УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Обрадовић

ЛИТЛВУД-ОФОРДОВА ЛЕМА У КОМПЛЕКСНОЈ РАВНИ

• МАСТЕР РАД •

Београд, 2023.

МЕНТОР

- др Бобан Карапетровић, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

ОСТАЛИ ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

- др Миљан Кнежевић, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

- др Владимир Божин, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

Садржај

Увод

Основни циљ овог мастер рада је презентовање доказа Литлвуд-Офордове леме у комплексној равни са оптималним горњим ограничењем.

Прва глава се односи на биномне коефицијенте и Шпернерову теорему о антиланцима. Наведена су нека основна својства биномних коефицијената и показано је како се биномни коефицијенти могу изразити преко комплексних интеграла, при чему су наведени одговарајући конкретни примери, од којих су неки преузети из [3]. На крају прве главе је наведена и доказана Шпернерова теорема која представља један од основних резултата класичне екстремалне теорије скупова. Она се заправо односи на највеће могуће фамилије коначних скупова од којих ниједан скуп фамилије не садржи друге скупове те фамилије.

У другој глави је наведена Стирлингова формула или Стирлингова апроксимација, која заправо, преставља једну добру апроксимацију факторијела природних бројева. Наиме, Стирлингова формула даје добру апроксимацију факторијела, чак и за мале вредности природних бројева. У доказу Стирлингове формуле, коришћена је Валисова формула, која има велики историјски значај, будући да је овом формулом број π по први пут представљен као гранична вредност неког низа са рационалним члановима.

Трећа глава је посвећена Литлвуд-Офордовој леми у комплексној равни. Наиме, за дате комплексне бројеве $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, где је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ отворен јединични диск у комплексној равни, посматра се 2^n линеарних комбинација облика $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j$, при чему је $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ за све $j = 1, \ldots, n$. Испоставља се да број оваквих линеарних комбинација, које припадају неком произвољно одабраном диску полупречника 1 у комплексној равни, није већи од $c\frac{2^n}{\sqrt{n}} \log n$, где је $c > 0$ константа. Претходни резултат доказали су Литлвуд и Офорд у свом раду [7] из 1943. године који се односи на дистрибуцију корена алгебраских једначина. Затим је Ердеш [2] поправио претходно горње ограничење на $c\frac{2^n}{\sqrt{n}}$ и изнео хипотезу да је оптимално горње ограничење $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, повезавши на једноставан начин Литлвуд-Офордову лему са стандардном Шпернеровом теоремом о антиланцима. Наведену хипотезу је решио Клајтман 1965. године у раду [5], док је пет година касније пронашао релативно једноставан доказ и проширио резултат на Хилбертове просторе у раду [6]. Треба напоменути да је хипотеза решена и од стране Катоне 1966. године у раду [4], независно од Клајтманових радова. Претходни резултати изазвали су значајно интересовање и уследила су даља истраживања на ову тему. На тај начин је развијена Литлвуд-Офордова теорија која, између осталог, има значајну примену у теорији случајних матрица. За више додатних информација на ову тему, корисно је погледати и књигу [1]. На самом крају мастер рада се налази преглед коришћене литературе, списак симбола, као и списак математичара.

Посебно желим да се захвалим ментору и члановима комисије на корисним примедбама и сугестијама које су допринеле побољшању рада.

Милица Обрадовић

Глава 1

Шпернерова теорема и биномни коефицијенти

Биномни коефицијенти. За целе бројеве $n \geq k \geq 0$ број k-точланих подскупова скупа од n елемената износи

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}. \tag{1.1}$$

Будући да скуп од n елемената има 2^n подскупова, то важи

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{1.2}$$

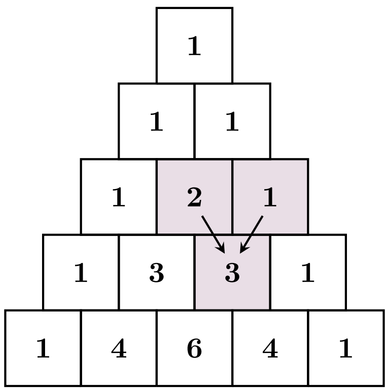
Такође, налазимо

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ за све } 0 \leq k \leq n. \tag{1.3}$$

Са друге стране, важи

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ за све } n-1 \geq k \geq 1. \tag{1.4}$$

Користећи претходну формулу (1.4) добијамо да биномни коефицијенти формирају Паскалов троугао.



Паскалов троугао.

Поред тога, директно се проверава да за све $n \geq k \geq 1$ важи

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}. \tag{1.5}$$

За све $x \in \mathbb{R}$ означимо највећи цео број који није већи од x са $\lfloor x \rfloor$ и најмањи цео број који није мањи од x са $\lceil x \rceil$. Следи

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

Такође, приметимо да је

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n. \tag{1.6}$$

Тада важи

$$\frac{n-k+1}{k} > 1 \text{ за све } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{и} \quad \frac{n-k+1}{k} < 1 \text{ за све } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < k \leq n. \tag{1.7}$$

На основу претходног, користећи формуле (1.5), (1.6) и (1.7), можемо закључити

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1. \tag{1.8}$$

За $n \geq 2$ важи

$$\binom{n}{1} \geq 2 = \binom{n}{0} + \binom{n}{n}.$$

Самим тим, међу бројевима

$$2 = \binom{n}{0} + \binom{n}{n}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1},$$

највећи је

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Стога, добијамо

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{(\binom{n}{0} + \binom{n}{n}) + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1}}{n} = \frac{2^n}{n},$$

