

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јован М. Радосављевић

КРИТИЧНИ ГРАФОВИ ДИЈАМЕТРА 2

докторска дисертација

Београд, 2023.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Jovan M. Radosavljević

DIAMETER 2 CRITICAL GRAPHS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2023.

Ментор:

др Миодраг ЖИВКОВИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Филип МАРИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Зоран СТАНИЋ, редовни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Тамара КОЛЕДИН, ванредни професор
Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

Датум одбране: 30. септембар 2023.

Наслов дисертације: Критични графови дијаметра 2

Резиме: Граф $G = (V, E)$ је уређени пар скупа чворова V и грана E . Ред графа G је број чворова $|V|$, а његова величина је број грана $|E|$. Чворови $u, v \in V$ су суседни ако између њих постоји грана $uv \in E$. Растојање $\text{dist}(u, v)$ чворова u и v у G је дужина најкраћег пута од u до v . Дијаметар графа G је највеће растојање $\text{dist}(u, v)$ нека два чвора u, v . У дисертацији се разматрају графови дијаметра 2. Интуитивно се намеће представа да су графови дијаметра 2 једноставне структуре; међутим познато је да су асимптотски скоро сви графови дијаметра 2. Због тога је интересантна ужа класа — класа D2C критичних графова дијаметра 2, тј. графова код којих уклањање било које гране води повећавању дијаметра. Поред тога, разматра се и ужа класа примитивних D2C (PD2C) графова, тј. D2C графова који немају два чвора са истим скупом суседа.

У уводном поглављу 2 изложени су основни појмови, алгоритми и тврђења која се користе у дисертацији. У наредним поглављима приказују се оригинални резултати у вези са графовима дијаметра 2.

У поглављу 3 описује поступак добијања листе D2C графова реда до 13. Са уграђеном паралелизацијом формирање списка D2C графова реда до 13 трајало је месец дана. Овим је учињен искорак, јер је претходно постојао списак свих графова дијаметра 2 реда до 10. Добијени резултати су искоришћени за проверу неколико познатих хипотеза о графовима дијаметра 2.

У поглављу 4 показује се да за свако $m \geq 3$ D2C граф који садржи клику величине m мора да има бар $2m$ чворова. При томе, са тачношћу до на изоморфизам, постоји тачно један граф величине $2m$ који садржи клику величине m .

У поглављу 5 разматрају се PD2C графови са најмањим бројем грана. Из списка свих PD2C графова реда $n \leq 13$ су издвојени PD2C графови величине највише $2n - 4$. Само три од издвојених графова су величине $2n - 5$, што је у складу са тврђењем Ердеш-Рењијеве теореме о доњој граници за величину графова дијаметра 2 који не садрже чвор суседан са свим осталим чворовима (та граница је $2n - 5$). PD2C графови величине $2n - 4$ реда до 13 разврстани су у три групе:

- Прва група припада фамилији \mathcal{Z} , дефинисаној у дисертацији, која за

свако $n \geq 6$ садржи тачно један PD2C граф реда n величине $2n - 4$.

- Другу групу чини седам Хамилтонових PD2C графова реда највише 9 величине $2n - 4$. У дисертацији је доказано да не постоји овакав Хамилтонов граф реда већег од 11, тј. да су пронађених седам графова једини Хамилтонови PD2C графови величине $2n - 4$.
- Трећу групу чини јединствени граф који не припада ни једној од прве две групе.

На основу ових резултата формулисана је хипотеза да сви PD2C графови реда $n \geq 10$ и величине $2n - 4$ припадају фамилији \mathcal{Z} .

Кључне речи: графови, критични графови дијаметра 2, примитивни графови

Научна област: Рачунарство и информатика

Ужа научна област: Теорија графова

УДК број: 004.415.5(519.1)

Dissertation title: Diameter 2 critical graphs

Abstract: A graph $G = (V, E)$ is an ordered pair of the set of vertices (V) and the set of edges (E). The order of the graph G is the number of vertices $|V|$, and its size is the number of edges $|E|$. The vertices $u, v \in V$ are adjacent if there is an edge $uv \in E$ between them. The distance $\text{dist}(u, v)$ between vertices u and v is the length of the shortest path from u to v . Diameter of a graph G is the largest distance $\text{dist}(u, v)$ between some two vertices u, v . In the dissertation, graphs of diameter 2 are considered. Intuitively, the idea arises that graphs of diameter 2 have simple structures; however, it is known that asymptotically almost all graphs are of diameter 2. That is the reason why the narrower class — the class of critical graphs of diameter 2 (D2C) is interesting, i.e. graphs such that the removal of any edge increases the graph diameter. Furthermore, a narrower class of primitive D2C (PD2C) graphs is considered, i.e. D2C graphs which have no two vertices with the same set of neighbors.

In the introductory chapter 2, the basic terms, algorithms and assertions are presented which are used in the dissertation. The following chapters present the original results regarding 2 diameter graphs.

Chapter 3 describes the procedure to obtain the lists of D2C of order up to 13. Using simple parallelization obtaining the list of D2C graphs of order up to 13 took a month. This was a step forward, because before there was a list of all graphs of diameter 2 of order up to 10. The obtained results were used to test several known hypotheses on graphs of diameter 2.

In chapter 4 it is shown that for each $m \geq 3$ a D2C graph containing a clique of size m must have at least $2m$ nodes. Furthermore, up to an isomorphism, there exists a unique graph of size $2m$ that contains a clique of size m .

In chapter 5 PD2C graphs with the smallest number of edges are considered. From the list of all PD2C graphs of order $n \leq 13$ firstly PD2C graphs of size at most $2n - 4$ are selected. Only three of the extracted graphs are of size $2n - 5$, which is consistent with the statement of the Erdős-Renyi theorem on the lower bound $(2n - 5)$ on the size of graphs of diameter 2 not containing a vertex adjacent to all other vertices. PD2C graphs of size $2n - 4$ of order up to 13 are classified into three groups:

- The first group is a subset of the family \mathcal{Z} , defined in the dissertation, which

for each $n \geq 6$ contains exactly one PD2C graph of order n and size $2n - 4$.

- The second group consists of seven Hamiltonian PD2C graphs of order at most 9 and the size $2n - 4$. It is proved that there is no such Hamiltonian graph of order greater than 11, i.e. these seven graphs are the only Hamiltonian PD2C graphs of size $2n - 4$.
- The third group consists of a unique graph which does not belong to either of the first two groups.

Based on these results, a conjecture is formulated that all PD2C graphs of order $n \geq 10$ and size $2n - 4$ belong to the family \mathcal{Z} .

Keywords: graphs, diameter 2 critical graphs, primitive graphs

Research area: Computer science

Research sub-area: Graph theory

UDC number: 004.415.5(519.1)

Захвалница

Желео бих да се захвалим ментору професору др. Миодрагу Живковићу на свему што сам од њега научио. Дугујем велику захвалност мојим родитељима Миловану и Ружици и сестри Сањи, који су ме увек подржавали у жељи за стицањем нових сазнања. Захвалио бих се такође свима који су ме охрабривали да завршим рад на дисертацији.

