ГЕОМЕТРИЈА

ЗА

ВИШЕ РАЗРЕДЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА.

ЧЕТВРТИ ДЕО

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА.

НАПИСАО

СТЕВАН ДАВИДОВИЋ

ПРОФЕСОР ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ

РАЈКОВИЋА И ЂУКОВИЋА

БЕОГРАД—ТЕРАЗИЈЕ

БЕОГРАД, 1921.
НОВА ШТАМПАРИЈА „ДАВИДОВИЋ“, ДЕЧАНСКА 14

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

ПРВИ ОДЕЉАК

ТАЧКА

Задатак Аналитичне Геометрије. — Одређивање тачке у равни. — Површина троугла. — Задаци.

I. ЗАДАТАК АНАЛИТИЧНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ.

1. У Планиметрији, Стереометрији и Тригонометрији проучавају се *квантитативни односи* на геометриским сликама. Тако је Питагорином теоремом исказан однос између страна правоуглог троугла, Хероновим обрасцем изражен је однос између страна и површине косоуглог троугла, Синусном теоремом изражен је однос између страна и углова у троуглу и т. д. Ти су односи представљени у облику образаца, из којих се могу израчунати непознате дужи, површина и углови неке слике, кад су познати елементи који одређују задатак.

Аналитична Геометрија показује, како се задаци о *облику и положају* геометриских слика решавају рачуном.

II. ОДРЕЂИВАЊЕ ТАЧКЕ.

2. Дужи као релативне количине. У Планиметрији (чл. 22) показато је, да дуж АВ није исто што и ВА, ако се води рачуна о правцу. Правац или смисао једне дужи казује се знаком. Уобичајено је, да се на хоризонталној правој правац с лева на десно бележи знаком $+$, а правац с десна на лево знаком $-$. На вертикалној правој сматра се правац на више као позитиван, а на ниже као негативан.

3. Одређивање тачке на правој линији. Положај тачке М на правој XX_1 одређен је, чим се зна не само апсолутна вредност њене раздаљине од једне сталне тачке О на тој правој, него и знак те раздаљине. Та раздаљина ОМ, снабдевена знаком $+$ или $-$, зове се *апсциса* тачке M. Права XX_1 зове се *апсцисна оса*, тачка O зове се *почетак*. Апсциса OM бележи се обично словом x.

Свакој тачки на апсцисној оси одговара један потпуно одређен број између $-\infty$ и $+\infty$, и обрнуто: сваком броју између $-\infty$ и $+\infty$ одговара једна одређена тачка на апсцисној оси.

Дакле, положај тачке одређен је бројем.

Пример. На датој апсцисној оси наћи тачке, чије су апсцисе $+3,\ -2,\ +\frac{3}{5},\ -\frac{4}{3},\ \sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{5}.$

4. Премештање почетка по апсцисној оси.

Нека је на апсцисној оси дата тачка M, чија је апсциса $x=+5$. Ако се почетак O премести у тачку O′, десно од O, за дужину $OO'=+2$, онда ће нова апсциса тачке M бити

$$x'=5-2=+3.$$

Ако стару апсцису тачке M обележимо са x, нову са x', а раздаљину $OO'=m$, онда је у опште:

$$x'=x-m.$$

Да смо почетак O преместили у лево, тако да је тачка O′ дошла у тачку чија је апсциса $=-2$, онда би нова апсциса тачке M била 7, дакле опет $x'=x-(-2)=5-(-2)=7$.

Задатак.

Тачке M_1, M_2, M_3 имају апсцисе $+3,\ -4,\ +\frac{3}{5}$; колике ће бити апсцисе тих тачака, кад се почетак премести у тачку $+5$, или -2?

5. На апсцисној оси дате су две тачке: $M_1\,(x_1)$ и $M_2\,(x_2)$; одредити апсолутну вредност и знак раздаљине M_1M_2.

За сваки положај тачака M_1 и M_2 мора бити

$$M_1M_2=M_1O+OM_2=OM_2-OM_1=x_2-x_1.$$

Задатак. Одреди апсолутну вредност и знак раздаљине M_1M_2, кад те тачке имају апсцисе:

a) $x_1=+5,\ x_2=+2$; *b*) $x_1=-5,\ x_2=-2$;
c) $x_1=-5,\ x_2=+2$; *d*) $x_1=+5,\ x_2=-2$.

6. Одредити апсцису x оне тачке P, која дели дуж M_1M_2 по размери m : n.

Нека је $M_1P:PM_2=m:n$.

Како је $M_1P=x-x_1$, а $PM_2=x_2-x$, то је

$$(x-x_1):(x_2-x)=m:n$$

одатле . . . . $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}.$

За тачку у средини биће $m=n$, дакле $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Напомена. Ради лакшег памћења предњег обрасца ваља имати на уму ово: кад се на дужи M_1P и PM_2 напишу размерни бројеви m и n, онда је у обрасцу број m помножен апсцисом крајње тачке оне дужи, на којој је n, и обрнуто.

Задатак. Дате су тачке M_1 (2), M_2 (5); одреди апсцису оне тачке, која дели дуж M_1M_2 по размери:

a) 2 (т. ј. 2 : 1), *b*) — 3, *c*) 3 : 2, *d*) 2 : 5.

7. Одређивање тачке у равни.

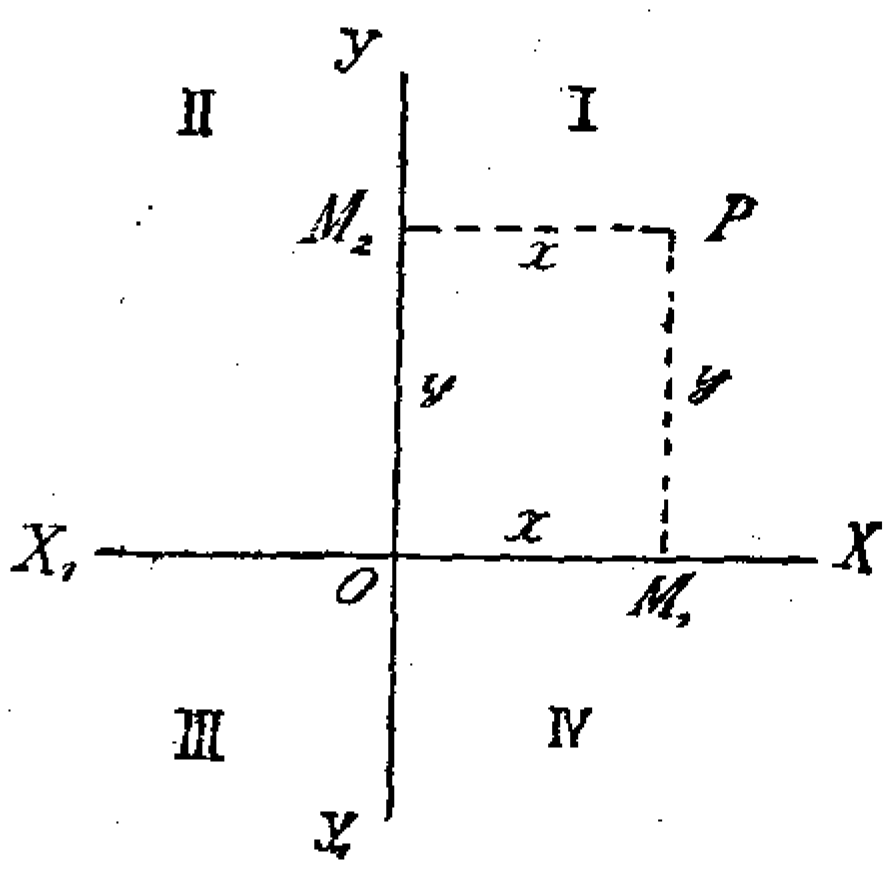
Као што је положај тачке M_1 (Сл. 1.) на апсцисној оси XX_1 одређен њеном апсцисом $OM_1 = x$, исто је тако и положај тачке M_2 на ординатној оси YY_1 одређен њеном *ординатом* $OM_2 = y$.

Кад се повуче $M_1P \parallel YY_1$ и $M_2P \parallel XX_1$, добива се тачка P у равни XOY.

Дуж $OM_1 = PM_2 = x$ зове се *апсциса* тачке P.

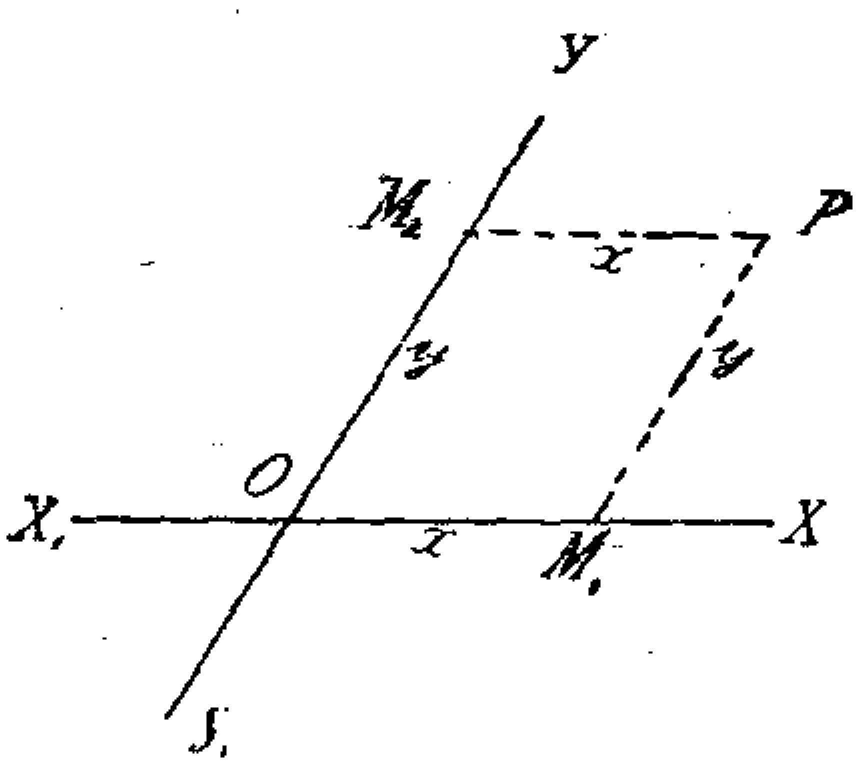
Дуж $OM_2 = PM_1 = y$ зове се *ордината* тачке P.

Апсциса и ордината зову се *координате* тачке P.



Сл. 1.

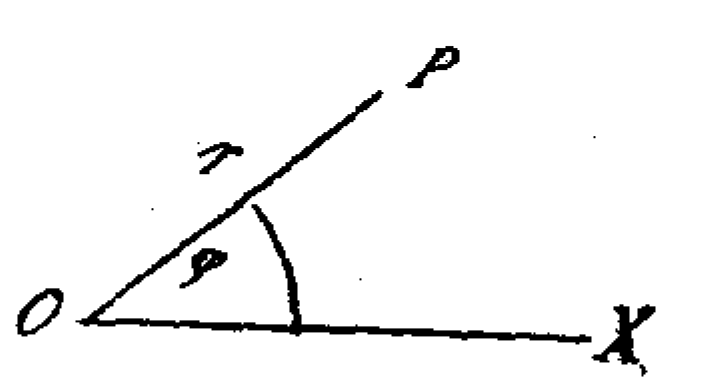
Апсцисна и ординатна оса чине *координатни систем;* оне деле раван на 4 поља, која се зову *квадранти,* а нумерисани су као што се види на сл. 1. У првом квадранту координате су позитивне; у трећем квадранту координате су негативне; у другом квадранту апсцисе су негативне, а ординате су позитивне; у четвртом је обратно.



Сл. 2.

По неки пут служимо се *косоуглом координатном системом* (Сл. 2.). И у тој системи одређен је положај тачке P њеном апсцисом OM_1 и ординатом OM_2, јер се тачка P налази као четврто теме паралелограма OM_1PM_2.

Има случајева, када је практичнија употреба *поларне координатне системе.* У тој системи одређује се положај тачке P њеном раздаљином OP од једне сталне тачке O, која се зове *пол,* и углом φ између OP и поларне осе OX.



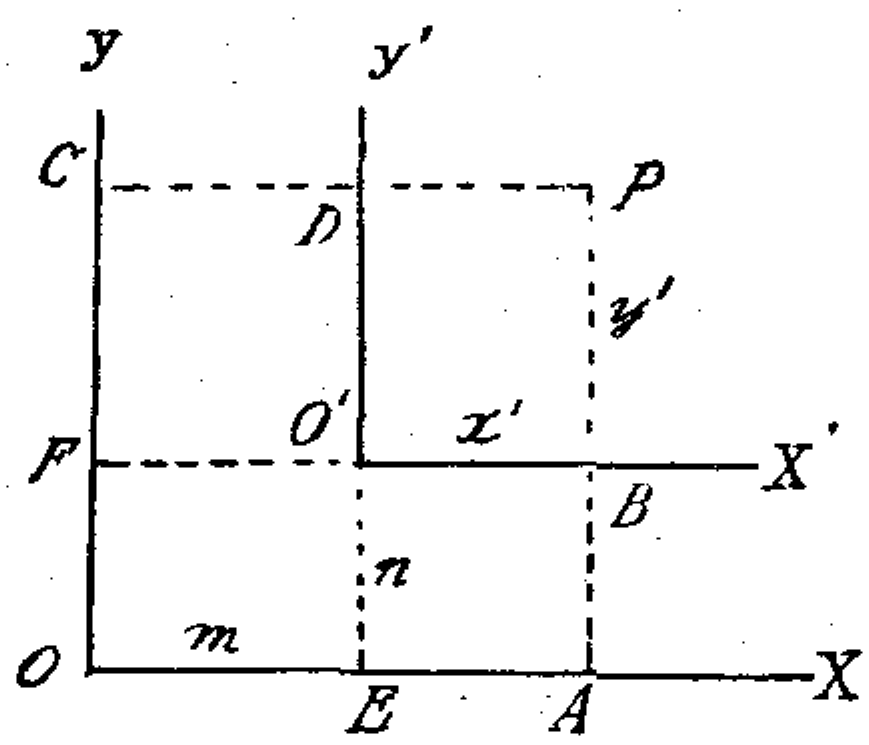
Сл. 3.

Раздаљина OP зове се *потег*, а угао φ зове се *аномалија*. Потег r и угао φ зову се *поларне координате тачке P*. Потег r узима се увек у позитивном смислу, а угао φ рачуна се од 0^0 до 360^0.

8. Трансформација координата.

Често је потребно, да се координате неке тачке у једном одређеном систему изразе координатама те тачке у другом систему чији је положај према првоме познат. Тај прелаз из једног система у други зове се *трансформација* координата.

a) *Трансформација координата једне правоугле системе у другу правоуглу са паралелним осама.*



Сл. 4.

Тачка P (сл.4) има у систему XOY ове координате:

апсциса OA, ордината AP;

а у системи X'OY' ове координате:

апсциса O'B, ордината O'D.

Ако су координате новога почетка (O'):

апсциса $OE = m$, ордината $OF = n$, онда је

$$OA = OE + EA = m + x', \text{ или}$$
$$x = x' + m,$$
$$AP = O'E + PB = n + y' \text{ или } y = y' + n.$$

Отуд излази . . . . $x' = x - m$

$y' = y - n.$

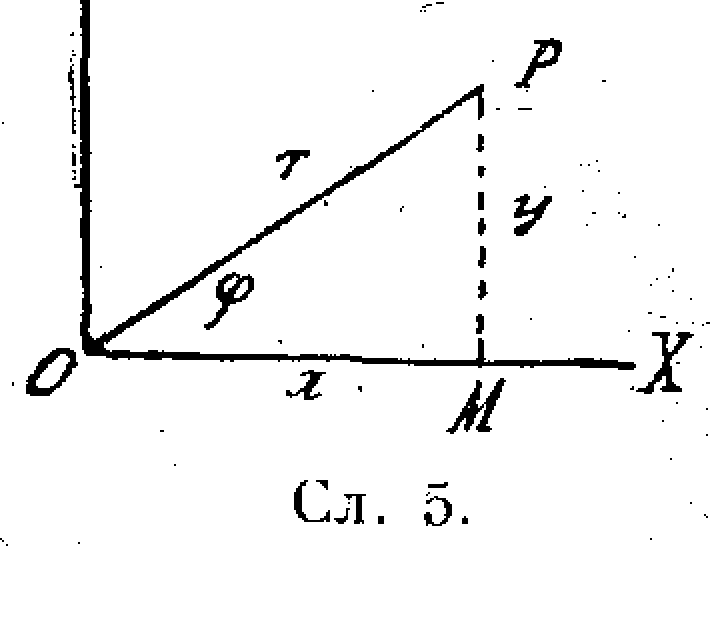
b) *Трансформација поларних координата у правоугле и обрнуто.*

Ако су x и y правоугле, а r и φ поларне координате тачке P, онда излази из правоуглог троугла MOP:

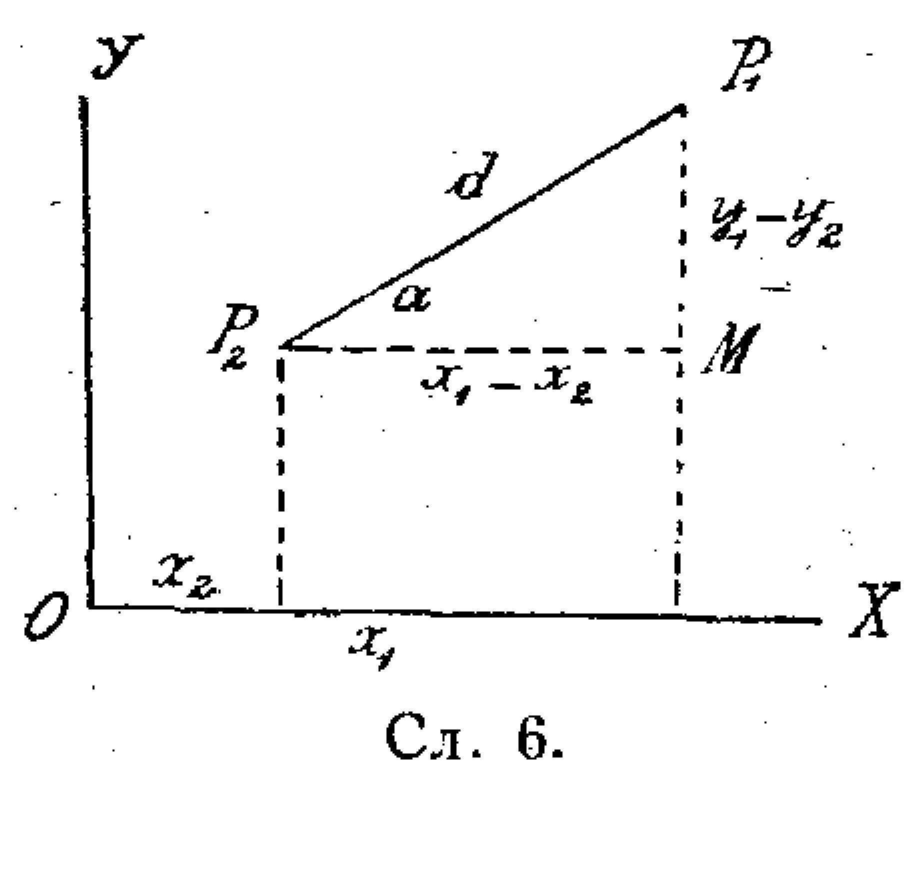
$$x = r \cos\varphi, \qquad y = r \sin\varphi.$$

Из тих једначина налази се (или из слике)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad tg\,\varphi = \frac{y}{x}.$$



Сл. 5.



Сл. 6.

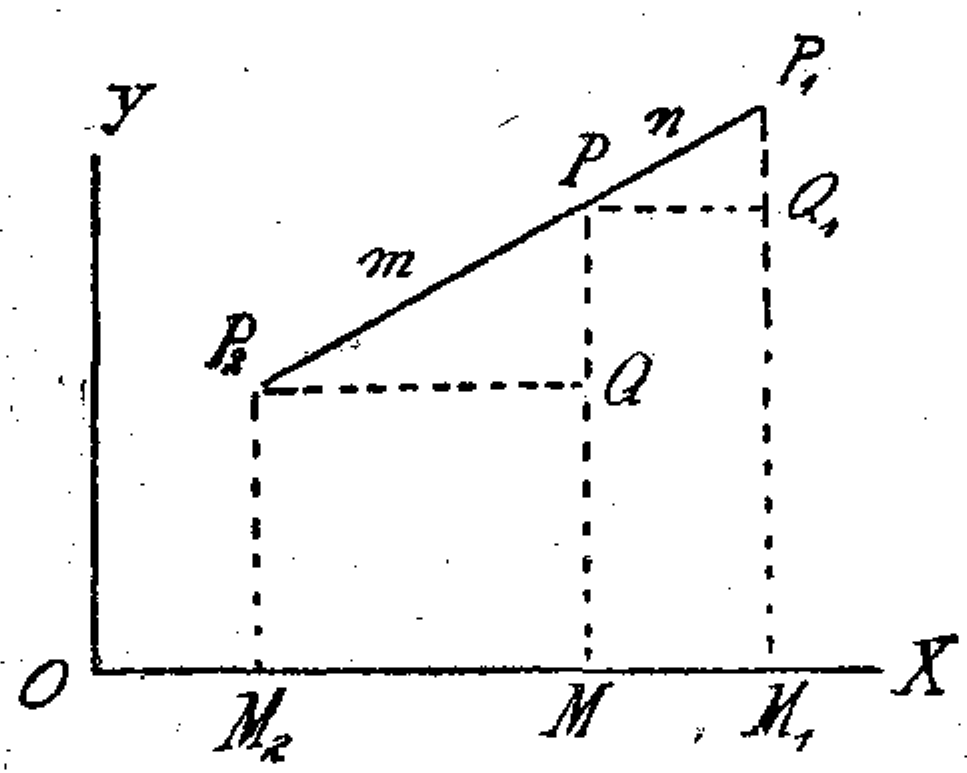
9. Одредити раздаљину d двеју тачака и угао између d и апсцисне осе.

Из правоуглог троугла P_1MP_2 (сл. 6) види се непосредно, да је

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

$$tg\,\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

10. Дату дуж M_1M_2 поделити по датој размери.


Сл. 7.

Нека су дате тачке P_1 (x_1, y_1) и P_2 (x_2, y_2). Тачка P (x, y) нека дели дуж P_1P_2 по размери $m:n$.

Да бисмо израчунали координате тачке P, повуцимо $PQ_1 \| P_2Q \| OX$ и $P_1Q_1 \| PQ \| OY$, па ћемо из сличних троуглова PP_2Q и P_1PQ_1 добити:

$$m:n = PQ : P_1Q_1 = (y - y_2) : (y_1 - y)$$

отуд . . . . . $y = \dfrac{my_1 + ny_2}{m+n}.$

Исто тако налази се из пропорције

$$m : n = P_2Q : PQ_1 = (x - x_2) : (x_1 - x),$$

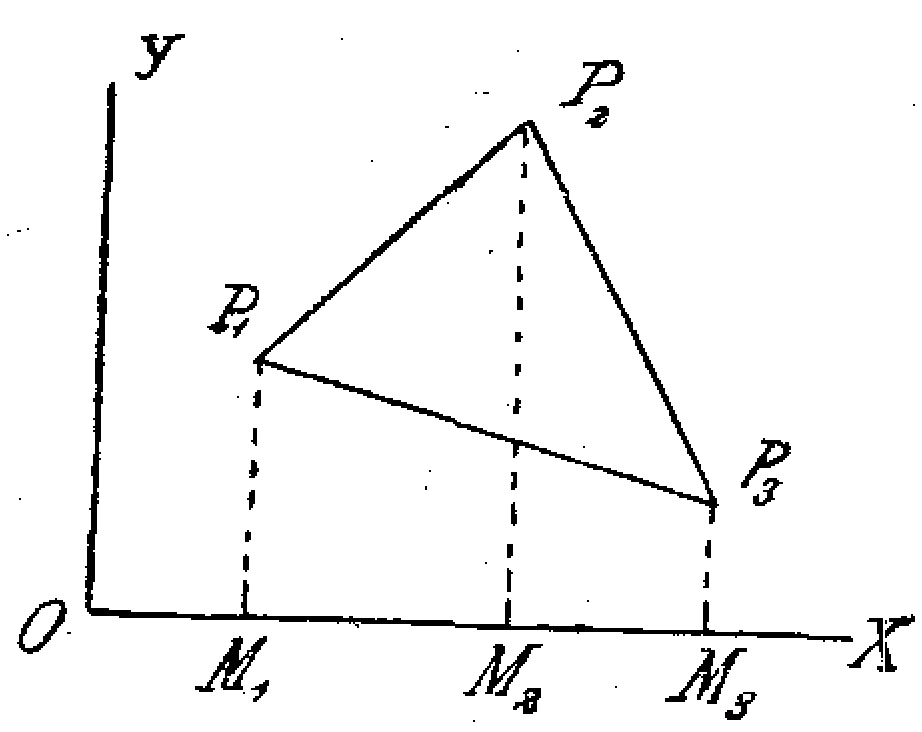
да је . . . . . $x = \dfrac{mx_1 + nx_2}{m+n}.$

За тачку у средини биће $m : n = 1$, или $m = n$, према томе

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

III. ПОВРШИНА ТРОУГЛА.

11. Одредити површину троугла, кад су дате координате његових темена.


Сл. 8.

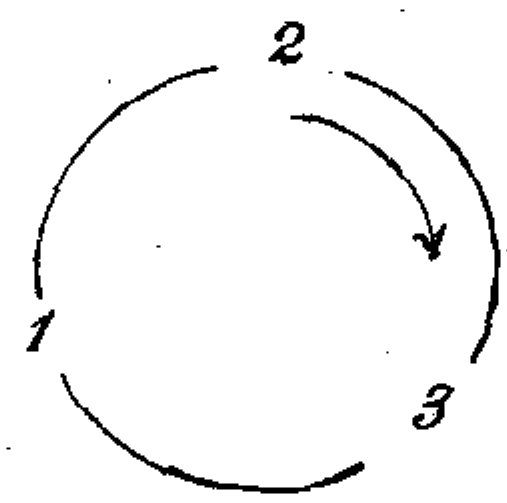
Троугао $P_1P_2P_3$ (Сл. 8.) једнак је збиру два трапеза: $P_1P_2M_1M_2$ и $P_2P_3M_2M_3$, мање трапез $P_1P_3M_1M_3$; у знацима:

$$p = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) +$$
$$+ \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1)$$

или $2p = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) +$
$+ y_3(x_1 - x_2).$

Напомене. I. Ради лакшег памћења овог обрасца треба на обиму једног круга написати цифре 1, 2, 3.

Ако се у смислу стрелице пође из тачке 1, онда долазе по реду цифре 2 и 3; ако ли се пође из тачке 2, онда долазе 3 па 1; а после цифре 3 долазе редом 1 па 2. Тим редом иду казаљке у предњем обрасцу.



II. Ако су све три тачке у једној правој линији онда је површина троугла једнака нули; тако се добива као погодба, да три тачке леже у једној правој линији, ова једначина:

$$y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2) = 0.$$

III. Кад су све три тачке на једној правој линији као тачке P, P_1 и P_2 на сл. 7, па координате тачке P обележимо са x_3, y_3, онда је

$$P_1Q_1 : PQ = PQ_1 : P_2Q,$$

или . . . . $(y_1 - y_3) : (y_3 - y_2) = (x_1 - x_3) : (x_3 - x_2),$

или . . . . $(y_1 - y_3) : (y_2 - y_3) = (x_1 - x_3) : (x_2 - x_3)$

што је исто тако погодба да три тачке леже у једној правој.

IV. Кад би на сл. 8 тачка P_2 била испод праве P_1P_3, онда би образац за $2p$ дао негативан резултат, пошто би у том случају трапез $P_1P_3M_1M_3$ био већи од збира два трапеза $P_1P_2M_1M_2$ и $P_2P_3M_1M_3$. Дакле негативан резултат значи само, да су тачке P_1, P_2 и P_3 друкчије распоређене.

ЗАДАЦИ.

1. Одреди положај тачака чије су координате:
a) $x = 3$, $y = 4$; *b*) $x = -2$, $y = 3$; *c*) $x = -1$, $y = -4$;
d) $x = -2$, $y = 1$; *e*) $x = 0$, $y = 2$; *f*) $x = -3$, $y = 0$.

2. Конструиши троугао чија су темена A $(-2, 0)$, B $(2, -3)$, C $(4, 4)$.

3. Одреди раздаљину тачака:
a) $(7, 10)$ и $(-5, 5)$; *b*) $(6, -5)$ и $(-2, 1)$; *c*) $(12, -12)$ и $(-9, 7)$; Затим нагибне углове према апсцисној оси оних правих, које везује две и две тачке.

4. Изрази једначином, да је тачка (x, y) удаљена од тачке $(5, 4)$ исто толико, колико и од тачке $(3, 2)$.

5. Одреди тачку, која је једнако удаљена од тачака $(3, 4)$, $(2, -3)$ и $(-2, 3)$. Израчунај ту раздаљину.

6. Дуж, која везује тачке M_1 $(-3, +4)$ и M_2 $(2, -5)$, поделити тачком P по размери $M_1P : PM_2 = 1 : 3$. На продуженој дужи M_1M_2 наћи тачку P тако да је $M_1P = 2\,M_1M_2$. Израчунај координате тачке P.

7. Два темена једног троугла имају координате $(4, -2)$ и $(3, 2)$, а треће је теме у почетку; израчунај *a*) дужине појединих страна, *b*) координате средине на свакој страни; *c*) површину троугла; *d*) координате тежишта тог троугла.

8. Темена једног троугла имају координате (x_1, y_1), $(x_2\ y_2)$, (x_3, y_3); израчунај координате његова тежишта.

9. Израчунај површину троугла чија темена имају координате: (3, 4), (2, — 3), (— 2, 3).

10. Израчунај поларне координате тачака, чије су правоугле координате: (5, 0), (0, 3), (3, 3), (— 2, 0) (0, — 3) и (4, — 4).

11. Израчунај ортогоналне координате тачака, чије су поларне координате:
a) $r = 2,\ \varphi = 60^0$; *b*) $r = 4,\ \varphi = 90^0$; *c*) $r = 6,\ \varphi = 135^0$; *d*) $r = 3,\ \varphi = 240^0$; *e*) $r = 2,\ \varphi = 321^0$.

12. Нападне тачке двеју сила, од 12 *kg* и 18 *kg*, имају координате: (0, 0) и (0, 6); одреди нападну тачку резултанте, ако су те силе *a*) у истом смислу, *b*) у супротном смислу паралелне.

13. Испитај да ли су тачке

a) M_1 (1, 5), M_2 (3, 9), M_3 (— 2, — 1);
b) M_1 (2, 3), M_2 (5, — 7), M_3 (— 4, — 3)

на једној правој.

14. M_1 (2, — 7), M_2 (— 3, + 4), M_3 (1, y); одредити y тако, да права M_1M_2 пролази кроз M_3.

15. Дате су 3 тачке: A (2, 3), B (4, 7), C (6, 5); одреди четврту тачку D тако, да ABCD буде паралелограм.

ДРУГИ ОДЕЉАК

ЈЕДНАЧИНЕ СА ДВЕ ПРОМЕНЉИВЕ И ЊИХОВА ГЕОМЕТРИСКА МЕСТА

Графично представљање функција. — Представљање функција једначинама.

I. ГРАФИЧНО ПРЕДСТАВЉАЊЕ ФУНКЦИЈА.

12. Тумачења. Количине, које у току рачуна имају одређену, непроменљиву вредност, зову се *сталне* (константне) *количине*.

Количине, које могу имати сваку произвољну вредност према својој природи, зову се *променљиве количине*.

Однос између променљивих и сталних количина казује се *једначином;* на пр. $y = 2x + 3$. Ако је у овој једначини x променљива количина, онда је и y променљиво, јер се вредност од y мења, кад се мења x, пошто је $y = 2x + 3$. Па како се за сваку посебну вредност од x добива из једначине $y = 2x + 3$ одређена вредност од y, то y зависи од x; каже се да је y *функција од x*. Према томе разликујемо *независно* и *зависно* промењљиве. Независно промењљиве зову се оне, којима се може дати свака произвољна вредност према њиховој природи; а зависно промењљиве зову се оне, чија вредност зависи од вредности независно промењљивих.

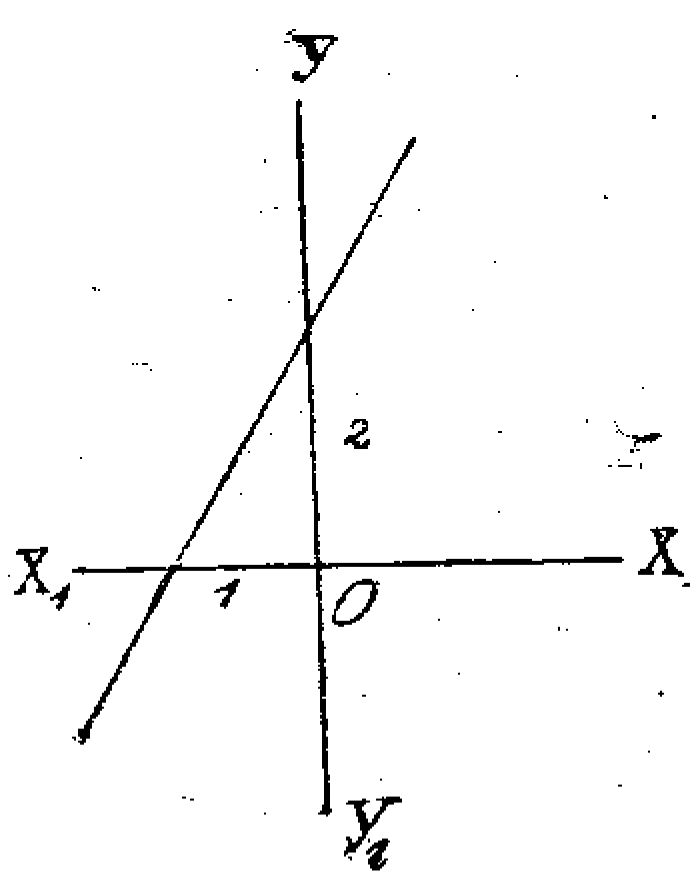
Из једначине $y = 2x + 3$ може се x представити као функција од y; добива се

$$x = \frac{y - 3}{2}.$$

13. Графично представљање функција. Једна једначина са две промењљиве x и y има безбројно много решења. Кад се x поступно замени разним специјалним вредностима, онда се за сваку вредност од x добива и за y једна или више вредности које одговарају тој вредности од x. Ако се сад сваки спрег вредности за x и y сматра као координате једне тачке, па се према томе конструише тачка, онда је свако решење те једначине геометриски представљено једном тачком.

У колико се мање разликују узастопне вредности од x, у толико су ближе једна другој оне тачке, представљене координатама. Кад x прође кроз све стварне, позитивне и негативне вредности, онда промењљива тачка описује *одређену линију*, која има особину да координате сваке њене тачке задовољавају дату једначину. С тога се та линија зове *геометриско место једначине;* та је линија графички представник дате функције и представља очигледно tôк саме функције.

Обично се одређује онолико тачака, колико је потребно да би се линија могла конструисати.



Сл. 9.

Примери.

I. Да се конструише једначина првог степена

$$y = 2x + 1.$$

Кад ставимо $x = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ добићемо за y ове вредности $: y = 1, 3, 5, 7, 9 \ldots$. Вредности за x мењају се стално (за 1), а и вредности за y мењају се стално (за 2). Из тога излази, да су тачке, чије су координате $(0, 1)$, $(1, 3)$ $(2, 5)$, $(3, 7) \ldots$, на једној *правој линији*. Дакле, кад се једначина првог степена са две промењљиве количине представи графички, добива се права линија. С тога се таква функција зове *линеарна функција*.

Додатак I. Нека је у опште

$$y = mx + b.$$

Ако су (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) три спрега вредности за x и y, које задовољавају једначину $y = mx + b$, онда је

$$y_1 = mx_1 + b$$
$$y_2 = mx_2 + b$$
$$y_3 = mx_3 + b.$$

Одузимањем налазимо:

$$y_1 - y_3 = m(x_1 - x_3),$$
$$y_2 - y_3 = m(x_2 - x_3)$$

отуд . . . . $\dfrac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \dfrac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}$

што значи, да су тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) на једној правој линији (чл. 11. Напом. III).

Додатак II. Апсциса x може без прекида проћи кроз све вредности од $-\infty$ до $+\infty$. Исто вреди и за функцију y. Ако промену апсцисе обележимо са $\triangle x$, а одговарајућу промену функције y са $\triangle y$, биће

$$y + \triangle y = m(x + \triangle x) + b, \text{ одатле}$$
$$\triangle y = m . \triangle x.$$

Из ове једначине читамо: што је мање $\triangle x$, тим је мање $\triangle y$. Кад је $\triangle x$ бескрајно мало, биће и $\triangle y$ бескрајно мало, што значи да је линеарна функција *непрекидна*.

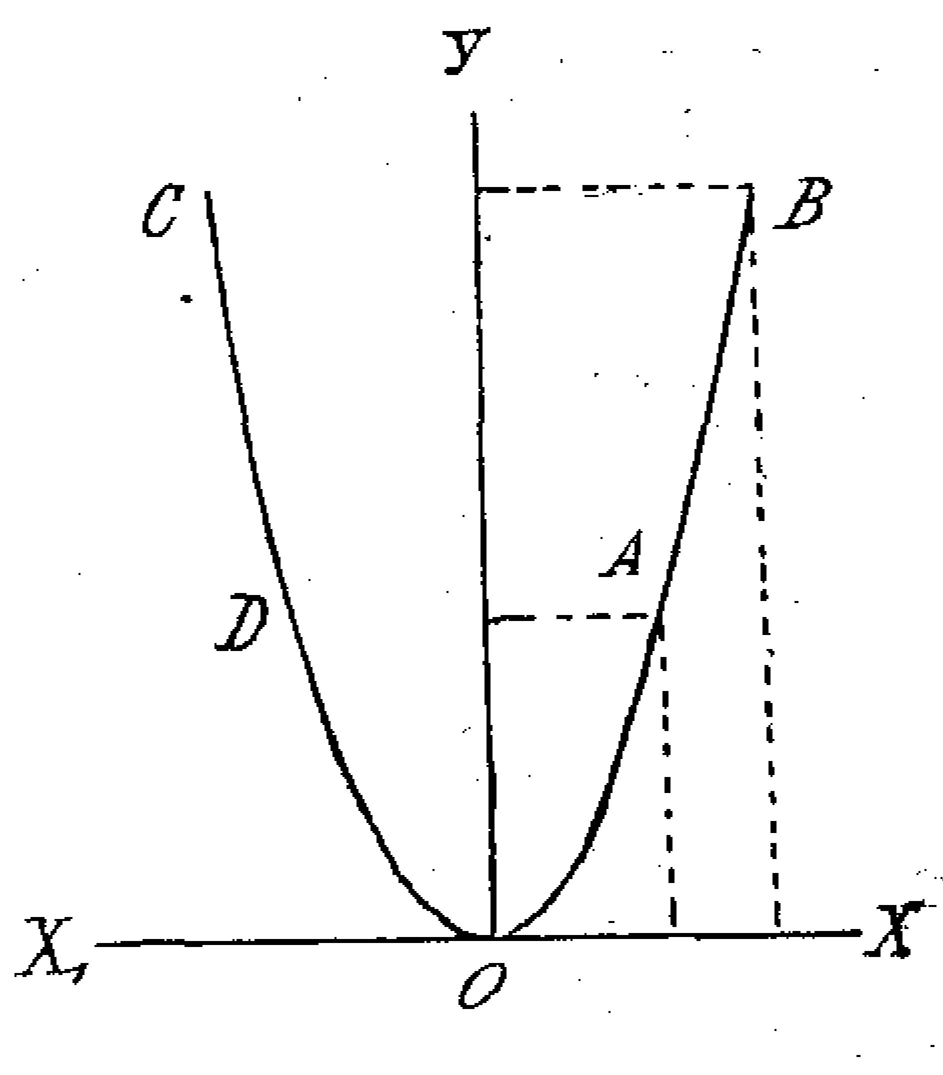
Како свакој вредности за x одговара само једна вредност за y, то је линеарна функција *једнозначна*.

II. *Функцију $y = x^2$ представити графички.*

Једначина $y=x^2$ има ова решења:

$$x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2 \ldots\ldots$$
$$y = 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 1, \quad \frac{9}{4}, \quad 4 \ldots\ldots$$

Апсциса x може проћи непрекидно кроз све вредности од $-\infty$ до $+\infty$. Ордината y може бити само позитивна (због x^2), с тога се линија налази сва над XX_1. Како је за $x = 0$ и $y = 0$, то линија пролази кроз по-



Сл. 10.

четак. Што је већа апсциса x, тим је већа и ордината y, што значи да се линија пење.

Ако се апсциса повећа за $\triangle x$, онда ће се променити и ордината за $\triangle y$. Тада је

$$y + \triangle y = (x + \triangle x)^2 = x^2 + 2x \cdot \triangle x + \triangle x^2,$$

дакле . . $$\triangle y = \triangle x\,(2x + \triangle x).$$

Отуд читамо: што је мање $\triangle x$, тим је мање $\triangle y$; кад је $\triangle x$ бескрајно мало, биће и $\triangle y$ бескрајно мало, што значи да је функција $y = x^2$ непрекидна.