односно

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{2^n}{n}.$$

Специјално, за све $n \geq 1$ важи

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n} = \frac{4^n}{2n}.$$

Индуктивно се проверава да за све $k \geq 0$ важи

$$k! \geq 2^{k-1},$$

одакле следи

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}.$$

Биномни коефицијенти и контурна интеграција. Показаћемо како се биномни коефицијенти могу представити одговарајућим комплексним интегралима. Наиме, посматрајмо функцију $f(z) = (z+1)^n$ у комплексној равни $\mathbb{C}$, где је $n \in \mathbb{N}_0$. Означимо са γ позитивно оријентисану кружницу са центром у тачки 0 полупречника r, при чему је $r > 0$ произвољно одабрано. Применом Кошијеве интегралне формуле за $k \in \mathbb{N}_0$ и $k \leq n$ добијамо да важи

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Takође, важи и следећа једнакост

$$f^{(k)}(z) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(z+1)^{n-k}.$$

Специјално, за $z = 0$ налазимо

$$f^{(k)}(0) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

На основу претходног добијамо

$$\frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Стога, закључујемо да важи

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z, \tag{1.9}$$

чиме је одговарајући биномни коефицијент изражен комплексним интегралом.

Пример 1.1 *Доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ важи*

$$\binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Решење. Означимо са γ позитивно оријентисану кружницу са центром у тачки 0 полупречника 1. Применом формуле (1.9) добијамо

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

одакле следи

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|z+1|^{2n}}{|z|^{n+1}} |\mathrm{d}z| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma (|z|+1)^{2n} |\mathrm{d}z| \\
&= 4^n \frac{1}{2\pi} \int_\gamma |\mathrm{d}z| \\
&= 4^n,
\end{aligned}$$

што је и требало показати. ■

Пример 1.2 *Израчунати*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}.$$

Решење. Означимо са S горе наведену суму и са γ позитивно оријентисану кружницу центрирану у тачки 0 полупречника 1. Применом формуле (1.9) добијамо

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \int_{\gamma} \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z \cdot \frac{1}{5^n} \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{(z+1)^{2n}}{5^n z^{n+1}} \,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Да би замена редоследа сумирања и интеграције у претходној формули била дозвољена, довољно је доказати да ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{2n}}{5^n z^{n+1}},$$

равномерно конвергира дуж криве γ. Приметимо да неједнакост

$$\left| \frac{(z+1)^{2n}}{5^n z^{n+1}} \right| \le \frac{(|z|+1)^{2n}}{5^n |z|^{n+1}} = \left(\frac{4}{5} \right)^n,$$

важи за све комплексне бројеве дуж криве γ, односно за такве где је $|z| = 1$. Такође, нумерички ред $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ конвергира, јер је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n = \frac{1}{1 - 4/5} = 5 < \infty.$$

Применом Вајерштрасовог критеријума, обзиром да је одговарајући функционалан ред ограничен конвергентним нумеричким редом, добијамо да ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{2n}}{5^n z^{n+1}},$$

равномерно конвергира дуж криве γ. Дакле, налазимо

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z+1)^2}{5z} \right)^n \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(z+1)^2}{5z}} \,\mathrm{d}z \\ &= -\frac{5}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 3z + 1} \,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Како су

$$c_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

различити корени квадратне једначине

$$z^2 - 3z + 1 = 0,$$

у комплексној равни, односно, како важи

$$z^2 - 3z + 1 = (z - c_-)(z - c_+),$$

то функција

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 1},$$

има полове првог реда у тачкама $c_\pm$. Поред тога, уочимо да је

$$c_+ = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1 \quad \text{и} \quad 0 < c_- = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1,$$

што значи да само тачка c_- припада јединичном диску $\mathbb{D} = \mathrm{D}(0, 1)$, односно области ограниченој кривом γ. Применом Кошијеве теореме о остацима добијамо

$$S = -\frac{5}{2\pi\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{Res}(f, c_-) = -5 \operatorname{Res}(f, c_-).$$

Тада важи

$$\begin{aligned} S &= -5 \lim_{z \to c_-} (z - c_-) f(z) \\ &= -5 \lim_{z \to c_-} \frac{1}{z - c_+} \\ &= \frac{-5}{c_- - c_+} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{5}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Следи

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5},$$

што је и требало одредити. ■

Пример 1.3 *Израчунати*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{1}{8^n}.$$

Решење. Означимо са S горе наведену суму и са γ позитивно оријентисану кружницу са центром у тачки 0 полупречника $1/2$. Применом формуле (1.9) добијамо

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_\gamma \frac{(z+1)^{3n}}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z \cdot \frac{1}{8^n} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{(z+1)^{3n}}{8^n z^{n+1}} \,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Приметимо да неједнакост

$$\left|\frac{(z+1)^{3n}}{8^n z^{n+1}}\right| \le \frac{(|z|+1)^{3n}}{8^n |z|^{n+1}} = 2\cdot\left(\frac{27}{32}\right)^n,$$

важи за све комплексне бројеве дуж криве γ, односно такве да је $|z| = 1/2$. Са друге стране, директно следи да нумерички ред $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{27}{32}\right)^n$ конвергира, јер је

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{27}{32}\right)^n = \frac{1}{1-27/32} = \frac{32}{5} < \infty.$$

Закључујемо да је дозвољена замена редоследа сумирања и интеграције (Вајерштрасов критеријум), будући да је одговарајући функционалан ред ограничен конвергентним нумеричким редом и самим тим следећи ред

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{3n}}{8^n z^{n+1}},$$

равномерно конвергира дуж криве γ. Поступали смо слично као у Примеру 1.2, при чему смо погодним одабиром полупречника кружнице γ центриране у координатном почетку омогућили равномерну конвергенцију претходно наведеног функционалног реда дуж те кружнице. Према томе, налазимо

