УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Нина Радовановић

ГАУСОВА КРИВИНА И ХИПЕРБОЛИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

др Мирјана Ђорић, редован професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Иван Димитријевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милош Ђорић, асистент са докторатом
Универзитет у Београду, Математички факултет

Садржај

1 Увод

У шестом веку старе ере највећу улогу у култури и науци имали су Грци. Тада и геометрија почиње да се развија у потпуно новом смеру. Грчки математичари тог доба открили су нову методу изградње геометрије, која се данас назива дедуктивна метода. Наравно, ова метода није настала одједном, већ је резултат дугогодишњег преданог рада математичара тог времена. Прве наговештаје аксиоматског заснивања геометрије срећемо у Платоновој академији. Платон је први указао на разлику између научног закључивања и искуствених сазнања. Теоријске основе дедуктивне методе развио је Платонов ученик, Аристотел. Основна тврђења на којима се заснива дедуктивна метода Аристотел је сврставао у аксиоме и постулате. И аксиом и постулат су основна тврђења, која важе без доказивања, с тим што постулат треба да важи искључиво за једну одређену научну област, а аксиом важи у више научних области.

Далеко најпознатије и најчитаније дело тог времена су Еуклидови **Елементи** (300. година старе ере) о коме ће бити више речи у 2.1. Током низа векова, и безброј покушаја, нико није успео да унапреди геометрију као науку од онога што је Еуклид урадио у Елементима. Наравно, имало је и неких сјајних открића, али ништа се суштински вековима после Еуклида није променило. Управо ћемо се овим бавити у другом поглављу овог рада.

Развој геометрије од Еуклида, преко Ојлера, до Лобачевског, Бољаја, Гауса и Римана је једна прича подељена на више делова - еуклидска геометрија, нееуклидска геометрија и диференцијална геометрија. У овом раду покушано је да се делови уједине са својим међуодносима, мотивисани историјом и проблемом Петог Еуклидовог постулата.

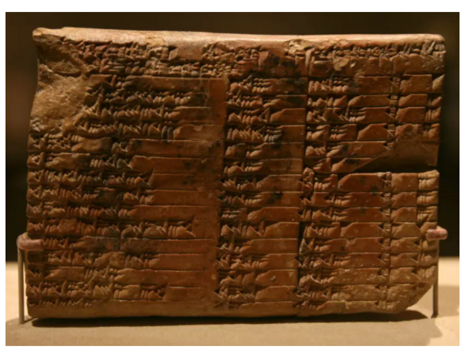
Најистакнутија личност трећег поглавља овог рада биће Гаус, његов рад на површима централни део, а његова брињантна теорема (теорема *Egregium*) звезда водиља. Фокус је на Гаусовој кривини која одређује природу геометрије која описује површ. Гаусова брињантна теорема тврди да се Гаусова кривина површи смештене у тродимензиони простор може разумети као унутрашња карактеристика површи. "Становници" неке површи могу изучавати Гаусову кривину површи и без сазнања у ком су тродимензионом простору смештени. Оно о чему ће бити речи је и то да се Гаусова кривина може мерити проверавањем колико се обим мале кружнице разликује од $2r\pi$, тј. од вредности коју би тај обим имао у еуклидском простору. Тиме ћемо се бавити у трећем поглављу, Тврђење 7. "Становници" неке површи би мерењем Гаусове кривине у некој тачки на површи знали на каквој се површи налазе, да ли је она раван простор, сферног облика или ипак нешто друго.

2 Еуклидска и нееуклидска геометрија

Диференцијална геометрија представља примену рачуна на геометрију простора који се криви. Да бисмо разумели простор који се криви, морамо прво разумети простор који је раван.

Ми живимо у свету прожетом закривљеним објектима, и ако би нас неко питао за значење речи "раван", вероватно бисмо одговорили у смислу одсуства кривине; глатка површ без икаквих избочина и удубљења.

Ипак многи рани математичари су изгледа волели једноставност и униформност равне равни, па су и били награђени за откривање веома лепих и важних чињеница о фигурама у њој. Једна од најранијих и најдубљих таквих чињеница била је Питагорина теорема. Иако је Питагора живео у Грчкој око 500. године старе ере, теорема која носи његово име, појавила се много раније, на Вавилонској глиненој плочи - Плимптон 322 (Слика 1), која датира из 1800. године старе ере. На њој су урезане Питагорине тројке. Да би се пронашао доказ о модерном, логичком, дедуктивном приступу математици морамо "скочити" у 600. годину старе ере, кад је живео Талес из Милета. Неки научници сматрају да је он био први који је поставио идеје о извођењу нових закључака из претходно установљених.



Слика 1: Плимптон 322

2.1 Еуклидска и хиперболичка геометрија

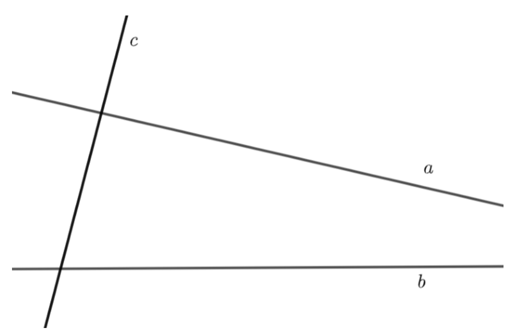
Први покушаји стварања дедуктивне теорије датирају још из 5. века старе ере. Елементи Хипократа са Хиоса написани средином 5. века старе ере први је покушај систематизације геометријских знања. На несрећу, његов рукопис до данас није сачуван, међутим Симпликије (6. век нове ере), у својим коментарима Аристотелове Физике пренео је један део Еудемове историје геометрије из друге половине 4. века старе ере, у којој он коментарише Хипократове Елементе. Реч Елементи се у античко доба обично односила на дедуктивно засновану геометрију.

Најчувенију, најчитанију и најутицајнију расправу под називом Елементи написао је око 300. године старе ере Еуклид, ученик Платонове академије и оснивач геометријске школе у Александрији. Ниједна од књига о геометрији написаних пре Еуклида није могла да се одржи, нити је вековима после њега покушано другачије заснивање геометрије.

Еуклидови Елементи су се састојали из 23 дефиниције, које су представљале кратка објашњења о основним геометријским појмовима. Основне ставове геометрије Еуклид је поделио на аксиоме и постулате, 5 постулата и 9 аксиома (број варира у различитим преписима). Прво су наведени постулати.

По својој сложености истиче се Пети Еуклидов постулат.

Тврђење 1 *(Пети Еуклидов постулат) Ако једна права у пресеку са другим двема правама образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве ће се сећи и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права.*



Слика 2: Пети Еуклидов постулат

На први поглед и најдужи од свих осталих, изазивао је мишљења да не треба да буде један од основних постулата, да га треба извести из осталих.

Испитивања из теорије паралелних линија која се односе на Пети постулат издвајају се као важан поглед на основе геометрије. Након безброј неуспелих покушаја да се Пети постулат изведе из осталих, разрешено је питање да је тај постулат независан од осталих. Тако се доспело до првог значајног резултата од Еуклидовог времена, који је знатно унапредио основе геометрије.

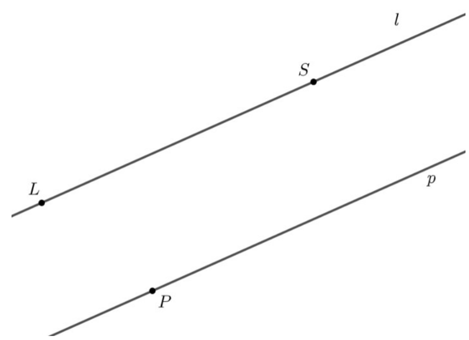
У делу Николаја Лобачевског и Јаноша Бољаја први пут је изражена мисао да је Пети Еуклидов постулат независан од осталих постулата, па се из њих не може ни извести. Тада је закорачено у један нови свет геометрије. Резултати Лобачевског и Бољаја постали су сасвим јасни тек крајем 19. века, када је коначно формиран поглед на логичке принципе заснивања геометрије.

Вековима, паралелне праве сматране су као праве "које се налазе у истој равни и које се простирући се неограничено у оба правца не секу ни у једној тачки". Есенцијално нов начин поимања паралелности предложио је Лобачевски, а за њим и Бољај. Захваљујући њима, заснована је хиперболичка геометрија у којој не важи Пети постулат. У једном од својих дела Лобачевски на самом почетку доказује да "све праве линије које полазе у једној равни из једне тачке, могу се у односу на једну дату праву у истој равни поделити у две класе, и то у линије које се секу и линије које се не секу". Слично, Јанош Бољај је на самом почетку свог дела "*Appendix*" написао : "Ако BN не сече, а свака друга права BP угла $\angle ABN$ сече AM, писаћемо $BN \parallel AM$".

Геометрија заснована на аксиомама без Петог постулата назива се *апсолутна геометрија.*

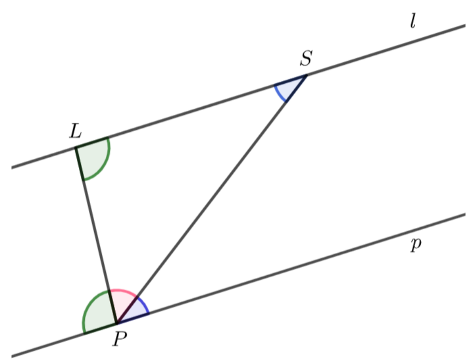
Аксиома паралелности: Кроз било коју тачку P ван праве l, постоји тачно једна права p која је паралелна са l.

Илустрација Аксиоме паралелности дата је на Слика 3.



Слика 3: Аксиона паралелности

Покушаји да се докаже да се Пети еуклидов постулат може извести из осталих, довели су до корисних еквивалената аксиоми паралелности. На пример: "Постоје слични троуглови различитих величина (Волис 1663. година)". Али први еквивалент је представљен још код Еуклида: "Углове у троуглу саберите до два права угла" (Слика 4).



Слика 4: Еквивалент аксиоми паралелности

Како је и раније речено, објашњење ових неуспеха, дошло је тек око 1830. године. Завршавајући путовање које је почело пре око 4000 година, независно један од другог, Николај Лобачевски и Јанош Бољаји објавили су откриће потпуно нове форме геометрије - **хиперболичке геометрије**, која се дешава у новој равни - **хиперболичкој равни**. У овој геометрији прве четири Еуклидове аксиоме важе, али пета не. Уместо ње следећа аксиома важи.

Хиперболичка аксиома : Дата је права l и тачка P ван ње. Тада постоје барем две праве кроз P које су паралелне са l.

2.2 Сакери и Ламберт

Лобачевски и Бољаји су истраживали логичне последице хиперболичке аксиоме, и чисто апстрактним размишљањем дошли до невероватних резултата унутар нове, фасцинантне геометрије која се много разликује од Еуклидове.

Многи пре њих, посебно Сакери и Ламберт, открили су неке последице хиперболичке аксиоме. Њихов циљ је био да нађу контрадикцију, за коју су веровали да ће коначно доказати Еуклидску геометрију као једину праву геометрију.

У свом делу "*Euclides ab omni naevo vindicatus*" Сакери је представио оно што у данашње време зовемо *Сакеријев четвороугао.* То је четвороугао чије две наспрамне странице су једнаке по дужини и нормалне на суседне. Прво је показао, користећи само прва четири постулата (апсолутна геометрија) да су углови његовог четвороугла једнаки. Могу бити прави (еуклидски случај), тупи (Сакери је дошао до контрадикције) и оштри. Овај трећи случај познат је и као *хипотеза о оштром углу.* Нова раван је раван у којој важе прва четири постулата, а уместо петог важи хипотеза о оштром углу. Сакеријев циљ је био да пронађе контрадикцију у овој новој равни и стога покаже да је Пети постулат уствари теорема Еуклидове геометрије. Он каже: "Хипотеза о оштром углу је апсолутно погрешна, јер је у супротности са природом праве линије". Грешка коју је направио била је та што је сматрао тачке у бесконачности за обичне тачке у новој равни.

Ламберт је у својој "*Theorie der Parallellinien*" развио теорију на сличан начин као Сакери, али без тврдњи да је дошао до контрадикције. Ламберт је користио оно што ми данас зовемо *Ламбертов четвороугао.* То је четвороугао са три права угла. Четврти може бити прав (еуклидски случај), туп (дошао до контрадикције) или оштар. Он је исто дошао до многих интересантних резултата, али његов закључак је био: "У искушењу сам да закључим да трећа хипотеза важи за неку имагинарну сферу".

Испоставило се да је идеја разматрања сфере имагинарног полупречника и њене аналогије са обичном сфером најважније оруђе за откриће нееуклидске геометрије. Овде, аналогија нам представља метод којим замењујемо R са имагинарним бројем Ri у свим формулама које се појављују у геометрији сфере полупречника R. Тако добијене формуле важиће у овој новој равни.

Ипак, Лобачевски и Бољај заслужују славу као први који су препознали и у потпуности пригрлили идеју да су открили потпуно нову нееуклидску геометрију. Али шта је ова нова геометрија значила, и чему је служила, ни њих двојица нису могли да кажу.

Изненађујуће, одговор на то питање дала је Диференцијална геометрија закривљених површи. 1868. године италијански математичар Еугенио Белтрами коначно је успео у томе да хиперболичкој геометрији да конкретну интерпретацију, постављајући је на чврст темељ, са ког ће се само ширити и цветати. Нажалост, ни Лобачевски, ни Бољаји нису доживели да ово виде.

Белтрами је у свом делу "*Saggio di interpretacione della geometria non−euclidea*" из 1868. проучавао површ дефинисану јединичним диском и снабдевену елементом дужине, који он даје експлицитно, у односу на коју је кривина константна и негативна. Његов *Saggio* се може читати као конструкција модела нове равни. Њене тачке су тачке унутар круга у Еуклидовој равни, растојање међу њима је одређено елементом дужине дефинисаним аналогијом са елементом дужине обичне сфере, њене линије су тетиве, а паралелне линије су тетиве које се секу на ободу круга. На овај начин се добија геометрија која задовољава све Еуклидове постулате, сем Петог постулата и названа је нееуклидска геометрија/хиперболичка геометрија.

2.3 Ламберт, Гаус и Бољај

"...Питање је, да ли може Пети постулат бити исправно изведен из осталих Еуклидових постулата и аксиома. Или, ако оне нису довољне, могу ли други постулати или аксиоме или и једно и друго да буду дате тако да имају исте доказе као еуклидске и из чега би пети постулат могао бити доказан?! За први део овог питања, може се апстраховати из свега претходног што сам назвао представљање ствари... ". (Ламберт 1786.)

