

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Соња Бошковић

ХЕУРИСТИЧКА МЕТОДА УЧЕЊА
МАТЕМАТИКЕ У ШКОЛИ

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

др Мирјана ЂОРИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Бојана МИЛОШЕВИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милош ЂОРИЋ, асистент са докторатом
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 6. јун 2023.

Садржај

Предговор	1
1 Увод	3
1.1 Кратка историја хеуристичке наставе	3
1.2 Појмовно одређење хеуристичке наставе	5
1.3 Модели хеуристичке наставе у савременој настави	7
1.4 Наставне методе у хеуристичком учењу	9
1.5 Планирање хеуристичке наставе	12
1.6 Артикулација хеуристичке наставе	13
2 Садржај хеуристичког образовања	15
3 Пољини кораци – темељне етапе приликом решавања проблема	17
3.1 Разумевање проблема	19
3.2 Стварање плана решавања	19
3.3 Добијање решења	20
3.4 Осврт на решење и дискусија добијеног решења	20
4 Методе решавања	22
4.1 Метода покушаја и промашаја	22
4.2 Метода решавања коришћењем помоћних проблема	23
4.3 Метода узастопног приближавања	24
4.4 Метода враћања уназад	25
4.5 Метода решавања логичких проблема	26
4.6 Метода помоћних ликова	27
4.7 Алгебарска (Декартова) метода	28
4.8 Математичка индукција	31
4.9 Закључак о методама	32

5	Геометријско мишљење	34
5.1	Регистри семиотичких репрезентација	36
5.2	Дидактичке потешкоће	38
5.3	Просторна геометрија	41
6	Практична примена хеуристичке методе и методе вођеног учења у школи	43
7	Закључак	51
8	Захвалница	53
	Библиографија	54

Предговор

Велики број различитих облика наставних метода не мора значити изузетно добро реализовану наставу математике. Зато је потребно преиспитати употребу свих облика рада и наставних метода и задржати само оне које не спутавају ученике.

Математика је како индуктивна и конкретна, тако и апстрактна и дедуктивна наука. Ово говори о томе колико су за наставу математике важне неке научне методе истраживања. Креативан наставник, бирајући погодне проблеме и примењујући те методе, може ученике оспособити за рад који је врло близак истраживачком раду. Ученике треба поступно научити анализирању, синтези, конкретизацији, апстракцији, индукцији, дедукцији, генерализацији, специјализацији и уочавању аналогije, без обзира хоће ли се они касније озбиљније бавити математиком или не. Математички начин мишљења је драгоцено стечено математичко образовање, применљиво и у многим другим делатностима.

За наставу математике, а посебно за развијање способности ученика за решавање проблема, издвајају два метода: метода проблемске наставе и хеуристичка наставна метода.

Основу за примену проблемске наставе чине проблем, проблемска ситуација и основ проблема. Битна претпоставка за успешну примену проблемске наставе је да су ученици оспособљени за умни рад, правилан избор извора за проучавање и издвајање потребних теоријских чињеница, мисаоно прерађивање, постављање и проверавање хипотеза, језичко обликовање и запис резултата рада и друго.

Најповољнији развој се постиже проблемском и хеуристичком наставом.

За квалитетну реализацију проблемске наставе потребна је добра припремљеност и професора и ученика, а у ситуацијама када она није могућа за примену, због тежине саме проблемске наставе или природе математичког садржаја, користи се хеуристичка настава.

Циљ хеуристичког облика наставе је да истражи правила и методе које воде до проналаска и открића.

У овом раду ће бити теоријски представљен хеуристички модел учења, као и неке наставне методе које су карактеристичне за сам хеуризам.

У првом поглављу биће речи о историји хеуристичког модела учења и научницима који су дали допринос његовом развоју. Такође, биће наведена различита гледишта ове наставе, њени модели и методе које се могу користити и применити како у математици, тако и другим наукама. На крају прве главе биће још и речи о томе како планирати и артикулисати ову наставну методу.

У другом поглављу биће речи о садржају и компонентама хеуристичког образовања.

У наставку, односно поглављу 3, ће бити речи о Пољи и његовим корацима приликом решавања задатака у чијем средишту се налази идеја хеуристичке методе учења. Детаљно су представљене и описане етапе приликом решавања проблема.

У поглављу 4 биће представљене и описане и неке друге методе за решавање проблемских задатака заснованих на постулатима хеуристичке и проблемске наставе, као и примери задатака који илуструју саму примену метода.

Поглавље 5 је осврт на сам развој геометријског мишљења код ученика, као једне од најважнијих компоненти развоја, које ће ученике пратити током целог школовања и живота, а чији развој пружа добру основу за решавање различитих проблема уз помоћ хеуристичке наставне методе.

На самом крају, биће приказано аутентично истраживање примене методе хеуристичке наставе и методе вођеног учења у данашњој савременој настави геометрије са ученицима 3. године гимназије природно-математичког смера. Ученици су били подељени у две групе које осликавају хеуристички метод учења и метод вођеног учења, пред којима су била два задатка која је потребно решити. Добијени подаци су потом статистички обрађени Вилкоксоновим тестом, који представља непараметарски тест примењен на два узорка, где се претпоставља да је расподела обележја симетрична. На основу резултата добијених применом овог теста на податке прикупљене у одељењу трећег разреда може се закључити да постоје статистички значајне разлике између узорака добијених методом хеуристичког учења и методом вођеног учења, када се посматрају као независни узорци.

Глава 1

Увод

1.1 Кратка историја хеуристичке наставе

Организујући наставу, планирајући наставни рад и реализујући га, увек се полази од циља васпитања и образовања. Он може бити различито дефинисан, што зависи од прихваћене оријентације и вредности којима одређено друштво тежи. Ипак, нема образовно-васпитног система у свету у коме као циљ васпитања и образовања није истакнут интелектуални и укупни развој младих. Ученик улази у наставни процес са одређеним когнитивним и емоционалним карактеристикама. Од квалитета наставног процеса, зависе резултати учења - ниво и врсте постигнућа, брзина учења, као и ефекти у емоционалној области. Активно учење, ангажујући нас емоционално, доводи до разумевања, тј. жељене трајне промене свести. Савремене теорије учења и наставе нагласак стављају на овладавање општим принципима истраживања током учења и развијања способности учења и стицања знања. Предност се даје наставним методама које омогућавају ученику релативно самостално стицање знања помоћу одговарајућих поступака и решавања проблема. Хеуристичка настава је један од модела који подразумевају организацију наставе у којој ученици, у највећој могућој мери, добијају улогу истраживача и креатора решења. Таквим начином организовања садржаја стиче се знање које је целовито, вредно и употребљиво, а ова настава је за ученике стимулативна и подстицајна. Термин хеуристика је грчког порекла, а значи проналазити. Архимедов узвик „Еурека!” једна је од првих грчких речи са којима смо се у свом школовању сусрели. Њено значење је „Нашао сам!” којим је Архимед изразио своје задовољство због тога што је открио чињеницу да: „Тело уроњено у течност губи од своје тежине онолико колико тежи телом истиснута течност”, што

је један од основних закона хидростатике. Хеуристички метод је метод наставе и учења који се састоји од низа задатака, а ученици током њиховог решавања сами откривају принципе. Дакле, то је поступак чији је циљ да проучава методе и правила проналажења (откривања) нових сазнања, а посебно научних истина. Решавање задатака је важан део математике од њених почетака и неизоставни део наставе математике у свим временима. У том делу наставе хеуристички метод можемо описати као поступак налажења и систематизовања низа задатака, који нам помажу да решимо неки сложенији задатак или наслутимо неко опште тврђење. Кроз историју значајан допринос изградњи хеуристичког модела у математици се може приписати Декарту¹, Лајбницу², Болцану³, а у новије време, Поанкареу⁴, Штајнхаусу⁵, Фројденталу⁶, Колмогорову⁷.

Међу савременим стратегијама за остваривање наставе математике могу се навести оне које у својој основи морају имати, у целини или неким деловима, идеје Џорџа Поље. То је, пре свега, учење откривањем (*discovery learning*). Хеуристички метод је пут ка откривању, па је очигледно да се доминантно место хеуристичког метода код Поље може сматрати каменом темељцем за ову стратегију. Настојања Поље да избором група задатака која воде до решења неког сложеног проблема, њиховим формулацијама и начинима њиховог решавања, сведоче о томе да је његова трилогија ([19], [20], [21]) битан део заснивања и реализације решавања задатака (*problem solving*) и постављања задатака (*problem posing*). Суштина јесте да ученици сами налазе принципе и законитости решавања задатака, а да наставниковим „развојним” питањима подстичу ученике да на основу онога што већ знају самостално закључују и тако савладавају задатке. Хеуристичка настава не „даје” ученику знање, већ ствара услове да он стиче знање.

У вези са тим, занимљиво је мишљење о разликама у ставовима присталица Виготскога⁸ и заступника индивидуално оријентисане наставе (настава оријентисана на ученика као појединца). Виготски је тврдио да социјализација и развој појединца не теку усклађено, односно да је развој друштвено условљен. У на-

¹ René Decartes, 1596-1650, француски филозоф, математичар и научник

² Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646-1716, немачки математичар, научник, филозоф, проналазач

³ Bernardus Placidus Johann Nepomuk Gonzal Bolzano, 1781-1848, чешки математичар италијанског порекла

⁴ Jules Henri Poincaré, 1854-1912, француски математичар и теоријски физичар

⁵ Hugo Dyonizy Steinhaus, 1887-1972, пољски математичар и научник

⁶ Hans Freudenthal, 1905-1990, немачки математичар

⁷ Андрей Николаевич Колмогоров, 1903-1987, руски математичар

⁸ Лев Семёнович Выготский, 1896-1934, један од утемељивача совјетске психологије и оснивач културно историјске психологије

стави делују два типа односа: „споља-унутра” (при чему „споља” означава материјално деловање, деловање на предмете, а „унутра” означава психичку делатност) и друштво-појединац. Деловање може тећи из правца „споља” према „унутра”, од друштва према појединцу и обратно. Суштина је у томе да спољашње функције постају унутрашње. Виготски сматра да задатак образовања није да обезбеђује слободу дечјег стваралаштва, већ да укључује дете у социјално искуство човечанства. Из тога следи да се он залаже за „давање знања”, а не за стварање услова да ученици стичу образовање. Присталице личносно оријентисане наставе сматрају супротно: знање не треба да буде усмерено ка ученику, већ обрнуто, ученик треба да буде усмерен ка знању.

Научник Каптерјов⁹ каже да је суштина у самосталном откривању закона, правила и формула при чему је улога наставника да усмерава тај процес и руководи њиме. Каптерјов тражи да наставникова питања буду, углавном, „наводећа”. Слушајући та питања, ученик у почетку схвата колико не зна (Сократово „знам да не знам”), стиче знање о своме незнању што је подстицајна основа у тражењу решења за постављене задатке.

У хеуристичкој настави, да би она дала резултате у складу са својим потенцијалом, важно је какав је однос између наставника и ученика. Сократ је своје саговорнике сматрао равноправним учесницима у дијалогу усмереном на тражење истине, па зато поучени тим примером у хеуристичкој настави, заснованој на његовом приступу, однос наставник-ученик треба да буде сараднички. Ауторитарност и „предавање знања” нису у складу са основним принципима хеуристичког учења.

1.2 Појмовно одређење хеуристичке наставе

Хеуристика у школском раду није само наставна метода, него обухвата комплетну организацију наставног процеса, усмерену на откривање знања, у којој су функције ученика и наставника посебно разрађене. Хеуристика у настави противречи традиционалном схватању да је образовање предаја искуства старије генерације млађој. Основна идеја ове наставе је да ученик конструише знања ослањајући се на своје способности, да поставља хипотезе, саставља, моделује, а да затим, уз помоћ наставника, свој ”производ упоређује са аналогним културно-историјским резултатима, да га осмишљава и дорађује“ ([5]).

