

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Дајана Шушљик

**Хиперграфови и теореме**  
**Ердеш – Ко – Радоа и Шпернера**

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

др Горан Банковић

ванредни професор, Математички факултет, Универзитет у Београду

Комисија:

др Зоран Петровић

редовни професор, Математички факултет, Универзитет у Београду

др Марко Радовановић

доцент, Математички факултет, Универзитет у Београду

## САДРЖАЈ

---

### САДРЖАЈ

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| УВОД                                    | 1  |
| I ХИПЕРГРАФОВИ                          | 2  |
| II ПРЕСЕЦАЈУЋА ФАМИЛИЈА СКУПОВА         | 5  |
| ТЕОРЕМА ЕРДЕШ – КО – РАДО               | 7  |
| ЗАДАЦИ                                  | 16 |
| III СУНЦОКРЕТ                           | 19 |
| ЗАДАЦИ                                  | 22 |
| IV ХИПЕРГРАФОВИ СА НЕУПОРЕДИВИМ ИВИЦАМА | 24 |
| ШПЕРНЕРОВА ТЕОРЕМА                      | 26 |
| ЗАДАЦИ                                  | 32 |
| ЛИТЕРАТУРА                              | 34 |

Комбинаторика је област математике која се бави проблемима егзистенције и енумерације објеката и структура које испуњавају неке задате услове. Једна од карактеристика комбинаторике је да постоји неколико различитих начина да се нешто докаже. У овом мастер раду често ћемо користити пермутацијску методу и методу двоструко бројање.

Екстремална комбинаторика је грана комбинаторике која је последњих неколико деценија доживела врло интензиван развој. Назив „екстремална“ говори о природи проблема којима се бави. Проблем којим се бави екстремална комбинаторика је одређивање колико велика или колико мала је колекција коначних објеката (бројева, графова, скупова, вектора итд.), при чему та колекција мора да испуни задате услове. Значајан део екстремалне комбинаторике се односи на класе скупова. Та област се назива екстремална теорија скупова. У екстремалној теорији скупова основни објекат је колекција подскупова неког коначног скупа.

Колекција подскупова има различите називе као систем скупова, фамилија подскупова или хиперграф. Не постоји формална разлика између појма фамилија скупова, односно систем скупова и појма хиперграфа. Разлика у различитим употребама појмова је више филозофска, а заправо нема формалне разлике између појмова. Код хиперграфа је више фокус на подскупове чворова који представљају гране хиперграфа и на однос између грана. У фамилији скупова фокус је више на теоријским особинама скупова, које фамилија скупова има или нема у одређеном односу скупова.

**Екстремална теорија скупова је пуна лепих теорема, изненађујућих веза и отворених проблема. Она се бави питањима типа: Који је највећи број  $k$ -точланих подскупова  $n$ -точланог скупа тако да се свака два подскупа секу? Који је највећи број подскупова тако да ниједан није подскуп другог?** У овом раду ћемо се бавити таквим питањима и проблемима. Дакле, наш главни задатак ће бити да одредимо максималну кардиналност фамилије скупова која испуњава неке услове.

Упозаћемо се са две битне теореме из екстремалне комбинаторике. Реч је о теоремама Ердеш – Ко – Радоа и Шпернера, које су инспирисале многе друге математичаре да се баве екстремалним проблемима.

Овде се упознајемо са ознакама и основним појмовима које ћемо користити у даљем раду.

**Дефиниција 1.** Граф  $G$  је уређени пар  $(V, E)$ , тј.  $G = (V, E)$  где је  $V$  коначан непразан скуп, а  $E$  је коначан скуп различитих неуређених парова различитих елемената скупа  $V$ . Скуп  $V$  се зове скуп чворова (темена) а скуп  $E$  се зове скуп грана (ивица).

Формално, скупови  $V$  и  $E$  могу се записати на следећи начин:

$$V = \{v : v \in G\}$$

$$E = \{e : e = vu \text{ где } v, u \in G, v \neq u\}.$$

**Дефиниција 2.** Нека је  $X$  коначан скуп. Хиперграф  $H$  на скупу  $X$  је фамилија непразних подскупова скупа  $X$ , тј.  $H \subset \mathcal{P}(X)$ . Елементи ове фамилије се зову хиперране (ивице или гране хиперграфа) а елементи из скупа  $X$  се зову чворови (темена).

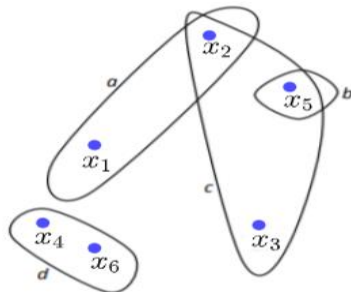
**Напомена 1.** У овом раду често ћемо посматрати хиперграф на  $n$ -точланом скупу, односно на скупу кардиналности  $n$  чији су елементи позитивни цели бројеви. Такав скуп ћемо означавати са  $[n]$ , тј.  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ .

Хиперграф се назива систем скупова или фамилија подскупова скупа  $X$ . Често хиперграф се означава писаним словом  $\mathcal{F}$ . Број хиперрана хиперграфа  $\mathcal{F}$  се означава са  $|\mathcal{F}|$ .

Приметимо да у графу свака грана спаја само два чвора, док у хиперграфу грана може да садржи више од два чвора. Дакле, граф је специјалан случај хиперграфа када је свака грана кардиналности два.

За разлику од графова, хиперграфови се тешко представљају цртежом нарочито ако садрже већи број грана. Уколико су гране кардиналности 1, онда грана одговара петљи. Ако су све гране хиперграфа кардиналности 2 онда је у питању стандардни граф. У том случају гране представљамо линијама које повезују два чвора. Ако грана хиперграфа има више од 2 чвора, онда се грана представља простом затвореном кривом.

Код хиперграфа два чвора су суседна ако постоји хиперграна која садржи оба чвора.



Чворови:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ .

Хиперране:  $a = \{x_1, x_2\}$ ,  $b = \{x_5\}$ ,  $c = \{x_2, x_3, x_5\}$ ,  $d = \{x_4, x_6\}$ .

Суседни чворови су:  $x_4$  и  $x_6$ ;  $x_1$  и  $x_2$ ;  $x_2, x_3$  и  $x_5$ .

Слика 1. Хиперграф на скупу  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ .

На слици 1. је приказан хиперграф на скупу  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ . Тај хиперграф смо представили у равни тако што смо врхове, односно елементе из скупа  $X$  идентификовали са

тачкама равни, а гране хиперграфа идентификовали са скуповима који садрже врхове који припадају тој грану и означили смо их словима.

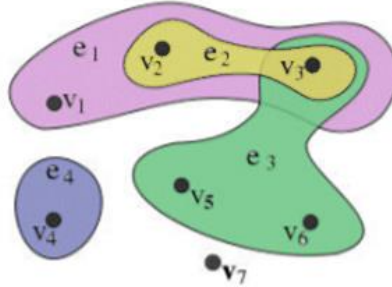
Хиперграфови се могу представити помоћу матрице инциденције  $A = [a_{ij}]$ , где  $j$ -та колона матрице  $A$  одговара хиперграну  $E_j$  а  $i$ -та врста матрице  $A$  одговара елементу  $v_i$ .

Дакле матрица је дефинисана на следећи начин:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } v_i \in E_j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Неки чвор или цела хипергрانا може бити садржана у другој хиперграну, и било који чвор или било која хипергрانا може бити члан више од једне хипергране. Такође, у хиперграфу било који чвор или било која хипергрانا не мора бити садржана у другој хиперграну.

На слици 2. је приказан хиперграф са скупом чворова  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  и хипергранама  $\left\{ \underbrace{\{v_1, v_2, v_3\}}_{e_1}, \underbrace{\{v_2, v_3\}}_{e_2}, \underbrace{\{v_3, v_5, v_6\}}_{e_3}, \underbrace{\{v_4\}}_{e_4} \right\}$ .



Слика 2. Хиперграф на скупу  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  са гранама  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ .

Са слике 2. видимо:

- чвор  $v_3$  се налази у три хипергране, тј. елемент је хиперграну  $e_1, e_2, e_3$ ;
- хипергрانا  $e_2 = \{v_2, v_3\}$  је подскуп хиперграну  $e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ;
- чвор  $v_7$  није елемент ниједне хипергране (за такав чвор кажемо да је изолован);
- хипергрانا  $e_4 = \{v_4\}$  није садржана у некој другој хиперграну.

Матрица инциденције која одговара хиперграфу са слике 2. је

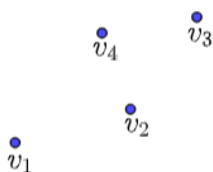
$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Дефиниција 3.** Празан хиперграф је хиперграф такав да је  $X = \emptyset$  и нема хиперграна.

Другим речима, хиперграф без чворова и без грана је празан хиперграф.

**Дефиниција 4.** Тривијалан хиперграф је хиперграф такав да је  $X \neq \emptyset$  и нема хиперграна.

Дакле, хиперграф који има све слободне чворове зове се тривијалан.



Слика 3. Тривијалан хиперграф на скупу  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

**Дефиниција 5.** Хиперграф који има све хиперране кардиналности  $k$ , односно свака хиперграна је величине  $k$ , назива се  $k$ -униформан хиперграф.

Примери: 2-униформан хиперграф је класичан граф

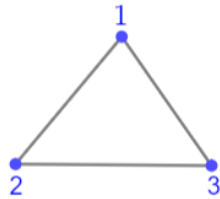
3-униформан хиперграф је скуп неуређених тројки

Битну особину фамилије подскупова наводимо у следећој дефиницији.

**Дефиниција 6.** Фамилија подскупова  $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$  (тј. фамилија подскупова скупа  $[n]$ ) назива се **пресецајућа фамилија** ако за све скупове  $A, B \in \mathcal{F}$  важи  $A \cap B \neq \emptyset$ .

**Напомена 2.** Не морају сви скупови из фамилије да имају исте заједничке елементе.

На пример,  $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$  је пресецајућа фамилија и немају сви скупови исте заједничке елементе. Ово је 2-униформан хиперграф, јер су све гране кардиналности два.



Слика 4. 2-униформан хиперграф

Приметимо да је дефиниција 6. еквивалентна са следећом реченицом:  $\mathcal{F}$  је хиперграф на скупу  $[n]$  тако да никоје две хипергране нису дисјунктне.

Сада фиксирамо један елемент из скупа  $[n]$  и посматрамо фамилију подскупова скупа  $[n]$  тако да сваки скуп садржи тај фиксирани елемент. Односно посматрамо фамилију  $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq [n] \mid x \in A\}$  за неко фиксирано  $x \in [n]$ . Јасно је да је ово пресецајућа фамилија, јер сваки скуп садржи елемент  $x$ . Величина ове пресецајуће фамилије је  $2^{n-1}$ , тј.  $|\mathcal{F}_x| = 2^{n-1}$ . **Таква пресецајућа фамилија зове се звезда.**

Да ли се може наћи већа пресецајућа фамилија? Одговор на то питање даје следећа теорема.

**Теорема 1.** Нека је  $\mathcal{F}$  хиперграф на скупу  $[n]$  такав да се сваке две хипергране секу. Тада је  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ .

**Доказ.** Пошто скуп  $[n]$  има  $n$  елемената, онда је број подскупова скупа  $[n]$  једнак  $2^n$ . Те подскупове, којих има  $2^n$ , распоредимо у парове тако да сваки подскуп повежемо са његовим комплементом. Таквих парова укупно има  $2^{n-1}$ .

Сваки тај пар подскупова је дисјунктан. Наиме, ако  $A \in \mathcal{F}$  онда  $\bar{A} = [n] \setminus A$  не може бити у пресецајућој фамилији  $\mathcal{F}$ , јер је  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

Добијамо да  $\mathcal{F}$  има највише један скуп из сваког тог пара. То значи да број хиперграна хиперграфа  $\mathcal{F}$  не може бити већи од броја тих парова, тј. од  $2^{n-1}$ .

Дакле,  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ .  $\square$

**Теорема 2.** Постоји хиперграф  $\mathcal{F}$  на  $n$ -точланом скупу који има  $2^{n-1}$  хиперграна тако да никоје две хипергрране нису дисјунктне.

Доказ: Нека је  $X = \{1, 2, \dots, n\}$   $n$ -точлан скуп.

Нека је  $\mathcal{F}$  хиперграф такав да су хипергрране подскупови скупа  $X$  који садрже чвор 1. Илустрација тог хиперграфа је дата на слици 5.  $\square$



Слика 5. Свака хипергррана хиперграфа  $\mathcal{F}$  садржи 1.

Шта је максимална величина пресецајуће фамилије  $\mathcal{F}$  која има само елементе величине  $k$ ?

- Ако је  $k = 1$ , онда је јасно да можемо одабрати само један скуп. Зато што су било која два различита једночлана скупа (скуп величине 1) дисјунктна, па ако би фамилија имала два елемента онда не бисмо имали пресецајућу фамилију.
- Ако је  $k = 2$  (скупови су двочлани), онда се лако види да је  $n - 1$  најбоља могућа величина за  $n \neq 3$ . До тог закључка смо дошли користећи скупове  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots, \{1, n\}$ .

За  $n = 3$  најбоља величина је 3. Посматрали смо скупове  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ .

Да ли идеју из ове конструкције можемо увек применити? Потврдан одговор на ово питање даје следећа лема.

**Лема 1.** За сваки позитиван цео број  $k \in [n]$  постоји  $k$ -униформан хиперграф  $\mathcal{F}$  на  $[n]$ , који има  $\binom{n-1}{k-1}$  хипергррана тако да никоје две хипергрране нису дисјунктне.

Доказ: Тражено својство има хиперграф код кога је свака хипергррана  $k$ -точлан подскуп скупа  $[n]$  и свака хипергррана садржи чвор 1.  $\square$

Може ли боље од тога? Одговор на то питање даје теорема Ердеш – Ко – Радо, коју су дали Ердеш (мађарски математичар), Ко (кинески математичар) и Радо (британски математичар). Ова теорема говори о максималној величини  **$k$ -униформног хиперграфа код кога се сваке две хипергрране секу**. Теорема је доказана 1938. године, али је тек објављена 1961. године. Један од разлога зашто није одмах објављена је тај што је у том периоду постојало реалативно мало интересовање за комбинаторику и мислили су да теорема није довољно занимљива.

*Теорема Ердеш – Ко – Радо је основни резултат у екстремалној теорији скупова. Ова теорема је убрзала развој екстремалне комбинаторике. Од године кад је објављена па све до данас пронађени су бројни различити докази, уопштења и проширења теореме.*

**Теорема 3. (Теорема Ердеш – Ко – Радó)** Нека је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија  $k$ -точланих подскупова скупа  $[n]$ . Ако је  $2k \leq n$  онда пресецајућа фамилија  $\mathcal{F}$  има највише  $\binom{n-1}{k-1}$  чланова, тј.  $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ .

*Оригинални доказ, који су дали Ердеш, Ко и Радó, користи идеју замене гране хиперграфа новом хиперграном тако да су неке кључне особине сачуване. У односу на оригинални доказ Катона је 1972. године дао краћи, једноставнији и елегантнији доказ. Тај доказ се заснива на двоструком бројању. У наставку наводимо оба доказа.*

**Напомена 3.** Случај  $2k > n$  је тривијалан. Зато што свака два  $k$ -точлана подскупа  $n$ -точланог скупа имају бар један заједнички елемент. Закључујемо да је  $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$ .

Први доказ (**оригинални доказ**): У овом доказу користимо методу замене. Прво ћемо дефинисати  $(i, j)$ -замену скупа  $A$  у фамилији  $\mathcal{F}$  и  $(i, j)$ -замену фамилије подскупова  $\mathcal{F}$ , а затим ћемо доказати да је  $S_{i,j}(\mathcal{F})$  пресецајућа фамилија и теорему 3..

Нека је  $\mathcal{F}$  фамилија  $k$ -точланих подскупова  $n$ -точланог скупа. За произвољне  $i, j \in [n]$  дефинишемо  $(i, j)$ -замену скупа  $A$  у фамилији  $\mathcal{F}$  са

$$S_{i,j}(A) = \begin{cases} (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}, & \text{ако } j \in A, i \notin A \text{ и } (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \notin \mathcal{F} \\ A, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Дакле,  $S_{i,j}$  елемент  $j$  замењује елементом  $i$  кад год је то могуће. Приметимо да за све  $A \in \mathcal{F}$  важи  $|S_{i,j}(A)| = |A|$ .

Тада је  $(i, j)$ -замена фамилије подскупова  $\mathcal{F}$  дефинисана са  $S_{i,j}(\mathcal{F}) = \{S_{i,j}(A) : A \in \mathcal{F}\}$ .

Приметимо да ако је  $\mathcal{F}$  фамилија  $k$ -точланих подскупова, онда је  $S_{i,j}(\mathcal{F})$  такође фамилија подскупова исте величине. Важи  $|\mathcal{F}| = |S_{i,j}(\mathcal{F})|$ .

**Лема 2.** Ако је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија  $k$ -точланих подскупова, онда је  $S_{i,j}(\mathcal{F})$  пресецајућа фамилија за све  $i \neq j$ .

Доказ леме 2. Нека су  $A, B \in \mathcal{F}$ . Доказујемо да  $S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B) \neq \emptyset$ .

Дефинишемо  $\mathcal{F}' = \{A \in \mathcal{F} : j \in A, i \notin A, (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \notin \mathcal{F}\}$ . Имамо неколико могућности.

**Први случај:  $A, B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$**

Дакле,  $A, B \in \mathcal{F}$  и  $A, B \notin \mathcal{F}'$ .

То значи да  $S_{i,j}(A) = A$  и  $S_{i,j}(B) = B$ , тј. скупови  $A$  и  $B$  су остали непромењени.

$$\text{Па је } \underbrace{S_{i,j}(A)}_{\text{Заменимо са } A} \cap \underbrace{S_{i,j}(B)}_{\text{Заменимо са } B} = \underbrace{A \cap B}_{\text{Пошто } A, B \in \mathcal{F}, \text{ онда се они секу}} \neq \emptyset.$$

**Други случај:  $A, B \in \mathcal{F}'$**

То значи да  $S_{i,j}(A) = (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$  и  $S_{i,j}(B) = (B \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ .

Приметимо да  $i \in S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B)$ , па је

$$S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B) \neq \emptyset.$$

**Трећи случај:  $A \in \mathcal{F}'$  и  $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$**

То значи да  $S_{i,j}(A) = (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$  и  $S_{i,j}(B) = B$  (Скуп  $B$  је остао непромењен.)

1) Ако  $\boxed{i \in B = S_{i,j}(B)}$ , онда је  $S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B) = ((A \setminus \{j\}) \cup \{i\}) \cap B \neq \emptyset$ .

2) Ако  $\boxed{i \notin B}$ , онда је

$$S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B) = ((A \setminus \{j\}) \cup \{i\}) \cap B = (A \setminus \{j\}) \cap B.$$

2.1) Ако  $\boxed{j \notin B}$ , онда  $S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B) = (A \setminus \{j\}) \cap B \neq \emptyset$ .

2.2) Претпоставимо  $\boxed{j \in B}$ .

Пошто  $A \in \mathcal{F}'$ , то значи да  $i \notin A$  и  $j \in A$ .

Пошто  $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$  и  $i \notin B, j \in B$  онда мора  $(B \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$ .

$$\text{Па је } S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B) = (A \setminus \{j\}) \cap B = A \cap (B \setminus \{j\}) = A \cap ((B \setminus \{j\}) \cup \{i\}) \neq \emptyset. \quad \square$$

Пошто  $A, (B \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$ ,  
онда се они секу.

Ако узастопно примењујемо  $S_{i,j}(\mathcal{F})$  за сваки  $1 \leq i < j \leq n$ , где елемент  $j$  замењујемо мањим, на крају ће  $\mathcal{F}$  престати да се мења. Добијамо да је  $S_{i,j}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$  за све  $1 \leq i < j \leq n$ . Назив такве фамилије наводимо у следећој дефиницији.

**Дефиниција 7.** Ако за свако  $i < j$  важи  $S_{i,j}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ , онда се  $\mathcal{F}$  зове **стабилна фамилија**.

Доказ теореме 3. Према леми 2. довољно је доказати да теорема 3. важи за стабилну фамилију  $\mathcal{F}$ . Нека је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија  $k$ -точланих подскупова  $n$ -точланог скупа. Претпоставимо да је  $\mathcal{F}$  стабилна фамилија.

Посматрајмо случај када је  $2k = n$ . Пошто је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија  $k$ -точланих подскупова  $2k$ -точланог скупа, онда  $\mathcal{F}$  садржи највише по један скуп из сваког пара  $(S, \{1, 2, \dots, 2k\} \setminus S)$ . Према томе, добијамо да је

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2} \cdot \binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Ово важи без обзира да ли је  $\mathcal{F}$  стабилна фамилија.

Сада претпоставимо да је  $2k < n$ , тј.  $2k \leq n - 1$ . Математичком индукцијом по  $n$  доказујемо да је  $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ .

(БИ) Ако је  $n = 3$ , онда је  $k = 1$ . Тада тврђење тривијално важи, јер су елементи у  $\mathcal{F}$  једночлани скупови и пошто је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија онда  $\mathcal{F}$  не може да има два једночлана скупа. Дакле,  $|\mathcal{F}| = 1$ . Ово важи без обзира да ли је  $\mathcal{F}$  стабилна фамилија.

(ИХ) Нека је  $n > 3$  и нека тврђење важи за све вредности које су мање од  $n$ , тј. важи за све  $m < n$ .

(ИК) Доказујемо да тврђење важи за  $n$ .

Дефинишемо  $\mathcal{F}_0 = \{S \in \mathcal{F} : n \notin S\}$  и  $\mathcal{F}_1 = \{S \in \mathcal{F} : n \in S\}$ . То значи да смо фамилију  $\mathcal{F}$  поделили на две подфамилије: прва је фамилија свих скупова који не садрже  $n$  а друга је фамилија свих скупова који садрже  $n$ .

Фамилија  $\mathcal{F}_0$  је пресецајућа фамилија  $k$ -точланих подскупа  $(n - 1)$ -чланог скупа. Према (ИХ) добијамо да је  $|\mathcal{F}_0| \leq \binom{n-2}{k-1}$ .