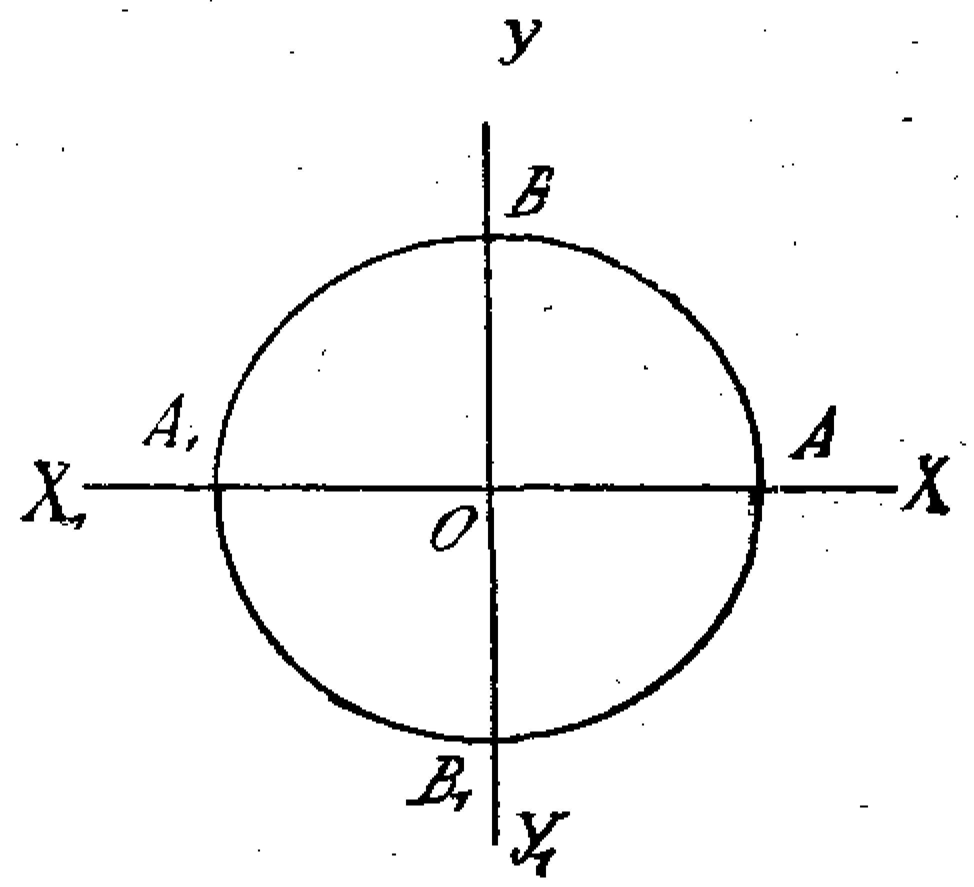
Како се y мења са квадратом од x, то је ова функција *квадратна*.

III. *Функцију* $x^2 + y^2 = 9$ *представити графички.*

Из једначине $x^2 + y^2 = 9$ излази $y = \pm\sqrt{9 - x^2}.$

Кад се стави $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ -2,\ -3\ldots$ биће $y = \pm 3,\ \pm 2{\cdot}8,\ \pm 2{\cdot}2,\ 0,\ \pm 2{\cdot}8,\ \pm 2{\cdot}2,\ 0\ldots$

Кад се конструишу тачке с тим координатама, добиће се сл. 11.



Сл. 11.

Тачке A и A_1, у којима линија сече апсцисну осу, добивају се, кад се стави $y = 0$.

Тачке B и B_1, у којима линија сече ординатну осу добивају се, кад се стави $x = 0$.

Апсциса x ограничена је на интервал од -3 до $+3$, јер је за сваку вредност, већу од 3, поткорена количина негативна.

Функција је *двозначна;* она се може раставити на $y = +\sqrt{9 - x^2}$, и $y = -\sqrt{9 - x^2}.$ — Свака од ових функција непрекидна је.

Како се независно промењива количина налази под кореном, то је ова функција *ирационална*.

IV. *Графички представити функцију* $x^2 - y^2 = 9$.

Из квадратне једначине $x^2 - y^2 = 9$ излази $y = \pm\sqrt{x^2 - 9}.$

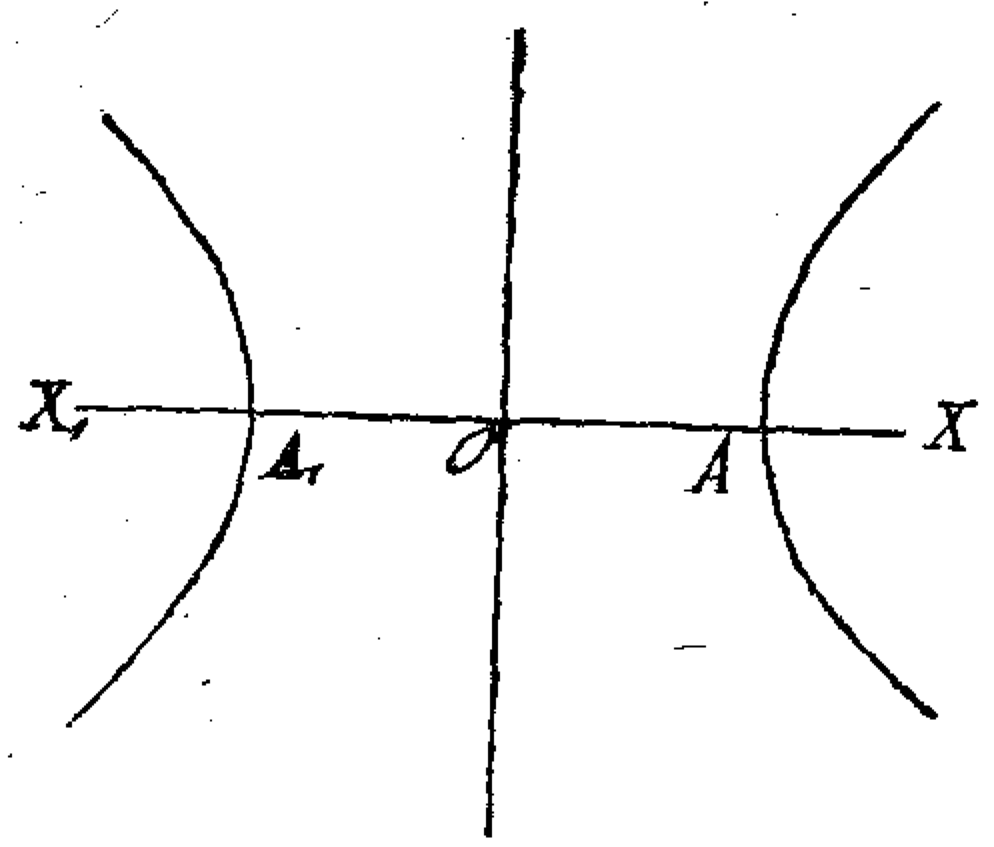
Кад је $x = -6,\ -5,\ -4,\ -3\ldots +3,\ +4,\ +5,\ +6\ldots$

Онда је $y = \pm 5{\cdot}2,\ \pm 4,\ \pm 2{\cdot}6,\ 0\ldots\quad 0,\ \pm 2{\cdot}6,\ \pm 4,\ \pm 5{\cdot}2\ldots$

Конструишући тачке с тим координатама, добивамо сл. 12.

Тачке A и A_1, у којима линија сече апсцисну осу, налазимо, кад ставимо $y = 0$; тако добивамо $x = \pm 3$.

Да бисмо нашли тачке, у којима линија сече ординатну осу треба ставити $x = 0$; тада се налази $y^2 = -9$, или $y = \pm\sqrt{-9}$. Како је y уображено, то линија не сече ординатну осу. За све вредности за x од $-\infty$ до -3 биће како $y = +\sqrt{x^2 - 9}$ тако $y = -\sqrt{x^2 - 9}$ непрекидно, а од $x = -3$ до $x = +3$ линија је прекинута. Од $x = +3$ до $x = +\infty$ линија је опет непрекидна.



Сл. 12.

И ова је функција ирационална.

II. ПРЕДСТАВЉАЊЕ ФУНКЦИЈА ЈЕДНАЧИНАМА.

14. Као што се свака једначина са две променљиве x и y може представити линијом, тако се може и обратно свака линија изразити једначином, ако се зна закон њена постајања. Ако се на тој линији узме једна променљива тачка, онда мора између њених координата да постоји одређен однос као последица какве карактерне особине те линије. Тај однос мора да вреди за све положаје променљиве тачке. Кад се тај однос између x и y изрази једначином, онда се она зове *једначина те линије*.

Примери.

1. Како гласи једначина геометриског места за све тачке у 1. и 3. квадранту, које имају од координатних осовина једнаке раздаљине?

2. Како гласи једначина геометриског места за све тачке које имају од почетка раздаљину 5?

3. Како гласи једначина геометриског места за све тачке чије раздаљине од координатних оса стоје у размери $3 : 2$?

15. Једначина са две променљиве зове се *аналитички* представник за дату линију, као што је обратно линија *геометриски* представник дате једначине. Аналитична Геометрија испитује тај узајамни однос између линије и њене једначине. Из једне познате карактерне особине дате линије изводи се једначина, коју морају задовољити координате сваке тачке дате линије; и обратно, из дате једначине са две променљиве дознаје се положај и облик геометриске слике, као и њене особине.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

ПРАВА ЛИНИЈА

Једначина праве линије. — Две праве. — Задаци.

I. ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ

16. Општа једначина праве линије.

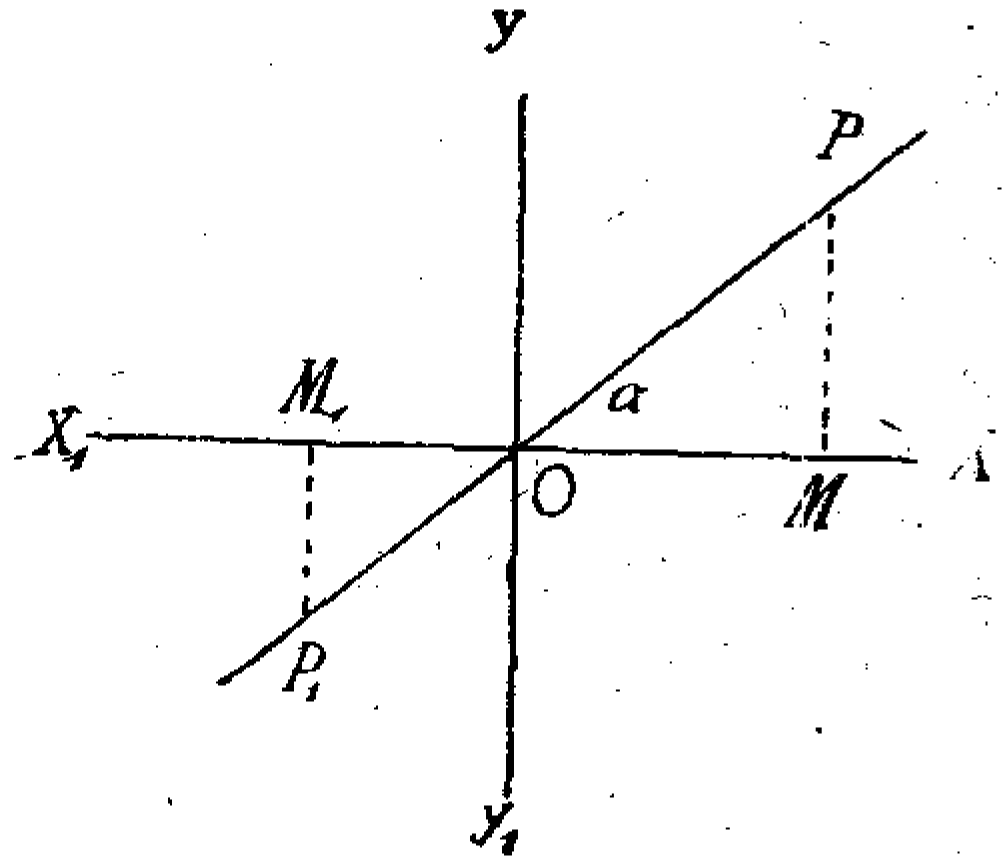
а) *Права пролази кроз почетак.* Та је права одређена својим нагибним углом α према оси XX_1; угао α рачуна се увек од осе OX па до праве, у смислу који је супротан кретању казаљке на часовнику.

За коју било тачку P на датој правој вреди ово:

$$\frac{PM}{OM} = tg\,\alpha.$$

За коју било тачку P_1 на продуженој правој вреди

$$\frac{P_1M_1}{OM_1} = tg\,(\alpha + 180^0) = tg\,\alpha.$$



Сл. 13.

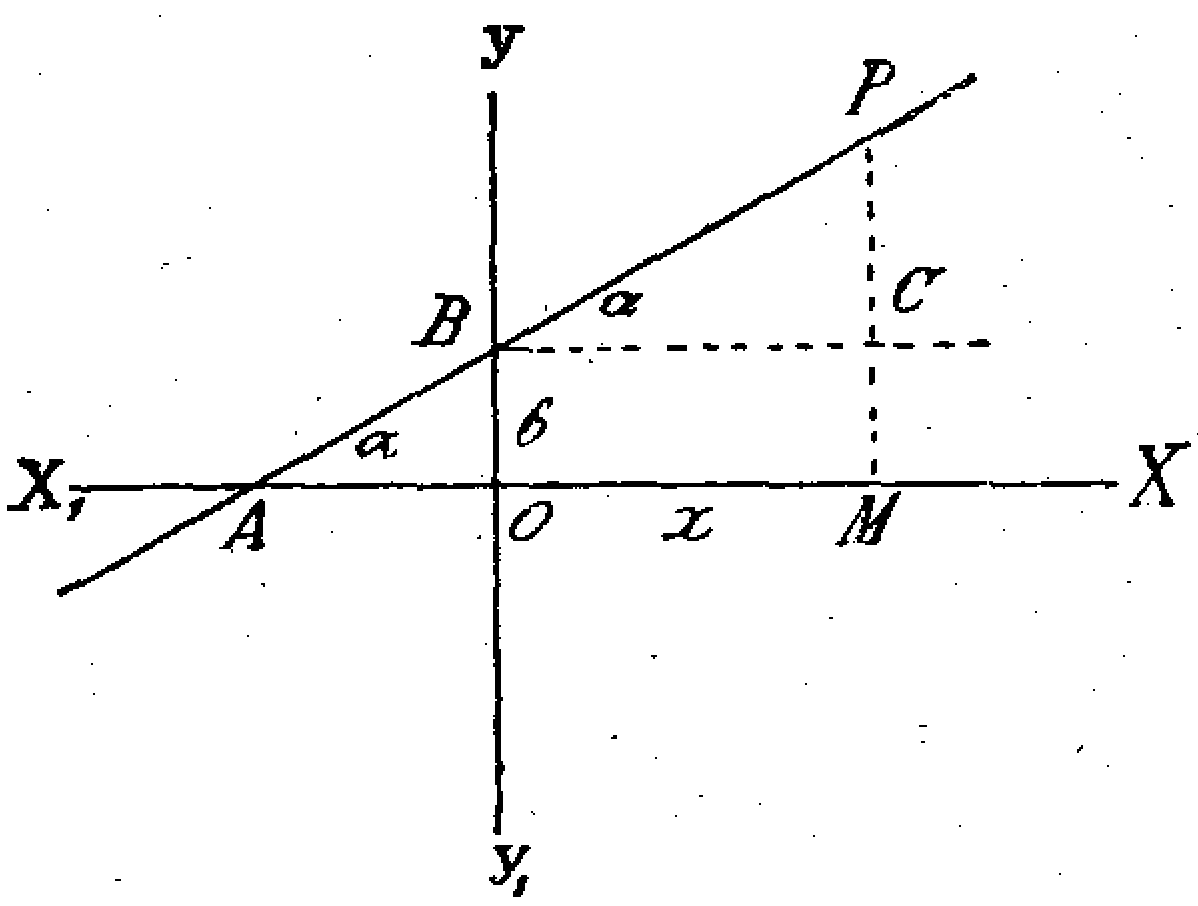
Ако ставимо $tg\,\alpha = m$, онда за све тачке на правој линији вреди однос

$$\frac{y}{x} = m \text{ или } y = mx.$$

Слично томе изводи се једначина праве, која пролази кроз други и четврти квадрант.

b) *Права не пролази кроз почетак.*

Права је одређена тачком B, у којој сече ординатну осу, и нагибним углом α према апсцисној оси.



Сл. 14.

За сваку тачку P на тој правој биће

$$PM = PC + CM = BC \,.\, tg\,\alpha + CM$$
$$= OM.\, tg\,\alpha + BO$$
$$\text{или } y = tg\,\alpha \,.\, x + b$$
$$\text{или } y = mx + b,$$

ако ставимо $tg\,\alpha = m$, а одсечак OB на ординатној оси обележимо са b.

Како m и b могу бити произвољни стварни бројеви, то је једначина $y = mx + b$ аналитички израз за све могуће праве линије. За једну одређену праву имају m и b одређене *константне* вредности, док су x и y *промењљиве* количине т. ј. оне мењају своју вредност с положајем тачке на правој. Количина $m = tg\,\alpha$ зове се *константа правца*, јер она зависи само од правца праве линије према апсцисној оси.

Координате које било тачке на линији бележе се са x и y (без казаљке) и зову се *текуће координате*. Ако се хоће да означи нека нарочита тачка, онда се додаје казаљка (индекс); на пр. x_1, y_1.

17. Претрес једначине $y = mx + b$.

1. У једначини $y = mx + b$ налазе се две константе m и b; оне остају неодређене све дотле, док не будемо имали пред собом одређену праву. Отуд излази, да су потребне *две погодбе*, па да права буде потпуно одређена.

2. Константа правца m позитивна је или негативна, према томе, да ли је нагибни угао α према позитивној апсцисној оси оштар или туп.

Константа b позитивна је или негативна, према томе, да ли права сече ординатну осу над тачком O, или испод ње.

Према томе се на први поглед може по знацима константних количина m и b познати, на којој ће страни дата права сећи апсцисну осу.

3. Кад је $b = 0$, онда се добива $y = mx$ као *једначина праве која пролази кроз почетак*. У овој једначини налази се само *једна* константа m, јер је она друга већ одређена тиме, што права пролази кроз почетак.

4. За апсцисну је осу $\alpha = 0$ и $b = 0$, с тога њена једначина $y = 0$. За ординатну осу је $\alpha = 90^0$, дакле $m = tg\,90^0 = \infty$, и једначина је неупотребљива; али је ординатна оса окарактерисана тиме, што је за сваку њену тачку $x = 0$. Према томе је једначина ординатне осе: $x = 0$.

5. За праву, која је у раздаљини b, паралелна са апсцисном осом, биће $\alpha = o$, дакле и $m = o$; тако остаје $y = b$ као *једначина праве која је у раздаљини b паралелна са апсцисном осом*.

6. Кад је права паралелна са ординатном осом, онда је $\alpha = 90^0$, дакле $m = \infty$, и $b = \infty$; једначина је неупотребљива. Али је та права окарактерисана тиме, што све њене тачке имају исту апсцису a, ако је a комад који та права одсеца на апсцисној оси. Према томе је $x = a$ једначина праве која је у раздаљини a паралелна са ординатном осом.

7. *Сегментна једначина праве линије*. Ако права одсеца на апсцисној оси одсечак a, онда су координате њена пресека са

апсцисном осом a и 0. Те координате морају задовољити једначину праве линије, дакле $0 = am + b$, отуд $m = -\frac{b}{a}$. Према томе једначина праве гласи:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \text{ или}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (9)$$

Напомена. Ова је једначина неупотребљива, кад права пролази кроз почетак.

8. *Општи је облик* једначине праве линије:

$$Ax + By + C = 0.$$

Кад се она реши по y, добиће се $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$; овде је $-\frac{A}{B} = m$, $-\frac{C}{B} = b$.

Из опште једначине налазе се сегменти, кад се стави један пут $x = 0$, за тим $y = 0$.

Напомена. Једначина $y = mx + b$ решена је по зависно промењивој количини, па се с тога каже да је y *развијена* (или *откривена, експлицитна*) функција од x. — У једначини $Ax + By + C = 0$ налази се y као *неразвијена* (или *скривена, имплицитна*) фунција од x.

18. — Пењање праве линије.

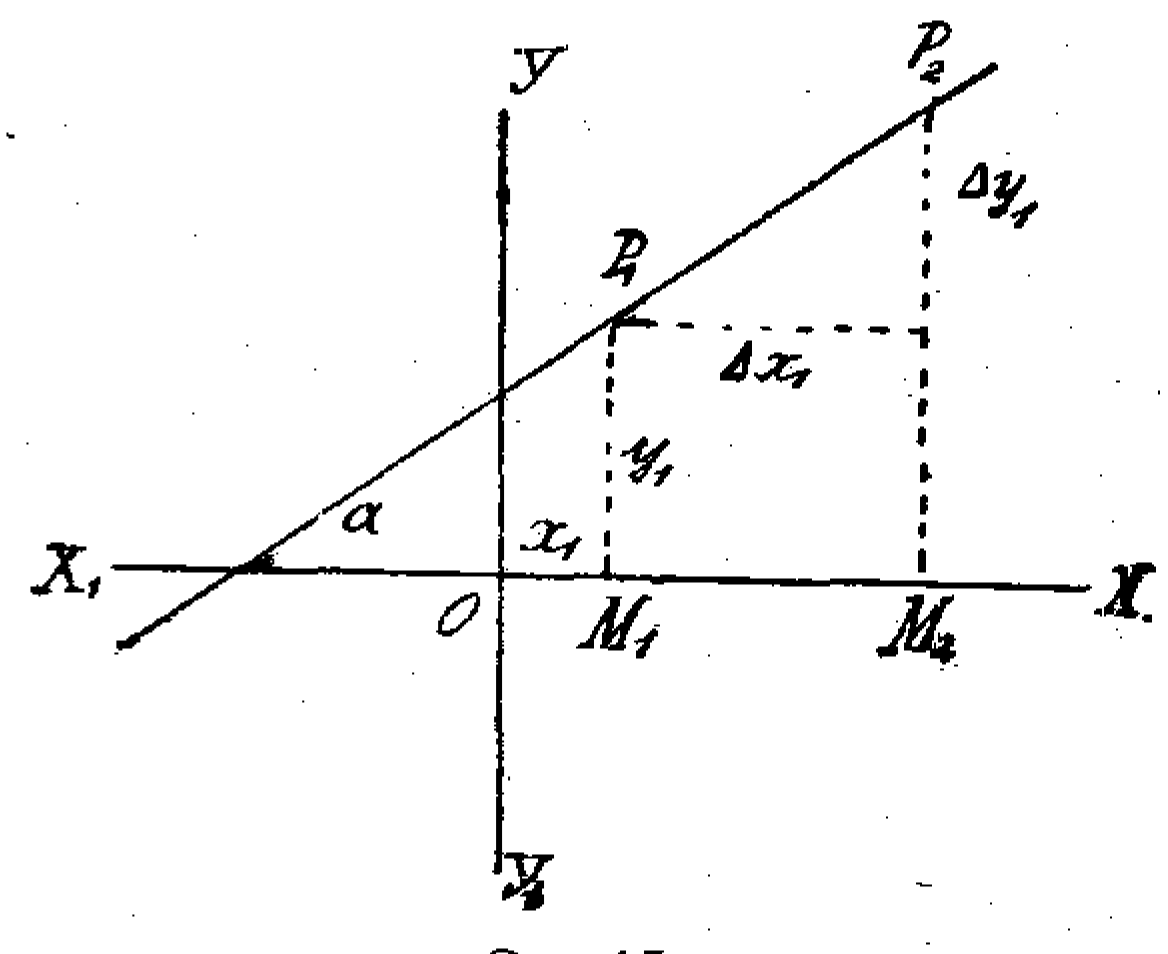
Нека је $y = mx + b$ једначина једне праве, а P_1 (x_1, y_1) и P_2 (x_2, y_2) две тачке на тој правој. Према томе је

$$y_1 = mx_1 + b$$
$$y_2 = mx_2 + b$$

Одузимањем налазимо:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1), \text{ или}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m.$$



Сл. 15.

Овај количник значи промену линеарне функције, ако се за јединицу промене узме промена независно промењиве количине. Тај количник зове се *пењање* функције. На слици тај је количник исто, што и константа правца праве $y = mx + b$. Како је та константа правца свуда једна иста, то је пењање линеарне функције константно.

Разлике $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ представљају прираштај апсцисе и ординате, кад се пређе од тачке P_1 ка P_2, па се с тога бележе овако: $\triangle x_1$ (делта x_1) и $\triangle y_1$. Стим знацима пише се горња једначина овако:

$$\frac{\triangle y_1}{\triangle x_1} = m,$$

па како она вреди за све тачке на правој линији, то се пише без индекса:

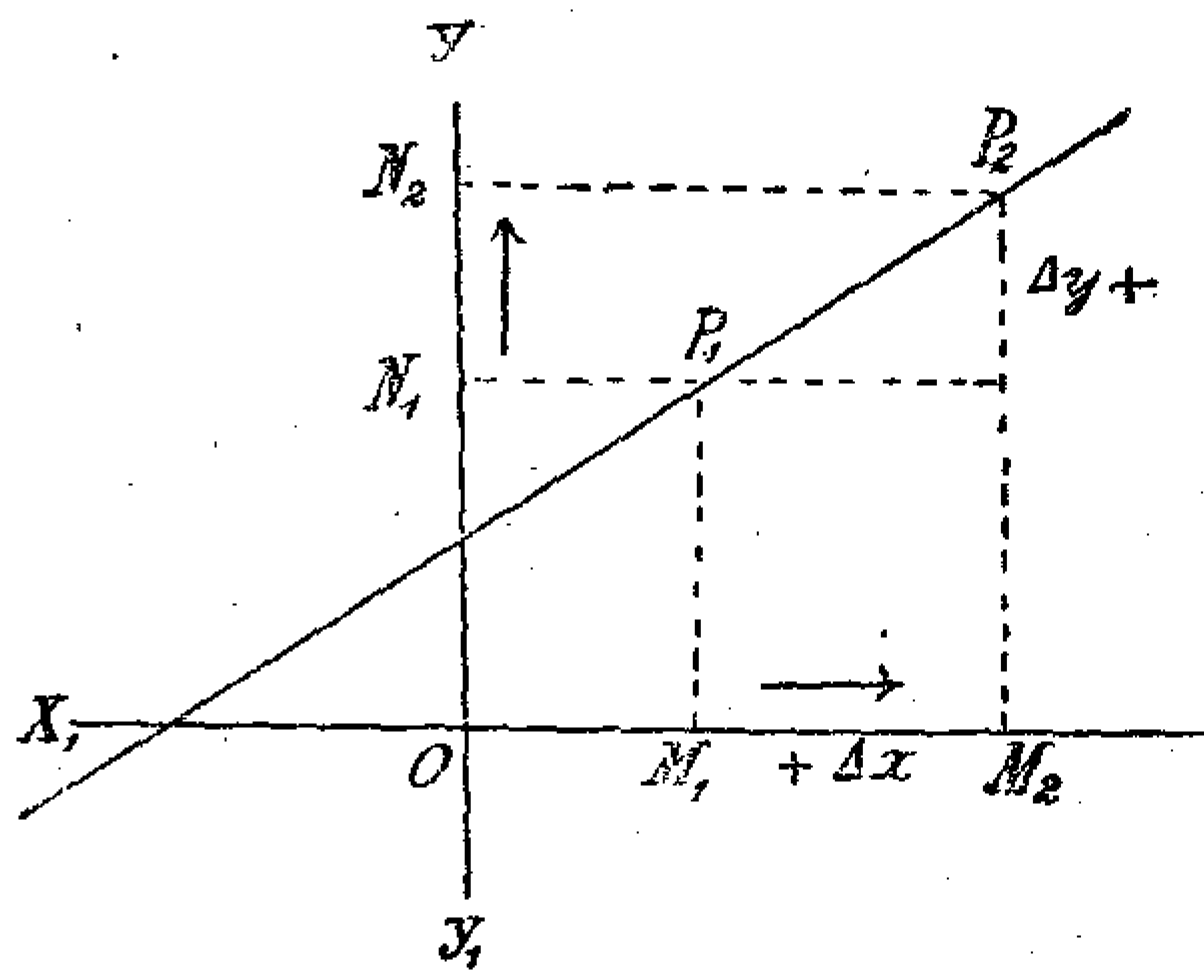
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m.$$

Количник $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ зове се *количник диференција*.

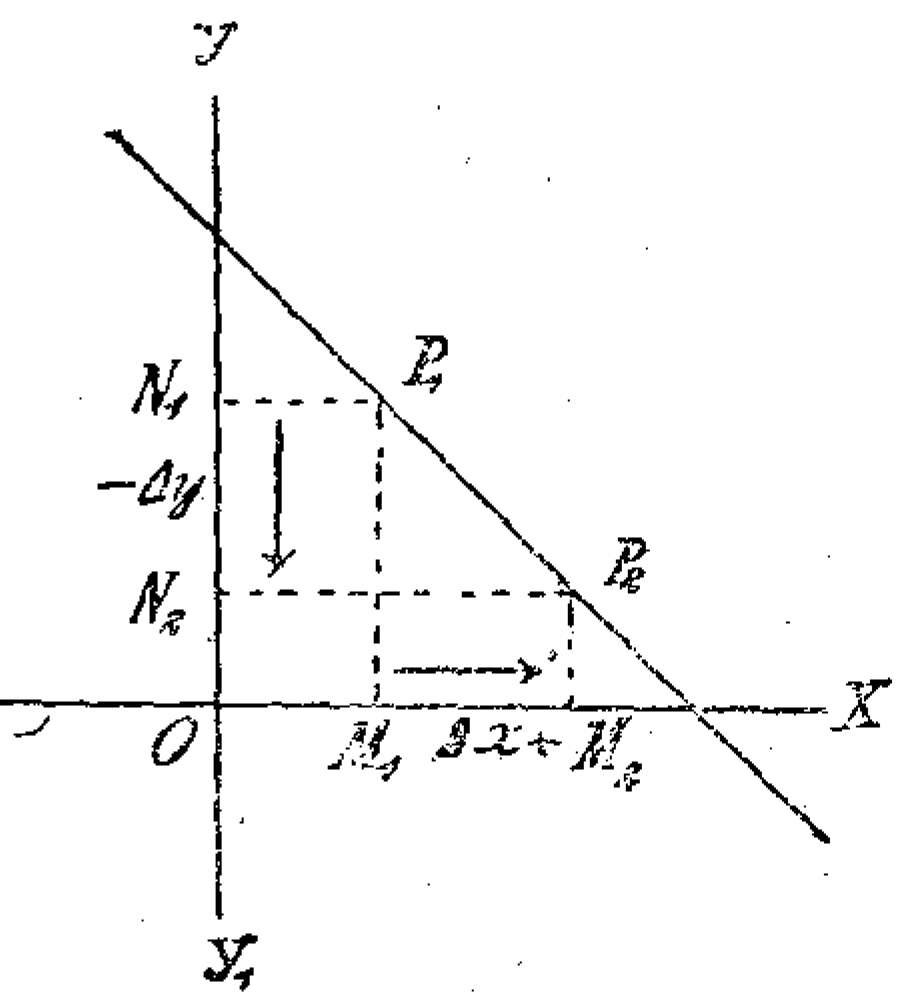
19 Растење и опадање линеарне функције.

Прираштај $\triangle x$ може се сматрати као пројекција дужи $P_1 P_2$ на апсцисној оси.

Кад се на сл. 16 тачка P_1 креће у правцу ка P_2, онда се њена пројекција M_1 креће у позитивном правцу ка M_2. Исто тако може се промена $\triangle y$ сматрати као пројекција дужи $P_1 P_2$ на ординатној оси. Кад се тачка P_1 помиче у правцу ка P_2, онда се њена пројекција на ординатној оси помиче у позитивном правцу од N_1 ка N_2. Дакле, позитивној промени $\triangle x$ одговара позитивна промена $\triangle y$. Према томе је и количник $\frac{\triangle y}{\triangle x} = m$ позитиван, кад се права $P_1 P_2$ пење.



Сл. 16.



Сл. 17.

Ако права P_1P_2 пада (сл. 17), онда позитивној промени $\triangle x$ одговара негативна промена $\triangle y$, и тада је количник $\frac{\triangle y}{\triangle x} = m$ негативан.

Линеарна функција пење се или пада, према томе, да ли је m позитивно или негативно; она дакле у целом свом току расте или опада.

20. Геометриско место једначине првога степена са две променљиве права је линија.

Свака једначина првога степена са две променљиве може се свести на облик $y = mx + b$.

Ако су $M_1 (x_1, y_1)$ и $M_2 (x_2, y_2)$ две тачке на геометриском месту те једначине, онда је

$$y_1 = mx_1 + b \quad \text{и} \quad y_2 = mx_2 + b;$$

одузимањем налази се

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1);$$

отуд . . . . $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ или $\dfrac{\triangle y_1}{\triangle x_1} = m$.

Како ова једначина вреди за све тачке на геометриском месту, то је у опште $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = m$, што значи, да се линија, која представља једначину $y = mx + b$, стално пење т. ј. да је то права линија.

21. Конструкција праве, кад је дата њена једначина.

Треба одредити две тачке, кроз које мора проћи права; а такве две тачке налазе се, кад се из дате једначине нађу два спрега вредности за x и y, који задовољавају дату једначину. Ако права пролази кроз почетак, онда треба одредити само још једну тачку, и то најбоље ону, чија је апсциса или ордината $= 1$. У опште је најподесније да се одреде оне две тачке, у којима дата права сече координатне осе; те се тачке налазе, кад се стави прво $x = 0$, за тим $y = 0$. Ти се одсечци виде непосредно из једначине, ако се она доведе на облик $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Тако се на пр. једначина $y = 2x + 1$ може написати у облику $-\dfrac{x}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y}{1} = 1$, која показује, да је одсечак на апсцисној оси $= -\dfrac{1}{2}$, а на ординатној $= +1$. (сл. 9).

22. Једначина праве по датим погодбама.

Једначина праве има облик:

$$y = mx + b \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 1).$$

Да бисмо одредили m и b, потребне су две једначине, које ће се поставити на основу погодаба у задатку.

a) Једначина праве која пролази кроз дату тачку (x_1, y_1).

Да би права пролазила кроз тачку (x_1, y_1), морају координате те тачке задовољити једначину 1; дакле мора бити

$$y_1 = mx_1 + b \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2).$$

У тој једначини налазе се две непознате, m и b. Према томе може се из ове једначине наћи само једна. Ако одредимо b, добићемо

$$b = y_1 - mx_1$$

а кад b у једначини 1) заменимо том вредношћу добићемо

$$y = mx + y_1 - mx_1 \text{ или}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots\ldots \quad 3).$$

У овој једначини налази се само још неодређена константа m, којој се могу дати све могуће вредности од $+\infty$ до $-\infty$. Та једначина 3) представља дакле безбројно многе праве (сноп), јер се заиста кроз једну тачку могу повући безбројно многе праве.

b) *Једначина праве, која пролази кроз две дате тачке* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2).

Како права мора проћи кроз тачку x_1, y_1, то је њена једначина

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

А како је и тачка x_2, y_2 на тој правој, то морају њене координате задовољити једначину праве, дакле је:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1), \text{ отуд } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

а кад се m у једначини под 3) замени том вредношћу, добиће се

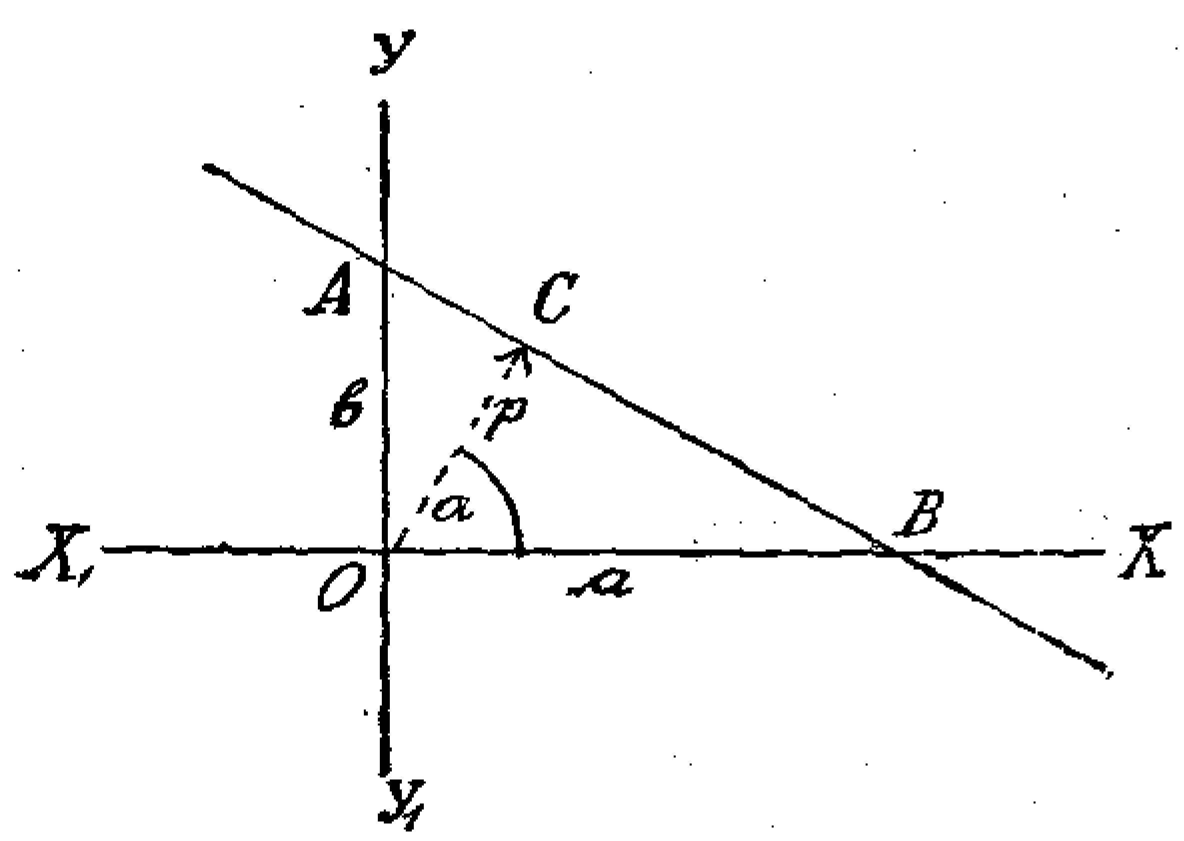
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

23. Нормална једначина праве линије.

Нека је дата права AB (сл. 18),) чији су одсечци на координатним осама: OB $= a$ и OA $= b$. Тада је њена сегментна једначина (чл. 17. под 7)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Ако се повуче OC $\perp$ AB, онда из правоуглих троуглова BOC и AOC излази: [redacted]



Сл. 18.

$$p = a \cos\alpha \quad \text{и} \quad p = b \sin\alpha, \text{ отуд}$$

$$a = \frac{p}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad b = \frac{p}{\sin\alpha}$$

Кад се ове вредности унесу у једначину под 1), добиће се

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

Ова једначина зове се *нормална* једначина праве, пошто се у њој налази нормална раздаљина p почетка О од праве АВ.

24. Једначину праве у општем облику $Ax + By + C = o$ свести на нормалан облик.

Значај ове једначине неће се променити, ако се она помножи каквим било константним бројем λ. Јер све вредности од x и y, које задовољавају једначину $Ax + By + C = 0$, задовољиће и једначину $\lambda(Ax + By + C) = 0$. Да би се једначина

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$$

претворила у нормалан облик

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

треба λ изабрати тако, да буде

$$\lambda A = \cos\alpha$$
$$\lambda B = \sin\alpha.$$

Из ових једначина излази

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Како је $\lambda C = -p$, то морају λ и С бити супротно означени, пошто је p позитивно.

Примери. 1. Једначину $3x + 4y + 6 = 0$ свести на нормалан облик. Како је апсолутни члан позитиван $(+6)$, то ћемо узети λ негативно, дакле

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Према томе је нормални облик:

$$-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0.$$

Нормална је раздаљина почетка од дате праве $= \frac{6}{5}$; а та нормала захвата са позитивним правцем апсцисне осе угао α, тако да је $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, а $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. И по томе се види, да права пролази кроз II., III. и IV. квадрант.

2. Ако би била дата једначина $3x + 4y - 6 = 0$, онда би се морало узети $\lambda = +\frac{1}{5}$, па би се добио нормалан облик:

$$\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - \frac{6}{5} = 0.$$

Како је овде $\cos\alpha = +\frac{3}{5}$, $\sin\alpha = +\frac{4}{5}$, то је угао α оштар, што значи, да дата права пролази кроз II., I. и IV. квадрант.

25. Раздаљина тачке од праве.

Нека је дата права AB (сл. 19) и тачка $P_1(x_1 y_1)$.

Кроз тачку P_1 повуцимо праву $A_1B_1 \parallel AB$.

Из тачке O нека је повучено $OC \perp AB$, $OD \perp A_1B_1$.