Врло је могуће да је Гаус познавао Ламбертов рад веома добро. Један од најбољих експерата Ламбертовог рада био је Клугел, близак пријатељ Гаусовог саветника Јохана Пфафа. Неке преписке Ламберта и Клугела постоје забележене. Клугел је у својој тези из 1763. године критички анализирао дотадашње покушаје да се докаже Пети постулат. Он је веровао у независност Петог постулата. Изјавио је да су Сакеријеви резултати довели до контрадикције искуства, али не и аксиома. На пример, када говори оеквидистанти правих линија, Клугел каже: "Прилично је јасно да овде користимо да линија, која је на истом растојању од праве линије је и сама права линија. Ово се може закључити искуством и посматрањем, не из природе правих линија". Мало је вероватно да Гаус није чуо за Ламбертов рад на теорији правих.

Децембра 1818. године о нееуклидској геометрији, Фердинанд Швајкарт је рекао: "Сума три угла у нееуклидском троуглу постаје све мања, што је већи троугао.". Ову белешку је Гаусу послао Кристијан Герлинг. У свом одговору Герлингу, Гаус каже: "Недостатак до $180°$ у суми углова у раванском троуглу није само већи како је површина већа, већ је пропорционалан томе." Могуће је да је ово Гаус научио из Ламбертових резултата.

У чистој аналогији са сферном геометријом, Ламберт наводи, да "имагинарна сфера" има ту особину да је на њој збир углова у троуглу мањи од π. Доказ ове особине можете потражити у [6].

Веза између Гаусових "*Disquisitiones*" и нееуклидске геометрије може се анализирати користећи наредне 2 хипотезе, које омогућавају да се одговори на одређена природно наметнута питања.

1. Гаус је био свестан да решење проблема везаног за хипотезу о оштром углу није могуће показати помоћу тачака, правих и равни. Из тог разлога, Гаус је усвојио Ламбертов Аналитички програм као коректан метод за дефинитивно решење проблема.

2. Гаус је био одлучан у томе да нађе површ која ће играти улогу Ламбертове имагинарне сфере.

У Гаусовим списима између 1823. и 1827. године, наводи се да је за криве $(x(s), y(s))$ чија ротација генерише супротност сфери задовољено:

$$y = R \sin\phi$$

$$x = R \cos\phi + \log\tan\phi$$

$$s = R \log \frac{1}{\sin\phi}$$

Из овога је очигледно да је кривина $-\frac{1}{R^2}$, јер је кривина површи која је настала ротацијом криве $(x(s), y(s))$ око $x-$осе, дата са $K = -\frac{1}{y}\frac{d^2y}{ds^2}$.

Коју то површ имагинарна сфера представља?! Како су троуглови на њој представљени и колики је збир њихових углова?! Можда је баш нада за проналаском такве површи и била разлог да Гаус напише "*Disquisitiones*". Трагајући за имагинарном сфером, Гаус је пронашао унутрашњу карактеристику површи. Ово невероватно откриће је његова теорема *Egregium.*

У Гаусовом писму Шумахеру из 1831. године које се тиче теорије правих, посебно око еквиваленета Петог постулата, писало је: "Последњих неколико недеља сам почео да записујем неке своје медитације. Неке од њих су старе и око 40 година. Пролазио сам кроз њих бар 3 или 4 пута, освежавајући их у мојој глави. Нисам желео да пропадну са мном." Неколико месеци касније, Гаус је прочитао Бољајев *Appendix* и одлучио да више ништа не каже на ту тему. У писму Герлингу стоји: "Последњих дана сам примио кратак рад из Мађарске на тему нееуклидске геометрије у којем налазим све своје идеје и резултате записане са елеганцијом, мада у форми која је тешко разумљива некоме ко није упознат са темом. Аутор је веома млад, аустријски официр, син мог пријатеља из младости, са којим сам често разговарао на ову тему...Сматрам да је овај младић, Бољај геније прве класе." У писму Бољајевом оцу, наводи да ако би похвалио његовог сина, било би као да хвали себе, јер је његов син записао све оно о чему је он сам размишљао последњих тридесетак година и мало шта ставио на папир...

У Бољајевом *Appendix*-у налази се између осталог и формула за обим круга дата преко полупречника r (о њој ћемо нешто више рећи у 3.4):

$$L(r) = 2\pi R \sinh \frac{r}{R}$$

Да ли је Гаус прочитао Бољајев *Appendix*? Не можемо бити сигурни, али можемо наслутити да је одговор потврдан, с обзиром да је неопходно знање диференцијалне геометрије за обављање ових прорачуна, а и због тога што је престао да пише своје белешке о нееуклидској геометрији након читања Бољајевог рада.

3 Кривине површи

Познато је да су кривина и торзија криве биле кључне у грађењу геометрије кривих. Прикажимо аналогију за површи у $\mathbb{R}^3$.

Постављамо питање како се то површ "криви" у тачки. У овом делу, показаћемо два приступа. Први, који је дао Ојлер, а идеја је у разматрању кривине криве која настаје као пресек равни и површи. И други, који се приписује Гаусу, а представља пресликавање између површи и сфере које је одређено нормалним правцем у свакој тачки. Ова два приступа се разликују и по времену у ком су пронађени. Први користи промену координата, секција 3.1. Други захтева технику развијену за изучавање површи (почетак диференцијалне геометрије), секција 3.2.

Пре него што пређемо у разматрање кривина на површи, даћемо неке важне дефиниције и лему које ће нам даље у раду бити значајне.

Дефиниција 1 *Подскуп $S \subset \mathbb{R}^3$ је регуларна површ, ако у свакој тачки p на S постоји отворен скуп $V \subset \mathbb{R}^3$ и функција $x\colon U \to V \cap S$, где је U отворен скуп у $\mathbb{R}^2$ која задовољава следеће услове:*

1) x је диференцијабилна функција, тј. ако напишемо $x(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$, где је $(u,v) \in U$, координатне функције f_1, f_2, f_3 имају парцијалне изводе свих редова.

2) x је хомеоморфизам. Непрекидна је, по првом услову, па има непрекидан инверз $x^{-1}\colon V \cap S \to U$. То значи да је x^{-1} рестрикција на $V \cap S$ непрекидне функције из W у $\mathbb{R}^2$, где је W отворени подскуп од $\mathbb{R}^3$ који садржи $V \cap S$.

3) Јакобијева матрица

$$
\mathcal{J}(x)(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}
$$

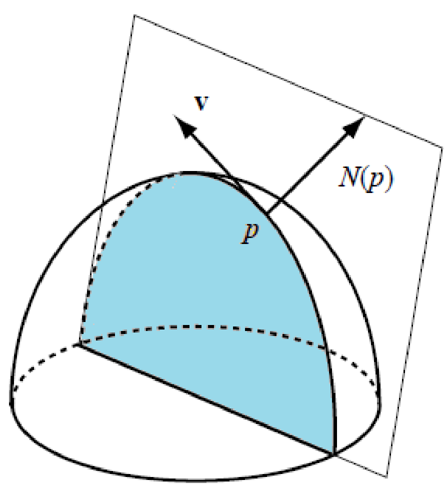
има ранг 2. Тј. за свако $(u, v) \in U$, $\mathcal{J}(x)(u, v) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *је* $1-1$ *као линеарно пресликавање. Овај услов представља регуларност за* x.

Лема 1 *Ако је* $f \colon U \to \mathbb{R}$ *диференцијабилна функција на отвореном скупу* $U \subset \mathbb{R}^2$, *онда је график функције* f *који је подскуп од* $\mathbb{R}^3$ *дат са* $(u, v, f(u, v))$ *за* $(u, v) \in U$ *регуларна површ.*

Дефиниција 2 *Јединични нормални вектор на површ* S *у тачки* $p = x(u, v)$ *је* $N(p) = \dfrac{x_u \times x_v}{||x_u \times x_v||}$.

3.1 Ојлеров рад о површима

Погледајмо следећу слику.



Претпоставимо да је p тачка на површи S и $N(p)$ јединична нормала у p. Нека је $\mathbf{v}$ јединични тангентни вектор тангентне равни $T_p(S)$ на S у тачки p. Пар $\{\mathbf{v}, N(p)\}$ одређује раван у $\mathbb{R}^3$. Транслираћемо ову раван тако да координатни почетак буде у p. Пресек ове равни и површи S даје криву на S у близини p.

Нека $c(s)$ представља параметризацију криве јединичне брзине тако да је $c'(0) = \mathbf{v}$. "Уопштена" кривина $k_c(s)$ је кривина криве $c(s)$, кад је $s = 0$, у равни кроз p, паралелној са равни разапетој векторима $\mathbf{v}$ и $N(p)$. Дефинишемо нормалну кривину $k_n(\mathbf{v})$ површи S у тачки p и правцу $\mathbf{v}$ као $k_c(s)$. Када бисмо фиксирали тачку p, $k_n(\mathbf{v})$ је функција праваца у тангентној равни. У *Recherches sur la courbure des $surfaces$* 1760. године Ојлер је доказао следећу теорему.

Теорема 1 *Ако нормална кривина $k_n(\mathbf{v})$ није константна функција по $\mathbf{v}$, онда постоје тачно два јединична тангентна вектора X_1 и X_2, тако да је $k_n(X_1) = k_1$ максималан и $k_n(X_2) = k_2$ минималан. Чак шта више, $X_1 \perp X_2$.*

Доказ: Даћемо Гаусов доказ Ојлерове теореме.

Нека је $p = (0,0,0)$ и $T_p(S)$ је xy раван. По теореми о имплицитној функцији постоји отворен скуп U на S који садржи p и има форму графика функције, тј. $U = \{(x,y,z)|z = f(x,y)\}$. Одавде ми имамо параметризацију за S у близини p дату са $x(u,v) = (u,v,f(u,v))$. Рескалирањем, ако је потребно, можемо узети:

$$x_u|_{(0,0)} = (1,0,0) \text{ и } x_v|_{(0,0)} = (0,1,0) \text{ тј. координатне линије}$$

$$f(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,0)} = 0.$$

Још једна промена је потребна. То је ротација xy равни док

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{(0,0)} = 0.$$

Ротације су дате формулом:

$$\rho_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Нека је $f_\theta = f \circ \rho_\theta$.
Онда важи:

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial y} = -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x\partial y} = -\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right) + \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

Множењем и сређивањем добијамо:

$$\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x\partial y} = \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$$

Како је $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ и $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$, следи да је:

$$\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x\partial y} = \cos 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\sin 2\theta}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$$

Да би $\dfrac{\partial^2 f_\theta}{\partial x\partial y} = 0$ мора $\cos 2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \dfrac{\sin 2\theta}{2}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = 0.$

Кад је $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, θ тражимо као решење следеће једначине:

$$\tan 2\theta = \frac{2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}\Bigg|_{(0,0)}.$$

Ако је $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, нека је $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Ротирамо xy раван за θ и поставимо да f буде f_θ како је и конструисано.

Када S сече xz раван, резултујућа крива је параметризована (не нужно јединичне брзине), у Oxz равни са $c_{xz}(t) = (t, f(t,0))$. Како је x у t правцу, $x' = 1$ и $z' = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$. "Уопштена" кривина $k_{c_{xz}}$ дата је са:

$$k_1 = \frac{x'z'' - x''z'}{[(x')^2 + (z')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0).$$

Слично пресек са yz равни даје криву $c_{yz}(t) = (t, f(0,t))$ са "уопштеном" кривином $k_{c_{yz}}(t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_2$.

Ако је $\mathbf{v}$ вектор јединичне дужине у равни xy, онда $\mathbf{v}$ може бити написан као $(\cos\phi, \sin\phi)$. Крива дефинисана пресеком S и равни разапетој векторима $\mathbf{v}$ и e_3 може бити параметризована близу p са $c(t) = (t, f(t\cos\phi,\, t\sin\phi))$. Нормална кривина је дата формулом:

$$k_n(\mathbf{v}) = \frac{d^2}{dt^2} f(t\cos\phi, t\sin\phi)\Bigg|_{(0,0)} = \cos^2\phi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \sin^2\phi \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \text{ тј.}$$

$$k_n(\mathbf{v}) = k_1 \cos^2\phi + k_2 \sin^2\phi.$$

$k_n(\mathbf{v})$ достиже своју минималну вредност $k_2 = k_{c_{yz}}(0)$ за $\phi = \frac{\pi}{2}$, а своју максималну вредност $k_1 = k_{c_{xz}}(0)$ за $\phi = 0$.

$\triangle$

Вредности k_1 и k_2 називају се **главне кривине** површи S у тачки p, а правци X_1 и X_2 **главни правци**. Заједно, главне кривине дају квалитативну слику површи у околини тачке. Из Гаусовог доказа Ојлерове теореме, можемо написати једначину површи S у околини p као график функције $z = f(x,y)$:

$$z = k_1 x^2 + k_2 y^2 + R(x,y), \text{ где је } \lim_{x,y\to 0} \frac{R(x,y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Стога, површ је у околини тачке p апроксимирана површи другог реда $z = k_1 x^2 + k_2 y^2$.

Ојлер је написао следеће: *"И тако се мерење кривине површи, ма колико компликовано било, своди у свакој тачки на познавање два радијуса кривине, један највећи и један најмањи. Те две ствари потпуно одређују природу кривине и ми можемо одредити кривине свих могућих пресека нормалних у датој тачки."*

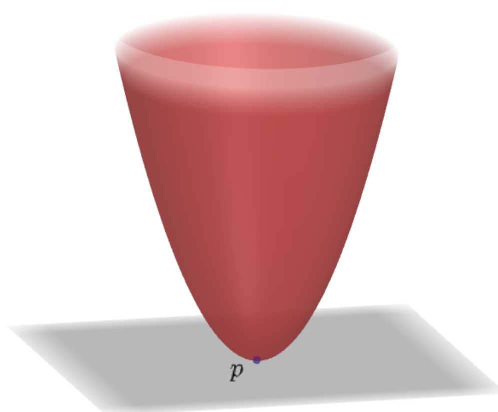
Шта нам знаци главних кривина кажу?

1. $k_1, k_2 > 0$ или $k_1, k_2 < 0$:

   Таква тачка се назива **елиптичка тачка**. Површ другог реда која апроксимира дату површ у тачки p је **параболоид**:

   $$z = \pm((ax)^2 + (by)^2).$$

   Константно z нам даје скупове елипси. Из ове једначине за S, ако су x и y довољно мали, $z = f(x, y)$ је ненула и увек позитивно или увек негативно. У овом случају, близу тачке p, S лежи са једне стране тангентне равни. Погледајмо на слици испод илустрацију овог случаја.

