatrix} p'_k$ сече околину U_δ што је контрадикција.



Други корак.

Претпоставимо да је $z \neq y$ и као у претходном резону знамо да постоји $v \in \mathcal{M}_{zz''}$ где је $ind(z) > ind(z'')$. Ако се z'' не поклапа са y онда ће као и у првом кораку постојати $v' \in W^u(z'') \cap \overline{\mathcal{M}_{xy}}$. Како постоји коначно много критичних тачака и како индекс у свакој итерацији опада овај процес се мора завршити у y.

Крај самог доказа се своди на оправдавање равномерне конвергенције. За остале техничке детаље погледати [17]. $\square$

Дакле, ако је $ind(x) - ind(z) = 2$ сваком крају компоненте $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ одговара тачно један пар изломљених трајекторија $(u, v) \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yz}$ где је y критична тачка индекса $ind(z) < ind(y) < ind(x)$. Даље, могуће је дефинисати пресликавање класе C^1 које пару (u, v) и неком позитивном реалном броју ρ додељује јединствен елемент из $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$, а главни алат ће нам бити повезујуће пресликавање познатије као **gluing map** о чему говори наредна теорема чији се детаљан доказ може наћи у [17].

Теорема 3.3. *(Лепљење) Нека је f Морс-Смејлова функција и нека су x, y, z критичне тачке функције f индекса $k+1, k, k-1$, редом. Тада постоји позитиван реалан број ρ_0 и улагање*

$$\# : \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \times [\rho_0, \infty) \times \widehat{\mathcal{M}}_{yz} \to \widehat{\mathcal{M}}_{xz} \quad (u, \rho, v) \mapsto u\#_\rho v,$$

такво да

$$u\#_\rho v \to (u, v), \quad \text{кад} \quad \rho \to \infty$$

Штавише, ниједан низ у $\widehat{\mathcal{M}}_{xz} \setminus (u\#_{[\rho_0,\infty]} v)$ не конвергира ка (u, v).

3.3 Морс-Витенов комплекс

Претпоставимо да је M компактна Риманова многострукост и f Морс-Смејлова функција. У наставку ћемо дефинисати Морсову хомологију са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима. Могуће је дефинисати је и над $\mathbb{Z}$ коефицијентима, али то захтева сложену конструкцију индуковане и кохерентне оријентације о чему нећемо говорити у овом раду. Више детаља о претходном се може наћи у [16].

Дефиниција 3.2. *k-та Морсова ланчаста група дефинисана Морсовом функцијом f са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима је слободна Абелова група генерисана скупом критичних тачака функције f индекса k*

$$CM_k = CM_k(M, f) := \bigoplus_{x \in Crit_k(f)} \mathbb{Z}_2\langle x\rangle, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Напомена 3.2. *Како смо доказали да је број критичних тачака Морсове функције коначан онда су ове групе коначно генерисане.*

Дефиниција 3.3. ***Морс-Витенов*** *гранични оператор*

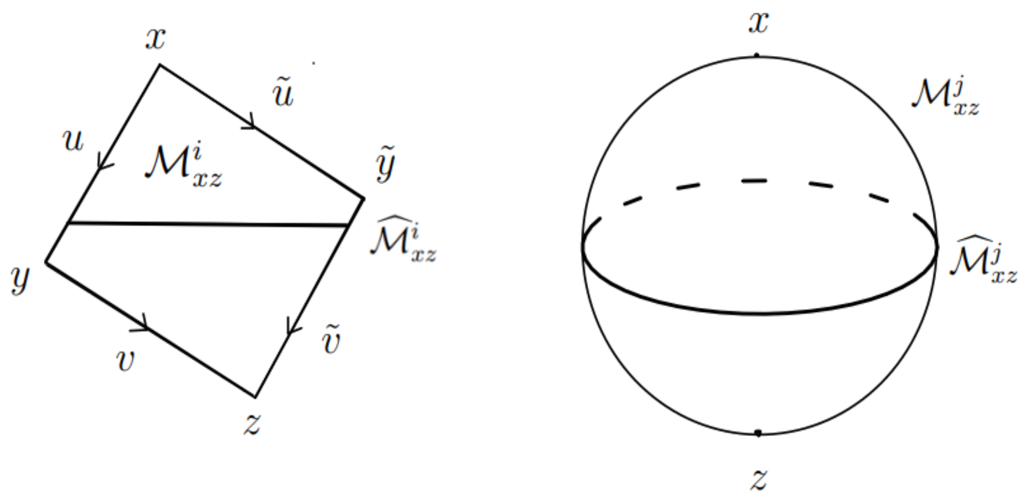
$$\partial_k : CM_k(M, f) \to CM_{k-1}(M, f)$$