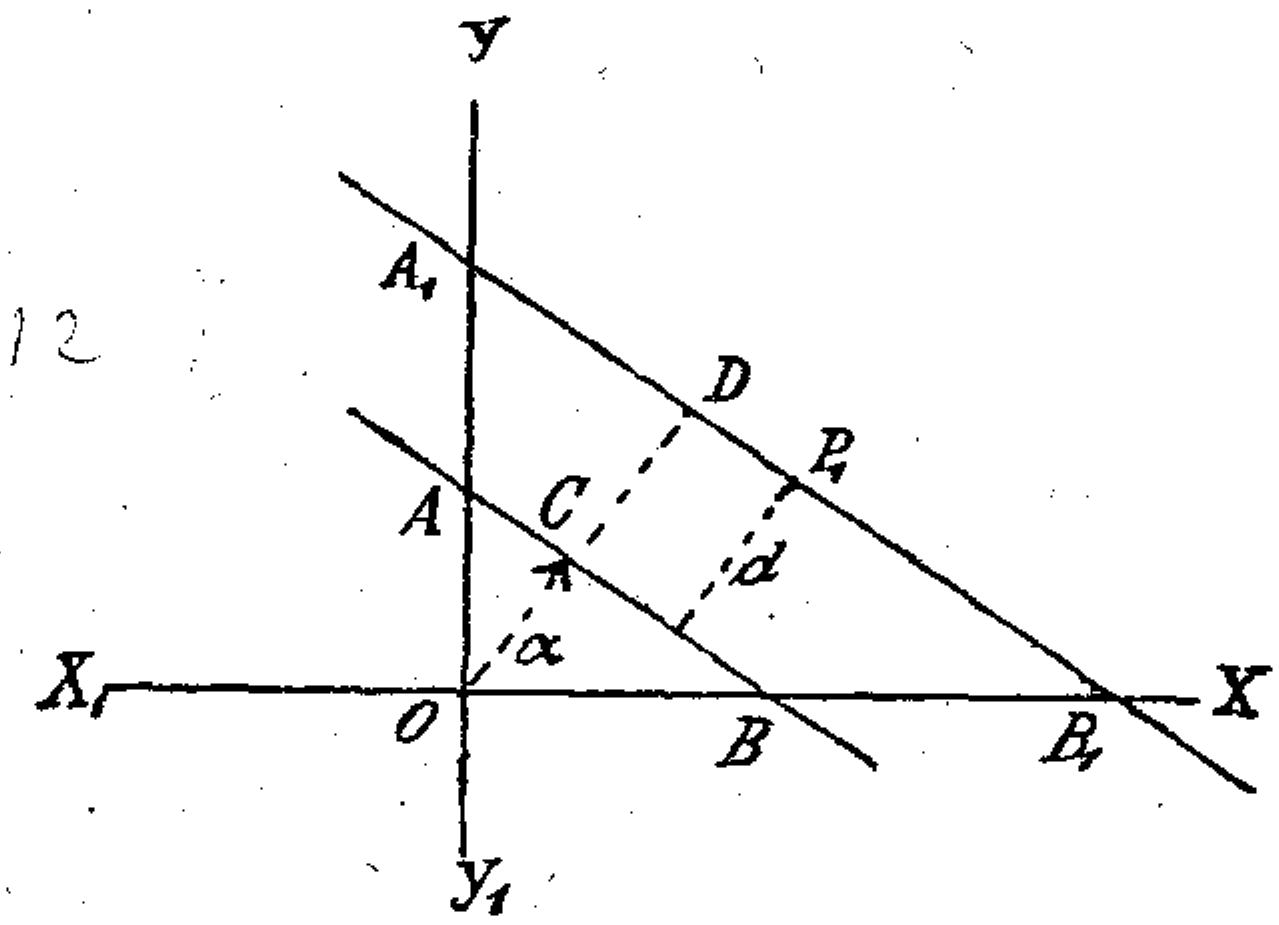
Тада нормална једначина праве AB гласи:

$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \ldots\ 1)$

а нормална једначина праве A_1B_1 гласи:

$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p_1 = 0 \ldots\ 2)$

где је $p = OC$, $p_1 = OD$.



Сл. 19.

Ако раздаљину тачке P_1 од праве AB обележимо са d, онда је

$$d = p_1 - p.$$

Нормала p налази се у једначини дате праве AB, а нормалу p_1 наћи ћемо из једначине под 2), ако текуће координате x и y заменимо координатама x_1 и y_1 дате тачке, пошто оне морају задовољити једначину под 2); тако налазимо

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = p_1.$$

Према томе је $d = p_1 - p = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p$.

Отуд правило: *Раздаљину тачке* (x_1, y_1) *од праве наћи ћемо, кад једначину дате праве сведемо на нормалан облик, па у триному те једначине на место x и y ставимо* x_1 *и* y_1.

Добије ли се негативан резултат, онда то значи, да су дата тачка и почетак на истој страни дате праве.

Добије ли се позитиван резултат, онда то значи да су дата тачка и почетак раздвојени датом правом.

Примери. 1. Колика је раздаљина тачке P (1,1) од праве $3x + 4y + 6 = 0$?

Нормални је облик ове једначине

$$-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0.$$

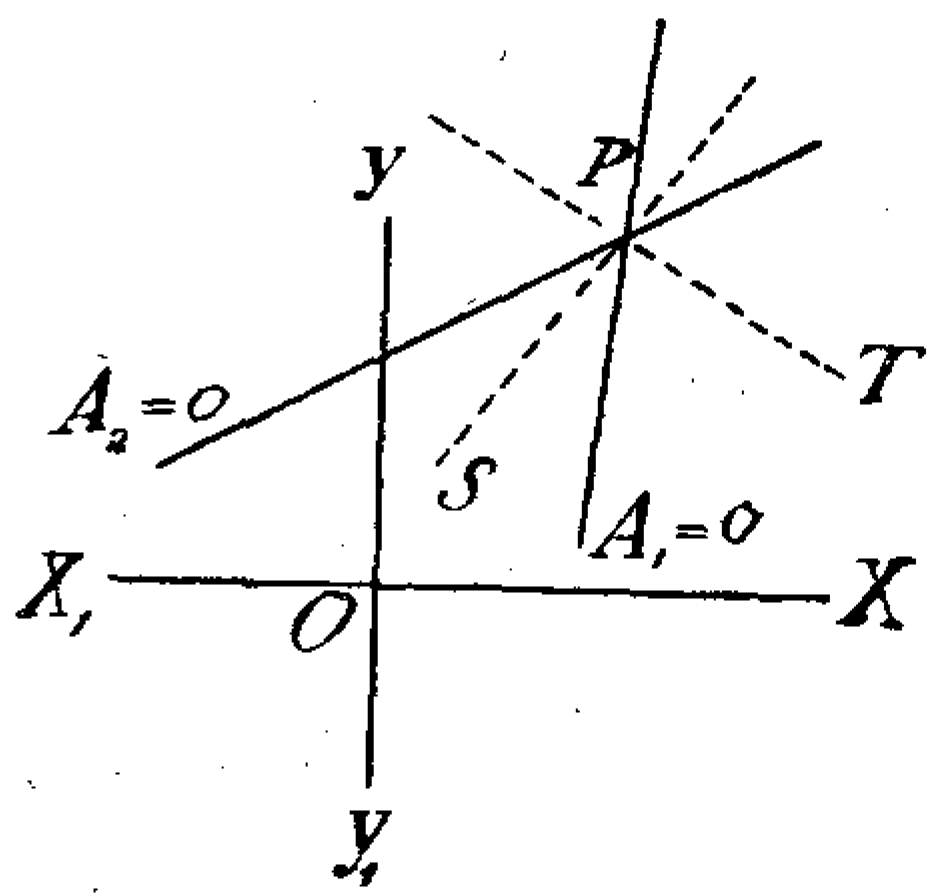
Ако у триному на левој страни ставимо $x = 1$, $y = 1$, добићемо $-2{,}6$ као раздаљину тачке P од дате праве. Знак минус показује, да су тачке P и O на истој страни дате праве.

2. Колика је раздаљина тачке P $(-2, -1)$ од праве

$$3x + 4y + 6 = 0?$$

Добива се $+0{\cdot}8$. Тачке P и O нису на истој страни дате праве.

26. Једначина праве која полови угао чији су краци ати својим једначинама.



Сл. 20.

Нека су $x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0$ и $x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$ нормалне једначине двеју правих. Те две једначине можемо — ради краткоће — симболички изразити овако:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0.$$

a) Нека је координатни почетак у истом углу у коме је и угаона симетрала PS (сл. 20). Тада су раздаљине које било тачке (x, y) на угаоној симетрали од датих правих једнако означене,

дакле . . . . $A_1 = A_2$

или . . . . $A_1 - A_2 = 0.$

b) Нека координатни почетак није у истом углу у коме је и угаона симетрала PT (сл. 20). Тада су раздаљине које било тачке (x, y) на тој симетрали од датих правих супротно означене,

дакле . . . . $A_1 = - A_2$

или . . . . $A_1 + A_2 = 0.$

Отуд правило: *Кад су дате једначине двеју правих у нормалном облику, онда се одузимањем добива једначина оне симетрале, у којој се налази координатни почетак; а сабирањем добива се једначина оне друге симетрале, у којој није координатни почетак.*

Пример. Дате су праве $4x - 3y - 2 = 0$ и $12x + 5y + 3 = 0$ Нормалан облик тих једначина гласи:

$$\frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} - \frac{2}{5} = 0 \quad \text{и}$$

$$-\frac{12x}{13} - \frac{5y}{13} - \frac{3}{13} = 0.$$

Одузимањем добивамо $y = 8x - \frac{11}{14}$ као једначину оне симетрале, у којој је и почетак.

Сабирањем налази се $y = -\frac{x}{8} - \frac{41}{64}$ као једначина оне симетрале, у којој није почетак.

27. Једначина праве која пролази кроз пресек двеју датих правих.

Ако су $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$ једначине двеју датих правих у којем било облику, онда једначина

$$P_1 + \lambda P_2 = 0$$

представља једначину сваке треће праве, која пролази кроз пресек двеју датих правих; јер, ако су (x, y) координате оне тачке, у којој се секу праве $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$, онда ће те координате задовољити не само једначине $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$, него и једначину $P_1 + \lambda P_2 = 0$.

Дајући коефицијенту λ разне вредности, добивамо и једначине разних линија, које све пролазе кроз пресек датих правих.

Ако права, чија је једначина $P_1 + \lambda P_2 = 0$, треба да прође кроз неку дату тачку (x_1, y_1), онда ћемо λ израчунати из једначине $P_1 + \lambda P_1 = 0$, пошто у њој текуће координате заменимо координатама (x_1, y_1).

28. Погодба да се три праве секу у једној тачки.

Нека су $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ једначине трију правих у којем било облику.

Ако се могу наћи три броја λ_1, λ_2, λ_3 тако, да се добије *идентична* једначина

$$\lambda_3 P_3 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \qquad (17)$$

онда се те три праве секу у једној тачки. Јер, ако су x и y координате оне тачке, у којој се секу праве $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$, онда ће те координате задовољити не само једначине $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$, него и идентичну једначину $\lambda_3 P_3 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$; пошто је десна страна једнака нули, то је и лева једнака нули, дакле

$$\lambda_3 P_3 = 0,$$

па како λ_3 није нула, то мора бити $P_3 = 0$ што значи да координате x и y задовољавају и једначину треће праве.

У примени је често $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, тако да је

$$P_3 = P_1 + P_2, \qquad (17a)$$

што се казује као правило овако: *кад су дате једначине трију правих, па је једна од тих једначина једнака збиру оне друге две, онда се те три праве секу у једној тачки.*

Прпмери. 1. Симетрале унутрашњих углова у троуглу секу се у једној тачки.

Ако су једначине троуглових страна у нормалном облику

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0,$$

па се претпостави да је координатни почетак у троуглу, онда су једначине угаоних симетрала:

$$A_1 - A_2 = 0, \qquad A_1 - A_3 = 0, \qquad A_3 - A_2 = 0.$$

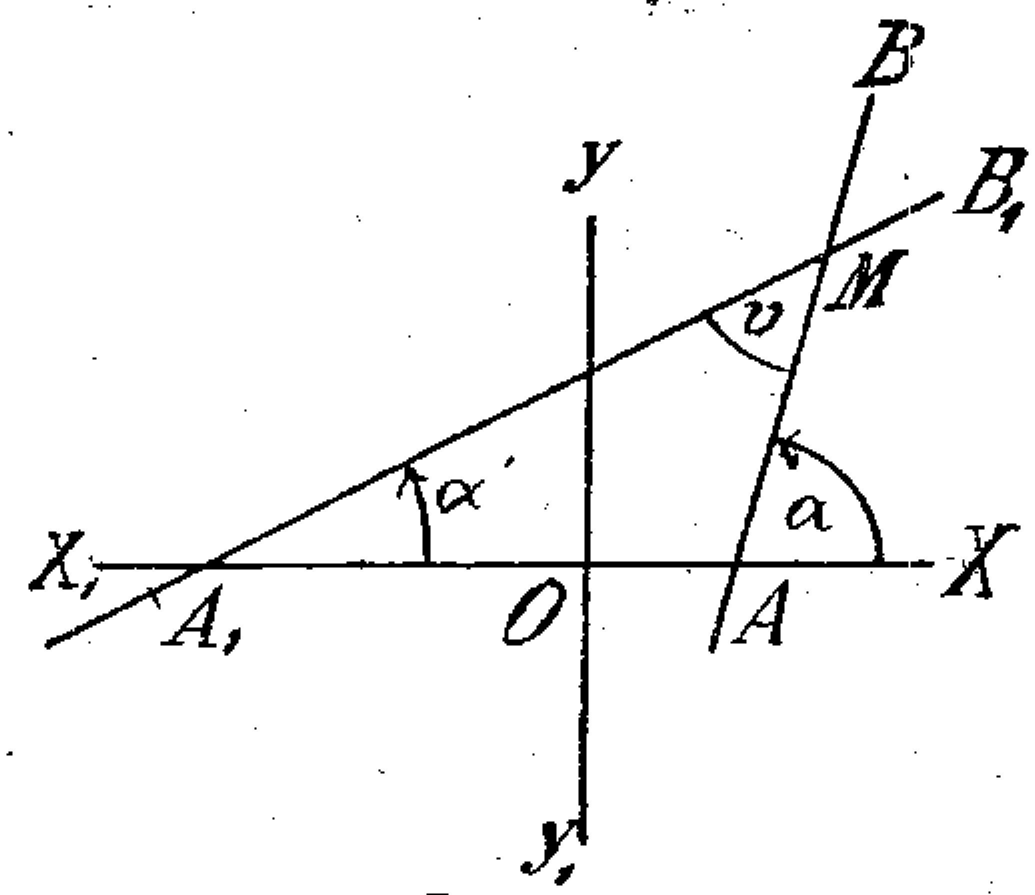
Како је прва једначина збир друге и треће, то се све три симетрале секу у једној тачки.

2. *Симетрала једног унутрашњег угла и симетрале спољашњих углова кад она друга два темена секу се у једној тачки.*

Ако је координатни почетак у троуглу, онда је $A_2 - A_1 = 0$ једначина симетрале унутрашњег угла а $A_1 + A_3 = 0$ и $A_2 + A_3 = 0$ једначине су за симетрале два спољашња угла; па како је ова трећа збир прве и друге, то се све три симетрале секу у једној тачки.

II. ДВЕ ПРАВЕ.

29. Пресек двеју правих.



Сл. 21.

Нека су $y = mx + b \; . \; . \; . \; 1)$

$y = m'x + b' \; . \; . \; . \; 2)$

једначине двеју правих AB и A_1B_1 (сл. 21); да се одреде координате њихова пресека M.

За све тачке на правој AB вреди једначина $y = mx + b$.

За све тачке на правој A_1B_1 вреди једначина $y = m'x + b'$.

За ону једну тачку M, у којој се секу обе праве, морају вредети у исто доба обе једначине : $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$. Према томе се координате тачке M налазе, кад се дате једначине реше; тако се налази

$$x_1 = \frac{b - b'}{m' - m}, \qquad y_1 = \frac{m'b - mb'}{m' - m}.$$

Напомене. I. Кад би било само $b = b'$, онда би било $x_1 = 0$, што значи да је пресек на ординатној оси, као што се види и из самих једначина.

II. Ако би било $b = b'$ и $m = m'$, онда би се добила како за x_1, исто тако за y_1, неодређена вредност $\frac{0}{0}$; те се две праве поклапају у свима тачкама т. ј. то и нису две праве, него једна.

III. Ако би било $b \gtrless b'$ и $m' \gtrless m$, али $m'b = mb'$, онда би се добило $y_1 = 0$, што значи да се праве секу на апсцисној оси.

IV. Ако је $m = m'$, а $b \gtrless b'$, онда је $x_1 = y_1 = \infty$, што значи да су праве паралелне.

30. Угао двеју правих.

Нека су $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$ једначине двеју правих AB и A_1B_1 (сл. 21), које захватају угао v.

Из троугла AMA_1 излази да је

$$v = \alpha - \alpha'$$

Отуд . . . . $$tg\, v = \frac{tg\, \alpha - tg\, \alpha'}{1 + tg\, \alpha\, tg\, \alpha'}$$

Па како је . . . . $tg\,\alpha = m, \qquad tg\,\alpha' = m'$, то је

$$tg\,v = \frac{m - m'}{1 + mm'}. \qquad (15)$$

Напомене. I. Ако је $m > m'$, онда је $tg\,v > o$, дакле угао v оштар.

Ако је $m < m'$, онда је $tg\,v < 0$, дакле угао v туп.

II. Ако је $m = m'$, онда је $tg\,v = 0$, дакле и $v = 0$ т. ј. праве су паралелне.

III. Ако је $1 + mm' = 0$, онда је $tg\,v = \infty$, дакле $v = 90^0$ т. ј. једна права нормална је на другој.

Из једначине $1 + mm' = 0$ излази, да је

$$m = -\frac{1}{m'}, \qquad \text{или} \qquad m' = -\frac{1}{m},$$

дакле: кад две праве стоје нормално једна на другој, онда је константа правца једне праве једнака негативној, реципрочној вредности константе правца друге праве.

Последице. I. Једначина праве, која пролази кроз дату тачку x_1, y_1, а паралелна је с датом правом $y = mx + b$, гласи:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1).$$

II. Једначина праве, која пролази кроз дату тачку x_1, y_1, а стоји нормално на датој правој $y = mx + b$, гласи:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}\,(x - x_1).$$

ЗАДАЦИ.

1. Како гласи једначина праве, која одсеца на ординатној оси дуж -2, а нагнута је према апсцисној оси под углом од 45^0?

2. Како гласи једначина праве, која даје на апсцисној оси одсечак -3, а на ординатној оси одсечак 2?

3. Конструиши праве
a) $y = 3x + 5$, *b)* $y = -2x + 3$, *c)* $y = 2x$.

4. Како гласи једначина праве, која пролази кроз тачке:
a) $(1, -1)$ и $(-2, 2)$, *b)* $(2, 7)$ и $(-1, 1)$,
c) $(-\frac{1}{2}, 3)$ и $(3, 0)$, *d)* $(0, -2)$ и $(-\frac{2}{3}, 3)$.

5. Права пролази кроз тачку $(-2, +5)$ и паралелна је *a*) са X-осом, *b*) са У-осом, *c*) са симетралом угла ХОУ или X_1OY; како гласи њена једначина?

6. Кад су праве $Ax + By + C = o$ и $A'x + B'y + C' = o$ паралелне, а кад су једна на другој нормалне? Какав им је узајамни положај, кад је $A : A' = B : B' = C : C'$?

7. Нацртај на милиметарској хартији праве $x+y=3$ и $2x-\frac{y}{2}=3$ и реши графички њихове једначине.

Исто тако: $2x+y=7$ и $3x-5y=-9$.

8. Нацртај правоугаонике код којих је *a)* разлика између основице и висине 3 *cm*, *b)* висина једнака $\frac{2}{5}$ од основице.

9. Одреди једначину праве, која пролази кроз тачку $(4, -1)$ и кроз пресек правих $y=2x-4$ и $y=-x-5$.

10. Одреди једначину праве, која пролази кроз тачку $(-4, 3)$ а паралелна је с правом $5y=2x-4$.

11. Одреди једначину праве, која пролази кроз тачку $(1, 4)$ а нормална је на правој $2y+x-2=0$.

12. Дата су темена троугла ABC: одредити једначине правих, које пролазе кроз почетак, а паралелне су са странама тога троугла, или су на њима нормалне. A $(2,3)$, B $(-4,6)$, C $(3,-5)$.

13. Кроз пресек правих $\frac{x}{3}+y=1$ и $\frac{x}{2}-y=1$ повучена је нормала на ову другу праву; како гласи њена једначина?

14. Крајне тачке једне дужи имају координате $(1, -2)$ и $(3, -4)$; одреди једначину њене симетрале.

15. Стране једног троугла имају ове једначине $y=-x-3$, $7y=-2x-6$, $3y=2x-14$; одреди координате његових темена, као и површину.

16. Темена једног четвороугла имају ове координате $(3,4)$ $(2,0)$, $(-2,-1)$, $(-2,2)$; одреди пресек његових дијагонала.

17. Једначину праве $2x-3y+1=0$ сведи на нормалан облик.

18. Одреди раздаљину *a)* тачке $(2,3)$ од праве $4y=3x+12$; *b)* тачке $(-7,-4)$ од праве $15y=-8x-30$; *c)* почетка од праве $2x+3y-7=0$.

19. Темена једног троугла имају координате: $(-2,2)$, $(4,2)$, $(1,6)$; одреди *a)* једначине страна, *b)* једначине висина, *c)* висине, *d)* координате средишта уписана и описана круга.

20. Одреди раздаљину између правих

$$x+y\sqrt{3}-8=0 \quad \text{и} \quad x+y\sqrt{3}-12=0.$$

Помоћу њихових раздаљина од почетка; или одреди пресек једне од тих правих с једном координатном осом и за тим његову раздаљину од друге праве.

21. Краци једног угла имају једначине: *a)* $3y+4x=2$ и $4y=3x-5$; *b)* $10y-24x=1$ и $6y-8x=5$; нађи једначине угаоних симетрала.

22. Једначине правих: $x-y=0$, $x+y=0$, $2x-7=0$, $2x+7=0$, $3y-4=0$, $3y+4=0$, $y+x\sqrt{3}=0$ свести на нормалан облик.

23. Одреди раздаљину тачака $(5,2)$ и $(-5,-$

24. Да ли праве *a)* $2x + 3y + 48 = 0$ и $x + 2y + 7 = 0$ пролазе кроз пресек правих $y = -3x + 5$ и $y = -2x - 4$?

25. Докажи аналитички ове три теореме:

a) Симетрале упоредних углова стоје једна на другој нормално;

b) Висине у троуглу секу се у истој тачки;

c) Симетрале троуглових страна секу се у једној тачки.

26. Нека је a основица једног троугла, а d^2 разлика између квадрата других двеју страна; одреду геометриско место темена.

27. Одреди геометриско место тачака, које имају од праве $4x - 3y + 5 = 0$ раздаљину *a)* 4, *b)* — 3.

28. Два темена једног троугла имају координате (1, 1) и (2, 3), а површина му је 3; нађи геометриско место трећег темена (може се решити и по чл. 11).

29. Дате су једначине двеју правих: $3x + 4y + 12 = 0$ и $3x + 4y - 6 = 0$; одреди геометриско место тачака, које су једнако удаљене од обе праве.

30. Над дужи AB $= c$ конструисани су троугли ABC тако, да стране AC и BC стоје у истој размери као оближњи одсечци, који постају на основици AB кад се повуче висина из C; нађи једначину геометриског места за тачку C.

31. Над дужи AB $= c$, конструисани су троугли ABC тако, да их висина из тачке C дели по размери $m : n$; нађи геометриско место за тачку C.

32. Дат је прав угао. Одредити геометриско место оних тачака, за које је *a)* збир, *b)* разлика њихових раздаљина од кракова константна количина.

Како гласи једначина за геом. место, кад збир тих раздаљина стоји према њиховој разлици у сталној размери $a : b$?

33. Дат је равнокрак троугао; одреди геом. место оних тачака, чија је раздаљина од основице једнака полузбиру њихових раздаљина од кракова.

34. Представи графички ток ових линеарних функција, познатих из физике:

1) $s = ct$; 2) $v = gt$, $v = c + gt$, $v = c - gt$;

3) $l_t = l_o\,(1 + \alpha t)$; 4) $v_t = v_o\,(1 + 3\alpha t)$. — (Овде је t независно променљива.)

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

КРИВЕ ЛИНИЈЕ

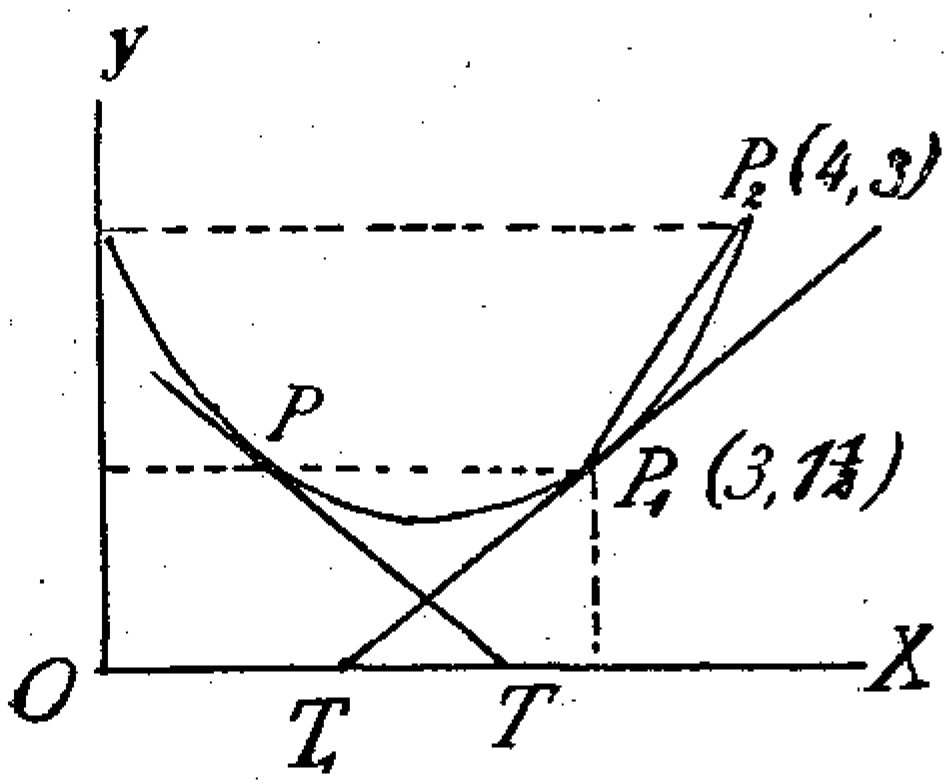
Ток кривих линија. — Тангенте и нормале кривих линија

I. ТОК КРИВИХ ЛИНИЈА

31. Диференцијални количник.

а) Пењање криве линије.

Кад је дата једначина са две променљиве, али не првога степена, онда је она геометриски представљена кривом линијом (чл. 13).



Сл. 22.

На сл. 22 представљена линија има једначину

$$y = \frac{x^2}{2} - 2x + 3.$$

По слици се познаје, да је ова функција непрекидна у области, коју представља слика. (Тригонометрија чл. 15.)

Тачка P_1 нека има координате x и y, а координате тачке P_2 нека су: $x + \triangle x$, $y + \triangle y$. Да се одреди пењање сечице која је одређена тачкама P_1 и P_2.

За тачку P_2 вреди:

$$y + \triangle y = \frac{(x + \triangle x)^2}{2} - 2(x + \triangle x) + 3, \text{ отуд}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = x - 2 + \frac{\triangle x}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}.$$

Из ове једначине види се, да пењање сечице није константна количина, јер зависи од x и мења се са апсцисом тачке P_1 чак и онда, кад је $\triangle x$ константно. Та једначина не казује пењање криве линије у свима тачкама, које леже између P_1 и P_2.

Ако ли се тачка P_2 приближује тачки P_1, онда диференције $\triangle x$ и $\triangle y$ постају све мање и приближују се нули као граничној вредности ($Lim \triangle x = 0$, па с тога и $Lim \triangle y = 0$, јер је функција непрекидна), али не постају нуле.

То примицање тачке P_2 тачки P_1 може се извести обртањем сечице око тачке P_1; сечица се при томе приближује граничном положају P_1T_1, т. ј. тангенти криве линије у тачки P_1. Како је $Lim \frac{\triangle x}{2} = 0$, то ће пењање сечице, т. ј. $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, тежити граничној вредности $x - 2$. Ова вредност представља константу правца за тангенту у тачки P_1. Та гранична вредност бележи се са $Lim\ \frac{\triangle y}{\triangle x}$ за $Lim \triangle x = 0$, или још краће: y' или $\frac{dy}{dx}$, а зове се *диференцијални количник* од y по x-у, или *изведена функција* или најкраће: *извод*.

Ваља имати на уму, да је $\frac{dy}{dx}$ само знак за y' и да има само облик разломка. С тога не треба читати: dy кроз dx, или dy са dx, него dy по dx. Назив диференцијални количник само подсећа на постанак из количника двеју диференција.

Могућност постојаног приближења разлике $\triangle x$ нули и појава граничне вредности за $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ може се овако објаснити:

На сл. 22. тачка P_1 има апсцису 3; ако се за $\triangle x$ узму редом ове вредности:

0·2, 0·02, 0·002, 0·0002, 0·00002 . . . .

онда ће се за $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ добити редом ове вредности:

1·1, 1·01, 1·001, 1·0001, 1·00001 . . . .;

Као што се види, количник диференција опада и све се више приближује вредности 1, кад се x приближује вредности 3.

Ако бисмо хтели дознати пењање криве линије у којој било другој тачки, онда бисмо морали у диференцијалном количнику $\frac{dy}{dx} = x - 2$ заменити x апсцисом те друге тачке. Пењање је функција од x, дакле променљиво; оно је константно *само* за линеарну функцију $y = mx + b$; ту је $\frac{dy}{dx} = m$ (чл. 18).

Диферентовати неку функцију значи одредити њен диференцијални количник.

b) Погодба да функција има диференцијални количник.

Кад се тражи диференцијални количник, онда се претпоставља, да је за $Lim \triangle x = 0$ и $Lim \triangle y = 0$ на оном месту, где се тражи диференцијални количник, т. ј. да је функција на том месту непрекидна.

За пример под *a)* имамо

$$\triangle y = (x - 2) \triangle x + \frac{(\triangle x)^2}{2}.$$

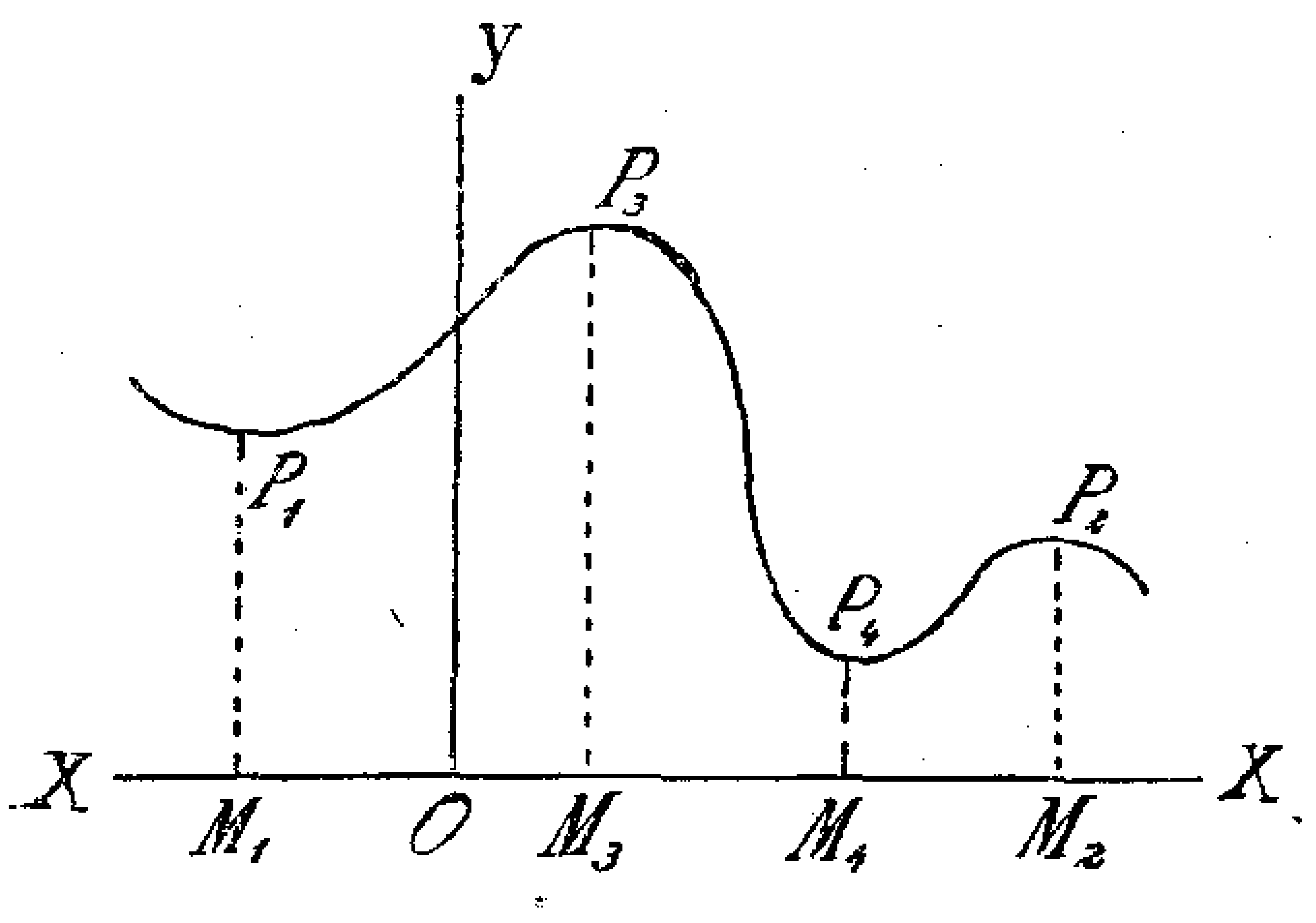
Кад је $Lim \triangle x = 0$, онда је и $Lim \triangle y = 0$, и то не само у области од $x = 0$ до $x = 4$ која је представљена на сл. 22, него и за све вредности од x. Функција је дакле непрекидна на сваком месту у целом свом току.

c) Екстремне вредности функције.

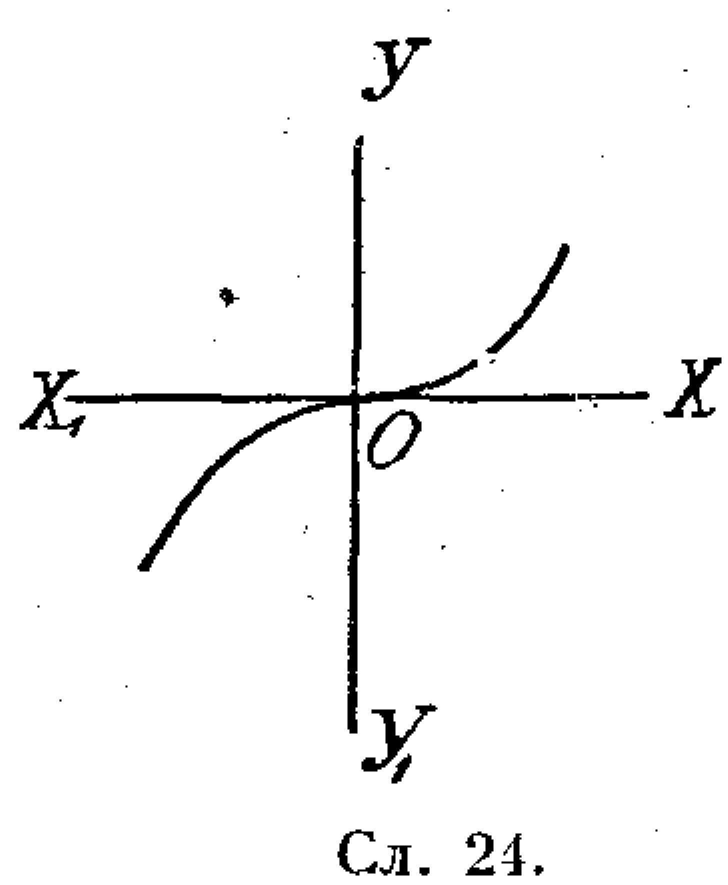
Докле се год линија пење (сл. 22), кад апсциса расте, дотле је нагибни угао дирке (као $P_1 T_1$) према апсцисној оси оштар, према томе y' позитивно. Ако линија пада, онда је тај угао туп (дирка PT), према томе y' негативно. Ако је за неку одређену апсцису тај угао нула, онда је дирка паралелна са апсцисном осом, и линија *може* на том месту имати једну највишу или најнижу тачку т. ј. она може имати максимум или минимум. Да ли функција има максимум или минимум, познаће се по диференцијалном количнику y'. Ако функција има максимум, онда се линија прво пење, за тим пада, и диференцијални количник мења знак на том месту; непосредно пре тога позитиван је, непосредно за тим негативан је.

Ако функција има минимум, онда линија прво пада, па се за тим пење; диференцијални количник на том месту мења знак, непосредно пре тога негативан је, а непосредно за тим позитиван је.

Такве максималне или минималне вредности (које се зову и екстремне вредности) само су релативне т. ј. за максимум је ордината (или функциона вредност) већа, а за минимум је мања но што су ординате непосредно оближњих тачака. Према томе могуће је да се на неком другом месту појави, апсолутно узевши, још већа или мања вредност. Може максимална вредност, апсолутно узевши, бити мања од минималне. Тако је на сл. 23 ордината тачке P_1 мања од непосредно оближњих, и она представља дакле минимум. Тачка P_2 има максималну ординату т. ј. већу од непосредно оближњих. Па ипак је, апсолутно узевши, минимум $P_1 M_1$ већи од максимума $P_2 M_2$.



Сл. 23.



Сл. 24.

Напомена. И ако је за неку функцију диференцијални количник $\frac{dy}{dx}=0$, то још не значи, да функција мора имати максимум или минимум. Пример за то даје линија $y=x^3$ (сл. 24). За ту је линију

$$y+\triangle y=(x+\triangle x)^3=x^3+3x^2\triangle x+3x\triangle x^2+\triangle x^{3*)}$$

према томе . . . . . $\triangle y=3x^2\triangle x+3x\triangle x^2+\triangle x^3$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=3x^2+3x\triangle x+\triangle x^2$$

а . . . . $\frac{dy}{dx}=3x^2$

пошто се чланови $3x\triangle x$ и $\triangle x^2$ губе због $Lim\triangle x=0$.

Кад је $x=0$, онда је и $\frac{dy}{dx}=0$, али функција на том месту нема ни максимум ни минимум, пошто она не прелази из пењања у падање, ни из падања у пењање. Линија се пење како пре $x=0$, тако и после $x=0$, јер је $\frac{dy}{dx}=3x^2$ позитивно, како за позитивне, тако и за негативне вредности од x. За $x=0$ добива се скретна тачка O.

Примери.

I. *Испитивање криве линије* $y=\frac{x^2}{2}-2x+3$ (сл. 22). У чл. 31 нађен је диференцијални количник

$$\frac{dy}{dx}=x-2.$$

Кад је $x-2=0$, дакле $x=2$, онда је $y=1$.

Треба испитати, да ли је та вредност ($y=1$) максимум или минимум.

Ако је δ једна врло мала позитивна количина, онда је за апсцису $2-\delta$ диференцијални количник $-\delta$, дакле негативан. За апсцису $2+\delta$ диференцијални је количник $+\delta$, дакле позитиван. Функција према томе, на месту $x=2$, прво опада, за тим расте, т. ј. она има за $x=2$ минималну вредност: $+1$.

Испитивање саме функционе вредности показује, да је предњи закључак тачан. Ако се у једначини ставе на место x вредности $2+\delta$ и $2-\delta$, добиће се

$$y=\frac{(2+\delta)^2}{2}-2(2+\delta)+3=1+\frac{\delta^2}{2}, \text{ и}$$

$$y=\frac{(2-\delta)^2}{2}-2(2-\delta)+3=1+\frac{\delta^2}{2}.$$

---

*) Под $\triangle x^2$ и $\triangle x^3$ треба разумети $(\triangle x)^2$ и $(\triangle x)^3$.

Како су обе ове оближње вредности веће од 1, то значи, да функција $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$ има за $x = 2$ минимум.

Тај је минимум још и најмања вредност, коју може функција у опште имати, као што се види из једначине

$$2y = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2.$$

II. *Од свих правоугаоника, који имају исти обим 2 u, који има највећу површину?*

Ако је једна страна x, онда је оближња $u - x$, а површина је

$$y = x(u - x) = ux - x^2.$$

За диф. количник налази се

$$\frac{dy}{dx} = u - 2x.$$

Он је $= 0$, кад је $x = \frac{u}{2}$; тада је и друга страна $\frac{u}{2}$. Правоугаоник има површину $\frac{u^2}{4}$.

Сад треба испитати, да ли је та вредност максимум или минимум.

За $x = \frac{u}{2} - \delta$ диференцијални је количник: $+2\delta$;

за $x = \frac{u}{2} + \delta$ диференцијални је количник: -2δ.

Према томе, на месту $x = \frac{u}{2}$, диф. количник прелази из позитивних вредности у негативне; функција је дакле максимум за $x = \frac{u}{2}$.

Испитивање саме функционе вредности показује да је предњи резултат тачан.

За оближње вредности $\frac{u}{2} - \delta$ и $\frac{u}{2} + \delta$ биће друга страна правоугаоника: $\frac{u}{2} + \delta$, односно $\frac{u}{2} - \delta$. Површине су тада:

$$y_1 = \left(\frac{u}{2} + \delta\right)\left(\frac{u}{2} - \delta\right) = \frac{u^2}{4} - \delta^2$$

$$y_2 = \left(\frac{u}{2} - \delta\right)\left(\frac{u}{2} + \delta\right) = \frac{u^2}{4} - \delta^2.$$

Како су обе ове вредности мање од $\frac{u^2}{4}$, то је $\frac{u^2}{4}$ максимум.

Последица. Два променљива броја, чији је збир сталан, дају највећи производ онда, кад су једнаки.

Од свих правоугаоника истог обима квадрат има највећу површину.

III. *Од свих правоугаоника, који имају исту површину, који има најмањи обим?*

Ако су x и y стране, $2u$ обим, а p површина, онда имамо једначине

$$xy = p, \qquad x + y = u$$

отуд $u = x + \frac{p}{x}$; за диференцијални количник налази се

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{p}{x^2}.$$

Из једначине $1 - \frac{p}{x^2} = 0$ добива се $x = \sqrt{p}$, па према томе и $y = \sqrt{p}$.

Правоугаоник је, дакле, квадрат.

Испитивање диференцијалног количника показује, да он на месту $x = \sqrt{p}$ прелази из негативних вредности у позитивне, што значи, да функција има минимум.

Последица. Два промењива броја, чији је производ сталан, дају минимални збир кад су једнаки.

Напомена. Практична је примена овог задатка ова: за канал, чији је профил правоугаоник од $1\,m^2$ површине, утрошиће се најмање материјала, кад тај профил буде квадрат.

Задаци.

1. У троуглу је један угао сталан; исто тако је сталан збир оних страна, које захватају тај угао. Колике треба да су те стране, па да троуглова површина буде максимум?

Напомена. Ако се у неком изразу, који треба да буде максимум или минимум, налазе стални чиниоци, онда се ови могу изоставити при изналажењу погодаба.