**Тврђење 1.** Фамилија  $\mathcal{F}_1$  је пресецајућа фамилија  $k$ -точланих подскупа  $n$ -чланог скупа. Величина фамилија  $\mathcal{F}_1$  није већа од  $\binom{n-2}{k-2}$ , тј.  $|\mathcal{F}_1| \leq \binom{n-2}{k-2}$ .

Дефинишемо  $\mathcal{F}_1' = \{S \setminus \{n\} : S \in \mathcal{F}_1\}$ . Приметимо да је  $|\mathcal{F}_1'| = |\mathcal{F}_1|$ .

**Тврђење 2.** Нека је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија.  $\mathcal{F}_1'$  је пресецајућа фамилија  $(k - 1)$ -чланих подскупа  $(n - 1)$ -чланог скупа.

Доказ тврђења 2. Претпоставимо супротно, тј. нека  $\mathcal{F}_1'$  није пресецајућа фамилија. Тада постоје скупови  $A, B \in \mathcal{F}$  тако да  $A \cap B = \{n\}$ . Добијамо да је

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = k + k - 1 = 2k - 1 < n - 1.$$

Пошто је  $|A \cup B| < n - 1$ , онда постоји неко  $i \in [n]$  тако да  $i \notin A \cup B$ . Пошто је  $\mathcal{F}$  стабилна фамилија, онда имамо да је  $A_{i,n} = (A \setminus \{n\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$ .

Сада посматрамо  $A_{i,n} \cap B = ((A \setminus \{n\}) \cup \{i\}) \cap B = (A \setminus \{n\}) \cap B = \emptyset$ . То је контрадикција са условом да је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија.  $\square$

Дакле,  $\mathcal{F}_1'$  је пресецајућа фамилија  $(k - 1)$ -чланих подскупа  $(n - 1)$ -чланог скупа. Према (ИХ) добијамо да је  $|\mathcal{F}_1'| \leq \binom{n-2}{k-2}$ .

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1'| \leq \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Користимо особину биномних коефицијента :  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ .  $\square$

Други доказ (**Катона**): У овом доказу користимо цикличне пермутације.

Подсетимо се дефиниције цикличне пермутације.

**Дефиниција 8.** Нека је  $X$  коначан скуп. Пермутација на скупу  $X$  је бијекција из  $X$  у  $X$ . Пермутација  $\pi$  је циклична пермутација ако важи  $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots \mapsto x_n \mapsto x_1$ , где су  $x_1, x_2, \dots, x_n$  елементи из  $X$  у неком редоследу. Циклична пермутација се записује као  $(x_1 x_2 \dots x_n)$ .

Дакле циклична пермутација  $\pi$  на  $[n]$  је распоред елемената тог скупа, тј. бројева  $1, 2, \dots, n$  на кругу где не разликујемо кружне промене (ротације).

На пример,  $(531642) \equiv (316425)$ .

$$\begin{array}{ccc} 5 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ 2 & \mapsto & 4 & \mapsto & 6 \end{array}$$

Број цикличних пермутација скупа  $[n]$  је  $(n-1)!$ .

**Кажемо да је скуп  $A \subseteq [n]$  интервал** ако се елементи из скупа  $A$  појављују узастопно у неком распореду у пермутацији  $\pi$ .

На пример, нека је дата пермутација  $\pi = 25341$ .

Скуп  $A = \{1, 2, 4\}$  је интервал, јер се елементи из скупа  $A$  у пермутацији  $\pi = 25341$  узастопно појављују у неком распореду.

Скуп  $B = \{2, 3, 4\}$  није интервал, јер елементи из скупа  $B$  у пермутацији  $\pi = 25341$  нису узастопни.

**Тврђење 3.** Нека је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија  $k$ -точланих подскупова скупа  $[n]$ . Тада је за било коју цикличну пермутацију  $\pi$  број скупова  $A \in \mathcal{F}$ , који се јављају као интервал у пермутацији  $\pi$  највише  $k$ .

Доказ тврђења 3. Фиксирамо један  $k$ -точлани скуп  $A_0 \in \mathcal{F}$  који формира интервал на пермутацији  $\pi$ . То значи да су елементи из скупа  $A_0$  узастопно распоређени у неком редоследу у пермутацији  $\pi$ . Без губљења општости, нека се елементи скупа  $A_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  појављују дуж круга у смеру казаљке на сату.



Нацртамо га црвеном бојом.

На илустрацији (Слика 6.) је  $k = 5$  и  $n = 12$ .

Слика 6. Скупови који формирају интервал на цикличној пермутацији.

Пошто је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија, онда сваки члан из фамилије  $\mathcal{F}$  мора пресећи скуп  $A_0$ . Прецизније, сваки скуп из  $\mathcal{F}$  мора или започети или завршити у црвеном интервалу.

Посматрајмо  $k$ -точлани скуп  $B \in \mathcal{F}$  који такође формира интервал на пермутацији  $\pi$  и који је различит од скупа  $A_0$  (На илустрацији (Слика 6.) је нацртан плавом бојом). Закључујемо да постоји  $2(k-1)$  избора за такав скуп  $B$ , односно  $(k-1)$  скуп пресеца скуп  $A_0$  на страни круга у смеру казаљке на сату и  $(k-1)$  скуп пресеца скуп  $A_0$  на страни круга у смеру супротном од кретања казаљке на сату. Овим смо добили тривијалну границу  $2(k-1)$ .

Сада упаримо скупове, односно интервале који почињу или завршавају елементима из скупа  $A_0$  на следећи начин:

За свако  $i$ , где  $2 \leq i \leq k-1$  интервал дужине  $k$  који се завршава елементом  $x_i$  треба да буде упарен са интервалом дужине  $k$  који почиње елементом  $x_{i+1}$ .

Приметимо да се упарени интервали не секу, јер је  $2k \leq n$ . То значи да оба интервала не могу истовремено да буду чланови фамилије  $\mathcal{F}$ . Дакле, из сваког пара упарених интервала највише један од њих је у  $\mathcal{F}$ . Овим смо добили да  $\mathcal{F}$  има највише  $k-1$  чланова. Рачунајући и фиксирани скуп  $A_0$ , добијамо да  $\mathcal{F}$  има највише  $k$  скупова који одговарају пермутацији  $\pi$ .  $\square$

Сада бројимо колико пута се догоди да циклична пермутација  $\pi$  садржи члана наше фамилије  $\mathcal{F}$  као интервал. Односно, одређујемо кардиналност скупа

$P := \{(\pi, A) : \pi \text{ је циклична пермутација скупа } [n] \text{ и } A \in \mathcal{F} \text{ је интервал у пермутацији } \pi\}$ .

- Први начин:

Фиксирамо произвољан  $k$ -точлан скуп  $A \in \mathcal{F}$ . Бројимо у колико цикличних пермутација се јавља тај скуп као интервал. Елементи скупа  $A$  могу се на  $k!$  начина распоредити на узастопна места дуж круга. Преостали елементи из скупа  $[n] \setminus A$  могу се на  $(n-k)!$  начина распоредити на преостала места. Према томе, број цикличних пермутација у којима се  $A \in \mathcal{F}$  јавља као интервал је једнак  $k! \cdot (n-k)!$ .

Дакле, све заједно даје да је

$$|P| = \sum_{A \in \mathcal{F}} |\{\pi \mid \text{у пермутацији } \pi \text{ скуп } A \text{ је интервал}\}| = \sum_{A \in \mathcal{F}} k! \cdot (n-k)! = |\mathcal{F}| \cdot k! \cdot (n-k)! \quad (*)$$

- Други начин:

Фиксирамо произвољну цикличну пермутацију  $\pi$ . Бројимо колико је чланова из фамилије  $\mathcal{F}$  интервал у пермутацији  $\pi$ . Према тврђењу 3. имамо да  $\mathcal{F}$  садржи највише  $k$  скупова који се у пермутацији  $\pi$  појављују као интервали.

Дакле, добијамо да је

$$|P| = \sum_{\pi} |\{A \in \mathcal{F} \mid \text{скуп } A \text{ одговара пермутацији } \pi\}| \leq \sum_{\pi} k = (n-1)! \cdot k. \quad (**)$$

Упореджујући (\*) и (\*\*) добија се

$$|\mathcal{F}| \cdot k! \cdot (n - k)! \leq (n - 1)! \cdot k,$$

односно

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{(n-1)! \cdot k}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n-1}{k-1},$$

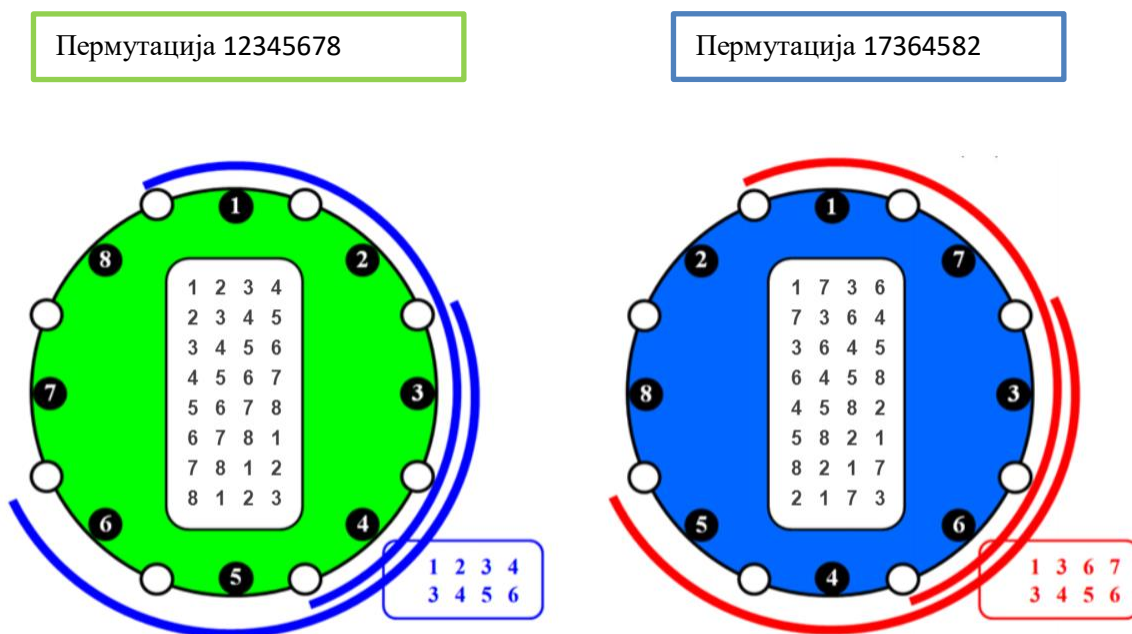
што смо и требали да докажемо.  $\square$

Следећи пример представља илустрацију доказа теореме Ердеш – Ко – Радо. Помоћу цртежа (Слика 7.) из наредног примера илустроваћемо још једну верзију доказа теореме.

Нека је  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

У овој илустрацији је  $n = 8$  (осмочлан скуп) и  $k = 4$  (сви подскупови су кардинаности 4).

Елементе скупа  $X$  распоредимо дуж круга тако што фиксирамо елемент 1 а преостале елементе из скупа  $X$  распоредимо на преостала места. Елементи скупа  $X \setminus \{1\}$  могу се на  $7!$  начина распоредити.



