МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

ЗБОРНИК РАДОВА

НОВА СЕРИЈА
КЊИГА 4 (12)

БЕОГРАД
1984.

ЗБОРНИК РАДОВА

НОВА СЕРИЈА
Књига 4 (12)

БЕОГРАД
1984.

INSTITUT MATHÉMATIQUE

RECUEIL DES TRAVAUX

NOUVELLE SÉRIE
TOME 4 (12)

BEOGRAD
1984.

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

ЗБОРНИК РАДОВА

НОВА СЕРИЈА
КЊИГА 4 (12)

Примљено на 127. седници Научног већа Математичког института
16. марта 1983. године.

БЕОГРАД
1984.

Уредник
др *СТЕВО КОМЉЕНОВИЋ*
директор Математичког института

У припремању ове књиге учествовао је и
проф. др ***Драган Трифуновић***

*

Технички уредник: *Милан Чавчић*

Издаје: Математички институт — Београд, Кнез Михаилова 35

Републичка заједница науке СР Србије учествовала је у трошковима издавања ове публикације.

Према мишљењу Републичког секретаријата за културу СР Србије, ова публикација је ослобођена пореза на промет.

Штампа: Београдски издавачко-графички завод, Београд, Булевар војводе Мишића 17

Овом књиīом Маūемаūички инсūиūуū обележава 80-īодишњицу рођења

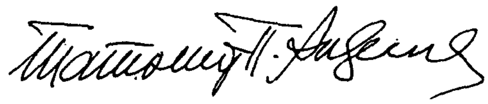
Др ТАТОМИРА П. АНЂЕЛИЋА,

ūрофесора универзиūеūа и редовноī члана Срūске академије наука и умеūносūи

The Institute of Mathematics in Belgrade has with this book marked the 80th anniversary of

Dr TATOMIR P. ANDJELIĆ,

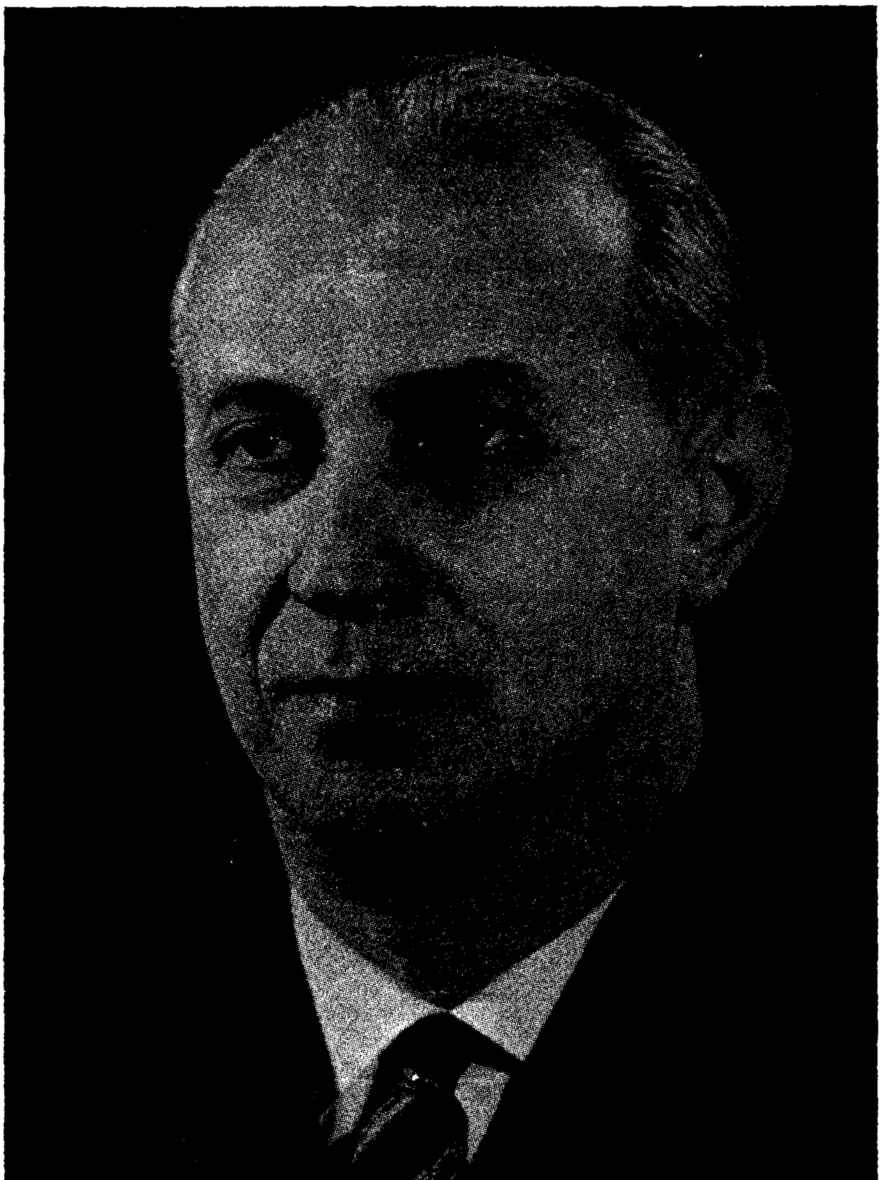
University Professor and Full Member of the Serbian Academy of Sciences and Arts in Belgrade



Академик

др ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Београду



САДРЖАЈ

Страна

Зборник радова Математичког института. Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12) 1984.

ЖИВОТ И ДЕЛО ТАТОМИРА П. АНЂЕЛИЋА

Драган Трифуновић

Професор др Татомир П. Анђелић припада оним личностима наше науке за које се каже да су извршиле значајан утицај на научни живот своје средине. У прво време, као сарадник Милутина Миланковића (1879—1958), Антона Билимовића (1869—1970) и Вјачеслава Жардецког (1896—1962), а доцније сам, професор Анђелић је градио своју кулу од науке. У наше кругове увео је нове научне дисциплине (тензорски рачун, механика непрекидних средина, матрични рачун, теорија релативности и друго), а у настави на Универзитету зачетник је многих научних предмета. Скоро да нема предмета из механичких наука које професор Анђелић није предавао. До појаве његових ученика, за професора Анђелића може се употребити позната метафора: у својој науци био је „лекар опште праксе“.

Као писац уџбеника показао је све одлике савремености науке и неопходне методичности. Професора Анђелића језик је јасан, едукативан и актуелан. Он код нас први пише, рукује и друге учи тензорима. Док су извесни математичари 50-тих година мудро ћутали, професор Анђелић уводи курс из линеарне алгебре, пише књигу **Матрице** и објављује научне радове из ове области (рецимо, расправе о Банахјевичевим схемама и др.). Анђелићевим ангажовањем у Београду је створена добра школа тензорског рачуна а и сам објављује научне прилоге из ове области (нпр., Белтрами-Мичелове једначине, о генерализацији појма Дарбуова вектора и др.). За „Шпрингера“ професор Анђелић је написао одељак **Tensorkalkul nebst Anwendungen**, што представља посебно признање. Код нас Милутин Миланковић први уводи векторски метод, а Радивој Кашанин први уноси векторе у општи курс више математике I и II. Професор Анђелић ствара посебан курс из теорије вектора и овим знатно утиче на даљи развој наставе и истраживачког рада (нпр., векторско излагање аналитичке геометрије, тригонометрије и сл.).

Татомир П. Анђелић рођен је 11. новембра 1903. у Бечњу, (заселак Буковац), општина чачанска (Србија). „Рођен сам у забаченом селу у коме није било основне школе, па сам до пресељења породице у суседне Мрчајевце, морао да идем пет километара до школе, — често наводи проф. Анђелић. Мајка ми је била неписмена, а отац Павле земљорадник с четири разреда гимназије. За своје образовање имао је чак велику библиотеку. Пре основне школе мени су старије сестре читале народне песме, имали смо **Вукова дјела** и сигурно је да су и те народне песме некако утицале на моју фантазију и можда падале на плодно тло извесног мени урођеног романтизма".

Основну школу похађа у суседном селу Мрчајевцима; завршио је 1914. године. Ометен ратом, Анђелић је наставио школовање 1919. године у Чачанској гимназији где је 1922. год. и матурирао. „Када је требало да пођем у гимназију — сећа се проф. Анђелић, дошли су ратови па сам као и сви моји вршњаци из села, обављао све земљорадничке послове, али сам и — читао. Прочитао сам све што се нашло у библиотеци мога оца, па чак и политичку литературу која ме нимало није привлачила. Највише сам се интересовао за поједина историјска и научно-популарна дела — расправе о дарвинизму, **Тајне света** Ернста Хекела и друге. Подвлачим да ме је управо Хекелова књига импресионирала мада сам је тада само местимично разумевао. Мислим да је на мој поглед на свет сигурно у знатној мери утицала ова материјалистичка литература исто колико и сам отац: био је убеђен у исправност материјалистичких концепција."

Љубав према математици рађа се баш у ово доба и то врло свесно. То се догодило онда када је после многих испита у гимназији видео да је у математици увек први. Заволевши школу и у њој своју науку, Татомир П. Анђелић је желео да иде на више школе — на студије. Ту је доживео неспоразум с оцем. Отац Павле је желео да му син добије највише образовање, али је хтео да он заврши права. Сматрао је да ће само тако бити близак народу своје околине и да само тако може лично успети и бити користан. Татомир, међутим, својом наклоношћу већ је био задојен математичком лепотом и прецизношћу, а романтично расположен, и астрономијом. У разговорима с оцем остао је упоран у својој жељи и победио је. Отац је пристао да га пошаље на студије и то, по Татомировом сопственом избору, који је био последица делимично и његовог романтичарског расположења, у Хајделберг (Немачка). Отац Павле продао је имање да би школовао сина Татомира.

Гетинген и Берлин били су тада најјачи немачки математички центри, али Анђелић — бира Хајделберг, најстарији и тада најчувенији немачки универзитет. „Личност која ме је у тој средини најпре придобила био је професор Артур Розентал — сећа се професор Анђелић. С посебном пажњом је пратио мој развој, подржавао ме. Био је честит човек и кад су дошли нацисти на власт пребегао је у САД... Професор Хајнрих Либман је друга личност из круга мојих хајделбершких професора која ме је одушевила. Био је сјајан предавач, умео је све у мени да подстакне на рад. Био сам дисциплинован. У раду с професором Либманом схватио сам да се без огромног труда не може напредовати чак и уз претпоставку да сте чист геније! По природи сам био вредан али признајем да је та немачка радна средина на посебан начин утицала на мене и моје склоности. Дефинитивно сам тада схватио да ми је у математици ближа геометријска страна од алгебарске и да ми је у физици механика ближа од осталих делова физике... У то време одлазим у Париз, у Стразбург: слушао сам предавања из историје, из латинског...".

У Хајделбергу је Анђелић од 1922. до 1927. године студирајући математику, физику и астрономију. У прво време је доста пажње обратио астрономији, којој је био наклоњен још откад је видео Халејеву комету 1910. год. Школску 1927/28. годину провео је на Филозофском факултету у Београду, где је 1928. године завршио математичку групу наука.

Од 1928. године је професор гимназије у Београду. Једну годину (1931/32) радио је у I мушкој реалној гимназији у Београду, а све остало време до 1945. године у II мушкој реалној гимназији у Београду. Испит за професора средње школе положио је 1932. године.

По одлуци Савета Филозофског факултета, Т. П. Анђелић је одржавао вежбе из рационалне механике за студенте I и II групе Филозофског факултета. Ово је радио све до избијања рата 1941. године. Поред вежбања Анђелић је водио Библиотеку Математичког семинара и учествовао у раду педагошког семинара за студенте. Анђелић се водио, пошто је радио и у гимназији пуно радно време, на Филозофском факултету као „хонорарни асистент без права на хонорар". Наиме, број асистената је био ограничен. У ово време, водио је и секретарске послове незваничног *Клуба математичара* Универзитета у Београду. Тако је проф. Анђелић закорачио у *Београдску математичку школу* која је између два рата имала висок углед у свету науке. „Био сам шегрт код проф. Билимовића — сећа се Т. Анђелић. Био сам врло присно везан за њега али сам доста научио радећи и уз остале професоре, посебно уз Петровића и Миланковића. Михаило Петровић је био колико радан човек толико и друштвен, близак са нама млађима. Први свој стручни рад написао сам на његов изричит захтев — **Математичари и рачун**. Читао сам им радове, с в и м а. Правио им коректуре. *Била је то средина која је импоновала. Нико од нас млађих никад није могао да осети да га неко од тих великих ауторитета било чим омаловажава, напротив! Мислим да је највећа заслуга управо Михаила Петровића што смо се тада сви осећали као једна велика породица математичара ... Незаборавна је била та атмосфера рада, уважења*".

На предлог Комисије за обнову рада Универзитета у Београду, Т. Анђелић је додељен 31. августа 1945. год. на рад Филозофском факултету као професор средње школе ради одржавања вежбања и припремних курсева. Од тога дана се стално налази прво на Филозофском, а после раздвајања 1947. год., на Природно-математичком факултету.

Фебруара 1946. Т. П. Анђелић полаже докторски испит према решењу Савета Филозофског факултета Универзитета у Београду од 30. јануара 1946. Пред комисијом: проф. др Милутин Миланковић, проф. др Николај Салтиков и проф. др Радивој Кашанин, Т. П. Анђелић је одбранио докторску дисертацију **Диференцијалне једначине кретања нехолономног система у инкомпресибилној течности** (дисертација је објављена у Београду 1946. године на 51. стр.). Својом докторском дисертацијом Т. П. Анђелић је створио услове за даља истраживања у механици нехолономних система. Године 1948. изабран је за доцента при Катедри за механику и астрономију, а од 1. јула 1951. је ванредни професор за предмет механика. Од 1. маја 1957. је редовни професор Природно-математичког факултета у Београду.

Године 1952. механика се издвојила из математичке групе Природно-математичког факултета у Београду, захваљујући ентузијазму професора др Антона Билимовића и професора др Татомира П. Анђелића, у засебну Катедру механике и астрономије, која је обухватала студијске групе механике и астрономије. По одласку професора Билимовића у пензију, новембра 1954. године, шеф Катедре механике и астрономије постаје професор Анђелић. Када се Катедра механике и астрономије, 1962. године, раздвојила на Катедру механике и Катедру астрономије, професор Анђелић постаје шеф Катедре механике, што је био до 1971. године, када је та катедра, у оквиру реорганизације Природно-математичког факултета, постала Институт за механику Природно-математичког факултета у Београду. Од тада је управник тог института све до 1974. године када је прешао као стални члан у Математички институт, где је остао до пензије 1978. године.

Анђелићево кретање у науци пратила је организација научног живота код нас. Анђелићева ангажованост у многим делатностима Универзитета, Академије и научним друштвима је посебна карактеристика живота овог изузетно вредног научног радника. После другог рата ваљало је обновити и започети науку, стварати кадрове, установе, научна друштва... А ту је проф. Анђелић био неуморан. Био је секретар факултетског савета, продекан у два маха, члан и руководилац рада Комисије за наставу и председник Комисије за уџбенике Београдског универзитета. Био је четири године декан Природно-математичког факултета у Београду (1958—1962).

Редовно је држао више разних течајева на другом и трећем степену, од којих неколико први пут на Београдском универзитету, као што су курсеви тензорског рачуна и астродинамике. Т. П. Анђелић је као наставник предавао: ***теорију вектора, механику непрекидних средина, графичке и нумеричке методе, елементарну геометрију, тензорски рачун, матрице, рационалну и аналитичку механику, методику наставе механике, астродинамику и историју механике.*** Држао је предавања из матрица и тензора на постдипломским студијама на Грађевинском факултету у Сарајеву и из астродинамике на Природно-математичком факултету у Новом Саду. На Природно-математичком факултету у Београду је радио до 1. маја 1974. као стални а затим по уговору о делу.

Т. П. Анђелић написао је око десет универзитетских уџбеника, превео је уџбеник диференцијалне геометрије Л. П. Ајзенхарта. Његови уџбеници су објављивани у више издања а за уџбеник теорије вектора добио је универзитетску награду.

У свом раду на универзитету посветио је пуну пажњу подизању научног подмлатка и помагао младим научним радницима да се развију. Руководио је израдом више магистарских и докторских дисертација.

Од оснивања Математичког института Српске академије наука 1946. године је његов сарадник. Једно време 1962. године био је и вршилац дужности управника. Године 1969. је од Савета Математичког института СРС изабран једногласно за директора, на којој се дужности налазио до 1978. године када одлази у пензију.

За дописног члана Српске академије наука изабран је 1959. године, а 1974. за редовног члана исте Академије. Осим редовног учешћа на скуповима Одељења природно-математичких наука, бројних и благовремено писаних реферата о поднетим радовима, академик Анђелић је у више наврата био ангажован од стране Председништва и Одељења Академије на разним пословима. Таква су његова учешћа на симпозијумима у част Руђера Бошковића у Дубровнику 1958. године и нарочито 1961. године. У оба случаја Анђелић је активно учествовао у раду симпозиума и својим саопштењима дао озбиљан допринос тумачењу Бошковићевих концепција механике и утврђивању његовог значаја за науку. Осим тога он је и председавао састанцима на којима су узели учешћа реномирани страни научници. Т. Анђелић је био и редактор појединих издања Српске академије наука.

Године 1961. Одељење Природно-математичких наука га је послало као свог представника на позив Румунске академије наука на Колоквијум за механику флуида у Брашов. Анђелић је учествовао на том Колоквијуму са својим саопштењем и представљао Академију у свим фазама рада. Том приликом је остварио корисне личне контакте са румунским колегама па је 1965. поново позиван као гост Румунске академије наука. На позив Румунске академије наука учествовао је јула 1966. у раду на обнови Међубалканске уније математичара.

Познат је Анђелићев допринос у организацији Српске академије наука и уметности. Тако је биран у Савет Архива Академије (у коме се и сад налази), у Савет изд. предузећа „Научно дело", у Савет Математичког института и најзад за редактора и члана републичке редакције Bulletin scientifique секција А. Од његових научних радова 14 је објављено у Академијиним публикацијама (Глас, Publ. de l'Institut math., Зборник радова Мат. института — у време кад је Математички институт припадао Академији — и најзад у заједничким едицијама наше Академије и академија у Загребу и Љубљани).

На предлог Академије уврштен је као члан у делегацију Савезног савета за координацију научне делатности за преговоре са делегацијом Демократске Републике Немачке.

Децембра 1969. представљао је Српску академију наука и уметности на прослави Баварске академије наука у Минхену.

Члан је Редакционог одбора за издавање часописа Publ. de l'Inst. math.

Био је члан жирија за додељивање Октобарске награде.

Професор Анђелић је дописни члан Југославенске академије знаности и умјетности од 1975. и Међународне астронаутичке академије у Паризу од 1967; стални је члан Међународног комитета за историјску метрологију у Базелу (Basel), почасни је члан Грчког астронаутичког друштва, члан је у разним научним и стручним друштвима математике, механике и астронаутике у иностранству (пет) и у земљи (шест). У датом тренутку је председник Савеза астронаутичких и ракетних организација Југославије и Друштва за историју и филозофију математичких и природних наука Србије.

Академик Анђелић је по позиву гостовао и држао предавања на Техничкој великој школи у Darmstadt-у 1955, на техничким великим школама у Karlsruhe-у и München-у 1960, и на техничком универзитету у Берлину (Charlottenburg) 1967. године, и у Аустријском математичком друштву у Бечу 1958. године. Године 1962. био је на десетодневном гостовању по позиву Бугарске академије наука у Софији, где је био свечано примљен, и у Математичком институту Бугарске академије наука и на Универзитету у Софији. Као гост Румунске академије наука учествовоа је на Колоквијуму из механике флуида 1961. године у Брашову. Године 1965. је као делегат Друштва мат. и физ. боравио у Румунији ради обнављања рада Међубалканске уније математичара и том приликом држао предавања у летњој школи за румунске наставнике математике у средњим школама у Предеалу.

Члан је више иностраних научних друштава (American Mathematical Society, British Interplanetary Society, English Mathematical Association, Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM), Osterreichische mathematische Gesellschaft, Societe math. de France). Био је више година редовни кореспондент листа „Osterreichische mathematische Naobrichten" који издаје Аустријско математичко друштво у Бечу.

Већ дуго година је рецензент у реферативним часописима Mathematical Reviews, Реферативни журнал за механику Совјетске академије наука и Zentralblatt für Mathematik. При томе, треба ипак истаћи, да је на листу достављеном сарадницима „Math. Reviews"-а, пре неколико година, као узор писања рецензија одштампана једна рецензија академика Анђелића.

Као члан и од 1959. год. председник Југословенског астронаутичког и ракетног друштва учествовао је као представник Југославије на свим састанцима Интернационалне астронаутичке федерације од 1959. год. а 1967. и 1978. године биран је за потпредседника ове међународне организације за двогодишњи период.

Врло је активан члан GAMM-а од 1955. године у коме је посебно признање добио на конгресу у Штутгарту за успостављање првих веза између наших научника и научника Немачке, као и научника Немачке и оних из Бугарске и Пољске.

Анђелић је учествовао и на конгресима Немачког друштва математичара и Италијанског друштва математичара, на међународним конгресима математичара у Амстердаму и Москви и на конгресима за теоријску и примењену механику у Бриселу и Минхену.

Најзад, у групи од 12 познатих научника као што су E. K. Schmidt, P. Sauer итд. Анђелић је ангажован и написао је одељак о тензорском рачуну и применама у великом збирном делу **Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs** у 4 тома, које је издао чувени издавач математичке литературе Springer Verlag у Берлину.

Као представник Југословенског друштва „Никола Тесла" био је 1965. десет дана гост Совјетске организације „Знание" и боравио у Москви, Лењинграду и Кијеву. При томе је одржао једно предавање на Универзитету у Москви.

Као гост Управе за Космичка истраживања (НАСА) провео је месец дана 1967. у САД и посетио све важније центре космичких истраживања.

Учествовао је са саопштењем на Конгресу 1969. у Бечу који су организовале Уједињене нације по питању мирнодопског коришћења космоса.

Године 1970. у летњем семестру Међународног центра за студије механике одржао је курс **A survey of Tensor calculus** на енглеском језику у граду Удине (Италија). Овај курс је исте године и публикован.

Као математичар, професор Анђелић се определио теоријској механици сматрајући је делом математике. „Професор Билимовић је пресудно утицао у фази мога развоја на моју научну оријентацију — говори Т. П. Анђелић. Ако сам нешто научно у теоријској механици онда то могу да захвалим само Антону Билимовићу. Он је на мене утицао и друкчије: показао ми је занат научног радника: Како се читају коректуре, како се састављају рукописи, како се тражи тема за рад у литератури, како се цртају слике, тако рећи с в е осим писања на страним језицима; то сам једино знао боље од њега! Са Билимовићем сам почео да се учим и писању уџбеника, прво средњошколских, потом универзитетских. Писао сам, као по неком правилу, п р в е уџбенике код нас — из теорије вектора, матричког и тензорског рачуна итд. То је велики труд, то је више хиљада штампаних страница, али и велика обавеза професора-педагога."

Објашњавајући значај математике, Т. П. Анђелић мисли: „Ми примамо утиске преко спољних чула. То су груби пријеми које после интелектуално прерађујемо и групишемо у појмове. Математика је наука која нас оспособљава да од појмова и још више изведених облика мишљења вршимо комбинације, уопштења и даље апстракције. На тај се начин ј е д и н о може доћи до схватања извесних природних појава, на пример у микросвету, за које нам недостају чулне представе и чулни модели . . . На пример, електрону се приписују особине честице, таласа, па се мисли да има и једну особину чврстог тела. Он то очигледно све не може бити и он може бити представљен једино једним математичким изразом, јер је математика оператор који је творевина нашег ума и само тако електрон може бити искоришћен и у потпуности схваћен."

У популаризацији науке и технике проф. Анђелић учинио је много. Поред многобројних предавања (преко стотину) на радничким и народним универзитетима, по омладинским домовима и домовима Армије, културним трибинама, на радију и телевизији, он је објавио велики број разних дужих и краћих дописа у дневној штампи и познатим публикацијама: Борби, Политици, Нину, Техничким новинама, Аеросвету, часопису „Тесла" (док је излазио). Осим тога објавио је посебно **Међупланетне путање** и **Човек у међупланетном простору.**

Активан је члан Југословенског друштва за механику од његовог оснивања и био је једно време члан управе. Учествовао је на свим конгресима овог друштва са саопштењима.

Активан је члан Друштва математичара и физичара Србије, где је држао предавања на семинарима организованим за наставнике средње школе.

Члан је Друштва астронома „Руђер Бошковић".

За рад на ширењу научних знања и технике Анђелић је добио златне плакете са дипломом и то: од Народне технике Југославије златну плакету „Борис Кидрич" и од Друштва „Никола Тесла" златну плакету „Никола Тесла". Осим тога добио је диплому заслужног члана Народне технике Југославије као и диплому и плакету Коларчевог народног универзитета у Београду.

Као заслужни радник на ширењу науке и технике био је члан жирија за додељивање Вукове награде.

Био је председник Комисије за космичка истраживања при Савезном савету за координацију научне делатности и члан Комисије за научне скупове и публикације Савезног значаја при Савезном савету за координацију научне делатности.

У датом тренутку професор Анђелић је у стручним и научним друштвима и органима друштвеног управљања: доживотни почасни председник Југословенског астронаутичког и ракетног друштва; Члан управе Југословенског друштва „Никола Тесла" (друштва за Србију); Члан (почасни) Председништва већа Народне технике Југославије; Члан Већа Математичко-механичког одсека Природно-математичког факултета у Београду.

Поводом састанка балканских математичара у Букурешту јула 1965. добио је спомен-плакету Универзитета у Букурешту. Приликом посете Москви, новембра 1965. добио је спомен-плакету Ломоносова Московског государственог универзитета.

Приликом одржавања XVIII Конгреса Међународне астронаутичке федерације у Београду који је организован његовом заслугом, добио је од представника Совјетске комисије за космичка истраживања, као први инострани представник, спомен-плакету К. Е. Циолковског и спомен-плакету Јурија Гагарина од Комисије за космичка истраживања Совјетске академије наука.

Поводом прославе Николе Коперника као председник Одбора за прославу у Србији добио је медаљу Коперника.

Добио је више одликовања и почасти: Орден рада са црвеном заставом 1965, Орден заслуга за народ са златном звездом 1971, Седмојулска награда СРС за животно дело 1975. и Орден Републике са златним венцем 1978. године.

На пленарном састанку бироа Међународне астронаутичке федерације изабран је једногласно за потпредседника ове Федерације 29. септембра 1967.

Био је члан почасног одбора на VII међународној конференцији о појавама у јонизованим гасовима као и на симпозијуму Земља—Сунце 1966. године.

Године 1970. је био члан почасног одбора за Међународни Симпозиум „Automatic Control in Space" у Дубровнику, и члан организационог одбора за Међународни конгрес за теорију машина и механизама у Купарима.

Почасни је члан Хеленског астронаутичког друштва од 1966. године.

Научни резултати професора Анђелића припадају динамици нехолономних система у флуиду. Објавио је око 50 научних радова из рационалне механике, риманске геометрије, тензорског рачуна, теорије матрица, историје науке и филозофије природних наука на српскохрватском, немачком, француском, енглеском и руском језику у нашим и страним часописима. Објавио је и око 60 разних стручних радова, популарно-научних списа и уџбеника за универзитет и средње школе.

Посебно треба указати на интересовања професора Анђелића за филозофију (о детерминизму) и историју математике и механике. Писао је о Тесли, Руђеру Бошковићу, Галилеју, Ајнштајну, Миланковићу, Копернику, а проучавао је и нашу прошлост у механичким наукама. Развој механичких наука у Српској академији наука објавио је 1974. г. а недавно, у издању Академије наука СССР изашла је обимна Анђелићева студија о развитку механичких наука код Срба.

Разноврсност тема у Анђелићевим радовима и ширина интересовања је карактеристика која се намеће сама по себи.

Нашем слављенику, поштованом професору др Татомиру П. Анђелићу желимо још дуго година крепко здравље. Да нас, млађе, још дуго охрабрује у раду и научним жељама, а својим новим стваралачким радом да нас подстакне да идемо даље. Хвала му за све што је учинио и чини за нас.

Литература

[1] Годишњак САНУ, LXXI (1964); LXXVIII (1971); LXXXI (1974).

[2] M. D. Leko: *Sedamdeset godina profesora dr Tatomira P. Anđelića,* Dijalektika 8 (1979), 4.

TATOMIR P. ANĐELIĆ — LIFE AND WORK

Summary

In this article we review the most interesting and influential facts in the life and scientific work of Professor Dr Tatomir P. Anđelić.

Зборник радова Математичкої института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRILOG IZUČAVANJU STRUJANJA ELEKTROPROVODNIH RAZREĐENIH GASOVA

Radomir Ašković

1. Uvod

Izučavanje strujanja razređenih elektroprovodnih gasova u magnetnom polju ima veliki značaj u aeroinženjerstvu velikih brzina, kao i u astronautici i dinamici plazme.

U teorijskom izučavanju strujanja razređenih gasova polazi se od Navije-Stoks-ovih jednačina, sa graničnim uslovima za brzinu klizanja na zidu obstrujavanog tela i skok temperature na površini razdvajanja gas — telo.

Dokazano je, međutim, da se strujanje razređenog gasa može tretirati, takođe, i pomoću jednačina graničnog sloja za nestišljiv fluid ([1], str. 594), uvodeći uslov klizanja, ukoliko su ispunjene još sledeće predpostavke: a) Mahov broj strujanja mali, b) Rejnoldsov broj strujanja dovoljno veliki (što je obezbeđeno malom kinematskom viskoznošću gasa) i c) temperature tela i okolnog gasa se uzajamno malo razlikuju.

Pokazano je još i da se režim strujanja sa klizanjem na zidu javlja pri takvim umereno velikim Rejnoldsovim brojevima ([2], dijagram 12.1, str. 679), pri kojima je praktično uvek laminarni režim strujanja.

2. Osnovne jednačine i metoda rešavanja

Osnovne jednačine tridimenzionog strujanja razređenih elektroprovodnih gasova — uza sve predhodno navedene okolnosti, još i uz prisustvo magnetnog polja, gde je magnetni Rejnoldsov broj mali, električno polje odsustvuje, efekti polarizacije jonizovanog gasa se zanemaruju, oslanjajući se na Prandtlove predpostavke o graničnom sloju i »princip većeg značaja podužnog od transverzalnog pravca« [3] — u Hejsovim koordinatama [4], glase

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u_e}{\partial t}+u_e\frac{\partial u_e}{\partial s}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\frac{\sigma B^2}{\rho}(u_e-u), \tag{1}$$

$$\frac{\partial (e_2 u)}{\partial s}+\frac{\partial (e_2 v)}{\partial n}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial s}+v\frac{\partial w}{\partial n}-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z_1}u^2=-\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}u_e^2-\frac{\sigma B^2}{\rho}w+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}, \tag{3}$$

sa graničnim uslovima

$$u=u_e(s,z,t),\quad v=0,\quad w=0 \text{ za } n=0, \text{ pri } t=0, \tag{4}$$

$$u=\lambda\frac{\partial u}{\partial n},\quad v=0,\quad w=\lambda\frac{\partial w}{\partial n}, \text{ za } n=0, \text{ pri } t>0, \tag{5}$$

$$u\to u_e(s,z,t),\quad w\to 0, \text{ za } n\to\infty, \text{ pri } t>0, \tag{6}$$

gde je λ srednja slobodna molekulska putanja.

Ovde su koordinate (s, z, n) redom: strujnice spoljašnjeg potencijalnog strujanja, ekvipotencijalne linije i spoljašnje normale na površini posmatrane konture. Lokalno rastojanje dveju susednih ekvipotencijalnih linija predstavlja $e_1(s, z)$, a $e_2(s, z)$ — odgovarajuće rastojanje strujnica potencijalnog strujanja, dok je $e_3=1$. To su, dakle, metrički koeficijenti izabranog sistema koordinata. Dalje su: u_e — spoljašnja potencijalna brzina, σ — elektroprovodnost fluida, B — jačina magnetne indukcije, ν — kinematska viskoznost i t — vreme.

Radi tretiranja sistema jednačina (1), (2), (3), primenićemo metodu uzastopnih približenja. Predstavimo komponente brzine strujanja u graničnom sloju pomoću redova

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i,\quad v=\sum_{i=0}^{\infty}v_i,\quad w=\sum_{i=0}^{\infty}w_i, \tag{7}$$

gde je $u_i=0(\varepsilon^i)$, ε je mali broj.

Zamenjujući redove (7) u jednačine (1), (2), (3), dobijamo sledeći rekurzivni sistem diferencijalnih jednačina za pojedine aproksimacije

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}+Nu_0=\frac{\partial u_e}{\partial t}+Nu_e, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial(e_2u_0)}{\partial z}+\frac{\partial(e_2v_0)}{\partial n}=0, \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2}+Nw_0=\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}(u_0^2-u_e^2), \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2}+Nu_1=u_e\frac{\partial u_e}{\partial s}-u_0\frac{\partial u_0}{\partial s}-v_0\frac{\partial u_0}{\partial n}, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial(e_2u_1)}{\partial s}+\frac{\partial(e_2v_1)}{\partial n}=0, \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2}+Nw_1=-u_0\frac{\partial w_0}{\partial s}-v_0\frac{\partial w_0}{\partial n}+\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}2u_0u_1. \tag{9.3}$$

Kombinujući (7), (5) i (6) dobijamo i odgovarajuće granične uslove

$$u_i = \lambda \frac{\partial u_i}{\partial n} \quad (i=0,\ 1,\ 2, \ldots) \text{ za } n=0, \tag{10.1}$$

$$v_i = 0 \quad (i=0,\ 1,\ 2, \ldots) \text{ za } n=0, \tag{10.2}$$

$$w_i = \lambda \frac{\partial w_i}{\partial n} \quad (i=0,\ 1,\ 2, \ldots) \text{ za } n=0, \tag{10.3}$$

$$u_0 \to u_e(s,\ z,\ t), \quad u_i \to 0, \quad (i=1,\ 2, \ldots), \text{ za } n \to \infty \tag{10.4}$$

$$w_i \to 0 \quad (i=0,\ 1,\ 2, \ldots) \text{ za } n \to \infty. \tag{10.5}$$

Realno je očekivati da će metoda uzastopnih približenja, zaključno sa prva dva približenja, uspešno kvalitativno opisati nestacionarni granični sloj, imajući u vidu postojeća iskustva ([5], [6], [7]).

3. Proračun strujanja oko tela pri njegovom oscilatornom kretanju u razređenom elektroprovodnom gasu

Prilog na temu »fenomena spoljašnjeg indukovanog strujanja«

Proračun strujanja oko tela pri njegovom harmoniski-oscilatornom kretanju, sa frekvencijom ω, pomoću jednačina dobijenih predloženom metodom u §2, može biti olakšan ako se umesto $u_e = V_e(s, z) \cos \omega t$, uvede izraz $u_e = V_e(s, z)\, e^{i\omega t}$, sa konvencijom da samo realni delovi svih kompleksnih izraza, proizašlih iz računa, imaju određena fizička značenja.

Posle unošenja izraza za spoljašnju brzinu u_e u jednačinu (8.1) i uvođenja nove promenljive

$$\eta = n\sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

tražeći rešenje u vidu

$$u_0 = V_e(s,\ z)\, e^{i\omega t} f_0'(\eta), \tag{11}$$

parcijalna diferencijalna jednačina (8.1) se svodi na običnu diferencijalnu

$$f_0''' - (i+\gamma) f_0' = -(i+\gamma), \tag{12}$$

sa graničnim uslovima, proizašlim iz (10.1) i (10.4)

$$f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = L f_0''(0), \quad f_0'(\infty) \to 1, \tag{13}$$

gde su

$$N = \frac{\sigma B^2}{\rho}, \quad \gamma = \frac{N}{\omega}, \quad L = \lambda\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \tag{14}$$

Rešenje jednačina (12), koje zadovoljava granične uslove (13), lako se nalazi

$$f_0'(\eta) = 1 - \frac{a_0 - i a_1}{a_2} e^{-(a+ib)\eta}, \tag{15}$$

gde su

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\gamma^2}+\gamma)^{1/2}, \quad b=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\gamma^2}-\gamma)^{1/2},\\ a_0 &= 1+La, \qquad a_1=Lb, \qquad a_2=(1+La)^2+L^2b^2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Tako je sada prvo približenje podužne komponente brzine strujanja, s obzirom na usvojenu konvenciju

$$u_0=V_e(s,\,z)\,R_{eal}\cdot\{e^{i\omega t}f_0'(\eta)\},$$

odnosno

$$u_0=V_e(s,\,z)\left\{\cos\omega t-\frac{1}{a_2}e^{-a\eta}\,[a_0(\cos\omega t\cos b\eta+\sin\omega t\sin\eta)+\right.$$

$$\left.+a_1(\sin\omega t\cos b\eta-\cos\omega t\sin b\eta)]\right\}. \tag{17}$$

Zamenjujući izraz (17) u jednačinu (8.3), posle sređivanja desne strane jednačine, dobijamo

$$\frac{\partial w_0}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2}+Nw_0=\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}V_e^2\left[\frac{1}{2}(f_0'\bar{f}_0'-1)+\frac{1}{2}(f_0'^2-1)\,e^{2i\omega t}\right], \tag{18}$$

gde crta odozgo označava odgovarajuću konjugovano-kompleksnu vrednost funkcije.

S obzirom na strukturu linearne parcijalne jednačine (18), pokazalo se da je potrebno tražiti njeno rešenje u obliku

$$w_0=\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}V_e^2(s,\,z)\frac{1}{\omega}[\zeta_{01}(\eta)\,e^{2i\omega t}+\zeta_{02}(\eta)], \tag{19}$$

da bi se dobilo za funkcije $\zeta_{01}(\eta)$ i $\zeta_{02}(\eta)$

$$\zeta_{01}''-(2i+\gamma)\,\zeta_{01}=\frac{1}{2}(1-f_0'^2), \tag{20}$$

$$\zeta_{02}''-\gamma\zeta_{02}=\frac{1}{2}(1-f_0'\bar{f}_0'), \tag{21}$$

sa graničnim uslovima, proisteklim iz (10.3) i (10.5)

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{01}(0)&=L\zeta_{01}'(0), \qquad \zeta_{01}(\infty)\to 0,\\ \zeta_{02}(0)&=L\zeta_{02}'(0), \qquad \zeta_{02}(\infty)\to 0. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Koristeći potom jednačinu kontinuiteta (8.2) određujemo v_0

$$v_0=-\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\left(\frac{\partial V_e}{\partial s}+\frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s}V_e\right)e^{i\omega t}f_0(\eta), \tag{23}$$

a unoseći ovu vrednost (23) u jednačinu (9.1), dobijamo posle sređivanja

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2}+Nu_1=V_e\frac{\partial V_e}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}(1-f_0'^2+f_0f_0'')e^{2i\omega t}+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}f_0'\bar{f}_0'+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}(f_0\bar{f}_0''+\bar{f}_0f_0'')\right]\right\}+\frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s}V_e^2\left[\frac{1}{2}f_0f_0''e^{2i\omega t}+\frac{1}{4}(f_0f_0''+\bar{f}_0f_0'')\right]. \quad (24)$$

Predpostavljajući rešenje jednačine (24) u obliku

$$u_1=V_e\frac{\partial V_e}{\partial s}\frac{1}{\omega}[e^{2i\omega t}f_{1a}'(\eta)+f_{1b}'(\eta)]+$$

$$\frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s}V_e^2\frac{1}{\omega}[e^{2i\omega t}f_{1c}'(\eta)+f_{1d}'(\eta)], \quad (25)$$

dobićemo sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$2if_{1a}'-f_{1a}'''+\gamma f_{1a}'=\frac{1}{2}(1-f_0'^2+f_0''f_0), \quad (24.1)$$

$$-f_{1b}'''+\gamma f_{1b}'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\bar{f}_0'f_0'+\frac{1}{4}(f_0\bar{f}_0''+\bar{f}_0f_0''), \quad (24.2)$$

$$2if_{1c}'-f_{1c}'''+\gamma f_{1c}'=\frac{1}{2}f_0f_0'', \quad (24.3)$$

$$-f_{1d}'''+\gamma f_{1d}'=\frac{1}{4}(f_0\bar{f}_0''+\bar{f}_0f_0''), \quad (24.4)$$

s odgovarajućim graničnim uslovima

$$f_{1k}(0)=0,\quad f_{1k}'(0)=Lf_{1k}''(0),\quad f_{1k}'(\infty)=0,\quad k=a,b,c,d. \quad (26)$$

U radu su kompletno određena analitička rešenja svih diferencijalnih jednačina (20), (21), (24.1), (24.2), (24.3), (24.4), koja zadovoljavaju granične uslove (22) i (26), a izdvojeni su i realni delovi kompleksnih funkcija (19), (23) i (25), koji definišu fizičke vrednosti odgovarajućih približenja brzina, anlogno postupku za u_0 simbolično predstavljenom pomoću (17), ali zbog izuzetne glomaznosti tih izraza ovde ih nećemo navoditi.

3. **Zaključak**

Pre pola veka (1932) je Šlihting [6] pokazao da u ravanskom slučaju beskrajnog cilindričnog tela koje harmonski osciluje u *neprovodnom fluidu*, na granici graničnog sloja postoji jedno *stacionarno* podužno strujanje koje ne zavisi od viskoznosti fluida.

Sedamdesetih godina je isti fenomen identifikovan, i teoriski i eksperimentalno ([8], [9]), u tridimenzionom prostornom slučaju; naime, ustanovljeno je da na dovoljnom rastojanju od nekog zatvorenog tela (eksperiment izvršen sa spljoštenim elipsoidom odnosa poluosa 1 : 3 : 6), koje harmonski osciluje u mirnom fluidu, kao posledica intercijalnih (a ne viskoznih) efekata, postoji *stacionarno* strujanje, i to s obe komponente: i *podužnom*, i *transverzalnom* [8]

$$(u_1)_{n\to\infty} = -\frac{3}{4\omega} V_e \frac{\partial V_e}{\partial s} - \frac{1}{2\omega} \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} V_e^2, \tag{27}$$

$$(w_0)_{n\to\infty} = \frac{1}{4\omega} \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} V_e^2(s, z). \tag{28}$$

Nekoliko godina kasnije (1973.) pokazano je [10], međutim, da u slučaju obrtnog osnosimetričnog tela koje harmonski osciluje u *elektroprovodnom fluidu*, u prisustvu magnetnog polja, ovo spoljašnje indukovano stacionarno strujanje *iščezava.*

I najzad, u ovom radu je bila namera da se prati ovaj fenomen u slučaju elektroprovodnog razređenog gasa, uz uslov klizanja na zidu tela. Pošto su nađena analitička rešenja svih jednačina, bilo je moguće utvrditi sledeće interesantne rezultate

1) Najpre, u opštem slučaju harmoniskog oscilovanja bilo kog tela u elektroprovodnom razređenom gasu u prisustvu magnetnog polja ($L \neq 0$, $B \neq 0$), pomoću limesa izraza (19) i (25) dokazujemo da *spoljašnje indukovano stacionarno strujanje tada ne postoji*:

$$\lim_{n\to\infty} (w_0) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_1) = 0.$$

2) Međutim, *u dva specijalna slučaja*, koji proističu iz ovde nađenih opštih rešenja, *spoljašnje indukovano stacionarno strujanje postoji*, i to:

a) u slučaju *neprovodnog razređenog gasa* ($B=0$, $L\neq 0$), izraz (25) potvrđuje *postojanje* spoljašnjeg stacionarnog strujanja:

$$(u_1)_{n\to\infty} = V_e \frac{\partial V_e}{\partial s} \frac{1}{\omega} \left\{ f'_{1b} \right\}_{\substack{n\to\infty \\ B=0}} + \frac{1}{e_2} V_e^2 \frac{\partial e_2}{\partial s} \frac{1}{\omega} \left\{ f'_{1d} \right\}_{\substack{n\to\infty \\ B=0}}.$$

$$\left\{ f'_{1b} \right\}_{\substack{n\to\infty \\ B=0}} = -\frac{3}{4} \frac{L\sqrt{2}+1}{L^2 + L\sqrt{2}+1},$$

$$\left\{ f'_{1d} \right\}_{\substack{n\to\infty \\ B=0}} = -\frac{1}{2} \frac{L\sqrt{2}+1}{L^2 + L\sqrt{2}+1},$$

b) u slučaju *običnog neprovodnog gasa* ($B=0$, $L=0$), spoljašnje indukovano stacionarno strujanje *postoji* i u limesu se izrazi (19) i (25) svode na (27) i (28).

Konačno, ti izrazi (27) i (28) u posebnom slučaju — dvodimenzionom, ravanskom — identično potvrđuju poznato rešenje Šlihtinga.

Literatura

[1] Rahmatulin H. A., Sagomonyan A. Y., Bunovich A. I., and Zverev I. N., *Cas Dynamics*, Moskva 1965.

[2] Абрамович Г. Н., *Прикл. газ. динамика*, Москва 1969.

[3] Eichelbrenner E. A., *La couche limit laminaire à trois dimensions*, PST du Ministère de l'air, NT **85**, Paris 1959.

[4] Hayes W. D., *The three-dimensional boundary layer*, NAVORD Rep. **1313**, Washington 1951.

[5] Đukić S. Đ., *On Unsteady Magnetic Low-Spee Slip Flow in the Boundary Layer*, Acta Mechanika **18**, 35—48 (1973).

[6] Schlchting H., *Boundary Layer Theory*, **6** th ed., McGraw-Hill, 1968.

[7] Ašković R., *O graničnim uslovima pri trodimenzionom magnetohidrodinamičkom strujanju razređenih gasova*, TEHNIKA, 1975, br. **5**.

[8] Ašković R., *Etude de la couche limite periodique tridimensionnelle sur un corps en mouvement harmonique*, Zbornik radova preminulom akademiku Jakovu M. Hlitčifevu, Beograd 1970.

[9] Eichelbrenner E. A. et Ašković R., *Observations sur le decollement instationnaire en règime laminaire*, Zbornik radova X Jug. kongresa za rac. i prim. mehaniku, Baško Polje 1970.

[10] Čantrak S. et Ašković R., *Sur un phénomène de la couche limite magnetohydrodynamique d'un écou ement de révolution en régime non stationnaire*, Bull. Math. de la R. S. de Roumanie, Tome **17** (65), No **1**, Bucarest 1974.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS D'UN FLUIDE-CONDUCTEUR AVEC LES »CONDITIONS DE GLISSEMENT« PARIÉTALES

Résumé

On profite dans ce travail le fait bien-connu que l'écoulement d'un gaz raréfié peut être étudié à l'aide des équations de la couche limite d'un fluide incompressible, en y ajoutant des »conditions de glissement« pariétales, si: a) vitesse de l'écoulement est relativement petite, b) nombre de Reynolds est assez grand, et c) différence entre la température de l'obstacle et celle du gaz reste assez petite. D'autre part, on sait aussi que l'écoulement d'un gaz avec le glissement à la paroi arrive pour les nombres de Reynolds si modérés que le régime de cet écoulement reste toujours pratiquement laminaire. Bien sur, le nombre de Knudsen K ne sort pas de l'intervale $(0.01 < K < 0.1)$ ou on peut utiliser les équations de dynamique des gaz mais avec les »conditions de glissement« à la paroi.

En acceptant encore que le nombre de Reynolds magnétique est petit et que les effets de polarisation du gaz ionisé sont négligeables, on traite ici les équations de la couche limite laminaire tridimensionnelle avec la validité du »principe de prévalence«, en système de coordonnées de Hayes, dans le cas d'un corps en oscillations harmoniques le long d'une trajectoire rectiligne. On examine en détail le phénomène de l'existance d'un *ecoulement stationnaire* induit à la frontière de la couche limite instationnaire périodique d'un gaz raréfié.

Prof. Dr Radomir Ašković
Mašinski fakultet
11000 Beograd

Зборник радова Математичкоі института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

УСПОМЕНА

Академик др ***Мирко Д. Стојаковић*** начинио је овај цртеж—портрет академика др ***Татомира П. Анђелића*** 1974. године за време једне седнице Одељења природно—математичких наука Српске академије наука и уметности. —Иначе, др М. Стојаковић био је ученик професора Анђелића у Другој

мушкој гимназији у Београду. Обојица су били директори Математичког института у Београду, а сада су у истом одељењу Српске академије наука и уметности као редовни чланови.

Д. Т.

Зборник радова Математичкоī институтa, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRILOG HAMILTONOVOM PRINCIPU KAO ZADATKU OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Aleksandar Bakša

Razmatranje Hamiltonovog principa kao zadatka optimalnog upravljanja nije nova tema. Suština ovog zadatka se pojavljuje u monografiji [6] kao primena principa maksimuma u rešavanju klasičnog varijacionog problema. Od radova novijeg datuma, koji se bave razmatranjem Hamiltonovog principa kao zadatka optimizacije, možemo navesti [3] i [4] od kojih se prvi odnosi na holonomne a drugi na neholonomne sisteme. U ovom radu želimo izneti jedan aspekt razmatranja ovog problema i uporediti ga sa onim iz navedene literature.

1. Razmatraćemo mehanički sistem čija je konfiguracija određena Lagranžovim (Lagrange) koordinatama q^i $(i=1, \ldots, n)$, koji se kreće u polju sa potencijalom

$$V=V(q;t),^{*}$$

(gde t označava vreme). Ako kinetičku energiju sistema obeležimo sa

$$T=T(q, \dot{q}; t).$$

Lagranžova funkcija (kinetički potencijal) sistema je

$$L(q, \dot{q}, t)=T(q, \dot{q}, t)-V(q, t). \tag{1.1}$$

Pretpostavimo da kretanje razmatranog sistema ograničavaju neholonomne veze

$$\varphi_{\mu}(q, \dot{q}, t)=0, \quad (\mu=1, \ldots, k). \tag{1.2}$$

Za ovakav mehanički sistem tvrđenje Hamiltonovog (Hamilton) principa može se izraziti jednakošću [5]

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt=0, \tag{1.3}$$

*) $F(x, y; t)=F(x_1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n; t)$

pri čemu virtualna pomeranja δq^i pripadaju klasi neprekidno diferencijabilnih funkcija koje zadovoljavaju uslove

$$\delta\, q^i(t_0)=\delta\, q^i(t_1)=0, \tag{1.4}$$

gde su t_0 i t_1 fiksirani trenuci.

Diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema se mogu izvesti iz Hamiltonovog principa primenom klasičnog varijacionog računa, što je dobro poznato (videti, npr. [1], [5]). Ovde ćemo pokušati da te jednačine izvedemo rešavanjem odgovarajućeg zadatka optimalnog upravljanja.

Zadatak 1. Neka je zadan dinamički sistem

$$\dot{q}^i=u^i, \quad (i=1, \ldots, n), \tag{1.5}$$

gde su $u^i=u^i(t)$ upravljanja iz skupa neprekidnih funkcija čije vrednosti nisu ograničene posebnim uslovima (restriktivni skup se poklapa sa celim n-dimenzionim prostorom) i neka su zadani početni položaj $(q_0{}^i)$ i cilj $(q_1{}^i)$. Odrediti kretanje koje premešta sistem (5) iz položaja $(q_0{}^i)$ u položaj $(q_1{}^i)$ saglasno vezama

$$\varphi_\mu(q, u, t)=0, \tag{1.6}$$

tako da funkcional

$$\mathcal{J}(u)=\int_{t_0}^{t_1} L(q, u, t)\, dt, \tag{1.7}$$

ima najmanju moguću vrednost.

Ovaj zadatak optimalnog upravljanja, očigledno, nije ekvivalentan Hamiltonovom principu. Naime, dok optimalno upravljanje $\hat{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ i odgovarajuća optimalna trajektorija $\hat{q}(t)$ daju funkcionalu (7) minimalnu vrednost, dotle Hamiltonov princip za neholonomne sisteme ne izražava stacionarnost nikakvog funkcionala. Ispitajmo da li je, pod nekim uslovima, rešenje zadatka 1 ekvivalentno tvrđenju Hamiltonovog principa.

U tom cilju, rešimo, najpre, postavljeni zadatak. Primenjujući Lagranžovu metodu množilaca, formirajmo funkcional (koristimo Ajnštajnovu (Einstein) konvenciju o sabiranju po ponovljenim indeksima)

$$\mathcal{J}_1(u)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\pi_0 L(q, u, t)+\pi_i(\dot{q}^i-u^i)+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \varphi_\mu(q, u, t)\right]dt, \tag{1.8}$$

gde su π_0, π_i i λ_μ proizvoljne funkcije vremena. Ako obeležimo

$$\mathcal{H}(\pi, q, u, t)=\pi_i u^i-\pi_0 L(q, u, t), \tag{1.9}$$

funkcional (8) se može napisati u obliku

$$\mathcal{J}_1(u)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\pi_i \dot{q}^i+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \varphi_\mu(q, u, t)-\mathcal{H}(\pi, q, u, t)\right]dt. \tag{1.10}$$

Pretpostavimo da zadatak 1 ima rešenje i obeležimo sa $\hat{u}(t)$ i $\hat{q}(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, optimalno upravljanje i odgovarajuću optimalnu trajektoriju. Ako je varirano upravljanje

$$u^i(t) = \hat{u}^i(t) + \delta u^i(t), \tag{1.11}$$

odgovarajuća varirana trajektorija se može napisati u obliku [2]

$$q^i(t) = \hat{q}^i(t) + \delta q^i(t) + O(\delta q^i). \tag{1.12}$$

Prva (Lagranžova) varijacija funkcionala (10), s obzirom na (11) i (12), je

$$\delta \mathcal{J}_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-\dot{\pi}_i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i} \right) \delta u^i \right] dt \tag{1.13}$$

pri čemu smo iskoristili (4). Da bi funkcional (10) imao minimum za $u = \hat{u}$ potrebno je da bude

$$\delta \mathcal{J}_1 = 0. \tag{1.14}$$

U (13) su $2n$ varijacija δq^i, δu^i ograničene sa $n+k$ uslova koji proističu iz (5) i (6), tako da je broj nezavisnih varijacija $2n-(n+k)=n-k$. Birajući množioce π_i i λ_μ tako da koeficijenti uz zavisne varijacije budu jednaki nuli i koristeći se uslovom (14), dobijamo

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i} - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i} = 0. \tag{1.15}$$

Prva od ovih jednačina, zajedno sa jednačinom (5), koja se s obzirom na (9) može napisati u obliku

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i}, \tag{1.16}$$

daje, za $i=1, \ldots, n$, sistem diferencijalnih jednačina kretanja razmatranog dinamičkog sistema. Druga jednačina predstavlja uslov stacionarnosti funkcije $\mathcal{H}$ po u.

Napomenimo da se jednačine (15) i (16) mogu dobiti i na osnovu tvrđenja Pontrjaginovog principa maksimuma pri ograničenim faznim promenljivim ([6], teorema 23).

Eliminacijom promenljivih π_i i u^i iz jednačina (15) i (16), uzimajući da je $\pi_0 = 1$, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\sum_{\mu=1}^{k} \dot{\lambda}_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i} + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i} \right), \tag{1.17}$$

čime je zadatak 1 rešen.

Ostaje da ispitamo mogu li jednačine (17) predstavljati diferencijalne jednačine kretanja razmatranog mehaničkog sistema. Da bi neko rešenje jednačina (17) moglo predstavljati konačne jednačine kretanja, potrebno je i dovoljno da zadovoljava opštu dinamlku jednačinu

$$\left(\frac{dL}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i=0, \tag{1.18}$$

koja predstavlja analitički izraz Dalamberovog (D'Alembert) principa. Smenjujući (17) u (18), nalazimo

$$\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\lambda}_\mu\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i-\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i=0. \tag{1.19}$$

Varijacije δq^i, razume se, nisu nezavisne već predstavljaju virtualna pomeranja. U slučaju kada kretanje sistema ograničavaju nelinearne neholonomne veze, u literaturi se mogu naći različite definicije virtualnih pomeranja. Ako usvojimo Ćitajevljevu definiciju, tj. ako pod virtualnim pomeranjima podrazumevamo ona koja zadovoljavaju jednačine

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i=0,\quad (\mu=1,\ldots,k), \tag{1.20}$$

iz (19) sledi

$$\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i=0, \tag{1.21}$$

što predstavlja potreban i dovoljan uslov da (17) budu jednačine kretanja sistema (detaljnije u [5]).

Postavimo, sada, pitanje mogu li se pretpostavke u zadatku optimalnog upravljanja modifikovati tako da se, kao njegovo rešenje, bezuslovno dobiju jednačine kretanja sistema. U tom cilju potražimo optimalnu trajektoriju upoređujući je sa zaobilaznim putevima koji zadovoljavaju uslov »kinematičke ostvarivosti kretanja«

$$\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i=0. \tag{1.22}$$

Ako se iskoristi jednakost (22), (13) se može napisati u obliku

$$\delta\mathcal{J}_1=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(-\dot{\pi}^i+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i}\right)\delta q^i+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i}\right)\delta u^i\right]dt, \tag{1.13'}$$

odakle, analogno prethodnom, slede jednačine

$$\dot{\pi}^i=\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{d}{dt}\frac{\varrho\varphi_\mu}{\partial u^i}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i},\qquad \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^i}=0, \tag{1.15'}$$

odnosno, po eliminaciji množilaca π^i i upravljanja u^i i usvajajući da je $\pi_0 = 1$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=-\sum_{\mu=1}^{k}\dot{\lambda}_\mu\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i}.$$

Do istih jednačina se može doći i primenom principa maksimuma Pontrjagina uz određene »modifikacije« kako je pokazano u [7].

2. Ako se jednačine neholonomnih veza (1.2) mogu napisati u obliku

$$\dot{q}^\mu=f^\mu(q^1,\ldots,q^\mu,\dot{q}^1,\ldots\dot{q}^m.\ t),\quad (m=n-k,\quad \mu=m+1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

zadatak 1 se može formulisati na sledeći način.

Zadatak 2. Neka je dat dinamički sistem

$$\dot{q}^\alpha=u^\alpha,\quad (\alpha=1,\ldots,m),$$

$$\dot{q}^\mu=f^\mu(q^1,\ldots,q^n,u^1,\ldots,u^m,t),\quad (\mu=m+1,\ldots,n), \tag{2.2}$$

gde su u^α dopuštena upravljanja iz klase neprekidnih funkcija a restriktivni skup je ceo m-dimenzioni prostor i neka su zadane tačke $(q_0{}^i)$ i $(q_1{}^i)$ konfiguracionog prostora. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema iz položaja (q_0) u položaj (q_1) pri kome se minimizira funkcional

$$y=\int_{t_0}^{t_1}\tilde{L}(q,u,t)\,dt, \tag{2.3}$$

gde je

$$\tilde{L}(q,u,t)=L(q^1,\ldots,q^n,u^1,\ldots,u^m,f^{m+1}_{(q,u,t)},\ldots,f^n_{(q,u,t)}).$$

Primetimo da je u ovom zadatku, za razliku od prethodnog, prostor vektora upravljanja dimenzije $m=n-k$ a ograničenja na fazne promenljive i upravljanja predstavljaju deo jednačina dinamičkog sistema. Ovaj zadatak ćemo rešiti primenom Pontrjaginovog principa maksimuma. U tom cilju formirajmo funkciju

$$\mathcal{H}(q,u,\alpha,t)=\psi_0\tilde{L}(q,u,t)+\psi_\alpha u^\alpha+\psi_\mu f^\mu(q,u,t)+\psi_{n+1}, \tag{2.4}$$

Jednačine, konjugovane jednačinama (2), su

$$\dot{\psi}=-\psi_0\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i}-\psi_\mu\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial q^i},\quad (i=1,\ldots,n). \tag{2.5}$$

Iz uslova maksimuma, sledi

$$\psi_0\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\alpha}+\psi_\alpha+\psi_\mu\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial u^\alpha}=0. \tag{2.6}$$

S obzirom na to da je

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i}=\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\frac{\partial f^\mu}{\partial q^i}.\quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^i}=\frac{\partial L}{\partial u^i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\frac{\partial q^\mu}{\partial u^i}.$$

jednačine (5) i (6), mogu se dovesti na oblik

$$\dot{\psi}_i = -\psi_0 \frac{\partial L}{\partial q^i} - \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial q^i}, \tag{2.7}$$

$$\psi_0 \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha} + \psi_\alpha = 0, \tag{2.8}$$

gde je uvedena oznaka

$$\lambda_\mu = \psi_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} + \psi_\mu. \tag{2.9}$$

Eliminacijom promenljivih ψ_α iz (7) i (8), dobijamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\alpha}\right) - \frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} +$$
$$+ \frac{\dot{\lambda}^\mu}{\psi_0}\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha} + \frac{\lambda_\mu}{\psi_0}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\alpha}\right) = 0, \tag{2.10}$$

odnosno, pošto se eliminišu $\dot{\lambda}_\mu$ u i u^α,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\gamma^\mu_\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\mu}\frac{\partial f^\mu}{\partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\lambda_\mu}{\psi_0}\gamma^\mu_\alpha = 0, \tag{2.11}$$

gde je

$$\gamma^\mu_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial f^\mu}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\nu}\frac{\partial f^\nu}{\partial \dot{q}^\alpha}.$$

Može se pokazati [5] da su jednačine (11) ekvivalentne Vorončevim jednačinama, tada i samo tada, ako je

$$\lambda_\mu \gamma^\mu_\alpha = 0, \text{ za svako } \alpha.$$

3. Minimizacija funkcionala (1.7) uz ograničenja (1.6) ekvivalentna je minimizaciji funkcionala

$$\mathcal{J}_1(u) = \int_{t_0}^{t_1} \left[L(q, u, t) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \varphi_\mu(q, u, t) \right] dt.$$

Posmatrajmo $\mathcal{J}_1(u)$ kao funkciju graničnih vrednosti t_1 i $q_1(t)$ koje ćemo u daljem tekstu obeležavati jednostavno sa t i q:

$$\mathcal{J}_1(u, q, t) = \int_{t_0}^{t} \left[L(q(\tau), u(\tau), \tau) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \varphi_\mu(q, (\tau), u(\tau), \tau) \right] d\tau. \tag{3.1}$$

Pretpostavimo da (1), kao funkcija od u (pri fiksiranim t i q) ima, za $\tilde{u}=u$, jedini minimum $S(q, t)$, tj.

$$S(q, t) = \mathcal{J}_1(q, t, \tilde{u}) = \min_{u \in R^n} \mathcal{J}_1(q, t, u).$$

Ispitajmo promenu funkcije $S(q, t)$ duž trajektorije koja odgovara upravljanju $u(t)$ i polazi iz tačke (t_0, q_0). U tom cilju potražimo njen izvod po vremenu sastavljen u smislu jednačina kretanja

$$\frac{dS(q, t)}{dt} = \frac{\partial S(q, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(q, t)}{\partial q^i} u^i. \tag{3.2}$$

S druge strane, diferenciranjem (1), dobijamo

$$\frac{dS(q, t)}{dt} = L(q, (t), u(t), t) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \varphi_\mu (q(t), u(t), t). \tag{3.3}$$

Upoređujući (2) i (3), i uzimajući u obzir (1.9), dobijamo

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S(q, t)}{\partial q}, u, t\right) - \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \varphi_\mu (q, u, t) = 0. \tag{3.4}$$

Neka je $\hat{u}(t)$ optimalno upravljanje i $\hat{q}(t)$ odgovarajuća optimalna trajektorija koja u trenutku t_0 polazi iz tačke q_0. Pretpostavimo da se iz jednačina (1.6) i (1.15) mogu izračunati

$$\hat{u}^i = \hat{u}^i(\hat{q}, \hat{\pi}, t), \quad \hat{\lambda}_\mu = \hat{\lambda}_\mu(\hat{q}, \hat{\pi}, t).$$

Tada se može konstruisati funkcija

$$\mathcal{H}(\hat{q}, \hat{\lambda}, \hat{u}(\hat{q}, \hat{\pi}, t), t) = \mathcal{H}^*(\hat{q}, \hat{\pi}, t),$$

i jednačina (4) napisati u obliku

$$\frac{\partial S(\hat{q}, t)}{\partial t} + \mathcal{H}^*\left(\hat{q}, \frac{\partial S(\hat{q}, t)}{\partial q}, t\right) = 0. \tag{3.5}$$

Poslednja jednačina predstavlja Hamilton — Jakobijevu parcijalnu diferencijalnu jednačinu čiji se potpun integral (ako postoji) može iskoristiti za dobijanje jednačina kretanja sistema

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \pi_i}, \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial q^i}.$$

Jednačina (5) predstavlja jedan od dovoljnih uslova da upravljanje bude optimalno. Na osnovu toga i prethodnih rezultata može se izvesti zaključak da se Hamilton — Jakobijeva teorija može primeniti na neholonomne sisteme samo ako (1.3) predstavlja uslov stacionarnosti Hamiltonovog dejstva, tj. ako važe uslovi (1.21).

Pokazaćemo još kako se funkcija $\mathcal{H}^*$ može dovesti u vezu sa Hamiltonovom funkcijom

$$H(p, q, t) = [p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t)] \; \dot{q} = \dot{q}(q, p, t).$$

Iz druge jednačine (1.15) može se izračunati

$$\pi_i = p_i + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i}, \quad \left(p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i}\right),$$

i smenom u $\mathcal{H}^*$ dobiti

$$\mathcal{H}^*(q, \pi(q, p, t) = \left[p_i \dot{p}^i - L(q, u, t) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u^i} u^i \right]_{u=u(q,p,t)},$$

odnosno, ako iskoristimo i jednačine (1.5)

$$\mathcal{H}^*(q, \pi(q, p, t), t) = H(q, p, t) + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i.$$

U slučaju da su neholonomne veze homogene funkciće generalisanih brzina sa stepenom homogenosti m, biće

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = m \varphi_\mu = 0.$$

pa je

$$\mathcal{H}^*(q, \pi(q, p, t), t) = H(q, p, t).$$

Literatura

[1] Anđelić T., *Generalisani Hamiltonov princip za neholonomne sisteme*, I kongres mat. i fiz. Jugoslavije 1949.

[2] Athans M. and Falb P., *Optimal control*, McGraw-Gill Book company 1966.

[3] Đukić Đ., *A note on Hamilton's principle*, Mathematica Japonicae, Vol. **20**, № **2**, 1975.

[4] René van Dooren, *Derivation of the Lagrange equations for nonholonomics Chetaev systems from a modified Pontryagin maximum principle*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, **28**, **4**, 1977.

[5] Румянцев В. В., *О принципе Гамильтона для неголономных систем*, ПММ, Т. **42**, вып. **3**, 1978.

[6] Понтрягин Л. С., *Математическая теория оптимальных процессов*, „Наука“, Москва 1976.

[7] Бакша А., *Принцип максимума Понтрягина и интегральные принципи механики*, Теоријска и примењена Механика **7**, 1981.

ЗАМЕТКА О ПРИНЦИПЕ ГАМИЛЬТОНА КАК ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Резюме

Известно что принцип Гамильтона для неголономных систем не является принципом стационарного действия. В работе получени неопходимие и достаточние условия для формирование принципа Гамильтона как задача оптимального управления. Проанализирован общий случай неголономных связь и, в частности, линейные связи типа Чаплигына.

Aleksandar Bakša
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd
Studentski trg 16/IV

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRIMENA METODE VARIJACIJE NA IZUČAVANJE OSNOSIMETRIČNOG MHD GRANIČNOG SLOJA NA OBRTNIM TELIMA PRI STRUJANJU FLUIDA PROMENLJIVE PROVODNOSTI

Z. Boričić i *D. Nikodijević*

Uvod

U radu se proučava, sa praktične tačke gledišta, interesantan fizički model stacionarnog osnosimetričnog graničnog sloja nestišljivog provodnog fluida na obrtnim telima pod dejstvom upravnog magnetnog polja. Pretpostavlja se da spoljašnje električno polje ne postoji. Proučavaju se fluidi kod kojih su relativna dielektrična konstanta i magnetna propustljivost bliske jedinici, što je inače i uobičajeno u magnetnoj hidrodinamici. Uzima se da je gustina naelektrisanja mala a da se elektroprovodnost fluida menja po pretpostavci Rosova [1]. Dalje se pretpostavlja da je obrtno telo dovoljno dugačko i da magnetno polje miruje u odnosu na telo. Pored toga, zbog izbegavanja relativističkih efekata, smatra se da su karakteristične brzine u graničnom sloju mnogo manje od brzine svetlosti.

Za rešavanje problema osnosimetričnog magnetnog hirodinamičkog (MHD) graničnog sloja na obrtnim telima koristi se varijaciona metoda sa iščezavajućim parametrom [2] koja je već primenjena na različite modele ravanskog graničnog sloja [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], na neke modele osnosimetričnog graničnog sloja na obrtnim telima [4, 10] i druge probleme [11].

1. Jednačine koje problem matematički opisuju

Za analitičko proučavanje problema neophodno je imati jednačine koje isti matematički opisuju. Uočeni problem opisuje se, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, jednačinama

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\sigma B^2}{\rho}u,$$

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial y}=0, \tag{1.1}$$

i graničnim uslovima

$$u=0, \quad v=0, \quad \text{za } y=0,$$

$$U \to U(x) \quad \text{za } y=y_m; \quad (y_m=h(x), \infty), \tag{1.2}$$

sa sledećim oznakama:

x — podužna koordinata merena od zaustavne tačke duž konture profila u meridijanskoj ravni
y — poprečna koordinata merena upravno na konturu profila u meridijanskoj ravni
$u(x, y)$ — podužna brzina u graničnom sloju
$v(x, y)$ — poprečna brzina u graničnom sloju
$U(x)$ — podužna brzina spoljašnjeg strujanja na granici graničnog sloja
ρ — gustina fluida
$p(x)$ — pritisak
ν — koeficijent kinematičke viskoznosti
$B(x)$ — magnetna indukcija
$\sigma(x, y)$ — elektroprovodnost fluida
$r(x)$ — poluprečnik poprečnog preseka obrtnog tela
$h(x)$ — debljina graničnog sloja.

Ako se usvoji da se elektroprovodnost fluida menja po zakonu [1]

$$\sigma=\sigma_0\left(1-\frac{u}{U}\right), \tag{1.3}$$

jednačine (1.1) dobijaju oblik

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-Nu\left(1-\frac{u}{U}\right),$$

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial y}=0, \tag{1.4}$$

gde je $N=\frac{\sigma_0 B^2}{\rho}$ — magnetni broj. Uvodeći dalje u jednačine (1.4) brzinu na spoljašnjoj granici graničnog sloja posredstvom relacije

$$U\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx},$$

jednačine se svode na oblik

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-Nu\left(1-\frac{u}{U}\right),$$

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial y}=0, \tag{1.5}$$

a granični uslovi (1.2) ostaju neizmenjeni.

Za proučavanje uočenog problema neophodno je rešiti sistem jednačina (1.5) sa graničnim uslovima (1.2). Na današnjem stupnju razvoja matematike ovaj sistem se ne može rešiti tačnim metodama niti se pak može pokazati egzistencija rešenja. Da bi se ipak došlo do rešenja koriste se približne metode koje su različitog reda tačnosti.

2. Varijaciona formulacija problema

U ovom radu se, od niza približnih metoda, koristi varijaciona Kantorovičeva metoda parcijalne integracije [12]. Zato je neophodno problem varijaciono formulisati. U tom cilju se pretpostavlja Lagranževa funkcija ili Lagranžijan u obliku

$$L=\left\{m\left[\frac{1}{2}u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-U\frac{\partial U}{\partial x}\right]-N\left(\frac{1}{2}\cdot u^2-\frac{1}{3}\frac{u^3}{U}-\frac{1}{6}U^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}e^{x/m}+\mu\left[\frac{\partial(ru)}{\partial x}+\frac{\partial(rv)}{\partial y}\right], \tag{2.1}$$

gde je: m — iščezavajući parametar a $\mu(x, y)$ — nepoznati množitelj. Odgovarajući akcioni integral ima oblik

$$I=\int_{x_0}^{e}\int_{0}^{y_m} L\,dx\,dy.$$

Uslov stacionarnosti akcionog integrala

$$\delta I=0, \tag{2.3}$$

se korišćenjem komutativnosti diferenciranja i variranja i prirodnih graničnih uslova za proizvoljne vrednosti varijacija δu i δv

$$\left.\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\delta u\right|_{x=l}=0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}\right|_{y=y_m}=0, \tag{2.4}$$

svodi na sistem Ojler-Lagranževih jednačina

$$\frac{\partial L}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}=0. \tag{2.5}$$

Unošenjem Lagranževe funkcije (2.1) u sistem (2.5) i prelaskom na granični proces $m \to 0$ ovaj se sistem svodi na sistem jednačina (1.5) Dakle saglasno varijacionoj formulaciji sa iščezavajućim parametrom [2] problem je akcionim integralom (2.2) sa Lagranžijanom oblika (2.1) varijaciono formulisan. Dakle, rešavanje problema opisanog jednačinama (1.5) sa graničnim uslovima (1.2) svedeno je na rešavanje varijacionog zadatka datog akcionim integralom (2.2).

3. Dobijanje aproksimativnih rešenja

Da bi se došlo do aproksimativnih rešenja osnovnih veličina osnosimetričnog *MHD* graničnog sloja na obrtnim telima u radu se dalje, kako je rečeno, koristi Kantorovičeva metoda parcijalne integracije [12]. U tom cilju se pretpostavljaju podužna brzina $u(x, y)$, poprečna brzina $v(x, y)$ i množitelj $\mu(x, y)$ u oblicima

$$u(x,y)=U(x)\ \varnothing(f),\quad v(x,y)=g(x)H(f)-j(x)R(f),$$
$$\mu(x,y)=k(x)\ Q(f), \tag{3.1}$$

gde je argument $f=\dfrac{y}{h(x)}$.

Uvedene funkcije $\varnothing(f)$, $H(f)$, $R(f)$, $Q(f)$, $g(x)$, $j(x)$ i $k(x)$ nisu u potpunost proizvoljne. One se biraju tako da, zbog druge jednačine sistema (1.5), zadovolje relacije

$$H(f)=\int f\dot{\varnothing}(f)\,df+C_1,\quad R(f)=\int\varnothing(f)\,df+C_2, \tag{3.2}$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante a $\dot{\varnothing}$ izvod funkcije $\varnothing$ po parametru f. Zamenom izraza (3.1) u granične uslove (1.2) dobijaju se granični uslovi za funkcije $\varnothing$, R i H u obliku

$$\begin{aligned}&\varnothing=0,\ H=0,\ R=0 &&\text{za } f=0,\\ &\varnothing=1 &&\text{za } f=f_m=1.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sa pretpostavljenim brzinama $u(x, y)$, $v(x, y)$ i množiteljem $\mu(x, y)$ u oblicima (3.1) iz Lagranižajana (2.1) se, imajući u vidu relacije (3.2), dobija redukovani Lagranžijan u obliku

$$\begin{aligned}L_1=&\Bigg\{m\Bigg[\frac{1}{2}U\left(\frac{dU}{dx}\right)^2hA_1-U^2\frac{dU}{dx}\frac{dh}{dx}A_2+\frac{1}{2}\frac{U^3}{h}\left(\frac{dh}{dx}\right)^2A_3+\\&+gU\frac{dU}{dx}A_4-\frac{gU^2}{h}\frac{dh}{dx}A_5-jU\frac{dU}{dx}A_6+\frac{jU^2}{h}\frac{dh}{dx}A_7-\\&-U\left(\frac{dU}{dx}\right)^2hA_8+U^2\frac{dU}{dx}\frac{dh}{dx}A_9\Bigg]-NU^2hA_{10}-\frac{\nu}{2}\frac{U^2}{h}A_{11}\Bigg\}e^{x/m}+\\&+k\left[\frac{d(ru)}{dx}h-rj\right]A_{12}+kr\left(g-U\frac{dh}{dx}\right)A_{13},\end{aligned} \tag{3.4}$$

gde su koeficijenti Ai dati izrazima

$$A_1=\int_0^{fm}\varnothing^3\,df,\ A_2=\int_0^{fm}\varnothing^2\dot{\varnothing}\,f\,df,\ A_3=\int_0^{fm}\varnothing\,\dot{\varnothing}^2f^2\,df,\ A_4=\int_0^{fm}H\,\varnothing\,\dot{\varnothing}\,df,$$

$$A_5=\int_0^{fm}H\dot{\varnothing}^2f\,df,\ A_6=\int_0^{fm}R\varnothing\,\dot{\varnothing}\,df,\ A_7=\int_0^{fm}R\dot{\varnothing}^2f\,df,\ A_8=\int_0^{fm}\varnothing\,df,$$

$$A_9=\int_0^{fm}\dot{\varnothing}f\,df,\ A_{10}=\frac{1}{2}\int_0^{fm}\varnothing^2\,df-\frac{1}{3}A_1-\frac{1}{6},\ A_{11}=\int_0^{fm}\dot{\varnothing}^2\,df. \tag{3.5}$$

Odgovarajući redukovani akcioni integral ima tada oblik

$$I_1=\int_{x_0}^{l} L_1\,dx. \tag{3.6}$$

Uslovu stacionarnosti redukovanog akcionog integrala

$$\delta I_1=0, \tag{3.7}$$

uz poštovanje prirodnog graničnog uslova

$$\left.\frac{\partial L_1}{\partial\left(\frac{dh}{dx}\right)}\delta h\right|_{x=l}=0, \tag{3.8}$$

odgovara sistem Ojler-Lagranževih jednačina

$$\frac{\partial L_1}{\partial h}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial\left(\frac{dh}{dx}\right)}=0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial g}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial\left(\frac{dg}{dx}\right)}=0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial k}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial\left(\frac{dk}{dx}\right)}=0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial j}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial\left(\frac{dj}{dx}\right)}=0. \tag{3.9}$$

Nalazeći odgovarajuće parcijalne izvode redukovanog Lagranžijana (3.4) i unoseći ih u sistem jednačina (3.9) on se, prelaskom na granični proces $m\to 0$, transformiše na sistem

$$-NU^2A_{10}+\frac{\nu}{2}\frac{U^2}{h^2}A_{11}+U^2\frac{dU}{dx}A_2-\frac{U^3}{h}\frac{dh}{dx}A_3+\frac{gU^2}{h}A_5-\frac{jU^2}{h}A_7-U^2\frac{dU}{dx}A_9=0,$$

$$\left[h\,\frac{d(rU)}{dx}-rj\right]A_{12}+r\left(g-U\frac{dh}{dx}\right)A_{13}=0. \tag{3.10}$$

Odabirajući proizvoljno uvedene funkcije g i j (3.1) u obliku

$$j=\frac{h}{r}\,\frac{d(rU)}{dx},\quad g=U\frac{dh}{dx}, \tag{3.11}$$

druga jednačina sistema (3.10) je identički zadovoljena a prva se posle uvođenja smene $h^2 = \nu t$ transformiše na

$$\frac{dt}{dx} + \left[A \frac{\frac{dU}{dx}}{U(x)} + B \frac{N(x)}{U(x)} + C \frac{\frac{dr}{dx}}{r(x)} \right] t - \frac{D}{U(x)} = 0, \tag{3.12}$$

gde su

$$A = 2 \frac{A_2 - A_7 - A_9}{A_5 - A_3}, \quad B = \frac{2 A_{10}}{A_3 - A_5}, \quad C = \frac{2 A_7}{A_3 - A_5}, \quad D = \frac{A_{11}}{A_3 - A_5}. \tag{3.13}$$

Ovim je rešavanje uočenog problema svedeno na rešavanje obične linearne diferencijalne jednačine (3.12). Da bi se ona mogla koristiti za sračunavanje konkretnih primera graničnog sloja neophodno je odrediti konstante A, B, C i D tj. opredeliti se za oblik funkcije $\varnothing$.

Karakteristične veličine graničnog sloja [13] sračunavaju se korišćenjem izraza za debljinu istiskivanja

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = h(x) \int_0^{f_m} (1 - \varnothing)\, df, \tag{3.14}$$

za debljinu gubitka impulsa

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = h(x) \int_0^{f_m} \varnothing\, (1 - \varnothing)\, df, \tag{3.15}$$

za tangencijalni napon na telu

$$\tau_w = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \eta\, \dot{\varnothing}(0) \frac{U}{h}, \tag{3.16}$$

gde je: η — koeficijent dinamičke viskoznosti.

4. Aproksimativna rešenja za odnos brzina oblika polinoma trećeg stepena

Za dalje rešavanje postavljenog problema pretpostaviće se da je odnos podužne brzine u graničnom sloju $u(x, y)$ i brzine na granici graničnog sloja $U(x)$, oblika polinoma trećeg stepena

$$\varnothing(f) = 3f - 3f^2 + f^3. \tag{4.1}$$

Koeficijenti ovog polinoma (4.1) odabrani su tako da on zadovolji granične uslove (3.3) i dodatne uslove $\dot{\varnothing}(1) = 0$, $\ddot{\varnothing}(1) = 0$.

Za ovako odabran odnos brzina (4.1) korišćenjem izraza (3.2) i graničnih uslova (3.3) dobijaju se i funkcije $R(f)$ i $H(f)$ u obliku polinoma

$$R(f) = \frac{3}{2} f^2 - f^3 + \frac{1}{4} f^4,$$

$$H(f) = \frac{3}{2} f^2 - 2 f^3 + \frac{3}{4} f^4. \tag{4.2}$$

Nakon ovoga, mogu se korišćenjem (4.1) i (4.2) i posredstvom izraza (3.5) odrediti koeficijenti *Ai*. Unošenjem na dalje tako određenih vrednosti koeficijenata *Ai* u izraze (3.13) dobijaju se sledeće vrednosti za A, B, C i D:

$$A=8,\ B=-2.222,\ C=2 \text{ i } D=50. \tag{4.3}$$

Sa ovako određenim vrednostima konstanti A, B, C i D jednačina (3.12) dobija oblik

$$\frac{dt}{dx}+\left[8\frac{\frac{dU}{dx}}{U(x)}-2.222\frac{N(x)}{U(x)}+2\frac{\frac{dr}{dx}}{r(x)}\right]t-\frac{50}{U(x)}=0. \tag{4.4}$$

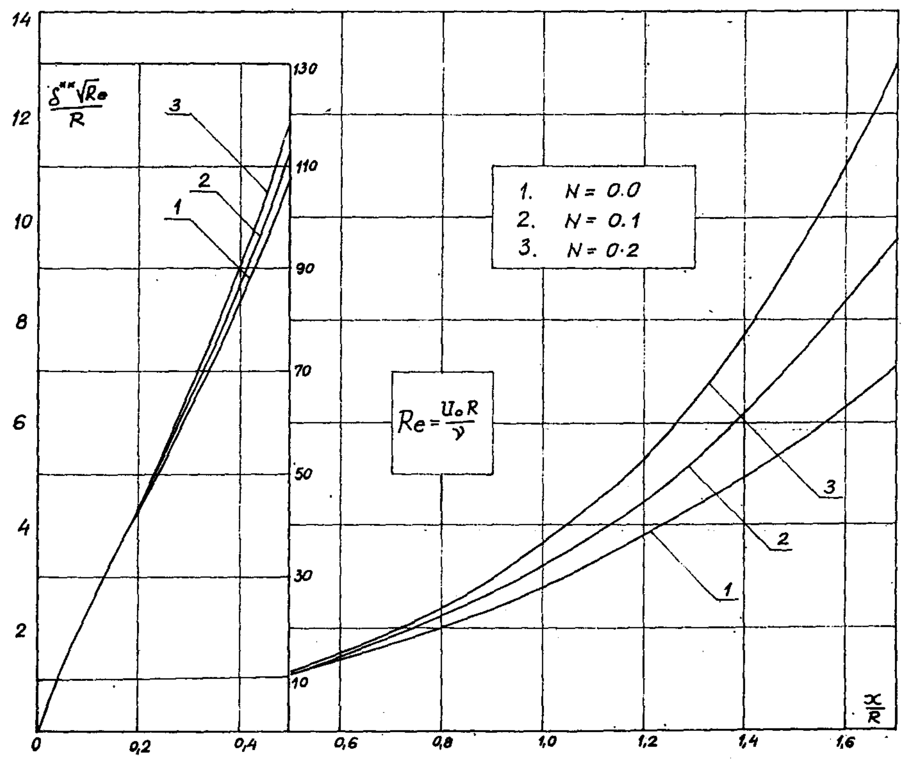
U tom smislu se rešavanje problema, uz pretpostavku da je odnos brzina oblika polinoma trećeg stepena, svodi na rešavanje jednačine (4.4). U svakom konkretnom slučaju tj. za zadato $U(x)$, $N(x)$ i $r(x)$ treba jednačinu (4.4) rešavati.