2. Од свих облица, које се могу уписати у правој кружној купи, која има највећи омотач?

3. Број a растави на два сабирка, тако да збир њихових квадрата буде минимум.

4. Испитај ток ових функција:

a) $y = -3x^2 + 6x - 7$ *b)* $y = x^2 - 4x + 7$

па их представи графички; одреди им екстремне вредности.

5. Дата је линија $y = x^2 - 4x + 7$ и на њој тачке чије су апсцисе *a)* -1, *b)* $+2$; одреди нагибни угао тангената у тим тачкама.

6. Може ли се на линији $y = -3x^2 + 6x - 7$ наћи тачка у којој је дирка нагнута према апсцисној оси под 60^0?

7. У датоме троуглу уписати правоугаоник максималне површине.

8. Суд има облик правоуглог паралелепипеда, а основа његова има сталну површину p. Колике треба да су бочне ивице, да би цео притисак на бокове, од једне течности која се налази у суду до висине h, био минимум? (Види зад. III.)

9. Кад се усправан цилиндарски суд пресече једном равни, која пролази кроз његову осовину, онда се добива паралелограм чија је површина p; колике треба да су стране тога паралелограма, да би збир притисака на дно и на бокове био минимум, кад се суд напуни? (Решење као у зад. 9.)

32. Диференцијални количник обичнијих израза.

До сада смо диференцијални количник дате функције, кад год нам је био потребан, извели потпуно. Али је често потребно, да се диференцијални количник обичнијих израза, који се у практичном рачуну често јављају, зна на памет, као образац.

То су ови изрази:

1. $y = a$; ако је a константа, онда је и

$$y + \triangle y = a;\ \text{отуд}\ \triangle y = 0,\ \frac{\triangle y}{\triangle x} = 0;\ \text{према томе и}\ \frac{dy}{dx} = 0$$

т. ј. *диференцијални количник константе једнак је нули.*

2. *Диференцијални количник степене количине:*

a) За целе позитивне изложитеље.

α) $y = x^2$

$$y + \triangle y = (x + \triangle x)^2 = x^2 + 2x \, . \triangle x + \triangle x^2$$

$$\triangle y = 2x \triangle x + \triangle x^2$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 2x + \triangle x;\ \text{како је}\ lim\ \triangle x = 0,\ \text{то је}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

β) $y = x^3$

По чл. 31. *c*, напом. биће $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

b) За целе негативне изложитеље.

α) $y = x^{-1}$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y + \triangle y = \frac{1}{x + \triangle x}$$

$$\triangle y = \frac{1}{x + \triangle x} - \frac{1}{x} = - \frac{\triangle x}{x(x + \triangle x)}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = - \frac{1}{x(x + \triangle x)};$$ за $lim \triangle x = 0$ биће

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{x^2}$$

β) $$y = x^{-2}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y + \triangle y = \frac{1}{(x + \triangle x)^2};$$ отуд

$$\triangle y = \frac{1}{(x + \triangle x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-2x \,.\, \triangle x - \triangle x^2}{x^2 (x + \triangle x)^2}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{-2x - \triangle x}{x^2 (x + \triangle x)^2};$$ за $lim \triangle x = 0$ биће

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{x^4} = - \frac{2}{x^3} = -2x^{-3}$$

c) За разломљене позитивне изложитеље.

$$y = x^{\frac{2}{3}}, \text{ или}$$
$$y^3 = x^2.$$

Како једнаке количине морају имати једнаке изводе, то је

$$3y^2 \, dy = 2x \, dx$$

отуд $$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \frac{x}{y^2} = \frac{2}{3} \frac{x}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3} - 1}$$

Из ових примера види се, да у опште функција $y = x^n$ има диференцијални количник

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$$

3. *Диференцијални количник корена.*

Дати корен треба претворити у степен са разломљеним изложитељем. На пр.

$$y = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}.$$

4. $y = u \,.\, v$, где су u и v функције од x.

$$y + \triangle y = (u + \triangle u)(v + \triangle v) = uv + v \triangle u + u \triangle v + \triangle u \,.\, \triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = v \frac{\triangle u}{\triangle x} + u \frac{\triangle v}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x} \triangle v.$$

Како због $\lim \triangle v = 0$ отпада на десној страни трећи члан, то је

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Последица. $y = ax$, отуд $\dfrac{dy}{dx} = a$.

5. $y = \dfrac{u}{v}$, где су u и v функције од x.

Може се писати $yv = u$, па диферентовати као под 4.

$$y\frac{dv}{dx} + v\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{y}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Напомена. Добио би се исти резултат, кад би се $y = \dfrac{u}{v}$ писало овако: $y = uv^{-1}$, па радило као под 4.

6. $y = ax$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = a.$

7. У чл. 31. нашли смо, да је за функцију $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$ диф. количник $\dfrac{dy}{dx} = x - 2$, т. ј. *диференцијални количник алгебарског збира једнак је алгебарском збиру диференцијалних количника његових чланова.*

8. Ако се у основи какве степене количине, или у радиканду, налазе сложени изрази, онда се такве функције могу свести на горње простије облике; на пр.

a) $y = (ax + b)^3$; треба ставити $z = ax + b$

$y = z^3$

Како је $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{\triangle y}{\triangle z} \cdot \dfrac{\triangle z}{\triangle x}$, то ће при прелазу ка граничним вредностима вредети и ово:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

У овом је примеру $\dfrac{dy}{dz} = 3z^2$, $\dfrac{dz}{dx} = a$

Множењем ових двеју једначина налази се:

$$\frac{dy}{dx} = 3az^2 = 3a\,(ax + b)^2$$

b) $y = \sqrt{a^2 + x^2}$; треба ставити $z = a^2 + x^2$

$y = \sqrt{z}$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \text{ а } \frac{dz}{dx} = 2x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{z}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

9. $y = \sin x$

$$y + \triangle y = \sin(x + \triangle x) = \sin x \cos \triangle x + \cos x \sin \triangle x$$

$$\triangle y = \sin x \cos \triangle x + \cos x \sin \triangle x - \sin x$$

$$\triangle y = \sin x (\cos \triangle x - 1) + \cos x \sin \triangle x$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\sin x}{\triangle x} (\cos \triangle x - 1) + \cos x \frac{\sin \triangle x}{\triangle x}$$

Како је за $\lim \triangle x = 0$, $\cos \triangle x = 1$, то је $\cos \triangle x - 1 = 0$; а $\lim \frac{\sin \triangle x}{\triangle x} = 1$*); према томе је

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

10. $y = \cos x$

$$y + \triangle y = \cos(x + \triangle x) = \cos x \cos \triangle x - \sin x \sin \triangle x$$

$$\triangle y = \cos x \cos \triangle x - \sin x \sin \triangle x - \cos x$$

$$\triangle y = \cos x (\cos \triangle x - 1) - \sin x \,.\, \sin \triangle x$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\cos x}{\triangle x} (\cos \triangle x - 1) - \sin x \,.\, \frac{\sin \triangle x}{\triangle x}$$

Како је за $\lim \triangle x = 0$, $\cos \triangle x = 1$, то је $\cos \triangle x - 1 = 0$, а $\lim \frac{\sin \triangle x}{\triangle x} = 1$; према томе је

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

Задаци.

Нађи диференцијалне количнике ових пет функција:

1. $y = \sqrt[3]{5ax}$; 2. $y = x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$; 3. $y = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$

4. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; 5. $y = \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$.

6. Код једнаког кретања брзина је пут, пређен у јединици времена; т. ј. $c = \frac{s}{t}$.

---

*) Лук је већи од синуса, а мањи од тангенте, дакле

$$\sin \triangle x < \triangle x < tg \triangle x$$

Делећи са $\sin \triangle x$, налазимо:

$$1 < \frac{\triangle x}{\sin \triangle x} < \frac{1}{\cos \triangle x}$$

или

$$1 > \frac{\sin \triangle x}{\triangle x} > \cos \triangle x$$

Разломак $\frac{\sin \triangle x}{\triangle x}$ налази се дакле у границама између $\cos \triangle x$ и 1. Па како је $\lim \cos \triangle x = 1$ то је $\lim \frac{\sin \triangle x}{\triangle x} = 1$.

Кад је кретање неједнако, па прираштају времена $\triangle t$ одговара прираштај пута $\triangle s$, онда је $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ средња брзина за то време; да бисмо нашли тренутну брзину у времену t, треба прећи са количника диференција количнику диференцијала. Тако се за неједнако кретање налази $v = \frac{ds}{dt}$

На пр. за једнако убрзано кретање имамо: $s = \frac{g}{2} t^2$; према томе $v = \frac{ds}{dt} = gt$.

7. Кад се неко тело креће тако, да између пута s и времена t постоји једначина $s = at^3$, колика је тада тренутна брзина у времену t?

8. *Утицај неизбежних погрешака при мерењу на израчунате резултате* (рачунање грешке).

Израчунавање лоптине запремине из полупречника.

Ако је $\triangle r$ грешка при мерењу полупречника, а $\triangle v$ грешка у израчунатој запремини, онда се количник диференција $\frac{\triangle v}{\triangle r}$ разликује од диференцијалног количника $\frac{dv}{dr} = v'$. С тога се може писати . . . $\frac{\triangle v}{\triangle r} = v' + \varepsilon$, отуд $\triangle v = v' \triangle r + \varepsilon \triangle r$.

Што је мање $\triangle r$, тим је мање и ε, и у толико је више оправдано да се за оцену грешке у запремини узме једначина:

$$\triangle v = v' \cdot \triangle r.$$

Отуд правило: *кад се диференцијални количник запремине, узет по полупречнику, помножи грешком која је учињена при мерењу полупречника, онда тај производ даје доста тачно грешку запремине.*

a) Полупречник равностране облице нека је $r = 5\,cm$. Ако се при мерењу тог полупречника учини грешка 0·1 mm, колико она утиче на површину и запремину? (Релативно, апсолутно, у процентима.)

b) У праве купе нека је $r = 4\,cm$, $h = 6\,cm$; при мерењу нека је код полупречника и висине учињена грешка по 0·1 mm. Колика је највећа могућна грешка у запремини?

Треба засебно израчунати утицај једне и друге грешке на запремину $\left(\frac{2\,r\pi h}{3} \triangle r, \frac{r^2\pi}{3} \triangle h\right)$ па сабрати обе грешке.

c) Одређивање густине s чврста тела, Тежина тела у ваздуху нека је p, а у води p_1; тада је $s = \frac{p}{p - p_1}$. Грешке $\triangle p$ и $\triangle p_1$ при једном и другом мерењу не могу се узети да су једнаке. Грешка $\triangle p_1$ већа је од $\triangle p$, због већег трења у води.

Добива се

$$\triangle s = \frac{p \triangle p_1 - p_1 \triangle p}{(p - p_1)^2}.$$

d) У правоуглом троуглу катете су: $a = 200\, m$, $b = 300\, m$; одредити грешку у хипотенузи, ако је она за катете 0·1%.

Добива се

$$\triangle c = \frac{a \triangle a + b \triangle b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

33. Други диференцијални количник.

На многим досадашњим примерима види се, да је диференцијални количник једне функције у опште функција независно променљиве. На пр. $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 3$.

$$\frac{dy}{dx} = x - 2.$$

Према томе се може и тај диференцијални количник диферентовати по истој променљивој, ако се количник диференција приближује некој граничној вредности.

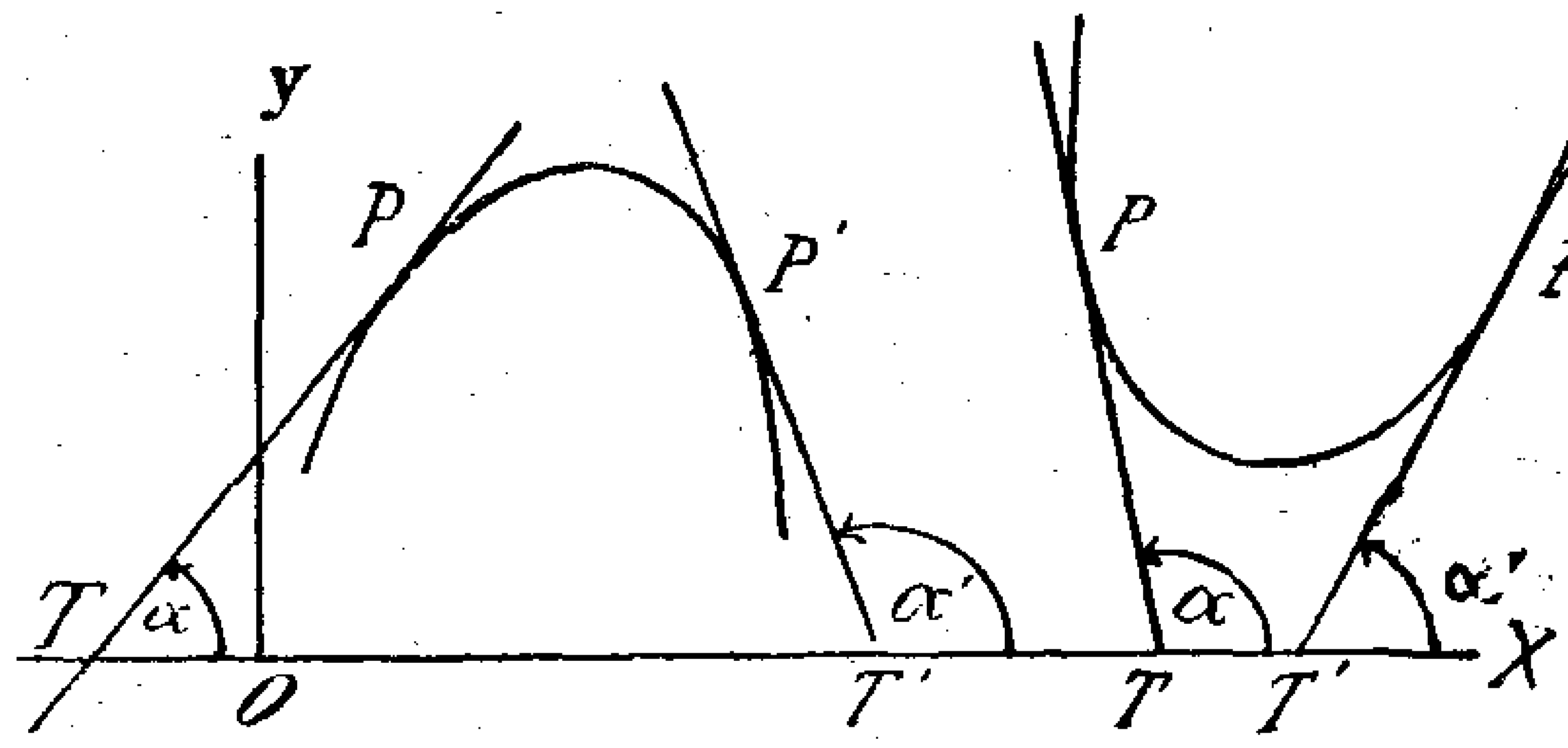
Тај други диференцијални количник могао би се означити овако $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, што се пише краће овако: $\frac{d^2y}{dx^2}$ или y''.

За горњи пример је $\frac{d^2y}{dx^2} = 1$.

34. Значај и примена другог диференцијалног количника.

Први диференцијални количник $\frac{dy}{dx}$ значи геометриски пењање ($tg\, \alpha$) оне линије, која графички представља функцију. Према томе $\frac{d^2y}{dx^2}$ значи промену тога пењања т. ј. растење или опадање. Кад је $\frac{d^2y}{dx^2}$ позитивно, онда пењање расте на том месту; ако је негативно, онда пењање опада. У горњем примеру оно расте.

У примерима чл. 31. показато је, како се испитује, да ли она вредност, која се добива из једначине $\frac{dy}{dx} = 0$, одговара максимуму или минимуму. То се питање брже решава, кад се употреби други диф. количник. Ако линија има максималну ординату (сл. 25), онда се она прво пење, за тим пада; $tg\,\alpha$ je позитивно, а $tg\,\alpha'$ je негативно т. j. $\frac{dy}{dx}$ опада, па je с тога други други диф. количник негативан.



Сл. 25. Сл. 26.

Ако линија има минималну ординату (сл. 26) онда она прво пада, за тим се пење; $tg\,\alpha$ je негативно, $tg\,\alpha'$ je позитивно, т. j. $\frac{dy}{dx}$ расте, па je с тога други диф. количник позитиван.

Отуд излази за изналажење екстремних вредности једне функције ово правило:

Треба наћи први и други диференцијални количник, па ставити први једнак нули и решити ту једначину; тако добивене корене треба унети у други диференцијални количник, па видети да ли ће тај други количник бити позитиван или негативан; позитиван знак одговара минимуму, а негативан максимуму на оним местима дате функције, која су одређена поменутим коренима.

На пр. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5$.

Овде je $\frac{dy}{dx} = x^2 + x - 2$, а $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 1$.

Једначина $x^2 + x - 2 = 0$ има корене -2 и $+1$.

За $x = -2$ биће $\frac{d^2y}{dx^2} = -3$.

За $x = +1$ биће $\frac{d^2y}{dx^2} = +3$,

што значи, да je за $x = -2$ дата функција максимум, а за $x = +1$ минимум.

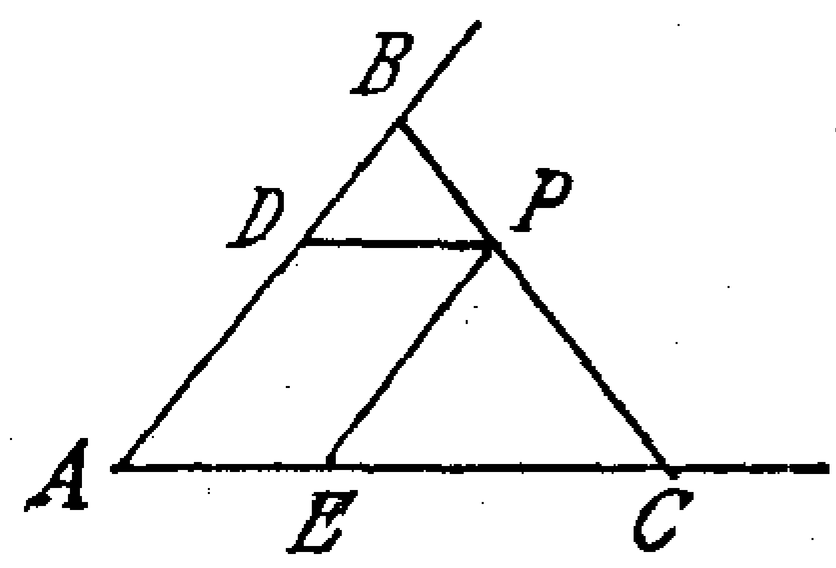
Напомене. I. Може се десити да буде и $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; но о том изузетном случају неће овде бити говора.

II. Дешава се, нарочито код разломака, да други диференцијални количник није тако прост израз, да се може лако одредити његов знак. У том случају помажемо се овако:

Нека је $y' = \frac{u}{v}$; тада је $y'' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

Кад се у овом изразу x замени оном вредношћу, која даје максимум или минимум, онда ће бити $uv' = 0$ (јер је због $y = 0$ и разломак $\frac{u}{v} = 0$, т. ј. $u = 0$); према томе ће y'' имати исти знак као $\frac{vu'}{v} = \frac{u'}{v}$. Ако је поред тога v позитивно за све стварне вредности од x, онда треба само гледати какав знак има u'.

Пример. Између кракова угла α дата је тачка P (сл. 27). Кроз ту тачку повући праву BC тако да се добије троугао ABC минималне површине.



Сл. 27.

Нека је PD ‖ AC, PE ‖ AB, AD $= a$ AE $= b$, AB $= x$, AC $= y$; тада је

$$p = \frac{xy}{2} \sin\alpha = \frac{b \sin\alpha}{2} \cdot \frac{x^2}{x - a}.$$

Како је овде $\frac{b \sin\alpha}{2}$ константна количина, то ће p бити минимум, кад $\frac{x^2}{x - a} = z$ буде било минимум.

Имамо пре свега $\frac{dz}{dx} = \frac{x^2 - 2ax}{(x - a)^2}$.

Једначина $\frac{x^2 - 2ax}{(x - a)^2} = 0$ даје $x = 2a$.

Знак другог диференцијалног количника биће исти као у $\frac{u'}{v} = \frac{2x - 2a}{(x - a)^2}$; па како је именитељ позитиван за сваку вредност од x, то ће се гледати само на знак бројитеља.

Задаци.

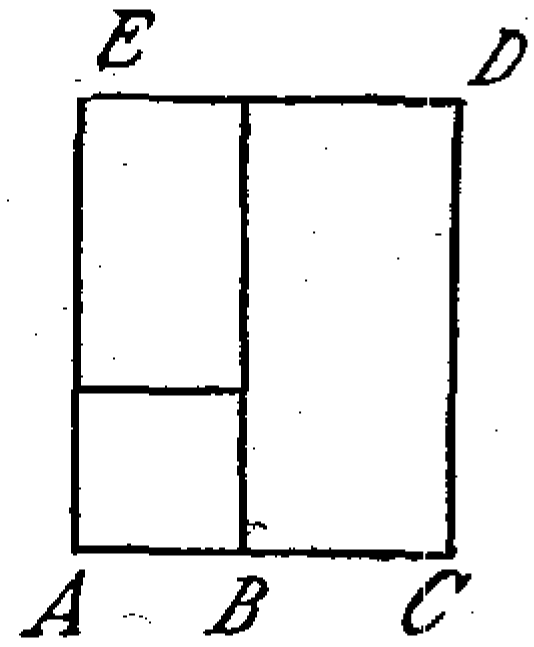
1. Који број, кад се сабере са својом реципрочном вредношћу, даје најмањи збир?

2. Од дрвена трупца, чији је попречни пресек круг полупречника r, треба истесати греду у које је попречни пресек правоугаоник: какве морају бити њене димензије, да би могла носити максимални терет? (Јачина греде сразмерна је основи и квадрату висине.) Правоугаоник је у кругу уписан.

3. У датоме кругу уписати правоугаоник максималне површине.

4. У датоме кругу уписати правоугаоник максимална обима.

5. Поред праволиниског зида налази се поље, које треба у облику правоугаоника заградити оградом од 100 m дужине. Колике треба да су димензије тог правоугаоника, да би му површина била максимум?



Сл. 28.

6. Сл. 28. представља основу једног стана. $AC = x$, $CD = y$ треба изабрати тако, да при сталној површини ACDE збир свих унутрашњих зидова буде минимум. AB треба да је $\frac{2}{5}$ AC. Израчунај x и y.

7. Прозор има облик правоугаоника са полукругом над њим. Како треба изабрати стране тог правоугаоника, ако је обим цела прозора u, да би кроз тај прозор пролазило што више светлости?

8. Горе отворен канал, чији је профил правоугаоник (површина p), треба тако саградити, да поквашена површина канала буде минимум; израчунај димензије канала.

9. Тетраедар пресећи једном равни, која је паралелна са две ивице које се укрштају, тако да површина пресека буде максимум.

10. У датој лопти уписати праву купу максималне запремине.

11. Дата је тачка M у раздаљини d од средишта O једне лопте. Нормално на MO поставити раван тако, да купа, чији је врх M, а основа пресек те равни са лоптом, има максималну запремину.

Зад. 10. особити је случај задатка 11.

12. Од свих цилиндарских судова, који су горе отворени, а имају исту површину, који има највећу запремину?

13. Реши зад. 12, кад су судови горе затворени.

14. Од свих облица исте запремине која има минималну површину?

15. Од цемента има да се начини цилиндарски скупљач за воду, тако да може примити одређену количину воде; колике морају бити његове унутрашње димензије, да би се утрошила минимална количина цемента?

16. Од дате полулопте истесати квадратну призму максималне запремине.

17. У правој кружној купи уписати цилиндар *a)* максималне запремине, *b)* максималног омотача.

18. У датој полу-лопти уписати праву облицу максималног омотача.

19. Вертикалан бочни зид једног суда, који је водом напуњен, има облик правоугаоника чији је обим u; колике морају бити његове стране, да би притисак на бочни зид био максимум?

20. Кад се цилиндарски суд, који је напуњен водом, пресече једном равни која пролази кроз његову осовину, онда се добива правоугаоник одређена обима u; колики је полупречник основе, а колика је висина, ако је притисак на дно максимум?

21. Сабирно сочиво има жижну раздаљину f; у којем одстојању треба да се налази предмет да би његов лик био што ближе предмету? (Ако је g одстојање предмета, b одстојање лика, f жижна раздаљина, онда је $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$).

22. За специфичну топлоту c_t воде, на температури од t^0 Целзијевих, вреди образац:

$$c_t = 1 - 0{\cdot}0006684\, t + 0{\cdot}00001092\, t^2;$$

на којој је температури c_t минимум?

23. *Убрзање код праволиниског неједнаког кретања.*

Код убрзана кретања брзина у опште расте неједнако. Убрзање a, т. ј. прираштај брзине у јединици времена, није једнак у разним моментима. Ако је $\triangle v$ прираштај брзине у времену $\triangle t$, онда је $\frac{\triangle v}{\triangle t}$ средње убрзање у времену $\triangle t$. Да бисмо нашли убрзање у неком одређеном моменту, треба одредити граничну вредност количника $\frac{\triangle v}{\triangle t}$, кад је $lim \triangle t = 0$ и $lim \triangle v = 0$; та је гранична вредност $\frac{dv}{dt}$ т. ј. диференцијални количник брзине по времену. Ако је убрзање независно од времена т. ј. константно, онда је кретање једнако убрзано; ако би диф. количник $\frac{dv}{dt}$ био негативан, кретање би било једнако успорено.

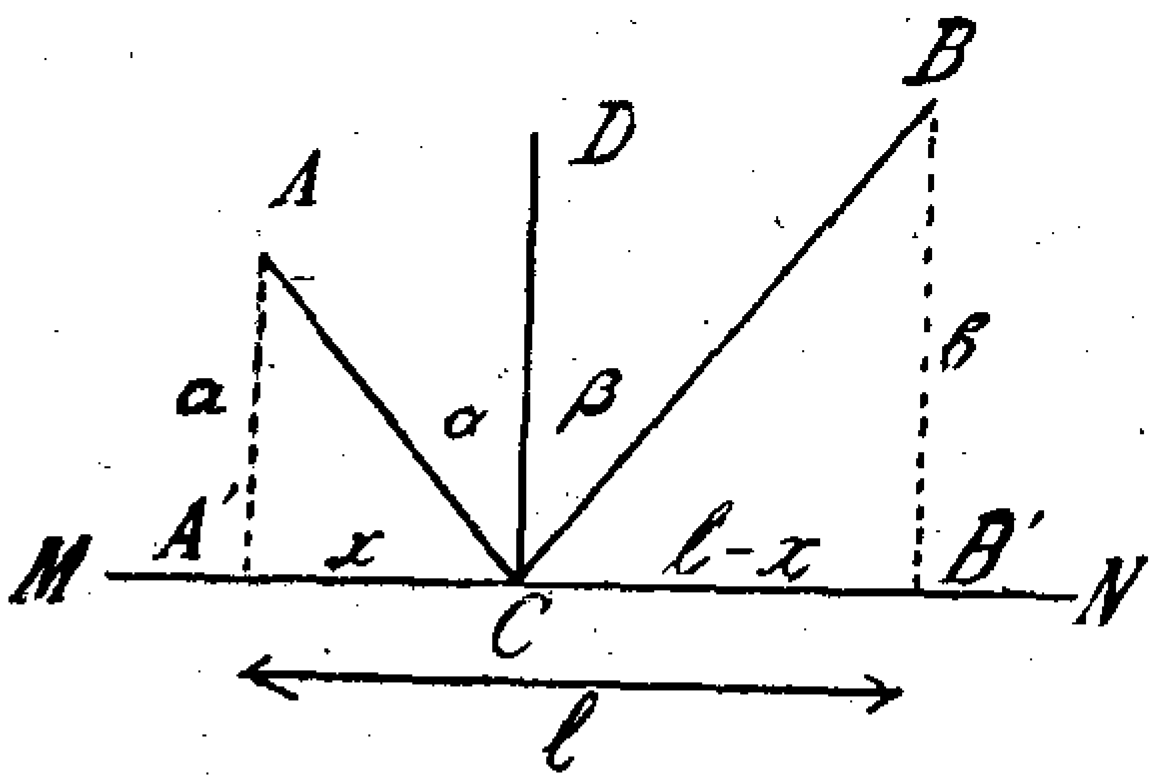
Како је $a=\frac{dv}{dt}$, $v=\frac{ds}{dt}$, то је $a=\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$

т. ј. убрзање је други диференцијални количник пута по времену.

Пример. Ако између пута s и времена t постоји једначина $s=bt^2$, колика је брзина, а колико убрзање у времену t? Шта значи овде b?

24. Кад између пута и времена постоји једначина $s = At + Bt^2$, колика је брзина, а колико је убрзање у времену t? Шта значе A и B

Испитај исто тако једначину $s = At - Bt^2$.



Сл. 29.

25. Тачке A и B (сл. 29) везане су с тачком C на правој MN. Кад ће бити AC + BC минимум?

Нека је $A'C = x$, тада је $B'C = l - x$, а збир

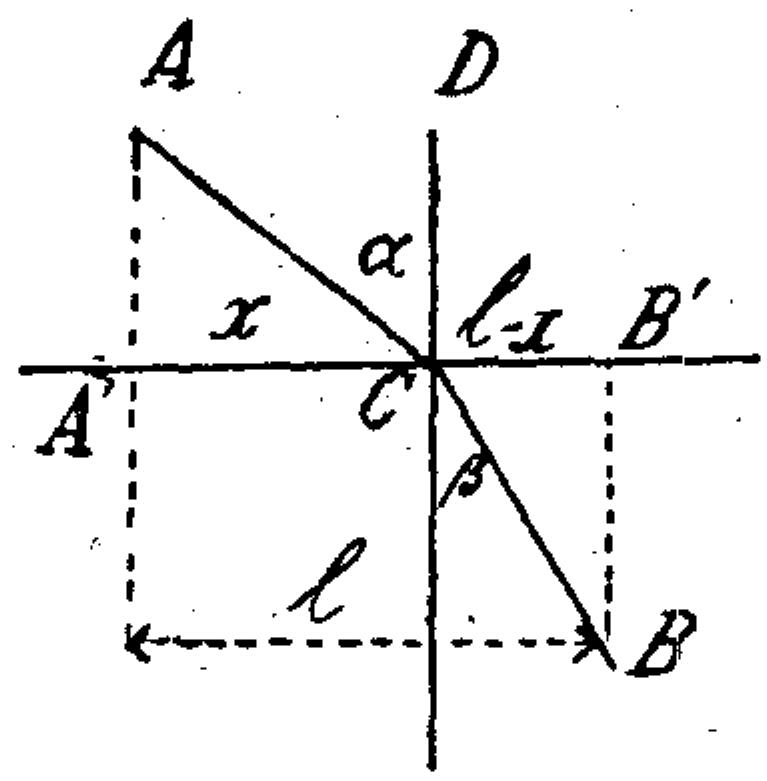
$$s = AC + BC = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(l-x)^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}} =$$

$= \sin\alpha - \sin\beta = 0$; дакле $\alpha = \beta$.

За сваку тачку између A′ и C нека је угао $ACD = \alpha_1$, угао $BCD = \beta_1$ тада је $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 > \beta$ и према томе разлика $\sin\alpha_1 - \sin\beta_1 < 0$; за сваку тачку између C и B′ разлика је $\sin\alpha_1 - \sin\beta_1 > 0$. Диференцијални количник $\sin\alpha - \sin\beta$ прелази дакле код тачке C из негативних вредности у позитивне, што значи да функција на том месту има минимум (закон о одбијању таласног кретања).

26. Наћи најкраће време за таласно кретање из тачке A једне средине у тачку B друге средине, кад су c и c' брзине кретања.



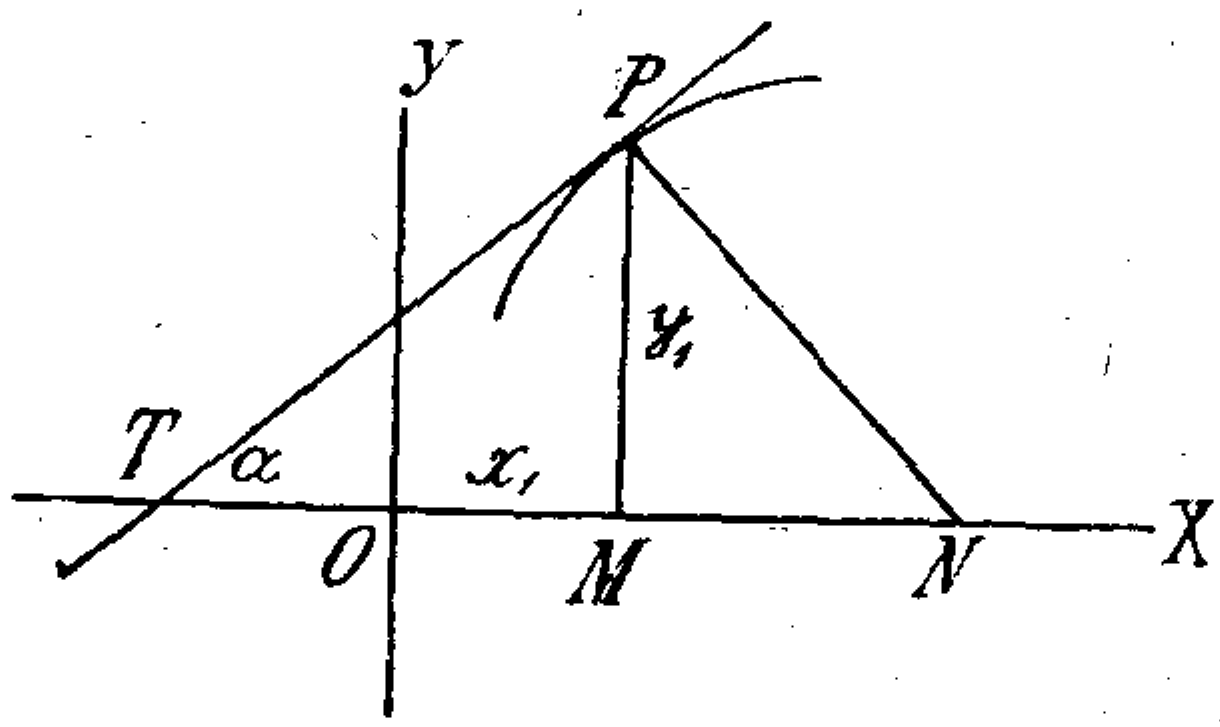
Сл. 30.

Имамо $t = \frac{AC}{c} + \frac{BC}{c'}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{l-x}{c'\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = \frac{\sin\alpha}{c} - \frac{\sin\beta}{c'} = 0.$$

Отуд $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{c'}$ (закон преламања).

II. ТАНГЕНТЕ И НОРМАЛЕ КРИВИХ ЛИНИЈА.



Сл. 31.

35. Ако су (x_1, y_1) координате додирне тачке P, онда једначина дирке PT гласи:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

где је $m = tg\,\alpha$

Како је по чл 31.

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx}$$

то је једначина дирке

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$$

кад се у изразу за $\frac{dy}{dx}$ стави $x = x_1$.

Једначина нормале PN гласи:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1).$$

Овде су дирка и нормала неограничене линије.

При проучавању додира између праве и кривих линија важне су ове четири додирне количине (сл. 31):

1. Дужина *дирке* PT (укратко тангента) т. ј. дуж, ограничена додирном тачком P и пресеком T са апсцисном осом.

2. *Под-тангента* (суб-тангента) TM т. ј. пројекција тангенте на апсцисној оси.

3. Дужина *нормале* PN (у кратко нормала) т. ј. дуж, ограничена додирном тачком и пресеком N нормале са апсцисном осом.

4. *Под-нормала* MN (суб-нормала) т. ј. пројекција нормале на апсцисној оси.

Дужине ових линија зову се *додирне количине* за тачку P. Тангента и нормала увек су позитивне. Суптангента и субнормала позитивне су или негативне, према томе, да ли су на десној или левој страни од ординате PM.

Ако је ξ апсциса тачке T, онда је увек суптангента

$$MT = \xi - x_1.$$

Ако је ξ апсциса тачке N, онда је увек и субнормала

$$MN = \xi - x_1.$$

Ако су t и n дужине тангенте и нормале, t' и n' дужине суптангенте и субнормале, онда је $t = \sqrt{y_1^2 + t'^2}$, $n = \sqrt{y_1^2 + n'^2}$.

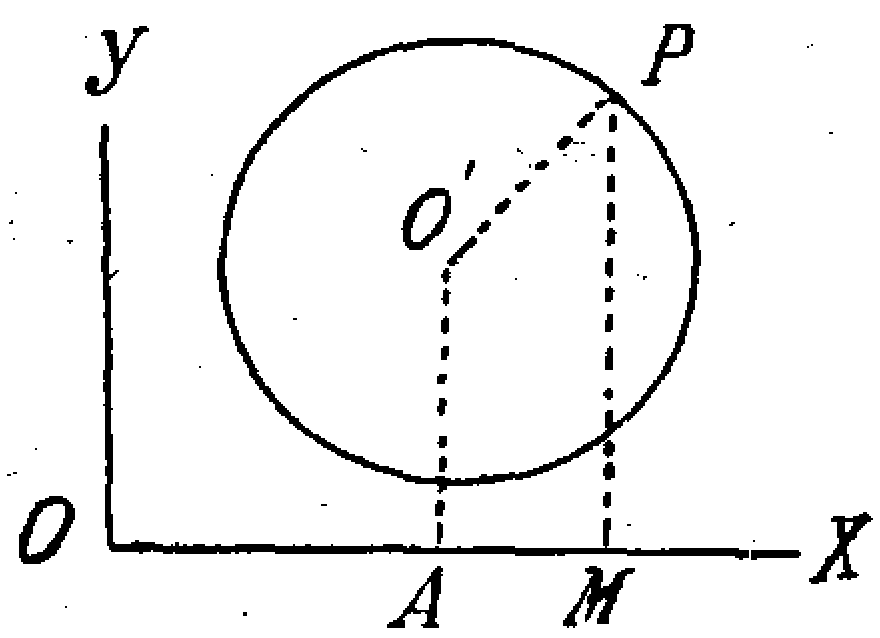
ПЕТИ ОДЕЉАК

КРУГ

Једначина круга. — Круг и права. — Дирка и нормала. — Задаци.

I ЈЕДНАЧИНА КРУГА.

36. Општа једначина. Круг је крива линија на којој све тачке имају исту раздаљину од средишта. Да бисмо добили једначину круга, треба ту карактеристичну особину изразити једначином.



Сл. 32.

Нека су ОМ $= x$, РМ $= y$ координате тачке Р која се налази на кругу чији је полупречник r; и нека су ОА $= p$ и О'А $= q$ координате средишта. Тада за сваку тачку на кругу вреди:

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ (чл. 9) . . . 1.

То је општа једначина круга.

Напомене I. Кад се у једначини под 1. изврше назначена степеновања, добићесе

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \quad . \; . \; . \; 2$$

из које видимо, да је једначина круга другог степена по x и по y, да нема члана са xy, и да су коефицијенти од x^2 и y^2 једнаки.

II. Кад је дата једначина круга:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; 3$$

онда се координате средишта налазе упоређењем коефицијената у једначинама 2) и 3);

$$-2p = \frac{b}{a}, \qquad -2q = \frac{c}{a}$$

дакле . . . . . . $p = -\dfrac{b}{2a}$, $\qquad q = -\dfrac{c}{2a}$,

а полупречник се тада налази из једначине

$$p^2 + q^2 - r^2 = d$$

пошто се p и q замене њиховим вредностима.

Тако се налази $r = \dfrac{1}{2a}\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}.$

III. Да би једначина под 3.) у опште представљала круг, треба да је $b^2 + c^2 > 4ad$. Ако би било $b^2 + c^2 < 4ad$, онда би било r имагинарно, дакле круг немогућан.

Ако је $b^2 + c^2 = 4ad$, онда је $r = 0$ т. ј. једначина под 3 представљала би једну тачку.

37. Особити облици једначине круга.

1. Ако је средиште круга на позитивној апсцисној оси, и то у раздаљини $p = r$ од почетка, онда једначина под 1. добива облик

$$x^2 + y^2 = 2\,rx \quad \ldots \quad 4.$$

ова се једначина зове *темена једначина* круга.

2. Ако је средиште у координатном почетку, онда је $p = 0$. $q = 0$, и тада се добива из једначине под 1) ова:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots \quad 5.$$

која се зове *средишна* једначина круга.

38. Претрес једначине $x^2 + y^2 = r^2$.

1. Из једначине $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ излази, да свакој вредности од x одговарају две једнаке, али супротно означене вредности за y. Отуд излази да је круг апсцисном осом подељен на две симетричне половине.

2. Из једначине $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ излази, да свакој вредности од y, за коју се у опште добивају стварне вредности од x, одговарају две једнаке, али супротно означене вредности за x, што значи, да је круг ординатном осом подељен на две симетричне половине.

3. За тачку, у којој круг сече апсцисну осу, биће $y = 0$, с тога $x = \pm r$.

За тачку, у којој круг сече ординатну осу, биће $x = 0$, с тога $y = \pm r$.

Круг сече, дакле, апсцисну и ординатну осу у тачкама, које су од почетка удаљене за дужину r.

Кад је $x = 0$, онда се за y добива апсолутно највећа вредност т. ј. r.

Кад x апсолутно расте, онда y опада, линија се дакле све више приближује апсцисној оси.

4. Кад је апсолутна вредност од $x > r$, онда је y имагинарно; а кад је апсолутна вредност од $y > r$, онда је x имагинарно. Дакле, највећа апсолутна вредност, која се може узети за x или y, јесте полупречник r.