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z+1)^3}{8z}\right)^n \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}z}{1-\frac{(z+1)^3}{8z}} \\ &= -\frac{4}{\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)(z^2+4z-1)}. \end{aligned}$$

Будући да су

$$c_\pm = -2 \pm \sqrt{5},$$

различити корени квадратне једначине $z^2+4z-1=0$ у комплексној равни, односно како важи

$$z^2+4z-1 = (z-c_-)(z-c_+),$$

то функција

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4z-1)},$$

има полове првог реда у тачкама $c_\pm$ и 1. Приметимо да важи

$$c_- = -2-\sqrt{5} < -1/2 \quad \text{и} \quad 0 < c_+ = -2+\sqrt{5} < 1/2,$$

што значи да међу тачкама $c_\pm$ и 1, само тачка c_+ припада диску $\mathrm{D}(0,1/2)$, односно области ограниченој кривом γ. У наставку, користећи Кошијеву теорему о остацима директно добијамо

$$S = -\frac{4}{\pi\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}(f,c_+) = -8\,\mathrm{Res}(f,c_+).$$

Тада важи

$$\begin{aligned} S &= -8 \lim_{z \to c_+} (z - c_+) f(z) \\ &= -8 \lim_{z \to c_+} \frac{1}{(z-1)(z-c_-)} \\ &= \frac{-8}{(c_+ - 1)(c_+ - c_-)} \\ &= \frac{8}{(3-\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{4(3+\sqrt{5})}{4\sqrt{5}} \\ &= 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

На крају добијамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{1}{8^n} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}},$$

чиме је пример завршен. ■

Шпернерова теорема. Шпернерова теорема описује највеће могуће фамилије коначних скупова, при чему ниједан скуп из фамилије не садржи било који други скуп из те фамилије. То је један од централних резултата у екстремалној теорији скупова. Названа је по Емануелу Шпернеру, који је одговарајући резултат објавио 1928. године. Овај резултат се понекад назива и Шпернерова лема, али се назив Шпернерова лема такође односи на независан резултат о бојењу триангулација. Како би се разликовала ова два резултата, онај из екстремалне теорије скупова данас је познатији као Шпернерова теорема. Шпернерова теорема се такође може изразити у терминима ширине парцијалног поретка. Наиме, фамилија свих подксупова n-елементног скупа (његов партитивни скуп) може бити парцијално уређена инклузијом скупова. У овом парцијалном поретку, два различита елемента се називају неупоредивим када ниједан од њих не садржи други. Ширина парцијалног поретка је највећи број елемената у антиланцу, скупу међусобно неупоредивих елемената. За антиланац кажемо да је Шпернерова фамилија, а ширина парцијалног поретка је максималан број скупова у Шпернеровој фамилији. Дакле, још један начин изражавања Шпернерове теореме је да је ширина парцијалног поретка над скупом од n елемената једнака $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. У наставку, формално наводимо и доказујемо Шпернерову теорему.
Нека је $n \in \mathbb{N}$ и означимо

$$S = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

За фамилију $\mathcal{F}$ подскупова скупа S кажемо да је антиланац ако не постоји скуп из $\mathcal{F}$ који садржи неки други скуп из $\mathcal{F}$. Од интереса је испитати колико највише антиланац $\mathcal{F}$ може да има елемената. Означимо са $|\mathcal{F}|$ број елемената скупа $\mathcal{F}$. Поред тога, нека је $\mathcal{F}_k$ фамилија свих k-точланих подскупова скупа S, где је $0 \leq k \leq n$. Наравно, тада је $\mathcal{F}_k$ антиланац и користећи (1.8) налазимо

$$|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Према томе, антиланац $\mathcal{F}_{\lfloor n/2 \rfloor}$ има тачно

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

елемената. Испоставиће се да је то максималан број елемената који један антиланац скупа од n елемената може да има.

Теорема 1.1 (Шпернерова теорема) *Нека је $\mathcal{F}$ антиланац скупа $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Тада важи*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Доказ. Посматрајмо произвољан ланац скупова

$$\varnothing = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n = S,$$

при чему је

$$|C_j| = j \text{ за све } j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Сваки овакав ланац добијамо додавањег једног по једног елемента скупа S, тако је укупан број оваквих ланаца једнак укупном броју пермутација скупа S, дакле $n!$. У наставку, за произвољно одабран скуп $A \in \mathcal{F}$, интересује нас колико има претходних ланаца који садрже скуп A. Наиме, да би од празног скупа $\varnothing$ добили скуп A неопходно је да додајемо један по један елемент и затим додавањем преосталих елемената, опет један по један, од скупа A добијемо скуп S. На тај начин, закључујемо да уколико скуп A има k елемената ($0 \leq k \leq n$), тада је укупан број претходних ланаца који садрже скуп A једнак $k!(n-k)!$. Такође, сваки од претходних ланаца не може да садржи два различита скупа A и B из $\mathcal{F}$, јер је $\mathcal{F}$ анталинац. За све $0 \leq k \leq n$ означимо са m_k број свих k-точланих скупова из антиланца $\mathcal{F}$. Тада важи

$$|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k.$$

На основу претходног, број свих ланаца који садрже неки елемент из фамилије $\mathcal{F}$ износи

$$\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)!,$$

и овај број није већи од $n!$, што је укупан број свих ланаца. Дакле, мора бити

$$\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)! \leq n!,$$

одакле следи

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1,$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Како је

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

за све $0 \leq k \leq n$ (видети (1.8)), то можемо закључити

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{k=0}^{n} m_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1,$$

