УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Никола Лелас

ИСТОВРЕМЕНО НЕАНУЛИРАЊЕ L-ФУНКЦИЈА КВАДРАТНИХ ТВИСТОВА ЕЛИПТИЧКЕ КРИВЕ И КВАДРАТНИХ ДИРИХЛЕОВИХ L-ФУНКЦИЈА НАД ФУНКЦИЈСКИМ ПОЉИМА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Nikola Lelas

SIMULTANEOUS NONVANISHING OF QUADRATIC TWISTS OF ELLIPTIC CURVE L-FUNCTIONS AND QUADRATIC DIRICHLET L-FUNCTIONS OVER FUNCTION FIELDS

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2022.

МЕНТОР

проф. др Горан Ђанковић, ванредни професор
Универзитет у Београду- Математички факултет

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

проф. др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду- Математички факултет

проф. др Горан Ђанковић, ванредни професор
Универзитет у Београду- Математички факултет

проф. др Марко Радовановић, ванредни професор
Универзитет у Београду- Математички факултет

проф. др Драган Станков, ванредни професор
Универзитет у Београду- Рударско-геолошки факултет факултет

Датум одбране: ______________________

Захвалница

Највећу захвалност за безрезервну подршку у свим аспектима свог живота дугујем својим родитељима. Свом ментору, проф. др Горану Ђанковићу, увек ћу бити захвалан на стрпљењу и разумевању које је испољавао током свих година наше сарадње. Сигуран сам да без његове посвећености и искрене жеље да ме упути у једну прелепу, али често и неприступачну област каква је теорија бројева, овај рад никад не би био написан. Дубоку захвалност дугујем проф. др Марку Радовановићу на преданом читању оригиналног текста, као и на бројним веома корисним коментарима и сугестијама које су значајно поправиле квалитет овог рада. На помоћи и ангажовању у комисији захвалан сам и проф др. Александру Липковском и проф. др Драгану Станкову. Последње, али никако најмање важно, моју искрену захвалност има и једна посебна Милица, у чијем стану у Бечу је написан велики део ове дисертације.

Наслов дисертације: Истовремено неанулирање L-функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима

Резиме: Предмет дисертације је проблем истовременог неанулирања L-функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових L-функција (и њихових извода) у централној тачки $s = \frac{1}{2}$, у ситуацији кад су ови објекти дефинисани над рационалним функцијским пољем над коначним пољем $\mathbb{F}_q$.

Сваком моничном полиному $D \in \mathbb{F}_q[t]$ одговара један квадратни Дирихлеов карактер χ_D. За такав карактер може се посматрати одговарајућа L-функција $L(s, \chi_D)$, као и квадратни твист $E \otimes \chi_D$ фиксиране елиптичке криве $E/\mathbb{F}_q(t)$, чија се L-функција означава са $L(s, E \otimes \chi_D)$.

У дисертацији је одређена доња граница броја полинома $D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}$ за које се $L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right)$ и $L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$, односно $L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right)$ и $L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$ истовремено не анулирају, при чему је $\mathcal{H}^*_{2g+1}$ скуп свих моничних полинома степена $2g+1$ над $\mathbb{F}_q$ који су узајмно прости са дискриминантом елиптичке криве E. У сврху добијања тих резултата изведене су асимптотске формуле за мешовите моменте

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$$
$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \varepsilon_E^-(D) L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$$

када $g \to \infty$, при чему, за свако $D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}$, $\varepsilon_E^-(D)$ узима вредност 0, односно 1, у зависности од тога да ли је знак функционалне једначине за $L\left(s, E \otimes \chi_D\right)$ једнак 1, односно -1.

Поред тога, један део дисертације је везан за хипотезе о количницима L-функција, које представљају хипотезе о асимптотском понашању количника два производа L-функција из неке фамилије. У класичном контексту поља рационалних бројева, Конри, Фармер и Цирнбауер [27] су демострирали хеуристичке аргументе помоћу којих се такве хипотезе могу дати за различите значајне фамилије L-функција. За фамилију квадратних Дирихлеових L-функција хипотеза о количницима гласи

$$\sum_{0<d\leq X} \frac{\prod_{k=1}^{K} L\left(1/2 + \alpha_k, \chi_d\right)}{\prod_{q=1}^{Q} L\left(1/2 + \gamma_q, \chi_d\right)} = \sum_{0<d\leq X} \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^K} \left(\frac{d}{\pi}\right)^{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2}(\epsilon_k \alpha_k - \alpha_k)}$$
$$\times \prod_{k=1}^{K} g_+\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_k - \epsilon_k \alpha_k}{2}\right) Y_S A(\epsilon_1 \alpha_1, \ldots, \epsilon_K \alpha_K; \gamma) + O\left(X^{1/2+\varepsilon}\right),$$

где су K и Q природни бројеви, $\alpha_k, 1 \leq k \leq K$ и $\beta_m, 1 \leq m \leq Q$ комплексни бројеви

чији су реални делови позитивни, $\varepsilon > 0$ произвољан реалан број,

$$g_+(s) = \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})},$$
$$Y_S = Y_S(\alpha, \gamma) = \frac{\prod_{j \le k \le K} \zeta(1 + \alpha_j + \alpha_k) \prod_{q < r \le Q} \zeta(1 + \gamma_q + \gamma_r)}{\prod_{k=1}^{K} \prod_{q=1}^{Q} \zeta(1 + \alpha_k + \gamma_q)}$$

и $A(\alpha, \gamma)$ је неки експлицитно описан Ојлеров производ који зависи од $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_Q)$, при чему су $\zeta(s)$ и $\Gamma(s)$ редом ознаке за Риманову зета, односно гама-функцију. У дисертацији је приказан доказ варијације хипотезе о количницима за случај количника L-функције квадратног твиста елиптичке криве и квадратне Дирихлеове L-функције над $\mathbb{F}_q(t)$, односно извођење асимптотске формуле за

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \frac{L\left(E \otimes \chi_D, 1/2 + \alpha\right)}{L\left(\chi_D, 1/2 + \beta\right)}$$

када $g \to \infty$.

Кључне речи: Квадратне Дирихлеове L-фунцкије, Елиптичке криве, Квадратни твистови елиптичких кривих, Рационална функцијска поља, Изводи L-функција, Неанулирање L-функција, Мешовити моменти L-функција.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Теорија бројева

AMS класификација: 11M38, 11G20, 11H52, 11R58.

Dissertation title: Simultaneous nonvanishing of quadratic twists of elliptic curve L-functions and quadratic Dirichlet L-functions over function fields

Abstract: The subject of the dissertation is the problem of simultaneous nonvanishing of quadratic twists of elliptic curve L-functions and quadratic Dirichlet L-functions (and their derivatives) at the centar point $s = \frac{1}{2}$, in the situation when these objects are defined over the rational function field over finite field $\mathbb{F}_q$.

For each monic polynomial $D \in \mathbb{F}_q[t]$, there is a corresponding quadratic Dirichlet character χ_D. Associated to such character, there is the corresponding Dirichlet L-function $L(s, \chi_D)$, as well as the quadratic twist $E \otimes \chi_D$ of a fixed elliptic curve $E/\mathbb{F}_q(t)$, whose L-function is denoted by $L(s, E \otimes \chi_D)$.

A lower bound for the number of polynomials $D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}$ such that $L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right)$ and $L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$, respectively $L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right)$ and $L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$ simultaneously not vanish is determined in the dissertation, where $\mathcal{H}^*_{2g+1}$ is the set of monic polynomials of degree $2g + 1$ over $\mathbb{F}_q$ that are coprime to the discriminant of the elliptic curve E. For purpose of obtaining these results, asymptotic formulas for the mixed moments

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$$

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \varepsilon^-_E(D) L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$$

are derived when $g \to \infty$, where, for each $D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}$, $\varepsilon^-_E(D)$ takes value 0 or 1 depending on whether the sign of the functional equation for $L(s, E \otimes \chi_D)$ is equal to 1 or -1.

Besides this, one part of the dissertation is connected to the hypotheses about the ratios of L-functions, which are hypotheses about the asymptotic behaviour of quotients of two products of L-functions in some family. In the classic case of the field of rational numbers, Conrey, Farmer and Zirnbauer [27] demonstrated heuristic arguments for obtaining such hypotheses for various important families of L-functions. The ratios conjecture for the family of quadratic Dirichlet L-functions is

$$\sum_{0<d\le X} \frac{\prod_{k=1}^{K} L\left(1/2 + \alpha_k, \chi_d\right)}{\prod_{q=1}^{Q} L\left(1/2 + \gamma_q, \chi_d\right)} = \sum_{0<d\le X} \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^K} \left(\frac{d}{\pi}\right)^{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2}(\epsilon_k\alpha_k - \alpha_k)}$$

$$\times \prod_{k=1}^{K} g_+\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_k - \epsilon_k\alpha_k}{2}\right) Y_S A(\epsilon_1\alpha_1, \ldots, \epsilon_K\alpha_K; \gamma) + O\left(X^{1/2+\varepsilon}\right),$$

where K and Q are positive integers, $\alpha_k, 1 \le k \le K$ and $\beta_m, 1 \le m \le Q$ are complex

numbers with positive real parts, $\varepsilon > 0$ is an arbitrary real number,

$$g_+(s) = \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})},$$
$$Y_S = Y_S(\alpha,\gamma) = \frac{\prod_{j\leq k\leq K}\zeta(1+\alpha_j+\alpha_k)\prod_{q<r\leq Q}\zeta(1+\gamma_q+\gamma_r)}{\prod_{k=1}^{K}\prod_{q=1}^{Q}\zeta(1+\alpha_k+\gamma_q)}$$

and $A(\alpha,\gamma)$ is some explicit Euler product depending on $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_K)$ and $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_Q)$, where $\zeta(s)$ and $\Gamma(s)$ stand for the Riemann zeta and the gamma function, respectively. A proof of variant of the ratios conjecture for the case of quotient of L-function of quadratic twist of elliptic curve and quadratic Dirichlet L-function i.e. a derivation of the asymptotic formula for

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|}\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\frac{L\left(E\otimes\chi_D, 1/2+\alpha\right)}{L\left(\chi_D, 1/2+\beta\right)}$$

as $g \longrightarrow \infty$ is demonstrated in the dissertation.

Keywords: Quadratic Dirichlet L-functions, Elliptic curves, Quadratic twists of elliptic curves, Rational function fields, Derivatives of L-functions, Nonvanishing of L-functions, Mixed moments of L-functions.

Research area: Mathematics

Research sub-area: Number theory

AMS Classification: 11M38, 11G20, 11H52, 11R58.

Садржај

Увод

Централна вредност неке L-функције представља вредност те функције у тачки симетрије њој одговарајуће функционалне једначине. Ове централне вредности су један од најважнијих објеката проучавања у теорији бројева. Генерално се очекује да, када разлог за анулирање није тривијално индукован самим обликом функционалне једначине, иза анулирања L-функције у централној тачки стоји неки дубог аритметички разлог. Стога испитивање (не)анулирања L-функција разних фамилија у централним тачкама представља један значајан и интересантан проблем.

Прва глава ове дисертације посвећена је приказивању неких класичних резултата из теорије L-функција. Конкретно, приказана је значајна веза те теорије са теоријом случајних матрица, као и различити модели за давање хипотеза о моментима L-функција у разним фамилијама. Поред тога, приказана је класична Човлина хипотеза о неанулирању Дирихлеових L-функција у централној тачки, као и хипотеза Берча и Свинертон-Дајера.

Друга глава се бави приказом основних објеката и конструкција везаних за аритметику над функцијским пољима. Управо ће објекти приказани у овој глави представљати основни контекст целокупног даљег излагања.

У трећој глави је дат приказ аритметичких особина елиптичких кривих над функцијским пољима. При томе се као најзначајније истичу конструкција квадратних твистова неке елиптичке криве, као и њима придружених L-функција. Технички резултати који су значајни у даљем излагању, попут извођења апроксимативних функционалних једначина за L-функције елиптичких кривих, су такође приказани.

Четврта глава је посвећена проблему одређивања момената L-функција над функцијским пољима. Приказани су познати резултати о моментима квадратних Дирихлеових и L-функција квадратних твистова елиптичких кривих.

У петој глави су приказани оригинални резултати израчунавања првог мешовитог момента за L-функције квадратних твистова елиптичких кривих (и њихових извода) и квадратних Дирихлеових L-функција. Додатно, добијени су и резултати о истовременом неанулирању поменутих L-функција.

Тематика шесте главе су хипотезе о količницима L-функција. Приказан је познати метод добијања тих хипотеза у контексту поља рационалних бројева, као и неки класични резултати који се на основу њих могу извести. Поред тога, дат је и приказ хипотезе о количницима квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима, заједно са познатим резултатом који доказује ту хипотезу у неким специјалним случајевима.

У седмој и последњој глави је дат приказ оригиналног резултата, што је доказ варијације хипотезе о количницима, за количник једне L-функције квадратног твиста фиксиране елиптичке криве и једне квадратне Дирихлеове L-функције.

ГЛАВА 1

Моменти и неанулирање L-функција

Разумевање вредности L-функција је један од класичних и најважнијих проблема аналитичке теорије бројева. Разлог томе лежи у чињеници да су те вредности повезане са многим значајним алгебарским, аритметичким и геометријским објектима. Наредни редови су посвећени илустровању неколико таквих веза.

Теорема о простим бројевима Године 1792, тада петнаестогодишњи Гаус је после преданог изучавања табела простих бројева дошао до хипотезе да за функцију $\pi(x)$ која броји просте бројеве $\leq x$ важи асимптотска формула

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty.$$

Ту хипотезу је касније (1849. године) профинио до облика

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x), \quad x \to \infty, \tag{1.1}$$

где је $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Валидност асимптотске формуле (1.1) доказали су Жак Адамар и Шарл-Жан де ла Вале Пусен 1896. године и управо је она данас позната као Теорема о простим бројевима. Њихови докази прате план који је оцртао Риман у свом чувеном мемоару ,,Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe'' из 1859. године. У сржи тог плана налази се показивање везе између расподеле простих бројева и расподеле нула Риманове зета функције, дефинисане са

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ова функција је иницијално дефинисана за $\Re(s) > 1$, али се може проширити до мероморфне функције на целој комплексној равни, при чему постоји само један прост пол у тачки $s = 1$ (управо то је, уз функционалну једначину за Риманову зета функцију, једино што је Риман доказао у свом мемоару). Теорема о простим бројевима је онда есенцијално последица чињенице да постоји (узак) регион лево од праве $\Re(s) = 1$ у коме се $\zeta(s)$ не анулира.

У поменутом мемоару Риман је дао и хипотезу да се све (нетривијалне) нуле функције $\zeta(s)$ налазе на правој $\Re(s) = 1/2$. Доказивање те хипотезе, познате под називом Риманова хипотеза, пружило би много бољи увид у природу расподеле простих бројева и представља једно од најважнијих отворених питања математике.

Прости бројеви у аритметичким прогресијама Дирихле [36] је за потребе свог рада на доказивању егзистенције бесконачно много простих бројева у аритметичким прогресијама увео L-функције у облику у ком се и оне данас користе. Конкретно, он је доказао да ако су a и $m \geq 2$ два узајамно проста цела броја, онда постоји бесконачно много простих бројева који се налазе у аритметичкој прогресији

$$n \equiv a \pmod{m}. \tag{1.2}$$

У сврху ,,детекције" аритметичке прогресије (1.2) Дирихле је увео објекте данас познате као Дирихлеови карактери. Они представљају периодична проширења карактера $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ групе $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ на цео скуп целих бројева $\mathbb{Z}$, при чему је додатно $\chi(n) = 0$ за све целе бројеве n који нису узајамно прости са m. Сваком Дирихлеовом карактеру χ Дирихле је онда придружио одговарајућу L-функцију, данас познату као Дирихлеову L-функцију, дефинисану са

$$L(\sigma, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^\sigma}. \tag{1.3}$$

Битно је нагласити да је Дирихлеу било довољно да сматра да је променљива σ у дефиницији (1.3) реална и тада се може доказати да ред који дефинише $L(\sigma, \chi)$ конвергира за $\sigma > 0$ (управо је Риманова идеја да зета функцију посматра као функцију *комплексне* променљиве довела до револуционарног помака). Доказ теореме о простим бројевима у аритметичким прогресијама је онда директна последица чињенице да је $L(1, \chi) \neq 0$ за сваки нетривијалан Дирихлеов карактер χ.

Формула класног броја Дирихле [37] се бавио и проблемом класног броја квадратних поља бројева. Тај проблем вуче корене од Гауса и састоји се из неколико међусобно повезаних питања. Прво од њих је питање показивања да за класни број $h(D)$ квадратног поља бројева $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$, D-бесквадратан цео број, важи

$$h(D) \to \infty, \quad \text{када } D \to -\infty. \tag{1.4}$$

Уз то питање се онда природно намеће и питање одређивања свих $D < 0$ за које је $h(D) = k$ за неки фиксирани природни број k. При томе је најважнији случај $h(D) =$

1 (тзв. проблем класног броја 1), јер су управо њиме описана она (имагинарна) квадратна поља бројева чији су прстени целих главноидеалски домени. Гаус је дао и хипотезу да су за бесконачно много реалних квадратних поља бројева одговарајући прстени целих главноидеалски домени. Дакле, $h(D) = 1$ важи за бесконачно много бесквадратних целих бројева $D > 0$.

У свом раду [37], Дирихле је успео да повеже класни број $h(D)$ са вредношћу $L(1, \chi_D)$ Дирихлеове L-функције придружене квадратном карактеру χ_D. Сваки такав квадратни караткер χ_D је одређен Кронекеровим симболом

$$\chi_D(n) = \left(\frac{D}{n}\right), \quad \text{за све } n \in \mathbb{Z}.$$

У случају да је $D < 0$ поменута веза је изражена формулом

$$h(D) = \frac{\omega_D L(1, \chi_D)\sqrt{|D|}}{2\pi}, \tag{1.5}$$

где је

$$\omega_D = \begin{cases} 4, & \text{ако је } D = -1 \\ 6, & \text{ако је } D = -3 \\ 2, & \text{за остале негативне, бесквадратне } D \end{cases}$$

број инвертибилних елемената прстена целих квадратног поља бројева $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$. Формула (1.3) омогућава да се решење проблема класног броја за имагинарна квадратна поља бројева сведе на давање добре доње оцене за $L(1, \chi_D)$.

Ослањајући се на раније резултате Хекеа, Дјуринга и Мордела, године 1934. Хајлброн [53] је доказао хипотезу (1.4). Битно је нагласити да његов резултат није ефективан, што значи да се имплицитне константе које се појављују не могу израчунати. Због тога није могуће одредити границу после које не постоји ниједан цео број $D < 0$ такав да је $h(D) = 1$, па се Хајлбронов резултат не може искористити за решавање проблема класног броја 1. Тај проблем решен је тек 1966. године, независно од стране Старка и Бејкера. Они су доказали да за $D < 0$ важи $h(D) = 1$ ако и само ако је D један од бројева

$$-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.$$

Једна од карактеристика реалних квадратних поља бројева која их битно разликује од имагинарних је чињеница да њихови прстени целих имају доста компликованију структуру групе инвертибилних елемената. Конкретно, за свако реално квадратно поље бројева $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$, поменута група инвертибилних елемената се може представити у облику

$$\{\pm\varepsilon_D^n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

где је ε_D реалан број који се назива фундаменталном јединицом. Дирихлеова формула класног броја за реална квадратна поља бројева онда гласи

$$h(D) = \frac{L(1, \chi_D) \log \varepsilon_D}{\sqrt{D}}. \tag{1.6}$$

Појављивање фундаменталне јединице ε_D у формули (1.6) је оно што је чини непогодном за решавање проблема класног броја 1 за реална квадратна поља бројева. Наиме, тешко је контролистати како се фактор $\log \varepsilon_D$ мења са променом D и управо то је један од разлога што је проблем класног броја 1 за реална квадратна поља бројева потпуно отворен и данас.

Идеје Дирихлеа су значајно проширили, прво Кумер [73] на циклотомична поља бројева, а затим и Дедекинд [32] на општа поља бројева. За произвољно поље бројева K, Дедекинд је са

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \neq 0} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \quad \Re(s) > 1 \tag{1.7}$$

дефинисао L-функцију, која је данас позната као Дедекиндова зета функција. При томе је сума у формули (1.7) по свим ненула идеалима прстена целих поља бројева K и $N(\mathfrak{a})$ је ознака за норму идеала $\mathfrak{a}$.

Хеке [52] је показао да Дедекиндова зета функција допушта аналитичко проширење до мероморфне функције и да задовољава функционалну једначину налик Римановој зета функцији. При томе, постоји тачно један прост пол у тачки $s = 1$ и резидуум у тој тачки је од нарочитог интереса. Његов опис познат је као аналитичка формула класног броја.

Теорема. Нека је K поље бројева са m реалних и n комплексних места. Тада је

$$\operatorname{res}_{s=1} \zeta_K(s) = \frac{2^m (2\pi)^n h_K R_K}{\omega_K |D_K|^{1/2}},$$

где је h_K класни број, R_K регулатор, ω_K број корена из јединице и D_K дискриминантна поља бројева K.

Претходна формула класног бројева показује како су многе значајне (алгебарске) особине поља бројева уткане у одговарајућу Дедекиндова зета функцију. Додатно, користећи чињеницу да за Дедекиндову зета функцију квадратног поља бројева $K = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ важи

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi_D),$$

из ње директно следе и класичне Дирихлеове формуле (1.5) и (1.6).

1.1. Моменти Риманове зета функције

Један приступ изучавању L-функција и њихових вредности је преко рачунања одговарајућих момената. Ако је $k > 0$ позитиван реалан број, онда се $2k$-ти момент

Риманове зета функција $\zeta(s)$ дефинише са

$$M_k(T) = \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt.$$

Харди и Литлвуд [50] су 1918. године доказали да је при $T \to \infty$ испуњено

$$M_1(T) \sim T \log T,$$

док је Ингам [56] 1926. године доказао

$$M_2(T) \sim \frac{1}{2\pi^2} T (\log T)^4.$$

Питања асимптотике момената Риманове зета функције за целе $k \geq 3$ су и данас потпуно отворена и узрок тежине њихових израчунавања заслужује објашњење.

Рачунање произвољног момента започиње се записивањем зета функције у облику ,,апроксимативе функционалне једначине",

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \approx \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}-it}} + \pi^{-it}\left(\frac{1}{2}-it\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}},$$

где су $M \asymp \sqrt{T}$ и $N \asymp \sqrt{T}$ два параметра и $\Gamma(s)$ гама-функција. Употребом таквог записа добија се

$$M_K(T) \sim c_k T \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2, \tag{1.8}$$

где је c_k нека константа, $\mathcal{S}_1$ представља допринос оних чланова који у расписивању настају за $m = n$ и називају се дијагоналним члановима, а $\mathcal{S}_2$ је допринос преосталих чланова који у расписивању настају за $m \neq n$ и називају се вандијагоналним. За $k = 1$ и $k = 2$ водећи члан у асимптотици одговарајућег момента $M_k(T)$ долази искључиво од дијагоналних чланова. Међутим, за $k \geq 3$ то више није случај и неки вандијагонални чланови такође имају утицај на водећи члан. Како је њих тешко изоловати, тешко је и израчунати моменте Риманове зета функције за $k \geq 3$. Исти проблем тешкоће рачунања доприноса вандијагоналних чланова представља препреку и за рачунање виших момената L-функција из других фамилија.

Проблем одређивања асимптотског понашања момената $M_k(T)$ је толико тежак, да је дуго била непозната чак и тачна хипотеза о њему. Генарално, очекује се да за сваки природан број k постоји позитивна константа c_k таква да је

$$M_k(T) \sim c_k T \log^{k^2} T, \;\; T \to \infty.$$

Међутим, давање хипотеза за конкретне вредности константи c_k је дуго представљало проблем (осим, наравно, за случајеве $k = 1$ и $k = 2$ које су разрешили Харди и Литлвуд, односно Ингам). Парцијални резултати за случајеве $k = 3$ и $k = 4$ добијени су тек крајем XX века, користећи теореме о средњим вредностима и хеуристике за суме генерализованих делитељских функција са померајем. Конкретно, Конри и Гош [29] су дали хипотезу

$$c_3 = \frac{42}{9!}\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^4\left(1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}\right),$$

док је резулат Конрија и Гонека [30] хипотеза

$$c_4 = \frac{24024}{16!}\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^9\left(1+\frac{9}{p}+\frac{9}{p^2}+\frac{1}{p^3}\right).$$

Један метод за давање хеуристике за константе c_k за опште k, базиран на вишеструким Дирихлеовим редовима, приказан је у [34]. Тај метод мотивисан је значајним радом Мотохашија [80], у коме је аутор показао да важи

$$M_2(T) = T\mathcal{P}_4(\log T) + O\left(T^{2/3+\varepsilon}\right), \tag{1.9}$$

где је $\mathcal{P}_4(x)$ неки полином степена 4 са реалним коефицијентима. Формула (1.9) представља значајно побољшање Ингамовог резултата (1.8) и Мотохаши ју је доказао анализирајући функцију комплексних променљивих s и w која је дефинисана интегралом

$$\int_1^\infty \zeta(s+it)^2\zeta(s-it)^2 t^{-w}\,dt. \tag{1.10}$$

Идеја за посматрање такве функције потиче из [33], где су аутори приметили да се интеграли зета функције дуж критичне линије појављују у формулама трага Селберга и Кузњецова. Пажљивим анализирање формуле трага Кузњецова, Мотохаши је успео да изведе мероморфно проширење функције (1.10) (у односу на променљиву w) на основу кога је даље извео (1.9). У [34] аутори демонстрирају како се хипотезе за водећи члан у асимптотици за $M_k(T)$ могу извести на основу (хипотетичких) мероморфних проширења општијих функција

$$Z_{\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_{2m},k}(s_1,s_2,\ldots,s_{2m};w) = \int_1^\infty \zeta(s_1+\epsilon_1 t)\cdots\zeta(s_{2m}+\epsilon_{2m}t)\left(\frac{2\pi e}{t}\right)^{kit} t^{-w}\,dt,$$

комплексних променљивих $s_1, s_2, \ldots s_{2m}$ и w, при чему су $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ за све $1 \le i \le 2m$. Конкретно, добили су хипотезу

$$c_k = a_k\frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)}, \tag{1.11}$$

где је

$$a_k = \prod_p \left[\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(m+k)}{m!\Gamma(k)}\right)^2\frac{1}{p^m}\right]$$

и $G(s)$ Барнсова гама-функција дефинисана за све комплексне бројеве s са

$$G(s) = (2\pi)^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{s+s^2(1+\gamma)}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{s}{k}\right)^k e^{\frac{s^2}{2k} - s} \right],$$

при чему је γ Ојлерова константа.

Међутим, фундаментални напредак у изучавању момената, како Риманове зета, тако и L-функција других фамилија, представља упливавање теорије случајних матрица. Присуство и значај такве везе биће детаљно дискутовано у наредним одељцима.

1.2. Веза са теоријом случајних матрица

Стара идеја, до које су дошли Хилберт и Пођа, је да се Риманова хипотеза може доказати из егзистенције самоадјунгованог ермитског оператора, чији спектар сопствених вредности одговара нетривијалним нулама зета функције. Та идеја до сада није остварена, услед немогућности да се пронађе тражени оператор и генерално се употреба теорије случајних матрица у сврху изучавања L-функција није озбиљније разматрала до рада Монтгомерија [78] на корелацији парова нула Риманове зета функције.

Под претпоставком важења Риманове хипотезе, све нетривијалне нуле функције $\zeta(s)$ се налазе на критичној оси $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Онда се имагинарни делови γ_i свих таквих нула могу поређати у низ

$$\cdots \leq \gamma_{-2} \leq \gamma_{-1} < 0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \ldots,$$

при чему за све природне бројеве n важи $\gamma_{-n} = -\gamma_n$. Нека је

$$N(T) = \# \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < \gamma_n \leq T\}$$

функција која броји нуле зета функције са имагинарним делом највише $T > 0$. Основна информација о величини вредности $N(T)$ може се добити применом принципа аргумента за комплексне функције. Конкретно, претпоставка важења Риманове хипотезе имплицира да $\zeta(s)$ нема нула на правоугаоној контури P са теменима у 2, $2+iT$, $-1+iT$ и -1, а како та функција такође нема полова на P, нити у области коју P ограничава, принцип аргумента имплицира

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} \Delta_P \arg \zeta(s),$$

где је $\Delta_P \arg \zeta(s)$ промена аргумента за $\zeta(s)$ дуж P. Коришћењем те чињенице онда се може показати да важи

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log T - \frac{T}{2\pi} + O\left(\log T\right), \tag{1.12}$$

што је класичан резултат познат као формула Риман-фон Манголта.

Из формуле (1.12) следи да је густина нула Риманове зета функције на висини T, изражена вредношћу $N(T)/T$, приближно $\frac{\log T}{2\pi}$. Поред тога, формула (1.12) имплицира да важи

$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}, \quad n \to \infty$$

па следи да нормализоване вредности

$$\zeta_n = \frac{1}{2\pi} \gamma_n \log |\gamma_n|$$

испуњавају

$$\frac{\zeta_n}{n} \sim 1, \quad n \to \infty.$$

Природно се намеће питање разумевања статистичког понашања низа нормализованих вредности ζ_n. При томе је нарочито разумети да ли је тај низ потпуно случајан или у њему постоји одређена правилност. Неки увид у ту проблематику може се добити изучавањем размака између нула Риманове зета функције и управо је то оно чиме се бавио Монтгомери у поменутом раду [78]. Конкретно, он је дошао да наредне хипотезе, познате као Хипотеза о корелацији парова.

Хипотеза 1.1 (о корелацији парова)**.** Нека су $0 \leq \alpha < \beta$ реални бројеви и

$$N(\alpha, \beta, T) = \# \left\{ m, n \in \mathbb{N}, m \neq n \mid 0 < \gamma_m, \gamma_n \leq T, \frac{2\pi\alpha}{\log T} \leq \gamma_m - \gamma_n \leq \frac{2\pi\beta}{\log T} \right\}.$$

Тада, при $T \to \infty$ важи

$$N(\alpha, \beta, T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T \int_\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du.$$

Нека је γ нека фиксирана нула функције $\zeta(s)$. Како је за мале вредности реалног броја u и вредност интеграла

$$\int_\alpha^\beta 1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 du$$

мала, Хипотеза о корелацији парова имплицира да је мала вероватноћа да постоји нека нула од $\zeta(s)$ која је на размаку од γ реда величине мањег од $\frac{1}{\log T}$. Према томе, важи да се нуле Риманове зета функције на неки начин ,,одбијају''.

Рудник и Сарнак [90] су дали још општије хипотезе за n-корелације нула, како Риманове зете, тако и L-функција других фамилија. Такве хипотезе, под претпоставком важења Риманове хипотезе, доказане су за Риманову зета функцију у неким специјалним случајевима, и то: [78] за 2-корелацију, [54] за 3-корелацију и [90] за n-корелацију, $n \geq 4$. Поред тога, постоје бројни нумерички докази (в. [82], [83]) који сугеришу валидност хипотезе о корелацији парова.

Битно је нагласити да Монтгомери није првобитно разумео смисао функције $f(u) = 1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2$ која се појављује у хипотези о корелацији парова. Њега му је објаснио Фримен Дајсон у приватној конверзацији, када је са њим поделио информацију да је $f(u)$ функција парова корелације сопствених вредности одређених класа случајних матрица. Дајсоново запажење је вратило наду у оригиналну Хилбертову идеју о изучавању L-функције преко неких њима одговарајућих оператора, чиме су се значајно отворила врата за утицај теорије случајних матрица.

У значајном раду [65], аутори Китинг и Снејт су демонстрирали хеуристике које сугеришу да се аналитичко понашење Риманове зета функције на критичној линије може моделовати карактеристичним полиномима случајних матрица великих димензија.

Нека је N природан број и $\mathcal{U}(N)$ група унитарних матрица димензија $N \times N$. Свака матрица из $\mathcal{U}(N)$ има сопствене вредности облика $e^{i\theta_i}$, где су θ_i, $1 \leq i \leq N$ углови у интервалу $[0, 2\pi]$. Карактеристични полином произвољне матрице $U \in \mathcal{U}(N)$ се онда може означавати са

$$\lambda(U, t) = \det\left(I_N - Ue^{-it}\right) = \prod_{i=1}^{N}\left(1 - e^{i(\theta_i - t)}\right),$$

где је I_N јединична матрица димензије $N \times N$.

Пошто је $\mathcal{U}(N)$ једна Лијева група, на њој постоји јединствена транслаторно инваријантна, вероватносна тј. Харова мера, која ће бити означавана са μ_N. Група $\mathcal{U}(N)$ посматрана заједно са њој придруженом Харовом мером μ_N назива се кружни унитарни комплет[1].

Китинг и Снејт су уочили да карактеристични полиноми матрица из кружног унитарног комплета имају расподелу вредности која наликује расподели вредности Риманове зета функције на критичној линији. Конкретно, они су доказали да

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left\{ U \in \mathcal{U}(N) \mid \frac{\log \lambda(U,t)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log N}} \in \mathcal{D} \right\} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy \tag{1.13}$$

важи за сваки правоугаоник $\mathcal{D}$ у комплексној равни који има по пар страница паралелних реалној, односно имагинарној оси. Резултат (1.13) је у запањујућој сличности са старим, необјављеним резултатом Селберга,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mu \left\{ t \in [T, 2T] \mid \frac{\log \zeta(\frac{1}{2} + it)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}} \in \mathcal{D} \right\} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{D}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy, \tag{1.14}$$

где је μ ознака за Лебегову меру на $\mathbb{R}$. Имајући у виду разлику између средњег размака углова сопствених вредности матрица кружног унитарног комплета и средњег

[1] енг. Circular Unitary Ensemble

размака нула Риманове зета функције, може се направити скалирање

$$N \sim \frac{\log T}{2\pi}.$$

Уз такво скалирање може се приметити да су формуле (1.13) и (1.14) есенцијално истог облика (у (1.13) се броји по свим матрицама из $\mathcal{U}(N)$, па како је μ_N вероватносна мера, не види се пандан фактору $\frac{1}{T}$ из (1.14)). Према томе, ако су нуле Риманове зета функције распоређење као сопствене вредности матрица кружног унитарног комплета, може се очекивати да карактеристични полиноми $\lambda(U,t)$, $U \in \mathcal{U}(N)$ моделирају $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ за $t \asymp T$ и $N \sim \frac{\log T}{2\pi}$.

Вођени описаним моделом, Китинг и Снејт су дати хипотезу за водећи члан у асимптотици произвољног момента Риманове зета функције, која се, наравно, поклапа са хипотезом (1.11) из [34]. Ослањајући се на сличне хеуристике, али сада базиране на рачуну са карактеристичним полиномима случајних симплектичких и ортогоналних матрица изведене су и хипотезе за водеће чланове у асимптотикама момената L-функција многих других фамилија (в. [24] и [66]).

Треба још напоменути и да је модел Китинга и Снејт који је приказан имао одређене мањкавости. Наиме, они су успели да за свако $k > -\frac{1}{2}$ израчунају да за непрекидни $2k$-ти моменат карактеристичног полинома $\lambda(U,t)$ важи

$$\mathbb{E}_N \, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\lambda(U,t)|^{2k}\, dt = \mathbb{E}_N \, |\lambda(U,0)|^{2k} \sim \frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)} N^{k^2},$$

где је $\mathbb{E}_N$ очекивана вредност расподеле размака углова сопствених вредности матрица у односу на Харову меру на $\mathcal{U}(U)$. Добијени резултат се онда може употребити за давање хеуристике за водећи члан $2k$-тог момента Риманове зета функције, али при томе недостаје фактор a_k (упоредити са хипотезом (1.11)). Управо је недостатак тог фактора (познатог и као аритметички фактор) кључна мањкавост модела Китинга и Снејт– производ по простим бројевима који дефинише a_k се не може појавити из чистог рачуна са случајним матрицама на који се они ослањају, па морају да убаце a_k у хеуристику одређеним ad hoc аргументима.

Описана мањкавост њиховог модела превазиђена је у [26], где аутори дају опис моћнијег и флексибилнег модела. Тај модел се може искористити за давање не само водећих, него и главних чланова нижег реда у асимптотици момената, како Риманове зета, тако и L-функција многих других значајних фамилија и он ће бити главна тема излагања које следи.

При томе је сам приступ у раду [26] измењен и базира се на идеји да се природа момената L-функција боље разуме када се анализирају усредњени производи њихових вредности у тачкама које су померене од централне тачке која се посматра. Пуштањем да сви помераји иду у 0, из такве анализе добија се информација о моментима L-функција који су од интереса. При томе се разликују две ситуације: моменти примитивних L-функција у t-аспекту и моменти примитивних L-функција у фамилијама, где се L-функција назива примитивном ако се не може написати као нетривијални производ других L-функција.