Karakteristične veličine graničnog sloja [13] sračunavaju se korišćenjem izraza:
za debljinu ispitivanja

$$\delta^{*}=0.25\ h(x), \tag{4.5}$$

za debljinu gubitka impulsa

$$\delta^{**}=0.107\ h(x), \tag{4.6}$$



Sl. 1

za tangencijalni napon na telu

$$\tau_w = 3\,\eta\,\frac{U(x)}{h(x)}, \tag{4.7}$$

koji su dobijeni iz izraza (3.14), (3.15) i (3.16) respektivno zamenom u njima funkcije $\varnothing$ polinomom (4.1) i $f_m = 1$.

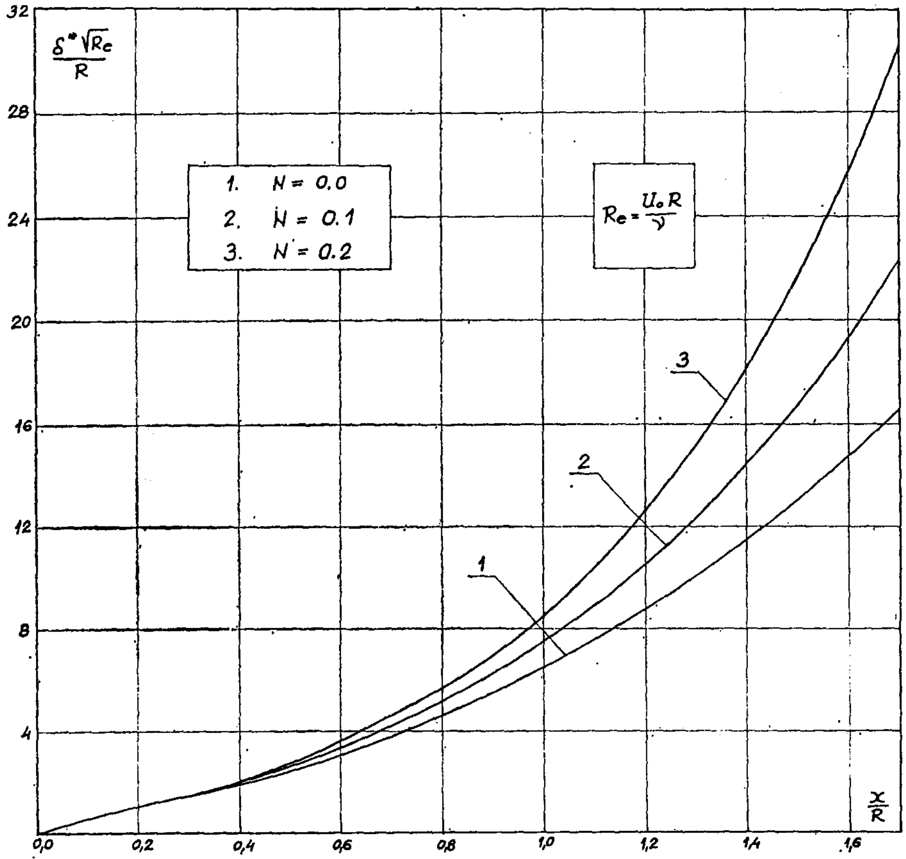
5. Proračun konkretnog primera

Kao konkretan primer proučava se problem graničnog sloja na prstenastom disku, unutrašnjeg poluprečnika R, u čijem se centru nalazi izvor a strujanje je ravansko. Ovaj problem graničnog sloja, koji je od interesa za praksu, određen je sledećim rasporedima brzine i poluprečnika [14]:

$$U(x) = \frac{U_0 R}{R + x}\,; \quad r(x) = R + x, \tag{5.1}$$

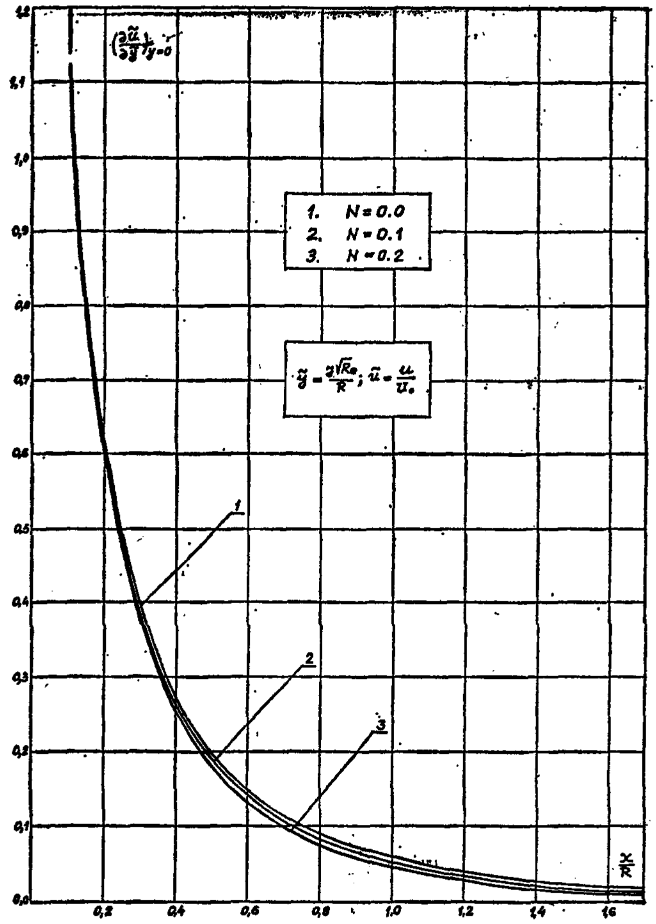
gde je: $U_0 = U(0)$ a koordinatni početak na unutrašnjem kraju diska.

Magnetno polje se smatra konstantnim i proračun izvodi za vrednosti magnetnog broja $N = 0.0$, 0.1 i 0.2.



Sl. 2

Za funkcije $U(x)$ i $r(x)$ date izrazima (5.1) a za date vrednosti magnetnog broja jednačina (4.4) je numerički rešena na elektronskoj računskoj mašini IMB 1130 i posredstvom izraza (4.5), (4.6) i (4.7) sračunate karakteristične veličine graničnog sloja. Rezultati ovog proračuna predstavljeni su grafički na slikama 1, 2, 3.



Sl. 3

Sa slike 1. i 2. se uočava da debljine istiskivanja i gubitka impulsa rastu sa porastom vrednosti magnetnog broja N. Taj rast je neznatan za male vrednosti bezdimenzijske koordinate x/R a sa njenim uvećanjem i on se uvećava. Sa slike 3. se pak uočava da sa porastom magnetnog polja (N) tangencijalni napon na telu opada. Dakle efekat magnetnog polja je suprotan željenom. To je i trebalo očekivati, jer karakter dejstva magnetnog polja suštinski zavisi od odnosa elektroprovodnosti unutar sloja σ i izvan σ_∞ i za $\sigma_\infty < \sigma$ (što je i naš slučaj) elektromagnetne sile koče fluid i odnose ga od tela, što kao krajnji efekat ima ranije odvajanje graničnog sloja.

Literatura

[1] Rossow J., *On flow of electrically coneucting fluids over a flat plate in presence of a transvers magnetic field*, HACA PR № **1358**, (1958).

[2] Vujanović B., *An Approach to linear and Nonlinear Heat Transfer Problem Using a Lagrangian*, J. AIAA 9 (1971).

[3] Boričić Z. i Nikodijević D., *Prilog proučavanju MHD graničnog sloja primenom varijacionog računa*, **XIV** Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike B **1**—3, Portorož, Jugoslavija (1978).

[4] Vujanović B. i Đukić Đ., *A variational principle for the theory of laminar boundary layer in incompressible fluids*, Publications de L'Institut mathématique tome **11**, (25), Beograd, (1971).

[5] Boričić Z. i Nikodijević D., *The research of the flow in the plane magnetohydrodynamic boundary layer around the body of the arbitrary shape*-Proceedings of the sixth confernnce on fluid machinery, Vol. **1**, Akadémiai kiadó, Budapest (1979).

[6] Vujanović B., Đukić Đ. i Pavlović M., *A Variational Principle for the Laminar Boundary Layer Theory*, Bollettion U.M.I. (4) 7 (1973).

[7] Boričić Z. i Nikodijević D., *Neka istraživanja laminarnog strujanja provodnog fluida*, Simpozijum '80, Savremeni problemi nelinearne mehanike kontinuuma, Tara, (1980) II—**4**.

[8] Đukić Đ. i Vujanović B., *A variational principle for the two-dimensional boundary-layer flow of non-newtonian power-law fluids*, Rheol. Acta **14** (1975).

[9] Đukić Đ., *On Unsteady Magnetic Low-Speed slip Flow in the Boundary Layer*, Acta Mechanica **18** (1973).

]10] Nikodijević D., *Određivanje karakteristika graničnog sloja na obrtnim telima primenom metode varijacije*, **15**. Jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Kupari, (1981) B—**6**.

[11] Stokić D., *Rešenje problema zračenja toplote tela sa termički promenljivim karakteristikama varijacionom metodom*, Naučno-stručni skup „Mašinstvo 1873—1973", Zbornik radova knjiha II.

[12] Мышкис А. Д., *Математика — специальные курсы*, „Наука", Москва (1971).

[13] Лойцянский Л. Г., *Ламинарный пограничный слой*, ПИФМЛ, Москва (1962).

[14] Сальников В. Н., *Пограничньй слой на диске в плоском потоек от источника или стока*, Publikacije Mašinskog fakulteta u Beogradu, № 3—**4** (1962).

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИЯЦИОНОГО МЕТОДА НА ИЗУЧЕНИЕ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО МГД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТЕЛ ВРАШЧЕНИЯ ПРИ ТЕЧЕНИЮ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Резюме

Изучается проблема осесиметричного пограничного слоя проводимой несжимаемой жидкости на тел вращения под действием перпендикулярного магнитного поля. Електропроводимост жидкости переменая а маловата. В работе пользуеися метод варияции с ищезавающим пораметром. На конце работе для специального случая вычисляютст характерные величини пограничного слоя: толщина вытеснения, толщина потери импульса и напряжение трения на стенке.

dr Zoran Boričić, red. prof.
mr Dragiša Nikodijević, asist.
Mašinski fakultet,
18000 Niš, Beogradska 14.

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

STATISTIČKI MOMENTI VIŠEG REDA I RASPODELE VEROVATNOĆA BRZINA U TURBULENTNOM VIHORNOM STRUJANJU

Svetislav M. Čantrak

1. Uvod

Turbulentna vihorna strujanja u prirodi i tehnici česta su strujna pojava, pa je njihovo izučavanje od velikog teorijskog i praktičnog značaja. Proučavanje ovih strujanja je, međutim, znatno otežano zbog njihove veoma komplikovane strukture. Ovde se radi naime o trodimenzijskim, nehomogenim i neizotropnim turbulentnim strujanjima sa smicanjem, u kojima raspodela obimske komponente brzine odgovara Rankine-ovom vrtlogu. Strujno polje deli se grubo u četiri oblasti, od kojih se svaka odlikuje karakterističnom strukturom i promenom strujnih parametara. U blizini zida strujanje poseduje svojstva strujanja u graničnom sloju, dok je u osnovnom strujanju aksijalna brzina približno konstantna a profil obimske brzine odgovara potencijalnom vrtlogu. Vrtložni smičući sloj karakteriše se posebnim statističkim svojstvima, intenzivnom razmenom impulsa i jakom anizotropnošću, a strujanje u jezgru ima karakterističan raspored aksijalne i obimske brzine, koja je u ovoj oblasti proporcionalna rastojanju od ose cevi. Izrazita promena svih statističkih veličina prisutna je ne samo u radijalnom već i u aksijalnom pravcu, pri čemu transformacija obimske brzine tj. Rankineovog vrtloga igra značajnu ulogu. Uticaj ovog vrtloga na strukturu turbulencije i mehanizam turbulentnih transportnih procesa naročito je potrebno da se istraži.

Ponašanje vihornog strujanja u cevima pri različitim Reynoldsovim brojevima, jačinama vrtloga i drugim uticajnim veličinama razmatrano je u radovima mnogih autora. Tako se u radovima [1, 2 i 3] daje matematički opis ovih strujanja, a eksperimentalni podaci o Reynolds-ovim naponima nalaze se, naprimer, u [4 i 5]. Uticaji različitih parametara na vihorno strujanje u cevima proučeni su u radovima [6, 7, 8 i 9]. Sva dosadašnja istraživanja ograničena su na određivanje srednjeg polja pritiska i brzina kao i Reynolds-ovih napona. Druga statistička svojstva nisu istražena. Glavni razlog za to je složenost ovih strujanja i velike teškoće koje nastaju pri merenju statističkih veličina u unutrašnjim strujanjima sa sve tri komponente brzine i oblastima velikog intenziteta turbulencije.

Cilj ovog rada je da se fizički objasne procesi turbulentnog prenosa i struktura turbulencije u karakterističnim oblastima unutrašnjih vihornih strujanja. Analiza se zasniva na rezultatima dobijenim u radu [10], koji se odnose kako na teorijska tako i eksperimentalna istraživanja statističkih parametara ove klase strujanja. U tom radu bliže je opisana primena nove tripel-sonde i anemometrije kao i digitalna obrada i statistička analiza mernih podataka.

2. Diferencijalne jednačine centralnih momenata i uticaj Rankine-ovog vrtloga na turbulenciju

Turbulentno kretanje pripada nelinearnim mehaničkim sistemima sa velikim brojem aktivnih stepeni slobode i opisuje se statističkim ansamblom slučajnih polja. Kako je praktično određivanje višedimenzijskih raspodela gustina verovatnoća za m proizvoljnih prostorno-vremenskih tačaka teško ostvarljivo, to se pri rešavanju konkretnih zadataka turbulentno polje opisuje ukupnošću statističkih momenata različitog reda, koji predstavljaju tenzore odgovarajućeg reda. Na osnovu teoreme ergodičnosti [11] centralni prostorno-vremenski korelacioni moment n-tog reda i tipa m definisan je izrazom

$$Q_{i,j,\ldots,r}^{k_i,k_j,\ldots,k_r}(M_1, M_2, \ldots, M_m) = E\{u_i^{k_i}(M_1)\, u_j^{k_j}(M_2) \ldots u_r^{k_r}(M_m)\} =$$

$$= \overline{u_i^{k_i}(M_1)\, u_j^{k_j}(M_2) \ldots u_r^{k_r}(M_m)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_i^{k_i} u_j^{k_j} \ldots u_r^{k_r}\, dt, \tag{1}$$

gde su: $k_i + k_j + \cdots + k_r = n$; $i, j, \ldots, r = 1, 2, 3$; $E\{\ \}$-matematičko očekivanje, $\overline{(\ldots)}$-osrednjavanje po vremenu, $\tilde{u}_i(r, t)$-statistički stacionarno slučajno polje i-te komponente brzine, $E\{\tilde{u}_i\} = \overline{U}_i = \overline{\tilde{u}}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_i\, p(\tilde{u}_i)\, d\tilde{u}_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}_i\, dt$ — statistička srednja vrednost tj. vremenski osrednjena i-ta komponenta brzine, $u_i = \tilde{u}_i - E\{\tilde{u}_i\} = \tilde{u}_i - \overline{U}_i$ — fluktuacija brzine u i-tom pravcu, $p(\tilde{u}_i)$ — raspodela gustine verovatnoće i $M_i(r_i, t+\tau_i)$ — i-ta prostorno-vremenska tačka. Iz opšteg izraza (1) sleduju izrazi za centralne momente bilo kog reda, mešovite momente, autokorelacione i korelacione funkcije, za vremensko-korelacione momente višeg reda i sve korelacione koeficijente. Tako su centralni momenti n-tog reda za i-tu projekciju brzine definisani sa

$$Q_i^n = \overline{u_i^n(M)} = \lim_{t_0\to T} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} u_i^n\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(u_i)\, u_i^n\, du_i, \tag{2}$$

gde su $i = 1, 2, 3$ i $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ Intenzitet turbulencije u i-tom pravcu dobija se iz (2) za $n = 2$ i glasi $\sigma_i = (\overline{u_i^2})^{1/2}$. Normirani centralni momenti Q_i^n/σ_i^n imaju za $n = 3, 4, 5$ i 6 redom sledeće oznake: S_i, F_i, SS_i i SF_i. Korelacioni momenti drugog i trećeg reda definišu se posredstvom (1) izrazima

$$Q_{ij} = \overline{u_i(M)\, u_j(M)} \quad \text{i} \quad Q_{ijr} = \overline{u_i(M)\, u_j(M)\, u_r(M)}, \tag{3}$$

čije normirane vrednosti određuju korelacione koeficijente $R_{ij}=Q_{ij}/\sigma_i\sigma_j=\overline{u_i u_j}/\sigma_i\sigma_j$ i $R_{ijr}=Q_{ijr}/\sigma_i\sigma_j\sigma_r$, gde su $i, j, r=1, 2, 3$. Primenom Reynolds-ove statistike pri osrednjavanju Navier-Stokes-ovih jednačina pojavljuje se korelacioni tenzor drugog reda Q_{ij} i sistem jednačina više nije zatvoren. Ovaj problem ostaje i kod statističkih jednačina višeg reda, u kojima Reynolds-ove jednačine predstavljaju prvu hijerarhijsku stepenicu. Tako su, na primer, u jednačinama za momente n-tog reda kao nepoznate funkcije prisutni momenti reda $n+1$. Da bi se istražio uticaj Rankine-ovog vrtloga na turbulenciju, potrebno je napisati diferencijalne jednačine za centralne momente drugog reda. Pretpostavlja se da je fluid njutnovski i homogen a strujanje nestišljivo, statistički stacionarno $(\partial\overline{(\ldots)}/\partial t=0)$ i osnosimetrično $(\partial\overline{(\ldots)}/\partial\varphi=0)$. Uvode se cilindrične koordinate (x, r, φ) sa pripadnim trenutnim vrednostima komponenata brzine $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ i $\tilde{w}$ u aksijalnom, radijalnom i obimskom pravcu. Pri tome je $\tilde{u}_i=\overline{U}+u_i$, sa $i=1, 2, 3$,. Jednačine za momente $\sigma_i^2=\overline{u_i^2}$ glase

$$\overline{U}_j\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial x_j}+K_i=D_i+P_i+V_i+\varepsilon_i, \tag{4}$$

gde važi Einstein-ova konvencija o sabiranju. Izrazi za K_i i P_i dati su sa

$$K_1=0,\ K_2=-K_3=-\frac{2\overline{W}}{r}Q_{vw},\ P_1=-2\left(\sigma_u^2\frac{\partial\overline{U}}{\partial x}+Q_{uv}\frac{\partial\overline{U}}{\partial r}\right),$$

$$P_2=-2\left(Q_{uv}\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}+\sigma_v^2\frac{\partial\overline{V}}{\partial r}\right)+\frac{2\overline{W}}{r}Q_{vw},\ P_3=-2\left(Q_{uw}\frac{\partial\overline{W}}{\partial x}+Q_{vw}\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}+\frac{\overline{V}}{r}\sigma_w^2\right). \tag{5}$$

Jednačine za korelacioni moment Q_{ij} mogu da se napišu u sledećem obliku

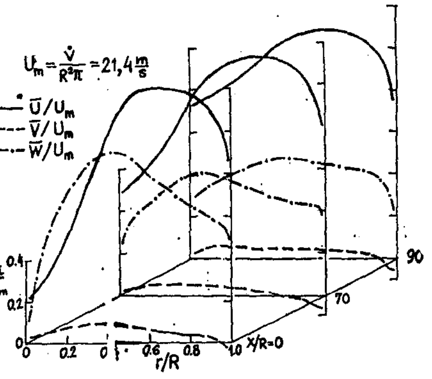
$$\overline{U}_r\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_r}+K_{ij}=D_{ij}+P_{ij}+V_{ij}+\varepsilon_{ij},\quad i, j=1, 2, 3;\ i\neq j, \tag{6}$$

pri čemu su izrazi za K_{ij} i P_{ij} dati u [10], a ovde se navodi samo

$$P_{12}=P_{uv}=-Q_{uv}\left(\frac{\partial\overline{U}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{V}}{\partial r}\right)+Q_{uw}\frac{\overline{W}}{r}-\sigma_v^2\frac{\partial\overline{U}}{\partial r}-\sigma_u^2\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}. \tag{7}$$

Fizičko značenje članova D (difuzija), P (produkcija), V (re-distribucija) i ε (disipacija) dato je, na primer, u [12]. Jednačine (4) i (6) opisuju transport, produkciju i disipaciju veličine Q_{ij} kao i uticaj vrtloga tj. obimske komponente $\overline{W}$ na ove transportne procese. Prisustvo brzine $\overline{W}$ prouzrokuje preraspodelu aksijalne brzine $\overline{U}$ i nastajanje radijalne brzine $\overline{V}$, što direktno utiče na konvektivni transport veličine Q_{ij}. Uticaj Rankine-ovog vrtloga na produkciju P_i i P_{ij} momenta Q_{ij} prikazan je izrazima (5) i (7), koji opisuju međusobno dejstvo centralnih momenata Q_{ij} i gradijenata osrednjenog brzinskog polja. U zavisnosti od vrednosti eksponenta m u formuli $\overline{W}(x=\text{const.}, r)=kr^m$ nastaju različita dejstva Rankine-ovog vrtloga na turbulentno polje. Tako je, naprimer, za $m<1$ odnosno $\partial(\overline{W}/r)/\partial r<0$ korelacija Q_{vw} pozitivna i intenzitet turbulencije u radijalnom pravcu σ_v se povećava, kako to sleduje iz izraza za $P_2=P_v$ u (5). Za potencijalni vrtlog i $\partial(\overline{W}r)/\partial r>0$ redukuju se σ_w^2 i Q_{vw}

a turbulencija postaje sve više neizotropna, jer σ_v^2 može da bude znatno veće od σ_u^2 i σ_w^2. Član V_i u (4) opisuje preraspodelu intenziteta σ_v na druge pravce. Za $m \geqslant 1$ nastaje jedno stabilizirajuće dejstvo centrifugalne sile, smanjuje se σ_v, redukuju se Q_{vw} i Q_{uv} i turbulencija postaje prigušena.

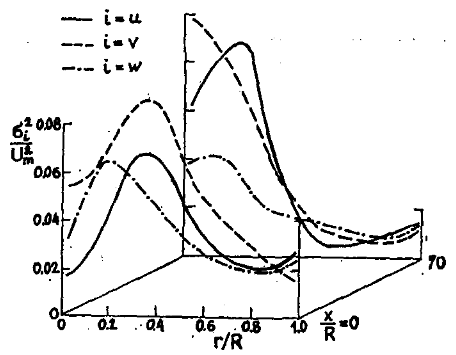


Sl. 1. Promena osrednjenog brzinskog polja u aksijalnom i radijalnom pravcu

Zbog prisustva vrtloga nastaju gradijenti aksijalne brzine i u oblasti jezgra (slika 1), što utiče na raspodelu svih statističkih veličina. Produkcioni članovi — $-Q_{uv}\,\partial\,\bar{U}/\partial\,r$ i $-Q_{uv}\partial\,\bar{U}/\partial\,x$ u izrazima (5) i (7) doprinose u tom slučaju povećanju intenziteta turbulencije σ_u kao i korelacije Q_{uv}. Uticaj vrtloga na momente Q_{ijr}, koji se javljaju u difuzionim članovima D_i odnosno D_{ij} jednačina (4) i (6), biće analiziran u narednom odeljku.

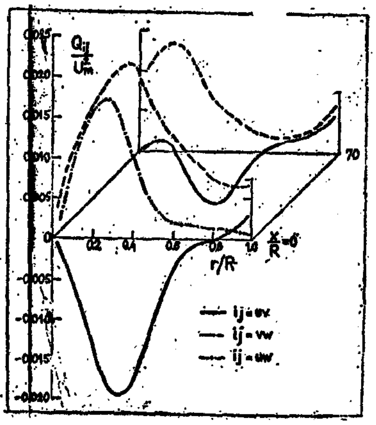
3. **Raspodele statističkih momenata i gustina verovatnoća**

Teorijska razmatranja o uticaju Rankine-ovog vrtloga na korelacioni tenzor Q_{ij} eksperimentalno su potvrđena u radu [10]. Centralni momenti σ_i^2 dostižu svoje maksimalne vrednosti u vrtložnom smičućem sloju, koji razdvaja oblast osnovnog strujanja od strujanja u jezgru, a potom opadaju u pravcu ka osi i zidu cevi, u čijoj blizini ponovo rastu (sl. 2). Ovakva raspodela je u saglasnosti sa raspodelom i položajem maksimuma osrednjenog brzinskog polja (sl. 1), generisanjem turbulencije i turbulentnom difuzijom iz oblasti velikih gradijenata brzine. Uticaj jačine vrtloga razmatran je u radu [13] i zajedničko u svim slučajevima je da su vrednosti momenta σ_v^2 velike, tako da radijalne fluktuacije brzine prouzrokuju intenzivnu turbulentnu razmenu i preraspodelu turbulentne energije posredstvom korelacije između fluktuacija pritiska i gradijenata brzine. Neizotropnost je naročito prisutna u vrtložnom sloju i jezgru, dok je u osnovnom strujanju manje izražena.

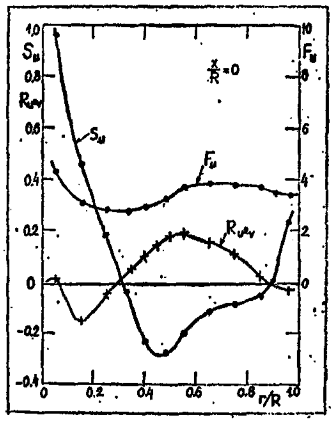


Sl. 2. Zavisnost momenata σ_i^2 od x i r-koordinate

Uticaj vrtloga na korelacione momente Q_{ij}, za $i \neq j$, prikazan je na sl. 3 i opisan jednačinom (6). Posebno je karakteristična promena korelacije Q_{uv}, koja menja svoj znak i najveću negativnu vrednost dostiže u vrtložnom sloju (sl. 3). Tako je prenos aksijalnog impulsa u radijalnom pravcu usmeren u jezgru pretežno ka osi, što potvrđuje i korelacioni koeficijent R_{u^2v} na slici 4. Na taj način ubrzava se strujanje u jezgru, i profil aksijalne brzine postaje sve ujednačeniji (sl. 1). U oblasti pozitivnih gradijenata brzine $\bar{U}$ veličina Q_{uv} ima negativnu vrednost i obratno, tako da je produkcioni član $-Q_{uv}\,\partial\,\bar{U}/\partial\,r$ u jednačini (5) pozitivan, što uvećava centralni moment σ_u^2. Korelacioni moment Q_{vw}, koji zavisi od jačine i radijalne raspodele vrtloga, pokazuje da u ovom strujanju nastaje intenzivni dodatni prenos impulsa u radijalnom pravcu. Pokazuje se da promena brzinskog polja ne samo u radijalnom već i u aksijalnom pravcu dovodi do turbulentnog prenosa Q_{uw}, koji zavisi od promene Rankine-ovog vrtloga u nizstrujnim presecima. Međusobno dejstvo osrednjenog i fluktuacionog polja brzine rađa anizotropnost i velike gradijante statističkih momenata kako u podužnom tako i radijalnom pravcu.



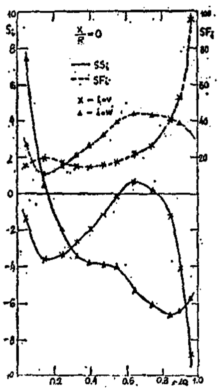
Sl. 3. Raspodele momenata Q_{ij} u aksijalnom (x) i radijalnom (r) pravcu



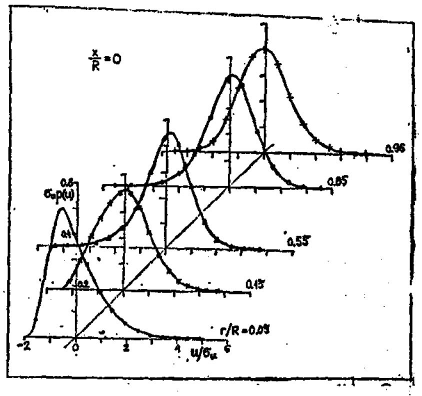
Sl. 4. Koeficijenti asimetrije i spljoštenosti (S_u i F_u) i korelacioni koeficijent R_{u^2v}

Članovi D_i i D_{ij} u jednačinama (4) i (6) sadrže momente Q_{ijr} i njihove izvode po x i r, koji su u nehomogenom turbulentnom strujanju različiti od nule. Turbulentna difuzija energije σ_u^2 u r pravcu, predstavljena veličinom $R_{u^2v}=\overline{u^2 v}/\sigma_u^2\sigma_v$ na sl. 4, odgovara vrednostima gradijenta od σ_u^2 (sl. 2). Tako je radijalna turbulentna difuzija momenta σ_u^2 usmerena pretežno iz smičućeg, vrtložnog sloja ka jezgru i osnovnom strujanju, odnosno od zida ka osnovnoj struji. Veličina $-\partial(rQ_{u^2v})/r\partial r$ pojavljuje se u izrazu za D_u i direktno utiče na raspodelu centralnog momenta σ_u^2. Koeficijent asimetrije $S_u=\overline{u^3}/\sigma_u^3$ ima u jezgru velike pozitivne vrednosti (sl. 4), koje u nizstrujnim presecima ($x/R>70$) prelaze u negativne [14]. Velike pozitivne vrednosti S_u u jezgru označavaju jaku asimetriju raspodele gustine verovatnoće $p(u)$ u stranu velikih aksijalnih brzina (sl. 6). U toj oblasti je turbulentni transport veličine σ_u^2 u x-pravcu prouzrokovan pretežno pozitivnim u-fluktuacijama. Za tok turbulentne difuzije i strukturu vrtložnog smičućeg sloja od posebnog značaja je činjenica da S_u menja znak tačno na mestu gde σ_u^2 dostiže maksimalnu vrednost (sl. 2). Na istom tom mestu faktor spljoštenosti $F_u=\overline{u^4}/\sigma_u^4$ ima minimum (sl. 4), što odgovara karakteristikama strujanja u neposrednoj blizini zida. Najveće vrednosti veličine F_u nalaze se u oblasti najvećih negativnih vrednosti koeficijenta S_u. To znači da u ovoj oblasti postoje vrlo velike negativne u-fluktuacije, pri čemu je, međutim, verovatnoća malih fluktuacija, koje nastaju kretanjem turbulentnih vrtloga u oblasti malih gradijenata brzine, veća.

Vrednosti normiranih momenata S_u i F_u i raspodela gustine verovatnoće (sl. 6) pokazuju da postoji znatno odstupanje od Gauss-ove raspodele i da su za statistički opis turbulencije potrebni momenti još višeg reda. Slika 5 prikazuje momente petog i šestog reda. Vidi se da je $SS_v = \overline{v^5}/\sigma_v^5$ negativno u jezgru, gde su $S_u > 0$ i $Q_{uv} < 0$, što ukazuje na transport turbulentne energije posredstvom fluktuacija iz oblasti produkcije ka osi cevi. Velike vrednosti SS_v i SF_v faktora u oblasti $r/R > 0,85$ ukazuju na prisustvo pretežno malih, ali i na manje verovatnu pojavu velikih negativnih radijalnih



Sl. 5. Radijalna raspodela normiranih momenata petog i šestog reda SS_i i SF_i



Sl. 6. Raspodele gustina verovatnoća aksijalnih fluktuacija brzine na raznim rastojanjima od ose cevi

fluktuacija. Zapaža se da je, saglasno transportnim procesima, $SS_w > 0$ u jezgru i da veličina $SF_w = \overline{w^6}/\sigma_w^6$ ima svoj minimum na mestu gde SS_w menja znak. Treba napomenuti da rezultati merenja pokazuju, da normirani momenti petog i šestog reda u pojedinim strujnim oblastima imaju još veće vrednosti. I to je u skladu sa složenom strukturom turbulentnog vihornog strujanja u kome se može govoriti o intermitentnim pojavama i postojanju organizovanih koherentnih struktura [10].

Na sl. 6 date su raspodele gustina verovatnoća aksijalne brzine. Raspodele su izrazito negausovske, naročito u blizini zida i ose cevi. U jezgru, na mestu $r/R = 0,05$, male negativne fluktuacije imaju najveću verovatnoću tj. brzine, koje nisu mnogo manje od osrednjene lokalne brzine, pojavljuju se najčešće. Najveće aksijalne fluktuacije su, međutim, pretežno pozitivne, što može da se objasni dominantnom ulogom prisutne injektivne faze, kojom se krupni turbulentni vrtlozi intermitentno ubacuju u jezgro iz prostora generisanja turbulencije. Za $0,33 \leqslant r/R \leqq 0,90$ javlja se asimetrija u stranu manjih, a za $0,9 < r/R < 1$ u stranu većih aksijalnih brzina. U oblastima sa malim odstupanjima normiranih momenata S i F od Gauss-ovih vrednosti često je moguće eksperimentalno određene raspodele verovatnoća opisati nekim teorijskim raspodelama posredstvom korelacionih momenata zaključno sa četvrtim redom. U tu svrhu se, između ostalih, primenjuju Pearson-ova i Gram-Charlier-ova raspodela [15], čiji je jednodimenzijski oblik dat izrazom

$$P(u_i) = G(u_i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^{2k}}{k!} \overline{H_{(k)}(u_i)}\, H_{(k)}(u_i),$$

pri čemu su $H_{(k)}(u_i)$ — Hermit-ovi polinomi k-tog reda i $G(u_i)$ — Gauss-ova raspodela. U radu [10] pokazano je da ove aproksimacije nisu zadovoljavajuće u slučajevima, kada je za analizu bitna verovatnoća najvećih fluktuacija. Tada se pribegava drugim raspodelama.

Na osnovu prikazanih istraživanja može da se zaključi, da su struktura i mehanizam turbulentnih transportnih procesa u vihornom strujanju veoma mnogo zavisni od intenziteta i raspodele obimske komponente brzine tj. od Rankine-ovog vrtloga. Istraživanje je omogućilo otkrivanje izvesnih zakonitosti ovog složenog strujanja, pri čemu su posebno karakteristična dobijena statistička svojstva vrtložnog smičućeg sloja, koji razdvaja strujanje u jezgru od osnovnog strujanja.

Literatura

[1] Gollatz, L., Görtler, H., *Rohrströmung mit schwachem Drall*, ZAMP, Vol. **5**, (1954).

[2] Kreith, F., Sonju, O. K., *The decay of a turbulent swirl in a pipe*, J. Fluid Mech.,vol **22**, part **2**, pp. 257—271, (1965).

[3] Rochino, A., Lavan, Z., *Analytical Investigations of Icompressible Turbulent Swirling Flow in Stationary Ducts*, J. Appl. Mech., Vol. 36, Trans. ASME, Vol. **91**, Series E, pp. 151—158, (1969).

[4] Weske, J. R., Sturov, G, E., *Experimental investigation of turbulent swirling flow in a cylindrical tube*, Prof. Siberian Div. Acad. Sci., USSR, Vol. **13**, № **3**, pp. 3—7 (1972).

[5] Saito, S., Saito, K., Aoki S., *Decay of Swirl in a Straight Pipe Flow*, Rep. Inst. High Speed Mech., Vol. **28**, **260**, pp. 43—76, (1973).

[6] Sawatzki, O., *Drallströmung in langen kreisrunden Rohren*, Mitteilungen des Instituts für Strömungslehre und Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe, Heft **12**, (1972).

[7] Ito S., Ogawa, K., Kuroda C., *Decay process of swirling flow in a circular pipe*, Int. Chem. Eng., Vol. **19**, № **4**, pp. 600—605, (1979).

[8] Benišek, M., Čantrak, S., *Istraživanje karakteristika vihornih strujanja*, Zbornik radova **15**. Jug. kon. teorij. prim. meh., B-**25**, pp. 261—268, Kupari, (1981).

[9] Čantrak, S., Benišek, M., *Die charakteristischen aus den mittleren Geschwindigkeitsvertilungen ermittelten Grössen der turbulenten Drallströmung in Rohren*, ZAMM, Band **62**, T 201—T 203, (1982).

[10] Čantrak, S., *Experimentelle Untersuchungen statistischer Eigenschaften turbulenter drallbehafteter Rohr- und Diffusorströmungen*, Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen **31**, S. 23—66, (82) Dissertation, Universität Karlsruhe, (1981).

[11] Monin, A. S., Yaglom, A. M., *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, Vol. **1**, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, (1979).

[12] Townsend, A. A., *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, (1976).

[13] Acrivlellis, M., Čantrak, S., Jungbluth, H., *Untersuchungen der Korrelationen höherer Ordnung in drallbehafteter Rohrströmung*, Z. Flugwiss. Weltraumforsch., Band **6**, Heft **2**, S. 117—120, (1982).

[14] Acrivlellis, M., Čantrak, S., Jungbluth, H., *Statistische Eigenschaften drallbehafteter Rohrströmungen*, ZAMM, Band **62**, (1982).

[15] Lumley, J. L., *Stochastic Tools in Turbulence*, Academic Press, New York, London, (1970).

STATISTISCHE MOMENTE HÖHERER ORDNUNG UND WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG DER GESCHWINDIGKEITSSCHWANKUNGEN IN TURBULENTER DRALLBEHAFTETER STRÖMUNG

Zusammenfassung

Es wurden die statistischen Grössen in der turbulenten drallbehafteten Rohrströmung untersucht. Der starke Dralleinfluss auf statistische Eigenschaften und einige Besonderheiten drallbehafteter Strömungen konnten festgestellt und geklärt werden. Es zeigt sich, dass die starke Kopplung des zeitlich gemittelten Stromfeldes mit den Momenten und das Vorhandensein der wirbelbehafteten Trenschicht ein sehr inhomogenes anisotropes Turbulenzfeld bewirken. Durchgeführte Untersuchungen ermöglichen es, turbulente Transportprozesse und die Turbulenzstruktur drallbehafteter Strömung näher zu erklären.

Dr. Svetislav Čantrak
Mašinski fakultet
27 marta 80, Beograd

Зборник радова Математичкоі института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O KOMUTATIVNOSTI OPERATORA VARIRANJA I DIFERENCIRANJA U MEHANICI NEHOLONOMNIH SISTEMA

Vukman Čović

Cilj ovoga rada je da se pokaže da u slučaju izohronih varijacija, primenjujući pravila varijacionog računa, postoji jedinstven pristup u formiranju integralnog principa za neholonomne mehaničke sisteme. Opovrgava se teza data u [3], [4], [5] i dr., po kojoj postoje dva ravnopravna pravila variranja: jedno koje zastupa Suslov a drugo koje zastupa Helder (videti, na primer, [3] i [4]).

1. Prema shvatanju G. K. Suslova [1] Hamiltonov princip

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0, \tag{1}$$

nije primenljiv u slučaju mehaničkih sistema podvrgnutih neholonomnim vezama oblika*

$$\dot{q}^{\nu} = b_{\alpha}^{\nu} \dot{q}^{\alpha}; \quad b_{\alpha}^{\nu} = b_{\alpha}^{\nu}(q^1, \ldots, q^n). \tag{2}$$

Uzimajući, prema [1], da je

$$\delta \dot{q}^{\nu} = \delta (b_{\alpha}^{\nu} \dot{q}^{\alpha}), \tag{3}$$

zaista se pokazuje da je (1) u razmatranom slučaju neprimenljivo. Naime (zadržimo se radi jednostavnosti na Čapljiginovim sistemima), pošto je

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \delta \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}} \delta (b_{\alpha}^{\nu} \dot{q}^{\alpha}) \right] dt,$$

---

* Indeksi i, j, k, s uzimaju vrednosti od 1 do n;

$$\alpha, \beta: 1 \div m; \quad \nu, \rho, \theta: m+1, \ldots, m+l = n.$$

i pošto je

$$\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}}b_{\alpha}^{\nu}=\frac{\partial L^*}{\partial q^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}}\left(\frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\beta}}\right)\dot{q}^{\beta},$$

gde je

$$L^*=L\,(\dot{q}^{\nu}=b_{\alpha}^{\nu}\dot{q}^{\alpha}),$$

sledi da je

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L^*}{\partial q^{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right)\delta q^{\alpha}\,dt, \tag{4}$$

što bi pod pretpostavkom da važi (1) dovelo do pogrešnih diferencijalnih jednačina kretanja razmatranog neholonomnog mehaničkog sistema.

Suslov je smatrao da je u slučaju neholonomnih mehaničkih sistema potrebno transformisati Lagranž-Dalamberov princip u integralni princip iz koga će slediti diferencijalne jednačine kretanja.

Pri tome Suslov je uzeo da važi

$$\frac{d}{dt}\delta q^{\alpha}-\delta\dot{q}^{\alpha}=0, \tag{5}$$

i koristeći relacije

$$\dot{q}^{\nu}=b_{\alpha}^{\nu}\dot{q}^{\alpha},\qquad \delta q^{\nu}=b_{\alpha}^{\nu}\,\delta q^{\alpha}, \tag{6}$$

uzeo da je

$$\frac{d}{dt}(\delta q^{\nu})-\delta\dot{q}^{\nu}=\frac{d}{dt}(b_{\alpha}^{\nu}\,\delta q^{\alpha})-\delta\,(b_{\alpha}^{\nu}\dot{q}^{\alpha}), \tag{7}$$

što je dovelo do traženog integralnog principa u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}}\left(\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\beta}}+\frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{\rho}}b_{\beta}^{\rho}-\frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial b_{\beta}^{\nu}}{\partial q^{\rho}}b_{\alpha}^{\rho}\right)\dot{q}^{\beta}\,\delta q^{\alpha}\right]dt=0, \tag{8}$$

iz koga slede tačne jednačine kretanja razmatranog mehaničkog sistema.

U ovom slučaju lako je pokazati, ako je, prema Suslovu,

$$\delta\dot{q}^{\nu}=\delta\,(b_{\alpha}^{\nu}\dot{q}^{\alpha}), \tag{9}$$

da sledi relacija

$$\delta L=\delta L^*,$$

što ga je navelo, uzimajući u obzir (4) da formuliše novi integralni princip (8).

2. Helder je u svom radu [2] opovrgao gledište koje je izneo Herc u [6], po kome je Hamiltonov princip neprimenljiv u slučaju neholonomnih mehaničkih sistema.

Naime, Helder je smatrao, potpuno ispravno, da je Hamiltonov princip, uzimajući u obzir da je izveden iz Lagranž—Dalamberovog principa, primenljiv* i u slučaju neholonomnih sistema pošto je i ovaj drugi primenljiv u tom slučaju.

Prema Helderu greška u [6] proističe iz činjenice da se tamo smatra da i na variranoj putanji veze zadovoljavaju isti uslov kao i na stvarnoj, tj. smatra se da važi

$$\delta \dot{q}^{\nu} = \delta \left(b_{\alpha}^{\nu} \dot{q}^{\alpha} \right),$$

što predstavlja uslov (9) primenjen u Suslovljevom radu [1].

Helder uopšte ne dovodi u sumnju relaciju

$$\frac{d}{dt} \delta q^{k} - \delta \dot{q}^{k} = 0,$$

za sve koordinate. On napominje poznatu činjenicu da zahtev (9) nametnut variranoj putanji dovodi do varijacionog zadatka

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[L + \lambda_{\rho} \left(\dot{q}^{\rho} - b_{\alpha}^{\rho} \dot{q}^{\alpha} \right) \right] dt = 0, \tag{11}$$

a veze između varijacija, koje su u skladu sa mehaničkim principima, i koje su date u obliku

$$\delta q^{\nu} = b_{\alpha}^{\nu} \delta q^{\alpha}, \tag{12}$$

dovode do varijacionog zadatka

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta L + \theta_{\rho} \left(\delta q^{\rho} - b_{\alpha}^{\rho} \delta q^{\alpha} \right) \right] dt = 0. \tag{13}$$

Razlika između (11) i (13) je očigledna. Zadatak (11) predstavlja takozvani vezani varijacioni problem i izražava uslov stacionarnosti razmatranog funkcionala. Zadatak (13) ne izražava uslov stacionarnosti funkcionala i po tome se bitno razlikuje Hamiltonov princip za neholonomne mehaničke sisteme od toga principa za holonomne sisteme. Očigledno, u slučaju neholonomnih sistema Hamiltonov princip gubi svoje osnovno svojstvo.

3. Suslov je u [1] koristio istovremeno relacije (9) i (12) i formirao integralni princip (8) iz koga slede tačne diferencijalne jednačine kretanja. Pokažimo prvo da (9) i (12) predstavljaju različite tipove varijacija i da se ne mogu istovremeno koristiti a zatim, kako je u [1] dobijen tačan rezultat.

Uzimajući da važi (9), tj. da je

$$\delta \dot{q}^{\nu} = \frac{\partial b_{\alpha}^{\nu}}{\partial q^{k}} \dot{q}^{\alpha} \delta q^{k} + b_{\alpha}^{\nu} \delta \dot{q}^{\alpha},$$

* U slučaju neholonomnih sistema Hamiltonov princip nema osobine koje ga bitno razlikuju od transformisanog Lagranž-Dalamberovog principa (videti [8]).

i uzimajući da su operatori variranja i diferenciranja, u skladu sa varijacionim računom, uvek komutativni (varijacije su izohrone), dobijamo da je

$$\frac{d}{dt}\delta q^{\nu}-\left(\frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\rho}}\right)_{(t)}\delta q^{\rho}=\left[\left(\frac{\partial b^{\nu}_{\beta}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}}-\frac{\partial b^{\nu}_{\alpha}}{\partial q^{\rho}}b^{\rho}_{\beta}\right)\dot{q}^{\beta}\right]_{(t)}\delta q^{\alpha}+\frac{d}{dt}(b^{\nu}_{\alpha(t)}\,\delta q^{\alpha}), \tag{14}$$

odakle, primenjujući uslov $\delta q^{k}_{(t_0)}=0$, dobijamo

$$\delta q^{\nu}=\Phi^{\nu}_{\theta}\int_{t_0}^{t}\psi^{\theta}_{\rho}\,\gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\,\dot{q}^{\beta}\,\delta q^{\alpha}\,dt+b^{\nu}_{\alpha}\,\delta q^{\alpha}, \tag{15}$$

pri čemu je

Φ^{ν}_{θ} — fundamentalna matrica homogenog dela sistema diferencijalnih jednačina (14),

$$\Phi^{\nu}_{\theta}\,\psi^{\theta}_{\rho}=\delta^{\nu}_{\rho},$$

$$\gamma^{\rho}_{\alpha\beta}=-\gamma^{\rho}_{\beta\alpha}=\frac{\partial b^{\rho}_{\alpha}}{\partial q^{\alpha}}+\frac{\partial b^{\rho}_{\beta}}{\partial q^{\nu}}b^{\nu}_{\alpha}-\frac{\partial b^{\rho}_{\alpha}}{\partial q^{\nu}}b^{\nu}_{\beta}.$$

Sada je očigledna razlika između varijacija određenih relacijama (9) i (12).

Ako uzmemo u obzir činjenicu da su neholonomne veze neintegrabilne, varijacije (9) tj. (15) svode se na varijacije (12) ako je ispunjen uslov

$$\gamma^{\rho}_{\beta\alpha}\,\dot{q}^{\beta}\delta q^{\alpha}=0, \tag{16}$$

koji povećava broj zavisnih varijacija a to nije u skladu sa proizvoljnošću δq_{α}. Izraz (16) može da bude ispunjen i u jednom specijalnom slučaju. Uzmimo, naime, da je

$$\delta q^{\alpha}=\lambda\,dq^{\alpha},$$

odakle je, s obzirom na antisimetriju sistema $\gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$ po donjim indeksima,

$$\lambda\,\gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\,dq^{\alpha}\,dq^{\beta}=0. \tag{17}$$

Ovaj poslednji slučaj predstavlja variranje trajektorije u sebe samu i on je pomenut u [2] u slučaju jedne neholonomne veze.

U svim ostalim slučajevima varijacije (9) i (12) se ne poklapaju.

Ostaje da se pokaže zašto je Suslovljeva relacija (8) uprkos činjenici da se koriste istovremeno izrazi (9) i (12) — tačna.

Pođimo od izraza*

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=0, \tag{18}$$

pri čemu ćemo uzeti da su operatori variranja i diferenciranja komutativni. Pošto korišćenje mehaničkih principa zahteva da, s obzirom na (2), važi relacija (12), tada će biti

$$\delta\dot{q}^{\nu}=\frac{d}{dt}\delta q^{\nu}=\frac{d}{dt}(b^{\nu}_{\alpha}\,\delta q^{\alpha}). \tag{19}$$

* za koji se u [1] pokazuje da ne važi u slučaju neholonomnih mehaničkih sistema.

Sada (18) dobija oblik

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\delta \dot q^\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu}\frac{d}{dt}(b^\nu_\alpha\,\delta q^\alpha)\right]dt=0,$$

pa, uzimajući u obzir da je

$$\frac{\partial L}{\partial q^k}=\frac{\partial L^*}{\partial q^\nu}-\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu}\frac{\partial b^\nu_\beta}{\partial q^k}\dot q_\beta,$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}=\frac{\partial L^*}{\partial \dot q^\alpha}-\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu}b^\nu_\alpha,$$

konačno dobijamo

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L^*+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\nu}\gamma^\nu_{\alpha\beta}\,\dot q^\beta\,\delta q^\alpha\right]dt=0, \tag{20}$$

što prema (10) predstavlja Suslovljev rezultat (8).

Uzimajući u obzir da se Lagranž-Dalamberov princip (na primer za slučaj konzervativnih sistema)

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}-\frac{\partial L}{\partial q^k}\right)\delta q^k=0,$$

može dovesti na oblik

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k+\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\delta\dot q^k+\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\frac{d}{dt}(\delta q^k)-\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\delta\dot q^k\right]dt=0, \tag{21}$$

pri čemu su iskorišćeni uslovi

$$\delta q^k_{(t_0)}=\delta q^k_{(t_1)}=0,$$

jasno je da bilo kakva pretpostavka o vrednosti $\delta\dot q^k$ ne može da utiče na konačni rezultat pri transformaciji (21). Time je i objašnjeno kako se u [1], korišćenjem (9) umesto (19), dobio tačan rezultat.

4. Razmotrimo transformisani izraz Lagranž-Dalamberovog principa u obliku (slučaj nekonzervativnih sistema)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\delta q^k\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k+\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\delta\dot q^k\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\left(\frac{d}{dt}\delta q^k-\delta\dot q^k\right)-Q_k\,\delta q^k=0. \tag{22}$$

Pretpostavimo da su varijacije δq^k nezavisne (holonoman sistem) i uvedimo u skladu sa poslednjom primedbom u tački 3., da je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}\left(\frac{d}{dt}\delta q^k-\delta\dot q^k\right)=f_k(q^i,\dot q^i)\,\delta q^k. \tag{23}$$

Integracijom (22), uz uslove

$$\delta q^k_{(t_0)} = \delta q^k_{(t_1)} = 0,$$

dobijamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \left(\frac{d}{dt} \delta q^k - \delta \dot{q}^k \right) + Q_k \delta q^k \right] dt = 0,$$

odakle, korišćenjem (23), nalazimo da je

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k + (f_k + Q_k) \delta q^k \right] dt = 0, \tag{24}$$

i ponovnim korišćenjem (23) dobijamo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \delta q^k - f_k \delta q^k,$$

što, zajedno sa (24), dovodi do

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \delta q^k + Q_k \delta q^k \right] dt = 0,$$

ili

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + Q_k \right) \delta q^k \, dt = 0, \tag{25}$$

tj. do principa Hamiltona-Ostrogradskog.

Da proizvoljnost funkcije

$$f_k = f_k(q^i, \dot{q}^i),$$

koja figuriše u (23) ne utiče na konačan rezultat primećeno je i u [7] gde je uzeto da je

$$f_k = -Q_k,$$

što je u slučaju nekonzervativnog mehaničkog sistema dovelo do principa

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \, dt = 0.$$

Očigledno je da izmena pravila varijacionog računa može da dovede do formiranja proizvoljnog broja »nekomutativnih« varijacionih principa. Međutim, tada bi bilo svrsishodno prethodno objasniti šta se podrazumeva pod pojmom varijacije funkcije.

5. Kao zaključak primetimo sledeće. Postoji samo jedno pravilo variranja kada su u pitanju izohrone varijacije: operatori variranja i diferenciranja komutativni su. Dva načina variranja koje i do današnjih dana literatura obrazlaže (videti, na primer, [3], [4] i [5]) i ravnopravno ih tretira, posledica su nepreciznosti koju je još Helder uočio a koja je u ovom radu analizirana na primeru rezultata rada [1]. Još manje je opravdano da se uvode i nova pravila variranja a da se pri tome ne izmeni definicija varijacije funkcije.

Literatura

[1] Суслов Г. К., *Об одном видоизменении начала Даламбера*, Математ. сб. т. 22, вып. 4, 1901.

[2] Гёлдер О., *О принципах Гамильтона и Мопертюи*, *Вариационные принципы механики*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1959.

[3] Неймарк Ю И. и Фуфаев Н. А., *Динамика неголономных систем*, „Наука", Москва, 1967.

[4] Румянцев В. В., *О принципе Гамильтона для неголономных систем*, ПММ, т. 42, 1978.

[5] Петкевич В. В., *Теоретическая механика*, „Наука", Москва, 1981.

[6] Hertz H. R., *Gesammelte Werke*, t. 3, Leipzig, 1910.

[7] Vujanović B., *O jednom varijacionom principu mehanike*, XII Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Ohrid, 1974., Zbornik radova, sekcija A1.

[8] Čović V. i Lukačević M., *Prilog analitičkoj mehanici neholonomnih sistema* (rad primljen za štampu u Glasu SANU).

SUR LA COMMUTATIVITÉ DES OPÉRATEURS DE VARIATION ET DE DIFFÉRENTIATION DANS LA MÉCANIQUE DES SYSTÈMES NON HOLONOMES

Résumé

Il est démontré qu'on ne peut, lors de l'établissement des principes intégraux dans la mécanique des systèmes non holonomes, appliquer les règles non commutatives de variation et de différentiation. Deux modes différents de variations, qu'on peut trouver dans la litérature ([3], [4], [5] et a.) résultent de inprécision remarquée déjà dans [1].

On montre également que l'introduction de nouveaux principes »non commutatifs« de la mécanique n'est pas justifiée.

Vukman Čović
Mašinski fakultet
11000 Beograd

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

ТЕОРИЈА ВЕКТОРА

ТРЕЋЕ ПРОМЕЊЕНО ИЗДАЊЕ

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ
„ГРАЂЕВИНСКА КЊИГА"
БЕОГРАД, 1959

Први универзитетски уџбеник **Теорија вектора** професора Т. П. Анђелића добио је награду Универзитета у Београду

Зборник радова Математичкоi института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4, (12), 1984.

NEKA TAČNA REŠENJA JEDNAČINE KORTEWEG-DE VRIES-A SA PROMENLJIVIM KOEFICIJENTIMA

Vladan D. Đorđević

Pri proučavanju raznih problema nelinearne teorije talasa, osnovne jednačine ove teorije, kao što su jednačina Korteweg-de Vries-a, nelinearna Schrodinger-ova jednačina i dr. se javljaju ne samo u svome klasičnom obliku, nego i u raznim modifikovanim oblicima. Jedan od najkarakterističnijih modifikovanih oblika je oblik u kome ove jednačine sadrže promenljive koeficijente koji zavise od prostorne koordinate. Ovaj oblik se javlja uvek onda kada je u pravcu prostiranja talasa prisutna neka vrsta nehomogenosti. Izvor nehomogenosti kod talasa na slobodnoj površini neke tečnosti je obično promenljiva dubina tečnosti, kod magneto-akustičkih talasa u plazmi, to je promenljiva gustina plazme, kod »lattice« talasa — promenljiva masa itd. Opštu teoriju ovih jednačina su na primeru jednačine Korteweg-de Vries-a dali Ono [1] i Johnson [2]. Oni su pokazali da shodno toj jednačini (a) jedan solitarni talas zadržava svoju strukturu krećući se preko neravnog dna, u tome smislu što odnosi između amplitude, dužine i brzine talasa ostaju nepromenjeni, pri čemu je amplituda obrnuto proporcionalna dubini tečnosti i (b) jedan solitarni talas može pod određenim uslovima, krećući se iz oblasti veće dubine u oblast manje dubine, da se disintegriše u tačno određeni broj novih solitona — fenomen koji se u literaturi obično naziva fisijom solitona.

U ovome radu nama je pošlo za rukom da pronađemo neka nova rešenja ove jednačine i to:

1. jedno rešenje u vidu razdvojenih promenljivih tipa sličnih rešenja klasične jednačine Korteweg-de Vries-a,

2. jedno rešenje u vidu solitarnog talasa koji se kreće po vremenski promenljivoj slobodnoj površini tečnosti i

3. jedno rešenje u vidu solitarnog talasa konstantne dužine.

Svako od ovih rešenja će sada biti posebno prezentirano. Tom prilikom će se koristiti oblik jednačine Korteweg-de Vries-a izveden od strane Kakutani-ja [3]

$$\frac{d'}{2\,d}u+2u_x+\frac{3}{d^{3/2}}uu_t+\frac{d^{1/2}}{3}u_{ttt}=0. \tag{1}$$

U ovoj jednačini $u(t, x)$ opisuje slobodnu površinu tečnosti, x je Dekartova koordinata uperena u pravcu prostiranja talasa, t je Galilejeva koordinata koja se kreće u pravcu kretanja talasa brzinom rasprostiranja linearnih dugih gravitacionih talasa, tako da $t \to \infty$ označava položaj fronta talasa, pri čemu je proizvoljno izabrano da je u početnom trenutku vremena, $t=0$ u $x=0$, a $d(x)$ predstavlja promenljivu dubinu tečnosti. Indeksi označavaju odgovarajuće parcijalne izvode, a $'$ označava običan izvod.

1. Prostom zamenom u jednačini (1) se može pokazati da ona dozvoljava sledeće rešenje u vidu razdvojenih promenljivih

$$u=d^2(x)f(t), \tag{2}$$

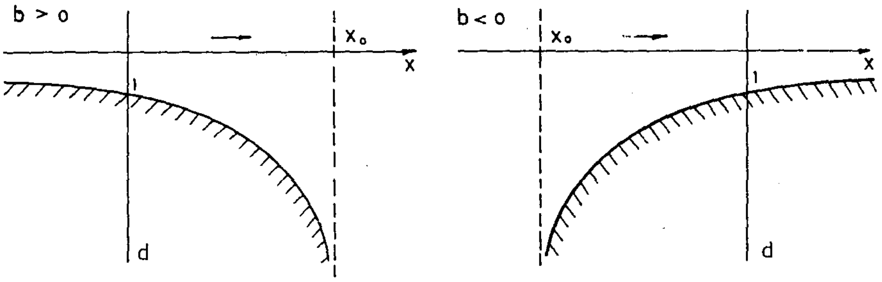
pri čemu $f(t)$ zadovoljava običnu diferencijalnu jednačinu

$$f'''+9ff'+bf=0, \tag{3}$$

gde je b proizvoljna konstanta, pod uslovom da je

$$d^{-1/2}=1-\frac{x}{x_0}, \quad x_0=\frac{27}{b}.$$

Tom prilikom je proizvoljno izabrano da bude: $d(0)=1$. Na Sl. 1 su prikazani oblici dna kanala za $b>0$ i $b<0$ za koje rešenje (2) egzistira. S obzirom da za $x \to x_0$ dubina postaje neograničena, ovo rešenje neće u toj oblasti važiti jer u toj oblasti nije ispunjen uslov $d'=0$ (1), pri kome je izvedena jednačina (1).



Sl. 1

Jednačina (3) je autonomna i zato joj se može sniziti red. Tom prilikom se pokazuje da dobijena jednačina drugog reda ne pripada ni jednom od 50 tipova analiziranih od strane Ince-a [4], što znači da poseduje pokretne singularitete koji nisu polovi. U opštem slučaju rešenje jedne ovakve jednačine se, razumljivo, ne može upotrebiti da opiše slobodnu površinu tečnosti. Zato ćemo, slično kao što se to čini u kontekstu određivanja sličnih rešenja klasične jednačine Korteweg-de Vries-a (v. Rosales [5]), da potražimo ono rešenje jednačine (3) koje daje front talasa koji opada eksponencijalno. Ako postoji ovakav front, on se tada opisuje približnom linearnom jednačinom:

$$f'''+bf=0.$$

Željeno rešenje ove jednačine glasi

$$f=ae^{-b^{1/3}t} \quad \text{za} \quad b>0 \quad \text{i}$$

$$f=e^{-\frac{(-b)^{1/3}}{2}t}\left[C_1 \sin\frac{3^{1/2}}{2}(-b)^{1/3}t+C_2 \cos\frac{3^{1/2}}{2}(-b)^{1/3}t\right]$$

za $b<0$, gde su a, C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Prema tome, u slučaju $b<0$ front talasa je periodičan! Ovaj slučaj zaslužuje pažnju, ali ovde neće biti tretiran detaljno. Jednačinu (3) ćemo dalje analizirati samo za $b>0$ koristeći asimptotsko ponašanje funkcije f za $t\to\infty$ kao granični uslov, tj.

$$\text{za } t\to\infty: \quad f\sim ae^{-b^{1/3}t}. \tag{4}$$

Konstanta a se u kontekstu pomenutih sličnih rešenja klasične jednačine Korteweg-de Vires-a naziva amplitudnim parametrom. Pogodnom transformacijom promenljivih se jednačina (3) i granični uslov (4) mogu osloboditi konstante b, a delimično i amplitudnog parametra a, što olakšava buduću numeričku integraciju jednačine. Naime, uvođenjem

$$t_b=b^{1/3}t-\ln b^{-2/3}|a| \quad \text{i} \quad F(t_b)=b^{-2/3}f(t),$$

se dobija

$$F'''+9FF'+F=0,$$

$$t_b\to\infty: \quad F\sim\pm e^{-t_b}, \quad a\gtrless 0.$$

Rezultati numeričke integracije ove jednačine su prikazani na Sl. 2. Primećuje se da je za pozitivne vrednosti amplitudnog parametra funkcija F blago periodična, pri čemu se oscilacije događaju oko neke prave linije, dok je za negativne vrednosti amplitudnog parametra rešenje neperiodično i veoma brzo opada.

2. Hirota-i [6] je pošlo za rukom da pronađe takvu transformaciju koordinata kojom se jednačina koja opisuje tzv. »cilindrične solitone« svodi na klasičnu jednačinu Korteweg-de Vries-a i time stvori mogućnost korišćenja svih poznatih rešenja klasične jednačine Korteweg-de Vries-a pri proučavanju »cilindričnih solitona«. Podstaknuti ovim radom, nama je pošlo za rukom da postignemo isti rezultat kada je u pitanju jednačina Korteweg-de Vries-a sa promenljivim koeficijentima (1). Odgovarajuća transformacija koordinata glasi:

$$\tau=d^{-9/4}t, \quad \xi=\int_0^x d^{-25/4}dx$$

$$u=\frac{3}{2}d^{1/2}d'\,t+d^{-5/2}\vartheta(\tau,\xi).$$

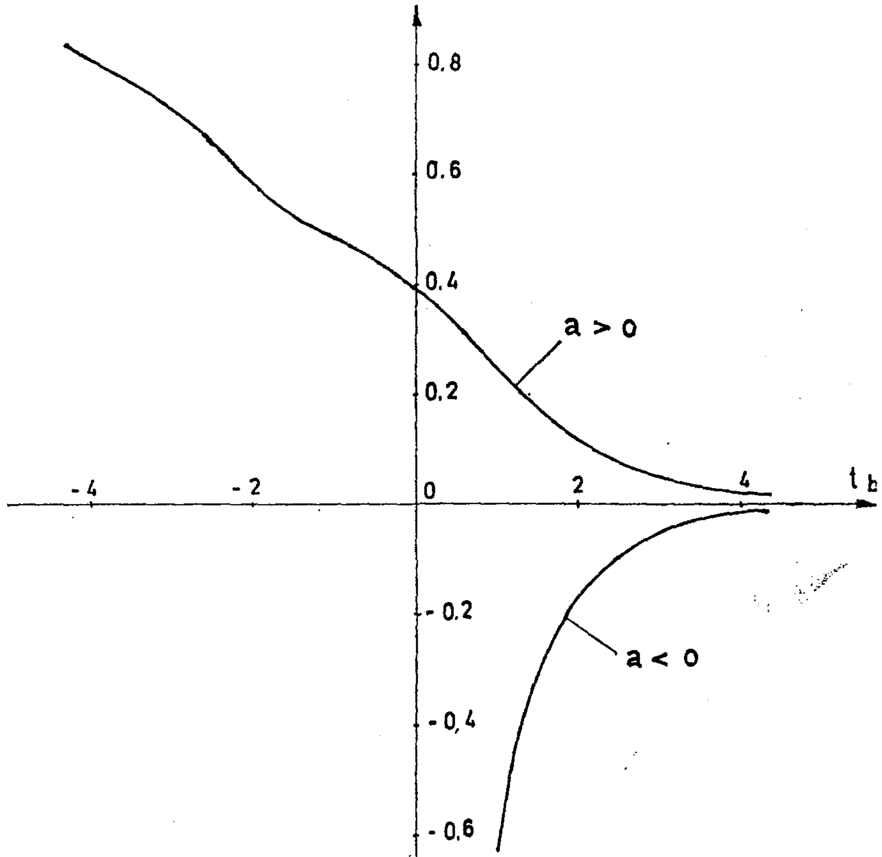
Prostom zamenom u jednačini (1) se može pokazati da funkcija $\vartheta(\tau,\xi)$ zadovoljava klasičnu jednačinu Korteweg-de Vries-a:

$$2\vartheta_\xi+3\vartheta\vartheta_\tau+\frac{1}{3}\vartheta_{\tau\tau\tau}=0, \tag{5}$$

pod uslovom da je:

$$dd''/d'^2 = -3, \text{ tj. } d = \left|1 - \frac{x}{x_0}\right|^{1/4}, \tag{6}$$

pri čemu je proizvoljno izabrano da bude: $d(0) = 1$ i $d(x_0) = 0$. Sva poznata rešenja jednačine (5) se sada mogu koristiti da se u slučaju promenljivog dna određenog



Sl. 2.

pomoću (6) konstruišu odgovarajuća rešenja jednačine (1). Između ostalih, rešenje jednog solitarnog talasa:

$$\vartheta = \alpha_0 \operatorname{sech}^2 \beta_0 (\tau - \gamma_0 \xi); \ \beta_0 = (3\alpha_0)^{1/2}/2, \ \gamma_0 = \alpha_0/2, \ \alpha_0 > 0$$

daje:

$$u = -3t/(8x_0 d^{5/2}) + \frac{\alpha_0}{d^{5/2}} \operatorname{sech}^2 \beta_0 \theta,$$

gde je

$$\theta = d^{-9/4}\left[t - \frac{16\,x_0\gamma_0}{9}(1 - d^{9/4})\right].$$

Ovo tačno rešenje jednačine (1) reprezentuje solitarni talas koji se kreće po vremenski promenljivoj slobodnoj površini tečnosti određenoj sa: $-3\,t/(8x_0\,d^{5/2})$. Mora se međutim priznati da je ovo rešenje, kada su u pitanju talasi na slobodnoj površini neke tečnosti, prilično veštačko i teško je zamisliti da može da ima neki praktični značaj. Nije međutim isključeno da odgovarajuće rešenje jednačina sa promenljivim koeficijentima koje opisuju magneto-akustičke talase u plazmi ili »lattice« talase može biti od značaja, pa ga zato ovde i navodimo.

3. Jedna druga jednačina Kortweg-de Vries-a sa promenljivim koeficijentima je takođe poznata u literaturi (v. Miles [7] i Đorđević [8])

$$\left(\frac{b'}{b} + \frac{d'}{2\,d}\right)u + 2\,u_x + \frac{3}{d^{3/2}}\,uu_t + \frac{d^{1/2}}{3}\,u_{ttt} = 0. \tag{7}$$

Njome se opisuje pasprostiranje dugih gravitacionih talasa male ali konačne amplitude u kanalu promenljive dubine $d(x)$ i promenljive širine $b\,(x)$. Na isti način kao što je to učinjeno kada je bila u pitanju jednačina (1) u okviru tačaka 1. i 2., mogu se i za jednačinu (7) konstruisati odgovarajuća rešenja. Međutim, ova jednačina dozvoljava i jedno drugo tačno rešenje koje može da bude od interesa, pa ćemo zato ovde njega da navedemo. Ono glasi

$$u = \alpha\,(x)\,\mathrm{sech}^2\,\beta_0\left[t - \int_0^x \gamma\,(x)\,dx\right], \tag{8}$$

gde su

$$\beta_0 = \mathrm{const.},\ \alpha = \frac{4\,\beta_0^2}{3}\,d^2\ \text{ i }\ \gamma = \frac{2\,\beta_0^2}{3}\,d^{1/2}. \tag{9}$$

pod uslovom da je: $bd^{9/2} = \mathrm{const.}$ Zapaža se da su veze (9) između veličina $\alpha\,(x), \beta_0$ i $\gamma\,(x)$, koje redom predstavljaju amplitudu, inverznu dužinu i brzinu talasa iste kao kod klasičnog solitona, pa se zato može reći da rešenje (8) predstavlja jedan solitarni talas konstantne dužine, a promenljive amplitude i brzine. Prema tome, jedan početni poremećaj oblika solitarnog talasa će u jednom kanalu promenljive dubine i širine, pri čemu su one povezane odnosom $bd^{9/2} = \mathrm{const.}$ da evoluira zadržavajući svoju prvobitnu strukturu, tj. kao solitarni talas. Vredno je pomena da solitarni talas (6) ne predstavlja tzv. »sporo promenljivi« solitarni talas (v. Miles [7])!

Literatura

[1] Ono H., *Wave propagation in an inhomogeneous anharmonic lattice*, J. Phys. Soc. Japan **32**, p. 332 (1972).

[2] Johnson R. S., *On the development of a solutary wawe moving over an uneven bottom*, Proc. Camb. Phil. Soc. 73, p. 183 (1973).

[3] Kakutani T., *Effect of an uneven bottom on gravity waves*, J. Phys. Soc. Japan **30**, p. 282 (1971).

[4] Ince E. L., *Ordinary differential equations*, Dover Publications, Inc. (1956).

[5] Rosales R. R., *The similarity solution for the Korteweg-de Vries equation and the related Painlevé transcendent*, Proc. Roy. Soc. London A **361**, p. 265 (1978).

[6] Hirota R., *Exact solutions to the equation describing „cylidrical solitons"*, Phys. Lett, **71** A, p. 393 (1979).

[7] Miles J. W., *On the Korteweg-de Vries equation for a gradually varying channel*, J. Fluid Mech. **91**, p 181 (1979).

[8] Đorđević V. D., *The fission of solitons in a channel of varying width*, Mech. Research Comm. **6** (6), p. 343 (1979).

SOME EXACT SOLUTIONS OF THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Summary

A solution in the form of separated variables of the type of similarity solutions of the classical Korteweg-de Vries equation, a solution in the form of a solitary wave moving in a time-dependent and nonuniform background and a solution in the form of a solitary wave of constant length for the Korteweg-de Vires equation with variable coefficients are found to exist by means of suitable transformations of variables and are discussed in the paper.

Vladan D. Đorđević
Mašinski fakultet
ul. 27 marta 80
11000 Beograd

Зборник радова Математичкоi инсититута, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Racueil des travaux de l'Institut Mathémtique, Nouuelle série, tome 4 (12), 1984.

PRILOG TEORIJI PRVIH INTEGRALA NEHOLONOMNIH MEHANIČKIH SISTEMA

Đ. S. Đukić

1. Uvod

Zakoni održanja igraju važnu ulogu u analitičkoj mehanici. U holonomnoj mehanici oni su izučavani (na primer vidi [2]—[8]) vrlo detaljno. U neholonomnoj mehanici to nije slučaj.

U neholonomnoj mehanici, najčešće su izučavani potrebni i dovoljni uslovi za postojanje linearnih i kvadratnih prvih integrala, kao i veza između prvih integrala neholonomnih sistema i prvih integrala istog mehaničkog sistema oslobođenog veza (vidi [9], [10], [12]—[14]). U radovima [11] i [8] formulisana je teorema E. Neter za neholonomne sisteme. U oba rada, dobijena su različita ograničenja za infinitezimalne transformacije pri kojim postoje prvi integrali. To ograničava primenljivost dobijenih rezultata. Na primer, ograničenja iz rada [8] onemogućuju dobijanje cikličnih prvih integrala.

U ovom radu dati su potrebni uslovi za postojanje prvih integrala, vrlo opšte strukture, za neholonomne sisteme. Ova teorija prvih integrala je razvijena na ideji integracionih faktora diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnih mehaničkih sistema.

2. Opšti teorijski rezultati

U ovom radu, mali latinski indeksi uzimaju vrednosti od 1 do n, veliki grčki indeksi od 1 do m a mali grčki indeksi od $m+1$ do n. Takođe se primenjuje uobičajeno pravilo sabiranja po ponovljenom indeksu. Neka je položaj jednog holonomnog mehaničkog sistema sa n stepeni slobode kretanja određen generalisanim koordinatama q^i. Karakteristike ovog sistema, Lagranževa funkcija L i nekonzervativne generalisane sile Qi, zavise od vremena t, generalisanih koordinata q^i i generalisanih brzina $\dot{q}^i = dq^i/dt$. Ako je ovaj mehanički sistem primoran da se kreće u saglasnošću sa m neholonomnih veza

$$\dot{q}^\Delta = b^\Delta_\alpha (q^i, t)\, \dot{q}^\alpha + b^\Delta (q^i, t), \tag{1}$$

gde su b_α^Δ i b^Δ proizvoljne diferencijabilne funkcije generalisanih koordinata i vremena, tada taj, sada neholonoman sistem, ima $n—m$ stepeni slobode kretanja. Pretpostavimo da su veze (1) neintegrabilne (vidi [1] str. 23). To znači da su veličine

$$A_{\alpha\rho}^\Delta = \frac{\partial b_\alpha^\Delta}{\partial q^\rho} - \frac{\partial b_\rho^\Delta}{\partial q^\alpha} + b_\rho^\Gamma \frac{\partial b_\alpha^\Delta}{\partial q^\Gamma} - b_\alpha^\Gamma \frac{\partial b_\rho^\Delta}{\partial q^\Gamma}, \tag{2 a}$$

$$A_\alpha^\Delta = \frac{\partial b_\alpha^\Delta}{\partial t} - \frac{\partial b^\Delta}{\partial q^\alpha} + b^\Gamma \frac{\partial b_\alpha^\Delta}{\partial q^\Gamma} - b_\alpha^\Gamma \frac{\partial b^\Delta}{\partial q^\Gamma}, \tag{2 b}$$

u opštem slučaju, različite od nule.

Eliminacijom, pomoću jednačina veza (1), zavisnih generalisanih brzina $\dot{q}^\Delta$ iz Lagranževe funkcije $\mathscr{L}$ dobijamo funkciju α, tj.

$$\mathscr{L}(q^i, \dot{q}^\alpha, t) = L(q^i, \dot{q}^\alpha, \dot{q}^\Delta(q^i, \dot{q}^\alpha, t), t). \tag{3}$$

Diferencijalne jednačine kretanja ovog neholonomnog sistema možemo dati u obliku Hamiltonovih kanonskih jednačina (vidi [1] str. 24)

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p^\alpha}, \tag{4 a}$$

$$\dot{p}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} - b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial q^\Delta} + \overset{*}{Q}_\alpha, \tag{4 b}$$

gde su generalisani impulsi p_α i Hamiltonova funkcija H definisani sa

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}, \qquad H(q^i, p_\alpha, t) = p_\alpha \dot{q}^\alpha - \mathscr{L}(q^i, \dot{q}^\alpha, t). \tag{5}$$

Ovde su

$$\overset{*}{Q}_\alpha = \tilde{\theta}_\Delta \left(A_\alpha^\Delta + \frac{\partial H}{\partial p_\rho} A_{\alpha\rho}^\Delta \right) + \tilde{Q}_\alpha + \tilde{Q}_\Delta b_\alpha^\Delta, \quad \theta_\Delta = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}^\Delta}, \tag{6}$$

dok talasasta linija ($\sim$) iznad neke veličine znači da su u toj veličini eliminisane, pomoću veza (1), zavisne generalisane brzine, a zatim nezavisne generalisane brzine izražene pomoću nezavisnih generalisanih impulsa p_α. Naravno, diferencijalne jednačine (4) treba rešavati zajedno sa jednačinama neholonomnih veza (1), koje zbog korišćenja (5) postaju

$$\dot{q}_\Delta = b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + b^\Delta. \tag{7}$$

Jednačine (4) i (7) formiraju sistem od $2n—m$ diferencijalnih jednačina prvog reda po $2n—m$ nepoznatih funkcija q^i i p_α. Pretpostavimo da egzistira jedan skup funkcija G^α, koje zavise od vremena, generalisanih koordinata q^i i nezavisnih generalisanih impulsa p_α, koji je takav da se sledeća invarijanta

$$\left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial q^\Delta} - \overset{*}{Q}_\alpha \right) G^\alpha, \tag{8}$$

identički svodi na totalni izvod po vremenu, tj.

$$\left(\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial q^\Delta} - \overset{*}{Q}_\alpha\right) G^\alpha \equiv \frac{d}{dt}(p_\alpha G^\alpha - HR - \Lambda), \tag{9}$$

gde su R i Λ proizvoljne funkcije vremena, generalisanih koordinata q^i i nezavisnih generalisanih impulsa p_α. Ako je ispunjen uslov (9), funkcije G^α zvaćemo integracionim faktorima jednačina kretanja (4*b*).

Kombinovanjem (4*b*) i (9) dobijamo

$$\frac{d}{dt}(p_\alpha G^\alpha - HR - \Lambda) = 0, \tag{10}$$

i sledeću teoremu:

Teorema I: Ako su funkcije G^α integracioni faktori jednačina (4 *b*) tada je veličina

$$D = p_\alpha G^\alpha - HR - \Lambda, \tag{11}$$

konstanta (prvi integral) duž trajektorije neholonomnog mehaničkog sistema, čije su jednačine kretanja (4) i (7). Potreban uslov (9), koji mora biti zadovoljen za svaki skup funkcija G^α, R i Λ ako su funkcije G^α integracioni faktori jednačina (4 *b*), posle korišćenja jednačina kretanja (4), može se napisati u obliku

$$\frac{\partial H}{\partial t} R + \frac{\partial H}{\partial q^\Delta} b^\Delta R + H\dot{R} + \left(\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q^\Delta} b_\alpha^\Delta\right) G^\alpha - p_\alpha \dot{G}^\alpha + \dot{\Lambda} -$$
$$- \overset{*}{Q}_\alpha \left(G^\alpha - R \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right) = 0. \tag{12}$$

Napomena. — U slučaju holonomnog nekonzervativnog mehaničkog sistema, uvođenjem Lagranževih promenljivih umesto Hamiltonovih, ovaj potreban uslov se svodi na odgovarajuće potrebne uslove za postojanje prvih integrala iz radova [4] i [5]. Ti potrebni uslovi iz radova [4] i [5] su dobijeni preko D'Alembertovog principa i pomoću teorije E. Neter. U toj teoriji E. Neter, Λ je gradijentno promenljiva funkcija dok funkcije R i G^i definišu jedno-parametarske transformacije vremena i generalisanih koordinata

$$\bar{t} \approx t + \varepsilon R, \quad \bar{q}^i \approx q^i + \varepsilon G^i,$$

gde je ε parametar te transformacije.

Skup funkcija G^α, R i Λ zvaćemo singularnim skupom ako taj skup zadovoljava potreban uslov (12), ali, ako posle zamene tog skupa u desnu stranu jednačine (11), ova postaje proizvoljna konstanta.

Iz ovih razmatranja i Teoreme I možemo formulisati i sledeću teoremu:

Teorema II: Svakom nesingularnom skupu funkcija G^α, R, Λ odgovara jedan prvi integral (11) jednačina kretanja datog neholonomnog mehaničkog sistema.

Do nesingularnog skupa funkcija G^α, R, Λ moguće je doći integracijom jednačine (12), ili nekim ad hoc prilazom istom problemu. Ma koje rešenje jednačine (12), po G^α, R i Λ, zvaćemo funkcionalnim rešenjem ako ove funkcije G^α, R i Λ ne sadrže ni jednu integracionu konstantu. Kada jedno nesingularno funkcionalno rešenje jednačine (12) zamenimo u desnu stranu jednačine (11) tada dobijamo uobičajeni prvi integral jednačina kretanja, gde je jedina konstanta integracije konstanta D. Nedavno, Vujanović je uveo pojam kompletnog rešenja jednačine (12) za slučaj holonomnog mehaničkog sistema (vidi [2]). To kompletno rešenje sadrži dovoljan broj integracionih konstanti i omogućuje nalaženje konačnih jednačina kretanja holonomnog nekonzervativnog mehaničkog sistema.

Ako jednačinu (12) posmatramo kao diferencijalnu jednačinu onda ma koja funkcija skupa G^α, R, Λ ima ista svojstva. Naime, svaka funkcija tog skupa može biti nepoznata ili unapred zadata funkcija.

U jednačini (12) izvod neke veličine, koja zavisi od vremena t, generalisanih koordinata q^i i nezavisnih generalisanih impulsa p_α, po vremenu treba interpretirati kao

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(b_\alpha^\Delta \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+b^\Delta\right)\frac{\partial}{\partial q^\Delta}+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha}+\dot{p}_\alpha\frac{\partial}{\partial p_\alpha}. \tag{13}$$

U cilju nalaženja prvih integrala neholonomnih mehaničkih sistema jednačinu (12) možemo upotrebiti na dva načina. Prvo, možemo zahtevati da jednačina (12) bude zadovoljena za svako t, q^i, p_α i $\dot{p}_\alpha$. Tada, koristeći (6), (12) i (13), dobijamo jednu jednačinu linearnu po $\dot{p}_\alpha$. Kako funkcije G_α, R i Λ ne zavise od vremenskog izvoda $(\dot{p}_\alpha)$ generalisanih impulsa, ta se jednačina raspada na sistem linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\Gamma=0, \tag{14}$$

$$H\frac{\partial R}{\partial p_\beta}-p_\alpha\frac{\partial G^\alpha}{\partial p_\beta}+\frac{\partial \Lambda}{\partial p_\beta}=0, \tag{15}$$

gde je

$$\begin{aligned}\Gamma=&\frac{\partial H}{\partial t}R+\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}G^\alpha+\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}(b_\alpha^\Delta G^\alpha+b^\Delta R)+\frac{\partial \Lambda}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\alpha}+\\ &+\left(b_\alpha^\Delta\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+b^\Delta\right)\frac{\partial \Lambda}{\partial q^\Delta}+H\left[\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial R}{\partial q^\alpha}+\left(b_\alpha^\Delta\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+b^\Delta\right)\frac{\partial R}{\partial q^\Delta}\right]-\\ &-p_\alpha\left[\frac{\partial G^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_\beta}\frac{\partial G^\alpha}{\partial q^\beta}+\left(b_\beta^\Delta\frac{\partial H}{\partial p_\beta}+b^\Delta\right)\frac{\partial G^\alpha}{\partial q^\Delta}\right]-\\ &-\left[\theta^\Delta\left(A_\alpha^\Delta+\frac{\partial H}{\partial p_\rho}A_{\alpha\rho}^\Delta\right)+\tilde{Q}_\alpha+\tilde{Q}_\Delta b_\alpha^\Delta\right]\left(G^\alpha-R\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Ovde imamo $n-m+1$ jednačinu sa jednom više nepoznatom funkcijom (G^α, R, Λ). Očigledno, jednu funkciju skupa $G\alpha$, R, Λ moramo usvojiti da bi sve preostale funkcije tog skupa dobili rešavanjem sistema (14), (15). Najčešće se propisuje oblik funkcije Λ. Sistemi jednačina ovog tipa, nazivaju se (vidi [3]—[8]) generalisanim Kilingovim jednačinama.