на генератору x је дат са:

$$\partial_k x := \sum_{y \in Crit_{k-1}(f)} n(x, y)y, \quad n(x, y) := \#\{\widehat{\mathcal{M}}_{xy}\}(mod2)$$

Напомена 3.3. *$\#\{\widehat{\mathcal{M}}_{xy}\}(mod2)$ представља број градијентних трајекторија које почињу у x и завршавају се у y, гледано по модулу 2. На основу чињенице да је критичних тачака Морсове функције коначно много закључујемо да је прва сума коначна.*

У наставку ћемо оправдати чињеницу да је ∂ гранични оператор и доказати да је $\partial^2 = 0$. Уочићемо $x \in Crit_k(f)$ и $z \in Crit_{k-2}(f)$. Како знамо да је димензија $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ једнака 1 његове повезане компоненте $\mathcal{M}^i_{xz}$ ће бити дифеоморфне интервалу $(0, 1)$ или сфери $\mathbb{S}^1$.



Теорема 3.4. *$\partial_k \circ \partial_{k-1} = 0$ за свако $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказ.

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}\partial_k x &= \partial_{k-1}\Big(\sum_{y \in Crit_{k-1}(f)} n(x,y)y\Big) \\
&= \sum_{y \in Crit_{k-1}(f)} \Big(\sum_{z \in Crit_{k-2}(f)} n(x,y)n(y,z)z\Big) \\
&= \sum_{z \in Crit_{k-2}(f)} \Big(\sum_{y \in Crit_{k-1}(f)} n(x,y)n(y,z)\Big)z \\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{z \in Crit_{k-2}(f)} 0z \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ако оправдамо $(\star)$ тиме ћемо комплетирати доказ. За почетак знамо да $\partial\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ представља изломљене трајекторије које иду од x, кроз неку критичну тачку y, до z, док $\sum_{y \in Crit_{k-1}(f)} n(x,y)n(y,z)$ представља њихов број. Претходно поменуте трајекторије нису градијентне јер пролазе кроз критичну тачку, али се састоје од две градијентне трајекторије. Како знамо да повезане компоненте од $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ можемо видети као кружницу или интервал, граница $\partial\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ ће имати паран број елемената, 0 или 2 редом што ће свакако дати 0 јер све посматрамо по модулу 2. Дакле важи

$$\sum_{y \in Crit_{k-1}(f)} n(x,y)n(y,z) = 0(mod2)$$

за свако z, чиме смо оправдали $(\star)$.

□

Како смо показали да је $\partial^2 = 0$ можемо говорити о ланчастом комплексу $\mathcal{C} = (CM_k, \partial_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ који се још назива **Морс-Смејл-Витенов** ланчасти комплекс. Сада можемо говорити о хомологији овог ланчастог комплекса.