Слика 7. Цикличне пермутације скупа  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

Две такве пермутације су приказане на слици 7..

Спојнице (линије између бројева на кругу) означимо кругом као што је на приказаним сликама. Онда низ од 4 узастопне спојнице (линије) даје подскуп скупа  $X$  кардиналности 4. Према тврђењу 3. можемо наћи највише  $k = 4$  подскупа тако да се свака два преклапају, односно имају заједничку спојницу (линију). На оба круга имамо укупно 8 скупова који су кардиналности 4 и представљени су са 4 узастопне спојнице (линије).

За зелени круг то су:  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5\}$ ,  $\{3, 4, 5, 6\}$ ,  $\{4, 5, 6, 7\}$ ,  $\{5, 6, 7, 8\}$ ,  $\{1, 6, 7, 8\}$ ,  $\{1, 2, 7, 8\}$ ,  $\{1, 2, 3, 8\}$ .

На слици зеленог круга маркирана су два скупа **плавом бојом** ( $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{3, 4, 5, 6\}$ ). Можемо наћи још два скупа тако да важи особина да се свака два секу. Неке од могућности су:  $\{\{2, 3, 4, 5\}, \{4, 5, 6, 7\}\}$ ;  $\{\{6, 7, 8, 1\}, \{8, 1, 2, 3\}\}$ ;  $\{\{2, 3, 4, 5\}, \{8, 1, 2, 3\}\}$ ;  $\{\{4, 5, 6, 7\}, \{6, 7, 8, 1\}\}$ .

Не можемо узети истовремено и  $\{2, 3, 4, 5\}$  и  $\{6, 7, 8, 1\}$ , јер су они дисјунктни.

За плави круг то су:  $\{1, 3, 6, 7\}$ ,  $\{3, 4, 6, 7\}$ ,  $\{3, 4, 5, 6\}$ ,  $\{4, 5, 6, 8\}$ ,  $\{2, 4, 5, 8\}$ ,  $\{1, 2, 5, 8\}$ ,  $\{1, 2, 7, 8\}$ ,  $\{1, 2, 3, 7\}$ .

На слици плавог круга маркирана су два скупа **црвеном бојом** ( $\{1, 3, 6, 7\}$ ,  $\{3, 4, 5, 6\}$ ). Можемо наћи још два скупа тако да важи особина да се свака два секу. Неке од могућности су:  $\{\{3, 4, 6, 7\}, \{4, 5, 6, 8\}\}$ ;  $\{\{1, 2, 5, 8\}, \{1, 2, 3, 7\}\}$ ;  $\{\{3, 4, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 7\}\}$ ;  $\{\{4, 5, 6, 8\}, \{1, 2, 8, 7\}\}$ .

Сумирајући преко свих  $(n - 1)!$  цикличних пермутација за сваки пресецајући скуп (којих има највише  $k$  за једну цикличну пермутацију) добијамо да је пресецајућа фамилија кардиналности највише  $k \cdot (n - 1)!$ . Али ово ће сигурно укључити дупло бројање неких скупова. **На пример, код пермутација приказаних на слици 7. скуп  $\{3, 4, 5, 6\}$  смо бројали два пута.** Лако се може пребројати колико често ће се десити да елементе бројимо дупло. Сваки подскуп има  $k$  елемената, па постоји  $k!$  начина да се распореде његови елементи. За преостале елементе, којих има  $n - k$ , постоји  $(n - k)!$  начина да се распореде. Таква фамилија скупова нема дисјунктних парова и кардиналности је највише

$$\frac{k \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Постоје многа уопштења и проширења теореме Ердеш – Ко – Радо. У наставку наводимо једну теорему која је уопштење теореме Ердеш – Ко – Радо. Аутор теореме је британски математичар Бела Болобаш.

**Теорема 4.** Нека је  $\mathcal{F}$   $k$ -униформан хиперграф на скупу  $[n]$  који има  $2m$  хиперграна тако да су његове хипергрране скупови  $X_1, X_2, \dots, X_m$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  за које важи услов  $X_i \cap Y_j = \emptyset$  ако и само ако  $i = j$ . Тада је  $m \leq \binom{2k}{k}$ .

Доказ. Користимо методу двоструко бројање. Дефинишемо  $P$  скуп парова  $(p, i)$  где је  $p = p_1 p_2 \dots p_n$  пермутација елемената скупа  $[n]$ ,  $i \in [m]$  и сви елементи скупа  $X_i$  су испред свих елемената скупа  $Y_i$  у пермутацији  $p$ . **Напомена 4.** Сваку пермутацију  $p = p_1 p_2 \dots p_n$  скупа  $[n]$  можемо идентификовати са бијекцијом  $p : [n] \rightarrow [n]$  за коју је  $p(i) = p_i$ .

Бројимо колико елемената има скуп  $P$ .

Први начин: Фиксирамо  $i \in [m]$ . Тада су фиксирани и скупови  $X_i$  и  $Y_i$ . Бројимо колико има пермутација за које важи да су сви елементи скупа  $X_i$  испред свих елемената скупа  $Y_i$ .

Кажемо да су две пермутације  $q$  и  $q'$  еквивалентне, тј.  $q \Leftrightarrow q'$  ако обе пермутације имају исти скуп позиција елемената који припадају скупу  $X_i \cup Y_i$ .

**Напомена 5.** Не захтевамо да сваки елемент  $z \in X_i \cup Y_i$  буде на истој позицији у обе пермутације.

На пример. Посматрајмо скуп  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Нека су  $X_i = \{1\}$  и  $Y_i = \{3\}$ .

Пермутације **1234** и **1432** су еквивалентне, јер су у обе пермутације елементи из скупа  $X_i \cup Y_i = \{1, 3\}$  на истим позицијама. Такође, пермутације **1234** и **3412** су еквивалентне, јер су у обе пермутације елементи из скупа  $X_i \cup Y_i = \{1, 3\}$  на истим позицијама.

Постоји  $\binom{n}{2k}$  еквивалентних класа и свака та класа садржи

$$\underbrace{k!}_{\substack{\text{начина} \\ \text{да се} \\ \text{распореде} \\ \text{елементи} \\ \text{из } X_i}} \cdot \underbrace{k!}_{\substack{\text{начина} \\ \text{да се} \\ \text{распореде} \\ \text{елементи} \\ \text{из } Y_i}} \cdot \underbrace{(n-2k)!}_{\substack{\text{начина} \\ \text{да се} \\ \text{распореде} \\ \text{преостали} \\ \text{елементи}}} \text{ пермутација.}$$

Другим речима, постоји  $\binom{n}{2k}$  могућности за избор скупа позиција елемената који припадају скупу  $X_i \cup Y_i$ . Када се изабере тај скуп позиција, онда  $k$  елемената из скупа  $X_i$  морају бити у првој половини скупа позиција у неком распореду и  $k$  елемената из скупа  $Y_i$  морају бити у другој половини скупа позиција у неком распореду. Преостали елементи који не припадају скупу  $X_i \cup Y_i$  могу се пермутовати у било којем распореду.

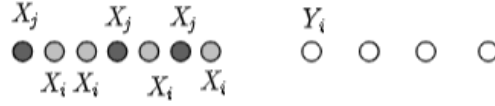
Пошто ово важи за свако  $i \in [m]$ , добијамо да је

$$|P| = m \cdot \binom{n}{2k} \cdot k! \cdot k! \cdot (n-2k)! = n! \cdot \frac{m}{\binom{2k}{k}}.$$

Други начин: Фиксирамо пермутацију  $p$ . Бројимо колико има скупова са траженом особином у пермутацији  $p$ .

**Тврђење 4.** Нека су  $X_1, X_2, \dots, X_m$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$   $k$ -точлани скупови за које важи услов  $X_i \cap Y_j = \emptyset$  ако и само ако  $i = j$ . Тада постоји највише један индекс  $i$  тако да су у пермутацији  $p$  сви елементи скупа  $X_i$  испред свих елемената скупа  $Y_i$ .

Доказ тврђења 4. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да имамо два таква индекса. Нека су то индекси  $i$  и  $j$ . Без губљења општости, претпоставимо да се у пермутацији  $p$  крајњи десни елемент из  $X_i$  налази одмах после крајњег десног елемента из  $X_j$ . Илустрација тога је приказана на слици 8.



Слика 8. Ако се  $X_j$  завршава пре  $X_i$ , онда је  $X_j$  дисјунктан са  $Y_i$ .

Дакле, у пермутацији  $p$  за индекс  $i$  имамо да су сви елементи из  $X_i$  испред свих елемената из  $Y_i$  и због горње претпоставке у пермутацији  $p$  сви елементи из  $X_j$  морају бити испред свих елемената из  $Y_i$ , јер се  $X_j$  завршава пре  $X_i$ . То значи да  $X_j \cap Y_i = \emptyset$ , контрадикција.  $\square$

Према показаном тврђењу 4. постоји највише један индекс  $i$  за сваку пермутацију  $p$ . Пермутација  $n$ -точланог скупа има  $n!$ . Према томе, добијамо да је

$$|P| \leq 1 \cdot n! \leq n!$$

Дакле, важи

$$n! \cdot \frac{m}{\binom{2k}{k}} = |P| \leq n! \Leftrightarrow \frac{m}{\binom{2k}{k}} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \binom{2k}{k}.$$

## II ЗАДАЦИ

1. Нека је  $\mathcal{F}$  фамилија подскупова скупа  $[n]$  тако да за било која два скупа из  $\mathcal{F}$  њихова унија није једнака скупу  $[n]$ . Доказати да је  $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$ .

Решење: Нека је  $\mathcal{F} = \{\bar{A} : A \subseteq [n], 1 \in A\}$ . Дакле, елементи у  $\mathcal{F}$  су комплементи подскупова скупа  $[n]$  који садрже елемент 1. Другим речима, у фамилији  $\mathcal{F}$  се налазе сви они подскупови скупа  $[n]$  који не садрже елемент 1. Услов, да за било која два скупа из  $\mathcal{F}$  њихова унија није једнака скупу  $[n]$ , је испуњен. Број елемената такве фамилије  $\mathcal{F}$  је  $2^{n-1}$ .

1. Нека је  $n \leq 2k$ . Нека је  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  фамилија  $k$ -точланих подскупова скупа  $[n]$  таква да је  $A_i \cup A_j \neq [n]$  за све  $i, j$ . Доказати да је

$$m \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k}.$$

Решење: Посматрамо комплементе скупова  $A_i$ , тј.  $\bar{A}_i = [n] \setminus A_i$ . Сви ти подскупови су величине  $n - k$ . За њих важи да је

$$\bar{A}_i \cap \bar{A}_j = \overline{A_i \cup A_j} \neq \bar{[n]} = \emptyset.$$

Проверимо услов Ердеш – Ко – Радове теореме.

$$n \geq 2(n - k) \Leftrightarrow n \leq 2k$$

Услов је испуњен па можемо да применимо поменућу теорему. Добијамо да је

$$|\mathcal{A}| = m \leq \binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{k}.$$

Упоредјујући са изразом из задатка добијамо да је

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k} - \underbrace{\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k}}_{\text{Заменимо са } \binom{n-1}{k-1}} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}.$$

$$\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

Дакле  $m \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k}$ , што смо и требали да докажемо.  $\square$

2. Нека је  $\mathcal{F}$  пресецајућа фамилија подскупова  $n$ -точланог скупа. Доказати да постоји пресецајућа фамилија подскупова  $n$ -точланог скупа величине  $2^{n-1}$  која садржи  $\mathcal{F}$ .