Druga mogućnost za praktičnu upotrebu jednačine (12) je da zahtevamo njeno zadovoljenje duž trajektorije neholonomnog mehaničkog sistema. To znači da vremenski izvod $(\dot{p}_\alpha)$ nezavisnih generalisanih impulsa zavisi od vremena, generalisanih koordinata i generalisanih impulsa preko jednačina (4*b*). Sada, potrebni uslov (12), posle korišćenja (4*b*) i (13), postaje

$$\Gamma+\left(H\frac{\partial R}{\partial p_\beta}-p_\alpha\frac{\partial G^\alpha}{\partial p_\beta}+\frac{\partial\Lambda}{\partial p_\beta}\right)\left(\overset{*}{Q}_\beta-\frac{\partial H}{\partial q^\beta}-b_\beta^\Delta\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}\right)=0, \tag{17}$$

gde je Γ dato sa (16). Ovu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu zvaćemo generalisanom Kilingovom jednačinom duž trajektorije. U opštem slučaju, svaka od $n-m+2$ funkcije R, Λ, G^α može se smatrati nepoznatom. Prema drugoj teoremi ovog rada, svako njeno nesingularno rešenje po G^α, R, Λ pruža jedan prvi integral oblika (11).

3. **Primeri**

3.1. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi

$$R=0,\quad G^{m+1}=G^{m+2}=\cdots=G^{r-1}=G^{r+1}=\cdots=G^n=0,\quad G^r=\text{const.}, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^r}+b_r^\Delta\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}-\overset{*}{Q}_r\right)G^r=\dot V(t,\ q^i,\ p_\alpha),\quad n+1\leqslant r\leqslant n, \tag{19}$$

gde je r fiksirano i gde ne treba sabirati po ponovljenom indeksu r. Ovde je V proizvoljna funkcija vremena t, generalisanih koordinata q^i i nezavisnih generalisanih impulsa p_α. U $\dot V$ izvode $\dot q^i$ i $\dot p_\alpha$ treba eliminisati pomoću jednačina (4). Sada iz (4), (16), (17)—(19) dobijamo

$$\Lambda=-V, \tag{20}$$

a iz (11) odgovarajući prvi integral neholonomnog mehaničkog sistema

$$D=p_r G^r+V(t,\ q^i,\ p_\alpha),\ \text{(ne sabirati po } r). \tag{21}$$

Ako je funkcija V jednaka nekoj konstanti, nezavisnoj od t, q^i i p_α, ovaj integral postaje ciklični prvi integral kretanja.

3.2. Pretpostavimo da su ispunjeni sledeći uslovi

$$G_\alpha=0,\quad R=-1,\quad \frac{\partial H}{\partial t}+b^\Delta\frac{\partial H}{\partial q^\Delta}+\tilde\theta_\Delta A_\alpha^\Delta\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+(\tilde Q_\alpha+\tilde Q_\Delta b_\alpha^\Delta)\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=$$

$$=\dot W(t,\ q^i,\ p_\alpha), \tag{22}$$

gde je W proizvoljna funkcija i gde u izvodu $\dot W$ izvode $\dot q^i$ i $\dot p_\alpha$ treba eliminisati pomoću jednačina (4). U ovom slučaju, iz (2), (4), (16), (17) i (22) dobijamo

$$\Lambda=W, \tag{23}$$

dok iz (11) sledi prvi integral oblika

$$D=H-W. \tag{24}$$

Za konstantnu vrednost funkcije W ovaj integral se svodi na energijski integral datog neholonomnog mehaničkog sistema.

3.3. Posmatrajmo mehanički sistem sa Lagranževom funkcijom $L=(1/2)\, a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$, gde su a_{ij} funkcije samo od generalisanih koordinata, koji je podvrgnut homogenim ($b=0$) stacionarnim vezama (1). Pretpostavljajući da je $\Lambda=0$, $G^\alpha=0$ i $\overset{*}{Q}_\alpha=p_\alpha \dot{F}$, gde je F proizvoljna funkcija, jednačina (17) postaje

$$H\dot{R}+p_\alpha \dot{q}_\alpha R\dot{F}=0. \tag{25}$$

Rešenje ove jednačine je $R=e^{-2F}$, a odgovarajući prvi integral glasi

$$D=-He^{-2F}. \tag{26}$$

3.4. Neka je mehanički sistem, čija je Lagranževa funkcija

$$L=\frac{M}{2}[(\dot{q}^1)^2+(\dot{q}^2)^2]+\frac{J}{2}(\dot{q}^3)^2-\Pi(q^3), \tag{27}$$

gde su M i J date konstante a Π proizvoljna funkcija, primoran da se kreće u saglasnošću sa vezom

$$\dot{q}^1=\dot{q}^2 \operatorname{tg} q^3. \tag{28}$$

U ovom slučaju rešenje jednačine (17) glasi

$$R=1, \quad G^2=0, \quad G^3=\frac{p_3}{2J}, \quad \Lambda=-\Pi(q^3), \tag{29}$$

što pruža sledeći prvi integral

$$D=-\frac{(p_2)^2}{2M}\cos^2 q^3. \tag{30}$$

Ovaj prvi integral je posledica energijskog integrala ovog sistema i jednačine kretanja za koordinatu q^3, $\dot{p}_3=-d\Pi/dq^3$.

Literatura

[1] Савин Г. Н. — Путята Т. В. — Фрадлин Б. Н., *Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики*, Киев, Наукова Думка, 1964.

[2] Vujanović B., *On the Integration of the Nonconservative Hamilton's Dynamical Equations*, Int. J. Engng. Sci. **19**, 1981, 1739—1747.

[3] Sarlet W. and Cantrijn F., *Generalizations of Noethers Theorem in Classical Mechanics*, SIAM Review **23**, 1981, 467—494.

[4] Vujanović B., *Conservation Laws of Dynamical Systems via D'Alembert's principle*, Int. J. Non-Linear Mechanics **13**, 1978, 185—197.

[5] Đukić Đ. S. and Vujanović B. D., *Noether's Theory in Classical Nonconservative Mechanice*, Acta Mechanica **23**, 1975, 17—27.

[6] Vujanović B., *A Group-variational Procedure for Finding First Integrals of Dynamical Systems*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **5**, 1970, 269—278.

[7] Đukic Đ., *A Procedure for Finding First Integrals of Mechanical Systems with Gauge-variant Lagrangians*, Int. J. Non-Linear Mechanics **8**, 1973, 479—488.

[8] Đukić Đ., *Conservation Laws in Classical Mechanics for Quasi-coordinates*, Archs. ration. Mech. Analysis **56**, 1974, 79—98.

[9] Сумбатов А. С., *О линейных интегралах уравнении движения со множителями связей*, Вестник Московского университета **4**, 1971, 99—101.

[10] Сумбатов А. С., *О линейных интегралах неголономных систем*, Вестник Московского университета **6**, 1972, 77—83.

[11] Бояджиев Т. Л., *Законы сохранения в неголономной механике*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences **27**, 1947, 169—172.

[12] Илиев Ил., Семерджиев Хр., *Связь между первыми интегралами неголономной механической системы и соответствующей системы освобожденной от связей*, П-М.М. **36**, 1962, 405—413.

[13] Илиев Ил., *О первых интегралах неголономной механической системы*. П.М.М. **39**, 1975, 160—162.

]14] Čović V., *O prvim integralima diferencijalnih jednačina kretanja neholonomnih sistema*, **XIV** Jugoslovenski koogres prim. i rac. mehaniku, Portorož, 1978, A1—7.

CONTRIBUTION TO THEORY OF FIRST INTEGRALS FOR NONHOLONOMIC MECHANICAL SYSTEMS

Summary

Necessary conditions for existence of first integrals for nonholonomic mechanical systems are established. The first integrals are of a general structure. The theory is developed using the idea of integrating factors for the differential equations of motion for nonholonomic mechanical systems.

Dr Đorđe S. Đukić
Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu
21000 Novi Sad

УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ

Професор др Татомир П. Анђелић је објавио следеће универзитетске уџбенике:

1. ***Теорија вектора,*** *Београд, 1947, 1949, 1959.*
2. ***Основи механике непрекидних средина,*** *Београд 1950.*
3. ***Тензорски рачун,*** *Београд 1952, 1967, 1973, 1980.*
4. ***Матрице,*** *Београд 1962, 1965, 1970, 1979.*
5. ***Увод у теорију релативности,*** *Београд 1962*
6. ***Рационална механика,*** *Београд 1966 (са Р. Стојановићем).*
7. ***Механика љуски и плоча,*** *Београд 1975 (са П. М. Опбаловим).*
8. ***Увод у астродинамику,*** *Београд 1983.*

Зборник радова Математичког института, Нова серија, 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

BOČNO IZVIJANJE ČELIČNOG I NOSAČA DEFORMABILNOG POPREČNOG PRESEKA

Hajdin Nikola i *Ćorić Branislav*

1. Uvod

Problem stabilnosti punih čeličnih nosača i njihovih delova, kao što su rebra i pojasevi, star je gotovo toliko koliko i projektovanje ove vrste konstrukcija. Ova oblast bila je i ostala predmet velikog naučnog interesa. Do unazad dve decenije ta razmatranja kretala su se kako u oblasti nauke tako i njene primene na osnovama takozvane linearne, elastične teorije stabilnosti.

Praktična iskustva na gotovim objektima, a zatim eksperimentalna i teorijska istraživanja ukazala su da ovaj prilaz ne daje u čitavom nizu problema zadovoljavajući odgovor. Stvarna nosivost čeličnih konstrukcija odstupala je od teorijskih rezultata u čitavom nizu slučajeva, nažalost ne uvek na strani sigurnosti.

Novija istraživanja, prevashodno eksperimentalna, izmenila su u mnogo čemu shvatanja u ovoj oblasti. Broj i značaj tih istraživanja narastao je do te mere da su ovi rezultati uneti i u nove propise za čelične konstrukcije većeg broja zemalja (V. Britanije, Švajcarske, ČSSR, SAD itd.).

Međutim, postoji još čitav niz problema stabilnosti čeličnih nosača koji još nisu dovoljno ispitani i na kojima se intenzivno radi. Jedan od takvih problema je i problem bočnog izvijanja čeličnog I nosača deformabilnog poprečnog preseka. Predmet ovoga rada upravo je teorijska i eksperimentalna analiza bočnog izvijanja nosača pri čemu dolazi do deformacije, odnosno promene oblika poprečnog preseka.

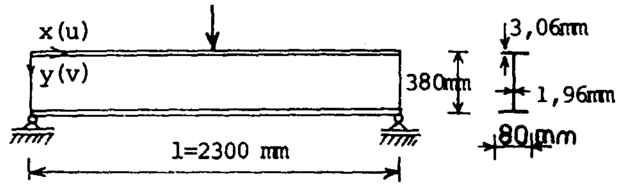
2. Eksperimentalna i teorijska analiza

Osnovna karakteristika savremenog prilaza ovoj problematici je eksperimentalno ispitivanje epruveta do konačnog loma, uzimajući u obzir elastične i plastične deformacije u takozvanoj postkritičnoj oblasti.

Ukupno je ispitivano pet nosača sistema viljuškasto oslonjene grede (Sl. 1)

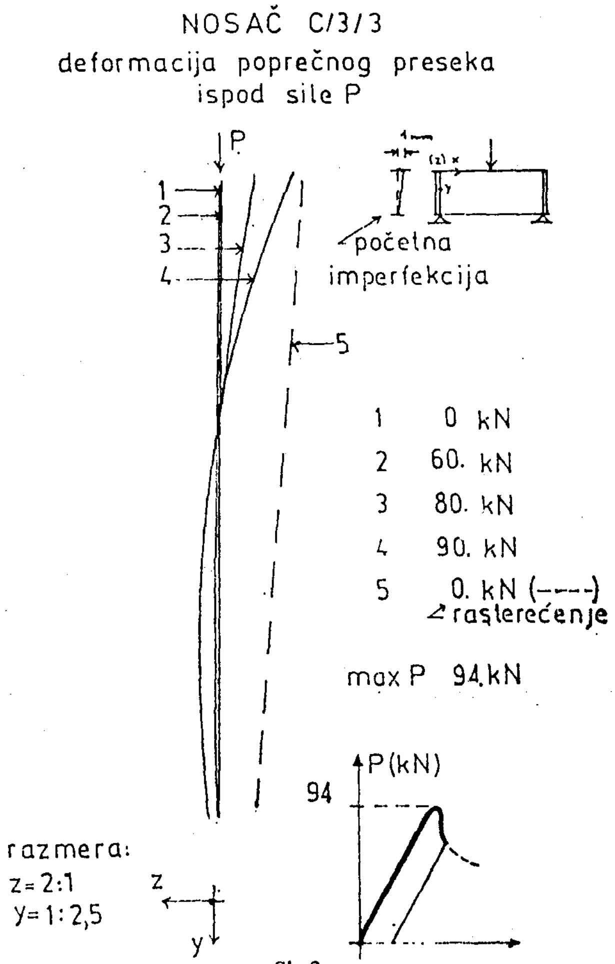
Debljina vertikalnog lima (*tr*) varirala je od 2.—5. mm, debljina pojasa od 3.—10. mm, a širina pojasa (*b*) od 80.—100 mm.

Eksperimentalni rezultati za jedan od nosača sa debljinom vertikalnog lima $tr=5.$ mm, prikazani su na slici br. 2.



Sl. 1.

Usled neizbežnih početnih nepravilnosti (imperfekcija) u geometriji nosača i načinu nanošenja opterećenja, odmah po nanošenju opterećenja dolazi i do malog



Sl. 2.

bočnog pomeranja nosača, koje se sa povećanjem vertikalnog opterećenja sve više uvećava. Kako se sa ove slike vidi, u toku opita praćena je (pomoću plotera) promena oblika vertikalnog lima u sredini nosača sa prirastom sile. Takođe je grafički registrovano povećanje opterećenja sve do dostizanja kritične sile. Kada je kritična sila dostignuta, vidi se da sa povećanjem deformacija na nosaču dolazi do pada sile.

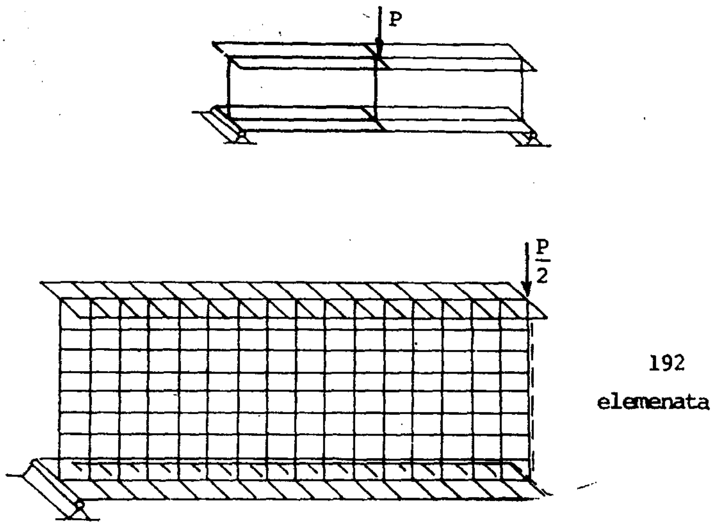
Teorijska istraživanja bočnog izvijanja nosača deformabilnog poprečnog preseka relativno su novijeg datuma i vezana su u velikoj meri za primenu metode konačnih elemenata i metode traka. I u ovom radu pri teorijskoj analizi korišćena je metoda konačnih elemenata, a nelinearna analiza sprovedena je primenom inkrementalnog postupka. U tom cilju nosač, odnosno jedna njegova polovina, zamenjen je prostornim skupom od 192. pravougaona elementa, kako je to prikazano na Sl. 3

Rezultati ovako sprovedene nelinearne analize prikazani su na sledećim slikama. Na Sl. 4 prikazano je određivanje kritičnog opterećenja teorijskim putem i upoređenje sa eksperimentalnim rezultatima.

Dijagram normalnih napona duž nosača pri dostizanju kritičnog opterećenja prikazan je na Sl. 5, a oblik izvijanja nosača prikazan je na Sl. 7.

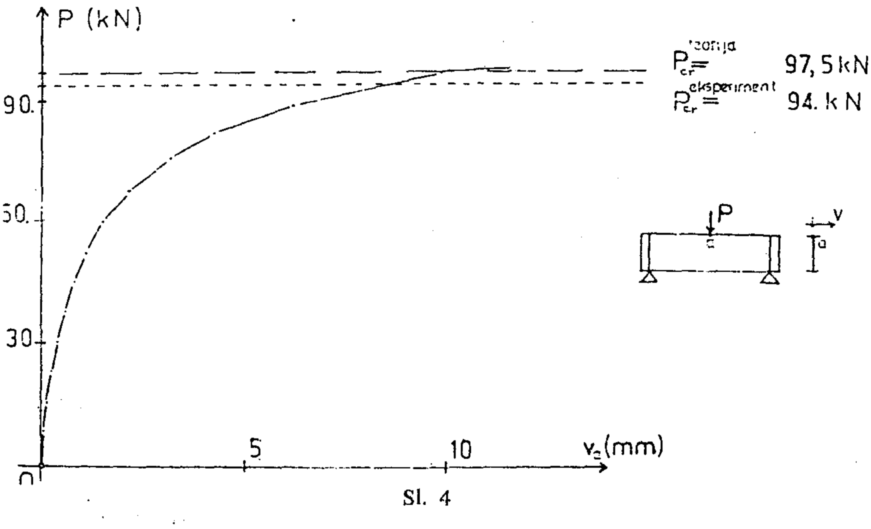
Kako se sa Sl. 6 vidi, za slučaj opterećenja koja su bliska kritičnom, priraštaji ugiba i obrtanja pojasa imaju približno konstantnu vrednost. Međutim, priraštaji bočnog pomeranja za ta opterećenja dobijaju ekcesne vrednosti (Sl. 4), što je i karakteristično za problem bočnog izvijanja nosača.

Osim normalnib napona koji se javljaju usled savijanja nosača u svojoj ravni, javljaju se i normalni naponi usled bočnog savijanja nosača. Ovi naponi čak premašuju po apsolutnoj vrednosti normalne napone usled savijanja u ravni nosača (Sl. 8).



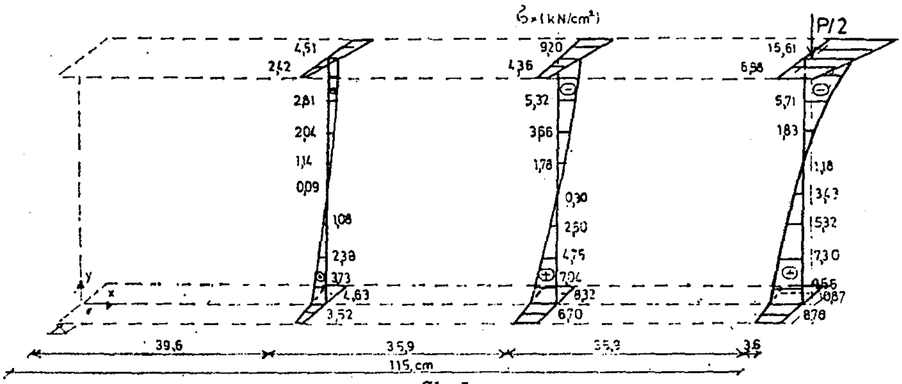
Sl. 3

NOSAČ C/3/3 Bočno pomeranje gornjeg pojasa ispod sile P



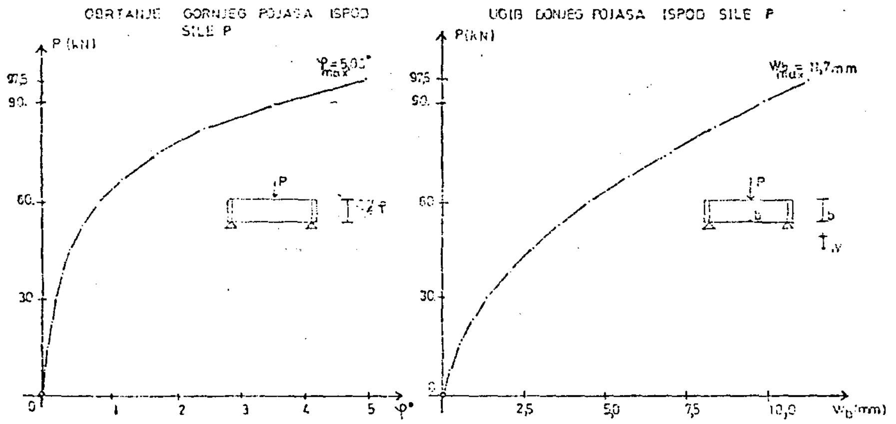
Sl. 4

NOSAČ C/3/3 Dijagram σ_x napona pri P= 97,5 kN.



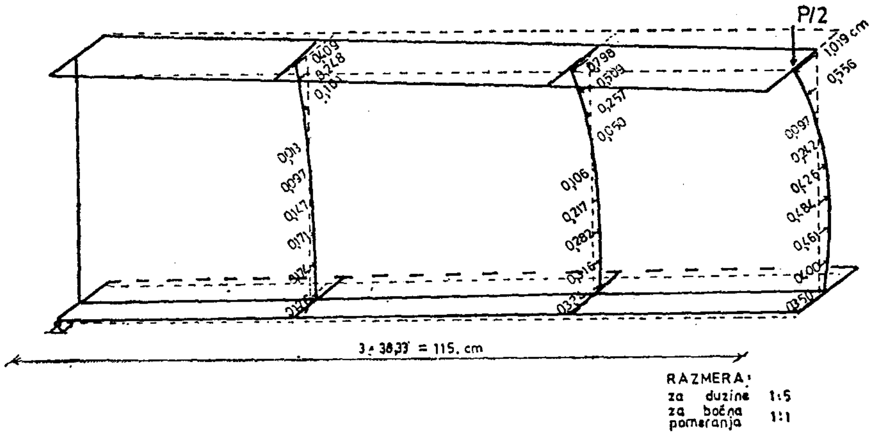
Sl. 5

NOSAČ C/3/3



Sl. 6

Bočno pomeranje nosača C/3/3 pri P= 97,5 kN.

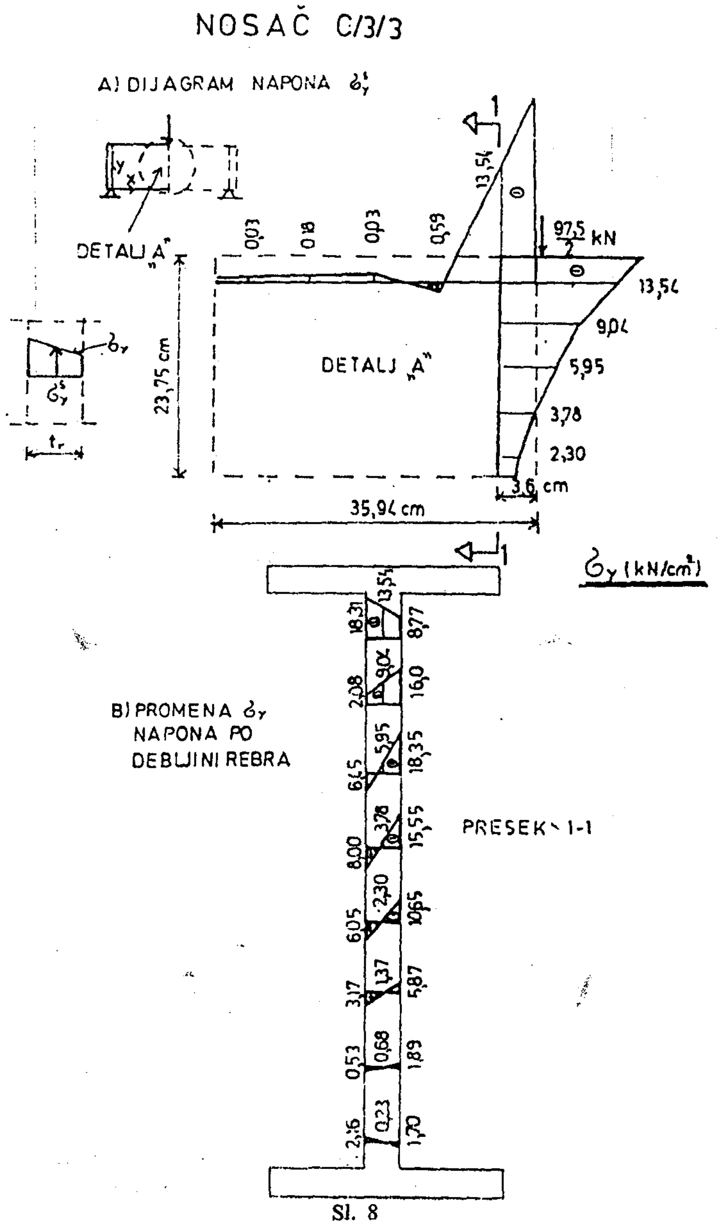


Sl. 7

Na Sl. 9 izvršeno je upoređenje eksperimentalnih rezultata za nosače koji se razmatraju u ovom radu sa rezultatima koji su prikazani u radu (4). U tom radu dati su eksperimentalni rezultati za nosače sa nedeformabilnim poprečnim presekom. Kako se iz ove slike vidi, nosači sa deformabilnim poprečnim presekom imaju znatno manju nosivost u odnosu na nosače sa nedeformabilnim poprečnim presekom.

3. Zaključak

— Problem bočnog izvijanja nosača nedeformabilnog poprečnog preseka intenzivno je ispitivan i sa teorijskog i sa eksperimentalnog aspekta, i kao takav



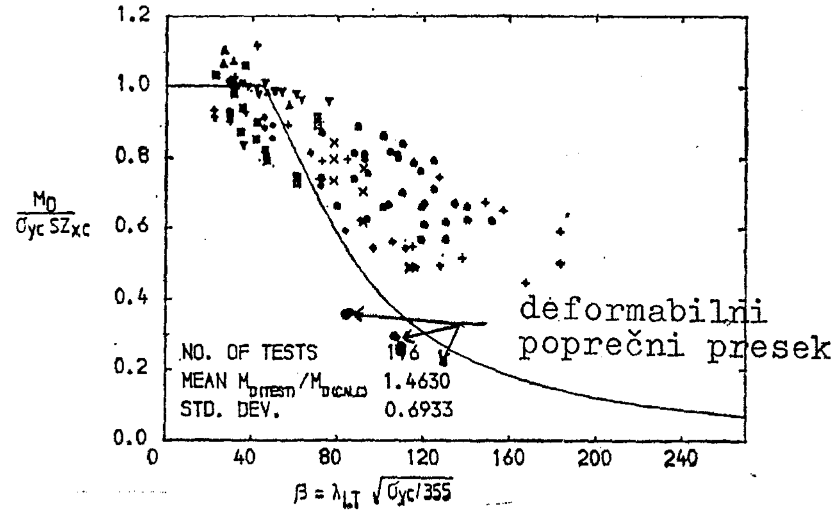
Sl. 8

našao je svoje mesto u propisaima o stabilnosti čeličnih konstrukcija. Međutim, kod nosača sa deformabilnim poprečnim presekom situacija je sasvim drugačija. Na njemu se tek poslednjih godina intenzivno radi.

— Kako je pokazano u ovom radu, nosači sa deformabilnim poprečnim presekom imaju znatno manju nosivost pri bočnom izvijanju u odnosu na nosače sa nedeformabilnim poprečnim presekom.

— Najispravniji put za teorijsku analizu ovog problema je primena nelinearne analize koja vodi računa o promeni oblika poprečnog preseka nosača i uzima u obzir početne imperfekcije vezane za geometriju nosača, način nanošenja opterećenja itd.

— Eksperimentalna istraživanja i rezultati u ovoj oblasti od bitne su važnosti za sagledavanje stvarnog ponašanja nosača pri bočnom izvijanju i za kontrolu dobijenih teorijskih rešenja.



Sl. 9

Literatura

[1] Akay, H. V., *At all, Local ano Lateral Buckling of Frames*, Journal of Stractural Division, ASCE, September 1977.

[2] Johnson, C. P. — Vill, K. M., *Beam Buckling dy Finite Element Procedure*, Journal of Structural Division, ASCE, March 1974.

[3] Hancock, G. J., *Lacal Distortional and Lateral Buckling of I-Beams*, Journal of Structural Division, ASCE, November 1978.

[4] Nethercot, D. A., *Desigan of Beams and Plate Girders — Treatment of Nverall and Local Flange Buckling*, **BS 5400**, Draft for Publ c Comment, London, 1979.

[5] Hajdin N., *Novija istraživanja stabilnosti limova i njihov uticaj na izmenu postojećih i budućih propisa*, Uvodni referat na **15.** jugoslovenskom kongresu za rac. i prim. mehaniku, Kupari, juni 1981.

[6] Ćorić B., *Teorijska i eksperimentalna analiza lokalnog i bočnog izvijanja čeličnog I nosača deformabilnog poprečnog preseka*, doktorska disertacije, Beograd 1982.

Akademik prof. Dr Nikola Hajdin, Građevinski fakultet, 11000 Beograd
Dr Branislav Ćorić, asistent, Građevincki fakultet, 11000 Beograd

Зборник радова Математичког института. Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

NELINEARNE TORZIJSKE OSCILACIJE VRATILA SA DISKOVIMA NA KRAJEVIMA

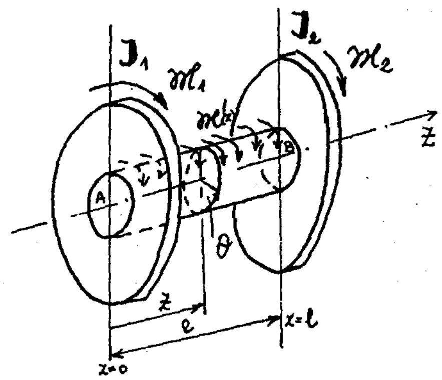
Katica (Stevanović) Hedrih

Uvod

U konstrukcijama reduktora kao konstruktivni elementi javljaju se vratila sa zupčanicima na krajevima, ili šire u transmisionim sistemima vratila sa diskovima na slobodnim krajevima. Zato je od interesa izučiti sve specifičnosti torzijskih oscilacija takvog torzijskog sistema. U ovom radu primenom asimptotske metode Krilova-Bogoljubova-Mitropoljskog izvedeni su izrazi za prvu aproksimaciju rešenja i sistem, diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitudu i fazu pobuđenog oblika oscilovanja vratila sa diskovima na krajevima u uslovima dejstva poremećajnih raspodeljenih i koncentrisanih torzionih spregova.

Sastavljanje asimptotske aproksimacije rešenja

Pretpostavimo da se model sistema sastoji od vratila kružnog ili kružno-prstenastog poprečnog preseka polarnog momenta inercije I_0, gustine materijala ρ, modula klizanja G, dužine l, i dva kruta diska aksijalnih momenata inercije mase za osu vratila J_1 i J_2, a predstavljen je na slici br. 1. Ako sa $\theta\,(z, t)$ označimo ugao torzije vratila u preseku sa koordinatom z, mereno od levog diska u pravcu ose vratila i za opštije uslove dejstva generalisanih sila možemo napisati sledeću parcijalnu diferencijalnu jednačinu



Sl. 1

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=\varepsilon f\left(z,\ \alpha,\ \theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial t},\ \frac{\partial\theta}{\partial z},\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial t},\ldots\right), \qquad (1)$$

kao parcijalnu diferencijalnu jednačinu torzijskih oscilacija vratila i sledeće granične uslove

$$J_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\bigg|_{z=0} = G I_0 \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \varepsilon g\left(\alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \dots\right)\bigg|_{z=0}, \tag{2}$$

$$J_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\bigg|_{z=l} = -G I_0 \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=l} - \varepsilon l\left(\alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \dots\right)\bigg|_{z=l}, \tag{2''}$$

gde su: t vreme; ε mali parametar; $f\left(z, \alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \dots\right)$ – nelinearna funicija z, α, θ i njegovih izvoda po z i t, periodička perioda 2π po α i glatka po z na intervalu $[0, l]$; $g\left(\alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \dots\right)\Big|_{z=0}$ i $l\left(\alpha, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \dots\right)\Big|_{z=l}$ nelinearne cele racionalne funkcije i njegovih izvoda, i periodične funkcije po α perioda 2π. Pretpostavimo da je $\frac{d\alpha}{dt} = \nu(\tau) \approx \omega_1$; $\tau = \varepsilon t$, gde je ω_1 sopstvena kružna frekvencija »neporemećenog« oscilovanja.

Pretpostavimo da su početni uslovi oblika

$$\begin{aligned} \theta(z,0) &= p(\cos \lambda_1 z - \mu_1 \lambda_1 l \sin \lambda_1 z) + \varepsilon \dots, \\ \frac{\partial \theta}{\theta t}\bigg|_{t=0} &= q(\cos \lambda_1 z - \mu_1 \lambda_1 l \sin \lambda_1 z) + \varepsilon \dots, \end{aligned} \tag{3}$$

gde su p i q konstante, λ_1 prvi koren frekventne jednačine »neporemećenog« oscilovanja, koje se dobija za $\varepsilon = 0$ iz diferencijalne (1) i graničnih uslova (2), koja glasi

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{(\mu_1 + \mu_2)\xi}{\mu_1 \mu_2 \xi^2 - 1}, \tag{4}$$

gde je $\xi = \lambda l$, $\mu_1 = J_1/J$, $\mu_2 = J_2/J$, $J = \rho I_0 l$, $\omega_n = \frac{\xi_n}{l}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – sopstvena kružna frekvencija neporemećenog oscilovanja. Sopstvena funkcija »neporemećenog« oscilovanja za »neporemećene« granične uslove je

$$Z_n(z) = C_n\left(\cos \frac{\xi_n}{l} z - \mu_1 \xi_n \sin \frac{\xi_n}{l} z\right). \tag{5}$$

Kako pretpostavljeni početni uslovi i oblast promene kružne frekvencije $\nu(\tau)$; $\tau = \varepsilon t$, poremećajnog sprega omogućuju formiranje jednofrekventnih oscilacija u prvom obliku dinamičke ravnoteže i kako su zadovoljeni posebni uslovi [1] za primenu metode Krilova-Bogoljubova-Mitropoljskog, te aproksimaciju rešenja tražimo u obliku

$$\begin{aligned} \theta(z, t) &= R(t)[\cos \lambda_1 z - \mu_1 \xi_1 \sin \lambda_1 z] \cos \psi + \\ &+ \varepsilon w_1(z, \alpha, R, \psi) + \varepsilon^2 w_2(z, \alpha, R, \psi) + \cdots, \end{aligned} \tag{6}$$

u kome su $R(t)$ amplituda i $\varphi(t)=\psi-\alpha$ faza osnovnog harmonika asimptotske aproksimacije rešenja, koje se kao funkcije vremena određuju iz sistema diferencijalnih jednačina odgovarajuće aproksimacije

$$\frac{dR}{dt}=\varepsilon\mathcal{A}_1(R,\varphi)+\varepsilon^2\mathcal{A}_2(R,\varphi)+\cdots,\qquad \varphi=\psi-\alpha$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_1-\nu(\tau)+\varepsilon\mathcal{B}_1(R,\varphi)+\varepsilon^2\mathcal{B}_1(R,\varphi)+\cdots,\qquad \frac{d\alpha}{dt}=\nu(\tau) \tag{7}$$

$$\tau=\varepsilon t.$$

Potrebni parcijalni izvodi pretpostavljene aproksimacije rešenja (6) imajući u vidu (7) su

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=-\lambda_1^2R_1(t)\,(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi+\varepsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}+\cdots, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t}=&-R\omega_1(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1,\sin\lambda_1 z)\sin\psi+\varepsilon\Big\{(\cos\lambda_1 z-\\&-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\,[\mathcal{A}_1(R,\varphi)\cos\psi-R\mathcal{B}_1(R,\varphi)\sin\psi]+\\&+\left(\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^{(1)}w_1\Big\}+\varepsilon^2\ldots,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=&-R\omega_1^2(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi+\varepsilon\Big\{(\cos\lambda_1 z-\\&-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\Big[\cos\psi\left\langle-2\mathcal{B}_1R\omega_1+\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right\rangle-\\&-\sin\psi\left\langle 2\omega_1\mathcal{A}_1+R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right\rangle\Big]+\\&+\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)}w_1\Big\}+\varepsilon^2\Big\{(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\\&\cdot\Big\langle\cos\psi\left[-2R\omega_1\mathcal{B}_2+(\omega_1-\nu)\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial\varphi}\right]-\sin\psi\left[2\omega_1\mathcal{A}_2+R(\omega_1-\nu)\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial\varphi}\right]+\\&+\cos\psi\left[\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial R}+\mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}-R\mathcal{B}_1^2\right]+\sin\psi\Big[-2\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1-R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial R}\mathcal{A}_1-\\&-R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}\mathcal{B}_1\Big]\Big\rangle+\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)}w_2+2\mathcal{B}_1\left(\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi\,\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi^2}\right)+\\&+\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(w_1-\nu)+\frac{\partial w_1}{\partial R}\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)+2\mathcal{A}_1\left(\omega_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial R\,\partial\psi}+\nu\frac{\partial^2 w_1}{\partial R\,\partial\alpha}\right)\Big\}+\varepsilon^3\ldots.\end{aligned} \tag{10}$$

Pretpostavljeno rešenje i njegove parcijalne izvode (8—10) unesemo u parcijalnu diferencijalnu jednačinu (1) i granične uslove (2), zatim izjednačavanjem koeficijenata uz jednake stepene sa leve i desne strane jednačine i graničnih uslova dobijamo da su za ε° izrazi identički međusobom jednaki; a za slučaj ε treba da je

$$\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)} w_1 = c^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + (\cos\lambda_1 z - \mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\Big\{\cos\psi\Big[2\,\mathcal{B}_1 R\,\omega_1 - \frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\psi}(\omega_1-\nu)\Big] + \sin\psi\Big[2\,\mathcal{A}_1\omega_1 + R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\Big]\Big\} + f_0(z,\alpha,R,\psi), \tag{11}$$

i

$$\mathbf{G}\,I_0\frac{\partial w_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \mathbf{J}_1 c^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \mathbf{J}_1 f_0(0,\alpha,R,\psi) + g_0(\alpha,R,\psi), \tag{12}$$

$$\mathbf{G}\,I_0\frac{\partial w_1}{\partial z}\Big|_{z=l} = -\mathbf{J}_2 c^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\Big|_{z=l} - \mathbf{J}_1 f_0(l,\alpha,R,\psi) - l_0(\alpha,R,\psi), \tag{13}$$

čime smo dobili diferencijalnu jednačinu (11) i granične uslove (12—13) po nepoznatim funkcijama $w_1(z,\alpha,R,\psi)$, $\mathcal{A}_1(R,\alpha)$ i $\mathcal{B}_1(R,\alpha)$, koje treba odrediti da bismo sastavili prvu asimptotsku aproksimaciju rešenja. Za sastavljanje druge aproksimacije rešenja odgovarajuću parcijalnu diferencijalnu jednačinu po $w_2(z,\alpha,R,\psi)$ i granične uslove možemo dobiti iz uslova jednakosti funkcija — koeficijenata uz ε^2, što ovde nećemo izračunavati.

U parcijalnoj diferencijalnoj jednačini i graničnim uslovima (12—13) uveli smo oznake

$$f_0(z,\alpha,R,\psi) = f\left(z,\alpha,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial z},\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},\ldots\right)\Bigg|_{\begin{array}{l} z=z \\ \theta=R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi \\ \frac{\partial\theta}{\partial t}=-\omega_1 R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\sin\psi \\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=\lambda_1 R(-\sin\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\cos\lambda_1 z)\cos\psi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}} \tag{14}$$

$$g_0(\alpha,R,\psi) = g\left(\alpha,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial z},\ldots\right)\Bigg|_{\begin{array}{l} z=0 \\ \theta=R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi \\ \frac{\partial\theta}{\partial t}=-\omega_1 R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\sin\psi \\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=-\lambda_1 R(\sin\lambda_1 z+\mu_1\xi_1\cos\lambda_1 z)\cos\psi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}} \tag{15}$$

$$l_0(\alpha,R,\psi) = l\left(\alpha,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial z},\ldots\right)\Bigg|_{\begin{array}{l} z=0 \\ \theta=R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\cos\psi \\ \frac{\partial\theta}{\partial t}=-\omega_1 R(\cos\lambda_1 z-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\sin\psi \\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=-\lambda_1 R(\sin\lambda_1 z+\mu_1\xi_1\cos\lambda_1 z)\cos\psi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}} \tag{16}$$

Funkciju $w_1(z, \alpha, R, \psi)$ pretpostavimo sada kao zbir dveju nepoznatih funkcija $u_1(z, \alpha, R, \psi)$ i $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ pri čemu postavljamo uslov da funkcija $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu i homogene granične uslove, a da funkcija $u_1(z, \alpha, R, \psi)$ zadovoljava nehomogene granične uslove. Funkciju $u_1(z, \alpha, R, \psi)$ pretpostavićemo u obliku

$$u_1(z, \alpha, R, \psi) = \mathcal{D}_1(\alpha, R, \psi)z + \mathcal{D}_2(\alpha, R, \psi) z^2, \tag{17}$$

s tim da zadovoljava sledeće granične uslove

$$\begin{aligned} \mathrm{G} I_0 \frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= \mathrm{J}_1 c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\bigg|_{z=0} + \mathrm{J}_1 f_0(0, \alpha, R, \psi) + g_0(\alpha, R, \psi), \\ \mathrm{G} I_0 \frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=l} &= -\mathrm{J}_2 c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\bigg|_{z=l} - \mathrm{J}_2 f_0(l, \alpha, R, \psi) + l_0(\alpha, R, \psi). \end{aligned} \tag{18}$$

Iz tih uslova dobijamo da je

$$\mathcal{D}_1(\alpha, R, \psi) = \frac{\mu_1[l_0(\alpha, R, \psi) - \mathrm{J}_2 f_0(l, \alpha, R, \psi)] + (1+\mu_2)[\mathrm{J}_1 f_0(0, \alpha, R, \psi) + g_0(\alpha, R, \varphi)]}{\mathrm{C} I_0(1+\mu_1+\mu_2)}, \tag{19}$$

$$\mathcal{D}_2(\alpha, R, \psi) = \frac{[l_0(\alpha, R, \psi) - \mathrm{J}_2 f_0(l, \alpha, R. \psi)] - [g_0(\alpha, R, \psi) + \mathrm{J}_1 f_0(0, \alpha, R, \psi)]}{2\,\mathrm{C} I_0(1+\mu_1+\mu_2)}, \tag{20}$$

pa je tražena funkcija $u_1(z, \alpha, R, \psi)$ oblika

$$\begin{aligned} u_1(z, \alpha, R, \psi) = \frac{z}{2\,\mathrm{G} I_0(1+\mu_1+\mu_2)} \{ &[l_0(\alpha, R, \psi) - \mathrm{J}_2 f_0(l, \alpha, R, \psi)](2\mu_1 l + z) + \\ &+ [\mathrm{J}_1 f_0(0, \alpha, R, \psi) + g_0(\alpha, R, \psi)][2(1+\mu_2)l - z]\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Funkcija $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ se sada određuje iz parcijalne diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} \left(\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \psi}\right)^{(2)} v_1 - c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} &= f_0^*(z, \alpha, R, \psi) + \\ + (\cos \lambda_1 z - \mu_1 \xi_1 \sin \lambda_1 z)\Big\{\cos \psi &\left[2 R \omega_1 \mathcal{B}_1 - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi}(\omega_1 - \nu)\right] + \\ &+ \sin \psi \left[2 \mathcal{A}_1 \omega_1 + R \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \psi}(\omega_1 - \nu)\right]\Big\}, \end{aligned} \tag{22}$$

tako da zadovoljava homogene granične uslove

$$\begin{aligned} G I_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= J_1 c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\bigg|_{z=0}, \\ G I_0 \frac{\partial v_1}{\partial z}\bigg|_{z=l} &= -J_2 c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\bigg|_{z=l}, \end{aligned} \tag{23}$$

u kojima smo uveli oznaku

$$f_0^*(z, \alpha, R, \psi) = f_0(z, \alpha, R, \psi) - \left[\left(\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \psi}\right)^{(2)} - \right.$$

$$\left. - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\left\{\frac{z}{2 G I_0 l (1+\mu_1+\mu_2)} \Big\langle [I_0(\alpha, R, \psi) - J_2 f_0(l, \alpha, R, \psi)](2\mu_1 l + z) + \right.$$

$$\left. + [J_1 f_0(0, \alpha, R, \psi) + g_0(\alpha, R, \psi)][2(1+\mu_2) l - z] \Big\rangle \right\}. \tag{24}$$

Funkcija $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ ne treba da sadrži prve harmonike oblika $\sin\psi$ $(\cos\lambda_1 z - \mu_1 \xi_1 \sin\lambda_1 z)$ i $\cos\psi\,(\cos\lambda_1 z - \mu_1 \xi_1 \sin\lambda_1 z)$ iz kog uslova ćemo odrediti nepoznate funkcije $\mathcal{A}_1(R, \varphi)$ i $\mathcal{B}_1(R, \varphi)$. Funkciju $v_1(z, \alpha, R, \psi)$ potražimo u obliku reda po sopstvenim funkcijama odgovarajućeg »neporemećenog« sistema

$$v_1(z, \alpha, R, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} v_{1p}(\alpha, R, \psi)(\cos\lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin\lambda_p z), \tag{25}$$

koja identički zadovoljava homogene granične uslove (23), a u kojoj su koeficijenti razvoja $v_1(\alpha, R, \psi)$ nepoznate funkcije koje treba odrediti.

Izraz (25) unesemo u diferencijalnu jednačinu (22) tako da dobijamo

$$\sum_{p=1}^{\infty} (\cos\lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin\lambda_p z)\left[\left(\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \psi}\right)^{(2)} v_{1p} + \omega_p^2 v_{1p}\right] =$$

$$- \sum_{p=1}^{\infty} f_{0p}^*(\alpha, R, \psi)(\cos\lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin\lambda_p z) + (\cos\lambda_1 z -$$

$$- \mu_1 \xi_1 \sin\lambda_1 z)\left\{\cos\psi\left[-\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial \varphi}(\omega_1 - \nu) + 2\mathcal{B}_1 R \omega_1\right] + \right.$$

$$\left. + \sin\psi\left[2\omega_1 \mathcal{A}_1 + R \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial \varphi}(\omega_1 - \nu)\right]\right\}, \tag{26}$$

u kojoj smo funkciju $f_0^*(z, \alpha, R, \psi)$ pretstavili u vidu reda po sopstvenim funkcijama $Z_p(z)$

$$f_0^*(z, \alpha, R, \psi) = \sum_{p=1}^{\infty} f_{0p}^*(\alpha, R, \psi)(\cos\lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin\lambda_p z), \tag{27}$$

u kome su $f^*_{0p}(\alpha, R, \psi)$ funkcije koeficijenti razvoja poznate funkcije oblika

$$f^*_{0p}(\alpha, R, \varphi) = \frac{\rho I_0 l}{m_p}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l f^*_0(z, \alpha, R, \psi)(\cos\lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin\lambda_p z)\,dz + \right.$$

$$\left. + \mu_1 f^*_0(0, \alpha, R, \psi) + \mu_2 f^*_0(l, \alpha, R, \psi)(\cos\xi_p - \mu_1 \xi_p \sin\xi_p)\right\}, \tag{28}$$

u kojima je uvedena oznaka

$$m_p = \frac{\rho I_0 l}{4\xi_p}\{(1+\mu_1^2\xi_p^2)(2\xi_p + \sin 2\xi_p) + 4\sin\xi_p(-\cos\xi_p + \mu_1\xi_p\sin\xi_p)\} +$$

$$+ \rho I_0 l\int_0^l Z_p^2(z)\,dz + \mathbf{J}_1 Z_p^2(0) + \mathbf{J}_2 Z_p^2(l). \tag{29}$$

Izjednačavanjem funkcija — koeficijenata sa leve i desne strane jednačine (26) uz iste sopstvene funkcije $(\cos\lambda_p z - \mu_1 \xi_p \sin\lambda_p z)$ dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha} + \omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)} v_{11} + \omega_1^2 v_{11} = \cos\psi\left[2R\omega_1\mathcal{B}_1 - \frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1 - \nu)\right] + f^*_{01}(\alpha, R, \psi) +$$

$$\sin\psi\left[2\omega_1\mathcal{A}_1 + R\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial p}(\omega_1 - \nu)\right], \tag{30}$$

$$\left[\nu\frac{\partial}{\partial\alpha} + \omega_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{(2)} v_{1p} + \omega_{1p}^2 v_{1p} = f^*_{0p}(\alpha, R, \psi), \quad p = 2, 3, 4, \ldots . \tag{31}$$

U jednačini (30) funkciju $v_{11}(\alpha, R, \psi)$ prikažemo u obliku dvostrukog Fourier-ovog reda po α i ψ sa nepoznatim koeficijentima razvoja $v_{11}^{mn}(R)$, a takođe i funkciju $f^*_{01}(\alpha, R, \psi)$ sa poznatim koeficijentima razvoja $f_{01}^{*(mn)}(R)$

$$v_{11}(\alpha, R, \psi) = \sum_m\sum_n v_{11}^{mn}(R)\,e^{i(m\psi + n\alpha)}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{32}$$

$$f^*_{01}(\alpha, R, \psi) = \sum_m\sum_n f_{01}^{*(mn)}(R)\,e^{i(m\psi + n\alpha)}, \tag{33}$$

$$f_{0p}^{*(mn)}(R) = \frac{\rho I_0 l}{4\pi^2 m_p}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*_0(z, \alpha, R, \psi)(\cos\lambda_p z - \right.$$

$$-\mu_1\xi_p\sin\lambda_p z)\,e^{-i(m\psi+n\alpha)}\,dz\,d\psi\,d\alpha + \mu_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*_0(0, \alpha, R, \psi)\,e^{-i(m\psi+n\alpha)}\,d\psi\,d\alpha +$$

$$\left. + \mu_2(\cos\xi_p - \mu_1\xi_p\sin\xi_p)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*_0(l, \alpha, R, \psi)\,e^{-i(m\psi+n\alpha)}\,d\alpha\,d\psi\right\}, \tag{34}$$

tako da dobijamo

$$\sum_m \sum_n \nu_{11}^{mn}(R)\left[\omega_1^2-(n\nu+m\,\omega_1)^2\right] e^{i(m\psi+n\alpha)} = \sum_m \sum_n f_{01}^{*\,(mn)}(R)\, e^{i(m\psi+n\alpha)} +$$

$$+\cos\psi\left[2\,R\,\omega_1\,\mathcal{B}_1-\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]+\sin\psi\left[2\,\omega_1\,\mathcal{A}_1+R\frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]. \quad (35)$$

Kako je izraz $\omega_1^2-(n\nu+m\,\omega_1)^2$ jednak nuli kada je $\pm 1+m+n=0$ to za te vrednosti koeficijenata m i n izraz $e^{i(m\psi+n\alpha)}$ dobija vrednost $e^{i(\pm\psi-n\alpha)}$, te za određivanje nepoznatih funkcija $\mathcal{A}_1(R,\psi)$ i $\mathcal{B}_1(R,\psi)$ dobijamo sledeću jednačinu

$$\cos\psi\left[2\,R\,\omega_1\,\mathcal{B}_1-\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]+\sin\psi\left[2\,\mathcal{A}_1\,\omega_1+2\frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)\right]+$$

$$+\sum_n f_{01}^{*\,(\mp 1-n),\,n}(R)\, e^{i(\pm\varphi-n\varphi)}=0. \quad (36)$$

Iz poslednje jednačine izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos\psi$ i $\sin\psi$ sa nulom dobijamo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $\mathcal{A}_1(R,\psi)$ i $\mathcal{B}_1(R,\psi)$

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)-2\,R\,\omega_1\,\mathcal{B}=\sum_\sigma c_\sigma(R)\,e^{i\sigma\varphi},$$

$$2\,\mathcal{A}_1\,\omega_1+R\frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial\varphi}(\omega_1-\nu)=\sum_\sigma d_\sigma(R)\,e^{i\sigma\varphi}, \quad (37)$$

$$\sigma=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots,$$

gde smo stavili da je veza koeficijenata $n=-\sigma$ i $m+1=\sigma$, i uveli oznake

$$c_\sigma(R)=\frac{\rho I_0 l}{4\pi^2 m_1}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(z,\alpha,R,\psi)(\cos\lambda_1 z-\right.$$

$$-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\,e^{-i\sigma\varphi}\cos\psi\,d\psi\,d\alpha\,dz+\mu_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(0,\alpha,R,\psi)\,e^{-i\sigma\varphi}\cos\psi\,d\psi\,d\alpha+$$

$$\left.+\mu_2(\cos\xi_1-\mu_1\xi_1\sin\xi_1)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(l,\alpha,R,\psi)\,e^{-i\sigma\varphi}\cos\psi\,d\psi\,d\alpha\right\},\quad \varphi=\psi-\alpha, \quad (38)$$

$$d_\sigma(R)=-\frac{\rho I_0 l}{4\pi^2 m_1}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(z,\alpha,R,\psi)(\cos\lambda_1 z-\right.$$

$$-\mu_1\xi_1\sin\lambda_1 z)\,e^{-i\sigma\varphi}\sin\psi\,d\psi\,d\alpha\,dz+\mu_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(0,\alpha,R,\psi)\,e^{-i\sigma\varphi}\sin\psi\,d\psi\,d\alpha+$$

$$\left.+\mu_2(\cos\xi_1-\mu_1\xi_1\sin\xi_1)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(l,\alpha,R,\psi)\,e^{-i\sigma\varphi}\sin\psi\,d\psi\,d\alpha\right\}.$$

Rešavanjem sistema (37) dobijamo partikularna rešenja koja se mogu prihvatiti kao funkcije $\mathcal{A}_1(R,\varphi)$ i $\mathcal{B}_1(R,\varphi)$ koje je trebalo odrediti: Pomoću njih sastavljamo jednačine prve aproksimacije za amplitudu i fazu pobuđenog oblika oscilovanja

$$\frac{dR}{dt}=\varepsilon\sum_{\sigma}\frac{i\sigma(\omega_1-\nu)c_\sigma(R)+2\omega_1 d_\sigma(R)}{4\omega_1^2-\sigma^2(\omega_1-\nu)^2}e^{i\sigma\varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_1-\nu(\tau)+\varepsilon\sum_{\sigma}\frac{i\sigma(\omega_1-\nu)d_\sigma(R)-2\omega_1 c_\sigma(R)}{R[4\omega_1^2-\sigma(\omega_1-\nu)^2]}e^{i\sigma\varphi}, \tag{39}$$

$$\sigma=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots .$$

Nepoznate funkcije $v_{1p}^{mn}(R)$ koeficijente razvoja u Fourier-ov red dobijamo u obliku

$$v_{11}^{mn}(R)=\frac{f_{01}^{*mn}(R)}{\omega_1^2-(n\nu+m\omega_1)^2},\quad \text{za}\quad m\pm1+n\neq0. \tag{40}$$

Na sličan način rešavamo i jednačine (31) tako da za nepoznatu funkciju $v_1(z,\alpha,R,\psi)$ dobijamo

$$v_1(z,\alpha,R,\psi)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_m\sum_n\frac{f_{op}^{*(mn)}(R)}{\omega_1^2-(n\nu+m\omega_1)^2}e^{i(m\psi+n\alpha)}(\cos\lambda_p z-\mu_1\xi_p\sin\lambda_p z), \tag{41}$$

$$[\text{za } p=1\ \ m\pm1+n\neq0]\qquad m,n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\dots,$$

čime smo rešili postavljeni zadatak, odredili potrebne funkcije za sastavljanje prve aproksimacije rešenja za opšti model torzijskih oscilacija vratila sa diskovima i malim poremećajnim raspodeljenim i koncentrisanim spregovima. Za određivanje rešenja u drugoj aproksimaciji postupak je sasvim identičan i principijelnih teškoća nema.

Literatura

[1] Митропольский J. A. — Мосейенков В. И.: *Асимтотические решения уравнений в частних производних*, Киев 1976.

[2] Rašković D.: *Teorija oscilacija*, Beograd, 1960.

[3] Vujičić V.: *Teorija oscilacija*, Beograd, 1970.

[4] Хедрих К. *Нелинейние крутильнце колебаније колсолноіа валаа с диском*, ИЦНО 1981 Киев.

NONLINEAR TORSIONAL VIBRATION OF SHAFT WITH TWO DISKS

Summary

In the paper nonlinear torsional vibration of shaft with two disks is stydid with asymptotic method Krilov-Bogoljubov-Mitropoljskij. Also eppersions for the first approximation of the solutions and system differentional equations of the first approximation for amplitude and phase of the one-frequently vibration of the nonlinear torsional vibration of shaft with two disks in the case own vibrations and the case forced vibrations are derrived.

Hedrih dr. ing. Mr. Katica vanr. prof.
18000-Niš
ul. Vojvode Tankosića 3/22
Mašinski fakultet
Jugoslavija

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12). 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O UZAJAMNOM UTICAJU HARMONIKA U NELINEARNIM SISTEMIMA SA MALIM PARAMETROM

Katica Hedrih — Predrag Kozić — Ratko Pavlović

Za približno određivanje zakona prinudnih oscilacija nelinearnih sistema sa više stepeni slobode oscilovanja ili elastičnih tela, u uslovima dejstva generalisane prinudne sile periodičke funkcije sa dve ili više frekvencija, kada se oscilatorni proces može predstaviti sistemom od N diferencijalnih jednačina sa malim parametrom ε, ili parcijalnom diferencijalnom jednačinom sa odgovarajućim graničnim uslovima u kojima se javljaju nelinearni članovi sa malim parametrom ε, može se veoma efikasno koristiti asimptotska metoda u čijoj osnovi stoji ideja iz jednofrekventne metode Krilova-Bogoljubova-Mitropoljskog. U osnovi ove metode je korišćenje principa jednofrekventnosti za određivanje dvoparametarske aproksimacije rešenja za oscilatorne procese koji su u tačnoj postavci nelinearni, a da su linearni bili bi onoliko puta frekventni, ako početnim uslovima nije izvršeno »filtriranje« frekvencija, koliko sistem ima stepeni, ne slobode kretanja, nego slobode oscilovanja. Znači, ako se radi o sistemu sa konačnim brojem stepeni slobode oscilovanja N, onda je u opštem slučaju rešenje N-frekventno, a ako se radi o elastičnom telu sa beskonačnim brojem stepeni slobode oscilovanja, onda sa beskonačnim brojem frekvencija. U uslovima kada na takve sisteme dejstvuju generalisane prinudne sile, periodičke funkcije vremena sa dve frekvencije, koje su sporo promenljive funkcije vremena, i u odgovavarajućem rezonantnom opsegu dve određene sopstvene kružne frekvencije »neporemećenog« sistema, onda su oscilatorni procesi u takvim sistemima, takvi da ako bi se napravila analiza spektra harmonika sa dominantnim amplitudama, došlo bi se do zaključka da su dominantni harmonici-harmonici sa najvećim amplitudama, oni čije frekvencije su iz rezonantnih opsega u kojima su i frekvencije prinudnih sila, tako da se po ugledu na princip jednofrekventnosti, može postaviti za sastavljanje aproksimacija četvoro-parametarske familije rešenja, princip dvofrekventnosti za sisteme sa dva ili više stepeni slobode oscilovanja. Problem pojave sekularnih članova se uklanja na istom principu kao što je to postavljeno kod dvoparametarske familije jednofrekventnih rešenja sistema sa više stepeni slobode oscilovanja i odgovarajućim početnim uslovima.

Mogućnost nalaženja četvoro-parametarske familije dvo-frekventnih asimptotskih rešenja je ograničena uslovom dejstva prinudne kvaziperiodičke sile sa dve frekvencije, koje su u odgovarajućim rezonantnim opsezima dve sopstvene kružne frekvencije »neporemećenog« sistema (odgovarajućeg linearnog sistema) i posebno početnim uslovima, koji moraju da budu takvi da omogućavaju formiranje »dvo-frekventnih« rešenja. S obzirom na veliku složenost nelinearnih oscilatornih procesa, kako u sistemima sa konačnim brojem stepeni slobode oscilovanja, tako i za kontinualne oscilatorne sisteme (elastična tela) sa beskonačno mnogo stepeni slobode oscilovanja i kako sem eksperimentalnim putem, ne postoji mogućnost za tačno ispitivanje zakona oscilovanja, u konačnom obliku, to su za analizu oscilatornih procesa pogodne dvofrekventne aproksimacije rešenja koje omogućavaju dvofrekventnu stacionarnu analizu fenomena procesa oscilovanja.

Ako bi se radila dvo-frekventna analiza linearnih sistema sa N stepeni slobode oscilovanja na koji dejstvuje $2 \leqslant N$, dvo-frekventna prinudna kvaziperiodička sila sa sporo promenljivim frekvencijama, onda bi zaključak bio da uzajamni uticaj harmonika ne postoji i da harmonici u prvoj aproksimaciji dvo-frekventnog rešenja imaju iste amplitude i faze i frekvencije kao što bi ih imali u odgovarajućim harmonicima i pri dejstvu na sistem samo komponente sile sa jednom odgovarajućom frekvencijom. Uzajamni uticaj harmonika se može uočiti tek kod slabo nelinearnih i jako nelinearnih sistema gde harmonici u dvo-frekventnom rešenju imaju različite faze i amplitude od onih koje bi imali u odgovarajućim harmonicima pri dejstvu na sistem komponentne sile sa jednom odgovarajućom frekvencijom.

U linearnim sistemima se ne javlja fenomen rezonantnog skoka, dok se u nelinearnim sistemima javlja, kako u procesima koji su jednofrekventni tako i u procesima koji su više-frekventni. Interesantno je uočiti da se kod dvo-frekventnih rešenja na amplitudno-frekventnim i fazno-frekventnim krivama u kritičnim zonama rezonantnog opsega frekvencija javljaju rezonantni skokovi i to sa jednim do dva ili više rezonantnih skoka u pravcu kontinualnog porasta diskretnih frekvencija harmonika, a takođe jedan ili dva ili više rezonantna skoka u pravcu kontinualnog opadanja diskretnih frekvencija harmonika, i ako bi se kod jedno-frekventnih procesa tog istog sistema pri dejstvu jedno-frekventne sile javio samo jedan rezonantni skok.

Kao očigledne primere za ovakve tvrdnje uzećemo dva sistema koja su bila predmet proučavanja u radovima i saopštenjima [7, 8, 9, 10, 11]. Prednost dvofrekventne asimptotske stacionarne analize nelinearnih sistema sa malim parametrom ε je u tome što se vrši upoređivanje amplituda i faza, odnosno amplitudno-frekventnih i fazno-frekventnih karakteristika za stacionarne harmonike u odgovarajućim rezonantnim opsezima frekvencija, a ne samih aproksimacija rešenja. Rešenja su »brže« promenljive funkcije vremena u poređenju sa amplitudama i fazama harmonika u dvo-frekventnoj aproksimaciji rešenja. Amplitude stacionarnih harmonika su obvojnice.

Na sledećim primerima ćemo dati dokumentaciju predhodnih zaključaka sa odgovarajućim specifičnostima.

Primer I — Slobodno, lako elastično vratilo sa tri diska i spojnicom nelinearne karakteristike, čije je kretanje opisano sledećim sistemom jednačina

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - F(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + F(\varphi_2 - \varphi_1) - c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = E_1 \cos\theta_1 + \alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2),$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = -\alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + E_2 \cos\theta_2,$$

gde su J_1, J_2, J_3 aksijalni momenti inercije masa diskova za osu vratila, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — generalisane koordinate-uglovi otklona diskova, $E_1 \cos\theta_1$, $E_2 \cos\theta_2$ momenti koji dejstvuju na diskove 2 i 3, c_1 i c_2, torzijske krutosti vratila, α — koeficijent otpornog momenta, i $F(\varphi_2-\varphi_1)$ nelinearni elastični moment vratila i spojnice između diskova 1 i 2 i ima oblik $F(x)=c_1 x|+c_1'' x^3$, i to za $|x|\leqslant x_1$, važi do crte, a ceo za $|x|\geqslant x_1$, gde je $x=\varphi_2-\varphi_1$. Ako uzmemo za nove koordinate $x=\varphi_2-\varphi_1$, $y=\varphi_3-\varphi_2$ prema broju stepeni slobode oscilovanja i za numeričke podatke iz [8, 10] za dvofrekventni režim, sistem diferencijalnih jednačina za redukovane amplitude $\overset{*}{a}_1$ i $\overset{*}{a}_2$ i faze ψ_1 i ψ_2 je

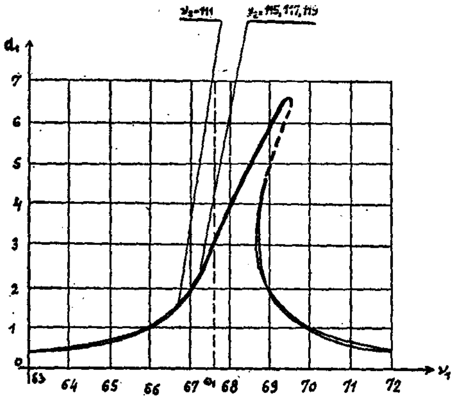
$$\frac{d\overset{*}{a}_1}{dt} = -0{,}29559\,\overset{*}{a}_1 - \frac{271{,}9558}{(67{,}792+\nu_1)}\sin\psi_1,$$

$$\frac{d\overset{*}{a}_2}{dt} = -0{,}8275\,\overset{*}{a}_2 - \frac{339{,}6653}{(120{,}681+\nu_2)}\sin\psi_2,$$

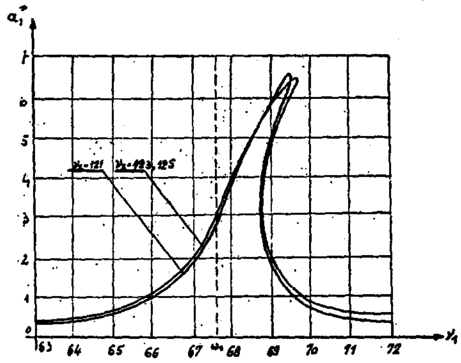
$$\frac{d\psi_1}{dt} = 67{,}792 - \nu_1 + 0{,}03748\,(\overset{*2}{a_1} + 2\,\overset{*2}{a_2}) - \frac{271{,}9558}{\overset{*}{a}_1(67{,}792+\nu_1)}\cos\psi_1,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = 120{,}681 - \nu_2 + 0{,}0688\,(2\,\overset{*2}{a_1} + \overset{*2}{a_2}) + \frac{339{,}6653}{\overset{*}{a}_2(120{,}681+\nu_2)}\cos\psi_2.$$

Za zadate numeričke podatke sopstvene kružne frekvencije neporemećenog oscilovanja sistema su: $\omega_1=67{,}792$ [$\sec^{-1}$] i $\omega_2=120{,}68$ [$\sec^{-1}$] i frekvencije ν_1



Slika 1 a

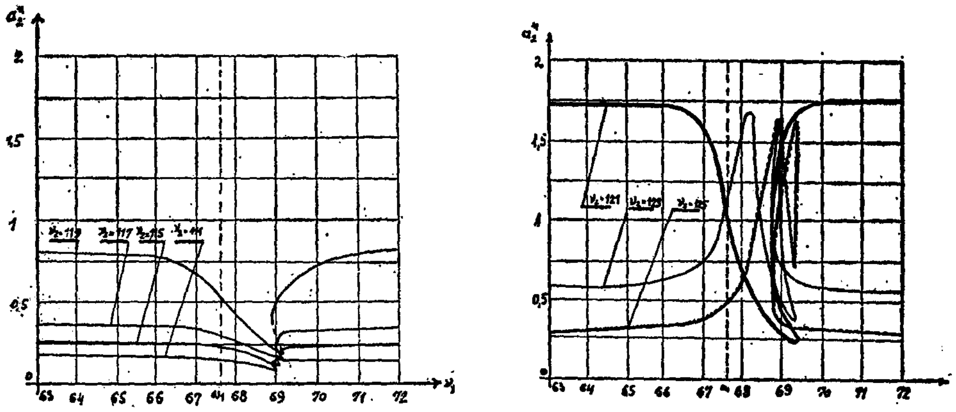


Slika 1 b

i ν_2 prinudnih momenata se uzimaju iz odgovarajućih rezonantnih opsega $\nu_1 \in \in (64, \sim 72$ [$\sec^{-1}$]) i $\nu_2 \in (114, \sim 130$ [$\sec^{-1}$]). Na slikama 1. a i b,. i br. 2 a i b, i br. 3 a i b., predstavljene su familije amplitudno-frekventnih krivih prvog i drugog harmonika stacionarnog rezonantnog stanja za kontinualnu promenu diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 i ν_2 prinudnih momenata u definisanim rezonantnim opsezima. Fazno-frekventne krive nisu prikazane zbog obima članka.

Na slikama br. 1 a i b., uočava se da se amplitudno-frekventne krive $\overset{*}{a}_1(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika za stacionarni režim pri kontinualnoj promeni diskretnih vrednosti frekvencije ν_1 u oblasti $\nu_1 \in (\sim 64, \sim 72 s^{-1})$ sasvim neznatno menja sa diskretnim promenama $\nu_2 \in (\sim 114, \sim 130)$, a isti je slučaj i sa fazom ψ_1 za stacionarni režim.

Sa slika br. 2 a i b., može se videti da se amplitudno frekventna kriva drugog harmonika $\overset{*}{a}_2(\nu_1, \nu_2)$ za stacionarni režim pri kontinualnoj promeni diskretnih vrednosti frekvencije ν_1 u opsegu $\nu_1 \in (\sim 64, \sim 72)$ sa diskretnom promenom $\nu_2 \in [114, \sim 130]$ znatno menja i to i po obliku i po veličinama amplituda. Zaključak je da kontinualna promena diskretnih vrednosti frekvencija prvog harmonika bitno utiče na amplitudu drugog harmonika sa posebno izraženim uticajem ν_2 pri istovremenom izboru vrednosti ν_1 i ν_2 iz »kritičnog« opsega odgovarajućih rezonantnih opsega frekvencija. Za $\nu_2 = 122$ [$\sec^{-1}$] krive $(\overset{*}{a}_2, \nu_1)$ menjaju karakter u oblasti $\nu_1 \in [\sim 66, \sim 69{,}5$ [$\sec^{-1}$]]. Uticaj prvog harmonika na drugi u toj oblasti se za $\nu_2 < 122$ [$\sec^{-1}$] izražavao kroz smanjenje amplituda $\overset{*}{a}_2$, a istovremeno sa povećanjem $\overset{*}{a}_1$, dok se u toj oblasti za $\nu_2 \in [\sim 122, \sim 126]$ na krivoj $(\overset{*}{a}_2, \nu_1)$ izražava uticaj i kroz povećanje i smanjenje amplituda »neregularnog« dela krive, i za $\nu_2 < 126$ [$\sec^{-1}$]

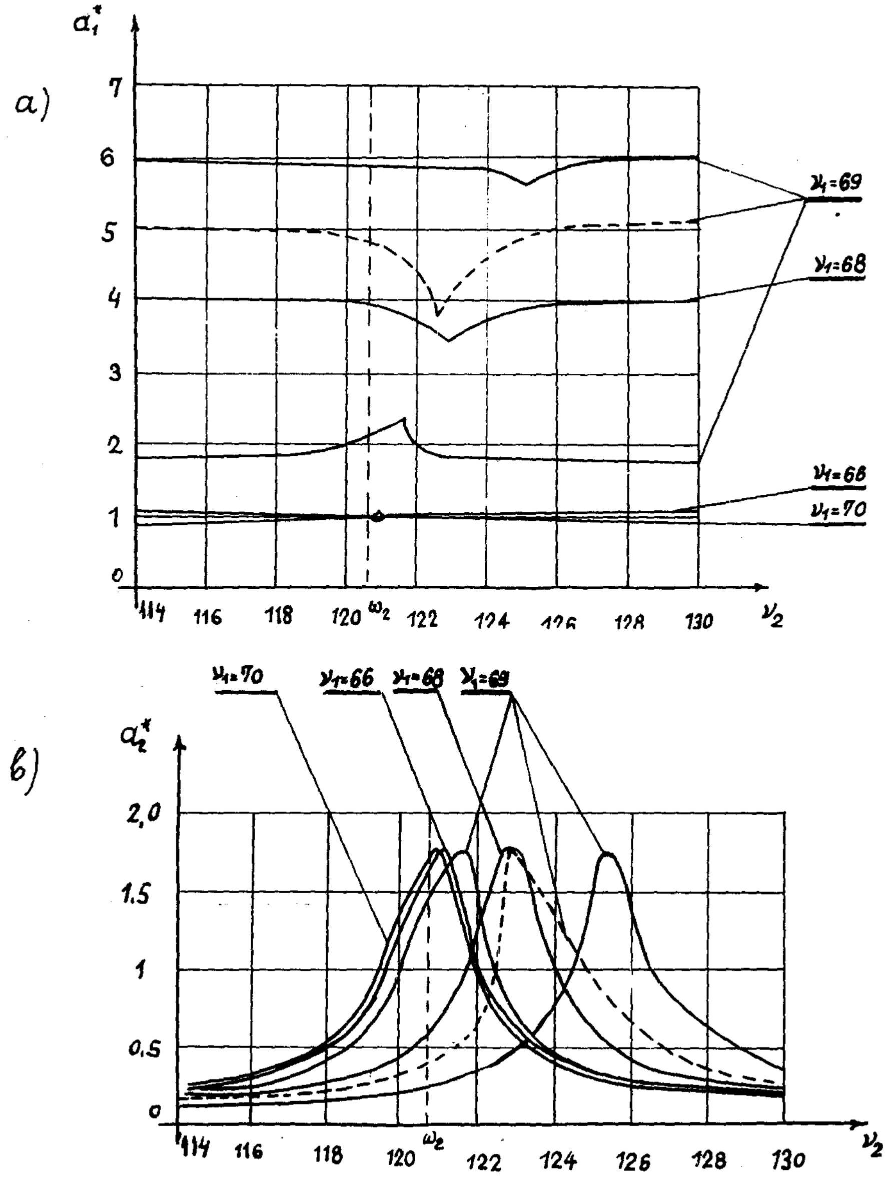


Sl. 2 a Sl. 2 b

kroz povećanje tih amplituda u odnosu na amplitude sa ostalih dela krive. Naglo povećanje amplitude prvog harmonika izaziva povećanje amplitude $\overset{*}{a}_2$ za $\nu_2 >$ > 126 [$\sec^{-1}$].

Na slici br. 3 a i b., prikazane su familije amplitudno-frekventnih krivih $\overset{*}{a}_1(\nu_1, \nu_2)$ i $\overset{*}{a}_2(\nu_1, \nu_2)$ za diskretne vrednosti frekvencija $\nu_1 \in [66, 70$ [$\sec^{-1}$]]. Sa promenom diskretnih vrednosti ν_1 do $\nu_1 < 69$ [$\sec^{-1}$] amplitudno-frekventne krive $\overset{*}{a}_1(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika su skoro prave sa deformacijama u rezonantnom opsegu $\nu_2 \in [\sim 120, \sim 124$ [$\sec^{-1}$]], koje se izražavaju kroz neznatno smanjenje amplituda. Nagla povećanja stacionarne amplitude drugog harmonika izazivaju neznatna smanjenja stacionarne amplitude $\overset{*}{a}_1(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika. Za $\nu_1 = 69$ [$\sec^{-1}$] postoje tri grane amplitudno-frekventne karakteristike $\overset{*}{a}_1(\nu_1, \nu_2)$ sa velikim, srednjim (nestabilnim) i malim amplitudama i neznatnim deformacijama u rezonantnom opsegu $\nu_2 \in [120, 126$ [$\sec^{-1}$]]. Uticaj drugog harmonika na amlpitudu i fazu prvog harmonika je neznatan.

Sa promenom diskretnih vrednosti ν_1 do $\nu_1 < 69$ [$\sec^{-1}$] amplitudno-frekventne krive $\overset{*}{a}_2(\nu_1, \nu_2)$ drugog harmonika su sa jednom karakterističnom granom i sa maksimumima amplituda, koji su pomereni ka višim frekvencijama od ω_2. Za ν_1 oko 69 [$\sec^{-1}$] javljaju se tri grane amplitudno-frekventne krive od kojih je jedna srednja nestabilna. Za $\nu_1 > 69{,}5$ [$\sec^{-1}$] amplitudno frekventne krive $\overset{*}{a}_2(\nu_1, \nu_2)$ su sa jednom granom i maksimumi amplituda se pomeraju ka nižim frekvencijama i bliže ω_2. Zaključak je da je uticaj prvog harmonika na amplitudu i fazu drugog harmonika znatan u uskom opsegu frekvencije ν_1, nešto pomerenom ka višim frekvencijama od ω_1. Uticaj drugog harmonika na prvi je neznatan.



Slika 3a i b

Pojava rezonantnog skoka amplitude a_1^* prvog harmonika je sa veće amplitude na manju pri kontinualnom povećanju diskretnih frekvencija ν_1, i sa manje na veću vrednost amplitude pri kontinualnom smanjenju diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 što se može uočiti sa slike br. 1. Sa slike br. 2. pojava rezonantnog skoka amplitude a_2^* drugog harmonika je sa manje vrednosti na veću amplitudu pri porastu diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 do $\nu_2 \approx 122$ [sec^{-1}] i sa veće na manju pri opadanju ν_1, dok na primer $\nu_2 = 125$ [sec^{-1}] je obrnut slučaj. Specifičnosti rezonantnog skoka su vezane za stabilnost amplituda i faza harmonika, odnosno samog oscilatornog režima.

Primer **II** — Male oscilacije plitke cilindrične ljuske na elastičnoj podlozi opisane su sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 \Phi - R\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0,$$

$$R\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + D\nabla^4 w + \rho\, hR^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + cR^4 w = \varepsilon R^4 \left(-\beta w^3 - \delta\frac{\partial w}{\partial t} + E_1 \sin\theta_1 + E_2 \sin\theta_2\right),$$

sa graničnim uslovima za slobodno-oslonjenu konturu

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 0\\ \alpha = \dfrac{l}{R}\end{array}\right\} w = v = M_1 = 0, \quad \left.\begin{array}{l}\beta = 0\\ \beta = \beta_0\end{array}\right\} u = w = M_2 = 0,$$

i početnim uslovima datim u [9, 11], oblika talasa prva dva harmonika sopstvenih neporemećenih oscilacija u čijim opsezima su frekvencije ν_1 i ν_2 prinudnih sila $\varepsilon E_1 \sin\theta_1$ i $\varepsilon E_2 \sin\theta_2$ gde je Φ naponska funkcija, a w ugib ljuske. Za numeričke podatke iz [9, 11], prve dve sopstvene kružne frekvencije za zadatu ljusku su $\omega_{11} = 391{,}62$ [sec^{-1}] i $\omega_{12} = 596$ [sec^{-1}] dok je sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitude i faze dvo-frekventnih oscilacija

$$\frac{dR_{11}^{(2)}}{dt} = -1{,}60256\, R_{11}^{(2)} - \frac{99{,}762}{391{,}62 + \nu_1}\cos\varphi_{11},$$

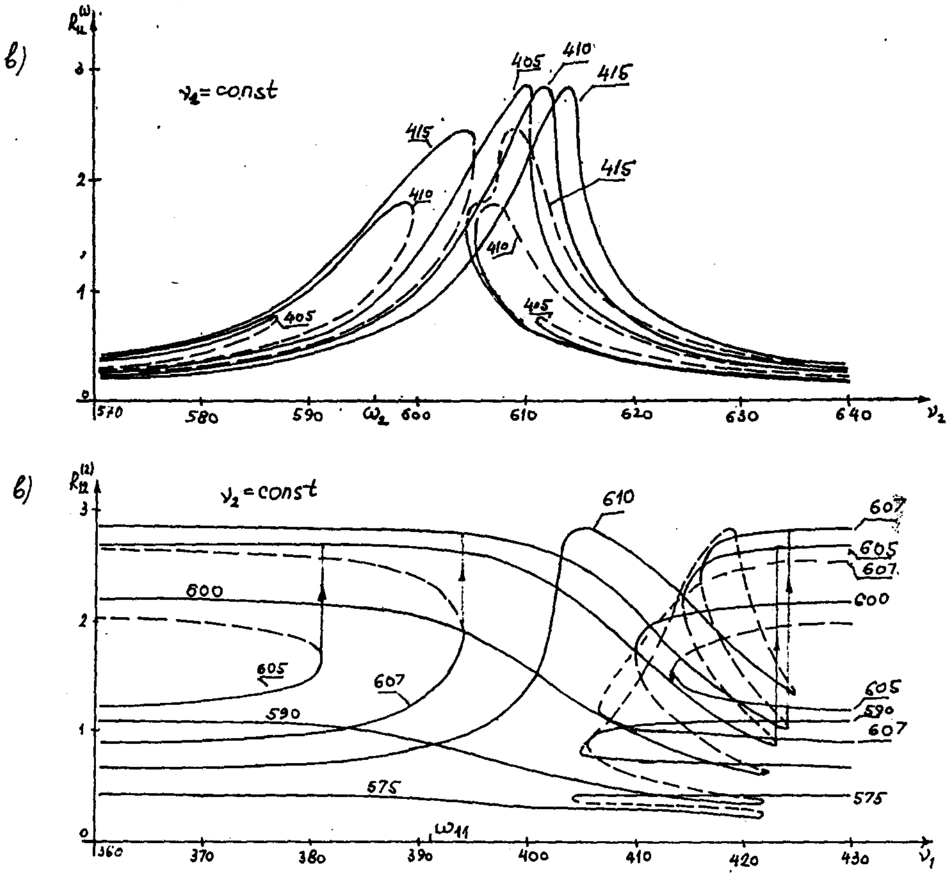
$$\frac{d\varphi_{11}}{dt} = 391{,}92 - \nu_1 + 2301{,}8\left[9\left(R_{11}^{(2)}\right)^2 + 8\left(R_{12}^{(2)}\right)^2\right] + \frac{99{,}762}{R_{11}^{(2)}(391{,}62 + \nu_1)}\sin\varphi_{11},$$

$$\frac{dR_{12}^{*}}{dt} = -1{,}602\, R_{12}^{(2)} - \frac{110{,}85}{596{,}0 + \nu_2}\cos\varphi_{12},$$

$$\frac{d\varphi_{12}}{dt} = 596{,}0 - \nu_2 + 1512{,}47\left[9\left(R_{12}^{(2)}\right)^2 + 8\left(R_{11}^{(2)}\right)^2\right] + \frac{110{,}85}{R_{12}^{(2)}(596{,}0 + \nu_2)}\sin\varphi_{12}.$$

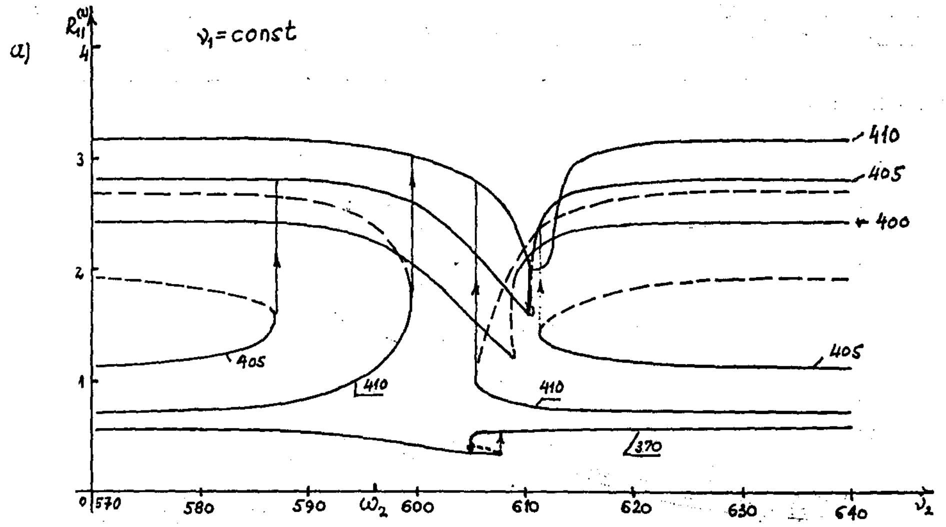
Na slikama br. 4 a i b., 5 a i b., i 6 a i b., predstavljene su familije amplitudno-frekventnih krivih prvog i drugog harmonika aproksimacije rešenja pomeranja w stacionarnog rezonantnog stanja za kontinualnu promenu diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 i ν_2 prinudnih sila u rezonantnim frekventnim opsezima $\nu_1 \in [360, 430$ [sec^{-1}]] i $\nu_2 \in [570, 640$ [sec^{-1}]]. Fazno-frekventne krive nisu prikazane zbog obima članka.