5. Ако је M_1 $(+x_1, +y_1)$ једна тачка на кругу, онда је и тачка M_1 $(-x_1, -y_1)$ на кругу, јер се обе координате налазе у једначини на другом степену. Ако координате средине на дужи M_1M_2 означимо са ξ и η, онда је

$$\xi = \frac{x_1 - x_2}{2} = 0, \qquad \eta = \frac{y_1 - y_2}{2} - 0$$

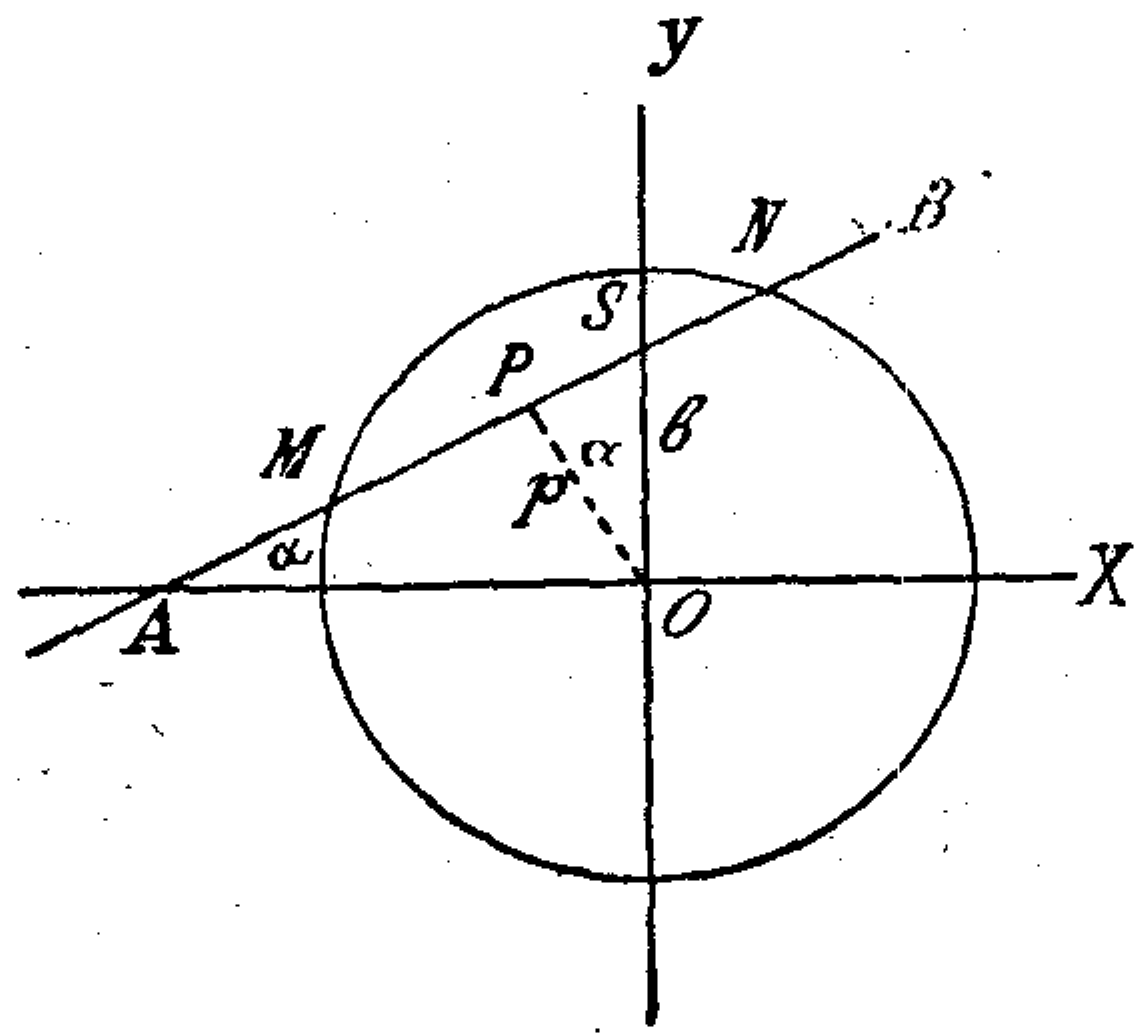
т. ј. средина дужи M_1M_2 налази се у почетку. Отуд излази да је круг централно-симетрична слика и да је његово средиште уједно и средиште симетрије.

II. КРУГ И ПРАВА.

39. Пресек праве и круга.

Нека су $x^2 + y^2 = r^2$ и $y = mx + b$ једначине круга и праве. Координате њихових пресека наћи ћемо, кад решимо дате једначине. Тако налазимо

$$x = \frac{-bm \pm \sqrt{r^2(1+m^2) - b^2}}{1+m^2}$$



Сл. 33.

Ако је $r^2(1+m^2) > b^2$, онда је поткорена количина позитивна, и тада се за x добивају две стварне вредности, што значи да права сече круг у двема тачкама.

Ако је $r^2(1+m^2) = b^2$, онда је поткорена количина нула, и тада се за x добивају две једнаке вредности, што значи, да се права и круг додирују.

Ако је $r^2(1+m^2) < b^2$, онда је поткорена количина негативна, и тада се за x добивају имагинарне вредности, што значи, да права нема с кругом ни једне заједничке тачке.

Овај резултат може се геометриски протумачити овако: Како је $m = tg\,\alpha$, то је поткорена количина

$$r^2(1+m^2) - b^2 = r^2(1+tg^2\alpha) - b^2 = \frac{r^2}{cos^2\alpha} - b^2 = \frac{r^2 - b^2 cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{r^2 - p^2}{cos^2\alpha},$$

ако је p нормала OP, спуштена од тачке O до праве AB (сл. 33).

Права ће сећи круг, ако је $r^2 - p^2$ позитивно, т. ј. ако је $r > p$; права ће додиривати круг, ако је $r^2 - p^2 = 0$ т. ј. ако је $r = p$, а права ће проћи мимо круг, ако је $r < p$.

III. ДИРКА И НОРМАЛА.

40. Једначина дирке. Константа правца за дирку у датој тачки какве криве линије одређена је диференцијалним количником за ту тачку.

Из средишне једначине круга, $x^2 + y^2 = r^2$, излази $y^2 = r^2 - x^2$; па како изводи једне и друге стране морају бити једнаки, то је

$$2\,y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x, \text{ отуд } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Константа правца за дирку у тачки (x_1, y_1) биће према томе: $-\frac{x_1}{y_1}$; с тога једначина дирке:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

или . . . . $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$

напослетку . . $xx_1 + yy_1 = r^2$.

Напомена. Ради лакшег памћења ове једначине треба у једначини круга $x^2 + y^2 = r^2$ квадрате x^2 и y^2 раставити на производе xx и yy, па у њима заменити једно x са x_1, и једно y са y_1.

Додатак. Ако бисмо узели општу једначину круга

$$(y - q)^2 = r^2 - (x - p)^2$$

онда бисмо добили $2(y - q)\frac{dy}{dx} = -2(x - p)$, отуд

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - p}{y - q}.$$

Према томе је за дирку у тачки (x_1, y_1) константа правца:

$$-\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$$

а сама једначина дирке гласи:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1), \text{ или}$$

$$(x_1 - p)(x - x_1) + (y - y_1)(y_1 - q) = 0$$

кад се овој једначини дода $(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2$, добиће се $(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2$ као једначина дирке.

И ова се једначина памти према горњој напомени.

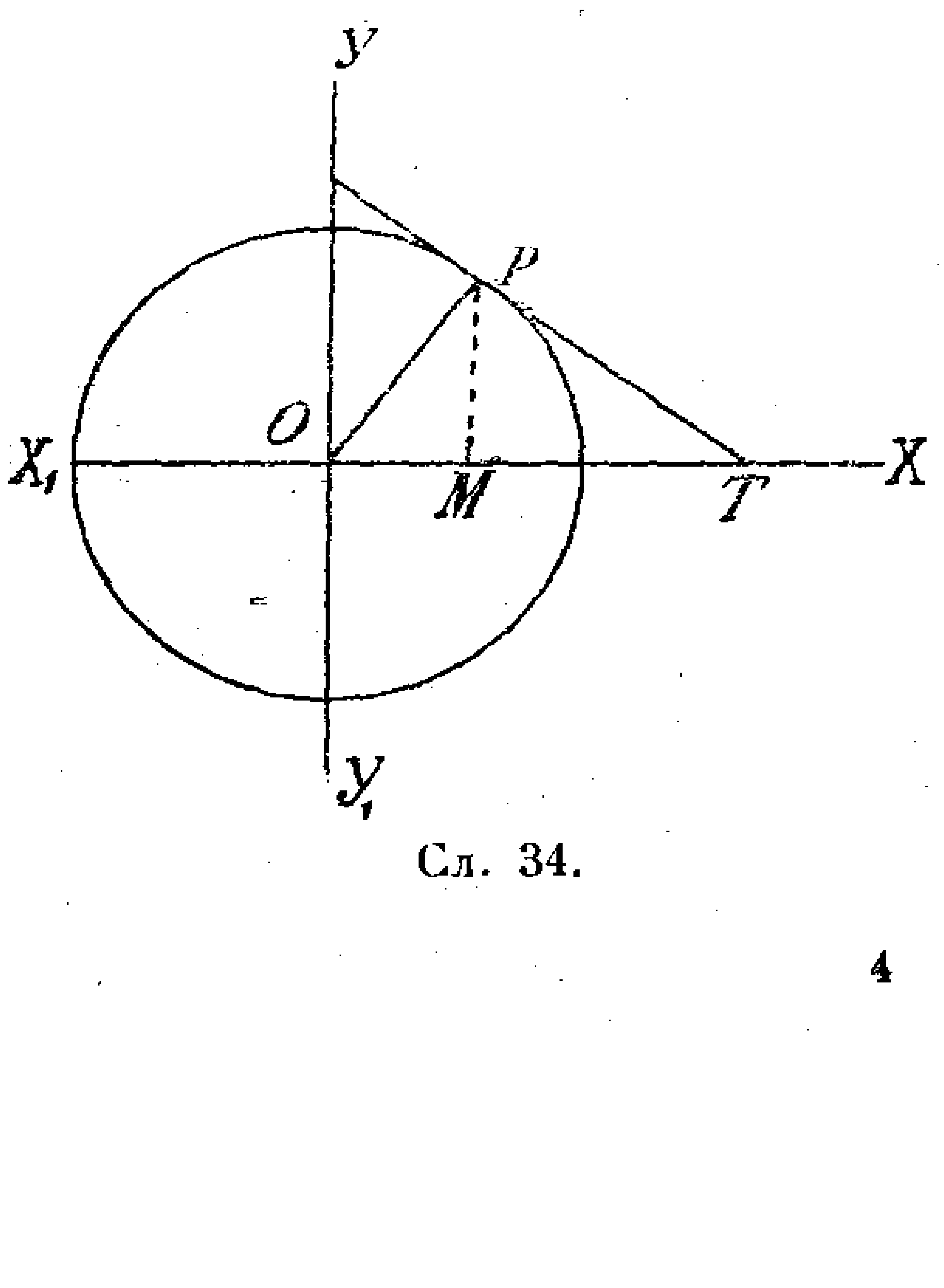
41. Једначина нормале. Како је константа правца за нормалу једнака негативној реципрочној вредности константе правца за дирку, то је једначина нормале:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) \text{ или } y = \frac{y_1}{x_1}x.$$

42. Суптангента и субнормала. Како нормала пролази кроз средиште, то је (сл. 34) суптангента $t' = MT$, субнормала $n' = OM$.

Ако су x_1 и y_1 координате додирне тачке P, онда је $OM = x_1$ (апсолутно).

Како се субнормала рачуна у смислу од ординате додирне тачке ка пресеку нормале с апсцисном осом (чл. 35), то је за тачку P (сл. 34) субнормала: $n' = -x_1$.



Сл. 34.

Суптангента рачуна се у смислу од ординате додирне тачке до пресека дирке с апсцисном осом; према томе је за тачку P суптангента $t' = \mathrm{OT} - \mathrm{OM} = \mathrm{OT} - x_1$.

OT наћи ћемо, кад у једначини дирке ставимо $y = 0$; тако налазимо, да је $\mathrm{OT} = \frac{r^2}{x_1}$; према томе суптангента:

$$t' = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1}.$$

Нормала $n = r$.

Тангента $t = \mathrm{PT} = \sqrt{\mathrm{MP}^2 + \mathrm{MT}^2} = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^4}{x_1^2}} = y_1 \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2}}$

$$= y_1 \sqrt{\frac{r^2}{x_1^2}} = \frac{y_1 r}{x_1} \text{ (апсол.)}$$

ЗАДАЦИ.

1. Дата је једначина круга:

$a)$ $x^2 + y^2 = 6x + 8y + 24$; $b)$ $x^2 + y^2 = 2x$;

$c)$ $36x^2 + 36y^2 + 36x + 144y + 89 = 0$

одреди полупречник и координате средишта.

2. Конструиши кругове:

$a)$ $x^2 + y^2 - 6y = 16$; $b)$ $2x^2 + 2y^2 - x = 0$;

$c)$ $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y = 19$; $d)$ $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.

3. Дата је једначина круга у облику пропорције $x : y = (y - 6) : (8 - x)$. Конструиши тај круг.

4. Одреди пресеке круга $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = o$ са координатним осама.

5. Како гласи једначина круга, који пролази кроз координатни почетак, а средиште му има координате $(4, -5)$?

6. Одреди једначину круга, који пролази кроз почетак и кроз тачке $(2, -1)$ и $(3, -2)$.

7. Одреди једначину круга који пролази кроз ове три тачке: $(4, -2)$, $(-1, 3)$, $(-5, -1)$.

Узми једначину у овом облику $x^2 + y^2 + ax + by + c = o$ па израчунај a, b, c.

8. Нађи једначину круга, који пролази кроз спољашњу и унутрашњу тачку сличности за два дата круга, а пречник му је раздаљина између тих тачака.

9. Како гласе једначине свих кругова, који додирују $a)$ апсцисну осу у тачки $x = m$, $b)$ ординатну осу у тачки $y = n$, $c)$ обе осе?

10. Нађи једначину круга, који додирује праву $2x + 3y - 26 = o$, а средиште му је $(3, -2)$.

11. Круг додирује праву $y = mx + b$, а средиште му има координате p и q; како гласи његова једначина?

12. Полупречником $r = 5$ описан је круг, који додирује праву $4y + 3x = 25$ у тачки чија је апсциса $x = 3$; како гласи једначина тога круга?

13. Постави једначину круга, који пролази кроз тачку (6, 8) и додирује праву $4x + 3y + 1 = 0$ у тачки чија је апсциса $x = -1$.

14. Стране једног троугла имају ове једначине:

$$y = 3, \qquad x + y + 1 = 0, \qquad x - y - 1 = 0;$$

како гласи једначина уписаног круга?

15. Нађи једначину круга, који пролази кроз тачке $(-2, 0)$ и $(2, 0)$, а додирује праву $3x - 4y + 6 = 0$.

16. Нађи једначину круга, који пролази кроз тачке (0, 0) и (2, 0), а додирује круг $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ с поља.

17. Дата су два круга

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4;$$

нађи *a)* једначину централе, *b)* раздаљину координатног почетка од централе.

18. Колика је дужина тетиве, заједничке круговима:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{и} \quad (x - 1)^2 + y^2 = 4?$$

19. Колико заједничких тачака имају круг $x^2 + y^2 = 100$ и праве *a)* $y = x + 2$, *b)* $4x + 3y = 50$, *c)* $3y = x + 40$?

20. Круг $4x^2 + 4y^2 = 25$ и права $2y = 14x - 25$ секу се; одреди *a*) координате њихових пресека, *b*) дужину заједничке тетиве, *c*) средишни угао, који одговара тој тетиви.

21. Реши графички и рачунски ове једначине:

a) $x^2 + y^2 = 20$ и $y = -3x - 2$;
b) $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$.

22. Под којом ће се погодбом додиривати кругови:

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2 \quad \text{и} \quad (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 = r_2^2?$$

23. Нађи једначину геометриског места за средишта свих кругова полупречника $r = 1$, који додирују, споља или изнутра, круг $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

24. Нађи једначину геом. места за средишта свих кругова, који пролазе кроз тачку (2, 3), а имају полупречник $r = 4$.

25. Нађи једначину геом. места за све тачке, из којих се круг $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ виђи под углом α.

26. Нађи једначину геом. места за теме свих троуглова, који имају исту основицу a, и у којима је *a)* збир квадрата других двеју страна $= m^2$, *b)* размера других двеју страна $= m : n$. Конструиши те линије.

27. У троуглима ABC страна $BC = a$ константна је; нађи једначину геом. места за средину стране AC, ако AB има сталну вредност c.

28. Одреди геом. место за све тачке у унутрашњости равнокрака троугла, за које је раздаљина од основе средња пропорционала између њених раздаљина од кракова.

29. Докажи: да би се два круга секла под правим углом, мора између њихове централне раздаљине c и њихових полупречника R и r постојати однос: $c^2 = R^2 + r^2$.

30. Докажи, да се кругови $x^2 + y^2 = R^2$ и $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ секу под правим углом, ако је $p^2 + q^2 = R^2 + r^2$.

31. Нађи једначину круга са средиштем $(2, -5)$ који се сече с кругом $x^2 - 6x + y^2 - 12y = 13$ под правим углом.

32. Шта је геом. место за средишта свих кругова, који пролазе кроз тачку $(4, 6)$, а секу круг $x^2 + y^2 = 8$ под правим углом?

33. Дат је круг $x^2 + y^2 = 25$ и на њему тачке $(-4, 3)$ и $(-3, 4)$; одреди *a)* једначине тангената у тим тачкама, *b)* угао између обе тангенте, *c)* додирне количине.

34. Из тачке ξ, η треба да се повуку дирке кругу $x^2 + y^2 = r^2$; одреди *a)* координате додирних тачака, *b)* једначину додирне тетиве, *c)* једначине тангената.

Упутство: једначина тангенте гласи $xx_1 + yy_1 = r^2$ . . . 1). Како дирка треба да прође и кроз тачку (ξ, η), то мора бити $\xi x_1 + \eta y_1 = r^2$ . . . 2); па како додирна тачка (x_1, y_1) припада кругу, то мора бити $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ . . . 3). Из једначина 2) и 3) треба израчунати x_1 и y_1 па унети у једначину 1). Специјалан пример: $x^2 + y^2 = 25$, $\xi = -1$, $\eta = 7$.

35. Права $2x + y = 10$ сече круг $x^2 + y^2 = 25$ у двема тачкама, кроз које су повучене дирке. У којој се тачки, и под којим углом секу те дирке?

36. У тачкама, где круг $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$ сече X-осу, повучене су дирке; одреди њихове једначине.

37. Дат је круг $x^2 + y^2 = 100$ и права $y = \frac{3x}{4} + 15$; паралелно с том правом повучене су дирке, како гласе њихове једначине?

38. Нађи једначине оних тангената круга $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$, које су нормалне на правој $y - 2x - 7 = 0$.

39. Под којом ће погодбом права $Ax + By + C = 0$ додиривати круг $x^2 + y^2 = r^2$?

a) Једначину праве доведи на нормалан облик, па стави да је њена раздаљина од средишта једнака полупречнику.

b) Једначина дирке гласи $\frac{xx_1}{r^2} + \frac{yy_1}{r^2} - 1 = 0$, а једначина праве: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$; да би ова права била дирка, треба да је:

$$-\frac{A}{C} = \frac{x_1}{r^2}, \qquad -\frac{B}{C} = \frac{y_1}{r^2}.$$

Кад се из ових једначина израчуна x_1 и y_1, па те вредности унесу у једначину круга, онда се добива између A, B, C и r исти однос као под *a)*.

c) Једначине круга и праве реши по x и y (координате заједничких тачака), па стави дискриминанту $= 0$. Тиме се сечица претвара у тангенту.

Тако се налази $r^2 = \dfrac{C^2}{A^2 + B^2}$. Ако је једначина праве дата у облику $y = mx + b$, онда је погодба за додиривање:

$$r^2 = \frac{b^2}{m^2 + 1}.$$

40. Коју вредност мора имати r у једначини $x^2 + y^2 = r^2$, да би права $3x + 4y - 12 = 0$ додиривала круг?

41. Под којом ће погодбом права $Ax + By + C = 0$ додиривати круг $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$?

Добива се . . . $r^2 = \dfrac{(Ap + Bq + C)^2}{A^2 + B^2}$.

Када права иде мимо круг, а кад га сече?

42. Какву вредност мора имати C у једначини $2x + y + C = 0$, да би та права додиривала круг $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$?

43. Нађи координате додирних тачака за оне две дирке, које се могу повући из коорд. почетка на круг

$$x^2 + y^2 - 4y - 6x + 12 = 0.$$

44. Како гласе једначине заједничких тангената за ова два круга: $x^2 + y^2 = 4$ и $(x - 4)^2 + y^2 = 1$?

45. Два круга имају једначине $x^2 + y^2 = 1$ и $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. Нађи координате оне тачке, из које се могу повући на оба круга једнаке тангенте, дужине 5.

46. Докажи аналитички, да права, која везује пресек двеју тангената са средиштем круга, стоји нормално на додирној тетиви.

47. Под којим се углом секу линије $2y - 3x = 6$ и $x^2 + y^2 = 25$?

Овде се тражи угао између дате праве и тангенте у њену пресеку с датим кругом.

48. Под којим се углом секу кругови $x^2 + y^2 = 64$ и $(x - 10)^2 + y^2 = 9$?

49. Одреди геом. место оне тачке, из које две дирке, повучене на круг $x^2 + y^2 = r^2$ стоје једна на другој нормално.

Упутство: имај на уму четвороугао, чија су темена: средиште круга, пресек тангената и додирне тачке.

50. У првом квадранту повуци на круг $x^2 + y^2 = r^2$ тангенту, тако *a)* да њен комад између координатних оса буде минимум, *b)* да троугао, ограничен тим комадом и одсечцима на координатним осама, има минималну површину.

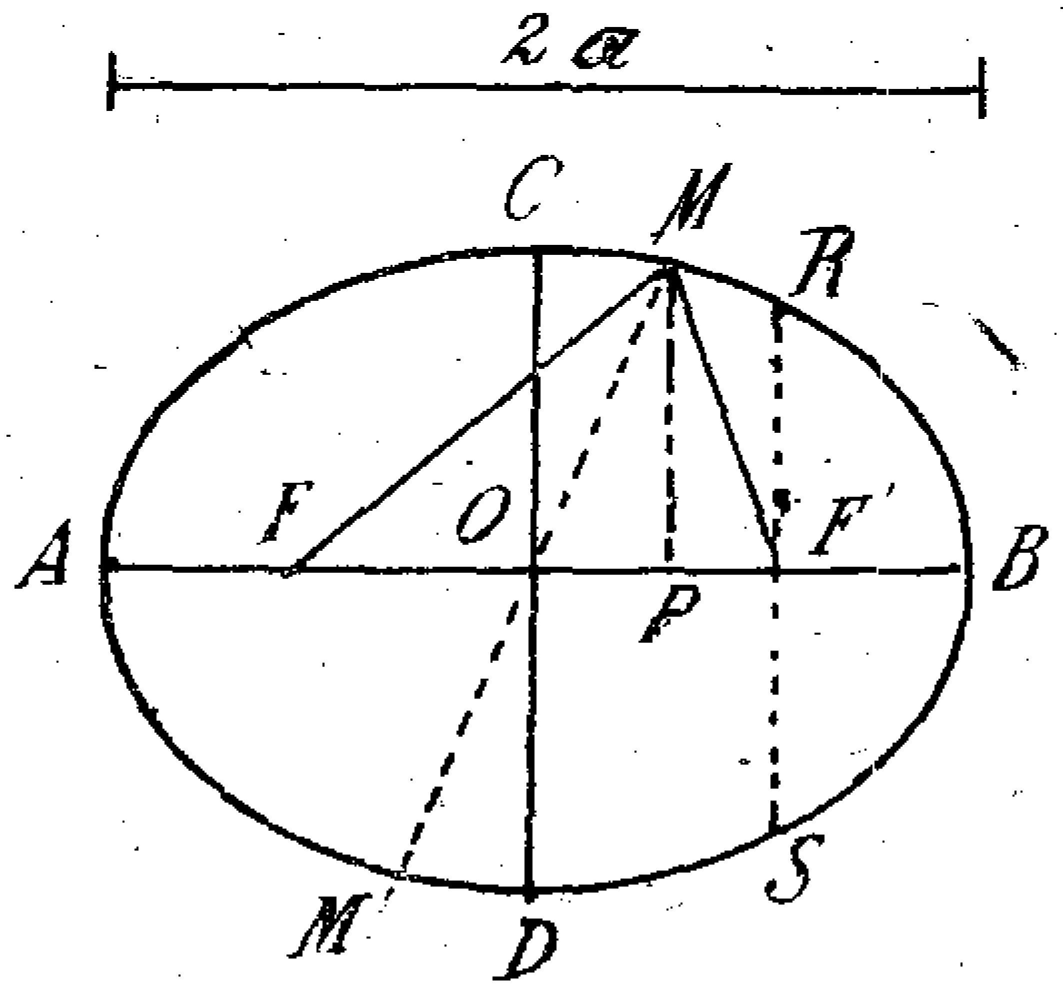
ШЕСТИ ОДЕЉАК

ЕЛИПСА

Једначина елипсе. — Дирке и нормале. — Задаци

I. ЈЕДНАЧИНА ЕЛИПСЕ.

43. Дефиниције. *Елипса* је линија у равнини, која има ту особину, да је за сваку њену тачку збир одстојања од две дате тачке сталан.



Сл. 35.

Ако су F и F′ (сл. 35) две дате тачке, а $2a$ стални збир одстојања сваке тачке на елипси од тачака F и F′, онда је M тачка на елипси, ако је $MF + MF' = 2a$.

Две дате тачке, F и F′, зову се *жиже*, а дужи MF и MF′ зову се *потези* за тачку M.

44. Израчунавање потега.

Нека је O (сл. 35) средина дужи F F′ и у исто доба почетак координата, AB нека је апсцисна оса.

Ако је M која било тачка на елипси, дакле $MF + MF' = 2a$, и ако су $x = OP$, $y = MP$ координате тачке M, онда је (ако се још стави $OF = OF' = e$):

$FM^2 = (x + e)^2 + y^2$

$F'M^2 = (x - e)^2 + y^2$, с тога

$FM^2 - F'M^2 = 4ex$, или

$(FM + F'M)(FM - F'M) = 4ex$; па како је $FM + F'M = 2a$, то је

$FM - F'M = \frac{2ex}{a}$; из те једначине и ове:

$FM + F'M = 2a$

излази: . . . $FM = a + \frac{ex}{a}$, $\quad F'M = a - \frac{ex}{a}$.

45. Једначина елипсе.

Из троугла FPM (сл. 35) излази

$$MP^2 = FM^2 - FP^2, \text{ или}$$

$$y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 - (x + e)^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - e^2$$

$$= a^2 - e^2 - \frac{a^2 - e^2}{a^2}x^2, \text{ с тога}$$

$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$.

Како увек мора бити $FM + F'M > FF'$, или

$$2a > 2e, \text{ или}$$
$$a > e$$

то мора разлика $a^2 - e^2$ бити позитивна.

Ако с тога ставимо $a^2 - e^2 = b^2$, онда добивамо

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

као *једначину елипсе*. Она се може писати и овако:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

46. Претрес једначине $\mathbf{b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2}$.

1. Ако се та једначина реши по y, за тим по x, добиће се

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Одавде видимо, да свакој вредности од x, за коју је y стварно, одговарају две једнаке, али супротно означене вредности за y.

Исто тако се добивају за свако y, за које је x стварно, две једнаке, а супротно означене вредности за x. — То значи, да је елипса и једном и другом координатном осом подељена на две симетричне половине.

2. Како је једначина елипсе чисто квадратна по x и y, то мора, ако је $(+x, +y)$ (M) једна њена тачка, и тачка $(-x, -y)$ (M') бити на елипси. Кад се веже M са M', онда средина дужи MM' пролази кроз почетак O. Дакле свака тетива, која пролази кроз O, преполовљена је у тачки O. С тога се O зове средиште елипсе; а свака тетива, која пролази кроз средиште, зове се *пречник*.

Једначина $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ зове се *средишна* једначина елипсе.

3. Кад је $x = 0$, онда је $y = \pm b$ т. ј. елипса сече ординатну осу у раздаљинама $+b$ и $-b$ од почетка.

Кад је $y = 0$, онда је $x = \pm a$, т. ј. елипса сече апсцисну осу у једнаким раздаљинама $+a$ и $-a$ од почетка.

4. Кад је $x = 0$, онда се за y добива највећа апсолутна вредност т. ј. b. Ако апсолутна вредност од x расте, онда y опада, што значи да се линија све више приближује апсцисној оси.

Највећа апсолутна вредност, коју може имати x, јесте a; а највећа вредност за y јесте b. За $x > a$ биће y, а за $y > b$ биће x имагинарно. Ако се дакле у раздаљинама $+a$ и $-a$ повуку паралелне са ординатном осом, а у раздаљинама $+b$ и $-b$ паралелне са апсцисном осом, онда се добива правоугаоник у којем је сва елипса затворена.

5. Ако је d раздаљина OM које било тачке M на елипси од средишта O, онда је

$$d = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}$$

За $x = \pm a$ добивају се, апсолутно узевши, две највеће вредности $d = \sqrt{a^2} = a = OB = OA$.

За $x = 0$ добивају се две најмање вредности $d = \sqrt{b^2} = b = OC = OD$. Отуд видимо, да је AB највећи, а CD најмањи пречник. С тога се $AB = 2a$ зове *велика*, а $CD = 2b$ *мала оса* елипсе.

Тачке A и B зову се *шемена* велике, а C и D темена мале осе.

Из тог излази још и ово: *збир оба йошега за сваку шачку на елийси једнак је великој оси.*

6. Из једначине $a^2 - e^2 = b^2$ излази, да је

$$FO = F'O = e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Дуж $OF = OF' = e$ зове се *линеарна ексценшричносш.*

Размера $e : a = \varepsilon$ зове се *нумерична ексценшричносш.*

7. Кад је $x = e = \sqrt{a^2 - b^2}$, онда је $y = \pm \frac{b^2}{a}\cdot$ Тетива RS, повучена кроз жижу, нормално према великој оси, зове се *йарамешар* елипсе. Ако се тај параметар обележи са $2p$, онда је $p = \frac{b^2}{a}$, т. ј. *половина йарамешра шређа је нейрекидна йройорционала за велику и малу йолу-осу.*

47. Темена једначина елипсе.

Кад се координатни почетак O (сл. 35) премести у теме A, а задржи AB као апсцисна оса, онда између старих координата x и y тачке M, и њених нових координата x' и y' постоји однос:

$$x = x' - a \qquad y = y'. \text{ (Чл. 8, a.)}$$

Једначина $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ претвара се тада у ову:

$$b^2(x' - a)^2 + a^2y'^2 = a^2b^2, \text{ или}$$

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' - x'^2).$$

Кад се изоставе казаљке, и стави још $\frac{b^2}{a} = p$, добива се:

$$y^2 = \frac{p}{a}(2ax - x)^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

Напомена. — Код круга је $p = a = r$ па се ова једначина претвара у темену једначину круга: $y^2 = 2rx - x^2$.

II. ДИРКА И НОРМАЛА.

48. Тангента и нормала. — Из једначине елипсе излази:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Отуд . . . . $2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2 \frac{b^2}{a^2} x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

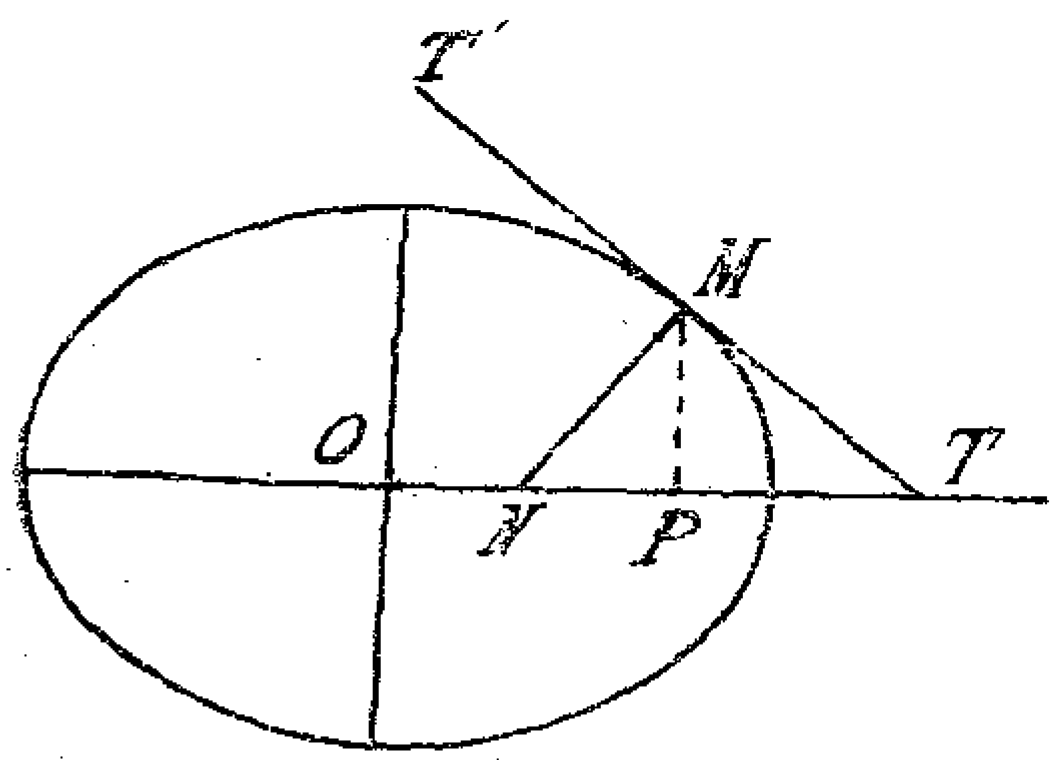
Према томе је за дирку у тачки x_1, y_1 константа правца: $-\frac{b^3 x_1}{a^2 y_1}$. Једначина дирке гласи:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

или . . . . . . $a^2 y y_1 - a^2 y_1^2 = - b^2 x x_1 + b^2 x_1^2$

и на послетку $b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2$.

Напомена. И ова се једначина ради лакшег памћења, изводи из једначине елипсе исто онако, као једначина дирке код круга.



Сл. 36.

За нормалу имамо једначину:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

По знаку диф. количника испитај, у којим се квадрантима елипса пење, а у којима пада.

49. — Четири количине додира.

1. Ако се у једначини дирке стави $y = 0$, добиће се за апсцису тачке T вредност $\frac{a^2}{x_1}$ (сл. 36).

Према томе је суптангента

$$PT = t' = OT - OP = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}.$$

Овај израз показује, да суптангента не зависи од мале осе, и да према томе све елипсе, па и круг описан над великом осом, имају за једнаке апсцисе и суптангенте једнаке.

2. За тангенту $MT = t$ имамо:

$$t^2 = y_1^2 + t'^2 = y_1^2 + \left(\frac{a^2 - x_1^2}{x_1^2}\right)^2 = \frac{y_1^2}{x_1^2}\left(x_1^2 + \frac{a^4 y_1^2}{b^4}\right), \text{ отуд}$$

$$t = \frac{y_1}{b^2 x_1} \sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}.$$

3. Ако у једначини нормале ставимо $y=0$, добићемо за апсцису тачке N (сл. 36) вредност:

$$\mathrm{ON}=\frac{x_1(a^2-b^2)}{a^2}$$

а за субнормалу $\mathrm{NP}=-\frac{b^2x_1}{a^2}$.

4. За нормалу MN добивамо:

$$n^2=y_1^2+\mathrm{NP}^2=y_1^2+\frac{b^4x_1^2}{a^4}=\frac{b^4x_1^2+a^4y_1^2}{a^4},$$

а само $n=\frac{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}{a^2}$.

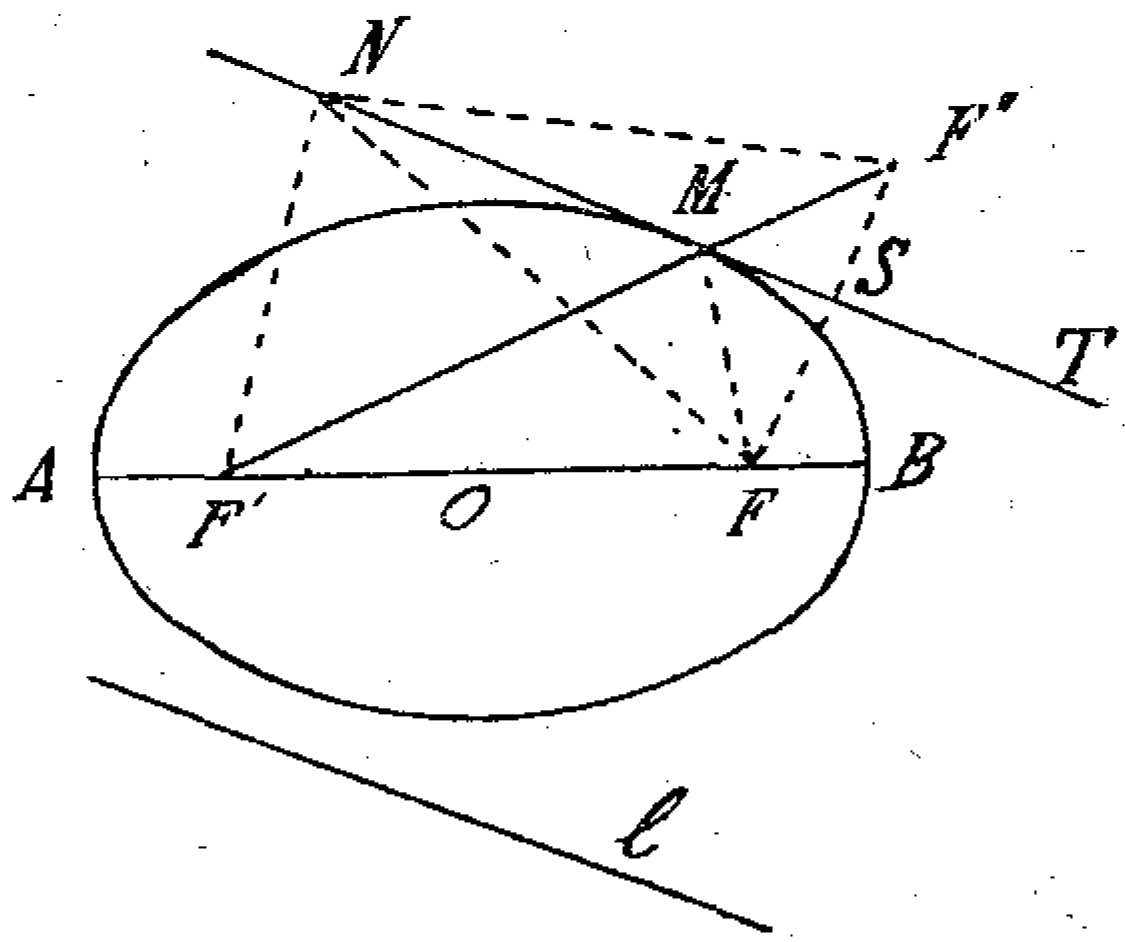
Напомена. Кад у овим обрасцима ставимо $a=b=r$, добићемо додирне количине за круг.

50. Свака дирка елипсе гради са потезима додирне тачке једнаке углове.

Нека су MF и MF′ (сл. 37) потези тачке M (x_1, y_1).

Продужићемо потег MF′ изван елипсе, и доказаћемо да симетрала MT угла FMF″ мора додиривати елипсу у тачки M.

Треба само доказати, да за сваку другу тачку N (осим тачке M) на правој MT збир NF+NF′ није једнак $2a$.



Сл. 37.

Ако се пренесе MF = MF″, онда ће MT бити не само симетрала угла FMF″, него и дужи FF″. С тога је за коју било тачку N на тој симетрали: NF = NF″.

Како је у троуглу F′NF″ збир F′N + NF″ > F′F″, то је и збир

$$\mathrm{F'N}+\mathrm{NF}>\mathrm{F'F''} \text{ или}$$
$$\mathrm{F'N}+\mathrm{NF}>2a$$

што значи да је N изван елипсе.

Како су углови SMF″ и F′MN једнаки као унакрсни, то је и угао SMF = NMF′.

Напомена. Овом теоремом објашњују се појаве, које се оснивају на закону о рефлексији (одбијању). Ако је површина издубеног огледала обртни елипсоид, онда ће се светлосни, топлотни или звучни зраци, који полазе из једне жиже, одбити тако, да се скупљају у другој жижи. Ако се у суду елиптична облика, у коме има течности, у једној жижи изазове таласно кретање, онда ће се одбијени таласи скупити у другој жижи.

ЗАДАЦИ.

1. Конструисати елипсу, т. ј. наћи колико се хоће тачака, кад су дате велика оса и жиже.

На великој оси AB, а између обе жиже треба узети тачку R, па полупречницима AR и BR описати лукове око F и F'; у пресеку тих лукова добивамо 4 тачке елипсе.

2. Конструисати елипсу, кад су дате обе осе.

3. Одреди једначину елипсе, кад је дата велика оса $= 8$, и једна тачка (2, 1).

4. На елипси $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ наћи тачку, за коју је апсциса једнака ординати. Како се може наћи та тачка конструкцијом?

5. Како гласи темена једначина елипсе, чија је мала оса $2\,b$, а параметар $2\,p$?

6. Како гласи средишна једначина елипсе, кад је $p = 2$, $b = 4$?

7. У каквом односу према великој оси стоје потези једне тачке, кад је она *a*) у елипси, *b*) изван елипсе? Какав је знак тринома $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2$ у оба случаја?

8. Какав је положај тачке *a*) (4, 3), *b*) (3, 3) према елипси

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

9. Дате су две од ове четири количине: a, b, e, p; наћи оне друге две конструкцијом.

10. Најближа раздаљина Земље од Сунца (Perihel) стоји према најдаљој (Aphel) у размери као 29 : 30. Израчунај нумеричну ексцентричност Земљине путање.

11. За коју је тачку на елипси производ њених потега максимум? (упореди зад. II у чл. 31).

12. Шта значе једначине *a*) $25x^2 + 16y^2 = 400$, *b*) $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$.

13. Средиште једне елипсе има координате m и n, а њене су осе $2\,a$ и $2\,b$. Како гласи једначина те елипсе, кад су њене осе паралелне са координатним осама?