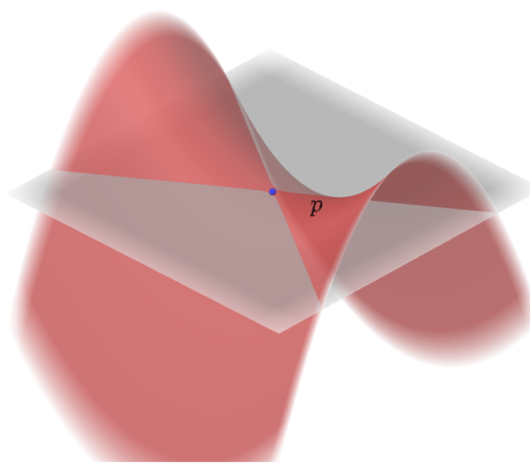


2. $k_1 > 0, k_2 < 0$:

   Оваква тачка зове се **хиперболичка тачка**, а површ другог реда која апроксимира S у p је **хиперболички параболоид**, чија је једначина:

$$z = \pm((ax)^2 - (by)^2).$$

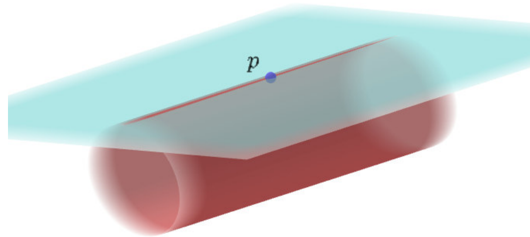
   Константно z нам даје скуп хипербола. У овом случају постоје тачке које су са једне стране тангентне равни, али и тачке које су истовремено са друге стране тангентне равни. Илустрација овог случаја је на слици испод.



3. $k_1 > 0, k_2 = 0$ или $k_1 = 0, k_2 < 0$:

   Оваква тачка назива се **параболичка тачка**. Површ другог реда која апроксимира S у p је **цилиндар**:

$$y = k_1 x^2 \text{ или } z = k_2 y^2.$$



У близини p све тачке леже са исте стране тангентне равни.

4. $k_1 = k_2 = 0$:

   Такве тачке називају се **планарне тачке**. Примери као што је нпр $f(x, y) = x^3$, показују да понашање S у односу на тангентну раван у p може варирати.

5. $k_1 = k_2 \neq 0$:

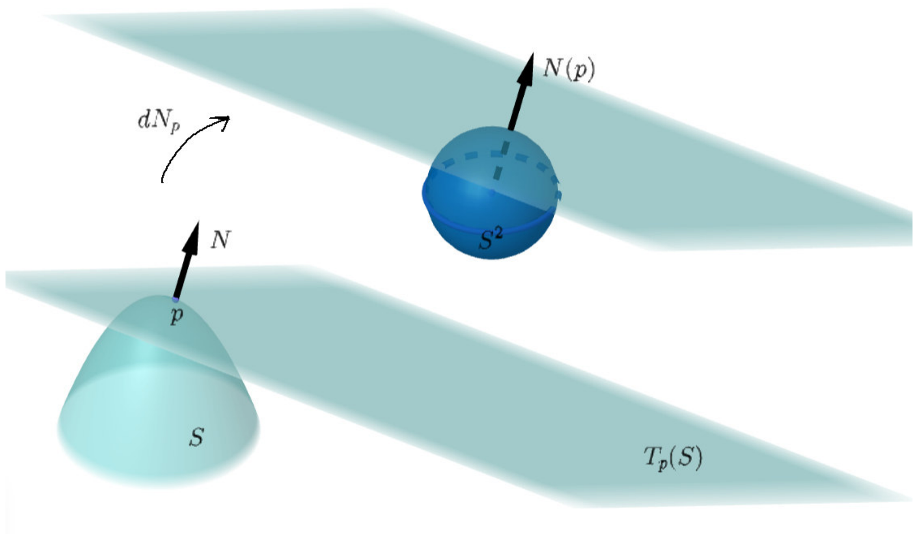
   То су **умбиличке тачке** и сви правци у тим тачкама су главни правци. Можемо узети било који пар ортогоналних праваца у тој тачки за главне правце. На пример све тачке на сфери су умбиличке тачке.

3.2 Гаусово пресликавање

За раванске криве, кривина мери промену у тангентном вектору тј. нормалном вектору. Уопштење појма кривине на површима увео је Гаус у свом делу *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828.). Инспирацију је нашао у астрономији и идеји *небеске сфере*. Пресликавање, названо Гаусово пресликавање, јавило се и раније, 1815.године, код Родригеза.

Дефиниција 3 *Нека је S оријентабилна површ и S^2 јединична сфера у $\mathbb{R}^3$ са центром у координатном почетку. Гаусово пресликавање је пресликавање $N\colon S \to S^2$, које свакој тачки p са S придружује једнични вектор $N(p)$.*

Локално имамо формулу $N(p) = \dfrac{x_u \times x_v}{\| x_u \times x_v \|}$. Приметимо да овај израз зависи од избора координата. На пример, ако заменимо u и v, нормала се промени из $N(p)$ у $-N(p)$. Важна одлика мерења кривине базирана на Гаусовом пресликавању је што не зависи од избора координата.



За регуларне површи $N\colon S \to S^2$ је диференцијабилно.

Стога, постоји пресликавање $dN_p(S)\colon T_p(S) \to T_{N(p)}(S^2)$. Гаусово пресликавање је необично, јер тангентна раван на S у p је нормална на $N(p)$. Својство сфере S^2 је да је $T_q(S^2)$ нормално на q, јер су тангенте равни паралелне у овом случају. Онда је $T_p(S) = T_{N(p)}(S^2)$ и можемо узети да је dN_p линеарно пресликавање $dN_p(S)\colon T_p(S) \to T_p(S)$.

Да бисмо срачунали dN_p можемо користити криве на S кроз p. Размотримо тангентни вектор $\mathbf{v} \in T_p(S)$ у p, као тангентни вектор на криву $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ дату са $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Даље $dN_p(\mathbf{v}) = (N \circ \alpha)'(0)$. Овај израз нам даје да је $dN_p(\mathbf{v})$ брзина промене рестрикције нормалног вектора на криву $\alpha(t)$.

Хајде да погледамо следеће примере:

1. Нека је дата раван $\Pi\colon ax + by + cz + d = 0$ и $p \in \Pi$. Јединична нормала у p је $N(p) = \dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. То је константан вектор, па је $dN_p \equiv 0$.

2. Нека је S^2 јединична сфера у $\mathbb{R}^3$. За криву са сфере узмемо:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \text{ где је } x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1.$$

   Онда је $2xx' + 2yy' + 2zz' = 0$, па је $\alpha'(t) \perp \alpha(t)$.

   $N(x,y,z) = (x,y,z)$ је избор за јединичан нормалан вектор на S^2 у (x,y,z). Следи да је $dN_p = id$.

3. Нека је површ седло $x(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Даље:

$$x_u = (1, 0, 2u), x_v = (0, 1, -2v).$$

   Нормала на површ је дата са:

$$N(p) = N(x(u_0, v_0)) = \frac{(-2u_0, 2v_0, 1)}{\sqrt{4u_0^2 + 4v_0^2 + 1}}$$

   јер $x_u \times x_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (-2u, 2v, 1)$.

   Да бисмо добили израз за dN_p у $(0,0,0)$, нека $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ буде крива јединичне брзине и $\alpha(0) = (0,0,0)$. Онда важи:

$$\alpha(t) = (u(t), v(t), u^2(t) - v^2(t)), \text{ па следи}$$

$$(N \circ \alpha)(t) = \frac{(-2u(t), 2v(t), 1)}{\sqrt{4u^2(t) + 4v^2(t) + 1}}.$$

   Рачунајући извод у тачки $t = 0$ добијамо:

$$(N \circ \alpha)'(0) = (-2u'(0), 2v'(0), 0).$$

Како је

$$\alpha'(0) = (u'(0), v'(0), 2u(0)u'(0) - 2v(0)v'(0)) = (u'(0), v'(0), 0)$$

онда имамо

$$dN_{(0,0,0)}(\mathrm{v}) = dN_{(0,0,0)}(u'(0), v'(0), 0) = (-2u'(0), 2v'(0), 0).$$

Матрично записано dN_p у бази $\{x_u, x_v\}$:

$$dN_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

У општем случају, пресликавање dN_p има изузетно својство у односу на прву фундаменталну форму.

Тврђење 2 *$dN_p\colon T_p(S) \to T_p(S)$ је симетрично пресликавање у односу на прву фундаменталну форму.*

Доказ: Прво да кажемо шта је то симетрично пресликавање. Нека је В реални векторски простор са скаларним производом $<,>\colon V \times V \to \mathbb{R}$ и $A\colon V \to V$ линеарно пресликавање. A је симетричан, ако за свако $v, w \in V$ важи:

$$\langle A(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle.$$

Да бисмо доказали ово својство користићемо идеју из линеарне алгебре. Скаларни производ $I_p(\mathrm{u},\ \mathrm{v})$ линеаран је по обе промењљиве. Нека је $p = x(u_0, v_0)$ у бази $\{x_u, x_v\}$. Можемо одредити $dN_p(x_u)$ и $dN_p(x_v)$:

$$dN_p(x_u) = (N \circ x(u, v_0))'(u_0) = \frac{\partial N}{\partial u}\bigg|_{(u_0,v_0)} = N_u \text{ и}$$

$$dN_p(x_v) = (N \circ x(u_0, v))'(v_0) = \frac{\partial N}{\partial v}\bigg|_{(u_0,v_0)} = N_v.$$

Знамо да је $I_p(N, x_v) = 0 = I_p(x_u, N)$. Узимајући парцијалне изводе по u и v редом, добијамо:

$$I_p(N_u, x_v) + I_p(N, x_{vu}) = 0 = I_p(N_v, x_u) + I_p(N, x_{uv}).$$

Како је и $x_{uv} = x_{vu}$ имамо:

$$I_p(dN_p(x_u), x_v) = I_p(N_u, x_v) = -I_p(N, x_{vu}) = I_p(x_u, N_v) = I_p(x_u, dN_p(x_v)).$$

$\triangle$

* Зашто је занимљиво симетрично пресликавање?

Својство 1: $A\colon V \to V$ је ненула симетричан оператор у односу на $<,>$. Оператор A име две реалне, не нужно различите, сопствене вредности.

Својство 2: Нека је $A\colon V \to V$ симетричан оператор који има јединичне сопствене векторе e_1 и e_2. Ако сопствене вредности од A нису једнаке, онда је $e_1 \perp e_2$.

Својство 3: Нека је $A\colon V \to V$ симетричан оператор са сопственим вредностима $\lambda_1 > \lambda_2$ и придруженим сопственим векторима e_1 и e_2. Узмимо да су сопствени вектори јединични. Нека је $v \in V$ такође јединични вектор. Можемо написати $v = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ и $< A(v), v >= \lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta)$. Даље, $< A(v), v >$ достиже максимум λ_1 кад $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, а свој минимум λ_2 кад је $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Остала својства, као и докази, могу се пронаћи у књизи [6], страна 162 и 163.

Дефиниција 4 *Нека је p тачка са површи S. Друга фундаментална форма на S у p је квадратна форма $II_p(v)\colon T_p(S) \to \mathbb{R}$ дефинисана са:*

$$II_p(\mathbf{v}) = -I_p(dN_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}).$$

Овде имамо и геометријску интерпретацију друге фундаменталне форме $II_p(\mathbf{v})$ кад је $\mathbf{v}$ јединични вектор. Као у доказу **Теореме 1**, нека је $c(s)$ крива јединичне брзине дата са $c(0) = p$ и $c'(0) = \mathbf{v}$. Траг ове криве је пресек са равни која је паралелна равни разапетој векторима $\mathbf{v}$ и $N(p)$ и пролази кроз p на S. Нормалну кривину у p на S у правцу $\mathbf{v}$ обележавамо са $k_n(\mathbf{v})$ и она задовољава једначину:

$$c''(\mathbf{v}) = k_n(\mathbf{v})N(p) \tag{1}$$

Теорема 2 *Нека је* $\mathbf{v} \in T_p(S)$ *јединични вектор. Тада је* $II_p(\mathbf{v}) = k_n(\mathbf{v})$.

Доказ:

Како је $N_c(s) \perp c'(s)$ за свако s, следи:

$$I_{c(s)}(N_c(s), c(s)) = 0.$$

Узимајући први извод добијамо:

$$I_{c(s)}((N \circ c)'(s), c'(s)) + I_{c(s)}(N(c(s)), c''(s)) = 0$$

За $s = 0$ можемо написати:

$$I_{c(0)}((N \circ c)'(0), c'(0)) + I_{c(0)}(N(c(0)), c''(0)) = 0$$

Како је $c(0) = p$ и $c'(0) = \mathbf{v}$, следи:

$$I_p(dN_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}) + I_p(N(p), c''(0)) = 0 \text{ тј.}$$

$$-I_p(dN_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}) = I_p(N(p), c''(0)).$$

Даље,

$$II_p(\mathbf{v}) = -I_p(dN_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}) = I_p(N(p), c''(0))$$

а из (1) следи:

$$II_p(\mathbf{v}) = I_p(N(p), k_n(\mathbf{v})N(p)) = k_n(\mathbf{v}).$$

$\triangle$

3.3 Гаусова кривина

Нека је $\{X_1, X_2\}$ ортонормирани скуп главних праваца у p на S. Тада је трансформација dN_p у овој бази дата матрицом:

$$dN_p = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$$

Сада ћемо видети како је Гаус (1825.) представио "меру кривине у тачки."

Дефиниција 5 *Гаусова кривина површи S у тачки p дефинисана је са:*

$$K(p) = k_1 \cdot k_2 = \det(dN_p).$$

Приметимо да је $K(p) > 0$ у елиптичким тачкама, $K(p) < 0$ у хиперболичким, а $K(p) = 0$ у параболичким и планарним тачкама.

Природа апроксимирајуће површи другог реда одређена је знаком Гаусове кривине. Још једно важно запажање је да Гаусова кривина не зависи од избора координата у околини p. Свака промена координата води ка промени базе тангентне равни у p, али $K(p)$ остаје иста јер је детерминанта.