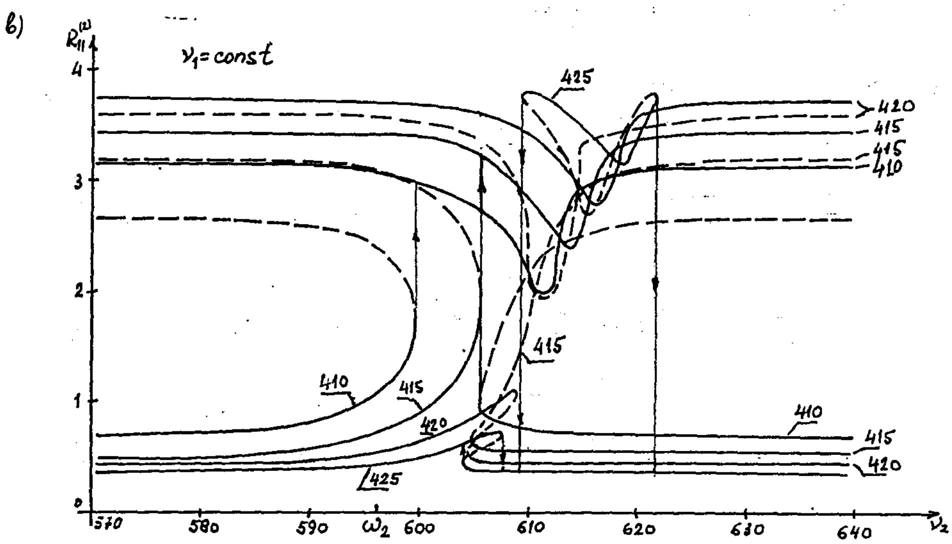
Amplitudno-frekventne krive $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika na slici br. 4. su slične međusobno za frekventni opseg $\nu_2 \in [570, <604$ [sec^{-1}]]. Uočava se da se za veće vrednosti $\nu_2 > 590$ [sec^{-1}] skraćuje frekventni opseg nestabilnih amplituda stim što se leva granica opsega pomera ka višim frekvencijama, dok se desna granica neprimetno pomera u istom smeru. Isto važi i za amplitudu drugog harmonika $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ sa uočljivom tendencijom porasta sa povećanjem diskretnih vrednosti frekvencije ν_2.



Slika 4 a i b

U frekventnom opsegu $\nu_2 \in [604, \sim 609$ [sec^{-1}]] javljaju se dve nove dopunske grane amplitudno-frekventne karakteristike i to jedna na levoj, a druga na desnoj strani što je prikazano na slici br. 4a. Leva dopunska grana amplitude $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ za $\nu_2 \in [604, \sim 609$ [sec^{-1}]] prvog harmonika se nalazi iznad osnovne grane amplitudno-frekventne krive, a desna ispod nje. Delovi dopunskih grana amplitudno-frekventnih krivih bliži osnovnoj grani su sa nestabilnim amplitudama. Na slici br. 4.b, prikazana je familija amplitudno-frekventnih krivih $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ za diskretne vrednosti ν_2. U opsegu $\nu_2 \in [\sim 604, \sim 609$ [sec^{-1}]], amplitudno-frekventna kriva drugog harmonika ima tri grane, osnovnu i dve dopunske, koje su obe ispod osnovne grane. Delovi dopunskih grana bliže osnovnoj grani su takođe sa nestabilnim amplitudama.





Slika 5 a i b

Sa kontinualnim porastom diskretnih vrednosti frekvencija ν_2 u opsegu $\nu_2 \in [\sim 604, \sim 609]$ [sec^{-1}]] delovi dopunskih grana amplitudno-frekventne karakteristike se međusobno udaljavaju, dok same dopunske grane »idu u susret« (približavaju se) jedna drugoj. Za $\nu_2 = 610$ [sec^{-1}] uočava se da je došlo do »stapanja« (»poništavanja«) delova dopunskih grana (nestabilne amplitude) sa delovima osnovne grane amplitudno-frekventne krive čime smo dobili samo jednu granu, kao da je ona nastala od delova dopunskih grana (stabilne amplitude), i delova osnovne grane amplitudno-frekventne karakteristike, kako prvog tako i drugog harmonika. Ovo se javlja za $\nu_2 \approx 610$ [sec^{-1}]$> \omega_{12}=596$ [sec^{-1}] jer sistem ima tvrdu nelinearnu karakteristiku.

Pojavu dopunskih grana za $\nu_2 \in [\sim 604, \sim 609$ [sec^{-1}]] i »talasanje« vrhova osnovne grane za $\nu_2 \in [\sim 610$ [sec^{-1}], ~ 622 [sec^{-1}]] objašnjavamo međusobnim uticajem prvog i drugog harmonika u rezonantnom opsegu $\nu_2 \in [\sim 604, \sim 609, \sim 622$, [$sec^{-1}$]], druge sopstvene kružne frekvencije $\omega_{12}=596$ [sec^{-1}], koji je zbog tvrde nelinearne karakteristike sistema pomeren ka višim frekvencijama.

U frekventnom opsegu $\nu_2 \in [\sim 610, \sim 624$ [sec^{-1}]], na amplitudno-frekventnim krivim prvog i drugog harmonika $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ i $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ uočljivo je »krivljenje« (»talasanje«) vrhova (lokalnih ekstremnih vrednosti) amplitudno-frekventnih krivih i približavanje delova grana sa stabilnim i nestabilnim amplitudama. Za $\nu_2 \geqslant 625$ [sec^{-1}] se uočava da je amplitudno frekventna kriva $R_{11}^{(2)}$ prvog harmonika slična onima koje imamo za $\nu_2 < 600$ [sec^{-1}], dok je amplitudno-frekventna kriva drugog harmonika $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ »zaokrenuta« za 180°

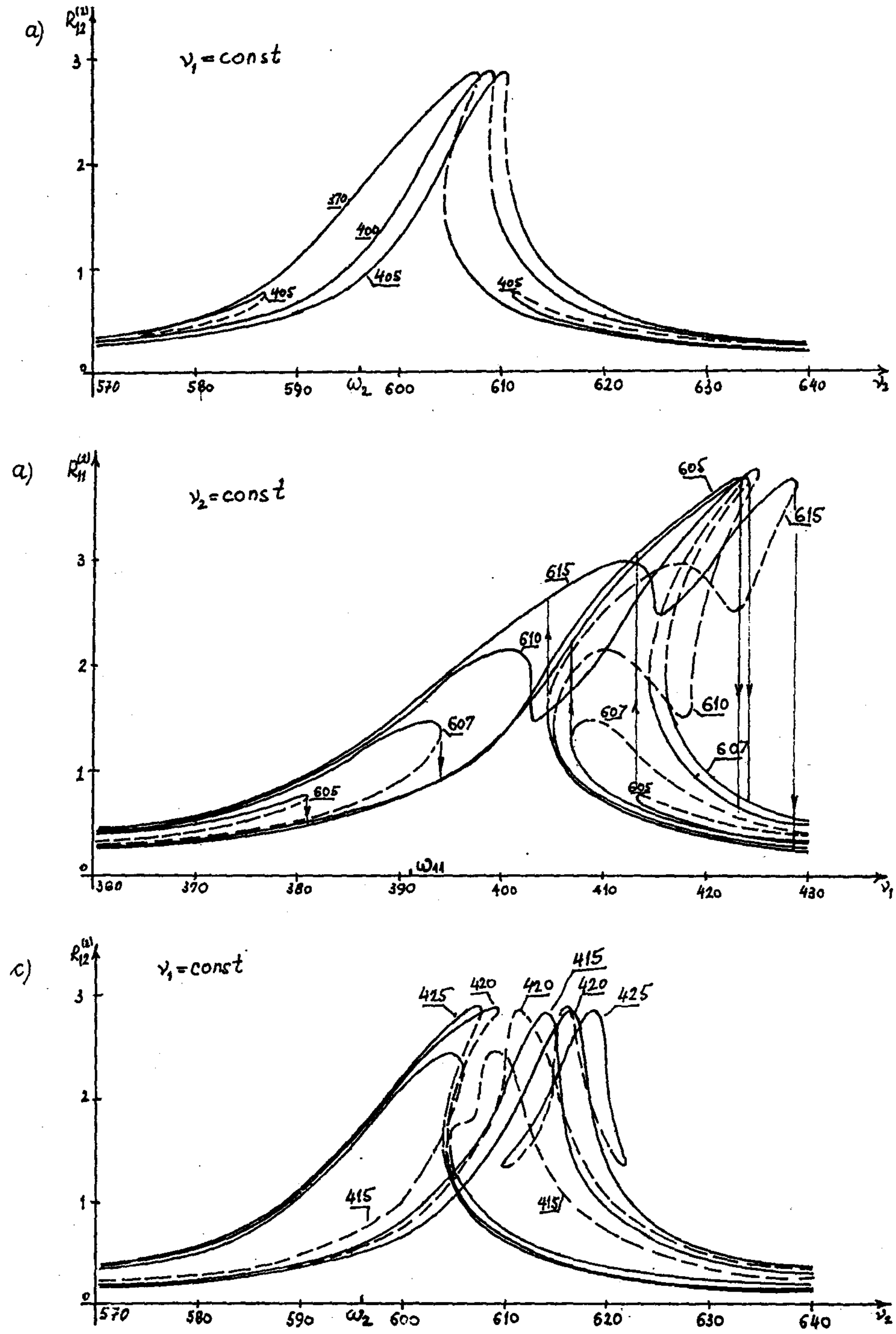
Slične zaključke možemo izvesti i za fazno-frekventne karakteristike.

Na slikama br. 5 a i b., i 6 a i b., prikazane su familije amplitudno-frekventnih karakteristika za diskretne vrednosti frekvencije $\nu_1 = const.$ Za frekventni opseg $\nu_1 \in [\sim 370, \sim 402$ [sec^{-1}]] uočava se porast amplitude prvog harmonika $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ i suženje frekventnog opsega ν_2 u kome se javljaju nestabilne amplitude sa porastom diskretnih vrednosti frekvencije ν_1, s tim što se leva granica pomera ka višim frekvencijama dok se desna granica skoro ne pomera. Dopunske grane, pored osnovne grane amplitudno-frekventne karakteristike $R_{11}^{(2)}$ prvog i $R_{12}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ drugog harmonika se javljaju u frekventnom opsegu $\nu_1 \in [\sim 402, \sim 417$ [sec^{-1}]], tj. za $\nu > 402$ [sec^{-1}]. Delovi ovih dopunskih grana koji su bliži osnovnoj grani su sa nestabilnim amplitudama. Sa kontinualnim porastom diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 »otvor« dopunskih grana se širi i one »idu u susret« jedna drugoj. Istovremeno se osnovna grana amplitudno-frekventne krive prvog harmonika pomera na više sa tendencijom ispravljanja (ekstremna vrednost je manje izražena).

Za $\nu_1 = 420\, sec^{-1}$ amplitudno-frekventna kriva $R_{11}^{(2)}(\nu_1, \nu_2)$ prvog harmonika sastoji se iz tri grane sa malim, srednjim (nestabilnim) i velikim amplitudama koje kao da su nastale »spajanjem« dopunskih grana i »razdvanjem« na tri grane sa stabilnim i nestabilnim ili sa samo nestabilnim amplitudama. Kao da je nastalo »spajanje« delova dopunskih grana sa nestabilnim amplitudama čime je nastala nova srednja grana amplitudno-frekventnog grafika, dok je donja grana formirana od stabilnih delova dopunskih grana i jednog odsečka desne dopunske grane sa nestabilnim amplitudama, tako da je to sada grana sa stabilnim i na jednom delu nestabilnim amplitudama.

Slični su zaključci i za amplitudno-frekventnu karakteristiku $R_{12}^{(2)}$ drugog harmonika u istom frekventnom opsegu.

Za $\nu_1 = 425$ [sec^{-1}] uočava se da na amplitudno-frekventnoj krivoj prvog harmonika postoje dve grane, od kojih je jedna zatvorena kriva (»osmica«) koja je nastala »vezivanjem« osnovne grane i dopunske grane (sa nestabilnim amplitudama). Isti je zaključak i za amplitudno-frekventnu krivu $R_{12}^{(2)}$ drugog harmonika. »Sažimanje« zatvorene krive (»osmice«) se nastavlja do $\nu_1 = 433$ [sec^{-1}] i na toj frekvenciji se gubi, pa na amplitudno-frekventnim karakteristikama ostaje po jedna


a)
ν_1 = const
370
400
405
570 580 590 ω_2 600 610 620 630 640
a)
ν_2 = const
605
615
610
607
360 370 380 390 ω_{11} 400 410 420 430
c)
ν_1 = const
425
420
415
570 580 590 ω_2 600 610 620 630 640

Slika 6 a, b i c

grana slična onim koje smo dobili za $\nu_1 = 370$ [sec^{-1}], stim što je grana amplitude prvog harmonika vrhom okrenuta na gore.

Iz izloženog se zaključuje da je izraženiji uticaj prvog harmonika na drugi, nego drugog na prvi u uskom rezonantnom frekventnom opsegu prve odnosno druge frekvencije, koji su zbog karaktera nelinearnosti pomereni ka višim frekvencijama. Za slučaj meke karakteristike nelinearnosti sistema rezonantni opsezi bi bili pomereni ka nižim frekvencijama.

Pojava rezonantnog skoka je uočljiva na svim amplitudno-frekventnim karakteristikama i prvog i drugog harmonika a u tačkama prelaska sa stabilnih na nestabilne amplitude. Na slikama 4, 5 i 6. su strelicom prikazani mogući rezonantni skokovi. Na primer, na sl. 4 a i b., se uočava da sa povećanjem diskretnih vrednosti frekvencija ν_1 kod amplitude prvog harmonika $R_{11}^{(2)}$ nastupa skok sa većih na manje vrednosti amplituda, a kod amplitude $R_{12}^{(2)}$ drugog harmonika sa manjih vrednosti na veće vrednosti amplituda, i to u dva skoka.

Pri opadanju diskretne vrednosti frekvencije ν_1, $R_{11}^{(2)}$, ima skok sa manje na veću vrednost amplitude, dok $R_{12}^{(2)}$ ima skok sa većih vrednosti na manje vrednosti amplitude. Ovo važi za oba rezonantna skoka. Karakter rezonantnih skokova zavisi i od karaktera nelinearnosti sistema.

Uopštavajući zaključke kako za diskretni sistem sa dva stepena slobode oscilovanja iz primera 1. i elastično telo iz primera 2., gde se u oba slučaja radi o nelinearnostima istog tipa (tvrda karakteristika) i dvo-frekvento-stacionarnoj analizi dolazimo do sličnih zaključaka o uzajamnom uticaju harmonika. Uočljivo je takođe da je kod elastičnih tela izraženiji uticaj višeg harmonika na osnovni nego što je to slučaj kod diskretnih sistema. U konkretnom primeru oscilovanja ljuske taj uticaj se izražava i u pojavi dopunskih krivih i »talasanju« vrha amplitudno-frekventne krive, dok se kod posmatranog diskretnog sistema taj uticaj ogleda samo u neznatnoj promeni vrednosti amplituda.

Obim rada nije omogućio iznošenje rezultata istraživanja uzajamnog uticaja harmonika pri nestacionarnim dvo-frekventnim asimptotskim analizama.

Literatura

[1] Митропольский Ю. А., *Проблеми асимптотической теории нестационарных колебаний*, „Наука", Москва 1964.

[2] Митропольский Ю. А. — Мосеенков Б. И., *Асимптотические решения уравнений в частных производных*, „Висшая школа" Киев 1976.

[3] Hedrih (Stevanović) K., *Izabrana poglavlja nelinearnih oscilacija*, Niš 1975.

[4] Hedrih K. *Studija metoda teorije nelinearnih oscilacija*, Niš 1979.

[5] Hedrih K. i drugi, *Nelinearne oscilacije sistema sa više stepeni slobode oscilovanja*, Naučno-istraživački projekat, Niš, 1979-1981.

[6] Стеванович-Хедрих К., *Двухчастотные нестационарные вынужденные колебания балки*, „ Математическая физика" вып. 12, 1972.

[7] Hedrih K. — Kozić R., *Stacionarni i nestacionarni režimi nelinearnih oscilacija tri diska na lakom elastičnom vratilu*, Saopštenje u Institutu mehanike Beograd 9. februar 1983.

[8] Hedrih K., *One frequency proper nonlinear vibration of thin plate*, Teorijska i primenjena mehanika br 4., Beograd 1978.

[9] Hedrih K. — Pavlović R., *O osobinama rezonantnog skoka u elastičnim sistemima na primeru dvofrekventh nelinearnih oscilacija plitke cilindrične ljuske*, Saopšteno u Institutu matematike, Beograd 16. februara 1983.

[10] Kozić P., *Izučavanje nelinearnih torzijskih oscilacija vratila asimptotskom metodom*, Magistarski rad, Beograd 1982.

[11] Pavlović R., *Prilog nelinearnim oscilacijama plitkih cilindričnih ljuski*, Magıstarski rad, Niš 1982.

О ВЗАИМНОМ ВЛИЯНИИ ГАРМОНИК В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Резюме

В статье пользуя стационарнный асимптотический двухчастотнный анализ нелинейных систем с малым параметром даются выводы о взаимном влиянии гармоник в нелинейной системе с конечним числом степеней свободы и в распределеной системе. Пользуясь стационарнным двухчастотнным анализом стационорнога режима колебаний указывается на явление однога или више резонантных скочков для непрерывного увеличения или уменьшения стационарнных частот вынужденных сил или моментов, как последействие взаимного влияния гармоник в резонантном опсеге соответствующей частоте.

Dr Katica Hedrih, v. prof. 18000 Niš Vojvode Tankosića 3/22
Mr Predrag Kozić, asistent 18000-Niš Stanka Paunovića 43/2
Mr Ratko Pavlović, asistent 18000-Niš Braće Taskovića 79/16

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle serie, tome 4 (12), 1984.

Članak posvećen Prof. Dr Tatomiru Anđeliću, povodom osamdesetogodišnjice njegova života

JEDAN NOVI PRISTUP TEORIJI RIEMANNOVA PROSTORA

Z. Janković

1. Uvod

Razvoj egzaktnih znanosti, naročito u 19. i 20. stoljeću, zahtijevao je i razvoj matematičkih područja i metoda potrebnih za njihovu egzaktnu obradu. Tako je istraživanje osobina prostorno-vremenskog kontinuuma zahtijevalo razvoj teorije Euklidova prostora u klasičnoj fizici, prostora Minkowskog u specijalnoj teoriji relativnosti i Riemannova prostora u općoj teoriji relativnosti, s razvojem pripadnog vektorskog i tenzorskog računa. Nadalje razvitak kvantne teorije zahtijevao je teoriju Hilbertova prostora, uvođenje Diracovih bra i ket vektorskih oblika kao i teoriju 2- i 4-spinora. Razvitak unificirane teorije polja zahtijeva, pak, prostore još razvijenije strukture i pripadnu teoriju objekata u njima (usporediti na pr. [1]).

U nastojanju da zadovolji tom zahtjevu autor je razvio svoju poopćenu shemu vektorskog i tenzorskog računa (osnove izložene u [2], [3], [4], [5]), koja kao jedinstvena teorija obuhvaća i sve prije spomenute slučajeve kao specijalne slučajeve. U ovom članku pokazat ćemo kako je teorija Riemannova prostora ([6], usporediti na pr. [7], [8], [9]) vrlo jednostavan specijalni slučaj poopćene sheme. No, da to pokažemo, ponajprije je potrebno iznijeti u sažetom obliku osnovne osobine poopćene sheme, kako bi čitalac bio s njome dovoljno upoznat.

2. Poopćena shema vektorskog i tenzorskog računa

A) Algebra

Svakoj točki P m-dimenzionalne mnogostrukosti Ω_m pridružen je n-dimenzionalni vektorski prostor $X_n(\Omega_m)$, odnosno njegova četiri oblika, eksplicitno pisana u jednom sistemu pripadnih baza $B(e)$ [2]

$$\begin{aligned} &\text{bra-gore } a^{<} = a_i e^i \in X_n^{<}, \quad \text{bra-dolje } a_{<} = a^i e_i \in X_{n<}, \\ &\text{ket-gore } {}^{>}a = {}_i a^i e \in {}^{>}X_n, \quad \text{ket-dolje } {}_{>}a = {}^i a_i e \in {}_{>}X_n, \end{aligned} \tag{1}$$

$>$ i $<$ su znaci za valencije, $a(i)$ komponente a $e(i)$ bazni vektori; dok se ovisnost o točki $P(x^k)$ podrazumijeva.

Vektorsku strukturu vektorskog prostora $X_n(\Omega_m)$ određuju polja fundamentalnog $F(\Omega_m)$ [2] i transpozijskog $T(\Omega_m)$ [4] operatora. Vektorsku strukturu $X_n(\Omega_m)$ određuju, dakle, operatori F i T dani u jednom sistemu pripadnih baza i grupa transformacijskih operatora $t(\Omega_m)$, $\bar{t}(\Omega_m)$ [5] među sistemima pripadnih baza.

Direktni (tenzorski) produkt pojedinih vektorskih formi (1) (znak $\otimes$: može se ispustiti među ket i bra formom, ili samo bra (ket) formama: asocijativan, distributivan, dopušteno izlučivanje skalarnog faktora) tvori vektorski prostor direktnog (tenzorskog) produkta (rang jednak broju faktor prostora). Kontrakcija direktnog produkta, tj. pridruživanje skalara uređenom paru bra i ket vektorskih formi istog vektorskog prostora, jest skalarni produkt (znak $\underline{\otimes}$: može se ispustiti među bra i ket formom).

Fundamentalni operator F je nedegenerirani tenzor drugog ranga, koji ostvaruje uzajamno jednoznačnu vezu među bra (ket) formama »gore« i »dolje« istog vektora, a njegove komponente u svakoj bazi $B(e)$ su skalarni produkti baznih vektora

$$e^i{}_j e = {}^i\delta_j, \quad e_i{}^j e = {}_i\delta^j, \quad e^{ij} e = {}^i g^j, \quad e_{ij} e = {}_i g_j, \tag{2 a}$$

tj.

$$_>E^< = {}_>E^<{}_>E^<, \quad {}^>E_< = {}^>E_<{}^>E_<, \quad {}_>g_< = {}_>E^{<>}E_<, \quad {}^>g^< = {}^>E_{<>}E^<, \tag{2 b}$$

gdje zbog uzajamne jednoznačnosti treba postajati

$$_>g_<{}^>g^< = {}_>E^<, \quad {}^>g^<{}_>g_< = {}^>E_<. \tag{2 c}$$

Operatori E su operatori identiteta, a g operatori spuštanja i dizanja valencije. Od četiri forme fundamentalnog operatora jedna g forma je slobodna i njezinih n^2 komponenata predstavlja slobodne parametre.

Zbog (2) skalarni produkt vektora možemo pisati u obliku.

$$\underline{a} \underline{\otimes} \underline{b} = a_<{}^>b = a_{<>}b = a^<{}_>b = a^{<>}b. \tag{3}$$

Transpozicijski operator T je nedegenerirani tenzor drugog ranga, koji ostvaruje uzajamno jednoznačnu vezu među bra i ket vektorskim formama istog vektora, na pr.

$$a^< = T^{<<}{}_>a, \quad T^{<<} = T_{ij}\, e^i e^j; \quad {}_>a = a^<{}_{>>}T, \quad {}_{>>}T = {}_ie\,{}_je\,{}^{ij}T, \tag{4 a}$$

gdje zbog uzajamne jednoznačnosti treba postojati

$$T^{\leq <} \underline{\otimes}_{\geq >} T = {}_>E^<, \quad T^{<\leq} \underline{\otimes}_{>\geq} T = {}_>E^<. \tag{4 b}$$

Za preostala tri para oblika transpozicijskog operatora postoje relacije analogne (4), koje se mogu dobiti primjenom fundamentalnog operatora. Od osam formi transpozicijskog operatora, zbog relacija analognih (4 b), samo je jedna forma nezavisna i njezinih n^2 komponenata predstavlja slobodne parametre.

Skalarni produkt (3) možemo izraziti pomoću komponenata vektora iste forme, na pr.

$$\underline{a} \underline{\otimes} \underline{b} = a_<{}^>b = a_<(b_<{}^{>>}T) = a^i b^j{}_{ji}T. \tag{5}$$

S transpozicijskim operatorom može biti povezan i operator konjugacije (slučaj a) bez konjugacije, slučaj b) s konjugacijom) [10]. U slučaju a), koji u daljem razmatramo, simetrični (antisimetrični) transpozicijski operator uzrokuje komutativnost (antikomutativnost) skalarnog produkta (5).

Transformacijski operatori [5] su nedegenerirani operatori drugog ranga, koji uspostavljaju uzajamno jednoznačnu vezu među formama istog vektora u raznim bazama $B(e)$ i $B(e')$,

$$
{}_{e}t_{e'};\ {}_{>}t^{<'} = {}_{>}E^{<}{}_{>}E'^{<} = {}_{i}e\, e^{i}{}_{j}e'\, e'^{j} = {}_{i}e\, {}^{i}t_{j}\, e'^{j},
$$

$$
{}^{>}t_{<'} = {}^{>}E_{<}{}^{>}E'_{<}; \tag{6 a}
$$

$$
{}_{e'}\bar{t}_{e};\ {}_{>'}\bar{t}^{<} = {}_{>}E'^{<}|{}_{>}E^{<}|,\ {}^{>'}\bar{t}_{<} = {}^{>}E'_{<}{}^{>}E_{<},
$$

gdje su t i $\bar{t}$ inverzni operatori, a svaki oblik (6a) za sebe odražava grupno svojstvo, na pr.

$$
{}^{>}t_{<''} = {}^{>}t_{<'}{}^{>'}t_{<''} = {}^{>}E_{<}{}^{>}E'_{<}{}^{>}E'_{<}{}^{>}E''_{<} = {}^{>}E_{<}{}^{>}E''_{<}. \tag{6 b}
$$

Budući da su pripadni transformacijski operatori inverzni, imamo dvije slobodne grupe transformacijskih operatora (6a).

B) **Analiza**

Osnovu vektorske analize predstavlja pojam apsolutnog diferencijala (derivacije), koji je definiran ovako [3]

$$
\Delta A = \nabla_k A\, dx^k = A(Q) - A(P)_Q;\ P(x^k),\ Q(x^k + dx^k) \in \Omega_m, \tag{7}
$$

gdje $A(Q)$ označuje vrijednost polja u točki Q, a $A(P)_Q$ paralelno prenijetu vrijednost polja iz točke P u točku Q.

Apsolutni diferencijal (derivacija) podvrgava se ovim pravilima

$$
1)\ \Theta(A+B) = \Theta A + \Theta B, \qquad \Theta \equiv \nabla_k,\ \Delta \tag{8 a}
$$

$$
2)\ \Theta(A \cdot B) = (\Theta A)\cdot B + A \cdot (\Theta B),\ (\cdot\,\text{svaka vrsta množenja}).
$$

Posebno se još zahtijeva

$$
3)\ \Delta f = \nabla_k f dx^k \equiv df = \partial_k f dx^k,\ f(x^k)\ \text{skalarno polje},
$$

$$
\begin{aligned}
&4)\ \Delta^i e = \nabla_k{}^i e\, dx^k = {}^i({}_j\Gamma)_k{}^j e\, dx^k,\\
&\Delta_i e = \nabla_k{}_i e\, dx^k = {}_i({}^j\Gamma)_k{}_j e\, dx^k,\\
&\Delta e^i = \nabla_k e^i\, dx^k = (\Gamma_j)^i_k\, e^j\, dx^k,\\
&\Delta e_l = \nabla_k e_i\, dx^k = (\Gamma^j)_{ki} e_j\, dx^k.
\end{aligned} \tag{8 b}
$$

$4\ mn^2$ veličina Γ su koeficijenti koneksije.

Vektorska analiza određena je apsolutnim diferencijalom (derivacijom) fundamentalnog, transpozicijskog i transformacijskih operatora.

Iz (8) i (2) slijedi da apsolutni diferencijal (derivacija) fundamentalnog operatora identički iščezava, $\Delta F \equiv 0$, tj. da je veza između pripadnih vektorskih formi »gore« i »dolje« invarijantna prema paralelnom pomaku

$$
\begin{array}{lll}
\Delta_{>} E^{<} \equiv 0 & \text{tj.} & {}_{i}({}^{j}\Gamma)_{k} + (\Gamma_{i})^{j}_{k} = 0, \\
\Delta^{>} E_{<} \equiv 0 & & {}^{i}({}_{j}\Gamma)_{k} + (\Gamma^{i})_{kj} = 0, \\
\Delta_{>} g_{<} \equiv 0 & & \partial_{k}\, {}^{i}g^{j} = (\Gamma_{r})^{i}_{k}\, {}^{r}g^{j} + {}^{i}g^{r\,j}({}_{r}\Gamma)_{k}, \\
\Delta^{>} g^{<} \equiv 0 & & \partial_{k}\, {}_{i}g_{j} = (\Gamma^{r})_{ki}\, {}_{r}g_{j} + {}_{i}g_{r\,j}({}^{r}\Gamma)_{k}.
\end{array}
\qquad (9)
$$

Relacije (9) pokazuju da je od $4\,mn^2$ koeficijenata koneksije slobodno $2\,mn^2 - N_F$, N_F broj nezavisnih jednadžbi u (9_3) odnosno u (9_4).

Invarijantnost veze između bra i ket vektorskih formi prema paralelnom pomaku osigurava zahtjev da apsolutni diferencijal (derivacija) transpozicijskog operatora treba identički iščezavati, $\Delta T \equiv 0$. Tako nalazimo na pr.

$$\Delta T_{<<} \equiv 0; \quad \partial_k T^{ij} + T^{rj}(\Gamma^i)_{kr} + T^{ir}(\Gamma^j)_{kr} = 0. \qquad (10)$$

Prema tome od mn^2 koeficijenata $(\Gamma^i)_{kj}$ može biti slobodno $mn^2 - N_T$, N_T broj nezavisnih jednadžbi u (10). Iz (9) i (10) slijedi da su koeficijenti koneksije u $B(e)$ određeni fundamentalnim i transpozicijskim operatorom i da tek specifične osobine tih operatora (na pr. simetričnost) mogu imati za posljedicu da se određeni broj tih koeficijenata može slobodno odabrati.

Apsolutni diferencijal (derivacija) transformacijskih operatora, zbog (6) i (9), također identički iščezava, što u stvarnosti implicite predstavlja zakon transformacije koeficijenata koneksije, na pr.

$$\Delta^{>} t_{<'} \equiv 0; \quad (\Gamma^{\bar{i}})'_{\bar{k}\,\bar{j}} = (\Gamma^{k})_{kj}\, {}_{i}t^{\bar{i}}{}_{\bar{j}}\, t^{j}\, \partial'_{\bar{k}}\, x^{k} - {}_{\bar{j}}\, t^{i}\, \partial'_{\bar{k}}\, {}_{i}t^{\bar{i}}. \qquad (11)$$

Kovarijantni diferencijal (derivacija) $D(D_k)$ i diferencijal (derivacija) paralelnog pomaka $\delta(\delta_k)$ vektorskih komponenata jednostavno su povezani s apsolutnim diferencijalom (derivacijom) samih vektora, na pr.

$$\Delta a_{<} = (Da^i)\, e_i = D_k\, a^i\, dx^k\, e_i = [(d - \delta)\, a^i]\, e_i = [(\partial_k - \delta_k)\, a^i\, dx^k]\, e_i. \qquad (12)$$

Komutator apsolutnih diferencijala (derivacija)

$$
\begin{aligned}
{}[\Delta]\, A &= (\Delta_1 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_1)\, A = [\nabla]_{jk}\, A\, d_1 x^j\, d_2 x^k = (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j)\, A\, d_1 x^j\, d_2 x^k = \\
&= (A\,(P)_{Q_2})_Q - (A\,(P)_{Q_1})_Q,
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

$$P(x^k), \quad Q_1(x^k + d_1 x^k), \quad Q_2(x^k + d_2 x^k), \quad Q(x + d_1 x^k + d_2 x^k) \in \Omega_m,$$

predstavlja razliku paralelno prenijetih veličina polja A putovima PQ_2Q i PQ_1Q. Zbog (7) i (13) $\Theta = [\Delta]$, $[\nabla]_{jk}$ posjeduje osobine (8a). Relacije (8b) poprimaju za (13) ovaj oblik:

$$3')\quad [\Delta]\, f \equiv 0, \qquad (14)$$

$$
\begin{aligned}
4')\quad [\Delta]\, e_i &= [\nabla]_{jk}\, e_i\, d_1 x^j\, d_2 x^k = {}_{i}R_{jk}{}^{r} e_r\, d_1 x^j\, d_2 x^k = {}_{ijk} R^r\, e_r\, d_1 x^j\, d_2 x^k = \\
&= [\partial_j (\Gamma^r)_{ki} - \partial_k (\Gamma^r)_{ji} + (\Gamma^q)_{ki} (\Gamma^r)_{jq} - (\Gamma^q)_{ji} (\Gamma^r)_{kq}]\, e_r\, d_1 x^j\, d_2 x^k,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}[\Delta]\, {}_{i}e &= [\nabla]_{jk}\, {}_{i}e\, d_1 x^j\, d_2 x^k = {}_{r}e^{r}{}_{r}R_{kji}\, d_1 x^j\, d_2 x^k = {}_{r}e^{r}{}_{kj} R_i\, d_1 x^j\, d_2 x^k = \\
&= {}_{r}e\, [\partial_j\, {}_{i}({}^{r}\Gamma)_k - \partial_k\, {}_{i}({}^{r}\Gamma)_j + {}_{i}({}^{q}\Gamma)_k\, {}_{q}({}^{r}\Gamma)_j - {}_{i}({}^{q}\Gamma)_j\, {}_{q}({}^{r}\Gamma)_k]\, d_1 x^j\, d_2 x^k,
\end{aligned}
$$

gdje su i, r vektorski, a j, k koordinatni indeksi. Analogni izrazi dobivaju se i za preostala dva niza baznih vektora ${}^i e$ i e^i. Koeficijente R nazivamo koeficijentima zakrivljenosti i oni su prema (14) potpuno određeni koeficijentima koneksije.

Zbog identičkog iščezavanja apsolutnih diferencijala fundamentalnog (9), transpozicijskog (10) i transformacijskih operatora (11) i komutatori apsolutnih diferencijala tih operatora identički iščezavaju

$$[\Delta] F \equiv 0, \quad [\Delta]\, T \equiv 0, \quad [\Delta]\, t \equiv 0, \quad [\Delta]\, \bar{t} \equiv 0. \tag{15}$$

Relacije (15) odražavaju implicite određene osobine koeficijenata zakrivljenosti, na pr.

$$\begin{aligned} &[\Delta]\, g_{<} \equiv 0; \quad {}_iR_{jkr} + {}_iR_{kjr} = 0, \\ &[\Delta]\, T_{<<} \equiv 0; \quad T^q{}_i\, {}_qR_{jkr} + T_r{}^q\, {}_qR_{jki} = 0, \\ &[\Delta]^{>}{}'\bar{t}_{<} \equiv 0; \quad {}_{\bar r}R'_{\bar j\, \bar k}{}^{\bar i} = {}_rR_{jk}{}^i\, {}_it^{\bar i}\, {}_{\bar r}\bar{t}^r\, \partial'_{\bar k} x^k\, \partial'_{\bar j}\, x^j. \end{aligned} \tag{16}$$

3. Metrički prostor $(GX)_n$

U slučaju jednakih dimenzija $n=m$ možemo vektorsku strukturu $X_n(\Omega_n)$ i strukturu mnogostrukosti Ω_n stopiti u strukturu metričkog prostora tako, da uvedemo vektor pomaka

$$(dx)_{<} = (dx)^i\, e_i; \quad (dx)^i \equiv dx^i, \quad e_i = \frac{[(dx)_{<}]_i}{dx^i}, \quad \forall B(e, x^k). \tag{17}$$

Baza $B(e, x^k)$ postaje tangentnom bazom, a bazni vektori tangentni bazni vektori. Udaljenost točaka $P(x^k)$ i $Q(x^k+dx^k)$, tj. metrika, određena je normom vektora pomaka

$$\overline{PQ}^2 = ds^2 = (dx)_{<}{}^{>}(dx) = (dx)_{<}\, (dx)_{<}{}^{>>}T = dx^i\, dx^j\, {}_{ji}T, \tag{18}$$

odakle vidimo da transpozicijski operator igra ulogu metričkog tenzora u metričkom prostoru $GX_n\,(\Omega_n)$.

Transformacijski operatori za prijelaz među dvije tangentne baze određuju se iz vektora pomaka (17)

$$\begin{aligned} &(dx)_{<} \equiv (dx)_{<} = dx'^{\bar i}\, e'_{\bar i} = dx^i\, e_i, \\ &{}_it^{\bar i} = \partial_i\, x'^{\bar i}, \quad {}_{\bar i}\bar{t}^i = \partial'_{\bar i}\, x^i, \\ &{}^jt_j = {}^jg^i\, \partial_i\, x'^{\bar i}\, {}_{\bar i}g'_{\bar j}, \quad {}^{\bar j}\bar{t}_j = {}^{\bar j}g'^{\bar i}\, \partial'_{\bar i} x^i\, {}_ig_j. \end{aligned} \tag{19}$$

Poopćeni nabla operator

$$^{>}\nabla = {}^ie_i(\nabla) = {}^ie\, \nabla_i = {}^ie\, D_i, \tag{20}$$

omogućuje formulirati Grad, Div i Rot vektorskih i tenzorskih polja.

Transformacijski zakon koeficijenata koneksije slijedi iz izraza (11) i (19). Antisimetrički dio (u vanjskim indeksima) koeficijenata koneksije (11) određuje komponente tenzora (trećeg ranga) torzije ${}^{>>}S_{<}$, budući da se transformira ovako

$$(\Gamma^{\bar{i}})'^{A}_{\bar{k}\bar{j}} = (\Gamma^{i})^{A}_{kj}\, \partial_i\, x'^{\bar{i}}\, \partial'_{\bar{k}}\, x^k\, \partial'_{\bar{j}} x^j, \quad {}^{>>}S_{<} = 2\, (\Gamma^{i})^{A}_{kj}\, {}^{k}e\, {}^{j}e\, e_i. \tag{21}$$

Transformacijski zakon koeficijenata zakrivljenosti slijedi iz (16) i (19)

$$_{\bar{r}}R_{\bar{k}\bar{j}}{}^{\bar{i}} = {}_{r}R_{kj}{}^{i}\, \partial'_{\bar{r}}\, x^r\, \partial'_{\bar{k}}\, x^k\, \partial'_{\bar{j}}\, x^j\, \partial_i\, x'^{\bar{i}}, \tag{22}$$

i oni postaju komponente tenzora zakrivljenosti četvrtog ranga zbog (14).

4. Riemannov prostor

Specijalizacijom fundamentalnog i transpozicijskog operatora (2) i (4) možemo dobiti pojedine vektorske, dakle i metričke prostore. Riemannov prostor predstavlja metrički prostor bez konjugacije (slučaj a)) poopćene sheme karakteriziran time, da su bra i ket „gore" („dolje"), vektorske forme identične (slučaj A)), tj. da je transpozicijski operator u svakoj tangentnoj bazi oblika

$$T_{<}^{<} = \delta^{i}{}_{j}\, e_i\, e^j, \quad {}^{>}{}_{>}T = {}_{i}{}^{j}\delta^{i}\, e_j e, \quad \forall B(e,\ x^k). \tag{23 a}$$

U tom slučaju fundamentalni i transpozicijski operator su identični i simetrični u svakoj tangentnoj bazi

$$F \equiv T, \quad \text{na pr.} \quad T^{ij} = T^{ji} = {}^{i}g^{j} = {}^{j}g^{i}, \quad \forall B(e,\ x^k) \tag{23 b}$$

Zbog (23) možemo upotrebljavati samo jednostrane indekse (na pr. na desnoj strani) i uobičajene nazive kontravarijantni („gore") i kovarijantni („dolje"). Iz (5) slijedi da u slučaju Aa) skalarni produkt postaje komutativan, a iz (18) da metriku određuje simetrični transpozicijski (fundamentalni) operator kao metrički tenzor.

Komponente transformacijskih operatora (19), zbog (23), glase

$$_{i}t^{\bar{i}} = {}^{\bar{i}}\bar{t}_{i} = \partial_i\, x'^{\bar{i}}, \quad {}_{\bar{i}}\bar{t}^{i} = {}^{i}t_{\bar{i}} = \partial'_{\bar{i}}\, x^i. \tag{24}$$

Nadalje, zbog (23) slijedi iz (9) ova veza među koeficijentima koneksije

$$(\Gamma^{i})_{kj} = {}_{j}({}^{i}\Gamma)_{k} = -{}^{i}({}_{j}\Gamma)_{k} = -(\Gamma_{j})^{i}_{k}, \tag{25}$$

pa samo jedan oblik koeficijenata koneksije treba odrediti. Odredbeni sistemi jednadžbi (9), odnosno (10), postaju zbog (23) i (25) identični

$$\partial_k\, {}_{i}g^{s}_{j} = (\Gamma_j)_{ki} + (\Gamma_i)_{kj} = 2\, (\Gamma^{s}_{i})_{kj} \tag{26}$$

i zbog simetrije fundamentalnog operatora (23) određuju $n^2(n+1)/2$ simetričnih (u vektorskim indeksima) dijelova koeficijenata koneksije $(\Gamma^{s}_{i})_{kj}$. Prema tome $n^2(n-1)/2$ antisimetričnih dijelova koeficijenata $(\Gamma^{A}_{i})_{kj}$ mogu se slobodno odabirati.

Koeficijenti koneksije mogu se rastaviti na simetrične i antisimetrične dijelove na ova dva načina

$$(\Gamma_i)_{kj} = (\Gamma^{s}_{i})_{kj} + (\Gamma^{A}_{i})_{kj} = (\Gamma_i)^{s}_{kj} + (\Gamma_i)^{A}_{kj}. \tag{27}$$

Iz (26) i (27) možemo izraziti simetrični dio u vanjskim indeksima koeficijenata koneksije ovako

$$(\Gamma_k)^s_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i\, {}_j g^s_k + \partial_j\, {}_k g^s_i - \partial_k\, {}_i g^s_j) - (\Gamma_i)^A_{jk} - (\Gamma_j)^A_{ik}. \tag{28}$$

Za tenzor zakrivljenosti nalazimo da je potpuno određen s koeficijentima koneksije $(\Gamma^i)_{kj}$, odnosno $(\Gamma_i)_{kj}$. Za njegove komponente nalazimo ove veze neposredno iz (14) i (16)

$$R_{ijkr} = -R_{ikjr}, \quad R_{ijkr} = -R_{rjki}, \quad R_{ijkr} = R_{rkji}. \tag{29}$$

Jednostavnom primjenom relacija (14) i (21) izvodimo za tenzor zakrivljenosti niz značajnih rezultata. Tako dobivamo poopćeni Riccijev identitet ($\underset{ijk}{S}$ ciklička suma)

$$\underset{ijk}{S}\, [\nabla]_{jk}\, e_i = \underset{ijk}{S}\, \nabla_j (S^r{}_{ki}\, e_r),$$

$$\underset{ijk}{S}\, R_{ijk}{}^r = \underset{ijk}{S}\, \{\partial_j S^r{}_{ki} + S^q{}_{ki} (\Gamma^r)_{jq}\}, \quad (\forall r).$$

Nadalje, budući da identički iščezava operator

$$\underset{jkm}{S}\, [\nabla_m [\nabla]_{jk}] = \underset{jkm}{S}\, \{\nabla_m [\nabla]_{jk}] - [\nabla]_{jk} \nabla_m\} \equiv 0,$$

to identički iščezava i izraz

$$\underset{jkm}{S}\, [\nabla_m [\nabla]_{jk}]\, e_i \equiv 0, \quad \forall\, e_i,$$

a taj se pomoću (5), (14) i kovarijantnih derivacija komponenata tenzora zakrivljenosti može napisati u obliku poopćene Bianchijeve relacije

$$\underset{jkm}{S}\, \{D_m (R_{ijkr}) + R_{iqkr}\, S^q{}_{mj}\} = 0, \ (\forall\, i, r). \tag{31}$$

5. **Originalni Riemannov prostor**

Opisani prostor, tj. specijalni slučaj metričkog prostora poopćene sheme (GX_n, slučaj Aa)), mogli bismo nazvati generalizirani Riemannov prostor. Teoriju originalnog Riemannova prostora dobit ćemo iz teorije realnog generaliziranog Riemannova prostora, ako zahtjevamo da tenzor torzije (21), odnosno njegovih $\frac{n^2(n-1)}{2}$ komponenata identički iščezavaju

$$S_{jk}{}^i = 2\,(\Gamma^i)^A_{jk} \equiv 0. \tag{32}$$

Taj zahtjev (32) ekvivalentan je zahtjevu da $n^2(n-1)/2$ komponenata $(\Gamma^A_i)_{jk}$, koje su prema (26) slobodno odaberive, odaberemo u (27) tako, da bude ispunjeno

$$\begin{gathered}(\Gamma_i)^A_{jk} \equiv 0, \quad (\Gamma_i)_{kj} = (\Gamma_i)^s_{kj} = [jk, i] = \frac{1}{2}(\partial_j\, {}_k g^s_i + \partial_k\, {}_i g^s_j - \partial_i\, {}_j g^s_k),\\ (\Gamma^A_i)_{kj} = [jk, i] - (\Gamma^s_i)_{kj} = \frac{1}{2}(\partial_j\, {}_k g^s_i - \partial_i\, {}_j g^s_k), \quad (\Gamma^s_i)_{kj} = \frac{1}{2}\, \partial_k\, {}_i g^s_j.\end{gathered} \tag{33}$$

U originalnom realnom Riemannovu prostoru ([6] i [7], [8], [9]) koeficijenti konekcije (33), zbog (32), su simetrični u vanjskim indeksima, tj. oni su Christoffelovi simboli prve vrsti $[jk, i]$, i potpuno su određeni simetričnim metričkim (fundamentalnim) tenzorom. Nadalje, tenzor zakrivljenosti, zbog (33) i (14), također je potpuno određen simetričnim metričkim tenzorom. Prema tome polje realnog simetričnog metričkog tenzora (u tangentnim bazama) potpuno određuje sve osobine originalnog realnog Riemannova prostora.

Zbog (32) u originalnom Riemannovu prostoru Riccijev identitet (30) glasi

$$S\, R_{ijk}^{\;\;\;\;\;\cdot r} = 0, \quad (\forall r) \tag{30 a}$$

a Bianchijeva relacija (31) poprima oblik

$$\underset{jkm}{S}\, D_m R_{ijkr} = 0, \quad (\forall\, i, r) \tag{31 a}$$

Posebno istaknimo relaciju među komponentama tenzora zakrivljenosti

$$R_{ijkr} = R_{jirk}, \tag{34}$$

koju dobivamo iz (29) višekratnom primjenom Riccijeva identiteta (30a).

Izložena teorija Riemannova prostora vrijedi za ma koju dimenziju n i za ma koju signaturu od g, pa dakle sadrži kao daljnje specijalne slučajeve i teoriju Euklidova prostora kao i neeuklidskih prostora.

Zaključno mogli bismo istaknuti da izložena specijalizacija, tj. teorija Riemannova prostora, kao i neki drugi slučajevi (na pr. teorija 2- i 4-spinornog prostora i njihova veza s četiri-dimenzionalnim prostorom opće (specijalne) teorije relativnosti [11]) pokazuju, koliko je sadržajna i primjenljiva poopćena shema vektorskog i tenzorskog računa.

Literatura

[1] Tonnelat M. A., *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Gauthier-Villars, Paris (1965).

[2] Janković Z., *A contribution to the vector and tensor algebra*, Tensor, N. S. 21 (1970), 151—166.

[3] Janković Z., *A contribution to the vector and tensor analysis*, Tensor, N. S. 21 (1970): I, 167—185; II, 189—203.

[4] Janković Z., *On the transposition operators in a generalized vector and tensor calculus scheme*, Tensor, N. S. 22 (1971), 205—216.

[5] Janković Z., *On the transformation operators in a generalized vector and tensor calculus scheme*, Tensor, N. S. 27 (1973), 143—157.

[6] Riemann B., *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854, Gesammelte Werke 1876.

[7] Eisenhart L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, (1966).

[8] Schouten J. A., *Ricci-calculus*. Springer, Berlin, (1954).

[9] Рашевский P. K., *Римановa геометрия и тензорний анализ, Наука, Москва* (1967).

[10] Janković Z., *On the conjugation in a generalized vector and tensor calculus scheme*, Tensor, N. S. 29 (1975), 217—224.

J a n k o v i ć Z., *On the conjugate vector spaces in a generalized vector and tensor calculus scheme*, Tensor, N. S. **29** (1975), 225—233.

[11] J a n k o v i ć Z., *A new approach to spinor theory*, Tensor, N. S. **32** (1978), 279—292.

J a n k o v i ć Z., *Spinors and the four-dimensional Riemann space, I Algebra, II Analysis*, Tensor, N. S. **36** (1982): I, 137—149: II, 155—174.

A NEW APPROACH TO THE THEORY OF THE RIEMANN SPACE

Dedicated to Prof. Dr. Tatomir Andjelić on the occasion of his eightieth anniversary

Summary

The author's generalized vector and tensor calculus scheme (especially, [2], [3], [4], [5]) was an attempt to create a unified scheme suitable to meet all needs in exact sciences, i.e. in classical, relativistic, quantum physisc and in unified theory. In this paper we show that the Riemann space ([6], also [7], [8], [9]) represents a simple special case of the generalized scheme.

Four forms (1) of the n-dimensional vector space X_n over an m-dimensional manifold Ω_m are related in the one-to-one way by the nondegenerate fundamental (2), transposition (4) operator and the transformation group operators (6).

The vector analysis is based on the notion of the absolute differential (derivative) (7) which should satisfy (8). Invariance to the parallel displacement of the relations between the vector forms is expressed through identical vanishing of the absolute differentials of the fundamental (9) (Γ, coefficients of connection), the transposition (10) and the transformation (11) operators. As a consequence, the commutators of the absolute differentials (13) and (14) of the mentioned operators also vanish identically, (15) and (16), (R, coefficients of curvature).

The metric space $GX_n(\Omega_n)$ is characterized by the equality of the dimensions $n=m$, the existence of the displacement vector (17), the tangent bases and the metrics (18) (the transposition operator is the metric tensor). Furthermore, the transformation operator components have the forms (19), the generalized nable operator (20), the torsion tensor (of the third rank) (21) exist and the coefficients of curvature become components of the fourth-rank curvature tensor.

Now, the generalized Riemann space represents the particular case *Aa)* of the metric space. This case *Aa)* is characterized by the identity and symmetry of the fundamental and transposition operator fields (23) (i. e. by the identity of the

bra and ket forms). Then, the transformation operator components are given by (24) and the coefficients of connection by (25), (26), (27) and (28.) The relations (29), (30) and (31) are valid for the curvature tensor components.

The original Riemann space [6] is a special real case of the generalized Riemann space, characterized by the vanishing of the torsion tensor (32). For the coefficients of connection, the consequence is (33) and for the curvature tensor, the relations are (30a), (31a) and (34). Thus, in the original Riemann space the connection and curvature are completely determined by the real symmetric metric (i. e. fundamental) tensor.

Prof. Dr Zlatko Janković
Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel
Marulićev trg 19, Zagreb

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle serie, tome 4 (12), 1984.

РАВАН-ВРЕМЕ У КОЈЕМ СУ ПУТАЊЕ ИНЕРЦИОНИХ КРЕТАЊА КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ

Марко Д. Леко

У општој теорији релативности метрика простор-времена је последица расподеле материје. Тако, материјална тачка одређује метрику познату као Шварцшилдово решење, у односу на које путање материјалних тачака у 3-простору нису конусни пресеци и која даје добро познате прецесије планетских перихела у Сунчевом гравитационом пољу.

Природно је поставити питање: да ли је могуће наћи такву метрику простор-времена да 3-путање материјалних тачака буду конусни пресеци?

Довољно је, наравно, ограничити се на тражење метрике раван-времена тако да 2-путање материјалних тачака буду конусни пресеци.

Решавајући тај задатак полазим од претпоставке, коју природа проблема намеће, да је материјални систем који одређује такву метрику сферно симетричан. У односу на поларне координате x^i $(i=1, 2, 3)$ најопштији могући израз за метричку форму таквог раван-времена је [1]

$$ds^2 = F(x^1, x^3)(dx^1)^2 + G(x^1, x^3)(x^1)^2(dx^2)^2 + 2H(x^1, x^3)\,dx^1 dx^3 + \\ + L(x^1, x^3)(dx^3)^2, \tag{1}$$

где је $x^3 = ct$, при чему је c брзина светлости у вакууму, а t координатно време. Задатак је наћи захтевану метричку форму.

Као што ће се током овог излагања видети, може се очекивати да постоји много решења овог проблема. Ја ћу се, у овом раду, ограничити на тражење оних решења која задовољавају извесне претпоставке, које ћу сукцесивно, током излагања, наводити.

Прво, тражим решење постављеног проблема под претпоставком де је

(П. I) $$G = \text{const} \neq 0. \tag{2}$$

Тада је метрички тензор g_{ij}, који одговара метричкој форми (1),

$$g_{ij}=\begin{Bmatrix} F(x^1, x^3) & 0 & H(x^1, x^3) \\ 0 & G\cdot(x^1)^2 & 0 \\ H(x^1\, x^3) & 0 & L(x^1, x^3) \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

Кристофелови симболи прве врсте,

$$[ij, k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{4}$$

различити од нуле су

$$\left.\begin{aligned} &[11,1]=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^1}, && [13,3]=\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^1}, \\ &[11,3]=\frac{\partial H}{\partial x^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^3}, && [22,1]=-Gx^1, \\ &[12,2]=G\,x^1, && [33,1]=\frac{\partial H}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^1}, \\ &[1,3\,1]=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x^3}, && [33,3]=\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^3}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Детерминанта g метричког тензора (3) је

$$g=G\,(FL-H^2)\,(x^1)^2, \tag{6}$$

одакле се одмах добија да мора бити

$$FL-H^2\neq 0. \tag{7}$$

Сада се за контраваријантни метрички тензор g^{ij} добија

$$g^{ij}=\frac{1}{G\,(FL-H^2)(x^1)^2}\begin{Bmatrix} GL\,(x^1)^2 & 0 & -GH\,(x^1)^2 \\ 0 & FL-H^2 & 0 \\ -GH\,(x^1)^2 & 0 & FG\,(x^1)^2 \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

па су Кристофелови симболи друге врсте,

$$\begin{Bmatrix} i \\ j\ \ k \end{Bmatrix}=g^{il}\,[j\,k, l], \tag{9}$$

различити од нуле

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{ {1 \atop 1\,1} \right\} = \frac{1}{2(FL-H^2)}\left(L\frac{\partial F}{\partial x^1} + H\frac{\partial F}{\partial x^3} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^1}\right), \quad \left\{ {2 \atop 1\,2} \right\} = \frac{1}{x^1},\\
&\left\{ {1 \atop 1\,3} \right\} = \frac{1}{2(FL-H^2)}\left(L\frac{\partial F}{\partial x^3} - H\frac{\partial L}{\partial x^1}\right), \quad \left\{ {3 \atop 1\,1} \right\} = \frac{1}{2(FL-H^2)}\left(2F\frac{\partial H}{\partial x^1} - H\frac{\partial F}{\partial x^1} - F\frac{\partial F}{\partial x^3}\right),\\
&\left\{ {1 \atop 2\,2} \right\} = -\frac{GL}{FL-H^2}x^1, \quad \left\{ {3 \atop 1\,3} \right\} = \frac{1}{2(FL-H^2)}\left(F\frac{\partial L}{\partial x^1} - H\frac{\partial F}{\partial x^3}\right),\\
&\left\{ {1 \atop 3\,3} \right\} = \frac{1}{2(FL-H^2)}\left(2L\frac{\partial H}{\partial x^3} - L\frac{\partial L}{\partial x^1} - H\frac{\partial L}{\partial x^3}\right), \quad \left\{ {3 \atop 2\,2} \right\} = \frac{GH}{FL-H^2}x^1,\\
&\left\{ {3 \atop 3\,3} \right\} = \frac{1}{2(FL-H^2)}\left(H\frac{\partial L}{\partial x^1} + F\frac{\partial L}{\partial x^3} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Одговарајуће диференцијалне једначине геодезијских линија,

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop j\,k} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{11}$$

су, сада, за $i=1$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 x^1}{ds^2} + \frac{1}{2(FL-H^2)}\left(L\frac{\partial F}{\partial x^1} + H\frac{\partial F}{\partial x^3} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^1}\right)\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 +\\
&\quad + \frac{1}{FL-H^2}\left(L\frac{\partial F}{\partial x^3} - H\frac{\partial L}{\partial x^1}\right)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds} - \frac{GL}{FL-H^2}x^1\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 +\\
&\quad + \frac{1}{2(FL-H^2)}\left(2L\frac{\partial H}{\partial x^3} - L\frac{\partial L}{\partial x^1} - H\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2,
\end{aligned} \tag{12}$$

за $i=2$

$$\frac{d^2 x^2}{ds^2} + \frac{2}{x^1}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0, \tag{13}$$

а за $i=3$

$$\frac{d^2 x^3}{ds^2}+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left(2\,F\frac{\partial H}{\partial x^1}-H\frac{\partial F}{\partial x^1}-F\frac{\partial F}{\partial x^3}\right)\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{FL-H^2}\left(F\frac{\partial L}{\partial x^1}-H\frac{\partial F}{\partial x^3}\right)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}+\frac{GH}{FL-H^2}\,x^1\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left(H\frac{\partial L}{\partial x^1}+F\frac{\partial L}{\partial x^3}-2\,H\frac{\partial H}{\partial x^3}\right)\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2=0. \tag{14}$$

Један несумњиви први интеграл једначина (12)—(14), који се добија непосредно из метричке форме (1), је

$$F\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2+G\cdot(x^1)^2\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2+2\,H\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}+L\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2=1. \tag{15}$$

Сменом израза за $\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2$ из те једначине у једначину (12) добијамо

$$L\frac{d^2 x^1}{ds^2}+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left(L^2\frac{\partial F}{\partial x^1}+HL\frac{\partial F}{\partial x^3}-2\,HL\frac{\partial H}{\partial x^1}-2\,FL\frac{\partial H}{\partial x^3}+FL\frac{\partial L}{\partial x^1}+\right.$$

$$\left.+FH\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2+\frac{1}{FL-H^2}\left(L^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-2\,HL\frac{\partial H}{\partial x^3}+H^2\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}-$$

$$-\frac{Gx^1}{2\,(FL-H^2)}\left(2\,L^2+2\,L\frac{\partial H}{\partial x^3}\,x^1-L\frac{\partial L}{\partial x^1}\,x^1-H\frac{\partial L}{\partial x^3}\,x^1\right)\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left(2\,L\frac{\partial H}{\partial x^3}-L\frac{\partial L}{\partial x^1}-H\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)=0. \tag{16}$$

Ограничићу се, сада, на она решења која задовољавају још и претпоставку да је израз уз $\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}$ у горњој једначини једнак нули, тј. да је

(П. II)
$$L^2\frac{\partial F}{\partial x^3}-2\,HL\frac{\partial H}{\partial x^3}+H^2\frac{\partial L}{\partial x^3}=0. \tag{17}$$

Сменивши и израз за $\frac{\partial F}{\partial x^3}$ из (17) у (16) добијамо

$$L\frac{d^2x^1}{ds^2}+\frac{1}{2\,(FL-H^2)}\left[L^2\frac{\partial F}{\partial x^1}-2\,HL\frac{\partial H}{\partial x^1}-2\,(FL-H^2)\frac{\partial H}{\partial x^3}+FL\frac{\partial L}{\partial x^1}+\right.$$

$$\left.+\frac{H}{L}\,(FL-H^2)\frac{\partial L}{\partial x^3}\right]\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2-\frac{Gx^1}{2\,(FL-H^-)}\left(2\,L^2+2\,L\frac{\partial H}{\partial x^3}\,x^1-\right.$$

$$- L\frac{\partial L}{\partial x^1}x^1 - H\frac{\partial L}{\partial x^3}x^1\Bigg)\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2(FL-H^2)}\Bigg(2L\frac{\partial H}{\partial x^3} -$$

$$- L\frac{\partial L}{\partial x^1} - H\frac{\partial L}{\partial x^3}\Bigg) = 0. \tag{18}$$

Из (13) је очигледан први интеграл

$$\frac{dx^2}{ds} = \frac{A}{(x^1)^2}, \tag{19}$$

где је A константа. (Једначина (19) представља, уствари, релативистички интеграл кинетичког момента,

$$\frac{dx^2}{d\tau} = \frac{icA}{(x^1)^2}, \quad d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}ds^2, \tag{20}$$

одн.

$$\frac{dx^2}{d\tau} = \frac{A_1}{(x^1)^2}, \tag{21}$$

где је

$$A_1 = icA). \tag{22}$$

На основи (19) једначина (18) постаје

$$L\frac{d^2x^1}{ds^2} + \frac{1}{2(FL-H^2)}\Bigg[L^2\frac{\partial F}{\partial x^1} - 2HL\frac{\partial H}{\partial x^1} - 2(FL-H^2)\frac{\partial H}{\partial x^3} + FL\frac{\partial L}{\partial x^1} +$$

$$+ \frac{H}{L}(FL-H^2)\frac{\partial L}{\partial x^3}\Bigg]\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2(FL-H^2)}\Bigg[2A^2GL^2\frac{1}{(x^1)^3} +$$

$$+ A^2G\left(2L\frac{\partial H}{\partial x^3} - L\frac{\partial L}{\partial x^1} - H\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)\frac{1}{(x^1)^2} -$$

$$-2L\frac{\partial H}{\partial x^3} + L\frac{\partial L}{\partial x^1} + H\frac{\partial L}{\partial x^3}\Bigg] = 0. \tag{23}$$

Уведимо, сада, функцију

$$x^1 = \frac{1}{u}. \tag{24}$$

Једначина (19) постаје

$$\frac{dx^2}{ds} = Au^2, \tag{25}$$

па добијамо

$$\frac{dx^1}{ds} = -A\frac{du}{dx^2}, \tag{26}$$

и

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} = -A^2 u^2 \frac{d^2 u}{(d x^2)^2}. \tag{27}$$

Сменивши (24), (26) и (27) у (23) имамо

$$\frac{d^2 u}{(d x^2)^2} - \frac{1}{2(FL-H^2)} \left[L \frac{\partial F}{\partial x^1} - 2H \frac{\partial H}{\partial x^1} - \frac{2}{L}(FL-H^2)\frac{\partial H}{\partial x^3} + F \frac{\partial L}{\partial x^1} + \right.$$

$$\left. + \frac{H}{L^2}(FL-H^2)\frac{\partial L}{\partial x^3}\right] \frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx^2}\right)^2 + \frac{GL}{FL-H^2} u + \frac{G}{2(FL-H^2)}\left(2\frac{\partial H}{\partial x^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{H}{L}\frac{\partial L}{\partial x^3}\right) - \frac{1}{2A^2(FL-H^2)}\left(2\frac{\partial H}{\partial x^3} - \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{H}{L}\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)\frac{1}{u^2} = 0, \tag{28}$$

што представља диференцијалну једначину 2-путање материјалне тачке у 2-равни раван-времена чија је метричка форма дата изразом (1) под условима (2) и (17), одн. (П. I) и (П. II).

У класичној (Њутновој) механици одговарајућа диференцијална једначина путање материјалне тачке у гравитационом пољу материјалне тачке масе m_1, за коју је познато да представља конусни пресек, је

$$\frac{d^2 u}{(d x^2)^2} + u = \frac{k^2 m_1}{A_1^2}, \tag{29}$$

где је k^2 гравитациона константа, а A_1 константа која се појављује у класичном (Њутновом) интегралу кинетичког момента

$$(x^1)^2 \frac{dx^2}{dt} = A_1. \tag{30}$$

Једначина (21) је релативистичко уопштење једначине (30), па, захтевајући да и у теорији релативности диференцијална једначина 2-путање материјалне тачке у гравитационом пољу буде (29), она може бити написана, с обзиром на (22), и у облику

$$\frac{d^2 u}{(d x^2)^2} + u = -\frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}. \tag{31}$$

Релативистичка једначина (28) ће бити, према томе, диференцијална једначина 2-путање материјалне тачке која представља конусни пресек који одговара класичној путањи (29) ако су задовољени услови

$$L\frac{\partial F}{\partial x^1} - 2H\frac{\partial H}{\partial x^1} - \frac{2}{L}(FL-H^2)\frac{\partial H}{\partial x^3} + F\frac{\partial L}{\partial x^1} + \frac{H}{L^2}(FL-H^2)\frac{\partial L}{\partial x^3} = 0 \tag{32}$$

и

$$\frac{GL}{FL-H^2}\frac{1}{x^1} + \frac{G}{2(FL-H^2)}\left(2\frac{\partial H}{\partial x^3} - \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{H}{L}\frac{\partial L}{\partial x^3}\right) -$$

$$- \frac{1}{2A^2(FL-H^2)}\left(2\frac{\partial H}{\partial x^3} - \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{H}{L}\frac{\partial L}{\partial x^3}\right)(x^1)^2 = \frac{1}{x^1} + \frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}. \tag{33}$$

Тражена метрика ће, према томе, бити одређена решењима једначина (32) и (33) уз претпоставке (2) и (17).

С обзиром да је задатак још увек сложен, ограничићу се, даље, на тражење оног решења које задовољава и следеће претпоставке

$$\text{(П. III)} \qquad H = H(x^3) \tag{34}$$

и

$$\text{(П. IV)} \qquad \begin{cases} L = H^2 f, & (35) \\ f = f(x^1). & (36) \end{cases}$$

Под тим претпоставкама се (17) своди на

$$\frac{\partial F}{\partial x^3} = 0, \tag{37}$$

па се за (32) добија

$$f\frac{dF}{dx^1} + F\frac{df}{dx^1} = 0, \tag{38}$$

а за (33)

$$\frac{1}{2A^2}[A^2 G - (x^1)^2]\frac{df}{dx^1} + \left[(F-G)\frac{1}{x^1} + \frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}F\right]f - \left(\frac{1}{x^1} + \frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}\right) = 0. \tag{39}$$

Из (38) је

$$Ff = B_1, \tag{40}$$

где је B_1 интеграциона константа, која, због (7), тј.

$$FL - H^2 = (Ff - 1)H^2 \neq 0, \tag{41}$$

мора бити различита од јединице. Избегавајући случај $F=0$, константа B_1 мора задовољавати услов

$$B_1 \neq \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \tag{42}$$

Елиминисавши F из (39) и (40) добијамо

$$\frac{1}{2A^2}[A^2 G - (x^1)^2]\frac{df}{dx^1} - \frac{G}{x^1}f + (B_1 - 1)\left(\frac{1}{x^1} + \frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}\right) = 0, \tag{43}$$

а смењивањем B_1 произвољном константом B која зодовољава

$$B = B_1 - 1 \neq \begin{cases} -1, \\ 0, \end{cases} \tag{44}$$

имамо

$$\frac{1}{2A^2}[A^2 G - (x^1)^2]\frac{df}{dx^1} - \frac{G}{x^1}f + B\left(\frac{1}{x^1} + \frac{k^2 m_1}{c^2 A^2}\right) = 0. \tag{45}$$

Уведимо, сада, уместо функције f функцију

$$\varphi = f - \frac{B}{G}. \tag{46}$$

Једначина (46) постаје

$$\frac{d\varphi}{dx^1} - \frac{2A^2G}{x^1[A^2G-(x^1)^2]}\varphi = -2B\frac{k^2m_1}{c^2}\frac{1}{A^2G-(x^1)^2}, \tag{47}$$

а њен интеграл

$$\varphi = \left(2B\frac{k^2m_1}{c^2}\frac{1}{x^1}+C\right)\frac{(x^1)^2}{A^2G-(x^1)^2}, \tag{48}$$

где је C интеграциона константа.

Из (46) је, сада,

$$f = \left(2B\frac{k^2m_1}{c^2}\frac{1}{x^1}+C\right)\frac{(x^1)^2}{A^2G-(x^1)^2}+\frac{B}{G}, \tag{49}$$

а из (40), имајући на уму (44),

$$F = G(B+1)\frac{A^2G-x}{(CG-B)(x^1)^2+2BG\frac{k^2m_1}{c^2}x^1+BA^2G}. \tag{50}$$

На основи добијених резултата један од облика тражене метричке форме је

$$ds^2 = F(dx^1)^2 + G\cdot(x^1)^2(dx^2)^2 + 2H\,dx^1\,dx^3 + H^2f(dx^3)^2, \tag{51}$$

где је $G=\text{const}>0$, F дато изразом (50), H произвољна функција промењиве x^3, а f дато изразом (49).

Литература

[1] Møller, C., *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1972.

THE PLANE-TIME IN WHICH PATHS OF INERTIONAL MOTIONS ARE CONICS

Summary

The Schwarzschlid's solution gives, for 2-paths of particles, lines which are not conics. It gives, as a consequence, a precession efect.

This paper is an attempt to find such a metrics of the plane-time in the general theory of relativity that 2-paths of particles be conics, without precessions.

Prof. Dr Marko D. Leko
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd, Studentski trg 16/IV

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique. Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O PROŠIRENOM SISTEMU RELATIVISTIČKIH KINEMATIČKIH VELIČINA S NEKIM PRIMENAMA NA MAGNETOHIDRODINAMIKU

Ilija Lukačević

U ovom radu posmatraju se u osnovi dva vektorska polja koja obrazuju putanje u Svetu bilo opšte ili specijalne relativnosti. Polazi se, dakle od jedne indefinitne metrike čiji je osnovni tenzor $g_{\alpha\beta}$ načelno rimanski (simetrične povezanosti $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$). Jedno od tih polja je vremensko i jediničnog intenziteta te predstavlja, načelno uzev, četvorobrzine, dok je drugo prostorno i promenljivog intenziteta. Razlaganje kovarijantnog izvoda četvorobrzine vrši se po poznatoj kinematičkoj shemi, a onda se ista primenjuje na prostorne vektore, čime se dobijaju simetrični obrasci razlaganja i obrazuje ono što nazivamo prošireni sistem kinematičkih veličina. Treba odmah reći da je u slučaju jediničnog polja prostornih vektora ovakva podela već vršena u radu [2]. S druge strane, u našim ranijim radovima [5], [7] mi smo izučavali uzajamne, ili relativne kinematičke veličine i primenjivali ih. Treba reći i to da su vremenski vektori promenljivog intenziteta takođe posmatrani, s nešto drukčijim pristupom, u radu [6]. Bitan motiv našeg pristupa leži u primeni na magnetohidrodinamičko elektromagnetno polje, jer je simetrija osnovnih jednačina u odnosu na četvorobrzinu i magnetno polje, odnosno indukciju, takva da omogućava dopunu nekih od osnovnih zaključaka o odnosu kinematičkih veličina i magnetnog polja zaključcima o odnosu proširenih kinematičkih veličina i četvorobrzine.

* * *

Posmatrajmo metriku opšte relativnosti V_4, koja je po pretpostavci orijentabilna, diferencijabilna, lokalno svodljiva na kanonski oblik $(+, +, +, -)$ i simetrično povezana, odnosno rimanska. Neka metrički tenzor bude triput diferencijabilan na V_4 (zbog Bianchi-eve identičnosti). Posmatrajmo dva vektorska polja u^{α} i ξ^{α}. Neka u^{α} bude jedinični vremenski vektor a ξ^{α} prostorni vektor proizvoljnog intenziteta. Dakle

$$g_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}\, u^{\beta} = -1, \qquad g_{\varepsilon\beta}\, \xi^{\alpha}\, \xi^{\beta} = \varphi^2, \tag{1.1}$$

gde su u^{α} i ξ^{α} diferencijalbilni bar do drugog reda izvoda. Navešćemo neke već dobro poznate sopstvene kinematičke veličine [4], ekspanziju $\vartheta_{\alpha\beta}$ i njoj odgovarajuće, sklarnu ekspanziju ϑ, brzinu deformacije $\sigma_{\alpha\beta}$ i rotaciju $\omega_{\alpha\beta}$

$$\vartheta_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}\, u_{\beta} + \nabla_{\beta}\, u_{\alpha} + u_{\alpha}\, w_{\beta} + u_{\beta}\, w_{\alpha}, \tag{1.2}$$

$$\vartheta=\frac{1}{2}\vartheta^{\gamma}_{\gamma}=\nabla_{\gamma}u^{\gamma}, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\vartheta_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\vartheta h_{\alpha\beta}, \tag{1.4}$$

$$\omega_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\nabla_{\alpha}u_{\beta}-\nabla_{\beta}u_{\alpha}+u_{\alpha}w_{\beta}-u_{\beta}w_{\alpha}), \tag{1.5}$$

gde je

$$w_{\alpha}=u^{\gamma}\nabla_{\gamma}u_{\alpha}, \qquad h_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}+u_{\alpha}u_{\beta}, \tag{1.6}$$

ω_{α} je vektor ubrzanja a $h_{\alpha\beta}$ tenzor projektor upravan na u^{α}. Svi prethodni vektori i tenzori zadovoljavaju sledeće skoro očigledne uslove

$$h_{\alpha\beta}u^{\beta}=\vartheta_{\alpha\beta}u^{\beta}=\sigma_{\alpha\beta}u^{\beta}=\omega_{\alpha\beta}u^{\beta}=0, \tag{1.7a}$$

$$w_{\beta}u^{\beta}=\sigma^{\beta}_{\beta}=0. \tag{1.7b}$$

(1.7a) pokazuje da se radi o čisto prostornim, trodimenzionim tenzorima i vektorima. Brzina deformacije je, štaviše, tenzor bez traga. Možemo odmah primetiti da je tenzor ekspanzije $\vartheta_{\alpha\beta}$ definisan na osnovu lokalnog odstupanja prostornih odstojanja i uglova od Bornove krutosti a u odnosu na svetske linije kongruencije određene poljem u^{α}. Sva su prethodna izvođenja nastala, ustvari, na bazi Lie-ovog izvoda $\mathcal{L}_u$ [1], u odnosu na u^{α}, tenzora projektora $h_{\varepsilon\beta}$

$$\vartheta_{\alpha\beta}=\mathcal{L}_u(g_{\alpha\beta}+u_{\alpha}u_{\beta}), \tag{1.8}$$

dok su ostale veličine izvedene iz toga simetričnog tenzora tako da mu odgovaraju svojim nesvodljivim predstavljanjem, dakle antisimetrijom, simetrijom i odsustvom traga.

Sada ćemo uvesti nove sopstvene veličine, analogne (1.2)—(1.6), koje odgovaraju prostornom vektorskom polju promenljivog intenziteta ξ_{α}

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_{\alpha\beta}&=\varphi^2(\nabla_{\alpha}\xi_{\beta}+\nabla_{\beta}\xi_{\alpha})+g_{\alpha\beta}\xi^{\gamma}\partial_{\gamma}(\varphi^2)-\\&-\xi_{\alpha}\tilde{w}_{\beta}-\xi_{\beta}\tilde{w}_{\alpha}-\frac{1}{2}[\xi_{\alpha}\partial_{\beta}(\varphi^2)+\xi_{\beta}\partial_{\alpha}(\varphi^2)],\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\tilde{\theta}=\frac{1}{2}\tilde{\vartheta}^{\gamma}_{\gamma}=\varphi^2\nabla_{r}\xi^{\gamma}+\xi^{\gamma}\partial_{\gamma}(\varphi^2), \tag{1.10}$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\tilde{\vartheta}_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\tilde{\vartheta}\varphi^{-2}\tilde{h}_{\alpha\beta}, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\Big\{&\varphi^2(\nabla_{\alpha}\xi_{\beta}-\nabla_{\alpha}\xi_{\alpha})-\xi_{\alpha}\tilde{w}_{\beta}+\xi_{\beta}\tilde{w}_{\alpha}+\\&+\frac{1}{2}[\xi_{\alpha}\partial_{\beta}(\varphi^2)-\xi_{\beta}\partial_{\alpha}(\varphi^2)]\Big\},\end{aligned} \tag{1.12}$$

gde je

$$\tilde{w}_{\alpha}=\xi^{\gamma}\nabla_{\gamma}\xi_{\alpha}, \qquad \tilde{h}_{\alpha\beta}=\varphi^2 g_{\alpha\beta}-\xi_{\alpha}\xi_{\beta}. \tag{1.13}$$

Može se proveriti da je sad

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}=\tilde{\theta}_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}=\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}=\tilde{\omega}_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}=0, \tag{1.14}$$

$$\tilde{\sigma}^{\beta}_{\beta}=0, \tag{1.15}$$

$$\tilde{w}_{\beta}\,\xi^{\beta}=-\frac{1}{2}\,\xi^{\beta}\,\partial_{\beta}\,(\varphi^{2})\neq 0. \tag{1.16}$$

Veza (1.15) se *jedina* razlikuje od ranijih (1.7a, b). Sve uvedene veličine ulaze u obrasce za kvadratne invarijante i zadovoljavaju neke identičnosti opšteg tipa na kojima se, međutim, sad nećemo zadržavati, već ćemo ići na primenu ovih kinematičkih parametara na slučaj magnetohidrodinamičkog elektromagnetnog polja u kojem struji jedna elektroprovodljiva neprekidna sredina.

* * *

Strujanje jedne *MHD* neprekidne sredine određeno je u relativnosti diferencijalnim jednačinama strujnog polja, koje proističu iz održanja tenzora energije, jednačinom kontinuiteta, opšteg termodinamičkog uslova, zakona provođenja toplote i pretpostavki o viskoznim silama. Ovaj sistem zatvoren je jednačinama elektromagnetnog polja, to jest, rečeno jezikom klasičnog elektromagnetizma, Maxwell-ovim jednačinama elektromagnetnog polja u odsustvu Lorentz-ove sile.

Mi ćemo posmatrati ovde isključivo elektromagnetno polje, ostavljajući po strani *sve* ostale osnovne jednačine strujanja. To će nam omogućiti da geometriju elektromagnetnog polja neposredno povežemo s proširenim sistemom kinematičkih veličina (1.2)—(1.6), (1.9)—(1.13) ne ulazeći u posledice ostalih veza.

Jednačine *MHD* elektromagnetnog polja [1] glase

$$\nabla_{\alpha}\,(u^{\alpha}\,b^{\beta}-u^{\beta}\,b^{\alpha})=0, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\nabla_{\beta}\,(u_{\gamma}\,h_{\delta})=J^{\alpha}, \tag{2.2}$$

gde je u^{α} četvorobrzina posmatrane sredine, b^{α} magnetna indukcija, h^{α} magnetno polje, J^{α} električni protok, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ Ricci-ev permutacioni tenzor. Vektori magnetnog polja i indukcije povezani su pomoću magnetne permeabilnosti μ uobičajenim vezama indukcije

$$b^{\alpha}=\mu\,h^{\alpha}, \tag{2.3}$$

dok je magnetno polje ortogonalno na četvorobrzini u^{α}

$$h^{\alpha}\,u_{\alpha}=0. \tag{2.4}$$

Prvu grupu (2.1) Maxwell-ovih jednačina možemo predstaviti pomoću Lie-ovog izvoda kao

$$\mathcal{L}_{u}\,b^{\alpha}=\nabla_{\beta}\,b^{\beta}\,u^{\alpha}-\nabla_{\beta}\,u^{\beta}\,b^{\alpha}. \tag{2.5}$$

Ovaj izraz ima taj smisao da polja u^{α} i b^{α} obrazuju lokalno dvopovrši.

Primenimo neke od obrazaca (1.2)—(1.6) i (1.9)—1.13) na polje četvorobrzina i magnetno polje, odnosno indukciju. Četvorobrzina ne menja simbol, dok ćemo umesto ξ^{α} stavljati b^{α} ili h^{α}. Pođimo od obrazaca za sopstvenu ekspanziju (1.2) i (1.3). Ako (1.2) pomnožimo sa b^{β} imaćemo, na osnovu (1.8) i (2.5)

$$\theta_{\alpha\beta}\,b^{\beta}=\mathcal{L}_{u}\,b_{\alpha}+\vartheta\,b_{\alpha}. \tag{2.6}$$

Tako je potreban i dovoljan uslov da ekspanzija bude jednaka nuli u pravcu magnetnog polja (dakle dvodimenziona) taj da desna strana (2.6) bude jednaka nuli, to jest da Lie-ov izvod kovarijantne magnetne indukcije u odnosu na četvorobrzinu bude srazmeran magnetnoj indukciji do na skalarnu ekspanziju s promenjenim znakom. Još jedna kontrakcija sa b^α daje

$$\vartheta_{\alpha\beta}\, b^\alpha b^\beta = 2\, b^2 \vartheta + u^\alpha \partial_\alpha (b^2), \tag{2.7a}$$

što se može napisati kao

$$\vartheta_{\alpha\beta}\, b^\alpha b^\beta = 2\, b_\alpha \nabla_\beta (b^\alpha u^\beta) = -2\, u^\alpha \tilde{w}_\alpha. \tag{2.7b}$$

Veze (2.6) i (2.7a,b) poznate su u relativističkoj *MHD*. Mi ćemo im dodati, koristeći proširenje (1.9)—(1.13) veličina (1.2)—(1.6) , simetrične zaključke. Ako pođemo od činjenice da se (1.9) dobija, analogno (1.2), zamenom u (1.8) $h_{\alpha\beta}$ sa $\tilde{h}_{\alpha\beta}$, s tim što stavimo $\xi^\alpha = b^\alpha$ i diferenciramo u odnosu na taj vektor, dobićemo iz (1.9) i (2.5)

$$\tilde{\vartheta}_{\alpha\beta}\, u^\beta = \mathcal{L}_b (b^2 u_\alpha) + b^2 \nabla_\beta b^\beta u_\alpha, \tag{2.8}$$

što je analogno (2.6). Drugo množenje daje, na osnovu (1.10)

$$\tilde{\theta}_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = -2\, \tilde{\vartheta} + b^\alpha \partial_\alpha (b^2), \tag{2.9a}$$

odnosno

$$\tilde{\vartheta}_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = -2\, b_\alpha \nabla_\beta (b^\alpha b^\beta) = -2\, b^\alpha \left[w_\alpha + \frac{1}{2} \partial_\alpha (b^2) \right]. \tag{2.9b}$$

Ovde su primetne dve stvari. Prvo znak na drugoj strani (2.9b) je negativan, za razliku od (2.7), zatim kvadratna forma na levoj strani, ma da obrazovana u odnosu na u^α, zavisi samo od odnosa koje zadovoljava vektor magnetne indukcije, kao što se vidi iz prve jednakosti tog izraza.