14. Дата је једначина елипсе $9\,x^2 + 16\,y^2 + 36\,x - 96\,y + 36 = 0$. Одреди *a*) координате њена средишта, *b*) обе осе.

15. Дата је једначина елипсе $9\,x^2 + 16\,y^2 = 144$ и једначина праве *a*) $y = 3\,x + 5$, *b*) $y = x + 5$, *c*) $y = 2\,x - 9$. Колико заједничких тачака има елипса са сваком од тих правих?

16. Дата је елипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$, и тачка (2, 1); наћи једначину тетиве, која је том тачком преполовљена.

17. Израчунај координате оних тачака, у којима симетрале углова између координатних оса секу елипсу $5\,x^2 + 7\,y^2 = 35$.

18. Дата је права $5\,y - 2\,x = 7$ и елипса $5\,x^2 + 7\,y^2 = 35$; израчунај дужину пречника, који је паралелан с датом правом.

19. Израчунај дужину пречника, који полови угао између координатних оса.

20. *a*) Израчунај површину квадрата, који је уписан у елипси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;

b) У елипси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ уписан је правоугаоник чије стране стоје у размери $m : n$; израчунај његову површину.

21. Из појединих тачака на периферији једног круга спуштене су нормале на један пречник ($2\,r$), па су подељене по размери $m : n$; шта је геом. место раздеоних тачака? — Особити случај $m : n = 1$.

22. Права сталне дужине креће се тако, да јој крајње тачке остају на крацима права угла; нађи геом. место оне тачке, која дели ту дуж по размери $a : b$. — Шта је геом. место, кад је a — b.

23. Над једном истом дужи $2e$ нацртани су троугли, у којима је збир других двеју страна $= 2\,a$; шта је геом. место за тежишта тих троуглова?

24. Из тачака на периферији једног круга спуштене су нормале на једну праву; шта је геом. место за средине тих нормала?

25. Нађи геом. место за теме A свих троуглова над BC, *a*) у којима је страна AB средња пропорционала између оба одсечка који се добивају на BC кад се повуче висина из A, *b*) у којима је квадрат висине из тачке A m-пута већи од правоугаоника из оних одсечака, који се добивају на BC, кад се повуче висина из A. ($m = 1$).

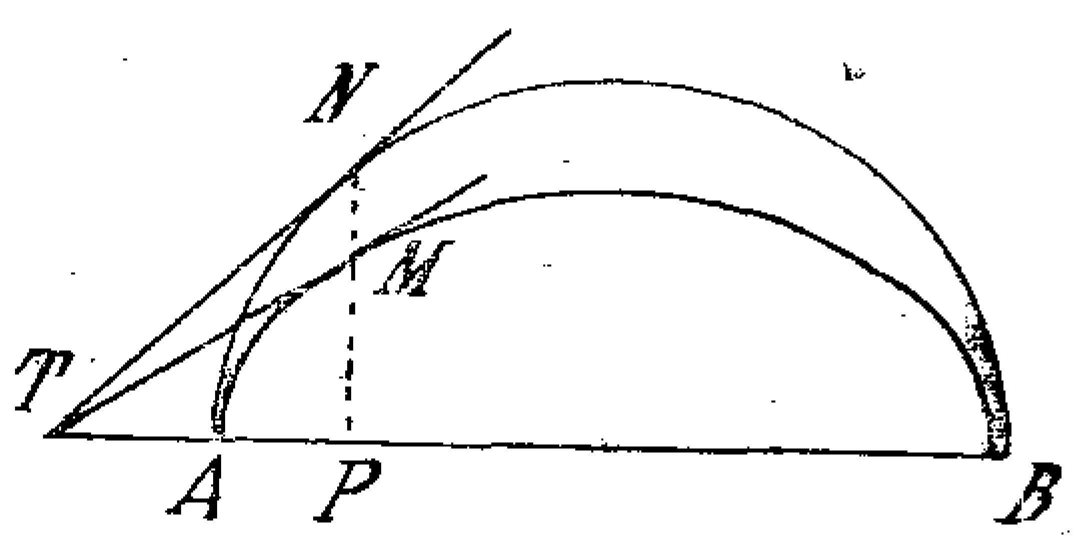
26. У троуглу две су стране a и b, а њихове су пројекције на трећој страни a' и b'; нађи геом. место за врхове свих троуглова, за које је $4\,a'b' = a^2 + b^2$.

27. У датој елипси уписати правоугаоник максималне површине.

28. Кроз тачку M, која је дата на елипси, повући дирку.

Прво решење. Треба продужити потег F'M (сл. 37) изван елипсе, па преполовити угао FMF''.

Друго решење. Над великом осом AB (сл. 38) треба описати полукруг, продужити ординату MP до N, конструисати у тачки N тангенту NT и повући TM.



Сл. 38.

29. Из тачке N (сл. 37) изван елипсе повући дирку. Ако је NM тражена дирка, па је MF = MF'', онда је NM симетрала дужи FF''. Према томе треба одредити само тачку F''. Једно је геометриско место за тачку F'' круг, описан око F' полупречника $2\,a$, пошто је F'M + MF'' = F'M + MF. А друго је геом. место за тачку F'' круг описан око тачке N полупречником NF, јер је

NF = NF″. Мењајући улоге обе жиже, добивамо још једну дирку из N.

30. Конструисати дирке паралелно са датом правом l. Из једне жиже F треба повући FF″ нормално према правој l, па на тој нормали наћи тачку F″ у раздаљини F′F″ = 2 a. Тада је симетрала дужи F′F″ тражена дирка. Како лук, описан око F′ полупречником 2 a, сече нормалу FF″ у двема тачкама, то су могућна два решења. Додирна тачка M налази се у пресеку дирке с правом F′F″.

31. Дата је елипса $x^2 + 25y^2 = 25$ и на њој тачка $(-3, y_1 > 0)$; како гласи једначина дирке у тој тачки? Израчунај њен нагибни угао према апсцисној оси.

32. На елипси $4x^2 + 25y^2 = 100$ дата је тачка $(4, \frac{6}{5})$; кроз ту тачку повуци тангенту и нормалу, па израчунај четири количине додира.

33. У каквој размери стоје одсечци, на које је апсциса неке тачке на елипси подељена нормалом у тој тачки?

34. Како гласе једначине тангената, које се могу повући из тачке (0, 2) на елипсу $2x^2 + 3y^2 = 6$?

35. Како гласе једначине тангената на елипсу $9x^2 + 25y^2 = 225$, које су према правој $5y + 4x = 7$ a) паралелне; b) нормалне?

36. На елипсу $x^2 + 4y^2 = 100$ повучене су дирке у тачкама (8, 3) и (6, −4); одреди a) координате њихова пресека, b) угао између обе дирке, c) једначину њихове угаоне симетрале.

37. Кроз тачку (x_1, y_1) на елипси повучена је дирка. Израчунај раздаљину средишта од те дирке.

38. Производ нормале у једној тачки на елипси и нормале од средишта до дирке у тој тачки константан је и једнак је квадрату мале полу-осе.

39. Израчунај раздаљину једне жиже од дирке у тачки (x_1, y_1).

40. Кад се из обе жиже спусте нормале на једну исту дирку, онда је производ тих двеју нормала константан и једнак је квадрату мале полу-осе.

41. Из једне жиже спуштена је нормала на дирку у тачки (x_1, y_1); израчунај координате подножне тачке те нормале.

42. Кад се из једне жиже спусти нормала на коју било дирку елипсе, онда је раздаљина њена подножја од средишта једнака великој полу-оси. (На сл. 37 у троуглу F′F″F дуж OS половина је стране F′F″ = 2 a.) Шта је према томе, геом. место тих подножја за све дирке?

Ово се примењује:

a) кад треба конструисати елипсу из две жиже и једне дирке;

b) кад треба конструисати елипсу из велике осе и једне дирке.

43. Наћи на елипси ону тачку, за коју је тангента једнака нормали.

44. Под којим се углом секу линије *a)* $9x^2 + 25y^2 = 225$ и $y = 3x$; *b)* $x^2 + y^2 = 4$ и $3x^2 + 5y^2 = 15$?

45. Под којом погодбом права $Ax + By + C = 0$ додирује елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$?

Види зад. 39 на стр. 52.

Из дискриминанте квадратне једнаћине за израчунавање координата пресечних тачака налази се погодба:

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2.$$

46. У једначини праве $y = 3x + b$ одреди b тако, да права додирује елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$.

47. У једначини елипсе $b^2x^2 + 25y^2 = 25b^2$ одреди b тако, да се елипса додирује с правом $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.

48. Ако нека дирка има од средишта раздаљину d, а нагнута је према великој оси под углом α, онда је $d^2 = a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha$.

49. Над једном истом великом осом конструисане су разне елипсе; одреди једначину геом. места за додирне тачке свих тангената, које се могу повући на те елипсе из тачке (m, o).

Види чл. 49. под 1.

50. У тачки M једне елипсе повучена је нормала, и она сече велику осу у тачки N. — У тој тачки N подигнута је на велику осу нормала, на коју је пренесено $NA = MN$; шта је геом. место за тачку A?

51. Конструисати дирку елипсе тако, да површина троугла, који гради та дирка са координатним осама, буде минимум.

52. Око елипсе описати квадрат. (Нађи полу-дијагоналу.)

53. Како је Земља обртни елипсоид, то су меридијани елипсе. Географска ширина φ неког места зове се угао који гради нормала у том месту са равнином полутара. Угао, који гради са равнином полутара она права која везује једно место са средиште елипсоида, зове се геоцентрична ширина φ' тога места. Докажи да је $tg\,\varphi : tg\,\varphi' = a^2 : b^2$, ако су a и b полу-осе меридијанске.

54. Израчунај разлику између географске и геоцентричне ширине Београда. Геогр. ширина је $44^0\,47'\,57''$, $a = 6377{\cdot}4$ *km*, $b = 6356{\cdot}1$ *km*.

СЕДМИ ОДЕЉАК

ХИПЕРБОЛА

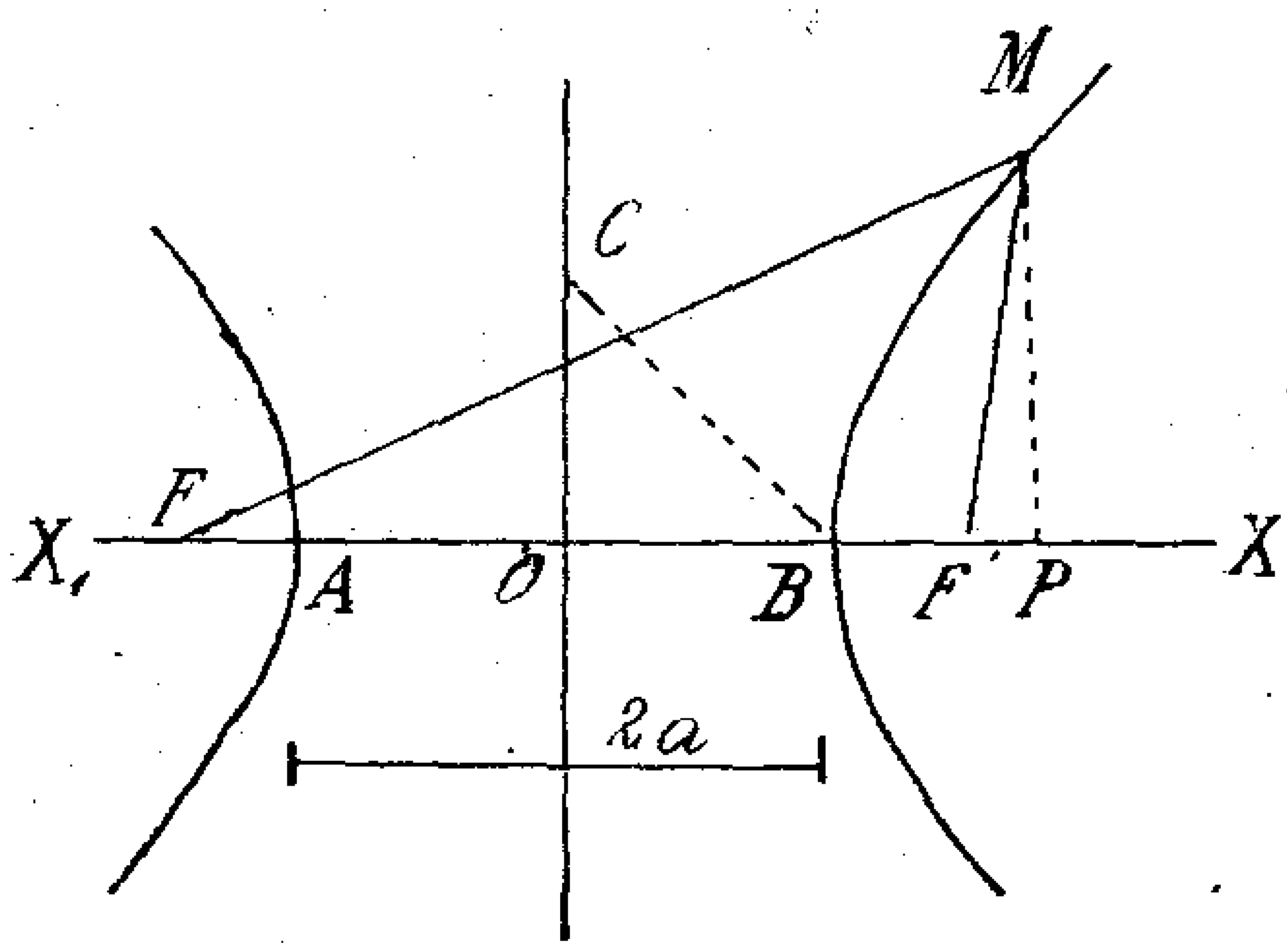
Једначина хиперболе. — Дирке и нормале. — Задаци.

I. ЈЕДНАЧИНА ХИПЕРБОЛЕ.

51. Дефиниције. — *Хипербола* је линија у равни, која има ту особину, да је за сваку њену тачку разлика одстојања од две дате тачке стална.

Ако су F и F′ (сл. 39) две дате тачке, $2a$ стална разлика између раздаљина сваке тачке на хиперболи од датих тачака, онда је M једна тачка на хиперболи, ако је $FM - F'M = 2a$.

Две дате тачке F и F′ зову се *жиже* хиперболине, а дужи FM и F′M зову се *потези* за тачку M.



Сл. 39.

52. — Израчунавање потега.

Ако се кординатни почетак узме у средини O дужи FF′, а права FF′ као апсцисна оса, па се стави $OF = OF' = e$, онда се за коју било тачку M на десној грани хиперболе добива, слично као код елипсе у чл. 44.:

$$FM = \frac{ex}{a} + a \qquad F'M = \frac{ex}{a} - a.$$

За тачку M на левој грани добило би се

$$FM = -a - \frac{ex}{a}, \qquad F'M = a - \frac{ex}{a}.$$

где би се још морало узети x са знаком *minus*.

53. Једначина хиперболе.

Из троугла FMP добива се исто онако као код елипсе (чл. 45.)

$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - e^2).$$

Разлика $a^2 - e^2$ код елипсе била је позитивна; за хиперболу је та разлика негативна. То излази из троугла FMF′, у коме је $MF - MF' < FF'$ или

$$2a < 2e$$

дакле . . . . . . $a < e$

Ако ставимо $a^2 - e^2 = -b^2$, добићемо као једначину хиперболе:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \text{ или } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Напомена. Једначина хиперболе разликује се од једначине елипсе само у томе, што се код елипсе налази $+b^2$, а код хиперболе $-b^2$.

54. Претрес једначине $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

1. Ако се та једначина реши по y, за тим по x, онда је

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

Докле је год (апсолутно) $x < a$, биће y имагинарно. Кад се начини $AO = BO = a$, па се у тачкама A и B подигну нормаке на апсцисну осу, онда између тих двеју нормала нема ни једне тачке хиперболине.

За сваку апсцису $x > a$, добивају се по две једнаке, али супротно означене вредности за y; исто тако добивају се за сваку вредност ординате y по две једнаке, а неједнако означене апсцисе. Хиперболу чине, дакле, две раздвојене гране, у симетричном положају према ординатној оси. Свака грана подељена је апсцисном осом на две симетричне половине.

2. Како је једначина хиперболе чисто квадратна по x и y, то мора, ако је $(+x, +y)$ једна њена тачка, и тачка $(-x, -y)$ бити на хиперболи. Исто тако као код елипсе (чл. 46) излази, да је O средиште хиперболе; с тога се $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ зове *средишна* једначина хиперболе.

Хипербола је централно симетрична слика.

3. Како x и y могу имати ма колико велике вредности, то се гране у хиперболе простиру у бескрајност.

4. Кад је $y = 0$, онда је $x = \pm a$; добивају се тачке A и B. Дуж $AB = 2a$ зове се прва или *главна оса* хиперболе, тачке A и B зову се њена *темена*.

Отуд правило: *разлика између оба потега за сваку тачку на хиперболи једнака је главној оси.*

5. Хипербола не сече ординатну осу, пошто је y имагинарно, кад је $x = 0$. Како је дуж b значајна за хиперболу, то се на ординатну осу преноси $OC = OD = b$, па се, као и код елипсе, дуж $CD = 2b$ назива оса, и то *споредна оса* у хиперболе.

6. Из једначине $a^2 = e^2 - b^2$ или $e^2 = a^2 + b^2$ излази:

$$OF = OF' = e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

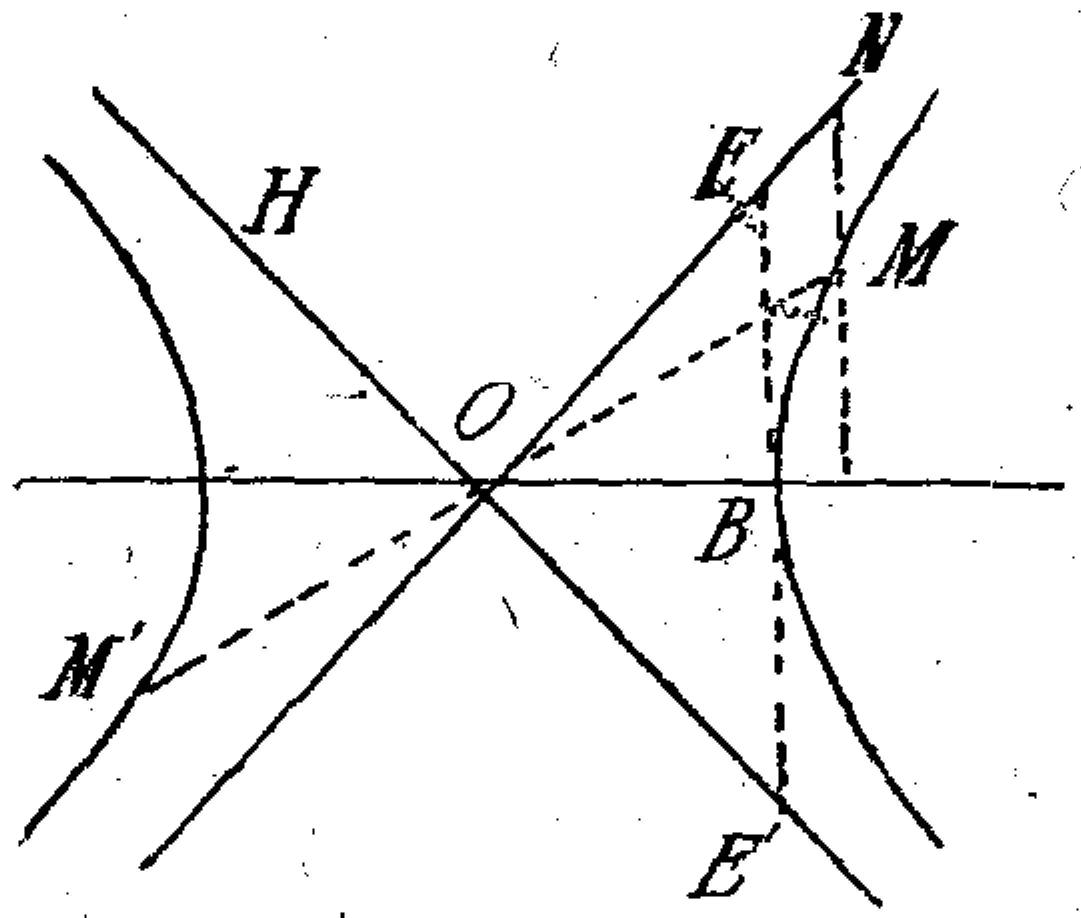
Дуж e зове се *линеарна*, а $\frac{e}{a} = \varepsilon$ зове се *нумерична* (бројна) *ексцентричност*.

7. Кад је $x = e = \sqrt{a^2 + b^2}$, онда је $y = \pm \frac{b^2}{a}$. И код хиперболе се, као и код елипсе, она тетива, која у жижи стоји нормално на главној оси, зове *параметар*. Ако се тај параметар обележи са $2p$, онда је $p = \frac{b^2}{a}$, што значи, *да је половина параметра трећа непрекидна пропорционала за половину главне и половину споредне осе.*

8. Ако је $a = b$, онда се хипербола зове *равнострана;* њена је једначина: $x^2 - y^2 = a^2$.

9. Ако једначину хиперболе комбинујемо са једначином $y = mx$ једне праве MM' (сл. 40) која пролази кроз O, онда се за координате пресека добива:

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, \quad y = \frac{\pm amb}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$



Сл. 40.

Горњи знаци вреде за тачку M, а доњи за M'. Из тих вредности видимо, да ће права сећи хиперболу само онда, кад је $b^2 > a^2m^2$, или (апсолутно) $m < \frac{b}{a}$. Кад је $m > \frac{b}{a}$, онда се за x и y добивају имагинарне вредности.

10. Значајне су оне две праве, за које је $b^2 = a^2m^2$, дакле $m = \pm \frac{b}{a}$. Да бисмо конструисали те две праве, треба у тачки B подићи на OX нормалу, пренети BE = BE' = b, па повући праве OE и OE'. За те праве вреди

$$tg\,\mathrm{NOB} = \frac{b}{a}, \qquad tg\,\mathrm{HOB} = -\frac{b}{a}.$$

Из једначине хиперболе налази се за ординату које било тачке њене: $y = \pm \frac{b}{a}\, x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$.

Упоређујући ту једначину са једначином $y = \pm \frac{b}{a}x$ праве ON или OH, видимо да се ординате, које одговарају истој апсциси, све мање разликују, што је веће x, пошто разломак $\frac{a}{x}$ опада, кад x расте; што значи, да се обе гране хиперболине све више приближују тим двема правима, али их никад не достижу.

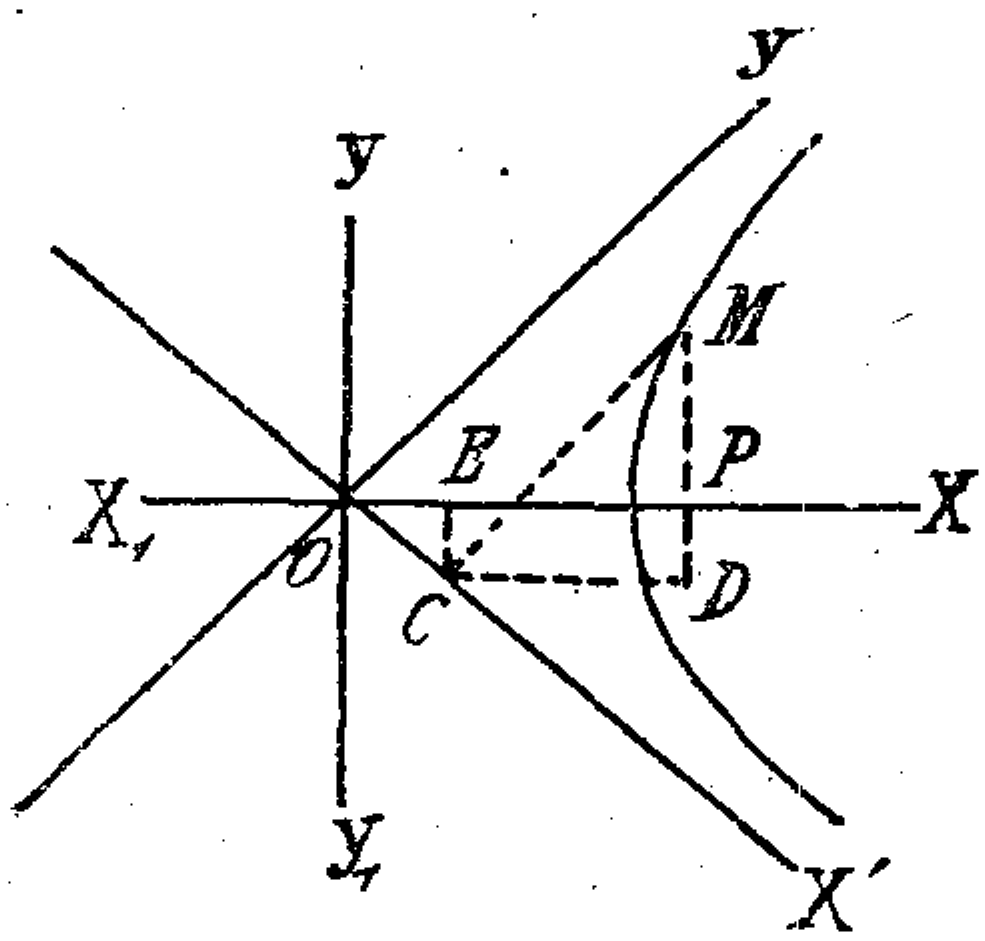
Права, која се све више приближује једној кривој линији, али је никад не достиже, зове се *асимптота* те криве линије. Хипербола има две асимптоте, чије су једначине

$$y = +\frac{b}{a}\cdot x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}\cdot x.$$

Како гласе једначине асимптота равностране хиперболе? Какав је њихов узајамни положај? Колики је њихов нагибни угао према апсцисној оси?

55. Асимптотна једначина равностране хиперболе.

Како асимптоте у равностране хиперболе стоје једна на другој нормално, то се оне могу узети као нов правоугли координатни систем. Координате тачке М у систему ХОУ нека су x, y, а у систему Х'ОУ' нека су x' и y'; дакле $OC = x_1$, $MC = y_1$ (сл. 41).



Сл. 41.

Имамо $x = OP = OE + CD = x_1 \cos 45^0 + y_1 \cos 45^0$

$$= \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{y_1}{\sqrt{2}}$$

$$y = MP = MD - CE = y_1 \cos 45^0 - x_1 \cos 45^0 = \frac{y_1}{\sqrt{2}} = \frac{x_1}{\sqrt{2}}.$$

Кад се те вредности унесу у једначину $x^2 - y^2 = a^2$, добива се $2\, x_1 y_1 = a^2$; или, кад се изоставе казаљке : $xy = \frac{a^2}{2}$ т. ј. производ координата, у систему асимптота, сталан је.

56. Темена једначина хиперболе. Слично као код елипсе добива се, кад се координатни почетак премести у теме В' (сл. 39) ова једначина:

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

II. ДИРКЕ И НОРМАЛЕ.

57. Тангента и нормала. Једначина за тангенту и нормалу, као и четири количине додира, изводе се слично као за елипсу (чл. 48 и 49). Оне се могу добити и непосредно из резултата у чл. 48 и 49, кад се b^2 замени са $-b^2$.

ЗАДАЦИ.

1. Конструисати хиперболу, т. ј. наћи колико се хоће тачака, кад су дате главна оса и обе жиже.

На продуженој главној оси AB, а изван жижа, треба узети где било тачку R, па полупречницима AR и BR описати лукове око F и F′; у пресеку тих лукова добивамо четири тачке хиперболе.

Ради тачнијег цртања хиперболе, и да би се боље уочио њен ток, треба употребити асимптоте.

2. Одреди једначину хиперболе, кад је дата њена главна оса $2a$ и једна тачка (x_1, y_1).

3. Која тачка на хиперболи $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ има ординату једнаку апсциси? (Кад је задатак могућан?)

4. Постави једначину хиперболе, кад јој је главна оса $2a$, а параметар $2p$,

5. Дате су две од ове 4 количине: a, b, e, p; конструиши остале две.

6. Полуосе a и b изрази са p и ε.

7. Израчунај бројну ексцентричност за равнострану хиперболу.

8. Дате су асимптоте и темена главне осе; наћи жиже.

9. Која линија одговара једначини $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$?

10. У каквом односу према главној оси стоје потези за тачке *a)* између хиперболских грана, *b)* на испупченој страни хиперболске гране? Какав је знак тринома $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$ у тим случајевима?

11. Како леже тачке $(5\sqrt{2}, 4)$, $(2, 3)$, $(10, 4)$ према хиперболи $16x^2 - 25y^2 = 400$?

12. Колики су потези темéнâ у равностране хиперболе?

13. Како гласе једначине обе асимптоте за хиперболу $4x^2 - 9y^2 = 36$? Израчунај њихове углове према апсцисној оси.

14. Синус асимптотног угла (EOE′, сл. 40) изразити са ε.

15. Нормала из жиже на једну асимптоту једнака је малој полуоси.

16. Конструиши линију $3x^2 + 6x - 5y^2 + 20y = 32$.

17. Дата је једначина хиперболе $4x^2 - 9y^2 = 36$. Колико заједничких тачака има она с правом *a)* $y = \frac{4}{3}x + 2$, *b)* $y = 2x - 8$, *c)* $6y = 5x - 9$; наћи те тачке.

18. Колико заједничких тачака има једна хипербола с правом, која је према асимптоти паралелна?

19. Израчунај површину правоугаоника чија су темена у пресецима хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ с кругом, који је са хиперболом концентричан, а полупречник му је ексцентричност.

20. На хиперболи $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ одреди тачку коју треба везати са теменима, да би се код те тачке добио угао од *a)* 30^0, *b)* 45^0, *c)* 60^0.

21. Израчунај дужину оног пречника у хиперболи, који са позитивном x-осом гради угао φ.

22. Нађи геом. место за средишта свих кругова, који с поља додирују кругове $x^2 + y^2 = 9$ и $(x - 5)^2 + y^2 = 4$.

23. Нађи геом. место за треће теме A свих троуглова, у којих основа има сталну вредност a, и у којем је угао $\beta = 2\gamma$.

24. У кругу је повучен пречник AB чији продужак сече дирку CD у C; кад се у тачки C подигне нормала на продужен пречник и пренесе CF = CD, шта је геом. место за тачку F?

25. На осовини једне хиперболе налази се једна тачка, која је од средишта удаљена за m; од које тачке на хиперболи има она најкраћу раздаљину?

26. Кроз тачку, дату на хиперболи, повуци дирку.
(Слично зад. 28. на стр. 60.)

27. На хиперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$ дата је тачка $\left(\frac{20}{3}, 4\right)$; нацртај дирку у тој тачки и нађи њену једначину.

28. *a)* Из тачке изван хиперболе повуци тангенте.
(Слично задатку 29. на стр. 60.)
b) Паралелно датој правој повуци дирке на дату хиперболу.
(Слично зад. 30. на стр. 61.)

29. Како гласе једначине тангената, повучених на хиперболу $x^2 - 2y^2 = 2$ из тачке $(1, 0)$?

30. Дирка, повучена између асимптота, преполовљена је додирном тачком.

31. Нађи на хиперболи ону тачку, за коју је суптангента једнака субнормали.

32. Под којим се углом секу линије

$$x^2 + y^2 = 60\frac{4}{9}, \qquad 9x^2 - 16y^2 = 144?$$

33. У оној тачки хиперболе $25x^2 - 16y^2 = 400$, за коју је апсциса једнака ординати, повучена је дирка; израчунај додирне количине.

34. Нађи једначину оне праве, која додирује хиперболу $x^2 - y^2 = 4$, а нагнута је према апсцисној оси под углом од 60^0; израчунај и додирне количине.

35. Под којом погодбом права $Ax + By + C = 0$ додирује хиперболу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$?
Добива се: $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

36. Кад елипса и хипербола имају заједничке жиже, онда дирке у њиховим пресецима стоје једна на другој нормално.

37. Средиште равностране хиперболе везано је са додирном тачком једне дирке; какав однос постоји између константе праваца те праве и тангенте?

38. Кад се из средишта једне равностране хиперболе спусти нормала OP на једну дирку и продужи до пресека Q са хиперболом, онда је $OP \cdot OQ = a^2$?

39. Троугао, који чини једна дирка са асимптотама, има сталну површину.

40. Колика је стална површина троугла, који гради једна дирка са асимптотама?

ОСМИ ОДЕЉАК

ПАРАБОЛА

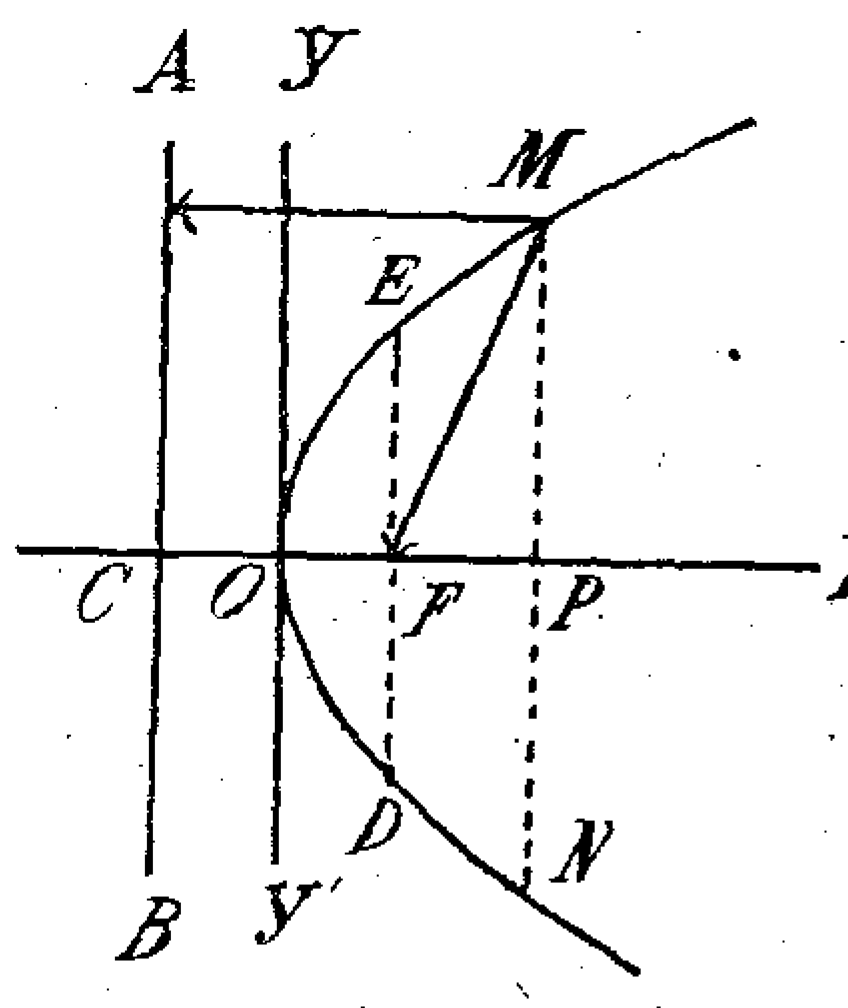
Једначина. — Дирке и нормале. — Задаци

I. ЈЕДНАЧИНА ПАРАБОЛЕ.

58. Тумачења. — *Парабола* зове се линија у равни, која има ту особину, да је за сваку њену тачку раздаљина од једне дате тачке једнака њеној раздаљини од једне дате праве.

Нека је на сл. 42 дата тачка F, и дата права AB; онда је M једна тачка на параболи, ако је $MF = MQ$ ($MQ \perp AB$).

Тачка F зове се *жижа*, дата права AB зове се *директриса* или *линија водиља* за параболу; права FM зове се *потег* тачке M.



Сл. 42.

59. Израчунавање потега.

Треба повући $FC \perp AB$, па средину O те нормале узети за координатни почетак, а праву COX за апсцисну осу.

Ако још ставимо $OC = OF = \frac{p}{2}$, онда је за сваку тачку M на параболи

$$MF = MQ = CP = CO + OP, \text{ дакле}$$

$$MF = x + \frac{p}{2}.$$

60. Једначина параболе.

Из троугла MPF излази:

$$MF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Како је $MQ = PO + OC = x + \frac{p}{2}$, или $MQ^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, то је по чл. 58 $MF = MQ$, дакле

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \text{ или}$$

$$y^2 = 2px$$

и то је *једначина параболе.*

61. Претрес једначине $y^2 = 2px$.

1. Из те једначине излази $y = \pm\sqrt{2px}$. Свакој позитивној вредности за x одговарају две једнаке, али супротно означене ординате. Из тог излази, да је парабола подељена апсцисном осом на две симетричне половине. OX зове се *оса* у параболе.

2. Кад је $x = 0$, онда је и $y = 0$, што значи, да је и координатни почетак једна тачка параболе. Тачка O зове се *теме* параболе, а једначина $y^2 = 2px$ зове се с тога *темена једначина* параболе. Што је веће x, тим је веће и y, што значи да се парабола све више удаљује од апсцисне осе; она дакле није затворена.

3. Кад је x негативно, онда је y имагинарно, што значи да негативним апсцисама не одговарају никакве тачке.

4. Ако се стави $x = \frac{p}{2} = OF$, онда се добива $y = \pm p$; с тога је $DE = 2p$. Количина $2p$ представља дакле тетиву DE, која у жижи стоји нормално на оси; она се зове *параметар* параболе.

5. Из $y^2 = 2px$ излази пропорција $2p : y = y : x$, т. ј. *ордината сваке тачке средња је пропорционала између параметра и њене апсцисе.*

6. Ако су x_1 и x_2 апсцисе, y_1 и y_2 ординате двеју тачака на параболи, онда је

$$y_1^2 = 2px_1, \qquad y_2^2 = 2px_2, \text{ отуд}$$

$$y_1^2 : y_2^2 = x_1 : x_2$$

т. ј. *квадрати ордината за две тачке на параболи стоје у истој размери као њихове апсцисе.*

Напомена. Круг, елипса, хипербола и парабола могу се представити овом заједничком теменом једначином:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

у којој је $q = -1$ за круг, $q = -\frac{b^2}{a^2}$ за елипсу, $q = \frac{b^2}{a^2}$ за хиперболу, $q = 0$ за параболу.

Коефицијенат p значи полупречник за круг, а полу-параметар за остале линије.

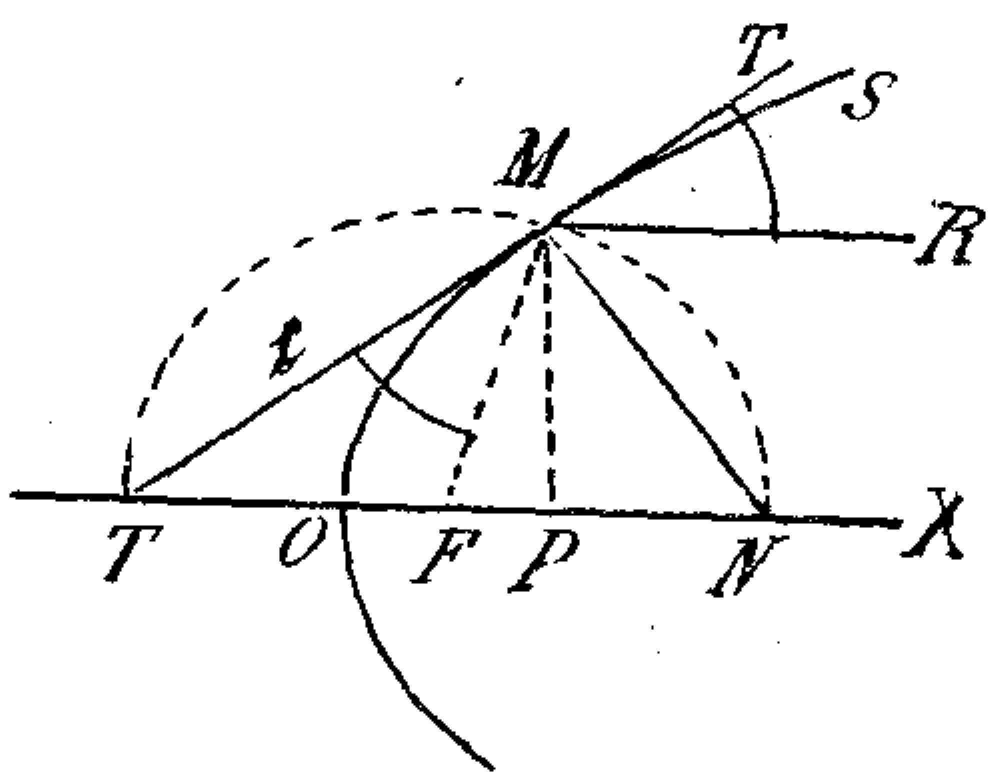
II. ДИРКА И НОРМАЛА.

62. Једначина дирке и нормале.

Како је за параболу $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$, то ће једначина дирке у тачки (x_1, y_1) гласити:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \text{ или}$$

$$yy_1 = p\ (x + x_1).$$



Сл. 43.

Једначина нормале гласи:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

63. Додирне количине.

1. Из једначине дирке добива се за апсцису тачке T (сл. 43), кад се стави $y = 0$,:

$$\mathrm{OT} = -x_1.$$

Према томе је суптангента

$$t' = \mathrm{PT} = -2x_1.$$

Дакле *суптангента два пута је већа од апсцисе додирне тачке* (апсолутно узевши).

2. За тангенту MT добива се из троугла MPT:

$$\mathrm{MT}^2 = \mathrm{MP}^2 + \mathrm{PT}^2, \text{ или}$$

$$t^2 = y_1^2 + t'^2 = 2px_1 + 4x_1^2 \text{ или}$$

$$t = \sqrt{2x_1(p + 2x_1)}.$$

3. Ако се у једначини нормале стави $y = 0$, добиће се $\mathrm{ON} - x_1 = p$; дакле је субнормала $\mathrm{PN} = p$.

Субнормала је константна и једнака је половини параметра.

4. За нормалу MN добива се $n^2 = y_1^2 + p^2 = 2px_1 + p^2$, дакле $n = \sqrt{p(2x_1 + p)}$.