Да бисмо развили и примењивали Гаусову кривину, за њу нам је потребан израз који можемо срачунати. Нека је $p \in S$ тачка на $x\colon (U \subset \mathbb{R}^2) \to S$. Онда је $N(p) = \dfrac{x_u \times x_v}{|| \, x_u \times x_v \, ||}$. Ако је $\mathbf{w} = \alpha'(0) \in T_p(S)$, за неко $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$, онда:

$$\mathbf{w} = \alpha'(0) = \frac{d}{dt}(x(u(t), v(t))) \Bigg|_{t=0} = u'(0)x_u + v'(0)x_v, \tag{2}$$

$$dN_p(\mathbf{w}) = \frac{d}{dt} N \circ x(u(t), v(t)) \Bigg|_{t=0} = u'(0)N_u + v'(0)N_v. \tag{3}$$

Како N_u и N_v леже у $T_p(S)$, можемо их изразити у бази $\{x_u, x_v\}$:

$$N_u = a_{11}x_u + a_{12}x_v, \tag{4}$$

$$N_v = a_{21}x_u + a_{22}x_v \tag{5}$$

Ако запишемо скраћено $u' = u'(0)$ и $v' = v'(0)$, онда $dN_p \colon T_p(S) \to T_p(S)$ можемо записати матрично:

$$dN_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \text{ у бази } \{x_u, x_v\}.$$

Представићемо a_{ij} преко друге фундаменталне форме. Ради лакшег записа користићемо $I(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.

Како важи (2) и (3), следи:

$$II(\mathbf{w}) = -\langle dN_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle = -\langle u'N_u + v'N_v, u'x_u + v'x_v \rangle.$$

Рачунајући овај скаларни производ добијамо:

$$II(\mathbf{w}) = -\langle N_u, x_u \rangle (u')^2 - (\langle N_u, x_v \rangle + \langle N_v, x_u \rangle)u'v' - \langle N_v, x_v \rangle (v')^2.$$

Дефинишимо следеће функције на U:

$e = -\langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle$
$f = -\langle N_u, x_v \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N, x_{vu} \rangle = -\langle N_v, x_u \rangle$
$g = -\langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle.$

Одавде следи,

$$II(\mathbf{w}) = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2.$$

Користећи базу $\{x_u, x_v\}$ и множење матрица, даћемо локалне изразе за прву и другу фундаменталну форму.

$$I_p\left(\begin{pmatrix}u_1'\\v_1'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_2'\\v_2'\end{pmatrix}\right)=(u_1'\ \ v_1')\begin{pmatrix}E & F\\F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2'\\v_2'\end{pmatrix}\text{ и}$$

$$II_p\left(\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\right)=(u'\ \ v')\begin{pmatrix}e & f\\f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Даље, како је

$$-II_p\left(\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\right)=\langle dN_p(u'x_u+v'x_v),u'x_u+v'x_v\rangle \tag{7}$$

користећи (6) и (7) добијамо:

$$\begin{aligned}-II_p\left(\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\right)&=(a_{11}u'+a_{21}v',a_{12}u'+a_{22}v')\begin{pmatrix}E & F\\F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\\&=(u'\ \ v')\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

Ако упоредимо (6) и (8) добијамо:

$$-\begin{pmatrix}e & f\\f & g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\F & G\end{pmatrix}$$

Множењем, са десне стране, са $\begin{pmatrix}E & F\\F & G\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}G & -F\\-F & E\end{pmatrix}$ добијамо:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=-\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}e & f\\f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G & -F\\-F & E\end{pmatrix} \tag{9}$$

Следећа теорема нам даје експлицитне формуле за коефицијенте a_{ij}.

Теорема 3 *Коефицијенти a_{ij} из (4) и (5) су једнаки:*

$$a_{11}=\frac{fF-eG}{EG-F^2},a_{12}=\frac{eF-fE}{EG-F^2},a_{21}=\frac{gF-fG}{EG-F^2}\ \text{ и } a_{22}=\frac{fF-gE}{EG-F^2}.$$

Доказ:

Показаћемо само, на пример, a_{11}, остале се аналогно добијају.

Из (9) множењем матрица добијамо:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} eG-fF & fE-eF \\ fG-gF & gE-fF \end{pmatrix}$$

тј.,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fF-eG}{EG-F^2} & \frac{eF-fE}{EG-F^2} \\ \frac{gF-fG}{EG-F^2} & \frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{pmatrix}$$

па је $a_{11} = \dfrac{fF-eG}{EG-F^2}$.

$\triangle$

Последица 1 $K(p) = \det dN_p = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}$.

Доказ:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{fF-eG}{EG-F^2} & \frac{gF-fG}{EG-F^2} \\ \frac{eF-fE}{EG-F^2} & \frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2} \cdot \det \begin{pmatrix} fF-eG & eF-fE \\ gF-fG & fF-gE \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2} \cdot (f^2F^2 - fFeG - gefF + geEG - eFgF +$$
$$eFfG + fEgF - f^2EG)$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2} \cdot (-F^2(eg-f^2) + EG(eg-f^2))$$

$$= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \cdot (eg - f^2)(EG - F^2)$$

$$= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Па следи да је $K(p) = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$.

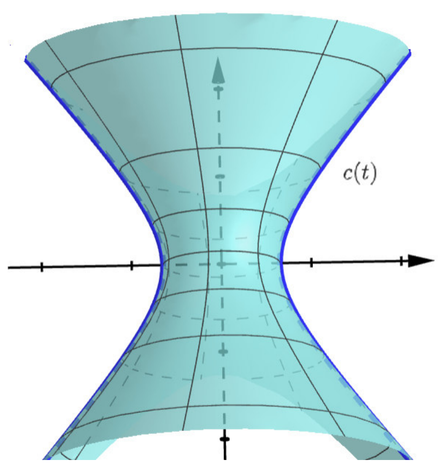
$\triangle$

Пример 1 *Гаусова кривина ротационе површи.*

Претпоставимо да је $c(t) = (\lambda(t), \mu(t)) \colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$ регуларна крива у yz равни.Нека $c(t)$ не пресеца саму себе, ни z-осу, тј. важи $\lambda(t) > 0, \forall t \in (a, b)$ и $\mu'(t) > 0, \forall t \in (a, b)$.

Површ коју добијамо ротирајући ову криву око z-осе је:

$$x(u, v) = (\lambda(u) \cos v, \lambda(u) \sin v, \mu(u)),\ a < u < b,\ 0 < v < 2\pi.$$



Прво рачунамо базне векторе тангентног простора x_u и x_v. Ради лакшег рачуна користићемо запис $\lambda(u) = \lambda$ и $\mu(u) = \mu$.

$x_u = (\lambda' \cos v, \lambda' \sin v, \mu')$, $x_v = (-\lambda \sin v, \lambda \cos v, 0)$.

$$x_u \times x_v = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \lambda' \cos v & \lambda' \sin v & \mu' \\ -\lambda \sin v & \lambda \cos v & 0 \end{pmatrix}$$

Након краћег рачуна добијамо:

$$x_u \times x_v = (-\mu' \lambda \cos v, -\mu' \lambda \sin v, \lambda' \lambda).$$

Сада тражимо коефицијенте прве форме:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = (\lambda')^2 \cos^2 v + (\lambda')^2 \sin^2 v + (\mu')^2 = (\lambda')^2 + (\mu')^2$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = -\lambda' \lambda \cos v \sin v + \lambda' \lambda \cos v \sin v + 0 = 0$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = \lambda^2 \sin^2 v + \lambda^2 \cos^2 v + 0 = \lambda^2.$$

Даље,

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 = \lambda^2((\lambda')^2 + (\mu')^2)$$

Како је $||x_u \times x_v|| = \sqrt{EG - F^2}$, онда је $||x_u \times x_v|| = \lambda\sqrt{(\lambda')^2 + (\mu')^2}$.

Такође,

$$N = \frac{x_u \times x_v}{||x_u \times x_v||} = \frac{1}{\lambda\sqrt{(\lambda')^2 + (\mu')^2}}(-\mu' \lambda \cos v, -\mu' \lambda \sin v, \lambda' \lambda),$$

$$x_{uu} = (\lambda'' \cos v, \lambda'' \sin v, \mu''),$$

$$x_{uv} = (-\lambda' \sin v, \lambda' \cos v, 0),$$

$$x_{vv} = (-\lambda \cos v, -\lambda \sin v, 0),$$

па су коефицијенти друге форме након краћег рачуна:

$$e = \langle N, x_{uu} \rangle = \frac{\lambda' \mu'' - \lambda'' \mu'}{\sqrt{(\lambda')^2 + (\mu')^2}}$$

$$f = \langle N, x_{uv} \rangle = 0$$

$g = \langle N, x_{vv} \rangle = \dfrac{\lambda\mu'}{\sqrt{(\lambda')^2 + (\mu')^2}}.$

У бази $\{x_u, x_v\}$ je $dN_{x(u,v)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} = \frac{-\dfrac{\lambda'\mu'' - \lambda''\mu'}{\sqrt{(\lambda')^2 + (\mu')^2}}\lambda^2}{\lambda^2((\lambda')^2 + (\mu')^2)} = -\frac{\lambda'\mu'' - \lambda''\mu'}{((\lambda')^2 + (\mu')^2)^{3/2}}$$

Слично,

$a_{21} = a_{12} = 0$

$a_{22} = \dfrac{-\mu'}{\lambda\sqrt{(\lambda')^2 + (\mu')^2}}.$

Одавде je:

$$dN_{x(u,v)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda'\mu'' - \lambda''\mu'}{((\lambda')^2 + (\mu')^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{-\mu'}{\lambda\sqrt{(\lambda')^2 + (\mu')^2}} \end{pmatrix},$$

па су главне кривине једнаке:

$$k_1 = \frac{\lambda'\mu'' - \lambda''\mu'}{((\lambda')^2 + (\mu')^2)^{3/2}} \text{ и } k_2 = \frac{\mu'}{\lambda\sqrt{(\lambda')^2 + (\mu')^2}},$$

а онда je Гаусова кривина

$$K(p) = k_1 \cdot k_2 = \frac{\mu'\lambda'\mu'' - \lambda''(\mu')^2}{\lambda((\lambda')^2 + (\mu')^2)^2}.$$

Када je $(\lambda')^2 + (\mu')^2 = 1$, онда након узимања извода по t добијамо да важи $\lambda'\lambda'' = -\mu'\mu''$. Из овога следи једноставнија формула за Гаусову кривину:

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{\lambda'\mu'\mu'' - \lambda''(\lambda')^2}{\lambda} \\ &= -\frac{\lambda'\lambda'\lambda'' + \lambda''(\mu')^2}{\lambda} \\ &= -\frac{(\lambda')^2\lambda'' + \lambda''(\mu')^2}{\lambda} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\lambda''((\lambda')^2 + (\mu')^2)}{\lambda}$$
$$= -\frac{\lambda''}{\lambda}$$

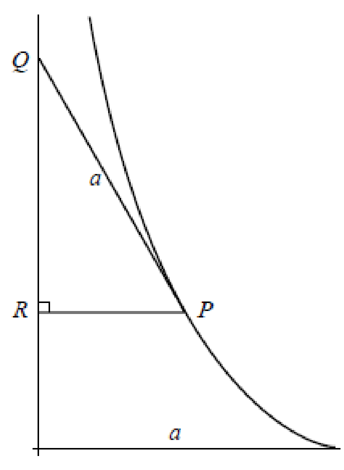
И сфера је ротациона површ. Ротирамо кружницу $c(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. Значи $\lambda(u) = R\cos u$, а $\mu(u) = R\sin u$. Такође, $\lambda' = -R\sin u$, $\lambda'' = -R\cos u$, $\mu' = R\cos u$ и $\mu'' = -R\sin u$. Па је Гаусова кривина сфере полупречника R једнака:

$$K(p) = \frac{R\cos u(-R\sin u)(-R\sin u) + R\cos u R^2\cos^2 u}{R\cos u((-R\sin u)^2 + (R\cos u)^2)^2}$$
$$= \frac{R^3\cos u(\sin^2 u + \cos^2 u)}{R\cos u(R^2(\sin^2 u + \cos^2 u))^2} = \frac{R^3}{R^5} = \frac{1}{R^2}.$$

За сферу S^2 полупречника $R = 1$, $K(p) = \frac{1}{1^2} = 1$.

Са друге стране крива $c(t) = (\cos t, \sin t), t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ је кружница полупречника $R = 1$. Површ која се добија ротацијом ове криве је сфера S^2. Како је $\lambda(t) = \cos t$ и $\mu(t) = \sin t$, онда је $(\lambda')^2 + (\mu')^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$. Па је Гаусова кривина $K(p) = -\frac{\lambda''}{\lambda} = -\frac{-\cos t}{\cos t} = 1$. Ова формула је и други доказ да је $K(p) = 1, \forall p \in S^2$.

Површ од великог значаја је ротациона површ добијена ротацијом трактрисе. Нека је y-оса фиксна оса, а фиксна дужина нека је a и нека крива почиње у $(a, 0)$ на x-оси.



Трактриса $\Theta = (x(t), y(t))$ задовољава једначину:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \tag{10}$$

Да бисмо добили параметризацију трактрисе као график функције можемо интегралити $\dfrac{dy}{dx}$ по x:

$$y(x) = \int -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx.$$

Решавање овог интеграла захтева погодну тригонометријску смену , што нас доводи до другачије параметризације. Нека је $x = a\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
\int -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx &= \int \frac{a\sin\theta}{-a\cos\theta}(a\sin\theta)d\theta \\
&= a\int \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta \\
&= a\int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}d\theta \\
&= a\int \sec\theta d\theta - a\int \cos\theta d\theta
\end{aligned}$$

Па је параметризација ове криве дата је формулом:

$$\Theta(t) = (a\cos t, a\ln|\sec t + \tan t| - a\sin t)$$

Када је $a = 1$, параметризација трактрисе је:

$$\Theta(t) = (\cos t, \ln|\sec t + \tan t| - \sin t)$$

Дакле, $\lambda(u) = \cos u$ и $\mu(u) = \ln|\sec u + \tan u| - \sin u$.