Садржај

1	Увод	1
2	Основни појмови, тврђења и алгоритми	4
2.1	Основни појмови	4
2.2	Алгоритми	8
2.2.1	Претрага графа у ширину — алгоритам <i>BFS</i>	8
2.2.2	Канонски облик графа	9
2.2.3	Генерисање неизоморфних повезаних графова	10
2.3	Коришћена тврђења	11
2.3.1	Критеријум критичности гране у графу дијаметра 2	11
2.3.2	Фанова теорема	13
2.3.3	Теорема Ердеша и Рењија	19
2.4	Неке фамилије D2C графова	27
2.4.1	Графови засићени троугловима	27
2.4.2	Минимални самоцентрирани графови	28
2.4.3	Бесконачна фамилија $G^{\textcircled{S}}$	29
3	Критични графови дијаметра 2 реда до 13	32
3.1	Добијање критичних графова филтрирањем	32
3.1.1	Формат <i>gb</i>	32
3.1.2	Тест дијаметра	33
3.1.3	Тест критичности графа дијаметра 2	35
3.1.4	Интеграција тестова у програм <i>genG</i>	36
3.2	Резултати	37
3.2.1	Поређење две хеуристике	37
3.2.2	Најмање и највеће величине D2C графова реда $n \leq 13$	39
3.2.3	Провера хипотеза о D2C графовима	41

4	Минимални D2C графови који садрже клику K_m	44
4.1	Лема о структури D2C графа који садржи клику K_m	44
4.2	Доња граница за ред D2C графа који садржи клику K_m	45
4.3	Јединствени D2C граф реда $2m$ који садржи клику K_m	46
5	D2C графови са најмањим бројем грана	50
5.1	Анализа списка PD2C графова величине $2n - 4$ реда до 13	50
5.2	Фамилија \mathcal{Z}	52
5.3	Хамилтонови PD2C графови величине $2n - 4$	56
	Библиографија	58
	Прилози	61

Глава 1

Увод

Теорија графова има велике примене у наукама као што су математика, информатика, инжењерство, лингвистика, физика, хемија, рачунарске мреже, биологија и социјалне науке. У дисертацији се разматрају D2C графови (критични графовима дијаметра 2), тј. графови дијаметра 2 такви да се уклањањем било које њихове гране добија граф дијаметра већег од 2. Поред тога, разматра се и ужа класа примитивних D2C графова, тј. D2C графова који немају два чвора са истим скупом суседа.

У уводној глави 2 изложени су основни појмови, алгоритми и тврђења која се користе у дисертацији. Приказане су Фанова теорема и теорема Ердеша и Рењија, које се односе на горњу, односно доњу границу за број грана у графовима дијаметра 2. Описане су две алтернативне карактеризације D2C графова и конструкција којом се, полазећи од произвољног D2C графа без троуглова, итеративно добија бесконачна фамилија D2C графова без троуглова. У наредним поглављима приказују се нови резултати у вези са графовима дијаметра 2.

У глави 3 описује поступак добијања листе D2C графова реда до 13, објављен у раду [14]. Поступак се заснива на интеграцији филтрирања у програм *genq*, део пакета *nauty* [3], који се користи за листање канонских облика неизоморфних повезаних графова са задатим бројем чворова и грана. Филтрирање графова врши се провером дијаметра и критичности сваког добијеног графа. За проверу дијаметра користи се модификовани алгоритам *BFS* са ограничењем претраге до дубине 2. Да би се проверио дијаметар, најпре се бира неки чвор v у графу и проверава да ли је растојање осталих чворова од њега највише 2; ако је услов испуњен, испуњеност истог услова проверава се за све

чворове који су од чвора v на растојању тачно 2. Граф се при томе представља низом целих бројева, тако да бинарне цифре сваког од тих бројева одговарају једној врсти матрице повезаности графа. Експериментисано је са две хеуристике које се разликују по начину избора почетног чвора приликом обиласка графа; прва, односно друга хеуристика полази од чвора са највећим, односно најмањим бројем суседа у графу. Тест критичности се врши искључиво ако је дијаметар графа тачно 2. Критичност графа се проверава тако што се испита дијаметар графа након вађења било које троугаоне гране. Наведени тестови су убачени у програм *geng* на сличан начин на који су имплементирани неки од постојећих филтера, као што је нпр. филтер за повезане графове. Са уграђеном паралелизацијом формирање списка примитивних D2C графова реда до 13 трајало је месец дана. Овим је учињен искорак, јер је претходно постојао списак свих графова дијаметра 2 реда до 10 описан у раду [13]. Добијени резултати су искоришћени за проверу неколико познатих хипотеза о графовима дијаметра 2; за једну од њих је пронађен контрапример, граф реда 11.

У глави 4 показује се да за свако $m \geq 3$ D2C граф који садржи клику величине m мора да има бар $2m$ чворова. При томе, са тачношћу до на изоморфизам, постоји тачно један граф величине $2m$ који садржи клику величине m . Ови резултати објављени су у раду [15].

У глави 5 разматрају се PD2C графови (примитивни D2C графови) са најмањим бројем грана. Из списка свих PD2C графови реда $n \leq 13$ најпре су издвојени PD2C графови величине највише $2n - 4$. Само три од издвојених графова су величине $2n - 5$, што је у складу са тврђењем Ердеш-Рењијеве теореме. PD2C графови величине $2n - 4$ реда до 13 разврстани су у три групе:

- Графови из прве групе припадају фамилији \mathcal{Z} , дефинисаној у дисертацији, која за свако $n \geq 6$ садржи тачно један PD2C граф реда n величине $2n - 4$.
- Другу групу чини седам Хамилтонових PD2C графова реда највише 9. У дисертацији је доказано да не постоји овакав граф реда већег од 11, тј. да су пронађених седам графова једини Хамилтонови PD2C графови величине $2n - 4$.

- Трећу групу чини јединствени граф који не припада ни једној од прве две групе.

На основу ових резултата формулисана је хипотеза да су сви PD2C графови реда $n \geq 10$ и величине $2n - 4$ припадају фамилији \mathcal{Z} . Ови резултати објављени су у раду [16]

Глава 2

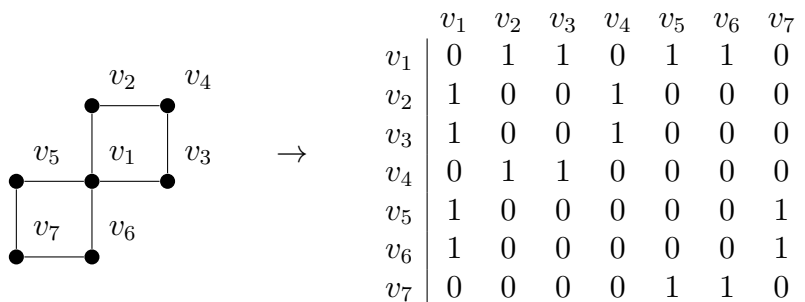
Основни појмови, тврђења и алгоритми

У тачки 2.1 уводе се неопходни појмови и ознаке, а затим се излажу коришћени алгоритми (тачка 2.2) и теореме (тачка 2.3). У тачки 2.4 наводе се неке фамилије критичних графова дијаметра 2.

2.1 Основни појмови

Граф $G = (V, E)$ чине скуп чворова V и скуп $E \subseteq (V \times V)$ грана. Ако је граф усмерен, свака грана $e = (u, v) \in E$ уређени пар чворова $u, v \in V$. У неусмереном графу грана $e = uv \in E$ је неуређени пар чворова. У овој дисертацији разматрају се само неусмерени графови. Скуп чворова графа G означава се са $V(G)$, а скуп грана са $E(G)$. Ред графа G је број $|V(G)|$ његових чворова, а величина графа G је број $|E(G)|$ његових грана.

Два чвора $u, v \in V(G)$ су *суседна* у графу G ако постоји грана $uv \in E(G)$ између њих. Скуп $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid vw \in E(G)\}$ је скуп свих суседа чвора $v \in V(G)$ у графу G , а скуп $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ садржи и чвор v . Општије, *ошворена околина*, односно *зайворена околина* скупа чворова $X \subseteq V(G)$ графа G је $N_G(X) = \bigcup_{u \in X} N(u)$, односно $N_G[X] = N_G(X) \cup X$. Уколико је из контекста јасно који је граф у питању, уместо ознака $N_G(X)$ и $N_G[X]$ користе се једноставније ознаке $N(X)$ и $N[X]$. *Степен* $\deg(v)$ чвора $v \in V(G)$ у графу G је број $|N_G(v)|$ његових суседа. Највећи, односно најмањи степен неког чвора у графу G означава се са $\Delta(G)$, односно $\delta(G)$.



