

MATEMATIČKI FAKULTET
BEOGRAD

Diplomski rad

Tema: Subeksponencijalne raspodele i primene
u aktuarskoj matematici

Mentor:
Prof. Dr Pavle Mladenović

Kandidat:
Jelena Jovanović

Jun, 2011

Sadržaj:

Uvod	3
1. Zbir nezavisnih slučajnih promenljivih. Konvolucija funkcije raspodele	4
2. Pravilno promenljive funkcije i pravilno promenljive slučajne veličine	6
3. Subeksponecijalne raspodele	11
3.1 Osnovna svojstva subeksponecijalnih raspodela	12
3.2 Subeksponecijalnost i maksimum slučajnih veličina	16
3.3 Subeksponecijalnost i suma slučajnih veličina	18
3.3.1 Zatvorenost u odnosu na konvoluciju.....	18
3.3.2 Slučajne sume.....	18
3.3.3 Ponderisane sume subeksponecijalnih slučajnih veličina.....	19
3.4 Primeri koji uključuju klasu S	21
3.5 Ponderisane sume slučajnih promenljivih sa subeksponecijalnom raspodelom i njihov maksimum	26
Literatura	33

Uvod

U ovom radu proučavaćemo subeksponecijalne raspodele, njihove osobine i primene. Posebna pažnja biće posvećena primeni u modeliranju veličina koje imaju raspodele sa teškim repovima kakve se najčešće sreću u osiguranju.

Subeksponecijalne raspodele su specijalan slučaj klase raspodela sa teškim repovima. Ime im potiče od njihove osobine da im rep raspodele opada sporije od bilo koje raspodele iz eksponecijalne klase raspodela. Na osnovu ove njihove osobine sledi da slučajne veličine koje imaju subeksponecijalnu raspodelu uzimaju velike vrednosti sa nezamislivim verovatnoćama, pa su samim tim ove raspodele kandidati za modeliranje slučajnih promenljivih koje mogu uzeti ekstremno velike vrednosti u odnosu na očekivane vrednosti. One nalaze primenu u osiguranju, posebno u osiguranju od požara, oluje i poplave, poznate i kao osiguranje od katastrofe. Subeksponecijalne štete mogu dovesti do velikih oscilacija u poslovanju osiguravajućih kompanija povećavajući preuzeti rizik u portfelju. Ovo su razlozi zbog kojih se i osiguravajuće kompanije osiguravaju od rizika katastrofe kod reosiguravajućih kompanija.

Subeksponecijalne raspodele je prvi put proučavao Chistyakov (1964). Istraživanja tokom sedamdesetih bavila su se primenama u oblasti osiguranja. U to vreme se problemu prilazilo analitički, dok je kasniji pristup primene verovatnoće i statistike doveo do boljih rešenja problema verovatnoće razaranja.

Prvi deo rada se odnosi na definisanje konvolucije funkcije raspodele, drugi deo na pravilno promenljive funkcije i pravilno promenljive slučajne veličine. Treći deo rada se bavi subeksponecijalnim raspodelama, njihovim osobinama, povezanosti sume i maksimuma slučajnih veličina sa subeksponecijalnim slučajnim veličinama i sumom i maksimumom slučajnih veličina koje imaju subeksponecijalnu raspodelu.

1. Zbir nezavisnih slučajnih promenljivih. Konvolucija funkcije raspodele

- Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne slučajne veličine sa zajedničkom raspodelom $F(x)$, tada je n -ta konvolucija funkcije raspodele $F(x)$ po definiciji:

$$F^{n*}(x) = P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x\}$$

$$F^{0*}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

- Neka su X i Y slučajne veličine sa zajedničkom funkcijom raspodele $F_{(X,Y)}(x, y)$ i $H: R^2 \rightarrow R$ Borelova funkcija, $Z = H(X, Y)$ tada je:

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \int_{\{(x,y): H(x,y) \leq z\}} dF_{(X,Y)}(x, y) = \int_{R^2} I_{\{H(x,y) \leq z\}}(x, y) dF_{(X,Y)}(x, y).$$

- Ako su X i Y nezavisne slučajne veličine i $Z = X + Y$, onda je:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{\{(x,y): x+y \leq z\}} dF_X(x) dF_Y(y) = \int_{R^2} I_{\{x+y \leq z\}}(x, y) dF_X(x) dF_Y(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dF_X(x) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\{x+y \leq z\}}(x, y) dF_Y(y) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z-x) dF_X(x). \end{aligned} \quad (1.1)$$

- Analogno se dobija i formula:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y) dF_Y(y). \quad (1.2)$$

- Ako su X i Y nezavisne slučajne veličine sa gustinama raspodele f_X i f_Y , onda je gustina raspodele slučajne veličine $Z = X + Y$ data sa:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x) f_X(x) dx.$$

Definicija 1.1 Ako su F i G funkcije raspodela verovatnoća onda se funkcija

$$(F * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-t)dG(t) \text{ zove konvolucija funkcija raspodela } F \text{ i } G.$$

- Ako su X i Y nezavisne slučajne veličine, a F i G redom njihove funkcije raspodela, onda za funkciju raspodele F_{X+Y} zbira $X + Y$ važi:

$$F_{X+Y} = F * G = G * F .$$

- Ako su X i Y nenegativne slučajne veličine, F i G redom njihove funkcije raspodela, onda za svako $x > 0$ važi:

$$F_{X+Y}(x) = \int_0^x F(x-t)dG(t). \tag{1.3}$$

2. Pravilno promenljive funkcije i pravilno promenljive slučajne veličine

Pravilno promenljive funkcije je uveo i dokazao najznačajnije teoreme u vezi sa njima Jovan Karamata (1902-1967) u radu *Sur une mode de croissance régulière des fonctions*, *Mathematica (Cluj)*, 4, (1930), 38-53. U svojoj definiciji pravilno promenljivih funkcija Karamata je imao pretpostavku o neprekidnosti, dok je kasnije primećeno da cela teorija važi uz slabiju pretpostavku o merljivosti. [14] Za popularizaciju teorije pravilno promenljivih funkcija u verovatnoći zaslužan je Feler (William Feller), koji je u svom udžbeniku iz verovatnoće posvetio dva odeljka ovoj teoriji.

Definicija 2.1 Neka je R skup realnih brojeva i $R_+ = (0, +\infty)$ skup pozitivnih realnih brojeva. Merljiva funkcija $F : R_+ \rightarrow R_+$ je pravilno promenljiva u beskonačnosti, ako postoji broj $\rho \in R$, takav da za svako $x \in R_+$ važi :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^\rho.$$

Oznake: $F \in PP_\rho$, ρ - indeks ili eksponent pravilne promenljivosti.

Ako je $\rho = 0$ onda se odgovarajuća funkcija F naziva sporo promenljiva u beskonačnosti.

Primer 2.1 Sledeće funkcije su pravilno promenljive:

a) $F(x) = x^\rho \quad x > 0, \quad \frac{F(tx)}{F(t)} = \frac{(tx)^\rho}{t^\rho} = x^\rho;$

b) $F(x) = x^\rho \ln x \quad x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx)^\rho \ln(tx)}{t^\rho \ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} x^\rho \frac{\ln t + \ln x}{\ln t} = x^\rho;$

c) $F(x) = (x \ln x)^\rho \quad x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx \ln(tx))^\rho}{(t \ln t)^\rho} = \lim_{t \rightarrow \infty} x^\rho \left(\frac{\ln t + \ln x}{\ln t} \right)^\rho = x^\rho;$

d) $F(x) = \ln x \quad x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(tx)}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t + \ln x}{\ln t} = 1 = x^0.$

Primer 2.2 Ako je funkcija $F \in PP_\rho$, $\rho \in R$ onda je $L(x) = x^{-\rho} F(x)$ sporo promenljiva u beskonačnosti.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{-\rho} F(tx)}{t^{-\rho} F(t)} = x^{-\rho} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\rho} x^\rho = 1 = x^0.$$

Definicija 2.2 Ako funkcija $F\left(\frac{1}{x}\right)$ zadovoljava uslov PP_ρ u beskonačnosti, onda kažemo da $F(x)$ zadovoljava uslov PP_ρ u nuli.