Први и други изводи $\lambda(u) = \lambda$ и $\mu(u) = \mu$ су:

$\lambda' = -\sin u,\ \lambda'' = -\cos u,$

$$\mu' = \frac{(\sec u + \tan u)'}{\sec u + \tan u} - \cos u = \frac{\dfrac{\sin u}{cos^2 u} + \dfrac{1}{\cos^2 u}}{\dfrac{1+\sin u}{\cos u}} - \cos u = ... = \frac{1}{\cos u} - \cos u =$$

$\sec u - \cos u,$

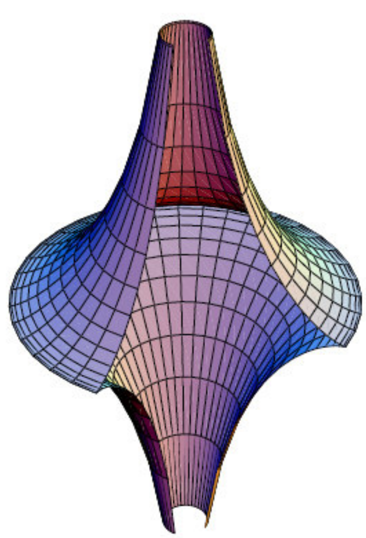
$$\mu'' = (\sec u - \cos u)' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} + \sin u = \sec u \tan u + \sin u.$$

Заменом ових вредности у формулу Гаусове кривине добијамо:

$$K(p) = \frac{(-\sin u)(\sec u - \cos u)(\sec u \tan u + \sin u) + \cos u(\sec u - \cos u)^2}{\cos u(sin^2 u + (\sec u - \cos u)^2)^2}$$

Након сређивања добијамо да је $K(p) = -1$.

Дакле, ротирање трактрисе води до површи константне негативне Гаусове кривине. Та површ назива се псеудосфера.



Параметризација псеудосфере дата је формулом:

$$x(u,v) = \left(a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v + a \log\left(\tan \frac{v}{a}\right)\right) \qquad (11)$$

Може се срачунати њена Гаусова кривина, и она износи $-\frac{1}{a^2}$. Видимо да је константна и негативна.

$\triangle$

Пример 2 *Даћемо још једну параметризацију псеудосфере, добијену ротацијом око $z-$ осе трактрисе у $xz-$ равни:*

$$r(u,v) = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, u - \tanh u\right)\ ,\ u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi)\ .$$

Показаћемо да је формулама $x = v, y = \cosh u$ дата локална изометрија псеудосфере и површи $h(x,y)$ чији су коефицијенти прве форме $E = G = \frac{1}{y^2}$ и $F = 0$.

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2}$

$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$

$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}$ тј. $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$

$\sinh u = \sqrt{y^2 - 1}$, па је $\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}$.

$\Phi(u,v) = (v, \cosh u), \Phi^{-1}(x,y) = (\operatorname{arccosh} y, x)$.

Нека је $\overline{h} = r \circ \Phi$.

$\overline{h} = \left(\frac{\cos x}{y}, \frac{\sin x}{y}, \operatorname{arccosh} y - \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}\right)$.

Даље,

$\overline{h}_x = \left(\frac{-\sin x}{y}, \frac{\cos x}{y}, 0\right)$.

$$\overline{h}_y = \left(\frac{-\cos x}{y^2}, \frac{-\sin x}{y^2}, \ln(y + \sqrt{y^2-1})' - \frac{\frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} - \sqrt{y^2-1}}{y^2} \right).$$

$$\overline{h}_y = \left(\frac{-\cos x}{y^2}, \frac{-\sin x}{y^2}, \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2-1}} - \frac{1}{y^2\sqrt{y^2-1}} \right).$$

$$\overline{h}_y = \left(\frac{-\cos x}{y^2}, \frac{-\sin x}{y^2}, \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} - \frac{1}{y^2\sqrt{y^2-1}} \right).$$

$$\overline{h}_y = \left(\frac{-\cos x}{y^2}, \frac{-\sin x}{y^2}, \frac{\sqrt{y^2-1}}{y^2} \right).$$

Тада су:

$$\overline{E} = \langle \overline{h}_x, \overline{h}_x \rangle = \frac{1}{y^2},$$

$$\overline{F} = \langle \overline{h}_x, \overline{h}_y \rangle = 0,$$

$$\overline{G} = \langle \overline{h}_y, \overline{h}_y \rangle = \frac{1}{y^2}.$$

Што је и требало показати.

$\triangle$

С обзиром да смо у претходном примеру показали да је псеудосфера локално изометрична са површи $h(x, y)$ чији су коефицијенти прве форме $E = G = \frac{1}{y^2}, F = 0$, можемо и на други начин пронаћи Гаусову кривину псеудосфере, тако што ћемо пронаћи Гаусову кривину њој изометричне површи h.

Наиме, како су

$$E = \frac{1}{y^2},$$

$F = 0$ и

$G = \dfrac{1}{y^2}$,

Кристофелови симболи после краћег рачуна износе:

$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = 0$

$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = -\dfrac{1}{y}$

Прве две Гаусове једначине се након рачуна своде на:

$\dfrac{1}{y^2}K = -\left(-\dfrac{1}{y}\right)_y$

$\dfrac{1}{y^2}K = -\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$

Па је Гаусова кривина $K = -1$.

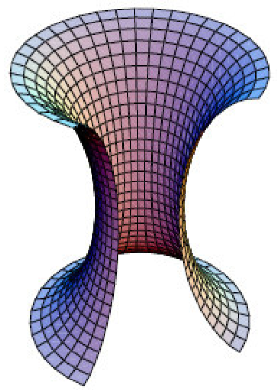
Теорема 4 *(Површи константне негативне Гаусове кривине) : Нека је $\mathcal{M}$ ротациона површ чија је Гаусова кривина константна и негативна $-\dfrac{1}{a^2}$. Онда је $\mathcal{M}$ површ параметризована са:*

$$x(u, v) = (\phi(v)\cos u, \phi(v)\sin u, \psi(v))$$

где је профилна крива $\alpha(v) = (\phi, \psi)$ једна од следећих:

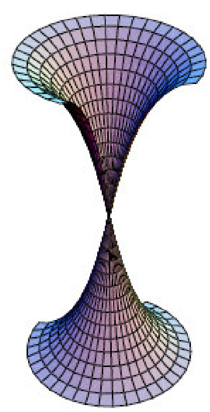
1. *(псеудосфера)*
   - *(а)* $\alpha(v) = \left(ae^{-v/a}, \int\limits_0^v \sqrt{1 - e^{-2t/a}}dt\right)$ *за* $0 \leq v < \infty$
   - *(б)* $\alpha(v) = \left(ae^{v/a}, \int\limits_0^v \sqrt{1 - e^{2t/a}}dt\right)$ *за* $-\infty < v \leq 0$
2. *(хиперболоидни тип)*

$\alpha(v) = \left(b \cosh \dfrac{v}{a}, \displaystyle\int\limits_0^{v/a} \sqrt{a^2 - b^2 \sinh^2 t} dt\right)$, *за неко константно* b *и* $-a \operatorname{arcsinh} \dfrac{a}{b} \leq v \leq -a \operatorname{arcsinh} \dfrac{a}{b}$.



3. (конусни тип)

$\alpha(v) = \left(b \sinh \dfrac{v}{a}, \displaystyle\int\limits_0^{v/a} \sqrt{a^2 - b^2 \cosh^2 t} dt\right)$, *за неко константно* $b \in (0, a]$ *и* $-a \operatorname{arcsinh} \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \leq v \leq -a \operatorname{arcsinh} \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$.



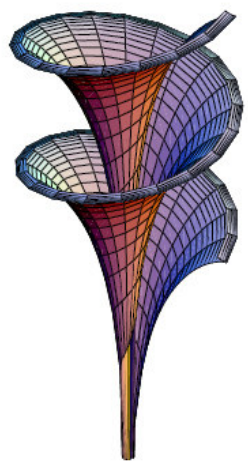
$\triangle$

Пример 3 *Још неке површи константне кривине.*

У овом примеру навешћемо две површи које нису ротационе, а имају константну негативну Гаусову кривину. То су Динијева и Куенова површ.

Динијева површ:

Уврнута псеудосфера је позната под именом Динијева површ.

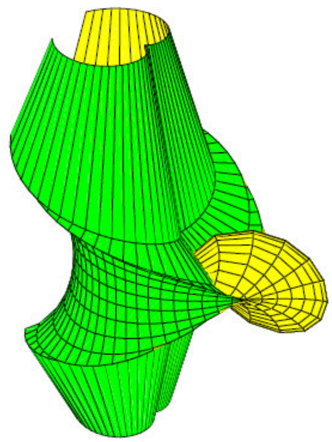


Експлицитна параметризација Динијеве површи дата је формулом:

$$x(u,v) = \left(a\cos u \sin v, a\sin u \sin v, a\left(\cos v + \log\left(\tan\frac{v}{a}\right)\right) + cu\right)$$

Куенова површ:

Доста компликованија површ негативне константне Гаусове кривине је Куенова површ. Гаусова кривина јој је $K = -4$.



Може бити параметризована са:

$$\left(\frac{(\cos u + u\sin u)\sin v}{1+u^2\sin^2 v}, \frac{(\sin u + u\cos u)\sin v}{1+u^2\sin^2 v}, \frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{v}{a}\right) + \frac{\cos u}{1+u^2\sin^2 v}\right)$$

$\triangle$

Поред интерпретације Гаусове кривине у односу на главне правце, даћемо још једну геометријску интерпретацију, ону коју је Гаус представио.

Тврђење 3 *Нека је p тачка на површи S, са Гаусовом кривином $K(p) \neq 0$. Онда је:*

$$K(p) = \lim_{A\to p}\frac{\mathcal{P}(N(\mathbf{A}))}{\mathcal{P}(\mathbf{A})}$$

где је $\mathbf{A}$ *повезана област око p и лимес је узет кроз низ таквих области које конвергирају ка p.*

Доказ:

Знамо да важе (4) и (5).

Из особина векторског производа вектора следи:

$$\begin{aligned} N_u \times N_v &= (a_{11}x_u + a_{12}x_v) \times (a_{21}x_u + a_{22}x_v) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(x_u \times x_v) = K(x_u \times x_v). \end{aligned}$$

Дакле, $N_u \times N_v = K(x_u \times x_v)$.

У довољно малом региону, површина области $\mathbf{A}$ у околини p дата је формулом:

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \iint\limits_{x^{-1}(\mathbf{A})} ||x_u \times x_v|| dudv.$$

Пресликавање ове области на S^2 Гаусовим пресликавањем добијамо:

$$\mathcal{P}(N(\mathbf{A})) = \iint\limits_{x^{-1}(\mathbf{A})} ||N_u \times N_v|| dudv = \iint\limits_{x^{-1}(\mathbf{A})} K||x_u \times x_v|| dudv.$$

Исправније би било да смо написали $|K|||x_u \times x_v||$. Ако је p елиптичка тачка, онда је $K > 0$ па нам не треба апсолутна вредност. У хиперболичким тачкама Гаусово пресликавање мења оријентацију, и зато да бисмо добили површину $N(p)$, морамо помножити са -1.

Сада, примењујући теорему средње вредности за двоструке интеграле добијамо:

$$\begin{aligned} \lim_{A \to p} \frac{\mathcal{P}(N(\mathbf{A}))}{\mathcal{P}(\mathbf{A})} &= \lim_{A \to p} \frac{\iint\limits_{x^{-1}(\mathbf{A})} K||x_u \times x_v|| dudv}{\iint\limits_{x^{-1}(\mathbf{A})} ||x_u \times x_v|| dudv} \\ &= \lim_{A \to p} \frac{\frac{1}{\mathcal{P}(\mathbf{A})} \iint\limits_{x^{-1}(\mathbf{A})} K||x_u \times x_v|| dudv}{\frac{1}{\mathcal{P}(\mathbf{A})} \iint\limits_{x^{-1}(\mathbf{A})} ||x_u \times x_v|| dudv} \\ &= \lim_{A \to p} \left. \frac{K||x_u \times x_v||}{||x_u \times x_v||} \right|_{t \in \mathbf{A}} = K(p) \end{aligned}$$

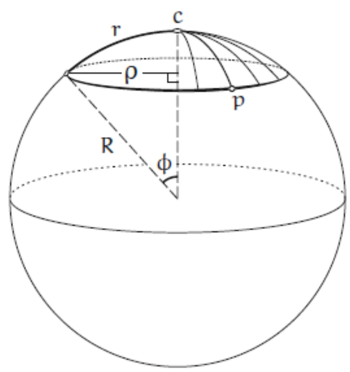
где је t нека тачка у $\mathbf{A}$.

$\triangle$

3.4 Обим и површина круга на сфери

Зашто је Гаусова кривина тако битна?

Нека је дата сфера полупречника R. Посматраћемо круг полупречника r са центром у c. Желимо да израчунамо његов обим. Узећемо крајњу тачку p геодезијског сегмента cp и заокренути је скроз око c. Обим оваквог круга је дат са $\mathcal{O}(r) = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$. Погледајмо зашто:



Видимо да је

$$\rho = R \sin\phi$$

и

$$\phi = \frac{r}{R} \tag{12}$$

па је $\mathcal{O}(r) = 2\pi\rho = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$.

Како важи:

$\sin\phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 - ...$

онда је:

$\phi - \sin\phi \approx \frac{1}{6}\phi^3.$

Као што закривљеност доводи до одступања у збиру углова троугла на сфери од предвиђених π из еуклидске геометрије, тако доводи и до одступања у обиму круга од предвиђених $2\pi r$. Па следи:

$$2\pi r - \mathcal{O}(r) = 2\pi r - 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right) = 2\pi R\left(\frac{r}{R} - \sin\left(\frac{r}{R}\right)\right)$$

тј. како важи (12), онда је

$$2\pi r - \mathcal{O}(r) = 2\pi R(\phi - \sin\phi) \approx 2\pi R \cdot \frac{1}{6}\phi^3 = 2\pi R \cdot \frac{1}{6}\frac{r^3}{R^3}.$$

Када средимо добијамо:

$$2\pi r - \mathcal{O}(r) \approx \frac{\pi r^3}{3R^2}.$$

Како је $K(p) = \dfrac{1}{R^2}$ код сфере, онда је:

$$2\pi r - \mathcal{O}(r) \approx \frac{\pi}{3} r^3 K(p).$$

Одавде следи:

$$K(p) \approx \frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r - \mathcal{O}(r)}{r^3}\right)$$

чиме смо доказали следеће тврђење.