Слика 2.1: Пример графа и његове матрице повезаности

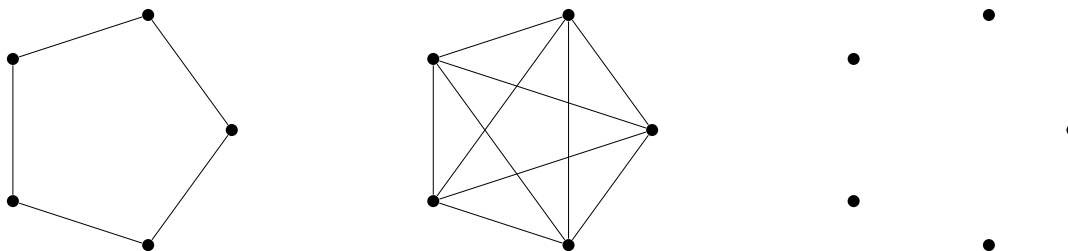
Пример 2.1. *Ред графа приказаног на слици 2.1 је 7, а његова величина је 8. Поред шифа, $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$, $\deg(v_1) = |N_G(v_1)| = 4$, $\Delta(G) = 4$ и $\delta(G) = 2$.*

Матрица повезаности графа G са скупом чворова $V = V(G)$ је квадратна матрица $|V| \times |V|$, чији су врсте и колоне означене чворовима, при чему је вредност елемента у пресеку врсте $u \in V$ и колоне $v \in V$ једнака 1 ако $uv \in E(V)$, односно 0 у противном. Десно од графа приказаног на слици 2.1 је његова матрица повезаности.

Граф H је *подграф* графа G ако је $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$. Граф H је *индуковани подграф* графа G ако је $V(H) \subseteq V(G)$ и $uv \in E(H)$ ако и само ако $uv \in E(G)$. Граф $G + e$, односно $G - e$ добија се од графа G додавањем, односно брисањем гране $e = uv$, $u, v \in V(G)$, ако је $V(G) = V(G+e) = V(G-e)$ и $E(G+e) = E(G) \cup e$, односно $E(G-e) = E(G) \setminus e$.

Пут од чвора $v_1 \in V$ до чвора $v_k \in V$ у графу $G = (V, E)$ је низ чворова v_1, v_2, \dots, v_k , повезаних гранама $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k \in E$. Број k је дужина пута. *Циклус* је пут дужине најмање 3 код кога су први и последњи чвор једнаки. Дужина циклуса једнака је броју његових чворова (први и последњи чвор рачунају се као један чвор циклуса), односно грана. Циклус дужине 3 је *троугао*. Грана у графу је *троугаона* ако припада неком троуглу. *Хамилтонов циклус* у графу је циклус који сваки чвор графа садржи тачно једном. Граф који садржи Хамилтонов циклус зове се *Хамилтонов граф*.

Два чвора у графу су *повезана* ако постоји пут између њих. *Распојање* $\text{dist}_G(u, v)$ између два чвора $u, v \in V(G)$ је дужина најкраћег пута који их повезује. По дефиницији је $\text{dist}_G(u, u) = 0$ и $\text{dist}_G(u, v) = \infty$ ако чворови u и v нису повезани. Граф G је повезан ако су свака два његова чвора повезана. *Компоненти повезаности* графа је сваки његов максимални повезани



Слика 2.2: Графови C_5 , K_5 $\overline{K_5}$.

подграф. Сваки граф састоји се од једне или више компоненти повезаности. Нека је

$$N_G^k(v) = \{w \in V(G) \mid \text{dist}(v, w) = k\}$$

отворена, а

$$N_G^k[v] = \{w \in V(G) \mid \text{dist}(v, w) \leq k\}$$

затворена околина чвора v у графу G . Уколико је из контекста јасно који је граф у питању, уместо ознака $\text{dist}_G(u, v)$, $N_G^k(v)$ и $N_G^k[v]$ користе се краће ознаке $\text{dist}(u, v)$, $N_k(v)$ и $N_k[v]$.

У наставку се уводе ознаке за неке фамилије графова које се разматрају у дисертацији:

- Циклични граф C_n је граф реда n који се састоји од циклуса дужине n .
- Комплетан граф K_n је граф реда n у коме између свака два чвора постоји грана.
- Празан граф \overline{K}_n је граф реда n без грана.

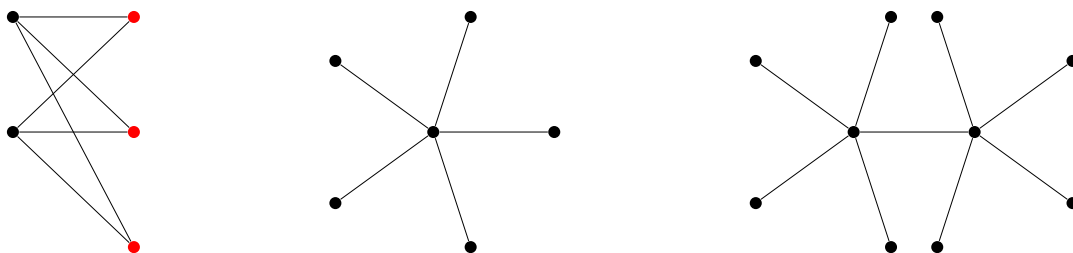
Графови C_5 , K_5 и \overline{K}_5 приказани су на слици 2.2.

Стабло је повезани граф без циклуса. Подстабло је повезани подграф стабла. Коренско стабло је стабло са једним издвојеним чвором, кореном стабла. Ниво чвора у коренском стаблу је његова удаљеност од корена. Висина коренског стабла је највећи ниво неког од чворова.

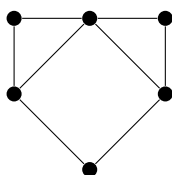
Граф G је бипартитни граф ако је $V(G) = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, при чему се скуп $E(G)$ састоји се само од грана u_1u_2 таквих да је $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$. Ако је

$$E(G) = \{u_1u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}, \quad |U_1| = m, \quad |U_2| = n,$$

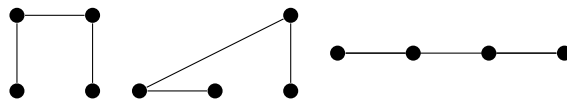
тада је G комплетан бипартитни граф, који се означава са $K_{m,n}$. Комплетан бипартитни граф $K_{2,3}$ приказан је на слици 2.3. Звезда S_n је комплетан бипартитни граф $K_{1,n-1}$. Чвор степена $n - 1$ је центар звезде. Двосмрука звезда



Слика 2.3: Графови $K_{2,3}$, S_6 и $S_{4,4}$.



Слика 2.4: Пример PD2C графа.



Слика 2.5: Пример изоморфних графова.

$S_{i,j}$ је граф који се добија повезивањем граном центара звезда S_i и S_j . Звезда S_6 и двострука звезда $S_{4,4}$ приказани су на слици 2.3.

Дијаметар $\text{diam}(G)$ графа G је највеће растојање између нека два чвора у графу. Граф G је *дијаметар k критичан* ако је $\text{diam}(G) = k$, а уклањањем било које гране из графа добија се граф дијаметра већег од k . Ако је G граф дијаметра 2, односно дијаметар 2 критичан граф, каже се да је он D2, односно D2C граф. Граф G је *примитиван граф* ако у њему не постоје два чвора са истим скупом суседа. Граф G је PD2C граф ако је примитиван D2C граф. Граф приказан на слици 2.4 је PD2C граф.