Neka je X slučajna veličina i $F(x) = P\{X \leq x\}$ njena funkcija raspodele. Funkcija $1 - F(x)$ se naziva desni rep raspodele.

Definicija 2.3 Nenegativna slučajna veličina X i njena raspodela $F(x)$ su pravilno promenljive sa indeksom $\rho \geq 0$ kada važi da je desni rep raspodele $1 - F(x)$ pravilno promenljiva funkcija sa indeksom $-\rho$ tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\rho}. \quad (2.1)$$

Primer 2.3 Paretova raspodela je pravilno promenljiva.

$$\text{Funkcija gustine: } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & x \geq x_0, \quad x_0, \alpha > 0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$

$$F(x) \sim 1 - \frac{c}{x^\alpha}, \quad x \geq x_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{c}{(tx)^\alpha}\right)}{1 - \left(1 - \frac{c}{t^\alpha}\right)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha}{(tx)^\alpha} = x^{-\alpha}.$$

Primer 2.4 Frešeova funkcija raspodele $G_{1,\alpha} = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$ je pravilno promenljiva sa indeksom pravilne promenljivosti $\rho = -\alpha$.

$$1 - G_{1,\alpha}(x) = 1 - e^{-x^{-\alpha}} = 1 - e^{-\frac{1}{x^\alpha}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - G_{1,\alpha}(tx)}{1 - G_{1,\alpha}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{-\alpha}}{t^{-\alpha}} = x^{-\alpha}.$$

Primer 2.5 Vejbulova raspodela nije pravilno promenljiva.

Funkcija raspodele: $F(x) = 1 - e^{-cx^\alpha}$, $c, x > 0$, $0 < \alpha < 1$

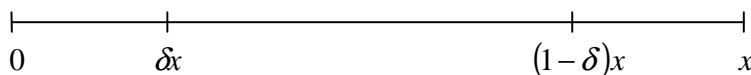
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 - e^{-c(tx)^\alpha})}{1 - (1 - e^{-ct^\alpha})} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{ct^\alpha(1-x^\alpha)} = \begin{cases} 0, & x^\alpha > 1 \\ +\infty, & x^\alpha < 1 \end{cases}.$$

Teorema 2.1 [3] (*Zatvorenost u odnosu na konvoluciju pravilno promenljivih raspodela*): Neka su X i Y , definisane na istom prostoru verovatnoća, dve nezavisne, nenegativne i pravilno promenljive slučajne veličine sa indeksom $\rho \geq 0$. Tada je zbir $X + Y$ pravilno promenljiv sa indeksom ρ i važi:

$$P\{X + Y > x\} \sim P\{X > x\} + P\{Y > x\} \text{ pri } x \rightarrow \infty.$$

Dokaz Neka je $x > 0$. Važi inkluzija $\{X > x\} \cup \{Y > x\} \subset \{X + Y > x\}$, zato je

$$\begin{aligned} P\{X + Y > x\} &\geq P(\{X > x\} \cup \{Y > x\}) \\ &= P\{X > x\} + P\{Y > x\} - P\{X > x\} \cdot P\{Y > x\} \\ &= (P\{X > x\} + P\{Y > x\})(1 - o(1)), \quad x \rightarrow \infty \end{aligned}$$



Neka je $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Važi inkluzija

$$\{X \leq (1 - \delta)x\} \cap \{Y \leq (1 - \delta)x\} \cap (\{X \leq \delta x\} \cup \{Y \leq \delta x\}) \subset \{X + Y \leq x\}$$

Prelaskom na komplemente sledi:

$$\begin{aligned} \{X + Y > x\} &\subset \{X > (1 - \delta)x\} \cup \{Y > (1 - \delta)x\} \cup \{X > \delta x, Y > \delta x\} \\ P\{X + Y > x\} &\leq P\{X > (1 - \delta)x\} + P\{Y > (1 - \delta)x\} + P\{X > \delta x, Y > \delta x\} \\ &= (P\{X > (1 - \delta)x\} + P\{Y > (1 - \delta)x\})(1 + o(1)), \text{ pri } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Poslednja relacija važi, jer $P\{X > \delta x\} \rightarrow 0$ pri $x \rightarrow \infty$ i

$$\begin{aligned} \frac{P\{X > \delta x\}}{P\{X > (1 - \delta)x\}} &= \frac{P\{X > \delta x\}}{P\{X > x\}} \cdot \frac{P\{X > x\}}{P\{X > (1 - \delta)x\}} \rightarrow \left(\frac{\delta}{1 - \delta}\right)^{-\rho}, \quad x \rightarrow \infty \\ &= \frac{1}{P\{Y > \delta x\}} \cdot \frac{P\{X > (1 - \delta)x\}}{P\{X > \delta x\}} + \frac{1}{P\{X > \delta x\}} \cdot \frac{P\{Y > (1 - \delta)x\}}{P\{Y > \delta x\}} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Prema tome sledi:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{X + Y > x\}}{P\{X > x\} + P\{Y > x\}} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{X + Y > x\}}{P\{X > x\} + P\{Y > x\}} \leq \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P\{X > (1 - \delta)x\} + P\{Y > (1 - \delta)x\}}{P\{X > x\} + P\{Y > x\}} \leq (1 - \delta)^{-\rho} \end{aligned}$$

Tvrđenje teoreme sledi kada se pusti da $\delta \downarrow 0$. \square

U teoremi se ne pretpostavlja da slučajne veličine X i Y imaju istu raspodelu.

Lema 2.1: [7] *Neka je $\{X_k, k=1,2,\dots,n\}$ n nezavisnih, pozitivnih slučajnih promenljivih. Ako svako X_k ima raspodelu $F_k \in \alpha$ (α je klasa raspodela sa teškim repovima), $k=1,2,\dots,n$ tada važi:*

$$P\left\{\max_{1 \leq m \leq n} \sum_{k=1}^m X_k > x\right\} \sim P\left\{\sum_{k=1}^n X_k > x\right\}.$$

Posledica 2.1 *Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne, nenegativne slučajne veličine koje imaju istu pravilno promenljivu raspodelu sa indeksom $\rho \geq 0$.*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \text{ i } M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, n \geq 1.$$

Tada za svako n važi:

$$P\{S_n > x\} \sim nP\{X_1 > x\} \sim P\{M_n > x\}, x \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Dokaz: Prva asimptotska relacija je direktna posledica prethodne teoreme, $F(X) = P\{X_i \leq x\}$, tada važi $1 - F(x) \rightarrow 0$ pri $x \rightarrow \infty$ i

$$\begin{aligned} P\{M_n > x\} &= 1 - P\{M_n \leq x\} = 1 - (F(x))^n = 1 - [1 - (1 - F(x))]^n \\ &= 1 - 1 + n(1 - F(x)) - \binom{n}{2}(1 - F(x))^2 + \dots \\ &\sim n(1 - F(x)) = nP\{X_i > x\}, x \rightarrow \infty. \square \end{aligned}$$

Slučajne veličine S_n i M_n su pravilno promenljive sa istim indeksom ρ [2].