Sve prethodne primene u magnetohidrodinamici vršili smo isključivo na osnovu (2.5), što je ustvari oblik prve grupe Maxwell-ovih jednačina (2.1), koristeći tenzore i skalare ekspanzije (odgovarajući izrazi za tenzore brzine deformacije (1.4) i (1.11) jednostavno sleduju iz njih). Sada ćemo preći na primenu druge grupe Maxwell-ovih jednačina (2.2) na tenzore rotacije (1.5) i (1.12). Zato ćemo prvo uvesti pojmove vektora rotacije (ili vrtloženja) koji odgovaraju navedenim tenzorima

$$\omega^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, u_\beta\, \omega_{\gamma\delta}, \tag{2.10}$$

$$\tilde{\omega}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, h_\beta\, \tilde{\omega}_{\gamma\delta}, \tag{2.11}$$

gde smo u (1.12) stavili h_α umesto ξ_α. Ako (2.2) skalarno pomnožimo sa u_α dobićemo [3]

$$h_\alpha\, \omega^\alpha = u_\alpha J^\alpha. \tag{2.12}$$

Ovo predstavlja poznatu vezu iz relativističke *MHD*. Iz nje sleduje da strujanje ne može biti bezvrtložno ukoliko je sredina naelektrisana

$$u_\alpha J^\alpha \neq 0 \;\Rightarrow\; \omega^\alpha \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \omega_{\alpha\beta} \neq 0. \tag{2.13}$$

Analogno prethodnom, dobićemo novu vezu množenjem (2.2) sa h_α

$$u_\alpha\, \tilde{\omega}^\alpha = -h_\alpha J^\alpha, \tag{2.14}$$

odakle sleduje, sad analogno (2.13)

$$h_\alpha J^\alpha \neq 0 \Rightarrow \tilde{\omega}^\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \neq 0. \tag{2.15}$$

Ovo znači da neortogonalnost na magnetnom polju električnog protoka u celini, bez obzira da li naelektrisanog ili ne, uslovljava egzistenciju »magnetnog vrtloga«, odnosno »magnetne rotacije«.

Literatura

[1] Lichnerowicz A., *Relativistic fluid mechaics and magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York, 1967.

[2] Greenberg Ph., J. Math. Anal. and Appl. **30**, p. 128 (1970).

[3] Yodzis P., Phys. Rev. D, **3**, p. 2491 (1971).

[4] Hawking-Ellies, *Large scale structure of space-time*, Cambridge U- P., 1973.

[5] Lukačević I., Publ. Inst. Math. Belgr., **22 (36)**, p. 175 (1977).

[6] Stachel J., J. Math. Phys., **21 (7)**, p. 1776 (1980).

[7] Lukačević I., GRG Journal (u štampi).

ON AN EXTENDED SYSTEM OF RELATIVISTIC KINEMATICAL QUANTITIES WITH SOME APPLICATIONS IN MAGNETOHYDRODYNAMICS

Summary

We consider two vector fields forming trajectories in the general relativistic spacetime. The first one is a field of four velocities whereas the second one is a field of spacelike vectors of variable intensity. Kinematical parameters, expansion, shear and rotation are formed with respect to both fields and called extended kinematical quantities for the second one. Then applications are made to *MHD* in order to obtain some basic formulae symmetric to already known ones.

Dr Ilija Lukačević
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd, Studentski trg 16/IV

Зборник радова Математичкоi института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

NEKE OSOBINE STRUJNIH LINIJA TERMODINAMIČKOG NEVISKOZNOG FLUIDA U JEDNOM RIMANSKOM PROSTORU ČIJA JE METRIKA KONFORMNA METRICI PROSTOR-VREMENA

Mirjana M. Lukačević

1. Razmotrimo prvo termodinamički neviskozni fluid u prostor-vremenu V_4, u odnosu na dati koordinatni sistem x^α $(\alpha=1, 2, 3, 4)$, gde su x^i $(i=1, 2, 3)$ koordinate prostornog tipa, a x^4 — vremenska koordinata. U radu ćemo indekse koji uzimaju vrednosti od 1 do 4 obeležavati grčkim slovima, indekse koji idu od 1 do 3 — slovima latinice, i koristićemo konvenciju o sabiranju. Opredelićemo se za takve fizičke jedinice pri kojima je brzina svetlosti jednaka jedinici. Koordinate osnovnog metričkog tenzora prostora V_4 u odnosu na sistem x^α ćemo označiti sa $g_{\alpha\beta}$, uzimajući pri tome da osnovna metrička forma $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ ima signaturu $+++-$.

Istoriju razmatranog fluida u V_4 predstavlja kongruencija krivih linija vremenskog tipa — strujnih linija fluida, čije jednačine u odnosu na dati koordinatni sistem možemo napisati u obliku

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^i, s), \tag{1}$$

gde su ξ^i prostorni parametri, vezani za određeni delić fluida, a s — parametar vremenskog tipa.

Četvorobrzina fluida je tada određena izrazom

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}. \tag{2}$$

Ako usvojimo da parametar vremenskog tipa s predstavlja sopstveno vreme duž svetske linije delića određenog prostornim parametrima ξ^i, tj. ako uzmemo da je

$$ds^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{3}$$

četvorobrzina će zadovoljavati uslov

$$u^\alpha u_\alpha = -1. \tag{4}$$

Materijalno i energetsko stanje fluida u V_4 opisuje tenzor energije oblika

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

gde je ρ sopstvena totalna gustina fluida, a p — sopstveni pritisak.

Podvucimo odmah da ćemo u toku rada, pored sopstvene totalne gustine ρ, koristiti i sopstvenu materijalnu gustinu, koju ćemo označiti sa r, pri čemu su ove dve veličine vezane jednačinom ([1], [2])

$$\rho = r(1+\varepsilon), \tag{6}$$

gde je ε specifična unutrašnja energija fluida.

Uzećemo r i p za nezavisno promenljive termodinamičke veličine, i jednačinu

$$\varepsilon = \varepsilon(r, p) \tag{7}$$

za datu jednačinu stanja fluida.

Uvedimo sada, kao indeks termodinamičkog fluida, funkciju ([3], [4])

$$f = \frac{1}{r}(\rho + p) = 1 + \varepsilon + \frac{p}{r}. \tag{8}$$

Tada tenzor energije (5) dobija oblik

$$T_{\alpha\beta} = rfu_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

Uslov konzervativnosti tenzora energije, koji se izražava jednačinom $\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0$, gde ∇_α označava kovarijantni izvod, dovodi do diferencijalnih jednačina strujnih linija fluida

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta + \frac{\partial_\alpha p}{rf}(\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta) = 0, \tag{10}$$

gde je sa ∂_α obeležen parcijalni izvod po x^α, a sa δ^α_β Kronekerov simbol.

Sopstvena apsolutna temperatura T fluida i njegova sopstvena specifična entropija S uvode se termodinamičkom relacijom koja je posledica prvog i drugog zakona termodinamike ([5], [6])

$$T\,dS = d\varepsilon + p\,d\left(\frac{1}{r}\right), \tag{11}$$

koja, kada se uzme u obzir jednačina (7), dobija oblik

$$T\,dS = df - \frac{1}{r}\,dp. \tag{12}$$

Iz poslednje jednačine sledi

$$\partial_\alpha p = r\,\partial_\alpha f - r\,T\,\partial_\alpha S + A_\alpha,$$

gde je A_α vektor koji zadovoljava uslov $A_\alpha u^\alpha = 0$. Jasno je da taj uslov dozvoljava da vektor A_α bude nula-vektor, i mi ćemo naša dalja razmatranja ograničiti na taj slučaj, što znači da ćemo prihvatiti da se gradijent pritiska može izraziti kao

$$\partial_\alpha p = r\,\partial_\alpha f - r\,T\,\partial_\alpha S, \tag{13}$$

ne ulazeći na ovome mestu u to koji je fizički smisao takvog ograničenja.

Tada jednačine strujnih linija (10) možemo napisati u obliku

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta + \left(\frac{\partial_\alpha f}{f} - \frac{T}{f}\partial_\alpha S\right)(\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta) = 0. \tag{14}$$

2. Uvedimo sada, pomoću indeksa fluida (8), u razmatranje jedan četvorodimenzioni rimanski prostor, koji ćemo označiti sa $\overline{V}_4$, čija je metrika konformna metrici prostor-vremena, i povezana je sa njom jednačinom (vidi [7])

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = f^2\, g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{15}$$

tako da je

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = f^2\, g_{\alpha\beta} \quad \text{i} \quad \bar{g}^{\alpha\beta} = f^{-2}\, g^{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Definišimo [7] u prostoru $\overline{V}_4$ vektor

$$\overline{C}_\alpha = f u_\alpha, \tag{17}$$

za koji se lako utvrđuje da je jediničnog intenziteta u tome prostoru.

Posle kraćeg računa, koji ovde nećemo prikazati, za kovarijantni izvod $\overline{\nabla}_\alpha \overline{C}_\beta$ (gde $\overline{\nabla}_\alpha$ označava operator kovarijantnog diferenciranja u odnosu na metriku (15)) dobijamo

$$\overline{\nabla}_\alpha \overline{C}_\beta = f \nabla_\alpha u_\beta - u_\alpha \partial_\beta f + g_{\alpha\beta}\, u^\gamma \partial_\gamma f,$$

tako da iz (14) sledi

$$\overline{C}_\alpha \overline{\nabla}_\alpha \overline{C}_\beta = \frac{T}{f}\, \partial_\alpha S\, (\delta^\alpha_\beta + \overline{C}^\alpha \overline{C}_\beta). \tag{18}$$

Kako je $\overline{C}^\alpha$ jedinični tangentni vektor strujne linije preslikane na prostor $\overline{V}_4$, očigledno je da izraz na levoj strani jednačine (18) predstavlja izvod vektora $\overline{C}_\beta$ u pravcu te linije, te prema prvom Freneovom obrascu (za rimanski prostor $\overline{V}_4$) možemo napisati

$$\overline{C}^\alpha\, \overline{\nabla}_\alpha \overline{C}_\beta = \overline{\varkappa}_{(1)}\, \overline{n}_{(1)\beta}, \tag{19}$$

gde je $\overline{\varkappa}_{(1)}$ prva krivina, a $\overline{n}_{(1)\beta}$ prva normala strujne linije posmatrane u odnosu na metriku (15).

S obzirom na (19), iz (18) dobijamo

$$\partial_\beta S = \frac{f}{T}\, \overline{\varkappa}_{(1)}\, \overline{n}_{(1)\beta} - \overline{C}^\alpha\, \partial_\alpha S\, \overline{C}_\beta, \tag{20}$$

odakle izvodimo sledeće zaključke:

a) U slučaju da se gradijent pritiska fluida izražava jednačinom (13), dvodimenzioni element određen tangentom i prvom normalom strujne linije preslikane na prostor čija je metrika određena jednačinom (15) sadrži gradijent sopstvene specifične entropije fluida.

b) Ako se, pod uslovom da važi (13), strujne linije fluida preslikavaju u geodezijske linije prostora $\overline{V}_4$, čija je metrika određena jednačinom (15), tada je ili entropija konstantna, ili su preslikane strujne linije upravne na trodimenzioni potprostor prostora $\overline{V}_4$, određen jednačinom $S = \text{const}$. Entropija se tada menja samo duž strujnih linija fluida, tj. u pravcu vektora $\overline{C}^\alpha = f^{-1} u^\alpha$.

c) Ako se radi o izentropskom strujanju, ili su preslikane strujne linije upravne na trodimenzioni potprostor prostora $\overline{V}_4$, određen jednačinom $S = \text{const.}$, onda su preslikane strujne linije geodezijske linije prostora $\overline{V}_4$.

Zaista, zbog upravnosti na potprostor $S=\text{const}$, ispunjen je uslov

$$\partial_\beta S = \lambda \bar{C}_\beta,$$

te iz (20) sledi da je $\bar{\varkappa}_{(1)}=0$, što znači, prema (19), da je i $\bar{C}^\alpha \bar{\nabla}_\alpha \bar{C}_\beta=0$, tj. da se vektor $\bar{C}_\beta$ paralelno prenosi duž strujne linije preslikane na prostor $\bar{V}_4$.

Najzad, posle množenja jednačine (20) vektorom $\bar{n}^\beta_{(1)}$ i sabiranja po indeksu β, dobija se za prvu krivinu $\bar{\varkappa}_{(1)}$ preslikane strujne linije sledeća vrednost

$$\bar{\varkappa}_{(1)} = \frac{T}{f} \bar{n}^\beta_{(1)} \partial_\beta S. \tag{21}$$

Na kraju istaknimo da nije teško uočiti da zaključak a) važi i u opštijem slučaju, kada je $\partial_\alpha p = r\partial_\alpha f - rT\partial_\alpha S + A_\alpha$, gde je A_α vektor koji u prostoru $\bar{V}_4$ ima pravac prve normale preslikane strujne linije, tj. koji ispunjava uslov $A_\alpha = \lambda \bar{n}_{(1)\alpha}$, gde je λ proizvoljni skalar.

Literatura

[1] Lichnerowicz, A., Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. V, No. **1**, 1966.

[2] Schutz, B. F. Jr., Phys. Rev. D, vol. **2**, No. **12**, 1970.

[3] Taub, A. H., Arch. Ratl. Mech. Anal., **3**, 312, 1959.

[4] Lichnerowicz, A., Comm. Math. Phys., Vol. **1**, No. **1**, 1965.

[5] Taub, A. H. Phus. Rev. (1956) 103.

[6] Ray, J. R., J. Math. Phys., Vol. **13**, No. **10**, October 1972.

[7] Lichnerowicz, A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, Masson, Paris, 1955.

[8] Anđelić, T. P., *Tenzorski račun*, Naučna knjiga, Beograd, 1952.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES DE COURANT D'UN FLUIDE PARFAIT THERMODYNAMIQUE DANS UN ESPACE RIEMANNIEN DE MÉTRIQUE CONFORME À LA MÉTRIQUE DE L'ESPACE-TEMPS

Résumé

On analyse la distribution de l'entropie spécifique par rapport aux lignes de courant d'un fluide parfait thermodynamique dans un espace riemannien muni d'une métrique conforme à la métrique de l'espace-temps et liée à celle-ci par la relation (15). L'analyse est limitée au cas où le gradient de pression du fluide satisfait à la condition (13).

Dr Mirjana M. Lukačević
Mašinski fakultet
11000 Beograd

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O VARIRANJU KVAZIKOORDINATA

Mirjana M. Lukačević i *Vukman M. Čović*

1. Razmotrimo holonomni skleronomni konzervativni dinamički sistem sa n stepeni slobode čiji položaj u proizvoljnom trenutku vremena t određujemo generalisanim koordinatama q^i. U radu ćemo latinskim slovima obeležavati indekse koji uzimaju vrednosti od 1 do n, i koristićemo konvenciju o sabiranju.

Pored generalisanih brzina sistema, $\dot{q}^i$, uvedimo u razmatranje i kvazibrzine relacijama

$$\dot{\pi}^i = a^i_j \dot{q}^j, \tag{1}$$

gde koeficijenti a^i_j zavise samo od generalisanih koordinata sistema: $a^i_j = a^i_j(q^k)$. Ako pretpostavimo da je transformacija (1) nesingularna, iz nje sledi

$$\dot{q}^i = b^i_j \dot{\pi}^j, \tag{2}$$

pri čemu je $a^i_j b^j_k = \delta^i_k$, gde je δ^i_k Kronekerov simbol.

I u ovome radu, kao i u prethodnim ([1], [2]), polazimo od stava da su operatori variranja i diferenciranja, primenjeni kako nad stvarnim koordinatama, tako i nad kvazikoordinatama, komutativni, tako da važi

$$\frac{d}{dt}(\delta \pi^i) - \delta \dot{\pi}^i = 0. \tag{3}$$

Ako prihvatimo, kao što je u literaturi uobičajeno, da su varijacije kvazikoordinata π^i određene izrazima

$$\delta\pi^i = a^i_j \delta q^j, \tag{4}$$

diferencijalne jednačine kretanja razmatranog sistema slede iz varijacionog zadatka

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta L + \lambda_i (\delta\pi^i - a^i_j \delta q^j)]\, dt = 0, \tag{5}$$

gde su t_0 i t_1 utvrđeni trenuci vremena koji odgovaraju početnom i krajnjem položaju sistema, $\lambda_i=\lambda_i(t)$ — Lagranževi množioci, i gde je varijacija Lagranževe funkcije $L=L(q^i, \dot{q}^i)$ određena izrazom (upor. [1])

$$\delta L=\delta \tilde{L}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j}\left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s \delta q^i, \tag{6}$$

pri čemu je

$$\tilde{L}=\tilde{L}(q^i, \dot{\pi}^i)=L_{(\dot{q}^i=b_j^i \dot{\pi}^j)} .$$

Vrednosti generalisanih koordinata su utvrđene za $t=t_0$ i $t=t_1$.

Primetimo da varijacioni zadatak (5) nije formulisan kao pravi varijacioni zadatak, tj. da ne izražava uslov stacionarnosti funkcionala.

Potražimo sada uslove pod kojima varijacioni zadatak (5) prelazi u pravi varijacioni zadatak, koji se može izraziti jednačinom

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{L} + \mu_i(\dot{\pi}^i - a_j^i \dot{q}^j)]\, dt=0, \tag{7}$$

gde su Lagranževi množioci označeni sa $\mu_i=\mu_i(t)$.

U tome cilju, unesimo prvo izraz (6) u (5):

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta \tilde{L}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j}\left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s \delta q^i+\lambda_j(\delta\pi^j-a_i^j\delta q^i)\right]dt=0. \tag{8}$$

Iz Ojlerovih jednačina problema (8) koje odgovaraju kvazikoordinatama, dobijamo

$$\lambda_j=\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j},$$

pa se (8) može napisati u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta \tilde{L}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j}\left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s \delta q^i+\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j}(\delta\pi^j-a_i^j\delta q^i)\right]dt=0. \tag{9}$$

Dalje, kako je

$$\delta q^i_{(t_0)}=\delta q^i_{(t_1)}=0,$$

pa onda zbog (4) i

$$\delta\pi^i_{(t_0)}=\delta\pi^i_{(t_1)}=0,$$

iz (9) sledi

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta \tilde{L}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j}\left(\frac{\partial a_i^j}{\partial q^s}-\frac{\partial a_s^j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s \delta q^i-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j}\frac{d}{dt}(\delta\pi^j-a_i^j\delta q^i)\right]dt=0,$$

odakle, posle kraćeg računa, pri čemu koristimo jednačinu (3), kao i činjenicu da možemo pisati

$$a_i^j \delta \dot{q}^i = \delta (a_i^j \dot{q}^i) - \dot{q}^i \frac{\partial a_i^j}{\partial q^s} \delta q^s,$$

najzad dobijamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta \tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j} \delta (\dot{\pi}^j - a_i^j \dot{q}^i) \right] dt = 0. \tag{10}$$

Rešavanjem varijacionog problema (7), koji je moguće napisati i u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta \tilde{L} + \mu_j(t) \, \delta (\dot{\pi}^j - a_i^j \dot{q}^i)] \, dt = 0,$$

u našem prethodnom radu (v. [2]), dobili smo

$$\mu_j(t) = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\pi}^j},$$

pa je onda jasno da jednačinu (10) možemo napisati u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta \tilde{L} + \mu_j(t) \, \delta (\dot{\pi}^j - a_i^j \dot{q}^i)] \, dt = 0,$$

tj. u obliku pravog varijacionog problema, izraženog jednačinom (7):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{L} + \mu_j (\dot{\pi}^j - a_i^j \dot{q}^i)] \, dt = 0.$$

Međutim, moramo da istaknemo sledeće: dok se pri varijacijama (4), kojima odgovara varijacioni problem (5), transformacije (2) ne održavaju, dotle je varijacioni problem (7) formulisan tako da se transformacije (2) održavaju i na variranim trajektorijama, tj. formulisan je tako da važi

$$\delta \dot{\pi}^k = \delta (a_j^k \dot{q}^j),$$

odakle lako dobijamo za varijacije kvazikoordinata izraze

$$\delta \pi^k = a_j^k \, \delta q^j - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial a_s^k}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j^k}{\partial q^s} \right) \dot{q}^j \, \delta q^s \, dt. \tag{11}$$

To znači da problem (5) može da se formuliše kao pravi varijacioni problem (7) samo onda ako se način variranja kvazikoordinata izmeni u skladu sa (11).

Naš dalji cilj u ovome radu će biti da uporedimo relacije (4) i (11), kojima su, na dva različita načina, određene varijacije kvazikoordinata.

2. Potražimo prvo uslove pod kojima će se jednačine (4) i (11) poklapati. Uvedimo, radi kraćeg pisanja, oznake

$$\beta^i_{js} = \frac{\partial a^i_s}{\partial q^j} - \frac{\partial a^i_j}{\partial q^s}, \tag{12}$$

pa ćemo izraze pod integralima u (11) moći napisati u obliku

$$\beta^i_{js}\, dq^j\, \delta q^s. \tag{13}$$

Očigledno je da će se varijacije (11) poklapati sa varijacijama (4) ukoliko su izrazi (13) jednaki nuli, a to je moguće u sledećim slučajevima:

a) Kada su koeficijenti $\beta^i_{js}=0$, tj. kada je

$$\frac{\partial a^i_s}{\partial q^j} - \frac{\partial a^i_j}{\partial q^s} = 0, \tag{14}$$

a to znači kada su relacije (1) integrabilne. Takav slučaj ćemo, kao trivijalan, isključiti odmah.

b) Vodeći računa da je sistem β^i_{js} antisimetričan po donjim indeksima, lako je pokazati da uslovi

$$\beta^i_{js}\, dq^j\, \delta q^s = 0, \tag{15}$$

u slučaju da indeksi i, j i s uzimaju vrednosti 1 i 2 (sistem sa dva stepena slobode) dovode do

$$\delta q^s = \lambda\, dq^s, \tag{16}$$

gde je λ skalarna veličina.

Varijacije (16) dovode do variranja trajektorije u sebe samu, te takav slučaj, sa stanovišta Hamiltonovog principa, moramo odbaciti kao neinteresantan.

Razmotrimo, kao ilustraciju ovoga slučaja, materijalni sistem koji se sastoji od jedne materijalne tačke koja se kreće u ravni. Birajući za generalisane koordinate polarne koordinate r i φ, i uvodeći kao kvazibrzinu sektorsku brzinu

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}, \tag{17}$$

dobićemo kao varijaciju tipa (11):

$$\delta A = \frac{1}{2} r^2 \delta\varphi - \int_{t_0}^{t} r\,(\dot{r}\,\delta\varphi - \dot{\varphi}\delta r)\, dt, \tag{18}$$

što znači da u ovome slučaju relacije (15) prelaze u

$$r\,(dr\,\delta\varphi - d\varphi\,\delta r) = 0, \tag{19}$$

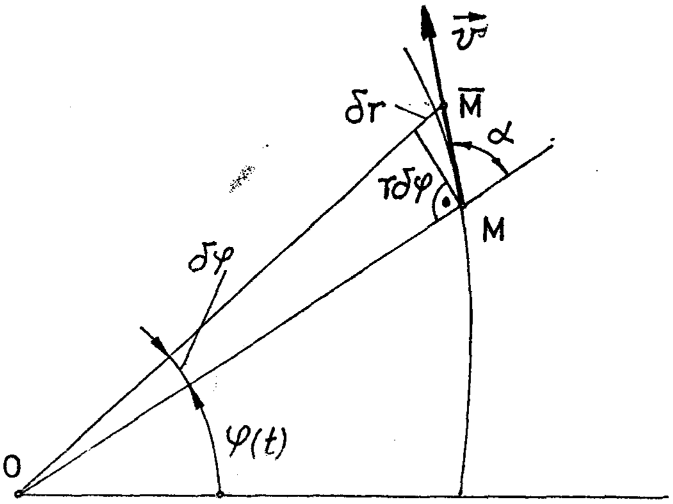
odakle je

$$\frac{\delta r}{r\,\delta\varphi} = \frac{\dot{r}}{r\,\dot{\varphi}},$$

tj., prema sl. 1,

$$\delta r = r\,\delta\varphi \operatorname{cotg} \alpha,$$

pa je očigledno da u tome slučaju varijacije δr i $\delta\varphi$ dovode do tačke $\overline{M}$ koja je opet na trajektoriji (v. sl. 1)



Slika 1

U slučaju dinamičkog sistema sa brojem stepeni slobode većim od dva, uslovi (15) ne moraju dovesti do (16), ali i tada oni izražavaju neku zavisnost između varijacija δq^i, što Hamiltonov princip ne prihvata.

Iz svega izloženog zaključujemo da je, osim u trivijalnom slučaju, kada su veze (1) integrabilne, neophodno izmeniti način variranja kvazikoordinata u skladu sa (11), da bi varijacioni zadatak (5) mogao da pređe u pravi varijacioni problem (7).

Razmotrimo, na kraju, opet na primeru sistema od jedne materijalne tačke koja se kreće u ravni, geometrijsku interpretaciju razlike varijacija kvazikoordinata, definisanih jednačinama (4), odnosno jednačinama (11).

Ako kao generalisane koordinate uvedemo polarne koordinate r i φ, i ako uvedemo kvazibrzinu jednačinom (17), pomenutu razliku izražava integral

$$\int_{t_0}^{t} r(\dot{\varphi}\,\delta r - \dot{r}\,\delta\varphi)\,dt. \tag{20}$$

Varijacija tipa (4), tj. varijacija

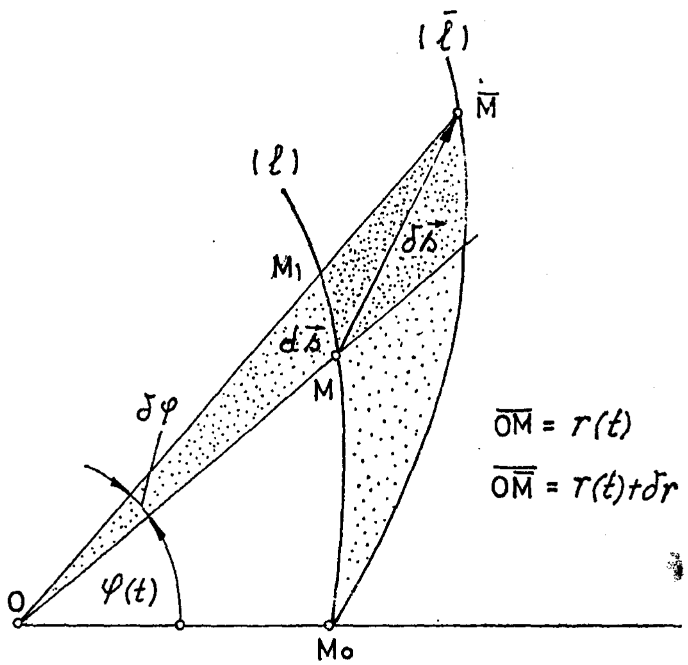
$$\delta A = \frac{1}{2} r^2\,\delta\varphi, \tag{21}$$

je, očigledno, na sl. 2 predstavljena površinom sektora OMM_1, a varijacija tipa (11), koju ćemo u ovome slučaju, da bismo je razlikovali od (21), označiti sa $\underline{\delta A}$, tj. varijacija

$$\underline{\delta A} = \frac{1}{2} r^2 \delta\varphi + \int_{t_0}^{t} r(\dot{\varphi}\,\delta r - \dot{r}\,\delta\varphi)\,dt, \tag{22}$$

površinom omeđenom lucima $\widehat{M_0 M}$, $\widehat{M_0 \bar{M}}$ i dužima $\overline{OM}$ i $\overline{O\bar{M}}$ (v. sl. 2).

Razlika ovih varijacija, jednaka integralu (20), treba, dakle, da bude predstavljena površinom ograničenom lucima $\widehat{M_0 M_1}$, $\widehat{M_0 \bar{M}}$ i duži $\overline{M_1 \bar{M}}$, površinom koju ćemo označiti sa δA_1 (v. sl. 2).



Slika 2

I zaista, imajući u vidu da se element $d(\delta A_1)$ površine δA_1 može izraziti kao

$$d(\delta A_1) = (\overrightarrow{\delta s} \times \overrightarrow{ds}) \cdot \vec{k},$$

gde je, ako sa $\vec{u}$ i $\vec{p}$ označimo jedinične vektore polarnog sistema,

$$\overrightarrow{\delta s} = \delta r\,\vec{u} + r\,\delta\varphi\,\vec{p}, \quad \overrightarrow{ds} = dr\,\vec{u} + r\,d\varphi\,\vec{p}, \quad \vec{k} = \vec{u} \times \vec{p},$$

dobićemo

$$d(\delta A_1) = r\,d\varphi\,\delta r - r\,dr\,\delta\varphi = r(\dot{\varphi}\,\delta r - \dot{r}\,\delta\varphi)\,dt,$$

pa je očigledno da će biti

$$\delta A_1 = \int_{(\delta A_1)} d(\delta A_1) = \int_{t_0}^{t} r(\dot{\varphi}\,\delta r - \dot{r}\,\delta\varphi)\,dt,$$

što smo i hteli da pokažemo.

Literatura

[1] Čović V. — Lukačević M., *Prilog analitičkoj mehanici neholonomnih sistema,* rad primljen za štampu u Glasu Odeljenja prirodno-mat. nauka SANU.

[2] Čović V. — Lukačević M., *On the second form of Hamilton's principle,* rad primljen za štampu u Biltenu Odeljenja prirodno-matematičkih nauka SANU.

[3] Đukić Đ., *A Variational Principle Involving a Conditional Extremum for the Hamel-Boltzmann Equations of Motion,* Acta Mechanica **25**, Notes, 1976.

SUR LA VARIATION DES QUASICOORDONNÉES

Résumé

On analyse le problème variationnel (5) auquel correspondent les variations des quasicoordonnées (4) et on constate qu'il peut être réduit au problème direct du calcul des variations, qui exprime la condition d'extremalité d'un fonctionnel, à condition de changer le mode de variation des quasicoordonnées en accord avec les relations (11).

On compare ensuite les relations (4) et (11) qui définissent les variations des quasicoordonnées de deux manières différentes. On constate qu'elles déterminent les mêmes variations seulement quand les relations (1) sont intégrables.

On donne, enfin, à l'aide d'un exemple, l'interprétation géométrique de la différence des variations des quasicoordonnées (4) et (11).

Dr Mirjana M. Lukačević Mašinski fakultet 11000 Beograd
Dr Vukman M. Čović Mašinski fakultet 11000 Beograd

Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs

Herausgegeben von

R. Sauer I. Szabó

Unter Mitwirkung von

H. Neuber · W. Nürnberg · K. Pöschl

E. Truckenbrodt · W. Zander

Teil III

Verfaßt von

T. P. Angelitch · G. Aumann · F. L. Bauer

R. Bulirsch · H. P. Künzi · H. Rutishauser

K. Samelson · R. Sauer · J. Stoer

Mit 101 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968

Радом у „Шпрингеровој“ књизи **Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs** професору Т. П. Анђелићу је одато признање из области тензорског рачуна.

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle serie, tome 4 (12), 1984.

NOVE FORME JEDNAČINA ANALITIČKE MEHANIKE

Dušan Mićević i *Lazar Rusov*

Uopštavanju Lagranžeovih jednačina druge vrste za holonomne reonomne sisteme posvećeni su radovi većeg broja naučnika kao što su: J. Nilsena, D. Manžeron-S. Deleanu, Ju. N. Maslova, I. Cenova, V. Dolapčieva, M. Šuljgina i drugih. Iz uopštenog Lagranž-Dalamberovog principa izvedene su jednačine Manžeron-Delenau, iz kojih kao specijalni slučajevi slede jednačine Nilsena i Cenova. U ovom radu koristeći se izvedenim osnovnim kinematičkim relacijama i korišćenjem Gausovog principa i uopštenog Lagranž-Dalamberovog principa, izvršeno je uopštavanje Lagranžeovih jednačina druge vrste za holonomne reonomne sisteme. Formirano je nekoliko oblika uopštenih diferencijalnih jednačina kretanja (1.12), (2.14), (3.15), (3.18), da bi na kraju izvršili generalno uopštavanje i dobili familiju uopštenih diferencijalnih jednačina kretanja (3.22) za holonomne sisteme, iz kojih kao specijalni slučajevi slede sve do sada izvedene uopštene jednačine holonomnih sistema. Ovim su istovremeno iscrpljene sve mogućnosti formiranja uopštenih Lagranžeovih jednačina druge vrste, različitih po spoljašnjoj formi.

1. **Kinematičke relacije.** Posmatrajmo sistem materijalnih tačaka B_j $(j=1, 2, \ldots, N)$ masa m_j podvrgnutih holonomnim reonomnim idealnim vezama, sa n stepeni slobode. Neka je položaj tog sistema određen sa n nezavisnih generalisanih koordinata $q_\alpha(\alpha=1, 2, \ldots, n)$. Vektori položaja orijentisani u odnosu na inercijalni sistem referencije mogu biti predstavljeni kao funkcije generalisanih koordinata q_α i vremena t,

$$\vec{r}_j=\vec{r}_j(q_\alpha, t); \quad (j=1, 2, \ldots, N; \quad \alpha=1, 2, \ldots, n). \tag{1.1}$$

Odredićemo prvi, drugi i treći izvod po vremenu vektora položaja

$$\vec{v}_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\alpha q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}; \qquad \vec{v}_j=\vec{v}_j(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t), \tag{1.2}$$

$$\vec{a}_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta+2\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\alpha \partial t}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

$$\vec{e}_j = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} \dddot{q}_\alpha + 3 \sum_{\beta=1}^{n} \left[\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\beta \partial t} \right] \ddot{q}_\beta + \vec{E}_3, \tag{1.4}$$

$$\vec{a}_j = \vec{a}_j (q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \ddot{q}_\alpha, t), \quad \vec{e}_j = \vec{e}_j (q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \ddot{q}_\alpha, \dddot{q}_\alpha, t).$$

Vektor $\vec{E}_3$ u relaciji (1.4) označava zbir svih članova koji ne sadrže $\ddot{q}_\alpha$ i $\dddot{q}_\alpha$.

Parcijalnim diferenciranjem izraza (1.2), (1.3) i 1.4) po $\dot{q}_\alpha$, $\ddot{q}_\alpha$, i $\dddot{q}_\alpha$ respektivno, nakon uopštavanja postupka, dobili smo prvu osnovnu kinematički relaciju

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{a}_j}{\partial \ddot{q}_\alpha} = \cdots = \frac{\partial \vec{r}_j^{(k)}}{\partial q_j^{(k)}}; \quad \vec{r}_j^{(k)} \equiv \frac{d^k \vec{r}_j}{dt^k}, \quad q_j^{(k)} \equiv \frac{d^k q_\alpha}{dt^k}. \tag{1.6}$$

Odredimo sada parcijalni izvod vektora brzine (1.2) po generalisanoj koordinati q_β

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_\beta} = 1 \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t \, \partial q_\beta} \right], \tag{1.6}$$

odnosno parcijalni izvod vektora ubrzanja (1.3) po generalisanoj brzini $\dot{q}_\beta$

$$\frac{\partial \vec{a}_j}{\partial \dot{q}_\beta} = 2 \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t \, \partial q_\beta} \right], \tag{1.7}$$

i parcijalni izvod vektora $\vec{e}_j$ (1.4) po generalisanom ubrzanju $\ddot{q}_\beta$

$$\frac{\partial \vec{e}}{q \, \ddot{q}_\beta} = 3 \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t \, \partial q_\beta} \right]. \tag{1.8}$$

Na osnovu relacija (1.6—1.8) možemo zaključiti da će se rezultat (1.6) pomnožen odgovarajućim prirodnim brojem k ($k = 1, 2, \ldots$) dobijati ako bilo koji k-ti izvod vektora položaja po vremenu $\vec{r}_j^{(k)} \left(\vec{r}_j^{(k)} \equiv \frac{d^k \vec{r}_j}{dt^k} \right)$ parcijalno diferenciramo po $k-1$ izvodu generalisane koordinate. Na osnovu toga sledi druga osnovna kinematička relacija

$$\frac{\partial \vec{r}_j^{(k)}}{\partial q^{(k-1)}} = k \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\beta}. \tag{1.9}$$

Iz (1.9) za $k = 1$ dobija se identičnost što i treba da bude. Pošto je

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta} (q_1, q_2, \ldots, q_n; t),$$

diferenciranjem po vremenu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_\beta \partial t}, \tag{1.10}$$

i vodeći računa o invarijantnosti izvoda u odnosu na red parcijalnog diferenciranja, iz (1.10) i (1.6) sledi poznata relacija, nazvaćemo je treća osnovna kinematička relacija

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta}=\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\beta}. \tag{1.11}$$

Na osnovu (1.5), (1.9) i (1.11) neposredno sledi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta}=\frac{1}{k}\frac{\partial \vec{r}_j^{(k)}}{\partial q_\beta^{(k-1)}}. \tag{1.12}$$

Koristeći tri osnovne kinematičke relacije (1.5), (1.9) i (1.11) odredićemo k-ti izvod vektora položaja $\vec{r}_j$ po vremenu i pri tome eksplicitno ćemo napisati samo one članove koji sadrže k-ti i k-1 izvod generalisanih koordinata q_β po vremenu.

Zamenom leve strane jednačine (1.6) u jednačinu (1.4) dobićemo jednostavniji izraz za treći izvod vektora položaja

$$\dddot{\vec{r}}_j \equiv \vec{e}_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha}\dddot{q}_\alpha+3\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\beta}\ddot{q}_\beta+\vec{E}_3. \tag{1.13}$$

U relaciji (1.13) članovi $\vec{E}_3$ i $\dfrac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\beta}$ ne sadrže izvode $\ddot{q}_\alpha$ i $\dddot{q}_\alpha$.

Ako sada izraz (1.13) diferenciramo po vremenu, vodeći računa o relaciji (1.11), dobićemo četvrti izvod po vremenu vektora položaja u obliku

$$\vec{r}_j^{(4)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha}q_\alpha^{(4)}+4\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}\dddot{q}_\alpha+\vec{E}_4. \tag{1.14}$$

Vektor $\vec{E}_4$ u (1.14) ne sadrži članove sa izvodima $\dddot{q}_\alpha$ i $q_\alpha^{(4)}$.

Uopštavanjem prikazanog postupka, dobićemo da je k-ti izvod vektora položaja po vremenu, proizvoljne tačke razmatranog mehaničkog sistema određen relacijom

$$\vec{r}_j^{(k)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha}q_\alpha^{(k)}+k\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}q_\alpha^{(k-1)}\right]+\vec{E}_k. \tag{1.15}$$

Vektor $\vec{E}_k$ ne sadrži članove sa izvodima $q_\alpha^{(k-1)}$ i $q_\alpha^{(k)}$ i relacija (1.15) zadovoljava jednačine (1.5) i (1.9), a za $k=1, 2$ treba koristiti jednačine (1.2) i (1.3).

2 Uopštavanje Lagranžeovih jednačina druge vrste. Prvo ćemo izvršiti uopštavanje Lagranžeovih jednačina, polazeći od diferencijalnog principa drugog reda. Za holonomni sistem Gausov princip glasi [6]

$$\sum_{j=1}^{N}(-m_j\vec{a}_j+\vec{F}_j)\cdot\delta\vec{a}_j=0, \tag{2.1}$$

pri tome se predpostavlja da je $\delta\vec{r}_j=0$, $\delta\vec{v}_j=0$, $\delta t=0$ i $\delta\vec{a}_j\neq 0$.

Na osnovu relacija (1.1), (1.2), (1.3) i korišćenjem prve osnovne kinematičke relacije (1.5), možemo napisati da je

$$\delta\vec{a}_j=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}\delta\ddot{q}_\alpha, \tag{2.2}$$

tada Gausov princip (2.1) glasi

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(-m_j a_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}\right)+Q_\alpha\right]\delta\ddot{q}_\alpha=0, \tag{2.3}$$

gde je $Q_\alpha=\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}$ generalisana sila koja potiče od aktivnih sila koje dejstvuju na razmatrani sistem.

Prvu sumu u izrazu (2.3) dobićemo, polazeći od izraza za kinetičku energiju razmatranog mehaničkog sistema

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j^{\,2}. \tag{2.4}$$

Parcijalni izvod kinetičke energije (2.4) po q_α je

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha}. \tag{2.5}$$

Odredimo sada prvi i drugi totalni izvod kinetičke energije po vremenu

$$\dot{T}=\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\vec{a}_j, \tag{2.6}$$

$$\ddot{T}=\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j^{\,2}+\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\vec{e}_j, \tag{2.7}$$

pa su parcijalni izvodi funkcija $\dot{T}$ i $\ddot{T}$ po $\dot{q}_\alpha$ odnosno $\ddot{q}_\alpha$ uz korišćenje osnovnih kinematičkih relacija (1.5) i (1.9), određeni izrazima

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial\dot{q}_\alpha}+2\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{q}^\alpha}=2\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{a}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_\alpha}+3\sum_{j=1}^{N}m_j\vec{v}_j\cdot\frac{\partial\vec{v}_j}{\partial q_\alpha}. \tag{2.9}$$

Oduzimanjem relacije (2.8) od (2.9) i uzimajući u obzir (2.5) prva suma u Gausovom principu (2.3) određena je izrazom

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\beta} = \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}^\alpha} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}, \tag{2.10}$$

pa se Gausov princip (2.3) može napisati u obliku

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[-\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}^\alpha} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) + Q_\alpha \right] \delta \ddot{q}_\alpha = 0. \tag{2.11}$$

Iz (2.11) sobzirom da su varijacije generalisanih ubrzanja nezavisne $\delta \ddot{q}_\alpha \neq 0$, sledi n nezavisnih jednačina

$$\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}^\alpha} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.12}$$

a to su uopštene Lagranžeove jednačine druge vrste i zvaćemo ih *prvi oblik uopštenih diferencijalnih jednačina holonomnih reonomnih sistema.*

Drugi oblik uopštenih Lagranžeovih jednačina izvešćemo tako što ćemo eliminisati izraz $\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}$ iz relacija (2.8) i (2.9) i tada dobijamo da je

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = 2 \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\alpha} - 3 \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha}, \tag{2.13}$$

pa se Gausov princip transformiše u oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[-\left(2 \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\alpha} - 3 \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + Q_\alpha \right] \delta \ddot{q}_\alpha = 0,$$

odakle neposredno pošto je $\delta \ddot{q}_\alpha \neq 0$ dobijamo n nezavisnih jednačina i zvaćemo ih *drugi uopšteni oblik diferencijalnih jednačina*

$$2 \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\alpha} - 3 \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.14}$$

Za razliku od svih postojećih tipova uopštenih diferencijalnih jednačina koje koriste funkcije $T^{(k)} \left(T^{(k)} \equiv \frac{d^k T}{dt^k} \right)$, jednačine (2.14) u primeni na konkretne probleme brže dovode do rezultata jer su matematičke operacije koje se izvode pojednostavljene. Inače iz naših novih uopštenih jednačina (2.12) i (2.14) lako se kombinovanjem dobijaju poznate diferencijalne jednačine Nilsena i Cenova druge vrste, dok je obrnut postupak znatno složeniji.

3. **Uopštene diferencijalne jednačine** k**-te vrste.** Dalja istraživanja u vezi sa uopštavanjem Lagranžeovih jednačina zasnovaćemo na korišćenju diferencijalnog

principa višeg reda, dobijenog uopštavanjem Lagranž-Dalamberovog principa, koji glasi

$$\sum_{j=1}^{N} (-m_j \vec{a}_j + \vec{F}) \cdot \delta \vec{r}_j^{(k)} = 0, \tag{3.1}$$

pri tome se predpostavlja da je

$$\delta \vec{r}_j = 0,\ \delta \dot{\vec{r}}_j = 0, \ldots,\ \delta \vec{r}_j^{(k-1)} = 0,\ \delta t = 0;\ \delta \vec{r}_j^{(k)} \neq 0.$$

Da bismo izveli uopštene diferencijalne jednačine k-te vrste, odredićemo prvo k-ti izvod kinetičke energije po vremenu i odgovarajući parcijalni izvod po k-tom izvodu generalisane koordinate $q_\alpha^{(k)}$. Diferenciranjem po vremenu relacije (2.7) dobićemo

$$\dddot{T} = 3 \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \vec{e}_j + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \vec{r}_j^{(4)}, \tag{3.2}$$

pa je parcijalni izvod po $\dddot{q}_\alpha$ uzimajući u obzir (1.5 i (1.9)

$$\frac{\partial \dddot{T}}{\partial \dddot{q}_\alpha} = 3 \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} + 4 \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha} \tag{3.3}$$

Analognim postupkom se dobija

$$T^{(4)} = 3 \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{e}_j + 4 \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \vec{r}_j^{(4)} + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \vec{r}_j^{(5)}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial T^{(4)}}{\partial q_\alpha^{(4)}} = 4 \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} + 5 \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}. \tag{3.5}$$

Na osnovu relacija (2.7), (2.9), (3.2—3.5) i uz korišćenje osnovnih kinematičkih relacija (1.5) i (1.9) sledi da je k-ti izvod kinetičke energije jednak

$$T^{(k)} = k \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \vec{r}_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \vec{r}_j^{(k+1)} + D_k, \tag{3.6}$$

za $k \geqslant 3$ gde je k ceo broj. Veličina D_k ne sadrži izvode generalisanih koordinata $q_\alpha^{(k)}$ i $q_\alpha^{(k+1)}$, pa na osnovu (3.2) i (3.4) sledi da je $D_3 = 0$, a $D_4 = 3 \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{e}_j^{\,2}$.

Parcijalni izvod $T^{(k)}$ po $q_\alpha^{(k)}$ određen je relacijom

$$\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} = k \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} + (k+1) \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}, \tag{3.7}$$

gde je $k \geqslant 1$ ceo broj.

Iz relacije (3.7) a sobzirom na (2.5) sledi da je

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{k}} - (k+1) \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right]. \tag{3.8}$$

Na osnovu relacije (1.15) sledi da je

$$\delta \vec{r}_j^{(k)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha^{(k)}, \tag{3.9}$$

pa se Gausov princip sobzirom na (3.8) transformiše u oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ -\frac{1}{k} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] + Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha^{(k)} = 0, \tag{3.10}$$

odakle pošto je $\delta q_\alpha^{(k)} \neq 0$ sledi n nezavisnih poznatih uopštenih jednačina

$$\frac{1}{k} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.11}$$

Diferencijalne jednačine (3.11) prvi su izveli Manžeron i Deleanu i po njima nose ime. Iz jednačina (3.11) kada se stavi da je $k=1$ dobijaju se Nilsenove jednačine a za $k=2$ Cenovljeve jednačine druge vrste.

Polazeći od uopštenog Lagranž-Dalamberovog principa izvešćemo uopštene diferencijalne jednačine k-te vrste za holonomne sisteme koje će se po spoljašnjoj formi razlikovati od jednačina Manžeron-Deleanu i jednačina prvog (2.12) i drugog (2.14) uopštenog oblika.

Ako u izraz (3.7) broj k zamenimo sa $k-1$ dobićemo relaciju

$$\frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} = (k-1) \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} + k \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}. \tag{3.12}$$

Oduzimanjem relacije (3.12) od relacije (3.7) i uzimajući pri tome u obzir (2.5) dobijamo

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}, \tag{3.13}$$

pa se princip (3.1) na osnovu (3.9) može napisati u obliku

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left[-\left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) + Q_\alpha \right] \delta q_\alpha^{(k)} = 0, \tag{3.14}$$

odakle zbog $\delta q_\alpha^{(k)} \neq 0$ sledi n nezavisnih *uopštenih diferencijalnih jednačina k-te vrste*

$$\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.15}$$

koje važe za svako $k \geqq 2$.

Uopštene jednačine (3.15) razlikuju se od jednačina Mažeron-Deleanu (3.11). Iz jednačina za $k=2$ slede kao specijalan slučaj uopštene jednačine prvog oblika (2.12).

Izvešćemo još jedne uopštene jednačine k-te vrste tako što ćemo iz relacija (3.7) i (3.12) eliminisati izraz $\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_\alpha}$ i dobićemo

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = k \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}}, \tag{3.16}$$

što prevodi princip (3.1) u oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ -\left[k \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} \right] + Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha^{(k)} = 0, \tag{3.17}$$

odakle zbog $\delta q_\alpha^{(k)} \neq 0$ dobijamo n nezavisnih *uopštenih diferencijalnih jednačina k-te vrste*

$$k \frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} - (k+1) \frac{\partial T^{(k-1)}}{\partial q_\alpha^{(k-1)}} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.18}$$

$k \geqslant 1$, ceo broj.

Iz uopštenih jednačina (1.18) za $k=1$ slede jednačine Nilsena, a za $k=2$ slede uopštene jednačine drugog oblika (2.14).

Na osnovu postupka sprovedenog pri formiranju uopštenih diferencijalnih jednačina kretanja (3.11), (3.15) i (3.18) nameće se kao potreba da se izvrši generalno uopštavanje diferencijalnih jednačina k-te vrste za holonomne sisteme. U tom cilju zamislimo da smo ispisali svih k relacija (3.7) za svako $k \geqslant 1$. Sabirajući sve tako dobijene relacije i uzimajući u obzir (2.5), dobićemo sledeću novu relaciju za generalisanu inercijalnu silu

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_\alpha} = \frac{2}{k(k+1)} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} + \cdots + \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{k(k+3)}{2} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right], \tag{3.19}$$

pa uopšteni Lagranž-Dalamberov princip sada glasi

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ -\frac{2}{k(k+1)} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} + \cdots + \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{k(k+3)}{2} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] + Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha^{(k)} = 0, \tag{3.20}$$

odakle obzirom da je $\delta q_\alpha^{(k)} \neq 0$ dobijamo n nezavisnih uopštenih diferencijalnih jednačina

$$\frac{2}{k(k+1)} \left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial q_\alpha^{(k)}} + \cdots + \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{k(k+3)}{2} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] = Q_\alpha. \tag{3.21}$$

$$(k \geqslant 1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

Generalno uopštene jednačine (3.21) mogu se napisati *u sažetijem obliku*, ako sakupimo prvih k članova u zagradi i napišemo ih u vidu sume od k elemenata, tako da imamo

$$\frac{2}{k(k+1)} \left[\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\partial T^{(k-s)}}{\partial q_\alpha^{(k-s)}} - \frac{k(k+3)}{2} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] = Q_\alpha, \tag{3.22}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

$k \geqslant 1$, ceo broj.

Generalno uopštene jednačine (3.22) daju odgovor o mogućnosti formiranja većeg broja uopštenih diferencijalnih jednačina k-te vrste različitih spoljašnjih oblika, za holonomne sisteme. Na osnovu rezultata ostvarenih u ovom radu očigledno je da je broj uopštenih diferencijalnih jednačina različitih spoljašnjih oblika vezan za familiju funkcija $T^{(k)}$ koje koristimo pri njihovom izvođenju. Prema tome iz jednačina (3.22) sve ostale uopštene jednačine slede kao specijalni slučajevi. Na primer za $k=1$ slede Nilsenove jednačine. Jednačine Manžeron-Deleanu svih vrsta dobijaju se iz (3.22) kada se izvrši odgovarajući izbor broja k i saglasno tome određuje se brojni zbir broja s ($s=0, 1, 2, \ldots, k-1$). Posle toga na osnovu algoritma kojeg smo utvrdili treba izvršiti obične matematičke operacije i dobiće se odgovarajuće diferencijalne jednačine.

Na taj način *generalno uopštenje jednačina* (3.22) zajedno sa generalizacijom Lagranžeovih jednačina što je dato u radu [7], predstavlja potpun odgovor o uopštavanju Lagranžeovih jednačina za holonomne reonomne sisteme.

Literatura

[1] Добронравов, В. В., *Основи механики нехолономных систем*, Высшая школа. Москва 1970.

[2] Ценов, И., *Об одной новой форме уравнений аналитической динамики*, Докл. АН. СССР, **89**, I, 2I—24, 1958.

[3] Лурье, А. И., *Аналитическая механика*, Физматгиз, Ленинград 1961,

[4] Mangeron, D. — Deleanu, *S.*, *Sur une alasse d'equations de la mécanique analitique su sens de I. Tzeńoff* Докл. Болг. А. Н. Т. **15**, H1, 9—12, 1962.

[5] Nielsen, J., *Vorlesungen über elementare Mechanik*, Berlin, Springer 1935.

[6] Andjelić, T., Stojanović, R., *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd 1965.

[7] Mićević, D., *Modeli neholonomnih dinamičkih sistema*, Doktorska disertacija, Mašinski fakultet u Beogradu 1978.

НОВЫЕ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Резюме

В работе на основании выведеных основных кинематических соотношений, представляющих собой обобщение известных кинематических соотношений, и на основании принципа Гауса и обобщеного принципа Лагранж-Даламбера произведено уравнений Лагранжа второго рода для холономных реономных систем. Составлено несколько видов обобщеных дифференциальных уравнений движения (2.12-2.14), (3.15-3.18), произведено генеральное обобщения и получено семейство обобщеных дифференци-

альных уравнений движения (3.22) для голономных систем, из каторых в качестве специальных случаев следуют все до нынешнего времени известные обобщеные уравнения для голономных систем. Все это представляет собой ответ авторов на вопрос о возмсжностях образования большего числа обобщеных уравнений Лагранжа, отличаящихся между собой по внешнему виду.

Dr Dušan Mićević
Građevinski fakultet
11000 Beograd

Dr Lazar Rusov
Mašinski fakultet
11000 Beograd

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

STABILNOST KONAČNE TERMOELASTIČNE DEFORMACIJE VLAKNIMA OJAČANOG ŠTAPA

Milan Mićunović

Uvod

Danas je opšte poznato da se gubitak stabilnosti može desiti ne samo pri dejstvu pritiskujućih sila na vitka tela nego i pri zatežućim ili smičućim silama koje deluju na masivna tela.

Stabilnost se ispituje ili energetskim metodom pomoću analize postuliranih globalnih nejednakosti [1—4] ili direktnim metodom traženjem netrivijalnih rešenja poremećenih jednačina ravnoteže [5—8]. Korespodencija između ova dva metoda, koliko je autoru ovog rada poznato, do danas nije precizno uspostavljena zbog toga što se prvi od ova dva metoda još razvija.

Vlaknima ojačani materijali, danas veoma interesantni sa tehnološke tačke gledišta, imaju malu, takoreći zanemarljivu, promenu dužine u pravcu vlakana pod uticajem mehaničkih sila pa se dovoljno tačno može pretpostaviti odgovarajuća elastična neistegljivost [9]. U ovom radu se direktnim metodom razmatra stabilnost ravnoteže homogene termoelastične konačne deformacije štapa pravougaonog poprečnog preseka koji je sačinjen od nestšljivog vlaknima ojačanog generalisanog Muni-Rivlinovog (Mooney, Rivlin) materijala. Pri tom se ispituje mogućnost egzistencije dopunskog infinitezimalnog temperaturskog polja i dopunske infinitezimalne deformacije pri nepromenjenim graničnim uslovima.

1. Ravnotežna konfiguracija

Posmatramo nestišljiv elastičan štap $\mathscr{B}$ beskonačne dužine (Slika 1) pravougaonog poprečnog preseka, ojačan neistegljivim vlaknima, koji u nedeformisanoj beznaponskoj konfiguraciji $\mathscr{B}_0$ ima homogeno temperatursko polje $T_0=\text{const}$. Neka su materijalne koordinate u $\mathscr{B}_0$ Dekartove

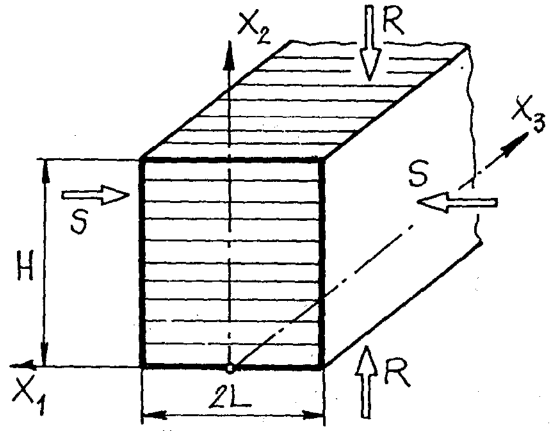
$$ds_0^2 = \delta_{KL}\, dX_K\, dX_L. \tag{1.1}$$

Ako T_0 dobije homogeni priraštaj $\hat{\theta}=\text{const}$ a granice tela su slobodne, $\mathscr{B}$ će preći u novu beznaponsku konfiguraciju $\hat{\mathscr{B}}_N$ koja se zove prirodno stanje. Funkcija preslikavanja

$$\hat{\Theta} : \mathscr{B}_0 \mapsto \hat{\mathscr{B}}_N, \quad (\widehat{du})^{\varkappa} = \hat{\Theta}^{\varkappa}_{K}\, dX_K, \tag{1.2}$$

zove se termička distorzija [9] i za $\hat{\theta} \ll T_0$ se dovoljno tačno može predstaviti linearnom tenzorskom funkcijom (β je koeficijent linearnog širenja u pravcu vlakana a γ je u pravcu upravnom na vlakna)

$$\{\Theta^{\varkappa}_{K}(\hat{\theta})\} = \begin{Bmatrix} 1+\beta\hat{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\gamma\hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\gamma\hat{\theta} \end{Bmatrix}. \tag{1.3}$$



Sl. 1

Neka na štap deluju pritiskujuće sile R i S na njegove strane paralelne ravnima X_1X_3 i X_2X_3 izazivajući izotermski prelaz štapa iz $\widehat{\mathscr{B}}_N$ u konfiguraciju $\widehat{\mathscr{B}}$. Funkcija preslikavanja prvobitne u ovu konfiguraciju (x_k su prostorne Dekartove koordinate)

$$\widehat{\mathbf{F}}: \mathscr{B}_0 \mapsto \widehat{\mathscr{B}}, \qquad \widehat{dx}_k = \hat{F}_{kK}\, dX_K = \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial X_K}\, dX_K, \tag{1.4}$$

je tenzor gradijenata deformacije i u našem slučaju ima komponente

$$\{\widehat{F}_{kL}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Bmatrix}, \qquad \lambda_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{1.5}$$

Različitost konfiguracija $\widehat{\mathscr{B}}_N$ i $\widehat{\mathscr{B}}$ prouzrokuje pojavu napona [9] a odgovarajuća funkcija preslikavanja

$$\widehat{\mathbf{\Phi}}: \widehat{\mathscr{B}}_N \mapsto \widehat{\mathscr{B}}, \qquad \widehat{dx}_k = \widehat{\Phi}_{k\varkappa}\, (\widehat{du})^{\varkappa}, \tag{1.6}$$

se zove elastična distorzija i njene komponente se iz (1.3) i (1.5) dobijaju u obliku

$$\{\widehat{\Phi}_{k\varkappa}\} = \{\widehat{F}_{kK}\, \widehat{\Theta}^{-1}_{K\varkappa}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\lambda_1}{1+\beta\hat{\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda_2}{1+\gamma\hat{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda_3}{1+\lambda\hat{\theta}} \end{Bmatrix}. \tag{1.7}$$

Tenzori

$$\underset{e}{\widehat{\mathbf{B}}} = \widehat{\Phi} \cdot \widehat{\Phi}^T, \quad \underset{e}{\widehat{\mathbf{C}}} = \widehat{\Phi}^T \cdot \widehat{\Phi} \tag{1.8}$$

sa komponentama

$$\{\underset{e}{\widehat{B}_{kl}}\} = \{\delta^{\varkappa\lambda} \widehat{\Phi}_{k\varkappa} \widehat{\Phi}_{l\lambda}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_1^2 (1+\beta\hat{\theta})^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 (1+\gamma\hat{\theta})^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 (1+\gamma\hat{\theta})^{-2} \end{Bmatrix} =$$

$$= \{\underset{e}{\widehat{C}_{\varkappa\lambda}}\} = \{\delta_{kl} \widehat{\Phi}_{k\varkappa} \widehat{\Phi}_{l\lambda}\}, \tag{1.9}$$

se, prema terminologiji datoj u [4], mogu nazvati levi i desni Koši-Grinov (Cauchy, Green) tenzor elastične deformacije.

Materijal štapa je elastično neistegljiv u pravcu vlakana (pretpostavlja se da su vlakna u datim konfiguracijama određena jediničnim vektorima $A_{0K} = \delta_{1K}$, $\underset{N}{\widehat{A}^\varkappa} = \delta_1^\varkappa$ i $\widehat{a}_k = \delta_{1k}$), odnosno [9]

$$\underset{e}{\widehat{C}_{\varkappa\lambda}} \underset{N}{\widehat{A}^\varkappa} \underset{N}{\widehat{A}^\lambda} = \underset{e}{\widehat{C}_{11}} = \left(\frac{\lambda_1}{1+\beta\hat{\theta}}\right)^2 = 1, \tag{1.10}$$

i elastično nestišljiv

$$\det \underset{e}{C_{\varkappa\lambda}} = \det \underset{e}{B_{kj}} = 1, \tag{1.11}$$

pa se dijagonalne komponente tenzora elastične deformacije mogu napisati na sledeći način

$$\underset{e}{\widehat{B}_{11}} = 1, \quad \underset{e}{\widehat{B}_{22}} = \frac{1}{\varkappa}, \quad \underset{e}{\widehat{B}_{33}} = \varkappa. \tag{1.12}$$

Napon i entropija vlaknima ojačanog nestišljivog tela pri termoelastičnoj deformaciji su određeni izvodima funkcije slobodne energije [9]

$$t_{kl} = -p\,\delta_{kl} + T a_k a_l + 2\rho\,[(\psi_1 + I_1 \psi_2) \underset{e}{B_{kl}} - \psi_2 \underset{e}{B_{km}} \underset{e}{B_{ml}} + \\ + \psi_3 a_j (\underset{e}{B_{jk}} a_l + \underset{e}{B_{jl}} a_k)], \tag{1.13}$$

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \left\{2\,\Phi_{p\mu}\left[(\psi_1 + I_1\psi_2) \underset{e}{B_{pm}} - \psi_2 \underset{e}{B_{pj}} \underset{e}{B_{jm}} + \psi_3 a_j (a_p \underset{e}{B_{jm}} + \right.\right. \\ \left.\left. + a_m \underset{e}{B_{jp}}) + \frac{1}{2\rho} T a_p a_m\right] - \frac{1}{\rho} p\,\Phi_{m\mu}\right\} F^{-1}_{Km}\, d\Theta^\mu_K / d\theta, \tag{1.14}$$

gde su: $t_{kl} = t_{lk} =$ — simetrični tenzor napona, p — pritisak (reaktivni napon koji odgovara nestišljivosti), T — napon vlakana (reaktivni napon koji odgovara elastičnoj neistegljivosti), η — specifična entropija i

$$\psi_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial I_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{1.15}$$

$$I_1 = \underset{e}{B_{kk}}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\underset{e}{B_{kk}} \underset{e}{B_{ll}} - \underset{e}{B_{kl}} \underset{e}{B_{lk}}), \quad I_3 = \underset{e}{B_{jk}} a_j a_k. \tag{1.16}$$

Pretpostavimo da je materijal posmatranog štapa nelinearni elastični generalisani Muni-Rivlinov materijal sa funkcijom slobodne energije

$$\psi(\widehat{B}_{kl}, \hat{\theta}) = C_1(\hat{\theta})(\widehat{I}_1 - 3) + C_2(\hat{\theta})(\widehat{I}_2 - 3) + C_3(\hat{\theta})(\widehat{I}_3 - 1). \tag{1.17}$$

Zbog toga što je $\hat{\theta} \ll T_0$ možemo C_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ razviti u stepene redove po $\hat{\theta}$ i zadržati samo linearnu aproksimaciju

$$C_\alpha(\hat{\theta}) = C_\alpha(0) + \left(\frac{dC_\alpha}{d\hat{\theta}}\right)_0 \hat{\theta} \equiv A_\alpha(1 + k_\alpha \hat{\theta}), \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{1.18}$$

U specijalnom slučaju $\hat{\theta} = 0$ za $C_3 = 0$ dobija se Muni-Rivlinov materijal bez ojačanja a ako je i $C_2 = 0$ materijal je neohukovski bez ojačanja [4]. U radu [7] je uvedena pretpostavka (za materijal bez ojačanja) $k_\alpha = 1/T_0$ $(\alpha = 1, 2)$ koja će se dalje i ovde koristiti zbog jednostavnijih krajnjih rezultata. Uzimajući ovo u obzir iz graničnih uslova $\hat{t}_{11}(\pm\lambda_1 L) = \pm S$, $\hat{t}_{22}(0, \lambda_2 H) = \mp R$ dobijaju se prostorne komponente tenzora napona pomoću (1.12)—(1.17)

$$\hat{t}_{11} = S, \quad \hat{t}_{22} = R, \quad \hat{t}_{33} = R - 2\hat{\rho}\frac{1-\varkappa^2}{\varkappa}[C_1 + C_2(1+\varkappa)], \quad \hat{t}_{kl} = 0 \quad (k \neq l), \tag{1.19}$$

$$\hat{p} = -R + 2\hat{\rho}\frac{1}{\varkappa}[C_1 + C_2(1+\varkappa)], \quad \hat{T} - \hat{p} = S - 2\hat{\rho}\left(C_1 + C_2\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa} + 2C_3\right). \tag{1.20}$$

U gornjim izrazima su $\varkappa = \text{const}$, $C_\alpha = \text{const}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ pa su uslovi ravnoteže (zapreminske sile ne uzimamo u obzir) u $\widehat{\mathscr{B}}$, odnosno

$$\hat{t}_{kl,l} = 0, \tag{1.21}$$

identički zadovoljeni.

2. **Priraštaji deformacije, napona i entropije**

Neka su gradijenti deformacije dobili ravanski virtualni priraštaj $u = u(x, y)$ $v = v(x, y)$, $w = w(z)$ [8]

$$\delta F_{kK} = u_{k,l} \hat{F}_{lK}, \qquad \{u_{k,l}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix}, \tag{2.1}$$

a temperatursko polje virtualni priraštaj $\delta\theta = \theta - \hat{\theta} \equiv \tau$. Tada će konfiguracije $\widehat{\mathscr{B}}_N$ i $\widehat{\mathscr{B}}$ preći u njima infinitezimalno bliske $\mathscr{B}_N$ i $\mathscr{B}$ a odgovarajući virtualni priraštaji termičke i elastične distorzije će biti [9]

$$\{\delta\Theta^{\varkappa}_{K}\} = \tau\{\beta^{\varkappa}_{K}\} = \tau \begin{Bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{Bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\{\delta\Phi_{kx}\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}-Б\tau & \dfrac{1}{\sqrt{\varkappa}}\dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{1}{\sqrt{\varkappa}}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}-\Gamma\tau\right) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\varkappa}\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}-\Gamma\tau\right) \end{Bmatrix}, \tag{2.3}$$

gde su uvedene oznake $Б=\beta/(1+\beta\hat{\theta})$, $\Gamma=\gamma/(1+\gamma\hat{\theta})$. Sada, korišćenjem (2.1)—(2.3) virtualni priraštaji uslova elastične neistegljivosti i elastične nestišljivosti daju, respektivno

$$\frac{\partial u}{\partial x}-Б\tau=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2\,\Gamma\tau, \tag{2.4}$$

pa je virtualni priraštaj levog Koši-Grinovog tenzora elastične deformacije određen matricom

$$\{\delta \underset{e}{B}_{kl}\}=\begin{Bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\varkappa}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{1}{\varkappa}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} & -2\dfrac{\Gamma}{\varkappa}\tau & 0 \\ 0 & 0 & -2\Gamma\varkappa\tau \end{Bmatrix}. \tag{2.5}$$

Ako uvedemo oznake

$$\pi=\delta p, \qquad \sigma\equiv\delta T \tag{2.6}$$

i uzmemo u obzir (1.18), (2.5) i varijaciju uslova elastične nestišljivosti

$$\delta\rho=-\hat{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\hat{\rho}\,(Б+2\Gamma)\,\tau, \tag{2.7}$$

virtualni priraštaj prostornih komponenata tenzora napona dobijamo iz (1.13) na sledeći način:

$$\begin{aligned} \delta\, t_{kl}= & -\pi\delta_{kl}+\sigma\,\hat{a}_k\,\hat{a}_l-2\,\hat{\rho}\,(Б+2\,\Gamma-\hat{T}^{-1})\,[(C_1+\hat{I}_1\,C_2)\,\underset{e}{\hat{B}}_{kl}-C_2\,\underset{e}{\hat{B}}_{km}\,\underset{e}{\hat{B}}_{ml}+ \\ & +C_3\,\hat{a}_j\,(\underset{e}{\hat{B}}_{jk}\,\hat{a}_l+\underset{e}{\hat{B}}_{jl}\,\hat{a}_k)]+2\,\hat{\rho}\,[C_2\,\underset{e}{\hat{B}}_{kl}\,\delta I_1+(C_1+\hat{I}_1\,C_2)\,\delta\,\underset{e}{B}_{kl}- \\ & -C_2\,(\underset{e}{\hat{B}}_{ml}\,\delta\,\underset{e}{B}_{km}+\underset{e}{\hat{B}}_{km}\,\delta\,\underset{e}{B}_{ml})+C_3\,\hat{a}_j\,(\hat{a}_l\,\delta\,\underset{e}{B}_{jk}+\hat{a}_k\,\delta\,\underset{e}{B}_{jl})]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sada se virtualni korotacioni priraštaj prostornih komponenata tenzora napona σ_{kl} (koji uzima u obzir i promenu površine na koju vektor napona deluje [8]) može lako eksplicitno napisati pomoću relacija

$$\sigma_{kl}=\delta\,t_{kl}-\omega_{km}\,\hat{t}_{ml}+\hat{t}_{km}\,\omega_{ml}, \qquad \omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.9}$$

Na sličan način, (1.14) daje virtualni priraštaj entropije

$$
\begin{aligned}
\delta\eta = -\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \delta\Big\{2\,\Phi_{p\mu}\Big[(C_1+C_2 I_1)\,\underset{e}{B}_{pm} - C_2\,\underset{e}{B}_{pj}\,\underset{e}{B}_{jm} + C_3\,a_j\,(a_p\,\underset{e}{B}_{jm} + \\
+ a_m\,\underset{e}{B}_{jp}) + \frac{1}{2\rho}\,T\,a_p\,a_m\Big] - \frac{1}{\rho}\,p\,\Phi_{m\mu}\Big\}\,\beta^{\mu}_{K}\,\hat{F}^{-1}_{Km} + \\
+ \Big\{\frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}\,\hat{\Phi}_{m\mu} - 2\,\hat{\Phi}_{p\mu}\Big[(C_1+C_2\hat{I}_1)\,\underset{e}{\hat{B}}_{pm} - C_2\,\underset{e}{\hat{B}}_{pj}\,\underset{e}{\hat{B}}_{jm} + C_3\,\hat{a}_j\,(\hat{a}_p\,\underset{e}{\hat{B}}_{jm} + \\
\hat{a}_m\,\hat{B}_{jp}) + \frac{1}{2\hat{\rho}}\,T\,\hat{a}_p\,\hat{a}_m\Big]\Big\}\,\beta^{\mu}_{K} u_{k,m}\,\hat{F}^{-1}_{Kk},
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

gde je iskorišćena veza

$$\delta F^{-1}_{Km} = -\hat{F}^{-1}_{Kn}\,u_{n,m}, \tag{2.11}$$

koja se lako izvodi iz (2.1). Ovim su određene sve veličine koje figurišu u priraštajnim jednačinama balansa pa će ove biti napisane u sledećem odeljku.

3. Priraštajne jednačine balansa i granični uslovi

Priraštajne jednačine balansa količine kretanja, izvedene u [5] i [8], a ekvivalentne jednačinama »neutralne ravnoteže« u konvektivnim koordinatama [1], odnosno

$$\sigma_{kl,l} + \omega_{kp,l}\,\hat{t}_{pl} + \hat{t}_{kp}\,\omega_{lp,l} - \hat{t}_{kp,l}\,\varepsilon_{lp} = 0 \qquad \text{u } \mathcal{B}, \tag{3.1}$$

gde je

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right), \tag{3.2}$$

imaju u našem slučaju eksplicitni oblik

$$\alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \xi_1\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\pi-\sigma), \tag{3.3}$$

$$\alpha_1\,\varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \xi_2\frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{\partial\pi}{\partial y}. \tag{3.4}$$

Ovde su sa α_1, ξ_1 i ξ_2 označene konstante

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 2\frac{\hat{\rho}}{\varkappa}(C_2\varkappa + C_1 + C_3),\\
\xi_1 &= 2\frac{\hat{\rho}}{\varkappa}\left\{\left(\text{Б} - \frac{1}{\hat{T}}\right)[(C_1+2\,C_3)\varkappa + C_2(1+\varkappa^2)] + 2\varkappa\,\Gamma\,(C_2\varkappa + C_3)\right\}\\
\xi_2 &= 2\frac{\hat{\rho}}{\varkappa}\left\{\text{Б}\,[(C_2-C_3) + 2\varkappa\,\Gamma C_2 - \frac{1}{\hat{T}}[C_1 + C_2(1+\varkappa)]\right\},
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

koje zavise od početne konačne elastične deformacije $\varkappa$ (videti (1.12)).

Razmotrimo, sada, priraštajnu jednačinu koja se odnosi na balans energije. Ukoliko bi, umesto dinamičke jednačine balansa energije [4]

$$\rho T \frac{d\eta}{dt} = -q_{k,k}, \tag{3.6}$$

napisali virtualnu jednačinu

$$\hat{\delta} \hat{T} \delta\eta \geqslant -\varepsilon q_{k,k}, \tag{3.7}$$

(gde je ε — infinitezimalni sklar), razvili q_k u stepeni red [9]

$$\begin{gathered} q_k(\hat{\Phi}_{m\mu} + \delta \Phi_{m\mu}, \hat{T} + \tau, \tau,_n) = q_k(\hat{\Phi}, \hat{T}, 0) + \left(\frac{\partial q_k}{\partial \Phi_{m\mu}}\right)_{\hat{\Phi}, \hat{T}, 0} \delta \Phi_{m\mu} + \\ + \left(\frac{\partial q_k}{\partial T}\right)_{\hat{\Phi}, \hat{T}, 0} \tau + \left(\frac{\partial q_k}{\partial \tau,_l}\right)_{\hat{\Phi}, \hat{T}, 0} \tau,_l \equiv -K_{kl} \tau,_l, \end{gathered} \tag{3.8}$$

i zamenili u (3.7), dobili bismo

$$\hat{\rho} \hat{T} \delta\eta = \varepsilon K_{kl} \tau,_{lk}. \tag{3.9}$$

Pri tom je za izvođenje (3.8) iskorišćen uslov nepostojanja toplotnog fluksa u homogenom temperaturskom polju. U jednačini (3.8) sa K_{ij} su označene konstantne prostorne komponente tenzora termičke provodnosti [11]. Pošto je τ infinitezimalni priraštaj temperature, desna strana jednačine (3.9) se može zanemariti kao mala veličina drugog reda, pa se iz (3.9) i (2.10) dobija priraštajna jednačina balansa energije

$$\begin{gathered} Б\hat{T}\sigma - (Б + 2\Gamma)\hat{T}\pi - \left[\xi_3 - \frac{1}{2}(2\Gamma^2 + 2\GammaБ - Б^2)R\hat{T} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}Б(Б + 2\Gamma)S\hat{T}\right]\tau = 0, \end{gathered} \tag{3.10}$$

gde je

$$\begin{gathered} \frac{\varkappa}{2\hat{\rho}}\xi_3 = Б^2\hat{T}[C_1(-1 + \varkappa + \varkappa^2) + 2C_2\varkappa^2 + 2C_3\varkappa] + 2Б\Gamma\hat{T}[C_1(1 + \varkappa) + \\ + C_2(1 + 2\varkappa + \varkappa^2) + 2C_3] + \Gamma^2\hat{T}[C_1(1 + \varkappa^2) + C_2(1 + 4\varkappa + 3\varkappa^2)] - \\ - Б[(C_1 + 2C_3)\varkappa + C_2(1 + \varkappa^2)] - 2\Gamma\varkappa[C_1\varkappa + C_2(1 + \varkappa)]. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Što se tiče priraštajnih graničnih uslova (videti [8])

$$\delta f_k = (\sigma_{kl} + \omega_{kp}\hat{t}_{pl} - \hat{t}_{kl}\varepsilon_{pp} - \hat{t}_{kp}\varepsilon_{pl})n_l = 0 \quad \text{na} \quad S = \partial\mathscr{B}, \tag{3.12}$$

gde je n_k jedinični vektor spoljne normale na granici tela S, u našem slučaju se oni svode na

$$\sigma_{11} + \hat{t}_{11}\varepsilon_{22} = [-\pi + \sigma + (2\Gamma S - \zeta_1)\tau]_{x=\pm\lambda_1 L} = 0. \tag{3.13}$$

$$\sigma_{21} + \omega_{21}\hat{t}_{11} - \hat{t}_{22}\varepsilon_{21} = \left[(\alpha_1 + S - R)\frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1\varkappa - S)\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=\pm\lambda_1 L} = 0, \tag{3.14}$$

$$\sigma_{12}+\omega_{12}\hat{t}_{22}-\hat{t}_{11}\varepsilon_{12}=\left[\alpha_1\frac{\partial u}{\partial y}+(\alpha_1\varkappa-S)\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{y=0,\,\lambda_2 H}=0, \tag{3.15}$$

$$\sigma_{22}+\varepsilon_{11}\hat{t}_{22}=[-\pi+(R\,\text{Б}-\zeta_2)\,\tau]_{y=0,\,\lambda_2 H}=0, \tag{3.16}$$

sa konstantama

$$\zeta_1\frac{1}{2\hat{\rho}}=\left(\text{Б}-\frac{1}{\hat{T}}\right)\left(C_1+C_2\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa}+2C_3\right)+2\Gamma(C_1+2C_2\varkappa+4C_3), \tag{3.17}$$

$$\zeta_2\frac{1}{2\hat{\rho}}=\frac{1}{\varkappa}\left(\text{Б}-\frac{1}{\hat{T}}\right)[C_1+C_2(1+\varkappa)]+2C_2\Gamma. \tag{3.18}$$

Na ovaj način, iz priraštajnih jednačina (2.4), (3.3), (3.4) i (3.10) treba da odredimo funkcije u, v, τ, π i σ koje moraju da zadovolje granične uslove (3.13)—(3.16).

4. Analiza stabilnosti

Pretpostavimo rešenja priraštajnih jednačina na sledeći način:

$$\begin{aligned} u&=f_1(x)\cos\nu y,\\ v&=f_2(x)\sin\nu y,\\ \tau&=f_3(x)\cos\nu y,\\ \pi&=F_1(x)\cos\nu y,\\ \sigma&=F_2(x)\cos\nu y. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sa ovim rešenjima se na elementaran način iz (2.4) i (4.1) dobijaju veze

$$f_3(x)=\frac{1}{\text{Б}}f_1'(x), \tag{4.2}$$

$$f_2(x)=\frac{2\Gamma}{\nu\,\text{Б}}f_1'(x). \tag{4.3}$$

S druge strane, granični uslov (3.15) će biti identički zadovoljen ako je $\nu=n\pi/\lambda_2 H$ $(n=1, 2\ldots)$ a (3.16) će nam dati vezu

$$F_1(x)=\frac{R\text{Б}-\zeta_2}{\text{Б}}f_1'(x). \tag{4.4}$$

Preostala dva granična uslova, (3.13) i (3.14), sa izborom rešenja vida (4.1) glase, respektivno,

$$\text{Б}F_2(\pm\lambda_1 L)-(R\text{Б}+2\Gamma S-\zeta_1-\zeta_2)f_1'(\pm\lambda_1 L)=0, \tag{4.5}$$

$$(R-S-\alpha_1)\,\nu f_1(\pm\lambda_1 L)+(\alpha_1\varkappa-S)\frac{2\Gamma}{\nu\,\text{Б}}f_1''(\pm\lambda_1 L)=0. \tag{4.6}$$

Posmatrajmo, sada, jednačine (3.3), (3.4) i (3.10). Jednačina (3.4) se pomoću (4.2) i (4.4) svodi na oblik

$$f_1'''(x)+\mu^2 f_1'(x)=0, \tag{4.7}$$

gde je

$$\mu^2 = \frac{\nu^2}{2\alpha_1 \varkappa \Gamma} (\text{Б} R + \xi_2 - \zeta_2), \tag{4.8}$$

sa opštim rešenjem

$$f_1(x) = E_1 + B_1 \cos \mu x + D_1 \sin \mu x. \tag{4.9}$$

Ovo rešenje će zadovoljiti i jednačine (3.3) i (3.10) ako su zadovoljeni uslovi

$$E_1 = 0, \tag{4.10}$$

i (ovaj uslov se dobija eliminacijom $F_2(x)$)

$$S\hat{T}\text{Б}(\text{Б} + 2\Gamma) = -R\hat{T}(2\Gamma^2 - 2\Gamma\text{Б} - \text{Б}^2) + 2\mu^2(\xi_3 - \text{Б}\hat{T}\xi_1 - 2\Gamma\hat{T}\xi_2) + $$
$$+ 2\alpha_1 \nu^2 \text{Б}^2 \hat{T}. \tag{4.11}$$

Ovim se granični uslovi (4.5) i (4.6) pomoću (4.9) mogu, respektivno, napisati eksplicitno sa

$$\mu(\mp B_1 \sin \mu\lambda_1 L + D_1 \cos \mu\lambda_1 L) \Big\{ \xi_3 - \text{Б}\hat{T}\zeta_1 - 2(\text{Б} + \Gamma)\hat{T}\zeta_2 + $$
$$+ \frac{1}{2} R\hat{T}(\text{Б}^2 + 2\Gamma\text{Б} - 2\Gamma^2) - \frac{1}{2} S\hat{T}\text{Б}(\text{Б} + 2\Gamma) \Big\} = 0. \tag{4.12}$$

$$(B_1 \cos \mu\lambda_1 L \pm D_1 \sin \mu\lambda_1 L) \left[\nu(R - S - \alpha_1) + (\alpha_1 \varkappa - S) \frac{2\Gamma}{\nu \text{Б}} \mu^2 \right] = 0. \tag{4.13}$$

Ove četiri jednačine mogu biti istovremeno zadovoljene u četiri sledeća slučaja.