Тврђење 4 *Ако је $\mathcal{O}(r)$ обим круга датог на сфери, онда за Гаусову кривину сфере у било којој тачки важи:*

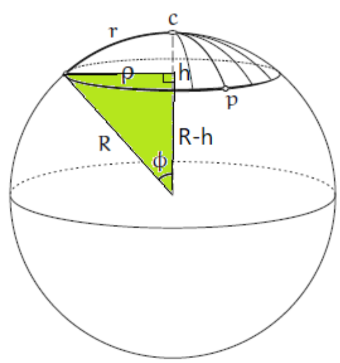
$$K(p) \approx \frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r - \mathcal{O}(r)}{r^3}\right)$$

Тврђење 5 *Ако је $\mathcal{P}(r)$ површина дела сфере ограничене кругом са центром у с полупречника r, онда за Гаусову кривину сфере у било којој тачки важи:*

$$K(p) \approx \frac{12}{\pi}\left(\frac{\pi r^2 - \mathcal{P}(r)}{r^4}\right)$$

Доказ:

Опет, кривина нам каже колико ова површина одступа од предвиђене $r^2\pi$. Стога посматрамо поново слику:



Видимо да је $\cos\phi = \dfrac{R-h}{R}$, тј. $h = R - R\cos\phi$. Знамо да важи и (12). Па слично као и за обим посматрамо разлику:

$$r^2\pi - \mathcal{P}(r) = r^2\pi - 2R\pi h = 2R^2\pi\left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{h}{R}\right)$$

Даље,

$$\begin{aligned} r^2\pi - \mathcal{P}(r) &= 2R^2\pi\left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{R - R\cos\phi}{R}\right) \\ &= 2R^2\pi\left(\frac{\phi^2}{2} - 1 + \cos\phi\right) \end{aligned}$$

Како је $1-\cos\phi \approx 1-\left(1 - \dfrac{\phi^2}{2} + \dfrac{\phi^4}{24}\right) = \dfrac{\phi^2}{2} - \dfrac{\phi^4}{24}$, замењујући у претходни ред добијамо:

$$r^2\pi - \mathcal{P}(r) \approx 2R^2\pi\left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^4}{24}\right) = 2R^2\pi\frac{\phi^4}{24} = 2R^2\pi\frac{r^4}{24R^4}$$

Сређивањем следи:

$$r^2\pi - \mathcal{P}(r) \approx \frac{r^4\pi}{12R^2}$$

Како је $K(p) = \dfrac{1}{R^2}$, следи

$$r^2\pi - \mathcal{P}(r) \approx \frac{r^4\pi K(p)}{12}$$

Па следи да је

$$K(p) \approx \frac{12}{\pi}\left(\frac{r^2\pi - \mathcal{P}(r)}{r^4}\right).$$

$\triangle$

3.5 Гаусова лема

Два тврђења из поглавља 3.4 важе и за друге површи, не само за сферу. Да бисмо то показали потребна нам је додатна апаратура.

Дефиниција 6 *Експоненцијално пресликавање* $\exp_p\colon B_{\epsilon_p}(p) \to S$ *је дефинисано са:*

$$\exp_p(\mathbf{w}) = \gamma_{\mathbf{w}/||\mathbf{w}||}(||\mathbf{w}||),$$

тако да је $\exp_p(\mathbf{w})$ *тачка на* S *добијена померањем за дужину* $||\mathbf{w}||$ *дуж јединствене геодезијске кроз* p *у правцу* $\mathbf{w}/||\mathbf{w}||$.

Претпоставимо да је p нека тачка на произвољној површи S. Размотримо прамен геодезијских линија кроз тачку p. Експоненцијално пресликавање може бити употребљено да се дефинише параметризација: фиксирајмо јединични вектор $\mathbf{w}$ у $T_p(S)$. Нека је $a\colon (-\pi, \pi) \to T_p(S)$ глатка функција која задовољава $||a(\theta)|| = 1$ и $I_p(\mathbf{w}, a(\theta)) = \cos\theta$ за $\forall\theta \in (-\pi, \pi)$. Слика од a је јединични круг у $T_p(S)$ (без једне тачке) и $a(\theta)$ параметризује круг према углу који гради са фиксираним вектором $\mathbf{w}$.

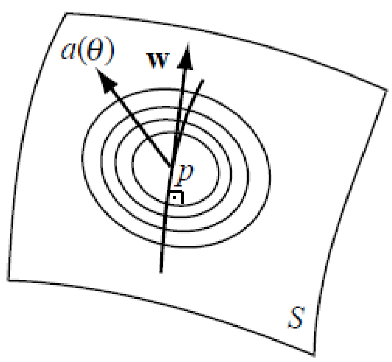
Теорема 5 *За сваку тачку $p \in S$ постоји $\epsilon_p > 0$ тако да експоненцијална функција $\exp_p \colon B_{\epsilon_p}(p) \to S$ буде дифеоморфизам који слика $B_{\epsilon_p}(p) \subset T_p(S)$ у неку околину тачке p. Та околина назива се нормална околина .*

Ову теорему можете пронаћи у књизи [6], на страни 195.

Дефиниција 7 *Геодезијске поларне координате су дате следећом параметризацијом:*

$$x \colon (0, \epsilon_p) \times (-\pi, \pi) \to S, \text{ дефинисано са } x(r, \theta) = \exp_p(ra(\theta)).$$

Геодезијска кружница полупречника $r < \epsilon_p$ са центром у p је геометријско место тачака на S које су на растојању r од p. Другим речима, то је слика скупа $\{\mathbf{u} \in T_p(s) \mid ||\mathbf{u}|| = r\}$ при експоненцијалном пресликавању. За фиксирани угао θ_0, геодезијска линија дата са $\gamma \colon (0, r] \to S$, $\gamma(s) = \exp_p(sa(\theta_0))$ зове се геодезијски полупречник геодезијског круга полупречника r.



Теорема 6 ***(Гаусова лема)**: Геодезијске кружнице нормалне су на своје геодезијске полупречнике.*

Доказ:

Фиксирајмо тачку p на S. Знамо да постоји отворена кугла $B_{\epsilon_p}(p) \subset T_p(S)$ на којој је експоненцијално пресликавање дифеоморфизам.
Претпоставимо да је $\alpha \colon (I \subset \mathbb{R}) \to T_p(S)$ крива у тангентној равни која задовољава $||\alpha(t)|| = r < \epsilon_p$ за све $t \in I$. Крива $\beta(t) = \exp_p(\alpha(t))$ је део геодезијске кружнице полупречника r. Дефинишемо фамилију кривих:

$$\sigma_t(s) = \exp_p(s\alpha(t)),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Онда $\sigma_t(1) = \beta(t)$, и за фиксирано $t_0 \in I, \sigma_{t_0}(s)$ је геодезијска линија. Наш циљ је да докажемо да за $\forall t_0 \in I$ важи:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\sigma_t(1) \,\bigg|_{t=t_0}, \frac{d}{ds}\sigma_{t_0}(s) \,\bigg|_{s=1} \right\rangle = 0.$$

У овом доказу сматрамо да је фамилија кривих $\sigma_t(s)$ варијација геодезијске линије $\sigma_{t_0}(s)$. Размотрићемо варијацију функције дефинисану са:

$$E(t) = \int_0^1 \left\langle \frac{d\sigma_t}{ds}, \frac{d\sigma_t}{ds} \right\rangle ds$$

Ова функција је константна јер је r дужина геодезијског полупречника од p до $\beta(t)$. Узимајући извод по t добијамо:

$$\begin{aligned}
0 = E'(t_0) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \left\langle \frac{d\sigma_t}{ds}, \frac{d\sigma_t}{ds} \right\rangle ds \right) \bigg|_{t=t_0} \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{d\sigma_t}{ds}, \frac{d\sigma_t}{ds} \right\rangle ds \,\bigg|_{t=t_0} \\
&= \int_0^1 2\left\langle \frac{\partial^2\sigma_t}{\partial t\partial s}, \frac{d\sigma_t}{ds} \right\rangle ds \,\bigg|_{t=t_0} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{d}{ds}\left\langle \frac{d\sigma_t}{dt}, \frac{d\sigma_t}{ds} \right\rangle \bigg|_{t=t_0} - \left\langle \frac{\partial\sigma_t}{\partial t}, \frac{\partial^2\sigma_t}{\partial s^2} \right\rangle \bigg|_{t=t_0} \right) ds \\
&= 2\left\langle \frac{d\sigma_t}{dt}, \frac{d\sigma_t}{ds} \right\rangle \bigg|_{t=t_0} \bigg|_{s=0}^{s=1} - \underbrace{2\int_0^1 \left\langle \frac{\partial\sigma_t}{\partial t}, \frac{\partial^2\sigma_t}{\partial s^2} \right\rangle \bigg|_{t=t_0} ds}_{I_1}
\end{aligned}$$

Ако распишемо први сабирак из претходног реда добијамо:

$$\left\langle \frac{d\sigma_t}{dt}, \frac{d\sigma_t}{ds} \right\rangle \Bigg|_{t=t_0} \Bigg|_{s=0}^{s=1} = \left\langle \frac{d}{dt}\sigma_t(1) \Bigg|_{t=t_0}, \frac{d\sigma_{t_0}}{ds}(1) \right\rangle - \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt}\sigma_t(0) \Bigg|_{t=t_0}, \frac{d\sigma_{t_0}}{ds}(0) \right\rangle}_{=0}$$

Како је $\sigma_t(0)$ увек тачка p, други сабирак нам је 0. Први сабирак нам је скаларни производ који желимо да израчунамо. Довољно је показати да је интеграл који смо обележили са I_1 једнак 0.

Геодезијска линија $\sigma_{t_0}(s)$ је константне брзине и задовољава:

$$\frac{d^2\sigma_{t_0}}{ds^2} = lN$$

Ово је убрзање криве $\sigma_{t_0}(0)$ усмерено у смеру нормале на површ. Како је $\dfrac{d\sigma_t}{dt}$ тангентни вектор на криву $\sigma_t(s_0)$, он лежи у тангентној равни на површ и онда закључујемо да је $\left\langle \dfrac{\partial\sigma_t}{\partial t}, \dfrac{\partial^2\sigma_t}{\partial s^2} \right\rangle \Bigg|_{t=t_0} = 0$. Одавде следи лема.

$\triangle$

Размотримо линијски елемент за геодезијске поларне координате. Координатне криве дате су геодезијским кружницама кад је r константно, а геодезијски зраци излазе из p кад је θ константно. Из дефиниције о експоненцијалном пресликавању, криве код којих је θ константно су геодезијске јединичне брзине, па је $E = 1$. По Гаусовој леми координатне криве се секу под правим углом и зато је $F = 0$. Одавде следи:

$$ds^2 = dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2.$$

Функција $G(r,\theta)$ има рестрикције. Наиме, требаће нам да се одређено својство поларних координата на $\mathbb{R}^2$: Координатни почетак је сингуларна тачка. То је међутим лажна сингуларност, као што ни промена правоугаоних координата нема сингуларност у координатном почетку. Ако размотримо скуп $(0,\epsilon_p)\times(-\pi,\pi)$ као подскуп од $\mathbb{R}^2$ у поларним координатама, онда можемо мењати променљиве из правоугаоних координата:

$$X\colon (B_{\epsilon_p}(p) - \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^2) \to (0,\epsilon_p)\times(-\pi,\pi)$$
$$X(x,y) = \Big(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\Big).$$

Како год, координатни почетак у правоугаоним координатама није сингуларитет, и можемо проћи лимесом кад $r \to 0^+$ и искористити правоугаоне координате да изгладимо сингуларност.

Како је промена координата дата са X изометрија, можемо да поново израчунамо ds^2 по x и y. Знамо да $dr = \dfrac{xdx + ydy}{r}$ и $d\theta = \dfrac{xdy - ydx}{r^2}$. Па је ds^2:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + G(r,\theta)d\theta^2 \\ &= \left(\frac{xdx + ydy}{r}\right)^2 + G(r,\theta)\left(\frac{xdy - ydx}{r^2}\right)^2 \\ &= \frac{x^2dx^2}{r^2} + \frac{2xydxdy}{r^2} + \frac{y^2dy^2}{r^2} + G(r,\theta)\left(\frac{x^2dy^2}{r^4} - \frac{2xydxdy}{r^4} + \frac{y^2dx^2}{r^4}\right) \end{aligned}$$

Груписањем уз $dx^2, dxdy$ и dy^2 добијамо:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{G(r,\theta)y^2}{r^4}\right)dx^2 + 2\left(1 - \frac{G(r,\theta)}{r^2}\right)\frac{xy}{r^2}dxdy + \left(\frac{y^2}{r^2} + \frac{G(r,\theta)x^2}{r^4}\right)dy^2 \\ &= \overline{E}dx^2 + 2\overline{F}dxdy + \overline{G}dy^2 \end{aligned}$$

Из овога и чињенице да је $x^2 + y^2 = r^2$ следи:

$$\begin{aligned} \overline{E} - 1 &= \frac{x^2}{r^2} + \frac{G(r,\theta)y^2}{r^4} - 1 \\ &= \frac{x^2}{r^2} + \frac{G(r,\theta)y^2}{r^4} - \frac{r^2}{r^2} \\ &= \frac{x^2}{r^2} + \frac{G(r,\theta)y^2}{r^4} - \frac{x^2 + y^2}{r^2} \\ &= \frac{-y^2}{r^2} + \frac{G(r,\theta)y^2}{r^4} \\ &= \frac{y^2}{r^2}\left(\frac{G(r,\theta)}{r^2} - 1\right) \end{aligned}$$

Слично, $\overline{G} - 1 = \dfrac{x^2}{r^2}\left(\dfrac{G(r,\theta)}{r^2} - 1\right)$

Одавде следи $x^2(\overline{E}-1)=y^2(\overline{G}-1)$.

Како ова формула важи за све (x,y) у области дефинисаности, следи:

$\overline{E}-1=my^2+...$

$\overline{G}-1=mx^2+...$

Замењујући ове релације у формуле за $\overline{E}-1$ и $\overline{G}-1$, добијамо:

$$\frac{G(r,\theta)}{r^2}=1+mr^2+....$$

Одавде следи да је:

$$\sqrt{G(r,\theta)}=r+\frac{m}{2}r^3+.... \tag{13}$$

Тако да долазимо до следећих услова за G.

Тврђење 6 *За геодезијске поларне координате дате са* $ds^2=dr^2+G(r,\theta)d\theta^2$ *и било који угао* $\theta_0\in(-\pi,\pi)$ *важи:*

$$\lim_{r\to\ 0^+}G(r,\theta_0)=0 \ \text{и} \ \lim_{r\to\ 0^+}\frac{\partial\sqrt{G(r,\theta_0)}}{\partial r}=1$$

Када је $F=0$, за Гаусову кривину онда важи:

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right).$$

Погледати Кодаци-Мајнардијеве формуле у књизи [6] на страни 182.