Posledica 2.2 *Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne, nenegativne slučajne veličine koje imaju istu pravilno promenljivu raspodelu sa indeksom $\rho \geq 0$ i neka su $c_1 > 0, c_2 > 0, \dots, c_n > 0$ date konstante. Tada važi:*

$$P\{c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n\} \sim (c_1^\rho + c_2^\rho + \dots + c_n^\rho) P\{X_i > x\}, x \rightarrow \infty.$$

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme sledi da pri $x \rightarrow \infty$

$$P\left\{\sum_{i=1}^n c_i X_i > x\right\} \sim \sum_{i=1}^n P\{c_i X_i > x\} = \sum_{i=1}^n P\{X_i > c_i^{-1} x\}$$

Koristeći svojstvo pravilne promenljivosti slučajne veličine X_i sledi da pri $x \rightarrow \infty$,

$$P\{X_i > c_i^{-1} x\} \sim (c_i^{-1})^{-\rho} P\{X_i > x\} = c_i^\rho P\{X_i > x\}.$$

Teorema 2.2 [13] *(O kanonskoj reprezentaciji sporo promenljive funkcije)*

Svaka sporo promenljiva funkcija L ima reprezentaciju:

$$L(x) = c_0(x) \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\} \text{ za } x \geq x_0 \text{ i neko } x_0 > 0$$

pri čemu $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ pri $t \rightarrow \infty$, a $c_0(t)$ je pozitivna funkcija koja zadovoljava uslov $c_0(t) \rightarrow c_0$ za neku pozitivnu konstantu c_0 .

Posledica 2.3: Neka je L sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti. Tada za svako $\delta > 0$ važi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(x)}{x^\delta} = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow \infty} x^\delta L(x) = \infty.$$

3. Subeksponecijalne raspodele

Definicija 3.1 Neka je X_1, X_2, X_3, \dots niz nenegativnih nezavisnih slučajnih veličina sa zajedničkom funkcijom raspodele $F(x) = P\{X \leq x\}$,

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \text{ i } M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

Slučajne veličine X_1, X_2, X_3, \dots i njihova funkcija raspodele F su subeksponecijalne, ako za svaki prirodan broj $n \geq 2$ važi jedan od sledeća dva ekvivalentna uslova:

$$1) \quad P\{S_n > x\} \sim nP\{X_1 > x\} \sim P\{M_n > x\} \text{ pri } x \rightarrow \infty$$

$$2) \quad (\forall n \geq 2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{n*}(x)}{1 - F(x)} = n \quad (3.1)$$

gde je $F^{n*}(x) = P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x\}$ n -ta konvolucija funkcije raspodele $F(x)$.

- Oznaka klase subeksponecijalnih raspodela je S .

Primer 3.1: Pravilno promenljive raspodele su subeksponecijalne (Sledi iz dokaza Posledice 2.1).

Primer 3.2: Sledeće raspodele, koje se koriste za modeliranje velikih odšteta (raspodele sa teškim repom) su subeksponecijalne [3]:

$$\text{Log-normalna: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \mu \in R, \sigma > 0;$$

$$\text{Paretova: } F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x_0 + x}\right)^\alpha, \quad \alpha, x_0 > 0;$$

$$\text{Burova: } F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x_0 + x^\tau}\right)^\alpha, \quad \alpha, x_0, \tau > 0;$$

$$\text{Vejbulova: } F(x) = 1 - e^{-cx^\alpha} \text{ za } c, x > 0 \text{ i } 0 < \alpha < 1;$$

$$\text{Log-gama: } f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\log x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}, \quad \alpha, \beta > 0;$$

$$\text{Benktander tip I: } F(x) = 1 - \left(1 + 2\frac{\beta}{\alpha} \log x\right) e^{-\beta(\log x)^2 - (\alpha+1)\log x}, \quad \alpha, \beta > 0;$$

Benktander tip II: $F(x) = 1 - e^{\frac{\alpha}{\beta}} x^{-(1-\beta)} e^{-\frac{x^\beta}{\beta}}$, $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$.

Primer 3.3 Raspodela $F(x)$ za koju važi $1 - F(x) \sim e^{-x(\ln x)^\beta}$, $\beta > 0$, $x \rightarrow \infty$ je subeksponecijalna [3].

Primer 3.4 Sledeće raspodele, koje se koriste za modeliranje malih odšteta (raspodele sa lakim repom) nisu subeksponecijalne [3]:

Eksponecijalna: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$;

Gama: $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, $\alpha, \beta > 0$;

Vejbulova: $F(x) = 1 - e^{-cx^\alpha}$ za $c > 0$ i $\alpha \geq 1$;

Usečena normalna: $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x > 0$.

3.1 Osnovna svojstva subeksponecijalnih raspodela

Teorema 3.1 [2]

a) Ako funkcija raspodele F pripada klasi S onda uniformno po $y \in K \subset (0, +\infty)$, gde je K proizvoljan kompaktan skup, važi jednakost:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} = 1. \quad (3.2)$$

b) Ako važi (3.2), onda za svako $\varepsilon > 0$ važi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\varepsilon x} (1 - F(x)) = \infty. \quad (3.3)$$

c) Ako $F \in S$, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji $K \in \mathbb{R}_+$, tako da za sve $n \geq 2$ i sve $x \geq 0$ važi:

$$\frac{1 - F^{n^*}(x)}{1 - F(x)} \leq K(1 + \varepsilon)^n. \quad (3.4)$$

Dokaz:

a) Za svaki prirodan broj n važi:

$$\frac{1 - F^{n^*}(x)}{1 - F(x)} = 1 + \frac{F(x) - F^{n^*}(x)}{1 - F(x)} \quad (3.5)$$

za $x \geq y > 0$ iz (3.5) dobija se:

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - F^{2^*}(x)}{1 - F(x)} &= 1 + \frac{F(x) - F^{2^*}(x)}{1 - F(x)} \\
 &= 1 + \int_0^y \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) + \int_y^x \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) \\
 &\geq 1 + \int_0^y \frac{1 - F(x)}{1 - F(x)} dF(t) + \int_x^y \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} dF(t) \\
 &= 1 + F(y) + \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} (F(x) - F(y))
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

za dovoljno velike x i sve $y \in K$ važi $F(x) > F(y)$, pa sledi iz (3.6)

$$1 \leq \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} \leq \left(\frac{1 - F^{2^*}(x)}{1 - F(x)} - 1 - F(y) \right) \frac{1}{F(x) - F(y)}. \tag{3.7}$$

pri $x \rightarrow \infty$ važi $\frac{1 - F^{2^*}(x)}{1 - F(x)} \rightarrow 2$ i $F(x) \rightarrow 1$, pa sledi

$$\left(\frac{1 - F^{2^*}(x)}{1 - F(x)} - 1 - F(y) \right) \frac{1}{F(x) - F(y)} \rightarrow 1.$$

Ovim je dokazana jednakost (3.2). Uniformnost konvergencije po y na kompaktnom skupu K sledi iz monotonosti funkcije F . \square

b) Iz (3.2) sledi da je funkcija $1 - F(\log y)$ sporo promenljiva, pa iz posledice 2.3 sledi:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^\varepsilon (1 - F(\log y)) = \infty$$

i kada se stavi da je $y = e^x$ sledi (3.3). \square

c) Neka je $\alpha_n = \sup_{x \geq 0} \frac{1 - F^{n^*}(x)}{1 - F(x)}$ i koristeći (3.5)

sledi da za svako $T < \infty$ važi

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq T} \int_0^x \frac{1 - F^{n^*}(x-y)}{1 - F(x)} dF(y) + \\
 &\quad + \sup_{x \geq T} \int_0^x \frac{1 - F^{n^*}(x-y)}{1 - F(x-y)} \cdot \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} dF(y) \leq \\
 &\leq 1 + A_T + \alpha_n \sup_{x \geq T} \frac{F(x) - F^{2^*}(x)}{1 - F(x)}
 \end{aligned}$$

gde je $A_T = (1 - F(T))^{-1} < \infty$, a kako je $F \in S$, može se za dato $\varepsilon > 0$

izabrati T tako da važi

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &\leq 1 + A_T + \alpha_n(1 + \varepsilon) \\ \alpha_n &\leq (1 + A_T)\varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon)^n,\end{aligned}$$

Odakle sledi (3.4). \square

Definicija 3.2 (Raspodele sa ekvivalentnim repovima) Dve raspodele F i G neprekidne sa desna su raspodele sa ekvivalentnim repovima ako važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - G(x)} = c \in (0, \infty).$$

Iz definicije 3.1 i činjenice da je S zatvorena u odnosu na raspodele sa ekvivalentnim repovima sledi da je:

$$F \in S \Rightarrow F^{n*} \in S, n \in N. \quad (3.8)$$

Kako je $F^n(x) = P\{M_n \leq x\}$, $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ funkcija raspodele maksimuma od n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom funkcijom raspodele F sledi:

$$F \in S \Rightarrow F^n \in S, n \in N. \quad (3.9)$$

Teorema 3.1 b) opravdava naziv subeksponecijalnih raspodela, naime rep raspodele F opada sporije od bilo kog eksponencijalnog repa.