1.3. Моменти примитивних L-функција у t-аспекту

Селберг [93] је приказао начин за апстрактно, аксиоматско посматрање L-функција. Грубо говорећи, он је увео класу функција $L(s)$ (данас по њему познату као Селбергова класа) дефинисаних Дирихлеовим редовима

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{1.15}$$

који конвергирају за $\Re(s) > 1$ и задовољавају четири значајне аксиоме инспирисане есенцијалним особинама које имају уобичајене познате L-функције попут Риманове зете или Дирихлеових L-функција. Те особине ће сада бити укратно описане, пратећи излагање из Одељка 1.1. у [26]; много више детаља о Селберговој класи може се пронаћи у петој глави књиге [58].

- *Постојање аналитичког проширења*
  Свака функција $L(s)$ Селбергове класе може се аналитички проширити до мероморфне функције на целој комплексној равни, при чему постоји највише коначно много полова, који се сви (под условом да постоје) налазе на оси $\Re(s) = 1$.

- *Задовољеност Рамануџанове хипотезе*
  За коефицијенте a_n из (1.15) важи $a_1 = 1$ и $|a_n| \ll n^{\varepsilon}$ за све $\varepsilon > 0$.

- *Постојање записа у облику Ојлеровог производа*
  За $\Re(s) > 1$ важи
  $$L(s) = \prod_p L_p\left(\frac{1}{p^s}\right),$$
  где је
  $$L_p\left(\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{p^n}}{p^{ns}} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{p^m}}{p^{ms}}\right),$$
  при чему постоји $\theta < \frac{1}{2}$ такво да за све коефицијенте b_n важи $|b_n| \ll n^{\theta}$.

- *Задовољеност функционалне једначине*
  Постоји комплексан број ϵ, $|\epsilon| = 1$, познат као коренски број, природан број ω који се назива степеном $L(s)$ и функција $\gamma_L(s)$ облика
  $$\gamma_L(s) = Q^s \prod_{j=1}^{\omega} \Gamma\left(\omega_j s + \mu_j\right), \tag{1.16}$$
  где је $Q > O$ и $\omega_j > 0$, $\Re(\mu_j) \geq 0$, $1 \leq j \leq \omega$ такви да функција
  $$\xi_L(s) = \gamma_L(s) L(s)$$

задовољава функционалну једначину

$$\xi_L(s) = \epsilon\overline{\xi_L(1-\overline{s})}. \tag{1.17}$$

Свакој L-функцији Селбергове класе $L(s)$ придружује се одговарајућа ,,Z-функција" дефинисана са

$$Z_L(s) = \epsilon^{-\frac{1}{2}} X_L^{-\frac{1}{2}}(s) L(s),$$

где је

$$X_L(s) = \frac{\overline{\gamma_L(1-\overline{s})}}{\gamma_L(s)}.$$

Овако дефинисана Z-функција задовољава једноставну функционалну једначину

$$Z_L(s) = \overline{Z_L(1-\overline{s})}.$$

Увођење функције $X_L(s)$ омогућава и да се функционална једначина (1.17) запише у често употребљиваном, асиметричном облику,

$$L(s) = \epsilon X_L(s)\overline{L(1-\overline{s})}. \tag{1.18}$$

За сваку функцију $L(s)$ Селбергове класе са

$$c(L) = \left| X_L'\left(\frac{1}{2}\right) \right|$$

дефинисан је број који мери њену ,,величину" и назива се логаритамским кондуктором.

На основу функионалне једначине, свака L-функција $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ Селбергове класе се може записати у облику ,,апроксимативне функционалне једначине". У таквом запису $L(s)$ је представљена као сума два Дирихлеова реда са коефицијентима a_n, умножених неким глатким функцијама чија је сврха да сумацију у тим редовима глатко ,,одсеку" до дужина одређених неким параметрима. За потребе добијања хипотеза о моментима L-функција, што је циљ даљег излагања, биће довољно посматрати апроксимативне фунционалне једначине у којима је то одсецање урађено оштро,

$$L(s) = \sum_{m<X} \frac{a_m}{m^s} + \epsilon X_L(s) \sum_{n<Y} \frac{\overline{a_n}}{n^{1-s}} + \text{ остатак}, \tag{1.19}$$

при чему конкретан израз за остатак није од интереса, а величина параметара X и Y зависи од фактора $\gamma_L(s)$ из функционалне једначине за $L(s)$.

Нека је сада $L(s)$ нека фиксирана примитивна L-функција Селбергове класе. У циљу добијања хипотезе за $2k$-ти момент од $L(s)$ у t-аспекту посматра се усредњена вредност

$$\mathcal{I}_k(L,\alpha,g) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_L\left(\frac{1}{2}+\alpha_1+it\right)\cdots Z_L\left(\frac{1}{2}+\alpha_{2k}+it\right)g(t)dt, \tag{1.20}$$

где је $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k})$, за све комплексне бројеве α_j, $1 \le j \le 2k$ важи $\left|\Re(\alpha_j)\right| < \frac{1}{2}$ и $g(t)$ је нека погодно одабрана тежинска функција, чији конкретан облик није од претераног значаја, па се оставља недефинисаним.

Вредности (1.20) одговара интеграл по унитарној групи

$$\mathcal{J}_k(\mathcal{U}(N),\alpha) = \int_{\mathcal{U}(N)} \mathcal{W}_A\left(e^{-\alpha_1}\right)\cdots\mathcal{W}_A\left(e^{-\alpha_{2k}}\right)dA, \tag{1.21}$$

где је за сваку матрицу $A \in \mathcal{U}(N)$,

$$\mathcal{W}_A(s) = \left((-1)^N \det A^*\right)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{N}{2}}\lambda(A,s), \tag{1.22}$$

при чему је A^* ознака за адјунговану матрицу и $\lambda(A,s)$ је карактеристични полином матрице A. Треба нагласити да се димензија N матрица бира тако да буде једнака логаритамском кондуктору за $L(s)$. Вредност дефинисана у (1.21) назива се функцијом аутокорелације карактеристичних полинома случајних матрица унитарне групе и детаљно је израчуната у [25]. Ослањајући се на тај рачун могу се добити хипотезе о моментима примитивних L-функција у t-аспекту, због хеуристике по којој су L-функције у t-аспекту добро моделиране карактеристичним полиномима случајних матрица унитарне групе. Конкретан метод за добијање поменутих хипотеза изнесен је у [25] у виду „рецепта” који ће сада бити приказан.

Рецепт за добијање момената примитивних L-функција у t-аспекту Хипотеза за $2k$-ти моменат примитивне L-функције $L(s)$ може се добити спроводећи наредне кораке.

(1) На почетку се посматра производ померених Z-функција

$$Z(s,\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}) = Z(s+\alpha_1)\cdots Z(s+\alpha_{2k}),$$

где су α_j, $1 \le j \le 2k$ комплексни бројеви за које важи $\left|\Re(\alpha_j)\right| < \frac{1}{2}$. Овај корак поседује и одређену флексибилност, која се огледа у томе да се у конкретним примерима може посматрати и производ померених L- уместо Z-функција.

(2) Свака L-функција која се појављује се замени својом апроксимативном функционалном једначином (1.19), игноришући притом остатке који се у њима појављују. На тај начин се добија производ од $2k$ парова сабирака. Када се сви ти чланови изможе добија се сума са 2^{2k} сабирака. Сваки сабирак у тој суми настаје као производ ℓ, $0 \le \ell \le 2k$ умножака потеклих из првог дела и $2k-\ell$ умножака из другог дела апроксимативне функционалне једначине, па

је облика

$$\epsilon^{-\frac{\ell}{2}} X_L(s+\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} \cdots X_L(s+\alpha_\ell)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n_1<X_1} \frac{a_{n_1}}{n_1^{s+\alpha_1}} \cdots \sum_{n_\ell<X_\ell} \frac{a_{n_\ell}}{n_\ell^{s+\alpha_\ell}}$$
$$\times \epsilon^{k-\frac{\ell}{2}} X_L(s+\alpha_{\ell+1})^{\frac{1}{2}} \cdots X_L(s+\alpha_{2k})^{\frac{1}{2}} \sum_{n_{\ell+1}<X_{\ell+1}} \frac{\overline{a_{n_{\ell+1}}}}{n_{\ell+1}^{1-s-\alpha_{\ell+1}}} \cdots \sum_{n_{2k}<X_{2k}} \frac{\overline{a_{n_{2k}}}}{n_{2k}^{1-s-\alpha_{2k}}}$$
$$= \epsilon^{k-\ell} \left(\frac{X_L(s+\alpha_1)\cdots X_L(s+\alpha_\ell)}{X_L(s+\alpha_{\ell+1})\cdots X_L(s+\alpha_{2k})} \right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times \sum_{n_1<X_1} \cdots \sum_{n_{2k}<X_{2k}} \frac{a_{n_1}\ldots a_{n_\ell}\overline{a_{n_{\ell+1}}\cdots a_{n_{2k}}}}{n_1^{\alpha_1}\cdots n_\ell^{\alpha_\ell} n_{\ell+1}^{1-\alpha_{\ell+1}}\cdots n_{2k}^{1-\alpha_{2k}}} \left(\frac{n_1\cdots n_\ell}{n_{\ell+1}\cdots n_{2k}} \right)^{-s}. \tag{1.23}$$

(3) Одабрати $s = \frac{1}{2} + it$ и затим задржати само оне чланове (1.23) у којима X_L фактори не осцилују неконтролисано, што су чланови за које је $k = \ell$.

(4) У сумама које дефинишу преостале чланове задржати само дијагоналне чланове, што су чланови у којима је $n_1 \cdots n_\ell = n_{\ell+1} \cdots n_{2k}$.

(5) Продужити сумације у члановима који су остали до бесконачности. Конкретно, на основу Стирлингове формуле, из функционалне једначине за $L(s)$ следи

$$\left(\frac{X_L(\frac{1}{2}+\alpha_1+it)\cdots X_L(\frac{1}{2}+\alpha_k+it)}{X_L(\frac{1}{2}+\alpha_{k+1}+it)\cdots X_L(\frac{1}{2}+\alpha_{2k}+it)} \right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{Q^{\frac{2}{\omega}} t}{2} \right)^{\frac{\omega}{2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_k-\alpha_{k+1}-\cdots-\alpha_{2k})} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

где су Q и ω из (1.16). Због тога, за $s = x + iy$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k})$ дефинише се

$$R(s;\alpha) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_{2k}=1}^{\infty} \frac{a_{n_1}\ldots a_{n_\ell}\overline{a_{n_{\ell+1}}\cdots a_{n_{2k}}}}{n_1^{s+\alpha_1}\cdots n_\ell^{s+\alpha_\ell} n_{\ell+1}^{s-\alpha_{\ell+1}}\cdots n_{2k}^{s-\alpha_{2k}}}, \tag{1.24}$$
$$W(s,\alpha,\sigma) = \left(\frac{Q^{\frac{2}{\omega}} y}{2} \right)^{\frac{\omega}{2}(\alpha_{\sigma(1)}+\cdots+\alpha_{\sigma(k)}-\alpha_{\sigma(k+1)}-\cdots-\alpha_{\sigma(2k)})} R(x;\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(2k)}),$$

где је σ у скупу Ξ свих пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ таквих да је $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$, $\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \cdots < \sigma(2k)$ и посматра се

$$M(s;\alpha) = \sum_{\sigma\in\Xi} W(s,\alpha,\sigma). \tag{1.25}$$

(6) Добија се хипотеза

$$\mathcal{I}_k(L,\alpha,g) = \int_{-\infty}^{\infty} M\left(\frac{1}{2}+it,\alpha\right)\left(1+O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\right)g(t)dt$$

из које, пуштајући $\alpha_i \to 0$ за све $1 \le i \le 2k$, следи и хипотеза за $2k$-ти момент примитивне L-функције $L(s)$ у t-аспекту.

Функција $R(s;\alpha) = R(s;\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k})$ заслужује још неколико коментара. Сума (1.24) која дефинише ту функцију не конвергира за $s = \frac{1}{2}$, али се она може аналитички проширити на регион $\Re(s) > \frac{1}{4} + \min_{i\in\{1,\ldots,2k\}} |\alpha_i|$. При томе важи

$$R(s;\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}) = \prod_{i,j=1}^{k} \zeta(2s+\alpha_i-\alpha_{k+j})A_k(s;\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}),$$

где је A_k аритметички фактор који се може изразити у облику Ојлеровог производа

$$A_k(s;\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}) = \prod_p \left(\prod_{i,j=1}^{k}(1-p^{-2s-\alpha_i+\alpha_{k+j}})\right)B_p(s;\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k})$$

уз

$$B_p(s;\alpha_1,\ldots,\alpha_{2k}) = \int_0^1 \prod_{j=1}^{k} L_p\left(\frac{e^{2\pi i\theta}}{p^{s+\alpha_j}}\right)\prod_{j=1}^{k}\overline{L_p}\left(\frac{e^{-2\pi i\theta}}{p^{s-\alpha_{k+j}}}\right)d\theta.$$

Подсећања ради, L_p у горњој дефиницији функције B_p представља локални фактор Ојлеровог производа за $L(s)$ у простом броју p.

Треба још нагласити и да се сума по скупу Ξ у (1.25) може елегантно изразити у облику контурног интеграла (в. Лему 2.5.1 или општију Лему 2.5.3. у [26]).

Као конкретна илустрација функционисања рецепта описаног у овом одељку може послужити наредна хипотеза о моментима Риманове зета функције, која је пратећи њега изведена у [26], Хипотеза 1.5.1.

Хипотеза 1.2. Нека је $g(t)$ погодна тежинска функција и k природан број. Тада важи

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} P_k\left(\log\frac{t}{2\pi}\right)\left(1+O(t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\right)g(t)dt,$$

где је P_k полином степена k^2 изражен контурним интегралом

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!^2}\frac{1}{(2\pi i)^{2k}}\oint\cdots\oint \frac{G(z_1,\ldots,z_{2k})\Delta^2(z_1,\ldots,z_{2k})}{\prod_{j=1}^{2k} z_j^{2k}} e^{\frac{x}{2}\sum_{j=1}^{k} z_j-z_{k+j}}dz_1\ldots dz_{2k}$$

по малим кружницама око $z_i = 0$, $1 \leq i \leq 2k$, при чему је

$$G(z_1, \dots, z_{2k}) = A_k(z_1, \dots, z_{2k}) \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{k} \zeta(1 + z_i - z_{k+j}),$$

аритметички фактор A_k је дат Ојлеровим производом

$$A_k(z_1, \dots, z_{2k}) = \prod_p \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p^{1+z_i-z_{k+j}}}\right) \int_0^1 \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{e^{2\pi i\theta}}{p^{\frac{1}{2}+z_j}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{e^{-2\pi i\theta}}{p^{\frac{1}{2}-z_{k+j}}}\right)^{-1} d\theta$$

и Δ је ознака за Вандермондову матрицу,

$$\Delta(z_1, \dots, z_{2k}) = \prod_{1 \leq i < j \leq 2k} (z_j - z_i).$$

1.4. Моменти примитивних L-функција у фамилијама

Слично рецепту за формулисање хипотеза о моментима примитивних L-функција у t-аспекту, који је приказан у претходном одељку, у [26] је добијен и рецепт за формулисање хипотеза о моментима примитивних L-функција у фамилијама. Пре приказивања тог рецепта, потребно је разјаснити шта тачно се подразумева под фамилијом L-функција у контексту Селбергове класе, који је и даље од интереса за посматрање.

Фамилија примитивних L-функција везана је за одговарајућу фамилију примитивних карактера. Грубо говорећи, фамилија примитивних карактера $\mathcal{F} = \{f\}$ је колекција аритметичких функција, које су све коефицијенти неких L-функција посебног облика. Прецизније, свакој аритметичкој функцији $f \in \mathcal{F}$ одговарајућа придружена L-функција $L_f(s)$ је примитивна и има Ојлеров производ облика

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \prod_{j=1}^{v} \left(1 - \frac{\beta_{p,j}}{p^s}\right)^{-1},$$

где је v природан и $\beta_{p,j}$ комплексни бројеви.

Логаритамски кондуктор за $L_f(s)$ се означава са $c(f)$. Ако је фамилија $\mathcal{F}$ коначна, онда се захтева да су Q, μ_j и ω_j из (1.16) исти за све $f \in \mathcal{F}$. Последица тога је да се $c(f)$ не мења када f пролази фамилијом $\mathcal{F}$. Ако је $\mathcal{F}$ бесконачна фамилија, онда је захтев да Q, μ_j и ω_j монотоно зависе од $c(f)$. Додатно, за бројачку функцију $M(T) = \#\{f \in \mathcal{F} \mid c(f) \leq T\}$ услов је да важи

$$M(\log T) = P(T^A, \log T) + O(T^{\frac{A}{2}+\varepsilon})$$

за све $\varepsilon > 0$ и $A > 0$, при чему је P неки полином.

Очекивана вредност за произвољну функцију Υ на $\mathcal{F}$ дефинише се као

$$\langle \Upsilon(f) \rangle = \lim_{T\to\infty} M(T)^{-1} \sum_{\substack{f\in\mathcal{F} \\ c(f)<T}} \Upsilon(f), \tag{1.26}$$

под условом да посматрана гранична вредност постоји. У случају непрекидне фамилије сума у (1.26) замењена је интегралом.

Последњи услов за фамилију примитивних карактера $\mathcal{F}$ је да задовољава релацију ортогоналности. Под тиме се подразумева да за све природне бројеве k и ℓ, $\ell \le k$ и све целе бројеве m_i, $1 \le i \le k$ очекивана вредност

$$\delta_\ell(m_1, \ldots, m_k) = \langle f(m_1)\cdots f(m_\ell)\overline{f(m_{\ell+1})\cdots f(m_k)} \rangle$$

постоји и изражена је мултипликативном функцијом δ_ℓ. Захтевана мултипликативност одражава се својством

$$\delta_\ell(m_1n_1, m_2n_2, \ldots, m_kn_k) = \delta_\ell(m_1, m_2, \ldots, m_k)\delta_\ell(n_1, n_2, \ldots, n_k).$$

испуњеном за све целе бројеве m_i, n_i, $1 \le i \le k$.

Свакој фамилији $\mathcal{F} = \{f\}$ карактера може се придружити фамилија L-функција на следећи начин. За почетак се посматра примитивна L-функција

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p L_p\left(\frac{1}{p^s}\right),$$

при чему за локалне факторе L_p важи

$$L_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p^n}x^n = \prod_{j=1}^{\omega} \left(1 - \gamma_{p,j}x\right)^{-1},$$

где је ω степен $L(s)$ и $\gamma_{p,j}$ комплексни бројеви који су или једнаки 0 или модула 1. Твист[2] функције L карактером $f \in \mathcal{F}$, у ознаци $L(s, f)$ дефинисан је Ојлеровим производом

$$L(s, f) = \prod_p \prod_{i=1}^{v} \prod_{j=1}^{w} \left(1 - \frac{\beta_{p,i}\gamma_{p,j}}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s}.$$

При томе се захтева да и $L(s, f)$ буде Селбергове класе, што значи да има четири својства, описана у претходном одељку, која дефинишу припадност функције тој класи. Специјално, $L(s, f)$ задовољава функционалну једначину (1.18) у асиметричном облику, која ће бити записивана са

$$L(s, f) = \epsilon_f X_f(s)\overline{L(1 - \overline{s}, f)}.$$

[2]енг. twist, алтернативни називи су увртање или увијање

На основу функционалне једначине, потпуно налик формули (1.19), може се добити ,,апроксимативна функционална једначина" за $L(s,f)$,

$$L(s,f)=\sum_{m<X}\frac{a_m(f)}{m^s}+\epsilon_f X_f(s)\sum_{n<Y}\frac{\overline{a_n(f)}}{n^{1-s}}+\text{ остатак},\tag{1.27}$$

при чему конкретан израз за остатак и даље није од значаја, а величина параметара X и Y зависи од гама-фактора из функционалне једначине за $L(s,f)$.

Фамилија L-функција се онда дефинише као колекција $\{L(s,f)\mid f\in\mathcal{F}\}$. При томе, свакој фамилији се придружује одговарајући тип симетрије (в. [63] и [64]), који може бити неки од следећих:

- *Унитарни*
  Типичан пример унитарне фамилије добија се посматрање произвољне примитивне L-функције у t-аспекту. Наиме, ако је $L(s)$ једна таква функција, онда је $L(s+it)=L(s,f_t)$, где је $f_t(n)=n^{-it}$, одакле следи да се $L(s+it)$ када $t\in[0,T]$ може видети као фамилија

  $$\{L(s,f_t)\mid t\in[0,T]\}.\tag{1.28}$$

  Сарнакова хипотеза ригидности предвиђа да су (1.28) једини примери непрекидних фамилија примитивних L-функција. Такође треба нагласити да веза (1.28) имплицира да се хипотезе за моменте $L(s)$ у t-аспекту могу добити и коришћењем рецепта који ће бити приказан у овом одељку. Други значајан пример унитарне фамилије је фамилија Дирихлеових L-функција

  $$\{L(s,\chi)\mid \chi \text{ је примитивни Дирихлеов карактер по модулу } q\},$$

  где је $q\geq 2$ неки природан број.

- *Симплектички*
  Значајан пример симплектичке фамилије је фамилија квадратних Дирихлеових L-функција,

  $$\{L(s,\chi_d)\mid d \text{ је фундаментална дискриминанта}\},$$

  при чему је χ_d ознака за Кронекеров симбол $\chi_d(n)=\left(\frac{d}{n}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

- *Ортогонални*
  Типичан пример L-функција ортогоналне фамилије су L-функције куспидалних модуларних форми.

У циљу добијања хипотезе за моменте L-функција у фамилији $\{L(s,f)\mid f\in\mathcal{F}\}$ посматра се

$$\mathcal{I}_k(\mathcal{F},\alpha,g)=\sum_{f\in\mathcal{F}}Z_L\left(\frac{1}{2}+\alpha_1,f\right)\cdots Z_L\left(\frac{1}{2}+\alpha_k,f\right)g(c(f)),\tag{1.29}$$

где је $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, за све комплексне бројеве α_j, $1 \le j \le k$ важи $\left|\Re(\alpha_j)\right| < \frac{1}{2}$,

$$Z_L(s, f) = \epsilon_f^{-\frac{1}{2}} X_f(s)^{-\frac{1}{2}} L(s, f),$$

и $g(t)$ је нека погодно одабрана тежинска функција. Моменту (1.29) одговара матрични интеграл

$$\mathcal{J}_k(\mathcal{G}, \alpha) = \int_{\mathcal{G}} \mathcal{W}_A\left(e^{-\alpha_1}\right) \cdots \mathcal{W}_A\left(e^{-\alpha_k}\right) dA, \tag{1.30}$$

где је $\mathcal{G}$ унитарна, симплектичка или ортогонална група у зависности од типа симетрија посматране фамилије и за сваку матрицу $A \in \mathcal{G}$, $\mathcal{W}_A(s)$ је дефинисано у (1.22). Слично као и за моменте L-функција у t-аспекту, упоређивањем рачуна за (1.30), изведеног у [25], са (1.29) добија се „рецепт" за извођење хипотеза за моменте L-функција у посматраној фамилији $\{L(s, f) \mid f \in \mathcal{F}\}$. Тај рецепт има велики број сличности са већ приказаним рецептом за извођење момената примитивне L-функције у t-аспекту, па стога неће бити толико детаљно исписан, осим у детаљима који се значајније разликују.

Рецепт за добијање момената у фамилији примитивних L-функција Хипотеза за k-ти моменат у фамилији примитивних L-функција $\{L(s, f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ може се добити спроводећи наредне кораке.

(1) На почетку се посматра производ померених Z-функција

$$Z_f(s, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = Z_L(s + \alpha_1, f) \cdots Z_L(s + \alpha_k, f),$$

при чему се може посматрати и производ померених L- уместо Z-функција.

(2) Свака L-функција која се појављује се замени својом апроксимативном функционалном једначином при чему се игноришу остаци из тих једначина. Када се све измножи добија се сума са 2^{2k} чланова. Сваки од њих настаје као производ ℓ фактора из првог и $k-\ell$ фактора из другог дела апроксимативне функционалне једначине, па је облика

$$\begin{aligned} &\epsilon_f^{\frac{k}{2}-\ell} \prod_{j=1}^{\ell} X_f(s+\alpha_j)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=\ell+1}^{k} X_f(s-\alpha_j)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{n_1 < X_1} \cdots \sum_{n_k < X_k} \frac{a_{n_1}(f) \cdots a_{n_\ell}(f) \overline{a_{n_{\ell+1}}(f) \cdots a_{n_k}(f)}}{n_1^{s+\alpha_1} \dots n_\ell^{s+\alpha_\ell} n_{\ell+1}^{1-s-\alpha_{\ell+1}} \dots n_k^{1-s-\alpha_k}}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

(3) Стави се $s = \frac{1}{2}$ и фактори $\epsilon_f^{\frac{k}{2}-\ell}$ у (1.31) се замене својом очекиваном вредношћу усредњеној по фамилији која се посматра. На овом месту до изражаја долази тип симетрије саме фамилије, јер ће очекивана вредност зависити управо од њега. Конкретно, важи следеће:

– *Унитарна фамилија*
Коренски бројеви ϵ_f су равномерно распоређени по јединичној кружници, па је $\langle \epsilon_f^{\frac{k}{2}-\ell} \rangle = 0$, осим у случају када је $\frac{k}{2} - \ell = 0$. Према томе, k мора бити паран број и преостаје само $\binom{k}{k/2}$ чланова у суми.

– *Симплектичка фамилија*
Важи $\epsilon_f = 1$ за све L-функције у фамилији. Због тога је $\langle \epsilon_f^{\frac{k}{2}-\ell} \rangle = 1$ за све k и ℓ, па преостаје свих 2^{2k} чланова без икаквих рестрикција.

– *Ортогонална фамилија*
У овом случају је $\epsilon_f = 1$ за једну половину и $\epsilon_f = -1$ за другу половину L-функција у фамилији. Зато је $\langle \epsilon_f^{\frac{k}{2}-\ell} \rangle = 0$, осим у случају када је $\frac{k}{2} - \ell$ паран број. То значи да k мора бити парно, као и да преостаје 2^{k-1} чланова у суми.

(4) Заменити сваки од преосталих чланова својом очекиваном вредношћу усредњеној по фамилији која се посматра. Конкрентно, својом очекиваном вредношћу биће замењени сви производи облика

$$a_{n_1}(f) \cdots a_{n_\ell}(f) \overline{a_{n_{\ell+1}}(f) \cdots a_{n_k}(f)}$$

у члановима (1.31) коју су преостали после корака (3). При томе ће све очекиване вредности бити облика

$$c(\mathcal{F}) \delta_\ell(n_1, \ldots, n_k),$$

где је $c(\mathcal{F})$ константа која зависи само од фамилије $\mathcal{F}$, а δ_ℓ су мултипликативне функције;

$$\delta_\ell(m_1 n_1, m_2 n_2, \ldots, m_k n_k) = \delta_\ell(m_1, m_2, \ldots, m_k) \delta_\ell(n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

важи за све целе бројеве m_i, n_i, $1 \leq i \leq k$.

(5) Сумације у свим члановима се продуже до бесконачности. Као резултат таквих продужења настаје функција која се означава са $M_f\left(\frac{1}{2}, \alpha\right)$, где је $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(6) Добија се хипотеза

$$I_k(\mathcal{F}, \alpha, g) = \sum_{f \in \mathcal{F}} M_f\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) \left(1 + O(e^{(-\frac{1}{2}+\varepsilon)c(f)})\right) g(c(f))$$

из које, пуштајући $\alpha_i \to 0$ за све $1 \leq i \leq k$, следи и хипотеза за k-ти момент у фамилији примитивних L-функција $\{L(s, f) \mid f \in \mathcal{F}\}$.

Сви коментари исписани после рецепта за моменте примитивне L-функције у t-аспекту су и овде на снази. Тако је и у случају управо приказаног рецепта могуће функцију M_f записати у облику контурног интеграла, уз јасно издвојен аритметички фактор, дефинисан одговарајућим Ојлеровим производом.

Као пример хипотезе добијене на основу рецепта описаног у овом одељку биће приказана хипотеза о моментима у фамилији квадратних Дирихлеових L-функција, индексираној позитивним фундаменталним дискриминантама, која је изведена у [26], Хипотеза 1.5.3. За детаљно разматрање и доказе ове хипотезе у случајевима $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ погледати [46], [61], [94] и [97].

Хипотеза 1.3. Нека је $g(u)$ погодна тежинска функција са носачем на $(0, \infty)$ и

$$X(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Тада је

$$\sum_{d>0}^{*} L\left(\frac{1}{2}, \chi_d\right)^k g(d) = \sum_{d>0}^{*} Q_k(\log d)\left(1 + O(d^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\right) g(d),$$

при чему је сумација по позитивним фундаменталним дискриминантама[3] d, а Q_k је полином степена $\frac{k(k+1)}{2}$ изражен контурним интегралом

$$Q_k(x) = \frac{(-1)^{k(k-1)}2^k}{k!} \frac{1}{(2\pi i)^k} \oint \cdots \oint \frac{G(z_1, \ldots, z_k)\Delta(z_1^2, \ldots, z_k^2)^2}{\prod_{j=1}^k z_j^{2k-1}} e^{\frac{x}{2}\sum_{j=1}^k z_j} dz_1 \ldots dz_k$$

по малим кружницама око $z_i = 0$, $1 \le i \le k$, уз

$$G(z_1, \ldots, z_k) = A_k(z_1, \ldots, z_k) \prod_{j=1}^{k} X\left(\frac{1}{2} + z_j\right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{1 \le i \le j \le k} \zeta(1 + z_i + z_j),$$

где је аритметички фактор A_k дат Ојлеровим производом

$$\begin{aligned} A_k(z_1, \ldots, z_k) = \prod_p \prod_{1 \le i \le j \le k} &\left(1 - \frac{1}{p^{1+z_i+z_j}}\right) \\ &\times \left(\frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}+z_j}}\right)^{-1} + \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{2}+z_j}}\right)^{-1}\right) + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \end{aligned}$$

и $\Delta(z_1, \ldots, z_k)$ је ознака за Вандермондову детерминанту.

1.5. Неанулирање L-функција

У досадашњем излагању описано је како се разумевању L-функција може приступати изучавањем њихових момената. У овом одељку фокус приче биће окренут

[3] фундаменталне дискриминанте су бесквадратни цели бројеви d са особином $d \equiv 1 \pmod 4$, као и цели бројеви облика $4k$, где је k неки бесквадратан цео број са особином $k \equiv 2, 3 \pmod 4$.

ка још једном значајном проблему, а то је проблем расподеле нула L-функција. Један пример због чега је значајно знати да ли се L-функција (не)анулира у некој тачки је већ приказан: чињеница да постоји бесконачно много простих бројева у аритметичким прогресијама је есенцијално последица неанулирања Дирихлеових L-функција придружених нетривијалним карактерима у тачки $s = 1$.

Надаље ће, пре свега, од интереса бити питање неанулирања L-функција из неке фамилије у централној тачки, што је тачка симетрије њихове функционалне једначине. При томе, за L-функцију се очекује да се не анулира у тој тачки, осим ако за то не постоји или тривијалан или неки разлог који је дубоке аритметичке природе. Тривијалан разлог за анулирање се испољава у ситацијама када сам облик функционалне једначине имплицира да се одговарајућа L-функција мора анулирати у централној тачки. Један такав пример може се пронаћи у фамилији L-функција нормализованих непарних Хекеових Масових форми. У сврху објашњења тог примера биће приказано неколико појмова теорије аутоморфних форми, док се детаљнији приказ те теорије може пронаћи у [58, Главе 14. и 15.].

Нека је, једноставности ради, Γ ознака за групу

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Та група дејствује на хиперболичку раван $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ Мебијусовим трансформацијама,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma, z \in \mathbb{H}.$$

Масова форма се онда дефинише као глатка, ненула функција $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ која има следеће особине:

- Γ-*периодичност или услов аутоморфности*
  За све $\gamma \in \Gamma$ и $z \in \mathbb{H}$ важи
  $$f(\gamma \cdot z) = f(z).$$
- *Сопствена је функција хиперболичког Лапласовог оператора*
  Постоји комплексан број λ такав да је
  $$\Delta(f) = \lambda f,$$
  где је $\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ ознака за хиперболички Лапласов оператор.
- *Ограничен раст*
  Постоји природан број N такав да за све $z \in \mathbb{H}$, $\Im(z) \geq 1$ важи
  $$f(z) = O\left(\Im(z)^N \right).$$

Масова форма f се назива куспидалном ако за све $z \in \mathbb{H}$ важи

$$\int_0^1 f\left(\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot z\right) dt = \int_0^1 f(z+t)dt = 0.$$

Рефлексија $z \to -\overline{z}$ комплексне равни индукује пресликавање I на простору свих функција $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$,

$$I(f(z)) = f(-\overline{z}), \quad f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \in \mathbb{H}.$$

То пресликавање је у сагласности са дејством групе Γ и комутира са хиперболичким Лапласовим оператором, па омогућава да се направи једноставна класификација Масових форми. Конкретно, за сваку Масову форму f важи $I(f) = f$ или $I(f) = -f$, па се у првом случају за f каже да је парна, а у другом да је непарна.

Масове форме се могу посматрати у ширем оквиру простора аутоморфних функција $\mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, што су функције $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ које имају већ поменуто својство аутоморфности,

$$f(\gamma \cdot z) = f(z), \quad \text{за све } \gamma \in \Gamma \text{ и } z \in \mathbb{H}.$$

На том простору дефинисан је скаларни производ

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}\frac{dxdy}{y^2}, \quad f, g \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$$

у односу на кога је

$$\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \{f \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \mid \|f\| < \infty\}$$

један Хилбертов простор.

Хекеови оператори представљају одређене операторе ,,усредњавања” на Хилбертовом простору $\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Они су дефинисани за сваки природан број n са

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{a,d>0 \\ ad=n}} \sum_{b \pmod d} f\left(\frac{az+b}{d}\right), \quad f \in \mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H}), z \in \mathbb{H}.$$

Хекеови оператори су самоадјунговани, што значи да

$$\langle T_n f, g\rangle = \langle f, T_n g\rangle$$

важи за све природне бројеве n и све $f, g \in \mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Поред те, Хекеови оператори имају још и значајну особину да сви комутирају и међусобно, али и са хиперболичким Лапласовим оператором Δ. Наведена својства гарантују егзистенцију ортонормиране базе (коначно-димензионог) простора куспл идалних Масових форми сачињену од вектора $\{f_j(z), 1 \leq j \leq N\}$ који су сопствени за све Хекеове операторе T_n,

$$(T_n f_j)(z) = \lambda_j(n) f_j(z), \quad \text{за све } 1 \leq j \leq N, n \geq 1, z \in \mathbb{H},$$

при чему су скалари $\lambda_j(n)$ сопствене вредности Хекеовог оператора T_n за све природне бројеве n. Куспидалне Масове форме $f_j(z), 1 \leq j \leq N$ се називају Хекеовим.

Свакој Масовој форми f може се придружити одговарајућа L-функција. У грубим цртама, поступак таквог придруживања је следећи. Пре свега, из услова аутоморфности за f следи да је

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot z\right) = f(z) \quad \text{тј.} \quad f(z+1) = f(z)$$

испуњено за све $z \in \mathbb{H}$. Ова особина 1-периодичности омогућава да се f запише у облику Фуријеовог развоја

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(y) e^{2\pi i n x}, \ \ z = x + iy,$$

при чему су $a_n(y)$ одговарајуће функције коефицијената. Те функције се могу одредити користећи чињеницу да је Масова форма f сопствена функција хиперболичког Лапласовог оператора Δ. Прецизније, на основу те чињенице следи да су $a_n(y)$ решења генерализованих Беселових диференцијалних једначина. Решавањем тих једначина, уз коришћење чињенице да се сопствена вредност λ оператора Δ која одговара Масовој форми f увек може изразити у облику $\lambda = \frac{1}{4} - \nu^2$ за неки комплексан број ν који је јединствен до на знак, се добија

$$\begin{aligned} a_n(y) &= c_n \sqrt{y} K_\nu(2\pi |n| y), \ \ n \neq 0 \\ a_0(y) &= c_0 y^{\frac{1}{2}-\nu} + d_0 y^{\frac{1}{2}+\nu}, \end{aligned}$$

где су $c_i, i \in \mathbb{Z}$ и d_0 неки комплексни бројеви, а K је ознака за Беселову K-функцију, дефинисану са

$$K_s(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^s \frac{dt}{t}$$

за све $s \in \mathbb{C}$ и $y > 0$. Додатно, у случају да је Масова форма куспидална, важи $a_0(y) = 0$ за све $y > 0$, па је

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n \sqrt{y} K_\nu(2\pi |n| y) e^{2\pi i n x}, \ \ z = x + iy.$$

Користећи претходни Фуријеов развој дефинише се L-функција придружена куспидалној Масовој форми f са

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}, \ \ \Re(s) > \frac{3}{2}.$$

Овако дефинисана L-функција може се аналитички проширити до целе функције на комплексној равни која задовољава одговарајућу функционалну једначину. Специјално, L-функција $L(s, f)$ произвољне непарне Хекеове Масове форме f има функционалну једначину облика

$$L(s,f)G(1+s) = -L(1-s,f)G(2-s),$$

где је G неки производ гама-фактора. Стављајући $s = \frac{1}{2}$ у ту једначину добија се $L\left(\frac{1}{2},f\right) = -L(\frac{1}{2},f)$, што повлачи $L(\frac{1}{2},f) = 0$. Тиме је приказан један пример тривијаног разлога за анулирање неке L-функције у централној тачки.