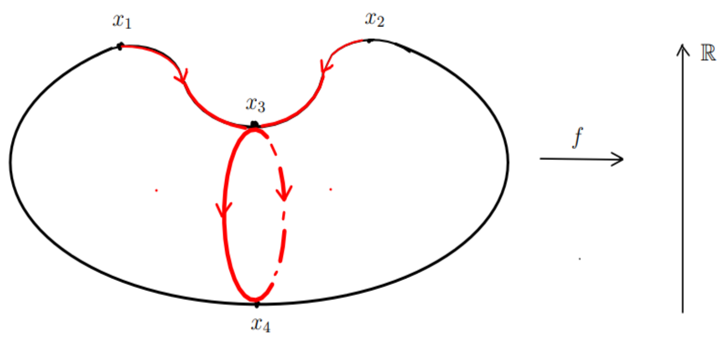
Дефиниција 3.4. *Нека је M затворена, глатка, коначно димензиона многострукост, g произвољна метрика, f Морсова функција тако да је (f, g) Морс-Смејлов пар.*

*k-та **Морсова хомолошка група** са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима је дефинисана са:*

$$HM_k(M; f, g; \mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_k}{im\partial_{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

У наставку погледајмо пар примера.

Пример 3.1. *Посматрајмо $f : M \to \mathbb{R}$ функцију висине на деформисаној сфери $\mathbb{S}^2$*



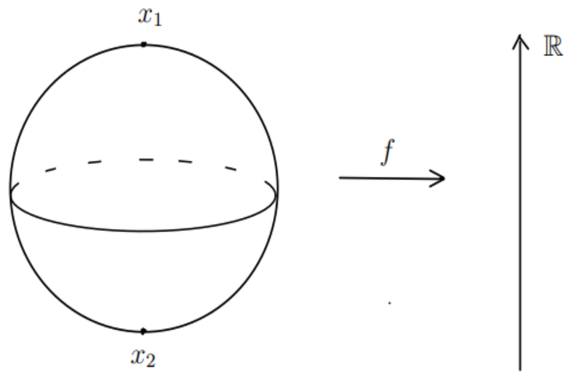
За почетак срачунајмо граничне операторе. Како је $\partial_2 x_1 = x_3$ и $\partial_2 x_2 = x_3$ добијамо $\partial_2(x_1+x_2) = 2x_3 = 0(mod2)$. Даље $\partial_1 x_3 = 2x_4 = 0(mod2)$ и тривијално $\partial_0 x_4 = 0$. Сада добијамо:

$$HM_2(M; \mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_2}{im\partial_3} = ker\partial_2 = \mathbb{Z}_2$$

$$HM_1(M; \mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_1}{im\partial_2} = 0$$

$$HM_0(M; \mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_0}{im\partial_1} = \mathbb{Z}_2.$$

Пример 3.2. *Нека је $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ функцију висине на сфери $\mathbb{S}^2$.*



Приметимо да у овом случају имамо 2 критичне тачке x_1 и x_2 индекса 2 и 0 редом. Како критичних тачака индекса 1 нема ∂_1 је тривијалан.

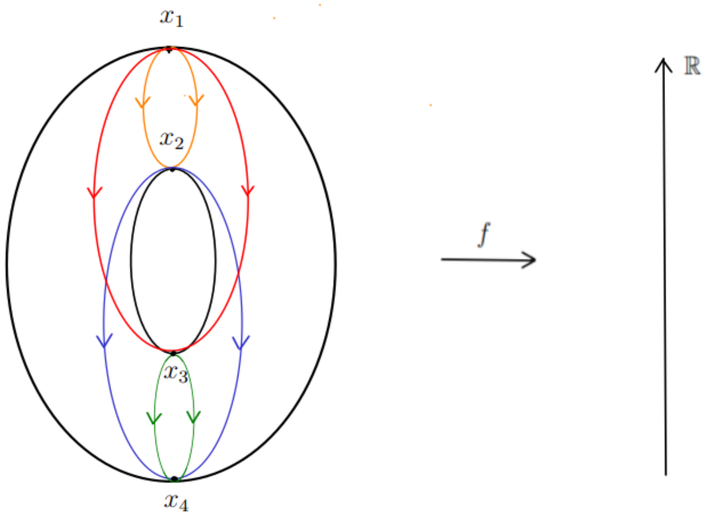
Даље имамо $\partial_2 x_1 = 0$ и $\partial_0 x_2 = 0$, што значи $ker\partial_2 = \mathbb{Z}_2\langle x_1\rangle$ и $ker\partial_0 = \mathbb{Z}_2\langle x_2\rangle$. Из претходног следи:

$$HM_2(M;\mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_2}{im\partial_3} = \mathbb{Z}_2$$
$$HM_1(M;\mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_1}{im\partial_2} = 0$$
$$HM_0(M;\mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_0}{im\partial_1} = \mathbb{Z}_2.$$

Функције висине нису исте, али се опет добија исти резулатат у хомологији који се поклапа са сингуларном хомологијом са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима. Идентично би било да смо ситуацију посматрали са $\mathbb{Z}$ коефицијентима.

Пример 3.3. *(Искривљени торус)*

Стандардна функција висине на торусу неће бити Морс-Смејлова, јер би у том случају постојала градијента трајекторија која повезује тачке x_2 и x_3 које су индекса 1 што би аутоматски значило да је $\mathcal{M}_{x_2 x_3}$ димензије 0 што је немогуће. Али постоји мала пертурбација функције висине тако да добијемо Морс-Смејлову функцију, чије се градијентне трајекторије виде на следећој слици.



У наставку ћемо срачунати граничне операторе и одредити Морсове хомолошке групе. Директним рачуном добијамо

$$\partial_2 x_1 = 2x_2 + 2x_3 = 0(mod 2), \quad \partial_1 x_2 = \partial_1 x_3 = 2x_4 = 0(mod 2), \quad \partial_0 x_4 = 0.$$

Сада лако можемо видети шта су Морсове хомолошке групе

$$HM_2(M;\mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_2}{im\partial_3} = ker\partial_2 = \mathbb{Z}_2$$
$$HM_1(M;\mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_1}{im\partial_2} = ker\partial_1 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$
$$HM_0(M;\mathbb{Z}_2) = \frac{ker\partial_0}{im\partial_1} = ker\partial_0 = \mathbb{Z}_2.$$

Такође и у претходном примеру видимо да се Морсова хомологија поклапа са сингуларном хомологијом торуса, о чему говори следећа теорема.

Теорема 3.5. $HM_*(M;\mathbb{Z}) \cong H_*^{sing}(M;\mathbb{Z})$.

Доказ [17] или [2].

Библиографија

[1] В. Андрејић, *Виша геометрија*, Математички факултет, 2021.

[2] A. Banyaga, D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, 2004.

[3] G. E. Bredon, *Geometry and Topology*, New York 1993.

[4] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Београд, 2003.

[5] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 1982

[6] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, 2001.

[7] R. Howard, *The inverse function theorem for Lipschitz maps*, University of South Carolina, 1997

[8] *М. Јовановић - Белешке са предавања проф. Б. Првуловића - Увод у теорију хомотопије.*

[9] Ј. Катић, *Диференцијалне једначине*, Математички факултет.

[10] Ј. Катић, *Модулски простори комбинованог типа у Морс-Флоровој теорији - Докторска дисертација*, Београд, 2008.

[11] Д. Милинковић, *Математичка анализа 2 - скрипта.*

[12] J. Milnor, *Morse Theory, based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells*, University of Princeton, 1997

[13] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to 7-sphere* , 1956

[14] А. Перишић, *Морсова хомологија, диференцијално-тополошки и аналитички приступ*, Математички факултет, 2009.

[15] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 1991

[16] M. Schwartz, *Morse Homology*, 1993.

[17] J. Weber, *The Morse-Witten complex via dinamical systems*, Munchen 2004.

[18] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory systems*, 1982.