Teorema 3.2 [3] (Dovoljan uslov subeksponecijalnosti) Ako je $F(0) = 0$ i

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} \leq 2 \text{ onda važi } F \in S.$$

Dokaz Neka je F zajednička funkcija raspodele nezavisnih i nenegativnih slučajnih veličina X_1, X_2, X_3, \dots tada važi:

$$\{X_1 + X_2 \leq x\} \subset \{X_1 \leq x, X_2 \leq x\}$$

pa sledi:

$$\begin{aligned}F^{2*}(x) &= P\{X_1 + X_2 \leq x\} \leq P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\} = P\{X_1 \leq x\} \cdot P\{X_2 \leq x\} = (F(x))^2 \\ 1 - F^{2*}(x) &\geq 1 - F^2(x) \\ \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} &\geq 1 + F(x)\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} (1 + F(x)) = 2$$

i koristeći:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} \leq 2$$

sledi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} = 2$$

Dokazujemo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{n*}(x)}{1 - F(x)} = n$ indukcijom po n .

Za $n = 2$ važi jednakost.

Pretpostavlja se da jednakost važi za neko n .

Za $0 < y \leq x$ dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{1 - F^{(n+1)*}(x)}{1 - F(x)} &= 1 + \frac{F(x) - F^{(n+1)*}(x)}{1 - F(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F^{n*}(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) = \\ &= 1 + \int_0^{x-y} \frac{1 - F^{n*}(x-t)}{1 - F(x-t)} \cdot \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) + \int_{x-y}^x \frac{1 - F^{n*}(x-t)}{1 - F(x-t)} \cdot \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) \\ &= 1 + A_1(x) + A_2(x) \\ A_1(x) &= \int_0^{x-y} \frac{1 - F^{n*}(x-t)}{1 - F(x-t)} \cdot \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) \\ &= \int_0^{x-y} \left(\frac{1 - F^{n*}(x-t)}{1 - F(x-t)} - n + n \right) \cdot \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) \\ &= \int_0^{x-y} (n + o(n)) \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t), \text{ pri } x \rightarrow \infty \text{ i } y \text{ dovoljno} \end{aligned}$$

veliko.

$$\begin{aligned} \int_0^{x-y} \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) &= \frac{F(x) - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} - \int_{x-y}^x \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) = \\ &= \frac{1 - F^{2*}(x) - (1 - F(x))}{1 - F(x)} - \int_{x-y}^x \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) \end{aligned}$$

$$\int_{x-y}^x \frac{1 - F(x-t)}{1 - F(x)} dF(t) \leq \int_{x-y}^x \frac{dF(t)}{1 - F(x)} = \frac{F(x) - F(x-y)}{1 - F(x)} \rightarrow 0 \text{ pri } x \rightarrow \infty$$

$$\text{jer je } \frac{F(x) - F(x-y)}{1 - F(x)} = \frac{1 - F(x-y) - (1 - F(x))}{1 - F(x)} \rightarrow 1 - 1 = 0 \text{ pri } x \rightarrow \infty$$

pa sledi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A_1(x) = n.$$

Kako je $\frac{1 - F^{n*}(x-t)}{1 - F(x-t)}$ ograničeno za $x - y \leq t \leq x$ i važi:

$$\int_{x-y}^x \frac{1-F(x-t)}{1-F(x)} dF(t) \leq \int_{x-y}^x \frac{dF(t)}{1-F(x)} = \frac{F(x)-F(x-y)}{1-F(x)} \rightarrow 0 \text{ pri } x \rightarrow \infty$$

Sledi da je:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A_2(x) = 0. \square$$

3.2 Subeksponecijalnost i maksimum slučajnih veličina

Subeksponecijalne raspodele su, zbog svojih osobina pogodne za modeliranje ekstremnih događaja.

Neka su $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nezavisne slučajne veličine sa istom raspodelom $F \in S$ i neka postoji konstanta $a_n > 0$ i $b_n \in \mathbb{R}$ tako da važi:

$$a_n^{-1}(\max(X_1, \dots, X_n) - b_n) \xrightarrow{d} G, \quad n \rightarrow \infty,$$

gde je G nedegenerisana funkcija raspodele. Onda kažemo da F pripada maksimalnoj oblasti privlačenja raspodele G i piše se $F \in MDA(G)$. Ako $F \in S$ tada je G ili Frešeova funkcija raspodele $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^\alpha\}$ za $x \geq 0$, $\alpha > 0$, ili Gumbelova funkcija raspodele $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ za $x \in \mathbb{R}$.

$F \in MDA(\Phi_\alpha)$ ako i samo ako $1-F \in PP_{-\alpha}$ [1].

Pa ostaje da se ispituju slučajevi kada $F \in S \cap MDA(\Lambda)$.

Dobar indikator za ekstremalno ponašanje modela je sledeća funkcija, koja postoji za raspodele koje imaju konačno matematičko očekivanje:

$$a(x) = E(X - x | X > x) = \int_x^\infty \frac{1-F(y)}{1-F(x)} dy, \quad x > 0 \text{ [1].}$$

Teorema 3.3 [13] *Neka je $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrabilna u Lebegovom smislu na konačnim intervalima:*

a) *ako je $\rho \geq -1$ i $F \in PP_\rho$ onda važi*

$$\int_0^x F(t) dt \in PP_{\rho+1} \text{ i } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x F(x)}{\int_0^x F(t) dt} = \rho + 1$$

ako je $\rho < -1$ i $F \in PP_\rho$ onda važi

$$\int_x^\infty F(t) dt < +\infty, \quad \int_x^\infty F(t) dt \in PP_{\rho+1} \text{ i } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x F(x)}{\int_x^\infty F(t) dt} = -\rho - 1$$

Ako je $\rho = -1$ i $\int_x^\infty F(t)dt < +\infty$ onda važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x F(x)}{\int_x^\infty F(t)dt} = -\rho - 1.$$

b) ako funkcija F zadovoljava uslov

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x F(x)}{\int_0^x F(t)dt} = \alpha \in (0, +\infty) \text{ onda važi } F \in PP_{\alpha-1}$$

ako je

$$\int_x^\infty F(t)dt < +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x F(x)}{\int_x^\infty F(t)dt} = \alpha \in (0, +\infty) \text{ onda važi } F \in PP_{-\alpha-1}.$$

Iz Karamatine teoreme sledi da F ima konačno matematičko očekivanje kada $1-F \in PP_{-\alpha}$ za $\alpha > 1$. Važi $1-F \in PP_{-(\alpha+1)}$ za $\alpha > 0$ ako i samo ako $a(x) \sim \frac{x}{\alpha}$. Za

Lognormalnu funkciju raspodele važi $a(x) \sim \frac{\sigma^2 x}{\ln x}$, a za Vejbulovu funkciju raspodele

važi $a(x) \sim \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Za eksponencijalnu funkciju raspodele $a(x)$ je konstanta, a

za normalnu funkciju raspodele $a(x)$ konvergira ka 0.

Lema 3.1 [1] *Neka je F funkcija raspodele koja ima konačno matematičko očekivanje i neka je $a(x)$ neopadajuća funkcija i postoji $t > 1$ tako da važi*

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{a(tx)}{a(x)} > 1,$$

tada $F \in MDA(\Lambda) \cap S$.