Хипотеза Берча и Свинертон-Дајера Добар пример нетривијалног разлога за анулирање L-функције у централног тачки осликава позната хипотеза Берча и Свинертон-Дајера, формулисана у [10]. У сврху илустровања те хипотезе, нека је, једноставности ради,

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{Q} \tag{1.32}$$

произвољна елиптичка крива над пољем рационалних бројева $\mathbb{Q}$. Скуп свих тачака $E(\overline{\mathbb{Q}})$ те криве над неким алгебарским затворењем $\overline{\mathbb{Q}}$ поља $\mathbb{Q}$ има структуру Абелове групе. Штавише, према фундаменталној теореми Мордел-Вејла[4], скуп свих рационалних тачака $E(\mathbb{Q})$ криве E је коначно генерисана подгрупа те групе. Према томе, важи изоморфизам

$$E(\mathbb{Q}) \cong E(\mathbb{Q})^{\mathrm{tors}} \times \mathbb{Z}^r,$$

где је $r \geq 0$ цео број који се назива рангом елиптичке криве E и $E(\mathbb{Q})^{\mathrm{tors}}$ је нека коначна Абелова група.

Са друге стране, рационалне тачке елиптичке криве E могу се посматрати и као решења Диофантове једначине (1.32) која је дефинише. Један приступ тражењу таквих решења одређен је Хасеовим локално-глобалним принципом. Тај принцип није описан неком специфичном теоремом, већ начелом по коме ће једначина (1.32) имати решење у пољу рационалних бројева $\mathbb{Q}$ ако и само ако она има решења у свим његовим комплетирањима. Према теореми Островског, сва комплетирања поља $\mathbb{Q}$ су поља p-адичких бројева $\mathbb{Q}_p$ (p-прост број) и поље реалних бројева $\mathbb{R}$, које се може означити са $\mathbb{Q}_\infty$. Дакле, грубо говорећи, тражење тачака елиптичке криве E над пољем $\mathbb{Q}$ је исто као тражење тачака те криве над свим пољима $\mathbb{Q}_p$, где је p у скупу $\hat{\mathcal{P}}$ који садржи све просте бројеве и ∞. Због тога што Хасеов локално-глобални принцип нема потпору у егзактној теореми, пожељно је дефинисати објекат који на неки начин „мери" колико га елиптичка крива E „нарушава". Тај објекат је познат као група Тејт-Шафаревича $Ш(E)$ и дефинисан је на следећи начин.

Нека је $\mathbb{Q}_p$, $p \in \hat{\mathcal{P}}$ неко фиксирано комплетирање поља $\mathbb{Q}$. Тада свако утапање

$$\phi_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}_p}$$

неког алгебарског затворења $\overline{\mathbb{Q}}$ поља $\mathbb{Q}$ у неко алгебарско затворење $\overline{\mathbb{Q}_p}$ поља $\mathbb{Q}_p$

[4]прецизније говорећи, коначну генерисаност група рационалних тачака елиптичких кривих (1.32) доказао је Мордел 1922. године и то тврђење познато је као Морделова теорема (в. [79] или [95, 8. глава]), док теорема Мордел-Вејла показује коначну генерисаност много општијих група рационалних тачака Абелових варијетета над произвољним бројевним пољима.

индукује утапање одговарајућих Галуаових група

$$\phi_p' : \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right) \to \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p\right). \tag{1.33}$$

Дејство Галуаове групе $\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$ на Абелову групу $E(\overline{\mathbb{Q}})$, дефинисано са

$$\sigma \cdot (x,y) = (\sigma(x), \sigma(y)), \quad \sigma \in \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right), (x,y) \in E(\overline{\mathbb{Q}}),$$

даје групи $E(\overline{\mathbb{Q}})$ структуру $\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$-модула. Слично и група $E(\overline{\mathbb{Q}_p})$ има структуру $\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p\right)$-модула. Због тога се могу посматрати одговарајуће кохомолошке групе $H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right), E(\overline{\mathbb{Q}})\right)$ и $H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p\right), E(\overline{\mathbb{Q}_p})\right)$, при чему утапање (1.33) индукује одговарајуће утапање

$$\Phi_p : H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right), E(\overline{\mathbb{Q}})\right) \to H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p\right), E(\overline{\mathbb{Q}_p})\right).$$

Група Тејт-Шафаревича $\text{Ш}(E)$ елиптичке криве E дефинише се као

$$\text{Ш}(E) = \bigcap_{p \in \hat{\mathcal{P}}} \ker \Phi_p.$$

Смисао ове групе као ,,детектора нарушености" Хасеовог локално-глобалног принципа онда објашњава чињеница да тачкама криве E над $\mathbb{Q}$ (односно $\mathbb{Q}_p$) одговарају тривијални елементи у $H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right), E(\overline{\mathbb{Q}})\right)$ (односно $H^1\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p\right), E(\overline{\mathbb{Q}_p})\right)$).

Још један значајан објекат који се може придружити свакој елиптичкој кривој E је одговарајућа Хасе-Вејлова L-функција $L(s,E)$. Конкретна конструкција тих функција аналогна је конструкцији L-функција за елиптичке криве над функцијским пољима, која је описана у Одељку 3.2.

Хипотеза Берча и Свинертон-Дајера предвиђа да је Тејлоров развој за $L(s,E)$ око централне тачке 1 једнак

$$L(s,E) = c(s-1)^r + \text{ чланови вишег реда}$$

где је r баш ранг елиптичке криве E, а за константу c важи

$$c = \frac{|\text{Ш}(E)|}{|E(\mathbb{Q})^{\mathrm{tors}}|^2} \times (\text{неки локални фактори}) \neq 0.$$

Према томе, ранг елиптичке криве E једнак је реду нуле L-функције $L(s,E)$ у централној тачки $s=1$ и специјално, $L(1,E) \neq 0$ ако и само ако је група рационалних тачака елиптичке криве E коначна.

Треба нагласити да су Хасе-Вејлове L-функције иницијално дефинисане у региону $\Re(s) > 2$, па је за посматрање вредности $L(1,E)$ неопходно аналитичко проширење $L(s, E)$ до мероморфне функције на целој комплексној равни, што у време формулације хипотезе Берча и Свинертон-Дајера није било познато за све елиптичке криве (1.32). Поменуто аналитичко проширење било је познато за класу модуларних елиптичких кривих, што су оне криве које се могу конструисати као количници хиперболичке равни $\mathbb{H}$ приликом дејства конгруентних подгрупа групе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ Мебијусовим трансформацијама. Према хипотези Танијама-Шимуре, ригорозно формулисаној 1957. године, свака елиптичка крива је модуларна, па је, барем хипотетички, имало смисла посматрати вредности $L(1, E)$. Године 1995. Вајлс (в. [99]) је за потребе доказа Велике Фермаове теореме демонстрирао важење хипотезе Танијама-Шимуре за велику класу елиптичких кривих, док је поменута хипотеза убрзо у потпуности доказана од стране Бројла, Дајмонда, Конрада и Тејлора (в. [12], [22] и [35]) и данас је позната као теорема модуларности. Тиме је нестала етикета хипотетичности са вредности $L(1, E)$ за све елиптичке криве E. Међутим, хипотеза Берча и Свинертон-Дајера повезује и ранг елиптичке криве са редом групе Тејт-Шафаревича, чија је коначност још увек отворено питање. Дакле, иако у хипотези Берча и Свинертон-Дајера више нема објеката чија егзистенција није позната, у њој и даље фигуришу вредности за које није познато да су коначне.

Због тога и не чуди да је хипотеза Берча и Свинертон-Дајера отворена до данашњег дана, мада су почетни резултати ка њеном решењу били обећавајући. Тако су Коутс и његов тадашњи студент Вајлс, 1976. године у раду [21] доказали да за елиптичке криве E са комплексним множењем[5], такве да је $L(1, E) \neq 0$, важи да је група $E(\mathbb{Q})$ коначна. Наредни значајан напредак представљала је формула Грос-Загијеа [49] која омогућава да се у групи рационалних тачака (модуларне) елиптичке криве E пронађе елемент бесконачног реда, под условом да је $L(1, E) = 0$ и $L'(1, E) \neq 0$ (в. [48]). Користећи овај резултат, уз нове идеје персонификоване тзв. Ојлеровим системима, Коливагин [71] је успео да докаже валидност Берч и Свинертон-Дајер хипотезе за (модуларне) елиптичке криве ранга највише 1. Међутим, од Коливагиновог резултата није било значајнијег напретка све до серије радова [7], [8] и [9] Баргаве и Шанкара. Конкетно, у [8], аутори су показали да средња вредност ранга елиптичких кривих над $\mathbb{Q}$ не може бити већа од 1.17. На основу тог резултата успели су даље да покажу да је позитивна пропорција елиптичких кривих ранга 0, па стога на основу резултата Коливагина задовољава хипотезу Берча и Свинертон-Дајера.

Човлина хипотеза Још једна значајна хипотеза у вези неанулирања L-функција је позната Човлина хипотеза. Она је оригинално формулисана од стране Човле у [20] и предвиђа да за све квадратне Дирихлеове карактере χ важи

$$L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \neq 0, \tag{1.34}$$

[5] прстен ендоморфизама $\mathrm{End}(E)$ сваке елиптичке криве E садржи потпрстен изоморфан прстену целих бројева $\mathbb{Z}$. Уколико је баш $\mathrm{End}(E) \cong \mathbb{Z}$, за E се каже да је без компексног множења, док је у супротном E елиптичка крива са комплексним множењем.

а убрзо је проширена предвиђањем да (1.34) важи за све Дирихлеове карактере χ. Постоји велики број нумеричких доказа који сугеришу валидност Човлине хипотезе (в. [88] и [91]), али без обзира на њих она је и даље потпуно отворена. Ипак, неки значајни резултати у правцу ка њеном доказу јесу остварени.

Први такав резултат добио је Јутила [61], као последицу израчунавања првог и другог момента за фамилију квадратних Дирихлеових L-функција. Конкретно, он је доказао да постоје позитивне константе c_1 и c_2 такве да је

$$\mathcal{M}_1 = \sum_{|d|\leq X}{}^{*} L\left(\frac{1}{2}, \chi_d\right) \sim c_1 X \log X \tag{1.35}$$

и

$$\mathcal{M}_2 = \sum_{|d|\leq X}{}^{*} \left|L\left(\frac{1}{2}, \chi_d\right)\right|^2 \sim c_2 X (\log X)^3, \tag{1.36}$$

при чему $\sum^*$ значи да је сумација по фундамендалним дискриминантама d. Из неједнакости Коши-Шварца онда следи

$$\sum_{\substack{|d|\leq X \\ L(\frac{1}{2},\chi_d)\neq 0}}{}^{*} 1 \geq \frac{|\mathcal{M}_1|^2}{\mathcal{M}_2} \gg \frac{X}{\log X}, \tag{1.37}$$

што показује да (1.34) важи за бесконачно много квадратних Дирихлеових L-функција.

Значајно бољи резултат дело је Саундарараџана [97], који је успео да покаже да (1.34) важи за барем 87.5% свих квадратних Дирихлеових L-функција. Његов доказ се базира на употреби технике која је позната као молификација. Ту технику су први пут употребили Бор и Ландау у раду [11]. Међутим, много значајнију пажњу је заслужила после рада [92], у коме је Селберг користећи молификацију доказао да се позитивна пропорција нула Риманове зета функције налази на критичној оси $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Конкретна идеја у [97] је да се уместо директног рачунања првог и другог момента као у (1.35) и (1.36), посматрају тзв. молификовани моменти

$$\widetilde{\mathcal{M}_1} = \sum_{|d|\leq X}{}^{*} L\left(\frac{1}{2}, \chi_d\right) M(d)$$

и

$$\widetilde{\mathcal{M}_2} = \sum_{|d|\leq X}{}^{*} \left|L\left(\frac{1}{2}, \chi_d\right) M(d)\right|^2,$$

где је $M(d)$ нека функција која се назива молификатор. Циљ је изабрати ту функцију тако да моменти $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ и $\widetilde{\mathcal{M}_2}$ буду асимптотски упоредиве величине, јер ће онда примена неједнакост Коши-Шварца налик на ону у (1.37) дати позитивну пропорцију квадратних Дирихлеових L-функција које се не анулирају у тачки $\frac{1}{2}$.

Саундарараџан конкретно користи молификатор облика

$$M(d) = \sum_{n \le N} \frac{\lambda_n \chi_d(n)}{\sqrt{n}},$$

где су λ_n коефицијенти пропорционални са

$$\mu(n) \cdot \frac{\log^2(N/n)\log(X^{3/2}N^2 n)}{\log^2 N \log N}$$

и N неки параметар (при томе је $\mu(n)$ ознака за Мебијусову функцију). Смисао таквог молификатора је у томе да он представља глатку апроксимацију инверза за (хипотетички) ненула вредности $L(\frac{1}{2}, \chi_d)$, чиме се после одабира $N = X^{1/2-\varepsilon}$ постиже

$$\widetilde{\mathcal{M}_1} \asymp \widetilde{\mathcal{M}_2} \asymp X$$

и добија тражена пропорција неанулирајућих квадратних Дирихлеових L-функција после израчунавања имплицитних константи.

Приказани резултат даје најбољу познату, безусловну пропорцију квадратних Дирихлеових L-функција које се не анулирају у тачки $\frac{1}{2}$. Међутим, треба нагласити да се, под претпоставком важења генерализоване Риманове хипотезе, она може поправити на барем $\frac{15}{16}$, што је демонстрирано у [85].

Идеја молификације се може применити и на фамилију свих Дирихлеових L-функција. У том случају посматрају се молификовани моменти

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{p-2} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \pmod p} L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) M(\chi)$$

и

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{p-2} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \pmod p} \left| L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) M(\chi) \right|^2,$$

где је, једноставности ради, претпостављено да је p прост број, $\sum^*_{\chi \pmod p}$ представља ознаку за сумацију по свим нетривијалним карактерима по модулу p и $M(\chi)$ је молификатор. Слично као и за фамилију квадратних Дирихлеових L-функција, $M(\chi)$ се бира тако да глатко апроксимира вредност $L\left(\frac{1}{2}, \chi\right)$ са циљем да први и други молификовани момент буду упоредиве величине,

$$\mathfrak{M}_1 \asymp \mathfrak{M}_2 \asymp 1.$$

Из таквих асимптотских релација следи

$$\frac{1}{p-2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \pmod p \\ L(\frac{1}{2},\chi) \neq 0}} 1 \geq \frac{1}{p-2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \pmod p \\ L(\frac{1}{2},\chi)M(\chi) \neq 0}} 1 \geq \frac{|\mathfrak{M}_1|^2}{\mathfrak{M}_2} \gg 1,$$

одакле се израчунавањем имплицитне константе добија тражена пропорција неанулирајућих Дирихлеових L-функција.

Претходно описани план први су спровели Баласубраманиан и Мурти [6]. Међутим, њихов избор молификатора није баш нарочито добар, па су успели да докажу да се само мала (али ипак позитивна) пропорција Дирихлеових L-функција не анулира у тачки $\frac{1}{2}$.

Знатно бољи резултат дали су Ивањец и Сарнак у раду [60] који је инспирисао и Саундарараџанов избор за молификатор у [97]. Они су користили молификатор облика

$$M(\chi) = \sum_{n \le N} \frac{\lambda_n \chi(n)}{\sqrt{n}},$$

где је

$$\lambda_n = \mu(n) \frac{\log\left(\frac{N}{n}\right)}{\log N}$$

и $N = p^\theta$ неки параметар. Потом су успели да израчунају први и други молификовани моменат за $\theta < \frac{1}{2}$, одакле су добили да је пропорција Дирихлеових L-функција које се не анулирају у тачки $\frac{1}{2}$ барем $\frac{1}{3}$. Узимањем молификатора измењених облика и дужина, њихов резултат су онда поправљали прво Буи [13] на 34.11%, затим Кан и Но [70] на $\frac{3}{8}$ и потом Кан, Милићевић и Но [69] на $\frac{5}{13}$.

Може се приметити да су, уз сва побољшања, резултати за фамилију свих Дирихлеових L-функција и даље доста далеко од Саундарараџановог резултата за фамилију квадратних Дирихлеових L-функција. Своју занимљиву интуицију у вези са узроком такве разлике поделио је сам Саундарараџан у [97], где га повезује са различитим типовима симетрија посматраних фамилија. Наиме, фамилија свих Дирихлеових L-функција је унитарна, па се функције у њој мање „одбијају” у централној тачки $\frac{1}{2}$ у односу на квадратне Дирихлеове L-функције, које имају симплектички тип симетрије.

Поред неанулирања L-функција из фамилија предвиђених Човлином хипотезом, интензивно је истраживано и неанулирање L-функција и њихових извода у многим другим интересантним фамилијама. Неки од значајних резултата везаних за ту тематику могу се пронаћи у [17], [18], [57], [67], [68], [72], [81], [84] и [86].

ГЛАВА 2

Аритметика функцијских поља

У овој глави биће приказан кратак преглед основних појмова и резултата везаних за аритметику функцијских поља. Детаљнији приказ ове тематике могуће је пронаћи у [87].

2.1. Полиноми над коначним пољима

Осим ако то није другачије наглашено, надаље ће се за q подразумевати да је степен неког простог броја p који испуњава услове $(q, 6) = 1$ и $q \equiv 1 \pmod 4$, док ће $\mathbb{F}_q$ бити ознака за коначно поље са q елемената. Главни оквир даљег излагања биће прстен полинома $\mathbb{F}_q[t]$ над коначним пољем $\mathbb{F}_q$. Тај прстен има велики број (алгебарских) особина које су у складу са прстеном целих бројева $\mathbb{Z}$. Тако су, на пример, оба наведена прстена еуклидски домени у којима постоји само коначно много инвертибилних елемената. Последица поменутих сличности је да велики број објеката над $\mathbb{Z}$, као и питања везаних за њих, имају своје аналоге у прстену $\mathbb{F}_q[t]$. Аналог поља рационалних бројева $\mathbb{Q}$ је поље разломака $\mathbb{F}_q(t)$ прстена $\mathbb{F}_q[t]$, које се назива пољем рационалних функција над $\mathbb{F}_q$.

Ради једноставности нотације, степен полинома $f \in \mathbb{F}_q[t]$ биће означаван са $\mathbf{d}(f)$. Ако је $f \in \mathbb{F}_q[t]$ ненула полином, онда је кардиналност количничког прстена $\mathbb{F}_q[t]/f\mathbb{F}_q[t]$ једнака $q^{\mathbf{d}(f)}$. Тај број се назива нормом полинома f и означава се са $|f|$, при чему је додатно додефинисано $|0| = 0$.

Улогу коју у прстену $\mathbb{Z}$ имају природни бројеви у прстену $\mathbb{F}_q[t]$ имају монични полиноми. Скуп свих моничних полинома над $\mathbb{F}_q[t]$ означава се са $\mathcal{M}$. Несводљиви полиноми из $\mathcal{M}$ представљају аналог простих бројева и понекад ће бити називани простим полиномима. Скуп свих таквих полинома означава се са $\mathcal{P}$. Ако је P прост и $f \in \mathbb{F}_q[t]$ произвољан полином, онда се дефинише $\mathrm{ord}_P(f) = j$ ако $P^j | f$ и $P^{j+1} \nmid f$.

За фиксирани природан број n биће посматрани наредни подскупови од $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n &= \{f \in \mathcal{M} \mid \mathbf{d}(f) = n\}\\ \mathcal{M}_{\leq n} &= \{f \in \mathcal{M} \mid \mathbf{d}(f) \leq n\}\\ \mathcal{H} &= \{f \in \mathcal{M} \mid f \text{ бесквадратан}\},\\ \mathcal{H}_n &= \{f \in \mathcal{H} \mid \mathbf{d}(f) = n\},\end{aligned}$$

при чему се полином из $\mathbb{F}_q[t]$ назива бесквадратним ако није дељив квадратом ниједног полинома позитивног степена из $\mathbb{F}_q[t]$. Треба још нагласити да је за сваки природан број n испуњено

$$|\mathcal{H}_n| = q^n \left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

што ће често бити коришћено у каснијем излагању.

2.2. Аритметичке функције и зета функција прстена $\mathbb{F}_q[t]$

Аритметичке функције прстена $\mathbb{F}_q[t]$ су пресликавања $\mathbb{F}_q[t] \to \mathbb{C}$. Слично као код аритметичких функција над $\mathbb{Z}$, и у контексту прстена $\mathbb{F}_q[t]$ по значају се истичу мултипликативне аритметичке функције, описане наредном дефиницијом. Пре саме дефиниције треба напоменути да је (f, g) ознака за монични заједнички делилац највећег степена полинома f и g из $\mathbb{F}_q[t]$.

Дефиниција 2.1. Аритметичка функција $\alpha : \mathbb{F}_q[t] \to \mathbb{C}$ је мултипликативна ако за све $f, g \in \mathbb{F}_q[t]$ такве да је $(f, g) = 1$ важи $\alpha(fg) = \alpha(f)\alpha(g)$. Додатно, ако $\alpha(fg) = \alpha(f)\alpha(g)$ важи за све $f, g \in \mathbb{F}_q[t]$ аритметичка функција α се назива тотално мултипликативном.

Аналогија прстена $\mathbb{F}_q[t]$ са прстеном целих бројева огледа се и приликом дефинисања аритметичких функција, као што се може видети у наредним примерима.

Дефиниција 2.2. Мебијусова функција за полином $f \in \mathbb{F}_q[t]$ дефинисана је са

$$\mu(f) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{ако је } f = cP_1P_2\cdots P_k, \text{ за } c \in \mathbb{F}_q^\times \text{ и } P_1, \ldots, P_k \text{ различите просте} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Дефиниција 2.3. Делитељска функција $\tau(f)$ представља број моничних делилаца полинома $f \in \mathbb{F}_q[t]$.

Дефиниција 2.4. Ојлерова функција ϕ ненула полинома $f \in \mathbb{F}_q[t]$ представља број инвертибилних елемената количничког прстена $\mathbb{F}_q[t]/f\mathbb{F}_q[t]$. Додатно, за нула полином се дефинише $\phi(0) = 0$.

Попут њима аналогних класичних функција, све претходно дефинисане аритметичке функције над $\mathbb{F}_q[t]$ имају особину мултипликативности. Додатно, за Ојлерову функцију важи формула

$$\phi(f) = |f| \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P|f}} \left(1 - \frac{1}{|P|}\right)$$

која је у потпуном складу са одговарајућом формулом за класичну Ојлерову функцију.

Изучавање простих полинома уско је везано за зета функцију прстена $\mathbb{F}_q[t]$. Та функција представља аналог класичне Риманове зета функције и описана је наредном дефиницијом.

Дефиниција 2.5. Зета функција прстена $\mathbb{F}_q[t]$, у ознаци $\zeta_q(s)$, дефинисана је са

$$\zeta_q(s) = \sum_{f \in \mathcal{M}} \frac{1}{|f|^s}$$

за $\Re(s) > 1$.

Користећи чињеницу да је за сваки природан број n кардиналност скупа $\mathcal{M}_n$ једнака q^n, следи

$$\begin{aligned} \zeta_q(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{f \in \mathcal{M}_n} \frac{1}{q^{ns}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^{n(s-1)}} \\ &= \frac{1}{1 - q^{1-s}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Израз (2.1) омогућава да се зета функција прошири до мероморфне функције на целој комплексној равни, при чему постоји само један прост пол у тачки $s = 1$. Додатно, на основу (2.1) директно следи да ,,комплетирана" зета функција $\xi_q(s)$, дефинисана са $\xi_q(s) = q^{-s}(1 - q^{-s})^{-1}\zeta_q(s)$, задовољава функционалну једначину

$$\xi_q(1 - s) = \xi_q(s),$$

која је аналогна функционалној једначини комплетиране Риманове зета функције. Још једна аналогија између зета функције прстена $\mathbb{F}_q[t]$ и Риманове зета функције лежи у чињеници да и за $\zeta_q(s)$ постоји запис у облику Ојлеровог производа,

$$\zeta_q(s) = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{|P|^s}\right)^{-1},$$

који је валидан за $\Re(s) > 1$.

Често је згодно увести смену $u = q^{-s}$ и писати $\mathcal{Z}(u) = \zeta_q(s)$. Идентитет (2.1) онда даје једноставан израз за $\mathcal{Z}$ у облику рационалне функције променљиве u, $\mathcal{Z}(u) = \frac{1}{1-qu}$.

За крај овог одељка биће наведене две верзије Перонове формуле над функцијским пољима, које омогућавају да се за произвољан природан број n суме неке аритметичке по скупу $\mathcal{M}_n$, односно $\mathcal{M}_{\leq n}$, изразе преко одговарајућег контурног интеграла. Конкретно, уз претпоставку да $\sum_{f \in \mathcal{M}} c(f) u^{\mathrm{d}(f)}$ апсолутно конвергира за

$|u| \le r < 1$, важи

$$\sum_{f \in \mathcal{M}_n} c(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=r} \left(\sum_{f \in \mathcal{M}} c(f) u^{\mathbf{d}(f)} \right) \frac{du}{u^{n+1}}$$

и

$$\sum_{f \in \mathcal{M}_{\le n}} c(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=r} \left(\sum_{f \in \mathcal{M}} c(f) u^{\mathbf{d}(f)} \right) \frac{du}{u^{n+1}(1-u)}.$$

2.3. Квадратни Дирихлеови карактери и L-функције над $\mathbb{F}_q[t]$

Пут дефинисања квадратних Дирихлеових карактера над $\mathbb{F}_q[t]$ сличан је путу дефинисања квадратних Дирихлеових карактера над $\mathbb{Z}$ и почиње дефиницијом Лежандровог симбола.

Дефиниција 2.6. Нека је $P \in \mathcal{P}$ прост полином. Лежандров симбол $\left(\frac{f}{P}\right)$ за полином $f \in \mathbb{F}_q[t]$ дефинисан је са

$$\left(\frac{f}{P}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ако } f \text{ потпун квадрат по модулу } P, P \nmid f \\ -1, & \text{ако } f \text{ није потпун квадрат по модулу } P, P \nmid f \\ 0, & \text{ако } P | f. \end{cases}$$

Лежандров симбол се може тотално мултипликативно проширити са простих полинома на све моничне полиноме: ако је $Q = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \cdots P_k^{e_k}$ факторизација полинома $Q \in \mathcal{M}$ на просте факторе, онда $\left(\frac{f}{Q}\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{f}{P_i}\right)^{e_i}$. На тај начин се долази до објеката познатих као Јакобијеви симболи.

Поред особине тоталне мултипликативности, за Јакобијеве симболе је значајно и то што, у потпуној аналогији са класичним Јакобијевим симболима, задовољавају закон квадратног реципроцитета. Њега је у XIX веку доказао Дедекинд. Детаљан доказ, као и формулације и докази општијих закона реципроцитета над $\mathbb{F}_q[t]$ могу се пронаћи у [19] и [87]. За потребе овог излагања је довољан само наредни специјалан облик: ако су $f, g \in \mathcal{M}$ два ненула, монична и узајамно проста полинома, онда је

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{g}{f}\right) (-1)^{\frac{q-1}{2}\mathbf{d}(f)\mathbf{d}(g)}.$$

Почетна претпоставка да је $q \equiv 1 \pmod 4$ омогућава да се претходна формула додатно упрости до облика $\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{g}{f}\right)$ за све узајамно просте полиноме $f, g \in \mathcal{M}$.

Дефиниција 2.7. Квадратни Дирихлеов карактер одређен полиномом $D \in \mathcal{M}$ дефинисан је са

$$\chi_D(f) = \left(\frac{D}{f}\right), \quad \text{за све } f \in \mathcal{M}.$$

Сваком квадратном Дирихлеовом карактеру χ_D може се придружити одговарајућа квадратна Дирихлеова L-функција,

$$L(s, \chi_D) = \sum_{f \in \mathcal{M}} \frac{\chi_D(f)}{|f|^s},$$

иницијално дефинисана за $\Re(s) > 1$. У региону $\Re(s) > 1$ се квадратне Дирихлеове L-функције, налик зета функцији, могу записати у облику Ојлеровог производа,

$$L(s, \chi_D) = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi_D(P)}{|P|^s}\right)^{-1}.$$

Након увођења смене $u = q^{-s}$ и дефинисања $\mathcal{L}(u, \chi_D) = L(s, \chi_D)$, долази се до алтернативних записа који важе за $|u| < \frac{1}{q}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u, \chi_D) &= \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \chi_D(P) u^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} \\ &= \sum_{f \in \mathcal{M}} \chi_D(f) u^{\mathbf{d}(f)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(D) u^n,\end{aligned}$$

где је $A_n(D) = \sum_{f \in \mathcal{M}_n} \chi_D(f)$ за све $n \geq 0$. Ако је D полином позитивног степена који није потпун квадрат неког полинома, онда важи $A_n(D) = 0$ за све $n \geq \mathbf{d}(D)$, видети [87, Пропозиција 4.3]. То показује да је у посматраном случају $\mathcal{L}(u, \chi_D)$ полином степена највише $\mathbf{d}(D) - 1$.

Веома значајна за изучавање квадратних Дирихлеових L-функција је њихова веза са зета функцијама хиперелиптичких кривих. Теорија везана за ту тематику започета је од стране Артина у [4], а детаљнији преглед се може пронаћи у [87] и [89].

Нека је C несингуларна пројективна крива рода g дефинисана над $\mathbb{F}_q$. За сваки природан број n са $\mathcal{N}_C(n)$ је означен број тачака криве C над коначним раширењем $\mathbb{F}_{q^n}$ степена n поља $\mathbb{F}_q$.

Дефиниција 2.8. Зета функција придружена кривој C је дефинисана са

$$\mathcal{Z}_C(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_C(n) \frac{u^n}{n}, \quad |u| < \frac{1}{q}.$$

Значајна за зета функцију $\mathcal{Z}_C(u)$ је чињеница да је она рационална функција променљиве u,

$$\mathcal{Z}_C(u) = \frac{\mathcal{P}_C(u)}{(1-u)(1-qu)},$$

где је $\mathcal{P}_C(u)$ полином променљиве u са целобројним коефицијентима степена $2g$, што је доказао Вејл [98]. При томе, $\mathcal{P}_C(u)$ задовољава функционалну једначину

$$\mathcal{P}_C(u) = (qu^2)^g\, \mathcal{P}_C\left(\frac{1}{qu}\right). \tag{2.2}$$

Вејл [98] је доказао и да Риманова хипотеза важи за $\mathcal{Z}_C(u)$, што значи да се све нуле полинома $\mathcal{P}_c(u)$ налазе на кружници $|u| = \frac{1}{\sqrt{q}}$.

Нека је сада $D \in \mathcal{M}$ бесквадратни полином позитивног степена. Квадратна Дирихлеова L-функција $\mathcal{L}(u,\chi_D)$ тада има ,,тривијалну" нулу у тачки $u = 1$ ако и само ако је $\mathbf{d}(D)$ паран. Због тога је ,,комплетирана" L-функција $\mathcal{L}^*(u,\chi_D)$, дефинисана са

$$\mathcal{L}(u,\chi_D) = (1-u)^{\lambda}\mathcal{L}^*(u,\chi_D), \quad \lambda = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \mathbf{d}(D) \text{ паран} \\ 0, & \text{ако је } \mathbf{d}(D) \text{ непаран,} \end{cases}$$

полином парног степена $2\delta = \mathbf{d}(D) - 1 - \lambda$. Та функција има кључну везу са зета функцијом хиперелиптичке криве $C : y^2 = D$, која је установљена у Артиновој тези и огледа се у једнакости

$$\mathcal{Z}_C(u) = \frac{\mathcal{L}^*(u,\chi_D)}{(1-u)(1-qu)}.$$

На основу функционалне једначине (2.2) онда следи и функционална једначина за $\mathcal{L}^*(u,\chi_D)$,

$$\mathcal{L}^*(u,\chi_D) = (qu^2)^{\delta}\mathcal{L}^*\left(\frac{1}{qu},\chi_D\right), \tag{2.3}$$

док важење Риманове хипотезе за $\mathcal{Z}_C(u)$ имплицира да иста хипотеза важи и за квадратне Дирихлеове L-функције.

Ако је $D \in \mathcal{H}_{2g+1}$ за неки природан број g, онда је, као што је приказано, квадратна Дирихлеова L-функција $\mathcal{L}^*(u,\chi_D)$ полином степена $2g$. Међутим, за многе примене згоднији је приказ за $\mathcal{L}^*(u,\chi_D)$ у облику збира два полинома, једног степена g и другог степена $g-1$. Такав запис се назива ,,апроксимативна функционална једначина" за $\mathcal{L}(u,\chi_D)$, по аналогији са апроксимативним функционалним једначинама за класичне L-функције и демонстриран је у [3, Лема 1].

Тврђење 2.9. Нека је $D \in \mathcal{H}_{2g+1}$. Онда је

$$L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right) = \sum_{f\in\mathcal{M}_{\le g}} \frac{\chi_D(f)}{|f|^{1/2}} + \sum_{f\in\mathcal{M}_{\le g-1}} \frac{\chi_D(f)}{|f|^{1/2}}$$

Доказ. Како је $\mathcal{L}(u,\chi_D)$ полином степена $2g$, може се писати $\mathcal{L}(u,\chi_D) = \sum_{i=0}^{2g} a_n u^n$, где је $a_n = \sum_{f\in\mathcal{M}_n} \chi_D(f)$. На основу функционалне једначине (2.3) онда следи

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2g} a_n u^n &= q^g u^{2g} \sum_{i=0}^{2g} a_n \frac{1}{q^n u^n}\\ &= \sum_{i=0}^{2g} a_n q^{g-n} u^{2g-n}\\ &= \sum_{i=0}^{2g} a_{2g-n} q^{n-g} u^n.\end{aligned}$$

Изједначавањем одговарајућих коефицијената добија се

$$a_n = a_{2g-n} q^{n-g} \quad \text{или} \quad a_{2g-n} = a_n q^{g-n}$$

за све $0 \le n \le 2g$. Враћањем на запис полинома $\mathcal{L}(u, \chi_D)$ претходно даје

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,\chi_D) = \sum_{i=0}^{2g} a_n u^n &= \sum_{i=0}^{g} a_n u^n + \sum_{i=g+1}^{2g} a_n u^n\\ &= \sum_{i=0}^{g} a_n u^n + \sum_{i=0}^{g-1} a_{2g-n} u^{2g-n}\\ &= \sum_{i=0}^{g} a_n u^n + \sum_{i=0}^{g-1} a_n q^{g-n} u^{2g-n}\\ &= \sum_{i=0}^{g} a_n u^n + q^g u^{2g} \sum_{i=0}^{g-1} a_n q^{-n} u^{-n}.\end{aligned}$$

Резултат следи из последњег после стављања $u = q^{-1/2}$ и расписивања коефицијената a_n по дефиницији. □

2.4. Формуле сумације квадратних Дирихлеових карактера над $\mathbb{F}_q[t]$

У овом одељку биће приказано неколико корисних формула за суме квадратних Дирихлеових карактера над $\mathbb{F}_q[t]$. Пре самих приказа, треба нагласити да је надаље $\sum_{C|f}$ ознака за сумацију по свим моничним делиоцима C полинома $f \in \mathbb{F}_q[t]$, док је $\sum_{C|f^\infty}$ ознака за сумацију по свим моничним полиномима C, чији су сви прости фактори међу простим факторима полинома f.

Прва од сумационих формула које ће бити приказана омогућава да се сума карактера по бесквадратним полиномима фиксног степена изрази преко сума по моничним полиномима и изведена је у [42, Лема 2.2.].