Решење: Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да је  $\mathcal{F}$  максимална пресецајућа фамилија  $n$ -точланог скупа и да је  $|\mathcal{F}| < 2^{n-1}$ . Услов да је  $\mathcal{F}$  максимална пресецајућа фамилија значи да не могу ниједан скуп додати у  $\mathcal{F}$ . Тада постоји скуп  $A \subseteq [n]$  тако да  $A, \bar{A} \notin \mathcal{F}$ . Због максималности  $\mathcal{F}$ , постоје скупови  $B, C \in \mathcal{F}$  тако да  $A \cap B = \emptyset$  и  $\bar{A} \cap C = \emptyset$ . Из тога следи да је  $B \subset \bar{A}$  и  $C \subset A$ .

Добијамо да је  $B \cap C \subset \bar{A} \cap A = \emptyset$ . Дакле  $B \cap C = \emptyset$ , што је контрадикција са  $B, C \in \mathcal{F}$ .  $\square$

3. Горња граница  $\binom{n-1}{k-1}$  у Ердеш – Ко – Радовој теорему се постиже за фамилије скупова које садрже фиксирани елемент. Доказати да за  $n = 2k$  постоје и друге фамилије које постижу ту границу.

Решење: Посматрамо парове скупова које чине  $k$ -точлани подскуп и његов комплемент, који је такође величине  $k$ . У фамилији  $k$ -точланих подскупова  $n$ -точланог скупа, односно  $2k$ -точланог скупа укључујемо по један скуп из сваког тог пара. За сваки дати  $k$ -точлани подскуп  $A$  од  $2k$ -точланог скупа,  $\bar{A}$  је једини од  $k$ -точланих подскупова који га не сече.

Таква фамилија има

$$\frac{1}{2} \cdot \binom{2k}{k} = \underbrace{\frac{k}{2 \cdot k}}_{\substack{\text{Помножили} \\ \text{и поделили} \\ \text{са } k.}} \cdot \binom{2k}{k} = \frac{k}{2k} \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} = \frac{(2k-1)!}{(k-1)! \cdot k!} = \frac{(2k-1)!}{(k-1)! \cdot (2k-1-(k-1))!} = \binom{2k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

елемената, што је горња граница  $\binom{n-1}{k-1}$  у Ердеш – Ко – Радовој теорему за  $n = 2k$ .  $\square$

4. Особина пресецајуће фамилије скупова може се генерализовати захтевајући да је  $|A \cap B| \geq t$  за све различите скупове  $A, B \in \mathcal{F}$ . Овакве фамилије се зову  $t$ -пресецајуће фамилије. Пример  $t$ -пресецајуће фамилије је фамилија подскупова скупа  $[n]$  где сваки подскуп садржи неких  $t$  фиксираних елемената. Ова фамилија има  $2^{n-t}$  скупова. Да ли постоје веће  $t$ -пресецајуће фамилије?

Решење: Нека је  $n + t$  паран број. Узмимо  $\mathcal{F} = \left\{ A : A \subseteq [n], |A| = \frac{n+t}{2} \right\}$ .

Било која два скупа из  $\mathcal{F}$  имају заједно  $n + t$  елемената јер је  $\frac{n+t}{2} + \frac{n+t}{2} = n + t$ . То значи да морају имати бар  $t$  заједничких елемената.

Треба да видимо да ли важи

$$2^{n-t} \leq \binom{n}{\frac{n+t}{2}}.$$

Наводимо лему коју нећемо доказати.

**Лема 3.** Нека су  $n, k \in \mathbb{N}$  такви да је  $k < n$ . Тада важи оцена  $\binom{n}{k}^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ .

Користећи симетрију биномних коефицијената и лему 3. добијамо да важи

$$\binom{n}{\frac{n+t}{2}} = \binom{n}{\frac{n-t}{2}} \geq \left(\frac{n}{\frac{n-t}{2}}\right)^{\frac{n-t}{2}}$$

Довољно је показати да је

$$\left(\frac{n}{\frac{n-t}{2}}\right)^{\frac{n-t}{2}} \geq 2^{n-t} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2n}{n-t}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2n}{n-t} \geq 4 \Leftrightarrow t \geq \frac{n}{2}.$$

Пошто је  $n+t$  паран број и уколико важи  $\frac{n}{2} \leq t < n$  онда је фамилија  $\mathcal{F}$  чији су елементи подскупови скупа  $[n]$  који су кардиналности  $\frac{n+t}{2}$ , тј.  $\mathcal{F} = \left\{A : A \subseteq [n], |A| = \frac{n+t}{2}\right\}$ , већа од фамилије подскупова скупа  $[n]$  који садрже неких  $t$  фиксираних елемената.  $\square$

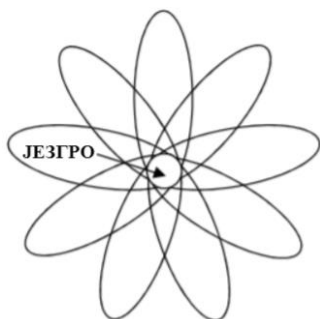
У овом поглављу бавићемо се не само пресецима два скупа, већ и пресецима произвољно много скупова из посматране фамилије.

У наставку ћемо навести један од најлепших резултата у екстремалној теорији скупова. Реч је о такозваној сунцокретој лемми, коју су 1960. године дали Ердеш и Радо.

**Дефиниција 9.** Сунцокрет са  $k$  латица и језгром  $Y$  је фамилија скупова  $S_1, S_2, \dots, S_k$  тако да

- 1)  $S_i \cap S_j = Y$  за све  $i \neq j, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k$ ;
- 2)  $S_i \setminus Y \neq \emptyset$  за све  $i = 1, 2, \dots, k$ .

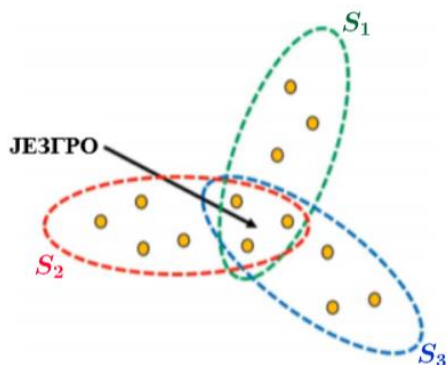
Скупови  $S_i \setminus Y$  се називају **латице** и оне не могу бити празне, за разлику од језгра  $Y$  који може бити празан.



Слика 9. Сунцокрет

Разлог за име сунцокрет је тај што приказ Веновог дијаграма за такву фамилију скупова подсећа на сунцокрет.

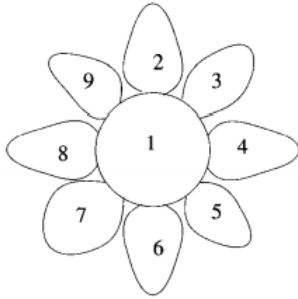
**Дефиниција 10.** Сунцокрет је хиперграф са непразним ивицама ако сваке две ивице имају исти пресек.



Слика 10. Сунцокрет са 3 латице

Пошто је пресек било које две ивице (скупа) исти, онда је тај пресек једнак пресеку свих ивица (скупова). Илустрација је на слици 10.

Пример 1. Хиперграф са ивицама  $\{1, k\}$  где  $k \in \{2, 3, \dots, n\}$  је сунцокрет са језгром  $\{1\}$ .



На слици 11. је приказан сунцокрет за  $n = 9$ .

Слика 11. Сунцокрет са осам латица и са језгром  $\{1\}$ .

Пример 2. Пар дисјунктних скупова је сунцокрет са две латице и празним језгром.

Сунцокрет са  $k$  латица се назива сунцокрет кардиналности  $k$ .

Сада наводимо лему Ердеш – Радо, која тврди да довољно велики хиперграф увек садржи сунцокрет.

**Лема 4. (Ердеш – Радо)** Нека је  $\mathcal{F}$   $\ell$ -униформан хиперграф. Ако је  $|\mathcal{F}| > (k-1)^\ell \cdot \ell!$  тада  $\mathcal{F}$  садржи сунцокрет са  $k$  латица.

Доказ. Лему ћемо доказати математичком индукцијом по  $\ell$ .

(БИ) За  $\ell = 1$ , имамо да хиперграф  $\mathcal{F}$  има бар  $k$  дисјунктних једночланих скупова јер је  $|\mathcal{F}| > (k-1)^1 \cdot 1! = k-1$ . Па било којих  $k$  скупова формирају сунцокрет са  $k$  латица. Његово језгро ће бити празан скуп, али то је у реду.

(ИХ) Нека је  $\ell \geq 2$ . Претпоставимо да тврђење важи за све вредности мање од  $\ell$ .

(ИК) Доказујемо да тврђење важи за  $\ell$ .

Нека је  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$  максимална фамилија међусобно дисјунктних скупова из  $\mathcal{F}$ .

- Ако је  $t \geq k$  онда смо завршили доказ, јер било којих  $k$  скупова из  $\mathcal{A}$  формирају сунцокрет са  $k$  латица и празним језгром.
- Сада претпоставимо да је  $t \leq k-1$ .

Нека је  $B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t$ , односно скуп  $B$  је унија скупова из фамилије  $\mathcal{A}$ .

Тада је  $|B| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_t| = \ell \cdot t \leq \ell \cdot (k-1)$ .

Због максималности фамилије  $\mathcal{A}$  следи да  $B$  пресеца све скунове из  $\mathcal{F}$ . Према Дирихлеовом принципу, неки елемент  $x \in B$  мора бити садржан у бар

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{\ell! \cdot (k-1)^\ell}{\ell \cdot (k-1)} = (\ell-1)! \cdot (k-1)^{\ell-1} \text{ скупова из } \mathcal{F}.$$

Сада из сваког тог скупа уклонимо елемент  $x$ . Сви ти скупови су сада кардиналности  $\ell - 1$ . Дакле, посматрамо фамилију скупова  $\mathcal{F}_x := \{S \setminus \{x\} : S \in \mathcal{F}, x \in S\}$ . Елементи у  $\mathcal{F}_x$  су скупови из  $\mathcal{F}$  из којих смо уклонили елемент  $x$ . Важи да је  $|\mathcal{F}_x| > (\ell - 1)! \cdot (k - 1)^{\ell-1}$ . Применимо (ИХ) на  $\mathcal{F}_x$  и добијемо да  $\mathcal{F}_x$  садржи сунцокрет са  $k$  латица.

Свакој латици тог сунцокрета додајмо елемент  $x$ . Тај елемент се налази у језгру. Према томе, добили смо жељени сунцокрет. Дакле,  $\mathcal{F}$  садржи сунцокрет са  $k$  латица.  $\square$

Која је најбоља могућа оцена која гарантује да је то сунцокрет са  $k$  латица? Још увек није познато да ли је оцена  $(k - 1)^\ell \cdot \ell!$  из претходне леме најбоља могућа.