односно, важи

$$|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

што је и требало доказати. ∎

Глава 2

Стирлингова формула

Валисова формула. Валисова формула има велики историјски значај, будући да је овом формулом број π по први пут представљен као гранична вредност неког низа са рационалним члановима. У наставку формално изводимо Валисову формулу користећи метод интеграције. Најпре, за све $n \in \mathbb{N}_0$ означимо

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \mathrm{d}x.$$

Тада је

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad I_1 = 1.$$

Поред тога, применом парцијалне интеграције, добијамо да за све $n \geq 2$ важи

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, \mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x \, \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}\left(\sin^{n-1} x\right) \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos x \, \sin^{n-2} x \, \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) \mathrm{d}x \\
&= (n-1) \left(I_{n-2} - I_n\right),
\end{aligned}$$

одакле добијамо

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ \text{ за све } \ n \geq 2.$$

Самим тим, тада је

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2},$$

и

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

На основу претходног, следи

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{((2n)!!)^2} \frac{\pi}{2} = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

За све

$$x \in (0, \pi/2) \ \text{ и } \ n \in \mathbb{N},$$

важи

$$0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

што повлачи

$$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1},$$

одакле је

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \to 1 \ \text{ када } \ n \to \infty.$$

Према томе, важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

Дакле, добијамо

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 (2n+1)\frac{\pi}{2} = 1,$$

односно

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

или

$$\frac{\pi}{2} \sim \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \ \text{ када } \ n \to \infty,$$

при чему користимо нотацију

$$f(n) \sim g(n),$$

уколико важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Следи

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

што повлачи

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} \sim \sqrt{\pi},$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

што представља Валисову формулу.

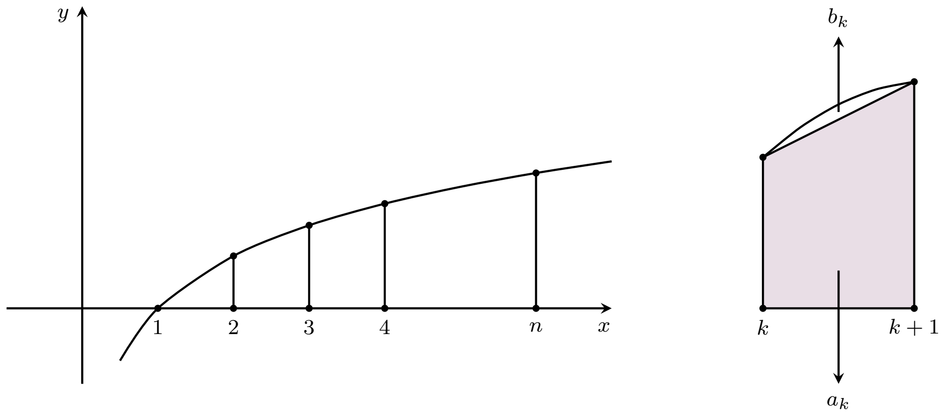
Стирлингова формула. Факторијел броја n се дефинише за све позитивне целе бројеве као производ свих целих бројева који им претходе и самог целог броја. Стирлингова формула или Стирлингова апроксимација, представља апроксимацију факторијела. То је добра апроксимација која даје тачне резултате чак и за мале вредности броја n. Добила је назив по Џејмсу Стирлингу, иако је сродан, али мање прецизан резултат први пут изнет од стране Абрахама де Моавра. Факторијели почињу са прилично малим вредностима, али већ при 10! долазимо до вредности од неколико милиона, и не прође много времена док факторијели постану огромни. Нажалост, не постоји скраћени математички израз за $n!$, већ је потребно извршити целокупно множење. Са друге стране, Стирлингова формула пружа прилично прецизну информацију о величини броја $n!$. Поред тога, факторијел броја n укључује само обично множење целих бројева, док Стирлингова формула повезује то са изразом који укључује корене, број π (површина јединичног круга) и број e (основа природног логаритма). У наставку, наводимо Стирлингове апроксимације за првих десет факторијела: $1! \approx 0.92$, $2! \approx 1.92$, $3! \approx 5.84$, $4! \approx 23.51$, $5! \approx 118.02$, $6! \approx 710.08$, $7! \approx 4980.39$, $8! \approx 39902.39$, $9! \approx 359536.87$ и $10! \approx 3598695.62$. Заправо, што је већи број n, то је боља апроксимација. Наиме, апроксимација $1! \approx 0.92$ је тачна са грешком од 0.08, док је апроксимација $10! \approx 3598695.62$ тачна са грешком од око 30000. Међутим, пропорционална грешка за 1! износи $(1! - 0.92)/1! = 0.0800$, док за 10! износи $(10! - 3598695.62)/10! = 0.0083$, што је око десет пута мање. Ово је правилан начин разумевања Стирлингове формуле, јер како природан број n постаје велики, пропорционална грешка $\left(n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)/n!$ тежи ка нули. У наставку изводимо Стирлингову формулу. Нека је

$$S_n = \int_1^n \log x \mathrm{d}x \text{ за све } n \in \mathbb{N},$$

где је $\log = \ln$ природни алгоритам. Тада важи

$$S_n = (x \log x - x)\Big|_1^n = n \log n - n + 1,$$

што је заправо површина испод графика конкавне функције $y = \log x$ од $x = 1$ до $x = n$.



Природни логаритам и трапези.