Лема 2.10. За сваки монични полином $f \in \mathcal{M}$ је испуњено

$$\sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} \chi_D(f) = \sum_{C | f^\infty} \sum_{h \in \mathcal{M}_{2g+1-2\mathbf{d}(C)}} \chi_f(h) - q \sum_{C | f^\infty} \sum_{h \in \mathcal{M}_{2g-1-2\mathbf{d}(C)}} \chi_f(h).$$

Доказ. Нека је

$$\mathcal{A}_f(u) = \sum_{D \in \mathcal{H}} \chi_f(D) u^{\mathbf{d}(D)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{D \in \mathcal{H}_n} \chi_f(D) u^n. \tag{2.4}$$

Користећи запис за $\mathcal{A}_f(u)$ у облику Ојлеровог производа и закон квадратног реципроцитета добија се

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_f(u) &= \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid f}} \left(1 + \chi_f(P) u^{\mathbf{d}(P)}\right) \\
&= \prod_{P \in \mathcal{P}} \frac{1 - \chi_f^2(P) u^{2\mathbf{d}(P)}}{1 - \chi_f(P) u^{\mathbf{d}(P)}} \\
&= \frac{\mathcal{L}(u, \chi_f)}{\mathcal{L}(u^2, \chi_f^2)} \\
&= \frac{\mathcal{L}(u, \chi_f)}{\mathcal{Z}(u^2) \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | f}} \left(1 - u^{2\mathbf{d}(P)}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Резултат следи после записивања

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | f}} \left(1 - u^{2\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} &= \sum_{C | f^\infty} u^{2\mathbf{d}(C)} \\
\mathcal{Z}(u^2) &= \frac{1}{1 - q u^2} \\
\mathcal{L}(u, \chi_f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h \in \mathcal{M}_n} \chi_f(h) u^n
\end{aligned}$$

и упоређивања коефицијената уз u^{2g+1} у (2.4) и (2.5). □

Друга од значаја је Пуасонова формула сумације. Пре њене формулације и доказа неопходно је приказати појам експоненцијалне функције над функцијским пољима, који је уведен у [51].

Валуација v у ,,бесконачном простом'' у $\mathbb{F}_q(t)$ дефинисана је са

$$v(0) = \infty \quad \text{и} \quad v(f/g) = \mathbf{d}(g) - \mathbf{d}(f),$$

за сваку ненула рационалну функцију $f/g \in \mathbb{F}_q(t)$. Комплетирање поља $\mathbb{F}_q(t)$ у односу на валуацију v означава се са $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$. Сваки елемент a поља $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ може се написати на јединствен начин у облику ,,Лорановог развоја" у околини $\frac{1}{t}$, што је бесконачни ред облика

$$a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left(\frac{1}{t}\right)^n, \quad a_n \in \mathbb{F}_q, \tag{2.6}$$

при чему је само коначно много коефицијената a_n за $n < 0$ различито од нуле. Репрезентација (2.6) омогућава да се валуација v прошири на $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$. Ако је $a \in \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ ненула елемент који има развој (2.6), онда је $v(a)$ најмањи цео број n такав да је коефицијент a_n у (2.6) различит од нуле.

Дефиниција 2.11. Нека је $a \in \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$. Експоненцијална функција за a дефинисана је са

$$e(a) = e^{2\pi i \operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a_1)/p},$$

где је a_1 коефицијент уз $\frac{1}{t}$ у Лорановом развоју (2.6) за a и $\operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ ознака за траг у раширењу $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ коначних поља.

За све $a, b \in \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ важи

$$e(a+b) = e(a)e(b),$$

у потпуној аналогији са класичном експоненцијалном функцијом. Поред те особине експоненцијалне функције над $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$, за све полиноме $f, g, h \in \mathbb{F}_q[t]$ важи $e(f) = 1$, као и $e(f/h) = e(g/h)$ ако је $f \equiv g \pmod{h}$. Последња особина експоненцијалне функције која је од интереса доказана је у [51, Теорема 3.7.].

Лема 2.12. Нека је $a \in \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ такво да је $v(a) > 0$. Тада је за свако $c \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$ и сваки природан број i испуњено

$$\sum_{u \in c\mathcal{M}_i} e(au) = \begin{cases} q^i e(ct^i a), & \text{ако је } v(a) > i \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

За сврху формулације Пуасонове формуле сумације, потребна је још и наредна дефиниција генерализованих Гаусових сума.

Дефиниција 2.13. Нека је $V \in \mathbb{F}_q[t]$. Генерализована Гаусова сума придружена квадратном карактеру χ_f дефинисана је са

$$G(V, f) = \sum_{u \pmod{f}} \chi_f(u) e\left(\frac{uV}{f}\right).$$

Основне особине генерализованих Гаусових сума приказане су у [42, Лема 3.2.].

Лема 2.14. 1. Ако је $(f, h) = 1$, онда важи $G(V, fh) = G(V, f)G(V, h)$.

2. Нека је $V = V_1 P^{\alpha}$, при чему $P \nmid V_1$. Онда је

$$G(V, P^i) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } i \le \alpha \text{ и } i \text{ непарно,} \\ \phi(P^i), & \text{ако је } i \le \alpha \text{ и } i \text{ парно,} \\ -|P|^{i-1}, & \text{ако је } i = \alpha + 1 \text{ и } i \text{ парно,} \\ \left(\frac{V_1}{P}\right) |P|^{i-1} |P|^{1/2} & \text{ако је } i = \alpha + 1 \text{ и } i \text{ непарно,} \\ 0 & \text{ако је } i \ge \alpha + 2. \end{cases}$$

Доказ. Доказ ове леме потпуно је аналоган доказу Леме 2.3. из [97]. Због тога ће бити приказано само доказивање дела 1.

На основу Кинеске теореме о остацима (за полиноме над коначним пољем), за произвољни полином $u \pmod{fh}$ постоје јединствени полиноми $u_1 \pmod{f}$ и $u_2 \pmod{h}$ такви да је $u = u_1 h + u_2 f$. Одатле, користећи закон квадратног реципроцитета, следи

$$\begin{aligned} G(V, fh) &= \sum_{u \pmod{fh}} \chi_{fh}(u) e\left(\frac{uV}{fh}\right) \\ &= \sum_{\substack{u_1 \pmod{f} \\ u_2 \pmod{h}}} \chi_f(u_1 h + u_2 f) \chi_h(u_1 h + u_2 f) e\left(\frac{(u_1 h + u_2 f)V}{fh}\right) \\ &= \sum_{\substack{u_1 \pmod{f} \\ u_2 \pmod{h}}} \chi_f(u_1 h) \chi_h(u_2 f) e\left(\frac{u_1 V}{f}\right) e\left(\frac{u_2 V}{h}\right) \\ &= \chi_f(h) \chi_h(f) \sum_{u_1 \pmod{f}} \chi_f(u_1) e\left(\frac{u_1 V}{f}\right) \sum_{u_2 \pmod{h}} \chi_h(u_2) e\left(\frac{u_2 V}{h}\right) \\ &= G(V, f) G(V, h). \end{aligned}$$

□

Наредно тврђење представља Пуасонову формулу сумације над функцијским пољима и доказано је у [42, Пропозиција 3.1.].

Тврђење 2.15. Нека је m позитиван цео број и $f \in \mathcal{M}_n$. Ако је n паран број, онда важи

$$\sum_{R \in \mathcal{M}_m} \chi_R(f) = \frac{q^m}{|f|} \left(G(0, f) + (q-1) \sum_{V \in \mathcal{M}_{\le n-m-2}} G(V, f) - \sum_{V \in \mathcal{M}_{n-m-1}} G(V, f) \right).$$

Ако је n непаран број, онда важи

$$\sum_{R \in \mathcal{M}_m} \chi_R(f) = \frac{q^m \overline{\tau(q)}}{|f|} \sum_{V \in \mathcal{M}_{n-m-1}} G(V, f),$$

где је $\tau(q) = \sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} \chi_f(c) e^{2\pi i \operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(c)/p}$ уобичајена Гаусова сума над $\mathbb{F}_q$.

Ради веће јасноће, неколико значајних корака у доказу претходног тврђења биће издвојено у посебне леме.

Лема 2.16. Нека је $f \in \mathcal{M}$. Тада је

$$\chi_f(R) = \frac{1}{|f|} \sum_{V \pmod f} e\left(\frac{VR}{f}\right) G(-V, f)$$

испуњено за све $R \in \mathbb{F}_q[t]$.

Доказ. Из дефиниције Гаусових сума следи

$$\frac{1}{|f|} \sum_{V \pmod f} e\left(\frac{VR}{f}\right) G(-V, f) = \frac{1}{|f|} \sum_{u \pmod f} \chi_f(u) \sum_{V \pmod f} e\left(\frac{V(R-u)}{f}\right). \quad (2.7)$$

Ако је $R \neq u$, онда постоји полином h такав да је $e\left(\frac{h(R-u)}{f}\right) \neq 0$, па важи

$$\begin{aligned} e\left(\frac{h(R-u)}{f}\right) \sum_{V \pmod f} e\left(\frac{V(R-u)}{f}\right) &= \sum_{V \pmod f} e\left(\frac{(V+h)(R-u)}{f}\right) \\ &= \sum_{V \pmod f} e\left(\frac{V(R-u)}{f}\right), \end{aligned}$$

што показује да је $\sum_{V \pmod f} e\left(\frac{V(R-u)}{f}\right) = 0$. Према томе, једини ненула члан у суми по V у (2.7) је за $R = u$, одакле следи тражено тврђење. □

Лема 2.17. Нека је m позитиван цео број и $f \in \mathcal{M}_n$. Ако је $m < n$, онда важи

$$\sum_{R\in\mathcal{M}_m} \chi_f(R) = \frac{q^m}{|f|} \sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t] \\ \mathbf{d}(V)\leq n-m-1}} G(V, f) e\left(\frac{-Vt^m}{f}\right).$$

Доказ. Произвољни полином $R \in \mathcal{M}_m$ може се записати у облику $R = t^m + u$, где је $u \in \mathbb{F}_q[t]$ полином степена највише $m-1$. На основу Лема 2.16 следи

$$\begin{aligned}\sum_{R\in\mathcal{M}_m}\chi_f(R) &= \frac{1}{|f|}\sum_{V \pmod f} G(-V,f)e\left(\frac{Vt^m}{f}\right)\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(u)\le m-1}} e\left(\frac{Vu}{f}\right)\\ &= \frac{1}{|f|}\sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)\le n-m-1}} G(-V,f)e\left(\frac{Vt^m}{f}\right)\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(u)\le m-1}} e\left(\frac{Vu}{f}\right)\\ &+ \frac{1}{|f|}\sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ n-m\le\mathbf{d}(V)\le n-1}} G(-V,f)e\left(\frac{Vt^m}{f}\right)\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(u)\le m-1}} e\left(\frac{Vu}{f}\right) \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Нека су $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ редом први, односно други сабирак у горњој суми.

Како при условима $\mathbf{d}(V)\le n-m-1$ и $\mathbf{d}(u)\le m-1$ важи $e\left(\frac{Vu}{f}\right)=1$, из чињенице да постоји q^m полинома из $\mathbb{F}_q[t]$ степена највише $m-1$, следи

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \frac{q^m}{|f|}\sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)\le n-m-1}} G(-V,f)e\left(\frac{Vt^m}{f}\right)\\ &= \frac{q^m}{|f|}\sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)\le n-m-1}} G(V,f)e\left(\frac{-Vt^m}{f}\right), \qquad (2.9)\end{aligned}$$

после увођења смене $V\longrightarrow -V$.

Што се тиче $\mathcal{S}_2$, за почетак је

$$\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(u)\le m-1}} e\left(\frac{Vu}{f}\right) = 1+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times}\sum_{u\in c\mathcal{M}_i} e\left(\frac{Vu}{f}\right).$$

Ако је $i\le n-2-\mathbf{d}(V)$, онда је $e\left(\frac{Vu}{f}\right)=1$, док за $i\ge n-\mathbf{d}(V)$, на основу Леме 2.12 следи $\sum_{u\in c\mathcal{M}_i} e\left(\frac{Vu}{f}\right)=0$. Из претходног, уз чињеницу да је $n-1-\mathbf{d}(V)\le m-1$ је даље

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(u)\le m-1}} e\left(\frac{Vu}{f}\right) &= 1+\sum_{i=0}^{n-2-\mathbf{d}(V)}\sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} q^i+\sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times}\sum_{u\in c\mathcal{M}_{n-1-\mathbf{d}(V)}} e\left(\frac{Vu}{f}\right)\\ &= 1+(q-1)\frac{q^{n-1-\mathbf{d}(V)}-1}{q-1}-q^{n-1-\mathbf{d}(V)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Добијено показује да је $\mathcal{S}_2=0$. Коришћење те чињенице заједно са (2.9) у изразу

(2.8) завршава доказ. □

Доказ Тврђења 2.15. Једноставнији случај за разматрање је $m \geq n$. У том случају је

$$\sum_{R\in\mathcal{M}_m} \chi_R(f) = \sum_{R\in\mathcal{M}_m} \chi_f(R) = q^m \frac{\phi(f)}{|f|},$$

ако је f потпуни квадрат неког полинома из $\mathbb{F}_q[t]$ и

$$\sum_{R\in\mathcal{M}_m} \chi_R(f) = 0$$

у супротном. Додатно, на основу Леме 2.14 важи да је $G(0, f)$ различито од нуле ако и само ако је f потпун квадрат, када је $G(0, f) = \phi(f)$. Из наведених чињеница следи тражено тврђење у овом случају.

Нека је сада $m < n$. На основу Леме 2.17 је

$$\sum_{R\in\mathcal{M}_m} \chi_f(R) = \frac{q^m}{|f|}\left(G(0,f) + \sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)\leq n-m-2}} G(V,f)e\left(\frac{-Vt^m}{f}\right) + \sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)=n-m-1}} G(V,f)e\left(\frac{-Vt^m}{f}\right)\right). \tag{2.10}$$

За $\mathbf{d}(V) \leq n-m-2$ важи $e\left(\frac{-Vt^m}{f}\right) = 1$, па је

$$\sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)\leq n-m-2}} G(V,f)e\left(\frac{-Vt^m}{f}\right) = \sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)\leq n-m-2}} G(V,f).$$

Како је $G(cV, f) = \chi_f(c^{-1})G(V, f)$, следи

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)\leq n-m-2}} G(V,f) &= \sum_{V\in\mathcal{M}_{\leq n-m-2}} \sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} G(cV,f)\\ &= \sum_{V\in\mathcal{M}_{\leq n-m-2}} G(V,f) \sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} \chi_f(c^{-1})\\ &= \begin{cases} 0, & \text{ако је } \mathbf{d}(f) \text{ непаран}\\ (q-1)\sum_{V\in\mathcal{M}_{\leq n-m-2}} G(V,f), & \text{ако је } \mathbf{d}(f) \text{ паран.}\end{cases}\end{aligned}$$

Даље, када је $\mathbf{d}(f)$ непаран, $V \in \mathcal{M}_{n-m-1}$ и $c \in \mathbb{F}_q^\times$, важи $e\left(\frac{-cVt^m}{f}\right) = e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(-c)/p}$.

Одатле је

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)=n-m-1}} G(V,f)e\left(\frac{-Vt^m}{f}\right) &= \sum_{V\in\mathcal{M}_{n-m-1}}\sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times} G(cV,f)e\left(\frac{-cVt^m}{f}\right)\\
&= \sum_{V\in\mathcal{M}_{n-m-1}} G(V,f)\sum_{c\in\mathbb{F}_q^\times}\chi_f(c^{-1})e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(-c)/p}\\
&= \overline{\tau(q)}\sum_{V\in\mathcal{M}_{n-m-1}} G(V,f).
\end{aligned}$$

Слично се и доказује да важи

$$\sum_{\substack{V\in\mathbb{F}_q[t]\\ \mathbf{d}(V)=n-m-1}} G(V,f)e\left(\frac{-Vt^m}{f}\right) = -\sum_{V\in\mathcal{M}_{n-m-1}} G(V,f)$$

у случају када је $\mathbf{d}(f)$ паран. Враћањем добијених резултата у (2.10), уз чињеницу да је $G(0,f)\neq 0$ ако и само ако је f потпун квадрат неког полинома (то следи из Леме 2.14), добија се тражено тврђење.

□

ГЛАВА 3

Аритметика елиптичких кривих над функцијским пољима

У овој глави биће приказани основни појмови везани за аритметику и L-функције елиптичких кривих над функцијским пољима. Детаљнији приказ те тематике у контексту општијих поља може се пронаћи у [95].

3.1. Елиптичке криве над функцијским пољима

Дефиниција 3.1. Елиптичка крива над функцијским пољем $\mathbb{F}_q(t)$ је уређени пар (E, O), где је E несингуларна крива рода 1 над $\mathbb{F}_q(t)$ и $O \in E$ фиксирана базна тачка.

Ослањајући се на теорему Риман-Роха, показује се да је сваку елиптичку криву могуће представити као криву у пројективој равни задату одговарајућом Вајерштрасовом једначином, што је једначина облика

$$E : Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3, \tag{3.1}$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_6 \in \mathbb{F}_q(t)$. При томе, базној тачки O одговара тачка у бесконачности $[0 : 1 : 0]$. Једначина (3.1) се често посматра и у својој афиној форми,

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \tag{3.2}$$

уз $x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$. У описаној афиној једначини може се увести смена

$$(x, y) \to (u^{-2}x, u^{-3}y),$$

чиме она добија облик

$$y^2 + ua_1xy + u^3a_3y = x^3 + u^2a_2x^2 + u^4a_4x + u^6a_6. \tag{3.3}$$

Из овог облика следи да се за u може одабрати да буде полином довољно великог степена, тако да сви коефицијенти у једначини (3.2) буду и сами полиноми (из $\mathbb{F}_q[t]$). Због тога се надаље може сматрати да за све коефицијенте у (3.2) важи $a_1, a_2, \ldots, a_6 \in \mathbb{F}_q[t]$.

Услов $(q, 6) = 1$ имплицира да је карактеристика поља $\mathbb{F}_q(t)$ различита од 2, па се једначина (3.2) може упростити свођењем на потпун квадрат. То се постиже увођењем смене

$$y \to \frac{1}{2}\left(y - a_1 x - a_3\right),$$

после које једначина (3.2) добија облик

$$y^2 = 4x^3 + b_2 x^2 + 2b_4 x + b_6.$$

При томе је редом

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_4 \\ b_4 &= 2a_4 + a_1 a_3 \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6. \end{aligned}$$

Уз претходне вредности, посматрају се и

$$\begin{aligned} b_8 &= a_1 a_6^2 + 4a_2 a_6 - a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2 - a_4^2 \\ \Delta &= -b_2^2 b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2 b_4 b_6. \end{aligned}$$

Полином Δ назива се дискриминантом елиптичке криве E. Како је E несингуларна крива по дефиницији, важи $\Delta \neq 0$.

Чињеница да је карактеристика поља $\mathbb{F}_q(t)$ различита и од 3 омогућава да се једначина (3.3) додатно упрости до облика

$$y^2 = x^3 + Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{F}_q[t].$$

При томе дискриминанта Δ добија нарочито једноставан облик $\Delta = -16(4A^3 + 27B^2)$.

Надаље ће фокус посматрања бити окренут ка елиптичким кривама које су описане минималним Вајерштрасовим моделима. Под тиме се мисли на елиптичке криве задате Вајерштрасовим једначинама

$$y^2 = x^3 + Ax + B \tag{3.4}$$

за $A, B \in \mathbb{F}_q[t]$ такве да је дискриминанта Δ минималног степена. Свакој елиптичкој кривој над $\mathbb{F}_q(t)$ одговара минимални Вајерштрасов модел. При томе се за њега може сматрати да је јединствен, јер зависи само од неке стандардне промене координата, која нема утицаја на аритметичко-геометријске аспекте саме криве.

Нека је $E/\mathbb{F}_q(t)$ елиптичка крива задата минималним Вајерштрасовим моделом

(3.4) и $P \in \mathcal{P}$ прост полином. Посматрањем коефицијената из (3.4) по модулу P долази се до објекта који се назива редукцијом елиптичке криве E по модулу P и означава са E_P.

Редукција E_P не мора бити и сама несингуларна крива попут E. У случају да E_P јесте несингуларна, она преставља једну елиптичку криву над коначним пољем $\mathbb{F}_q[t]/P\mathbb{F}_q[t]$ са $|P|$ елемената. Тада се за E каже да има добру редукцију по модулу простог полинома P.

У случају да је E_P сингуларна крива, за E се каже да има лошу редукцију по модулу P. При томе, сингуларитет постоји само у једној тачки, па се може посматрати скуп који настаје када се та тачка избаци из E_P. Тако настали објекат E'_P није елиптичка крива, али јесте једнодимензиони групни афини варијетет над коначним пољем $\mathbb{F}_q[t]/P\mathbb{F}_q[t]$. За једнодимензионе групне афине варијетете је позната класификација, према којој они могу бити једно од следећих:

- Адитивни групни варијетет $\mathbb{G}_a$, уз групни закон

$$x_1, x_2 \longrightarrow x_1 + x_2.$$

- Мултипликативни групни варијетет $\mathbb{G}_m$, уз групни закон

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \longrightarrow (x_1x_2, y_1y_2).$$

- Твистовани[1] мултипликативни групни варијетет $\mathbb{G}_m^{(d)}$, уз групни закон

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \longrightarrow (x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1), \quad \text{за неко } d \in \mathbb{F}_q[t]/P\mathbb{F}_q[t].$$

Ако је $E'_P \cong \mathbb{G}_a$, за лошу редукцију по модулу P елиптичке криве E се каже да је адитивна. У случају да је $E'_P \cong \mathbb{G}_m$ посматрана редукција се назива расцепљеном мултипликативном, док се у случају $E'_P \cong \mathbb{G}_m^{(d)}$ за неки нетривијалан твист $\mathbb{G}_m^{(d)}$ (то значи да d није потпун квадрат у $\mathbb{F}_q[t]/P\mathbb{F}_q[t]$), она назива нерасцепљеном мултипликативном.

Геометријски гледано, у јединственој сингуларној тачки лоше редукције E_P елиптичке криве E могу постојати један или два тангентна правца. У првом случају се каже да E_P има повратну тачку, а у другом да има самопресек. При томе важи да је редукција по модулу P адитивна ако и само ако E_P има повратну тачку, као и да је поменута редукција мултипликативна ако и само ако E_P има самопресек.

Дефиниција 3.2. Кондуктор елиптичке криве $E/\mathbb{F}_q(t)$ дефинисан је са

$$N_E = \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{f_P},$$

[1]алтернативни називи су уврнути или увијени варијетет, в. и Одељак 1.4

где је

$$f_P = \begin{cases} 0, & \text{ако } E \text{ има добру редукцију по модулу } P \\ 1, & \text{ако } E \text{ има мултипликативну редукцију по модулу } P \\ 2, & \text{ако } E \text{ има адитивну редукцију по модулу } P. \end{cases}$$

Како су прости полиноми у којима E има лошу редукцију управо они који деле дискриминанту Δ те елиптичке криве, следи да је кондуктор N_E један полином из $\mathcal{M}$. Поред тог полинома, од интереса је и полином $M_E \in \mathcal{M}$ који представља производ свих простих полинома у којима E има мултипликативну редукцију.

3.2. L-функције елиптичких кривих над функцијским пољима

.

Нека је надаље $E/\mathbb{F}_q(t)$ фиксирана елиптичка крива задата минималним Вајерштрасовим моделом (3.4) и $P \in \mathcal{P}$ произвољан прост полином у коме E има добру редукцију. Редукција E_P је тада једна елиптичка крива над коначним пољем $\mathbb{F}_q[t]/P\mathbb{F}_q[t]$ са $|P|$ елемената, па њој одговарајућа зета функција испуњава Вејлове хипотезе (као што је већ спомињано, то је доказано у [98]). Конкретно, важи

$$\mathcal{Z}_{E_P}(s) = \frac{(1 - \alpha_E(P) q^{-\mathbf{d}(P)s})(1 - \overline{\alpha_E(P)} q^{-\mathbf{d}(P)s})}{(1 - q^{-\mathbf{d}(P)s})(1 - q^{\mathbf{d}(P)(1-s)})}.$$

Комплексни бројеви $\alpha_E(P)$ и $\overline{\alpha_E(P)}$ се називају сопственим вредностима Фробенијусовог пресликавања за елиптичку криву E у простом полиному P. Услед чињенице да је E фиксирана, надаље ће се означавати краће са $\alpha(P)$ и $\overline{\alpha(P)}$ да би се растеретила нотација. Фробенијусове сопствене вредности повезане су идентитетом

$$\lambda(P) := \alpha(P) + \overline{\alpha(P)} = |P| + 1 - \#E_P,$$

где је $\#E_P$ број тачака редуковане криве E_P над коначним пољем $\mathbb{F}_q[t]/P\mathbb{F}_q[t]$.

Ако је P прост полином у коме E има лошу редукцију, онда се дефинише

$$\lambda(P) = \begin{cases} -1, & \text{ако је редукција у } P \text{ расцепљена мултипликативна} \\ 1, & \text{ако је редукција у } P \text{ нерасцепљена мултипликативна} \\ 0, & \text{ако је редукција у } P \text{ адитивна.} \end{cases}$$

Дефиниција 3.3. L-функција фиксиране елиптичке криве $E/\mathbb{F}_q(t)$ дефинисана је наредним Ојлеровим производом и Дирихлеовим редом који конвергирају за

$\Re(s) > 1$,

$$L(s,E) = \mathcal{L}(u,E) = \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P\nmid\Delta}} \left(1-\lambda(P)u^{\mathbf{d}(P)} + |P|u^{2\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P\mid\Delta}} \left(1-\lambda(P)u^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}$$
$$= \sum_{f\in\mathcal{M}} \lambda(f)u^{\mathbf{d}(f)},$$

при чему је уведена смена $u = q^{-s}$.

Може се показати (видети [62, страна 11.]) да је $\mathcal{L}(u,E)$ целобројни полином променљиве u са константним коефицијентом 1 степена

$$\mathfrak{n} = \mathbf{d}(N_E) - 4,$$

где је N_E кондуктор за E. На тај начин се добија аналитичко проширење за L-функције елиптичких кривих на целу комплексну раван. Додатно, $\mathcal{L}(u,E)$ задовољава функционалну једначину

$$\mathcal{L}(u,E) = \epsilon(E)(\sqrt{q}u)^{\mathfrak{n}}\mathcal{L}\left(\frac{1}{qu}, E\right),$$

где је $\epsilon(E) \in \{\pm 1\}$ одговарајући коренски број (за више детаља и бољи опис броја $\epsilon(E)$ видети [5, Лема 2.3.])

3.3. Квадратни твистови елиптичких кривих над функцијским пољима

Нека је $D \in \mathcal{M}$ бесквадратан полином који је узајамно прост са дискриминантом елиптичке криве $E/\mathbb{F}_q(t)$ задате минималним Вајерштрасовим моделом

$$y^2 = x^3 + Ax + B.$$

Тада се може посматрати елиптичка крива $E\otimes\chi_D/\mathbb{F}_q(t)$ описана афиним моделом

$$y^2 = x^3 + D^2Ax + D^3B.$$

Дефиниција 3.4. Претходно дефинисана елиптичка крива $E\otimes\chi_D/\mathbb{F}_q(t)$ назива се квадратним твистом[2] елиптичке криве E који одговара карактеру χ_D.

Сваком квадратном твисту $E\otimes\chi_D$ може се придружити одговарајућа L-функција задата својим Ојлеровим производом и Дирихлеовим редом, конвергентним за

[2]слично као у Одељцима 1.4 и 3.1, могу се користити алтернативни називи увртање или увијање

$\Re(s) > 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u, E \otimes \chi_D) &= \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P\nmid\Delta}} \left(1 - \lambda(P)\chi_D(P)u^{\mathbf{d}(P)} + |P|u^{2\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P\mid\Delta}} \left(1 - \lambda(P)\chi_D(P)u^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}\\ &= \sum_{f\in\mathcal{M}} \lambda(f)\chi_D(f)u^{\mathbf{d}(f)},\end{aligned}$$

при чему је поново уведена смена променљивих $u = q^{-s}$. Овако дефинисана L-функција је полином променљиве u степена $\mathfrak{n} + 2\mathbf{d}(D)$ који задовољава функционалну једначину

$$\mathcal{L}(u, E \otimes \chi_D) = \epsilon(\sqrt{q}u)^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)}\mathcal{L}\left(\frac{1}{qu}, E \otimes \chi_D\right), \tag{3.5}$$

где је $\epsilon \in \{\pm 1\}$ одговарајући коренски број. Коренски број ϵ је детаљно описан у [5, Пропозиција 4.3.], где је показано да важи

$$\epsilon = \epsilon(E \otimes \chi_D) = \epsilon(E)\epsilon_{\mathbf{d}(D)}\chi_D(M_E),$$

при чему је $\epsilon_{\mathbf{d}(D)} \in \{\pm 1\}$ цео број који зависи само од степена полинома D, а M_E је производ свих простих полинома у којима E има мултипликативну редукцију.

Слично као и за квадратне Дирихлеове L-функције, и за L-функцију произвољног квадратног твиста фиксиране елиптичке криве згодно је имати запис у облику одговарајуће апроксимативне функционалне једначине, који је демонстриран у наредном тврђењу, доказаном у [16, Леме 2.1. и 2.2.]. Пре саме формулације, треба нагласити да се под $\mathcal{H}^*_{2g+1}$ мисли на скуп свих бесквадратних, моничних полинома степена $2g + 1$ који су узајамно прости са дискриминантном Δ неке фиксиране елиптичке криве $E/\mathbb{F}_q(t)$. За број елемената скупа $\mathcal{H}^*_{2g+1}$ важи

$$|\mathcal{H}^*_{2g+1}| = |\mathcal{H}_{2g+1}| \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P\mid\Delta}} \frac{|P|}{|P| + 1},$$

што је особина која ће често бити коришћена у каснијем излагању.

Тврђење 3.5. Нека је α комплексан број и $D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}$. Тада важи

$$\begin{aligned}&L\left(\frac{1}{2} + \alpha, E \otimes \chi_D\right)\\ &= \sum_{f\in\mathcal{M}_{\le[\mathfrak{n}/2]+\mathbf{d}(D)}} \frac{\lambda(f)\chi_D(f)}{|f|^{1/2+\alpha}} + \epsilon q^{-\alpha(\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D))} \sum_{f\in\mathcal{M}_{\le[(\mathfrak{n}-1)/2]+\mathbf{d}(D)}} \frac{\lambda(f)\chi_D(f)}{|f|^{1/2-\alpha}}.\end{aligned}$$

Доказ. Како је $\mathcal{L}(u, E \otimes \chi_D)$ полином степена $\mathfrak{n} + \mathbf{d}(D)$, та L-функција се може

записати у облику
$$\mathcal{L}(u, E \otimes \chi_D) = \sum_{n=0}^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)} c_n u^n, \tag{3.6}$$
где је $c_n = \sum_{f \in \mathcal{M}_n} \lambda(f)\chi_D(f)$. Ослањајући се на функционалну једначину (3.5) одатле следи
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)} c_n u^n &= \epsilon(\sqrt{q}u)^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)} \sum_{n=0}^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)} c_n q^{-n} u^{-n} \\ &= \epsilon \sum_{n=0}^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)} c_n q^{\mathfrak{n}/2+\mathbf{d}(D)-n} u^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)-n} \\ &= \epsilon \sum_{n=0}^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)} c_{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)-n} q^{n-\mathfrak{n}/2-\mathbf{d}(D)} u^n.\end{aligned}$$
После упоређивања одговарајућих коефицијената уз u^n закључује се да за свако $0 \le n \le \mathfrak{n} + 2\mathbf{d}(D)$ важи
$$c_n = \epsilon q^{n-\mathfrak{n}/2-\mathbf{d}(D)} c_{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)-n}.$$
Враћањем на запис (3.6) добијена једнакост коефицијената повлачи
$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u, E \otimes \chi_D) &= \sum_{n=0}^{[\mathfrak{n}/2]+\mathbf{d}(D)} c_n u^n + \sum_{n=[\mathfrak{n}/2]+\mathbf{d}(D)+1}^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)} c_n u^n \\ &= \sum_{n=0}^{[\mathfrak{n}/2]+\mathbf{d}(D)} c_n u^n + \epsilon \sum_{n=[\mathfrak{n}/2]+\mathbf{d}(D)+1}^{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)} q^{n-\mathfrak{n}/2-\mathbf{d}(D)} c_{\mathfrak{n}+2\mathbf{d}(D)-n}\, u^n \\ &= \sum_{n=0}^{[\mathfrak{n}/2]+\mathbf{d}(D)} c_n u^n + \epsilon \sum_{n=0}^{[(n-1)/2]+\mathbf{d}(D)} c_n (qu^2)^{\mathfrak{n}/2+\mathbf{d}(D)-n} u^n.\end{aligned} \tag{3.7}$$
Стављањем $u = q^{-1/2-\alpha}$ у (3.7) и расписивањем коефицијената c_n по дефиницији добија се тражено тврђење. □

После диференцирања формуле (3.7) по u и стављања $u = q^{-1/2}$ добија се наредна апроксимативна функционална једначина за $L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right)$.

Тврђење 3.6. Нека је $D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}$ и $\epsilon = -1$. Тада важи
$$L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) = 2(\log q) \sum_{f \in \mathcal{M}_{\le [\mathfrak{n}/2]+\mathbf{d}(D)}} \frac{([\mathfrak{n}/2] + \mathbf{d}(D) - \mathbf{d}(f))\lambda(f)\chi_D(f)}{|f|^{1/2}}.$$

За крај овог одељка биће приказана верзија сумационе формуле из Леме 2.10 у којој се уместо по свим полиномима из $\mathcal{H}_{2g+1}$, сумација врши по полиномима из

$\mathcal{H}^*_{2g+1}$.

Лема 3.7. За сваки монични полином $f \in \mathcal{M}$ је испуњено

$$\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}} \chi_D(f) = \sum_{C_1|\Delta} \mu(C_1)\chi_{C_1}(f) \sum_{C_2|(\Delta f)^\infty} \sum_{R\in\mathcal{M}_{2g+1-\mathrm{d}(C_1)-2\mathrm{d}(C_2)}} \chi_R(f)$$
$$- q \sum_{C_1|\Delta} \mu(C_1)\chi_{C_1}(f) \sum_{C_2|(\Delta f)^\infty} \sum_{R\in\mathcal{M}_{2g-1-\mathrm{d}(C_1)-2\mathrm{d}(C_2)}} \chi_R(f).$$

Доказ. Доказ који следи изведен је у [16, Лема 2.4.] и сличан је доказу Леме 2.10.

Нека је

$$\mathcal{A}_f(u) = \sum_{\substack{D\in\mathcal{H}\\(D,\Delta)=1}} \chi_f(D)u^{\mathbf{d}(D)}. \tag{3.8}$$

Из записа Ојлеровог производа за $\mathcal{A}_f(u)$, уз коришћење закона квадратног реципроцитета, добија се

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_f(u) &= \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\nmid\Delta f}} \left(1+\chi_f(P)u^{\mathbf{d}(P)}\right)\\
&= \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P\nmid\Delta f}} \frac{1-u^{2\mathbf{d}(P)}}{1-\chi_f(P)u^{\mathbf{d}(P)}}\\
&= \mathcal{Z}(u^2)^{-1}\mathcal{L}(u,\chi_f) \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta f}} \left(1-u^{2\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta\\P\nmid f}} \left(1-\chi_f(P)u^{\mathbf{d}(P)}\right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

После записивања

$$\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta f}} \left(1-u^{2\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} = \sum_{C_2|(\Delta f)^\infty} u^{2\mathbf{d}(C_2)}$$
$$\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta\\P\nmid f}} \left(1-\chi_f(P)u^{\mathbf{d}(P)}\right) = \sum_{C_1|\Delta} \mu(C_1)\chi_{C_1}(f)u^{\mathbf{d}(C_1)}$$
$$\mathcal{Z}(u^2) = \frac{1}{1-qu^2}$$
$$\mathcal{L}(u,\chi_f) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h\in\mathcal{M}_n} \chi_f(h)u^n$$

и упоређивања коефицијената уз u^{2g+1} у (3.8) и (3.9) добија се тражено тврђење. □

ГЛАВА 4

Моменти и неанулирање L-функција над функцијским пољима

У Глави 1 било је речи о проблемима израчунавања момената и испитивања неанулирања L-функција у класичном контексту поља рационалних бројева $\mathbb{Q}$. Ти проблеми су од значаја и у контексту L-функција над функцијским пољима и ова глава се бави управо њима. При томе ће фокус излагања бити ограничен на две фамилије L-функција коју су од интереса, што су фамилија квадратних Дирихлеових L-функција и фамилија L-функција квадратних твистова неке фиксиране елиптичке криве.

4.1. Моменти и неанулирање квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима

Нека је k природан број. Проблем одређивања k-тог момента фамилије квадратних Дирихлеових L-функција над $\mathbb{F}_q[t]$ представља проблем разумевања асимптотског понашања за

$$\sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)^k \tag{4.1}$$

када $g \to \infty$, где, подсећања ради, $\mathcal{H}_{2g+1}$ представља скуп свих бесквадратних моничних полинома из $\mathbb{F}_q[t]$ степена $2g+1$. Представа о очекиваној величини момената (4.1) може се добити адаптацијом техника и хеуристика из рада [26], о којима је било речи у Глави 1, у аналогни контекст функцијских поља. Такав поступак је конкретно спроведен у [2], где аутори добијају следећу хипотезу[1].