Руски дидактичар Хуторској¹⁰ под хеуристичком наставом подразумева образовно-

⁹Пётр Фёдорович Каптерев, 1849-1922, руски и совјетски педагог и психолог

¹⁰Андреј Викторович Хуторской, рођен 1959, руски математичар

васпитни рад ученика и наставника, усмерен на самостално проналажење и откривање сазнања. Хеуристичко учење се најчешће састоји из низа задатака који ученици могу решити тек ако открију одређене принципе. Хуторској истиче да је хеуристичка настава таква врста наставе у којој се тежи да ученик конструише своју образовну путању, да осмишљава и поставља циљеве образовања и тако утиче на организацију образовног процеса. Функција знања се мења у овој врсти наставе. Ученик је у могућности да схвати вредност таквих знања, али тек онда када је и сам оспособљен да ствара аналогне образовне производе. Задатак наставника је да помогне сваком ученику да пројектује своју образовну путању и да је упоређује са верификованим научним достигнућима и да доприноси учениковом развоју.

На хеуристичким поставкама била је заснована нова школа француског педагога С. Френеа¹¹ у којој је учење темељено на следећим принципима:

- најефикаснији пут савладавања знања није посматрање, објашњење и демонстрација на којима се заснива традиционална школа, него експериментално утврђивање - природна и универзална метода сазнавања;
- знање се стиче искуством, а не проучавањем правила и закона;
- наставник мора што мање да прича.

Дакле, Френе тражи искуствено знање ученика, које представља њихово сопствено искуство, а не преношење истог од старијих генерација млађој.

У педагошко-психолошкој литератури, у оквирима когнитивних модела, по правилу, као веома успешан, понекад и као „најбољи начин за учење нових појмова у математици и другим предметима” ([3]) истиче се учење откривањем. У размањаној проблематици познат је и веома утицајан Ј. Брунер¹². Према њему ([3]) учење откривањем је начин учења у којем ученици самосталним активностима откривају основна правила и принципе. Брунер при томе сматра да наставник треба да креира проблемску ситуацију која ће подстаћи ученике да питају, истражују, експериментишу и тим путем дођу до открића. Модификација овог начина учења је такозвано вођено учење откривањем (*guided discovery learning*) у којем наставник даје упутства, интервенише у поступку учења. Важно је нагласити да је сам Брунер сматрао да овакав начин учења није подесан у свим ситуацијама, често је непрактичан и нерационалан.

¹¹Célestin Freinet, 1896-1966, француски педагог и реформатор

¹²Jerome Seymour Bruner, 1915-2016, амерички психолог, зачетник конструктивизма

Заправо, ова учења се могу дефинисати на следећи начин:

- учење откривањем је стратегија учења у оквиру које се ученицима обезбеде, учине доступним сви релевантни материјали или предзнања у вези са новим појмом или проблемом и затим се они пуне да „дутају“ и тестирају идеје док самостално не открију (жељена или очекивана) правила или односе,
- вођено учење откривањем је стратегија учења у оквиру које наставник води ученике кроз све кораке или услове који воде до закључка, али их оставља да самостално дођу до актуелног (жељеног или очекиваног) правила.

Ови начини учења су ефикасни и на такав начин усвојени појмови и стечена знања имају карактер солидно утемељених и трајно употребљивих активних компонената менталног склопа ученика.

Њихови недостаци, као што су могући промашаји, опширне припреме, значајан број ученика који, због својих просечних способности, неће стићи до циља, што може деловати обесхрабрујуће захтевају од наставника математике опрез и пажљиво осмишљавање садржаја и услова који погодују примени ових метода.

„Откриће“ у настави математике треба да буду чињенице које можемо, бар локално, у оквирима неке математичке дисциплине или неког сегмента, прихватити као важну истину која има значајне последице у даљем развоју те дисциплине или у дубљем сазнавању како света реалних објеката, тако и света апстрактних математичких објеката.

1.3 Модели хеуристичке наставе у савременој настави

Хеуристички приступ подразумева да се самосталним размишљањем долази до путева и правила за решавање задатака. Од ученика се захтева да напрегну емоционалне и мисаоне снаге да би дошли до тачног решења. Дакле, није довољна интуитивна, већ је потребна и логичка активност. Нека од тих правила приликом решавања су:

- неопходно је себи поставити нека од основних питања (Шта је непознато? Шта је дато? Шта је услов?);

- припремити идеје за решења и план за решавање;
- треба контролисати сваки свој корак и
- добијени резултат треба обавезно проверити - убацивањем резултата у почетни проблем и тако проверавајући да ли су сви тражени захтеви задовољени.

Концепција продуктивне наставе, коју је развио немачки педагог Џ. Шнајдер¹³, има хеуристички карактер. Полазиште је обучавање на основу искуства из практичног живота. У оквиру овог пројекта предметна подела не постоји. Овакав облик обучавања подстиче ученике да самостално уче и додатно повећава мотивацију. Настава организована на овај начин упућује ученике да изађу у спољашњи свет. Хеуристички елементи у њој су индивидуални наставни програми које припрема сваки ученик за себе уз помоћ наставника.

Модел хеуристичке наставе може се уочити и код педагога Џ. Шваба¹⁴. Шваб на следећи начин структурише ученичке активности:

- упознавање ученика са садржајем истраживања подразумева употребу властитог концепта природно-научног истраживања;
- сагледавање тешкоћа научног сазнавања као истраживачког проблема;
- планирање и реализација израде властитих истраживачких процедура и поновно разматрање свих приступа истраживању.

Настава усмерена на ученика као појединца, коју су концептуално утемељили руски дидактичари, у великој мери је хеуристичка. Полазиште је идеја о универзалности дијалога као темеља људског сазнања. Основним категоријама се сматрају схватање и међусобно разумевање. Присталице ове врсте наставе истичу да при објашњавању постоји само једно сазнање, један субјекат и монолог, а при разумевању постоје два субјекта, два сазнања и међусобно разумевање, дијалог. Улога наставника је да помогне ученицима тако што ће

¹³ Jens Schneider, Universität Osnabrück

¹⁴ Joseph Schwab, 1909-1988, američki didaktičar

их водити кроз стваралачки и истраживачки рад. У центру пажње је уникатна целовита личност детета која стреми ка максималној реализацији својих потенцијала (самоактуелизацији), отворена за опажања новог искуства и способна за свестан и одговоран избор у разноврсним животним ситуацијама.

1.4 Наставне методе у хеуристичком учењу

Етапе у хеуристичкој настави су врло разноврсне. Неки педагози предлажу да се настава одвија у неколико корака хеуристичког истраживања: постављање и одређивање задатака, сагледавање могућих путева деловања, реализација решења, оцењивање постигнутог резултата. За хеуристичке методе карактеристичне су развијајуће форме мисаоне активности као што су упоређивање, анализа, синтеза, логичко повезивање, откривање путева који воде до решења постављених задатака.

Поред традиционалних метода, у хеуристичком моделу наставе користе се наставне методе усмерене првенствено на ученичко откривање, истраживање и разумевање објеката сазнања и развијање креативних и организационих способности личности. Дидактичар Хуторској методе хеуристичке наставе дели у три групе:

- когнитивне - часови посматрања, експериментисања лабораторијских вежби...;
- креативне - дискусије, дијалози, истраживања...;
- организационо-делатносне - одређивање циљева, норми, разрада индивидуалних програма...

Когнитивне наставне методе односе се на усвајање конкретних садржаја образовних области и наставних предмета. У ову методу спадају: компарација, анализа, синтеза, класификација и др.

Креативне наставне методе обезбеђују ученицима могућност да стварају образовне продукте, те се називају и интуитивне методе.

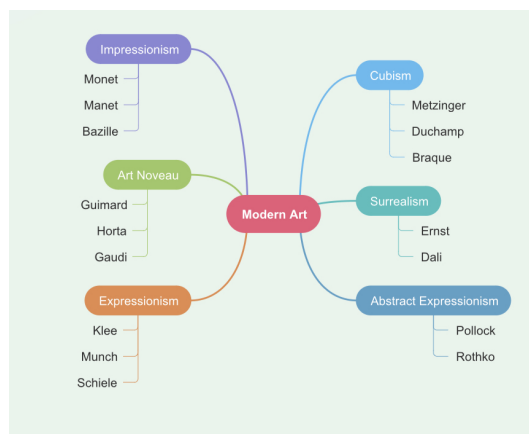
Организационе наставне методе подразумевају оспособљавање ученика у планирању, припремању, контроли, разматрању добијених резултата, као и другим организационим делатностима.

Специфичне методе које су у вези са хеуристичким моделом наставе јесу: метода хеуристичког разговора, метода увиђања смисла, метода хеуристичког посматрања, метода хеуристичког истраживања, метода конструисања појмова, метода прогнозирања, метода грешака и метода „олује идеја“.

1. **Метода хеуристичког разговора**, сматра дидактичар Прокопчев ([18]), у дидактици се одређује као метода код чије примене се не саопштавају готова знања, већ кроз разговор, путем расуђивања, ученици сами откривају истине, правила и закључке. Хеуристички разговор захтева добру припрему и умешност наставника како би одговарајућим питањима усмеравао ученике до одређених открића. Састоји се од низа унапред припремљених питања којима ће се подстаћи размишљање ученика. Приликом ових разговора наставник не исправља погрешне одговоре директно, већ на њих надовезује друга питања која наводе ученике на исправан одговор. Ваљано структуриран хеуристички разговор подстиче ученике да постављају питања.
2. **Метода увиђања смисла** подразумева уочавање основног узрока настанка неке појаве или процеса, увиђање и разумевање идеје која се у њима налази и њиховог основног смисла.
3. **Метода хеуристичког посматрања** представља припремну етапу у формирању теоријских знања ученика. Посматрање је полазна активност помоћу које ученици прикупљају чињенице неопходне за развијање уопштавања. Истовремено са инструкцијама добијеним од наставника, ученици током посматрања уочавају и друге особине посматраног објекта, добијају нове информације и конструишу нова знања.
4. **Метода хеуристичког истраживања** има велики значај за подстицање развоја ученичких потенцијала, а посебно креативног, логичког, критичког и еволутивног мишљења.
5. **Метода конструисања појмова** помаже ученицима да путем анализе, упоређивања и дискусије дограђују форму сопствених представа и појмова. Као резултат таквог рада јављају се колективни стваралачки продукти – заједнички формулисани одређени појмови. Након тога наставник ће упознати ученике и са другим формулацијама, најчешће оним које су наведене у уџбенику. Метода грешака подразумева

промену устаљеног негативног односа према грешкама и његову замену за конструктивнији однос према њима. Пажња усмерена ка грешкама не мора за циљ имати увек њихово исправљање, већ и разјашњење њихових узрока или начина настајања. Оспособљавањем ученика да увиђају међусобне везе грешака са чињеницама, подстиче се хеуристичка делатност ученика.

6. **Метода олуја идеја** (*brainstorming*) за основни задатак има стимулсисање ученика на стварање што већег броја идеја ради ослобађања од интерног мишљења и стереотипа. Ова метода има следеће етапе: генерисање идеја, анализа проблемске ситуације и оцењивање идеја, генерисање супротних идеја. Приликом генерисања идеја прикупљају се идеје по групама и свака критика идеје је непожељна. Добијене идеје се систематизују и обједињују по општим принципима и поступцима, а затим се разматрају могуће препреке за реализацију наведених идеја. На самом крају се проглашавају, оцењују и бране најбоље идеје. Један од најбољих примера ове методе су мапе ума. Мапе ума ученицима помажу у савладавању градива и генерисању идеја. Ученици могу користити овај метод да логички организују информације и креирају оквир за писање, прављење извештаја, упоређивање идеја итд. Приказани дијаграм представља стандардну мапу ума коју ученици користе за своје задатке, како би креативно решавали своје проблеме.