Изоморфизам између два графа G и H је бијекција $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ таква да за произвољна два различита чвора $u, v \in V(G)$ постоји грана $uv \in E(G)$ ако и само ако постоји грана $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. Два графа G и H су *изоморфна*, $G \simeq H$, ако постоји изоморфизам између њих. Релација \simeq је релација еквиваленције, која скуп свих повезаних неусмерених графова разлаже на класе еквиваленције. *Аутоморфизам графа* је функција пресликавања чворова графа у самог себе. *Канонски облик* графа G је представник класе еквиваленције графа G , видети 2.2.2. За сваки граф постоји аутоморфизам који пресликава граф у његов канонски облик. Пример три изоморфна графа приказан је на слици 2.5.

```

// G - граф
// s - почетни чвор
BFS(G, s)
  for each  $u \in G(V) \setminus \{s\}$  do
     $u.color \leftarrow$  WHITE
   $s.color \leftarrow$  GRAY
   $Q \leftarrow \emptyset$ 
  ENQUEUE( $Q, s$ )
  while  $Q \neq \emptyset$  do
     $u \leftarrow$  DEQUEUE( $Q$ )
    for each  $v \in N(u)$  do
      if  $v.color =$  WHITE then
         $v.color \leftarrow$  GRAY
        ENQUEUE( $Q, v$ )
     $u.color \leftarrow$  BLACK

```

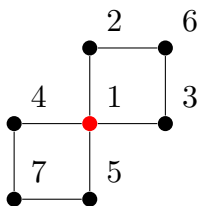
Слика 2.6: Алгоритам *BFS*.

2.2 Алгоритми

У наставку су објашњени следећи алгоритми који се користе у глави 3: алгоритам *BFS* који се користи за претрагу графа у ширину, алгоритам за проверу изоморфности два графа и алгоритам за генерисање неизоморфних графова.

2.2.1 Претрага графа у ширину — алгоритам *BFS*

Алгоритам претраге у ширину, или краће алгоритам *BFS* (енг. breadth-first-search) обилази задати граф G полазећи од задатог чвора $s \in V(G)$, видети код на слици 2.6. За обилазак се користи FIFO ред Q у који се на почетку уписује чвор s обојен сивом бојом. У главној петљи алгоритма из реда се вади наредни чвор u , који се боји црном бојом, па се сви његови бели суседи (они који су у реду Q) боје сивом бојом и уписују у ред Q . Инваријанта петље је да су чворови у реду Q обојени сивом бојом; сврха бојења чворова је поједностављење провере да ли је чвор достигнут у претрази: достигнути чвор се не уписује поново у ред. Сложеност овог алгоритма је $O(|V(G)| + |E(G)|)$. Редослед *BFS* обиласка чворова графа на слици 2.7 полазећи од црвеног чвора 1 приказан је уз чворове на самом графу.



Слика 2.7: Редослед *BFS* обиласка графа полазећи од црвено обојеног чвора.

2.2.2 Канонски облик графа

За проверу изоморфизма и излиставање се користи софтверски пакет *nauty* који чини скуп програма за одређивање групе аутоморфизма за обојене графове. Ова информација је представљена у облику скупа генератора, величине и орбита групе. Такође, могуће је одредити канонски облик графа, што омогућава тестирање изоморфизма два графа.

Партиципација (партиционисање) графа G означава поделу скупа $V(G)$ у дисјунктне непразне скупове чворова (партиције). Еквивалентан појам партиције графа је *бојење* графа G , тј. додељивање различитих боја партицијама скупа $V(G)$. Обојена партиција се назива *ћелија*. Редослед ћелија је битан, али редослед чворова унутар ћелији није. Ако су π_1 и π_2 две партиције графа G , тада је партиција π_1 *финија* од партиције π_2 , односно π_2 је *грубља* од π_1 , ако је свака ћелија из партиције π_1 подскуп неке ћелије из партиције π_2 . При томе је свака партиција истовремено и финија и грубља од саме себе. *Једнострука ћелија* је ћелија коју чини само један чвор, а *дискретна партиципација* је партиција у коме су све ћелије једноструке.

Нека је G граф, γ пермутација скупа $V = V(G)$, $v \in V$, $W \subseteq V$ и нека је $\pi = (V_0, V_1, \dots, V_k)$ нека партиција скупа V . Тада v^γ означава слику чвора v под дејством пермутације γ , $W^\gamma = \{w^\gamma | w \in W\}$, G^γ је граф чији су чворови x^γ и y^γ суседни ако и само ако су чворови x и y суседни у графу G , а π^γ је партиција $(V_0^\gamma, V_1^\gamma, \dots, V_k^\gamma)$.

Група аутоморфизама обојеног графа (G, π) је скуп свих пермутација γ таквих да је $G^\gamma \cong G$ и $\pi^\gamma = \pi$. Ако је $\pi = (V_0, V_1, \dots, V_k)$ партиција скупа чворова $\{0, 1, \dots, n-1\}$, тада је $c(\pi)$ партиција

$$(\{0, 1, \dots, |V_0| - 1\}, \{|V_0|, \dots, |V_0| + |V_1| - 1\}, \dots, \{n - |V_k|, \dots, n - 1\}).$$

Канонско обележавање је функција \mathcal{C} таква да за било који обојени граф G , његову партицију π и пермутацију γ скупа V важи:

- 1) $\mathcal{C}(G, \pi) = G^\delta$, где је δ пермутација таква да је $\pi^\delta = c(\pi)$, и
- 2) $\mathcal{C}(G^\gamma, \pi^\gamma) = \mathcal{C}(G, \pi)$.

Другим речима, \mathcal{C} нумерише чворове графа редом према бојама, игноришући при томе полазне редне бројеве чворова. Наредна теорема показује зашто је канонско обележавање корисно.

Теорема 2.1. Нека су G_1 и G_2 обојени графови који имају исти број чворова сваке боје. Тада је $\mathcal{C}(G_1, \pi_1) = \mathcal{C}(G_2, \pi_2)$ ако и само ако је $G_1^\gamma = G_2$ за неку пермутацију γ за коју је исти боја сваког чвора и његове слике.

Доказ. Нека је $\mathcal{C}(G_1, \pi_1) = G_1^{\delta_1}$ и $\mathcal{C}(G_2, \pi_2) = G_2^{\delta_2}$, онда је $G_1^{\delta_1} = G_2^{\delta_2}$, па је $G_1^\gamma = G_2$, где је пермутација $\gamma = \delta_1 \delta_2'$, а δ_2' инверзна пермутација пермутације δ_2 . \square

2.2.3 Генерисање неизоморфних повезаних графова

Нека је $G = (V, E)$ граф и π партиција G са ћелијама V_0, V_1, \dots, V_k . Тада је партиција π графа G *непривидно* ако постоје бројеви d_{ij} такви да је сваки чвор из ћелије V_i суседан са тачно d_{ij} чворова из ћелије V_j за $0 \leq i, j \leq k$. Са тачношћу до на редослед ћелија постоји јединствена најгрубља непристрасна партиција која је финија од било које задате партиције.

Функција профињавања је функција \mathcal{R} таква да за било који граф $G = (V, E)$, партицију π графа V и пермутацију γ скупа V важи:

- 1) $\mathcal{R}(G, \pi)$ је партиција скупа V која је, са тачношћу до на редослед ћелија, најгрубља непристрасна партиција финија од π , и
- 2) $\mathcal{R}(G^\gamma, \pi^\gamma) = \mathcal{R}(G, \pi)^\gamma$.