У наставку, за свако $k \in \mathbb{N}$ означимо са a_k површину трапеза са теменима $(k, 0)$, $(k + 1, 0)$, $(k + 1, \log(k + 1))$, $(k, \log k)$ и са b_k површину исечка изнад тог трапеза до криве $y = \log x$. Тада је

$$S_n = A_n + B_n, \text{ где смо означили } A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \text{ и } B_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k.$$

Важи

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) + \ldots + \frac{1}{2}(\log (n-1) + \log n) \\ &= \log 2 + \log 3 + \ldots + \log n - \frac{1}{2}\log n \\ &= \log n! - \frac{1}{2}\log n. \end{aligned}$$

На основу претходног добијамо

$$n\log n - n + 1 = \log n! - \frac{1}{2}\log n + B_n,$$

одакле следи

$$\log n! = (n + \frac{1}{2})\log n - n + 1 - B_n,$$

односно

$$n! = C_n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

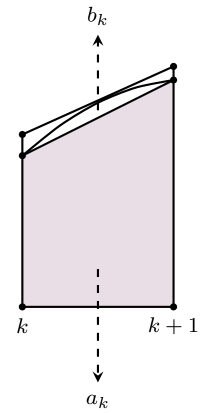
где је

$$C_n = e^{1-B_n}.$$

Будући да је $b_k > 0$ за све $k \in \mathbb{N}$, то је низ $\{B_n\}$ растући. Са друге стране, уочимо тангенту на криву $y = \log x$ у тачки

$$\left(k + \frac{1}{2}, \log\left(k + \frac{1}{2}\right)\right),$$

и упоредимо одговарајуће површине добијених трапеза у циљу добијање одговарајуће оцене одозго за b_k.



Тангента на $y = \log x$ у тачки $(k + 1/2, \log(k + 1/2))$ и оцена за b_k.

Према томе, добијамо:

$$b_k \;<\; \log\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\log k + \log (k+1)\right) = \frac{1}{2}\log\frac{k+\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{2}\log\frac{k+1}{k+\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) \\ &< \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2(k+1)}\right). \end{aligned}$$

Следи

$$\begin{aligned} B_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad &< \quad \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2(k+1)}\right)\right) \\ &= \quad \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Самим тим, низ $\{B_n\}$ је растући и ограничен, што значи да мора бити конвергентан, односно

$$B_n \uparrow B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \text{ када } \ n \to \infty,$$

одакле следи

$$C_n \downarrow C = e^{1-B} \ \text{ када } \ n \to \infty.$$

Такође, важи

$$B - B_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k < \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2(k+1)}\right)\right) < \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Закључујемо

$$1 < \frac{C_n}{C} = e^{B-B_n} < \sqrt{1+\frac{1}{2n}} < 1 + \frac{1}{4n}.$$

На основу претходног, добијамо

$$0 < C < C_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} < c\left(1+\frac{1}{4n}\right) \to C \ \text{ када } \ n \to \infty,$$

што значи да је

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \sim C.$$

Остаје нам да одредимо константу C. Применом Валисове формуле налазимо

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} \\ &= \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\left(C_n n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right)^2}{C_{2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{n}} \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^2}{C_{2n}} \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{C^2}{C} = \frac{C}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

одакле је
$$C = \sqrt{2\pi}.$$
Коначно је
$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$
тј. добијамо
$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ када } n \to \infty,$$
што представља Стирлингову формулу.

Глава 3

Литлвуд-Офордова лема

Литлвуд-Офордова лема. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ комплексни бројеви, за које важи

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, \text{ где је } \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Посматрајмо 2^n линеарних комбинација облика

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j, \text{ при чему је } \varepsilon_j \in \{-1, 1\} \text{ за све } j = 1, 2, \dots, n.$$

Литлвуд и Офорд су 1943. године показали да број оваквих линеарних комбинација које припадају произвољно одабраном отвореном диску полупречника 1 није већи од

$$c \frac{2^n}{\sqrt{n}} \log n, \text{ за неку константу } c > 0.$$

Убрзо затим је Ердеш поправио претходно горње ограничење тако што је уклонио фактор $\log n$. Поред тога, он је изнео хипотезу да је оптимално горње ограничење дато са

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Ову хипотезу можемо релативно једноставно доказати у случају када су $a_1, a_2, \dots, a_n$ реални бројеви користећи Шпернерову теорему. Наиме, нека су

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \text{ при чему важи } |a_j| \geq 1 \text{ за све } j = 1, 2, \dots, n.$$

Без смањења општости можемо додатно претпоставити да су бројеви a_j ненегативни (у супротном, заменимо a_j са $-a_j$ и ε_j са $-\varepsilon_j$ увек када је $a_j < 0$). Означимо

$$S = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Уочимо неки отворен интервал дужине 2 на реалној правој и посматрајмо све линеарне комбинације облика $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j$ које припадају том интервалу. За сваку такву комбинацију

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j,$$

нека је

$$J = \{j \in S : \varepsilon_j = 1\}.$$

Претпоставимо да за нека два тако додељена индексна скупа J и J' која одговарају комбинацијама
$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j \ \text{ и } \ \sum_{j=1}^{n} \varepsilon'_j a_j,$$
важи $J \subset J'$ и $J \neq J'$. Следи
$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon'_j a_j - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j = 2 \sum_{j \in J' \setminus J} a_j \geq 2,$$
што је немогуће, будући да комбинације
$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon'_j a_j \ \text{ и } \ \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j,$$
припадају отвореном интервалу дужине 2. Према томе, овако формирани индексни скупови J формирају антиланац, одакле, на основу Шпернерове теореме закључујемо да их може бити највише
$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$
Осим тога, није тешко проверити да је овакво ограничење оптимално. Наиме, нека је n паран природан број и нека је $a_j = 1$ за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Тада линеарна комбинација $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j$ припада интервалу $(-1, 1)$ ако и само ако је једнака 0, а број таквих комбинација износи тачно
$$\binom{n}{n/2}.$$
Такође, приметимо да на основу Стирлингове формуле важи
$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq c \frac{2^n}{\sqrt{n}},$$
за неку константу $c > 0$. Заправо, ако је $n = 2k$ (паран), добијамо
$$\begin{aligned}
\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} &= \binom{2k}{k} \\
&= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi 2k} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{\left(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^{k}\right)^2} \\
&= \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{k} 2^n \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}}{2\pi k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Са друге стране, ако је $n = 2k+1$ (непаран), добијамо

$$\begin{aligned}\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} &= \binom{2k+1}{k} \\ &= \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} \\ &= \frac{2k+1}{k+1}\frac{(2k)!}{(k!)^2} \\ &\sim 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{2k}}{\sqrt{2k}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k}}\frac{2^n}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