Paretova, Burova, Log-gama funkcije raspodele pripadaju $MDA(\Phi_\alpha)$ za neko $\alpha > 0$, dok Lognormalana, Benktander i Vejbulova funkcije raspodele pripadaju $MDA(\Lambda)$ [1].

3.3 Subeksponecijalnost i suma slučajnih veličina

Već je pomenuto da je S zatvorena u odnosu na operaciju sume nezavisnih slučajnih veličina sa istom funkcijom raspodele. Ovde će se proučavati dalja zatvorenost i druge osobine povezane sa sumom subeksponecijalnih slučajnih promenljivih.

3.3.1 Zatvorenost u odnosu na konvoluciju

Postavlja se pitanje da li je S u opštem slučaju zatvorena u odnosu na konvoluciju, odnosno ako $F, G \in S$ da li važi $F * G \in S$. Negativan odgovor na ovo pitanje je dao Leslie [10], koji je pronašao dve subeksponecijalne funkcije raspodele čija konvolucija ne pripada klasi S . Mada postoji ovaj primer sledeća teorema pokriva veliki deo razumnih slučajeva.

Teorema 3.4 [1]

- a) *Neka $F \in S$ i $1 - G_i(x) \sim c_i(1 - F(x))$ gde $c_i \in (0, \infty)$ za $i = 1, 2$. Tada važi*

$$1 - G_1 * G_2(x) \sim (c_1 + c_2)(1 - F(x)).$$
- b) *Neka $F \in S$ i $1 - G(x) \sim cF(x)$ za $c \in [0, \infty)$. Tada važi*

$$1 - F * G(x) \sim (1 + c)(1 - F(x)).$$
- c) *Neka $F, G \in S$. Tada važi $F * G \in S$ ako i samo ako $pF + (1 - p)G \in S$ za neko $p \in (0, 1)$.*

Dokaz teoreme 3.4 se može naći u Embrecht, P. And Goldie, C.M. (1982) On convolution tails. *Stoch. Proc. Appl.* 13, 263-278.

3.3.2 Slučajne sume

Teorema 3.5 [1] (*Slučajne sume nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom subeksponecijalnom funkcijom raspodele*)

Neka je (p_n) verovatnosna mera na N_0 takva da važi $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1 + \varepsilon)^n < \infty$ za neko $\varepsilon > 0$ i

$p_k > 0$ za neko $k \geq 2$. Neka je $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{n}(x)$, $x > 0$. Tada važi:*

$$F \in S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - G(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} np_n \Leftrightarrow G \in S \text{ i } 1 - F(x) \neq o(1 - G(x)).$$

Neka su $(X_i)_{i \in N}$ nezavisne slučajne promenljive sa istom funkcijom raspodele F i neka je N slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz N_0 sa raspodelom (p_n) . Tada je G

funkcija raspodele slučajne sume $\sum_{i=1}^N X_i$, gde je $\sum_{i=1}^0 X_i = 0$, a rezultat prethodne teoreme postaje:

$$P\left\{\sum_{i=1}^N X_i > x\right\} \sim E(N)P\{X_1 > x\}, \quad x \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

Ako je (p_n) Puasonova ili geometrijska funkcija raspodele tada je uslov $1 - F(x) \neq o(1 - G(x))$ nepotreban.

Postavlja se pitanje šta se dešava kada se n menja zajedno sa x . Za $1 - F(x) \in PP_{-\alpha}$ važi:

$$P\{S_n - E(S_n) > x\} \sim P\{\max(X_1, \dots, X_n) > x\} \sim n(1 - F(x)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Ovaj rezultat važi uniformno po $x > \gamma$ za svako fiksirano $\gamma > 0$. Uniformno se ovde odnosi na konvergenciju:

$$\sup_{x \in (\gamma, \infty)} \left| \frac{P\{S_n - E(S_n) > x\}}{n(1 - F(x))} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

3.3.3 Ponderisane sume subeksponecijalnih slučajnih veličina

Neka je F funkcija raspodele na R i neka je $F(x) < 1$ za sve $x \in R$.

Definicija 3.3 Za F se kaže da je subeksponecijalna raspodela na R ako postoji subeksponecijalna raspodela G na $(0, \infty)$ takva da $1 - F(x) \sim 1 - G(x)$ kad $x \rightarrow \infty$.

Uslov balansa repa funkcije raspodele je:

$$1 - F(x) \sim pP\{|Z| > x\}, \quad F(-x) \sim qP\{|Z| > x\} \quad (3.13)$$

za $p \in (0, 1)$ i $q = 1 - p$ [1].

Tvrđenje 3.1 [1] *Pretpostavlja se da je Z slučajna promenljiva sa subeksponecijalnom funkcijom raspodele F , definisanom na R .*

a) Neka je $1 - F(x) \sim px^{-\alpha}l(x)$ i $F(-x) \sim qx^{-\alpha}l(x)$. Tada je

$$P\{\psi_j Z > x\} = \begin{cases} P\left\{Z > \frac{x}{\psi_j}\right\} \sim \psi_j^\alpha px^{-\alpha}l(x), & \psi_j > 0 \\ P\left\{Z < -\frac{x}{|\psi_j|}\right\} \sim |\psi_j|^\alpha qx^{-\alpha}l(x), & \psi_j < 0 \end{cases}$$

$$= |\psi_j|^\alpha x^{-\alpha}l(x) (pI_{\{\psi_j > 0\}} + qI_{\{\psi_j < 0\}}).$$

b) Neka je $1 - F(x) \in PP_\infty$ i pretpostavimo da važi (3.13) tada je

$$\frac{P\{\psi_j Z > x\}}{1 - F(x)} = \begin{cases} 1, & \psi_j = 1 \\ \frac{q}{p}, & \psi_j = -1 \\ 0, & |\psi_j| < 1 \end{cases}$$

Iz teoreme 3.4 b) sledi da za slučajne promenljive $(X_i)_{|i| \leq m}$ takve da važi

$P\{X_i > x\} \sim a_i(1 - F(x))$, gde $a_i \in [0, \infty)$, važi:

$$P\left\{\sum_{|i| \leq m} X_i > x\right\} \sim (1 - F(x)) \sum_{|i| \leq m} a_i.$$

Ovaj rezultat može biti primenjen na parcijalnu sumu:

$$X^{(m)} = \sum_{|j| \leq m} \psi_j Z_j,$$

gde su Z_j nezavisne slučajne promenljive sa istom subeksponecijalnom funkcijom raspodele F

na R i koje zadovoljavaju uslov balansa repa funkcije raspodele. Ako niz (ψ_j) teži dovoljno brzo

ka nuli, tada se prethodni rezultat za parcijalnu sumu $X^{(m)}$ proširuje na beskonačnu sumu

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_j.$$

Teorema 3.6 [1] Neka su $(Z_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ nezavisne slučajne promenljive sa istom

subeksponecijalnom funkcijom raspodele F na R , i neka $p \in (0, 1]$ i $q = 1 - p$ i neka je

X suma slučajnih promenljivih data sa: $X = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_j$

a) Ako $1 - F \in PP_{-\alpha}$ za $\alpha \in (0, \infty)$ i važi $P\{|Z_1| > x\} = x^{-\alpha} l(x)$ i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j|^\delta < \infty$ za neko

$$\delta \in (0, \min(\alpha, 1)), \text{ tada važi: } P\{X > x\} \sim x^{-\alpha} l(x) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j|^\alpha (pI_{\{\psi_j > 0\}} + qI_{\{\psi_j < 0\}}).$$

b) Ako $F \in MDA(\Lambda) \cap S$ i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j|^\delta < \infty$ za neko $\delta \in (0, 1)$ i bez gubljenja na opštosti

$\max_j |\psi_j| = 1$ (u drugom slučaju bi se normiralo X), tada važi:

$P\{X > x\} \sim (pk^+ + qk^-) P\{|Z_1| > x\}$, gde je k^+ ukupan broj puta koliko ψ_j uzme vrednost 1 (može biti samo konačno mnogo), i k^- je ukupan broj puta koliko ψ_j uzme vrednost -1.