Алгоритам по коме ради програм *nauty* претражује сва могућа бојења графа организована у облику придруженог стабла претраге. Да би се избегла забуна, за чвор стабла претраге користи се израз *шеме*. Корен стабла претраге одговара почетном бојењу π графа G и непристрасној партицији $\pi' = \mathcal{R}(G, \pi)$. Ако је π' дискретна партиција, онда је група аутоморфизма тривијална, па је означавање $\mathcal{C}(G, \pi)$ могуће добити обележавањем чворова из G редом како се појављују у пермутацији π' . У општем случају може се претпоставити да је π' непристрасна партиција придружена неком темињу ν стабла претраге. Ако

је π' дискретна партиција, онда теме ν нема синове у стаблу. У противном, уколико партиција π' није дискретна, нека је C је нека њена ћелија која није једнострука. Та ћелија зове се *циљна ћелија* за ово теме (*nauty* је бира по одређеном правилу). За сваки чвор $v \in C$ темену ν додаје се један син придружен партицији која настају заменом ћелије C са две ћелије $\{v\}$ и $C \setminus \{v\}$, тим редоследом, и непристрасној партицији која се добија применом функције \mathcal{R} на њу. Синови темена ν генеришу се растућим редоследом према ознакама чворова ћелије C .

Произвољно теме стабла претраге коме одговара дискретна непристрасна партиција одговара означавању G на претходно описани начин. Аутоморфизми графа се препознају по томе што две дискретне партиције одговарају једнаким (истим) обележеним графовима. Канонско обележавање графа (канонски облик графа) одговара једном од таквих означавања, које се бира на компликовани начин, видети рад [2]. У алгоритму *nauty* је то лексикографски највећа дискретна пермутација.

2.3 Коришћена тврђења

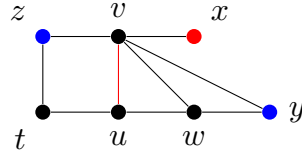
Изложени су докази критеријума за препознавање сувишних (не критичних) грана у графовима који нису D2C (2.3.1), Фанове теореме о максималној величини D2 графова (2.3.2) и теореме Ердеша-Рењија о минималном броју грана у графу дијаметра 2 који нема доминирајући чвор (2.3.3). Наведена тврђења се користе у глави 3.

2.3.1 Критеријум критичности гране у графу дијаметра 2

Критеријум критичности гране се заснива на чињеници да грана није у троуглу или да постоји неки чвор који је раздвајајући за ту грану. Дефиниције и доказ тврђења су у наставку.

Дефиниција 2.1. Чвор $x \in V(G)$ је раздвајајући за троуглаону грану $uv \in E(G)$ ако

- $x \in N(v) \setminus N(u)$ и $N(u) \cap N(x) = \{v\}$, или симетрично
- $x \in N(u) \setminus N(v)$ и $N(v) \cap N(x) = \{u\}$.



Слика 2.8: Пример раздвајајућег чвора за троугаону грану. За црвену грану црвени чвор јесте, а плави нису раздвајајући.

Пример 2.2. Примери у вези са овом дефиницијом приказани су на слици 2.8. За грану uv

- чвор x јесте раздвајајући, јер је $x \in N(v) \setminus N(u)$ и $N(u) \cap N(x) = \{v\}$;
- чвор y није раздвајајући, због $x \notin N(v) \setminus N(u)$, и
- чвор z није раздвајајући, јер $N(u) \cap N(z) \neq \{v\}$.

Теорема 2.2. Ако је $\text{diam}(G) = 2$, онда \bar{e} није критична ако и само ако

- e није троугаона \bar{e} рана, или
- e је троугаона \bar{e} рана и има раздвајајући чвор.

Доказ. Доказује се најпре да ако су испуњене претпоставке, онда је \bar{e} рана e критична.

- Ако \bar{e} рана $e = ab \in E(G)$ није троугаона, онда је $\text{dist}_{G \setminus e}(a, b) > 2$, $\text{diam}(G \setminus e) > 2 = \text{diam}(G)$, па је \bar{e} рана e критична.
- Ако је \bar{e} рана e троугаона и $x \in V(G)$ је раздвајајући чвор за њу, без смањења општости може се претпоставити да је $x \in N(b) \setminus N(a)$ и $N(a) \cap N(x) = \{b\}$. Из чињенице да је у графу $F := G \setminus ab$ $\text{dist}_F(a, x) \geq 3$ следи да је \bar{e} рана e критична.

Претпоставља се сада да је \bar{e} рана $e = ab \in E(G)$ троугаона и критична; нека је $F := G \setminus ab$. Тада постоје чворови x, y такви да је $\text{dist}_F(x, y) > 2$ и због тога $xy \notin E(F)$. Како је \bar{e} рана e троугаона у графу G , важи једнакост $\text{dist}_F(a, b) = 2$, па је $\{x, y\} \neq \{a, b\}$. Због $\text{diam}(G) = 2$ је $\text{dist}_G(x, y) = 2$; из $\text{dist}_F(x, y) > 2$ следи $\{x, y\} \cap \{a, b\} = \emptyset$. Без смањења општости претпоставља се да је $y \equiv a$; тада због $\text{dist}_G(x, a) = 2$ и због тога што графу F не постоји

чвор суседан и са x и са $y \equiv a$, чворови x и b суседни у графу G . С друге стране, чвор x није суседан ни једном чвору који је суседан a у графу G (осим чвору b), јер би у противном било $\text{dist}_F(x, y) \leq 2$. Према томе, $x \notin N_G(a)$ и $N_G(a) \cap N_G(x) = b$, што значи да је x раздвајајући чвор за грану e . \square

2.3.2 Фанова теорема

У раду [9] доказана је теорема о горњој граници за величину D2 графова реда до 25. Због повезаности са резултатима из наредног поглавља, у наставку се наводи доказ ове теореме.

Нека је G^* граф који се од графа G добија на следећи начин: $V(G^*) = V(G)$ и за свака два чвора $x, y \in V(G)$ важи да грана $xy \in E(G^*)$ постоји ако и само ако $xy \notin E(G)$, а чворови x и y су у графу G повезани јединственим путем дужине 2. За свака два скупа $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ нека $E(V_1, V_2)$, односно $E^*(V_1, V_2)$ означава скуп грана из G , односно G^* , које спајају по један чвор из V_1 са по једним чвором из V_2 . У случају када је $V_1 = V_2$, овај скуп се означава са $E(V_1,)$, односно $E^*(V_1)$, уместо $E(V_1, V_2)$, односно $E^*(V_1, V_2)$. За произвољни чвор $x \in V(G)$ нека је $N(x) = N_G(x)$, $d(x) = |N(x)|$, $N^*(x) = N_{G^*}(x)$ и $d^*(x) = |N^*(x)|$.

Нека (u, v, w) означава неуређену тројку различитих чворова u, v и w . За $j = 0, 1, 3$ нека је

$$T_j = \{(u, v, w) \mid u, v, w \in V(G) \wedge |E(\{u, v, w\})| = j\}, \quad t_j = |T_j|.$$

Поред тога, нека је скуп T_0 подељен у четири подскупа $T_{0,i}, 0 \leq i \leq 3$, где је

$$T_{0,i} = \{(u, v, w) \mid (u, v, w) \in T_0 \wedge |E^*(\{u, v, w\})| = i\}, \quad 0 \leq i \leq 3$$

и нека је

$$t_{0,i} = |T_{0,i}|, 0 \leq i \leq 3.$$

Нека је G било који граф са n чворова и m грана. У наставку се доказују три леме о релацијама између уведених карактеристика графа.