односно

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

Ердешеву хипотезу у комплексном случају су доказали Клајтман 1965. године и Катона 1966. године независно један од другог. Поред тога, Клајтман је 1970. године проширио резултат на произвољне Хилбертове просторе.

Теорема 3.1 *Нека су $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и нека су $D_1, \ldots, D_k$ дисјуктни отворени дискови полупречника 1. Тада број линеарних комбинација облика*

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j, \quad \textit{где је } \varepsilon_j \in \{-1, 1\} \textit{ за све } j = 1, \ldots, n,$$

које припадају унији

$$\bigcup_{j=1}^{k} D_j,$$

није већи од суме k највећих биномних коефицијената облика $\binom{n}{j}$.

Доказ. Уведимо ознаке

$$r = \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor \quad \text{и} \quad s = \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor.$$

Тада можемо директно приметити да

$$\sum_{j=r}^{s} \binom{n}{j},$$

представља суму k највећих биномних коефицијената облика $\binom{n}{j}$. Користећи формулу (1.4) налазимо

$$\sum_{j=r}^{s} \binom{n}{j} = \sum_{j=r}^{s} \binom{n-1}{j} + \sum_{j=r}^{s} \binom{n-1}{j-1},$$

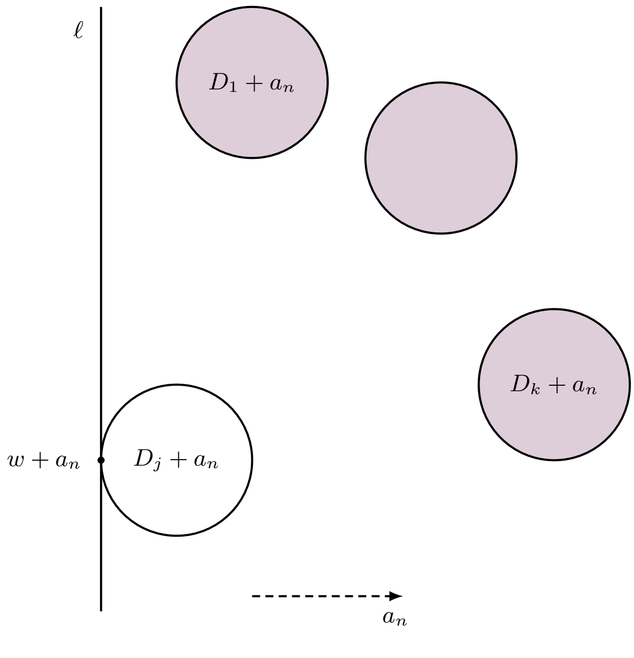
односно
$$\sum_{j=r}^{s}\binom{n}{j}=\sum_{j=r}^{s}\binom{n-1}{j}+\sum_{j=r-1}^{s-1}\binom{n-1}{j},$$
одакле следи
$$\sum_{j=r}^{s}\binom{n}{j}=\sum_{j=r-1}^{s}\binom{n-1}{j}+\sum_{j=r}^{s-1}\binom{n-1}{j}.$$
Директно се проверава да први сабирак у претходном збиру представља суму $k+1$ највећих биномних коефицијената облика $\binom{n-1}{j}$, док други сабирак представља суму $k-1$ највећих биномних коефицијената тог облика. У наставку доказ спроводимо индукцијом по n. За $n=1$ тврђење тривијално следи. Претпоставимо да је тврђење тачно за $n-1$ и покажимо да је тачно за n. Посматрајмо транслиране дискове

$$D_1+a_n,\dots,D_k+a_n.$$

Показаћемо да постоји $j\in\{1,\dots,k\}$ тако да је диск D_j-a_n дисјунктан са сваким од претходних дискова $D_1+a_n,\dots,D_k+a_n$. У наставку, комплексну раван $\mathbb{C}$ поистовећујемо са $\mathbb{R}^2$ и користимо уобичајан скаларни производ $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ у $\mathbb{R}^2$. Нека је

$$\ell=\{z\in\mathbb{C}\,:\,\langle a_n,z\rangle=c\},$$

права ортогонална на a_n, која садржи све транслиране дискове $D_1+a_n,\dots,D_k+a_n$ са стране на којој важи услов $\langle a_n,z\rangle\geq c$ и која додирује затворење неког (бар једног) од тих дискова којег означавамо D_j+a_n (таква права постоји, јер су дискови ограничени).



Положај праве ℓ у односу на транслиране дискове $D_1+a_n,\dots,D_k+a_n$.