Додатак. *Додирна тачка и пресеци дирке и нормале са осом једнако су удаљени од жиже.*

Доказ: Како је MF потег, то је по чл. 59 $\mathrm{MF} = x + \frac{p}{2}$.

Даље је $\mathrm{FP} = \mathrm{OP} - \mathrm{OF} = x - \frac{p}{2}$.

$$\mathrm{FN} = \mathrm{FP} + \mathrm{PN} = x - \frac{p}{2} + p = x + \frac{p}{2}$$

$$\mathrm{FT} = \mathrm{TP} - \mathrm{FP} = 2x - \left(x - \frac{p}{2}\right) = x + \frac{p}{2}$$

дакле . . . . $\mathrm{MF} = \mathrm{FN} = \mathrm{FT}$.

64. Дирка гради једнаке углове са потегом додирне тачке и с правом која пролази кроз додирну тачку, а паралелна је са осовином.

По чл. 63 додатак, троугао FMT равнокрак је, с тога $\sphericalangle$ FMT = FTM; али је и $\sphericalangle$ RMT′ = FTM; према томе угао FMT = RMT′.

Напомена. На овом правилу оснива се примена параболних огледала. Кад светлосни, топлотни или звучни зраци падају на огледало паралелно према осовини, онда се они после одбијања скупљају у жижи. И обрнуто: зраци, који полазе из жиже, одбијају се паралелно према осовини.

ЗАДАЦИ.

1. Конструисати параболу, т. ј. одредити колико се хоће тачака.

Нека је дата директриса и жижа. Треба пре свега одредити осовину и теме. За тим се узме на осовини где било тачка P (сл. 42), подигне PM $\perp$ OX, па полупречником CP опише из F лук који сече нормалу PM у M и N; тада су M и N тачке на параболи.

2. У каквом односу стоји потег једне тачке према њеној раздаљини од директрисе, кад је та тачка *a)* на испупченој, *b)* на издубеној страни параболе? Какав је знак бинома $y^2 - 2px$ у једном и другом случају?

3. Да ли су тачке (4, — 4), (1, 3), (5, 2) на параболи $y^2 = 4x$, и какав им је положај према параболи?

4. Конструиши линије $y^2 = -16x$, $x^2 = 12y$, $x^2 = -10y$.

5. Како се мења положај линије $y = x^2$, кад се њена једначина трансформује у ову:
a) $y = x^2 + 3$, *b)* $y = x^2 - 1$, *c)* $y = (x-1)^2$, *d)* $y = (x+1)^2$?

6. Конструиши линије: *a)* $y = \frac{1}{2}x^2$, *b)* $y = 3x^2$, *c)* $y = -x^2$, *d)* $y = -x^2 + 1$, *e)* $y = -x^2 - 2$, *f)* $y = -\frac{1}{2}x^2$, *g)* $y = -2x^2$.

7. Једначине $y^2 = 12x$ и $x^2 + y^2 + 10x = 75$ реши рачунски и графички.

8. Реши једначину $x^2 + x - 2 = 0$ графички. Упутство: конструиши линију $y = x^2 + x - 2$, па нађи тачке у којима је $y = 0$ т. ј. пресеке са апсцисном осом.

9. Кад се конструишу параболе $y^2 = sx$ и $x^2 = 2sy$, онда ордината пресека даје ивицу оне коцке, чија је запремина два пута већа од коцке чија је ивица s.

10. Једна парабола има параметар $2p$, а осовина јој је паралелна са апсцисном осом; координате њена темена нека су m и n. Како гласи њена једначина?

11. Како гласи једначина параболе, кад се координатни почетак премести у ону тачку, где њена оса сече директрису?

12. Дата је једначина параболе: $y^2 - 4y - 6x - 3 = 0$; одреди координате њена темена и параметар.

Упутство: Координатне осе треба померити паралелно, па изабрати координате новога почетка тако, да нестане члана са y и константнога члана.

13. У параболи $y^2 = 2px$ уписан је равностран троугао тако, да му је једно теме у параболину темену, а висина да се поклапа са параболином осом; израчунај страну и површину тога троугла и нацртај га.

14. Дата је једначина параболе $y^2 = 5x$. Колико заједничких тачака има та парабола са правим линијама: *a*) $4y = 5x + 4$, *b*) $y = 2x - 1$, *c*) $y = 3x + 2$?

15. Колико заједничких тачака има парабола с једном правом, која је према њеној осовини паралелна?

16. Кроз жижу параболе $y^2 = 16x$ повучена је тетива у правцу нормалном на праву $y = 2x$; одреди средину те тетиве.

17. Одреди једначину геометриског места за средишта свих кругова, који пролазе кроз тачку (1, 1) и додирују ординатну осу.

18. Одреди једначину геометриског места са средишта свих кругова, који додирују праву $y = -4$ и круг $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, кад се кругови додирују *a*) с поља, *b*) изнутра.

19. Наћи једначину геом. места за средишта свих кругова, који додурују један дати круг и једну праву која пролази кроз његово средиште; додиривање нека је *a*) с поља, *b*) изнутра.

20. На осовини једне параболе дата је тачка A у раздаљини *a* од темена; наћи на параболи тачку M, тако да буде MA минимум.

21. На осовини једне параболе дата је тачка A у раздаљини *a* од темена S. Између A и S повуци тетиву нормално на SA тако, да се добије максимална површина за троугао који постаје, кад се тачка A веже са крајњим тачкама тетиве.

22. У параболни сегменат, који је ограничен тетивом нормалном према оси, уписати правоугаоник максималне површине.

23. Тачка се креће једнаком брзином у хоризонталном правцу, а једнако убрзано у вертикалном правцу (почетна брзина нула). Изведи једначину њене путање.

24. Суд је напуњен водом, која се одржава увек на истом ниво-у; 30 *cm* испод ниво-а налази се отвор, кроз који вода истиче. У коју ће тачку на столу, на коме се налази тај суд, ударити млаз, ако се отвор налази 15 *cm* над површином стола?

25. На боку једног суда треба начинити отвор тако, да при сталном ниво-у вода, која истиче, има највећи домет. На којој дубини испод ниво-а треба начинити отвор?

26. Кроз тачку M, дату на параболи (сл. 44), повући дирку.

Прво решење.

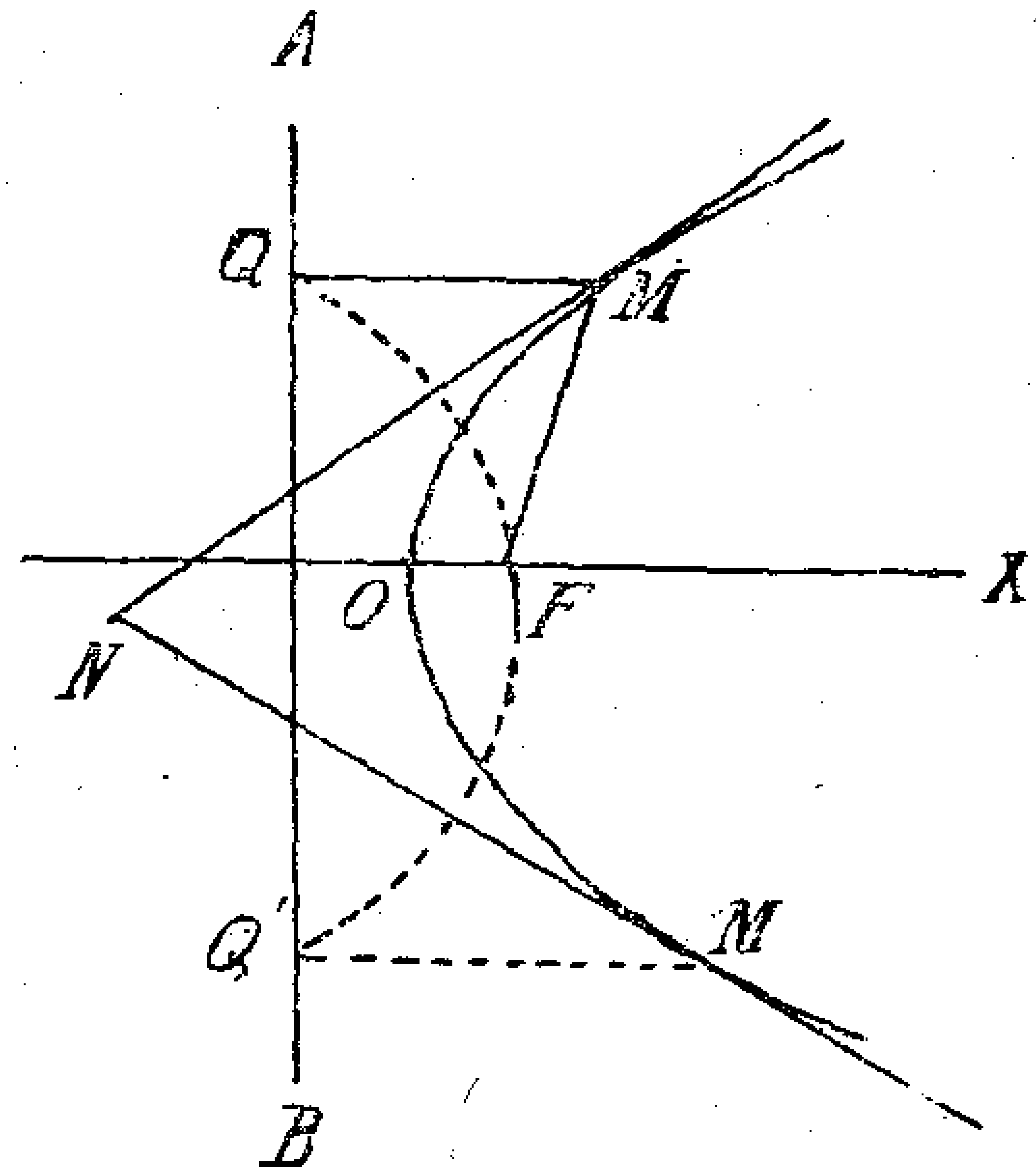
Дату тачку M треба везати са жижом F, и повући $MQ \perp AB$, па преполовити угао FMQ.

Друго решење.

Пренеси $OT = OP$ (сл. 43), па повуци MT.

Треће решење.

Око жиже F, а полупречником FM, треба описати полукруг, који ће сећи продужену осу у тачки T. Дирка је TM. (Сл. 43.)



Сл. 44.

27. *a*) Из тачке N, дате изван параболе, повући дирке.

Како дирка NM полови угао FMQ, па како је $MF = MQ$, то је и $NF = NQ$. С тога треба полупречником NF описати лук FQ, повући $QM \perp AB$, и тако добити додирну тачку M. Тачка Q′ даје додирну тачку M′ друге дирке.

b) Повући дирку паралелно с датом правом *l*. Тачка Q налази се на правој повученој из F нормално на *l*. (Сл. 44.) Помоћу тачке Q налази се M.

28. Нека је $y^2 = 16x$ једначина параболе; како гласи једначина дирке која је *a)* паралелна, *b)* нормала према правој $y - x + 3 = 0$.

29. На параболи $y^2 = 4x$ нека су дате две тачке чије су ординате 2 и -4. Кроз те две тачке повучене су дирке. Одреди *a)* пресек тих тангената, *b)* њихов угао, *c)* површнну троугла чије су стране те две дирке и додирна тетива.

30. Нормала од жиже до једне тангенте има своје подножје на дирци у темену и средња је пропорционала између потега додирне тачке и четвртога дела параметра.

***31**. Упореди раздаљииу жиже од дирке са нормалом која одговара тој дирци.

32. Под којим се углом секу линије: $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$?

33. Како гласе једначине тангената у тачкама, где се секу линије $4x^2 - 9y^2 = 36$ и $y^2 = \frac{10}{9}x$; под којим се углом секу те линије?

34. Наћи на параболи ону тачку, у којој дирка гради са осовином угао од 45°.

35. Под којом ће погодбом права $Ax + By + C = 0$ додиривати параболу $y^2 = 2px$.

Одговор: $B^2p = 2AC$.

36. Како гласи темена једначина параболе, коју додирује права $y = 2x + 3$?

37. Која дирка параболе $y^2 = 6x$ сече праву $y = 3x + 5$ под 45^0?

38. На параболу $y^2 = 2px$ повучена је дирка; одреди њену једначину, ако је *a*) тангента, *b*) потег додирне тачке једнак нормали.

39. Повуци дирку, једнаку половини параметра; израчунај њен нагибни угао према осовини.

40. Нађи једначине тангената, које су из тачке $(-1, -1)$ повучене на параболу $y^2 = 4x$.

41. Одреди геометриско место за све оне тачке, из којих се могу повући дирке које стоје једна на другој нормално.

Упутство. Ако су y_1, y_2 ординате додирних тачака, онда мора бити $\frac{p^2}{y_1 y_2} = -1$. Производ $y_1 y_2$ може се наћи из квадратне једначине која служи за одређивање додирних тачака тангената, повучених из тачке (x, y).

42. Дирка у темену геометриско је место за средине свих тангената једне параболе.

43. Две конфокалне параболе са супротним осовинама и једнаким параметрима секу се под правим углом.

ДЕВЕТИ ОДЕЉАК

ДОДАТАК

Пречници елипсе, хиперболе и параболе. — Пресеци купе. — Интеграл.

I. ПРЕЧНИЦИ ЕЛИПСЕ, ХИПЕРБОЛЕ И ПАРАБОЛЕ.

65. Елипса. Ако су A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) координате двеју тачака на елипси чија је једначина $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, онда сечица, која пролази кроз A и B, има једначину

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Како за тачке A и B вреде једначине

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$
$$b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2$$

то се из њих добива одузимањем:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b_2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}.$$

Кад се ова вредност унесе у једначину сечице, добива се

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}(x - x_1).$$

Ако су ξ и η координате оне тачке, која полови тетиву AB, онда је

$$\xi = \frac{x_1+x_2}{2}, \qquad \eta = \frac{y_1+y_2}{2}$$

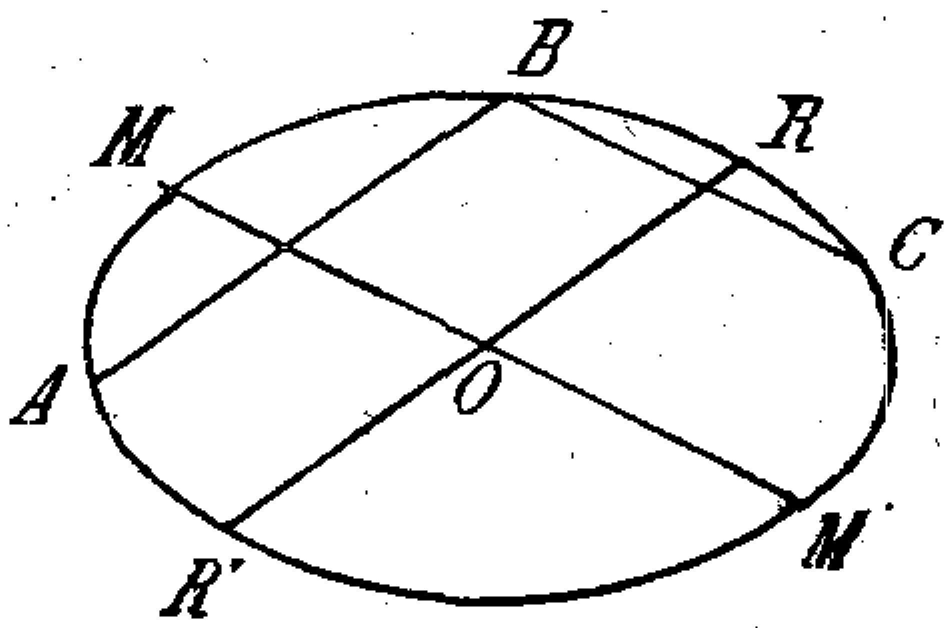
или . . . . . . $x_1 + x_2 = 2\,\xi, \qquad y_1 + y_2 = 2\,\eta.$

Кад се ове вредности унесу у једначину сечице, добива се,

$$y - y_1 = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}(x - x_1)$$

где $-\frac{b^2\xi}{a^2\eta}$ представља константу правца.

Све тетиве, које су паралелне са AB, имају исту константу правца $m = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}$.



Сл. 45.

Ако су x и y текуће координате за геометриско место MM′ (сл. 45) на којем се налазе средине свих паралелних тетива, онда је

$$-\frac{b^2x}{a^2y} = m \text{ или } y = \frac{b^2}{a^2m}x$$

једначина тог геометриског места.

Као што се види, то је геометриско место пречник, чија је константа правца $m' = -\frac{b^2}{a^2m}$.

Између константе правца паралелних тетива и константе правца оног пречника, који пролази кроз средине паралелних тетива, постоји према томе овај однос:

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Ако се повуку тетиве, паралелне с тим пречником (једна је од тих тетива BC на сл. 45), па ако је m'' константа правца за пречник који полови те тетиве, онда је

$$m''m' = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ дакле } m'' = m;$$

што значи, да је пречник RR′, који полови тетиве паралелне са BC, паралелан тетивама које су паралелне са AB.

Два таква пречника зову се два *спрегнута* пречника. Сваки од њих полови тетиве, које су паралелне с оним другим пречником.

Ако је $m = 0$, онда је $m' = \infty$; према томе су осе у елипсе два спрегнута пречника, и то два једина спрегнута пречника, који стоје нормално један на другоме.

Напомена. Како се круг може сматрати као елипса, у које је $a = b$, то је $m'm'' = -1$, што значи да у кругу свака два спрегнута пречника стоје један на другоме нормално.

66. Хипербола. Исто онако, као код елипсе, налази се код хиперболе да је

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x$$

једначина оног пречника, који полови тетиве чија је константа правца $= m$.

Ако је $m = 0$, онда је $m' = \infty$, што значи, да су осовине у хиперболе два спрегнута пречника, и то два једина спрегнута пречника, који стоје један на другоме нормално.

Напомене. — I. Како константе правца за два спрегнута пречника у елипсе дају производ $-\frac{b^2}{a^2}$, то мора нагибни угао једног пречника према апсцисној оси бити оштар, а другога туп. Један пролази кроз 1. и 3. квадрант, а други кроз 2. и 4. квадрант.

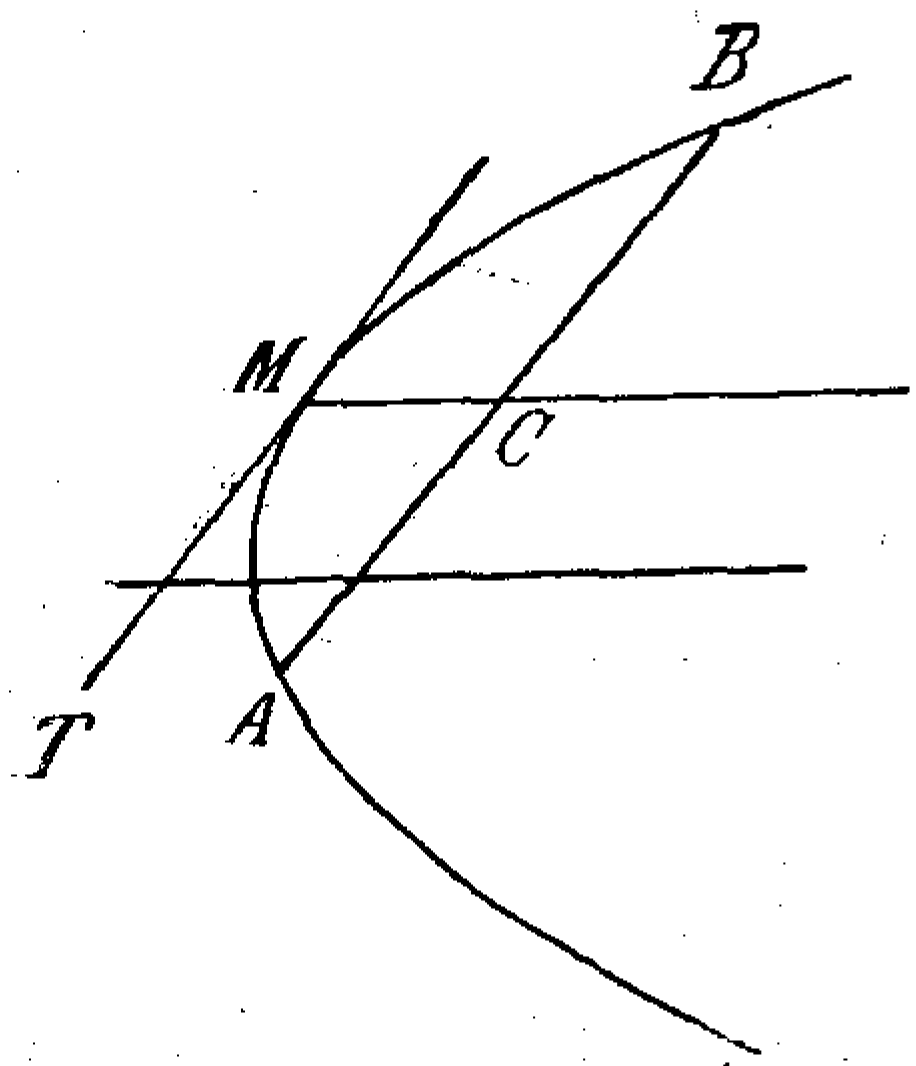
Код хиперболе је $mm' = +\frac{b^2}{a^2}$, што значи да су константе правца обе позитивне, или обе негативне. У хиперболе се, према томе, два спрегнута пречника налазе у истом квадранту и нису раздвојени осовинама.

II. Ако је у хиперболе константа правца једног пречника мања од $\frac{b}{a}$, онда она другога мора бити већа од $\frac{b}{a}$. Онај први сече хиперболу и зове се један *главни пречник;* овај други не сече хиперболу и зове се *споредни пречник.* —

Тетиве, које су паралелне с једним главним пречником, везују на хиперболи по две тачке које не припадају истој грани. Тетиве, које су паралелне с једним споредним пречником, везују на хиперболи по две тачке које се налазе на истој грани. Средине ових тетива леже на продуженом главном пречнику.

67. Парабола. Исто онако као код елипсе, налази се и код параболе, да је једначина сечице:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$



Сл. 46.

Ако је η ордината тачке C која полови тетиву AB, онда је

$$\eta = \frac{y_1 + y_2}{2}, \text{ дакле } y_1 + y_2 = 2\eta.$$

Према томе једначина тетиве AB гласи:

$$y - y_1 = \frac{p}{\eta}(x - x_1).$$

Исто онако као код елипсе, добива се за геометриско место, на коме се налазе средине паралелних тетива, ова једначина:

$$\frac{p}{y} = m, \text{ или } y = \frac{p}{m}$$

где је m константа правца паралелних тетива.

Дакле, пречник у параболе паралелан је са њеном осовином, у раздаљини $\frac{p}{m}$.

Нека су x' и y' координате тачке M, а MT дирка у тачки M; тада је њена једначина

$$yy' = p(x + x')$$

дакле је њена константа правца $\frac{p}{y'}$. Па како је тачка M и на пречнику MC, то је и $y' = \frac{p}{m}$ или $\frac{p}{y'} = m$, т. ј. дирка MT има исту константу правца као и тетива AB, дакле MT || AB. С тога се каже, да су пречник CM и дирка MT спрегнути пречници параболе.

Ако су тетиве на осовини нормалне, онда је $\alpha = 90^0$, $m = \infty$, с тога $y = 0$. Према томе су осовина и дирка у темену два спрегнута пречника.

Задаци.

1. Наћи средиште дате елипсе.

2. Дата је једна тетива елипсе; конструисати спрегнути јој пречник.

3. *a)* Дат је пречник једне елипсе (хиперболе), конструисати спрегнути му пречник.

b) Кад се око елипсе опише правоугаоник тако, да су му стране паралелне с великом и малом осом њеном, онда дијагонале његове одређују два спрегнута пречника. Израчунај њихове дужине.

4. Кад се кроз једну крајну тачку једног пречника елипсе (хиперболе) повуче дирка, онда је она паралелна спрегнутом пречнику.

5. У елипси $9x^2+25y^2=225$ дата је тачка М (1,1) или N $(1, \sqrt{3})$, кроз коју је повучен пречник. Одреди спрегнути му пречник и израчунај угао између оба пречника.

6. Одреди геометриско место за средине свих тетива у елипси $9x^2+16y^2=144$, које су нормалне на правој $x-2y=4$.

7. Докажи да се пресек двеју тангената једне параболе налази на пречнику који је спрегнут са додирном тетивом.

8. У параболи $y^2=2px$ дата је тачка (x_1, y_1); наћи једначину оне тетиве, која је у тој тачки преполовљена.

9. Конструисати параболу, кад се зна њено теме и кад су дата два спрегнута пречника.

10. Одредити конструктивним путем пресек двеју парабола, кад су дате њихове жиже и заједничка им директриса.

II. ПРЕСЕЦИ КУПЕ.

68. Елиптичан пресек.

Кад нека раван R сече све стране једне ротационе купе, онда је пресек *елипса* (сл. 47).

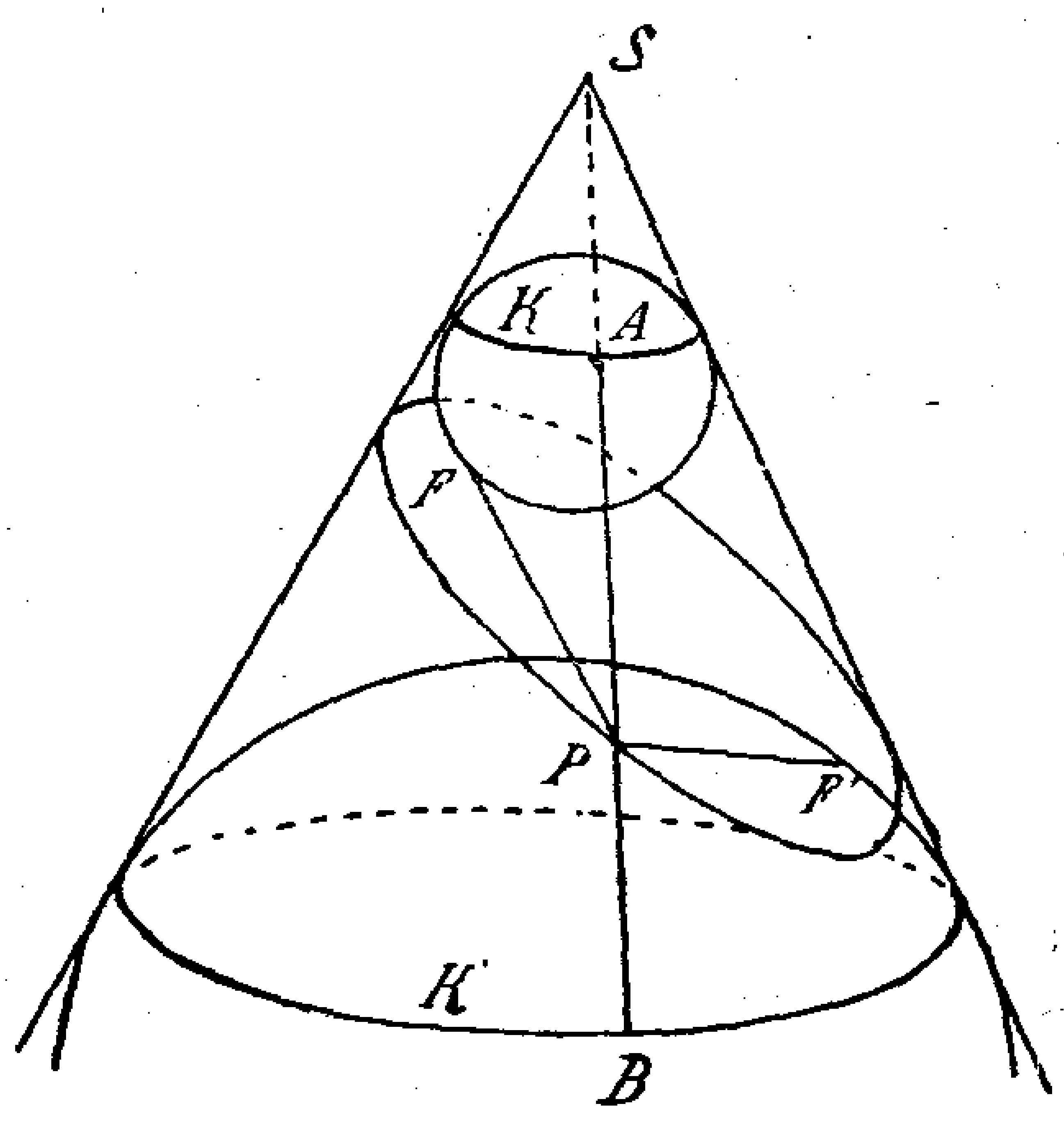
Доказ. С једне и друге стране равни, која сече купу, можемо уписати по једну лопту која додирује и ту раван и омотач купе.

Додирне тачке са равнином нека су F и F′, а додирни кругови с купом нека су K и K′.

Ако је P која било тачка на пресеку, онда је PF′=PB и PF = PA, јер су дирке, повучене из једне тачке на исту лопту, једнаке. Према томе је и

$$PF + PF' = PA + PB = AB$$

т. ј. тај је збир константан.



Сл. 47.

Пресек је, дакле, елипса чије су жиже F и F′.

Напомена. — Ако би се купа пресекла паралелно према основи, онда би се елипса претворила у круг.

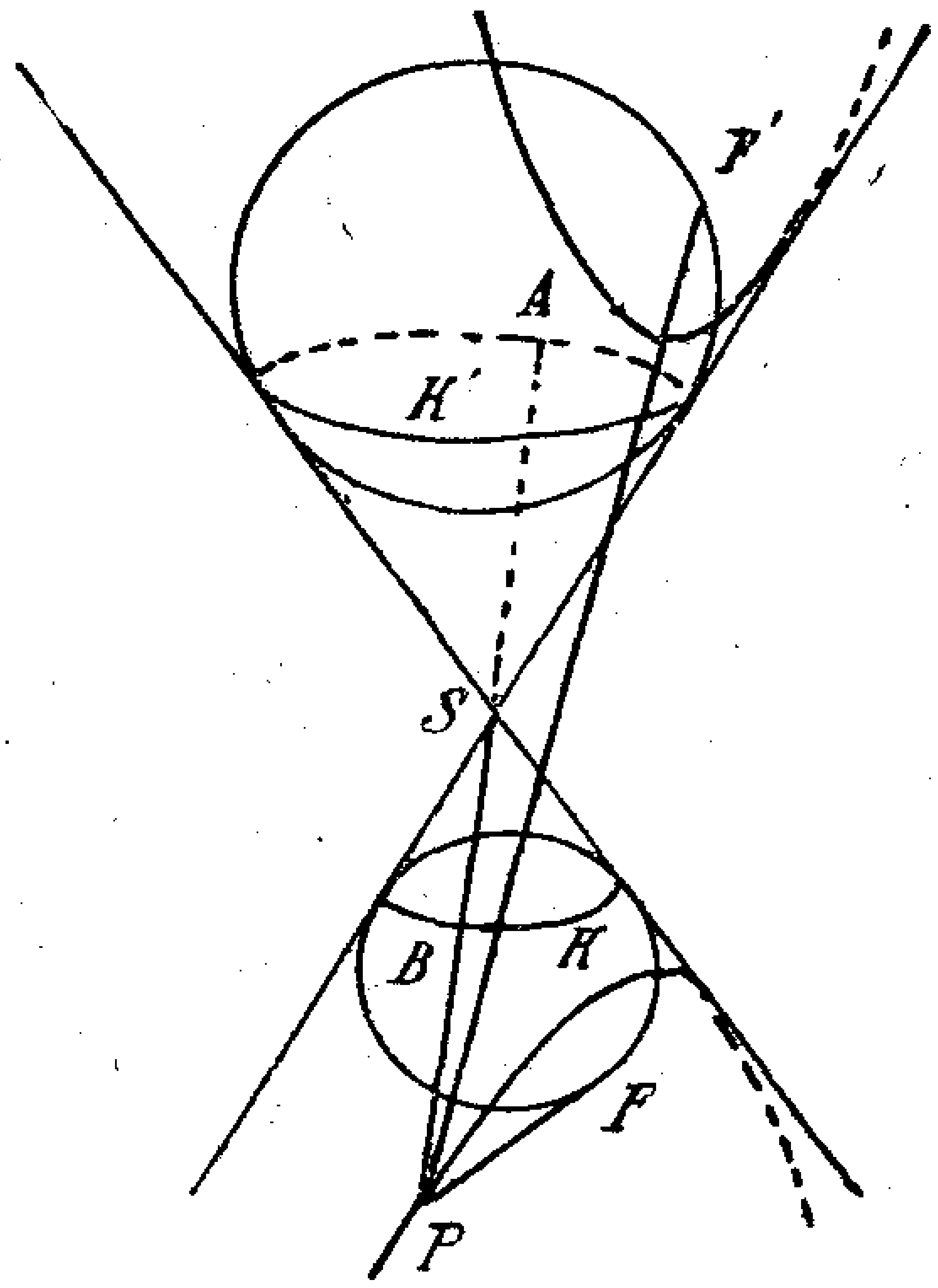
69. Хиперболан пресек.

Кад нека раван сече оба крила једне двојне купе, онда је пресек *хипербола.* (Сл. 48.)

Доказ. У сваку купу треба уписати по једну лопту, која додирује и раван која сече купу и омотач.

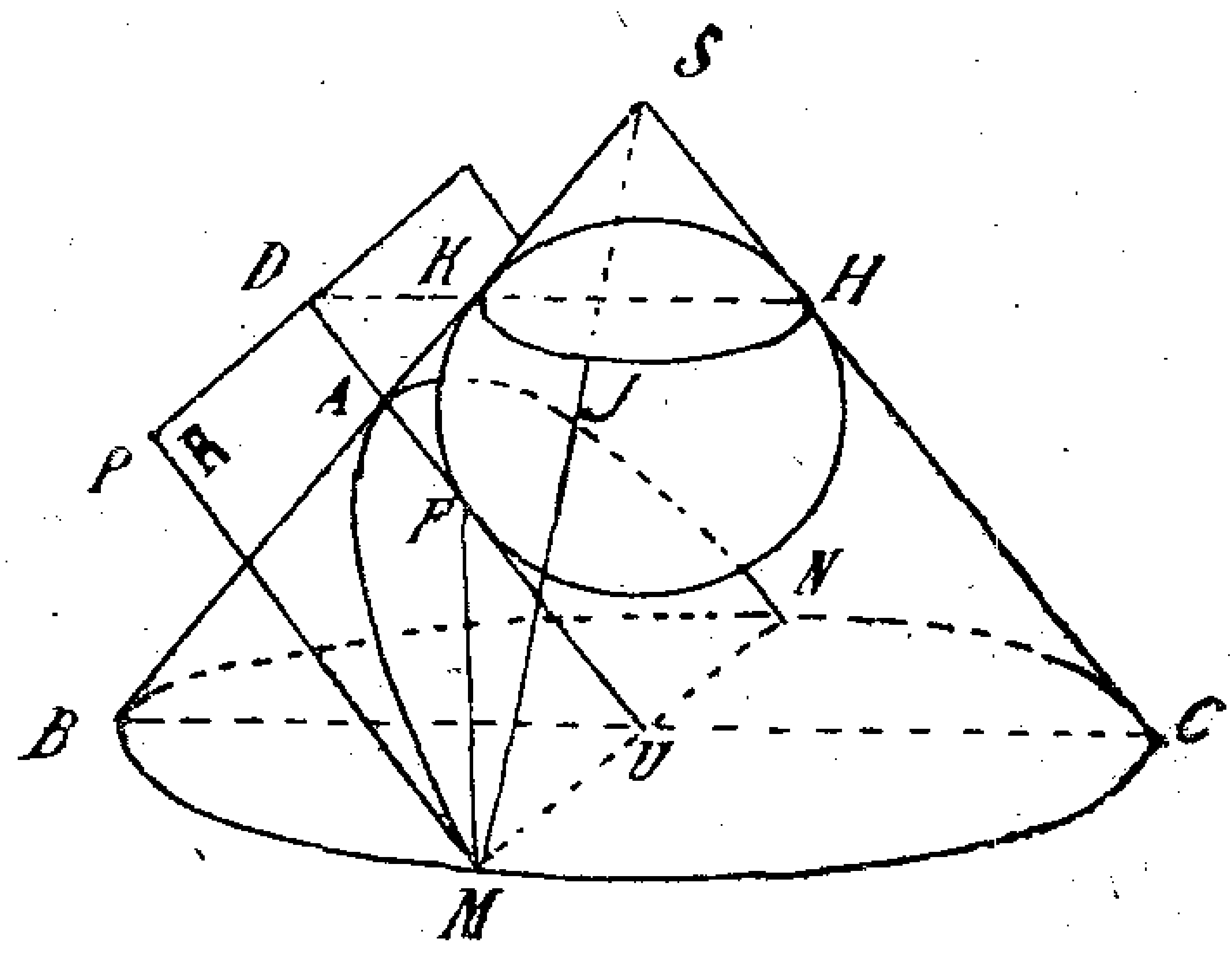
Додирне тачке са равнином нека су F и F′, а додирни кругови са купом нека су K и K′.

Ако је P која било тачка на пресеку, онда је PF′ = PA, PF = PB, дакле PF′ — PF = PA — PB = AB, дакле константно.



Сл. 48.

Напомена. — Ако би се купа пресекла једном равни, која пролази кроз S, онда би се хипербола изметнула у две праве које се секу.



Сл. 49.

70. Параболан пресек.

Кад је нека раван паралелна с једном страном ротационе купе, онда је пресек *парабола* (сл. 49).

Нека је SBC права кружна купа, а линија MAN њен пресек с једном равни R која је паралелна са страном SC.

Да бисмо доказали да је линија MAN парабола, треба доказати, да је свака њена тачка толико исто удаљена од једне сталне тачке, колико и од једне сталне праве. Тога ради замислимо да је у купи уписана лопта тако, да додирује и површину купе и дату раван R. Та лопта нека додирује површину купе по кругу KIH, а раван R у тачки F. Круг BMCN нека је паралелан с кругом KIH. Тада имамо:

$$MF = MI = KB = KA + AB.$$

Како су троугли ADK и ABC равнокраки, јер су слични с троуглом SKH, то је AK = AD, AB = AU; дакле

$$MF = AD + AU = DU = MP.$$

Дакле линија MAN парабола је, јер је за сваку њену тачку M раздаљина MF од жиже F једнака са њеном раздаљином MP од праве DP која је директриса (водиља). Ова је права пресек равни R с оном равни, у којој лежи круг KIH.

Параболина оса AU пресек је равни R с оном равни, која пролази кроз осовину купе и стоји нормално на равни R.

III. ИНТЕГРАЛ

71. Неодређен интеграл. — Диференцијални количник $\frac{dy}{dx}$ показује за сваку вредност апсцисе, како се пење крива линија која представља функцију $y = f(x)$.

Кад је дата функција, онда се може њен диференцијални количник израчунати; али се може и обрнуто из датог диференцијалног количника дознати фунција.

Нека је на пр. дат задатак: да се нађе једначина оне криве чије је пењање представљено изразом $2x$, т. ј. код које је свака дирка нагнута према апсцисној оси под углом чија је гониометриска тангента два пута већа од апсцисе додирне тачке.

Из једначине $\frac{dy}{dx} = 2x$ излази да је $y = x^2$, о чему се можемо уверити диферентовањем; и да је у опште

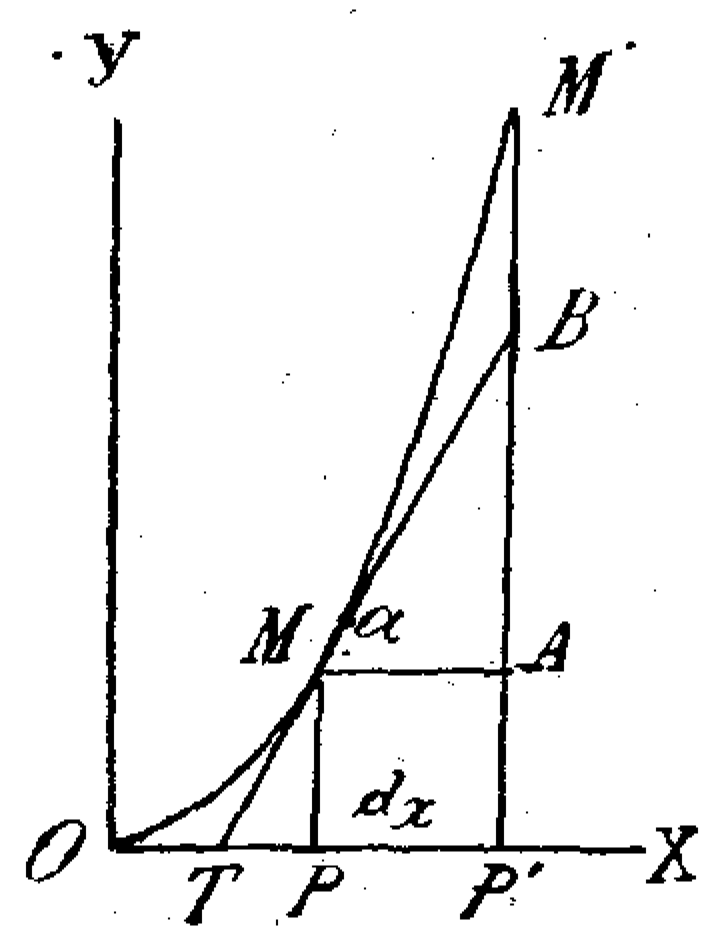
$$y = \frac{ax^{n+1}}{n+1}, \text{ кад је } \frac{dy}{dx} = ax^n \text{ (чл. 32).}$$

Решење $y = x^2$ није једино; има их безбројно много, и она се сва добивају, кад се десној страни дода један константан број C, који се при диферентовању губи.

Према томе је опште решење: $y = x^2 + C$. Овај израз $x^2 + C$ зове се *интеграл* од $2\,xdx$, а C зове се *интеграциона константа.*

Како ова константа може у опште имати безбројно много вредности, то се интеграл зове *неодређен.*

Геометриски разлог, што је интеграл неодређен, лежи у томе што се крива $y = x^2$ (сл. 50) може на више или на ниже померати у правцу ординатне осе. Тим померањем не мењају се особине криве линије, него се само повећавају све ординате за једну исту сталну количину.