Слика 1.1: Мапа ума

Специфичан облик рада који се остварује ван традиционалне наставе, а који се сматра карактеристичним за хеуристичко учење је и **хеуристичко уду-**

бљивање. То је такав облик рада где се ученици и наставник у току неколико дана баве једном темом. Удубљивање има најчешће међупреметни карактер. Оно обухвата низ образовних ситуација које корак по корак приближавају ученике суштини проучаваног проблема.

Користећи неку од наведених специфичних метода хеуристичког модела наставе, ученици се поступно оспособљавају да користе поступке научног истраживања. На тај начин приближавају се научном сазнању и формирању научних појмова. Приликом избора метода треба имати у виду природу градива, постављене циљеве, састав одељења и искуства ученика.

Није сваки наставни садржај погодан за примену ових метода, као што нема наставног часа на коме се користи само једна метода или поступак. Једна метода може бити преовлађујућа, али се у току часа користе и друге методе. Сматра се да поред традиционалних наставних метода треба користити и методе усмерене на ученичко откривање и истраживање. То се може постићи комбиновањем са специфичним наставним методама у хеуристичком моделу наставе. На основу претходно наведеног оне се могу искористити као значајан пут у развијању когнитивних, креативних и организационих способности ученика, што је један од примарних циљева наставе и учења.

1.5 Планирање хеуристичке наставе

Хеуристички приступ даје предност индивидуалном исказивању ученичких способности и стваралаштва. Тежиште се пребацује са питања шта учити на питање како учити. Циљеви се дефинишу на основу конкретних услова наставе, имајући у виду циљеве које је поставио наставник и оне које постављају ученици-који могу предложити и свој садржај.

Вилотијевић ([5]) наводи више различитих типова хеуристичке наставе: сукцесивна структура, блоковска структура, разноврсни концепти, истоврсне активности, групна активност, структуративна ситуација и индивидуални програми.

Који тип хеуристичке наставе ће бити реализован, зависи од опредељености наставника. Анализирајући структуру на којој се заснива класификација часова у хеуристичкој настави, научник Владимир Пољак ([22]) наводи следеће компоненте наставног процеса: припремање ученика за обраду, об-

рада наставних садржаја до ступња схватања, вежбање радње, понављање садржаја и проверавање ступња схватања. Ова класификација наставних часова је прихваћена и у осталим врстама наставе. Сличну класификацију предлаже Хуторској у својој ”технолошкој карти за конструисање система часова,, ([30]). Технолошка мапа наставе је педагошко средство које служи наставнику за одређену тему и индивидуално кретање ученика кроз образовни процес. Мапа нуди етапе и процедуре наставе за основне садржаје из проучаваног програма. Исте циљеве могуће је остварити применом различитих облика и метода. Хуторској даје технолошку мапу за планирање наставе, која садржи шему за пет блокова: уводни часови, обрада наставних садржаја, вежбање, контрола и примена стечених знања. Практична вредност овакве мапе је велика, јер наставник у сваком тренутку има у виду шта треба радити, које задатке треба да реализује и попис метода, активности и поступака које може користити. Структуру часова хеуристичке наставе чине основне етапе наставног часа: уводни, средишњи и завршни део.

Функција сваког појединачног дела часа хеуристичке наставе иста је као и у разредно-предметно-часовном систему. Фундаментална разлика између часова хеуристике и традиционалне наставе огледа се у хеуристичкој дидактичкој ситуацији. Хеуристичка дидактичка ситуација се дефинише као ”ситуација образовне напетости, која се појављује спонтано или је организована од стране наставника, и чије се разрешење налази кроз хеуристичку делатност свих учесника у њој,,.

Хеуристичка дидактичка ситуација укључује основне етапе часа хеуристичког модела наставе: мотивациону делатност, задавање (стварање) проблема, самостално решавање проблема од стране учесника у ситуацији, демонстрацију образовних резултата, упоређивање са резултатима других ученика и разматрање резултата.

1.6 Артикулација хеуристичке наставе

Хеуристичку наставу треба тако артикулисати тако да се ученику обезбеди кретање индивидуалном образовном путањом. Хуторској предлаже да се настава реализује у седам етапа:

1. Наставник дијагностикује ниво ученикових способности неопходних за

остваривање успешне активности у одговарајућој наставној области. Одређују се који су облици рада и методе најприхватљивији ученицима за дату наставну јединицу, у зависности од њихове мотивације и заинтересованости.

2. Ученик саставља концепт теме коју треба савладати, акцентујући најважније појмове.
3. Ученик треба да изгради своју слику одређене области (теме) и да открије какву она улогу може имати у његовом даљем образовању.
4. Сваки ученик програмира сазнајну активност према својим општим и фундаменталним садржајима.
5. Наставник организује активност ученика тако што их усмерава на проблеме, критеријуме за анализу и самооцењивање.
6. Ученици демонстрирају своје резултате, а онда са остатком одељења вреднују исте.
7. Осмишљавају се и вреднују општи и индивидуални резултати сазнајне активности, утврђује се репродуктивно и стваралачко знање. Резултати се онда упоређују са циљевима индивидуалних и општих програма рада.

Глава 2

Садржај хеуристичког образовања

Традиционално укорееен задатак образовања да преноси искуства и знања старије генерације млађој преовладава у односу на личносни концепт у коме се сматра да је најважнија улога образовања да подстиче самореализацију личности. У традиционалном концепту постављени циљеви се реализују преко садржаја који су основни градивни елемент образовног система. Међутим, другачији приступ образовања истиче улогу у самосталним активностима ученика и његовом унутрашњем расту. Овај концепт је близак хеуристичкој настави у којој је образовни садржај средство учениковог самоиспољавања. Суштина хеуристичке наставе је да сваки ученик створи властити садржај образовања.

Садржај хеуристичкох образовања формира се у процесу наставе као њен резултат. Остварујући се на индивидуалном нивоу, стваралаштво има општечовечански карактер. Ученици сами себи постављају циљеве и задатке, а наставник им помаже да до тих циљева дођу и прати како се они реализују. Наставник представља организатора индивидуалне активности ученика.

Хеуристичко образовање чине следеће компоненте:

1. Садржај који извире из окружења - на основу ког ученик ствара властити садржај образовања.
2. Садржај учениковог образовног резултата - сваки ученик га остварује изучавањем главних образовних тема, тема одређених образовним стан-

дардима и тема које је сам изабрао.

3. Културно - историјски садржаји - учеников резултат треба да буде такав да се може упоређивати са културно - историјским достигнућима. Посматрање аналогних културно - историјских резултата омогућује ученику да потврди и развије своје идеје или да види алтернативна решења.
4. Делатносни садржај образовања - ученик треба да се обучи да користи библиотеке, приручнике, енциклопедије, архиве, да влада различитим начинима изражавања, да примењује различите технологије...
5. Предметни садржаји образовања - садржаји наставних области који су усредсређени на кључне теме и обезбеђују знања предвиђена образовним стандардима.
6. Међупредметни садржај образовања - постоји више образовних тема карактеристичних за различите, а некад и за све научне области. То су садржаји који допуњују са њима повезане појмове.
7. Осмишљавање и уопштавање садржаја хеуристичког образовања - ученик треба да осмисли и уопшти знање, а тај процес треба да обухвати информацију о садржају знања и незнања (шта знам, а шта не), информацију о настајању, развоју и трансформацији знања (знам како), смислености информација и активности да се до њих дође (знам зашто), самоодређење у односу на стечено знање (ја знам). Рефлексивна је фаза у којој ученик треба да размишља о ономе што је радио и резултату до ког је дошао. Треба да сагледа методологију коју је применио, класификује своје начине рада, схвати идеје, принципе, правила, формулише проблеме и анализита путеве за њихово решавање.

Од квалитета наставникових питања зависи успешност хеуристичке наставе. Добра су питања "отвореног типа", која не указују на пут решавања проблема, него су пред ученицима отворени различити путеви за решавање. При томе, треба имати у виду да таква питања није могуће поставити увек, већ их треба примењивати тамо где наставне теме и јединице то омогућавају, као и онда када за то има довољно времена, како би ученици могли да искористе све предности такве методе.

Глава 3

Пољини кораци – темељне етапе приликом решавања проблема

Џорџ Поља (George Pólya) је рођен у Будимпешти 1887. године. У младости није показивао интересовање за математику, међутим приликом бављењем филозофијом, у каснијим годинама, почео се бавити и математиком. Докторирао је математику на Универзитету у Будимпешти. Такође, радио је на универзитетима у Немачкој, Енглеској, Швајцарској.



Слика 3.1: George Pólya

Поља је својим радовима фундаментално допринео комбинаторици, теорији бројева, теорији вероватноће, парцијалним диференцијалним једначинама, као и комплексној анализи. Био је врстан учитељ и предавач, а посебно се залагао за хеуристички приступ учењу. Тврдио је да постоји умеће открића решења задатака и да га је могуће научити. Циљ сваког ученика, било ког узраста, је да нађе универзалну методу која омогућује да успешно реши задатак. Међутим, то у пракси није увек лако, због чега се уводе и развијају посебне методе решавања, па се самим тим развија и посебна методика, **методика решавања задатака**. Њена суштина јесте научити ученике да решавају задатке, као и како да препознају задатке из исте класе. Није мо-

гуће наћи јединствени кључ за решавање задатака, али се проучавањем доста примера могу увидети методе за решавање сличних проблема.

Поља је 1945. године написао књигу "How to solve it,, која је постала основна литература о стратегијама решавања математичких проблема. У тој књизи је приказао и објаснио четири основне етапе при решавању сваког (па тако и математичког) проблема. Разраду приступа решавања задатака Поља је поткрепио низом корисних смерница, усмеравајућих питања и логичких расуђивања. Према Пољи процес решавања се одвија у четири етапе:

1. разумевање проблема;
2. стварање плана за његово решавање;
3. извршавање датог плана и добијање решења;
4. осврт на решење и дискусију самог решења.

Ове четири етапе заправо представљају основу хеуристичке наставе и решавања проблемских задатака. За хеуристичке методе учења карактеристичне су развијајуће форме мисаоне активности као што су упоређивање, анализа, синтеза, логичко повезивање, откривање путева за решавање постављених задатака. Хеуристичку наставу треба организовати тако да се ученику обезбеди што бољи и успешнији напредак у конкретној области, односно теми. На почетку, наставник би требао да утврди претходни ниво знања, мотивацију и заинтересованост ученика за саму наставну тему, а потом да, у складу са тим, одреди који су наставни облици и методе рада најприхватљивији ученицима. Следећи корак је да ученик одреди које су кључне тачке приликом решавања датог проблема, тј. да разуме сам проблем. Потом, користећи своја претходна знања и искуства, прави план за његово решавање при томе, уколико је могуће, повезујући проблемске ситуације са примерима из свакодневног живота. Повезивање проблемских ситуација са свакодневним животом може помоћи ученицима да схвате шта је суштина наставне теме у којој решавају дати проблем. Следеће је да изврше свој план за решавање, а на самом крају и да дискутују своје решење и да га упоређују са решењима других ученика, како би остварили што ефикасније резултате учења.

У наставку ће бити детаљније описани ови кораци, који представљају основ за откривање решења у хеуристичкој настави.