Лема 2.1.

$$\sum_{v \in V(G)} d^2(v) - nm = 3t_3 - t_1 \quad (2.1)$$

Доказ. За произвољну грану $xy \in E(G)$ нека је

$$T_1(xy) = \{(x, y, z) \mid z \in V(G), (x, y, z) \in T_1\}$$

и

$$T_3(xy) = \{(x, y, z) \mid z \in V(G), (x, y, z) \in T_3\}.$$

Очигледно је да за тројку (x, y, z) важи $(x, y, z) \in T_1(xy)$ ако и само ако је $z \in V(G) - [N(x) \cup N(y)]$; важи $(x, y, z) \in T_3(xy)$ ако и само ако је $z \in N(x) \cap N(y)$. Због тога је

$$d(x) + d(y) - |T_3(xy) + T_1(xy)| = n.$$

Сумирањем ове једнакости по свим гранама $xy \in E(G)$ добија се

$$\sum_{v \in V(G)} d^2(v) - 3t_3 + t_1 = nm,$$

односно

$$\sum_{v \in V(G)} d^2(v) - nm = 3t_3 - t_1$$

□

Напомена 2.1. Ако је $3t_3 - t_1 \leq 0$, онда је $\sum_{v \in V(G)} d^2(v) \leq nm$, што имплицира хиџоџезу 3.1. У наставку се показује да је за било који Д2С граф $3t_3 - t_1 \leq t_{0,2} + t_{0,3}$, па се у наставку најпре одређује горња граница за збир $t_{0,2} + t_{0,3}$ за произвољан граф.

Лема 2.2.

$$2t_{0,1} + 4t_{0,2} + 6t_{0,3} = \sum_{v \in V(G)} (d^*(v)(n - 1 - 2d(v))) \quad (2.2)$$

Доказ. За произвољну грану $xy \in E^*(G)$ нека је

$$T_{0,i}(xy) = \{(x, y, z) \mid z \in V(G), (x, y, z) \in T_{0,i}\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Из дефиниције $T_{0,i}$ следи да је услов $(x, y, z) \in T_{0,1} \cup T_{0,2} \cup T_{0,3}$ еквивалентан са условом $z \in V(G) - [N(x) \cup N(y) \cup \{x, y\}]$. Због тога је

$$\left| \bigcup_{i=1}^3 T_{0,i}(xy) \right| = n - 2 - d(x) - d(y) + |N(x) \cap N(y)|.$$

Из дефиниције $E^*(G)$ следи да је $|N(x) \cap N(y)| = 1$, па је

$$|T_{0,1}(xy)| + |T_{0,2}(xy)| + |T_{0,3}(xy)| = n - 1 - d(x) - d(y).$$

Сумирањем по свим гранама $xy \in E^*(G)$ добија се

$$t_{0,1} + 2t_{0,2} + 3t_{0,3} = \frac{1}{2}(n - 1) \sum_{v \in V(G)} d^*(v) - \sum_{v \in V(G)} d^*(v) d(v)$$

У претходној једнакости се користи чињеница да је

$$|E(G^*)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d^*(v)$$

и да је

$$\sum_{xy \in E^*(G)} (d(x) + d(y)) = \sum_{v \in V(G)} d^*(v) d(v),$$

пошто се на левој страни сваки сабирак $d(v)$ броји $d^*(v)$ пута. Множењем једначине са 2 добија се:

$$2t_{0,1} + 4t_{0,2} + 6t_{0,3} = \sum_{v \in V(G)} (d^*(v)(n - 1 - 2d(v)))$$

□

Лема 2.3.

$$6(t_{0,2} + t_{0,3}) \leq \sum_{v \in V(G)} (d^*(v)(2n - 2 - 3d(v) - (d^*(v))^2)). \quad (2.3)$$

Доказ. За неки чвор $x \in V(G)$ нека је

$$T_{0,2}(x) = \{(x, u, w) \mid u, w \in V(G) \text{ тако да } (x, u, w) \in T_{0,2} \text{ и } x \text{ је суседан тачно једној грани у } E^*({x, u, w})\}.$$

Увођењем ознаке $M(x) = V(G) \setminus N[x]$, примећује се да је $N^*(x) \subseteq M(x)$. Нека је

$$B(x) = M(x) \setminus N^*(x).$$

За тројку $(x, u, w) \in T_{0,2}(x)$ по дефиницији скупа $T_{0,2}$ важи $uw \in E^*(N^*(x), B(x))$. Обрнуто, ако је $uw \in E^*(N^*(x), B(x))$ и на пример $u \in N^*(x)$, $w \in B(x)$, онда $ux \in E^*(G)$ и $wx \notin E^*(G)$, па је $(x, u, w) \in T_{0,2}(x)$. Према томе, сумирајући неједнакост

$$T_{0,2}(x) \leq |N^*(x)||B(x)| = d^*(x)(n - 1 - d(x) - d^*(x)),$$

по свим чворовима $x \in V(G)$, добија се

$$2t_{0,2} \leq \sum_{v \in V(G)} (d^*(v)(n - 1 - d(v) - d^*(v))).$$

Комбинујући ово са једнакошћу (2.2) и користећи чињеницу да је $t_{0,1} \geq 0$, добија се

$$6(t_{0,2} + t_{0,3}) \leq \sum_{v \in V(G)} (d^*(v)(2n - 2 - 3d(v) - (d^*(v))^2)).$$

□

Нека је G D2C граф са n чворова и m грана. Нека је $A = (x, y, z) \in T_3$. Посматрајући неку троугаону грану из скупа $E(\{x, y, z\})$, на пример грану xy . Пошто је граф G D2C, у односу на ту грану мора да постоји раздвајајући чвор, тј. чвор $w \in V(G) \setminus \{x, y, z\}$ такав да је $wx \notin E(G)$ и $N(w) \cap N(x) = y$ или $wy \notin E(G)$ и $N(w) \cap N(y) = x$. Ако претпоставља се да је на пример $wx \notin E(G)$ и $N(w) \cap N(x) = y$, онда је $(w, x, z) \in T_1$. У том случају се каже да је тројка A *придружена* тројци $(w, x, z) \in T_1$.

У наставку се показује да никоја два елемента скупа T_3 не могу бити придружена истом елементу скупа T_1 . Претпоставља се супротно, да постоји друга тројка $A' = (x', y', z') \in T_3$ различита од A , која је такође придружена тројци (w, x, z) . Тада је $xz \in E(\{x', y', z'\})$; ако је на пример $x = x'$ и $z = z'$, онда је чвор w суседан чвору y' , па због $N(w) \cap N(x) = y$ важи $y' = y$ и $A' = A$, супротно претпоставци. С друге стране, један чвор не може бити раздвајајући за све три гране троугла, па је сваком елементу скупа T_3 придружено бар два елемента скупа T_1 . Према томе, увођењем ознаке

$$T_3^* = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in T_3 \text{ и } (x, y, z) \text{ је придружен са тачно два елемента скупа } T_1\}.$$

и

$$t_3^* = |T_3^*|,$$

онда је

$$3t_3 - t_1 \leq t_3^*. \quad (2.4)$$

Нека је тројци $(x, y, z) \in T_3^*$ придружено тачно два елемента скупа T_1 , и нека су то нпр. (a, x, z) и (b, y, z) . Тада је $(a, b, z) \in T_0$. Каже се да је тројка (a, b, z) придружена тројци $(x, y, z) \in T_3$. Показује се да је $(a, b, z) \in T_{0,2} \cup T_{0,3}$. Посматра се грану xz ; као што је речено, постоји чвор $w \in V(G) - \{x, y, z\}$, такав да је

- или $wx \notin E(G)$ и $N(w) \cap N(x) = z$,

- или $wz \notin E(G)$ и $N(w) \cap N(z) = x$

Пошто су тројки (x, y, z) придружена тачно два елемента из скупа T_1 и пошто је у првом случају $(w, x, y) \in T_1$, а у другом случају $(w, y, z) \in T_1$, па је $w = b$ и $bz \in E^*(G)$, јер је $wz \in E^*(G)$. На сличан начин показује се да је $az \in E^*(G)$. Тиме је доказано да је $(a, b, c) \in T_{0,2} \cup T_{0,3}$. На основу ове чињенице и једнакости 2.1 добија се да је

$$t_3^* \leq t_{0,2} + t_{0,3}.$$

Комбиновањем са неједнакошћу 2.4 добија се

$$3t_3 - t_1 \leq t_{0,2} + t_{0,3}. \quad (2.5)$$

Теорема 2.3. *Ако је G D2C граф са n чворова и m ивица, онда је:*

- (1) $\sum_{v \in V(G)} d^2(v) \leq \frac{4}{15}n^3$,
- (2) $m \leq \lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$ за $n \leq 24$,
- (3) $m < \frac{1}{4}n^2 + (n^2 - 16.2n + 56)/320$ за $n \geq 25$.