Покажимо да D_j-a_n лежи са друге стране праве ℓ. Претпоставимо супротно, да важи $\langle a_n,z-a_n\rangle\geq c$ за неко $z\in D_j$. Следи

$$\langle a_n,z\rangle\geq|a_n|^2+c.$$

Нека је $\omega + a_n$ тачка у којој права l додирује диск $D_j + a_n$. Тада важи

$$\omega \in \partial D_j \text{ и } \langle a_n, \omega + a_n \rangle = c,$$

што повлачи

$$\langle a_n, -\omega \rangle = |a_n|^2 - c.$$

На освнову претходног следи

$$\langle a_n, z - \omega \rangle \geq 2|a_n|^2.$$

Применом Коши-Шварцове неједнакости закључујемо

$$2|a_n|^2 \leq \langle a_n, z - \omega \rangle \leq |a_n||z - \omega|,$$

одакле је

$$2 \leq 2|a_n| \leq |z - \omega| < 2,$$

при чему последња неједнакост следи из чињенице да $z \in D_j$ и $\omega \in \partial D_j$, што је контрадикција. На основу свега претходног, добијамо да је диск $D_j - a_n$ дисјунктан са сваким од транслираних дискова

$$D_1 + a_n, \ldots, D_k + a_n.$$

Све линеарне комбинације

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i,$$

које припадају унији

$$D_1 \cup \ldots \cup D_k,$$

поделимо у две групе. У Групи 1 су све такве комбинације код којих је $\varepsilon_n = -1$ и оне код којих је $\varepsilon_n = 1$ и које припадају диску D_j. У Групи 2 су све такве комбинације код којих је $\varepsilon_n = 1$ али не припадају диску D_j. Комбинације облика

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i a_i,$$

које одговарају Групи 1 леже у $k+1$ дисјунктних дискова

$$D_1 + a_n, \ldots, D_k + a_n \text{ и } D_j - a_n,$$

док комбинације облика

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i a_i,$$

које одговарају Групи 2 леже у $k-1$ дисјунктних дискова

$$D_1 - a_n, \ldots, D_k - a_n \text{ без диска } D_j - a_n.$$

Према индукцијској претпоставци, Група 1 има највише

$$\sum_{j=r-1}^{s} \binom{n-1}{j},$$

елемената, док Група 2 има највише

$$\sum_{j=r}^{s-1} \binom{n-1}{j},$$

елемената. Са друге стране важи

$$\sum_{j=r}^{s} \binom{n}{j} = \sum_{j=r-1}^{s} \binom{n-1}{j} + \sum_{j=r}^{s-1} \binom{n-1}{j},$$

одакле следи тражени закључак. Тиме је доказ завршен. ■

Лема 3.1 (Литлвуд-Офорд) *Нека су $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и нека је D отворен диск полупречника 1 у комплексној равни. Тада број линеарних комбинација облика*

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j, \quad \text{где је } \varepsilon_j \in \{-1, 1\} \text{ за све } j = 1, \ldots, n,$$

које припадају диску D није већи од

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Доказ. Директна последица претходне Теореме у случају $k = 1$ и чињенице да је $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ највећи биномни коефицијент облика $\binom{n}{j}$. ■

Литература

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Sixth Edition, Springer, Berlin, 2018.

[2] P. Erdős, *On a lemma of Littlewood and Offord*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 898–902.

[3] Б. Карапетровић, *Увод у комплексну анализу - збирка задатака*, Математички факултет, Београд, 2020.

[4] G. Katona, *On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem*, Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966), 59–63.

[5] D. Kleitman, *On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums*, Math. Zeitschrift 90 (1965), 251–259.

[6] D. Kleitman, *On a lemma of Littlewood and Offord on the distributions of linear combinations of vectors*, Adv. Math. 5 (1970), 155–157.

[7] J. E. Littlewood, A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation III*, Mat. USSR Sb. 12 (1943), 277–285.

Списак симбола

$\mathbb{C}$	скуп комплексних бројева
$\cos$	тригонометријска функција косинус
$\mathrm{D}(z_0, r)$	диск са центром у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника r
$\mathbb{D}$	диск $\mathrm{D}(0,1)$
$\exp$	експоненцијална функција
i	имагинарна јединица
$\log$	природни логаритам
$\mathbb{N}$	скуп природних бројева
$\mathbb{N}_0$	скуп $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathrm{Res}(f, z)$	остатак функције f у тачки z
$\mathbb{R}$	скуп реалних бројева
$\sin$	тригонометријска функција синус
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	скаларни производ у $\mathbb{R}^2$
$\binom{n}{k}$	биномни коефицијент
$\lvert z \rvert$	модул комплексног броја z

Списак математичара

• **Џон Ензор Литлвуд (1885 – 1977).** Био је британски математичар, најпознатији по резултатима у области математичке анализе постигнутим у сарадњи са Хардијем. Такође, значајан допринос дао је у аналитичкој теорији бројева. Био је председник Лондонског математичког друштва од 1941. до 1943. године и награђен је де Моргановом медаљом 1938. године (престижна награда лондонског математичког друштва за изузетан допринос математици која се додељује у част првог председника тог друштва). Литлвуд је 1903. године уписао Тринити колеџ на Универзитету у Кембриџу. Три године касније почиње свој заједнички рад са Ернестом Барнсом, још једним познатим британским математичарем. Један од проблема који му је Барнс предложио била је Риманова хипотеза. Добио је низ парцијалних резултата који се односе на Риманову хипотезу и познату теорему о расподели простих бројева. Такође, заједно са Хардијем поставио је чувене хипотезе које се односе на расподелу простих бројева. Имао је запажене резултате у области комбинаторике, где је радио са британским математичарем Албертом Офордом. На тај начин је, базирано на њиховим иницијалним резултатима, настала Литлвуд-Офордова теорија. Изабран је за члана Тринити колеџа 1908. године. Од октобра 1907. године до јуна 1910. године радио је као предавач математике на Универзитету у Манчестеру пре него што се вратио у Кембриџ у октобру 1910. године, где је остао до краја свог живота.