3.1 Разумевање проблема

Приликом решавања проблема, важно је знати и разумети његову суштину. Нека од питања која треба поставити су: Шта у задатку желимо да решимо, да ли знамо шта је познато, а шта не, да ли постоје сувишне информације у задатку, да ли су услови дати у задатку довољни за његово решавање... Потребно је да ученик из разних углова сагледа главе делове датог проблема. Такође, уколико је могуће, треба нацртати слику и пажљивим одабиром нотације означити познате и непознате елементе. Још једно питање које је од значаја у овој фази јесте "Да ли је могуће задовољити задати услов?,,. Разумевање проблема се може поделити на две фазе: упознавање са проблемом и рад на бољем разумевању проблема.

Упознавање са проблемом

Три кључна питања која треба поставити јесу: "Одакле да почнем?,,", "Шта могу да урадим?,,", као и "Шта тиме добијам?,,. У овој фази се упознајемо са проблемом, трудимо се да схватимо његову суштину, без уласка у претеране детаље. Најважнији део ове фазе је уочити битне тачке за решавање самог проблема.

Рад на бољем разумевању проблема

У овој фази додатно изолујемо главне делове проблема. Потребно је проћи кроз разне етапе проблема, разматрати их једну по једну, а затим комбиновати их, како бисмо сагледали ширу слику за решавање проблема и уочили неке детаље који ће нам служити у каснијим корацима.

3.2 Стварање плана решавања

Ова етапа подразумева налажење погодне стратегије за решавање проблема. Јасно је да се многи задаци не могу решити само једном методом, већ је за њихово решавање потребно комбиновати више метода. Неке од смерница које треба пратити током решавања проблема су:

- наћи везу између познатог и непознатог, а ако се не може наћи посредна веза, потребно је искористити помоћне задатке;

- да ли нам је дати задатак познат или да ли смо се већ сусрели са задатком сличног типа;
- може ли се дати задатак преформулисати;
- уколико не можемо решити задати проблем, можемо ли решити неки сродан проблем или део проблема. Поља каже следеће: ‘Ако не можеш решити дати проблем, онда постоји лакши проблем који можеш решити. Пронађи га.’;
- да ли је све што нам је дато и искоришћено приликом решавања и да ли смо из њих извели нешто корисно.

3.3 Добијање решења

Није једноставно осмислити план и идеју решавања проблема. За успех је потребно укључити и раније стечена знања, концентрацију, добре менталне навике, а на крају и срећу. Сам план даје оквиран начин решавања проблема. Потребно је тај план детаљно разрадити и заиста се уверити у његову ваљаност. Доказивањем сваког дела плана, склапамо целину која нам омогућава да дођемо до крајњег циља задатка, а то је његово решавање. Овај корак подразумева извођење стратегије одабране у претходном кораку. Међутим, у етапи добијања решења се може закључити и да одабрана стратегија не доводи до циља. Тада је потребно изменити стратегију, а не одустајати од циља.

3.4 Осврт на решење и дискусија добијеног решења

Важно је да ученик из решеног задатка уочи оно што му у будућности може послужити при решавању других задатака. Ова етапа подразумева:

- Проверу добијеног резултата заменом у почетни проблем;
- Интерпретацију добијеног решења у терминима задатог проблема (одговор на питање има ли добијено решење смисла и да ли је задати проблем решен у целости);

- Утврђивање постоји ли још нека метода којом се може решити постављени проблем;
- Уколико је могуће, утврђивање других сродних или општијих проблема који се могу решити применом наше изабране методе.

Дакле, ученик је извршио свој план и решио проблем уз помоћ претходних корака. Иако има добре разлоге да верује да је његово решење исправно, ипак су могуће грешке. Због тога је пожељно проверити решење, посебно уколико постоји нека брза и интуитивна процедура за тестирање резултата. Ово је идеално место где професори имају прилику да прикажу везе између различитих проблема, као и везу између математичких проблема и реалног света. Такође, наставник треба да подстиче ученике да замисле случајеве у којима би могли да искористе свој осмишљени поступак, или пак, резултат.

Глава 4

Методе решавања

Поред неких специфичних метода везаних за хеуристичку наставу, који су наведени у поглављу 1.4., посматрајући Пољине кораке, можемо уочити и неке опште методе решавања задатака у овом облику наставе. Сама реч **метода** значи пут доласка до остваривања жељеног резултата на неком практичном или теоријском нивоу. Неке од општих метода решавања су метода покушаја и промашаја, метода промене фокуса, графичко-аритметичка метода, метода решавања уназад, разлагање проблема на потпроблеме и друге. Постоје методе које су везане за решавање појединих типова задатака. Неке од њих су састављање таблица, Гаусова метода елиминације, метода неодређених коефицијената и друге. Такође, треба поменути и методе свођења на апсурд и математичку индукцију, које се користе онда када је тешко спровести директан доказ.

У наставку ће бити наведене и описане неке од њих.

4.1 Метода покушаја и промашаја

Учење на сопственим грешкама и сопственим искуством је најучинковитије. Стратегија покушаја се примењује у ситуацијама када немамо неку бољу идеју. Задатак се решава наслућивањем његовог решења или поступка који води решењу и његовом провером. Једна од мана ове методе јесте што нисмо сигурни да ли је добијено решење јединствено, као ни која је структура осталих решења уколико она постоје. Такође, ова метода може бити и неефикасна, јер исцрпљивање свих могућности није временски најрационалније. Зато, ову методу треба комбиновати са логичким закључивањем. Метода

покушаја и промашаја се може применити и у случају задатака вишеструког избора, где је најмање један од понуђених одговора тачан. Убацавањем погодно изабраних вредности у дати почетни израз/зadataк се елиминишу неки од понуђених одговора. На крају, ова метода ипак не подстиче ученике на изградњу новог математичког знања, па је треба примењивати у случајевима када немамо других опција.

Пример:

Отац има на располагању 1600 динара, које жели да распореди својој деци. Најстарије дете ће добити 200 динара више него средње, а средње дете 100 динара више од најмлађег. Колико новца ће добити свако дете?

Решење:

број погађања	најмлађе дете	средње дете	најстарије дете	укупно
1	100	200	400	700
2	200	300	500	1000
3	300	400	600	1300
4	400	500	700	1600

Табела 4.1: Таблични приказ методе покушаја и промашаја

4.2 Метода решавања коришћењем помоћних проблема

Ланци еквивалентних помоћних проблема су чести у математичком закључивању. Потребно је решити задатак А, за који не видимо решење, али уочавамо да је проблем А еквивалентан проблему Б. Узимајући у обзир Б, можемо наићи на трећи проблем В који је еквивалентан Б. На исти начин, смањујемо проблем В на проблем Г, настављајући поступак све док не дођемо до последњег проблема Л чије је решење познато или непосредно. Будући да је сваки проблем еквивалентан претходном, тако последњи проблем Л мора бити еквивалентан почетном проблему А. Дакле, можемо доћи до решења проблема А из проблема Л, који је био последња карика у ланцу помоћних проблема.

Пример:

Наћи решење једначине $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решење:

Означимо наш почетни проблем са А. Дати проблем можемо трансформисати у други проблем (Б) као

$$(2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 144 = 0 \quad (\text{Б}),$$

тако што смо почетну једначину помножили са 4. Треба уочити да су ови проблеми еквиваленти, али свакако нису идентични. Корак од А до Б има врху и треба бити очигледан свима који су упознати са решавањем квадратних једначина. Даље, трансформишемо Б у В на следећи начин:

(В): $(2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 169 = 25$. Затим, настављајући трансформације добијамо проблем

$$(\Gamma): (2x^2 - 13)^2 = 25;$$

$$(\Delta): 2x^2 - 13 = \pm 5;$$

$$(\text{Ђ}): x^2 = \frac{13 \pm 5}{2};$$

$$(\text{Е}): x = \pm \sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}};$$

$$(\text{Ж}): x = 3 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = -2.$$

4.3 Метода узастопног приближавања

Метода узастопног приближавања се примењује у проблемима у којима се може уочити монотоност, односно раст или пад посматраних величина и уколико је могуће законитост по којој се та промена одвија. Ова метода се посебно користи приликом решавања Диофантових једначина, као и за приближно решавање нелинеарних једначина методом тангенте, методом оптимизације (најбржег спуста), као и другим итеративним методама.

Пример:

Ученици су од штапића једнаке дужине правили троуглове и квадрате. Ако су употребили 300 штапића и направили 92 фигуре, колико је било троуглова, а колико квадрата?

Решење:

Како знамо да су ученици сложили 92 фигуре, разматрамо крајње случајеве. Највећи могући број троуглова је 92 и у том случају нема квадрата. С

друге стране, највећи могући број квадрата је 92 и тада нема троуглова. У првом случају је укупан број страница једнак 276, а у другом 368. Како је употребљено 300 штапића можемо закључити да је укупан број страница фигура у задатку једнак 300. Дакле, ученици су направили и троуглове и квадрате, а не само једне од њих. Како нам крајњи случај не одговара, можемо размотрити средњи, у коме имамо 46 троуглова и 46 квадрата. Тада имамо 322 странице, што није решење нашег проблема. Како квадрат има више страница него троугао, број његових страница више доприноси укупном збиру, па треба смањивати постепено број квадрата.

број троуглова	број квадрата	укупан број страница
92	0	276
0	92	368
46	46	322
50	42	318
55	37	313
60	32	308
65	27	303
70	22	298
69	23	299
68	24	300
67	25	301

Табела 4.2: Таблични приказ методе узастопног приближавања

Овим поступком смо смањивали број квадрата, а повећавали број троуглова, све време водећи рачуна да је укупан број фигура 92, а број страница 300. Дакле, закључујемо да су ученици направили 68 троуглова и 24 квадрата.

4.4 Метода враћања уназад

Метода враћања уназад се темељи на реконструкцији корака која се изводи обрнутим редоследом, од последњег ка почетном кораку. Ова метода започиње постављањем циља, односно решења проблема. Погодна је за коришћење приликом геометријских задатака, попут конструкција, превођења проблема задатог речима у једначине, неједначине или симболе и других.

Пример:

Радијски водитељ планира свој суботњи програм. У сат времена мора одвојити 5 минута за вести, 4 минута за време, 3 минута за локалне најаве и 27 минута за рекламе. Колико може песми да пусти у току свог радног времена, ако свака песма траје у просеку 3 минута?

Решење:

Како знамо крај ”проблема, - крај емисије, крећемо од тог податка и враћамо се уназад. Како емисија траје 60 минута, и треба одвојити 5 минута за вести, 4 за време, 3 за локалне најаве и 27 за рекламе, што је укупно 39 минута програма. Дакле, за музички програм преостаје $60-39=21$ минут. Како свака песма траје 3 минута, то значи да је могуће пустити 7 песама.

4.5 Метода решавања логичких проблема

Логички проблеми су заправо додатни математички садржај који надарене ученике припремају за све нивое такмичења. Логички задаци су они у којима нема или није тежиште на геометријским објектима или бројевима, већ преовладава логички елемент. У таквим задацима је обично реч о исказима који се односе на жива бића или објекте било какве врсте, којима је заједничко да су истинити или неистинити. Предност ових задатака је што за њихово решавање није потребно велико математичко предзнање, као и то што су текстови тих задатака углавном исказани само речима, у виду ”приче,. У њима наилазимо на својства, особине и односе живих бића или предмета са којима се сусрећемо у свакодневном животу.

Пример:

Марко, Сара, Лана, Душан, Никола и Тамара иду на вечеру да прославе дипломирање Саре и Николе. Оброк сваке особе је коштао исто. Сару и Николу ће остатак друштва частити, али тако да свако од слављеника мора дати допринос у плаћању obroка другог слављеника. Колико свако од њих треба да плати уколико је укупан рачун био 12000 динара?