3.4 Primeri koji uključuju klasu S

Neka je $(X_i)_{i \geq 1}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom defektnom funkcijom raspodele F na $(0, \infty)$ i neka je $F(\infty) = \omega < 1$. Neka je $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ i neka je $N(t)$ ceo broj k takav da važi $S_k \leq t < S_{k+1}$. Funkcija obnavljanja povezana sa F je

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t).$$

Postoji najmanji indeks J takav da je $X_J = \infty$, i $(X_i)_{i=1}^J$ se naziva kratkotrajan proces obnavljanja. Za funkciju obnavljanja $H(t)$ važi $H(\infty) = \omega(1 - \omega)^{-1}$ [5].

Teugles (1975) je dokazao da važi:

$$F^{-1}(\infty)F(x) \in S \Leftrightarrow H^{-1}(\infty)H(x) \in S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - H^{-1}(\infty)H(x)}{1 - F^{-1}(\infty)F(x)} = (1 - \omega)^{-1} \text{ [9].}$$

Goldie i Resnick [11] su proučavali povezanost između subeksponecijalnih raspodela i raspodela ekstremnih vrednosti. Ustvari, proučavali su širu klasu od S u kojoj važi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{2*}(x)}{1 - F(x)} = d < \infty$$

Subeksponecijalne raspodele i primene u aktuarskoj matematici

i koja ne uključuje samo funkcije koje uzimaju vrednosti iz $(0, \infty)$, ali ovde se posmatraju rezultati o klasi S . Pretpostavimo da postoje nizovi $a_n > 0$ i $b_n \in R$ takvi da važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\max_{i \leq n} X_i \leq a_n x + b_n\right\} = \exp\{-e^{-x}\} \equiv \Lambda(x).$$

Tada F pripada oblasti privlačenja raspodele ekstremnih vrednosti, $F \in MDA(\Lambda)$,. Reprezentacija F je

$$1 - F(x) \sim \exp\left\{-\int_0^x \frac{1}{f(u)} du\right\},$$

gde je $f \geq 0$ apsolutno neprekidna sa gustinom f' koja zadovoljava:

$$f' \rightarrow 0 \text{ kada } x \rightarrow \infty.$$

Ova reprezentacija pretpostavlja povezanost između $MDA(\Lambda)$ i S jer potreban uslov za $F \in S$ je:

$$1 - F(x) \sim \exp\left\{-\int_0^x \alpha(u) du\right\},$$

gde je $\alpha(u)$ ograničena nenegativna funkcija i $\alpha(u) \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow \infty$ [5].

Neka je $H(x) = -\ln[1 - F(x)]$. Ovde će biti predstavljeni neki rezultati za H implicirani time da $F \in S$ kao i uslovi koje bi trebalo da zadovoljava H da bi važio $F \in S$.

Neka je $g(x)$ funkcija takva da $g(x)$ i $x - g(x)$ divergira kada $x \rightarrow \infty$.

Tada važi: $F \in S$ je ekvivalentno sa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{g(x)} \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} F(dy) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[1 - F(x - g(x))][1 - F(g(x))]}{1 - F(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{x - g(x)} \frac{F(x) - F(x - y)}{1 - F(x)} F(dy) = 0 \text{ [5].}$$

Kada prevedemo ove uslove za F na uslove za H , i neka važe uslovi:

$$H(x) - H(x - y) \rightarrow 0 \text{ kada } x \rightarrow \infty \text{ za svako fiksno } y \text{ i}$$

$$H(x) - H(x - g(x)) - H(g(x)) \rightarrow -\infty \text{ kada } x \rightarrow \infty \text{ [5].}$$

dobijamo da $F \in S$ ako i samo ako važi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{x/2} \exp\{H(x) - H(x - y) - H(y)\} H(dy) = 1 \text{ i}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(H(x) - 2H\left(\frac{x}{2}\right) \right) = -\infty$$

Dobro poznati primeri funkcije H imaju konkavni oblik:

- $H(x) \sim x(\ln x)^{-\beta}$, $\beta > 0$ (Pitman (1980)) [12]
- $H(x) \sim cx^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ (Teugels (1975)) [9]
- $H(x) \sim \alpha \ln x$, $\alpha > 0$ (Chistyakov (1964)) [4]

Nije neophodno da $H(x)$ bude konkavna funkcija niti da $\frac{H(x)}{x}$ opada [5].

Naredna lema daje novi dovoljan i neophodan uslov za $F \in S$. Ako $F \in S$, može se konstruisati neprekidna verzija F koja takođe pripada S . Ovo sledi iz rezultata Teugels-a (1975) da ako $F \in S$ i $1 - F(x) \sim 1 - G(x)$ tada $G \in S$ [9].

Neprekidna verzija funkcije F bi se mogla predstaviti tako da uzima iste cele brojeve kao F , a između je neprekidna.

Neka je $w_j = H^{-1}(j)$ tako da:

$$w_j = \min\{\alpha : H(\alpha) = j\}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Kako $\frac{H(x)}{x} \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow \infty$, sledi da $\frac{w_j}{j} \rightarrow \infty$ kada $j \rightarrow \infty$ za cele brojeve. Takođe

neka je $N_x = \left[H\left(\frac{x}{2}\right) \right]$.

Lema 3.2 [5] $F \in S$ ako i samo ako je $1 - F(x)$ ograničena i rastuća funkcija,

$H(x) - 2H\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow -\infty$ kada $x \rightarrow \infty$ i ako je suma

$$\sum_{j=0}^{N_x} \exp\{H(x) - H(x - w_j) - j\}$$

ograničena.

Dokaz Pokazaćemo da kada $H(x) - 2H\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow -\infty$ tada je suma

$\sum_{j=0}^{N_x} \exp\{H(x) - H(x - w_j) - j\}$ ograničena ako i samo ako je

$\int_0^{x/2} \exp\{H(x) - H(x - y) - H(y)\}H(dy)$ ograničeno. Dalje važi:

$$\begin{aligned} \int_0^{x/2} \exp\{H(x) - H(x - y) - H(y)\}H(dy) &= \int_0^{w_{N_x}} \exp\{H(x) - H(x - y) - H(y)\}H(dy) + \\ &+ \int_{w_{N_x}}^{x/2} \exp\{H(x) - H(x - y) - H(y)\}H(dy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{w_{N_x}}^{x/2} \exp\{H(x) - H(x - y) - H(y)\}H(dy) &\leq \exp\left\{H(x) - H\left(\frac{x}{2}\right) - N_x\right\} \leq \\ &\leq \exp\left\{H(x) - 2H\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Takođe važi:

$$\begin{aligned} \int_0^{w_{N_x}} \exp\{H(x) - H(x - y) - H(y)\}H(dy) &= \sum_{j=0}^{N_x-1} \int_{w_j}^{w_{j+1}} \exp\{H(x) - H(x - y) - H(y)\}H(dy) \\ &\leq \sum_{j=0}^{N_x-1} \exp\{H(x) - H(x - w_{j+1}) - H(w_j)\} \\ &= \sum_{j=0}^{N_x-1} \exp\{H(x) - H(x - w_{j+1}) - (j+1) + 1\} \\ &\leq e \sum_{j=0}^{N_x} \exp\{H(x) - H(x - w_{j+1}) - j\} \end{aligned}$$

$$\int_0^{w_{N_x}} \exp\{H(x) - H(x-y) - H(y)\} H(dy) \geq \sum_{j=0}^{N_x-1} \exp\{H(x) - H(x-w_j) - (j+1)\}$$

Dakle, ako $H(x) - 2H\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow -\infty$, $\int_0^{x/2} \exp\{H(x) - H(x-y) - H(y)\} H(dy)$ je ograničeno ako

i samo ako je ograničeno $\sum_{j=0}^{N_x} \exp\{H(x) - H(x-w_j) - j\}$. \square

Prednost uslova da je suma $\sum_{j=0}^{N_x} \exp\{H(x) - H(x-w_j) - j\}$ ograničena je ta što zavisi jedino od rasta H između $x-w_j$ i x a ne od rasta ove funkcije na fiksnim konačnim intervalima [5].