Са  $f(\ell, k)$  означимо најмањи цео број  $m$  тако да свака  $\ell$ -униформна фамилија од  $m$  скупова садржи сунцокрет са  $k$  латица. Онда је

$$1 + (k - 1)^\ell \leq f(\ell, k) \leq \ell! \cdot (k - 1)^\ell + 1.$$

Горња граница је сунцокретова лема коју смо управо доказали. Доња граница је нешто тежа за показати. Размак између горње и доње границе за  $f(\ell, k)$  је и даље велики због фактора  $\ell!$ .

**Претопоставка. (Ердеш – Радо)** За свако фиксирано  $k$  постоји константа  $C = C(k)$  таква да је  $f(\ell, k) < C^\ell$ .

Претпоставка остаје отворена чак и за  $k = 3$ . У овом случају сунцокретова лема захтева најмање  $\ell! \cdot 2^\ell \approx \ell^\ell$  скупова.

Неколико аутора је мало поправило ту границу:

- Шпернер је доказао  $f(\ell, 3) \leq e^{c\sqrt{\ell}} \ell!$
- Косточка је 1999. године доказао да за фиксирано  $\ell$  и довољно велико  $k$ 

$$f(\ell, k) \leq k^\ell \left(1 + ck^{-2^{-\ell}}\right),$$
где  $c$  константа зависи само од  $\ell$ .

1. **Фамилију клубова зовемо сунцокрет ако је сваки становник (који је у бар једном клубу) или члан свих клубова или само једног клуба. Ако сваки клуб има  $s$  чланова, колико клубова гарантује да ће неких  $k$  клубова формирати сунцокрет?**

Решење: Ердеш – Радова лема, односно сунцокретова лема тврди следеће:

*Ако је бар  $(k - 1)^s \cdot s!$  клубова, онда ће неких  $k$  клубова формирати сунцокрет.*

Дакле,  $(k - 1)^s \cdot s!$  клубова гарантује да ће постојати сунцокрет.

2. **Нека су  $V_1, V_2, \dots, V_s$  међусобно дисјунктни  $(k - 1)$ -члани скупови, и нека је фамилија  $\mathcal{F} = \{S : |S| = s \text{ и } |S \cap V_i| = 1 \text{ за све } i = 1, 2, \dots, s\}$ . Ова фамилија има  $(k - 1)^s$  скупова. Доказати да фамилија  $\mathcal{F}$  не садржи сунцокрет са  $k$  латица.**

Решење: Претпоставимо супротно, тј. нека  $\mathcal{F}$  садржи сунцокрет са  $k$  латица.

У задатку је дата фамилија  $\mathcal{F} = \{S : |S| = s \text{ и } |S \cap V_i| = 1 \text{ за све } i = 1, 2, \dots, s\}$ . То значи да су елементи у фамилији  $\mathcal{F}$  скупови који садрже тачно по један елемент из сваког од дисјунктних скупова  $V_i, i = 1, 2, \dots, s$ . Зато је  $|\mathcal{F}| = (k - 1)^s$ .

У скупу  $V_1$  имамо  $k - 1$  елемената, па нека два скупа из сунцокрета са  $k$  латица сигурно садрже исти елемент из  $V_1$ . Због тога тај елемент мора бити у језгру, јер су латице дисјунктне. Што значи да тај елемент мора бити и у свим скуповима из сунцокрета.

До истих закључака долазимо и за остале скупове  $V_2, \dots, V_s$ . Дакле, свих  $s$  елемената скупа из таквог сунцокрета се налазе у језгру и латице су празне. Ово је контрадикција са дефиницијом сунцокрета.  $\square$

3. **Спаривање величине  $k$  у графу је скуп од  $k$  његових грана тако да никоје две гране немају заједнички врх. Звезда величине  $k$  у графу је скуп од  $k$  његових грана које су инцидентне са једним врхом. Доказати да у графу са више од  $2(k - 1)^2$  грана постоји или спаривање величине  $k$  или звезда величине  $k$ .**

Решење: Гране, односно ивице графа су двочлани подскупови скупа врхова (чворова), па применимо сунцокретоу лему за  $\ell = 2$ .

Пошто имамо више од  $(k - 1)^\ell \cdot \ell! = (k - 1)^2 \cdot 2! = 2(k - 1)^2$  скупова у фамилији, онда према сунцокретоуј лему та фамилија садржи сунцокрет са  $k$  латица.

Ако је то сунцокрет са празним језгром, онда је реч о спаривању величине  $k$ . Зато што никоја два скупа од  $k$  његових латица немају пресек, односно немају заједнички врх.

### III ЗАДАЦИ

Уколико је у језгру један елемент, на пример чвор  $v$ , онда је реч о звезди величине  $k$ . Зато што је чвор  $v$  заједнички за све скупове. Из претпоставке задатка знамо да је сваки скуп кардиналности два. Закључујемо да језгро не може да садржи два елемента, јер би у том случају латице биле празне.  $\square$

4. Нека је  $n - k + 1 < s \leq n$ . Нека је  $\mathcal{F}$  фамилија  $s$ -чланих подскупова  $n$ -точланог скупа. Доказати да  $\mathcal{F}$  не садржи сунцокрет са  $k$  латица.

Решење: Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да  $\mathcal{F}$  садржи сунцокрет са  $k$  латица.

Сада пребројимо елементе у том сунцокрету. Нека језгро има  $y$  елемената. Онда сунцокрет има:

$$\underbrace{k}_{\text{Број латица}} \cdot \underbrace{(s - y)}_{\text{Величина латице}} + \underbrace{y}_{\substack{\text{Број} \\ \text{елемената} \\ \text{у језгру}}} = ks - ky + y = k \cdot \underbrace{s}_{\substack{\text{Користимо} \\ \text{да је} \\ s > n - k + 1}} - (k - 1)y > k(n - k + 1) - (k - 1)y$$

елемената.

Дакле,  $k(s - y) + y > nk - (k - 1)(k + y)$ .

Ово није могуће, јер је тај број већи од  $n$ :

$$nk - (k - 1)(k + y) \geq n \Leftrightarrow n(k - 1) \geq (k - 1)(k + y) \Leftrightarrow n \geq k + y.$$

Неједнакост  $n \geq k + y$  је испуњена јер латице морају имати најмање по један елемент.  $\square$

Сада ћемо покушати наћи хиперграф на скупу  $[n]$  тако да ниједна хипергрена није подскуп друге хипергрене. Ако две хипергрене хиперграфа имају особину да ниједна није подскуп друге, онда такав пар хипергрена зовемо **неупоредиве хипергрене**. Дакле, на скупу  $[n]$  тражимо хиперграф са неупоредивим хипергренама. Хиперграф са овом особином зове се Шпернеров хиперграф.

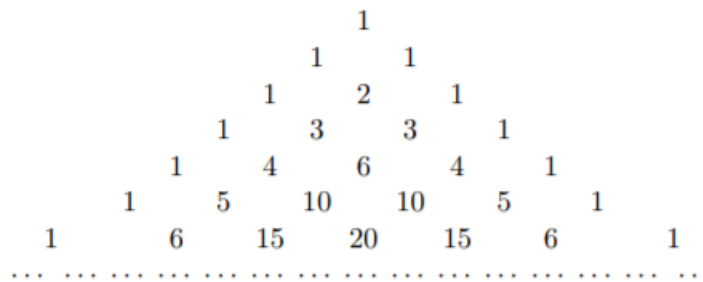
Једна идеја је да узмемо хиперграф  $\mathcal{F}$  такав да су све хипергрене исте кардиналности, на пример нека су кардиналности  $k$ . Дакле, хиперграф  $\mathcal{F}$  на скупу  $[n]$  је фамилија  $k$ -точланих подскупова скупа  $[n]$ . Тиме смо се осигурали да у  $\mathcal{F}$  ниједан скуп није подскуп другог. Величина овог хиперграфа је  $\binom{n}{k}$ , тј.  $|\mathcal{F}| = \binom{n}{k}$ .

У којем случају ће Шпернеров хиперграф имати највише елемената? Заправо, нас занима које  $k$  даје највећи такав хиперграф. Овај проблем ћемо решити тако што ћемо наћи вредност  $k$  за коју је биномни коефицијент  $\binom{n}{k}$  максималан.

**Лема 5.** Нека је  $n$  било који фиксиран позитиван цео број. Тада је биномни коефицијент  $\binom{n}{k}$  максималан ако је  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

*(Напомена 6. Ако је  $\alpha$  реалан број, онда  $\lfloor \alpha \rfloor$  означава највећи цео број који није већи од  $\alpha$ .)*

Леп начин да се биномни коефицијенти запишу је помоћу бесконачне троугаоне таблице. Та таблица се назива Паскалов троугао. На „ивицама“ тог троугла се налазе јединице које одговарају биномним коефицијентима  $\binom{n}{0}$  и  $\binom{n}{n}$ , за све  $n \in \mathbb{N}_0$ . Број који је у „унутрашњости“ троугла“ добија се сабирањем два броја који су лево и десно изнад њега. На слици 12. је приказан Паскалов троугао.



Слика 12. Паскалов троугао

Применом математичке индукције и помоћу особине биномних коефицијента  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ , за све  $n \geq k \geq 1$ , закључујемо да бројеви у  $(n+1)$ -ој врсти формирају низ биномних коефицијената  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ .

Посматрајући Паскалов троугао можемо уочити да низ бројева у свакој врсти Паскаловог троугла прво расте до „средине“ те врсте, а затим опада. Та особина коначног низа зове се унимодалност.

Доказ леме 5. Доказаћемо јаче тврђење: Низ биномних коефицијената  $\binom{n}{k}$  се повећава до средњег члана, а онда се смањује. Другим речима, показаћемо да

1.  $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$  ако је  $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ ;
2.  $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{k+1}$  ако је  $k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .

Посматрамо суседне биномне коефицијенте  $\binom{n}{k+1}$  и  $\binom{n}{k}$ . Количник тих биномних коефицијената је

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}}{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Тај количник је  $\frac{n-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow n-k > k+1 \Leftrightarrow n-1 > 2k \Leftrightarrow k < \frac{n-1}{2}$ .

Дакле, добијамо да биномни коефицијенти расту док је  $k < \frac{n-1}{2}$ .

Слично се показује да ће биномни коефицијенти опадати за  $k > \frac{n-1}{2}$ .  $\square$

На основу леме 5. закључујемо да ако хиперграф  $\mathcal{F}$  на скупу  $[n]$  има све хиперране величине  $k$ , онда се за  $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  добија највећи хиперграф. Дакле у том случају величина тог хиперграфа је  $\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ , тј.  $|\mathcal{F}| = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ . Пошто овај хиперграф  $\mathcal{F}$  има све хиперране величине  $k$ , онда је он и  $k$ -униформан. Шта можемо рећи о величини хиперграфа без захтева да је  $k$ -униформан? Одговор следи након дефиниције.

**Дефиниција 11.** Шпернерова фамилија скупова  $\mathcal{A}$  је фамилија скупова таква да ниједан скуп није подскуп другог, тј. ако за све скупове  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $A \neq B$  важи  $A \not\subset B$  и  $B \not\subset A$ .

Друго име за Шпернерову фамилију скупова је антиланац.

Другим речима, шта можемо рећи о максималној величини Шпернерове фамилије скупова?