Решење:

Како је укупан рачун био 12000 динара, а њих има 6, то значи да би свако од њих требао платити по 2000 динара. Међутим, постоје и додатни услови на које треба обратити пажњу. Знамо да је Сара платила $\frac{1}{5}$ Николиног obroка, тј. $\frac{1}{5}2000 = 400$ динара. Такође, Никола плаћа $\frac{1}{5}$ Сариног obroка, тј. 400

динара, што укупно за њих двоје износи 800 динара. Дакле, остатак друштва треба да плати још 11200 динара, а како свако од њих четворо плаћа једнаке делове, то значи да свако треба да плати по 2800 динара. Коначно, Сара и Никола плаћају по 400 динара, док Марко, Лана, Душан и Тамара плаћају по 2800 динара.

4.6 Метода помоћних ликова

Један од важних корака приликом решавања планиметријских проблема је цртање цртежа, односно скице. У неким случајевима могуће је одмах увидети везе између познатих и непознатих елемената, па је решавање задатка олакшано. Међутим, у случајевима када то није могуће потребно је допунити већ постојећу скицу новим одговарајућим елементима (продуживање/скраћивање неке дужине, повлачење додатних дужи, описивање помоћних кружница...), чиме се добија помоћни лик уз помоћ кога решавамо задатак. Приликом цртања треба обратити пажњу на кључне елементе задатог проблема, јер погрешна скица може довести до погрешног смера решавања проблема и на самом крају нетачног решења. Такође, треба напоменути да је скица, у одређеним врстама задатака, јако важна, али не може престављати само решење задатака. Наиме, неопходно је доказати да заиста важи све оно што смо скицом увидели. Тек тада је решење задатка потпуно.

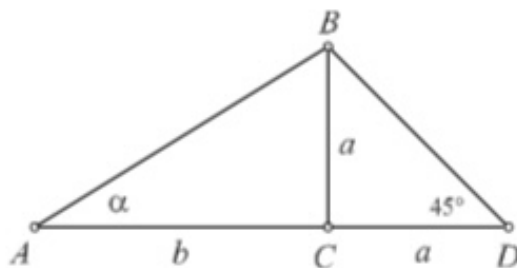
Пример:

Конструисати правоугли троугао ABC , ако је задат његов угао α и збир дужина његових катета $a + b$.

Решење:

Анализа: Нека је ABC тражени правоугли троугао. Троугао је потребно допунити новим елементима тако да се добије лик код кога је дужина једне стране $a + b$. Постоје два могућа решења - продужавање катете AC или BC . Нека је продужена катета AC . Продужићемо је за дужину катете a , тако да је $AD = a + b$. Троугао ABD се може конструисати, по ставу ССУ, позната су нам два угла $\angle DAB = \alpha$, $\angle BDA = 45^\circ$, $AD = a + b$. Након тога се на једноставан начин може конструисати троугао ABC . Помоћни елемент, у овом задатку је троугао ABD .

Конструкција:



Слика 4.1: Троугао

1. $AP \cap k(A, a + b)$,
2. $\angle DAK = \alpha$,
3. $\angle DAB = 45^\circ$ (симетрала правог угла),
4. $B = AK \cap DQ$
5. нормала из тачке B на P ,
6. C је пресек нормале и AP ,
7. троугао ABC .

4.7 Алгебарска (Декартова) метода

Алгебарска метода се заснива на преводу задатака из текста у неки од алгебарских израза. Тако "новодобијени", проблем решавамо уз помоћ алгебарских метода, док се решење интерпретира у почетном контексту. Ова метода се често користи приликом решавања проблемских задатака који се свде на линеарне једначине или неједначине, оне који се свде на низове, они који се свде на одређивање тока функције или екстремних вредности, у аналитичкој геометрији приказивањем објеката у координатном систему... Уколико бисмо применили Пољине кораке на ову методу:

1. Шта се у задатку тражи? Шта је непознато, а шта познато?
2. Текст задатка треба превести у одговарајуће математичке симболе и алгебарски запис-непознате објекте означити одговарајућим симболима, а алгебарском везом повезати познате и непознате објекте.

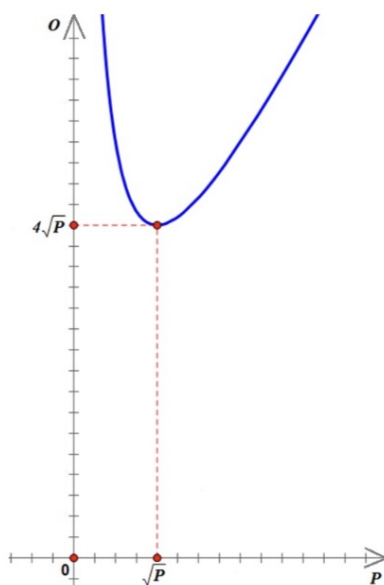
нам се тражи правоугаоник најмањег обима, то тражимо минимум добијене функције.

Тражимо извод, примењујући основна правила за извод збира и количника и добијамо $O' = 2(-\frac{P}{b^2} + 1)$. Минимум, односно екстремна вредност се добија у тачки у којој је први извод функције једнак 0. Треба обратити пажњу да вредност 0 не може бити екстремна вредност, јер је дужина странице позитивна величина и при томе наша функција није дефинисана у тачки 0.

Из наведеног следи да је $-\frac{P}{b^2} + 1 = 0$, $\frac{P}{b^2} = 1$, $b^2 = P$, $b \neq 0$, $b = \sqrt{P}$, јер је b страница правоугаоника, па мора бити позитивна вредност. Такође, како знамо да је $P = a \cdot b$ и на основу претходног, то ће следити да је $a \cdot b = b^2$, $a = b = \sqrt{P}$. Наредни корак је да одредимо монотоност наше функције. Уколико желимо да одредимо интервал где је функција растућа, треба испитати где је први извод функције позитиван, тј. $\frac{P}{b^2} > 1$, $\frac{P}{b^2} - 1 > 0$, $\frac{P-b^2}{b^2} > 0$. Како је квадратна функција увек позитивна, то ће знак првог извода зависити од бројиоца, односно треба да важи да је $P - b^2 > 0$. На основу особина квадратне функције и области дефинисаности наше функције, решење добијене неједначине је $b \in (0, \sqrt{P})$. Слично, $P - b^2 < 0$ када је $b \in (\sqrt{P}, +\infty)$.

Дакле, како се монотоност мења у тачки $\sqrt{P}$ и то тако што функција најпре опада, па потом и расте, то ће тачка $\sqrt{P}$ бити уједно и тражен минимум, па је страница правоугаоника једнака $a_{min} = \sqrt{P} = b_{min}$.

Тражени обим је $O_{min} = 2a + 2b = 2\sqrt{P} + 2\sqrt{P} = 4\sqrt{P}$.



Слика 4.3: График функције О

4.8 Математичка индукција

Математичка индукција је принцип који се обично користи да се докаже да је дати исказ тачан за све природне бројеве.

Принцип математичке индукције: Ако за неко тврђење $T(n)$, $n \in \mathbb{N}$ важи:

1. $T(1)$, тј. дато тврђење важи за $n = 1$;
2. Претпостављамо да тврђење важи са све бројеве $n, (T(n))$ (индуктивна хипотеза),
3. Доказујемо да тврђење важи за $n + 1$.

Пример:

Фибоначијев низ

Фибоначијев низ је низ бројева F код које је сваки број једнак збиру претходна два који је добио име по математичару Фибоначију.

$$F = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Почетни елемент се обично обележава са f_0 , други са f_1 , трећи са $f_2, \dots$ Дакле, Фибоначијев низ можемо дефинисати као рекурзивну формулу на следећи начин: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$

$$f_0 = f_1 = 1.$$

Ако би се ова рекурзивна формула изменила на различите начине, како би промене утицале на својства резултујућих низова бројева? Због тога су предложене различите генерализације Фибоначијевог низа, што је довело до групе секвенци које су укључивале F као посебан случај.

Доказати да је $f_{n+m} = f_{n-1}f_{m-1} + f_n f_m$.

Решење:

Доказујемо прво индукцијом по n . Ако је $n = 1$, онда важи $f_{1+m} = f_0 f_{m-1} + f_1 f_m$. Из дефиниције Фибоначијевог низа важи да је $f_0 = f_1 = 1$, па је $f_{1+m} = 1 \cdot f_{m-1} + 1 \cdot f_m = f_{m-1} + f_m$. Дакле, доказали смо да формула важи када је $n = 1$. Претпоставимо да формула важи за $n \leq k$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да важи када је $n = k + 1$.

$$f_k f_{m-1} + f_{k+1} f_m = (f_{k-1} + f_{k-2}) f_{m-1} + (f_k + f_{k-1}) f_m = f_{k-1} f_{m-1} + f_{k-2} f_{m-1} + f_k f_m + f_{k-1} f_m = f_{k+m} + f_{k-1+m} = f_{k+1+m}$$

Докажимо сада да формула важи индукцијом по m . Ако је $m = 1$, онда важи као малопре $f_{n+1} = f_{n-1} f_0 + f_n f_1$ $f_{n+1} = f_{n-1} \cdot 1 + f_n \cdot 1 = f_{n-1} + f_n$. Претпоставимо да формула важи за $m \leq l$ (индуктивна хипотеза) и докажимо да важи када је $m = l + 1$.

$$f_{n-1} f_l + f_n f_{l+1} = f_{n-1} (f_{l-1} + f_{l-2}) + f_n (f_l + f_{l-1}) = f_{n-1} f_{l-1} + f_{n-1} f_{l-2} + f_n f_l + f_n f_{l-1} = f_{n+l} + f_{n+l-1} = f_{n+l+1}$$

Дакле, доказали смо уз помоћ математичке индукције да почетна формула важи.

4.9 Закључак о методама

Важно је развијати и утврђивати методе које ученици познају, а затим их и поступо упознавати са новим методама решавања задатака. Вештина решавања проблемских задатака код ученика се развија успешније и брже, ако поред решавања великог броја задатака, они упознају и усвајају различите методе решавања задатака.

Многи проблемски задаци се могу решити на више начина, од којих су неки лакши, неки сложенији. Уколико је циљ само решење задатака, онда је довољан један начин решавања. Међутим, у пракси, желимо постићи више. Наиме, за налажење решења задатка потребно је одређено знање које се

састоји од теоријских чињеница које су у најужој вези са задатком. За један начин решавања потребне су једне чињенице, за други начин неке друге чињенице, за трећи треће. Закључујемо да ће за решавање задатка на више начина требати више теоријских чињеница и метода него за решавање на само један начин. Тиме се за само један задатак активира, анализира и примењује већа количина стеченог знања. Осим тога, знања се продубљују и проширују новим знањима, а најважније је да задаци који се могу решити на више начина повећавају активност ученика и њихову заинтересованост за математику.

Треба напоменути и улогу наставника у самом процесу откривања решења. Наставник би требало да започне дискусију са општим или предлогом, а онда по потреби, да се спушта на једноставнија и конкретнија питања која ће помоћи ученику да схвати суштину решавања проблемског задатка. У хеуристичкој методи наставе наставник подстиче ученике на самостално откривање одговарајућих тврђења и правила. Хеуристичка метода се састоји у томе да се пред ученике постави проблем, а онда помоћу одговарајућих прикладних питања наставник води ученике до решења. Како би помогли у развоју способности ученика, као и њихових техника, питања која се постављају морају бити општа и применљива на проблеме различитих врста. Међутим, постоје ”добра и лоша, питања, јер у намери да помогну ученицима, наставници могу рећи суштину решења проблема.

На пример, у задатку где постоји правоугли троугао, наставник би могао да пита ”Да ли можеш применити Питагорину теорему?,, чиме му је открио главни циљ приликом решавања датог проблема. Ако је ученик близу решења проблема, може разумети предлог који је наметнут одређеним питањем наставника. Међутим, уколико није, сасвим је могуће да неће видети кључну тачку која се посматра. Према томе, питање не помаже тамо где је помоћ најпотребнија.