[1] може се приметити да је хипотеза у аналогији са Хипотезом 1.3 о моментима квадратних Дирихлеових L-функција у класичном контексту поља рационалних бројева.

Хипотеза 4.1. Нека је

$$X(s) = q^{-1/2+s}, \ \ s \in \mathbb{C}.$$

Тада је

$$\sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)^k = \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} Q_k(\mathbf{d}(D))\,(1 + o(1))\,,$$

где је Q_k је полином степена $\frac{k(k+1)}{2}$ изражен контурним интегралом

$$Q_k(x) = \frac{(-1)^{k(k-1)}2^k}{k!(2\pi i)^k} \oint \cdots \oint \frac{G(z_1, \ldots, z_k)\Delta(z_1^2, \ldots, z_k^2)^2}{\prod_{j=1}^k z_j^{2k-1}} q^{\frac{x}{2}\sum_{j=1}^k z_j} dz_1 \ldots dz_k$$

по малим кружницама око $z_i = 0$, $1 \le i \le k$, уз

$$G(z_1, \ldots, z_k) = A_k(z_1, \ldots, z_k) \prod_{j=1}^k X\left(\frac{1}{2} + z_j\right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{1 \le i \le j \le k} \zeta_q(1 + z_i + z_j),$$

где је аритметички фактор A_k дат Ојлеровим производом

$$\begin{aligned} A_k(z_1, \ldots, z_k) = &\prod_{P \in \mathcal{P}} \prod_{1 \le i \le j \le k} \left(1 - \frac{1}{|P|^{1+z_i+z_j}}\right) \\ &\times \left(\frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{|P|^{\frac{1}{2}+z_j}}\right)^{-1} + \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{|P|^{\frac{1}{2}+z_j}}\right)^{-1}\right) + \frac{1}{|P|}\right)\left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} \end{aligned}$$

и $\Delta(z_1, \ldots, z_k)$ је ознака за Вандермондову детерминанту.

Валидност Хипотезе 4.1 у случају $k = 1$ доказали су Андраде и Китинг у раду [3], где су установили да за први момент фамилије квадратних Дирихлеових карактера важи

$$\sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) = \frac{C(1)}{2\zeta_q(2)} q^{2g+1} \left((2g+1) + 1 + \frac{4}{\log q}\frac{C'}{C}(1)\right) + O\left(q^{3g/2 + g\log_q 2}\right),$$

где је

$$C(s) = \prod_{P \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{(|P|+1)|P|^s}\right).$$

Њихов резултат значајно је поправила Флореа у раду [42] у коме је успела да добије још један члан и бољу оцену за грешку у асимптотској формули,

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) = &\frac{C(1)}{2\zeta_q(2)} q^{2g+1} \left((2g+1) + 1 + \frac{4}{\log q}\frac{C'}{C}(1)\right) \\ &+ q^{\frac{2g+1}{3}} R(2g+1) + O\left(q^{g/2(1+\varepsilon)}\right), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где је R полином степена 1 чији су коефицијенти експлицитно израчунати и $\varepsilon > 0$ произвољно мали број. Овај резултат има много већу дубину од пуког техничког побољшања. Наиме, хеуристички се, када D пролази скупом $\mathcal{H}_{2g+1}$, за вредности $L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$ може сматрати да су случајно изабране у скупу $\{\pm 1\}$ са једнаком вероватноћом. Другим речима, сума

$$\sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$$

која дефинише први моменат квадратних Дирихлеових L-функција може се посматрати као објекат из вероватноће познат као случајна шетња[2]. Такво посматрање омогућава да се, после рачунања главног члана, очекује да у преосталим сумама постоје одређене канцелације, после којих ће грешка бити реда величине једнаком очекиваној удаљености од 0 одговарајуће случајне шетње[3]. Дакле, очекивана асимптотска формула уз коренску канцелацију за први моменат квадратних Дирихлеових L-функција је облика

$$\sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) = q^{2g+1} \cdot \left(\text{неки полином степена } 1 \text{ по } g\right) + O(q^{g+\varepsilon})$$

за произвољно $\varepsilon > 0$. Може се приметити да је резултат (4.2) бољи од тог предвиђања, што значи да Флореа у свом раду демонстрира више од коренске канцелације, добијајући тако још финији увид у саму структуру првог момента квадратних Дирихлеових L-функција.

Извор побољшања које добија Флореа лежи у суптилнијој анализи сума које се у рачуну појављују после примене Пуасонове формуле сумације. Конкретно, после стандардне примене апроксимативне функционалне једначине за квадратне Дирихлеове L-функције (Тврђење 2.9) и формуле сумације описане Лемом 2.10, проблем израчунавања првог момента у фамилији квадратних Дирихлеових L-функција се своди на израчунавање сума облика

$$\sum_{f \in \mathcal{M}_{\leq g}} \frac{1}{|f|^{1/2}} \sum_{\substack{C | f^\infty \\ C \in \mathcal{M}_{\leq g}}} \sum_{h \in \mathcal{M}_{2g+1-2\mathrm{d}(C)}} \chi_f(h) - q \sum_{f \in \mathcal{M}_{\leq g}} \frac{1}{|f|^{1/2}} \sum_{\substack{C | f^\infty \\ C \in \mathcal{M}_{g-1}}} \sum_{h \in \mathcal{M}_{2g-1-2\mathrm{d}(C)}} \chi_f(h).$$

Унутрашње суме по h се даље могу третирати применом верзије Пуасонове формуле сумације над $\mathbb{F}_q[t]$, описане у Тврђењу 2.15, чиме се цео проблем може

[2] ако је n природан број, онда се случајна шетња S_n дужине n дефинише као сума $\sum_{i=1}^{n} X_i$, где су X_i, $1 \leq i \leq n$ међусобно независне случајне променљиве које узимају вредности ± 1 са једнаком вероватноћом. Очекивање $E(S_n)$ случајне шетње S_n је очигледно 0, док за очекивану удаљеност од 0, $E(|S_n|)$ важи да је величине реда $\sqrt{n}$.

[3] овакво очекивање за грешку није стриктно везано за проблем рачунања момената квадратних Дирихлеових L-функција и често се појављује у аналитичкој теорији бројева. Познато је под називом коренска канцелација (енг. square-root cancellation) из разлога што је очекивана удаљеност од нуле за случајну шетњу дужине n управо реда величине $\sqrt{n}$.

свести на проблем разумевања суме облика

$$\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\leq g}\\ \mathbf{d}(f)\ \text{непаран}}} \frac{1}{|f|^{3/2}} \sum_{\substack{C|f^\infty\\ C\in\mathcal{M}_{\leq g}}} \frac{1}{|C|^2} \sum_{V\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}(f)-2g+2\mathbf{d}(C)}} G(V,f), \tag{4.3}$$

где је $G(V,f)$, као и до сада, ознака за Гаусову суму над $\mathbb{F}_q[t]$. У њој се онда могу издвојити они чланови за које је f потпун квадрат и њихов допринос изразити одговарајућим контурним интегралом. Израчунавањем тог интеграла добија се главни члан, одакле, уз ограничавање доприноса оних f који нису потпуни квадрати, следи резултат који су дали Андраде и Китинг.

Идеја коју спроводи Флореа, инспирисана аналогном идејом над пољем рационалних бројева (в. [97] и [100]), је да се додатни допринос главном члану потражи међу неквадратним полиномима f за које је V у унутрашњој суми у (4.3) потпун квадрат. Разлог посматрања таквих чланова треба потражити у величини Гаусових сума $G(V,f)$. Наиме, Лема 2.14 имплицира да ће међу члановима одређеним унутрашњом сумацијом по V у (4.3) по величини бити доминантни управо они за које је V потпун квадрат и стога има смисла тражити додатни допринос главном члану баш у њима.

Управо описана идеја може се применити и на израчунавање другог и трећег момента квадратних Дирихлевих L-функција над $\mathbb{F}_q[t]$, што је такође урадила Флореа [45]. Конкретно, она је добила да важи

$$\sum_{D\in\mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)^2 = \frac{q^{2g+1}}{\zeta_q(2)}\,A(2g+1) + O\left(q^{g(1+\varepsilon)}\right)$$
$$\sum_{D\in\mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)^3 = \frac{q^{2g+1}}{\zeta_q(2)}\,B(2g+1) + O\left(q^{3g/2(1+\varepsilon)}\right),$$

где су A и B полиноми степена три, односно шест, чији се коефицијенти могу експлицитно израчунати.

Поред тога, пратећи сличну основну идеју, Флореа [44] је успела да добије и формулу за четврти моменат,

$$\sum_{D\in\mathcal{H}_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)^4 = \frac{q^{2g+1}}{\zeta_q(2)}(c_{10}q^{10}+c_9g^9+c_8g^8) + O\left(q^{2g+1}g^{7+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \tag{4.4}$$

где су c_{10}, c_9 и c_8 неке експлицитно описане константе. Међутим, добијање претходне формуле је знатно сложеније од рачунања момента реда 1–3, јер изискује још суптилније оцењивање чланова који доприносе грешки и своди се на давање добре оцене за четврти померени момент фамилије L-функција $\mathcal{L}(u,\chi_D)$, проинтеграљен по контури $\mathcal{K}$ кружнице са центром у 0 и полупречника $1/\sqrt{q}$. Кључна за анализу таквог момента је опсервација да се природа симетрије фамилије $\mathcal{L}(u,\chi_D)$ мења како се u помера дуж кружнице $\mathcal{K}$. Када је u „близу" централне тачке $1/\sqrt{q}$

фамилија $\mathcal{L}(u,\chi_D)$ има симплектичку симетрију, па се може очекивати допринос грешки реда величине g^{10}. Међутим, ,,удаљавањем" од централне тачке тип симетрије прелази у унитарни, што омогућава да се добије[4] грешка реда величине g^4. За потребе добијања поменуте оцене о померeном четвртом моменту фамилије L-функција $\mathcal{L}(u,\chi_D)$ проинтеграљен по контури $\mathcal{K}$, Флореа даје и наредну, горњу оцену за опште моменте фамилије $\mathcal{L}(u,\chi_D)$, која је од значаја и сама по себи.

Теорема 4.2. Нека је $u = e^{i\theta}$ за $\theta \in [0,\pi)$. Тада за сваки позитиван број k и $\varepsilon > 0$ важи

$$\sum_{D\in\mathcal{H}_{2g+1}} \left|\mathcal{L}\left(\frac{u}{\sqrt{q}},\chi_D\right)\right|^k \ll q^{2g+1}g^{\varepsilon}\exp\left(kM(u,g)+\frac{k^2}{2}V(u,g)\right),$$

где је $M(u,g) = \frac{1}{2}\log\left(\min\{g,\frac{1}{2\theta}\}\right)$ и $V(u,g) = M(u,g) + \frac{\log g}{2}$.

Доказ претходне теореме инспирисан је Саундарарајановим радом [96] о моментима Риманове зета функције. У поменутом раду аутор је успео да, уз претпоставку Риманове хипотезе, докаже да за $2k$-ти моменат

$$M_k(T) = \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt$$

Риманове зета функције важи

$$T(\log T)^{k^2} \ll_k M_k(T) \ll_{k,\varepsilon} T(\log T)^{k^2+\varepsilon},$$

што су оптималне границе, до на појављивање произвољног $\varepsilon > 0$. Кључно за добијање претходних граница је разумевање да доминантни допринос за $M_k(T)$ долази од оних вредности t за које је $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$ величине $(\log T)^k$ и одређивања величине скупа у коме се такве вредности t налазе. Сам приступ који омогућава такво разумевање је пробабилистички по природи и базиран је на Селберговом резултату[5] по коме, када t пролази сегментом $[T,2T]$, вредности $\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$ имају нормалну расподелу са очекивањем 0 и варијансом $\frac{1}{2}\log\log T$.

Слично се онда за квадратне Дирихлеове L-функције над функцијским пољима очекује да $\log\left|\mathcal{L}\left(\frac{u}{\sqrt{q}},\chi_D\right)\right|$ има нормалну расподелу кад D пролази скупом $\mathcal{H}_{2g+1}$, при чему су $M(u,g)$ и $V(u,g)$ из формулације Теореме 4.2 управо редом очекивање и варијанса те расподеле. Срж доказа Теореме 4.2 онда лежи у давању добре оцене за број полинома из $\mathcal{H}_{2g+1}$ за које су вредности $\log\left|\mathcal{L}\left(\frac{u}{\sqrt{q}},\chi_D\right)\right|$,,изнад очекивања".

[4]резултат (4.4) који је наведен је директан цитат Теореме 1.1. из [44]. Међутим, у самом раду [44] Флореа наводи да се експлицитно могу израчунати и чланови нижег реда, закључно са оним уз g^5. Добити чланове осталих, нижих редова би представљало велики изазов, јер би то укључивало начин да се превазиђе грешка реда величине g^4 која потиче из оцене померених момената фамилије $\mathcal{L}(u,\chi_D)$ у тачкама ,,удаљеним" од $1/\sqrt{q}$.

[5]једна варијанта тог Селберговог резултата је приказана у (1.14).

Конкретно, то је вредност дефинисана са

$$N(V,u,g) = \left|\left\{D \in \mathcal{H}_{2g+1} \mid \log\left|\mathcal{L}\left(\frac{u}{\sqrt{q}},\chi_D\right)\right| \geq M(u,g)+V\right\}\right|.$$

Идентитети

$$\begin{aligned}\sum_{D\in\mathcal{H}_{2g+1}}\left|\mathcal{L}\left(\frac{u}{\sqrt{q}},\chi_D\right)\right|^k &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(kV+kM(u,g)\right)dN(V,u,g)\\ &= k\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(kV+kM(u,g)\right)N(V,u,g)dV\end{aligned}$$

дају везу између $N(V,u,g)$ и момената квадратних Дирихлеових L-функција, што омогућава да се горња граница за посматране моменте из Теореме 4.2 добије давањем горње границе за $N(V,u,g)$.

Још један значај проблем који се у контексту функцијских поља може посматрати за фамилију квадратних Дирихлеових L-функција је проблем неанулирања функција те фамилије у централној тачки $\frac{1}{2}$. Интуиција да многи објекти дефинисани над $\mathbb{Q}$ и над $\mathbb{F}_q(t)$ који су у аналогији, имају и аналогне особине, могла би сугерисати да за све квадратне Дирихлеове карактере χ_D важи

$$L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\neq 0. \tag{4.5}$$

Међутим, овакав аналог Човлине хипотезе не важи над функцијским пољима, што је показала Ванлин Ли у раду [77]. Она је дошла до таквог резултата давањем геометријске интерпретације анулирања квадратних Дирихлеових L-функција у тачки $\frac{1}{2}$, према којој је $L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)=0$ ако и само ако постоји морфизам из хипереллиптичке криве $C: y^2=D$ у неки варијетет A_q чија је слика густа у A_q. Такви морфизми познати су као доминантна пресликавања. При томе ће A_q, у зависности од тога да ли је q потпун квадрат или није, бити елиптичка крива над $\mathbb{F}_q$, односно Јакобијев варијетет криве дефинисане једначином $y^2=f(x)$, где је $f(x)\in\mathbb{F}_q[x]$ неки сводљив полином степена 6. Давањем доње оцене за број доминантних пресликавања $C\to A_q$ онда се добија и доња оцена за број $\mathrm{e}(N)$ бесквадратних моничних полинома D из $\mathbb{F}_q[t]$ ограниченог степена N за које је $L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)=0$, исказана наредном теоремом.

Теорема 4.3. Нека је q потпун квадрат. Тада за свако $\varepsilon>0$ постоје позитивне константе N'_ε и C'_ε такве да је

$$|\mathrm{e}(N)|\geq C'_\varepsilon N^{1/2-\varepsilon}$$

испуњено за све $N>N'_\varepsilon$.

Нека $q\neq 3$ није потпун квадрат. Тада за свако $\varepsilon>0$ постоје позитивне константе

N''_ε и C''_ε такве да је

$$|\mathrm{e}(N)| \geq C''_\varepsilon \, N^{1/3-\varepsilon}$$

испуњено за све $N > N''_\varepsilon$.

Као отворено је остало питање одређивања тачне густине квадратних карактера за које се одговарајућа L-функција анулира. Конкретна хипотеза је да важи

$$\frac{|\mathrm{e}(N)|}{N} \longrightarrow 0, \quad \text{када } N \longrightarrow \infty,$$

што би значило да, иако Човлина хипотеза није тачна над $\mathbb{F}_q(t)$, њу и даље задовољавају скоро сви квадратни карактери. Један резултат у правцу показивања валидности те хипотезе може се пронаћи у [14], где аутори показују да важи

$$|\mathrm{e}(N)| \leq 0.037N + o(N).$$

4.2. Моменти и неанулирање L-функција квадратних твистова елиптичке криве над функцијским пољима

Нека је $E/\mathbb{F}_q(t)$ фиксирана елиптичка крива. Тада се над функцијским пољем $\mathbb{F}_q(t)$, слично као за фамилију квадратних Дирихлеових L-функција, могу посматрати моменти за фамилију L-функција квадратних твистова елиптичке криве E. Они су дефинисани са

$$\sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right)^k, \tag{4.6}$$

где је k природан број, а $\mathcal{H}^*_{2g+1}$ представља ознаку за скуп свих бесквадратних, моничних полинома степена $2g+1$ који су узајамно прости са дискриминантом Δ од E.

Подсећања ради, за све $D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}$ знак функционалне једначине (3.5) за $\mathcal{L}(u, E \otimes \chi_D)$ се може изразити у облику производа

$$\varepsilon = \epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\chi_D(M_E),$$

где је $\epsilon(E)$ знак функционалне једначине $\mathcal{L}(u, E)$, $\epsilon_{2g+1} \in \{\pm 1\}$ зависи само од g и M_E представља производ свих простих полинома у којима елиптичка крива E има мултипликативну редукцију. У случају да важи $\epsilon_{2g+1}\epsilon(E) = -1$ и $M_E = 1$, функционална једначина (3.5) имплицира да је $L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) = 0$, па је проблем одређивања момената за фамилију L-функција квадратних твистова елиптичке криве E тривијалан.

Асимптотика момената (4.6) када $g \longrightarrow \infty$, под условом да не важи $\epsilon_{2g+1}\epsilon(E) = -1$ и $M_E = 1$ и у случајевима $k \in \{1, 2\}$ одређена је у раду [16], где су аутори показали да за свако $\varepsilon > 0$ важи

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) = c_1 + O_\varepsilon\left(q^{-g+\varepsilon g}\right) \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right)^2 = c_2 g + O_\varepsilon\left(g^{1/2+\varepsilon}\right), \tag{4.8}$$

при чему су c_1 и c_2 неке ненула константе које се могу експлицитно изразити.

За потребе добијања асимптотских формула (4.7) и (4.8), аутори рада [16] су добили и наредни резултат о помереним општим моментима фамилије $\mathcal{L}(u, E \otimes \chi_D)$, који је од значаја и сам по себи.

Теорема 4.4. Нека је $k > 0$, $u = e^{i\theta}, v = e^{i\gamma}$, где су $\theta, \gamma \in [0, 2\pi)$ и m степен за $\mathcal{L}(w, E \otimes \chi_D)$ посматране као полином променљиве w. Тада, за свако $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \left| \mathcal{L}\left(\frac{u}{q^{1/2+\alpha}}, E \otimes \chi_D\right) \mathcal{L}\left(\frac{v}{q^{1/2+\beta}}, E \otimes \chi_D\right) \right|^k \ll_\varepsilon q^{2g} g^\varepsilon \exp\left(kM(u,v,m) + \frac{k^2}{2} V(u,v,m)\right)$$

важи униформно за $|\alpha|, |\beta| \leq \frac{1}{g}$, при чему је

$$M(u,v,m) = -\frac{1}{2}\left(\log\min\left\{m, \frac{1}{\overline{2\theta}}\right\} + \log\min\left\{m, \frac{1}{\overline{2\gamma}}\right\}\right)$$

и

$$V(u,v,m) = \log m - M(u,v,m) + \log\min\left\{m, \frac{1}{\overline{\theta+\gamma}}\right\} + \log\min\left\{m, \frac{1}{\overline{\theta-\gamma}}\right\}.$$

Поред управо приказаних проблема израчунавања првог и другог момента за фамилију $\mathcal{L}(u, E \otimes \chi_D)$, у раду [16] аутори разматрају и проблеме израчунавања мешовитих момената

$$\sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \epsilon_2^- L\left(\frac{1}{2}, E_1 \otimes \chi_D\right) L'\left(\frac{1}{2}, E_2 \otimes \chi_D\right)$$

$$\sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \epsilon_1^- \epsilon_2^- L'\left(\frac{1}{2}, E_1 \otimes \chi_D\right) L'\left(\frac{1}{2}, E_2 \otimes \chi_D\right),$$

где су E_1 и E_2 две (необавезно различите) елиптичке криве над $\mathbb{F}_q(t)$. При томе је за $1 \leq i \leq 2$ са ϵ_i^- означен „детектор” оних квадратних твистова $E_i \otimes \chi_D$ за које је знак ϵ_i функционалне једначине (3.5) одговарајуће L-функције негативан,

$$\epsilon_i^- = \frac{1-\epsilon_i}{2}.$$

Разлог употребе таквих детектора је чињеница да позитиван знак ϵ_i функционалне једначине (3.5) имплицира да је $L'\left(\frac{1}{2}, E_i \otimes \chi_D\right) = 0$, чиме се анулира допринос одговарајућег члана у сумама које дефинишу посматране мешовите моменте.

Под условима да не важи $\epsilon_{2g+1}\epsilon(E_1) = -1$ и $M_{E_1} = 1$, или $\epsilon_{2g+1}\epsilon(E_2) = 1$ и $M_{E_2} = 1$, или $\epsilon(E_1) = \epsilon(E_2)$ и $M_{E_1} = M_{E_2}$, аутори у [16] су показали да, када $g \to \infty$, за свако $\varepsilon > 0$ је испуњено

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \epsilon_2^- L\left(\frac{1}{2}, E_1 \otimes \chi_D\right) L'\left(\frac{1}{2}, E_2 \otimes \chi_D\right) = c_3 g + O_\varepsilon\left(g^{1/2+\varepsilon}\right), \tag{4.9}$$

где је c_3 нека ненула константа која се може експлицитно изразити. Слично, под условима да не важи $\epsilon_{2g+1}\epsilon(E_1) = 1$ и $M_{E_1} = 1$, или $\epsilon_{2g+1}\epsilon(E_2) = 1$ и $M_{E_2} = 1$, или $\epsilon(E_1) = -\epsilon(E_2)$ и $M_{E_1} = M_{E_2}$ су добили и асимптотску формулу

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \epsilon_1^- \epsilon_2^- L'\left(\frac{1}{2}, E_1 \otimes \chi_D\right) L'\left(\frac{1}{2}, E_2 \otimes \chi_D\right) = c_4 g^2 + O_\varepsilon\left(g^{1+\varepsilon}\right), \tag{4.10}$$

где је, поново, c_4 нека ненула константа која се може експлицитно изразити.

ГЛАВА 5

Први мешовити момент L-функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима

Ова глава посвећена је проблему одређивања асимптотика мешовитих момената

$$\sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$$

и

$$\sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \epsilon^- L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$$

када $g \to \infty$, при чему је $E/\mathbb{F}_q(t)$ нека фиксирана елиптичка крива и ϵ^- детектор оних квадратних твистова $E \otimes \chi_D$ за које је знак ϵ функционалне једначине (3.5) одговарајуће L-функције негативан,

$$\epsilon^- = \frac{1-\epsilon}{2}.$$

Конкретно, биће приказани докази наредне две теореме који су изведени у раду [75].

Теорема 5.1. Под условом да не важи $\epsilon(E)\epsilon_{2g+1} = -1$ и $M_E = 1$, када $g \to \infty$, за свако $\varepsilon > 0$ је испуњено

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) = \mathrm{c}_0(M_E) + \mathrm{c}_1(M_E)(2g+1) + O\left(q^{-\frac{g}{2}+\varepsilon g}\right),$$

при чему су вредности $\mathrm{c}_0(M_E)$ и $\mathrm{c}_1(M_E)$ дефинисане у (5.11), (5.12) и (5.5).

Теорема 5.2. Под условом да не важи $\epsilon(E)\epsilon_{2g+1} = -1$ и $M_E = 1$, када $g \to \infty$, за свако $\varepsilon > 0$ је испуњено

$$\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \epsilon^- L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right)$$
$$= \mathrm{d}_0(M_E) + \mathrm{d}_1(M_E)(2g+1) + \mathrm{d}_2(M_E)(2g+1)^2 + O\left(q^{-\frac{g}{2}+\varepsilon g}\right),$$

при чему су вредности $\mathrm{d}_0(M_E)$, $\mathrm{d}_1(M_E)$ и $\mathrm{d}_2(M_E)$ дефинисане у (5.13), (5.14), (5.15) и (5.5).

Кључно за доказивање и Теореме 5.1 и Теореме 5.2 је разумевање суме

$$\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha) = \sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} \sum_{\substack{f \in \mathcal{M}_{\leq X} \\ h \in \mathcal{M}_{\leq Y}}} \frac{\lambda(f)\chi_D(Nfh)}{|f|^{1/2+\alpha}|h|^{1/2}},$$

где су $\lambda(f)$ коефицијенти L-функције придружене елиптичкој кривој E,

$$\mathcal{L}(u, E) = \sum_{f \in \mathcal{M}} \lambda(f) u^{\mathbf{d}(f)},$$

$N \in \mathcal{M}$ је полином чији сви прости фактори деле дискриминанту Δ елиптичке криве E, а $X, Y > 0$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ су параметри који ће касније бити погодно одабрани.

Асимптотика за $\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha)$ када $g \to \infty$ одређена је у наредном тврђењу, чији је доказ, услед велике дужине бити издељен на неколико делова.

Тврђење 5.3. Ако је $X \geq Y > 0$ и $X \ll g$, онда, када $g \to \infty$, за све $\varepsilon > 0$ важи

$$\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha) = |\mathcal{H}_{2g+1}| \left(\mathrm{a}_0(N, \alpha, Y) + \mathrm{a}_1(N, \alpha)(Y+1)\right)$$
$$+ O\left(q^{2g - X/3} g^3\right) + O\left(q^{2g - Y/2}\right) + O\left(q^{\frac{X+Y}{2}+\varepsilon g}\right),$$

униформно за $|\alpha| \leq \frac{1}{g}$, при чему су вредности $\mathrm{a}_0(N, \alpha, Y)$ и $\mathrm{a}_1(N, \alpha)$ дефинисане у (5.6) и (5.7).

Први део доказа Тврђења 5.3: Почетне манипулације сумама За почетак се може променити редослед сумације у дефиницији $\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha)$ и применити

Лема 3.7. Тиме се добија да је $\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha)$ једнако

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}}}\frac{\lambda(f)}{|f|^{1/2+\alpha}|h|^{1/2}}\sum_{C_1|\Delta}\mu(C_1)\chi_{C_1}(Nfh)\sum_{C_2|(\Delta fh)^\infty}\sum_{R\in\mathcal{M}_{2g+1-\mathbf{d}(C_1)-2\mathbf{d}(C_2)}}\chi_R(Nfh)\\ &-q\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}}}\frac{\lambda(f)}{|f|^{1/2+\alpha}|h|^{1/2}}\sum_{C_1|\Delta}\mu(C_1)\chi_{C_1}(Nfh)\sum_{C_2|(\Delta fh)^\infty}\sum_{R\in\mathcal{M}_{2g-1-\mathbf{d}(C_1)-2\mathbf{d}(C_2)}}\chi_R(Nfh)\\ &=\mathcal{S}'_E(N,X,Y,\alpha)-q\mathcal{S}''_E(N,X,Y,\alpha),\end{aligned}$$

где је $\mathcal{S}'_E(N,X,Y,\alpha)$ изражено са

$$\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}}}\frac{\lambda(f)}{|f|^{1/2+\alpha}|h|^{1/2}}\sum_{C_1|\Delta}\mu(C_1)\chi_{C_1}(Nfh)\sum_{C_2|(\Delta fh)^\infty}\sum_{R\in\mathcal{M}_{2g+1-\mathbf{d}(C_1)-2\mathbf{d}(C_2)}}\chi_R(Nfh),$$

а $\mathcal{S}''_E(N,X,Y,\alpha)$ је иста сума, уз једину разлику да је у њој g замењено са $g-1$.

Сума по R у дефиницији $\mathcal{S}'_E(N,X,Y,\alpha)$ се може даље изразити користећи Тврђење 2.15, чиме се добија да је $\mathcal{S}'_E(N,X,Y,\alpha)$ једнако

$$\begin{aligned}&q^{2g+1}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}\\ \mathbf{d}(Nfh)\text{ паран}}}\frac{\lambda(f)}{|N||f|^{3/2+\alpha}|h|^{3/2}}\sum_{\substack{C_1|\Delta\\ C_2|(\Delta fh)^\infty\\ \mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)\le 2g+1}}\frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(Nfh)}{|C_1||C_2|^2}\Bigg(G(0,Nfh)\\ &+(q-1)\sum_{V\in\mathcal{M}_{\le\mathbf{d}(Nfh)+\mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)-2g-3}}G(V,Nfh)-\sum_{V\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}(Nfh)+\mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)-2g-2}}G(V,Nfh)\Bigg)\\ &+q^{2g+1}\overline{\tau(q)}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}\\ \mathbf{d}(Nfh)\text{ непаран}}}\frac{\lambda(f)}{|N||f|^{3/2+\alpha}|h|^{3/2}}\sum_{\substack{C_1|\Delta\\ C_2|(\Delta fh)^\infty\\ \mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)\le 2g+1}}\frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(Nfh)}{|C_1||C_2|^2}\\ &\times\sum_{V\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}(Nfh)+\mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)-2g-2}}G(V,Nfh).\end{aligned}$$

Нека је $\mathcal{S}'_E(V=0)$ ознака за чланове са $V=0$ и $\mathcal{S}'_E(V\neq 0)$ ознака за чланове са $V\neq 0$ у претходном изразу за $\mathcal{S}'_E(N,X,Y,\alpha)$ и нека су слично дефинисани $\mathcal{S}''_E(V=0)$ и $\mathcal{S}''_E(V\neq 0)$. Додатно, нека је

$$\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V=0)=\mathcal{S}'_E(V=0)-q\mathcal{S}''_E(V=0)$$

и

$$\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V\neq 0)=\mathcal{S}'_E(V\neq 0)-q\mathcal{S}''_E(V\neq 0),$$

тако да је испуњено

$$\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha)=\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V=0)+\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V\neq 0).$$

У наредном кораку ће бити израчуната асимптотика за $\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V=0)$, а затим у последњем бити дата горња граница за $\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V\neq 0)$.

Други део доказа Тврђења 5.3: Рачунање доприноса чланова $V=0$ Главни резултат овог корака сумиран је у облику наредне леме.

Лема 5.4. Када $g\to\infty$ важи

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V=0) &= |\mathcal{H}_{2g+1}|\left(\mathrm{a}_0(N,\alpha,Y)+\mathrm{a}_1(N,\alpha)(Y+1)\right)\\ &\quad + O\left(q^{2g-X/3}g^3\right)+O\left(q^{2g-Y/2}\right),\end{aligned}$$

униформно за $|\alpha|\le\frac{1}{g}$, при чему су вредности $\mathrm{a}_0(N,\alpha,Y)$ и $\mathrm{a}_1(N,\alpha)$ дефинисане у (5.6) и (5.7).

Доказ. На основу Леме 2.14 следи да је $G(0,Nfh)$ ненула ако и само ако је Nfh потпун квадрат неког полинома из $\mathbb{F}_q[t]$, што ће надаље бити означавано са $Nfh=\square$. У том случају је $G(0,Nfh)=\phi(Nfh)$, па важи

$$\mathcal{S}'_E(V=0)=q^{2g+1}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}\\ Nfh=\square}}\frac{\lambda(f)\phi(Nfh)}{|N||f|^{3/2+\alpha}|h|^{3/2}}\sum_{C_2|(\Delta fh)^\infty}\frac{1}{|C_2|^2}\sum_{\substack{C_1|\Delta\\ (C_1,Nfh)=1\\ \mathbf{d}(C_1)\le 2g+1-2\mathbf{d}(C_2)}}\frac{\mu(C_1)}{|C_1|}. \tag{5.1}$$

Унутрашња сума по C_1 израчуната је у [16] на следећи начин,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{C_1|\Delta\\ (C_1,Nfh)=1\\ \mathbf{d}(C_1)\le 2g+1-2\mathbf{d}(C_2)}}\frac{\mu(C_1)}{|C_1|} &= \sum_{\substack{C_1|\Delta\\ (C_1,Nfh)=1}}\frac{\mu(C_1)}{|C_1|}-\sum_{\substack{C_1|\Delta\\ (C_1,Nfh)=1\\ \mathbf{d}(C_1)>2g+1-2\mathbf{d}(C_2)}}\frac{\mu(C_1)}{|C_1|}\\ &=\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta\\ P\nmid Nfh}}\left(1-\frac{1}{|P|}\right)+O\left(q^{-2g}|C_2|^2\right)\\ &=\frac{|Nfh|}{\phi(Nfh)}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta fh}}\left(1-\frac{1}{|P|}\right)+O\left(q^{-2g}|C_2|^2\right).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Поред тога, за сваки природан број n важи

$$\sum_{\substack{C_2\in\mathcal{M}_n\\ C_2|(\Delta fh)^\infty}}1\ll_\varepsilon q^{\varepsilon n}, \tag{5.3}$$

где је $\varepsilon>0$ произвољно. Услов $Nfh=\square$ третира се на следећи начин. Прво, полином N се може записати у облику $N=N_1^2N_2$, где је N_2 бесквадратан полином. Онда је услов да је Nfh потпун квадрат еквивалентан са $fh=N_2L^2$ за неки полином L. Тада се може писати $f=N_2'A$ и $h=N_2''B$, уз $N_2'N_2''=N_2$ и $AB=L^2$.

Следи да је тотални допринос грешке из (5.2) у (5.1) ограничен са

$$
\begin{aligned}
&\ll_\varepsilon q^{\varepsilon g} \sum_{L\in\mathcal{M}_{\le[(X+Y)/2]}} \frac{1}{|L|} \sum_{\substack{A,B\in\mathcal{M}\\ AB=L^2}} \left|\lambda(N_2'A)\right| \\
&\ll_\varepsilon q^{\varepsilon g} \sum_{L\in\mathcal{M}_{\le[(X+Y)/2]}} \frac{1}{|L|} \sum_{\substack{A,B\in\mathcal{M}\\ AB=L^2}} |A|^\varepsilon \\
&\ll_\varepsilon q^{\varepsilon g} \sum_{L\in\mathcal{M}_{\le[(X+Y)/2]}} |L|^{\varepsilon-1}\tau(L^2) \\
&\ll_\varepsilon q^{\varepsilon g+\varepsilon\frac{X+Y}{2}} \ll_\varepsilon q^{\varepsilon q},
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

при чему је, уз оцену (5.3) и услов $X,Y\ll g$, искоришћена чињеница да $|\lambda(f)|\le \tau(f)\ll_\varepsilon |f|^\varepsilon$ важи за све $f\in\mathcal{M}$.