3.5 Ponderisane sume slučajnih promenljivih sa subeksponecijalnom raspodelom i njihov maksimum

Primena subeksponecijalnih raspodela se ogleda u modeliranju slučajnih veličina sa subeksponecijalnom raspodelom koje predstavljaju gubitke osiguravajuće kompanije. Verovatnoća da se dogode ovakvi gubici je mala, ali je iznos gubitka koji pri tome nastane veliki i može značajno ugroziti poslovanje osiguravajuće kompanije.

Neka je $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom funkcijom raspodelom F i neka je $\{\omega_k, k = 1, 2, \dots\}$ niz pozitivnih brojeva takav da je

$$S_\infty(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k X_k$$

dobro definisano. Ovde će se proučavati ponašanje repa sume $S_\infty(\omega)$ i maksimuma

$$M_{(\infty)}(\omega) = \sup_{m \geq 1} \sum_{k=1}^m \omega_k X_k.$$

$S_\infty(\omega)$ se može interpretirati kao diskontovane vrednosti gubitaka kompanije, ako je X_k gubitak u godini k , a koeficijent ω_k diskontni faktor ili faktor inflacije za godinu k . Na ovaj način maksimum $M_{(\infty)}(\omega)$ se može interpretirati kao maksimalna diskontovana vrednost budućeg gubitka, a verovatnoća $P\{M_{(\infty)}(\omega) > x\}$ kao verovatnoća razaranja sa početnim kapitalom $x \geq 0$. Ovde će se proučavati ponašanje repova $S_\infty(\omega)$ i $M_{(\infty)}(\omega)$, pretpostavljajući da je funkcija raspodele F subeksponecijalna, sa nekim restrikcijama, i trebalo bi pronaći takav uslov za niz $\{\omega_k, k = 1, 2, \dots\}$ da asimptotski rezultat

$$P\{M_{(\infty)}(\omega) > x\} \sim P\{S_\infty(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - F\left(\frac{x}{\omega_k}\right) \right)$$

važi kada $x \rightarrow \infty$. Uslov za koji važi ovaj rezultat je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^\delta < \infty, \text{ gde je } 0 < \delta < 1 \text{ [7].}$$

Specijalno, ovaj uslov je zadovoljen kada je $\omega_k = (1+r)^{-k}$ za $k = 1, 2, \dots$ i neko $r > 0$ [7].

Neka je F funkcija raspodele definisana na $(-\infty, \infty)$ i neka je za svako $y > 0$

$$1 - F_*(y) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(xy)}{1 - F(x)}, \quad 1 - F^*(y) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(xy)}{1 - F(x)}.$$

I neka je:

$$J_F^+ = \inf \left\{ -\frac{\log(1 - F_*(y))}{\log y}, y > 1 \right\}, \quad J_F^- = \sup \left\{ -\frac{\log(1 - F^*(y))}{\log y}, y > 1 \right\}$$

gornji i donji Matuševska (Matuszewska) indeksi funkcije raspodele F . Ako $F \in PP_{-\alpha}$, za neko α , $0 \leq \alpha \leq \infty$, tada je $J_F^\pm = \alpha$ [7].

Definicija 3.3 Neka je F funkcija raspodele definisana na $(-\infty, \infty)$. F pripada klasi A ako je F subekspencijalna i za njen donji Matuševska indeks važi $0 < J_F^- \leq \infty$.

Uslov $0 < J_F^- \leq \infty$ je zadovoljen ako i samo ako važi

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(xy)}{1 - F(x)} < 1, \text{ za neko } y > 1 \text{ [7].}$$

Razlog za definisanje klase A raspodela je taj da bi isključili neke raspodele sa veoma teškim repovima iz klase S .

Neka je za $n = 1, 2, \dots$

$$S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega_k X_k, \quad M_{(n)}(\omega) = \max_{1 \leq m \leq n} S_m(\omega), \quad M_n(\omega) = \max_{1 \leq k \leq n} \omega_k X_k$$

i neka je za realan broj x , $x^+ = \max\{x, 0\}$ i $x^- = -\min\{x, 0\}$ tada za svako $n = 1, 2, \dots$ pišemo

$$S_n^+(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega_k X_k^+.$$

Teorema 3.7 [7] *Neka $F \in A$ i $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^\delta < \infty$ za neko δ , $0 < \delta < \frac{J_F^-}{1+J_F^-}$,* (3.14)

gde je $\frac{J_F^-}{1+J_F^-} = 1$ za $J_F^- = \infty$. Tada uniformno za $n = 1, 2, \dots$ važi:

$$P\{M_{(n)}(\omega) > x\} \sim P\{S_n^+(\omega) > x\} \sim P\{M_n(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}. \quad (3.15)$$

$$\text{Ako važi } S_\infty^-(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega_k X_k^- < \infty, \quad (3.16)$$

gde je nejednakost skoro sigurna tada važi:

$$P\{M_{(n)}(\omega) > x\} \sim P\{S_n(\omega) > x\} \sim P\{M_n(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}. \quad (3.17)$$

Dokaz

Pomoćne leme:

Lema 3.3: [7] *Ako važi $F_1 \in S$ i $1 - F_2(x) \leq c(1 - F_1(x))$, za neko $c \geq 0$ tada važi:*
 $(1 - F_1) * (1 - F_2)(x) \leq (1 + c)(1 - F_1)(x)$

Lema 3.4: [7] *Neka je $\{X_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ n nezavisnih, pozitivnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom $F \in S$, i neka je $\{\omega_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ n pozitivnih brojeva. Tada je ponderisana suma $S_n(\omega)$ subeksponecijalna i zadovoljava:*

$$P\{S_n(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n \left(1 - F\left(\frac{x}{\omega_k}\right)\right). \quad (3.18)$$

Lema 3.5: [7] *Neka važe uslovi teoreme 3.7. Tada je:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P\left\{\sum_{k=n}^{\infty} \omega_k X_k^+ > x\right\}}{P\{\omega_1 X_1 > x\}} = 0 \text{ i} \quad (3.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P\left\{\sum_{k=n}^{\infty} \omega_k X_k > x\right\}}{P\{\omega_1 X_1 > x\}} = 0. \quad (3.20)$$

Dokaz je podeljen na četiri dela:

1. $P\{M_{(n)}(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}$ važi uniformno po n .

Na osnovu leme 3.5 sledi da za bilo koje ε , $0 < \varepsilon < 1$ postoji $x_0 \equiv x_0(\varepsilon)$ i neko $m \equiv m(\varepsilon) = 1, 2, \dots$ takvo da

$$P\left\{\sum_{k=n}^{\infty} \omega_k X_k^+ > x\right\} \leq \varepsilon P\{\omega_1 X_1 > x\} \text{ i} \quad (3.21)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} P\{\omega_k X_k > x\} \leq \varepsilon P\{\omega_1 X_1 > x\} \quad (3.22)$$

važi za svako $x \geq x_0$ i sve $n > m$. Za fiksirano m i svako $1 \leq n \leq m$, uzastopna primena lema 2.1 i 3.4 daje

$$P\{M_{(n)}(\omega) > x\} \sim P\{S_n(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \quad (3.23)$$

Dakle, postoji neko $A \equiv A(\varepsilon) > 0$ takvo da, za sve $1 \leq n \leq m$ i $x \geq A$,

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \leq P\{M_{(n)}(\omega) > x\} \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \quad (3.24)$$

Na osnovu leme 3.4 sledi da $S_m(\omega)$ i $M_{(m)}(\omega)$ imaju subeksponecijalnu raspodelu.