Уколико се предлог разуме, он одаје целу тајну решавања проблема, а ученику остаје врло мало да сам истражује. Сви ови недостаци не умањују значај наставникових питања и усмеравања приликом решавања проблема и корака наведених у претходној глави, већ треба добро осмислити како показати ученицима прави пут. Сама хеуристичка настава је настала из потребе да се увођењем самосталног рада ученика превлада предавачка настава и побољша наставни процес.

Глава 5

Геометријско мишљење

Историја геометрије је обележена са два, на неки начин контрадикторна тренда. Са једне стране, геометрија користи и тражи помоћ у копирању ситуација из реалног живота. Са друге стране, након објављивања Еуклидових Елемената, геометрија је већ две хиљаде година прототип логичко-математичког мишљења. Наведена контрадикторна перспектива се на неки начин огледа и у дискусији дидактичара Худмента и Кузњака ([28],[29]) који, следећи Гонсетха ([7]), разликују три приступа разумевања геометрије:

- Природна геометрија (Геометрија I) у којој се тврђења оправдавају коришћењем аргумената базираних на експерименту и дедукцији.
- Природно-аксиоматска геометрија (Геометрија II) је изграђена на моделу блиском реалности, а аксиоми су што је могуће ближи интуицији.
- Када су аксиоми фиксирани, захтева се да демонстрација тврђења буде заснована на аксиоматском систему, што је неопходно за довођење у формалну аксиоматску геометрију (Геометрија III) која је мало представљена у обавезном школовању. На овом нивоу су студенти који студирају математику и који су упознати са формалним и логичким закључивањем.

Сагледавајући геометрију са овог становишта можемо пронаћи метод класификације геометријског мишљења. Овај метод ће нам помоћи при интерпретацији задатака датих ученицима, а такође га можемо искористити за класификацију резултата ученика, док га наставници могу користити као помоћ при оријентацији у предавању геометрије. Овим се може ублажити

граница између учениковог и наставниковог света (бар до одласка на студије) и такође се уклањају препреке између линеарне алгебре / аналитичке геометрије.

Осим овог приступа имамо и важне теоретске радове усмерене на предавање и учење геометрије засноване на такозваним "Ван Хиловим нивоима,, (више о овој теми погледати у [26]):

- Ниво 0 је ниво визуелизације. Ученици на том нивоу искључиво на основу перцепције базирају своје мисли и на основу њих доносе одлуке, без било каквог предзнања. Они су у стању да препознају основне геометријске ликове као што су троугао, четвороугао или круг и да уоче њихове особине, али их не користе за даља препознавања и класификацију геометријских фигура.
- Ниво 1 је ниво анализирања. Ученици почињу да идентификују особине ликова и уче како да на правилан начин опишу повезаност особина, али не праве везе између различитих облика и њихових особина.
 Споредне особине, као што су величина или орјентација, постају мање важни, јер ученици су вешти да се фокусирају на облик унутар класе. У могућности су да промишљају која својства има правоугаоник.
 Ученици су на овом нивоу способни да разговарају о односима између ликова и њихових особина. Када описују неки објекат, размишљајући на овом нивоу, они набрајају све његове особине, али не могу да разграниче које су од њих потребне, а које довољне да га опишу. Они могу да изводе закључке индуктивно на основу неколико примера, али још увек не могу да користе дедукцију.
- Ниво 2 је ниво апстракције, или како га неки називају, ниво неформалне дедукције. Ученици спознају односе међу особинама геометријских облика и на основу тога односе међу самим геометријским облицима. Почињу размишљати дедуктивно, али не разумеју, још увек, правило и значење формалне дедукције. На овом нивоу ученици почињу да размишљају о томе шта је потребно, а шта довољно да се неки геометријски лик опише.
- Ниво 3 је ниво дедукције. Ученици могу идентификовати особине ликова, конструисати доказе користећи исказе, аксиоме и дефиниције.

Типични средњошколски курсеви геометрије могу да се организују на овом нивоу. Ученици су у могућности да употребљавају апстрактне појмове и да изводе закључке који су засновани више на логици него на интуицији.

- Ниво 4 се назива ниво строгости. На овом нивоу ученици су у могућности да разумеју конзистентност, независност и комплетност аксиоматског система, и да пореде математичке системе.

Такође, могу да разумеју индиректно доказивање, доказивање коришћењем контрапозиције, те да разумеју геометријске системе који нису еуклидски (као што је нпр. систем геометрије Лобачевског код које су геометријски ликови смештени на сферу, а не у раван као код еуклидске геометрије).

У свом раду Дувал описује предавање и учење геометрије у односу на когнитивну страну и подразумева три когнитивна нивоа од којих сваки има своје специфичности:

- визуализација тражи репрезентацију у дводимензионалном и тродимензионалном простору;
- конструкција модела који репрезентују геометријске структуре;
- закључивање које се заснива на организованом опису или аргументованој расправи.

5.1 Регистри семиотичких репрезентација

Семиотика је теорија о знаковима и симболима, односно проучавању начина на који функционишу знаковни системи. Симболичка функција је специфична људска способност представљања помоћу симболичких средстава нечег другог што је различито од њих самих.

Симболичка репрезентација је основна функција свести. То је општа способност стицања и коришћења знакова, семиотичких система и извођења семиотичких операција.

Фигура, у смислу најопштијег објекта геометрије (или 2D или 3D), може бити представљена на много начина. Ми можемо разликовати три главне групе семиотичких репрезентација:

- материјална репрезентација фигуре израђене од папира, пластелина, дрвета, картона;
- нацртана репрезентација (користећи се папиром и оловком, компјутером употребљавајући геометријски софтвер);
- дискурзивна репрезентација - репрезентација логичког закључивања која описује фигуре користећи и природни и формални језик.

Питања о регистрима семиотичких репрезентација и когнитивних процеса највише је проучавао Дувал ([12]). Он наводи следеће: "Семиотичка репрезентација је производ направљен да користи обележја која припадају систему репрезентација при чему има властита ограничења разумевања и функционисања,. Семиотичке репрезентације су неопходне у математичким активностима, будући да се математички објекти не могу директно уочавати и, према томе, морају се представљати. Како Дувал наводи: "Семиотичке репрезентације нису само испољавање менталних репрезентација у комуникацији већ имају и нека суштинска својства за когнитивне активности мишљења,.

Као когнитивне активности, он наводи три типа активности:

- формирање репрезентација, које могу бити идентификоване као садржај датих регистара,
- процесуирање и трансформација репрезентација унутар регистара у којима су креиране, и
- конверзија, тј. трансформација семиотичких репрезентација из једног регистра у други.

Такође, Дувал усмерава свој рад и на проучавање различитих путева функционисања фигура у геометрији. Он разматра четири типа разумевања фигура.

Најдиректније је *перцептивно разумевање*, које одмах допушта да се препознају форме објекта.

Неинтуитивно разумевање је у потпуности једноставно, фигуре се виде кроз вербалан опис (на пример, нека је ABC троугао са правим углом код темена A ,...) који изричито јасно описују неку особину. У ствари, геометријске особине, дословно речено, очите или нацртане, морају бити дате у хипотези или закону и доказане помоћу дедукције.

Секвенцијално (серијско) размишљање усклађује кораке и њихов поредак, према томе која фигура треба да буде конструисана. Ослања се на особине фигуре, али такође и на типове коришћених инструмената и слабости техничке ограничености.

Постоји још и *оперативно размишљање* које је најкомпликованије.

5.2 Дидактичке потешкоће

Дидактичке потешкоће у сва четири модела размишљања, а посебно у последња три, играју врло различиту улогу у учењу геометрије. Како год, оне остају знатно независне и могућност њиховог премештања је ограничена.

Теоретски модели утемељени на основу Худментових и Кузњакових специфичности користе фигуре и језик за сваки од три нивоа геометрије. Они показују како нека фигура и неки вербални опис могу бити несхваћени на различитим нивоима, а и откривају на које се потешкоће наилази у разумевању различитих модела представљања геометријских објеката.

Виги ([4]), Сото ([1]) и Осорио ([15]) допринели су приказу да ученици имају потешкоће у њиховим сликовитим репрезентацијама, чак и на перцептивном нивоу (троугао је најчешће виђен као једнакокраки). Штавише, Виги је показала да се реч троугао односи на многе објекте из свакодневног живота, а да су ти објекти заправо сметња за конструкцију концепта троугла.

Ланциано ([14]) се осврће на конструкцију инструмената. Мисао водиља њеног рада је да се направи репрезентација инструмената који су за ученике и оперативни и конструктивни. Она наводи хипотезу да оно што се може наслутити интелигенцијом представља веома продуктивну могућност.

Курина ([13]) је заинтересован за хеуристичку снагу фигура у геометријском мишљењу. Његов рад садржи више примера снаге оперативног разумевања фигура и решених проблема.

Кохен ([32]) и Бако ([2]) свој допринос овим разматрањима су дали у просторној репрезентацији. Они су указали на низ потешкоћа код ученика у разумевању визуализације међусобног односа тачака, правих, површи и равни. Њихов битан удео у разумевању геометријског мишљења је презентација просторних објеката.

Битно је споменути и Гудет-Кртиер-ину ([8]) заинтересованост за ово питање, то јест њену репрезентацију геомеријских објеката (цртежи највише) и концепт линеарне алгебре. Она је, користећи теорију разумног деловања, презентовала да студенти имају велике потешкоће у коришћењу фигура због интуитивне базе и апстрактног концепта самих геометријских објеката. Ова теорија каже да понашање особе зависи од њеног става према радњи, као и субјективног става о истој. Аутори ове теорије истичу да ефекат субјективних норми на понашање индивидуе зависи од значаја који особа приписује мишљењу других. Заправо понашање неке особе представља јединствену везу између њеног става и субјективних норми. Она, такође, истиче варијације интерпретација самог цртања које може представити различите ситуације у геометрији и у линеарној алгебри.

Постоји много литературе која приказује континуиран труд одређених математичких едукатора кроз дуг период истраживања, предавања и учења геометрије коришћењем компјутера и других алата. Динеса описује парадигме у "модерној математици, ([9], [10]), процесе учења апстрактних математичких концепата и структура на дечијем узрасту. Он све ове процесе и парадигме обједињује у четири принципа за учење математике (динамички принцип, перцептивно-варијабилни принцип, математички варијабилни принцип, конструктивни принцип) и шест етапа учења математике (слободно играње, играње по правилима, упоређивање, презентовање, симболизација, формализација).

Ван Хилови нивои наглашавају важност коришћења инструмената, у складу са моделом и са обзиром да дечје закључивање на првом, другом и трећем нивоу захтева физичке објекте, инструменте или слике које им помажу да реше задатак и организују своје размишљање.

- Деца на првом нивоу (ниво 0) уочавају геометријске објекте као физичке идентитете. Они уче геометрију само у интеракцији са реалним објектима, сликама, итд.

- Деца на другом нивоу су способна да истражују и генерализују особине у геометријском концепту на основу индуктивног закључивања из њихових опажања и више примера, користе инструменте и цртеже као базу за ток размишљања.
- Деца на трећем нивоу почињу да стварају апстрактне дедуктивне закључке, али још увек требају конкретне репрезентације (компјутерско предочавање, слике, цртежи, физички објекти) да могу организовати своје дедуктивне аргументе.

Дувал описује предавање и учење геометрије у односу на когнитивну страну и подразумева три когнитивна нивоа од којих сваки има своје специфичности:

- Визуализација тражи репрезентацију у дводимензионалном и тродимензионалном простору;
- Конструкција модела који репрезентују геометријске структуре;
- Закључивање које се заснива на организованом опису или аргументованој расправи.