A. Neka je zadovoljena jednačina

$$2\xi_3 - 2\text{Б}\hat{T}\zeta_1 - 4(\text{Б} + \Gamma)\hat{T}\zeta_2 + R\hat{T}(\text{Б}^2 + 2\Gamma\text{Б} - 2\Gamma^2) - S\hat{T}\text{Б}(\text{Б} + 2\Gamma) = 0. \tag{4.14}$$

Tada (4.13) može biti zadovoljena ili u slučaju (A1) za

$$B_1 = 0, \quad D_1 \neq 0, \quad \sin \mu\lambda_1 L = 0 \mapsto \mu = \frac{m\pi}{\lambda_1 L} (m = 1, 2, \ldots), \tag{4.15}$$

ili (A2) ako važe

$$B_1 \neq 0, \quad D_1 = 0, \quad \cos \mu\lambda_1 L = 0 \mapsto \mu = \frac{2m - 1}{\lambda_1 L} \pi \, (m = 1, 2, \ldots) \tag{4.16}$$

B. Ako je, s druge strane, zadovoljena jednačina

$$\nu^2 \text{Б}(R - S - \alpha_1) + \mu^2(\alpha_1 \varkappa - S) 2\Gamma = 0, \qquad)4.17)$$

mogu da nastupe slučajevi ($B1$)

$$B_1 = 0, \quad D_1 \neq 0, \quad \cos \mu\lambda_1 L = 0 \mapsto \mu = \frac{2m - 1}{\lambda_1 L} \pi \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{4.18}$$

ili ($B2$)

$$B_1 \neq 0, \quad D_1 = 0, \quad \sin \mu\lambda_1 L = 0 \mapsto \mu = \frac{m\pi}{\lambda_1 L} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{4.19}$$

Prema tome, sistem priraštajnih jednačina (2.4), (3.3), (3.4) i (3.10) ima netrivijalna rešenja za u, v, τ, π i σ ako tri skalara: R, S i $\hat{\theta} = \hat{T} - T_0$ zadovolje jednačine (4.8), (4.11) i (4.14) ili (4.8), (4.11) i (4.17) pri čemu su $\nu = n\pi/\lambda_2 H$ ($n =$

$=1, 2\ldots$) a μ je određeno sa (4.15) ili sa (4.16). U protivnom, ako ovi uslovi na R, S i $\hat{\theta}$ ne mogu biti istovremeno zadovoljeni, postoje samo trivijalna rešenja i posmatrani štap je stabilan. Za konkretna izračunavanja (koja su jednostavna i svode se na rešavanje sistema algebarskih jednačina) moraju se znati materijalne konstante A_1, A_2, A_3, β, γ i ρ_0 kao i poprečne dimenzije štapa.

Literatura

[1] Green A. E. — Adkins J. E., *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*, Clarendon Prees, Oxford, 1960.

[2] Ericksen J. L., *A thermo—kinetic view of elastic stability theory*, Int. J. Solids Structures, Vol. 2, pp. 573—580, 1968.

[3] Knops R. J., Wilkes E. W., *Theory of elastic stability* (ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS, Vol. VI/2) Spiringer Verlag, Berlin, 1972.

[4] Truesdell C., Noll W., *The non—linar field theories of mechanics* (ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS, Vol. III/3), Spiringer Verlag, Berlin, 1965.

[5] Biot M. A., *Mechanics of incremental deformations*, John Wiley, New York, 1965.

[6] Wu C. H. Widera O. E., *Stability of a thick rubber solid subject to pressure loads*, Int. J. Solids Structures, Vol. 5, pp: 1107—1117, 1969.

[7] Nowinski J. L., *Thermoelastic stahility of a massive slab subjected ta on initial finite compression*, J. Thermal Stresses, Vol. 4, pp. 321—331, 1981.

[8] Mićunović M., *Stabilnost konačne ravanske deformacije idealnog vlaknima ojačanog materijala*—saopštenje na simpoziumu SAVREMENI PROBLEMI OPŠTE STABILNOSTI I STABILNOSTI KONTINUUMA, Tara, 1982.

[9] Mićunović M., *Thermoelasticity of ideal fibre—reinfoced materials*—saopštenje na simpoziumu COOUPLED FIELDS OF MECHANICS (Mragowo 1981, Poljska) primljeno za štampu u Journal of technical physics.

[10] Spencer A. J. M., *Deformations of fibre reinforced materials*, Clarendon Press, Oxford, 1972.

[11] Nye J. F., *Physical properties of crystals*, Clarendon Press, Oxford, 1972.

[12] Gyarmati I., *Non-equilibrium thermodynamics*, Springer Verlag, Berlin, 1970.

STABILITY OF A FINITE THERMOELASTIC DEFORMATION OF A FIBRE-REINFORCED MASSIVE SLAB

Summary

A thick slab of rectangular cross section composed of a generalized incompressible fibre-reinfroced Mooney-Rivlin material is subject to a finite homogeneous static thermoeleastic deformation. This deformation is caused by means of an uniform heating as well as tensile or compressive surface tractions. The stability is examined by making use of the direct method superposing infinitesimal virtual disturbances. In this way linear incremental equations of balance of momentum and energy as well as the corresponding incremental boundary conditions are obtained and solved. The conditions for non-trivial solutions leading to an instability are found and discussed.

Dr Ing Milan Mićunović vanredni profesor
Mašinski fakultet u Kragujevcu
Univerzitet „Svetozar Marković"
Sestre Janjića 6
34000 Kragujevac

Зборник радова Математичкої института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRILOG ODREĐIVANJU KONAČNIH JEDNAČINA KRETANJA NESTACIONARNIH MEHANIČKIH SISTEMA

Dušan J. Mikičić

Uvod

Mehanički sistem čije su diferencijalne jednačine linearne po generalisanim koordinatama i njihovim izvodima, sreću se u teoriji linearnih oscilacija [3], u automatici [4], u elektrotehnici i u drugim naučnim disciplinama. Nestacionarnost ovih sistema potiče usled vremenske zavisnosti koeficijenata a_{ij}, b_{ij} i c_{ij}. U ovakvim slučajevima se konačne jednačine kretanja često traže numeričkim metodama. Samo se u nekim specijalnim slučajevima može doći do koačnog tačnog analitičkog rešenja. Cilj ovog rada je, da prikaže metodu koja se može koristiti za numeričko rešavanje konačnih jednačina, a ponekad i za traženje tačnog analitičkog rešenja.

Definisanje problema

Posmatrajmo mehanički sistem čije su diferencijalne jednačine kretanja

$$a_{ij}(t)\,\ddot{q}^j+b_{ij}(t)\,\dot{q}^j+c_{ij}(t)\,q^j=F_i(t), \qquad (i,j=1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Koeficijenti $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$ i generalisane sile $F_i(t)$ su poznate funkcije vremena Pored ovih veličina date su i početne vrednosti generalisanih koordinata i generalisanih brzina. Potrebno je odrediti konačne jednačine kretanja $q^i(t)$ za $t\geqslant t_0$.

Za određivanje konačnih jednačina kretanja postoji više numeričkih metoda. Tako na primer, Andre Ango u kursu [1] predlaže jednu takvu metodu, koja je delimično prikazana u radu [5]. Korišćenje ove metode je vezano za sporu promenu vremenski zavisnih koeficijenata u sistemu (1). U kursu [2] se predlaže druga analitička metoda za traženje konačnih jednačina kretanja. Nedostatak ove metode je, što se od koeficijenata $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ i $c_{ij}(t)$ zahteva da su višestruko integrabilne funkcije. Na taj način se ograničava oblast primene ove metode za praktičan rad.

Metoda koja se predlaže u ovom radu zasniva se na prikazivanju mehaničkog sietama u faznom prostoru pomoću vektora stanja $x=\mathrm{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$. Dve spomenute metode isto tako tretiraju ovaj problem pomoću faznog vektora, pa su zato jedino one spomenute i ako ima više različitih numeričkih metoda za rešavanje sistema (1). U mehanici upravljanog kretanja [2], u teoriji oscilacija [3] i automatici [4] je proučavanje dinamičkog sistema pomoću faznog vektora osnovni pristup. Zato se transformacija sistema (1) na Košijev oblik može izvršiti na primer, smenama $q^i = x_{2i-1}$, $\dot{q}^i = x_{2i}$ ili na neki drugi način. Na taj način sistem (1) dobija oblik

$$\dot{x} = A(t)\,x + f(t), \quad x(t_0) = x_0 = \mathrm{col}\,(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{2n0}). \tag{2}$$

U ovom slučaju kvadratna matrica $A(t)$ je poznata funkcija vremena posredno preko koeficijenata $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ i $c_{ij}(t)$. Vektor $f(t) = \mathrm{col}\,(0, f_2, 0, f_2, \ldots\ldots, 0, f_{2n})$ je član koji potiče od generalisanih sila $F_i(t)$. Rešenje faznog vektora $x(t)$ sistema (2) je dato Košijevom formulom [2]

$$x(t) = X(t, t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, s)\,f(s)\,ds, \qquad t \geqslant t_0.$$

Fundamentalna matrica za nestacionarni sistem (2) nije rešiva u konačnom obliku, već se može na osnovu [5] prikazati pomoću beskonačnog reda

$$X(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t_0)\,(t - t_0)^n/n!, \quad A_0 = I, \quad A_1 = A(t). \tag{4}$$

Ostale matrice $A_n(t)$ su definisane rekurentnom formulom

$$A_n(t) = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \overset{(p)}{A}(t)\, A_{n-1-p}(t), \qquad \overset{(p)}{A}(t) = \frac{d^p A(t)}{dt^p}. \tag{5}$$

U radu [5] je pokazano kako se pomoću diskretnog modela može odrediti fazni vektor u diskretnim vremenskim trenutcima. Ovde će biti pokazano kako se formula (4) koristi za analitičko određivanje faznog vektora $x(t)$. U tom cilju treba izraz (4) zameniti u (3). Tako se dobija da je za $t_0 = 0$

$$x(t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)\, t^n/n!\right] x_0 + \int_0^t \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)\,(t-s)^n/n!\right] f(s)\,ds. \tag{6}$$

U nekim slučajevima formula (6) može dati konačno analitičko rešenje faznog vektora $x(t)$, kao što se vidi iz primera koji je priložen u daljem tekstu. Na kraju treba samo izvršiti inverznu transformaciju od faznog vektora $x(t)$ prema generalisanim koordinatama $q^i(t)$. Na taj način bi bile rešene i konačne jednačine kretanja nestacionarnog sistema (1).

Primer

Posmatraćemo nestacionarni mehanički sistem kod koga je $n = 1$, $a_{11}(t) = 1 - t^2$, $b_{11}(t) = -2t$, $c_{11} = 6$, $F_1 = 0$, tako da je sistem (1) opisan samo jednom diferencijalnom jednačinom drugog reda $(1-t^2)\ddot{q} - 2t\dot{q} + 6q = 0$. Početni uslovi su $q(0) = -0{,}5$; $\dot{q}(0) = 0$. Smenama $q = x_1$, $\dot{q} = x_2$ dobija se Košijev oblik (2)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-6}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-6}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U ovom slučaju matrice (5) su

$$A_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2(0) = \sum_{p=0}^{1} \binom{1}{p} \overset{(p)}{A} A_{1-p} = A^2(0) + \dot{A}(0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_3(0) = \sum_{p=0}^{2} \binom{2}{p} \overset{(p)}{A} A_{2-p} = A^3 + 2\dot{A}A + A\dot{A} + \ddot{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4(0) = \sum_{p=0}^{3} \binom{3}{p} \overset{(p)}{A}(0)\, A_{3-p}(0) = A(0)\, A_3(0) + 3\dot{A}(0)\, A_2(0) +$$

$$+ 3\ddot{A}(0)\, A_1(0) + \dddot{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Zamenom ovih matrica u izraz (6) dobija se da je

$$x(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} t^2/2! + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t^3/3! + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} t^4/4! + \cdots \right] \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5\,(1 - 3t^2) \\ -3t \end{pmatrix}.$$

Konačno je traženo rešenje $q(t) = 0{,}5\,(1-3t^2)$.

Zaključak

U zaključku se može konstatovati da formula (6) može u nekim slučajevima dati konačno analitičko rešenje za fazni vektor $x(t)$, a posredno i konačne jednačine kretanja nestacionarnog sistema (1). Primer je odabran iz oblasti Ležandrove diferencijalne jednačine, koja se može rešiti i na drugi način, da bi se proverila predložena metoda. Konačan sud o predloženom postupku traženja konačnih jednačina kretanja se može dati tek kada se reši veći broj primera iz mehanike ili iz drugih oblasti.

Literatura

[1] Andre Angot, *Complements de mathematiques-a l'usage des ingenieurs de l'elektrotechnique et des telacomunications*, Paris 1957.

[2] Padula L. — Arbib M., *System Theory*, Saunders Company, Philadelphija-London-Toronto, 1974 (str. 330-360).

[3] Vujičić V., *Teorija oscilacija*, Beograd 1969.

[4] Stojić M., *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Naučna knjiga, Beograd 1978.

[5] Mikičić D., *O linearnom nestacionarnom sistemu sa brzo promenljivim parametrima*, Automatika-Zagreb, **22** (5—6), 1981.

A CONTRIBUTION TO THE DETERMINATION OF FINITE EQUATION OF MOTION FOR NONSTATIONARY MECHANIC SYSTEMS

Summary

In the present paper we observe a system whose differential equations of motion are of the form $a_{ij}(t)\,\ddot{q}^j + b_{ij}(t)\,\dot{q}^j + c_{ij}(t)\,q^j = F_i(t)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, where n is the degree of freedom of motion. The procedure for determining finite equations of motion $q^i(t)$ in a finite time interval $t_0 \leqq t \leqq t_1$ is proposed in the paper.

Dr Dušan Mikičić
Elektrotehnički fakultet
Beograd, Bulevar revolucije 73.

Зборник радова Математичкої института. Нова серија, књ. 4. (12). 1984.
Recueil des travaux de l' Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

NAPOMENA UZ MARGEROVU TEORIJU PLITKIH LJUSKI

Natalija Naerlović-Veljković

Rad K. Margera (K. Marguerre) [1] odnosi se na teoriju konačno deformisanih »zakrivljenih ploča« ili ploča sa »slabom početnom krivinom«, kako je autor nazvao tanke plitke ljuske koje u svojoj teoriji proučava. Ovako definisan objekt proučavanja daje povoda za uvođenje nekih zanemarenja, iz kojih rezultira relativno jednostavan oblik diferencijalnih jednačina problema. Predložene jednačine bile su namenjene analizi stabilnosti i postkritičnog ponašanja plitkih ljuski. U tom smislu teorija je pogodila cilj, jer je, nekoliko decenija kasnije, postala rado korišćena u problemima stabilnosti, v. napr. [2].

Nedeformisani oblik srednje površi tanke ljuske Marger određuje, u odnosu na Dekartov sistem materijalnih koordinata, jednačinom:

$$z^{\circ}=W(x,y). \tag{1}$$

U deformisanoj konfiguraciji, u odnosu na isti sistem koordinata, položaj proizvoljne tačke ljuske određen je izrazima

$$x+u(x,y)-z\,w_x,\quad y+v(x,y)-z\,w_y,\quad W(x,y)+z+w(x,y), \tag{2}$$

gde indeks pored „w" označava izvod po naznačenoj materijalnoj koordinati. Izrazi (1) pokazuju da su u Margerovoj teoriji zadržane standardne pretpostavke teorije tankih ploča o ravnim presecima i nepromenljivosti uglova koje ti preseci grade sa srednjom površi ljuske.

Na osnovu izraza (1) i (2) određene su koordinate Lagranževog, materijalnog tenzora relativne deformacije, napr.

$$\frac{1}{2}\gamma_{11}=u_x+\frac{1}{2}(u_x^2+v_x^2)+\frac{1}{2}w_x^2+W_x w_x-zw_{xx},\quad \text{it. d.}, \tag{3}$$

pri čemu su zanemareni sabirci oblika $u_u(zw_x)_x$, $(zw_x)_x^2$ itd.

Dalja analiza je izvršena primenom energetskog pristupa, uz pretpostavku linearnih veza između koordinata tenzora napona i koordinata Lagranževog tenzora deformacije. Uslovi ravnoteže, izvedeni na osnovu principa virtuelnih radova, uvođenjem naponske funkcije $\Phi=\Phi(x,y)$, svode se na sistem od dve spregnute diferencijalne jednačine

$$\frac{1}{E}\Delta\Delta\Phi=2W_{xy}w_{xy}-W_{yy}w_{xx}-W_{xx}w_{yy}+w_{xy}^2-w_{xx}w_{yy}, \tag{4}$$

$$\frac{E'h^3}{12}\Delta\Delta w-\Phi_{yy}(W_{xx}+w_{xx})+2\Phi_{xy}(W_{xy}+w_{xy})-\Phi_{xx}(W_{yy}+w_{yy})=0, \tag{5}$$

koje su predložene kao osnova za proučavanje postkritičnog ponašanja plitkih ljuski. Prva jednačina ima značenje uslova kompatibilnosti deformacija za generalisano ravno naprezanje, a druga predstavlja uslov ravnoteže u pravcu z-ose. Pri ispisivanju jednačine (4) naknadno su, u izrazima za koordinate Lagranževog tenzora deformacije, zanemareni članovi koji su nelinearni po izvodima pomeranja „u" i „v". Ovo naknadno zanemarenje opravdano je slabom početnom zakrivljenošću srednje površi ljuske.

Uvedeno naknadno zanemarenje moglo bi tu biti i izbegnuto. Međutim, ukoliko bi se do kraja išlo sa izrazima oblika (3) za koordinate tenzora deformacije, uslov kompatibilnosti bi morao da bude postavljen u nelineranom obliku, v. napr. [3] i u posmatranom slučaju bi glasio

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y}-2\left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y}+\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x}\right)\right]=0, \tag{6}$$

gde je obeleženo

$$\varepsilon_{11}\equiv u_x+\frac{1}{2}(u_x^2+v_x^2)=\frac{1}{E}(\Phi_{yy}^2-\nu\,\Phi_{xx}^2)-\frac{1}{2}w_x^2-W_x\,w_x,$$
$$\varepsilon_{12}\equiv\frac{1}{2}(u_y+v_x)+\frac{1}{2}(u_x\,u_y+v_x\,v_y)=-\frac{1+\nu}{E}\Phi_{xy}-\frac{1}{2}(w_x\,w_y+W_y\,w_x+W_x\,w_y), \tag{7}$$
$$\varepsilon_{22}\equiv v_y+\frac{1}{2}(u_y^2+v_y^2)=\frac{1}{E}(\Phi_{xx}^2-\nu\Phi_{yy}^2)-\frac{1}{2}W_y^2-w_y\,w_y.$$

Ukoliko bi se u tako napisanom uslovu kompatibilnosti zanemarili sabirci koji su nelinearni po izvodima naponske funkcije, tada bi se promenila samo desna strana jednačine (4). Ova strana bila bi dopunjena nizom članova koji su nelinearni po izvodima funkcije $w(x, y)$. Iako se ima u vidu slaba početna zakrivljenost srednje površi ljuske, sa desne strane jednačine bi mogli da se zadrže oni sabirci u kojima se, kao koeficijenti, pojavljuju kvadrati prvih izvoda početnog ugiba W. U tom slučaju jednačina (4) bila bi zamenjena izrazom:

$$\frac{1}{E}\Delta\Delta\Phi=2\,W_{xy}\,w_{xy}-W_{yy}\,w_{xx}-W_{xx}\,w_{yy}+(1+\underline{W_x^2+W_y^2})(w_{xy}^2-w_{xx}w_{yy}) \tag{8}$$

Tako napisan izraz sličnog je oblika kao jednačina (4), ali, prisustvom podvučenih članova, daje mogućnost za procenu valjanosti primene diferencijalnih jednačina (4), i (5) u proučavanju stabilnosti ljuske određenog oblika.

Literatura

[1] Marguerre K., *Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung.* Proceedings 5 th Int. congr. appl. mech. (1938)

[2] Fitch J. R. *The buckling and postbukling behavior of spherical caps under concentrated load* Int. J. Solids Structures, 4, pp. 421—446, 1968.

[3] Eringen A. C. *Mechanics of continua,* New York 1967.

Prof. Dr Natalija Naerlović—Veljković, Građevinski fakultet, 11000 Beograd

Рад је делимично финансиран из средстава Републичке заједнице науке Србије, у оквиру пројекта „Савремени проблеми у истраживању конструкција".

Зборник радова Математичког института, Нова серија књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle serie, tome 4 (12), 1984.

О НЕКИМ КАРАКТЕРИСТИКАМА ПОЛИНОМА ЧЕБИШЕВА

Благој С. Попов

1. Посматрајмо полиноме Чебишева прве врсте $T_u(x)$ и друге врсте $U_u(x)$. Познато је да они могу бити одређени генератрисним релацијама

$$(1-xt)(1-2xt+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, t^n,$$

односно

$$(1-2xt+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} U_u(x)\, t^n.$$

Нека је

$$F_k(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n^k(x)\, t^n, \tag{1}$$

и

$$G_k(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} U_n^k(x)\, t^n, \quad k \geqslant 1. \tag{2}$$

Циљ овога рада је да изрази функцију $F_k(x, t)$ и $G_k(x,t)$ у експлицитном облику. Генератрисне функције за полиноме $T_{nk}(x)$ и $U_{nk}(x)$ чији индекси су вишеструки бројеви, биће изведене такође.

2. Експлицитни облици полинома $T_n(x)$ и $U_n(x)$ су дати изрази

$$2\, T_n(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n, \tag{3}$$

и

$$2\,(x^2-1)^{1/2}\, U_n(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}. \tag{4}$$

Елементарном трансформацијом ових полинома добијамо познате релације

$$\begin{aligned} T_{n+m}(x)+T_{n-m}(x)&=2\, T_n(x)\, T_m(x),\\ U_{n+m}(x)+U_{n-m}(x)&=2\, U_n(x)\, U_m(x), \quad n\geqslant m. \end{aligned} \tag{5}$$

Идентитет

$$r_1^{kn}+r_2^{kn}=\sum_{r=0}^{\omega}(-1)^r\frac{k}{k-r}C_{k-r}^r(r_1^n+r_2^n)^{k-2r}(r_1r_2)^{rn},\qquad \omega=[k/2],$$

за $r_{1/2}=x\pm\sqrt{x^2-1}$, нам даје релацију

$$T_{kn}(x)=\sum_{r=0}^{\omega}(-1)^r\frac{k}{k-r}C_{k-r}^r2^{k-2r-1}\,T_n^{k-2t}(x),\quad k\geqslant 1. \tag{6}$$

Узимајући у обзир

$$T_{n+1}(x)\pm\sqrt{x^2-1}\,U_n(x)=(x\pm\sqrt{x^2-1})^{n+1},$$

добијамо

$$W_{kn}(x)=\sum_{r=0}^{\omega}2^{(2\omega-r)}\frac{k}{k-r}C_{k-r}^r(x^2-1)^{\omega-r}U_n^{k-2t}(x),\quad k\geqslant 1 \tag{7}$$

где је
$$W_{kn}(x)=\begin{cases}2\,T_{k(n+1)}(x), & \text{ако је } k \text{ паран број}\\ U_{k(n+1)}(x), & \text{ако је } k \text{ непаран број.}\end{cases}$$

3. Релације (5) омогућавају добијање генератрисних функција полинома $T_{nk}(x)$ и $U_{nk}(x)$. Заиста, имаћемо

$$(1-2\,T_n(x)\,t+t^2)\,T_m(x,\,t)=T_0(x)-T_n(x)\,t, \tag{8}$$

где је

$$T_m(x,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_{nm}(x)\,t^n, \tag{9}$$

као и користећи релацију

$$U_{n+m}(x)-U_{n-m-2}(x)=2\,U_m(x)\,T_n(x), \tag{10}$$

добијамо

$$(1-2\,T_m(x)\,t+t^2)\,U_m(x,\,t)=U_0(x)+U_{m-2}(x)\,t,\ \ m\geqslant 1,\ \ U_{-1}(x)=0, \tag{11}$$

где је

$$U_m(x,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty}U_{nm}(x)\,t^n.$$

Полазећи од (6), посматрајмо суму

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_{kn}(x)\,t^n=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^k\,2^{k-2r-1}\,\frac{k}{k-r}C_{k-r}^r\sum_{n=0}^{\infty}T_n^{k-2r}(x)\,t^n,\quad k\geqslant 1$$

која заједно са (1) и (9) нам даје

$$2^{k-1}F_k(x,\,t)=T_k(x,\,t)+\sum_{r=1}^{\omega}(-1)^r\,2^{k-2r-1}\frac{k}{k-r}C_{k-r}^rF_{k-2r}(x,\,t),$$

као и помоћу (2), (7) и (11) добијамо

$$2^{2\omega}(x^2-1)^{\omega}\,G_k(x,t)=W_k(x,t)-\sum_{r=1}^{\omega}2^{(\omega-r)}\frac{k}{k-r}\,C_{k-r}^{r}(x^2-1)^{\omega-r}G_{k-2r}(x,t),$$

где је

$$W_k(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}W_{kn}(x)\,t^n.$$

4. Степене полинома $T_n(x)$ и $U_n(x)$ добијамо из релација (3) и (4). Имаћемо

$$2^{n-1}\,T_n^k(x)=\sum_{r=0}^{\omega}C_k^r\,\tilde{T}_{(k-2r)n}(x), \tag{12}$$

са

$$\tilde{T}_n(x)=\begin{cases}T_n(x), & n\neq 0\\ {}^1/_2\,T_n(x), & n=0,\end{cases}$$

и

$$2^{\omega}(x^2-1)^{\omega}\,U_n^k(x)=\sum_{r=0}^{\omega}(-1)^r\,C_k^r\,W_{(k-2r)n}(x). \tag{13}$$

Ако се помножи сваки знак релација (12) и (13) са t^n и ове саберу за $n=0,1,2,\ldots$ добија се

$$2^{k-1}\,F_k(x,t)=\sum_{r=0}^{\omega}C_k^r\,T_{k-2r}(x,t),$$

где $T_0(x,t)$ треба поделити са 2, и

$$2^{\omega}(x^2-1)^{\omega}\,G_k(x,t)=\sum_{r=0}^{\omega}(-1)^r\,C_k^r W_{k-2r}(x).$$

Узимајући $T_{k-2r}(x,t)$ и $W_{k-2r}(x,t)$ из (8) и (10) добија се

$$2^{k-1}\,F_k(x,t)=\sum_{r=0}^{\omega}C_k^r\,\frac{T_0(x)-T_{k-2r}(x)\,t}{1-2\,T_{k-2r}(x)\,t+t^2},$$

и

$$2^{k-1}(x^2-1)^{\omega}\,G_k(x,t)=\sum_{2=0}^{\omega}(-1)^r C_k^r\,\frac{V_{k-2r}(x,t)}{1-2\,T_{k-2r}(x)\,t+t^2},$$

где је

$$V_k(x,t)=\begin{cases}T_0(x)-T_k(x)\,t, & k-\text{паран број}\\ U_0(x)+U_{k-2}(x)\,t, & k-\text{непаран број}.\end{cases}$$

Литература

[1] Chohat M. J., *Theorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebychef*, Mew. des Sc. Math. fasc. LXVI, 1934, Paris.

[2] Rainville E. D., *Special Functions*, 1960, New-York.
[3] Szegő G., *Orthogonal Polynamials*, Coll. Publ. XXXIII. 1939.
[4] Митриновић Д. С., *Увод у специјалне функције*, Београд 1975.

QUELQUES CHARACTERISTIQUES SUR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEF

Résumé

On donnent quelques relations concernant les fonctions génératrices des polynomes de Tchebychef de premiere espèce $T_n(x)$ et de seconde espèce $U_n(x)$.

akademik Dr Blagoj S. Popov
Univerzitet u Skopju
Skopje

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

DINAMIČKA ANALIZA SISTEMA KRUTIH TELA POVEZANIH ZGLOBOVIMA I VISOKOELASTIČNIM VEZAMA PRIMENOM RAČUNARA

Dejan Popović

Uvod

Poslednjih godina velika pažnja se posvećuje numeričkoj analizi sistema krutih tela [1, 2, 3, 4]. Ova analiza je baza sinteze aktivnih mehanizama, tj. manipulatora namenjenih industrijskoj robotici i rehabilitaciji invalida (proteze i ortoze). Mnoge metode za računarsku simulaciju su razvijene i bazirane na metodama opštih teorema, Lagranževim jednačinama, Njutv-Ojlerovoj jednačini, Apelovoj jednačini, Hamiltonovim jednačinama [5, 6, 7]. Za sintezu ortoza za donje ekstremitete, bazirane na principima samopodešavanja i raspodeljenog prenosa sile sa spoljnog skeleta na čoveka [4], bilo je pogodno načiniti specifičan algoritam za računarsku simulaciju.

Mehanički model sistema koji je od interesa je dvostruki kinematički lanac povezan (sfernim) cilindričnim zglobovima, sa translacionim kinematičkim parovima pete klase koji su međusobno povezani visko-elastičnim vezama prvog reda (Sl. 1). Posebno je bilo pogodno da algoritam omogući računarsku analizu u slučaju kada je jedan lanac u delovima koji nisu povezani, osim visko-elastičnim vezama, i da uz ograničenja obuhvati i otvorene i zatvorene strukture. Ovaj mehanički model je nazvan biomehanizmom SFMO [4].

Dinamika biomehanizma SFMO

Jednačine kretanja svakog člana se mogu napisati primenom metoda opštih teorema, u slučaju ravnog kretanja

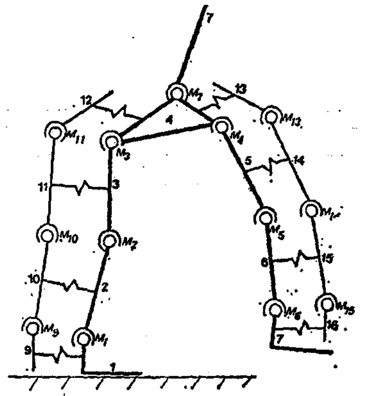
$$F_i = m_i \ddot{q}_i, \qquad Mc_i = Jc_i \ddot{\theta},$$

gde je $q = x, y, \theta$ je ugao u odnosu na x osu, u $x0y$ ravni, Jc moment inercije u odnosu na težišnu Cz osu, F_i zbir sila na član u pravcu q_i, T moment sprega u odnosu na težišnu Cz osu. U matričnom obliku za slobodan član je

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & & \underset{\sim}{O} \\ & m & \\ \underset{\sim}{O} & & J_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{vmatrix} \Rightarrow |F| = |M|\,|\ddot{q}|.$$

U matričnom obliku za sistem n nepovezanih tela dobija se matrična jednačina reda $3n$

$$\begin{vmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & & \underset{\sim}{O} \\ & M_2 & \\ \underset{\sim}{O} & & M_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \\ \ddot{q}_n \end{vmatrix} \Rightarrow |F| = |M|\,|\ddot{q}|. \tag{1}$$

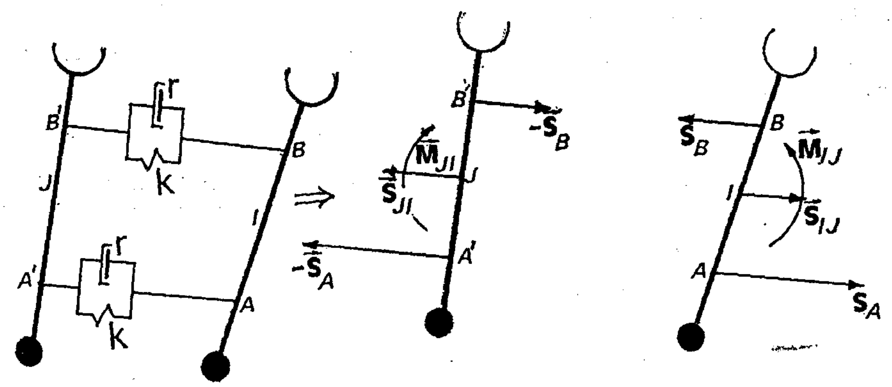


Sl. 1. Dvostruki kinematički lanac sa visoko-elastičnim vezama

U ovoj matričnoj jednačini vektor $|F|$ potiče od spoljnih sila i visko-elastičnih veza. Biće razmotreni članovi koji su posledica visko-elastičnih sila (Sl. 2). Ekvivalentno dejstvo se matematički izražava sa

$$\begin{vmatrix} X_{vEi} \\ Y_{vEi} \\ M_{vEi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & & \underset{\sim}{O} \\ & k_i & \\ \underset{\sim}{O} & & k_i' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_i & & \underset{\sim}{O} \\ & r_i & \\ \underset{\sim}{O} & & r_i' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{vmatrix} \Rightarrow |F_i| = |K| + |q| + |R|\,|\dot{q}|,$$

gde su k_i koeficijenti krutosti, a r_i koeficijenti prigušenja, $|K|$ odnosno $|R|$ matrice krutosti i prigušenja. Odgovarajuća jednačina postoji za član j sa negativnim znakom.



Sl. 2. Dekompozicija visoko-elastičnog para članova

Zamenjujući ove članove u jednačinu (1) dobija se

$$\begin{vmatrix} G_1\\ \vdots\\ \vdots\\ G_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & & O\\ & & \\ O & & M_n\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\ddot q_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \ddot q_n\end{vmatrix} + \begin{array}{cc} i & j \\ \begin{vmatrix} K_i & \\ & -K_i \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ i\\ j \end{array}\begin{vmatrix} q_1\\ \vdots\\ \vdots\\ q_n\end{vmatrix} + \begin{array}{cc} i & j \\ \begin{vmatrix} R_i & \\ & -R_i \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ i\\ j \end{array}\begin{vmatrix} \dot q_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot q_n\end{vmatrix}, \tag{2}$$

gde su matrice G_i posledica dejstva gravitacione sile, drugih spoljnih sila na član i momenta sprega koji deluje na član.

Konačno, činjenica da su pojedini članovi međusobno spregnuti cilindričnim zglobovima redukuje dimenzije sistema. Postojanje zglobova unosi ograničenja po položaju (geometrijska ograničenja). Postojanje svakog zgloba dovodi do smanjenja broja stepena slobode za dva.

Ograničenja su oblika (Sl. 3)

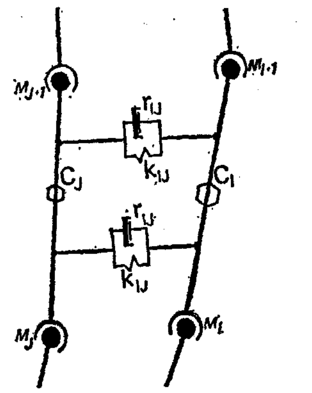
$$\vec{rc_i} = \vec{rc_j} + lc_i \vec{r_{oi}} + dc_j \vec{r_{oj}}, \tag{3}$$

odnosno u sklarnom obliku

$$xc_j = xc_i + lc_i \cos\theta_i + dc_j \cos\theta_j,$$

$$yc_j = yc_i + lc_i \sin\theta_i + dc_j \sin\theta_j.$$

Ove geometrijske jednačine treba koristiti i da bi se unutrašnje sile, reakcije u zglobovima, eliminisale iz vektora $[G_1, \ldots, G_n]^T$. Ovom eliminacijom se sistem reda $3n$ redukuje na dimenzije $N\varepsilon]n, 3n]$ nepoznatih uglova tj. položaja. Postoji n uglova i $N—n$ koordinata centara mase. Iz jednačina treba eliminisati zavisna pomeranja.



Sl. 3. Susedni članovi kinematičkih lanaca spojeni cilindričnim zglobom

Prvo će biti prikazan algoritam za eliminaciju koordinata položaja u slučaju jednog neprekidnog lanca. Geometrijska ograničenja (3) se mogu prikazati u obliku

$$\begin{array}{cc} i & j \\ \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ C_i & C_j \end{vmatrix} \end{array} \begin{vmatrix} \vdots\\ L_i\\ D_j\\ \vdots\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots\\ \Delta r_j\\ \vdots\end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

gde su matrice

$$C_i = \left|\begin{matrix} 1 & \underset{\sim}{0} \\ & 1 \\ \underset{\sim}{0} & 0 \end{matrix}\right|, \quad C_j = \left|\begin{matrix} -1 & \underset{\sim}{0} \\ & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right|, \quad L_i = \left|\begin{matrix} l_i \cos\theta_i \\ \\ l_i \sin\theta_i \\ \theta_i \end{matrix}\right|,$$

$$D_j = \left|\begin{matrix} d_j \cos\theta_j \\ d_j \sin\theta_j \\ \theta_j \end{matrix}\right|, \quad \Delta r_j = \left|\begin{matrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ \theta_j \end{matrix}\right|,$$

Jednačina (4) se može napisati u obliku

$$|C|\,|q| + |\Delta r| = 0, \tag{5}$$

gde je matrica C $n \times 3n$, $|q|$ reda $3n$, i matrica $|\Delta r|$ reda n.

Jednačina (5) se može napisati u obliku

$$|C_{x,y} \quad C_\theta| \left|\begin{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \theta \end{matrix}\right| + |\Delta r| = 0 \rightarrow \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = -|C_{x,y}^{-1}|\,|C_\theta|\,|\dot{\theta}| - |C_{x,y}|\,|\Delta r|. \tag{6}$$

U jednačini (6) je $\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|$ matrica položaja težišta, $|\theta|$ matrica uglova, $|C_{x,y}|$ i $|C_\theta|$ matrice dobijene iz matrice $|C|$. Sada je očigledno

$$|q| = \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} -|C_{x,y}^{-1} & C_\theta| \\ I & \end{matrix}\right| |\theta| + \left|\begin{matrix} -|C_{x,y}|\,|\Delta r| \\ 0 \end{matrix}\right| = |C_1|\,|\theta| + |C_2|. \tag{7}$$

Analogno prethodno prikazanom se dobija

$$|\dot{q}| = |C_1'|\,|\theta|, \quad |\ddot{q}| = |C_1''|\,|\theta|. \tag{8}$$

Eliminacija unutrašnjih sila je najjednostavnija primenom D'Alemberovog diferencijalnog principa. Unutrašnje sile, tj. sile reakcija u zglobovima moraju da zadovolje jednačinu

$$|G^{un}|\,|\Delta q| = 0 \rightarrow |G^{un}|\,|C_1'|\,|\dot{q}| = 0. \tag{9}$$

Iz jednačine (9) sledi

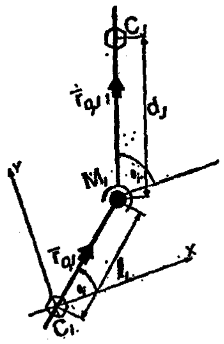
$$|C_1'|^T\,|G^{un}| = 0 \Rightarrow |C_1'|^T\,|G| = |C_1'|^T\,|G^{sp}|,$$

gde je

$$|G^{sp}|_i = \left|\begin{matrix} 0 & \underset{\sim}{O} \\ & -m_i g \\ \underset{\sim}{O} & T_i \end{matrix}\right|, \tag{10}$$

Koristeći ove uslove dobija se matrična jednačina pogodna za numeričku integraciju u Košijevoj formi

$$\begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \tilde{O} & I \\ A & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta \\ \omega \end{vmatrix} + |H|, \tag{11}$$



Sl. 4. Biomehanički model sistema čovek-SFMO

gde je $\begin{vmatrix} \theta \\ \omega \end{vmatrix}$ vektor dimenzije $2n$, $\omega_i = \dot{\theta}_i$, i matrice

$$|A|_{nxn} = (|C_1'|^T |M| |C_1|)^{-1} (|C_1'|^T |K| |C_1|),$$

$$|B|_{nxn} = (|C_1'|^T |M| |C_1|)^{-1} (|C_1'|^T |R| |C_1'|),$$

$$|H|_{2n\times 1} = (|C_1'|^T |M| |C_1|)^{-1} (|C_1'|^T |G|).$$

Problem, odnosno algoritam se ne menja i ako se radi o prekidnom lancu, ali tada matrica $\begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{vmatrix}$ sadrži i $2(N—n)$ članova koordinata položaja i brzina centara mase po jednog člana u svakom neprekidnom delu kinematičkog lanca (osim jednog).

Primer: Odrediti pogonske momente spregova u zglobovima aktivne samopodešavajuće modularne ortoze (Sl. 4). i kretanje elemenata ortoze.

U ovom konkretnom slučaju, mehanička struktura se sastoji od 3 kinematička lanca, od kojih je jedan u neprekidnom dodiru sa podlogom, a druga dva su viskoelastično vezana (svaki segment sa odgovarajućim segmentom biološkog sistema) i nemaju kontakta sa podlogom.

Računarska simulacija se može prikazati dijagramom, prikazanim na slici 5.

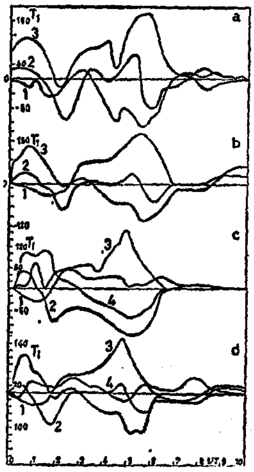
Ovaj biomehanizam sa 16 segmenata je analiziran u cilju sinteze ortoze za rehabilitaciju lokomocije subjekata sa funkcionalnim oštećenjima donjih ekstremiteta. Na osnovu rezultata računarske simulacije, u ovom radu se prezentira nekoliko (Sl. 6), dolazi se do veličine maksimalnih naprezanja u spoljnom i unutrašnjem tj. artificijelnom i biološkom skeletu, veličine pritisaka i sila na kontaktu ortoza biološki sistem, veličine pogonskih spregova u zglobovima ortoze, i omogućena je sinteza upravljanja.

Ulazni podaci su parametri segmenata kinematičkih lanaca (mase, momenti inercije, dužine, položaji težišta), parametri krutosti i prigušenja visko-elastičnih veza, položaj cilindričnih zglobova (oznaka segmenata sa položajnim ograničenjima).

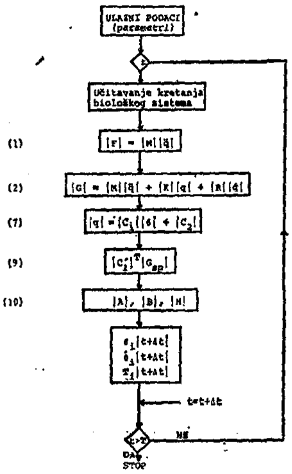
Kretanje biološkog dela sistema (model čoveka) se zadaje kao tablica veličina uglova ekvidistantno u vremenu (za segmente 1 do 8).

Ostali blokovi su realizovani u FORTRANU i realizuju matematički algoritam prikazan u radu. Numerička integracija je obavljena primenom Runge-Cutta metode IV reda.

Na osnovu dobijenih rezultata izvršeno je projektovanje ortoze [4]. Rezultati su upoređenisa rezultatima analiza obavljenih drugim metodama [4] i slaganje je zadovoljavajuće.



Sl. 5.



Sl. 6.

Literatura

[1] Hatze H., *A Complete Set of Control Equations for the Human Musculoskeletal Sustem*, Journal of Biomechanics, (1977), pp. 899—807.

[2] Aleshinsky S. — Zatziorsky V., *Human Locomotion in Space Aaalyzed Biomechanically Through a Multi-link Chain Model*, Journal of Biomechanics, **11** (1978) pp. 101—108.

[3] Langrana N. — Bartel D., *An Automated Method for Dunamic Analysis of Spatial Linkages for Biomechanical Applications*, Trans. ASME, B-97, (1975), pp. 566—574.

[4] Popović D., *Prilog sintezi mehanizma za pomoć ljudima sa funkcionalnim oštećenjima donjih ekstremiteta*, Doktorska disertacija, ETF, Beograd, (1981).

[5] Vukobratović M. — Potkonjak V., *Dinamika manipulacionih robota i aktivnih prostornih mehanizama*, Institut „M. Pupin", Beograd, (1980), Monografija.

[6] Ito K. et all., *Computer aided dynamic analysis of multilink systems*, Res. Rept. of Auto. Cont. Lab. Nagoya Univ. Vol. **27** (1980), pp. 9—30.

[7] Dilon R. S. — Hemami H., *Automated Equation Generation and its Application to Problems in Control*, **15** th JACC, (1974), pp. 575—580.

[8] Huston R. et all., *Dynamics of Multirigid — Body Systems*, Trans. ASME, of Adplied Mechanisms, **45**, (1978), pp. 889—894.

DYNAMICAL ANALYSIS OF JOINT MECHANISM WITH PIN JOINTS AND VISCO-ELASTIC CONNECTIONS

Abstract

Dynamical analysis of the rigid body system for rehabilitation assistive devices synthesis i. e. medical robotics purposes is rewieved in this paper. The complexity of the mathematical model and necessity of the parameter modifications requires the general algoritham for numerical simulation. Here presented computing method involves the analysis of motion of the rigid body system connected with the pin joints and with first order visko-elastic link interactions.

Dr Dejan Popović, Elektrotehnički fakultet, 11000 Beograd

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

TENZOR DEFORMACIJE U NEKIM RELATIVISTIČKIM METRIKAMA

Dragi Radojević

U ovom radu ispitivaćemo tenzor deformacije u Ajnštajnovom, Švarcšildovom i modifikovanom Desiterovom kosmološkom modelu. Tenzor deformacije definiše se kao [1]

$$\tau_{\alpha\beta} = h_\alpha^\rho h_\beta^\varphi \mathscr{L}_\xi g_{\rho\varphi}, \tag{1}$$

gde je h_α^ρ tenzor projektor, $g_{\alpha\beta}$ je metrički tenzor posmatranog prostora, ξ_α je jedinični vektor vremenskog tipa, a $\mathscr{L}_\xi$ označava Liov izvod. Pošto je ξ_α vektor vremenskog tipa možemo da izaberemo koordinatni sistem u kojem će ξ_α biti jedinični vektor vremenske ose.

Cilj ovog rada je da se utvrdi polje deformacije posmatrača koji se kreće radijalno. Stoga ξ_α ima sledeći oblik

$$\xi_\alpha = \{\xi_1,\ 0,\ 0,\ \xi_4\}.$$

Za koordinatne transformacije $x^\alpha \to \bar{x}^\alpha$ pretpostavićemo da su oblika

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \bar{r} = \psi(r,\ t) = \psi(x^1,\ x^4), \\ \bar{x}^2 &= \bar{\theta} = \theta = x^2, \\ \bar{x}^3 &= \bar{\varphi} = \varphi = x^3, \\ \bar{x}^4 &= \bar{t} = t + \mu(r) = x^4 + \mu(x^1). \end{aligned} \tag{2}$$

Tada komponente vektora ξ_α mogu da se izraze kao

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial r}}{\sqrt{-g^{11}\left(\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial r}\right)^2 - g^{44}\left(\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)^2}} = \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{-g^{11}\dot{\mu}^2 - g^{44}}}, \\ \xi_4 &= \frac{\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial t}}{\sqrt{-g^{11}\left(\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial r}\right)^2 - g^{44}\left(\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-g^{11}\dot{\mu} - g^{44}}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Novi sistem koordinata takođe je ortogonalan i važi

$$g^{\alpha\beta}\xi_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta}=0. \tag{4}$$

Četvorobrzina datog posmatrača imaće komponente

$$u_i=0, \quad u_4=1. \qquad (i=1, 2, 3)$$

Odredićemo prvo komponente tenzora $\tau_{\alpha\beta}$ iz definicije (1). (Metrike posmatranih modela su dijagonalne). Dobijamo sledeće komponente tenzora $\tau_{\alpha\beta}$ različite od nule

$$\begin{aligned}
\tau_{11}&=2\frac{\partial \xi_1}{\partial x^1}-g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\xi_1,\\
\tau_{22}&=g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\xi_1,\\
\tau_{33}&=g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\xi_1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Mešovite komponente tenzora deformacije mogu da se izraze kao

$$\tau^\alpha_\beta=g^{\alpha\varphi}\tau_{\varphi\beta}. \tag{6}$$

Tenzor deformacije ispitivaćemo upravo u ovom obliku.

Posmatrajmo prvo tenzor deformacije u Ajnštajnovoj metrici koja može da se napiše kao [2]

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\dfrac{r^2}{R^2}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)-dt^2.$$

Komponente tenzora deformacije koje su različite od nule, izračunavaju se iz formula (5) i (6)

$$\begin{aligned}
\tau^1_1&=2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial r}-\frac{r\,\xi_1}{R^2\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right)}\right]\\
\tau^2_2&=\frac{2}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\xi_1,\\
\tau^3_3&=\frac{2}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\xi_1.
\end{aligned}$$

Dobili smo da je $\tau^2_2=\tau^3_3$.

U ovom radu ispitaćemo samo slučaj kada je

$$\tau^2_2=\tau^3_3=E=\text{const.} \tag{7}$$

Iz tog uslova dobijamo jednačinu za određivanje funkcije μ koje se pojavljuje u transformacijama (2)

$$\dot{\mu}=\frac{E}{2}\frac{r}{\sqrt{\left(1-A\frac{r^2}{R^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}}, \qquad A=1-\frac{E^2R^2}{4}>0.$$

Rešenje ove jednačine glasi

$$\mu=\frac{-E^2R^2}{2\sqrt{A}}\ln\left\{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}+\sqrt{\frac{1}{A}-\frac{r^2}{R^2}}\right\}.$$

Ovo znači da postoje koordinatne transformacije koje obezbeđuju realizovanje uslova (7). Sada ima smisla računati i komponentu τ_1^1

$$\tau_1^1=\frac{E}{1-\frac{r^2}{R^2}}.$$

Dobijamo da je i ta komponenta pozitivna. U Ajnštajnovoj metrici deformacija je pozitivna ali nije ista u svim pravcima.

Razmotrimo sada tenzor deformacije u Švarcšilodovoj metrici. Ova metrika može da se napiše u obliku [3]

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2.$$

U ovom slučaju dobijamo sledeće komponente tenzora deformacije koje su različite od nule, koristeći ponovo (5) i (6)

$$\tau_1^1=2\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\frac{m}{r^2}\xi_1}{1-\frac{2m}{r}}\right],$$

$$\tau_2^2=\frac{2}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\xi_1,$$

$$\tau_3^3=\frac{2}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\xi_1.$$

I u ovom slučaju je $\tau_2^2=\tau_3^3$. Postavićemo ponovo uslov

$$\tau_2^2=\tau_3^3=S=\text{const.} \tag{8}$$

Ovaj uslov daje sledeću jednačinu za μ

$$\dot{\mu}=\frac{r\sqrt{r}}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{r^3+\frac{4}{S^2}r-\frac{8m}{S^2}}}.$$

Rešenje ove jednačine izražava se preko eliptičkih funkcija. Međutim, mi ćemo ovde posvetiti pažnju oblasti koja se nalazi oko Švarcšilodovog »horizonta«, odnosno odredićemo približno rešenje pod uslovom da je

$$2m-\varepsilon<r<2m+\varepsilon,$$

gde je ε mala veličina. U toj oblasti član r^3 je dominantan u izrazu pod korenom u imeniocu. Aproksimacija u kojoj ćemo zanemariti ostale članove dozvoljava pojednostavljenje i tako možemo da dobijemo

$$\dot{\mu}=\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}.$$

U oblasti neposredno ispod »horizonta«, gde je $r=2m-\varepsilon$ dobija se rešenje

$$\mu=r-2m+2m\ln(2m-r).$$

Izvan singulariteta, iznad horizonta, gde je $r=2m+\varepsilon$ dobija se rešenje

$$\mu=r-2m+2m\ln(r-2m).$$

Tim rešenjem zadovoljen je uslov (8). Komponenta τ_1^1 dobija vrednost

$$\tau_1^1=S\frac{1-\frac{3m}{r}}{1-\frac{2m}{r}}.$$

U Švarcšilodovoj metrici deformacija je pozitivna u oblasti gde je $r\in(0,2m)\cup(3m,+\infty)$ a negativna kada $r\in(2m,3m)$.

Na kraju posmatrajmo tenzor deformacije i u modifikovanoj Desiterovoj metrici [4], koja može da se napiše u obliku

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)-\left(\frac{a+R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{a+R}\right)^2 dt^2.$$

Koristeći još jednom (5) i (6) dobijamo sledeće komponente tenzora deformacije koje su različite od nule

$$\tau_1^1=2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial r}-\frac{r}{R^2}\frac{\xi_1}{1-\frac{r^2}{R^2}}\right],$$

$$\tau_2^2=\frac{2}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\xi_1,$$

$$\tau_3^3=\frac{2}{r}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\xi_1.$$

I u ovoj metrici komponente $\overset{2}{\tau}_2$ i $\overset{3}{\tau}_3$ su jednake. Postupićemo kao i u prethodna dva primera. Postavićemo uslov.

$$\overset{2}{\tau}_2 = \overset{3}{\tau}_3 = k = \text{const.} \tag{9}$$

Jednačina koja određuje funkciju μ glasi

$$\dot{\mu} = \frac{k(a+R)r}{\left(a + R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left[4\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+k^2 r^2\right]}}.$$

Iz te jednačine dobija se

$$\mu = \frac{-kR(a+R)}{\sqrt{A^2 a^2 + k^2 R^4}} \ln \frac{A\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} + \sqrt{4\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+k^2 r^2} + \frac{Aa}{R} - \sqrt{\left(\frac{Aa}{R}\right)^2 + (kR)^2}}{A\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} + \sqrt{4\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+k^2 r^2} + \frac{Aa}{R} - \sqrt{\left(\frac{Aa}{R}\right)^2 + (kR)^2}},$$

$$A = \sqrt{4 - k^2 R^2}, \qquad 0 < kR < 2.$$

Tako smo dobili transformacije koje zadovoljavaju uslov (9). Sada možemo da odredimo i komponentu $\overset{1}{\tau}_1$

$$\overset{1}{\tau}_1 = \frac{k}{1-\frac{r^2}{R^2}}.$$

Komponenta $\overset{1}{\tau}_1$ je pozitivna. Deformacija je i u ovom slučaju pozitivna ali nije izotropna, odnosno nije ista u svim pravcima.

Literatura

[1] Lukačević I., *On relative deformation and vorticity in relativistic kinematics*; Publ. Inst. Math. N. S. **19** (33), 1975.

[2] Tolman R. C., *Relativity, thermodynamics and cosmology*; Oxford; Clarendon Press, 1950.

[3] McVittie G. C., *General relativity and cosmology*; The University of Illinois Press, Urbana, 1965.

[4] Мальцев В. К. — Марков М. А., *К вопросу о сингулярности в модели Де Ситтера*; Труд. физ. инст. Лебедева, Т. **96**, 1977.

LE TENSEUR DE DEFORMATION DANS CERTAINES METRIQUES RELATIVISTES

Résumé

On considère ici le tenseur de déformation dans les métriques d'Einstein, de Schwarzschild et dans la métrique modifiée de De Sitter. Le tenseur de déformation

est défini par

$$\tau_{\alpha\beta} = h_\alpha^\rho h_\beta^\varphi \mathscr{L}_\xi g_{\rho\varphi},$$

ou h_α^ρ est le tenseur projecteur, $g_{\rho\varphi}$ est le tenseur métrique, ξ_α est le vecteur orienté dans le temps et $\mathscr{L}_\xi$ est la dérivation de Lie par rapport à ξ_α.

On obtient, dans les métriques considerées, la déformation positive, mais pas isotrope, i. e. elle n'est pas égale dans toutes les directions.

Dragi Radojević,
Matematički Institut
Knez Mihailova 35
11000 Beograd

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12) 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

O ODREĐIVANJU FREKVENCIJA GLAVNIH OBLIKA OSCILOVANJA ELASTIČNIH SISTEMA SA KONAČNIM BROJEM STEPENI SLOBODE METODOM SUKCESIVNIH APROKSIMACIJA

Ljubodrag Radosavljević

Uvod. Metoda sukcesivnih aproksimacija za određivanje frekvencija glavnih oblika oscilovanja za tzv. sisteme sa koncentrisanim masama, tj. za sisteme čija aproksimativna funkcija za kinetičku energiju sadrži samo kvadrate generalisanih brzina, izložena je, osim na drugim mestima, i u knjizi S. P. Timoshenko-a i D. H. Young-a [1]. Metoda potiče od L. Vianello-a [2], koji ju je upotrebio za određivanje kritičnih tereta za podupirače. Njena primena za sračunavanje frekvencija pri torzionim oscilacijama vratila opširno je izložena u knjizi C. B. Biezeno-a i R. Grammel-a [3].

U ovom radu autor je uopštio primenu ove metode na bilokoje oscilatorne sisteme, tj. i na sisteme čija aproksimativna funkcija za kinetičku energiju nije kanonskog oblika, odnosno koja pored kvadrata generalisanih brzina, sad drži i članove koji se množe proizvodom generalisanih brzina $\dot{q}_j \dot{q}_k (j, k=1, 2, \ldots, s)$, gde je s broj stepeni slobode sistema.

Iz rezultata dobijenih u ovom radu, kao poseban slučaj, dobijaju se svi rezultati za sisteme sa koncentrisanim masama.

Osnovne jednačine elastostatike i elastodinamike. Neka se elastični sistem nalazi u ravnoteži pod dejstvom spoljašnjih i unutrašnjih sila. Neka je položaj ravnoteže sistema određen generalisanim koordinatama: $q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_s$, koje su različite od nule, i koje su male veličine. Generalisane spoljašnje sile obeležimo sa: $Q_1^s\ Q_2^s, \ldots, Q_j^s, \ldots, Q_s^s$.

Osnovne jednačine elastostatike direktnog oblika glase

$$Q_j^s = \sum_{k=1}^{s} c_{jk} q_k, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{1}$$

ili

$$\{Q_j^s\} = \|c_{jk}\| \{q_j\}, \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{1'}$$

gde je: $\{Q_j^s\}$ — matrica kolona generalisanih spoljašnjih sila,
$\|c_{jk}\|$ — simetrična kvadratna matrica koeficijenata krutosti, i
$\{q_j\}$ — matrica kolona generalisanih koordinata.

Osnovne jednačine elastostatike inverznog oblika glase

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{jk} Q_k^s, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{2}$$

ili

$$\{q_j\} = \|\alpha_{jk}\| \{Q_j^s\}, \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{2'}$$

gde je $\|\alpha_{jk}\|$ — simetrična kvadratna matrica uticajnih koeficijenata.

Osnovne jednačine elastostatike (1) i (1′), odnosno (2) i (2′), prelaze u osnovne jednačine elastodinamike ako spoljašnje sile zamenimo inercijalnim silama.

Obeležimo generalisane inercijalne sile sa: $Q_1^{in}, Q_2^{in}, \ldots, Q_j^{in}, \ldots, Q_s^{in}$.

Osnovne jednačine elastodinamike direktnog oblika glase

$$Q_j^{in} = \sum_{k=1}^{s} c_{jk} q_k, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{3}$$

ili

$$\{Q_j^{in}\} = \|c_{jk}\| \{q_j\}, \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{3'}$$

gde je $\{Q_j^{in}\}$ — matrica kolona generalisanih inercijalnih sila.

Osnovne jednačine elastodinamike inverznog oblika glase

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{jk} Q_k^{in}, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{4}$$

ili

$$\{q_j\} = \|\alpha_{jk}\| \{Q_j^{in}\}. \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{4'}$$

Za slučaj malih oscilacija sistema generalisane inercijalne sile jednake su

$$Q_j^{in} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_{k=1}^{s} a_{jk} \ddot{q}_k, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{5}$$

gde je: E_k — aproksimativna funkcija za kinetičku energiju sistema, a a_{jk} $(j, k= =1, 2, \ldots, s)$ koeficijenti inercije sistema koji poseduju svojstvo simetrije.

Kada se (5) smeni u (3) i (3′), odnosno u (4) i (4′), dobijaju se diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema najpre direktnog oblika

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{6}$$

ili

$$\|a_{jk}\| \{\ddot{q}_j\} + \|c_{jk}\| \{q_j\} = \{0\}, \qquad (j, k=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{6'}$$

gde je: $\|a_{jk}\|$ — simetrična kvadratna matrica koeficijenata inercije sistema, a $\{\ddot{q}_j\}$ — matrica kolona generalisanih ubrzanja, a zatim inverznog oblika

$$q_j + \sum_{k=1}^{s} e_{jk} \ddot{q}_k = 0, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{7}$$

ili

$$\{q_j\} + \| e_{jk} \| \{\ddot{q}_j\} = \{0\}, \tag{7'}$$

gde je sa $\|e_{jk}\|$ obeležena sledeća nesimetrična kvadratna matrica

$$\|e_{jk}\| = \|\alpha_{jk}\| \, \|a_{jk}\|, \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{8}$$

čiji su elementi jednaki

$$e_{jr} = \sum_{r=1}^{s} \alpha_{jr} a_{rk}. \qquad (j, k = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{9}$$

Određivanje frekvencije prvog glavnog oblika oscilovanja. Neka se pri oscilovanju sistema generalisane koordinate menjaju saglasno zakonima

$$q_j = A_j \cos(\omega t - \alpha), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{10}$$

gde su: A_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ i ω dve klase nepoznatih konstanti.

Kako je

$$\ddot{q}_j = -A_j \omega^2 \cos(\omega t - \alpha), \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{11}$$

kada (10) i (11) smenimo u (7) u razvijenom obliku dobiće se

$$\begin{aligned}
A_1 &= \omega^2 (e_{11} A_1 + e_{12} A_2 + e_{13} A_3 + \cdots + e_{1s} A_s) \\
A_2 &= \omega^2 (e_{21} A_1 + e_{22} A_2 + e_{23} A_3 + \cdots + e_{2s} A_s) \\
&\text{— — — — — — — — — — — —} \\
A_j &= \omega^2 (e_{j1} A_1 + e_{j2} A_2 + e_{j3} A_3 + \cdots + e_{js} A) \\
&\text{— — — — — — — — — — — —} \\
A_s &= \omega^2 (e_{s1} A_1 + e_{s2} A_2 + e_{s3} A_3 + \cdots + e_{ss} A_s).
\end{aligned} \tag{12}$$

Kada bi se izjednačila sa nulom eliminanta sistema jednačina (12) dobila bi se frekventna jednačina za oscilovanje razmatranog sistema iz koje bi se mogle potpuno tačno odrediti frekvencije svih glavnih oblika oscilovanja razmatranog sistema.

Međutim, za približno određivanje ovih frekvencija nećemo izvoditi frekventnu jednačinu, niti ćemo je rešavati, već ćemo direktno raditi sa sistemom jednačina (12), koji će poslužiti kao bazični sistem jednačina za razvijanje ove metode.

U sistemu jednačina (12) postoje dve klase nepoznatih, i to: klasa nepoznatih ω^2 i klasa nepoznatih: $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_s$. Kako je pokazano i dokazano u [3], za sisteme sa koncentrisanim masama, mogućno je iz sistema jednačina (12), postupkom koji je u daljem izložen, odrediti najpre najmanju vrednost za nepoznatu ω^2, a zatim i sve ostale — do najveće vrednosti.

Korišćenjem jednačina (12) odredimo najpre približno frekvenciju najnižeg (osnovnog) oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji, kao i krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji.

Pretpostavimo oblik krive prvog glavnog oblika oscilovanja. Neka je ona određena nizom pretpostavljenih vrednosti

$$(A_1)_0^{(1)},\ (A_2)_0^{(1)},\ (A_3)_0^{(1)}, \ldots,\ (A_s)_0^{(1)}. \tag{13}$$

Ako pretpostavljene vrednosti (13) smenimo u desne strane jednačina (12) dobićemo prve aproksimacije za amplitudna pomeranja pri prvom glavnom obliku oscilovanja: $(A_1)_1^{(1)}$, $(A_2)_1^{(1)}, \ldots, (A_j)_1^{(1)}, \ldots, (A_s)_1^{(1)}$, odnosno niz vrednosti koje određuju krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji

$$(A_j)_0^{(1)} \approx \omega_1^2 \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_0^{(1)}. \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{14}$$

Ako najpre za najgrublje aproksimiranje pretpostavimo da je kriva prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji približno jednaka pretpostavljenoj krivoj prvog glavnog oblika oscilovanja, odnosno ako pretpostavimo da je

$$(A_j)_1^{(1)} \approx (A_j)_0^{(1)}, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{15}$$

onda jednačine (14) prelaze u

$$(A_j)_0^{(1)} \approx \omega_{1j}^2 \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_0^{(1)}. \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{16}$$

Iz jednačina (16) dobićemo onoliko različitih prvih aproksimacija za ω_1^2 koliki je broj jednačina (16), odnosno koliki je broj stepeni slobode kretanja sistema. Iz jednačina (16) sledi da je j različitih vrednosti za ω_1^2 u prvoj aproksimaciji određeno izrazima

$$(\omega_{1j}^2)_1 = \frac{(A_j)_0^{(1)}}{\sum\limits_{k=1}^{s} e_{jk} (A)_0^{(1)}}. \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{17}$$

Sve tako dobivene aproksimacije za $(\omega_{1j}^2)_1$, biće više ili manje različite, i da bismo dobili bolju aproksimaciju, treba izvršiti njihovo osrednjavanje, tj. treba odrediti njihovu prosečnu (srednju) vrednost.

U tom cilju pomnožimo svaku od jednačina (16) sa $(A_j)_1^{(1)} (j=1, 2, \ldots, s)$ respektivno.

Kada saberemo sve tako dobivene jednačine biće

$$\sum_{j=1}^{s} (A_j)_0^{(1)} (A_j)_1^{(1)} \approx (\overline{\omega_1^2})_1 \sum_{j=1}^{s} (A_j)_1^{(1)} \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_0^{(1)}, \tag{18}$$

gde je sa $(\overline{\omega_1^2})_1$ obeležena srednja (prosečna) vrednost frekvencije prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji. Iz (18) dobija se

$$(\overline{\omega_1^2})_1 = \frac{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_0^1 (A_j)_1^{(1)}}{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_1^{(1)} \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_0^{(1)}}. \tag{19}$$

Ako u jednačinama (14) umesto ω^2 smenimo vrednost za $(\overline{\omega_1^2})_1$, određenu izrazom (19) izračunaćemo niz vrednosti

$$(A_1)_1^{(1)},\ (A_2)_1^{(1)},\ (A_3)_1^{(1)}, \ldots, (A_s)_1^{(1)}, \tag{20}$$

koje određuju krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji. Time bi svi računi koji se odnose na prvi glavni oblik oscilovanja u prvoj aproksimaciji bili završeni.

Ako se želi veća tačnost, odnosno ako je potrebno da se izračuna druga aproksimacija za ω_1^2 onda se čitav ciklus izvršenih računa ponavlja, s tom razlikom što se računi ne započinju pretpostavljenim vrednostima (13) za krivu prvog glavnog oblika oscilovanja, već izračunatim vrednostima (20) za krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji. Sada bi se računi započeli jednačinama

$$(A_j)_2^{(1)} = \omega_1^2 \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_1^{(1)}, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, s). \tag{21}$$

Niz vrednosti (21) za $(A_j)_2^{(1)}$ određuje krivu prvog oblika oscilovanja u drugoj aproksimaciji.

Istim postupkom kao u predhodnoj prvoj aproksimaciji mogu se odrediti kako j različitih vrednosti za ω_1^2 u drugoj aproksimaciji, tako i osrednjena vrednost za ω_1^2 u drugoj aproksimaciji. Ove vrednosti su određene izrazima

$$(\omega_{1j}^2)_2 = \frac{(A_j)_1^{(1)}}{\sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_1^{(1)}}, \qquad (\overline{\omega_1^2})_2 = \frac{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_1^{(1)} (A_j)_2^{(1)}}{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_2^{(1)} \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (A_k)_1^{(1)}}. \tag{22}$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, s)$$

Kada se u jednačine (21) umesto ω_1^2 smeni vrednost za $(\overline{\omega_1^2})_2$ određena drugim od izraza (22) dobiće se niz vrednosti

$$(A_1)_2^{(1)},\ (A_2)_2^{(1)},\ (A_3)_2^{(1)}, \ldots, (A_s)_2^{(1)} \tag{23}$$

koje određuju krivu prvog glavnog oblika oscilovanja u drugoj aproksimaciji. Time bi svi računi koji se odnose na prvi glavni oblik oscilovanja u drugoj aproksimaciji bili završeni.

Kada je to potrebno, ponavljajući izloženi postupak navedenim redosledom, može se odrediti frekvencija prvog glavnog oblika oscilovanja, a takođe i kriva prvog glavnog oblika oscilovanja, u daljoj trećoj, četvrtoj, petoj,..... aproksimaciji.

Određivanje frekvencija viših glavnih oblika oscilovanja. Neka je kriva drugog glavnog oblika oscilovanja određena sledećim nizom pretpostavljenih vrednosti

$$(A_1)_0^{(2)},\ (A_2)_0^{(2)},\ (A_3)_0^{(2)}, \ldots,\ (A_s)_0^{(2)}. \tag{24}$$

Efikasnost metode sukcesivnih aproksimacija za približno određivanje frekvencija viših oblika oscilovanja zavisi od stepena tačnosti pretpostavljene krive nekog višeg glavnog oblika oscilovanja sa kojom se započinju računi pri odgovarajućem višem glavnom obliku oscilovanja. Ove krive viših oblika oscilovanja biće utoliko bolje pretpostavljene ukoliko budu manje sadržale u sebi krive svih nižih oblika oscilovanja.

Za drugi glavni oblik oscilovanja to znači da niz vrednosti (24) treba osloboditi učešća krive prvog glavnog oblika oscilovanja, tako da će onda pretpostavljena korigovana kriva drugog glavnog oblika oscilovanja biti određena nizom vrednosti

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_1)_0^{(2)} &= (A_1)_0^{(2)} - c_1 A_1^{(1)} \\
(\tilde{A}_2)_0^{(2)} &= (A_2)_0^{(2)} - c_1 A_2^{(1)} \\
&- - - - - - \\
(\tilde{A}_s)_0^{(2)} &= (A_s)_0^{(2)} - c_1 A_s^{(1)}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Slično tome, ako krivu trećeg glavnog oblika oscilovanja pretpostavimo nizom vrednosti

$$(A_1)_0^{(3)},\ (A_2)_0^{(3)},\ (A_3)_0^{(3)}, \ldots,\ (A_s)_0^{(s)}, \tag{26}$$

onda nju treba osloboditi učešća krivih prvog i drugog glavnog oblika oscilovanja. Tako će pretpostavljena korigovana kriva trećeg glavnog oblika oscilovanja biti određena nizom vrednosti

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_1)_0^{(3)} &= (A_1)_0^{(3)} - c_1 A_1^{(1)} - c_2 A_1^{(2)} \\
(\tilde{A}^2)_0^{(3)} &= (A_2)_0^{(3)} - c_1 A_2^{(1)} - c_2 A_2^{(2)} \\
&- - - - - - - - \\
(\tilde{A}_s)_0^{(3)} &= (A_s)_0^{(3)} - c_1 A_s^{(1)} - c_2 A_s^{(2)}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Slično ovome bi se postupilo i za sve ostale više oblike oscilovanja: četvrti peti, šesti,.......

Brojevi: c_1, c_2, c_3,.... koji određuju učešće krivih nižih oblika oscilovanja u pretpostavljenim korigovanim krivama viših oblika oscilovanja mogu se odrediti na sledeći način.

Bilo koja geometrijska konfiguracija sistema može se razložiti po glavnim oblicima oscilacija sistema. Ako je ta geometrijska konfiguracija pri nekom višem glavnom obliku oscilovanja određena nizom vrednosti

$$(A_1)_0^{(p)},\ (A_2)_0^{(p)},\ (A_3)_0^{(p)}, \ldots,\ (A_s)_0^{(p)}, \tag{28}$$

gde je $p=2, 3, 4, 5, \dots s$, onda možemo pisati

$$
\begin{aligned}
(A_1)_0^{(p)} &= c_1 A_1^{(1)} + c_2 A_1^{(2)} + c_3 A_1^{(3)} + \cdots \\
(A_2)_0^{(p)} &= c_1 A_2^{(1)} + c_2 A_2^{(2)} + c_3 A_2^{(s)} + \cdots \\
&- - - - - - - - - - \\
(A_s)_0^{(p)} &= c_1 A_s^{(1)} + c_2 A_s^{(2)} + c_3 A_s^{(3)} + \cdots
\end{aligned}
\tag{29}
$$

U diferencijalnim jednačinama malih oscilacija sistema (6) i (6′), odnosno (7) i (7′) geometrijska konfiguracija sistema bila je određena skupom generalisanih koordinata: $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_s$. Neka sada geometriska konfiguracija sistema bude određena novim skupom generalisanih koordinata: $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_s$, koji je sa prethodnim skupom generalisanih koordinata vezan linearnom transformacijom oblika

$$
\begin{aligned}
p_1 &= q_1 + k_{12} q_2 + k_{13} q_3 + \cdots + k_{1s} q_s \\
p_2 &= \qquad\quad q_2 + k_{23} q_3 + \cdots + k_{2s} q_s \\
&- - - - - - - - - - \\
p_s &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad q_s .
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Sada će se aproksimativna funkcija za kinetičku energiju sistema svesti na kanonski oblik [4], tj. sadržaće samo kvadrate generalisanih brzina

$$
E_k \approx \frac{1}{2} (a_1 \dot{p}_1^2 + a_2 \dot{p}_2^2 + \cdots + a_s \dot{p}_s^2) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} a_j \dot{p}_j^2,
\tag{31}
$$

gde su a_j $(j=1, 2, \dots, s)$ novi koeficijenti inercije sistema.

Iz (30) proizlazi da je

$$
\begin{aligned}
q_1 &= p_1 + k'_{12} p_2 + k'_{13} p_3 + \cdots + k'_{1s} p_s \\
q_2 &= \qquad\quad p_2 + k'_{23} p_3 + \cdots + k'_{2s} p_s \\
&- - - - - - - - - - \\
q_s &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad p_s .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Korišćenjem veza (32) umesto starih koeficijenata krutosti c_{jk} $(j, k=1, 2, \dots, \dots, s)$ možemo sračunati nove koeficijente krutosti r_{jk} $(j, k=1, 2, \dots, s)$.

Prelaskom na nove generalisane koordinate diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema (6) i (6′) preći će u

$$
a_{jj} \ddot{p}_j + \sum_{k=1}^{s} r_{jk} q_k = 0, \qquad (j=1, 2, 3, \dots, s)
\tag{33}
$$

ili

$$
\| a_{jj} \| \{\ddot{p}_j\} + \| r_{jk} \| \{p_j\} = \{0\},
\tag{33'}
$$

gde je: $\|a_{jj}\|$ — dijagonalna matrica novih koeficijenata inercije, a $\|r_{jk}\|$ — kvadratna matrica novih koeficijenata krutosti.

Ako bismo najpre u jednačine (29) stavili $p=2$, i ako bismo zatim svaku od ovih jednačina pomnožili respektivno sa $a_j A_j^{(1)}$, pa ako bismo zatim u jednačine (29) stavili $p=3$, i ako bismo potom svaku od tih jednačina pomnožili respektivno sa $a_j A_j^{(2)}$, koristeći pri tom i uslov ortogonalnosti glavnih oblika oscilacija po kome

$$\sum_{j=1}^{s} a_j A_j^{(p)} A_j^{(q)} = 0 \quad \text{za} \quad p \neq q, \tag{34}$$

posle relativno prostih računa dobili bismo da je

$$c_1 = \frac{\sum_{j=1}^{s} a_j (A_j)_0^{(2)} A_j^{(1)}}{\sum_{j=1}^{s} a_j [A_j^{(1)}]^2}, \qquad c_2 = \frac{\sum_{j=1}^{s} a_j (A_j)_0^{(3)} A_j^{(2)}}{\sum_{j=1}^{s} a_j [A_j^{(2)}]^2}.$$

Na sličan način mogu se izračunati i svi ostali brojevi: $c_3, c_4, c_5, \ldots$.

Primetimo da se brojevi c_1, c_2, određeni izrazima (35), mogu sračunavati u prvoj, drugoj, trećoj, ... aproksimaciji u zavisnosti od toga da li smo u izraze (35) za $A_j^{(1)}$ i $A_j^{(2)}$ $(j=1, 2, \ldots, s)$ smenili njihove vrednosti u prvoj, drugoj, trećoj .... aproksimaciji.

Kriva drugog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji biće određena nizom vrednosti

$$(A_j)_1^{(2)} = \omega_2^2 \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (\tilde{A}_k)_1^{(2)}, \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{36}$$

pri čemu su u desne strane jednačina (36) za krivu drugog glavnog oblika oscilovanja smenjene vrednosti $(\tilde{A}_j)_1^{(2)}$ $(j=1, 2, \ldots, s)$, koje određuju pretpostavljenu korigovanu krivu drugog glavnog oblika oscilovanja u prvoj aproksimaciji.

Čitav postupak dalje teče istim redosledom kao i pri određivanju frekvencije prvog (osnovnog) glavnog oblika oscilovanja.

Tako će j različitih vrednosti za ω_2^2 u prvoj aproksimaciji, i osrednjena (prosečna) vrednost za ω_2^2 u prvoj aproksimaciji biti određene izrazima

$$(\omega_{2j}^2)_1 \approx \frac{(\tilde{A}_j)_1^{(2)}}{\sum_{j=1}^{s} e_{jk} (\tilde{A})_1^{(2)}}, \qquad (\overline{\omega_2^2})_1 \approx \frac{\sum_{j=1}^{s} (\tilde{A}_j)_1^{(2)} (A_j)_1^{(2)}}{\sum_{j=1}^{s} (A_j)_1^{(2)} \sum_{k=1}^{s} e_{jk} (\tilde{A}_k)_1^{(2)}}.$$

$$(j=1, 2, 3, \ldots, s) \tag{37}$$

Na sličan način kao i pri određivanju frekvencije prvog glavnog oblika oscilovanja, mogu se izračunati odgovarajuće vrednosti za frekvenciju drugog glavnog oblika oscilovanja ω_2^2 i u drugoj aproksimaciji, a potom, ako je to potrebno, i u daljoj trećoj, četvrtoj, ... aproksimaciji.

Određivanje frekvencije najvišeg glavnog oblika oscilovanja. Ako diferencijalne jednačine malih oscilacija sistema (6′) pomnožimo s leva inverznom matricom koeficijenata inercije $\|a_{jk}\|^{-1}$, ove će jednačine preći u

$$\ddot{q}_j+\sum_{k=1}^{s} h_{jk}\,q_k=0, \qquad (j=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,s) \tag{38}$$

ili

$$\{\ddot{q}_j\}+\|h_{jk}\|\,\{q_k\}=\{0\}, \qquad (j,\,k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,s) \tag{38'}$$

gde je

$$\|h_{jk}\|=\|a_{jk}\|^{-1}\,\|c_{jk}\|, \tag{39}$$

nesimetrična kvadratna matrica novih koeficijenata krutosti.

Ako inverznu matricu koeficijenata inercije sistema obeležimo sa

$$\|\beta_{jk}\|=\|a_{jk}\|^{-1}, \tag{40}$$

onda su elementi nesimetrične kvadratne matrice (39) jednaki

$$h_{jr}=\sum_{r=1}^{s}\beta_{jr}c_{rk}, \qquad (j,\,k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,s). \tag{42}$$

Jednačine slične jednačinama (12) imaće sada oblik

$$A_1=\frac{1}{\omega^2}(h_{11}A_1+h_{12}A_2+h_{13}A_3+\cdots+h_{1s}A_s)$$

$$A_2=\frac{1}{\omega^2}(h_{21}A_1+h_{22}A_2+h_{23}A_3+\cdots+h_{2s}A_s)$$

— — — — — — — — — — — — —

$$A_j=\frac{1}{\omega^2}(h_{j1}A_1+h_{j2}A_2+h_{j3}A_3+\cdots+h_{js}A_s)$$

— — — — — — — — — — — — —

$$A_s=\frac{1}{\omega^2}(h_{s1}A_1+h_{s2}A_2+h_{s3}A_3+\cdots+h_{ss}A_s). \tag{42}$$

Jednačine (42) po svojoj konstituciji slične su jednačinama (12), s tom razlikom što je u jednačinama (12) nepoznata bila ω^2, dok je ovde nepoznata $1/\omega^2$.

Ako se izložena metoda sukcesivnih aproksimacija za izračunavanje najniže osnovne frekvencije, koja je bila primenjena na bazični sistem jednačina (12), primeni sada na sistem jednačina (42) kao bazični sistem jednačina, onda se istim postupkom može izračunati sada najmanja vrednost za nepoznatu $1/\omega^2$, odnosno najveća vrednost za ω^2, tj. najviša frekvencija sistema ω_s^2.

Literatura

[1] Timoshenko S. P. — Young D. H., *Advanced Dynamics*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1948., pp. 297—306.

[2] Vianello L., Z. Ver. deut., Ing., vol. 42, 1898., p. 1436.

[3] Biezeno C. B. — Grammel R., *Technische Dynamik*, Berlin, 1939., pp. 155—163; 829—836.

[4] Бабаков И. М., *Теория колебании*, Москва, 1968., pp. 39—40.

ON DETERMINATION OF PRINCIPAL FREQUENCIES OF ELASTIC SYSTEMS WITH MANY DEGREES OF REEDOM BY A METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS

Summary

A well known method of successive approximations for obtaining principal frequencies of elastic systems with concertrated masses, i.e. of systems the approximative function of which for kinetic energy contains only squares of the generalized velocities has been generalized by the author in such a way as to be valid for any vibrating system, that is to hold also for those systems the approximative function of which for the system kinetic energy is not of a cannonic type, or in other words, the function that in addition to the squares of generalized velocities contains also products of various generalized velocities of the first order.

The results obtained in this paper yield, as a special case, all the results pertaining to the systems with concentrated masses.

prof. Dr. Ljubodrag Radosavljević, dipl. ing.,
11000 Beograd, 29 novembar 66/II
Yugoslavia

Зборник радова Математичког института. Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12) 1984.

TEMPERATURSKI GRANIČNI SLOJ NA POROZNIM ZIDOVIMA POSTOJANE ZAGREJANOSTI PRI LAMINARNOM OPSTRUJAVANJU

V. Saljnikov, S. Tupurkovska-Poposka

U radu se razmatra temperaturski granični sloj pri stacionarnom ravanskom i laminarnom opstrujavanju zidova hlađene lopatice konstantne zagrejanosti sa neprekidno raspoređenom poroznošću, kroz koju se nestišljiva tečnost ili usisava ili uduvava.

Polazne jednačine ovog problema, prema tome, glase

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\nu}{Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{3}$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima

$$y=0:\ u=0,\quad v=v_0,\quad T=T_w \qquad y=\infty:\ u=U,\quad T=T_\infty. \tag{4}$$

Ovde, kao što je uobičajeno, pretstavljaju:

x, y — koordinate merene duž, odnosno, upravno na zid,
u, v — odgovarajuće brzinske projekcije u graničnom sloju,
$U(x)$ — brzinsku raspodelu spoljašnjeg potencijalnog strujanja upravljenog duž konture zida,
$v_0(x)$ — brzinsku raspodelu strujanja upravljenog upravno na zid, i to: u slučaju usisavanja $v_0<0$ i u slučaju uduvavanja $v_0>0$,
ν — koeficijent kinematske viskoznosti,
Pr — Prantlov broj,
c — specifičnu toplotu,
T — temperaturu tečnosti u graničnom sloju,
T_w — temperaturu zida i
T_∞ — temperaturu tečnosti izvan graničnog sloja.