Добијено омогућава да се (5.1) запише у облику

$$
\mathcal{S}_E'(V=0) = q^{2g+1} \sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}\\ Nfh=\square}} \frac{\lambda(f)}{|f|^{1/2+\alpha}|h|^{1/2}} \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta fh}} \left(1-\frac{1}{|P|}\right) \sum_{\substack{C_2|(\Delta fh)^\infty\\ \mathbf{d}(C_2)\le g}} \frac{1}{|C_2|^2} + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right).
$$

Даље је испуњено

$$
\sum_{\substack{C_2|(\Delta fh)^\infty\\ \mathbf{d}(C_2)\le g}} \frac{1}{|C_2|^2} = \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta fh}} \left(1-\frac{1}{|P|^2}\right)^{-1} + O_\varepsilon\left(q^{-2g+\varepsilon g}\right),
$$

при чему се допринос грешке тог израза у $\mathcal{S}_E'(V=0)$ рачуна на начин сличан као што је оцењено (5.4). Због тога је

$$
\mathcal{S}_E'(V=0) = q^{2g+1} \sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}\\ Nfh=\square}} \frac{\lambda(f)}{|f|^{1/2+\alpha}|h|^{1/2}} \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta fh}} \left(1+\frac{1}{|P|}\right)^{-1} + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right).
$$

Слична оцена, уз једину разлику да је g замењено са $g-1$, важи и за $\mathcal{S}_E''(V=0)$, па следи

$$
\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V=0) = |\mathcal{H}_{2g+1}| \sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le X}\\ h\in\mathcal{M}_{\le Y}\\ Nfh=\square}} \frac{\lambda(f)}{|f|^{1/2+\alpha}|h|^{1/2}} \prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta fh}} \left(1+\frac{1}{|P|}\right)^{-1} + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right).
$$

Наредни корак састоји се из изражавања сума по f и h преко контурних интеграла користећи Перонову формулу,

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha, V = 0)\\&\quad= \frac{|\mathcal{H}_{2g+1}|}{(2\pi i)^2} \oint_{|u|=r} \oint_{|v|=r} \mathcal{A}_E(N, u, v, \alpha) \frac{du dv}{u^{X+1} v^{Y+1} (1-u)(1-v)} + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right),\end{aligned}$$

при чему је $r < 1$ произвољно и

$$\mathcal{A}_E(N, u, v, \alpha) = \sum_{\substack{f,h \in \mathcal{M} \\ Nfh = \square}} \frac{\lambda(f) u^{\mathbf{d}(f)} v^{\mathbf{d}(h)}}{|f|^{1/2+\alpha} |h|^{1/2}} \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | \Delta f h}} \left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1}.$$

Уз подсећање на почетни услов да сви прости фактори полинома N деле дискриминанту Δ, функција $\mathcal{A}_E(N, u, v, \alpha)$ се може записати у облику наредног Ојлеровог производа,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_E(N, u, v, \alpha) &= \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid \Delta}} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} \sum_{i+j \text{ парно } \geq 2} \frac{\lambda(P^i) u^{i\mathbf{d}(P)} v^{j\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(1/2+\alpha)i + j/2}}\right)\\&\quad\times \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | \Delta}} \left(\left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} \sum_{\substack{i,j \\ i+j+\mathrm{ord}_P(N) \text{ парно}}} \frac{\lambda(P^i) u^{i\mathbf{d}(P)} v^{j\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(1/2+\alpha)i + j/2}}\right).\end{aligned}$$

Следи да је

$$\mathcal{A}_E(N, u, v, \alpha) = \mathcal{C}_E(N, u, v, \alpha) \mathcal{Z}\left(\frac{v^2}{q}\right), \tag{5.5}$$

где је $\mathcal{C}_E(N, u, v, \alpha)$ нека функција која је дата Ојлеровим производом који је униформно ограничен када $|u| \leq q^{1/3}$ и $|v| \leq q^{1/2}$. Стога

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha, V = 0)\\&= \frac{|\mathcal{H}_{2g+1}|}{(2\pi i)^2} \oint_{|u|=r} \oint_{|v|=r} \mathcal{C}_E(N, u, v, \alpha) \frac{du dv}{u^{X+1} v^{Y+1} (1-u)(1-v)^2(1+v)} + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right)\end{aligned}$$

важи за све $r < 1$. После избора $r = q^{-1/g}$ и померања контуре по u до $|u| = q^{1/3}$, прелази се преко само једног простог пола у $u = 1$. Допринос члана који потиче од новог интеграла се може тривијално ограничити са $O\left(q^{2g - X/3} g^3\right)$, па следи

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha, V = 0)\\&= -\frac{|\mathcal{H}_{2g+1}|}{(2\pi i)^2} \oint_{|v|=q^{-1/g}} \mathcal{C}_E(N, 1, v, \alpha) \frac{dv}{v^{Y+1} (1-v)^2 (1+v)} + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right) + O\left(q^{2g - X/3} g^3\right).\end{aligned}$$

Даље се контура по v може померити до $|v| = q^{1/2}$, чиме се прелази преко простог пола у $v = -1$ и двоструког пола у $v = 1$. Допринос члана који потиче од новог интеграла се може тривијално оценити са $O\left(q^{2g-Y/2}\right)$, док је допринос резидуума у $v = 1$

$$-\frac{|\mathcal{H}_{2g+1}|}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(C_E(N,1,v,\alpha)\right)\Big|_{v=1} + |\mathcal{H}_{2g+1}|C_E(N,1,1,\alpha)\frac{2(Y+1)+1}{4}$$
$$= \frac{|\mathcal{H}_{2g+1}|}{2}C_E(N,1,1,\alpha)(Y+1) + \frac{|\mathcal{H}_{2g+1}|}{4}\left(C_E(N,1,1,\alpha) - 2\frac{\partial}{\partial v}\left(C_E(N,1,v,\alpha)\right)\Big|_{v=1}\right),$$

а резидуума $v = -1$ је

$$(-1)^Y\frac{|\mathcal{H}_{2g+1}|}{4}C_E(N,1,-1,\alpha).$$

Коначно, комбиновањем претходних резултата добија се

$$\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V=0)$$
$$= |\mathcal{H}_{2g+1}|\left(\mathrm{a}_0(N,\alpha,Y) + \mathrm{a}_1(N,\alpha)(Y+1)\right) + O\left(q^{2g-X/3}g^3\right) + O\left(q^{2g-Y/2}\right),$$

где је

$$\mathrm{a}_0(N,\alpha,Y) = \frac{1}{4}\left(C_E(N,1,1,\alpha) - 2\frac{\partial}{\partial v}C_E(N,1,v,\alpha)\Big|_{v=1} + (-1)^Y C_E(N,1,-1,\alpha)\right) \tag{5.6}$$

и

$$\mathrm{a}_1(N,\alpha) = \frac{1}{2}C_E(N,1,1,\alpha), \tag{5.7}$$

што завршава овај доказ.

□

Трећи део доказа Тврђења 5.3: Рачунање доприноса чланова $V \neq 0$ И у овом кораку ће, слично као у претходном, главни резултат бити приказан у облику наредне леме.

Лема 5.5. Када $g \to \infty$, за све $\varepsilon > 0$ важи

$$\mathcal{S}_E(N,X,Y,\alpha,V\neq 0) \ll q^{\frac{X+Y}{2}+\varepsilon g}$$

униформно за све $|\alpha| \leq \frac{1}{g}$.

Доказ. Довољно је пронаћи оцену за

$$\mathcal{S}(V\neq 0) = q^{2g+1}\overline{\tau(q)} \sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\leq X}\\ h\in\mathcal{M}_{\leq Y}\\ \mathbf{d}(Nfh)\ \text{непаран}}} \frac{\lambda(f)}{|N||f|^{3/2+\alpha}|h|^{3/2}} \sum_{\substack{C_1|\Delta\\ C_2|(\Delta fh)^\infty\\ \mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)\leq 2g+1}} \frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(Nfh)}{|C_1||C_2|^2}$$
$$\times \sum_{V\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}(Nfh)+\mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)-2g-2}} G(V,Nfh),$$

пошто се остали чланови из дефиниције $\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha, V \neq 0)$ третирају истоветно. За почетак се може приметити да

$$\sum_{\substack{C \in \mathcal{M}_n \\ C|(\Delta f)^\infty}} \frac{1}{|C|^2} = \frac{q^{-2n}}{2\pi i} \oint_{|w|=r} \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P|\Delta f}} \left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} \frac{dw}{w^{n+1}}$$

важи за сваки природан број n и свако $r < 1$. После записивања $V = V_1 V_2^2$, где је V_1 бесквадратан полином, онда следи

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(V \neq 0) = {} & \frac{q^{2g+1}\overline{\tau(q)}}{|N|} \sum_{c_1+2c_2 \leq 2g+1} q^{-2c_2} \sum_{\substack{C_1 \in \mathcal{M}_{c_1} \\ C_1|\Delta}} \frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(N)}{|C_1|} \\ & \times \sum_{\substack{m \leq X \\ n \leq Y \\ m+n+\mathbf{d}(N) \text{ непарно}}} \sum_{\substack{j \leq m+n+\mathbf{d}(N)+c_1+2c_2-2g-2 \\ j+c_1 \text{ непарно}}} \sum_{V_1 \in \mathcal{H}_j} \sum_{V_2 \in \mathcal{M}_{(m+n+\mathbf{d}(N)+c_1-j)/2+c_2-g-1}} \\ & \times \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} \sum_{\substack{f \in \mathcal{M}_m \\ h \in \mathcal{M}_n}} \frac{\chi_{C_1}(fh)\lambda(f)G(V_1V_2^2, Nfh)}{|f|^{3/2+\alpha}|h|^{3/2}} \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P|\Delta f}} \left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} \frac{dw}{w^{c_2+1}}.\end{aligned}$$

Наредна идеја је да се суме по f и g изразе користећи Перонову формулу. Пре тога, прво се може приметити да на основу Леме 2.14 важи

$$\begin{aligned}&\sum_{f,h \in \mathcal{M}} \frac{\chi_{C_1}(fh)\lambda(f)G(V_1V_2^2, Nfh)}{|f|^{3/2+\alpha}|h|^{3/2}} \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P|\Delta f}} \left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1} u^{\mathbf{d}(f)} v^{\mathbf{d}(h)} \\ &= \mathcal{D}(V_1; v)\mathcal{G}(V_1; u, w, \alpha)\mathcal{E}_1(V_1V_2^2; u, v, w, \alpha)\mathcal{E}_2(V_1V_2^2; u, v, w, \alpha),\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(V_1; v) &= \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid V_1}} \left(1 + \frac{\chi_{C_1V_1}(P)v^{\mathbf{d}(P)}}{|P|}\right), \\ \mathcal{G}(V_1; u, w, \alpha) &= \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid V_1}} \left(1 + \frac{\chi_{C_1V_1}(P)\lambda(P)u^{\mathbf{d}(P)}}{|P|^{1+\alpha}} \left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}\right), \\ &\mathcal{E}_1(V_1V_2^2; u, v, w, \alpha) \\ &= \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P|\Delta}} \left(\sum_{i,j} \frac{\chi_{C_1}(P^{i+j})\lambda(P^i)G\left(V_1V_2^2; P^{i+j+\mathrm{ord}_P(N)}\right)u^{i\mathbf{d}(P)}v^{j\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(3/2+\alpha)i+3j/2}}\right)\left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_2(V_1V_2^2;u,v,w,\alpha)\\
&=\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|V_1V_2\\ P\nmid\Delta}}\left(1+\sum_{i,j}\frac{\chi_{C_1}(P^{i+j})\lambda(P^i)G\left(V_1V_2^2;P^{i+j}\right)u^{i\mathbf{d}(P)}v^{j\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(3/2+\alpha)i+3j/2}}\left(1-w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}\right)\\
&\times\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P\nmid V_1\\ P|\Delta V_2}}\left(1+\frac{\chi_{C_1V_1}(P)v^{\mathbf{d}(P)}}{|P|}\right)^{-1}\left(1+\frac{\chi_{C_1V_1}(P)\lambda(P)u^{\mathbf{d}(P)}}{|P|^{1+\alpha}}\left(1-w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Најављена примена Перонове формуле онда даје

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(V\neq 0)=&\frac{q^{2g+1}\overline{\tau(q)}}{|N|}\sum_{c_1+2c_2\le 2g+1}q^{-2c_2}\sum_{\substack{C_1\in\mathcal{M}_{c_1}\\ C_1|\Delta}}\frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(N)}{|C_1|}\\
&\times\sum_{\substack{m\le X\\ n\le Y\\ m+n+\mathbf{d}(N)\ \text{непарно}}}\sum_{\substack{j\le m+n+\mathbf{d}(N)+c_1+2c_2-2g-2\\ j+c_1\ \text{непарно}}}\sum_{V_1\in\mathcal{H}_j}\sum_{V_2\in\mathcal{M}_{(m+n+\mathbf{d}(N)+c_1-j)/2+c_2-g-1}}\\
&\times\frac{1}{(2\pi i)^3}\oint_{|u|=r_1}\oint_{|v|=r_2}\oint_{|w|=r_3}\mathcal{D}(V_1;v)\mathcal{G}(V_1;u,w,\alpha)\\
&\times\mathcal{E}_1(V_1V_2^2;u,v,w,\alpha)\mathcal{E}_2(V_1V_2^2;u,v,w,\alpha)\frac{du}{u^{m+1}}\frac{dv}{v^{n+1}}\frac{dw}{w^{c_2+1}},
\end{aligned}\tag{5.8}$$

при чему је редом $r_1=q^{1/2+\alpha-\varepsilon}$, $r_2=q^{1/2-\varepsilon}$ и $r_3=q^{-\varepsilon}$.

Функција $\mathcal{D}(V_1;v)$ се може записати у облику

$$\mathcal{D}(V_1;v)=\mathcal{L}\left(\frac{v}{q},\chi_{C_1V_1}\right)\mathcal{D}_1(V_1;v),$$

при чему је $\mathcal{D}_1(V_1;v,w)$ дефинисано Ојлеровим производом који конвергира када је $|v|\le r_2$. Допринос L-функције из претходног израза се може ограничити на сличан начин као што је то урађено у доказу Леме 7.1. из [42]. Конкретно, користећи Теорему 3.3 из [1] и напомене из доказа Леме 7.1. из [42], следи да за свако фиксирано c_1 и j важи

$$\left|\mathcal{L}\left(\frac{v}{q},\chi_{C_1V_1}\right)\right|\ll e^{\frac{j+c_1-1}{\log_q\frac{j+c_1-1}{2}}+4\sqrt{\frac{q}{2}(j+c_1-1)}}.\tag{5.9}$$

Слично, ако је k_2 најмањи природан број такав да важи $|r_1r_3^{k_2}|<1$, онда се може писати

$\mathcal{G}(V_1;u,w,\alpha)=$

$$\mathcal{L}\left(\frac{u}{q^{1+\alpha}}, E\otimes\chi_{C_1V_1}\right)\mathcal{L}\left(\frac{uw}{q^{1+\alpha}}, E\otimes\chi_{C_1V_1}\right)\dots\mathcal{L}\left(\frac{uw^{k_2-1}}{q^{1+\alpha}}, E\otimes\chi_{C_1V_1}\right)\mathcal{G}_1(V_1;u,w,\alpha),$$

при чему је $\mathcal{G}_1(V_1;u,w,\alpha)$ неки Ојлеров производ који конвергира када је $|u|\le r_1$ и $|w|\le r_3$. Попут претходног ограничавања квадратне L-функције, може се закључити да

$$\left|\mathcal{L}\left(\frac{uw^j}{q}, \chi_{C_1V_1}\right)\right| \ll e^{\frac{j+c_1-1}{\log_q \frac{j+c_1-1}{2}}+8\sqrt{\frac{q}{2}(j+c_1-1)}} \tag{5.10}$$

важи за свако фиксирано c_1 и j и све $1\le j\le k_2-1$. Након уочавања да за $|u|\le r_1$, $|v|\le r_2$, $|w|\le r_3$ важи

$$\mathcal{E}_1(V_1V_2^2;u,v,w,\alpha)\ll_\varepsilon |V_1V_2|^\varepsilon$$

и

$$\mathcal{E}_2(V_1V_2^2;u,v,w,\alpha)\ll_\varepsilon |V_2|^\varepsilon$$

и коришћења оцена (5.9) и (5.10), уз подсећање да је $j\le m+n+\mathbf{d}(N)+c_1+2c_2-2g-2$, следи

$$\oint_{|u|=r_1}\oint_{|v|=r_2}\oint_{|w|=r_3}\Big|\mathcal{D}(V_1;v)\mathcal{G}(V_1;u,w,\alpha)\mathcal{E}_1(V_1V_2^2;u,v,w,\alpha)$$
$$\times\,\mathcal{E}_2(V_1V_2^2;u,v,w,\alpha)\frac{du}{u^{m+1}}\frac{dv}{v^{n+1}}\frac{dw}{w^{c_2+1}}\Big| \ll q^{\frac{m+n}{2}(1+\varepsilon)}|V_1V_2|^\varepsilon.$$

Коришћењем ове оцене у (5.8), уз тривијално ограничавање осталих чланова добија се тражени резултат. □

Комбинацијом резултата добијених у Лемама 5.4 и 5.5 се онда комплетира доказ Тврђења 5.3. Директном применом тог тврђења се добијају Теореме 5.1 и 5.2, као што ће бити наредно демонстрирано.

Доказ Теореме 5.1. Прво, на основу Тврђења 2.9 и 3.5 следи

$$\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac12, E\otimes\chi_D\right)L\left(\frac12,\chi_D\right) =$$
$$\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le[\mathfrak{n}/2]+2g+1}\\ h\in\mathcal{M}_{\le g}}}\frac{\lambda(f)\chi_D(fh)}{|f|^{1/2}|h|^{1/2}} + \sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le[\mathfrak{n}/2]+2g+1}\\ h\in\mathcal{M}_{\le g-1}}}\frac{\lambda(f)\chi_D(fh)}{|f|^{1/2}|h|^{1/2}}$$
$$+\,\epsilon\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le[(\mathfrak{n}-1)/2]+2g+1}\\ h\in\mathcal{M}_{\le g}}}\frac{\lambda(f)\chi_D(fh)}{|f|^{1/2}|h|^{1/2}} + \epsilon\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le[(\mathfrak{n}-1)/2]+2g+1}\\ h\in\mathcal{M}_{\le g-1}}}\frac{\lambda(f)\chi_D(fh)}{|f|^{1/2}|h|^{1/2}}$$
$$=\mathcal{S}_E(1,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g,0)+\mathcal{S}_E(1,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g-1,0)$$
$$+\,\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\mathcal{S}_E(M_E,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g,0)+\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\mathcal{S}_E(M_E,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g-1,0).$$

На основу Тврђења 5.3 претходно је даље једнако

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}_{2g+1}|\big(\mathrm{a}_0(1,0,g)+\mathrm{a}_0(1,0,g-1)+(2g+1)\mathrm{a}_1(1,0)\\
&+\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\left(\mathrm{a}_0(M_E,0,g)+\mathrm{a}_0(M_E,0,g-1)+(2g+1)\mathrm{a}_1(M_E,0)\right)\big)+O\left(q^{\frac{3g}{2}+\varepsilon g}\right).
\end{aligned}
$$

Коначно, после коришћења израза (5.6) и (5.7) за a_0 и a_1 добија се

$$
\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|}\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)=\mathrm{c}_0(M_E)+\mathrm{c}_1(M_E)(2g+1)+O\left(q^{-\frac{g}{2}+\varepsilon g}\right),
$$

где је

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c}_0(M_E)=\frac{1}{2}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta}}\frac{|P|+1}{|P|}\Bigg(&\mathcal{C}_E(1,1,1,0)-2\frac{\partial}{\partial v}\mathcal{C}_E(1,1,v,0)\Big|_{v=1}\\
&+\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\left(\mathcal{C}_E(M_E,1,1,0)-2\frac{\partial}{\partial v}\mathcal{C}_E(M_E,1,v,0)\Big|_{v=1}\right)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

и

$$
\mathrm{c}_1(M_E)=\frac{1}{2}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta}}\frac{|P|+1}{|P|}\left(\mathcal{C}_E(1,1,1,0)+\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\mathcal{C}_E(M_E,1,1,0)\right),
\tag{5.12}
$$

што комплетира доказ теореме. □

Доказ Теореме 5.2. Слично као у претходном доказу, на основу Тврђења 2.9 и 3.6 следи

$$
\begin{aligned}
&\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\epsilon^- L'\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\\
&=(1-\epsilon)(\log q)\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le[\mathfrak{n}/2]+2g+1}\\ h\in\mathcal{M}_{\le g}}}\frac{([\mathfrak{n}/2]+2g+1-\mathbf{d}(f))\lambda(f)\chi_D(fh)}{|f|^{1/2}|h|^{1/2}}\\
&+(1-\epsilon)(\log q)\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\le[\mathfrak{n}/2]+2g+1}\\ h\in\mathcal{M}_{\le g-1}}}\frac{([\mathfrak{n}/2]+2g+1-\mathbf{d}(f))\lambda(f)\chi_D(fh)}{|f|^{1/2}|h|^{1/2}}\\
&=(\log q)([\mathfrak{n}/2]+2g+1)\Big(\mathcal{S}_E(1,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g,0)+\mathcal{S}_E(1,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g-1,0)\\
&-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\left(\mathcal{S}_E(M_E,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g,0)+\mathcal{S}_E(M_E,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g-1,0)\right)\Big)\\
&+\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\mathcal{S}_E(1,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g,\alpha)+\mathcal{S}_E(1,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g-1,\alpha)\\
&-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\left(\mathcal{S}_E(M_E,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g,\alpha)+\mathcal{S}_E(M_E,[\mathfrak{n}/2]+2g+1,g-1,\alpha)\right)\Big)\Big|_{\alpha=0}.
\end{aligned}
$$

Коришћењем Тврђења 5.3 добија се да је претходно даље једнако

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{H}_{2g+1}|(\log q)([\mathfrak{n}/2]+2g+1)\Big(\mathrm{a}_0(1,0,g)+\mathrm{a}_0(1,0,g-1)+(2g+1)\mathrm{a}_1(1,0)\\
&-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\left(\mathrm{a}_0(M_E,0,g)+\mathrm{a}_0(M_E,0,g-1)+(2g+1)\mathrm{a}_1(M_E,0)\right)\Big)\\
&+|\mathcal{H}_{2g+1}|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\mathrm{a}_0(1,\alpha,g)+\mathrm{a}_0(1,\alpha,g-1)+(2g+1)\mathrm{a}_1(1,\alpha)\\
&-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\left(\mathrm{a}_0(M_E,\alpha,g)+\mathrm{a}_0(M_E,\alpha,g-1)+(2g+1)\mathrm{a}_1(M_E,\alpha)\right)\Big)\Big|_{\alpha=0}+O\left(q^{\frac{3g}{2}+\varepsilon g}\right).
\end{aligned}
$$

Коначно, после расписивања a_0 и a_1 на основу њихових израза (5.6) и (5.7) добија се

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathcal{H}^*_{2g+1}|}\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\epsilon^- L'\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\\
&\qquad=\mathrm{d}_0(M_E)+\mathrm{d}_1(M_E)(2g+1)+\mathrm{d}_2(M_E)(2g+1)^2+O\left(q^{-\frac{g}{2}+\varepsilon g}\right),
\end{aligned}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_0(M_E)=&\frac{[\mathfrak{n}/2](\log q)}{2}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta}}\frac{|P|+1}{|P|}\Big(C_E(1,1,1,0)-2\frac{\partial}{\partial v}C_E(1,1,v,0)\Big|_{v=1}\\
&-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\Big(C_E(M_E,1,1,0)-2\frac{\partial}{\partial v}C_E(M_E,1,v,0)\Big|_{v=1}\Big)\Big)\\
&+\frac{1}{2}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta}}\frac{|P|+1}{|P|}\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}C_E(1,1,1,\alpha)\Big|_{\alpha=0}-2\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial v}C_E(1,1,v,\alpha)\Big|_{\substack{\alpha=0\\v=1}}\\
&-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}C_E(M_E,1,1,\alpha)\Big|_{\alpha=0}-2\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial v}C_E(M_E,1,v,\alpha)\Big|_{\substack{\alpha=0\\v=1}}\Big)\Big),
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_1(M_E)=&\frac{[\mathfrak{n}/2](\log q)}{2}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta}}\frac{|P|+1}{|P|}\Big(C_E(1,1,1,0)-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}C_E(M_E,1,1,0)\Big)\\
&+\frac{\log q}{2}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta}}\frac{|P|+1}{|P|}\Big(C_E(1,1,1,0)-2\frac{\partial}{\partial v}C_E(1,1,v,0)\Big|_{v=1}\\
&-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\Big(C_E(M_E,1,1,0)-2\frac{\partial}{\partial v}C_E(M_E,1,v,0)\Big|_{v=1}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta}}\frac{|P|+1}{|P|}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}C_E(1,1,1,\alpha)\Big|_{\alpha=0}-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\frac{\partial}{\partial\alpha}C_E(M_E,1,1,\alpha)\Big|_{\alpha=0}\right) \tag{5.14}$$

и

$$\mathrm{d}_2(M_E)=\frac{\log q}{2}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\P|\Delta}}\frac{|P|+1}{|P|}\Big(C_E(1,1,1,0)-\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}C_E(M_E,1,1,0)\Big). \tag{5.15}$$

□

5.1. Примена на истовремено неанулирање

Резултати из претходног одељка, описани Теоремама 5.1 и 5.2 могу се искористити да се добију доње границе броја полинома из $\mathcal{H}^*_{2g+1}$ за које се $L\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)$ и $L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)$, односно $L'\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)$ и $L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)$ истовремено не анулирају. Конкретно, важи следеће тврђење.

Теорема 5.6. Под условом да није испуњено $\epsilon(E)\epsilon_{2g+1}=-1$ и $M_E=1$, када $g\longrightarrow\infty$, за свако ε важи

$$\#\left\{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}\mid L\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\neq 0\right\}\gg\frac{q^{2g}}{g^{6+\varepsilon}}$$

и

$$\#\left\{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}\mid L'\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)\neq 0\right\}\gg\frac{q^{2g}}{g^{6+\varepsilon}}.$$

Доказ. Примене Теореме 4.2 и 4.4 дају следеће горње границе

$$\sum_{D\in\mathcal{H}_{2g+1}}L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)^4\ll q^{2g}g^{10+\varepsilon} \tag{5.16}$$

$$\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}L\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)^4\ll q^{2g}g^{6+\varepsilon}. \tag{5.17}$$

Додатно, из Хелдерове неједнакости следи

$$\left(\sum_{D\in\mathcal{H}_{2g+1}}L\left(\frac{1}{2},\chi_D\right)^4\right)\left(\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}L\left(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D\right)^4\right)\left(\sum_{\substack{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}\\L(\frac{1}{2},E\otimes\chi_D)L(\frac{1}{2},\chi_D)\neq 0}}1\right)^2$$

$$\geq \left(\sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) \right)^4 .$$

Прво део теореме онда следи комбинацијом претходног са (5.16), (5.17) и Теоремом 5.1.

Други део теореме се добија на исти начин, уз једину разлику да се уместо (5.17) користи горња граница (9.2) из [16],

$$\sum_{D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}} L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right)^4 \ll q^{2g} g^{10+\varepsilon}.$$

□

ГЛАВА 6

Хипотезе о количницима L-функција

Ова глава посвећена је хипотезама о количницима L-функција у различитим фамилијама. При томе ће се први део излагања бавити класичним контекстом L-функција над пољем рационалних бројева, док ће у другом делу фокус излагања бити на фамилији квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима.

6.1. Хипотезе о количницима L-функција над пољем рационалних бројева

У контексту поља рационалних бројева, хипотеза о количницима за фамилију[1] L-функција $\{L(s,f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ представља хипотезу о асимптотском понашању усредњеног количника

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} \frac{\prod_{i=1}^{K} L\left(\frac{1}{2}+\alpha_i, f\right) \prod_{j=1}^{L} L\left(\frac{1}{2}+\alpha_{K+j}, \overline{f}\right)}{\prod_{k=1}^{Q} L\left(\frac{1}{2}+\gamma_k, f\right) \prod_{\ell=1}^{R} L\left(\frac{1}{2}+\delta_\ell, \overline{f}\right)} g(c(f)), \tag{6.1}$$

где су K, L, Q и R природни бројеви, α_j, $1 \le j \le K+L$, γ_k, $1 \le k \le Q$ и δ_ℓ, $1 \le \ell \le R$ комплексни бројеви чији су реални делови позитивни, $c(f)$ логаритамски кондуктор за $L(s,f)$ и $g(t)$ нека погодно изабрана тежинска функција. Прву хипотезу такве врсте дао је Фармер [41] за Риманову зета функцију,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\zeta(s+\alpha)\zeta(1-s+\beta)}{\zeta(s+\gamma)\zeta(1-s+\delta)} dt \sim 1 + (1-T^{-\alpha-\beta}) \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}, \tag{6.2}$$

[1] за дефиницију фамилије L-функција и њој придружених објеката погледати Одељак 1.4

где је $s = \frac{1}{2} + it$ комплексан број, а α, β, γ и δ комплексни бројеви чији су реални делови позитивни и ограничени са $\frac{c}{\log T}$, где је $c > 0$ нека константа. Хипотезу (6.2) Фармер није оправдао чврстим аргументима, али је она свеједно заслужила доста пажње из разлога што је имала значајне импликације за Риманову зета функцију (више речи о самим применама хипотеза о количницима за различите фамилије L-функција биће у наредном одељку).

Стога је постало од интереса дати генерализоване хипотезе за понашање поменутих усредњених количника (6.1), што је урађено у раду [27]. Тај рад се ослања на сличне хеуристике које су коришћене у раду [26] за давање хипотеза о моментима L-функција, о чему је било речи у Глави 1. То посебно значи да се добијање хипотеза о количницама L-функција, слично као и хипотеза о моментима, не базира директно на теорији случајних матрица, али има одређену потпору у аналогним резултатима за карактеристичне полиноме случајних матрица (в. [28] и [55]). При томе је конкретан поступак за добијање хипотеза о количницима такође изражен у облику својеврсног ,,рецепта”, веома налик онима који су приказани у Глави 1. Због таквих великих сличности ће наредни приказ рецепта за добијање хипотеза о количницима L-функција бити само у основним цртама, без исписивања детаља који су идентични онима из рецепта за добијање хипотеза о моментима L-функција.

Рецепт за добијање хипотезе о количницима у фамилији примитивних L-функција Хипотеза за асимптотско понашање усредњеног количника (6.1) у фамилији примитивних L-функција $\{L(s, f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ може се добити спроводећи наредне кораке.

(1) На почетку се посматра количник

$$\frac{\prod_{i=1}^{K} L\left(\frac{1}{2} + \alpha_i, f\right) \prod_{j=1}^{L} L\left(\frac{1}{2} + \alpha_{K+j}, \overline{f}\right)}{\prod_{k=1}^{Q} L\left(\frac{1}{2} + \gamma_k, f\right) \prod_{\ell=1}^{R} L\left(\frac{1}{2} + \delta_\ell, \overline{f}\right)}.$$

(2) Свака L-функција која се појављује у бројиоцу се замени својом апроксимативном функционалном једначином (1.27), при чему се игноришу остаци из тих једначина. За L-функције које се појављују у имениоцу се користи запис у облику реда

$$\frac{1}{L(s, f)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{L,f}(n)}{n^s}, \tag{6.3}$$

при чему су комплексни бројеви $\mu_{L,f}(n)$, $n \geq 1$ одговарајући коефицијенти и који је, уз претпоставку одговарајуће Риманове хипотезе, валидан за $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Заменити сваку L-функцију која се појављује у имениоцу одговарајућим редом (6.3). Изрази добијени после свих замена се измноже, чиме се добија сума са 2^{K+L} чланова. Сваки од њих се може записати у облику

$$\begin{aligned}&(\text{производ } \epsilon_f \text{ фактора})(\text{производ } X_f \text{ фактора})\\ &\times \sum_{n_1<X_1, n_2<X_2, \ldots n_{K+L}<X_{K+L}, n_{K+L+1}\geq 1, \ldots, n_{K+L+Q+R}\geq 1} (\text{одговарајући суманд})\end{aligned} \tag{6.4}$$

(3) Стави се $s = \frac{1}{2}$ и производ ϵ_f фактора у (6.4) се замени својом очекиваном вредношћу усредњеној по фамилији која се посматра. Конкретна замена се врши на потпуно исти начин као аналогна замена у кораку (3) рецепта за добијање хипотеза о моментима примитивних L-функција у фамилијама.

(4) Заменити сваки од преосталих чланова својом очекиваном вредношћу усредњеној по фамилији која се посматра. Овај корак је аналоган кораку (4) рецепта за добијање хипотеза о моментима примитивних L-функција у фамилијама.

(5) Коначне сумације у свим преосталим члановима се продуже до бесконачности. Као резултат таквих продужења настаје функција која се означава са $M_f\left(\frac{1}{2}, \alpha, \gamma, \delta\right)$, где је $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{K+L})$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_Q)$ и $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_R)$.

(6) Добија се хипотеза о количницима у облику

$$\begin{aligned}&\sum_{f\in\mathcal{F}} \frac{\prod_{i=1}^{K} L\left(\frac{1}{2}+\alpha_i, f\right)\prod_{j=1}^{L} L\left(\frac{1}{2}+\alpha_{K+j}, \overline{f}\right)}{\prod_{k=1}^{Q} L\left(\frac{1}{2}+\gamma_k, f\right)\prod_{\ell=1}^{R} L\left(\frac{1}{2}+\delta_\ell, \overline{f}\right)} g(c(f))\\ &\qquad = \sum_{f\in\mathcal{F}} M_f\left(\frac{1}{2}, \alpha, \gamma, \delta\right)\left(1+O(e^{(-\frac{1}{2}+\varepsilon)c(f)})\right) g(c(f)).\end{aligned}$$

Као примери хипотезе добијене на основу претходно описаног рецепта биће приказане хипотезе о количницима за Риманову зета функцију и за фамилију квадратних Дирихлеових L-функција.

Хипотеза 6.1. Нека су K, L, Q и R природни бројеви γ_q, $1 \leq q \leq Q$ и δ_r, $1 \leq r \leq R$ комплексни бројеви чији су реални делови позитивни и α_j, $1 \leq j \leq K+L$ комплексни бројеви са особином $\Re(\alpha_j) > -\frac{1}{K+L}$. Тада је за свако $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \frac{\prod_{k=1}^{K}\zeta(s+\alpha_k)\prod_{\ell=K+1}^{K+L}\zeta(1-s-\alpha_\ell)}{\prod_{q=1}^{Q}\zeta(s+\gamma_q)\prod_{r=1}^{R}\zeta(1-s+\delta_r)}dt\\ &= \int_0^T \sum_{\sigma\in\Xi_{K,L}}\prod_{k=1}^{K}\frac{\chi(s+\alpha_k)}{\chi(s-\alpha_{\sigma(k)})} Y_\zeta A_\zeta\left(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \ldots, \alpha_{\sigma(K+L)}; \gamma; \delta\right) dt + O\left(T^{1/2+\epsilon}\right),\end{aligned}$$

где је $s = \frac{1}{2}+it$, $\chi(s)$ је фактор из функционалне једначине

$$\zeta(1-s) = \chi(1-s)\zeta(s),$$

одређен са

$$\chi(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2},$$

$\Xi_{K,L}$ је скуп свих пермутација σ скупа $\{1,2,\ldots,K+L\}$ за које важи $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(K)$ и $\sigma(K+1) < \sigma(K+2) < \ldots \sigma(K+L)$,

$$Y_\zeta = Y_\zeta(\alpha;\gamma;\delta) = \frac{\prod_{k=1}^K \prod_{\ell=1}^L \zeta(1+\alpha_k-\alpha_{K+\ell}) \prod_{q=1}^Q \prod_{r=1}^R \zeta(1+\gamma_q+\delta_r)}{\prod_{k=1}^K \prod_{r=1}^R \zeta(1+\alpha_k+\delta_r) \prod_{\ell=1}^L \prod_{q=1}^Q \zeta(1-\alpha_{K+\ell}+\gamma_q)}$$

и $A_\zeta(\alpha;\gamma;\delta)$ је Ојлеров производ који зависи од $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_L)$, $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_Q)$ и $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_R)$ и експлицитно је описан са

$$A_\zeta(\alpha;\gamma;\delta) = \prod_p \frac{\prod_{k=1}^K \prod_{\ell=1}^L \left(1 - \frac{1}{p^{1+\alpha_k-\alpha_{K+\ell}}}\right) \prod_{q=1}^Q \prod_{r=1}^R \left(1-\frac{1}{p^{1+\gamma_q+\delta_r}}\right)}{\prod_{k=1}^K \prod_{r=1}^R \left(1-\frac{1}{p^{1+\alpha_k+\delta_r}}\right) \prod_{\ell=1}^L \prod_{q=1}^Q \left(1-\frac{1}{p^{1-\alpha_{K+\ell}+\gamma_q}}\right)}$$
$$\times \sum_{\sum_k a_k + \sum_q c_q = \sum_\ell b_\ell + \sum_r d_r} \frac{\prod_q \mu(p^{c_q}) \prod_r \mu(p^{d_r})}{p^{\sum_k \left(\frac12+\alpha_k\right)a_k + \sum_\ell \left(\frac12-\alpha_{K+\ell}\right)b_\ell + \sum_q \left(\frac12+\gamma_q\right)c_q + \sum_r \left(\frac12+\delta_r\right)d_r}},$$

при чему је μ ознака за Мебијусову функцију.