**Пример 3.** Фамилија једночланих скупова, тј.  $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$  је Шпернерова фамилија величине  $|\mathcal{F}| = \binom{n}{1} = n$ .

Следећи резултат који наводимо је један од првих теорема у екстремалној теорији коначних скупова. Многи сматрају да је то полазна тачка екстремалне теорије скупова. Реч је о Шпернеровој теорему, коју је 1928. године дао немачки математичар Емануел Шпернер. Теорема говори о максималној величини Шпернерове фамилије скупова.

**Теорема 5. (Шпернерова теорема)** Нека је  $\mathcal{A}$  Шпернерова фамилија подскупова  $n$ -точланог скупа. Тада је  $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

Доказ. Са  $X$  означимо  $n$ -точлан скуп. Нека је  $A \in \mathcal{A}$  произвољан скуп из Шпернерове фамилије  $\mathcal{A}$ .

У доказу ћемо користити методу двоструко бројање.

Бројимо колико има пермутација  $\pi \in S_n$  ( $S_n$  је група пермутација на  $n$ -точланом скупу) тако да пермутација  $\pi$  почиње елементима из скупа  $A \in \mathcal{A}$  у неком распореду, а затим наставља са преосталим елементима из скупа  $X \setminus A$  у неком распореду.

Пример 4. Нека је  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Нека је  $\pi = 24513$  пермутација скупа  $X$ .

Скуп  $B = \{1, 2, 4, 5\}$  одговара датој пермутацији  $\pi$ , јер пермутација  $\pi = 24513$  почиње елементима из тог скупа у неком распореду.

Скуп  $C = \{4, 5\}$  не одговара датој пермутацији  $\pi$ , зато што пермутација почиње са 2 који није елемент скупа  $C$ .

Битно је напоменути да ће се то десити за само један скуп из  $\mathcal{A}$  за било коју пермутацију  $\pi$ . Зато што је  $\mathcal{A}$  Шпернерова фамилија, па ниједан скуп из  $\mathcal{A}$  није подскуп другог.

Нека је скуп  $A \in \mathcal{A}$  кардиналности  $k$ , тј.  $|A| = k$  тако да пермутација  $\pi$  почиње елементима из тог скупа. Тада постоји  $k!$  начина да се распореде елементи скупа  $A$  у пермутацији  $\pi$  и постоји  $(n - k)!$  начина да се распореде преостали елементи у пермутацији  $\pi$ . Дакле, укупно постоји  $k! \cdot (n - k)!$  начина да се распореде елементи у пермутацији  $\pi$ .

Ако са  $a_k$  означимо број скупова из  $\mathcal{A}$  који имају  $k$  елемената, онда је број пермутација које почињу скупом величине  $k$  једнак  $a_k \cdot k! \cdot (n - k)!$ . Сумирајући преко свих  $k$ , где  $1 \leq k \leq n$ , добија се број свих пермутација скупа  $X$  које имају почетни скуп из фамилије  $\mathcal{A}$ . Дакле, добија се

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot k! \cdot (n - k)!.$$

Ово сигурно није веће од броја свих пермутација  $n$ -точланог скупа. Број пермутација  $n$ -точланог скупа је  $n!$ .

Према томе, важи да је

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot k! \cdot (n - k)! \leq n!.$$

Горњу неједнакост поделимо са  $n!$  и добијамо да је

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Према леми 5. имамо да је  $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  за свако  $k$ , па је  $\frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \frac{1}{\binom{n}{k}}$ .

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

Дакле,  $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq 1$ .

Приметимо да  $\frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$  не зависи од  $k$ , па тај чинилац можемо извући испред суме.

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

С обзиром да је  $\sum_{k=1}^n a_k = |\mathcal{A}|$ , добијамо да је  $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .  $\square$

Које фамилије постижу границу  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  из Шпернерове теореме?

Ако је  **$n$  парно**, тада границу задовољава фамилија подскупова  $n$ -точланог скупа који су кардиналности  $\frac{n}{2}$ .

Ако је  **$n$  непарно**, онда скуп свих  $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ -чланих подскупова  $n$ -точланог скупа задовољава границу, као и скуп свих  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ -чланих подскупова  $n$ -точланог скупа.

Претходна теорема је инспирисала многе у проучавању комбинаторике коначних скупова. Следећи резултат који наводимо је познат као LYM неједнакост. Назив је добила по инцијалима Lubell, Meshalkin и Yamamoto, који су дошли до истог резултата независно један од другог.

**Теорема 6. (LYM неједнакост)** Нека је  $\mathcal{A}$  Шпернерова фамилија подскупова  $n$ -точланог скупа  $X$ . Тада је  $\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1$ .

Приметимо да Шпернерова теорема следи из LYM неједнакости:

Пошто важи  $\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ , онда добијамо да је

$$|\mathcal{A}| \cdot \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} = \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

Доказ. Постоје различити докази LYM неједнакости. Један од доказа наводимо у наставку.

Сваком подскупу  $A \subseteq X$  придружимо пермутацију  $n$ -точланог скупа  $X$  и пребројимо колико их има. Нека је  $|A| = a$ .

За  $a$ -точлани скуп  $A$  кажемо да пермутација елемената  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из скупа  $X$  садржи скуп  $A$  ако је  $\{x_1, x_2, \dots, x_a\} = A$ .

Приметимо да је скуп  $A$  садржан у тачно  $a! \cdot (n-a)!$  пермутација. Зато што прво пермутујемо елементе скупа  $A$  и за то имамо  $a!$  могућности, а затим пермутујемо елементе скупа  $X \setminus A$  и за то имамо  $(n-a)!$  могућности. Пошто у  $\mathcal{A}$  ниједан скуп није подскуп другог, онда свака од  $n!$  пермутација садржи највише један скуп  $A \in \mathcal{A}$ . Према томе, важи

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} a! \cdot (n-a)! \leq n!.$$

Добијену неједнакост поделимо са  $n!$  и добијамо

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{a! \cdot (n-a)!}{n!} \leq 1,$$

односно

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} = \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{a}^{-1} \leq 1,$$

што смо и требали доказати.  $\square$

Један од битних резултата у екстремалној комбинаторици је теорема Беле Болобаша. Та теорема имплицира LYM неједнакост, а LYM неједнакост имлицира Шпернерову теорему.

**Теорема 7. (Болобаш)** Нека су  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и  $B_1, B_2, \dots, B_m$  подскупови неког скупа  $X$ . Ако важи:

$$(1) A_i \cap B_j \neq \emptyset \text{ за све } i \neq j \text{ где } i, j \in [m];$$

$$(2) A_i \cap B_i = \emptyset \text{ за све } i \in [m],$$

онда је  $\sum_{i=1}^m \binom{a_i+b_i}{a_i}^{-1} \leq 1$ , где  $a_i = |A_i|$ ,  $b_i = |B_i|$ .

**Напомена 7.** Услов (1)  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  за све  $i \neq j$  не може бити ослабљен на  $i < j$ , у супротном имамо следеће контрапримере:

- За  $m = 2$ ,  $A_1 = B_2 = \{1\}$  и  $A_2 = B_1 = \emptyset$  добијамо да је

$$\sum_{i=1}^2 \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} = 2 > 1.$$

- За  $m = 3$ ,  $A_1 = B_2 = \{1\}$ ,  $A_2 = A_3 = B_1 = \{3\}$  и  $B_3 = \{1, 3\}$  имамо да је

$$\sum_{i=1}^3 \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1.$$

Пре него што пређемо на доказ теореме докажимо да теорема 7. имплицира LYM неједнакост.

Нека  $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$  задовољава услов  $A \not\subseteq B$  и  $B \not\subseteq A$  за било који  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $A \neq B$ .

Нека  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  и  $\mathcal{F}' = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  где  $B_i = [n] \setminus A_i$ . Сада проверимо да ли  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и  $B_1, B_2, \dots, B_m$  задовољају услов (1) и (2).

$A_i \cap B_j = A_i \cap ([n] \setminus A_j) = A_i \cap \bar{A}_j \neq \emptyset$  за све  $i, j \in [m]$ ,  $i \neq j$ . Дакле услов (1) важи.

$A_i \cap B_i = A_i \cap ([n] \setminus A_i) = A_i \cap \bar{A}_i = \emptyset$  за све  $i \in [m]$ . Дакле услов (2) важи.

Према теорему 7. важи

$$1 \geq \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} = \sum_{i=1}^m \binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}^{-1} = \sum_{i=1}^m \binom{n}{|A_i|}^{-1} = \sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1}.$$

Доказ теореме 7. Нека скупови  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и  $B_1, B_2, \dots, B_m$  исупуњавају услове из теореме.

Нека је  $X = \bigcup_{i=1}^m (A_i \cup B_i)$  и нека је  $|X| = n$ . Математичком индукцијом по  $n$  доказујемо да важи  $\sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1$ .

(БИ) За  $n = 1$  је јасно. Имамо да је  $|X| = 1$ .

Узмимо да је  $A_1 = \{1\}$  и  $B_1 = \emptyset$ , па је  $\sum_{i=1}^1 \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} = \binom{|A_1| + |B_1|}{|A_1|}^{-1} = 1 \leq 1$ .

(ИХ) Претпоставимо да тврђење важи за све вредности мање од  $n$ .

(ИК) Доказујемо да тврђење важи за  $n$ .

Нека је  $I_x = \{i \in [m] : x \notin A_i\}$  за било које  $x \in X$ . Дефинишемо  $\mathcal{F}_x = \{A_i : i \in I_x\} \cup \{B_i \setminus \{x\} : i \in I_x\}$ . Пошто сваки скуп из  $\mathcal{F}_x$  не садржи  $x$ , добијамо да је

$$|\mathcal{F}_x| = |\cup_{S \in \mathcal{F}_x} S| \leq |X \setminus \{x\}| \leq n - 1.$$

Фамилија  $\mathcal{F}_x$  је кардиналности највише  $n - 1$ . Према (ИХ) добијамо да важи

$$\sum_{i \in I_x} \binom{|A_i| + |B_i \setminus \{x\}|}{|A_i|}^{-1} \leq 1$$

за свако  $x \in X$ .

Сумирамо горњу неједнакост за све  $x \in X$  и добијамо да је

$$\sum_{x \in X} \sum_{i \in I_x} \binom{|A_i| + |B_i \setminus \{x\}|}{|A_i|}^{-1} \leq n. \quad (*)$$

Свако  $i \in [m]$  доприноси или 0 или  $\binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1}$  или  $\binom{a_i + b_i - 1}{a_i}^{-1}$  за свако  $x$ .

- Израз  $\binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1}$  се јавља када је  $i \in I_x$  и  $x \notin B_i$ , тј.  $x \notin A_i \cup B_i$  се јавља тачно  $(n - a_i - b_i)$  пута.

- Израз  $\binom{a_i + b_i - 1}{a_i}^{-1}$  се јавља када је  $i \in I_x$  и  $x \in B_i$ , тј.  $x \in B_i$  се јавља тачно  $b_i$  пута.