Za dalja razmatranja uvodi se, kao što je poznato iz [3], posredstvom sledeće linearne veze

$$\psi(x, y) = \psi_0(x) + \psi^*(x, y), \tag{5}$$

nova strujna funkcija $\psi^*(x, y)$, pri čemu $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$ pretstavlja vrednost uobičajene strujne funkcije $\psi(x, y)$ na zidu. Shodno tome je, s jedne strane, definisana funkcija ψ^* na zidu

$$\psi^*(x, 0) = 0, \tag{6}$$

a, s druge strane, izražena je posredstvom funkcije ψ_0 brzina

$$v_0 = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = -\psi_0'. \tag{7}$$

Uvođenjem uobičajenih veza

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{8}$$

kao i izraza (5), (6), (7), polazne jednačine (1), (2), (3), (4) pretstavljene su u sledećem obliku

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} - \psi_0'\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \psi_0'\right)\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2}\right)^2; \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y = 0&: \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = 0; \quad T = T_w, \\ y = \infty&: \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = U(x); \quad T = T_\infty, \\ x = x_0&: \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = u_0(y). \end{aligned} \tag{11}$$

Kao postupak za rešavanje sistema jednačina (9), (10), (11) koristi se višeparametarska metoda, razvijena od strane LOJCJANSKOG [1], a kasnije usavršena u radu [2]. U pomenute jednačine se, naime, uvode najpre transformacije

$$\begin{aligned} & x = x; \qquad y = \eta\, U^{-b_0/2}\left(a_0 \nu \int_0^x U^{b_0-1}\, dx\right)^{1/2}; \\ & \psi^* = U^{1-(b_0/2)}\left(a_0 \nu \int_0^x U^{b_0-1}\, dx\right)^{1/2} \Phi(x, \eta); \\ & T = T_\infty + \frac{U^2}{2c} P(x, \eta, Pr) + (T_w - T_\infty)\, R(x, \eta, Pr), \end{aligned} \tag{12}$$

a zatim parametri oblika

$$f_k = U^{k-1}\frac{d^k U}{dx^k}(Z^{**})^k, \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{13}$$

$$\Lambda_k = -U^{k-1}\frac{d^{k-1} v_0}{dx^{k-1}}\frac{(Z^{**})^{k-\frac{1}{2}}}{\nu^{1/2}}, \text{ sa } Z^{**} = \frac{\delta^{**^2}}{\nu}, \tag{14}$$

definisani u [1] i [3], koji se usled proizvoljnosti raspodela brzina $v_0(x)$ i $U(x)$ smatraju međusobno nezavisnim i koriste umesto podužne koordinate x kao nove nezavisne promenljive.

Ovde označava:

η — bezdimenzisku promenljivu merenu upravno na zid,
Φ — bezdimenzisku strujnu funkciju,
P — bezdimenzisku temperatursku razliku, kojom je izražen uticaj trenja na temperatursko polje u graničnom sloju,
R — bezdimenzisku funkciju, kojom je izražen uticaj razlike $T_w - T_\infty$ na temperatursko polje u graničnom sloju,
a_0, b_0 — proizvoljne konstante, koje se određuju kasnije i
δ^{**} — debljinu gubitka impulsa.

Posle diferenciranja izraza (13), (14) sleduju posredstvom impulsne jednačine

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{U'}{U}F + \frac{U''}{U'}f, \tag{15}$$

kao što je poznato iz [3], rekurentne relacije

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{U}{U'}f_1 f_k' = [(k-1)f_1 + kF]f_k + f_{k+1}; \\ \Lambda_k &= \frac{U}{U'}f_1\Lambda_k' = \left[(k-1)f_1 + \frac{2k-1}{2}F\right]\Lambda_k + \Lambda_{k+1}, \end{aligned} \tag{16}$$

sadržane u sledećim transformacionim formulama

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial f_k}f_k' = \frac{U'}{Uf_1}\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k\frac{\partial}{\partial f_k}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \Lambda_k}\Lambda_k' = \frac{U'}{Uf_1}\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k\frac{\partial}{\partial \Lambda_k}. \end{aligned} \tag{17}$$

Uvođenjem skupova parametara (13), (14) posredstvom diferencijalnog operatora (17) u sistem jednačina (9), (10), (11), prethodno već transformisan pomoću obrazaca (12), dobijaju se, posle izdvajanja članova uz faktore $U^2/2c$ odnosno $T_w—T_\infty$, univerzalne jednačine posmatranog problema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3\Phi}{\partial\eta^3} + \frac{1}{2B^2}[a_0B^2 + (2-b_0)f_1]\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \frac{f_1}{B^2}\left[1 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2\right] + \frac{\Lambda_1}{B}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta_k}{B^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial f_k\partial\eta} - \frac{\partial\Phi}{\partial f_k}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_k}{B^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Lambda_k\partial\eta} - \frac{\partial\Phi}{\partial\Lambda_k}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right); \end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2B^2}[a_0 B^2+(2-b_0)f_1]\,\Phi\frac{\partial P}{\partial \eta}+\frac{\Lambda_1}{B}\frac{\partial P}{\partial \eta}-2\frac{f_1}{B^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}P+2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{B^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\theta_k\frac{\partial P}{\partial f_k}+\Lambda_k\frac{\partial P}{\partial \Lambda_k}\right)-\frac{1}{B^2}\frac{\partial P}{\partial \eta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\theta_k\frac{\partial \Phi}{\partial f_k}+\Lambda_k\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_k}\right); \tag{19}$$

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2B^2}[a_0 B^2+(2-b_0)f_1]\,\Phi\frac{\partial R}{\partial \eta}+\frac{\Lambda_1}{B}\frac{\partial R}{\partial \eta}=$$
$$=\frac{1}{B^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\theta_k\frac{\partial R}{\partial f_k}+\Lambda_k\frac{\partial R}{\partial \Lambda_k}\right)-\frac{1}{B^2}\frac{\partial R}{\partial \eta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\theta_k\frac{\partial \Phi}{\partial f_k}+\Lambda_k\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_k}\right), \tag{20}$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima

$$\begin{aligned}
&\eta=0: && \Phi=\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}=0; \quad P=0; \quad R=1,\\
&\eta=\infty: && \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}=1; \quad P=0; \quad R=0,\\
&f_1=f_2=\cdots=0; && \Lambda_1=\Lambda_2=\cdots=0: \quad \Phi=\Phi_0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Treba primetiti da su jednačine temperaturskog graničnog sloja (19), (20) univerzalne u nešto užem smislu od jednačine brzinskog graničnog sloja (18), jer sadrže Pr — broj kao dopunski parametar.

Jednačine (18), (19), (20), na čijim se desnim stranama pojavljuju po dva zbira beskonačnog broja članova, rešene su numerički pod sledećim uslovima

$$f_1\neq 0;\ f_2=f_3=\ldots=0;$$
$$\Lambda_1\neq 0,\quad \Lambda_2=\Lambda_3=\cdots=0;\quad \frac{\partial}{\partial \Lambda_1}=0. \tag{22}$$

U ovom, tzv. dvoparametarsko-jedared lokalizovanom približenju, naime, one se svode na sledeće jednačine

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3}+\frac{1}{2B^2}[a_0 B^2+(2-b_0)f_1]\,\Phi\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}+\frac{f_1}{B_1}\left[1-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\Lambda_1}{B}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}=\frac{Ff_1}{B^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial f_1\partial \eta}-\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right); \tag{23}$$

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2B^2}[a_0 B^2+(2-b_0)f_1]\,\Phi\frac{\partial P}{\partial \eta}+\frac{\Lambda_1}{B}\frac{\partial P}{\partial \eta}-2\frac{f_1}{B^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}P+$$
$$+2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right)^2=\frac{Ff_1}{B^2}\left(\frac{\partial P}{\partial f_1}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}-\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial P}{\partial \eta}\right); \tag{24}$$

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2B^2}[a_0 B^2+(2-b_0)f_1]\,\Phi\frac{\partial R}{\partial \eta}+\frac{\Lambda_1}{B}\frac{\partial R}{\partial \eta}=$$
$$=\frac{Ff_1}{B^2}\left(\frac{\partial R}{\partial f_1}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}-\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial R}{\partial \eta}\right), \tag{25}$$

pri čemu granični uslovi (21) ostaju nepromenjeni.

Funkcija F, koju sadrže izrazi (15), (16), u posmatranom slučaju glasi

$$F = 2\,[\zeta - (2+H) f_1 - \Lambda_1],$$

sa

$$\zeta = B\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}\right)_0 \quad \text{i} \quad H = H^*/H^{**} = \delta^*/\delta^{**}. \tag{26}$$

Pitanje tačnosti rešenja jednašine (23), odnosno njegovog odstupanja od tačnog rezultata, je, kao što je poznato iz [2], tesno povezano sa svrsishodnim izborom konstanti a_0, b_0. U ovom radu je, međutim, usvojeno: $a_0 = 0{,}4408$, $b_0 = 5{,}15$, što pruža mogućnost za upoređivanje sračunatih vrednosti sa odgovarajućim rezultatima dobijenim u radu [4]. Treba napomenuti da su rešenja dobijena na osnovu integracije jednačine brzinskog graničnog sloja (23) objavljena, osim toga, ranije i u prilogu [3]. Stoga se razmatranja u ovom radu ograničavaju samo na rezultate zasnovane na rešenjima jednačina temperaturskog graničnog sloja (24), (25), odnosno odnose se na termički deo posmatranog problema. Ipak se primećuje, da je za numeričku integraciju jednačina (24), (25), zbog rekurzivnog karaktera celog sistema, korišćeno ranije određeno rešenje jednačine (23), pri čemu su proračuni vršeni za dve različite vrednosti Pr — broja: $Pr = 1, 0$ (teorijski slučaj) i $Pr = 0{,}72$ (slučaj koji se odnosi na vazduh).

Za numeričku integraciju sistema jednačina (23), (24), (25), sa odgovarajućim graničnim uslovima (21), primenjen je postupak poznat u literaturi pod nazivom »progonka« [5], zasnovan na metodi konačnih razlika sa implicitnom šemom, pri čemu su sami proračuni izvođeni na elektronskim računarima IBM 360 i 370. Dobijeni i tabelarno sređeni univerzalni rezultati mogu se relativno brzo i lako primeniti na rešavanje konkretnih praktičnih zadataka. Odgovarajući postupak je detaljno prikazan u radu [2].

Da bi se došlo do svrsishodnih i interesantnih zaključaka, koji se odnose na tela različitih konkretnih oblika, sračunata je osim ranije definisanih univerzalnih bezdimenziskih funkcija P i R i bezdimenziska temperatura

$$\tilde{T}_p = \frac{T_p}{U_\infty^2/2c} = \tilde{U}^2 P(x, \eta, Pr), \tag{27}$$

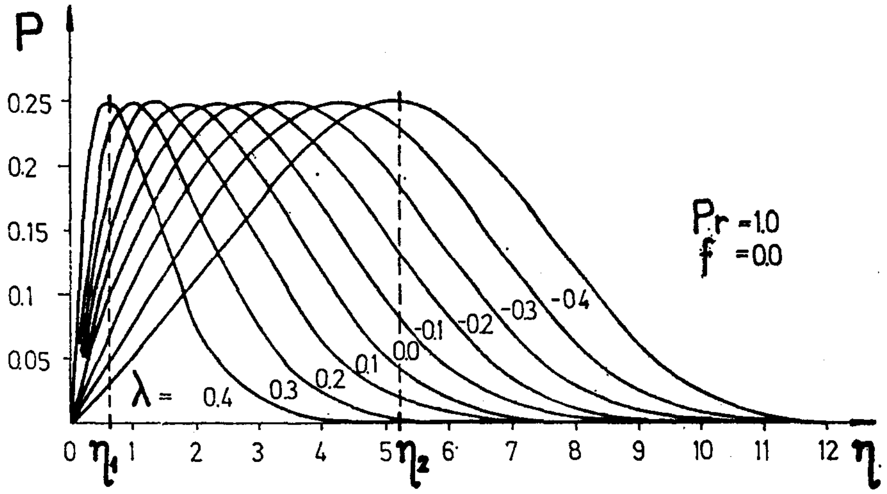
u kojoj $\tilde{U}$ pretstavlja bezdimenzisku brzinsku raspodelu odgovarajućeg konkretnog spoljašnjeg strujanja.

Na osnovu dobijenih i grafički prikazanih rezultata mogu se sada izvući zaključci, koji se odnose na uticaj promene: Pr broja, oblika konture tela, odnosno intenziteta usisavanja ili uduvavanja na razvoj temperaturskog graničnog sloja.

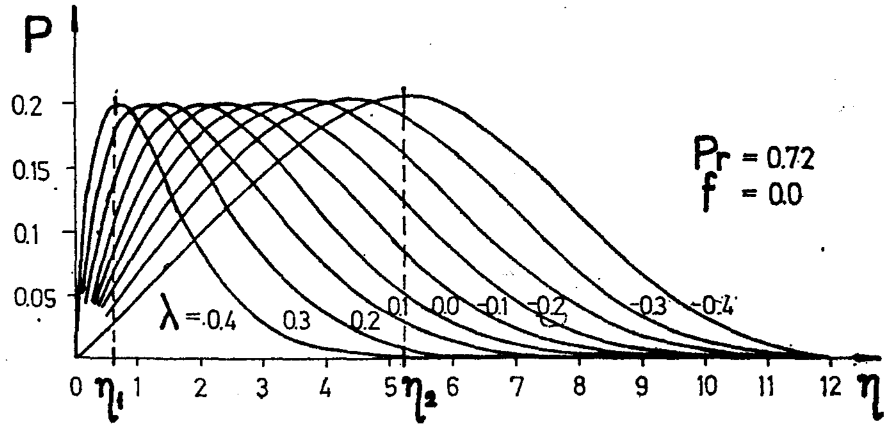
Međutim, pre nego što se pređe na analizu rezultata, koji se odnose na opstrujavanje tela konkretnog oblika, mogu se već na osnovu karaktera bezdimenziskih funkcija P i R izvući neki opšti zaključci i to samo razmatrajući uticaj promene Pr-broja i intenziteta usisavanja odnosno uduvavanja.

Sa sl. 1 i 2 se, naime, vidi, da se pri postojanim: parametru Λ, koji karakteriše intenzitet usisavanja ($\Lambda > 0$), odnosno uduvavanja ($\Lambda < 0$), i parametru oblika f, sa opadanjem Pr—broja, odn. odgovarajuće viskoznosti, smanjuju maksimalne vrednosti funkcije P. Imajući u vidu karakter ove funkcije, ovo je i trebalo očekivati, jer u ovom slučaju opadaju, kako sila trenja, tako i odgovarajuća količina toplote oslobođena u rezultatu disipativnog procesa.

Na istim slikama se, osim toga, primećuje, da za Pr=const. slabljenje intenziteta usisavanja odnosno jačanje uduvavanja, što odgovara opadanju vrednosti parametra Λ, dovodi, slično kao i kod brzinskog graničnog sloja do podebljavanja



Sl.. 1.



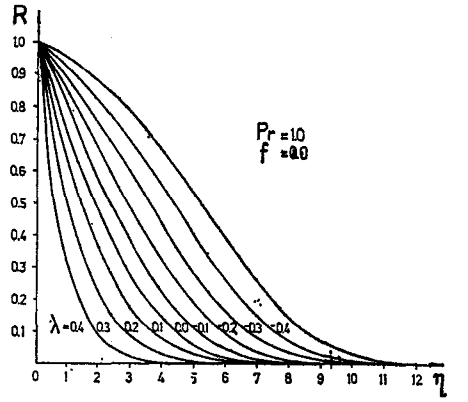
Sl. 2.

temperaturskog graničnog sloja. Ovo je, međutim, propraćeno karakterističnim pomeranjem maksimuma odgovarajućih krivih P u smeru pozitivne η-ose, pri čemu se njihove ordinate tj. P_{max} po svojoj vrednosti ne menjaju. Tako je usled promene vrednosti parametra Λ u granicama od $\Lambda=0{,}4$ do $\Lambda=-0{,}4$ došlo do pomicanja pomenutih maksimuma i to za obadve vrednosti Pr-broja ($Pr=1{,}0$; $Pr=0{,}72$) pri postojanom parametru oblika $f=0{,}0$ od vrednosti ordinate $\eta_1=0{,}6$ do $\eta_2=5{,}2$.

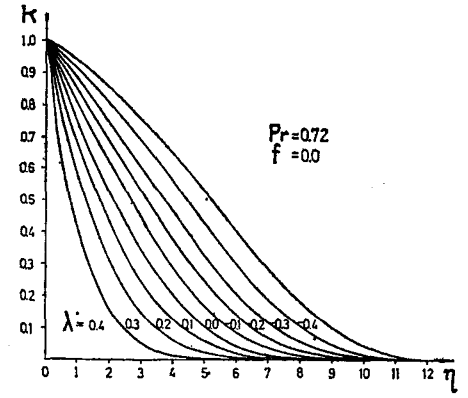
Ako se posmatra ponašanje funkcije P za druge vrednosti parametra f može se zapaziti da se dobijaju slične zavisnosti, ali pri tome maksimalne vrednosti funkcija P opadaju s porastom parametra f (od $f=-0{,}17$ do $f=0{,}16$) pri čemu je $P_{max}\approx$

const. za sve vrednosti parametra Λ od —0,4 do 0,4 kada je f=const. Isto tako se zapaža da su maksimumi funkcija P raspoređeni između $\eta_1=0{,}6$ i $\eta_2=6{,}2$.

Što se tiče funkcije R, koja karakteriše uticaj temperaturske razlike $T_w—T_\infty$ na razvoj temperaturskog graničnog sloja, primećuje se na osnovu sl. 3 i 4, da pri



Sl. 3.



Sl. 4.

istim parametrima Λ i f opadanje Pr-broja prouzrokuje izvesno podebljanje temperaturskog graničnog sloja. Na istim slikama se dalje zapaža slična tendencija ali znatno izraženija, i u slučaju Pr=const., f=const., ako pri tome parametar Λ opada tj. menja se u smislu slabljenja intenziteta usisavanja odnosno pojačavanja uduvavanja. Slike 3 i 4 se odnose na vrednost parametra $f=0{,}0$; međutim, i za druge vrednosti parametra f (od —0,17 do 0,16) dobijaju se slične zavisnosti.

Da bi se sada izvukli zaključci i o uticaju promene oblika konture tela na razvoj temperaturskog graničnog sloja, dobijena univerzalna rešenja su primenjena na dva konkretna slučaja razmatranog problema sa izrazito različitom vitkošću profila. Naime, na slučaj opstrujavanja kružnog cilindra i jednog u praksi često korišćenog profila sa oznakom NACA 0010-34.

Dok se u slučaju kružnog cilindra poznata brzinska raspodela spoljašnjeg strujanja

$$U(x)=2\,U_\infty \sin\left(\frac{x}{R}\right), \tag{28}$$

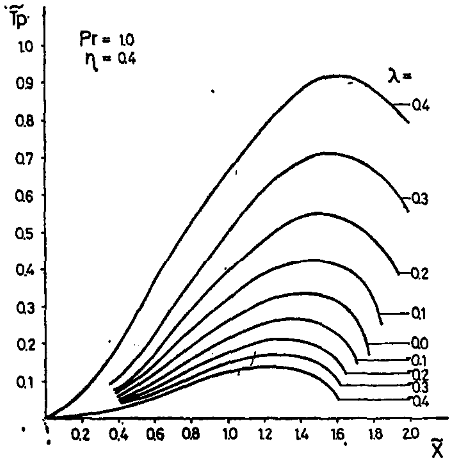
dovodi, uvođenjem veza: $x/R=\tilde{x}$, $U(x)/U_\infty=\tilde{U}$, na sledeći bezdimenziski oblik

$$\tilde{U}=2\sin\tilde{x}, \tag{29}$$

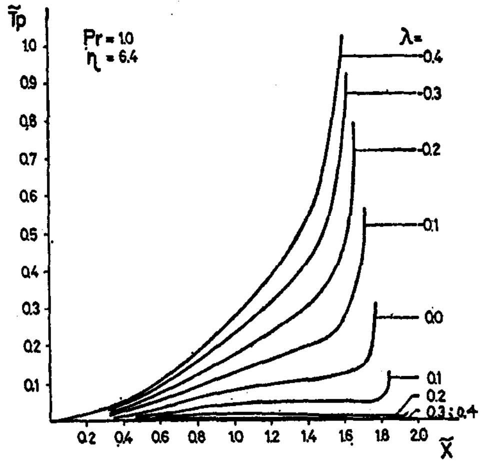
dotle se u slučaju NACA-profila, neposredno koriste tabelarno sređene vrednosti preuzete iz odgovarajuće literature [6].

Pomoću te tabele, odn. analitički izražene raspodele (29), sračunata je posredstvom obrasca (27) karakteristična bezdimenziska temperaturska raspodela $\tilde{T}_p$ grafički prikazana na sl. 5, 6, 7, 8 za slučaj cilindra, a na sl. 9, 10, 11, 12 za slučaj NACA-profila.

Iz upoređivanja ovih dijagrama najpre se zaključuje, da oblik tela, tj. odgovarajuća brzinska raspodela spoljašnjeg strujanja $\tilde{U}$ znatno utiče na temperatursku raspodelu $\tilde{T}_p$. Naime, za $\eta=0{,}4$ u slučaju kružnog cilindra (sl. 5 i 7) ona poseduje

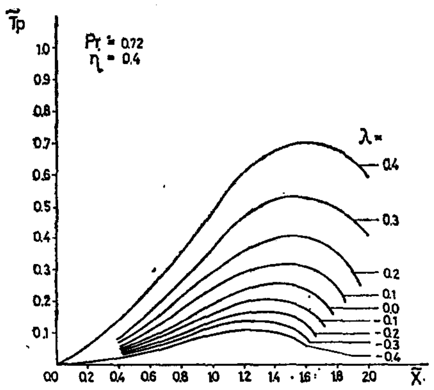


Sl. 5.

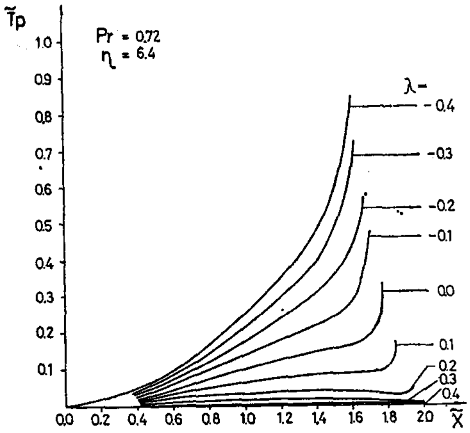


Sl. 6.

sinusoidni karakter,sa brojno veoma izraženom maksimalnom vrednošću, dok u slučaju NACA-profila (sl. 9 i 11) raspodela funkcije $\tilde{T}_p$ je duž skoro čitave njegove konture dosta postojana, pri čemu je maksimalna vrednost znatno manja. Za $\eta=6{,}4$



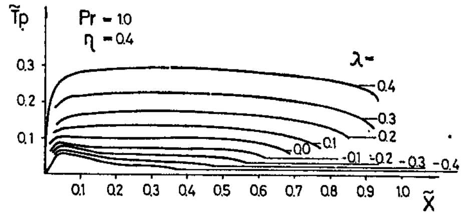
Sl. 7.



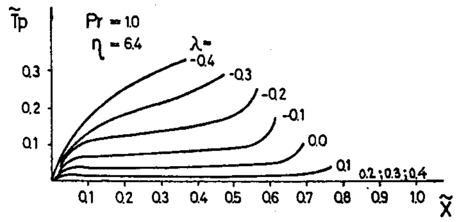
Sl. 8.

raspodela funkcije $\tilde{T}_p$ je slična kod oba razmatrana slučaja (kod cilindra — sl. 6 i 8 i kod aeroprofila — sl. 10 i 12), pri čemu ima manje vrednosti kod aeroprofila kao i za $Pr=0{,}72$.

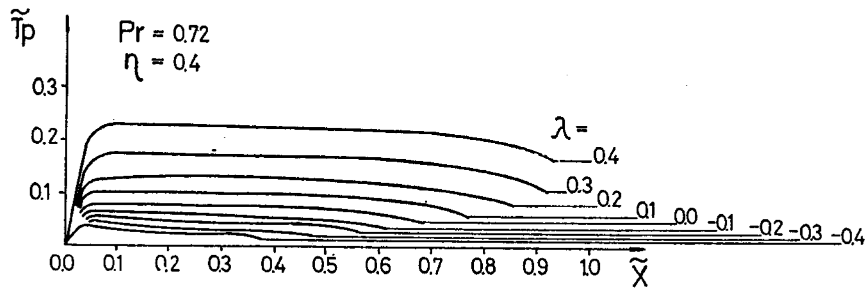
Iz posmatranja istih krivih na sl. 5—12 sleduje, dalje, posle njihovog upoređivanja, pri jednakim vrednostima Pr-broja, da se sa udaljavanjem od zida tela, tj. porastom η, i to u nekom određenom preseku temperaturskog graničnog sloja, definisanom bezdimenziskom podužnom koordinatom $\tilde{x}$, karakter njegovog razvoja, ostvaren pod uticajem promene intenziteta usisavanja, odnosno, uduvavanja, tj. promene parametra Λ, takođe menja. Naime, dok je u oblasti od $\eta=0$ do $\eta_1=0{,}6$ raspored krivih $\tilde{T}_p$ takav, da se pri $\tilde{x}=$const. sa opadanjem parametra Λ smanjuju



Sl. 9.



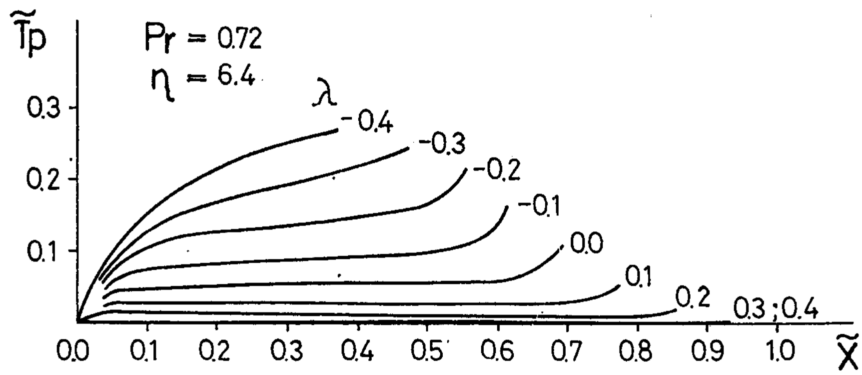
Sl. 10.



Sl. 11.

i same temperature $\tilde{T}_p$, dotle je za promenljive $\eta>\eta_2=6{,}2$ raspored krivih potpuno obrnut. U prelaznoj oblasti se pri tome vrši neprekidni preobražaj rasporeda krivih $\tilde{T}_p$ i to od jedne njene granice ($\eta_1=0{,}6$) do druge ($\eta_2=6{,}2$).

Zapažena tendencija, nezavisna od oblika konture tela i vrednosti *Pr*-broja tesno je povezana sa ranije uočenim rasporedom funkcija *P*, grafički prikazanim na sl. 1 i 2. S tim u vezi treba napomenuti, da su koordinate η_1 i η_2, kojima su definisane tri uočene karakteristične oblasti razvoja temperaturskog graničnog sloja, uslovljene intervalom vrednosti parametra Λ, usvojenim kod numeričke integracije sistema univerzalnih jednačina (23), (24), (25). One, ustvari, pretstavljaju (v. sl. 1 i 2) apscise,



Sl. 12.

kojima su određeni maksimumi odgovarajućih graničnih krivih $P(\eta, \Lambda)$. Kako su u našem slučaju proračuni vršeni za vrednosti parametra Λ iz intervala $\Lambda = -0,4 \div 0,4$, odgovarajuće granične vrednosti koordinate η su: $\eta_1 = 0,6$ i $\eta_2 = 6,2$.

Na kraju treba, međutim, primetiti, da, iako se ova cela diskusija odnosi na rezultate dobijene za konačan interval vrednosti parametra Λ, izvedeni zaključci, s obzirom na očigledno ponašanje rasporeda krivih P na sl. 1 i 2, lako se mogu proširiti i na slučaj neizmernog povećanja intenziteta usisavanja ($\Lambda \to \infty$), odn. uduvavanja ($\Lambda \to -\infty$).

Literatura

[1] Лойцянский, Л. Г., *Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя*, ПММ, том **29**, стр. 70—87, (1965).

[2] Saljnikov, V. N., *A Contribution to universal Solutions of the Boundary Layer Theory*, Teorijska i primenjena mehanika, V. **4**, S. 139—163 (1978).

[3] Chan, Y. Y., *Loitsanskii's Method for Boundary Layers with Suction and Injection*, AIAA Journal, Vol. **7**, № **3**, (1969).

[4] Шишкина, Л. Г., *Двухпараметрическое решение уравнений ламинарного слоя на проницаемой поверхности*. Известия АН СССР, Мех. жидкости и газа, Но. **6** (1973).

[5] Симуни М. Л., Терентиев Н. М., *Численое решение уравнений однопараметической теории пограничного слоя*, Труды ЛПИ № **248**. стр. 56—58, (1965).

[6] Abbot, J. H., Von Doenhoff, A. E., *Theory of Wing Section*, „Dover Publ.", New York, (1959).

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПОРИСТЫХ СТЕНКАХ ПОСТОЯННОЙ НАГРЕТОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ОБТЕКАНИИ

Резюме

В работе рассматривается температурный пограничный слой при плоском ламинарном несжимаемом обтекании стенки постоянной нагретости с непрерывно распределенными порами в поверхности, через которые производится отсос или вдув жидкости. Для разрешения этой задачи применяется многопараметрический метод Л. Г. Лойцянского [1] усовершенствованный в работе [2]. Универсальные решения, определенные нумерическим способом для двух чисел Прантля ($Pr = 1,0$ и $Pr = 0,72$), и некоторых значений параметра Λ, характеризующего интенсивность отсоса или вдува (в области $\Lambda = 0,4 \div -0,4$), используются для расчета температурного пограничного слоя на цилиндре сечения круга и иа стандардном аэропрофиле с обозначением NACA 0010-34.

Dr Viktor Saljnikov
11000 Beograd, Nevesinjska 17

Mr Sultana Tupurkovska-Poposka
91000 Skopje, Samoilova 106

Зборник радова Математичкоі института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l' Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

PRIMEDBA O IZRAČUNAVANJU MEĐUSOBNE DALJINE DVAJU PLANETOIDA PRI REGULARNOM PROKSIMITETU

J. L. Simovljević

Prikazuje se postupak za približno izračunavanje poremećajnog dejstva jednog planetoida na njegovu daljinu do drugog pri regularnom proksimitetu ovih nebeskih tela. Postupak je ilustrovan numeričkim primerima.

U nizu radova J. P. Lazovića, M. Kuzmanoskog i u nekoliko radova pisca ovih redova posvećenih proksimitetima planetoida usvajano je da se dovoljno tačan iznos međusobne daljine tela tokom pojave, to jest $\rho=|\boldsymbol{\rho}|=|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}|$, može dobiti pomoću heliocentričnih položaja poremećajnog ($\boldsymbol{r}_i$) i poremećenog ($\boldsymbol{r}$) planetoida, bez uzimanja u obzir bilo kakvih poremećaja u kretanju ovih tela; dakle računom sa neporemećenim elementima kretanja oba planetoida. I to kako zbog verovatno malog iznosa ovih poremećaja, tako i zbog kratkotrajnosti pojave. To izračunavanje je još najjednostavnijevršeno napr. u [2] i [3] pomoću Lagrange-ovih redova za $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{r}_i$, koji daju

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_p+\boldsymbol{V}_p\,\tau+\dots, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\varrho}_p=\boldsymbol{r}_{ip}-\boldsymbol{r}_p,\quad \boldsymbol{V}_p=(d\boldsymbol{\rho}/dt)_{t=t_p}=\boldsymbol{v}_{ip}-\boldsymbol{v}_p,\quad \tau=k(t-t_p),$$

gde indeks p označava proksimitetsku vrednost promenljive. Pri kratkotrajnim zbližavanjima visokog reda linearna zavisnost relativnog vektora položaja $\boldsymbol{\varrho}$ od vremena je takoreći redovna pojava, pa su takvi proksimiteti u [3] i nazvani regularnim.

Međutim, zbog potrebe vrlo preciznog računa u ovakvim konkretnim slučajevima, pokušaćemo ovde da ocenimo dejstvo poremećaja na međusobnu daljinu ρ para planetoida pri njihovom proksimitetu, tek toliko da proverimo opravdanost naših ranijih pojednostavljenja.

1. Diferencijalna jednačina heliocentričnog poremećenog kretanja planetoida mase m i vektora položaja $\mathbf{r}$ je

$$\frac{d^2\,\mathbf{r}}{dt^2}=-k^2(M+m)\,r^{-3}\,\mathbf{r}+k^2\sum_{j=1}^{n}m_j\,(\rho_j^{-3}\,\boldsymbol{\rho}_j-r_j^{-3}\,\mathbf{r}_j)+$$

$$+k^2\,m_i\,(\rho^{-3}\,\boldsymbol{\rho}-r_i^{-3}\,\mathbf{r}_i), \tag{2}$$

gde je M masa Sunca, m_j i $\mathbf{r}_j$ masa i vektor položaja velike planete, a m_i i $\mathbf{r}_i$ masa i vektor položaja »poremećajnog« planetoida. Diferencijlana jednačina njegogovog kretanja, sa istim oznakama, je

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -k^2(M+m_i)r_i^{-3}\mathbf{r}_i + k^2\sum_{j=1}^{n} m_j(\rho_{ij}^{-3}\rho_{ij} - r_j^{-3}\mathbf{r}_j) - k^2 m(\rho^{-3}\rho + r^{-3}\mathbf{r}). \quad (3)$$

Relativni vektori položaja u (2) i (3) su

$$\rho = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}, \quad \rho_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, \quad \rho_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}. \quad (4)$$

Pretpostavili smo, dakle, da se svaki planetoid iz uočenog para kreće oko Sunca pod poremećajnim dejstvom velikih planeta i onog drugog planetoida u paru. Iz jednačina (2), (3) i (4) izvodimo diferencijalnu jednačinu za relativni vektor položaja poremećajnog planetoida u odnosu na poremećeni:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -k^2(m+m_i)\rho^{-3}\rho + \mathbf{G}, \quad (5)$$

$$\mathbf{G} = k^2 M(r^{-3}\mathbf{r} - r_i^{-3}\mathbf{r}_i) + k^2\sum_{j=1}^{n} m_j(\rho_{ij}^{-3}\rho_{ij} - \rho_j^{-3}\rho_j).$$

Tako vidimo da je relativna putanja poremećajnog planetoida oko poremećenog obvojnica oskulacionih Keplerovih putanja, konusnih preseka, koji bi proizilazili iz

$$\frac{d^2\rho_K}{dt^2} = -k^2(m+m_i)\rho_K^{-3}\rho_K,$$

i odgovarajućih početnih uslova kretanja. Problem tog relativnog kretanja mogao bi se izučavati, mutatis mutandis, kao kretanje tela mase m_i oko tela mase m, pod dejstvom njegove privlačne sile i dodatnog poremećajnog ubrzanja $\mathbf{G}$; dakle, kao u klasičnom računu poremećaja. Međutim, odmah primećujemo da bi tu, u opštem slučaju, poremećaji bili veoma veliki: oskulacione putanje bi se brzo i znatno menjale, pa ne bi mogle biti ni grube aproksimacije stvarne putanje u iole dužem vremenom intervalu oko epohe oskulacije.

Izuzetak može biti upravo pri samom proksimitetu. Tada zbog male međusobne daljine planetoida ϱ oba člana u $\mathbf{G}$ imaju minimalnu vrednost, dok prvi član desne strane u (5) ima upravo maksimalnu vrednost. Od stvarnog iznosa ovih veličina u konkretnom slučaju zavisiće »stabilnost« oskulacione putanje izvedene za neku epohu vrlo blisku epohi proksimiteta t_p. — Dodajmo još da je uticaj velikih planeta utoliko manji, ukoliko je proksimitet višeg reda.

Pri efektivnom numeričkom integraljenju diferencijalne jednačine (5) ne bi bilo nikakvih načelnih teškoća. To bi bio, ustvari, samo formalno sažetiji postupak nalaženja preciznih položaja oba planetoida numeričkim integraljenjem njihovih diferencijalnih jednačina kretanja (2) i (3).

2. Prirodno je, međutim, da potražimo koliko bi se tačno ρ, koje proizilaz iz (5), razlikovalo od približnog,

$$\rho_K = r_{iK} - r_K, \quad (6)$$

to jest dobivenog iz pretpostavke o neporemećenom kretanju oba planetoida u vreme njihovog proksimiteta,

$$\frac{d^2 r_{iK}}{dt^2} = -k^2 (M+m_i) r_{iK}^{-3} \mathbf{r}_{iK}, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_K}{dt^2} = -k^2 (M+m) r_K^{-3} \mathbf{r}_K, \tag{7}$$

koju smo u ranijim radovima stalno usvajali. Stavimo li da je

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{iK} + \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_K + \mathbf{R},$$

gde su $\mathbf{R}_i$ i $\mathbf{R}$ dejstva poremećaja na heliocentrične položaje tela, jednačine (5), (6) i (7) će nas dovesti do

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta \rho = -k^2 (m+m_i) \rho^{-3} \rho + k^2 \sum_{j=1}^{n} m_j (\varrho_{ij}^{-3} \rho_{ij} - \varrho_j^{-3} \rho_j) +$$

$$+ k^2 M (\mathbf{r}^{-3} \mathbf{r} - r_K^{-3} \mathbf{r}_K) - k^2 M (r_i^{-3} \mathbf{r}_i - r_{iK}^{-3} \mathbf{r}_{iK}). \tag{8}$$

Ovde smo stavili da je

$$\Delta \rho = \rho - \rho_K = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}$$

traženo dejstvo poremećaja na relativni vektor položaja planetoida, a zanemarili smo mase ovih malih nebeskih tela m i m_i u zbiru sa masom Sunca M.

I ovde, dakle, možemo očekivati da pri proksimitetu visokog reda najveći doprinos daje prvi član desne strane u (8).

3. Apstrahujmo, stoga, dejstvo velikih planeta u vremenom intervalu »dinamičkog proksimiteta« [4], ograničenog trenucima $-t_0$ i t_0, simetričnim u odnosu na trenutak proksimiteta t_p, pa potražimo promenu $\Delta\rho$, izazvanu samo gravitacionim dejstvom poremećajnog planetoida na poremećeni. Ograničimo se, na početku rada, na »račun prvog reda«, tj. zanemarimo na desnoj strani (8) razliku između poremećenih i neporemećenih položaja tela. Takav zadatak je onda opisan diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta \rho = -k^2 (m+m_i) \rho^{-3} \rho, \tag{9}$$

koja proizilazi iz (8). Dalje ćemo pretpostaviti da se m može da zanemari u zbiru sa m_i i da vreme izražavamo u srednjim Gausovim danima, $\tau = k(t-t_p)$, računajući od trenutka proksimiteta. Tako (9) postaje

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Delta \rho = -m_i \rho^{-3} \rho. \tag{10}$$

Donja granica integraljenja ove diferencijalne jednačine neka bude određeni (ili ocenjeni) trenutak τ_0 početka dinamičkog proksimiteta; s obzirom na sve naše ranije pretpostavke možemo usvojiti da su početni uslovi integraljenja

$$(\Delta \rho)_{\tau=\tau_0} = 0, \quad (d\Delta\rho/d\tau)_{\tau=\tau_0} = 0.$$

Diferencijalnu jednačinu (10) ćemo integraliti na sličan način kao odgovarajuće u [3]. Neka je ispitivani proksimitet regularan; tada iz tog uslova (1) i uslova proksimiteta $(\rho_p\, V_p)=0$ proizilazi da je

$$\rho=V_p\, u,\quad r=(c^2+\tau^2)^{1/2},\quad c=\rho_p\, V_p^{-1}.$$

Unesemo li ovo i (1) u (10), dobićemo da je

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Delta\rho=(\mathbf{A}+\mathbf{B}\,\tau)\,u^{-3},$$

sa konstantama

$$\mathbf{A}=-m_i\, V_p^{-3}\,\rho_p,\quad \mathbf{B}=-m_i\, V_p^{-3}\,\mathbf{V}_p.$$

Integraljenje u granicama od τ_0=const. do τ daje

$$\frac{d}{d\tau}\Delta\rho=(c^{-2}\,\mathbf{A}\,\tau-\mathbf{B})\,u^{-1}+\mathbf{K}_1,$$

$$\mathbf{K}_1=-(c^{-2}\,\mathbf{A}\,\tau_0-\mathbf{B})\,u_0^{-1}.$$

Ponovno integraljenje u istim granicama dovodi do

$$\Delta\rho=c^{-2}\,\mathbf{A}\,u-\mathbf{B}\,\ln|u+\tau|+\mathbf{K}_1\,\tau+\mathbf{K}_2, \tag{11}$$

$$\mathbf{K}_2=(\tau_0^2\, u_0^{-1}-u_0)\,c^{-2}\,\mathbf{A}+(\ln|u_0+\tau_0|-\tau_0\,u_0^{-1})\,\mathbf{B}.$$

Ovaj konačni rezultat (11) poslužiće nam da ocenimo poremećajno dejstvo planetoida mase m_i na njegovu daljinu ρ od planetoida zanemarljivo male mase m tokom njihovog regularnog proksimiteta.

4. Za ilustrovanje ranije dobivenih rezultata najčešće smo koristili f'ktivni proksimitet planetoida (205) **Martha** (poremećajni, sa pretpostavljenom masom $m_i=10^{-13}$ mase Sunca) i (992) **Swasey,** tj. karakteristike proksimiteta njihovih putanja. U tom slučaju smo imali da je

$$\rho=\rho_p+\mathbf{V}_p\tau=\begin{cases}-0.0000\ 0313-0.0001\ 0233\ \tau,\\ +0.0000\ 0701+0.0568\ 3298\ \tau,\ \text{(ekliptika, 1950.0)}\\ +0.0000\ 3713-0.0108\ 5231\ \tau,\end{cases}$$

što će reći

$$\rho_p=0.0000\ 3792,\quad V_p=0.0578\ 5992,\quad c=0.0006\ 5538.$$

Donja granica integraljenja neka je opet 0.15 dana pre proksimiteta, dakle $\tau_0=$ $=-0.0025\ 8031$. Zato će konstante integraljenja u (11) biti

$$10^{12}\,\mathbf{K}_1=(+3747,\ -19374,\ -41150),\quad 10^{12}\,\mathbf{K}_2=(0,+249,-40).$$

Potom račun po (11) daje $\Delta\rho$, sa iznosima u Tablici 1.

Rezultat je očigledan. S jedne strane vidimo da su poremećajni iznosi osetno ispod tačnosti s kojom računamo koordinate tela ($\pm 10^{-8}$), pa su naše pretpostavke o zanemarljivosti toga dejstva bile ovde opravdane (a i izvođenje samo »računa prvog reda«). S druge strane, nađene promene imaju »sekularni« tok. Svojim privlačnim dejstvom planetoid (205) **Martha** je povećao longitudu uzlaznog čvora planetoida (992) **Swasey** za oko 0''.088, a nagib njegove putanjske ravni za oko 0''.025 (kako smo našli, različitim postupcima, u [2], [3] i [5]). Ta nova putanja se vremenom sve više udaljava od one s kojom smo račun započeli, što se manifestuje u porastu promene $\Delta\rho$.

Tablica 1

t	$10^{12}\,\Delta\rho$			$10^{12}\,\lvert\Delta\rho\rvert$
−0.15	0	0	0	0
−0.12	0	0	0	0
−0.09	0	+ 3	0	3
−0.06	+ 1	7	− 5	9
−0.03	1	16	11	19
$t_p =$ 0.00	3	40	28	49
+0.03	5	39	61	73
0.06	9	39	103	111
0.09	12	37	147	152
0.12	16	30	191	194
+0.15	+20	+22	−236	238

Zanimljivo će biti da ovako ukratko ispitamo poremećaje u međusobnoj daljini planetoida (215) **Oenone** i (1851) 1950 VA, pri proksimitetu njihovih putanja, dosada najtešnjem poznatom [1]. U tom slučaju je

$$\rho=\rho_p+V_p\,\tau=\begin{cases}+0.0000\ 0006-0.0077\ 7506\ \tau,\\ +0.0000\ 0002-0.0807\ 9443\ \tau,\ \text{(ekliptika, 1950.0)}\\ -0.0000\ 0361-0.0021\ 4573\ \tau,\end{cases}$$

dakle

$$\rho_p=0.0000\ 0361,\qquad V_p=0.0811\ 9603,\qquad c=0.0000\ 4446.$$

Integracione konstante su:

$$10^{12}\ K_1=(-3552,\ +20003,\ +341037),\quad 10^{12}\ K_2=(-18,-188,-6).$$

Opet je pretpostavljeno da je $m_i=10^{-13}$. Poremećaji u vremenom intervalu dinamičkog proksimiteta su dati u Tablici 2.

Proksimitetska daljina tela je deset puta manja no u prethodnom slučaju, a poremećaji u ρ su ostali još uvek zanemarljivo mali. Sad se radi o »bržem« prok simitetu vrlo visokog reda: šest puta veći iznos poremećaja $|\Delta\rho|$ postignut je za četiri puta kraće vreme posle trenutka minimalne daljine. Promene putanjskih elemenata planetoida (1851) 1950 *VA* nisu zanemarljive: prema [6] dostižu —5''.0 u longitudi uzlaznog čvora i +4''.8 u nagibu putanjske ravni (svedeno na navedenu masu poremećajnog tela; apsolutni iznosi poremećajnih promena ostalih elemenata su manji od 0''.2). Vidimo da i ovolike promene putanjskih elemenata ne mogu uticati na ρ u onako kratkom vremenom intervalu oko trenutka proksimiteta. One će doći do izražaja tek kasnije, kada se nova putanja bude dovoljno udaljila od stare.

Tablica 2

t	$10^{12}\,\Delta\rho$				$10^{12}\lvert\Delta\rho\rvert$
—0.04	0	0	0		0
—0.03	9	0	0		0
—0.02	0	— 3	+ 1		3
—0.01	0	9	1		9
$t_p =$ 0.00	— 3	37	13		39
+0.01	8	65	117		134
0.02	10	72	232		243
0.03	13	75	350		358
+0.04	—14	—76	+467		473

Ova dva primera i njihova analiza nam sugerišu da osetne promene u međusobnoj daljini ρ (i eventualnu potrebu za »računom drugog reda«) možemo očekivati samo pri većoj masi poremećajnog planetoida i dužem trajanju proksimiteta. No u svakom slučaju obrazac (11) omogućava dovoljno tačnu ocenu tog poremećajnog dejstva. I to na neposredniji i brži način, nego da sa prethodno nađenim promenama oskulacionih elemenata poremećenog planetoida (ma i onako jednostavno kao u [5]) izvodimo odgovarajuće promene u $\mathbf{r}$, odnosno u ρ.

Literatura

[1] Lazović J. — Kuzmanoski M., *Minimum distances of the quasicomplanar asteroid orbits*, Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd **8** (1978), 47—54.

[2] Simovljević J. L., *Prilog računu poremećaja putanja planetoida u proksimitetu;* Glas CCCXI SANU, Prir.—mat. **44** (1979), 7—22.

Simovljevitch J. L., *Further note on the calculus of perturbations of asteroid orbits during prohimity*, Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd **9** (1979), 71—74.

[3] Simovljevitch J. L., *Approximate perturbation methods for regular asteroid proximities*, Acta Astr. **29** (1979) 445—453.

[4] Simovljevitch J. L., *Duration of quasicomplanar asteroids regular proximities*, Bull. LXXVI Acad. Serbe Sci. Arts, Math. **11** (1981), 33—37.

[5] Simovljevitch J. L., *Estimate of perturbation effects of asteroid orbits during proximity*, Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd **9** (1979), 75—78.

[6] Lazović J. — Kuzmanoski M., *Perturbing effects of the astaroid (215) Oenone on the asteroid (1851) 1950 VA during their proximity*, Publ. Dept. Astr. Univ. Beograd **9** (1979), 63—69.

A NOTE ON THE DETERMINATION OF THE DISTANCE BETWEEN TWO ASTEROIDS DURING THEIR REGULAR PROXIMITY

Summary

An approximate method is developed by the aid of which one can determine the perturbative action of one asteroid upon his distance to the other one, during the regular proximity of these celestial bodies. The final effect appears to be not sensible during a time interval of »dynamical proximity« inferior to one day, if the mass of the perturbing asteroid is of the order of 10^{-13} Sun's mass and the proximity distance is of the order of 0.000005 a. u.

Prof. J. L. Simovljević
Prirodno—matematički fakultet, 11000 Beograd
Studentski trg 16/IV

Зборник радова Математичког института. Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l' Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

NEIZOTERMNO STRUJANJE ZAGREJANE TEČNOSTI

Mane Šašić

Uvod

Zagrejana tečnost odaje toplotu okolini za vreme strujanja i zbog toga joj temperatura opada nizvodno. Viskoznost joj se povećava u smeru strujanja i koeficijent trenja nije više konstantan duž cevovoda. Određivanje pada pritiska usled trenja veoma je složeno, naročito kad se radi o turbulentnom strujanju pri niskim temperaturama okoline. Literatura nudi obrasce za izračunavanje pada pritiska usled trenja pri promenljivoj temperaturi tečnosti, ali samo za ona strujanja kod kojih koeficijent trenja zavisi jedino od Reynolds-ovog broja. To su laminarna strujanja i turbulentna strujanja u hidraulički glatkim cevima. Za neizotermna turbulentna strujanja, kod kojih koeficijent trenja zavisi i od Re broja i od relativne hrapavosti cevovoda (oblast iznad prave koja u dijagramu λ-Re označava Blasius-o zakon trenja), ili samo od relativne hrapavosti cevovoda (oblast izrazito turbulentnog strujanja), postojeća literatura ne daje obrasce za određivanje pada pritiska usled trenja čak ni u najprostijim slučajevima kad se može uzeti da je proračunska temperatura okoline jednaka nuli. Cilj ovog rada je da se prouče baš ovi poslednji slučajevi neizotermnih strujanja zagrejane tečnosti.

Pomoćne veličine

Izjednačenjem količine toplote koju zagrejana tečnost predaje cevovodu za vreme strujanja i one koja istovremeno prolazi kroz cevovod na okolinu, dobija se zakon promene temperature tečnosti duž cevovoda

$$t = t_a + (t_1 - t_a)\, e^{-ax}; \quad ax = \frac{kD_m \pi\, x}{G\, c_n}. \tag{1}$$

Ovde je t_a (°C) temperatura okoline, t_1 (°C) srednja temperatura tečnosti u početnom poprečnom preseku cevovoda, k (J/m^2 sK) koeficijent prolaza toplote kroz cevovod, D_m (m) njegov srednji prečnik, G (kg/s) maseni protok tečnosti i c_n (J/kg K) njena specifična toplota. Za $x=l$ iz obrazsca (1) dobija se $t=t_2$, temperatura tečnosti na kraju cevovoda. Pod srednjom temperaturom tečnosti duž cevovoda podrazumevaće se vrednost

$$t_m = \frac{1}{l}\int_0^l t\, dx = t_a + (t_1 - t_a)\frac{1 - e^{-al}}{al}. \tag{2}$$

Promena kinematičke viskoznosti tečnosti od njene temperature prikazuje se u obliku

$$\nu = c/t^m \tag{3}$$

U njemu se konstante c i m određuju merenjem viskoznosti na dvema temperaturama koje treba da budu između temperatura t_1 i t_2. Takođe se korišćenjem toplotnog bilansa i obrasca (3) može doći do odnosa kinematičkih viskoznosti ν_z u blizini zida cevovoda i njene srednje vrednosti ν u odgovarajućem poprečnom preseku cevovoda

$$\frac{\nu_z}{\nu}=\left(\frac{t}{t_z}\right)^m\approx\left(\frac{\alpha_i D_i}{\alpha_i D_i-kD_m}\right)^m. \tag{4}$$

Ovde je α_i (J/m^{2}sK) koeficijent prelaza toplote sa tečnosti na cevovod i $D_i\,(m)$ unutrašnji prečnik cevovoda.

Postavka i rešenje problema.

Diferencijalna jednačina koja određuje pad pritiska usled trenja za vreme strujanja zagrejane tečnosti u cevovodu kružnog preseka glasi

$$-dp=\frac{\lambda\rho v^2}{2\,D_i}\left(\frac{\nu_z}{\nu}\right)^b dx=\frac{8\,\rho\lambda\,q^2}{\pi^2\,D_i^5}\left(\frac{\nu_z}{\nu}\right)^b dx. \tag{5}$$

U ovoj jednačini je ρ (kg/m^3) gustina tečnosti na srednjoj temperaturi (2), λ koeficijent trenja, v(m/s) srednja brzina strujanja, q (m^3/s) zapreminski protok, $0{,}14>b>>0{,}10$ koeficijent koji uzima u obzir deformaciju profila brzine zbog promenljive temperature (veće vrednosti odgovaraju strujanjima kod kojih λ zavisi i od Re broja i od relativne hrapavosti cevovoda, a manje vrednosti strujanjima kod kojih λ uglavnom zavisi od relativne hrapavosti cevovoda). Može se kao srednja vrednost uzimati $b=0{,}12$.

Za posmatrane oblasti turbulentnog strujanja, najprihvatljiviji obrazac za koeficijent trenja je obrazac Altšula

$$\lambda=0{,}1\left(\frac{1{,}46\,\delta}{D_i}+\frac{100}{Re}\right)^{0{,}25}, \tag{6}$$

u kome je δ apsolutna hrapavost cevovoda (ona je kod ovih strujanja uvek veća od debljine graničnog sloja). Vidi se da obrazac (6) prelazi u obrazac Blasius-a kad $\delta\to 0$ (tj. kad debljina graničnog sloja postane veća od apsolutne hrapavosti), koji važi za hidraulički glatke cevi. Prema [1] može se u pogonskim uslovima uzeti da je

$$\frac{t_a}{t}=\frac{1}{2}\left(\frac{t_a}{t_1}+\frac{t_a}{t_2}\right)=\text{const.}=B, \tag{7}$$

pa se iz (1) dobija odnos temperatura [2]

$$\frac{t_1}{t}=B+(1-B)\,e^{ax}, \tag{8}$$

i, zatim, iz (3) vrednost viskoznosti na temperaturama t i t_1

$$\nu=\nu_1\,[B+(1-B)\,e^{ax}]^m. \tag{9}$$

Najzad, kad se u Re broju viskoznost ν zameni izrazom (9), iz (6) sleduje

$$\lambda=0{,}1\,\{k_1+k_2\,[B+(1-B)\,e^{ax}]^m\}^{0{,}25}, \tag{10}$$

gde su

$$k_1=\frac{1{,}46\,\delta}{D_i};\quad k_2=\frac{25\,D_i\,\pi\nu_1}{q}. \tag{11}$$

Zamenom (4) i (10) u diferencijalnu jednačinu (5), dobija se posleintegriranja

$$\Delta p = \frac{0{,}8\,\rho\,q^2}{\pi^2 D_i^5}\left(\frac{\alpha_i D_i}{\alpha_i D_i - kD_m}\right)^{mb} \cdot J, \tag{12}$$

gde je vrednost integrala

$$J = \int_0^l \{k_1 + k_2\,[B + (1-B)\,e^{ax}]^m\}^{0{,}25}\,dx. \tag{13}$$

Tačno rešenje integrala (13) može da se dobije samo kad je $B=0$ tj. kad se može uzeti da je proračunska temperatura okoline jednaka nuli ($t_a=0°C$). U tom slučaju je (sa oznakom: $k_1/k_2=c_0$)

$$\begin{aligned} J = \frac{4\,k_2^{0{,}25}}{ma}\Bigg\{&(c_0+e^{mal})^{0{,}25} - (c_0+1)^{0{,}25} + \\ &+ \frac{c_0^{0{,}25}}{4}\ln\frac{(c_0+e^{mal})^{0{,}25} - c_0^{0{,}25}}{(c_0+e^{mal})^{0{,}25} + c_0^{0{,}25}}\,\frac{(c_0+1)^{0{,}25}+c_0^{0{,}25}}{(c_0+1)^{0{,}25}+c_0^{0{,}25}} - \\ &- \frac{c_0^{0{,}25}}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{c_0+e^{mal}}{c_0}\right)^{0{,}25} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{c_0+1}{c_0}\right)^{0{,}25}\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Nije teško pokazati da je

$$\lim_{k_1\to 0} J = k_2^{0{,}25}\,\frac{e^{0{,}25\,mal}-1}{0{,}25\,ma},$$

i da obrazac (12) zajedno sa (13) tada prelazi u poznati obrazac [3] koji određuje pad pritiska usled trenja za vreme neizotermnog strujanja zagrejane tečnosti u hidraulički glatkim cevima (Blasius-ov zakon trenja)

$$\Delta p = 0{,}241\,\frac{\rho\nu_l^{0{,}25}\,q^{1{,}75}\,l}{D_i^{4{,}75}}\left(\frac{\alpha_i D_i}{\alpha_i D_i - kD_m}\right)^{mb}\frac{e^{0{,}25\,mal}-1}{0{,}25\,mal},$$

u kome je $b=\frac{1}{7}\approx 0{,}14$. Kad je $B\neq 0$ tj. kad se mora uzeti u proračunima $t_a\neq 0°C$ (a to su, ustvari, i češći slučajevi u praksi), tada se može naći samo približno ali dovoljno tačno rešenje integrala (13). Postupak je sledeći. Najpre se pomoću smene $y=\ln[B+(1-B)\,e^{ax}]$, integral (13) svede na sledeći oblik

$$J = \sum_{n=0}^{s}\frac{B^n}{a}\int_{y_1}^{y_2}(k_1+k_2\,e^{my})^{0{,}25}\,e^{-ny}\,dy, \tag{15}$$

u kome su granice $y_1=0$; $y_2=\ln[B+(1-B)\,e^{al}]$.
Ponovnom smenom $c_0+e^{my}=z^4$, se integral (15) svodi na

$$J = \frac{4\,k_2^{0{,}25}}{a}\sum_{n=0}^{s}\frac{B^n}{m-4n}\left\{\frac{z_2}{[B+(1-B)\,e^{al}]^n} - z_1 - c_0\int_{z_1}^{z_2}(z^4-c_0)^{-\frac{m+n}{m}}\,dz\right\}, \tag{16}$$

sa ovim granicama

$$z_1=(c_0+1)^{0{,}25};\quad z_2=\{c_0+[B+(1-B)\,e^{al}]^m\}^{0{,}25}. \tag{17}$$

Naime, preostali integral u izrazu (17) može da se reši u konačnom obliku samo za $n=0$. To je prvi član zbira na desnoj strani izraza (16) i on glasi

$$J_0=\frac{4\,k_2^{0,25}}{ma}\left\{(z_2-z_1)+\frac{c_0^{0,25}}{4}\ln\frac{z_1+c_0^{0,25}}{z_1-c_0^{0,25}}\cdot\frac{z_2-c_0^{0,25}}{z_2+c_0^{0,25}}-\right.$$
$$\left.-\frac{c_0^{0,25}}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z_2^4}{c_0}\right)^{0,25}-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z_1^4}{c_0}\right)^{0,25}\right]\right\}. \tag{18}$$

Za $n=1, 2, \ldots, s$ može da se napiše samo približna vrednost preostalog integrala u izrazu (16), tako da se konačno dobija

$$J=J_0+\frac{4\,k_2^{0,25}}{a}\sum_{n=1}^{s}\frac{B^n}{m-4\,n}\left\{\frac{z_2}{[B+(1-B)\,e^{al}]^n}-z_1-\right.$$
$$\left.-c_0\frac{z_2-z_1}{6}\left[(z_1^4-c_0)^{-\frac{m+n}{m}}+(z_m^4-c_0)^{-\frac{m+n}{m}}+(z_2^4-c_0)^{-\frac{m+n}{m}}\right]\right\}, \tag{19}$$

gde je $z_m=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$. Očigledno je da je $J=J_0$ kad je $B=0$ ($t_a=0°C$) i da tada J_0 definisano izrazom (18) prelazi u (14). Dalja analiza izraza(19) pokazuje da je svaki sledeći integral J_n ($n=1, 2, \ldots, s$) posle J_0 oko 10 puta manji od prethodnog jer je $|B|<1$. Primena obrasca (19) kao sastavnog dela rešenja (12) pokazuje da je greška manja od 2% kad se uzme $J=J_0+J_1$ umesto, na primer, $J=J_0+J_1+J_2+J_3$. Ovde treba još napomenuti da će uvek biti $|B|<1$ (a ovo je potreban uslov) kad god je $|t_a|<t_1$ i $|t_a|<t_2$. Da bi rešenje (12) sa integralom (19) važilo i kad je $|B|>1$ treba umesto izraza (3) i (7) koristiti sledeće izraze za viskoznost i temperaturu

$$\nu=C_1/T^{m_1},\qquad \frac{T_a}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{T_a}{T_1}+\frac{T_a}{T_2}\right)=\text{const.}=B_1.$$

Ovde su: $T=273+t$ i $Ta=273+t_a$. Razume se, u ovom slučaju u integralu (19) svuda treba staviti m_1 umesto m i B_1 umesto B. Sigurno je da će sad biti $]B_1]<1$, što je dovoljan uslov da izraz (19) ima sva svojstva kao i u prethodnom slučaju.

Literatura

[1] Яблонский В. С., и др., *Проектирование, эксплуатация и ремонт нефтепродуктопроводов*. „Недра" Москва 1965.

[2] Šašić, M., *Određivanje pada pritiska usled trenja pri neizotermnom laminarnom strujanju zagrejane tečnosti*, Hidraulika i pneumatika №. **10,** 1970.

[3] Vušković, I., *Transport cevima*. Skriptarnica saveza studenata Mašinskog fakulteta. Beograd 1965.

NONISOTHERMAL FLOW OF HEATED LIQUID

Summary

Taking into consideration the influence of temperature on the viscosity and the friction coefficient of liquids during nonisothermal flow in pipes, the correlation between the parameters at the beginning and at the end of flow stream is obtained for turbulent flow regime. It is possible to determine, from this correlation, the flow parameters at the beginning of pipeline if their values at the end of pipeline were known or vice versa.

Prof. Dr Mane Šašić, Mašinski fakultet, 11000 Beograd

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), (1984).
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

ПРИЛОЗИ ИСТОРИЈИ МЕХАНИЧКИХ НАУКА КОД СРБА IV

ПОЈАВА ГРАФОСТАТИКЕ

Д. Трифуновић

„У природи, у свету око нас све се непрестано мења и у тој сталној трансформацији — развијању и опадању — ништа се не догађа без нечега што је постојало пре тога и што је било повод за настајање нових појава и нових ствари.“

академик *др Т. П. Анђелић*, 1976. г.

У нашој литератури мало је студија о развитку појединих научних дисциплина механике, те одатле и графостатике. О појави графостатике код нас и њеном развитку забележено је у раду [7] са непотпуном и недовољном фактографијом. У нашим радовима [4—6] објавили смо неке појединости о појави графостатике.

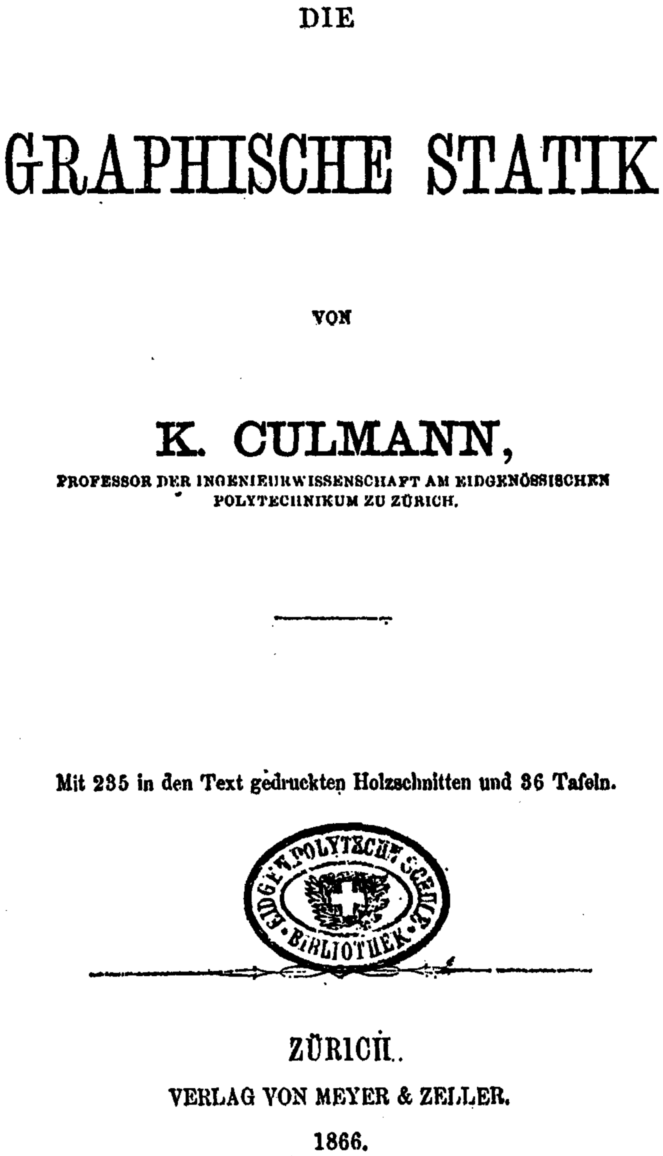
Извори за обраду ове теме нађени су у Архиву Србије, радовима [8, 9] и Архиву Политехничке школе у Цириху.

Покушај са Кулмановом графостатиком

Посредством државних питомаца (стипендиста) који су се дошколавали или потпуно школовали у иностранству, у нашу средину су дошле многе новине у науци и техници. Рецимо, колико су огромни преломи настали у математичким наукама доласком Михаила Петровића (1868—1943) са студија у Паризу (1889—1894)[1] или у географији појавом Јована Цвијића (1864—1927). Државни питомац за техничке науке (грађевинарство) Ђура Љочић (1843—1915) на крају својих студија у Цириху 1869. г. предузима кораке за увођење новог предмета механике на Великој школи у Београду — *графостатике* и рачунара логаритмара (шибера) за потребе статичких прорачуна. С пролећа исте године, Љочић пише министарству просвете и образлаже свој подухват. „Господину министру просвете. Овом приликом шиљем Господину министру два своја

[1] О Михаилу Петровићу видети књиге под [10, 11, 12].

рада: Графијско рачунање; Упутство за рачуњачу. Уз то шиљем један комад рачуњаче као екземплар.


DIE

GRAPHISCHE STATIK

VON

K. CULMANN,

PROFESSOR DER INGENIEURWISSENSCHAFT AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

Mit 235 in den Text gedruckten Holzschnitten und 36 Tafeln.

ZÜRICH.

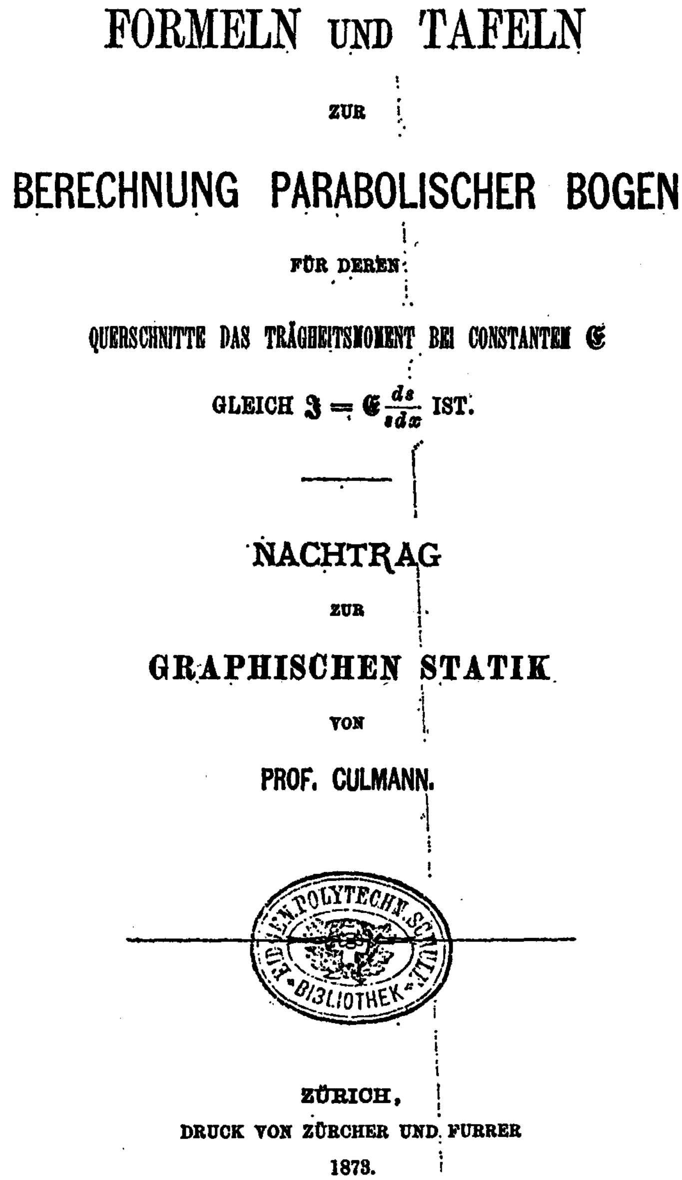
VERLAG VON MEYER & ZELLER.

1866.

Сл. 1. — Једна од првих објављених графостатика. — Насловна страна Кулмановог удбеника на Циришкој политехници (1866) којег је преводио Ђура Љочић за потребе Велике школе у Београду

Графијско рачунање. Да ово на српски израдим побуда је ова: *Графијска Штатика*, коју сам у Цириху на Политехници учио, јест врло нова, а и врло корисна наука. Корист и практичност њена, тако је голема, да ће сви људи техничке струке, свуда, место рачунања, употребити конштрукцију, којом се много брже, удобније и боље до цели долази.

С обзиром на текничко стање у нас, с обзиром на то, *да и нама ваља найред да коракнемо*, то се и ја одважих, да ову нову науку, мало по мало на


FORMELN UND TAFELN

ZUR

BERECHNUNG PARABOLISCHER BOGEN

FÜR DEREN

QUERSCHNITTE DAS TRÄGHEITSMOMENT BEI CONSTANTEM $\mathfrak{E}$

GLEICH $\mathfrak{J} = \mathfrak{E}\frac{ds}{sdx}$ IST.

NACHTRAG

ZUR

GRAPHISCHEN STATIK

VON

PROF. CULMANN.

ZÜRICH,
DRUCK VON ZÜRCHER UND FURRER
1873.

Сл. 2. — Насловна страна допуне Кулмановој графостатици из 1873. г.

српски израдим. Па као што је графијско рачунање прва помоћ графијској штатици, без кога је немогуће разумети ју, то и ја најпре тај део израдих, а доцније, надам се да даље наставим.

Упуство за рачуњачу. Одкако се сам извежбах у рачунању са рачуњачом, увидех угодност и уштеду у времену, па ме то и побуди, да и поство ово на српски израдим.

Ја се надам, да сам јасно написао, тако, да се, по њему, може лако научити рачунати са рачуњачом. Но ако се варам, то ћу у неколико лекција, кад се вратим, у стању бити, сваког научити да рачуњачом рачуна.

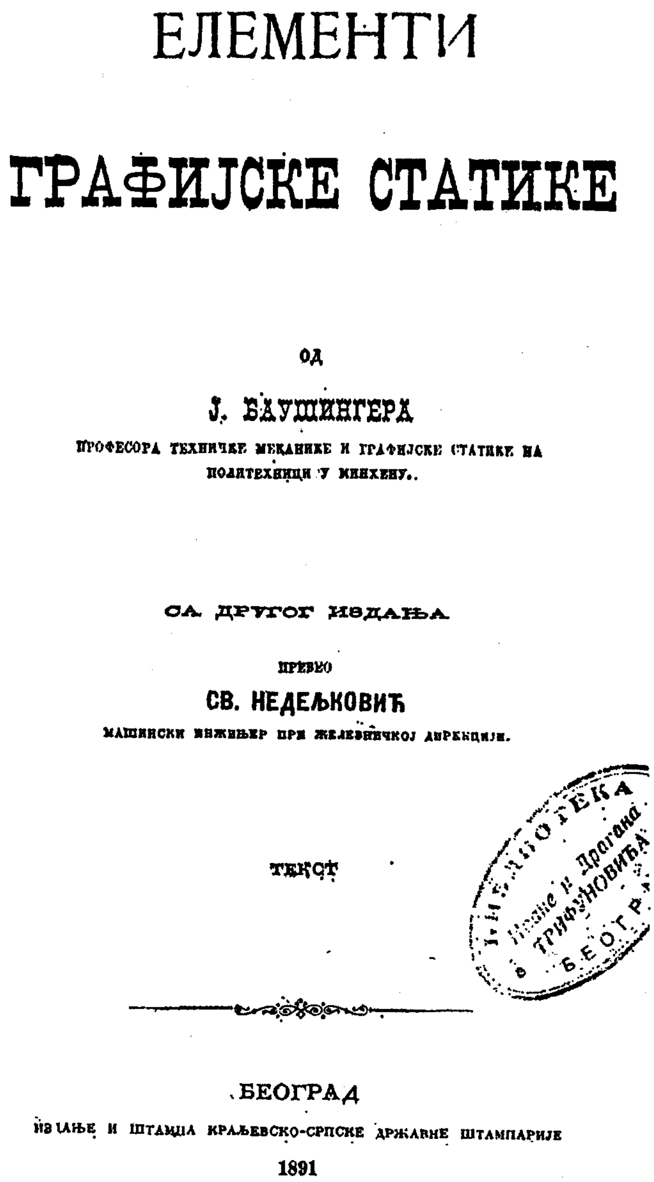
Моја би жеља била, да се оба ова рукописа што пре тискају, и да се у дотичне школе уведу. Користи су од обојих велике, не само за текничаре у нашој „великој школи", но за реалке и занатлијске школе, и уопште за практички живот свију скоро грађана.

Па како сам сретства немам, да ово тискам, а с претплатом, текничке ствари још у нас не пролазе: то се усуђујем оба ова рада послати Господину министру, и замолити га, да по прегледу, наредити изволи, да се обоје тиска, па по могућности и у школе уведе.

Сл. 3. — Инжењер Ђура Љочић (1843—1915) безуспешно је покушао да на Великој школи у Београду 1869. г. уведе нов предмет графостатику.

Што се набавке рачуњаче тиче, то се треба обратити у Париз (адреса стоји на рачуњачи), или, по препоруци господина министра, могао бих и ја, кад се у Србију узвраћам, исте из Париза понети. Комад стаје 6 фрс.

Колико је до мене стајало, ја сам учинио. А да народу доиста користи буде, од мога рада, то се надам да ће господин министар са своје стране учи-нити, да се обоје тиска. — С поштовањем Господину министру просвете Ђура Љочић, државни питомац — 1/13 Марта 1869. у Лихтенштајну“[2].



ЕЛЕМЕНТИ

ГРАФИЈСКЕ СТАТИКЕ

ОД

Ј. БАУШИНГЕРА

ПРОФЕСОРА ТЕХНИЧКЕ МЕХАНИКЕ И ГРАФИЈСКЕ СТАТИКЕ НА ПОЛИТЕХНИЦИ У МИНХЕНУ.

СА ДРУГОГ ИЗДАЊА

ПРЕВЕО

СВ. НЕДЕЉКОВИЋ

МАШИНСКИ ИНЖЕЊЕР ПРИ ЖЕЛЕЗНИЧКОЈ ДИРЕКЦИЈИ.

ТЕКСТ

БЕОГРАД

ИЗДАЊЕ И ШТАМПА КРАЉЕВСКО-СРПСКЕ ДРЖАВНЕ ШТАМПАРИЈЕ

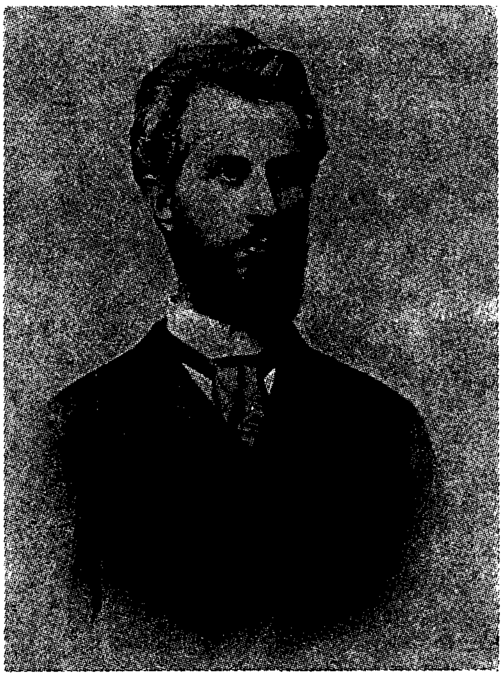
1891

Сл. 4. — Насловна страна прве објављене графостатике код нас (1891).

Из једног ранијег дописа министарству просвете сазнајемо да је Љочић почео да ради на посрбљавању графостатике још 1867. г., када је на Циришкој

[2] АС, МПс, Ф. III, 643/1869.

политехници завршио „инжинирски курс“. „Ову годину дана још молим Господина министра — пише Љочић, да ми дозволити изволи на Циришкој политехници провести, где ћу, вратив се са практике, моћи још једанпут чути изкључиво Г. професора Culmann-a — Графијску статику и остале предмете, које он предаје; уједно израђујући Графијску статику за потребу србску“[3].



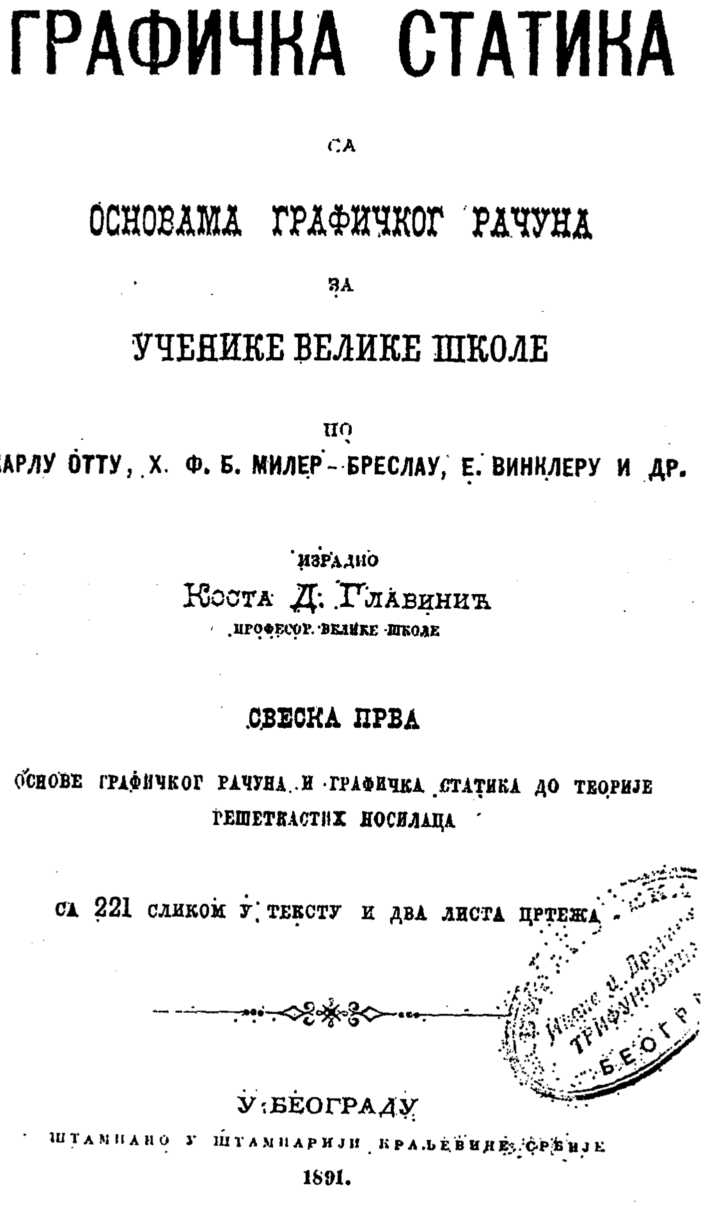
Сл. 5. — Инжењер Коста Главинић (1858—1938), професор Техничког факултета Велике школе у Београду први је код нас почео са предавањима графостатике 1885. године.

До данас још нису пронађена ова два Љочићева рукописа који би за историју механичких наука код нас имали посебан значај. Према самом садржају приказане представке, можемо установити да се ради о графичким методама решавања различитих проблема примењене математике, а из наведеног дела Љочићевог дописа министарству просвете од 17. септембра 1867. утврдили смо да је своје „графијско рачунање“, као први део графостатике, Љочић урадио „посрбљавајући“ удбеник — предавања професора Цирушке политехнике Кулмана (Karl Culmann, 1821—1881)[4]. И поред тога, што је тек на Првом

[3] АС, МПс, Ф. I, 150/1870.

[4] Драгутин Кулман је познат професор Цирншке политехнике. Уређај на техничким цртаћим таблама носи његово име. Стручњак је био за градњу мостова, статичар светског гласа, професор графостатике и вишегодишњи ректор Цирншке политехнике. Проф. Кулман је извршио позитиван утицај на читаве генерације наших студената у Цириху. Код проф. Кулмана студирали су Светозар Марковић, Никола Пашић, Љубомир Клерић, Фрања Коњовић и др. — О Кулману подробније видети у раду Љ. Д. Јакшића [9].

међународном математичком конгресу у Паризу (1890) номографија издвојена као самостална математичка дисциплина [13] она се развијала и знатно раније, обогаћујући тиме средства нумеричке математике. Да ли је Ђ. Љочић изложио


ГРАФИЧКА СТАТИКА

СА

ОСНОВАМА ГРАФИЧКОГ РАЧУНА

ЗА

УЧЕНИКЕ ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

ПО

КАРЛУ ОТТУ, Х. Ф. Б. МИЛЕР-БРЕСЛАУ, Е. ВИНКЛЕРУ И ДР.

ИЗРАДИО

Коста Д. Главинић

ПРОФЕСОР ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

СВЕСКА ПРВА

ОСНОВЕ ГРАФИЧКОГ РАЧУНА И ГРАФИЧКА СТАТИКА ДО ТЕОРИЈЕ РЕШЕТКАСТИХ НОСИЛАЦА

СА 221 СЛИКОМ У ТЕКСТУ И ДВА ЛИСТА ЦРТЕЖА

У БЕОГРАДУ

ШТАМПАНО У ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

1891.

Сл. 6. — Насловна страна првог дела графостатике Косте Главинића.

номографе и номограме као рачунарска средства графостатике, било би веома важно утврдити.

Љочићево упутство за рачуњачу вероватно се односи на логаритмар, као кинематичку рачунску машину[5], који је 60-тих година прошлог века на Западу био распрострањен и већ добио комерцијални вид[6]. Упутство за логаритмар, којих у новије време има више, колико би открило Љочићеве едукативне намере, толико и сам прилаз „машинским" алгоритмима који се могу овом „рачуњачом" решавати.

Љочићев предлог у иновацији наставе механике на Великој школи *Школска комисија је одбила*. Колико год да су кретања на Великој школи у Београду ишла ка савременијој настави, увођењем нових предмета, квалитетних уџбеника и тражењу све бољег наставног особља, та иста средина спречавала је развитак нових идеја у настави и науци. Ово је још један пример који недвосмислено указује да су се механичке науке код нас у 19. веку веома споро развијале, не само због општих ставова у научним истраживањима, где је све било подређено језику, историји и заштити свих националних тековина, већ и због директних оспоравања нових научних захвата. У то време, Школска комисија (доцније Просветни савет) није могла много штошта да схвати и предвиди у развитку механике. И поред тога што се од првих дана борила за нове односе у школи, остаје као чињеница да Школска комисија није знала да прихвати налете нових наставних идеја. Када овде већ помињемо почетке наставе механике, вредно је навести и један део упутства нашим првим стипендистима из 1839. године који су одлазили у свет ради стицања знања за потребе школства и земље уопште: „. . . Они који ће после годину дана у Берлински политехнички инштитут ступити, нек усугубе труде своје, да покрај осталих наука наречно Математику (и Механику) са свим частима њеним тако науче да у Отачеству свом не само добри Инжинири и Архитекти бити, но и у случају потребе и соотечествену младеж у истим наукама настављати . . ." [14].