Сл. 50.

Константа у једначини $y = x^2 + C$ може се одредити из какве споредне погодбе. Ако се на пр. тражи не само то, да је пењање представљено изразом $2x$, него и да крива линија пролази кроз почетак координатног система, онда се заменом $x = 0$ и $y = 0$ налази да је $C = 0$. Тада је $y = x^2$ специјално решење.

Ако линија треба да прође кроз тачку (1, 2), онда треба у једначини

$$y = x^2 + C$$

ставити $x = 1$, $y = 2$, па отуд израчунати C. Тако се налази $C = 1$, а за једначину криве добива се $y = x^2 + 1$.

Одређивање интеграла зове се *интегровање.*

Напомена. Из предњег тумачења излази, да су диферентовање и интегровање две супротне рачунске радње, и да је диферентовање одређен, а интегровање неодређен задатак.

72. Интеграл као збир.

Нека је на сл. 50 BT дирка у тачки M.; кад се апсциса OP додирне тачке повећа за $PP' = dx$, па у тачки P' повуче $P'M' \perp OX$, онда апсциси OP' одговара на дирци тачка B, а на кривој линији тачка M'. Ординате тачака B и M' разликују се за BM'.

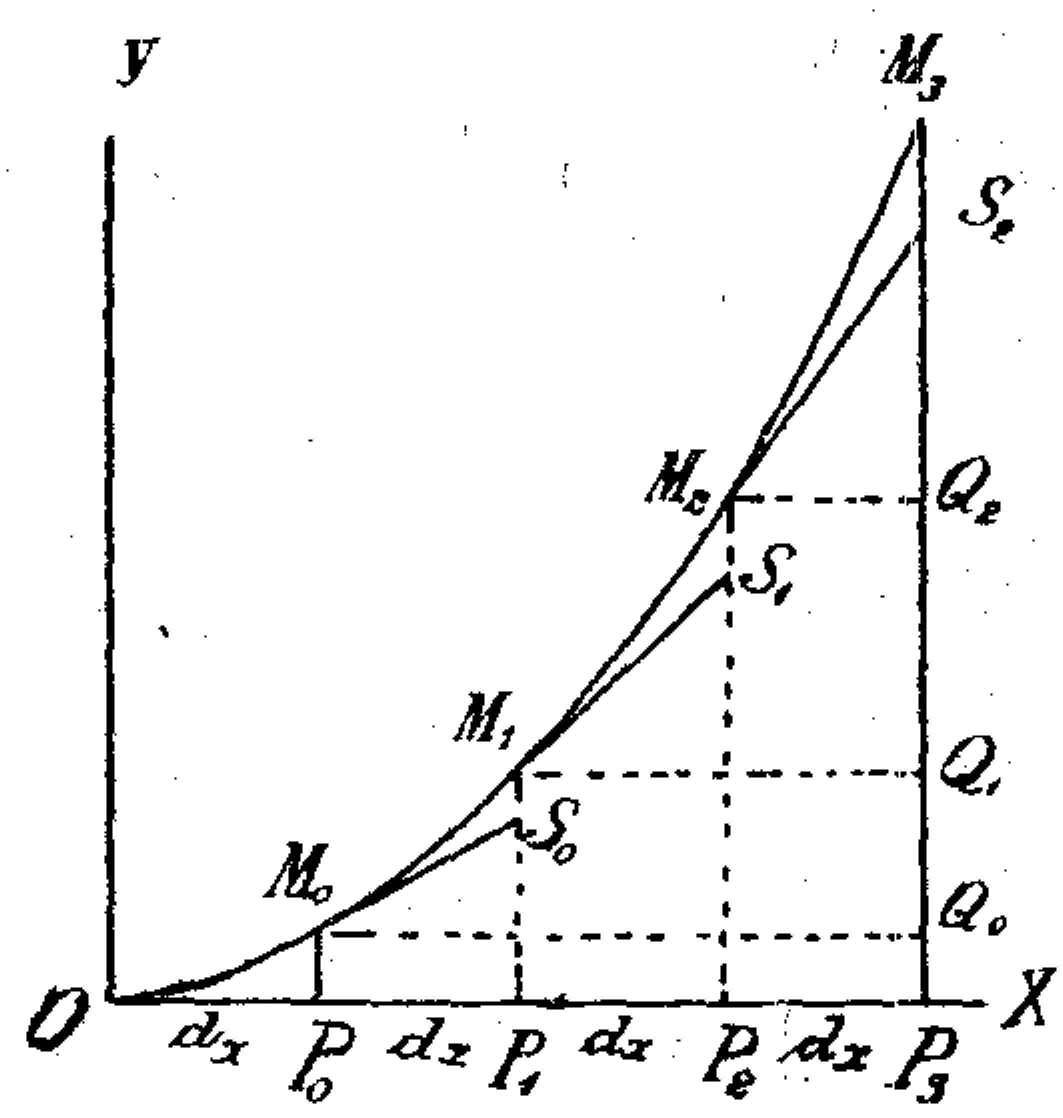
Из правоуглог троугла MAB излази да је:

$$AB = AM \,.\, tg\,\alpha = dx \,.\, tg\,\alpha.$$

За прираштај AM' не би се смело, према томе, ставити да је $AM' = dx \,.\, tg\,\alpha$. Али, што је мање dx, тим је мање BM', и тим је мања грешка, кад се за промену функције (AM') узме $dx \,.\, tg\,\alpha$. За бескрајно мало dx биће и $AM' = dy$ бескрајно мало, тако да се може ставити

$$dy = dx \,.\, tg\,\alpha.$$

Нека је на сл. 51. линијом $OM_0M_1M_2M_3$ графички представљена функција $y = f(x)$, и нека је познат њен диференцијални количник $y' = f'(x)$. Тада се може израчунати гониометриска тангента дирке у тачки M_2, кад се у изразу за $f'(x)$ стави $x = OP_2 = x_2$. Из правоуглог троугла $M_2Q_2S_2$ излази да је $Q_2S_2 = Q_2M_2 \,.\, f'(x_2)$.



Сл. 51.

Приращтај ординате, т. ј. M_3Q_2 није исто што и S_2Q_2, али се може ставити $M_3Q_2 = f'(x_2)\,dx$, кад је dx, бескрајно мало.

Исто тако може се ставити прираштај ординате од M_1 до M_2, т. ј. $Q_1Q_2 = f'(x_1)\,dx$, где $f'(x_1)$ значи вредност диференцијалног количника, кад се у њему стави $x = OP_1 = x_1$.

И тако се може ордината M_3P_3 представити као збир од сабирака оваквога типа: $f'(x)\,.\,dx$.

Кад се замисли OP_3 подељено на безбројно много једнаких делова dx, онда ће и дужи M_1S_0, M_2S_1, M_3S_2 и т. д. бити бескрајно мале. Тада је M_3P_3 збир од безбројно многих, а бескрајно малих сабирака истога типа $f'(x)\,dx$.

Према томе задатак, да се одреди функција $y = f(x)$, кад се зна њен диференцијални количник $y' = f'(x)$, идентичан је са задатком, да се одреди збир од безбројно многих, а бескрајно малих сабирака одређенога типа.

Ако суму тих безбројно многих сабирака обележимо са S, онда је

$$S\,f'(x)\,dx = y$$

у место латинског слова S усвојен је знак $\int$ који се чита *интеграл*.

73. Најпростија интеграциона правила.

Нека су u и v функције од x.

1. Зна се да је $d(au) = a \cdot du$, где је a константа. Стога је

$$\int a\,.\,du = au.$$

Кад се u замени са $\int du$, добива се

$$\int a\,du = a\int du$$

т. ј. *стални чинилац може се ставити пред интеграциони знак.*

2. Како је $d(u+v) = du + dv$; то је

$$\int (du + dv) = u + v.$$

Кад се замени u са $\int du$, v са $\int dv$, добива се

$$\int (du + dv) = \int du + \int dv$$

т. ј. *интеграл збира једнак је збиру интеграла појединих сабирака.*

3. Исто тако је $\int (du - dv) = \int du - \int dv$.

4. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$; 5. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

6. $\int \sqrt{x}\,.\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$; 7. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$;

8. $\int ax\,dx = \frac{ax^2}{2} + C$;

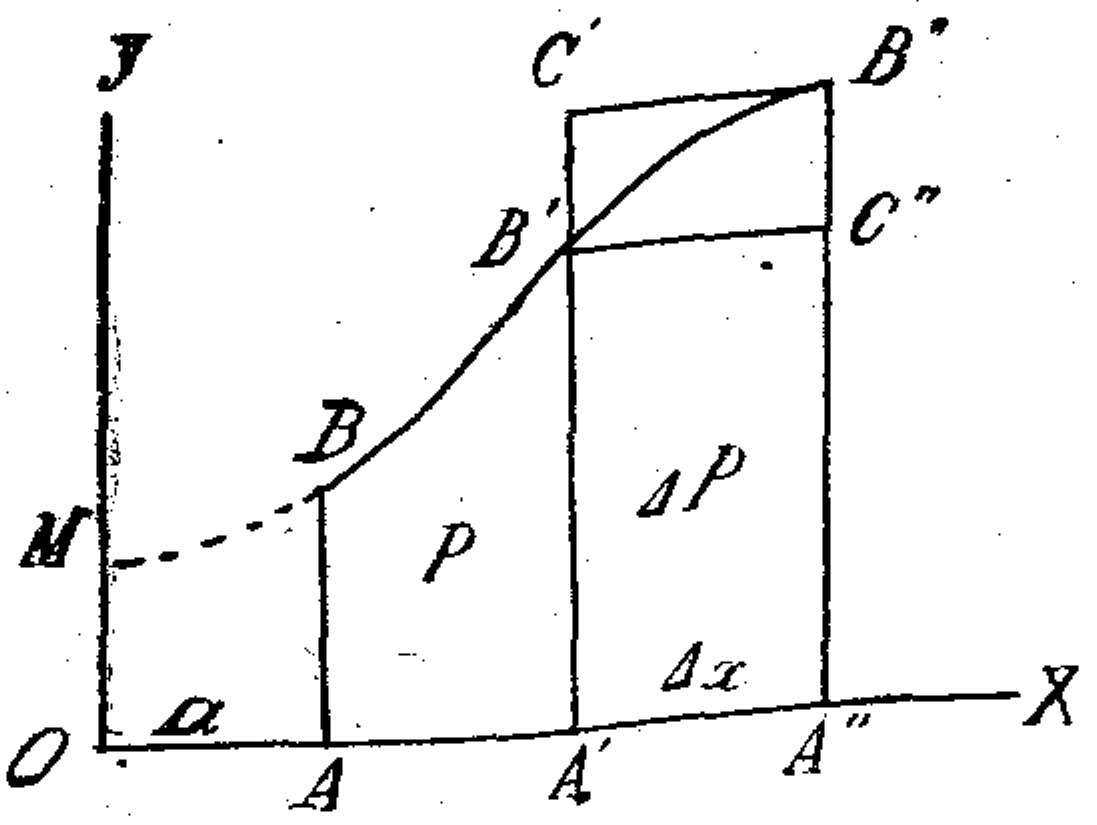
9. $\int \sqrt{ax}\,.\,dx = \sqrt{a} \int \sqrt{x}\,dx = \sqrt{a} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C;$

10. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$ 11. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

74. Израчунавање површине; одређен интеграл.

Нека је дат задатак; да се израчуна површина P (сл. 52), ограничена луком BB′ какве криве линије, ординатама крајњих тачака тога лука и комадом апсцисне осе између тих ордината, дакле

$$P = ABB'A'.$$



Сл. 52.

Кад је дата стална ордината AB тачке B и једначина криве линије, онда је P само још функција апсцисе тачке B′ (x, y). Ако се апсциса тачке B′ повећа за $\triangle x$, онда се површина повећа за $\triangle P = A'B'B''A''$. Тај прираштај $\triangle P$ већи је од правоугаоника $A'A''B'C''$, а мањи је од правоугаоника $A'A''C'B''$, дакле

$$y \cdot \triangle x < \triangle P < (y + \triangle y) \cdot \triangle x$$

отуд . . . . $y < \frac{\triangle P}{\triangle x} < y + \triangle y.$

Кад $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle P$ постану диференцијали dx, dy, dP, биће

$$\frac{dP}{dx} = y$$

т. ј. *диференцијални количник површине P није ништа друго, него завршна ордината.*

Према то је . . . . . . $dP = y\,.\,dx$

а површина . . . . $P = \int y\,dx + C.$

Како је y функција од x, то нам овај образац даје површину P као функцију оне апсцисе, која одговара завршној ординати. Треба само ставити на место x вредност апсцисе $OA' = b$, која одговара завршној ординати.

Константа C може се одредити из погодбе, да је $P = 0$ кад је $x = a$.

Кад бисмо криву линију $B''B'B$ продужили до пресека са ординатном осом, онда би се површина $MOA'B'$ нашла, кад би се у изразу

$$\int y\,dx + C$$

ставило $x = OA'$, само би се сад константа C морала израчунати из погодбе, да је површина $MOA'B' = 0$, кад је $x = 0$.

Површина MOAB налази се, кад се у изразу

$$\int y\,dx + C$$

стави $x = a$, пошто тој апсциси одговара ордината AB, којом је завршена површина MOAB.

Из двеју површина: MOA′B′ и MOAB налази се површина ABA′B′ одузимањем, дакле

$$P = MOA'B' - MOAB, \text{ или}$$

$$P = \int^{x=b} y\,dx + C - \left(\int_{x=a} y\,dx + C\right)$$

што се пише краће овако:

$$P = \int_{x=a}^{x=b} y\,dx, \text{ или још краће } \int_a^b y\,dx.$$

Овај интеграл зове се *одређен; a* је *доња*, а ***b*** је *горња граница*.

75. Примери.

1. *Површина параболе.* Једначина је $y = x^2$.

Према томе је површина

$$P = \int y\,dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Парабола има облик и положај као на сл. 50. Да бисмо нашли површину OM′P′, треба узети одређен интеграл између доње границе $= 0$, и горње границе OP′. Тако се налази да је површина

$$OMM'P' = \frac{OP'^3}{3}.$$

Па како из једначине параболе излази, да је $M'P' = OP'^2$, то је

$$OMM'P' = \frac{OP'^2 . OP'}{3} = \frac{x_1 y_1}{3},$$

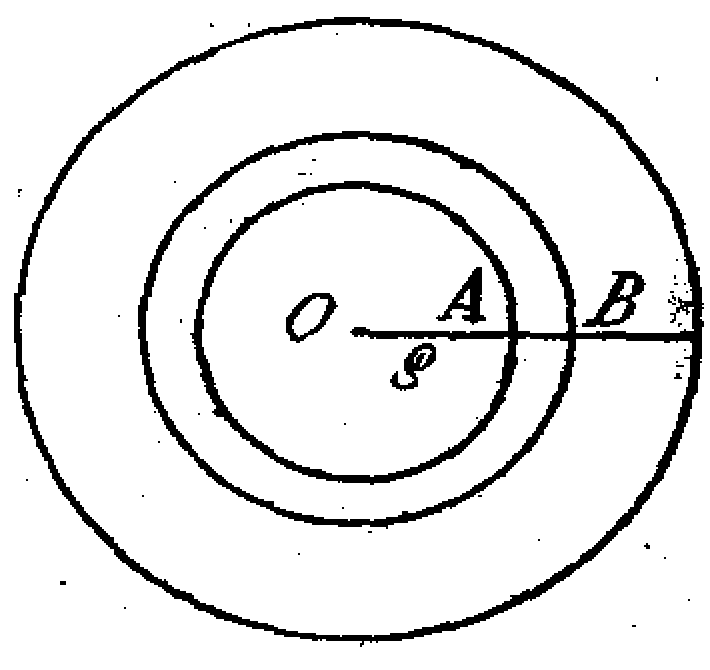
ако ставимо $OP' = x_1$, $M'P' = y_1$.

Кад се овај резултат упореди с површином правоугаоника, коме је основица OP′, а висина P′M′, онда се види, да је површина OMM′P′ трећина тог правоугаоника.

2. *Површина кружна прстена.*

Прстен се може поделити на безбројно многе, а бескрајно узане прстенове (сл. 53). Ако је $OA = \rho$, $OB = \rho + d\rho$, онда је површина прстена између та два концентрична круга:

$$dP = 2\,\rho\pi d\rho.$$



Сл. 53.

Површина прстена, чији су полупречници r_2 и r_1, биће према томе:

$$P = \int_{r_1}^{r_2} 2\,\rho\pi d\rho = \Big[\pi\rho^2\Big]_{r_1}^{r_2} = \pi\,(r_2^2 - r_1^2)$$

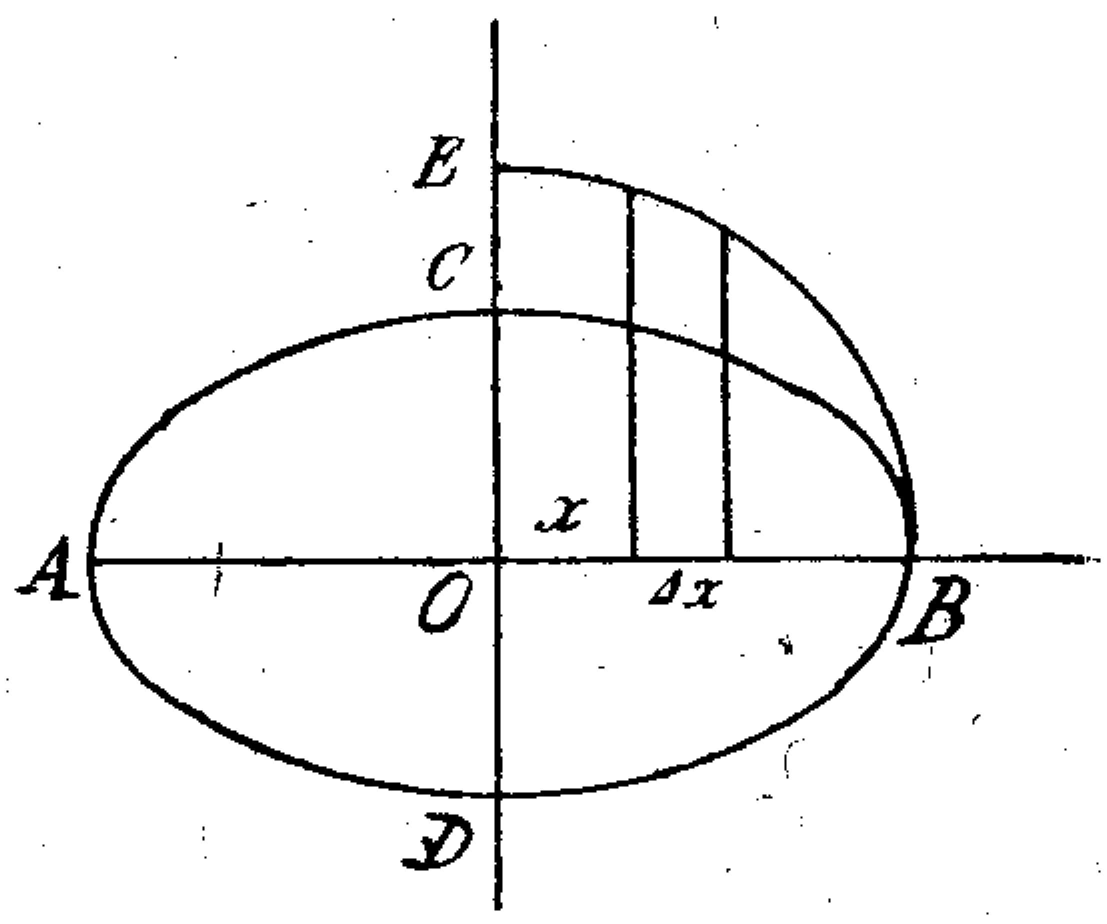
3. *Површина круга.* У предњем задатку треба узети доњу границу $r_1 = 0$.

4. *Површина елипсе.*

За квадрант OBC (сл. 54) налази се

$$P = \int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\;dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\;dx.$$



Сл. 54.

Вредност интеграла $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\;dx$ дознаје се индиректно овако: кад се над елиптичним квадрантом OBC опише кружни квадрант OBE, онда је његова површина:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\;dx = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Кад се и круг и елипса поделе на бескрајно узане површинске елементе, онда елиптични елементи стоје према кружним у размери као $b : a$, с тога је површина

$$\mathrm{BOC} = \frac{b}{a}\cdot \mathrm{BOE} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2\pi}{4} = \frac{ab\pi}{4}$$

према томе површина елипсе: $P = ab\pi$.

5. *Површина синусне линије.**)

За површину од $x = 0$ до $x = \pi$ имамо

$$P = \int_0^\pi y\,dx = \int_0^\pi \sin dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 2.$$

6. *Површина обртних тела.*

α) *Површина лопте.*

Лопта постаје, кад се круг обрће око апсцисне осе (сл. 55).

---

*) Види сл. 10 у Тригонометрији.

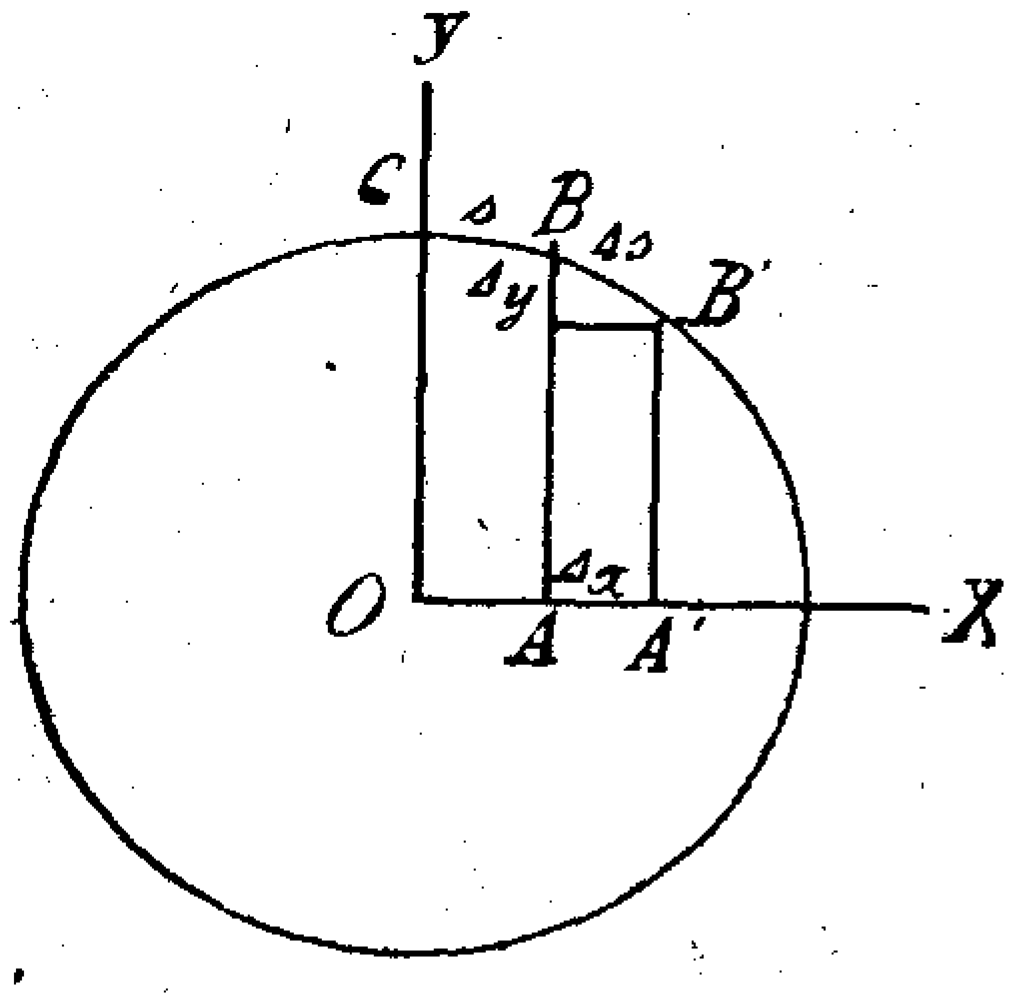
Тачка B нека има координате x и y, а тачка B′: $x+\triangle x, y+\triangle y$ (где је $\triangle y$ негативно).

Тетива:

$$BB' = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} = \triangle x \sqrt{1+\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2}$$

Кад $\triangle x$, $\triangle y$ и $\triangle s$ постану диференцијали dx, dy, ds, онда је

$$ds = dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$



Сл. 55.

При обртању круга лук ds описује појас, који се може сматрати као права облица чија је висина ds, а полупречник основе је $AB = y$.

Према томе је омотач те облице:

$$m = 2\,y\pi \,.\, ds = 2\,y\pi dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Из једначине круга $x^2 + y^2 = r^2$ налази се

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

према томе $m = 2\,r\pi dx$.

За полулопту имамо једначину

$$\frac{P}{2} = \int_0^r 2\,r\pi\,dx = \left[2\,r\pi x\right]_0^r = 2\,r^2\pi.$$

Површина је целе лопте $4\,r^2\pi$.

β. *Површина калоте.* — Ако је h висина калоте, онда су $(r-h)$ и r границе интеграла.

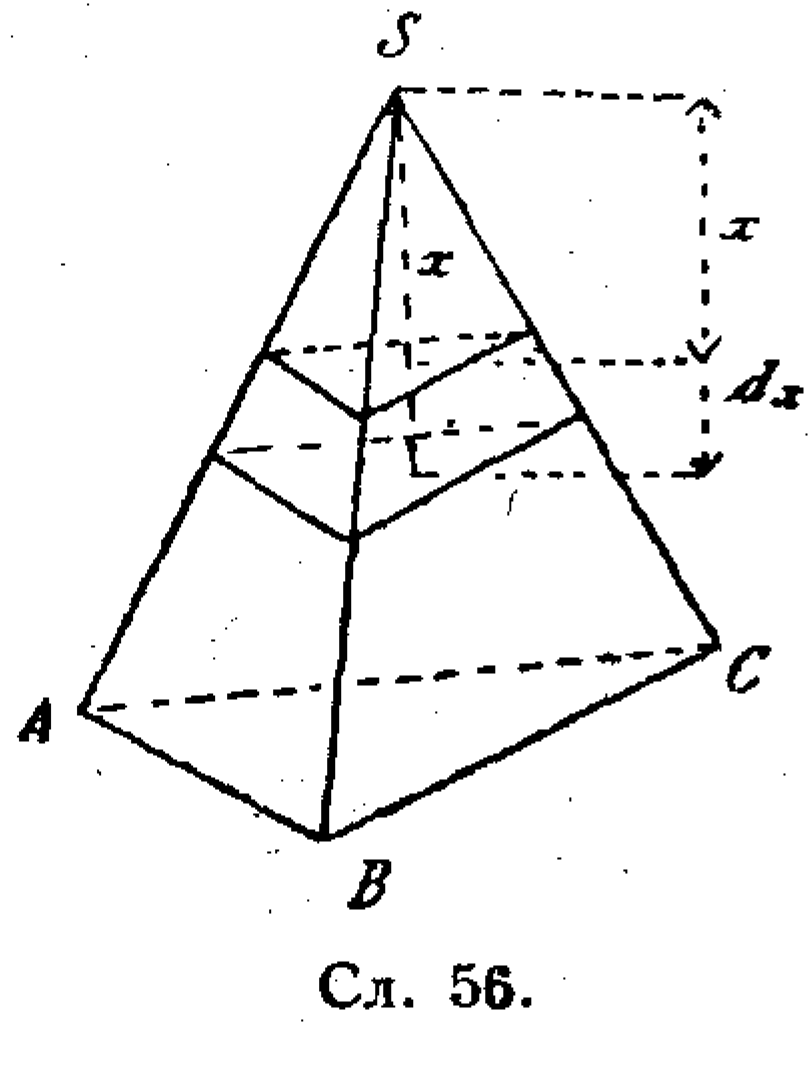
γ. *Површина лоптина појаса.* — Налази се као разлика између две калоте, или као под β.

7. *Израчунавање запремине.*

α. *Запремина пирамиде* (основа B, висина h). Нека је пирамида SABC (сл. 56) пресечена једном равни паралелно према основи, а у раздаљини x од врха S. Ако је b површина пресека, онда је

$$B : b = h^2 : x^2$$

$$b = \frac{Bx^2}{h^2}.$$



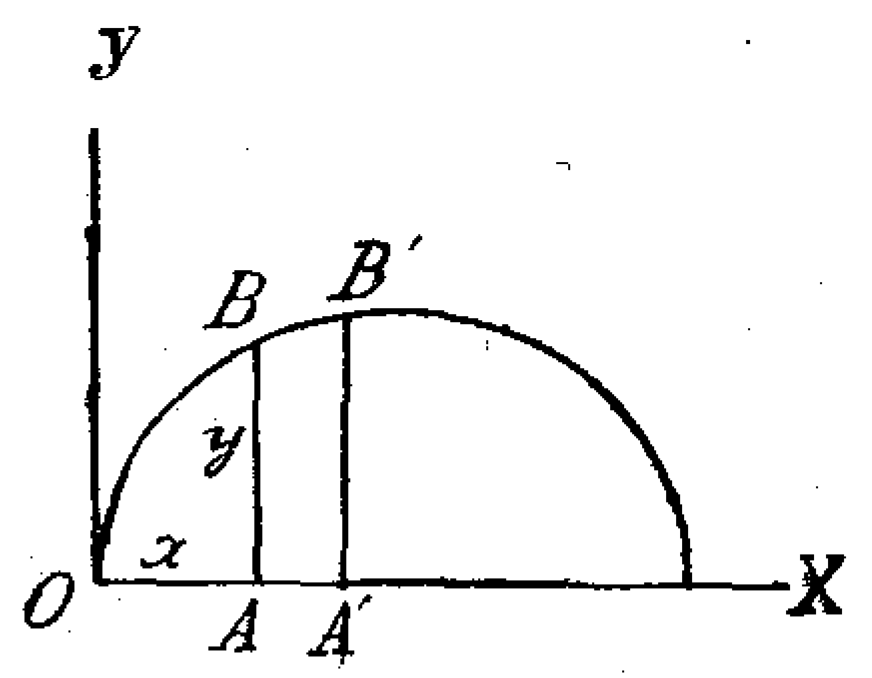
Сл. 56.

Пирамида се може пресецима, који су паралелни према њеној основи, поделити на бескрајно многе танке слојеве, чије су висине dx

бескрајно мале. Један такав слој, са основом b а висином dx има запремину $\frac{B}{h^2}x^2 . dx$, а запремина је целе пирамиде:

$$V = \int_0^h \frac{B}{h^2} x^2\, dx = \frac{B}{h^2}\int_0^h x^2\, dx = \frac{Bh}{3}.$$

β. *Запремина купе* изводи се исто онако, као запремина пирамиде.



Сл. 57.

γ. *Запремина лопте.*

Елеменат ABA′B′ (сл. 57) кружне површине описује, при обртању полукруга око OX, једну облицу чија је запремина

$$dv = y^2\pi\, dx = x\,(2\,r - x)\,\pi\, dx.$$

Према томе је запремина лопте

$$V = \int_0^{2r} x\,(2\,r - x)\,\pi\, dx = \frac{4\,r^3\pi}{3}.$$

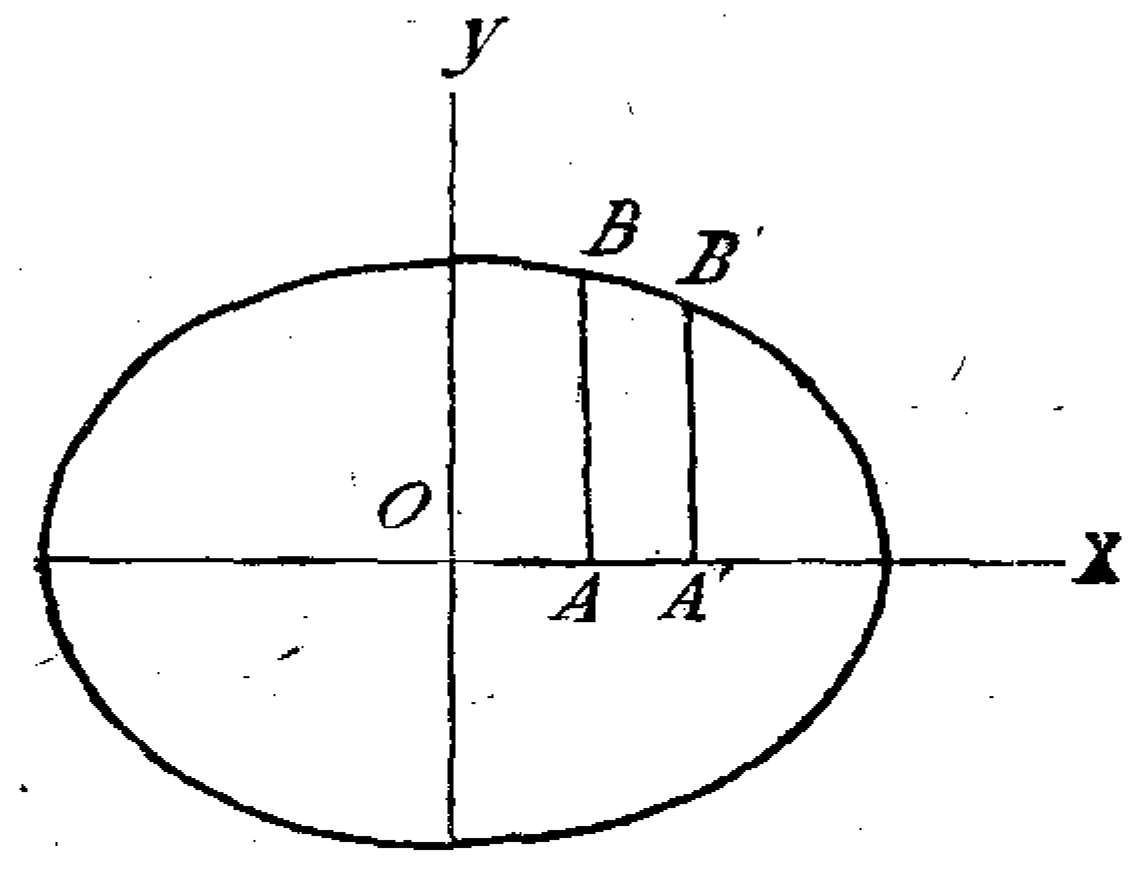
β) *Запремина лоптина сегмента.*

Сегменат лопте постаје обртањем површине OAB (сл. 57). Ако се стави $OA = h$, онда је

$$V = \int_0^h x\,(2\,r - x)\,\pi\, dx = \frac{h^2\pi}{3}(3\,r - h)$$

γ) *Запремина ротационог елипсоида.*

Кад се онај део елипсе, који се налази у првом квадранту, обрће око осе OX, онда постаје половина елипсоида $\frac{V}{2}$ (сл. 58).



Сл. 58.

Ако су x, y координате тачке B, а $x + dx$, $y + dy$ (dy негативно) координате тачке B′, онда површински елеменат ABA′B′ описује запремину $y^2\pi\, dx$. Тада је

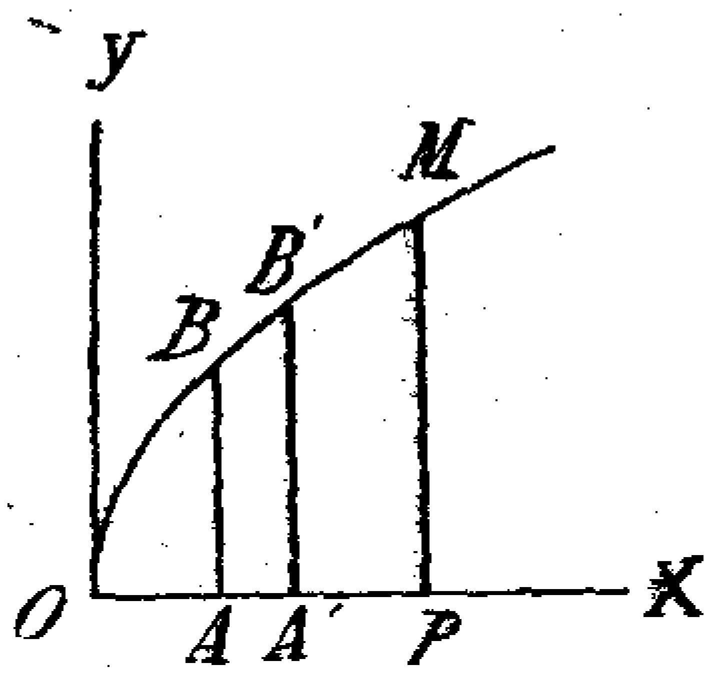
$$\frac{V}{2} = \int_0^a y^2\pi\, dx = \int_0^a \pi\left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right) dx = \frac{2\,ab^2\pi}{3}.$$

Према томе је запремина целог елипсоида:

$$V = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

Напомене. I. Кад би велика оса елипсе била на ОУ, онда би обртањем елипсе око OX постао спљоштени елипсоид (сфероид); његова је запремина

$$V = \frac{4}{3} a^2 b \pi.$$



Сл. 59.

II. Кад би било $a = b = r$, онда бисмо на место елипсоида имали лопту; њена је запремина $\frac{4}{3} r^3 \pi$.

δ) *Запремина ротационог параболоида.* Постаје обртањем параболног сегмента OPM (сл. 59) око OX.

Нека су a и b координате тачке M. — Елеменат параболоида, који постаје обртањем површинског елемента ABA'B', представљен је изразом

$$dV = y^2 \pi\, dx = 2 p \pi x \,.\, dx.$$

Отуд . . . . $V = 2 p \pi \int_0^a x\, dx = a^2 p \pi = \frac{a b^2 \pi}{2}.$

Напомена. Ако замислимо око параболоида облицу, чија је висина $OP = a$, а полупречник основе $PM = b$, онда је њена запремина $a b^2 \pi$; дакле два пута већа од параболоида.

ЗАДАЦИ.

1. Дат је троугао са странама 6, 5, 7. Израчунај површину елипсе чије су жиже у крајњим тачкама прве стране, а пролази кроз треће теме.

2. Одреди однос између површине једне елипсе и површине описаног и уписаног круга.

3. Око елипсе описан је главни круг (пречник $2a$); преполовити једном елипсом ону површину, која се налази између дате елипсе и описаног круга.

4. Дата је бројна ексцентричност ε и површина p једне елипсе; израчунај осе.

5. Нека је $2b$ мала оса једне елипсе. Колика треба да је велика оса, да би површина елипсе била једнака омотачу равностране купе, чија је висина b?

6. Елипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ једнака је омотачу праве зарубљене купе чије основе имају полупречнике a и b. Колика је висина те зарубљене купе?

7. Кроз жижу једне параболе повучена је тетива, нормално на осу параболе; израчунај површину одсечена сегмента.

8. На параболи $y^2 = 4x$ дате су две тачке чије су ординате 2 и — 4, па су оне везане тетивом; израчунај површину сегмента.

9. Кроз теме једне параболе повучена је тетива под углом од 60°; колики је сегменат?

10. У параболи $y^2 = 12x$ уписан је равнокрак троугао тако, да му је теме у параболину темену; Колики су сегменти, који су одсечени крацима тог троугла, ако висина стоји према основици у размери 5 : 4?

11. На параболу $y^2 = 2px$ повучена је дирка, која је према оси нагнута под 30°; из додирне тачке спуштена је на осу нормална тетива. Конструиши квадрат, једнак сегменту који је том тетивом одсечен.

12. На параболу $y^2 = 8x$ повучена је дирка у тачки чија је ордината 4. Израчунај површину између те дирке, ординатне осе и параболног лука. Колику површину одсеца од параболе нормала?

13. Израчунај делове, на које је круг $x^2 + y^2 = 8$ подељен параболом $y^2 = 2x$.

14. На параболи, а над њеном осом, налазе се две тачке чије су ординате a и b; раздаљина између тих ордината нека је c. Израчунај сегменат који одсеца тетива између тих двеју тачака.

15. Израчунај заједничку површину ових двеју парабола: $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

16. Тетива AB нормална је на оси параболе, а има од њена темена раздаљину a. Сегменат, који одваја та тетива, поделити по размери $m : n$ једном тетивом, која је са AB паралелна. (Специјално 1 : 7; мањи део лежи до темена).

17. Израчунај запремину зарубљене пирамиде. Ако је H висина целе пирамиде, а h висина допунске пирамиде, онда је $\frac{B}{3H^2}(H^3 - h^3)$ вредност интеграла за запремину зарубљене пирамиде. Растављајући $H^3 - h^3$ на чиниоце, од којих је један $H - h$, добивамо образац у чл. 71. Стереом.

18. Израчунај запремину тела, које постаје обртањем површине AA′B′B (сл. 58), кад су a и a' апсцисе тачака B и B′.

19. Израчунај запремину тела, које постаје кад се један лук на једној грани равностране хиперболе $xy = \frac{a^2}{2}$ обрће око једне асимптоте, и кад су m и n апсцисе крајњих тачака тога лука.

20. Колики је полупречник лопте, која има исту запремину као Земљин сфероид? ($a = 6377{\cdot}4\ km$, $b = 6356{\cdot}1\ km$).

ПОГОВОР.

При изради Аналитичне Геометрије служило ми је за основу најновије издање Мочник-Спилманове Геометрије за више разреде средњих школа. Наставно је градиво исто, које је прописано нашим наставним програмом, само су примењене рационалније методе, према савременим захтевима средње-школске наставе.

Водећи рачуна о одлукама међународног конгреса за реформу математичке наставе у средњој школи, на коме су српски делегати изјавили, да је и у нас нарочита комисија израдила план за увођење Више Математике у средње школе — ја сам унео у ову књигу елементе Диференцијалног и Интегралног Рачуна, али у границама тако скромним, да се ученици неће оптеретити, а упознаће се са рационалнијим методама извођења математичких образаца.

14. Јула 1921.
Београд.

Стеван Давидовић,
професор Војне Академије.

ПРЕГЛЕД САДРЖИНЕ