Хипотеза 6.2. Нека су K и Q природни бројеви, α_k, $1 \le k \le K$ и γ_m, $1 \le m \le Q$ комплексни бројеви чији су реални делови позитивни. Тада је за свако $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{0<d\le X} \frac{\prod_{k=1}^K L\left(1/2+\alpha_k,\chi_d\right)}{\prod_{m=1}^Q L\left(1/2+\gamma_m,\chi_d\right)} = \sum_{0<d\le X} \sum_{\epsilon\in\{-1,1\}^K} \left(\frac{d}{\pi}\right)^{\sum_{k=1}^K \frac12(\epsilon_k\alpha_k-\alpha_k)}$$
$$\times \prod_{k=1}^K g_+\left(\frac12 + \frac{\alpha_k-\epsilon_k\alpha_k}{2}\right) Y(\epsilon_1\alpha_1,\ldots,\epsilon_K\alpha_K;\gamma) A(\epsilon_1\alpha_1,\ldots,\epsilon_K\alpha_K;\gamma) + O\left(X^{1/2+\varepsilon}\right),$$

где је

$$\begin{aligned}
\epsilon &= (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_K),\\
g_+(s) &= \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})},\\
Y(\alpha;\gamma) &= \frac{\prod_{j\le k\le K} \zeta(1+\alpha_j+\alpha_k) \prod_{m<r\le Q} \zeta(1+\gamma_m+\gamma_r)}{\prod_{k=1}^K \prod_{m=1}^Q \zeta(1+\alpha_k+\gamma_m)}
\end{aligned}$$

и $A(\alpha;\gamma)$ је Ојлеров производ који зависи од $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_K)$ и $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_Q)$ и експлицитно је описан са

$$A(\alpha;\gamma) = \prod_p \frac{\prod_{j\le k\le K}\left(1-\frac{1}{p^{1+\alpha_j+\alpha_k}}\right) \prod_{m<r\le Q}\left(1-\frac{1}{p^{1+\gamma_m+\gamma_r}}\right)}{\prod_{k=1}^K \prod_{m=1}^Q \left(1-\frac{1}{p^{1+\alpha_k+\gamma_m}}\right)}$$

$$\times\left(1+\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1}\sum_{0<\sum_k a_k+\sum_m c_m \text{ парно}}\frac{\prod_m \mu\left(p^{c_m}\right)}{p^{\sum_k a_k\left(\frac{1}{2}+\alpha_k\right)+\sum_m c_m\left(\frac{1}{2}+\gamma_m\right)}}\right).$$

6.2. Неке примене хипотеза о количницима

У претходном одељку је напоменуто да хипотеза о количицима, чак и у свом веома једноставном облику (6.2) има значајне импликације за Риманову зета функцију. У овом одељку ће бити речи о некима од тих последица и примена. При томе, њих је могуће приказати у потпуно апстрактном контексту примитивних L-функција Селбергове класе, али ће, ради једноставности и јасноће, сви примери бити везани за конкретне фамилије L-функција. Шира прича о овој тематици може се пронаћи у прегледном раду [31].

Густина првог нивоа нула квадратних Дирихлеових L-функција Под претпоставком генерализоване Риманове хипотезе се све нуле произвољне квадратне Дирихлеове L-функције $L(s,\chi_d)$ налазе на оси $\Re(s)=\frac{1}{2}$, па се њихови имагинарни делови могу поређати у низ $(\gamma_{j,d})_{j\in\mathbb{Z}}$. Нека је $f(z)$ тест функција, за коју се захтева да има следеће особине:

- $f(z)$ је холоморфна у региону $|\Im(z)|<2$.
- $f(z)$ је реална на реалној оси и парна.
- $f(x)\ll\dfrac{1}{1+x^2}$ када $x\to\infty$. (6.5)

Сума

$$\mathcal{W}_f(d)=\sum_j f\left(\gamma_{j,d}\frac{\log\frac{d}{\pi}}{2\pi}\right)$$

назива се густином првог нивоа нула квадратне Дирихлеове L-функције $L(s,\chi_d)$. У раду [85], аутори су показали да важи

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{X^*}\sum_{0<d\le X}^{*}\mathcal{W}_f(d)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\right)dx, \tag{6.6}$$

где је $\sum^*$ ознака за сумацију свим фундаменталним дискриминантама, а X^* је број фундаменталних дискриминанти у интервалу $(0,X]$ и пропорционалан је X. При томе се са десне стране (6.6) појављује фактор густине који је облика $1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$, из разлога што посматрана фамилија квадратних Дирихлеових L-функција има симплектичку симетрију. За фамилије L-функција које имају другачији тип симетрије и фактор густине ће бити другачијег облика (али ће сам облик одговарајућег фактора зависити искључиво од типа симетрије фамилије; много детаљније о томе се може пронаћи у раду [59]). Резултат (6.6) може се добити применом хипотезе о количиницима, што ће бити скицирано у наредним редовима.

За почетак се посматра сума

$$\sum_{0<d\leq X}^{*}\sum_{j} f\left(\gamma_{j,d}\right),$$

која се третира изражавањем у облику разлике интеграла

$$\sum_{0<d\leq X}^{*}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{(c)}-\int_{(1-c)}\right)\frac{L'(s,\chi_d)}{L(s,\chi_d)}f\left(-i\left(s-\frac{1}{2}\right),\right)ds$$

где је (c) ознака за вертикалну линију од $c-i\infty$ до $c+i\infty$ и $\frac{3}{4}>c>\frac{1}{2}+\frac{1}{\log X}$.

Интеграл по правој (c) је онда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t-i\left(c-\frac{1}{2}\right)\right)\sum_{0<d\leq X}^{*}\frac{L'\left(\frac{1}{2}+\left(c-\frac{1}{2}+it\right),\chi_d\right)}{L\left(\frac{1}{2}+\left(c-\frac{1}{2}+it\right),\chi_d\right)}dt. \tag{6.7}$$

За вредности $|t|>X^{1-\epsilon}$, где је $\epsilon>0$, интеграл (6.7) се може оценити применом неједнакости

$$\frac{L'(s,\chi_d)}{L(s,\chi_d)}\ll\log^2(|s|d)\quad \text{за све } s \text{ на правој } (c),$$

која је последица генерализоване Риманове хипотезе за $L(s,\chi_d)$. Конкретно, применом те неједнакости уз коришћење особина (6.5) које f има као тест функција, добија се оцена $\ll X^{\varepsilon}$ за (6.7).
За вредности $|t|<X^{1-\varepsilon}$ интеграл (6.7) се рачуна користећи хипотезу о количницима. Пре свега, диференцирањем Хипотезе 6.2, примењене у специјалном случају када је $K=Q=1$, добија се

$$\begin{aligned}&\sum_{0<d\leq X}^{*}\frac{L'\left(\frac{1}{2}+r,\chi_d\right)}{L\left(\frac{1}{2}+r,\chi_d\right)}\\&=\sum_{0<d\leq X}^{*}\left(\frac{\zeta'(1+2r)}{\zeta(1+2r)}+A_1(r)-\left(\frac{d}{\pi}\right)^{-r}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{r}{2}\right)}\zeta(1-2r)A_2(r)\right)+O\left(X^{1/2+\epsilon}\right),\end{aligned}$$

за све комплексне бројеве r са особином $\frac{1}{\log X}<\Re(r)<\frac{1}{4}$ и $\Im(r)\ll_{\epsilon}X^{1-\epsilon}$, где је

$$A_1(r)=\sum_{p}\frac{\log p}{(p+1)(p^{1+2r}-1)}$$

и

$$A_r(2)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{(p+1)p^{1-2r}}-\frac{1}{p+1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Користећи тај израз, добија се да је сума по d у интегралу (6.7) једнака

$$\sum_{0<d\leq X}^{*}\left(\frac{\zeta'(1+2r)}{\zeta(1+2r)}+A_1(r)-\left(\frac{d}{\pi}\right)^{-r}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{r}{2}\right)}\zeta(1-2r)A_2(r)\right)\Bigg|_{r=c-\frac{1}{2}+it}$$
$$+O\left(X^{1/2+\epsilon}\right).$$

Чињеница да је за $|t|<X^{1-\epsilon}$ горња сума $\ll X^{1+\varepsilon}$, уз $f(t)\ll\frac{1}{t^2}$ омогућава да се интеграл по t продужи до бесконачности. Додатно, интегрант добијеног интеграла је регуларан у $r=0$, што даље омогућава да се контура помери до $c=\frac{1}{2}$, чиме се коначно стиже до закључка да је интеграл по правој (c) једнак

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sum_{0<d\leq X}^{*}\left(\frac{\zeta'(1+2it)}{\zeta(1+2it)}+A_1(it)-\left(\frac{d}{\pi}\right)^{-it}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}\zeta(1-2it)A_2(it)\right)dt$$
$$+O\left(X^{1/2+\epsilon}\right).$$

Интеграл по правој $(1-c)$ се може добити из претходног рачуна, уз коришћење смене $s\to 1-s$ и функционалне једначине

$$\frac{L'(1-s,\chi_d)}{L(1-s,\chi_d)}=\frac{X'(s,\chi_d)}{X(s,\chi_d)}-\frac{L'(s,\chi_d)}{L(s,\chi_d)},$$

где је

$$\frac{X'(s,\chi_d)}{X(s,\chi_d)}=-\log\frac{d}{\pi}-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-s}{2}\right)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right).$$

Сумирањем добијених резултата се долази до

$$\sum_{0<d\leq X}^{*}\sum_{j}f\left(\gamma_{j,d}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sum_{0<d\leq X}^{*}\left(\log\frac{d}{\pi}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\zeta'(1+2it)}{\zeta(1+2it)}+A_1(it)-\left(\frac{d}{\pi}\right)^{-it}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}\zeta(1-2it)A_2(it)\right)\right)dt$$
$$+O\left(X^{1/2+\epsilon}\right).$$

После скалирања које се постиже сменом $\tau=\frac{t\log X}{2\pi}$ и означавања $f(t)=g(\tau)$, претходни израз добија облик

$$\sum_{0<d\leq X}^{*}\sum_{j}g\left(\frac{\gamma_{j,d}\log X}{2\pi}\right)=\frac{1}{\log X}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\sum_{0<d\leq X}^{*}\left(\log\frac{d}{\pi}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+\frac{i\pi\tau}{\log X}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}-\frac{i\pi\tau}{\log X}\right)+2\left(\frac{\zeta'\left(1+\frac{4i\pi\tau}{\log X}\right)}{\zeta\left(1+\frac{4i\pi\tau}{\log X}\right)}+A_1\left(\frac{2\pi i\tau}{\log X}\right)\right.$$

$$- e^{-\frac{2\pi i\tau}{\log X}\log\frac{d}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\pi\tau}{\log X}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\pi\tau}{\log X}\right)}\zeta\left(1-\frac{4i\pi\tau}{\log X}\right)A_2\left(\frac{2\pi i\tau}{\log X}\right)\Bigg)\Bigg)d\tau + O\left(X^{1/2+\epsilon}\right).$$

За велике вредности X једини допринос у интегралу са десне стране претходног израза долази од чланова $\log\frac{d}{\pi}$ и $\frac{\zeta'\left(1+\frac{4i\pi\tau}{\log X}\right)}{\zeta\left(1+\frac{4i\pi\tau}{\log X}\right)}$, чиме се добија асимптотска формула

$$\sum_{0<d\le X}^{*}\sum_{j} g\left(\frac{\gamma_{j,d}\log X}{2\pi}\right)\sim\frac{1}{\log X}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\left(X^*\log X - X^*\frac{\log X}{2\pi i\tau}+X^*\frac{e^{-2\pi i\tau}}{2\pi i\tau}\log X\right)d\tau.$$

Коначно, коришћењем чињенице да је g парна функција, претходна формула се може трансформисати до облика

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{X^*}\sum_{0<d\le X}^{*}\sum_{j} g\left(\frac{\gamma_{j,d}\log\frac{d}{\pi}}{2\pi}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\left(1+\frac{e^{-2\pi i\tau}}{4\pi i\tau}-\frac{e^{2\pi i\tau}}{4\pi i\tau}\right)d\tau,$$

чиме се управо добија резултат (6.6).

Други момент извода Риманове зета функције У раду [47], Гонек је, под претпоставком важења Риманове хипотезе, поред значајних општијих резултата, показао и да важи

$$\sum_{1\le\gamma\le T}|\zeta'(\rho)|^2=\frac{T}{24\pi}\log^4 T+O\left(T^3\log T\right), \tag{6.8}$$

где је $\rho=\frac{1}{2}+i\gamma$ ознака за одговарајућу нулу Риманове зета функције. Овај резултат се може добити прилично једноставно из хипотезе о количницима, што ће наредно бити илустровано.

За почетак се сума по нулама зета функције изрази у облику контурног интеграла

$$\sum_{1\le\gamma\le T}|\zeta'(\rho)|^2=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\zeta'(z)\zeta'(1-z)dz,$$

где је C позитивно оријентисан правоугаоник са теменима у c, $c+iT$, $1-c+iT$ и $1-c$, за произвољно $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. За интеграле по хоризонталним ивицама овог правоугаоника није тешко показати да дају занемарљив допринос, па само треба израчунати допринос интеграла по вертикалним ивицама. Нека је I_1 ознака за интеграл од темена c до темена $c+iT$, а I_2 за интеграл од темена $1-c+iT$ до темена $1-c$. Тада је прво

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_c^{c+iT}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\zeta'(z)\zeta'(1-z)dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{\zeta'(c+it)}{\zeta(c+it)}\zeta'(c+it)\zeta'(1-c-it)dt \\
&= \frac{d}{d\beta}\frac{d}{d\gamma}\frac{d}{d\delta}\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{\zeta(c+it+\beta)}{\zeta(c+it)}\zeta(c+it+\gamma)\zeta(1-c-it+\delta)dt\Big|_{\beta=\gamma=\delta=0}.
\end{aligned}
$$

Примена Хипотезе о количницима 6.1 на израз под интегралом онда даје

$$
\begin{aligned}
I_1 = \frac{d}{d\beta}\frac{d}{d\gamma}\frac{d}{d\delta}\frac{1}{2\pi}\int_0^T &\left(\frac{\zeta(1+\beta+\delta)\zeta(1+\gamma+\delta)}{\zeta(1+\delta)} + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\beta-\delta}\frac{\zeta(1-\beta-\delta)\zeta(1+\gamma-\beta)}{\zeta(1-\beta)}\right. \\
&\left. + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\gamma-\delta}\frac{\zeta(1+\beta-\gamma)\zeta(1-\gamma-\delta)}{\zeta(1-\gamma)}\right)\left(1+O\left(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\right)dt\Big|_{\beta=\gamma=\delta=0}, \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

за произвољно $\epsilon > 0$.
Слично, за интеграл I_2 важи

$$
I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-c+iT}^{1-c}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\zeta'(z)\zeta'(1-z)dz
$$

После увођења смене $z \to 1-z$ добија се

$$
I_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c}\frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)}\zeta'(1-z)\zeta'(z)dz. \qquad (6.10)
$$

Диференцирање функционалне једначине за Риманову зета функцију даје израз

$$
\frac{\zeta'}{\zeta}(1-z) = \frac{\chi'}{\chi}(1-z) - \frac{\zeta'}{\zeta}(z),
$$

где је

$$
\chi(1-z) = 2(2\pi)^{-z}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}.
$$

Убацивањем тог израза у (6.10) даље следи

$$
I_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c}\frac{\chi'(1-z)}{\chi(1-z)}\zeta'(1-z)\zeta'(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\zeta'(z)\zeta'(1-z)dz.
$$

Други сабирак у претходној једнакости није ништа друго до комплексни конјугат интеграла I_1, за кога израз (6.9) показује да је реалан. Први сабирак се третира померањем линије интеграције до $c = \frac{1}{2}$ и коришћењем асимптотског израза

$$
\chi(z) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-z} e^{it+\frac{i\pi}{4}}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right), \; t = \Im(z)
$$

да се $\frac{\chi'}{\chi}(1-z)$ апроксимира са $-\log\frac{t}{2\pi}$. Тако се добија

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^T \log\frac{t}{2\pi}\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt \\ &= I_1 + \frac{d}{d\alpha}\frac{d}{d\beta}\frac{1}{2\pi}\int_0^T \log\frac{t}{2\pi}\zeta\left(\frac{1}{2}+it+\alpha\right)\zeta\left(\frac{1}{2}-it+\beta\right)\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt\Big|_{\alpha=\beta=0} \\ &= I_1 + \frac{d}{d\alpha}\frac{d}{d\beta}\frac{1}{2\pi}\int_0^T \log\frac{t}{2\pi}\left(\zeta(1+\alpha+\beta)+\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\alpha-\beta}\zeta(1-\alpha-\beta)\right) \\ &\times\left(1+O\left(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\right)dt\Big|_{\alpha=\beta=0}, \end{aligned}$$

при чему је у последњем кораку поново коришћена Хипотеза о количницима 6.1 (у специјалном случају када нема ниједне функције у имениоцу; исти резултат се може добити и применом Хипотезе о моментима 1.2).
Враћањем на израз

$$\sum_{1\le\gamma\le T}|\zeta'(\rho)|^2 = I_1 + I_2$$

претходно уз (6.9) даје

$$\begin{aligned} &\sum_{1\le\gamma\le T}|\zeta'(\rho)|^2 \\ &= 2\frac{d}{d\beta}\frac{d}{d\gamma}\frac{d}{d\delta}\frac{1}{2\pi}\int_0^T\left(\frac{\zeta(1+\beta+\delta)\zeta(1+\gamma+\delta)}{\zeta(1+\delta)}+\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\beta-\delta}\frac{\zeta(1-\beta-\delta)\zeta(1+\gamma-\beta)}{\zeta(1-\beta)}\right. \\ &\left.+\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\gamma-\delta}\frac{\zeta(1+\beta-\gamma)\zeta(1-\gamma-\delta)}{\zeta(1-\gamma)}\right)\left(1+O\left(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\right)dt\Big|_{\beta=\gamma=\delta=0} \\ &+\frac{d}{d\alpha}\frac{d}{d\beta}\frac{1}{2\pi}\int_0^T\log\frac{t}{2\pi}\left(\zeta(1+\alpha+\beta)+\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\alpha-\beta}\zeta(1-\alpha-\beta)\right) \\ &\times\left(1+O\left(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\right)dt\Big|_{\alpha=\beta=0} \end{aligned}$$

Остаје само још да се изврше означена диференцирања и затим израчунају граничне вредности када α,β,γ и δ теже ка 0. Конкретно, ако је

$$\zeta(1+s) = \frac{1}{s}+\gamma_0-\gamma_1 s+\frac{\gamma_2}{2!}s^2-\frac{\gamma_3}{3!}s^3+\dots$$

Лоранов развој за зета функцију око њеног пола[2], добија се

$$\sum_{1\le\gamma\le T}|\zeta'(\rho)|^2 = \int_0^T\left(\frac{1}{24\pi}\log^4\frac{t}{2\pi}+\frac{\gamma_0}{3\pi}\log^3\frac{t}{2\pi}+\left(\frac{\gamma_0^2}{2\pi}-\frac{\gamma_1}{\pi}\right)\log^2\frac{t}{2\pi}\right.$$

[2]вредност γ_0 је једнака Ојлеровој константи $\gamma\approx 0.5772$, па се вредности γ_i, $i\ge 1$ понекад називају генерализованим Ојлеровим константама.

$$-\left(\frac{\gamma_0^3}{\pi}+\frac{5\gamma_0\gamma_1}{\pi}+\frac{\gamma_2}{2\pi}\right)\log\frac{t}{2\pi}+\frac{\gamma_0^4}{\pi}+\frac{6\gamma_0^2\gamma_1}{\pi}+\frac{7\gamma_1^2}{\pi}+\frac{4\gamma_0\gamma_2}{\pi}+\frac{5\gamma_3}{3\pi}\Big)\left(1+O\left(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\right)dt$$
$$=\frac{T}{24\pi}\log^4 T+O\left(T^3\log T\right),$$

што је управо Гонеков резултат (6.8).

Молификовани други момент Риманове зета функције Као што је већ дискутовано у Глави 1, израчунавање молификованих момената за различите фамилије L-функција је значајан задатак, чијим се испуњавањем отвора простор за различите примене, попут добијања пропорције L-функција из посматране фамилије које се не анулирају у централној тачки. При томе су у пракси сама израчунавања молификованих момената најчешће веома компликована. Хипотезе о количницима омогућавају да се асимптотике молификованих момената израчунају релативно лако. Наравно, мањкавост тако добијених резултати лежи у чињеници да су они хипотетички, али они могу бити згодни да се провере другачије изведени рачуни или за тестирање облика молификатора који је најоптималнији.

Као илустрација примене хипотеза о количницама за израчунавање молификованих момената L-функција, биће приказана техника добијања молификованог другог момента Риманове зета функције (у t-аспекту). Поред оваквог примера за унитарну фамилију, веома слично могу се израчунати и молификовани други моменти у симплектичкој и ортогоналној фамилији (примери таквих израчунавања на фамилији квадратних Дирихлеових, односно L-функција квадратних твистова куспидалних форми детаљно су описани у [31]).

За почетак, нека је са

$$\mathcal{M}(s,P)=\sum_{n\le y}\frac{\mu(n)P\left(\frac{\log\frac{y}{n}}{\log y}\right)}{n^s},$$

дефинисан молификатор, при чему је $\mu(n)$ ознака за Мебијусову функцију и P је полином са својством $P(0)=0$. Параметар y представља ,,дужину" молификатора M и облика је $y=T^\theta$. За класична израчунавања молификованог другог момента неопходно је било ограничење $\theta<\frac{1}{2}$, док је Конри у значајном раду [23] (о коме ће бити више речи мало касније) успео да изведе рачун за $\theta<\frac{4}{7}$. Рачун који следи се ослања на хипотезу о количиницима за Риманову зета функција, па је (хипотетички) валидан за све $\theta>0$.

Циљ је добити асимптотску формулу за молификовани други момент

$$\int_0^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\left|\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}+it,P\right)\right|^2dt,$$

односно још општије за

$$I(\alpha,\beta,P_1,P_2)=\int_0^T \zeta(s+\alpha)\zeta(1-s+\beta)\mathcal{M}(s,P_1)\mathcal{M}(1-s,P_2)dt, \tag{6.11}$$

где је $s=\frac{1}{2}+it$, а P_1 и P_2 два полинома који се анулирају у 0. Нит која повезује вредност (6.11) са хипотезом о количницима је Перонова формула,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} x^z\frac{dz}{z^{m+1}}=\begin{cases}\frac{\log^m x}{m!}, & \text{ако је } x>1\\ 0, \text{ ако је } 0<x<1,\end{cases}$$

за сваки природан број m и $c>0$. Применом те формуле молификатор се може записати у облику

$$\mathcal{M}(s,P)=\sum_{m\geq 1}\frac{p_m m!}{\log^m y}\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{y^z}{z^{m+1}}\frac{dz}{\zeta(s+z)},$$

где је $P(x)=\sum_{m\geq 1}p_m x^m$. Одатле се добија и

$$\begin{aligned}I(\alpha,\beta,P_1,P_2)=&\sum_{m,n\geq 1}\frac{p_{1,m}m!p_{2,n}n!}{\log^{m+n}y}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(c_1)}\int_{(c_2)}\frac{y^{w+z}}{w^{m+1}z^{n+1}}\\ &\times\int_0^T\frac{\zeta\left(s+\alpha\right)\zeta\left(1-s+\beta\right)}{\zeta(s+w)\zeta(1-s+z)}dt\,dw\,dz,\end{aligned} \tag{6.12}$$

где је $P_1(x)=\sum_{m\geq 1}p_{1,m}x^m$, $P_2(x)=\sum_{n\geq 1}p_{2,n}x^n$ и $c_1=c_2=\frac{1}{\log y}$. Сада се може искористити Хипотеза 6.1 о количинцима за Риманову зета функцију да се двоструки интеграл у претходној формули представи као

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(c_1)}\int_{(c_2)}\frac{y^{w+z}}{w^{m+1}z^{n+1}}\int_0^T\left(\frac{\zeta(1+\alpha+\beta)\zeta(1+w+z)}{\zeta(1+\alpha+z)\zeta(1+\beta+w)}A(\alpha,\beta,w,z)\right.\\ &\left.+\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\alpha-\beta}\frac{\zeta(1-\alpha-\beta)\zeta(1+w+z)}{\zeta(1-\beta+z)\zeta(1-\alpha+w)}A(-\beta,-\alpha,w,z)\right)dt\,dw\,dz+O\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),\end{aligned} \tag{6.13}$$

где је

$$A(\alpha,\beta,w,z)=\prod_p\frac{\left(1-\frac{1}{p^{1+w+z}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{1+\beta+w}}-\frac{1}{p^{1+\alpha+z}}+\frac{1}{p^{1+w+z}}\right)}{\left(1-\frac{1}{p^{1+\beta+w}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{1+\alpha+z}}\right)}.$$

Замена израза (6.13) у (6.12) омогућава да се одреди асимптотика за $I(\alpha,\beta,P_1,P_2)$ када су $\alpha,\beta\approx\frac{1}{\log T}$. При томе ће главни чланови у тој асимптотици потицати од резидиуума који одговарају половима интегранта по w и z у нули. Сам начин одређивања тражених резидиуума је налик доказу теореме о простим бројевима. Наиме, постоји (мали) регион лево од нуле у коме се интегранд не анулира. То омогућава да се контуре интеграције по w и z помере мало улево од нуле, што даље резултира могућношћу њихове замене контурама малих кругова $\mathcal{K}_1$и $\mathcal{K}_2$ са центрима у нули и полупречницима редом $\frac{1}{\log T}$ и $\frac{2}{\log T}$. Уз коришћење једноставних формула

$$A(\alpha,\beta,w,z) = 1 + O\left(\frac{1}{\log T}\right), \quad \text{за велике } T$$

и

$$\zeta(1+x) = \frac{1}{x} + O(1), \quad \text{за мале } x$$

добија се израз

$$I(\alpha,\beta,P_1,P_2) = \sum_{m,n\geq 1} \frac{p_{1,m} m! p_{2,n} n!}{\log^{m+n} y} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\mathcal{K}_1} \oint_{\mathcal{K}_2} \frac{y^{w+z}}{w^{m+1} z^{n+1}}$$
$$\times \int_0^T \frac{(\alpha+z)(\beta+w)}{(\alpha+\beta)(w+z)} + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\alpha-\beta} \frac{(-\beta+z)(-\alpha+w)}{(-\alpha-\beta)(w+z)} dt\, dw\, dz + O\left(\frac{T}{\log T}\right).$$

Згодно је применити формулу

$$\frac{y^{w+z}}{w+z} = \int_0^y u^{w+z} \frac{du}{u},$$

валидну за $\Re(w+z) > 0$ да се даље добије

$$I(\alpha,\beta,P_1,P_2) = \frac{1}{\alpha+\beta} \sum_{m,n\geq 1} \frac{p_{1,m} m! p_{2,n} n!}{\log^{m+n} y} \int_0^T \int_1^y \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\mathcal{K}_1} \oint_{\mathcal{K}_2} \frac{u^{w+z}}{w^{m+1} z^{n+1}}$$
$$\times \left((\alpha+z)(\beta+w) - \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\alpha-\beta} (-\beta+z)(-\alpha+w)\right) dw\, dz\, \frac{du}{u}\, dt + O\left(\frac{T}{\log T}\right),$$

при чему је интеграција по u редукована на $u \geq 1$, јер су интеграли по w и z једнаки нули за $0 \leq u < 1$. Сада није тешко израчунати

$$\sum_{m\geq 1} \frac{p_{1,m} m!}{\log^m y} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{K}_1} \frac{u^w}{w^{m+1}} dw = P_1\left(\frac{\log u}{\log y}\right)$$
$$\sum_{m\geq 1} \frac{p_{1,m} m!}{\log^m y} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{K}_1} \frac{u^w}{w^m} dw = \frac{1}{\log y} P_1'\left(\frac{\log u}{\log y}\right)$$

и слично за аналогне суме по $n \geq 1$, што даје

$$I(\alpha,\beta,P_1,P_2) = \frac{T}{\alpha+\beta} \int_1^y \left(\left(\alpha + \frac{d}{dz}\right)\left(\beta + \frac{d}{dw}\right) - T^{-\alpha-\beta}\left(-\beta + \frac{d}{dz}\right)\left(-\alpha + \frac{d}{dw}\right)\right)$$
$$\times P_1\left(\frac{w+\log u}{\log y}\right) P_2\left(\frac{z+\log u}{\log y}\right)\bigg|_{w=z=0} \frac{du}{u} + O\left(\frac{T}{\log T}\right).$$

После увођења смене $y = u^r$ претходни израз се трансформише у

$$I(\alpha,\beta,P_1,P_2) = \frac{T\log y}{\alpha+\beta}\left(\left(\alpha+\frac{d}{dz}\right)\left(\beta+\frac{d}{dw}\right) - T^{-\alpha-\beta}\left(-\beta+\frac{d}{dz}\right)\left(-\alpha+\frac{d}{dw}\right)\right)$$
$$\times\int_0^1 P_1\left(\frac{w}{\log y}+r\right)P_2\left(\frac{z}{\log y}+r\right)dr\bigg|_{w=z=0} + O\left(\frac{T}{\log T}\right).$$

Коначно, после замене почетног избора $y = T^\theta$ и још мало манипулација добија се

$$I(\alpha,\beta,P_1,P_2) = TP_1(1)P_2(1)$$
$$+\frac{T}{\theta}\frac{d}{dw}\frac{d}{dz}y^{-\alpha w-\beta z}\int_0^1\int_0^1 T^{-(\alpha+\beta)u}P_1(w+r)P_2(z+r)dr du\bigg|_{w=z=0} + O\left(\frac{T}{\log T}\right). \tag{6.14}$$

Претходну формулу (6.14), али уз ограничење $\theta < \frac{4}{7}$, добио је и Конри у поменутом раду [23]. Поред тога, он је показао како се на основу (6.14) може добити и општији резултат

$$\frac{1}{T}\int_0^T Q_1\left(\frac{-1}{\log T}\frac{d}{d\alpha}\right)Q_2\left(\frac{-1}{\log T}\frac{d}{d\beta}\right)\zeta(s+\alpha)\zeta(1-s+\beta)\mathcal{M}(s,P_1)\mathcal{M}(1-s,P_2)\bigg|_{\alpha=\beta=0}$$
$$= P_1(1)P_2(1)Q_1(0)Q_2(0)$$
$$+\frac{1}{\theta}\int_0^1\int_0^1 \left(P_1'(r)Q_1(u)+\theta P_1(r)Q_1'(u)\right)\left(P_2'(r)Q_2(u)+\theta P_2(r)Q_2'(u)\right)dr\,du$$
$$+O\left(\frac{T}{\log T}\right), \tag{6.15}$$

где је $s = \frac{1}{2}+it$, а Q_1 и Q_2 полиноми. Користећи (6.15), уз погодан избор полинома P_1, P_2, Q_1 и Q_2 даље је успео да покаже да је барем $\frac{2}{5}$ свих нула Риманове зета функције просто и на критичној линији $\Re(s) = \frac{1}{2}$, поправљајући тиме класичан резултат Левисона [76] у коме је добијена пропорција од барем $\frac{1}{3}$.

Као што је већ напоменуто, за Конријев метод је неопходно да дужина молификатора буде ограничена условом $\theta < \frac{4}{7}$ тј. формуле (6.14) и (6.15), како их он добија, важе само за те вредности θ. Са друге стране, за добијање тих формула коришћењем хипотезе о количницима, како је претходно илустровано, тај услов није неопходан, тј. оне хипотетички важе за све $\theta > 0$. Такву, хипотетичку валидност формула (6.14) и (6.15) за све $\theta > 0$ први је предложио Фармер [41] и она је негде позната као „хипотеза о дугачким молификаторима".

6.3. Количници квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима

Као што се технике добијања хипотеза за моменте L-функција у различитим фамилијама могу адаптирати из контекста поља рационалних бројева у контекст функцијских поља, о чему је било речи у претходној глави, тако је могуће и технике добијања хипотеза о количинцима, приказане у Одељку 6, адаптирати на сличан начин. Конкретно, у раду [2] аутори су добили наредну хипотезу о количницима квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима.

Хипотеза 6.3. Нека су K и Q природни бројеви, α_k, $1 \le k \le K$ и γ_m, $1 \le m \le Q$ комплексни бројеви чији су реални делови позитивни. Тада је испуњено

$$\sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} \frac{\prod_{k=1}^{K} L\left(1/2+\alpha_k, \chi_D\right)}{\prod_{m=1}^{Q} L\left(1/2+\gamma_m, \chi_D\right)} = \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^K} |D|^{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2}(\epsilon_k \alpha_k - \alpha_k)}$$
$$\times \prod_{k=1}^{K} X\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_k - \epsilon_k \alpha_k}{2}\right) Y(\epsilon_1\alpha_1, \ldots, \epsilon_K\alpha_K; \gamma) A(\epsilon_1\alpha_1, \ldots, \epsilon_K\alpha_K; \gamma) + o\left(|D|\right),$$

где је

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_K), \\ X(s) &= q^{-\frac{1}{2}+s}, \\ Y(\alpha;\gamma) &= \frac{\prod_{j \le k \le K} \zeta_q(1+\alpha_j+\alpha_k) \prod_{m<r \le Q} \zeta_q(1+\gamma_m+\gamma_r)}{\prod_{k=1}^{K} \prod_{m=1}^{Q} \zeta_q(1+\alpha_k+\gamma_m)} \end{aligned}$$

и $A(\alpha;\gamma)$ је Ојлеров производ који зависи од $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_Q)$ и експлицитно је описан са

$$A(\alpha;\gamma) = \prod_{P \in \mathcal{P}} \frac{\prod_{j \le k \le K} \left(1 - \frac{1}{|P|^{1+\alpha_j+\alpha_k}}\right) \prod_{m<r \le Q} \left(1 - \frac{1}{|P|^{1+\gamma_m+\gamma_r}}\right)}{\prod_{k=1}^{K} \prod_{m=1}^{Q} \left(1 - \frac{1}{|P|^{1+\alpha_k+\gamma_m}}\right)}$$
$$\times \left(1 + \left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} \sum_{0 < \sum_k a_k + \sum_m c_m \text{ парно}} \frac{\prod_{m=1}^{Q} \mu\left(P^{c_m}\right)}{|P|^{\sum_k a_k\left(\frac{1}{2}+\alpha_k\right) + \sum_m c_m\left(\frac{1}{2}+\gamma_m\right)}}\right).$$

Валидност претходне хипотезе у неким посебним случајевима је испитивана у раду [15]. Конкретно, аутори су успели да докажу да она важи за количник по једне квадратне Дирихлеове L-функције,

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} \frac{L\left(1/2+\alpha, \chi_D\right)}{L\left(1/2+\beta, \chi_D\right)} \sim A(\alpha,\beta) \frac{\zeta_q(1+\alpha)}{\zeta_q(1+\alpha+\beta)} + q^{-2g\alpha} A(-\alpha,\beta) \frac{\zeta_q(1-\alpha)}{\zeta_q(1-\alpha+\beta)}. \tag{6.16}$$

Битно је нагласити да је претходна формула доказана уз значајну рестрикцију $\Re(\beta) \gg g^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ која потиче из потребе за одвајањем од (потенцијалне) нуле L-функције у имениоцу. Генерално, што је померај β мањи поменута близина евентуалне нуле функције у имениоцу чини проблем добијања асимптотске формуле (6.16) значајно тежим.

У сврху добијања резултата (6.16) аутори рада [15] су доказали наредну горњу оцену за негативне моменте квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима, која је од значаја и сама по себи и биће коришћена у даљем излагању (в. такође и [43]).

Теорема 6.4. Нека је $m > \frac{1}{2}$ и $0 < \beta < \frac{1}{2}$ реалан број такав да је за свако $\epsilon > 0$ испуњено $\beta \gg g^{-\frac{1}{2m}+\epsilon}$. Тада важи

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}} \frac{1}{|L\left(1/2+\beta, \chi_D\right)|^m} \ll \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} (\log g)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

ГЛАВА 7

Количници L-функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима

Тема којој је посвећена ова глава је варијација хипотезе о количиницима, у случају када се посматра количник једне L-функције квадратног твиста неке фиксиране елиптичке криве и једне квадратне Дирихлеове L-функције, над функцијским пољем $\mathbb{F}_q(t)$. Конкретније, биће успостављена валидност те хипотезе, уз одређене услове и ограничења. Пре формулације самог резултата ће, прегледности ради, бити наведене неке значајне, раније уведене ознаке које ће се користити.

Нека је $E/\mathbb{F}_q(t)$ фиксирана елиптичка крива, чији је кондуктор N_E и $\mathcal{H}^*_{2g+1}$, као и до сада, скуп свих бесквадратних полинома из $\mathbb{F}_q[t]$ који су узајамно прости са дискриминантом Δ од E. Поред тога, ознаке коришћене до сада, $\epsilon(E)$ за знак функционалне једначине функције $\mathcal{L}(u, E)$ и $\epsilon_{2g+1} \in \{\pm 1\}$ за константу која зависи само од g, тако да је за све $D \in \mathcal{H}^*_{2g+1}$ знак функционалне једначине (3.5) за $\mathcal{L}\left(u, E \otimes \chi_D\right)$ облика

$$\varepsilon = \epsilon(E)\epsilon_{2g+1}\chi_D(M_E),$$

где је M_E производ свих простих полинома у којима елиптичка крива E има мултипликативну редукцију и даље остају на снази.