Sada razmatramo slučaj kada je $n > m$. Na osnovu (3.24) za $x > A$ sledi

$$\begin{aligned} P\{M_{(n)}(\omega) > x\} &\geq P\{M_{(m)}(\omega) > x\} \\ &\geq (1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^m P\{\omega_k X_k > x\} \\ &= (1 - \varepsilon) \left(\sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} - \sum_{k=m+1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \right) \end{aligned}$$

Takođe, na osnovu (3.22) za svako $n > m$ i $x \geq x_0$ važi

$$\sum_{k=m+1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} P\{\omega_k X_k > x\} \leq \varepsilon P\{\omega_1 X_1 > x\}$$

Pa sledi za svako $n > m$ i $x \geq x_0$,

$$\begin{aligned} P\{M_{(n)}(\omega) > x\} &\geq (1 - \varepsilon) \left(\sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} - \varepsilon P\{\omega_1 X_1 > x\} \right) \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Slično se izvodi i gornja granica za $P\{M_{(n)}(\omega) > x\}$ za svako $n > m$.

$$\begin{aligned} P\{M_{(n)}(\omega) > x\} &\leq P\left\{M_{(m)}(\omega) + \sum_{k=m+1}^n \omega_k X_k^+ > x\right\} \\ &\leq P\left\{M_{(m)}(\omega) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \omega_k X_k^+ > x\right\}. \end{aligned}$$

Kako važi po (3.21).

$$P\left\{\sum_{k=m+1}^{\infty} \omega_k X_k^+ > x\right\} \leq \varepsilon P\{M_{(m)}(\omega) > x\}$$

I primenjujući lemu 3.3 i (3.24) sledi da uniformno za $n > m$ važi

$$\begin{aligned} P\{M_{(n)}(\omega) > x\} &< (1 + \varepsilon) P\left\{\max_{1 \leq n \leq m} \sum_{k=1}^n \omega_k X_k > x\right\} \\ &\leq (1 + \varepsilon)^2 \sum_{k=1}^m P\{\omega_k X_k > x\} \\ &\leq (1 + \varepsilon)^2 \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Kombinujući (3.25) i (3.26) dobija se uniformno po $n > m$

$$(1 - \varepsilon)^2 \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} < P\{M_{(n)}(\omega) > x\} < (1 + \varepsilon)^2 \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}. \quad (3.27)$$

Pa na osnovu (3.24) sledi da ova nejednakost važi uniformno za $n = 1, 2, \dots$. Pa na osnovu proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ sledi

$$P\{M_{(n)}(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}. \quad (3.28)$$

2. Primenjujući prvi korak ovog dokaza i (3.28) na niz $\{X_k^+, k = 1, 2, \dots\}$ sledi da

$$P\{S_n^+(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}$$

važi uniformno po n .

3. $P\{M_n(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}$ važi uniformno po n .

Za svako $n = 1, 2, \dots$ i svako $x > 0$ važi $P\{M_n(\omega) > x\} \leq \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}$.

Ostaje da se dokaže nejednakost u drugom smeru. Primenjuje se nejednakost koja važi za n događaja E_1, E_2, \dots, E_n ,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(E_k) - \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} P(E_k E_l).$$

Za sve $n = 1, 2, \dots$ i svako $x > 0$ važi:

$$\begin{aligned} P\{M_n(\omega) > x\} &\geq \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} - \sum_{1 \leq k \neq l \leq n} P\{\omega_k X_k > x, \omega_l X_l > x\} \\ &\geq \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} - \left(\sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \right)^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \left(1 - \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \right) \end{aligned}$$

Pa na osnovu (3.20) sledi da

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega_k X_k > x\} \rightarrow 0 \text{ kada } x \rightarrow \infty.$$

Pa uniformno po $n = 1, 2, \dots$ važi $P\{M_n(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}$.

4. Na osnovu (3.16) $P\{S_n(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}$ važi uniformno po n . Primenjujući rezultat iz drugog dela ovog dokaza sledi da

$$P\{S_n(\omega) > x\} \leq P\{S_n^+(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}$$

važi uniformno po $n = 1, 2, \dots$ pa ostaje da se dokaže nejednakost u drugom smeru

$$P\{S_n(\omega) > x\} \sim \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\}. \quad (3.29)$$

Na osnovu rezultata iz prvog dela ovog dokaza i (3.23) sledi da su obe strane ove nejednakosti asimptotski jednake jedna drugoj za $1 \leq n \leq m$. Za $n > m$ važi:

$$P\{S_n(\omega) > x\} \geq P\left\{S_m(\omega) - \sum_{k=m+1}^n \omega_k X_k^- > x\right\} \geq P\left\{S_m(\omega) - \sum_{k=m+1}^{\infty} \omega_k X_k^- > x\right\}$$

Pod uslovima (3.16) proces $U_m^-(\omega) := \sum_{k=m+1}^{\infty} \omega_k X_k^-$ je dobro definisana slučajna promenljiva, slučajne promenljive $S_m(\omega)$ i $U_m^-(\omega)$ su nezavisne i parcijalna suma $S_m(\omega)$ ima dug rep. Pa primenjujući teoremu o dominantnoj konvergenciji dobija se $P\left\{S_m(\omega) - \sum_{k=m+1}^n \omega_k X_k^- > x\right\} \sim P\{S_m(\omega) > x\}$.

Za svako $\varepsilon > 0$ i $n > m$, primenjujući (3.23) dobija se

$$\begin{aligned} P\{S_n(\omega) > x\} &> \sum_{k=1}^m P\{\omega_k X_k > x\} \\ &\geq \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} - \sum_{k=m+1}^{\infty} P\{\omega_k X_k > x\} \\ &> (1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^n P\{\omega_k X_k > x\} \end{aligned}$$

Pa na osnovu proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ zaključuje se da (3.29) važi uniformno za $n = 1, 2, \dots$ \square

Literatura:

- [1] Goldie, C. M. and Klüppelberg, C. (1998). Subexponential Distributions. In a Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques for Analysing Heavy Tailed Distributions, eds M. T. R. Adler and R. Feldman, Birkhäuser, Boston, MA, pp. 435-459
- [2] Mikosch, T. (2003). Non-Life Insurance Mathematics. Copenhagen
- [3] Mladenović, P. (2008). Elementi aktuarske matematike, predavanja. Matematički fakultet, Beograd
- [4] Chistyakov, V. P. (1964). A theorem on sums of independent random positive variables and its applications to branching processes. Moscow
- [5] Murphree, E. S. (1990). Some results on subexponential distributions. Publications De L'Institut mathématique, Nouvelle série tome 48 (62), 181-190
- [6] Cline, D. B. H. (1987). Convolutions of distributions with exponential tails. J. Austral. Math. Soc. (Series A) 43, 347-365
- [7] Chen, Y., Ng, K. W. and Tang, Q. (2005). Weighted sums of subexponential random variables and their maxima. Adv. Appl. Prob. 37, 510-522
- [8] Cline, D.B.H. and Samorodnitsky, G. (1994). Subexponentiality of the product of independent random variables. Stochastic Processes and their Applications 49, 75-98 Nort.Holland
- [9] Teugels, J. L. (1975). The class of subexponential distribution. The Annals of Probability Vol. 3, No. 6, 1000-1011
- [10] Leslie, J. R. (1989). On the non-closure under convolution of the subexponential family. J. Appl. Probab. 26, 58-66
- [11] Goldie, C. and Resnick, S. (1988). Distribution that are both subexponential and in the domain of attraction of an extreme-value distribution. Adv. Appl. Probab. 20, 706-718
- [12] Pitman E. J. G. (1980). Subexponential distribution functions. J. Austral. Math. Soc. A 29, 337-347
- [13] Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J. L. (1987). Regular variation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 27. Cambridge University Press, Cambridge
- [14] Božić, M. (2010). Pregled istorije i filozofije matematike. Zavod za udžbenike, Beograd