• **Алберт Кирил Офорд (1906 – 2000).** Био је британски математичар и први професор математике на чувеној Лондонској школи економије. Један је од првих и најугледнијих британских математичара у области савремене математичке анализе (заједно са Литлвудом и Хардијем). Имао је два доктората из математике. Први је стекао 1932. године на Универзитету у Лондону, док је други стекао 1936. године на Универзитету у Кембриџу. Био је пионир у области пробабилистичке (вероватносне) математичке анализе (заједно са Литлвудом), проучавајући типично понашање нула случајног полинома са реалним коефицијентима или нула случајних целих функција. Са друге стране, имао је и низ запажених резултата у области Фуријеове анализе. Поред тога, проучавао је и просторе холоморфних функција на јединичном диску у комплексној равни. Пензионисао се 1973. године.

• **Емануел Шпернер (1905 – 1980).** Био је немачки математичар који је данас познат по два изузетно важна математичка резултата који носе његово име. Први је Шпернерова теорема из 1928. године која каже да је величина антиланца у скупу од коначно много елемената не већа од одговарајућег средњег биномног коефицијента у низу свих биномних кеофицијената који одговарају кардиналности посматраног скупа. Ова теорема има неколико доказа и бројне генерализације, укључујући Шпернерово својство парцијално уређеног скупа. Други резултат је Шпернерова лема која представља комбинаторни резултат о бојењу триангулација који је заправо аналоган Брауеровој теореми о фиксној тачки. Заправо ова лема пружа директан доказ Брауерове теореме о фиксној тачки без експлицитне употребе хомологије. Шпернерова лема има неколико доказа и постоје многобројна уопштења овог резултата. Док је био студент на Универзитету у Хамбургу, ментор му је био чувени аустријски математичар Вилхелм Блашке. Шпернер је постао професор на Универзитету у Кенигсбергу 1934. године, а потом је обављао дужности на неколико различитих универзитета све до 1974. године.

• **Џејмс Стирлинг (1692 – 1770).** Познати шкотски математичар по којем су названи Стирлингови бројеви, Стирлингове пермутације и Стирлингова формула (или Стирлингова апроксимација). Доказао је исправност класификације кубних кривих у равни која потиче од Исака Њутна. Школовао се на Оксфорду, након којег је радио као професор математике у Венецији. Око 1725. године се вратио у Лондон уз Њутнову помоћ, где је остао десет година, при чему је своје слободно време посветио математици и преписци са еминентним математичарима. Свакако најпознатији његов резултат се односи на апроксимацију факторијела природних бројева, што је данас познато као Стирлингова формула, која даје јако добро апроксимацију факторијела чак и за мале вредности посматраног природног броја.

• **Џон Валис (1616 – 1703).** Био је енглески математичар коме се приписују делимичне заслуге за развој инфинитезималног рачуна. Он је заслужан за увођење симбола ∞ који представља концепт бесконачности. Валис је био Њутнов савременик и један од највећих интелектуалаца ране ренесансне математике. Написао је радове који се повезују са многим областима математике попут аналитичке геометрије, интегралног рачуна, алгебре и класичне геометрије. Један од његових свакако најзначајнијих резултата је представљање броја π као граничне вредности низа са рационалним члановима.

• **Пол Ердеш (1913 – 1996).** Чувени мађарски математичар који је написао велики број радова у разним математичким дисциплинама попут комбинаторике, теорије графова, теорије бројева, класичне анализе, теорије апроксимација, теорије скупова и теорије вероватноће. Ердеш је био један од најактивнијих математичара што се тиче објављивања радова у математичкој историји. Написао је око 1500 математичких радова, већину са коауторима (имао је око 500 сарадника). Велики део његовог рада био је усредсређен на дискретну математику, решавајући многе раније нерешене проблеме у овој области. Његов рад је углавном тежио решавању раније отворених проблема (не толико развијању или истраживању нових области математике). Ердешов плодни рад са коауторима подстакао је стварање Ердешевог броја, односно, броја корака на најкраћем путу између математичара и Ердеша у смислу коауторства. Самом Ердешу је додељен број 0, док су његови непосредни сарадници добили број 1, њихови сарадници имају Ердшев број 2, итд. Отприлике 200000 математичара има додељен Ердешев број, а неки су проценили да 90 процената активних светских математичара има Ердешев број мањи од 8. Због сарадње са математичарима, многи научници у областима као што су физика, биологија и економија такође имају Ердешеве бројеве. Ствари нису пуно значиле Ердешу. Наиме, већина његових личних ствари је могла да стане у кофер, што је било у складу са његовим путујућим животом. Заправо, већину свог живота је провео путујући између научних конференција и домова колега широм света.

• **Ђула Катона (1941 –).** Још један мађарски математичар који је познат по свом раду у комбинаторној теорији скупова, а посебно по његовом лепом и елегантном доказу Ердеш–Ко–Радо теореме чиме је открио нову методу, која се сада зове Катонина метода циклуса. Од тада, ова метода је постала моћно средство у доказивању многих занимљивих резултата у екстремалној теорији скупова. Такође, аутор је и познатог резултата који сада носи назив Крускал-Катонина теорема.

• **Данијел Клајтман (1934 –).** Амерички математичар и професор примењене математике на МИТ-у. Његови истраживачки интереси обухватају комбинаторику и теорију графова. Докторирао је физику на Универзитету Харвард 1958. године, али је под наговором Пола Ердеша почео да се бави математиком. Клајтман се придружио факултету примењене математике на МИТ-у 1966. године, а 1969. је унапређен у професора. Клајтман је са Ердешем написао шест радова, што заправо значи да је његов Ердешев број једнак 1. Осим тога, био је саветник за математику и статиста за познати филм Добри Вил Хантинг.