Теорема која следи доказана је у раду [75] и представља главни резултат ове главе.

Теорема 7.1. Нека је $|\alpha| \ll \frac{1}{g}$ и $0 < \Re(\beta) < \frac{1}{2}$. Под условом да не важи $\epsilon(E)\epsilon_{2g+1} =$

-1 и $M_E = 1$, када $g \to \infty$, за свако $\varepsilon > 0$ је испуњено

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \frac{L\left(\frac{1}{2}+\alpha, E \otimes \chi_D\right)}{L\left(\frac{1}{2}+\beta, \chi_D\right)} \\
&= \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid \Delta}} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} \sum_{i+j \geq 2 \text{ парно}} \frac{\lambda(P^i)\mu(P^j)}{|P|^{(1/2+\alpha)i+(1/2+\beta)j}}\right) \\
&\times \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \mid \Delta}} \left(\sum_{i+j \geq 2 \text{ парно}} \frac{\lambda(P^i)\mu(P^j)}{|P|^{(1/2+\alpha)i+(1/2+\beta)j}}\right) + \epsilon(E)\epsilon_{2g+1} q^{-\alpha(\mathfrak{n}+2g+1)} \\
&\times \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid \Delta}} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} \sum_{i+j \geq 2 \text{ парно}} \frac{\lambda(P^i)\mu(P^j)}{|P|^{(1/2-\alpha)i+(1/2+\beta)j}}\right) \\
&\times \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \mid \Delta}} \left(\sum_{i+j \geq 2 \text{ парно}} \frac{\lambda(P^i)\mu(P^j)}{|P|^{(1/2-\alpha)i+(1/2+\beta)j}}\right) + O\left(q^{-g+\varepsilon g}\right),
\end{aligned}$$

под условом $|\beta| \gg g^{-1/2+\varepsilon}$, при чему је $\mathfrak{n} = \mathbf{d}(N_E) - 4$.

У сврху извођења доказа претходне теореме биће прво доказано наредно помоћно тврђење.

Тврђење 7.2. Нека је $h \in \mathcal{M}$ монични полином такав да је $\mathbf{d}(h) \ll g$ и α комплексан број који задовољава услов $|\alpha| \ll \frac{1}{g}$. Тада важи

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, E \otimes \chi_D\right) \chi_D(h) \\
&= \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \mid \Delta}} \frac{|P|+1}{|P|} \left(\mathcal{B}_E(\alpha, h, 1) + \epsilon(E)\epsilon_{2g+1} q^{-\alpha(\mathfrak{n}+2g+1)} \mathcal{B}_E(-\alpha, hM_E, 1)\right) + O_\varepsilon\left(|h|^{1/2} q^{-g+\varepsilon g}\right),
\end{aligned}$$

при чему је вредност $\mathcal{B}_E(\alpha, h, N)$ дефинисана у (7.3).

Напомена. Претходно тврђење може се видети као генерализација Теореме 1.1. из [16] и његов сам доказ се ослања на сличне технике које се примењују у доказу поменуте теореме.

Доказ Тврђења 7.2. Користећи Лему 3.5 може се записати

$$\begin{aligned}
&\sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} L\left(\frac{1}{2}+\alpha, E \otimes \chi_D\right) \chi_D(h) \\
&= \mathcal{R}_E(h, [\mathfrak{n}/2] + 2g + 1, \alpha) + \epsilon(E)\epsilon_{2g+1} q^{-\alpha(\mathfrak{n}+2g+1)} \mathcal{R}_E(hM_E, [(\mathfrak{n}-1)/2] + 2g + 1, -\alpha),
\end{aligned} \tag{7.1}$$

где је

$$\mathcal{R}_E(h,X,\alpha)=\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\sum_{f\in\mathcal{M}_{\leq X}}\frac{\lambda(f)\chi_D(fh)}{|f|^{1/2+\alpha}},$$

уз $X\ll g$ неки позитиван параметар који ће касније бити погодно изабран. Стога, у сврху завршетка доказа, довољно је извести асимптотску формулу за $\mathcal{R}_E(h,X,\alpha)$.

Слично као у доказу Тврђења 5.3, може се писати

$$\mathcal{R}_E(h,X,\alpha)=\mathcal{R}_E(h,X,\alpha,V=0)+\mathcal{R}_E(h,X,\alpha,V\neq 0),$$

уз

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_E(h,X,\alpha,V=0)&=\mathcal{R}'_E(V=0)-q\mathcal{R}''_E(V=0),\\ \mathcal{R}_E(h,X,\alpha,V\neq 0)&=\mathcal{R}'_E(V\neq 0)-q\mathcal{R}''_E(V\neq 0),\end{aligned}$$

где је

$$\mathcal{R}'_E(V=0)=q^{2g+1}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\leq X}\\ fh=\square}}\frac{\lambda(f)\phi(fh)}{|h||f|^{3/2+\alpha}}\sum_{C_2|(\Delta fh)^\infty}\frac{1}{|C_2|^2}\sum_{\substack{C_1|\Delta\\ (C_1,fh)=1\\ \mathbf{d}(C_1)\leq 2g+1-2\mathbf{d}(C_2)}}\frac{\mu(C_1)}{|C_1|},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'_E(V\neq 0)&=q^{2g+1}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\leq X}\\ \mathbf{d}(fh)\ \text{паран}}}\frac{\lambda(f)}{|h||f|^{3/2+\alpha}}\sum_{\substack{C_1|\Delta\\ C_2|(\Delta fh)^\infty\\ \mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)\leq 2g+1}}\frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(fh)}{|C_1||C_2|^2}\Bigg((q-1)\\
&\times\sum_{\substack{V\in\mathcal{M}_{\leq \mathbf{d}(fh)+\mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)-2g-3}\\ V\neq 0}}G(V,fh)-\sum_{\substack{V\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}(fh)+\mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)-2g-2}\\ V\neq 0}}G(V,fh)\Bigg)\\
&+q^{2g+1}\overline{\tau(q)}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}_{\leq X}\\ \mathbf{d}(fh)\ \text{непаран}}}\frac{\lambda(f)}{|h||f|^{3/2+\alpha}}\sum_{\substack{C_1|\Delta\\ C_2|(\Delta fh)^\infty\\ \mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)\leq 2g+1}}\frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(fh)}{|C_1||C_2|^2}\\
&\times\sum_{V\in\mathcal{M}_{\mathbf{d}(fh)+\mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)-2g-2}}G(V,fh),\end{aligned}$$

а $\mathcal{R}''_E(V=0)$ и $\mathcal{R}''_E(V\neq 0)$ представљају исте суме као $\mathcal{R}'_E(V=0)$ и $\mathcal{R}'_E(V\neq 0)$, уз једину разлику да је у њима g замењено са $g-1$.

Прво ће бити приказано израчунавање $\mathcal{R}_E(h,X,\alpha,V=0)$. Аргументи исти онима који су примењени на почетку доказа Леме 5.4 дају

$$\mathcal{R}'_E(V=0)=\frac{q^{2g+1}}{|h_1|^{1/2}}\sum_{\substack{f\in\mathcal{M}\\ 2\mathbf{d}(f)\leq X-\mathbf{d}(h_1)}}\frac{\lambda(f^2h_1)}{|f|^{1+2\alpha}|h_1|^\alpha}\prod_{\substack{P\in\mathcal{P}\\ P|\Delta fh}}\left(1+\frac{1}{|P|}\right)^{-1}+O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right),$$

при чему је коришћен запис $h=h_1h_2^2$, где је h_1 бесквадратни монични полином и употребљена смена променљивих $f \to f^2 h_1$. Сличан израз, само уз g замењено са $g-1$, може се добити и за $\mathcal{R}_E''(V=0)$, чиме се добија

$$\mathcal{R}_E(h, X, \alpha, V=0) = \frac{|\mathcal{H}_{2g+1}|}{|h_1|^{1/2}} \sum_{\substack{f \in \mathcal{M} \\ 2\mathbf{d}(f) \leq X - \mathbf{d}(h_1)}} \frac{\lambda(f^2 h_1)}{|f|^{1+2\alpha}|h_1|^{\alpha}} \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | \Delta f h}} \left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right)$$

За наставак доказа потребна је Перонова формула у свом мало измењеном облику,

$$\sum_{2n \leq X} g(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g(n) u^{2n}\right) \frac{du}{u^{X+1}(1-u)},$$

који је валидан за свако r са особином да ред $\sum_{n=0}^{\infty} g(n)u^{2n}$ апсолутно конвергира у региону $|u| \leq r < 1$, при чему је X произвољан природан број. Применом претходне формуле добија се израз

$$\mathcal{R}_E(h, X, \alpha, V=0) = |\mathcal{H}_{2g+1}| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=r} \mathcal{B}_E(\alpha, h, u) \frac{du}{u^{X+1}(1-u)} + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right), \tag{7.2}$$

који важи за свако $|r| < 1$, где је

$$\mathcal{B}_E(\alpha, h, u) = \sum_{f \in \mathcal{M}} \frac{\lambda(f^2 h_1) u^{2\mathbf{d}(f)}}{|f|^{1+2\alpha}|h_1|^{1/2+\alpha}} \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | \Delta f h}} \left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1}. \tag{7.3}$$

Функција $\mathcal{B}_E(\alpha, h, u)$ је униформно ограничена за $|u| \leq q^{1/2-\varepsilon}$ и може бити представљена у облику Ојлеровог производа,

$$\mathcal{B}_E(\alpha, h, u) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid \Delta}} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda(P^{2i}) u^{2i\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(1+2\alpha)i}}\right) \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | \Delta}} \left(\left(1 + \frac{1}{|P|}\right)^{-1} \sum_{i \geq 0} \frac{\lambda(P^{2i}) u^{2i\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(1+2\alpha)i}}\right)$$
$$\prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | h}} \left(1 + \frac{1}{|P|} + \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda(P^{2i}) u^{2i\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(1+2\alpha)i}}\right)^{-1} \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | h_1}} \left(\sum_{i \geq 0} \frac{\lambda(P^{2i+1}) u^{(2i+1)\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(1+2\alpha)i+1/2+\alpha}}\right) \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid h_1 \\ P | h_2}} \left(\sum_{i \geq 0} \frac{\lambda(P^{2i}) u^{2i\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(1+2\alpha)i}}\right).$$

После померања контуре у изразу (7.2) до $|u| = q^{1/2-\varepsilon}$, наилази се на један прост пол у $u = 1$. После тривијалног оцењивања интеграла који настаје претходним померањем контуре добија се

$$\mathcal{R}_E(h, X, \alpha, V=0) = |\mathcal{H}_{2g+1}| \mathcal{B}_E(\alpha, h, 1) + O_\varepsilon\left(q^{\varepsilon g}\right) + O_\varepsilon\left(q^{2g - X/2 + \varepsilon g}\right). \tag{7.4}$$

Наредно ће бити приказано добијање горње границе за $\mathcal{R}_E(h, X, \alpha, V \neq 0)$. Као у доказу Леме 5.5, довољно је дати оцену за члан

$$\mathcal{R}(V \neq 0) = q^{2g+1}\overline{\tau(q)} \sum_{\substack{f \in \mathcal{M}_{\leq X} \\ \mathbf{d}(fh) \text{ непаран}}} \frac{\lambda(f)}{|h||f|^{3/2+\alpha}} \sum_{\substack{C_1 | \Delta \\ C_2 | (\Delta f h)^\infty \\ \mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2) \leq 2g+1}} \frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(fh)}{|C_1||C_2|^2}$$
$$\times \sum_{V \in \mathcal{M}_{\mathbf{d}(fh)+\mathbf{d}(C_1)+2\mathbf{d}(C_2)-2g-2}} G(V, fh).$$

Даље следећи аргументе из доказа Леме 5.5, може се записати $h = h_1 h_2^2$, где је h_1 бесквадратан моничан полином и применити Перонова формула за суму по f да се добије

$$\mathcal{R}(V \neq 0) = \frac{q^{2g+1}\overline{\tau(q)}}{|h|} \sum_{c_1+2c_2 \leq 2g+1} q^{-2c_2} \sum_{\substack{C_1 \in \mathcal{M}_{c_1} \\ C_1 | \Delta}} \frac{\mu(C_1)\chi_{C_1}(h)}{|C_1|}$$
$$\times \sum_{\substack{m \leq X \\ m+\mathbf{d}(h) \text{ непарно}}} \sum_{\substack{j \leq m+\mathbf{d}(h)+c_1+2c_2-2g-2 \\ j+c_1 \text{ непарно}}} \sum_{V_1 \in \mathcal{H}_j} \sum_{V_2 \in \mathcal{M}_{(m+\mathbf{d}(h)+c_1-j)/2+c_2-g-1}}$$
$$\times \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|u|=r_1} \oint_{|w|=r_2} \mathcal{H}(V_1; u, w, \alpha) \mathcal{I}(V_1 V_2^2; u, w, \alpha) \frac{du}{u^{m+1}} \frac{dw}{w^{c_2+1}}, \tag{7.5}$$

где је

$$\mathcal{H}(V_1; u, w, \alpha) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid V_1}} \left(1 + \frac{\chi_{C_1 V_1}(P)\lambda(P) u^{\mathbf{d}(P)}}{|P|^{1+\alpha}} \left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}\right)$$

и

$$\mathcal{I}(V_1 V_2^2; u, w, \alpha) = \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | \Delta h}} \left(\sum_i \frac{\chi_{C_1}(P^i)\lambda(P^i) G\left(V_1 V_2^2; P^{i+\mathrm{ord}_P(h)}\right) u^{i\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(3/2+\alpha)i}} \right) \left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}$$
$$\times \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P | V_1 V_2 \\ P \nmid \Delta h}} \left(1 + \sum_i \frac{\chi_{C_1}(P^i)\lambda(P^i) G\left(V_1 V_2^2; P^i\right) u^{i\mathbf{d}(P)}}{|P|^{(3/2+\alpha)i}} \left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}\right)$$
$$\times \prod_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ P \nmid V_1 \\ P | \Delta h V_2}} \left(1 + \frac{\chi_{C_1 V_1}(P)\lambda(P) u^{\mathbf{d}(P)}}{|P|^{1+\alpha}} \left(1 - w^{\mathbf{d}(P)}\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

Сада се може одабрати $r_1 = q^{1/2-\varepsilon}$, $r_2 = q^{-\varepsilon}$ и означити са k најмањи природан са особином $|r_1 r_2^k| < 1$, да тако буде испуњено

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(V_1; u, w, \alpha)\\&= \mathcal{L}\left(\frac{u}{q^{1+\alpha}}, E \otimes \chi_{C_1 V_1}\right) \mathcal{L}\left(\frac{uw}{q^{1+\alpha}}, E \otimes \chi_{C_1 V_1}\right) \dots \mathcal{L}\left(\frac{uw^{k-1}}{q^{1+\alpha}}, E \otimes \chi_{C_1 V_1}\right) \mathcal{H}_1(V_1; u, w, \alpha),\end{aligned}$$

где је $\mathcal{H}_1(V_1; u, w, \alpha)$ конвергентно када $|u| \le r_1$ и $|w| \le r_2$. Допринос сваке од L-функција се може ограничити на исти начин као на крају доказа Леме 5.5, док за $\mathcal{I}(V_1 V_2^2; u, w, \alpha)$ важи оцена

$$|\mathcal{I}(V_1 V_2^2; u, w, \alpha)| \ll |h|^{1/2+\varepsilon} \left|(h, V_2^2)\right|^{1/2} |V_1 V_2|^{\varepsilon}.$$

После коришћења тих оцена у (7.5), уз тривијално ограничавање доприноса осталих чланова добија се

$$\mathcal{R}(V \ne 0) \ll_{\varepsilon} |h|^{1/2} q^{X/2+\varepsilon g}.$$

Комбиновање овог резултата са (7.4) даје

$$\mathcal{R}_E(h, X, \alpha) = |\mathcal{H}_{2g+1}| \mathcal{B}_E(\alpha, h, 1) + O_{\varepsilon}\left(|h|^{1/2} q^{X/2+\varepsilon g}\right) + O_{\varepsilon}\left(q^{2g-X/2+\varepsilon g}\right).$$

Коначно, доказ Тврђења 7.2 се добија после две директне примене претходног у (7.1), прве за избор параметра $X = [\mathfrak{n}/2] + 2g + 1$ и друге за избор параметра $X = [(\mathfrak{n} - 1)/2] + 2g + 1$. □

У сврху доказа Теореме 7.1 прво се може записати

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \frac{L\left(\frac{1}{2} + \alpha, E \otimes \chi_D\right)}{L\left(\frac{1}{2} + \beta, \chi_D\right)}\\&\qquad = \sum_{h \in \mathcal{M}} \frac{\mu(h)}{|h|^{1/2+\beta}} \frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} L\left(\frac{1}{2} + \alpha, E \otimes \chi_D\right) \chi_D(h).\end{aligned}$$

Нека је X неки параметар који ће бити одабран касније, а $\mathcal{S}_{\le X}$ и $\mathcal{S}_{>X}$ ознаке за чланове у претходном изразу у којима је $\mathbf{d}(h) \le X$, односно $\mathbf{d}(h) > X$.

За израз $\mathcal{S}_{>X}$ може се дати горња оцена следећи сличне идеје које су примењене у доказу Теореме 1.1. из [15]. За почетак, на основу Перонове формуле може се писати

$$\mathcal{S}_{>X} = \frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=r} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \frac{L\left(\frac{1}{2} + \alpha, E \otimes \chi_D\right)}{\mathcal{L}\left(\frac{u}{q^{\frac{1}{2}+\beta}}, \chi_D\right)} \frac{du}{u^{X+1}(u-1)} \tag{7.6}$$

за произвољно $r > 1$. Даље се може одабрати $r = q^{(1-\varepsilon)\Re(\beta)}$ и применити Хелдерова неједнакост да се добије

$$\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\left|\frac{L\left(\frac{1}{2}+\alpha,E\otimes\chi_D\right)}{\mathcal{L}\left(\frac{u}{q^{\frac{1}{2}+\beta}},\chi_D\right)}\right|\leq\left(\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\left|L\left(\frac{1}{2}+\alpha,E\otimes\chi_D\right)\right|^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$
$$\times\left(\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\frac{1}{\left|\mathcal{L}\left(\frac{u}{q^{\frac{1}{2}+\beta}},\chi_D\right)\right|^{1+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}.$$

Први фактор са десне стране претходне неједнакости се може оценити користећи Теорему 4.4 са

$$\left(\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\left|L\left(\frac{1}{2}+\alpha,E\otimes\chi_D\right)\right|^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\ll q^{\frac{2g\varepsilon}{1+\varepsilon}}g^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)},$$

док примена Теореме 6.4 даје оцену

$$\left(\sum_{D\in\mathcal{H}^*_{2g+1}}\frac{1}{\left|\mathcal{L}\left(\frac{u}{q^{\frac{1}{2}+\beta}},\chi_D\right)\right|^{1+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\ll q^{\frac{2g}{1+\varepsilon}}\left(\frac{\log g}{\varepsilon\beta}\right)^{1+\varepsilon}.$$

за други фактор. Коришћењем претходне две оцене у (7.6) добија се

$$\mathcal{S}_{>X}\ll_\varepsilon\frac{q^{-(1-\varepsilon)X\Re(\beta)}}{\Re(\beta)}g^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\left(\frac{\log g}{\varepsilon\beta}\right)^{1+\varepsilon}\ll_\varepsilon q^{-(1-\varepsilon)X\Re(\beta)}. \tag{7.7}$$

Са друге стране, израз $\mathcal{S}_{\leq X}$ се рачуна директном применом Тврђења 7.2. Потом се може искористити (7.7) да се добијена сума по h прошири са све полиноме $h\in\mathcal{M}$ уз занемарљиву грешку. Записивање тако добијених чланова у облику Ојлерових производа даје главни члан у Теореми 7.1. За ограничавање укупног доприноса грешки се изабере за параметар $X=\varepsilon g$ и тривијално оцени сума по h, што завршава доказ Теореме 7.1.

Литература

[1] S. A. Altuğ, J. Tsimerman, *Metaplectic Ramanujan conjecture over function fields with applications to quadratic forms,* Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), 3465-3558.

[2] J. C. Andrade, J. P. Keating, *Conjectures for the integral moments and ratios of L-functions over function fields,* J. Number Theory, **142** (2014), 102-148.

[3] J. C. Andrade, J. P. Keating, *The mean value of $L(\frac{1}{2}, \chi)$ in the hyperelliptic ensemble,* J. Number Theory, **132**(12) (2012), 2793-2816.

[4] E. Artin, *Quadratische Körper in Geibiet der Höheren Kongruzzen I and II,* Math. Zeit., **19**, 153-296, (1924).

[5] S. Baig, C. Hall, *Experimental data for Goldfeld's conjecture over function fields,* Exp. Math., **21** (2012), 362-374.

[6] R. Balasubramanian, V. K. Murty, *Zeros of Dirichlet L-functions,* Ann. Sci. École Norm. Sup., **25** (1992), 567-615.

[7] M. Bhargava, A. Shankar, *Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves,* Ann. of Math., (2) **181** (1) (2015), 191-242.

[8] M. Bhargava, A. Shankar, *Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0,* Ann. of Math., (2) **181** (2) (2015), 587-621.

[9] M. Bhargava, A. Shankar, *The average size of the 5-selmer group of elliptic curves is 6, and the average rank is less than 1,* arXiv:1312.7859.

[10] B. J. Birch, H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Notes on elliptic curves. II,* J. Reine Angew. Math., **218** (1965), 79-108.

[11] H. Bohr, E. Landau, *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann,* C. R. Acad. des Sciences Paris **158** (1914), 158-162.

[12] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$*: wild* 3*-adic exercises,* Journal of the American Mathematical Society, **14** (4) (2001), 843-939.

[13] H. M. Bui, *Non-vanishing of Dirichlet* L*-functions at the central point,* Int. J. Number Theory, **8** (2012), no. 8, 1855-1881.

[14] H. M. Bui, A. Florea, *Zeros of quadratic Dirichlet* L*-functions in the hyperelliptic ensemble,* Transactions of the AMS, **11** (2018), 8013-8045.

[15] H. M. Bui, A. Florea, J. P. Keating, *The Ratios Conjecture and upper bounds for negative moments of* L*-functions over function fields,* arXiv:2109.10396

[16] H. M. Bui, A. Florea, J. P. Keating, E. Roditty-Gershon, *Moments of quadratic twists of elliptic curve* L*-functions over function fields,* Algebra Number Theory, **14** (7) (2020), 1853-1893.

[17] D. Bump, S. Friedberg, J. Hoffstein, *Nonvanishing theorems for* L*-functions of modular forms and their derivatives,* Invent. Math., **102** (1990), 543-618.

[18] D. Bump, S. Friedberg, J. Hoffstein, *Eisenstein series on the metaplectic group and nonvanishing theorems for automorphic* L*-functions and their derivatives,* Ann. of Math., (2) **131** (1990), no. 1, 53-127.

[19] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field,* Duke Math. Jour., **1** (1935), 137-168.

[20] S. D. Chowla, *The Riemann Hypothesis and Hilbert's Tenth Problem,* Gordon and Breach Science Publishers, New York, (1965).

[21] J. Coates, A. Wiles, *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer,* Invent. Math., **39** (1977), 223-251.

[22] B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, *Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations,* Journal of the American Mathematical Society, **12** (2) (1999), 521-567.

[23] J. B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line,* J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 1-26.

[24] J. B. Conrey, D. W. Farmer, *Mean values of* L*-functions and symmetry,* Int. Math. Res. Not., IMRN (2000), 883-908.

[25] J. B. Conrey, D. W. Farmer, J. P. Keating, M. O. Rubinstein, N. C. Snaith, *Autocorrelation of random matrix polynomials,* Commun. Math. Phys., **237** (2003) 3, 365-395.

[26] J. B. Conrey, D. W. Farmer, J. P. Keating, M. O. Rubinstein, N. C. Snaith, *Integral moments of L-functions,* Proc. Lond. Math. Soc., **91** (2005), 33-104.

[27] J. B. Conrey, D. W. Farmer, M. R. Zirnbauer, *Autocorrelation of ratios of L-functions,* Commun. Number Theory Phys., **2** (2008), 593-636.

[28] J. B. Conrey, D. W. Farmer, M. R. Zirnbauer, *Howe pairs, supersymmetry, and ratios of random characteristic polynomials for the unitary groups U_N,* arXiv math-ph/0511024

[29] J. B. Conrey, A. Ghosh, *A conjecture for the sixth power moment of the Riemann zeta-function,* Int. Math. Res. Not., IMRN **15** (1998), 775-780.

[30] J. B. Conrey, S. M. Gonek, *High moments of the Riemann zeta-function,* Duke Math. Jour., **107** (2001), 577-604.

[31] J. B. Conrey, N. C. Snaith, *Applications of the L-functions Ratios Conjectures,* Proc. London Math. Soc., **3** (94) (2007), 594-646.

[32] R. Dedekind, *Über die Theorie der Ganzen Algebraischen Zahlen,* Supplement XI to Vorlesungen über Zahlentheorie von P.G. Lejeune-Dirichlet, F. Vieweg, Braunschweig, (1893).

[33] J. M. Deshouillers, H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms,* Invent. Math., **70** (1982/83), 219-288.

[34] A. Diaconu, D. Goldfeld, J. Hoffstein, *Multiple Dirichlet series and moments of zeta- and L-functions,* Compositio Math., **139** (2003), no. 3, 297-360.

[35] F. Diamond, *On deformation rings and Hecke rings,* Ann. of Math., (2), **144** (1) (1996), 137-166.

[36] P. G. L. Dirichlet, *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält,* Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, (1837), 45-81.

[37] P. G. L. Dirichlet, *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale á la th´éorie des nombres,* J. Reine Angew. Math., **19** (1839), 324-369; **21** (1840), 1-12, 134-155.

[38] G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas, *The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L-functions over function fields*, Proc. Amer. Math. Soc., **149** (7) (2021), 2851-2860.

[39] G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica, *On some hybrid power moments of products of generalized quadratic Gauss sums and Kloosterman sums*, Lithuanian Mathematical Journal, **58** (1) (2018), 1-14.

[40] D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica, *Large values of Dirichlet L-functions over function fields*, Int. J. Number Theory, **16** (5) (2020), 1081-1109.

[41] D. W. Farmer, *Long mollifiers of the Riemann zeta-function,* Mathematika **40** (1993), no. 1, 71-87.

[42] A. Florea, *Improving the error term in the mean value of $L(\frac{1}{2},\chi)$ in the hyperelliptic ensemble,* Int. Math. Res. Not., IMRN (2017), 6119-6148.

[43] A. Florea, *Negative moments of L-functions with small shifts over function fields,* arXiv:2111.10477

[44] A. Florea, *The fourth moment of quadratic Dirichlet L-functions over function fields,* Geom. Funct. Anal. **27** (2017), 541-595.

[45] A. Florea, *The second and third moment of $L(1/2,\chi)$ in the hyperelliptic ensemble,* Forum Math. **29** (2017), 873-892.

[46] D. Goldfeld, C. Viola, *Mean values of L-functions associated to elliptic, Fermat and other curves at the centre of the critical strip,* J. Number Theory, **11** (1979), S. Chowla Anniversary Issue, 305-320.

[47] S. M. Gonek, *Mean values of the Riemann zeta function and its derivatives,* Invent. Math. **75** (1984), no. 1, 123-141.

[48] B. Gross, W. Kohnen, D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series. II*, Math. Ann., **278** (1-4) (1987), 497-562.

[49] B. Gross, D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math., **84** (2) (1986), 225-320.

[50] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes,* Acta. Math., **41** (1918), 119-196.

[51] D. R. Hayes, *The expression of a polynomial as a sum of three irreducibles,* Acta Arith., **11** (1966), 461-488.

[52] E. Hecke, *Über die Zetafunktion beliebiger Zahlkörper,* Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse 1917, 77-89.

[53] H. Heilbronn, *On the class-number in imaginary quadratic fields,* The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. os-5, **1**, (1934), 150-160.

[54] D. A. Hejhal, *On the triple correlation of zeros of the zeta function,* Int. Math. Res. Not., IMRN (1994), 293-302.

[55] A. Huckleberry, A. Püttmann, M. R. Zirnbauer, *Haar expecations of ratios of random characteristic polynomials,* Complex Anal. Synergies **2** (2016), 1.

[56] A. E. Ingham, *Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function,* Proc. London. Math. Soc., **27** (2) (1926), 273-300.

[57] H. Iwaniec, *On the order of vanishing of modular L-functions at the critical point,* Sém. Théor. Nombres Bordeaux, **2** (1990), 365-376.

[58] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2004).

[59] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **91** (2000), 55-131. (2001).

[60] H. Iwaniec, P. Sarnak, *Dirichlet L-functions at the central point,* in Number Theory in Progress, Vol. 2, 941-952, de Gruyter, Berlin, (1999).

[61] M. Jutila, *On the mean value of $L(\frac{1}{2},\chi)$ for real characters,* Analysis, **1** (1981), 149-161.

[62] N. M. Katz, *Twisted L-functions and monodromy,* Annals of Mathematics Studies, **150** ,Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.

[63] N. M. Katz, P. Sarnak, *Zeroes of zeta functions and symmetry,* Bull. Amer. Math. Soc., **36**, no. 1, (1999), 1-26.

[64] N. M. Katz, P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy,* AMS Colloquium Publications, 45 addr AMS, Providence, RI (1999).

[65] J. P. Keating, N. C. Snaith, *Random matrix theory and $\zeta(\frac{1}{2}+it)$,* Comm. Math. Phys., **214** (2000), 57-89.

[66] J. P. Keating, N. C. Snaith, *Random matrix theory and L-functions sa $s=\frac{1}{2}$,* Comm. Math. Phys., **214** (2000), 91-110.

[67] R. Khan, *Non-vanishing of the symmetric square L-function at the central point,* Proc. Lond. Math. Soc., (3) **100** (2010), no. 3, 736-762.

[68] R. Khan, *Simultaneous non-vanishing of $\mathrm{GL}(3)\times\mathrm{GL}(2)$ and $\mathrm{GL}(2)$ L-functions,* Math. Proc. Camb. Philos. Soc., **152** (2012), no. 3, 535-553.

[69] R. Khan, Dj. Milićević, H. T. Ngo, *Nonvanishing of Dirichlet L-functions, II,* Math. Zeit., **300**, (2022), 1603-1613.

[70] R. Khan, H. T. Ngo, *Nonvanishing of Dirichlet L-functions,* Algebra Number Theory, **10** (2016), no. 10, 2081-2091.

[71] V. A. Kolyvagin, *Finiteness of $E(\mathbb{Q})$ and Ш$(E,\mathbb{Q})$ for a subclass of Weil curves,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **52** (3) (1988), 522-540, 670-671.

[72] E. Kowalski, P. Michel, J. VanderKam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip,* J. Reine Angew. Math., **526** (2000), 1-34.

[73] E. Kummer, *Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entires,* J. Math. Pures Appl., **XVI** (1851), 377-498.

[74] N. Lelas, *Extremal behaviour of ± 1-valued completely multiplicative functions in function fields*, Glasnik Matematicki, **56** (1) (2021), 79-94.

[75] N. Lelas, *Simultaneous nonvanishing of quadratic twists of elliptic curve L-functions and quadratic Dirichlet L-functions over function fields*, preprint.

[76] N. Levinson, *More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$,* Advances in Math. **13** (1974), 383-436.

[77] W. Li, *Vanishing of hyperelliptic L-functions at the central point,* J. Number theory, **191** (2018), 85-103.

[78] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function,* Proc. Symp. Pure Math., **24** (1973), 181-193.

[79] L. J. Mordell, *On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees,* Proc. Camb. Phil. Soc., **21** (1922), 179-192.

[80] Y. Motohashi, *A relation between the Riemann zeta-function and the hyperbolic Laplacian,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **4**, 22 (1995), 299-313.

[81] M. R. Murty, V. K. Murty, *Mean values of derivatives of modular L-series,* Ann. of Math., **133** (1991), 447-475.

[82] A. M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function,* Math. Comp. **48** (1987), 273-308.

[83] A. Odlyzko, *The 10^{20}th zero of the Riemann zeta-function and 70 million of its neighbors,* unpublished preprint, (1989).

[84] K. Ono, C. Skinner, *Non-vanishing of quadratic twists of modular L-functions,* Invent. Math., **134** (1998), no. 3, 651-660.

[85] A. E. Özlük, C. Snyder, *On the distribution of the nontrivial zeros of quadratic L-functions close to the real axis,* Acta Arith., **91** (1999), 209-228.

[86] I. Petrow, *Moments of $L'(1/2)$ in the family of quadratic twists,* Int. Math. Res. Not., IMRN (2014), 1576-1612.

[87] M. Rosen, *Number Theory in Function Fields,* Graduate Texts in Mathematics, **210**, Springer, New York, (2000).

[88] M. O. Rubinstein, *Evidence for a spectral interpretation,* Ph.D. thesis, Princeton University, (1998).

[89] Z. Rudnick, *Traces of high powers of the Frobenius class in the hyperelliptic ensemble,* Acta Arith., **143** (2010), 81-99.

[90] Z. Rudnick, P. Sarnak, *Zeros of principal L-functions and random matrix theory,* Duke Math. J. **81** (1996), 269-322.

[91] R. Rumely, *Numerical computations concerning the ERH,* Math. Comp. **61** (1993), 415-440.

[92] A. Selberg, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function,* Arch. Math. Naturvid. **48** (1946), 89-155.

[93] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series,* Collected Papers, Vol. 2 Springer-Verlag addr Berlin (1991).

[94] Q. Shen, *The fourth moment of quadratic Dirichlet L-functions,* Math. Zeit. **298**, (2021), 713-745.

[95] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves,* Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer, Dordrecht, (2009).

[96] K. Soundararajan, *Moments of the Riemann zeta function,* Ann. of Math., **170** (2009), 981-993.

[97] K. Soundararajan, *Nonvanishing of quadratic Dirichlet L-functions at $s = \frac{1}{2}$*, Ann. of Math., (2) **152** (2000), 447-488.

[98] A. Weil, *Sur les Courbes Algébriques et les Variétés qui s'en Déduisent,* Actualités Sci. Ind., no. 1041, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **7**. Hermann et Cie., Paris, (1948).

[99] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem,* Ann. of Math., **141** (1995) , 443-551.

[100] M. Young, *The first moment of quadratic Dirichlet L-functions,* Acta Arith., **138** (1) (2009), 73-99.

Биографија аутора

Никола Лелас је рођен 3. новембра 1991. у Београду. Завршио је Основну школу ,,Лазар Саватић" у Земуну и Математичку гимназију у Београду. Основне студије на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене је уписао 2010. године. Дипломирао је 2014. године као студент генерације са просечном оценом 9.95. Исте године је уписао Мастер студије на Математичком факултету и завршава их 2015. године са просеком 10.00, одбранивши мастер рад ,,Теорема Чеботарева о густини и њене примене на аритметику елиптичких кривих" под менторством проф. др Горана Ђанковића. Од 2015. године је студент докторских студија на Математичком факултету у Београду, студијски програм Математика, модул Алгебра и математичка логика.

Од 2014. године је запослен на Математичком факултету у Београду и то на Катедри за математичку анализу у периоду 2014.–2015. као сарадник у настави и на Катедри за алгебру и математичку логику почевши од 2015. (као сарадник у настави до 2016. и као асистент од 2016.). Држао је часове вежби из Анализе 1, Алгебре 1, Алгебре 2, Алгебре 3, Елементарне теорије бројева, Линеарне алгебре, Теорије бројева 1 и Теорије бројева 2.

Списак научних радова:

- G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica, *On some hybrid power moments of products of generalized quadratic Gauss sums and Kloosterman sums*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 1 (2018), pp. 1-14.

- D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica, *Large values of Dirichlet L-functions over function fields*, International Journal of Number Theory, Vol. 16, No. 5 (2020), pp. 1081-1109.

- G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas, *The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L-functions over function fields*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 149, No. 7 (2021), pp. 2851-2860.

- N. Lelas, *Extremal behaviour of* ± 1*-valued completely multiplicative functions in function fields*, Glasnik Matematicki, Vol. 56, No. 1 (2021), pp. 79-94.

- N. Lelas, *Simultaneous nonvanishing of quadratic twists of elliptic curve L-functions and quadratic Dirichlet L-functions over function fields*, 20 страна, на рецензији.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Никола Лелас

број уписа 2002/2015

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Истовремено неанулирање L-функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 16.11.2022.

Лелас Никола

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Никола Лелас

Број уписа 2002/2015

Студијски програм Математика

Наслов рада Истовремено неанулирање L-функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима

Ментор проф. др Горан Ђанковић

Потписани Никола Лелас

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 16.11.2022.

Лелас Никола

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Истовремено неанулирање L-функција квадратних твистова елиптичке криве и

квадратних Дирихлеових L-функција над функцијским пољима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 16.11.2022.

Лелас Никола

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.