Доказ. (1) Из (2.3) и једнакости $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$ следи да је

$$\begin{aligned} 6(t_{0,2} + t_{0,3}) &\leq \sum_{v \in V(G)} (d^*(v)(2n - 3d(v)) - (d^*(v))^2) \\ &\leq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{4}(2n - 3d(v))^2 \\ &= n^3 - 6mn + \frac{9}{4} \sum_{v \in V(G)} d^2(v). \end{aligned}$$

Користећи (2.1) и (2.5) добија се

$$\sum_{v \in V(G)} d^2(v) - mn \leq \frac{1}{6}n^3 - mn + \frac{9}{24} \sum_{v \in V(G)} d^2(v),$$

односно

$$\sum_{v \in V(G)} d^2(v) \leq \frac{4}{15}n^3,$$

што је и требало доказати.

(2) Пошто је $t_{0,1} \geq 0$ и $t_{0,3} \geq 0$, из (2.2) следи да је

$$4(t_{0,2} + t_{0,3}) \leq \sum_{v \in V(G)} d^*(v)(n - 1 - 2d(v)).$$

Множењем обе стране неједначине са $\frac{5}{2}$ сабирањем са неједнакошћу (2.3) добија се

$$\begin{aligned} 16(t_{0,2} + t_{0,3}) &\leq \sum_{v \in V(G)} (d^*(v)\left(\frac{9}{2}(n-1) - 8d(v)\right) - (d^*(v))^2) \\ &\leq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2}(n-1) - 8d(v)\right)^2 \\ &= \frac{81}{16}(n-1)^2n - 36m(n-1) + 16 \sum_{v \in V(G^*)} d^2(v). \end{aligned}$$

Слично као за претходну неједнакост, коришћењем (2.1) и (2.5) добија се

$$(80n - 144)m \leq \frac{81}{4}(n-1)^2n \quad (2.6)$$

$$= \frac{81}{320}n^2(80n - 144) - 4.05n^2 + 20.25n \quad (2.7)$$

Непосредно се проверава да је за $n \leq 4$ $m \leq \lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$. Због тога се може претпоставити да је $n \geq 5$. Тада је $80n - 144 > 0$ и $20.25n - 4.05n^2 \leq 0$, што заједно са (2.7) даје

$$m \leq \frac{81}{320}n^2 \quad (2.8)$$

Од неједнакости (2.6) се користећи неједнакост (2.8) добија

$$\begin{aligned} 320nm &\leq 81n^3 - 162n^2 + 81n + 576m \\ &\leq 81n^3 - 16.2n^2 + 81n, \end{aligned}$$

односно

$$m \leq \frac{1}{4}n^2 + (n^2 - 16.2n + 81)/320. \quad (2.9)$$

Ако је n паран број и $n \leq 24$, онда је $\lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor = \frac{1}{4}n^2$ и $(n^2 - 16.2n + 81)/320 < \frac{3}{4}$, па како је m цео број из (2.9) следи да је $m \leq \lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$. Ако је n непаран број и $n \leq 23$, онда је $\frac{1}{4}n^2 = \lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor + \frac{1}{4}$, али је $(n^2 - 16.2n + 81)/320 < \frac{3}{4}$, па и даље важи $m \leq \lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$. Према томе, за свако $n \leq 24$ важи $m \leq \lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$, што је и требало доказати.

Напомена 2.2. Нејосредно се проверава да неједнакости (2.6) за $n = 26$ имплицитно неједнакости $m \leq \lfloor \frac{1}{4}n^2 \rfloor$.

(3) Примећује се да за $n \geq 25$ важи $(80n - 144) > 0$. Уколико се обе стране неједнакости (2.6) поделе са $(80n - 144)$, добија се

$$m \leq \frac{81}{320}n^2 - \frac{16.2}{320}n + \frac{51.84}{320} + \frac{93.312}{320n - 576}.$$

Како за $n \geq 25$ важи неједнакост

$$\frac{93.312}{320n - 576} < \frac{4.1}{320},$$

долази се до неједнакости

$$m < \frac{1}{4}n^2 + (n^2 - 16.2n + 56)/320.$$

Тиме је доказ теореме завршен. □

2.3.3 Теорема Ердеша и Рењија

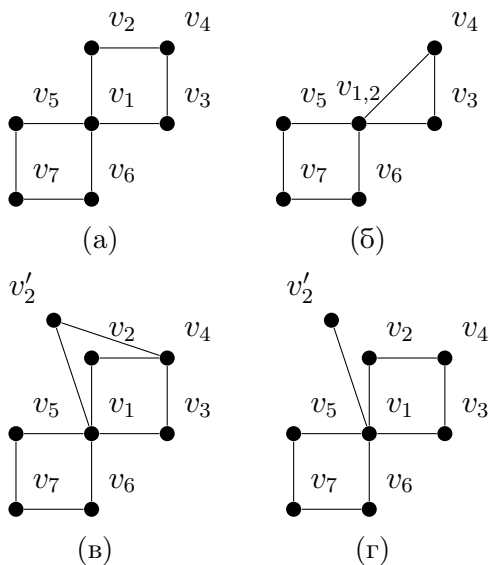
Ердеш (P. Erdős) и Рењи (A. Rényi) решили су следећи екстремални проблем: колико најмање грана m има граф G реда n дијаметра 2 који нема чвор суседан свим осталим чворовима? Ако је граф G повезан, онда је $m \geq n - 1$. Ако је $m = n - 1$, онда је G стабло. Једино стабло реда $n \geq 3$ дијаметра 2 је звезда S_n . Дакле, тачно је следеће тривијално запажање.

Запажање 2.1. Ако је G граф реда n дијаметра 2 величине m , онда је $m \geq n - 1$, са једнакошћу ако и само ако је G звезда S_n .

Доминирајући чвор је чвор који је суседан свим осталим чворовима у графу. Ако се искључи могућност да граф има доминирајући чвор, проблем постаје интересантнији и доња граница за величину графа се повећава. Ердеш и Рењи доказали су класичан резултат о минималној величини графа дијаметра 2 без доминирајућег чвора.

Теорема 2.4. [Теорема Ердеша и Рењија] Ако је G граф дијаметра 2 реда n и величине m , без доминирајућег чвора, онда је $m \geq 2n - 5$.

Пре доказа теореме и карактеризације графова који достижу доњу границу из формулације теореме, уводе се неопходни појмови и доказује неколико помоћних тврђења.