Како је у нашем случају $F=0$, $E=1$ и $G=G(r,\theta)$, онда је Гаусова кривина:

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G(r,\theta)}}\frac{\partial^2\sqrt{G(r,\theta)}}{\partial r^2} \tag{14}$$

Треба нам Тејлоров развој $\sqrt{G(r,\theta)}$ око $r=0$. Користећи (13) и (14) добијамо са једне стране:

$$-K\sqrt{G} = -K\left(r + \frac{m}{2}r^3 + ...\right)$$

а са друге стране:

$$-K\sqrt{G} = \frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2} = 3mr + ...$$

Па у околини $r = 0$ нам је $-K = 3m$. Дакле,

$$\sqrt{G(r,\theta)} = r - K(p)\frac{r^3}{6} + ...$$

$K(p)$ нам је Гаусова кривина у тачки p. Такође, ова формула не зависи од избора θ у чијој близини r иде у нулу.

У геодезијским поларним координатама је геодезијска кружница, полупречника $r_0 < \epsilon_p$, координатна крива $x(r_0, \theta)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Дужина ове кружнице је:

$$\mathcal{O}(r_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{G(r_0,\theta)}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(r_0 - K(p)\frac{r_0^3}{6} + ...\right) d\theta = 2\pi r_0 - \frac{\pi K(p)}{3}r_0^3 + ... \tag{15}$$

Бертранд и Пуисе су 1848. године дали следећу геометријску интерпретацију Гаусове кривине.

Тврђење 7 *Ако је $\mathcal{O}(r)$ обим геодезијског круга полупречника r са центром у p на површи S, онда:*

$$K(p) = \lim_{r\to 0^+} \frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r - \mathcal{O}(r)}{r^3}\right)$$

Доказ:

Формула директно следи из (15).

$\triangle$

Тврђење 8 *Ако је $\mathcal{P}(r)$ површина геодезијског круга полупречника r са центром у p на површи S, онда је:*

$$K(p) = \lim_{r \to 0^+} \frac{12}{\pi} \left(\frac{\pi r^2 - \mathcal{P}(r)}{r^4} \right)$$

Доказ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(r) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{r} \left(r - K(p)\frac{r^3}{6} + ... \right) dr d\theta \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{r^2}{2} - K(p)\frac{r^4}{24} + ... \right) d\theta \\
&= \frac{2r^2\pi}{2} - 2K(p)\frac{r^4\pi}{24} + ... \\
&= r^2\pi - K(p)\frac{r^4\pi}{12} + ...
\end{aligned}$$

Доказ тврђења следи одавде.

$\triangle$

Нека је на површи S дата тачка p центар круга на S. Нека је q повезана са p геодезијским сегментом. Тај сегмент је уједно и полупречник тог круга на S. Када је експоненцијално пресликавање дефинисано на $B_r(\mathbf{0}_p) \subset T_p(S)$, где је $r > d(p, q)$, можемо конструисати геодезијски круг са центром у p, полупречника pq. У општем случају, оваква конструкција је рестрикована на мали радијус по теорији диференцијалних једначина на површима.

У синтетичкој геометрији, Еуклид, и касније Архимед, Гаус, Лобачевски и Бољаји су сматрали кругове, са датим пречницима, конгруентним. Како Тврђење 7 каже, на било којој површи, обим круга са центром у p полупречника r зависи од Гаусове кривине у центру. Овакво посматрање нас води до даљих претпоставки о површима које могу бити модели не-Еуклидске геометрије. Таква површ мора имати константну Гаусову кривину.

Теорема 7 *(Гаус) Обим круга полупречника r у хиперболичкој равни је* $O(R) = 2\pi k \sinh\left(\frac{r}{k}\right)$.

Приметимо, ова формула нас води до развоја:

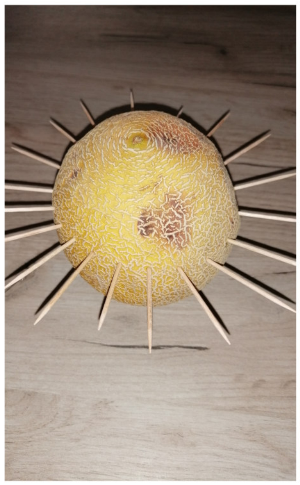
$$O(R) = 2\pi k \sinh\left(\frac{r}{k}\right) = 2\pi k\left(\frac{r^2}{k} + \frac{r^3}{6k^3} + \frac{r^5}{120k^5} + ...\right) = 2\pi r + \frac{\pi r^3}{3k^2} + ... \tag{16}$$

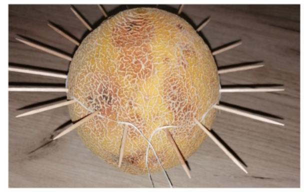
Из (16) и (15) можемо да дамо интерпретацију константе k у нееуклидској геометрији, која је пронађена у радовима Гауса, Лобачевског и Бољаја:

$$2\pi k \sinh\left(\frac{r}{R}\right) = 2\pi r + \frac{\pi r^3}{3k^2} + ... = 2\pi r - \frac{\pi K(p)}{6} r^3 + ...$$

И тако је $\dfrac{2}{k^2} = -K(p) = -K$. Стога површ која је модел нееуклидске геометрије мора имати константну негативну кривину.

Задатак 1 *Изведимо један експеримент. За почетак узмите неко воће сферног облика, полупречника R, на пример дињу. Забодите чачкалицу у северни пол диње и један крај конца за зубе обмотајте око те чачкалице. Затегните чврсто конац преко диње до тачке која је отприлике на пола пута до екватора. Држећи оловку на крају тог сегмента дужине r, полако је, затежући конац повлачите преко диње стварајући кружницу дужине $\mathcal{O}(r)$. Забодите чачкалице на 16 места дуж те кружнице. Сада обмотајте конац око чачкалица дуж те кружнице и стегните да би кружница од конца пратила кружницу на површини диње. Оловком означите почетак и крај кружнице од конца (место где се спајају). Пажљиво одмотајте и раширите конац дуж лењира. Измерите дужину $\mathcal{O}(r)$ између означених тачака.*





Користећи формулу за K преко обима круга, процените K. Срачунајте R преко K. Упоредите тако добијено R са стварним R.

Шта закључујете? Да ли је грешка мала или велика?

Теорема 8 *(Гаусова теорема Egregium) Гаусова кривина је унутрашња карактеристика површи. Другим речима, ако је $f\colon S \to \overline{S}$ изометрија између две регуларне површи, онда је $K(p) = K(f(p))$, за свако $p \in S$.*

Ова теорема каже, да ако становници неког дводимензионог простора знају да је њихов свет идентификован са неком површи, онда они могу измерити Гаусову кривину свог света само познавајући мерење дужине кривих. Изненађујуће је да је довољно да се мери како се површ криви у $\mathbb{R}^3$, с обзиром на то да су становници дводимензионих простора једва могли да докуче и $\mathbb{R}^3$.

Да ли важи обрат Теореме 8?

Пример 4 *Дате су параметризоване површи $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, -a\ln u), u > 0, v \in (0,2\pi), a > 0$ и $x(s,t) = (s\cos t, s\sin t, at), s > 0, t \in$*

$(0, 2\pi), a > 0$. *Доказати да постоји дифеоморфизам између ових површи који чува Гаусову кривину, али да не постоји изометрија између датих површи.*

$$r_u(u,v) = \left(\cos v, \sin v, \frac{a}{u}\right)$$

$$r_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$

$$r_{uu}(u,v) = \left(0, 0, -\frac{a}{u^2}\right)$$

$$r_{uv}(u,v) = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$r_{vv}(u,v) = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

$$r_u \times r_v(u,v) = (-a\cos v, -a\sin v, u)$$

$$||r_u \times r_v(u,v)|| = \sqrt{a^2 + u^2}$$

$$N = \frac{(-a\cos v, -a\sin v, u)}{\sqrt{a^2+u^2}}$$

$$E_r = \frac{a^2+u^2}{u^2}$$

$$F_r = 0$$

$$G_r = u^2$$

$$e_r = -\frac{a}{u\sqrt{a^2+u^2}}$$

$$f_r = 0$$

$$g_r = \frac{au}{\sqrt{a^2+u^2}}$$

Гаусова кривина површи r је $K_r = -\dfrac{a^2}{(a^2+u^2)^2}$.

На сличан начин долазимо и до Гаусове кривине површи x:

$$K_x = -\frac{a^2}{(a^2+s^2)^2}\ .$$

Услов једнакости Гаусових кривина ових површи своди се на $u = s$, јер $u, s > 0$. Према томе свако пресликавање облика

$$\overline{\Phi}(u,v) = (u, h(u,v)), \text{ где је } h \text{ глатка функција}$$

даје дифеоморфизам Φ између ових површи који чува Гаусову кривину, тј. важи $K_r = K_{\overline{x}}$, где је

$$\overline{x}(u,v) = (u\cos h, u\sin h, ah), h = h(u,v), u > 0, v \in (0, 2\pi).$$

Да би неко пресликавање било изометрија потребно је да буде овог облика који смо управо одредили. Међутим тај услов није и довољан.

Да би Φ била изометрија, мора $I_r = I_{\overline{x}}$, стога како је:

$$\overline{x}_u = (\cos h - u\sin h h_u, \sin h + u\cos h h_u, a h_u),$$

$$\overline{x}_v = (-u\sin h h_v, u\cos h h_v, a h_v),$$

$$E_{\overline{x}} = 1 + (u^2 + a^2)h_u^2,\ F_{\overline{x}} = (u^2 + a^2)h_u h_v \text{ и } G_{\overline{x}} = (u^2 + a^2)h_v^2$$

мора важити:

$$1 + (u^2 + a^2)h_u^2 = \frac{u^2 + a^2}{u^2} \tag{17}$$

$$(u^2 + a^2)h_u h_v = 0 \tag{18}$$

$$(u^2 + a^2)h_v^2 = u^2 \tag{19}$$

Из (18) или је $h_u = 0$ или $h_v = 0$. Међутим, у тачкама где је $h_u = 0$ добијамо контрадикцију у релацији (17), док $h_v = 0$ даје контрадикцију у (19). Према томе изометрија између ових параметризованих површи не постоји!

Обрат тврђена о чувању Гаусове кривине при изометријама не важи, али важи нешто слабије тврђење. Сваке две површи које имају исту константну Гаусову кривину јесу изометричне.

$\triangle$

3.6 Белтрамијева теорема

"...У последње време, математичка јавност почела је да се бави неким новим концептима који су суђени, ако преовладају, да дубоко промене цео поредак класичне геометрије." (Белтрами)

"...Ако ми усвојимо ове дефиниције, теореме Лобачевског биће истините, то јест све теореме класичне геометрије се могу применити на ове нове величине, осим наравно оних које су последица петог Еуклидовог постулата." (Поенкаре)

Белтрами је 1865. поставио питање: Тражио је локалне услове на двема површима, S_1 и S_2, који гарантују да постоји локални дифеоморфизам $S_1 \to S_2$, који ће геодезијске линије са S_1 сликати у геодезијске на S_2. Такво пресликавање назива се *геодезијско пресликавање.* Белтрами је решио проблем у случају да је S_2 еуклидска раван. Дао је услове за постојање пресликавања које геодезијске са неке површи S слика у праве линије (геодезијске у равни).

Наиме, постоји геодезијско пресликавање сваког од локалних модела површи константне Гаусове кривине у раван. Случај константне нула кривине је идентичко пресликавање равни. У случају сфере, у поглављу 7 књиге [6], можемо видети да централна пројекција пресликава велике кругове у праве линије.

Теорема 9 ***(Белтрами)*** *Ако постоји геодезијско пресликавање са површи S на еуклидску раван, онда је Гаусова кривина површи S константна.*

Пре самог доказа, дефинисаћемо Кристофелове симболе $\Gamma_{ij}^k(u, v)$, који нам се помињу у доказу теореме. (видети и поглавље 2.4 у [3])

Дефиниција 8 *Нека је S регуларна површ. Кристофелови симболи $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v)$ површи S дефинишу се као компоненте других извода параметризације у бази $[x_u, x_v, N]$, које стоје уз тангентне векторе:*

$$x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + eN, \tag{20}$$

$$x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fN, \tag{21}$$

$$x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + gN. \tag{22}$$

Скаларним множењем са x_u и x_v једначина (20), (21) и (22), уз мало рачуна добијамо:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u + FG_v}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

и $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$.

Доказ Теореме 9:

Претпоставимо да је $f\colon (W \subset S) \to \mathbb{R}^2$ геодезијско пресликавање, локални дифеоморфизам дефинисан на отвореном скупу $W \subset S$. Нека $U \subset \mathbb{R}^2$ отворен скуп који лежи на слици од f и узмимо да $x\colon (U \subset \mathbb{R}^2) \to S$ буде параметризација површи, тј. карта дата са $x = f^{-1}$. Како је f геодезијско пресликавање, праве линије на U се сликају у геодезијске на S. Напишимо $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ за метрику повезану са x. Претпоставимо да се $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ пресликава на геодезијску $x \circ \gamma(t) = f^{-1} \circ \gamma(t)$ на S. По претпоставци, $\gamma(t)$ је део еуклидске праве, па је $au(t) + bv(t) + c = 0$, где ни a ни b нису нула. Како је $au' + bv' = 0$ и $au'' + bv'' = 0$, имамо:

$$\begin{pmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u'v'' - u''v' = 0.$$

Крива $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ је геодезијска, ако важи следеће:

$$0 = \det \begin{pmatrix} u' & u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

За доказ погледати Теореме 2.21 и 2.22 у [3].

То јест,

$$\Gamma_{11}^2(u')^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)(u')^2v' + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)u'(v')^2 - \Gamma_{22}^1(v')^3 = 0. \tag{23}$$

Како је U отворен подскуп од $\mathbb{R}^2$, постоји отворени диск неког радијуса, са центром у било којој тачки на U, који је цео садржан у U. Тако постоје линије било ког нагиба у било којој тачки. Конкретно, постоји геодезијска линија $\gamma_2(t) = (u_2, v_2(t))$, где је $u' = 0$ и $v' \neq 0$, и геодезијска $\gamma_1(t) = (u_1(t), v_1)$, где је $u' \neq 0$ и $v' = 0$. Заменом γ_2 у геодезијску једначину добијамо да је $\Gamma_{11}^2 = 0$. Слично, заменом γ_1 добијамо да је $\Gamma_{22}^1 = 0$. Користећи пар праваца $(u(t), v(t))$ за које је $2u(t) - v(t) + c = 0$ и $u_0(t) - v_0(t) + c + 0 = 0$ добијамо $2u' = v'$ и $u_0' = v_0'$. Сада, користећи (23) долазимо до $\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1 = 0$. Слично, $2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 = 0$. Па важи следеће:

$$\Gamma_{11}^2 = 0 = \Gamma_{22}^1, \; \Gamma_{22}^2 = 2\Gamma_{12}^1 \text{ и } 2\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^2.$$

Гаусове формуле повезују Гаусову кривину и Кристофелове симболе (видети и страну 178 у [6]):

(а) $(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 = EK$

(б) $(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 = FK$

(в) $(\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 = GK$

(г) $(\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 = FK$

Пошто ми говоримо о геодезијском пресликавању на раван, имамо поједностављења:

(а) $EK = \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - (\Gamma^1_{12})_u$

(б) $FK = (\Gamma^1_{12})_u - (2\Gamma^2_{12})_v + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}$

(в) $GK = \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - (\Gamma^1_{12})_v$

(г) $FK = (\Gamma^2_{12})_v - (2\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}$

Одузимајући (г) од (б) добијамо $(\Gamma^1_{12})_u = (\Gamma^2_{12})_v$, па можемо записати (б) и (г) као:

(б) $FK = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - (\Gamma^2_{12})_v$

(г) $FK = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - (\Gamma^1_{12})_u$.