За обављање визуализације и конструкције ученици морају манипулисати инструментима, исцртавати слике на папиру или помоћу рачунара. Такође неки типови процеса закључивања, не морају бити у потпуности апстрактни. Ученици могу, да би донели закључке, користити инструменте како би створили основу за закључивање. Врло је интересантан рад Бако([2]) која је експериментисала са предавањима у основној школи, радећи са неколико типова репрезентације тродимензионалног простора, желећи да установи да ли је неки од њих погоднији од другог.

Наиме, она је упоређивала корисност аксиометријског, централног или ортогоналног пројектовања да реши проблем проналаска подударних, али различитих начина за пресецање коцке различитим равнима добијеним помоћу или транспарентног модела коцке или помоћу специфичног компјутерског програма. Бако је закључила да је компјутер ефикаснији у проналажењу различитих пресецања, док су манипулативни модели далеко кориснији у проналажењу начина за добијена пресецања.

Лациано([14]) је усмерила своју пажњу да обучи будуће наставнике да користе и конструктивност и манипулативност у својим предавањима. У свом

експерименту она је захтевала од будућих наставника да направе различите класичне рукотворине користећи уочене тачке у простору.

Ролетини радови ([24]) показују неопходност узајамне повезаности између ”радног простора”, ученичких радова и инструмената које користе. Њен експеримент је спроведен на деци основношколског узраста који су из датог материјала требали да направе четири различите коцке у различитим ”радним просторима”. Мењајући величину радног простора и инструмената ученицима, увидела је да им ово помаже да се са нивоа осећајног простора (извођењем опипљивих геометријских експеримената) пребаце у геометријски простор (апстрактна геометрија).

5.3 Просторна геометрија

Просторна геометрија је увек тежак предмет, како у обавезном школовању, тако и на факултетима у свакој земљи. Са једне стране, тродимензионални објекти су део нашег свакодневног живота, али са друге стране, њих начешће представљамо помоћу дводимензионалних слика. Заиста наше разумевање тродимензионалне геометрије је у тесној повезаности са разумевањем дводимензионалне геометрије.

У свом раду Доан Ху ([11]) истиче да су многи ученици природно надарени да трансформишу теореме из дводимензионалне геометрије у тродимензионалну геометрију. У раду се истиче јака тенденција да, користећи се аналогним размишљањем, ученици реалне потешкоће суоче са теоремама које знају у дводимензионалној геометрији са њиховим интуитивним поимањем простора. Ако ученици не могу да изграде схватање теорема у дводимензионалној геометрији независно од њеног фигуративног представљања и приказа, имаће проблеме схватања.

У суштини врло је тешко пребацивање из дводимензионалног у тродимензионално имајући као основу фигуративну транспозицију. За ово је потребна већа концептуална позадина.

За разумевање тродимензионалне геометрије главну улогу има опет расветљавање нашег знања из дводимензионалне геометрије и одређене отворености, на још очитији, можда круцијалнији приказ објеката. Кохен дели овај проблем на питања о релацијама између тачака, правих, равни и простора.

Она је експериментисала са процесом подучавања са конкретним манипулативним објектима изграђеним од пластелина и пластике, подстицајући ученике да тродимензионалне предмете виде као реалне објекте.

Цртежи нису једини репрезентатори геометријских ситуација, али су парадигме. Дакле можемо закључити да перспективни наставници у основној и средњој школи морају савладати како да користе различите дидактичке елементе у разним математичким областима, да их знају прилагодити у својим разредима и да стварају нове. Обучавање наставника као перспективних предавача лежи у учењу веза између апстрактног геометријског концепта и конкретне репрезентације која ће ученике подстицати на откривање геометријских модела у свакодневном животу.

Глава 6

Практична примена хеуристичке методе и методе вођеног учења у школи

Предности и мане хеуристичке наставе проверићемо „експериментом“ у одељењу трећег разреда природно-математичког смера гимназије, где има 25 ученика, имајући у виду да 4 ученика нису била присутна приликом извођења „експеримента“.

Пред ученицима је био исти задатак, који би могли да реше на основу претходног знања које су стекли из математике у трећој години. Ученици су подељени у две групе на основу закључних оцена на крају првог полугодишта школске 2022/2023. Такође, подела ученика је била таква да је подједнака заступљеност свих оцена у обе групе. Подељени су у две групе од којих једна задатак ради без помоћних корака, односно сами долазе до закључака, док су другој групи били понуђени помоћни кораци како би им било олакшано решавање задатка.

Дакле, једна група осликава хеуристички модел учења, док друга представља модел вођеног учења. Групи која осликава хеуристички модел учења су били доступни сви релевантни материјали, акцентујући посебно приступ интернету и знање стечено претходним градивом, како би били у могућности да одговоре на захтеве непознатог задатка и дођу до „Еуреке“.

У наставку ће бити наведени задаци, уз теоријску напомену која је била доступна и ученицима, као и резултати добијени овим истраживањем.

Теоријска напомена:

Закон одбијања: Упадни угао је угао између упадног зрака и нормале. Одбојни угао је угао између одбојног зрака и нормале. Упадни угао једнак је одбојном углу.

Хеуристички модел

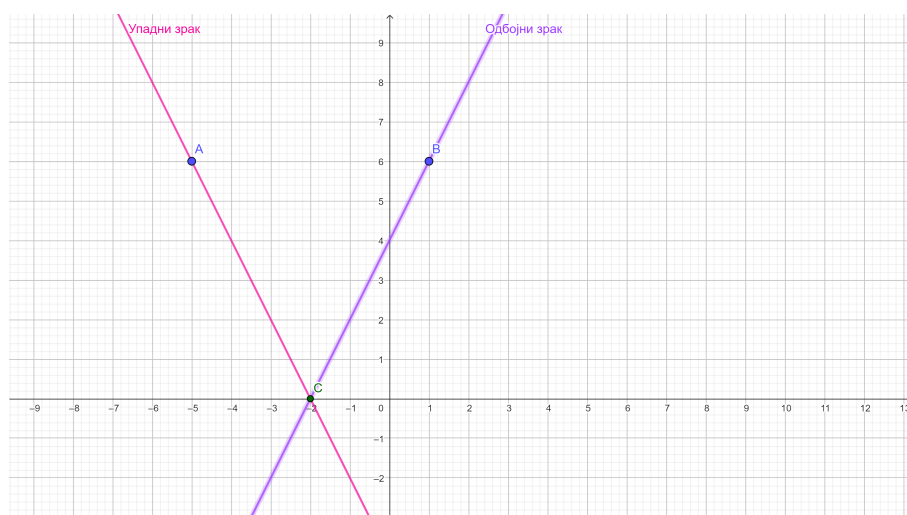
Задатак 1: Светлосни зрак полази из тачке $(-5, 6)$, одбија се од x -осе, а затим пролази кроз тачку $B(1, 6)$. Наћи једначине упадног и одбојног зрака.

Вођено учење

Задатак 1: Светлосни зрак полази из тачке $(-5, 6)$, одбија се од x -осе, а затим пролази кроз тачку $B(1, 6)$. Наћи једначине упадног и одбојног зрака.

Помоћни кораци:

1. Наћи тачку симетричну тачки B у односу на дату праву од које се зрак одбија.
2. Наћи једначину упадног зрака користећи до сад добијене податке.
3. Искористити почетну теоријску напомену да се закључи какви су коефицијенти праваца упадног и одбојног зрака.
4. Наћи једначину одбојног зрака на основу добијеног одговора на претходни захтев и тачке B која је дата у задатку.

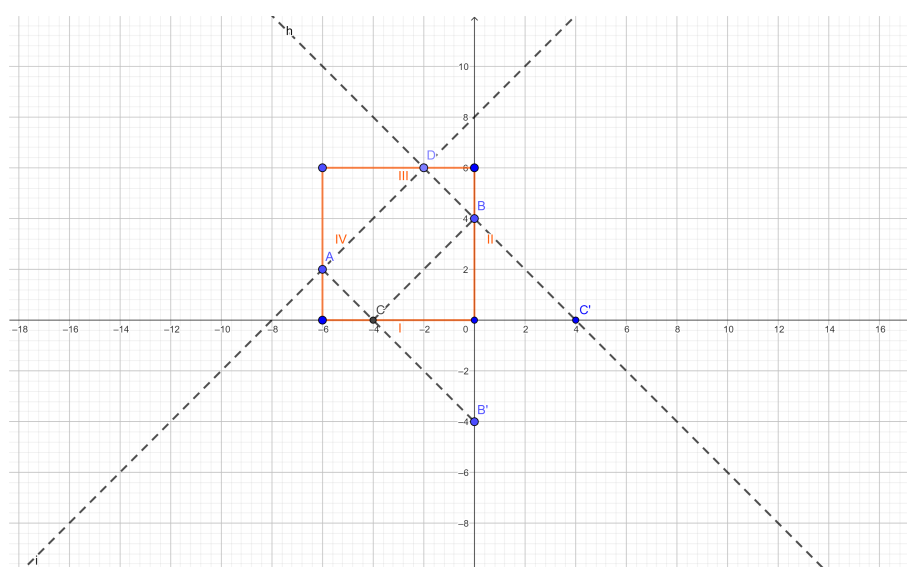


Слика 6.1: Слика уз задатак 1

Након првог задатка обе групе су имале следећи задатак, који су требали да реше на основу претходног и при томе ниједна група није имала додатне кораке.

Задатак 2:

Вук игра билијар. Куглица којом жели играти налази се на позицији $A(-6, 2)$. Наћи једначине путањи по којима се куглица креће, уколико она полази из тачке A , затим се одбија о ивицу I која представља x -осу, потом удара у тачку $B(0, 4)$ која се налази на ивици II , онда се одбија од ивице III и враћа у полазну тачку A .



Слика 6.2: Слика уз задатак 2

Сваки од два задатка је бодован процентуално и једнако међу собом, тј. сваки је носио по 50% од укупног броја поена овог „експеримента/теста“. Обе једначине у првом задатку су носиле једнак проценат од укупног броја поена и то по 25%, док је у другом свака једначина била по 12.5% укупног броја поена.

Добијени резултати су приказани у следећим табелама.

оцена на полугодишту	проценат урађеног
2	50%
3	50%
3	55%
3	60%
4	60%
4	60%
4	60%
5	50%
5	60%
5	60%

Табела 6.1: Метода вођеног учења

оцена на полугодишту	проценат урађеног
2	45%
3	0%
3	0%
3	25%
3	55%
4	45%
4	50%
4	50%
4	100%
5	25%
5	100%

Табела 6.2: Хеуристичка метода учења

Да бисмо се уверили која метода је заиста дала „боље“ резултате, добијене информације ће бити статистички обрађене уз помоћ Вилкоксоновог теста¹, који представља један од непараметарских тестова.

Биће коришћен Вилкоксонов тест суме рангова, као и Вилкоксонов тест означених рангова. Вилкоксонов тест се може примењивати када се не претпоставља да наши подаци имају познату расподелу и не бави се параметрима, па се због тога и назива непараметарским тестом.

У наставку ће бити приказани сами кодови који су имплементирани у окружењу R studio², као и резултати Вилкоксоновог теста примењеног на све податке, а и на податке добијене тако што су парови међу собом случајно упарени, али по оценама. Такође треба напоменути да уколико је „p“ вредност теста (ниво значајности) мањи или једнак од 0.05 сматра се да је разлика између резултата значајна. Детаљније о p-вредности теста се може прочитати у [34].

```
vodjeno<-c(60,60,50,60,60,60,50,60,50,55)
heur<-c(25,100,100,0,55,0,25,45,45,50,50)
test<-wilcox.test(vodjeno,heur, alternative="greater")
test
```

Примењен је Вилкоксонов тест на све податке тако да су први аргумент функције подаци који представљају резултате добијене методом вођеног учења, док су други аргумент подаци добијени методом хеуристичког учења. Такође, додавањем аргумента *alternative*="greater", проверавамо хипотезу да су резултати добијени за методу вођеног учења бољи у односу на оне добијене за методу хеуристичког учења. У овом случају немамо упарене податке, већ два независна узорка, па је коришћен Вилкоксонов тест суме рангова.