Према томе, (\*) је еквивалентна са

$$\sum_{i=1}^m \left( (n - a_i - b_i) \cdot \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} + b_i \cdot \binom{a_i + b_i - 1}{a_i}^{-1} \right) \leq n.$$

Пошто је  $\binom{a_i + b_i - 1}{a_i}^{-1} = \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \cdot \frac{a_i + b_i}{b_i}$ , и након замене у горњој неједнакости добијамо

$$n \cdot \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq n.$$

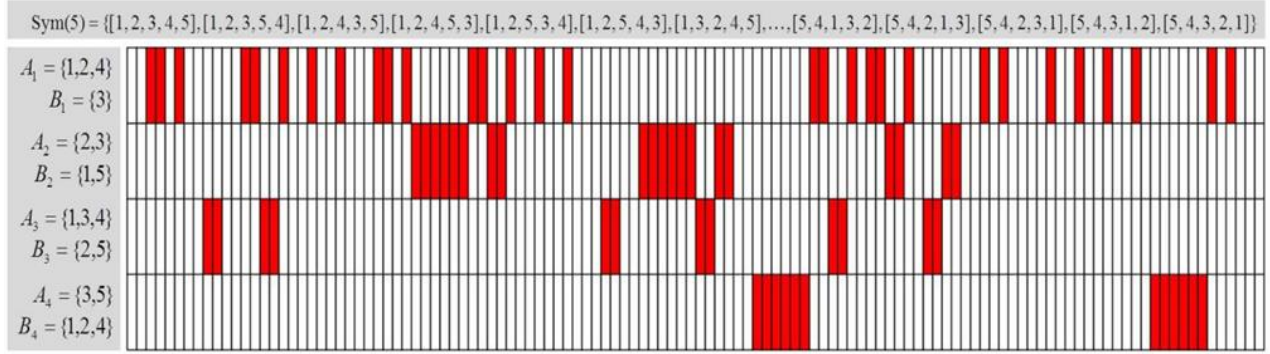
Дакле  $\sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq 1$ , што смо и требали доказати.  $\square$

Други доказа теореме 7. Користимо методу двоструко бројање.

Наводимо кратак пример као илустрацију доказа. Посматрамо скуп  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  и направимо матрицу димензије  $4 \times 5!$ .

Нека су редови матрице означени са паровима скупова  $(A_i, B_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Нека су колоне матрице означене са пермутацијама скупа  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Укупно има  $5! = 120$  колона.

#### IV ШПЕРНЕРОВА ТЕОРЕМА



Слика 13. Ако су у пермутацији сви елементи скупа  $A_i$  испред свих елемената скупа  $B_i$ , онда су та места обојена црвеном бојом.

На  $ij$ -то место матрице уносимо:

- **1** ако су у  $j$ -тој пермутацији сви елементи скупа  $A_i$  испред свих елемената скупа  $B_i$  и то место у матрици представимо црвеном бојом;
- **0** у свим осталим случајевима.

На пример, трећи унос у првом реду је црвене боје јер имамо скупове  $A_1 = \{1, 2, 4\}$ ,  $B_1 = \{3\}$  и трећа пермутација је 12435 у којој број 3 долази тек после бројева 1, 2, 4.

Попуњена матрица је приказана на слици 13.

Дакле, постоји тачно  $\binom{n}{a_i+b_i} \cdot a_i! \cdot b_i! \cdot (n - (a_i + b_i))! = n! \cdot \binom{a_i+b_i}{a_i}^{-1}$  пермутација које су обојене црвеном бојом у  $i$ -том реду. Пермутација може бити обојена црвеном бојом у највише једном реду, јер ако пермутација  $\pi$  пермутује све елементе из  $A_i$  испред елемената из  $B_i$  и све елементе из  $A_j$  испред елемената из  $B_j$ , онда је  $A_i \cap B_j = \emptyset$  или  $A_j \cap B_i = \emptyset$  кад год је  $i \neq j$ .

Добијамо да је  $\sum n! \cdot \binom{a_i+b_i}{a_i}^{-1} \leq n!$ , одакле следи тражена неједнакост.  $\square$

**Теорема 8. (Теорема Болобаш - специјалан случај)** Нека су  $A_1, A_2, \dots, A_m$   $a$ -точлани скупови и  $B_1, B_2, \dots, B_m$   $b$ -точлани скупови. Нека је  $A_i \cap B_j = \emptyset$  ако и само ако је  $i = j$ . Тада важи  $m \leq \binom{a+b}{a}$ .

Доказ: Ставимо  $a_i = a$  и  $b_i = b$  за све  $i \in [m]$ . Па према претходној теорему добијамо да је

$$1 \geq \sum_{i=1}^m \binom{a_i+b_i}{a_i}^{-1} = \sum_{i=1}^m \binom{a+b}{a}^{-1}.$$

Пошто фактор  $\binom{a+b}{a}^{-1}$  не зависи од суме, онда га можемо извући испред суме.

$$\binom{a+b}{a}^{-1} \sum_{i=1}^m 1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \binom{a+b}{a}. \square$$

## 1. Да ли је

(а)  $\{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ;

(б)  $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ;

**Шпернерова фамилија?**

Решење: (а) Није, јер је  $\{a\} \subseteq \{a, c\}$ .

(б) Јесте, јер ниједан скуп није садржан у другом.

## 2. Показати да највећа Шпернерова фамилија подскупова скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ која садржи скупове $\{1, 2\}$ и $\{3, 4, 5\}$ има осам елемената.

Решење: Сваки следећи скуп мора да садржи најмање један од елемената 1 или 2 (у супротном би скуп био садржан у  $\{3, 4, 5\}$ ). Такође, сваки следећи скуп не може да садржи и 1 и 2 јер онда би тај скуп садржао  $\{1, 2\}$ . Слично горњем разматрању, тражени скуп мора да садржи најмање један од елемената 3, 4, 5 али не може да садржи све.

Дакле, да бисмо добили такав скуп морамо укључити један од скупова  $\{1\}$  и  $\{2\}$ , и један од шест подскупова скупа  $\{3, 4, 5\}$ :  $\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$  и узимамо њихову унију. То даје  $2 \cdot 6 = 12$  могућих скупова.

Међутим, не можемо узети све те скупове. Наиме, ако узмемо  $\{1, 3\}$  онда скупови  $\{1, 3, 4\}$  и  $\{1, 3, 5\}$  нису дозвољени зато што садрже  $\{1, 3\}$ .

Заправо, можемо узети највише шест од тих 12 могућих скупова. Те скупове распоредимо у парове скупова који садрже 1:  $(\{1, 3\}, \{1, 3, 4\}), (\{1, 4\}, \{1, 4, 5\}), (\{1, 5\}, \{1, 3, 5\})$  и слично у парове скупова који садрже 2. Па онда можемо узети највише један од сваког пара. Дакле, не можемо имати више од  $2 + 6 = 8$  скупова.

Шпернерову фамилију са осам скупова можемо добити на следећи начин:

- Комбиновањем 1 са једночланим подскуповима од  $\{3, 4, 5\}$  и комбиновањем 2 са двочланим подскуповима од  $\{3, 4, 5\}$ .

Дакле, Шпернерова фамилија која има 8 елемената и која садржи скупове  $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$  је

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}\}.$$

## 3. У граду с $n$ становника имамо коначан број клубова. Сваки становник може бити члан неколико клубова или ниједног од њих. Ако ниједан клуб не садржи све чланове неког другог клуба, који је максималан број клубова у том граду?

Решење: Користимо Шпернерову теорему. У граду с  $n$  становника највише може бити  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  клубова таквих да ниједан клуб не садржи све чланове неког другог клуба.

4. Нека је  $\mathcal{F}$  Шпернерова фамилија поскупова из  $2^X, |X| = n$  тако да су скупови из  $\mathcal{F}$  кардиналности највише  $k, k \leq \frac{n}{2}$ . Доказати да је  $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}$ .

Решење: За сваки скуп  $A \in \mathcal{F}$  важи  $\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{k}$ .

Применом LYM неједнакости добијамо

$$|\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{k}^{-1} \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1 \Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k}. \square$$

5. Нека је  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . У скупу чији су елементи подскупови скупа  $X$  одредити један антиланац за који се постиже граница у неједнакости Шпернерове теореме.

Решење: Граница у неједнакости Шпернерове теореме, односно једнакост се постиже ако су сви елементи из Шпернерове фамилије исте кардиналности.

Антиланац за који се постиже граница је скуп двочланих подскупова скупа  $X$ , тј.  $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ .

6. Нека су  $A_1, A_2, \dots, A_m$   $a$ -точлани скупови и  $B_1, B_2, \dots, B_m$   $b$ -точлани скупови такви да је  $|A_i \cap B_i| = t$  за све  $i \in [m]$  и  $|A_i \cap B_j| > t$  за све  $i \neq j$ , где  $i, j \in [m]$ . Тада је

$$m \leq \binom{a+b-t}{a-t}.$$

Решење: Нека је  $A_i' = A_i \setminus (A_i \cap B_i)$  за све  $i \in [m]$ . Тада је  $|A_i'| = |A_i| - |A_i \cap B_i| = a - t$ .

Лако се проверава да скупови  $A_1', \dots, A_m'$  и  $B_1, B_2, \dots, B_m$  задовољавају услове из теореме Болобаш – специјални случај. Па применом те теореме добијамо да је  $m \leq \binom{(a-t)+b}{a-t}$ , што смо и требали доказати.  $\square$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bona Miklos, Introduction to Enumerative Combinatorics, The McGraw-Hill Companies, New York, 2007.
- [2] Gerbner Dániel and Patkós Balázs, Extremal Finite Set Theory, CRC Press Taylor & Francis Group, 2019.
- [3] Jukna Stasys, Extremal combinatorics with applications in computer science, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [4] Peter J. Cameron, <http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/notes/comb.pdf>
- [5] Madeline V. Brandt, <https://math.berkeley.edu/~brandtm/research/thesis.pdf>
- [6] Марко Ђукановић и Дејан Радић,  
[http://www.imvibl.org/dmbl/meso/mat\\_kol\\_22\\_1\\_2016/mat\\_kol\\_22\\_1\\_2016\\_61\\_69.pdf](http://www.imvibl.org/dmbl/meso/mat_kol_22_1_2016/mat_kol_22_1_2016_61_69.pdf)
- [7] <https://www.theoremoftheday.org/Theorems.html>
- [8] Аглић Аљановић Андреа, Екстремална комбинаторика,  
<https://manualzz.com/doc/8671048/ekstremalna-kombinatorika-2014.-2015.--901-71-kib->
- [9] Walzer Stefan, <https://www.math.kit.edu/iag6/lehre/combinatorics2017s/media/script.pdf>

## БИОГРАФИЈА

Дајана Шушљик рођена је 11.11.1996. године у Бијељини. У Бијељини завршила је основну школу „Кнез Иво од Семберије“ 2011. године и општи смер гимназије „Филип Вишњић“ 2015. године. По завршетку средње школе уписује основне академске студије математике на Природном-математичком факултету у Новом Саду. Дипломирала је у јулу 2020. године и стекла звање Дипломирани професор математике. Образовање наставила је на Математичком факултету у Београду, где у октобру 2020. године уписује мастер академске студије, модул Теоријска математика и примена. Закључно са јулом 2021. године исполагала је све испите на мастер студијама и тиме стекла услов за одбрану мастер рада.

Од 2021. године, ради као професор математике у ЈУ Гимназија „Филип Вишњић“ у Бијељини.

*Београд, 2022.*

*Дајана Шушљик*