Као што смо навели, Школска комисија је 17. јуна исте године одбила Љочићеве рукописе. „Господине Министер. Рукописно дело: „Графијско рачунање и упутство за рачуњачу" послато школској комисији на преглед и оцену с писмом Господина Министра Но 1060 од 11. марта тек. год. иста Комисија прегледала је и закључила је поднети Вам Господине Министер то своје мишљење о истом, да је прво: то јест: „Графијско рачунање" за наше школе за сад излишно, почем се тај нов предмет код нас никако непредаје, а и иначе могао би се само у некаквој великој реалци, и то не као самосталан предмет, већ као један део науке при изучавању конштрукција у цртању учити; а оно друго: „Упуствто за рачуњачу" *неможе се у обште препоручити за школу нити да се младежи уруку да, јер би оно само одвраћало ученике од основног и потпуног изучавања рачунице, особито пак сви слабији ђаци ослањајући се на ову непоуздану математичку играчку, пренебрегли би штудију математике*, чим би се управо шкодило главној цели, јер основно и потпуно познавање

[5] Љочићев назив за рачунску машину „рачуњача" потпуно је оригиналан и овде се први пут објављује. Код нас је данас обично у употреби израз рачунар, рачунало, рачунска справа и др.

[6] Израда логаритамских таблица, која је била у пуном замаху почетком 17. века, условила је и проналазак првог кинематичког рачунара — логаритмара Године 1624. њега је пронашао енглески математичар Е. Гунтер. Гунтер је у науци познат са логаритамским таблицама синуса и тангенса на седам децимала, а увео је први термине за кофункције, косинус, котангес (Canon Triangulorum, Londini 1620). — Логаритмар је временом усавршаван. Од првог побољшања В. Отреда (1632), па све до наших дана, логаритмар се развијао за потребе специјалних прорачуна, а такође и по свом облику и величини.

математичких истина може тек снажно подејствовати на развитак логичног мишљења, тачног схватања и суђења у обшће, зато Комисија неможе по свом уверењу препоручити ова дела за то, да се она о државном трошку штампају и у школско употреблење уведу. За деловођу, члан Шк. ком. Др. Ј. Шафарик — 17. Јунија 1869 у Београду".[7]

Овакав став научно-наставне средине Србије према увођењу новог предмета и рачунске машине у наставу, а што има и данашњу актуелност, прогресивне математичке снаге на Великој школи (Димитрије Нешић, Коста Алковић, Димитрије Стојановић) који су и сами претрпели позитиван утицај напредних научних центара Европе, утицале су на Школску комисију да измени став у оцени рада Ђуре Љочића. Тако, у одговору Школске комисије министарству просвете од 3. фебруара 1870. наводи се позитивно мишљење професора Косте Алковића „да би ово дело било од користи и добити за нашу књижевност али, како у нашим школама нема тога предмета, Комисија не може се у даљу оцену упуштати".[8] Ову одлуку Школске комисије потписао је професор Емилијан Јосимовић (!).

Љочићево указивање „да и нама ваља напред да кренемо" у математичким и механичким наукама, његово предлагање нових предмета, метода и средстава за рачунање, последица су доброг познавања наставно-научних прилика на Великој школи у Београду[9]. На повратку у отаџбину Љочић је тако доживео разочарење. Као комплетно образованог инжењера, пуног идеја и жеље за радом, упознатог са научним и техничким новостима, са знањем два страна језика, средина га не прихвата!?

Љочићево запажање о примењеној математици 60-тих година код нас потпуно је сагласно са оценом коју је исказао њему близак друг по револуционарним идејама Светозар Марковић, који је такође у исто време био државни питомац за техничке науке у Петрограду и Цириху. Наиме, у раду *Како су нас васпитавали*, Светозар Марковић дословно вели: „Ми сви који смо одлазили у стране земље из последњих класа Велике школе, знали смо толико колико зна један ђак који је свршио тамошње гимназије са средњим успехом, а било их је и далеко неразвијенијих. Ја знам ђака са техничког факултета за кога су сви професори говорили да је један од највреднијих ђака, који је отишао на страну, пошто је свршио 3 фак. године Велике школе, па је тамо ступио у ту класу у коју ступају ђаци из гимназије (не из реалке), и тај ђак готово није смео да каже да је учио механику, геодезију и нацртну геометрију".[10] Није само Марковић изрицао овакве оцене о нашем школству. Запазили смо више случајева оштрих критика образовања у нашем 19. веку. Рецимо, познати математичар и политичар Коста Стојановић (1867—1921) писао је о нашем школству на начин сличан Светозару Марковићу. „Слободно се може рећи да је не мало ђака прошло кроз нашу Велику школу и незнајући ни суштину питања којима се науке баве, које су они слушали, а као добри познаваоци исити оцењени."[11]

Зашто је Светозар Марковић овако оценио стање примењене математике на Великој школи и зашто је Ђура Љочић баш у овој области предлагао нове

[7] АС, МПс, Ф. III, 643/1869.

[8] АС, МПс, Ф. I, 130/1870.

[9] О Ђури Љочићу погледати исцрпну студију Ј. Митровића [8].

[10] Наведено према: Светозар Марковић, *Одабрани списи*, Београд 1961, стр. 59.

[11] Заоставштина Косте Стојановића, фас. Л/12 (Музеј града Београда).

методе, рачунарска помагала, па чак, и нов предмет, графостатику? Одговоре на ово, као и саму потврду оцене Светозара Марковића треба тражити у развитку механичких наука. У нашем прилогу о развитку ових наука код нас показали смо да су механичке науке претрпеле изузетну кризу у односу на друге научне области.[12] Механичких наука дуго година није ни било. Као посебан предмет механика се јавља на Лицеју у реформаторској 1853., а наставу изводе Филип Христовић и Емилијан Јосимовић. Од 1862. и даље на Великој школи, механику заједно са физиком предавао је професор физике Коста Алковић све до појаве Љубомира Клерића 1875. г.[13]. И поред тога, што је механике било у Инжењеријској школи од 1846.[14] и у Артиљеријској школи од 1850. г.[15], први уџбеник је написан 1875. г.[16], механика је подељена на техничку и рационалну 1889. г.[17], а научни прилози јављају се тек крајем 19. века.

Светозар Марковић је слушао механику на Великој школи код професора Косте Алковића, а Ђура Љочић као војни питомац код Емилијана Јосимовића на Артиљеријској школи. Они су у Цириху својим изоштреним погледом на стање у овим наукама у свету, а револуционарним погледима на свет и његове промене, потпуно правилно оценили наше прилике предлажући нове мере. Показало се да су ови напредни погледи у науци шездесетих година прошлог века заустављени административним мерама ондашњег друштва, које у једној малој средини са стотинак великошколаца, неколико инжењера, правника и филозофа није могло и није знало да оцени и прихвати надирање нових идеја.

Баушингерова графостатика

Покушај Ђуре Љочића из 1869. г. да се уведу графостатика и помоћна средства за рачунање, остварен је тек 1891. г. када је изашла књига *Елементи графијске статике* од Ј. Баушингера (стр. XII—368), професора техничке механике и графостатике на Политехници у Минхену а у преводу инжењера Светозара Недељковића.[18] Са закашњењем од 20 година остварена је Љочићева идеја. Према предговору ове књиге дознајемо да је исто као и Љочић, С. Недељковић, државни питомац за техничке науке у Минхену, још 1886. г. превео ову графостатику и поднео министарству просвете на одобре-

---

12 Д. Трифуновић: *Прилози за историју механичких наука код Срба* III, Дијалектика 10 (1975), 3, 95—117.

13 Према изворима АС, Просвета, 1859, IX 148 и 1862, VI 1124 сазнајемо да се К. Алковић као државни питомац у Бечу припремао за позив професора математике. К. Алковић је 1. новембра 1862. постављен за професора физике на Лицеју (АС, Просвета, 1862, VI, 1132).

14 Д. Трифуновић: *Почеци високошколске наставе механике*, Историјски часопис 21 (1974), 255—260.

15 *Споменица седамдесетпетогодишњице Војне академије* 1850—1925, Београд 1925, стр. 368.

16 С. Здравковић: *Основна механика I део, Кинематика* за ученике Војне акамдије и виши школа у Србији, Београд 1875, стр. 303; II и III део, *Динамика и статика*, Београд 1877 стр. 574; IV, V и VI део *Хидростатика*, ..., Београд 1880, стр. 387.

17 АС, ВШ — 1889, Записници са седница академског савета.

18 Према [15], дознајемо да је Светозар Недељковић завршио Технички факултет у Београду школске 1883/84. године.

ње.[19] Недељковићево наглашавање да је то прва књига ове врсте уродило је плодом: „Дело неће бити сасвим без замерака; али свакојако, као за сада једино на српском језику од ове струке, биће велика помоћ студентима и инжињерима".

Баушингерову графостатику Недељковић је изложио у десет поглавља: Увод. Слагање сила које дејствују у истој правој линији. Слагање сила које у произвољним правцима дејствују у једној истој нападној тачци. Слагање сила које дејствују у истој равни а у разним нападним тачкама. О обртним моментима сила. Силе у простору. Паралелне силе у простору и у равни; њино средиште; њини статички моменти. О тежишту. Виши моменти и моменат лењивости паралелних сила — Површине лењивости и централне површине Систем паралелних сила. У посебном поглављу, на крају књиге, изложене су примене графостатике: Ланац и лук, греда и окнасте конструкције.

У Баушингеровој графостатици излагање је скаларно. Међутим, обележавање слика и тумачења су векторска! Наведимо пример силе са 2. стране: „Много је простија представа *силе* на геометријски начин, као *просторне количине*. Ако изаберемо један комад праве линије као јединицу силе, онда се свака дата сила по величини, правцу, смислу и положају може преставити дужином, правцем, смислом и положајем једне *праве линије*. Овај је начин преставе тако очигледан, да се он од вајкада у Механици употребљавао, па се чак и онда примењује, ако је расправљање у суштини аналитичко".

У погледу терминологије превод Баушингерове графостатике је очигледно савремен и не може се ставити ниједан приговор. Занимљиво је приметити да Недељковић користи израз *површје* са значењем *површи*, што је знатно доцније увео Милош Радојчић.

Појаву к а ш њ е њ а, коју смо утврдили у случају графостатике, као посебног начела у историји наука треба истраживати. То су веома битни случајеви за историјску анализу у наукама и, свакако, да их треба све открити. Да је случај графостатике решен предлогом Ђ. Љочића наша би средина читавих чеврт века раније дознала за ову област механичких наука и резултати у образовању и раду били би бољи и другојачији.[20]

Литература

[1] *Зборник закона и уредаба о Лицеју, Великој школи и Универзитету у Београду*, Бегреад 1967.

[2] Ј. Баушингер: *Елементи графијске статике*, Београд 1891, стр. 368 (превод С. Недељковића).

[3] К. Главинић: *Графичка статика са основама графичког рачуна*, Београд 1891.стр. 378.

[4] Д. Трифуновић: *Први покушај увођења рачунара у наставу математике*, Насатава и васпитање 4 (181), 829—837.

[19] Дословно стоји: „Дозволу за превод добио сам одмах од мога поштованог професора (Ј. Баушингера — пр. пр.), а г. Министар Просвете, увиђајући потребу једне такве књиге за наше техничаре, примио је да се дело штампа о државном трошку. И ако сам ово дело превео још 1886. године опет није могло изаћи на свет до сада због разних неприлика, које нису биле у мојој власти".

[20] О увођењу графостатике на Великој школи (1885) и њеном даљем развоју видети подробније у монографији [7].

[5] Д. Трифуновић: *Почеци математичког моделовања и рачунске технике на Великој школи у Београду*, Годишњак града Београда 26 (1979), 123—132.

[6] Д. Трифуновић: *Проучавање моделовања у делу Михаила Петровића*, Београд 1976, 239—249.

[7] *Грађевински факултет* 1948—1978, Београд 1980, 169—176.

[8] Ј. Д. Митровић: *Ђура Љочић*, Зборник Историјског музеја Србије 13—14 (1977), 105—128.

[9] Љ. Д. Јакшић: *О боравку Светозара Марковића у Швајцарској за време школовања*, Зборник Историјског музеја Србије 13—14 (1977), 99—104.

[10] Д. Трифуновић: *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд 1969.

[11] Д. Трифуновић: *Михаило Петровић-Алас*, Горњи Милановац 1982.

[12] *Споменица Михаила Петровића*, Београд 1968.

[13] Л. С. Блох: *Практическая номография*, Москва 1971.

[14] Љ. Недић: *Прво упутство нашим питомцима на страни*, Наставник 3 (1892), 676—678.

[15] Д. Трифуновић — Ђ. Кнежевић: *Прва виша техничка школа у Београду*, Изградња 36 (1982), 12, 3—10.

DIE ERSCHEINUNG DER GRAPHOSTATIK

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden dargelegt und analysiert alle Einzelheiten der Einführung der Graphostatik als selbstständigen Unterrichtsgegenstandes an der Universität Belgrad. Der Anstess dazu kam von Đura Ljočić, Student der Mathematik in Zürich und die Realisierung kam erst im Jahre 1891. durch die Beiträge von Svetozar Nedeljković und Kosta Glavinić. Der Inhalt des ersten Lehrbuchs der Graphostatik bei uns aus dem Jahre 1891. ist hier wiedergegeben.

Захвалан сам проф. Десанки (Ђурић) Трбуховић која ми је помогла при раду у архиву Циришке политехнике, а која ће ми остати у трајном сећању и као мој драги поштовани професор математике у VI муш. гим. (Београд).

Prof. Dr Dragan Trifunović
Šumarski fakultet
11030 Beograd
Kneza Višeslava 1

Зборник радова Математичког института. Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

KONCEPT POLJA U NEKONZERVATIVNOJ MEHANICI I NJEGOVE PRIMENE U TEORIJI NELINEARNIH OSCILACIJA

Božidar D. Vujanović

Uvod

U ovom radu, kao i u nekoliko prethodnih [1], [2], [3], [4], proučava se mogućnost integracije diferencijalnih jednačina kretanja dinamičkih, holonomnih, nekonzervativnih sistema sa konačnim brojem stepeni slobode, preko potpunih rešenja jedne kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom. Ova jednačina, koju ćemo u daljem tekstu nazivati osnovnom jednačinom, sledi iz pretpostavke da se jedna od generalisanih koordinata, koja karakteriše stanje sistema, može shvatiti kao polje koje zavisi od vremena i ostalih koordinata sistema.

U drugom delu rada se pojam potpunog rešenja osnovne jednačine kombinuje sa metodom dvoskalnog vremenskog razlaganja u proučavanju jednog problema nelinearnih oscilacija.

1. Osnovna jednačina

Posmatrajmo holonomni dinamički sistem sa konačnim brojem stepeni slobode, koji se kreće saglasno sa diferencijalnim jednačinama kretanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= X_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n &= X_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{1.1}$$

gde su sa x_i označene generalisane koordinate i generalisani impulsi dinamičkog sistema, t označava vreme, a tačkom je označen izvod odgovarajuće veličine po vremenu.

U daljem tekstu se ne insistira na činjenici da je n paran broj, a takođe se pretpostavlja da u opštem slučaju sistem (1.1) ne može da se napiše u obliku kanonskih jednačina

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{1.2}$$

(gde je sa H označena Hamiltonova funkcija sistema, q^i su generalisane koordinate a p_i su generalisani impulsi dinamičkog sistema) mada ovo razmatranje važi i u slučaju konzervativnih sistema kada se diferencijalne jednačine kretanja mogu napisati u obliku (1.2) i kada je broj jednačina paran.

Osnovna pretpostavka na kojoj se zasniva ovaj rad sastoji se u tvrđenju da se jedna od koordinata sistema (1.1), recimo x_1, može predstaviti kao polje koje zavisi od vremena t i ostalih koordinata tj.

$$x_1 = \Phi(t, x_2, x_3, \ldots, x_n). \tag{1.3}$$

Napomenimo da koncept polja u proučavanju dinamičkih sistema nije nov. Dobro je poznato da se Hamilton-Jakobijeva metoda integracije kanonskih jednačina (1.2) zasniva na pretpostavci da se vektor generalisanog impulsa može predstaviti kao polje gradijentnog vektora

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \tag{1.4}$$

gde je sa S označena t.zv. glavna Hamiltonova funkcija koja ima fizičko značenje dejstva, u Hamiltonovom smislu, a koje je izraženo kao polje zavisno od vremena i generalisanih koordinata q^i

$$S = S(t, q_1, \ldots, q_n). \tag{1.5}$$

U svojoj monografiji [5] I. S. Aržanih (И. С. Аржаных) polazi od pretpostavke da su generalisani impulsi funkcije generalisanih koordinata i vremena

$$p_i = p_i(t, q^1, \ldots, q^n). \tag{1.6}$$

Pretpostavka o strukturi polja oblika (1.3) po našem mišljenju, dovodi do unifikacije svih koordinata koje figurišu u sistemu a takođe i do parcijalne jednačine koja ima jednostavniju strukturu nego Hamilton-Jakobijeva parcijalna jednačina koja je, po pravilu, nelinearna.

Diferenciranjem jednačine (1.3) po vremenu i korišćenjem poslednjih $n-1$ ednačina sistema (1.1), prvu jednačinu ovog sistema pišemo na sledeći način

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} X_i(t, \Phi, x_2, \ldots, x_n) - X_1(t, \Phi, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{1.7}$$

$$i = 2, 3, \ldots, n.$$

Ovu parcijalnu kvazilinearnu jednačinu prvog reda po nepoznatoj funkciji F zvaćemo osnovnom jednačinom. Ona igra istu ulogu u našim razmatranjima kao Hamilton-Jakobijeva jednačina analitičke mehanike konzervativnih sistema.

Od interesa je podvući da se u osnovnoj jednačini (1.7) podrazumeva sabiranje po ponovljenim indeksima. Takođe podrazumevamo da mali latinički indeksi i, j uzimaju vrednosti od 2 do n, dok mali grčki indeksi α, β, .. važe od 1 do n.

2. O potpunim rešenjima osnovne jednačine i njihovim osobinama

Od brojnih tipova rešenja koje može da generiše osnovna jednačina (1.7), od posebnog interesa za naše proučavanje biće t.zv. potpuna ili kompletna rešenja koja definišemo u obliku

$$x_1 = \Phi(t, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{2.1}$$

gde su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljni konstantni parametri. Ovakav izraz koji zadovoljava identički osnovnu jednačinu (1.7) za proizvoljne vrednosti t, x_α i C_α predstavlja, u isto vreme, i potpuni skup prvih integrala dinamičkog sistema (1.1), što sledi iz načina na koji je osnovna jednačina izvedena. Da bismo iz potpunog rešenja (2.1) dobili prve integrale dinamičkog sistema (1.1) možemo postupiti na više načina (vidi ref. [4]). Jedan od najprostijih je da izraz (2.1) napišemo u obliku rešenom po jednoj konstanti, na pr. $C_1 = \psi(t, x_1, \ldots, x_n, C_2, \ldots, C_n)$, a zatim skupu konstanti $C_2, \ldots, C_n$ zadamo n proizvoljno zadatih vrednosti iz oblasti u kojoj su ovi parametri definisani. Na taj način dobijamo sledeći potpuni skup prvih integrala dinamičkog sistema (1.1):

$$\psi_1(t, x_1, \ldots, x_n, C_2^{(1)}, C_3^{(1)}, \ldots, C_n^{(1)}) = K_1 = \text{const.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(t, x_1, \ldots, x_n, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, \ldots, C_n^{(n)}) = K_n \ \text{const.}$$

Izbor partikularnih vrednosti kontanata $C_i^{(\alpha)}$ je sasvim proizvoljan. Pri tome se, jamačno, podrazumeva da su prvi integrali (2.2) među sobom nezavisni što se obezbeđuje uslovom

$$\det\left(\frac{\partial \psi_{(\alpha)}}{\partial x_\beta}\right) \neq 0, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

U slučaju da je dinamički sistem (1.1) zadat u Košijevom (Cauchy) obliku, tj. sa skupom početnih uslova

$$x_{(\alpha)}(0) = a_\alpha, \tag{2.4}$$

rešenje dinamičkog problema (1.1) i (2.4) dobijamo iz potpunog rešenja (2.1) osnovne jednačine (1.7) na sledeći način. Zamenom vrednosti (2.4) u potpuno rešenje (2.2) i izračunavanjem jedne konstante, recimo C_1 u funkciji ostalih konstanti i početnih vrednosti a_α, dobijamo sledeće *prilagođeno potpuno rešenje* osnovne jednačine u obliku

$$x_1 = U(t, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, C_2, \ldots, C_n). \tag{2.5}$$

Kako je pokazano u ref. [2]—[4], jednačina (2.5) i $n-1$ jednačina

$$\frac{\partial U}{\partial C_i} = 0, \qquad i = 2, 3, \ldots n \tag{2.6}$$

određuju n jednačina kretanja dinamičkog sistema (1.1) uz početne uslove (2.4) za proizvoljne vrednosti konstanata C_i. Pri tome je neophodno ispunjenje sledećeg uslova

$$\det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial C_i\, \partial x_j}\right) \neq 0, \qquad i, j = 2, 3, \ldots, n \tag{2.7}$$

Prema tome, rešenje dinamičkog sistema (1.1) potpuno je određeno iz nekog potpunog rešenja (2.1) osnovne jednačine (1.7). Mi ćemo prećutno podrazumevati da je u brojnim slučajevima lakše naći neko potpuno rešenje i iz njega odrediti kretanje dinamičkog sistema nego vršiti direktnu integraciju jednačina (1.1). Ova pretpostavka je karakteristična i za primenu Hamilton-Jakobijeve metode.

Prikazane osobine potpunih rešenja najlakše se ilustruju na sledećem prostom primeru linearnog harmonijskog oscilatora

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1. \tag{2.8}$$

Stavljajući $x_1 = \Phi(t, x_2)$ dolazimo do osnovne jednačine u obliku

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + x_2 = 0. \tag{2.9}$$

Potpuno rešenje ove jednačine se veoma lako nalazi (v. ref. [2]) i dato je sa sledećom relacijom koja sadrži dve proizvoljne konstante

$$x_1 = \Phi(t, x_2) = -x_2 \operatorname{tg}(t + C_1) + \frac{C_2}{\cos(t + C_1)}. \tag{2.10}$$

Do potpunog skupa prvih integrala dolazimo izračunavanjem konstante $C_2 = x_1 \cos(t+C_1) + x_2 \sin(t+C_1)$. Dajmo sada konstanti C_1 dve potpuno proizvoljne vrednosti recimo $C_1^{(1)} = 0$ i $C_1^{(1)} = \pi/2$, pa dobijamo dva prva integrala tipa (2.2): $x_1 \cos t + x_2 \sin t = K_1$ i $-x_1 \sin t + x_2 \cos t = K_2$. Dalje, neka su zadati početni uslovi $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2$. Zamenom ovih vrednosti u (2.10) izračunavanjem konstante C_2 i zamenom u (2.10) dobijamo prilagođeno kompletno rešenje

$$x_1 = U(t, x_2, a_1, a_2, C_1) = -x_2 \operatorname{tg} \psi + \frac{a_1 \cos C_1 + a_2 \sin C_1}{\cos \psi}, \tag{2.11}$$

gde je $\psi = t + C_1$. Saglasno sa (2.6) lako se potvrđuje da je jednačina $\delta U/\delta C_1 = 0$ ekvivalentna sa jednačinom kretanja $x_2 = a_2 \cos t + a_1 \sin t$. Drugu jednačinu kretanja nalazimo iz (2.11) za proizvoljnu zadatu vrednost konstante C_1. Recimo, za $C_1 = 0$ iz (2.11) nalazimo $x_1 = -x_2 \operatorname{tg} t + a_1/\cos t$, pa poslednje dve jednačine u potpunosti određuju kretanje sistema. Umesto poslednje jednačine, mogli bismo dobiti jednačinu kretanja u drugom obliku ako $x_2 = a_1 \operatorname{cost} t + a_2 \sin t$ zamenimo u izraz (2.11). U tom slučaju, što se lako potvrđuje posle proste računice, konstanta C_1 potpuno iščezava pa (2.11) daje $x_1 = a_1 \cos t - a_2 \sin t$.

Nalaženje potpunih rešenja osnovne jednačine, u raznim linearnim i nelinearnim slučajevima, demonstrirano je u ref. [1]—[4].

3. Primene na teoriju nelinearnih oscilacija

U ovom odeljku ćemo ukratko ukazati na mogućnost primene potpunih rešenja osnovne jednačine (1.7) u proučavanju nelinearnih oscilacija. U našem razmatranju korisno je uvesti pojam dvoskalnog vremenskog razlaganja koji je uobičajen u asimptotskoj teoriji nelinearnih fenomena.

Uvedimo dve vremenske skale*

$$T=t, \quad \tau=\varepsilon t, \tag{3.1}$$

gde je ε mali konstantni parametar a τ t. zv. »sporo vreme«.

Metod, koji želimo da prikažemo, biće najbolje ilustrovan na konkretnom primeru nelinearnog nekonzervativnog oscilatornog sistema sa jednim stepenom slobode

$$\begin{gathered} \dot{x}_1=-x_2-\varepsilon x_1^3, \quad \dot{x}_2=x_1, \\ x_1(0)=a_1, \; x_2(0)=a_2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Stavljajući $x_1=\mathbf{F}(t, x_2)$ dolazimo do osnovne jednačine

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+x_2+\varepsilon \Phi^3=0. \tag{3.3}$$

Napomenimo da je za $\varepsilon=0$ potpuno rešenje ove jednačine dato izrazom (2.11). Polazeći od rešenja za linearni slučaj, rešenje osnovne jednačine (3.3) tražimo u obliku sledećeg asimptotskog reda po malom parametru ε

$$x_1=\Phi(t, x_2, \varepsilon)=-x_2 \operatorname{tg} \psi+F_1(T, \tau)+\varepsilon F_2(T, \tau)+\ldots. \tag{3.4}$$

gde je $\psi=T+C_1$ a F_1 i F_2 nepoznate funkcije sporog i normalnog vremena. Razložimo takođe i promenljivu x_2 u red po malom parametru

$$x_2=x_{2(0)}+\varepsilon x_{2(1)}+\ldots. \tag{3.5}$$

Sada red (3.4) postaje

$$\Phi(x_2, t, \varepsilon)=\Phi_0(x_{2(0)}, T, \tau)+\varepsilon \Phi_1(x_{2(1)}, T, \tau)+\cdots. \tag{3.6}$$

gde su uvedene sledeće oznake

$$\Phi_0=-x_{2(0)} \operatorname{tg} \psi+F_1(T, \tau), \quad \Phi_1=-x_{2(1)} \operatorname{tg} \psi+F_2(T, \tau), \ldots \tag{3.7}$$

Unošenjem izraza (3.4) i (3.5) u osnovnu jednačinu (3.3) i izjednačavanjem sa nulom odgovarajućih izraza uz ε^0 i ε^1 dobijamo sledeći sistem parcijalnih jednačina

$$(\varepsilon^0): \frac{\partial F_1}{\partial T}-F_1 \operatorname{tg} \psi=0, \tag{3.8}$$

$$(\varepsilon^1): \frac{\partial F_2}{\partial T}-F_2 \operatorname{tg} \psi=-\frac{\partial F_1}{\partial \tau}-(-x_{2(0)} \operatorname{tg} \psi+F_1)^3. \tag{3.9}$$

Integracijom jednačine (3.8) nalazimo

$$F_1(T, \tau)=\frac{D(\tau)}{\cos \psi}, \tag{3.10}$$

*) Pošto se ovde ograničavamo na izračunavanje prvih aproksimacija, prva jednačina (3.1) uzeta je u skraćenom obliku. Za dobijanje viših popravki, ova jednačina obično ima oblik $T=t(1+A\varepsilon^2+B\varepsilon^3+\cdots)$ gde su $A, B, \ldots$ nepoznate konstante.

gde je $D(\tau)$ nepoznata funkcija sporog vremena. Sada je osnovna funkcija Φ_0 prema (3.7)

$$\Phi_0(x_{2(0)}, T, \tau) = -x_{2(0)} \operatorname{tg}\psi + \frac{D(\tau)}{\cos\psi}, \quad \psi = T + C_1. \tag{3.11}$$

Pošto su vremenske skale T i τ međusobom nezavisne, vrednosti funkcija $\Phi_0(T, \tau)$ i $x_{2(0)}(T, \tau)$ za $T=0$ i $\tau \neq 0$ su $A_1(\tau)$ i $A_2(\tau)$ respektivno. Prema tome, za $T=0$ jednačina (3.11) daje $D(\tau) = A_1(\tau)\cos C_1 + A_2(\tau)\sin C_1$, tako da (3.11) postaje

$$\Phi_0(x_{2(0)}, T, \tau) = -x_{2(0)} \operatorname{tg}\psi + \frac{A_1(\tau)\cos C_1 + A_2(\tau)\sin C_1}{\cos\psi}. \tag{3.12}$$

što je, prema terminologiji iz prošlog odeljka, *prilagođeno potpuno rešenje*. Napomenimo da se određivanje nepoznatih funkcija $A_1(\tau)$ i $A_2(\tau)$ vrši u sledećem aproksimativnom koraku. Prema zadatim početnim uslovima (3.2), ove funkcije imaju zadate početne vrednosti

$$A_1(0) = a_1, \quad A_2(0) = a_2. \tag{3.13}$$

Iz prilagođenog potpunog rešenja (3.12), koristeći pravilo (2.6), lako nalazimo da je jednačina $\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial C_1} = 0$ ekvivalentna sa

$$x_{2(0)} = A_1(\tau)\sin T + A_2(\tau)\cos T. \tag{3.14}$$

Zamenom (3.14) u (3.12), nalazimo

$$x_{1(0)} = A_1(\tau)\cos T - A_2(\tau)\sin T. \tag{3.15}$$

Pređimo sada na analizu jednačine (3.9). Izvršimo smenu promenljive $F_2(T, \tau) = M_2(T, \tau)/\cos\psi$, gde je $M_2(T, \tau)$ nova nepoznata funkcija, pa unošenjem ovog izraza, kao i izraza (3.10) i (3.14) u jednačinu (3.9) dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_2}{\partial T} = &-\left(\frac{dA_1}{d\tau}\cos C_1 + \frac{dA_2}{d\tau}\sin C_1\right) - A_1^3(\cos^4 T\cos C_1 - \cos^3 T\sin C_1) + \\ &+ 3A_1^2 A_2(\cos^3 T\sin T - \cos^2 T\sin^2 T\sin C_1) - \\ &- 3A_1 A_2^2(\cos^2 T\sin^2 T\cos C_1 - \cos T\sin^3 T\sin C_1) + \\ &+ A_2^3(\sin^3 T\cos T\cos C_1 - \sin^4 T\sin C_1).\end{aligned} \tag{3.16}$$

S obzirom na poznate trigonometrijske identičnosti

$$\begin{Bmatrix}\sin T\\ \cos T\end{Bmatrix}^4 = \frac{1}{8}\cos 4T \mp \frac{1}{8}\cos 2T + \frac{3}{8}; \qquad \sin^2 T\cos^2 T = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4T,$$

jednačinu (3.16) pišemo u obliku

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_2}{\partial T} = &-\left(\frac{dA_1}{d\tau}\cos C_1 + \frac{dA_2}{d\tau}\sin C_1\right) - \frac{3}{8}A_1^3\cos C_1 - \frac{3}{8}A_1^3 A_2\sin C_1 - \\ &- \frac{3}{8}A_1 A_2^2\cos C_1 - \frac{3}{8}A_2^3\sin C_1 + (\text{nerezonantni članovi}).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Očigledno je da bi se prilikom integracije ove jednačine po promenljivoj T u naznačenim članovima sa desne strane pojavili rezonantni članovi oblika $(\ldots)T$. Da bismo naš asimptotski razvoj (3.4) učinili uniformno važećim u celom vremenskom intervalu biramo funkcije $A_1(\tau)$ i $A_2(\tau)$ tako da su izrazi uz $\sin C_1$ i $\cos C_1$ jednaki nuli. Na taj način dolazimo do jednačina

$$\begin{aligned} \cos C_1:\ & \frac{dA_1}{d\tau}+\frac{3}{8}A_1(A_1^2+A_2^2)=0,\\ \sin C_1:\ & \frac{dA_2}{d\tau}+\frac{3}{8}A_2(A_1^2+A_2^2)=0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Integracijom ovoga sistema, uz početne uslove (3.13), dobijamo

$$A_1(\tau)=\frac{a_1}{\sqrt{\frac{3}{4}R_0^2\tau+1}},\quad A_2(\tau)=\frac{a_2}{\sqrt{\frac{3}{4}R_0^2\tau+1}},\quad R_0^2=a_1^2+a_2^2. \tag{3.19}$$

Prema tome prvi članovi unifromnog rešenja su na osnovu (3.14) i (3.15), dati izrazima

$$x_{1\,(0)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}R_0^2\tau+1}}(a_1\cos t-a_2\sin t),\quad x_{2\,(0)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}R_0^2\tau+1}}(a_1\sin t+a_2\cos t),$$

gde je $\tau=\varepsilon t$. Dobijeno rešenje identično je sa rešenjem koje je metodom višeskalnog razlaganja dobio Koul (Cole) u ref. [6].

Napomenimo da bi se na sličan način mogle izračunati više popravke ovoga problema. Takođe, ovom metodom mogu se proučavati i drugi, slični problemi nelinearnih oscilacija, o čemu autor priprema poseban izveštaj.

Literatura

[1] B. Vujanović, *On a Gradient Method in Nonconservative Mechanics*, Acta Mechanica, Vol. 34, str. 167—179, 1979.

[2] B. Vujanović, *On the Integration of the Nonconservative Hamilton's Dynamical Equations*, International Journal of Engineering Sciences, Vol. 19. №. 12, str. 1739—1747, 1981.

[3] B. Vujanović, *Conservation Laws and a Hamilton-Jacbai-Like Method in Nonconservative Mechanics*. Štampano u monografiji: *Dynamical Systems and Microphysics-Geometry and Mechanics*. Edited by: A. Avez, A. Blaquière, A. Marzollo. Academic Press, New York, London, Paris, San Diego, San Francisco, Sao Paolo, Sydney, Tokyo, Str. 293—301, 1982.

[4] T. Sutela, B. Vujanović, *Motion of a Nonconservative Dynamical System Via a Complete Integral of a Partial Differential Equation*, Tensor (N. S). (U štampi).

[5] И. С. Аржаных, *Поле Импулсов*, Академия Наук Узбекской ССР. „Наука", Ташкент, 1965.

[6] J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdel Publ. Co, Waltham Massachusetts, Toronto, London, 1968.

THE FIELD CONCEPT IN NONCONSERVATIVE MECHANICS AND ITS APPLICATIONS TO NONLINEAR VIBRATIONS

Summary

In this study, we are interesting to find the motion of a nonconservative dynamical system by means of a complete solution of a quasi-linear partial differential equation of the first order. In the second part of the article, we demonstrate a method for treating nonlinear vibraion problems based on the complete integrals of the above mentioned partial equation.

Napomene

1. Pravilo naznačeno jednačinama (2.5) i (2.6) za dobijanje rešenja dinamičkih jednačina iz prilagođenog rešenja osnovne jednačine, podseća na Jakobijevu teoremu u Hamilton-Jakobijevoj metodi. Međutim, jasno se vidi da je ova sličnost formalne prirode. Osnovne razlike između metode prikazane u ovom radu i Hamilton-Jakobijeve metode su sledeće. a) Prikazani metod važi u nekonzervativnom slučaju. b) U ovom radu se ne koristi dejstvo u Hamiltonovom smislu što je osnovna funkcija Hamilton-Jakobijeve teorije. c) Hamilton-Jakobijeva parcijalna diferencijalna jednačina je uvek nelinearna dok je osnovna jednačina (1.7) kvazilinearna. Poslednja činjenica povlači za sobom značajne razlike u geometrijskoj interpretaciji kretanja.

2. U ref. [2] ukazana je mogućnost proučavanja dinamičkih problema koji se formulišu kao granični problemi pomoću potpunih rešenja osnovne jednačine.

3. Za slučaj linearnih dinamičkih sistema moguće je pokazati sistematski postupak za pronalaženje rešenja osnovne parcijalne jednačine (1.7).

4. Kao što je naglašeno, u ovom radu se naročita pažnja poklanja potpunim rešenjima osnovne jednačine (1.7). Međutim, i nepotpuna rešenja osnovne jednačine, koja sadrže jednu ili više proizvoljnih konstanti (čiji je broj manji od n), igraju veoma važnu ulogu. Lako je pokazati da nepotpuna rešenja generišu jedan ili više prvih integrala dinamičkog sistema što može da bude od značaja prilikom proučavanja kretanja.

Prof. Dr Božidar D. Vujanović
Fakultet tehničkih nauka
21000 Novi Sad
V. Vlahovića 3

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12) 1984.
Recueil des traraux de l' Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12) 1984.

O MINIMUMU KOLIČINE MOMENTA IMPULSA

Veljko A. Vujičić

(Predato 20. decembra 1982.)

U ovom radu učinjen je pokušaj da se dođe do opštih valjanih relacija na osnovu istinitog iskaza o najmanjem dejstvu, tj. o najmanjoj količini momenta impulsa nekonzervativnog sistema na osnovu analize rada aktivnih sila na mogućim varijacijama. Nastoji se da se uprosti problem integralnog varijacionog principa za nekonzervativni sistem; obrazlaže se stav: količina momenta impulsa mehaničkog sistema na stvarnoj trajektoriji dostiže minimum kad rad aktivnih sila na mogućim pomeranjima ima najveću vrednost.

Dosta često se u mehanici navodi relacija

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + Q_\alpha \, \delta q) \, dt = 0,$$

u okviru integralnih varijacionih principa za nekonzervativne sisteme ili kao »Hamiltonov princip« uz ograničenje da se ne radi o čistom varijacionom problemu s obzirom da nije definisan funkcional dejstva. U tom slučaju se ne razmatra čak ni dejstvo u Lagranžovom smislu, jer je Mopertui (Maupertius Pierre Louis Morreau de, 1744) — Ojler (Euler Leonard, 1744, 1753) — Lagranžov (Lagrange Joseph Louis, 1761) princip formulisan za kretanje konzervativnih sistema. »Dejstvo« ili »Akcija« u klasičnim varijacionim principima mehanike je centralni pojam. Međutim, primetno je da u međunarodnoj konvenciji i odgovarajućoj literaturi o merama fizičkih veličina ne figuriše ni termin ni pojam dejstva ili akcije, sem ukoliko se pojam dejstva ne poistoveti sa pojmom momenta impulsa L (momenta količine kretanja ili kinetičkog momenta), s obzirom da imaju iste dimenzije, a to nije iskazano.

S obzirom da ovaj prilog počiva na klasičnim principima mehanike i da je namenjen posebnom izdanju u čast akademika prof. dr Tatomira P. Anđelića, čija predavanja sam za vreme studija slušao iz šest predmeta, ovde se pozivamo samo na dela T. P. Anđelića, koje mogu biti dovoljna za razumevanje izvedenih dokaza.

Dimenzija momenta impulsa L je

$$\dim L = ML^2\,T^{-1}.$$

Razlikuje se od dimenzija rada A, momenta sila M, kao i dimenzije energije E samo je jedan stepen dimenzije vremena, jer je

$$\dim A = \dim M = \dim E = ML^2\,T^{-2}.$$

To dovodi do dimenzione jednačine

$$\frac{\dim \mathrm{L}}{\dim t} = \dim A, \tag{1}$$

gde je t vreme. Ova dimenziona jednačina upućuje na konstataciju: da je promena momenta impulsa po vremenu proporcionalna radu ili energiji. Pre nego bi se mogao dati određeniji iskaz i dokazala njegova istinitost potrebno je da se pojasni pojam *momenta impulsa*, a samim tim i pojam *impulsa*. U literaturi je rasprostranjen pojam *generalisanih impulsa* za parcijalne izvode kinetičke energije po generalisanim brzinama, ali ređe za osnovne impulse $K_i = m\dot{y}_i$ za koje je uobičajen naziv koordinate vektora količine kretanja u odnosu na pravougli pravolinijski koordinatni sistem y_i, čije su dimenzije MLT^{-1}. Generalisani impuls p_α je u suštini opštiji, toliko, koliko koordinate vektora količine kretanja izražava u krivolinijskim koordinatnim sistemima, kao i to, što je važnije, obuhvata i koordinate L_i vektora momenta količine kretanja, čije su dimenzije $ML^2\,T^{-1}$. Drugim rečima, generalisani impulsi mogu biti koordinate vektora količine kretanja i koordinate momenta količine kretanja kako u odnosu na pravolinijske tako i u odnosu na krivolinijske koordinatne sisteme. Prema tome, dimenzije generalisanih impulsa mogu ali ne moraju biti jednake.

Međutim, linearna kombinacija generalisanih impulsa p_α i koordinata vektora elementarnog pomeranja dq^α, tj.

$$2\,L = p_\alpha\, dq^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

uvek ima dimenziju kinetičkog momenta, Zaista, ova linearna diferencijalna forma može da se napiše kao proizvod dvostruke kinetičke energije i dfierencijala vremena,

$$2\,L = p_\alpha \frac{dq^\alpha}{dt}\, dt = 2\,E_k\, dt,$$

gde je E_k kinetička energija, pa je

$$\dim L = \dim E_k \dim t = ML^2\,T^{-1}.$$

Na osnovu izraza (2) sada se dimenziona jednačina (1) može da izrazi analitički. Izvod po vremenu forme je

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p_\alpha\, dq^\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\,\dot{q}^\beta\,\dot{q}^\gamma\, dq^\alpha + a_{\alpha\beta}\,\ddot{q}^\beta\, dq^\alpha = a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt}\, dq^\alpha.$$

Kako su kovarijantne koordinate vektora ubrzanja $a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^{\beta}}{dt}$ pri stvarnom kretanju jednake generalisanim silama $Q\alpha$, sledi da je promena po vremenu forme L, pri stvarnom kretanju jednaka elementarnom radu izvršenom u tom kretanju, tj.

$$\frac{dL}{dt}=Q_{\alpha}\,dq^{\alpha}. \tag{3}$$

Ova relacija pokazuje je dovoljno da generalisane sile budu jednake nuli ili da je vektor generalisane sile upravan na vektor elementarnog pomeranja na konfiguracionom prostoru, pa da »količina momenta impulsa« tj. forma L bude konstantna, $L=l=\text{const}$, $\forall l \in R$.

Linearnu formu (2) proučavao je naš profesor A. Bilimović (1879—1970) i posvetio joj je značajan prostor u svojoj monografiji *O jednm opštem fenomenološkom diferencijalnom principu* (Izdanje SANU, knjiga CCCXIV, 1958). Forma je označena slovom Φ_s i nazvana forma stanja; određena je njena dimenzija i diskutovani nazivi »dejstva« i »akcija«. Pada u oči da je u toj detaljnoj analizi sa fenomenološkog stanovišta izostao naziv »moment impulsa«, čak i ako autor te monografije količinu kretanja naziva impulsom, kao i generalisane impulse. Teško da je to moglo biti neprimećeno s obzirom da u formi stanja za slučaj čvrstog tela jasno figuriše moment količine kretanja. Razlog bi možda mogao biti taj što ni klasici koji su uvodili pojam dejstva i proizvoda *mvds* nisu isticali dimenziju momenta impulsa. Istina, relacija (3) isključuje mogućnost da se L poistoveti s momentom impulsa, jer bi to protivrečilo zakonu promene momenta količine kretanja. Ali ako se zbog dimenzione identičnosti može rad nazvati energijom ili ako se energijom nazivaju i kinetička i potencijalna, čije forme nisu jednake ni koliko forma (3) i moment impulsa, onda bi izraz L mogao da bude ukupna količina momenta količine impulsa, ne zamenjujući tim pojmom vektor momenta količine kretanja i njegove koordinate, kao ni odgovarajući moment impulsa sile. Tako bi, možda, sa dimenzione tačke gledišta, diferencijalnom izrazu (3) ili integralnom

$$2\mathscr{L}=\int_{q_2^{\alpha}}^{q_1^{\alpha}} p_{\alpha}\,dq^{\alpha} \tag{4}$$

najprikladniji termin bio količina momenta impulsa s obzirom da sadrži sve koordinate momenta impulsa i to zbirno. U suštini izrazi (3) i (4) se javljaju još 1744. godine kod Mopertui i 1748 određenije kod Ojlera pod nazivom *količina dejstva*, što je kasnije široko prihvaćeno kao dejstvo ili akcija. Zato je pitanje da li ima svrhe uvoditi novi termin u teorijsku mehaniku, sem ukoliko se ne želi istaći dimenzija izraza (3) i (4), kojom prilikom se može pisati *količina momenta impulsa*, jer to i jeste. Preči zadatak ovog rada je da pokaže da veličina L dostiže minimum kad rad aktivnih sila na mogućim varijacijama dostiže najveću vrednost.

U tom cilju posmatrajmo kretanje holonomnog nekonzervativnog sistema, koji ima n stepena slobode kretanja. Nezavisnim generalisanim koordinatama q^{α} $(\alpha=1, 2, \ldots, n)$ odgovaraju generalisane sile Q_{α} a kretanje opisuje n diferencijalnih jednačina kretanja

$$\frac{Dp_{\alpha}}{dt}=Q_{\alpha}, \tag{5}$$

gde su p_α generalisani impulsi, a $\frac{D}{dt}$ operator apsolutnog izvoda po vremenu t. Diferencijalne jednačine (5) izvedene su za uslov da su veze zadržavajuće, te da nema drugih dodatnih relacija koje bi opisivale kretanje. Opštije, u slučaju nezadržavajućih veza, kao što je poznato, prema Dalamber-Lagranžovom principu uvek je

$$\frac{Dp_\alpha}{dt}\,\delta q^\alpha \geqslant Q_\alpha\,\delta q^\alpha. \tag{6}$$

S druge strane, ako se posmatra samo rad aktivnih sila na mogućim varijacijama, biće

$$Q_\alpha\,\delta q^\alpha \leqslant 0. \tag{7}$$

Prva varijacija količine momenta impulsa $\mathscr{L}$, pod uslovima $\delta q_1^\alpha = 0$, $\delta q_2^\alpha = 0$ može se napisati u obliku

$$\delta\mathscr{L} = \int_{q_1}^{q_2} \delta p_\alpha\, dq^\alpha + p_\alpha\,\delta\, dq^\alpha.$$

Ako se ima u vidu da je

$$\delta\, dq^\alpha = d\,\delta q^\alpha,$$

i

$$\delta p_\alpha = \delta a_{\alpha\beta}\,\dot q^\beta = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\dot q^\beta\,\delta q^\gamma + a_{\alpha\beta}\frac{d}{dt}\,\delta q^\beta,$$

varijacija $\delta\mathscr{L}$ se svodi na

$$\delta\mathscr{L} = \frac{1}{2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\dot q^\beta\, dq^\alpha\,\delta q^\gamma + 2\,a_{\alpha\beta}\,\dot q^\beta\, d\,\delta q^\alpha = \int_{q_1}^{q_2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\dot q^\beta\, dq^\alpha\,\delta q^\gamma -$$

$$-\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha}\dot q^\beta\, dq^\alpha\,\delta q^\gamma - a_{\alpha\beta}\, d\dot q^\beta\,\delta q^\alpha.$$

S obzirom da se drugi zbirni član može da napiše u obliku

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\delta q^\gamma}\dot q^\beta\, dq^\alpha\,\delta q^\gamma = \frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha}\dot q^\beta\, dq^\alpha\,\delta q^\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} + \frac{\delta a_{\gamma\alpha}}{\delta q^\beta}\right)\dot q^\beta\,\dot q^\alpha\,\delta q^\alpha\, dt,$$

sledi

$$\delta\mathscr{L} = -\int_{t_1}^{t_2} a_{\alpha\beta}\frac{D\dot q^\beta}{dt}\,\delta q^\alpha\, dt = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{Dp_\alpha}{dt}\,\delta q^\alpha\, dt,$$

a s obzirom na (5) i (7)

$$\delta\mathscr{L} = -\int_{t_1}^{t_2} Q_\alpha\,\delta q^\alpha\, dt \geqslant 0, \tag{8}$$

što je potrebno i dovoljno da funkcional (4) ima minimum. Ispunjen je i Ležandrov stav o slabom minimumu funkcionala

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\int_{q_1}^{q_2} p_\alpha\, dq = \int_{t_1}^{t_2} E_k\, dt,$$

na posmatranoj ekstremali, jer je

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{q}^\alpha \, \partial \dot{q}^\beta} = a_{\alpha\beta},$$

kovarijantno-konstantni pozitivno definitni tenzor.

Minimum se dostiže na trajektoriji reprezentativne tačke sistema koju opisuju diferencijalne jednačine (5), a koja prolazi kroz tačke q_1 i q_2, a uz uslov da rad (7) dostiže najveću vrednost na poremećenim trajektorijama, ili kad je količina momenta impulsa sila

$$\mathcal{M} = \int_{t_1}^{t_2} Q_\alpha \, \delta q^\alpha \, dt,$$

maksimalna. Simbolički se to može napisali da je

$$\delta \mathcal{L} = \sup \mathcal{M}.$$

jer je supremum količine momenta impulsa $\mathcal{M}$ jednak nuli na ekstremalnoj trajekloriji. Najveća vrednost za $\mathcal{M}$ se dostiže za $t_2 = t_1 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, očigledno: 1) ako se sistem kreće po inerciji $Q_\alpha = 0$, i 2) ako se sistem kreće po ekstremalnoj stvarnoj trajektoriji $\delta q^\alpha(t) = 0$ pod dejstvom generalisanih sila Q_α.

Literatura

[1] Anđelić T. P., *Tensorkalkül nebst Anwendungen*; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 141; Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil III, Springer—Verlag Berlin Heidelberg New York 1968, pp, 201.

[2] Anđelić T. i Stojanović R., *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd;.

[3] Anđelić T. P., *Tenzorski račun*, Naučna knjiga, 1976, Beograd.

ON THE MINIMA OF THE MOMENT IMPULS

Summary

In this papar an attempt has been undertaken in order to formulate the variational principle of a nonconservative system using the virtual work maximum of the applied forces.

The quantity of the moment of impls action of a mechanical system along a real trajectoria reches minimum when the virtual work of the active forces has the qreatest value.

Prof. dr Veljko A. Vujičić
Prirodno—matematički fakultet
11000 Beograd
Studenski trg 16/IV

Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 4 (12), 1984.
Recueil des travaux de l' Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 4 (12), 1984.

HRONOLOŠKI SPISAK OBJAVLJENIH RADOVA AKADEMIKA TATOMIRA P. ANDJELIĆA

Milica Mužijević

Ovaj hronološki spisak objavljenih radova akademika Tatomira P. Anđelića obuhvata period od 1921, kada je štampan prvi rad, pa sve do 1983. godine. Bibliografske jedinice sadrže osnovne podatke neophodne za identifikaciju radova. Anotacije i literatura nisu zastupljene. Među radovima T. P. Anđelića uočava se veći broj udžbenika za srednje škole, mahom geometrija, i to u dva ili više izdanja. Počevši od prve Geometrije za I razred srednjih škola iz 1936. godine, T. P. Anđelić je sa Antonom Bilimovićem (1879—1970) objavio devet srednjoškolskih udžbenika i još dva kao jedini autor. Takođe je objavio šest univerzitetskih udžbenika od kojih je većina doživela tri ili četiri izdanja (na primer: Teorija vektora — 3 izdanja, Tenzorski račun — 4 izdanja i Matrice — 4 izdanja). Kao koautor objavio je još četiri takva udžbenika. Pored mnogobrojnih udžbenika zabeleženo je više naučnih i stručnih radova iz dinamike i astrodinamike, tenzorskog i matričnog računa, filozofije prirodnih nauka, istorije matematičkih i mehaničkih nauka, kao i priloga namenjenih popularizaciji nauke.

Prethodni popisi radova T. P. Anđelića objavljeni su u *Годишњаку САНУ* LXXI за 1964, LXXVIII за 1971, LXXXI за 1974. i u časopisu *Dijalektika* 4 za 1973. (autor dr Marko D. Leko).

1921.

Иван Цанкар. Podobe iz Sanj Ljubljana str. 165. 8⁰. Izdala Matica Slovenačka. Nova knjižnica br. 1. — Омладински весник, 1921, II, 5, бр. 11; 19—21.

О оцењивању ученика.—Весник омладинаца, 1921, II, 4.

Исто: Полет, 1924, II, 1; 29—33.

1934.

Математичари и рачун. — Гласник Југословенског професорског друштва, 1934, XIV, 6; 545—554.

Скраћена верзија: Математички лист за ученике основне школе, 1974, VIII, 3; 65—69.

1935.

М. Миланковић: Небеска механика, 8^0, *стр.* 322. Издање Луке Ћеловића—Требињца, Београд 1935. — Гласник Југословенског професорског друштва, 1935, XV, 7; 635—638.

1936.

Геометрија за I разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић.—Београд, шт. „Меркур", 1936; стр. [6]+70.

1937.

Геометрија за II разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић.—Београд, шт. „Меркур", 1937; стр. [6]+93.

Са прилогом Мих. Петровића: *Стварне и привидне геометриске немогућности. Геометриско цртање.*

1938.

Геометрија за III разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић.—Београд, изд. писаца, шт. „Меркур", 1938; стр. [6]+80.

Са прилогом Мих. Петровића: *Погрешни геометриски закључци из непажљиво нацртане слике.*

1939.

Геометрија за IV разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић.—Београд, шт. „Меркур", 1939; стр. [6]+84.

Са прилогом Мих. Петровића: *Занимљивости у примени Питагориног правила.*

1940.

Геометрија за V разред средњих школа. Планиметрија. А. Билимовић и Т. Анђелић.—Београд, Књижара Влад. Н. Рајковића и К., 1940; стр. [4]+160.

Са прилогом Мих. Петровића: *Неодређени, немогућни и непотпуни планиметриски задаци.*

Геометрија за I разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић. 2. изд. —Београд, 1940; стр. [6]+100.

Са прилогом Мих. Петровића: *Варљивост ока при упоређивању дужи и површина.*

Координација математичке наставе.—[У]: Извештај седница и саопштења за 1939 (29 јануар 1939—24 децембар 1939). Београд, Југословенско математичко друштво, 1940 (год. II, II); 1—11.

1942.

Геометрија за II разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић. 2. изд.—Београд, Изд. књижаре Влад. Н. Рајковића и комп., 1942; стр. 106.

Са прилогом Мих. Петровића: *Сшварне и йривидне іеомешриске немоіућносши.*

Геомешрија за III разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић. 2. изд. — Београд, Изд. књиж. Влад. Н. Рајковића и комп., 1942; стр. 90.

Са прилогом Мих. Петровића: *Поірешни іеомешриски закључци из нейажљиво нацршане слике.*

А. БИЛИМОВИЋ
професор
Универзитета у Београду

Т. АНЂЕЛИЋ
професор
II мушке гимназије у Београду

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА

V РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ПЛАНИМЕТРИЈА

СА ПРИЛОГОМ
МИХ. ПЕТРОВИЋА

БЕОГРАД — 1940

1943.

Геомешрија за I разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић. 3. изд. —Београд, Изд. књижаре „Вук Караџић" Светислава Рајковића, 1943; стр. [4]+76.

Са прилогом Мих. Петровића: *Варљивосш ока йри уйоређивању дужи и йовршина.*

Геомешрија за VI разред средњих школа. Сшереомешрија. А. Билимовић, Т. Анђелић. — Београд, Књижарница Влад. Н. Рајковића, 1943; стр. 126.

1944.

Геомешрија за IV разред средњих школа. А. Билимовић и Т. Анђелић. 2. изд. – Београд, Изд. књиж. „Вук Караџић" Светислава Рајковића, 1944; стр. 90.

Са прилогом Мих. Петровића: *Занимљивости у примени Питагориног правила.*

Геометрија за V разред средњих школа. Планиметрија. А. Билимовић и Т. Анђелић. 2. изд. — Београд, Изд. књиж. „Вук Караџић”, 1944; стр. [4]+160.

Са прилогом Мих. Петровића: *Неодређени, немогућни и непотпуно одређени планиметриски задаци.*

1946.

Диференцијалне једначине кретања нехолономног система у инкомпресибилној течности. Теза Татомира Анђелића, Универзитет у Београду. — Београд, Штампарија „Косово” Михајла К. Ћурчића, 1946; стр. 51.

Једна нова књига о Николи Тесли.—Наука и техника, 1946, II, 1; 30—35.

1947.

Теорија вектора. — Београд, Просвета, 1947; стр. VIII+407.

1948.

Примена Пфафове методе у Динамици чврстог тела. — Глас Српске академије наука, 1948, CXCI, Први разред, 96; 201—216.

Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides. — Publications de l'Institut mathématique, 1948, II; 211—222.

1949.

Геометрија за учитељске школе. I *део: Планиметрија.* А. Билимовић, Т. Анђелић. — Београд, Знање, 1949; стр. 168.

Један стари технички механизам у Дубровнику. — Наука и техника, 1949, V, 11; 581—583.

Планиметрија и стереометрија. — Београд, Научна књига, 1949; стр. 122+[1].

Преглед елементарне математике. За пријемни испит Техничке велике школе у Београду. Јован Карамата, Татомир Анђелић и Мирко Стојаковић. — Београд, Научна књига, 1949; стр. [4]+120+122+63+[1].

Теорија вектора. 2. доп. изд. —Београд, Научна књига, 1949; стр. 432.

1950.

Équations fondamentales d'elasticité par la méthode de Pfaff. — Publications de l'Institut mathématique, 1950, III; 191—195.

Generalisani Hamiltonov princip za neholomne sisteme. — [U]: Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ, Bled 8—12. XI 1949. I: Referati i diskusije. Redaktor Tatomir Anđelić. Beograd, Savez društava matematičara i fizičara FNRJ, Naučna knjiga, 1950.

Геометрија за IV и V разред средњих школа. Планиметрија. А. Билимовић, Т. Анђелић. Београд, Знање, 1950; стр. 198.

Извођење основних једначина еластичности по Пфафовој методи. — Глас Српске академије наука, 1950, CXCVIII, Одељење природно — математичких наука, н. с., 3; стр. 141—145.

Основи механике нейрекидних средина. — Београд, Научна књига, 1950; стр. VI + [2] + 230 + [1].

1952.

Генерализација йојма Дарбуова векшора и Ланкреова сшава за Риманов йросшор. — Зборник радова Српске академије наука, 1952, XVIII, Математички институт, 2; 147—158.

Геомешрија за V разред їимназије. Планимешрија. А. Билимовић и Т. Анђелић. 2. попр. изд. — Београд, Знање, 1952; стр. 204.

Са прилогом Мих. Петровића: *Неодређени, немоїући и нейошйуно одређени йланимешриски задаци.*

Порекло шермина „орш" у шеорији векшора. — Наука и техника, 1952, VIII, 5; 249—252.

Исто: *Порекло шермина „орш" у векшорском рачуну.* — Наш језик, 1977, н. с., XXIII, 1—2; 45—46.

Решавање сисшема линеарних алїебарских једначина машричном мешодом йо Банахјевичевој схеми. — Зборник радова Српске академије наука, 1952, XVIII, Математички институт, 2; 71—92.

Тензорски рачун. — Београд, Научна књига, 1952; стр. VIII + 319.

1953.

Eine Bemerkung zu den Gleichungen von Beltrami — Michell. — Publications de l' Institut mathématique, 1953, V; 1—4.

Геомешрија за V разред їимназије. Планимешрија. А. Билимовић и Т. Анђелић. 3. пром. и попр. изд. — Београд, Знање, 1953; стр. 201 + [1].

О неким сшавовима из їеомешрије шроуїла. Татомир Анђелић и Загорка Шнајдер. — Nastava matematike i fizike u srednjoj školi, 1953, 1; 31—39.

Улоїа асшрономије у развоју машемашике. — Васиона, 1953, I, 2; 33—37.

1954.

Auf Grund einer neuen Gesetzesbestimmung von 15. VII 1954. *treten unter den Mathematikern der Belgrader Universität die Professoren A. Bilimović, M. Milanković und N. Saltykow in den Ruhestand.* — Internationale mathematische Nachrichten, 1954, 35/36; 35.

Геомешрија за V разред їимназије. Планимешрија. А. Билимовић и Т. Анђелић. 4. изд. — Београд, Знање, 1954; стр. 187.

Геомешрија за VI разред їимназије. Сшереомешрија. А. Билимовић и Т. Анђелић. — Београд, Знање, 1954; стр. 120 + [2].

Problem savlađivanja Zemljine teže pri letovima van Zemlje. — Vasiona, 1954, II, 3—4; 65—70.

Prof. M. Milanković beging sein goldenes Doktorjubiläum; die Promotion war am 17. 12. 1904 *an der Technischen Hochschule Wien erfolgt.* — Internationale mathematische Nachrichten, 1954, 37/38; 21.

Über die Bewegung starrer Körper mit nichtholonomen Bindungen in einer inkompressiblen Flüssigkeit. — [In]: Proceedings of the International Mathematical Congress Amsterdam, Sept. 1954.

1955.

Алберт Ајнштајн. — Тесла, 1955, 9—10; 32—34.

Геометрија за I разред гимназије и V разред осмогодишње школе. А. Билимовић и Т. Анђелић. — Београд, Научна књига, 1955; стр. 72.

О одређивању оператора момента количине кретања у квантној механици. — Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите од НР Македонија, 1955, VI; 30—34.

Über die Bewegung starrer Körper mit nichtholonomen Bindungen in einer inkompressiblen Flüssigkeit. — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1955, 35, Hft 9—10; 1—2.

1956.

Eine Bemerkung zu den Gleichungen von Beltrami-Michell. — Publications de l'Institut mathématique, 1956, IX; 93—94.

Eine Bemerkung zur Bestimmungsweise des Drehimpulsooperators in der Quantenmechanik. — Physikalische Verhandlungen, 1956, Bd 7, F. 5; 111.

Elementarna geometrija. – Beograd, Tehnička knjiga, 1956; str. 228. (Biblioteka „Tehnička knjiga").

Sur la forme tensorielle des équations de Beltrami – Michell. – Actes du IX Congrès Internationale de méchanique, V. Bruxelles, 1956; 302—305.

1957.

Извођење Beltrami – Michell-ovih једначина у тензорском облику из Saint – Venant-ovih услова компатибилности. — Зборник радова Српске академије наука, 1957, LV, Математички институт, 6; 1 – 4.

Savetovanje nemačkog Društva za primenjenu matematiku i mehaniku. – Tehničke novine, 15. VI 1957, X, 12; 5.

Велике брзине. — Свет технике, 1957, 12; 2.

1958.

Milutin Milanković zum Gedenken. – Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS, 1958, X; 7—10.

Практична метода за свођење квадратних форми са нумеричким коефицијентима на канонски облик. — Глас Српске академије наука, 1958, CCXXXII, Одељење природно—математичких наука, 15; 45—57.

Умро академик Милутин Миланковић. — Политика, 14. XII 1958, LV, 16345; 8.

1959.

Dinamika. — [U]: Vojna enciklopedija. 2: Borda-Enc. Beograd, Redakcija Vojne enciklopedije, 1959; 503—504.

Isto i u: Vojna enciklopedija, 2. izd. 2: Brdo-Foa. Beograd, 1969; 440—441.

Milutin Milankovitch. — Archives internationales d'Histoire des Sciences, 1959, douziéme année; 176—178+[1].

Небески механичар Милутин Миланковић. — Техничке новине, 1. I 1959, XII, 1; 3.

[Nekrolog Milutinu Milankoviću]. — Internationale Mathematische Nachrichten, 1959, 59/60; 17.

O putanjama projektila ka Mesecu. — Vasiona, 1959, VII, 1.

Osvrt na rad Međunarodnog astronautičkog kongresa. — Vasiona, 1959, VII, 4; 99—102.

Teorija vektora. 3. prom. izd. — Beograd, Prosveta, 1959.

Über die Grundlagen der Boscovich'schen Mechanik. — [U]: Actes du Symposium International R. J. Bošković, 1958. Beograd, Naučno delo, 1959; 85—91. (Comité interacadémique R. J. Bošković, 1).

Über die Verwandlung von quadratischen Formen mit numerischen Koeffizienten in Summen von Quadraten. – Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1959, 39, Hft 3/4; 3.

1960.

Međuplanetne putanje. — Beograd, Rad, 1960; str. 34+[1]. (Radnički univerzitet, Astronautika, I kolo, 2). [Isto i ćirilicom].

1961.

Mehanika i nastava matematike. — Nastava matematike i fizike, 1961, 1—4; 7—11.

1962.

Matrice. — Beograd, Naučna knjiga, 1962; str. 267. (Univerzitet u Beogradu. Univerzitetski udžbenici).

Die Mechanik und der mathematische Unterricht. — [In]: International Symposium on the Coordination of Institution in Mathematics and Physics. Beograd, Prosveta, 1962; 7—11.

Mehanika i njena uloga. Povodom desetogodišnjice osnivanja grupe za mehaniku. — [U]: Deset godina grupe za mehaniku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu. Beograd, Savez studenata grupe za mehaniku Prirodno-matematičkog fakulteta, 1962; 1—5.

Uvod u teoriju relativnosti. — Beograd, Građevinska knjiga, 1962; str. 68. (Univerzitet u Beogradu).

Über das Kraftgesetz von Boscovich. — [In]: Actes du Symposium International R. J. Bošković, 1961. Beograd, Naučno delo, 1962; 151—156.

Хоће ли човек скоро на месец? — Змај, 1962, IX, 8—9; 215—217. (Техника и машта).

1963.

Eine Verallgemeinerung des Begriffs des Darbouxschen Vektors für den Raum von Riemann. — Publications de l'Institut mathématique, n. s., 2 (16) za 1962, 1963; 35—38.

Катедра за механику. — [У]: Сто година Филозофског факултета. Редакција: Татомир Анђелић, Димитрије Вученов и Радован Самарџић. Београд, Народна књига, 1963; 510—515.

UNIVERZITET U BEOGRADU

TATOMIR P. ANDELIC

MATRICE

Naučna knjiga

BEOGRAD, 1962.

Математичка терминологија за основну и средње школе. Сарадници: Татомир Анђелић и др. — Београд, Завод за издавање уџбеника СР Србије, 1963; стр. 38+[2].

О неким најновијим резултатима испитивања виших слојева атмосфере. — Земља и људи, 1963, 12; 37—44.

1964.

Mehanika. Pojmovi — pravila — obrasci. Sv. I. Tatomir Anđelić i Ljubodrag Radosavljević. — Beograd, Tehnička knjiga, 1964; str. 352.

1965.

Matrice. 2. izd. — Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, 1965; str. 267. (Univerzitet u Beogradu).

Milanković Milutin. — [U]: Enciklopedija Jugoslavije, 6: Maklj – Put. Zagreb, Jugoslavenski leksikografski zavod, 1965; str. 107.

Novi doktori matematičkih nauka. Tatomir Anđelić i Konstantin Orlov. — Matematički vesnik, n. s., 1965, 2 (17), sv. 2; 165—169.

Uloga tenzorskih metoda u savremenoj tehnici. — Tehnika, 1965, XX, 12; 271—279.

1966.

Галилео Галилеи и физика. — Глас Српске академије наука и уметности, 1966, CCLXVIII, Одељење друштвених наука, 13; 23—31.

Neka razmatranja o determinizmu i kauzalnosti sa matematičkog stanovišta. Referat na drugom naučnom skupu „Marks i savremenost". Marksizam i savremene prirodne, matematičke i tehničke nauke (Zagreb — Opatija, 21—24. XII 1965). — [U]: Zbornik Marks i savremenost, 3. Beograd, Institut za izučavanje radničkog pokreta i Institut društvenih nauka, 1966; 118—129. Diskusija: 504, 532—533.

Nils Bor o determinizmu. — Dijalektika, 1966, I, 3; 90—95.

Plank, Ajnštajn i de Brolji o kauzalnosti i determinizmu. — Dijalektika, 1966, I, 4; 81—90.

Racionalna mehanika. Tatomir Anđelić i Rastko Stojanović. — Beograd, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, 1966; str. VIII + 587. (Univerzitet u Beogradu).

XVII kongres Međunarodne astronautičke federacije, Madrid, 10—16. oktobra 1966. — Dijalektika, 1966, I, 3; 87—89.

1967.

Galileo Galilée et ses mérites en physique. — Bulletin de l'Académie serbe des Sciences et des Arts, 1967, XLII, Classe des sciences sociales, 10; 17—20.

О једном облику диференцијалних једначина кретања нехолономног система без мултипликатора веза. — Математички весник, 1967, 4 (19), 4; 359—366.

Происхождение термина „орт" в векторном исчислении. — Вестник Московского государственого университета. Математика, механика, 1967, 2; 127—128.

Tenzorski račun. 2. popr. i dop. izd. — Beograd, Naučna knjiga, 1967; str. [8] + 274. (Univerzitet u Beogradu).

1968.

Applications of Artificial Satellites to the Education and Instruction of People in Developing Countries. — [In]: United Nations Conference on the Exploration and Peaceful Uses of Outer Space, Vienna, 1968. A/Conf. 34/VIII. 28; p. 5, *Astrogeo- i kosmička istraživanja.* Tatomir Anđelić, Fran Dominko i Radomir Turajlić. — Studije i prikazi, 1968, 7; 1. 32—35.

Tensorkalkül nebst Anwendungen. — [U]: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. Hrsg von R. Sauer, I. Szabó. Teil III. Berlin, Springer-Verlag, 1968; 167—231. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 141).

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1967

Т. П. АНГЕЛИЧ

ПРОИСХОЖДЕНИЕ ТЕРМИНА *ОРТ* В ВЕКТОРНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

В советской и югославской математической и технической литературе для обозначения единичного вектора употребляется термин *орт*. В соответствующей литературе всех других стран он не принят. Интересно его происхождение.

1969.

Još nešto o letećim tanjirima. — Kosmoplov. Magazin za kosmonautiku i naučnu fantastiku, 1969, I, 8; 38—41.

Klasična mehanika i njene osnovne koncepcije. — Dijalektika, 1969, IV, 1; 5—20.

Leteći tanjiri. — Kosmoplov. Magazin za kosmonautiku i naučnu fantastiku, 1969, I, 5; 35—37.

Неке примедбе у вези са нехолономним везама другог реда. — Глас Српске академије наука и уметности, 1969, CCLXXIV, Одељење природно—математичких наука, н. с., 31; 33—45.

Izvod: *Einige Bemerkungen über nichtholonome Bindungen zweiten Grades.* — Bulletin de l'Académie serbe des Sciences et des Arts, 1969, XLV, Classe des sciences mathématiques et naturelles, Sciences mathématiques, n s., 7; 15.

Obletanje oko meseca. (*Povodom misije „Apolo"* 8). — Naučno-tehnički pregled, 1969, 2; 25—36.

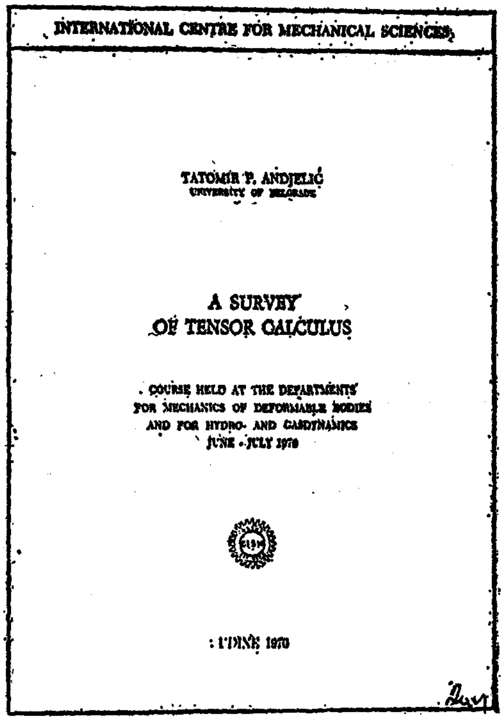
1970.

Антон Д. Билимовић. — Билтен Универзитета у Београду, 1970, I, 8; 1. 37—38.

Matrice. 3. izd. — Beograd, Naučna knjiga, 1970. (Univerzitet u Beogradu).

Naučno stvaranje u savremeno doba. — Nauka o nauci, [1970], I, 9—10; 119—121.

Нешто о настави математике у Другој београдској гимназији у периоду од 1928/29 до 1940/41. — [У]: Сто година Друге београдске гимназије 1870—1970. Београд, Друга београдска гимназија „Иво Лола Рибар", 292—296.



INTERNATIONAL CENTRE FOR MECHANICAL SCIENCES

TATOMIR P. ANDJELIĆ
UNIVERSITY OF BELGRADE

A SURVEY
OF TENSOR CALCULUS

COURSE HELD AT THE DEPARTMENTS
FOR MECHANICS OF DEFORMABLE BODIES
AND FOR HYDRO- AND GASDYNAMICS
JUNE - JULY 1970

UDINE 1970

О улози савремених космичких истраживања у географији. — Земља и људи, 1970, 20; 257—264.

A Survey of Tensor Calculus. Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies and for Hydro- and Gasdynamics, June-July 1970. Udine, International Centre for Mechanical Sciences, 1970; p. 137. (Courses and Lectures, 21).

Über eine Möglichkeit, die Bewegungsgleichungen der nichtholonomen Systeme herzuleiten, ohne die Quasikoordinaten zu verwenden. — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1970, 50; 218—219.

Über gewisse Eigenschaften der Bewegung eines Massenpunktes beim Vorhandensein nichtholonomer quadratischer Bindungen. Festschrift der Technische Universität Berlin-Charlottenburg zu Ehren von Prof. I. Szabó. Berlin, 1970; 17—18.

Uloga matematike u astronautici. — Kosmoplov. Magazin za kosmonautiku i naučnu fantastiku, 1970, II, 24; 22—25.

1971.

Говор на комеморативном скупу посвећеном преминулом академику Антону Билимовићу. — [У]: Споменица посвећена преминулом академику Антону Билимовићу. Београд, Српска академија наука и уметности, 1971; 21—25. (Посебна издања, CDXLVI, Споменице, 52).

Jedan stari zupčani mehanizam u Dubrovniku. — [In]: Third World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, 1971; pp. XXXVII—XL.

Isto: *An old gear mechanism in Dubrovnik*; pp. XLI—XLV.

O osnovnim pojmovima mehanike u delu Johana Keplera. — Dijalektika, 1971, VI, 4; 153—159.

Youth Rocket Activities in Yugoslavia. — [In]: Proceedings of the Twenty-first International Astronautical Congress, North Holland, 1971; 1081—1083.

1972.

Povodom dvadesetogodišnjice „Vasione“. — Vasiona, 1972, XX, 1.

1973.

Delo Kopernika. [1] — (3). — IT novine, 23. feb. — 9. mart 1973, XI: 520, str. 13; 521, str. 4; 522, str. 4.

Mehanika u delu Nikole Kopernika. — Dijalektika, 1973, VIII, 2; 15—24.

Tenzorski račun. 3. izd. — Beograd, Naučna knjiga, 1973; str. VIII+274. (Univerzitetski udžbenici).

1974.

Kako treba shvatiti determinizam? — Dijalektika, 1974, IX, 1; 57—61.

Механика у оквиру Српске академије наука. — Глас Српске академије наука и уметности, 1974, CCLXXXIX, Одељење природно-математичких наука, н. с., 36; 189—245.

Milanković Milutin. — [In]: Scienziati e tecnologi contemporanei, II. Milano, Arnoldo Mondadori Editore, 1974; 248—249.

Стогодишњица увођења метарског система мера и његов значај за укључивање југословенских области у европску привреду и за квалитет робе. — [У]: Мере на тлу Србије кроз векове. Београд, 1974; 193—205. (Галерија Српске академије наука и уметности, 23).

1975.

Einige Bemerkungen über nichtholonome Bindungen zweiten Grades. — [U]: Математические структуры — Вычислительная математика — Математическое моделирование. Труды посвященные шестидесятилетию академика Л. Илиева. София, Болгарская академия наук, 1975; 173—176.

Механика љуски и плоча. Петр Матвеевич Огибалов и Татомир Анђелић. — Београд, Издавачко—информативни центар студената, 1975; стр. 365.

Misija saradnje. — Galaksija, 1975, IV, 39.

Poreklo rotacije nebeskih tela. Tatomir Anđelić i Dragan Trifunović. — Galaksija, 1975, IV, 38; 14—15.

Preletne putanje malog potiska. — Pregled raketne tehnike, 1975, 1—2; 13—19.

Priča o amblemu. — Galaksija, 1975, IV, 33; 16—17.

Учити систематски целог живота. Разговор са истакнутим научником, математичаром, академиком Татомиром Анђелићем. — Књижевне новине, 16. XII 1975, XXVII, 501; 7.

Vanzemaljske civilizacije. — Informacija 3. Novi Beograd, Dom kulture Studentski grad, 1975; 1—2.

Živi kompjuter. — Galaksija, 1975, IV, 42.

1976.

Bestežinsko stanje. — Galaksija, 1976, V, 47.

Kvadratura kruga. — Galaksija, 1976, V, 45.

Одговор са Марса. У космосу не можемо бити једини који имају органски живот. — Просветни преглед, 15. X 1976, 1174 (32); 3.

Преглед развоја механике у Србији у току 19. и у првој половини 20. века. — Глас Српске академије наука и уметности, 1976, CCC, Одељење природно-математичких наука, н. с., 40; 40—49. [Приступна академска беседа].

Shvatanje determinizma u savremenoj nauci. — Beograd, Rad, 1976; str. 34 + [2]. (Marksistička dijalektika i prirodne nauke, I kolo).

1977.

20 godina kosmičke ere. — Galaksija, 1977, VI, 66.

Један Миланковићев поступак за графичко представљање геометријских прогресија. — Математика, 1977, VI, 2; 5—11.

Наставници механике на Филозофском и Природно-математичком факултету београдског универзитета. — [У]: Двадесет пет година студијске групе за механику 1952—1977. Београд, Природно-математички факултет, 1977; 59—64.

O novom Međunarodnom sistemu [SI] osnovnih jedinica merenja. — Naučno-tehnički pregled, 1977, XXVII, 5; 49—59.

Пре више од пола века. — Градац, 1977, IV, 14—15; 23—26.

Преглед историјског развоја наставе механике на Филозофском и Природно-математичком факултету Универзитета у Београду. — [У]: Двадесет пет година студијске групе за механику Природно-математичког факултета Универзитета у Београду, 1952—1977. Београд, Природно-математички факултет, 1977; 13—20.

Војислав В. Мишковић (18. јануар 1892—25. новембар 1976). — Годишњак Српске академије наука и уметности, 1977, LXXXIII за 1976; 277—280.

1978.

25 godina postojanja i rada Saveza astronautičkih i raketnih organizacija Jugoslavije. — Pregled raketne tehnike, 1978, V, 1—2; 3—6.

Jedan stari zupčani mehanizam u Dubrovniku. — Dubrovnik, 1978, 4; 77—78.

Jedna metoda za točno merenje sila malih intenziteta. T. Anđelić, G. Dimić, D. Prokić. — Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, 1978, 382, Razred za matematičke, fizičke i tehničke nauke, XVI; 17—21.

Matematički pristup izučavanju prirodnih pojava. — Dijalektika, 1978, XIII, 4; 79—89.

Poreklo osnovnih jednačina raketodinamike — Zbornik radova Univerziteta u Prištini, Tehnički fakultet, 1978; 81—88.

1979.

Albert Ajnštajn — čovek i delo. — Dijalektika, 1979, XIV, 1—2; 11—29.

Matrice. 4. neprom. izd. — Beograd, Građevinska knjiga, 1979; str. 267. (Univerzitet u Beogradu).

Научник светског гласа. У свету се последњих година опширно пише о Миланковићевој теорији ледених доба. — Политика, 31. III 1979, LXXVI, 23521; 13.

Нешто о „летећим тањирима“. — [У]: НЛО. Неидентификовани летећи објекти. Београд, Политика, 1979; 36—39. (Мала библиотека „Политике“).

O nekim prilozima iz matematike Milutina Milankovića. — Dijalektika, 1979, XIV, 3—4; 21—34.

Struktura atoma i struktura svemira. Slobodan Ribnikar i Tatomir Anđelić. — Galaksija, 1979, VIII, 84; 14—16.

Предговор [у књизи], Милутин Миланковић: Успомене, доживљаји и сазнања. Детињство и младост (1879—1909). Уредник Татомир Анђелић. Београд, Српска академија наука и уметности, 1979; стр. XIX + [1] + 383. (Посебна издања, DXVIII, Одељење природно-математичких наука, 50).

Живот и дело Милутина Миланковића. — [У]: Живот и дело Милутина Миланковића 1879—1979. Главни уредник Мића Поповић. Београд, Српска академија наука и уметности, 1979; 9—34. (Галерија САНУ, 36).

Живот и рад академика проф. др. Константина П. Вороњеца. Т. П. Анђелић, В. Саљников. — Зборник радова Математичког института, н.с. 1979, 3 (11); 9—14.

1980.

Чачак у првим данима после прве светске рата. — Чачански глас, 10. октобар 1980, XXII, 42; 10.

Механика. — [У]: Тридесет година Природно-математичког факултета Универзитета у Београду 1947—1977. Београд, Природно-математички факултет, 1980; 151—163.

Tenzorski račun. 4. izd. — Beograd, Naučna knjiga, 1980; str. VIII + 274.

Живот и дело Милутина Миланковића. — Nastava matematike, 1980, n.s., VII (XXIX), 1; 10—21.

1981.

Антон Билимовић. — Хемијски преглед, 1981, XXII, 3—4; 66.

Jurij Gagarin (1934—1968). Prvi u kosmosu. Tatomir Anđelić, Ratko O. Tošić. — Galaksija, 1981, X, 108; 84—86.

Клуб математичара Београдског универзитета. — Млади математичар, 1981, 2, бр. 1; 7—9.

Обзор развития механики в Сербии. — [У]: Исследования по истории механики. Москва, Академия наук СССР, 1981; 71—90.

Порекло основних једначина ракетодинамике. — Глас Српске академије наука и уметности, 1981, CCCXXIV, Одељење природно—математичких наука, 47; 29—35.

1982.

Бестежинско стање. — Политика, 17. новембар 1982, LXXIX; 9.

Eine Ableitung der Raketengrundgleichung. — Teorijska i primenjena mehanika, 1982, 8; 9—11.

Милутин Миланковић — живот и дело. — [У]: Живот и дело Милутина Миланковића 1879—1979. Београд, Српска академија наука и уметности, 1982;53—62. (Научни скупови, XII, Председништво, 3).

Не одвајати праксу од теорије. — Просветни преглед, 1982, 1403 (12); 7—8.

Нужно и случајно — научно схватање детерминизма. — [У]: Неки филозофски проблеми савремене физике. Београд, Завод за унапређивање васпитања и образовања града Београда, 1982; 51—65. (Школске теме, 8).

Origin of basic equations of rocket dynamics. — Dijalektika, 1982, XVII, 1—4; 5—13.

1983.

Jedna pogrešna upotreba reči „Materija“. — Tehnika, 1983, XXXVIII, 10; 1379.

Uvod u astrodinamiku. — Beograd, Matematički institut, 1983; str. 158. (Matematički vidici, knj. 4).

Преводи

Грчке материјалисте. August Pfannkuche. [Превео] с немачког Т. А. Буковски [Татомир П. Анђелић]. — Весник омладинаца, 1921, II, 5; 1—3.

L. P. Eisenhart, *Uvod u diferencijalnu geometriju.* (Prevod sa engleskog) Tatomir Anđelić. — Beograd, Naučna knjiga, 1951.

Geometrijske transformacije. Preveo Tatomir Anđelić. Opšta enciklopedija Larousse u 3 toma. T. 2: Matematika. Astronomija. Fizika. Hemija. Prirodne nauke. Beograd, Izdavačko preduzeće „Vuk Karadžić“, 1972; 202—236.

CONTENS