Тестирамо нулту хипотезу да посматрана обележја потичу из исте популације, односно да обележја имају исту расподелу са истим параметром локације.

Како је добијени резултат за ниво значајности 0.022, тј. мањи је од 0.05, закључујемо да се медијана резултата добијених методом вођеног учења

¹ Frank Wilcoxon, 1892-1965, ирски и амерички хемичар и статистичар

² интегрисано развојно окружење за програмски језик R који се користи за статистичко рачунарство и графику

```
> test
      wilcoxon rank sum test with continuity correction
data:  vodjeno and heur
w = 83.5, p-value = 0.02215
alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
```

Слика 6.3: Резултати Вилкоксоновог теста за све податке

значајно разликује од медијане резултата добијених методом хеуристичког учења са р-вредношћу 0.022. Дакле, ученици који су радили методом вођеног учења су били успешнији од ученика који су радили хеуристичком методом.

```
ocena2_h<-c(45)
```

```
ocena2_v<-c(50)
```

```
ocena3_h<-c(25,0,55,0)
```

```
ocena3_v<-c(60,50,55)
```

```
uzorak3<-data.frame(h=c(ocena3_h[1],ocena3_h[2],ocena3_h[3]),
                    v=c(sample(ocena3_v,3,replace=FALSE)))
```

```
ocena4_h<-c(100,45,50,50)
```

```
ocena4_v<-c(60,60,60)
```

```
uzorak4<-data.frame(h=c(ocena4_h[1],ocena4_h[2],ocena4_h[3]),
                    v=c(sample(ocena4_v,3,replace=FALSE)))
```

```
ocena5_h<-c(100,0)
```

```
ocena5_v<-c(60,60,50)
```

```
uzorak5<-data.frame(h=c(ocena5_h[1],ocena5_h[2]),
                    v=c(sample(ocena5_v,2)))
```

```
nu1<-c(ocena2_h,uzorak3$h,uzorak4$h,uzorak5$h)
```

```
nu2<-c(ocena2_v,uzorak3$v,uzorak4$v,uzorak5$v)
```

```
test_uparen<-wilcox.test(nu1,nu2,paired = TRUE)
test_uparen
```

У наредном тесту прављени су упарени узорци по оценама, тако да је сваком резултату експеримента који је додељен једној оцени са полугодишнта добијеног методом хеуристичког учења случајно придружен резултат додељен истој оцени са полугодишнта добијеног методом вођеног учења. Добијени парови су онда разврстани у две групе у зависности из које методе су добијени подаци, а затим је на њих примењен Вилкоксонов тест. Додавањем аргумента *paired=TRUE* наглашено је да су подаци упарени. Тестирамо да ли постоји значајних разлика између медијана резултата добијених овим методама. Овде је коришћен Вилкоксонов тест означених рангова. Дакле, тестирамо нулту хипотезу да је медијана разлике између упарених узорака популације нула.

Уколико је добијена р-вредност теста мала, може се одбацити идеја да је разлика медијана последица случајности и закључити да ове групе имају различите медијане. Међутим, уколико је р-вредност велика, добијени подаци не дају разлога да се закључи да се медијане разликују. Ово не значи да су медијане исте, већ да не постоје убедљиви докази да се оне разликују. Такође, треба нагласити ако су узорци мали Вилкоксонов тест има малу могућност да открије мале разлике.

```
> test_uparen
      wilcoxon signed rank test with continuity correction
data:  nu1 and nu2
V = 13, p-value = 0.2859
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Слика 6.4: Резултати Вилкоксоновог теста за упарене податке

Како је добијени резултат за ниво значајности 0.2859, тј. већи је од 0.05, закључујемо да на овај начин упарени подаци дају исте резултате код обе методе. Треба додати да је могуће да је на овај резултат утицала оцена са полугодишнта, као и то што је узорак мали, па како је већ напоменуто, Вилкоксонов тест нема велику моћ да открије мале разлике. Дакле, да би се са сигурношћу утврдило која метода даје боље резултате потребно би било поновити ово истраживање на већем броју ученика и са више задатака.

Свакако, оба тестирања могу дати оквирну слику о успешности ове методе на конкретном примеру градива геометрије у трећој години средње школе.

Глава 7

Закључак

Хеуристичка настава као и свака друга наставна метода има своје добре и лоше стране. Како добре стране превладавају, хеуристичка настава се може сврстати међу више и савремене наставне методе.

Основ за стицање знања и способности представљају самостални рад и активност ученика. Притом, важно је и наставниково подучавање о математичком садржају и начину рада као својеврсна помоћ ученицима. Ученици ће усвојити само оне математичке садржаје које потпуно разумеју. Оно што ученици не разумеју брзо се заборавља и представља образовни промашај. Зато је битна особина хеуристичке наставе да наставници својим подучавањем ученике мисаоно воде и доводе их до разумевања и схватања математичког садржаја.

Хеуристичка настава подразумева непосредно комуницирање наставника и ученика. Наставник својим питањима упућује ученике да у изворима налазе чињенице на основу којих наставниковим мисаоним вођењем долазе до схватања уопштења. Слободан разговор и расправа омогућавају ученицима постављање питања и то посебно кад им недостаје нека важна информација. Иако хеуристичка настава, за разлику од проблемске, не доводи још ученике до потпуно самосталног рада у откривању математичких истина, већ до тог открића ученике води наставник на темељу хеуристичког модела, ученици су ипак мисаоно активни и у одређеној мери субјекти наставе.

На крају, осврнућу се и на резултате истраживања. Применом Вилкоксоновог теста добијено је да постоје статистички значајне разлике између узорака добијених методом хеуристичког учења и методом вођеног учења, када се по-

сматрају као независни узорци, али треба ипак нагласити важност примене ове методе у настави математике. Наиме, у свим претходним поглављима представљене су значајне предности ове методе у настави, како у развоју и унапређивању мишљења ученика, тако и њиховог оспособљавања за самостално проналажење решења неких проблема. Као и свака метода, и ова има слабијих страна. Пре свега, један од првих проблема на који се наилази јесте немогућност непосредне комуникације са свим ученицима. Такође, имајући у виду индивидуалне особине ученика, код оних који су повученији комуникација је отежана, па и њихова питања често изостају. Није могуће ни водити баш све ученике у оквиру једног одељења због недостатка времена и различитих брзина схватања датог градива.

Напоменућу још и сам утисак ученика приликом решавања задатка. Пре свега, нов начин рада је допринео њиховој већој заинтересованости него иначе. Такође, ученици који су радили уз помоћ додатних питања су желели да реше дати проблем на „свој“ начин. Дакле, уколико је могуће и уколико врста наставних тема омогућава примену ове методе, треба искористи сав њен потенцијал, и колико је могуће укључити у наставу математике.

Глава 8

Захвалница

Захвалност на првом месту дугујем свом ментору др Мирјани Ђорић на указаном поверењу, сугестијама, саветима, спремности на заједнички рад и помоћи приликом целокупне израде овог рада.

Такође, посебно бих желела да се захвалим и професорки др Бојани Милошевић на помоћи у реализацији и статистичком делу обраде података добијених приликом свог истраживања, као и на уложеном труду да резултати истраживања прикажу бар мали део могућности примене методе хеуристичког учења у школи.

Најлепше се захваљујем и асистенту др Милошу Ђорићу на издвојеном времену и подршци приликом израде мастер рада.

На самом крају, захвалила бих се и ученицима трећег разреда Гимназије у Чачку, без којих истраживање не би било са таквом лакоћом реализовано, као и својим родитељима на неизмерној подршци током целокупног школовања.

Библиографија

1. Acuna-Soto C. M., *The role of slope and y-intercept from the students perspective*, CERME 3, Working group 7, 10 pp., 2003
2. Bako M., *Different projecting methods in teaching spatial geometry*, CERME 3, Working group 7, 10 pp., 2003
3. Bruner J., *Toward a Theory of Instruction*, Norton, New York 1966.
4. Vighi P., *The triangle as a mathematical object*, CERME 3, Working group 7, 10 pp, 2003
5. Vilotijević, M., *Didaktika 2: Didaktičke teorije u teorije učenja*, Naučna knjiga, Učiteljski fakultet, Beograd, 2000.
6. Vilotijević M., Vilotijević N., *Heuristička nastava*, Učiteljski fakultet Vranje, 2008
7. Gonseth F., *La geometrie et le probleme de l'espace*, Lausanne: Le Griffon, 1945–1955.
8. Gueudet-Chartier Gh., *Geometric thinking in an n-space*, CERME 3, Working group 7, 10, pp., 2003
9. Dienes Z.P., *La construccion de las matematicas*, Barcelona, Spain: Vicens Vives, 1970.
10. Dienes Z.P., *The theory of the 6 stages of learning with integers*, *Mathematics in School*, 2000. [videti <http://www.zoltandienes.com/mathsamples.html>]
11. Doan Huu H., *L'enseignement de la geometrie dans l'espace au debut du lycee dans ses liens avec la geometrie plane*, These de doctorat de l'Universite J. Fourier, Grenoble 1, France, 2001.

12. Duval R., *Semiosis et pensee humaine*, Bern: Peter Lang, 1995.
13. Kurina F., *Geometry—the resource of opportunities*, CERME 3, Working group 7, 10 pp., 1999
14. Lanciano N., *The processes and difficulties of teachers trainees in the construction of concepts, and related didactic material, for teaching geometry*, CERME 3, Working group 7, 10 pp., 2003
15. Larios-Osorio V., *Geometrical rigidity: an obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course*, CERME 3, Working group 7, 10 pp., 2003
16. Mičić V., *Učenje otkrivanjem – možda novi pristup*, Nastava matematike L–4, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2005.
17. Mišanec D., *Strategije rješavanja geometrijskih problemskih zadataka u nastavi matematike*, <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:133561>
18. Прокопьев И., *Педагогика*, часть 3. Гродно: Гродненский государственный университет, 2000.
19. Polya G., *How to Solve It. A new aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945.
20. Polya G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, 1954.
21. Polya G., *Mathematical Discovery*, John Wiley Sons, 1962.
22. Poljak V., *Nastavni sistemi*, PKZ, Zagreb, 1977.
23. Resnick L., Food W., *The Psychology of Mathematics Instructions*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey 1981.
24. Rolet Ch., *Teaching and learning plane geometry in primary school: acquisition of a first geometrical thinking*, CERME 3, Working group 7, 10 pp., 2003
25. Romano A. Daniel, *O geometrijskom mišljenju*, Nastava matematike LIV, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2009.
26. Romano A. Daniel, *Van Hiel-ova teorija O učenju geometrije*, Prirodno-matematički fakultet Banja Luka, 2009.

27. Spremić Solaković A., *Inovacije u nastavi-heuristički model u savremenoj nastavi*, OŠ Filip Filipović, Ugljevik, 2014.
28. Houdement C., Kuzniak A., *Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude l'enseignement de la geometrie en formations des maitres*, Educational Studies in Mathematics, 1999.
29. Houdement C., Kuzniak A., *Elementary geometry split into different geometrical paradigms*, CERME 3, 2003.
30. Хуторской А. В., *Євристическое обучение: теория, методология, практика*, Международна педагогическая академия, Москва, 1998.
31. Cofman J., *Numbers and shapes revisted. More problems for young mathematicians*, Claredon Press Oxford, 1995.
32. Cohen N., *Preference of directions in 3D space*, CERME 3, Working group 7, 10 pp., 28
33. Woolfolk A., *Educational Psychology*, Allyn and Bacon, Boston, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore 1995.
34. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4111019/>