С обзиром да су Γ_{ij} глатке функције, имамо:

$(\Gamma^1_{12})_{uv} = (\Gamma^1_{12})_{vu}$

$(\Gamma^2_{12})_{uv} = (\Gamma^2_{12})_{vu}$.

Ако узмемо парцијалне изводе од (а) по v и (б) по u, добијамо:

$$\frac{\partial(EK)}{\partial v} = E_vK + EK_v = 2\Gamma^2_{12}(\Gamma^2_{12})_v - (\Gamma^2_{12})_u v$$
$$\frac{\partial(FK)}{\partial v} = F_uK + FK_v = \Gamma^1_{12}(\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12})_u - (\Gamma^2_{12})_v u$$

Комбинујући ове релације, налазимо:

$$EK_v - FK_u + K(E_v - F_u) = 2\Gamma^2_{12}(\Gamma^2_{12})_v - \Gamma^1_{12}(\Gamma^2_{12})_u - \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12})_u$$

Замена из (а), (б) и (г) даје:

$EK_v - FK_u = -K(E_v - F_u) + 2\Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - FK) - \Gamma^1_{12}(\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - EK) - \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - FK)$

Након сређивања, добијамо:

$EK_v - FK_u = -K(E_v - F_u) + K(\Gamma^1_{12}E - \Gamma^2_{12}F)$.

Из дефиниције Кристофелових симбола, имамо:

$$\Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \frac{1}{2}E_v \text{ и } \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - \frac{1}{2}E_v.$$

Релације $\Gamma^2_{11} = 0$ и $\Gamma^1_{11} = 2\Gamma^2_{12}$ имплицирају следеће:

$$\Gamma^1_{12}E - \Gamma^2_{12}F = \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F - 2\Gamma^2_{12}F - \Gamma^2_{11}G$$

тј.,

$$\Gamma^1_{12}E - \Gamma^2_{12}F = \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F - (\Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G$$

што је исто што и:

$$\Gamma^1_{12}E - \Gamma^2_{12}F = \frac{1}{2}E_v - (F_u - \frac{1}{2}E_v) = E_v - F_u \ .$$

Према томе $EK_v - FK_u = 0$. Спровођењем сличног извођења за $\dfrac{\partial(FK)}{\partial v} - \dfrac{\partial(GK)}{\partial u}$ добијамо да је $FK_v - GK_u = 0$. Матрично ове формуле изгледају овако:

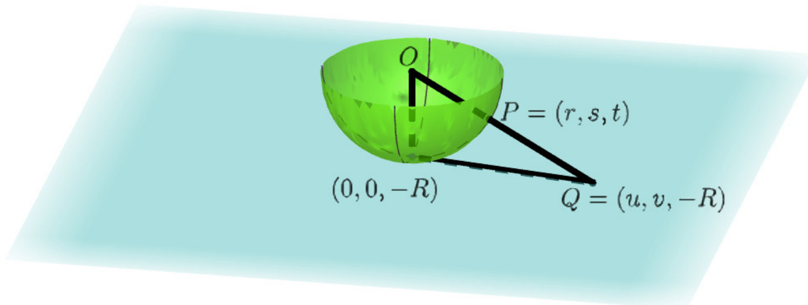
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_v \\ -K_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

па како је $EG - F^2 \neq 0$, онда је $K_u = 0 = K_v$, тј. K је константа.

$\triangle$

Тврђење 9 *Инверзно пресликавање централне пројекције које слика доњу хемисферу сфере полупречника R, са центром у координатном почетку, у тангентну раван у јужном полу $(0, 0, -R)$ је облика:*

$$x(u, v) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + u^2 + v^2}}(u, v, -R)$$



Доказ:

$$(0,0,0) = OP \times OQ = (-Rs - tv, Rr + tu, rv - su)$$

Одавде следи да је $r = -\dfrac{tu}{R}$ и $s = -\dfrac{tv}{R}$.

Како је $s^2 + r^2 + t^2 = R^2$, следи $t = \dfrac{-R^2}{\sqrt{R^2 + u^2 + v^2}}$ и тврђење важи.

$\triangle$

Из инверза централне пројекције видимо да се може раван обогатити геометријом сфере S_R^2, увођењем Римановe метрике на $\mathbb{R}^2$ пресликавањем $x\colon \mathbb{R}^2 \to S_R^2$. Како је сфера површ у R^3:

$$x_u = \frac{R}{(R^2 + u^2 + v^2)^{3/2}}(R^2 + v^2, -uv, Ru)$$

$$x_v = \frac{R}{(R^2 + u^2 + v^2)^{3/2}}(-uv, R^2 + u^2, Rv)$$

Ови координатни вектори одређују линијски елемент у равни, индукован геометријом сфере:

$$ds^2 = R^2 \frac{(R^2 + v^2)du^2 - 2uvdudv + (R^2 + u^2)dv^2}{(R^2 + u^2 + v^2)^2}$$

Белтрами нам је представио први модел нееуклидске равни, заменивши R^2 са $-R^2$ да добије линијски елемент:

$$ds^2 = -R^2 \frac{(-R^2 + v^2)du^2 - 2uvdudv + (-R^2 + u^2)dv^2}{(-R^2 + u^2 + v^2)^2}$$

тј.,

$$ds^2 = R^2 \frac{(R^2 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (R^2 - u^2)dv^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}$$

Овим је дошао до закључка да је кривина константна и једнака $-\dfrac{1}{R^2}$. Даље, како је промењена само константа R^2, следеће релације и даље важе:

$$\Gamma_{11}^2 = 0 = \Gamma_{22}^1,$$

$$2\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1,$$

$$2\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2.$$

Тако су онда геодезијске линије уствари еуклидске праве. Због овога нам је било потребно геодезијско пресликавање.

Нека је $R = 1$. Површ коју тада добијамо је унутрашњост јединичног диска:

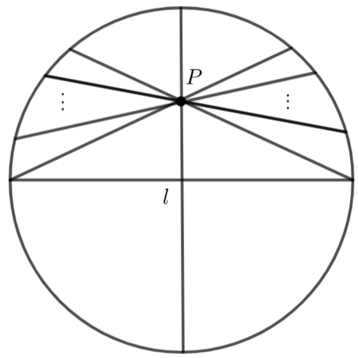
$$\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$$

Означићемо метрику са индексом B по Белтрамију:

$$ds_B^2 = \frac{(1 - v^2)du^2 + 2uvdudv + (1 - u^2)dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2} \tag{24}$$

Нека $\mathbb{D}_B = (\mathbb{D}, ds_B)$ означава **Белтрамијев модел**.

Пети Еуклидов постулат овде не пролази. Погледајмо слику испод.



Дата је тачка P која није на датој правој l. Дата је бесконачна фамилија линија (геодезијских) кроз P, од којих ниједна не сече l. Паралелне праве правој l су све праве које пролазе кроз тачку P и тачке на јединичној кружници где је l сече. Како те тачке не припадају $\mathbb{D}_B$, ове праве не секу праву l.

Ако уведемо поларне координате, наш диск постаје $\mathbb{D}_B = \{(r,\theta)|0 \leq r < 1\}$. Да бисмо променили метрику мора $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ и $du = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$, $dv = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$.

Једначина (24) може бити расписана и овако:

$$ds_B^2 = \frac{(1-u^2-v^2)(du^2+dv^2)+(udu+vdv)^2}{(1-u^2-v^2)^2}$$

тј., у поларним координатама:

$$ds_B^2 = \frac{(1-r^2)(dr^2+r^2d\theta^2)+r^2dr^2}{(1-r^2)^2} = \frac{dr^2}{(1-r^2)^2} + \frac{r^2d\theta^2}{1-r^2}$$

Поред Белтрамијевог модела значајни су и Поенкареов диск модел и Поенкареов полуравански модел.

Нека су (u,v) стандардне координате на диску полупречника a:

$$D^2(a) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2+v^2 < a^2\}.$$

Дефинишемо **Поенкареову метрику на диску** са:

$$ds^2 = \frac{4a^4}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}(du^2 + dv^2) \tag{25}$$

за (u, v) са диска $D^2(a)$. Може се израчунати Гаусова кривина ове метрике и она износи $-\frac{1}{a^2}$.

Нека су (x, y) стандардне координате горње полуравни:

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\},$$

где је a позитивна константа.

Дефинишемо **Поенкареову метрику полуравни** са:

$$ds^2 = \frac{a^2}{y^2}(dx^2 + dy^2). \tag{26}$$

Баш као (25) и (26) метрика има константну негативну Гаусову кривину $-\frac{1}{a^2}$.

У Примеру 4 рекли смо да уколико површи имају константне Гаусове кривине једнаке, онда су те површи локално изометричне. Самим тим, видимо да су псеудосфера (11) и површи које имају метрику Поенкареове полуравни локално изометричне.

Погледајмо геодезијске линије у Поенкареовом полураванском моделу. Нека је $E = G = \frac{a^2}{v^2}$ и $F = 0$.

$$v^2 + (u - D)^2 = \frac{a^2}{C^2},\ C,\ D\ const$$

Геодезијске у Поенкареовој полуравни су праве кад је $C = 0$ или кружнице нормалне на хоризонталне осе. Због изометрије, ово важи и на псеудосфери.

Даље изучавање ових модела превазилази оквире овог рада.

4 Куда даље?!

"...Поред Еуклида, који је и даље број један, Лобачевски и Риман су одиграли значајну улогу у истраживањима основа геометрије, али Риман је дошао пре осталих..." (Ли)

Током 19. века развој анализе и механике довео је математичаре у позицију да користе различите изразе са великим степеном слободе. Формулација појмова, на пример кинетичке енергије као квадратне форме или принципа најмање акције као варијационог проблема, повећало је могућност примене геометријских метода на механичке проблеме у вишим димензијама. Као што су тврдили Шолц и Луцен, прихватање нееуклидске геометрије у другој половини 19. века, заједно са појавом вишедимензионих феномена у механици и пројективној геометрији, било је увод у вишедимензиону геометрију као оквира за представљање и решавање природно насталих проблема. Ослобађањем геометрије од њених еуклидских корена, било је могуће замислити учење геометријских објеката у било којим димензијама у коме се механички системи крећу по добро познатим принципима.

Јуна 1954., Риман је одржао предавање на Филозофском факултету Универзитета у Готингену, да би испунио захтеве за унапређење у ванредног професора. Риман је предложио три могуће теме за своје предавање. Прве две су се односиле на саму хабилитацију, док је трећа била везана за основе геометрије. Гаус је, као члан његове комисије, против уобичајене праксе, изабрао трећу тему, ону која је њему била интересантна. Риман је понудио предавање *On the hypotheses that lie at the foundations of geometry*. Ту је покренуо нову фазу развоја диференцијалне геометрије.

Текст Римановог предавања није се појавио за време његовог живота. Постхумно је објављен 1868. године. Те исте године појављује се Белтрамијев *Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry*, у ком је он представио свој Диск модел. Посветио је пажњу нееуклидској равни, остављајући нерешен проблем схватања тродимензионог нееуклидског простора Лобачевског и Бољаја. Шта више, Белтрами је био мишљења да је такав простор немогућ. Писао је: "Верујемо да смо достигли циљ за планарни део доктрине, али сматрамо да је немогуће наставити даље.” Мало након што се Римановo предавање појавило, Белтрами је објавио анализу простора константне кривине у много димензија на основу Риманових идеја које укључују детаљну верзију тродимензионог нееуклидског простора. За више детаља, погледати Стилвелову књигу *Sources of Hyperbolic Geometry*, која се састоји од коментара на радове Белтрамија и осталих.

У Римановом предавању може се пронаћи довољно детаља да дају правац наредним генерацијама геометара. Једна од кључних тачака је била одвајање особина скупа тачака вишедимензионог простора, његове топологије, од могућих метричких својстава. Риман је увукао себе у Гаусову теорију површи и веома је ценио унутрашњи поглед, што је и камен темељац његовог приступа. Даље расправе о овој теми превазилазе оквире овог рада и могу се наћи, на пример, у *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincare* (Шолц) или *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincare* (Греј).

5 Захвалница

Желела бих на првом месту да изразим велику захвалност свом ментору проф. др. Мирјани Ђорић која је увек била ту за мене као професор, као ментор и као човек. Увек насмејана, спремна да помогне и пружи подршку кад је било тешко. Неизмерна захвалност за све што је учинила, за труд, издвојено време и савете које никада нећу заборавити. Посебно сам захвална на стрпљењу да овај рад угледа светлост дана.

Такође, најискреније се захваљујем члановима Комисије, др. Милошу Ђорићу и др. Ивану Димитријевићу на свим сугестијама и саветима.

И, на крају, захваљујем се мојој породици, мојој сигурној луци, на подршци, неизмерној љубави и стрпљењу.

6 Литература

[1] J.Abadria, A.Reventos, C.J.Rodriguez, *What did Gauss read in the Appendix?*, 2012

[2] E.Abbena, A.Gray, S.Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 2005

[3] M.Đ.Đorić, *Geometrija 3*, Beograd, 2021, materijal za studente

[4] Z.Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Total design i Matematički fakultet, Beograd, 1997

[5] Z.Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, 2009

[6] J. McCleary, *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, New York, 2013

[7] T. Needham, *Visual differential geometry and forms*, Princeton University Press, New Jersey, 2021

[8] M.Stanković, M.Zlatanović, *Neeuklidske geometrije*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, 2014

[9] K. Tapp, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Springer Intenational Publishing, Switzerland, 2016