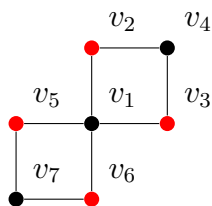


Слика 2.9: (а) Оригинални граф; (б) граф који настаје обједињавањем чворова v_1 и v_2 у чвор $v_{1,2}$; (в) граф који настаје дуплирањем чвора v_2 степена 2 креирањем новог чвора v'_2 са истим суседима; (г) граф који настаје деструктивним дуплирањем чвора v_2 креирањем новог чвора v'_2 и брисањем гране $v_4v'_2$

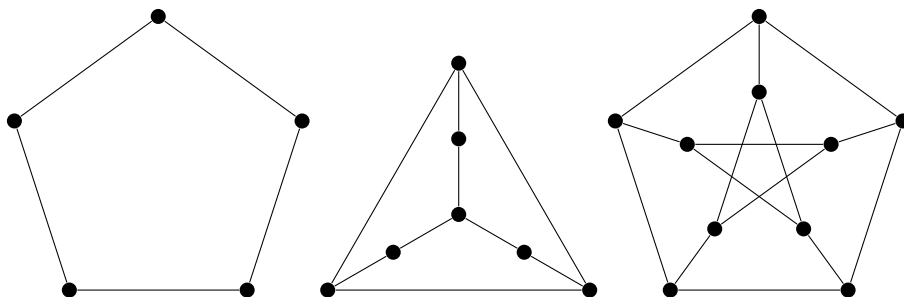
Обједињавање два различита чвора u и v у графу G је поступак којим се из графа G уклањају та два чвора и замењују се новим чвором суседним са сваким чвором из скупа $N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$ (видети пример на слици 2.9б). Дуплирање чвора v у графу G је поступак додавања новог чвора у G суседног са свим чворовима из скупа $N(v)$. Дуплирање чвора степена 2 у графу је поступак дуплирања било ког чвора степена 2 (видети пример на слици 2.9в). Деструктивно дуплирање чвора v у графу G је поступак дуплирања чвора v додавањем новог чвора v' , и затим брисањем једне или више грана суседних са чворовима v и/или v' (видети пример на слици 2.9г).

Независни скупи чворова у графу је скуп чворова за који је одговарајући индуковани граф празан граф, видети пример на слици 2.10. Грана у графу је доминирајућа грана ако је сваки чвор у графу суседан барем једном крају те гране.

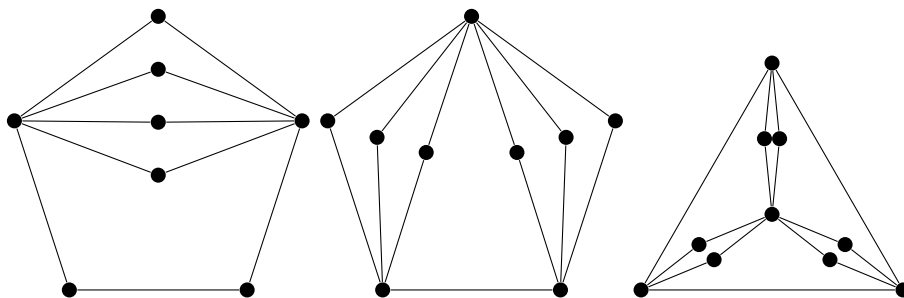
Дефиниција 2.2. Фамилија графова \mathcal{G} је фамилија графова која садржи графове C_5 , $G_{18,3}$, Петерсенов граф (слика 2.11) и која је затворена за операцију дуплирања чворова степена 2.



Слика 2.10: Пример независног скупа чворова у графу. Црвени чворови чине независни скуп.



Слика 2.11: PD2C графови из фамилије \mathcal{G} чија је величина $2n - 5$: C_5 , граф $G_{18.3}$ и Петерсенов граф.



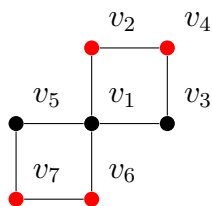
Слика 2.12: Неки PD2C графови из фамилије \mathcal{G} добијени дуплирањем чворова степена 2.

Петерсенов граф нема чворове степена 2. Репрезентативни примери графова добијених дуплирањем чворова степена 2 у графовима C_5 , односно $G_{18.3}$, приказани су на слици 2.12.

Графова из фамилије $G \in \mathcal{G}$ немају доминирајућу грану, па је тачно следеће запажање.

Запажање 2.2. Ако је $G \in \mathcal{G}$ и $u, v \in V(G)$ су два суседна чвора, онда граф који се добија од G додавањем чвора w са иранама uw и vw има дијаметар 3.

Обједињавање два чвора у графу не повећава растојање између било која два чвора, па је тачно следеће запажање.



Слика 2.13: Пример графа у коме је издвојен скуп чворова X и Y . Чворови који припадају скупу X су обојени црвеном бојом, а чворови који припадају скупу Y црном бојом. Скупови чворова X и Y су доминирајући у графу.

Запажање 2.3. Дијаметар графа добијеног обједињавањем два чвора није већи од дијаметра полазног графа.

Наредна лема показује да деструктивно дуплирање чвора у графу из фамилије \mathcal{G} повећава дијаметар графа.

Лема 2.4. Ако је $G \in \mathcal{G}$ и ако је граф G' добијен од G деструктивним дуплирањем неког чвора, онда је $\text{diam}(G') \geq 3$.

Доказ. Дуплирањем чвора у графу $G \in \mathcal{G}$ се добија граф G'' који је D2C. Граф G' се добија вађењем неке гране из G'' . Уклањање било које гране G'' повећава дијаметар, па је $\text{diam}(G') \geq 3$. □

Нека $N_G^X(v) = N_G(v) \cap X$ означава подскуп скупа $X \subseteq V(G)$ од чворова суседних чвору v , и нека је $d_G^X(v) = |N_G^X(v)|$. Скуп $X \subseteq V(G)$ је доминирајући скуп у графу G ако је $N[X] = V(G)$. Нека $G[X, Y]$ означава скуп грана чији је један крај у скупу X , а други у скупу Y ; ако је из контекста јасно који је граф у питању, користи се упрошћена ознака $[X, Y]$ (слика 2.13). У даљем тексту се уместо $N_G(X)$, $N_G[X]$, $N_G^X(v)$ и $d_G^X(v)$ користе једноставније ознаке $N(X)$, $N[X]$, $N_X(v)$ и $d_X(v)$ уколико је из контекста јасно који је граф у питању.

Да би се доказала теорема Ердеша и Рењија, полази се од претпоставке да она није тачна, тј. да постоје графови дијаметра 2 реда n величине $m < 2n - 5$ без доминирајућег чвора, или графови величине $m = 2n - 5$ који не припадају фамилији \mathcal{G} . Поред тога, претпоставља се да је G један од таквих графова најмањег реда. Наредне четири леме односе се на такав граф G .

Лема 2.5. $\Delta(G) \leq n - 3$

Доказ. Из чињенице да граф G нема доминирајући чвор следи да је $\Delta(G) \leq n-2$. Претпоставља се да је $\Delta(G) = n-2$. Нека је v чвор са највећим степеном у G , нека је $W = N(v) = \{w_1, \dots, w_{n-2}\}$, и нека је x чвор који није суседан чвору v . За свако $i \in [1, \dots, n-2]$ нека је $e_i = vw_i \in E(G) = E$. Нека је $f_i = w_ix$ ако $w_ix \in E$; у противном, ако $w_ix \notin E$, нека је $f_i = w_iw$, где је чвор w заједнички сусед чворова w_i и x . Запажа се да је свака грана f_i једнозначно одређена. Због тога је $m \geq |\{e_1, \dots, e_{n-2}, f_1, \dots, f_{n-2}\}| = 2n-4$, што је контрадикција. Према томе, $\Delta(G) \leq n-3$. \square

Лема 2.6. *Претпоставља се да у графу G постоји чвор $x \in V$ такав да је $d(x) = 2$. Нека је $N(x) = \{x_1, x_2\}$ и нека је $G' = G - x$. Тада је $d_{G'}(x_1, x_2) \geq 3$.*

Доказ. Претпоставиља се супротно, да је $d_{G'}(x_1, x_2) \leq 2$. Нека је $n' = |V(G')|$, а $m' = |E(G')|$. Ако граф G' има доминирајући чвор, тада је чвор x степена барем $n-2$ у графу G , што је у супротности са лемом 2.5. Према томе, граф G' нема доминирајући чвор. Даље, из $d_{G'}(x_1, x_2) \leq 2$ следи $\text{diam}(G') \leq \text{diam}(G) = 2$. Пошто граф G' нема доминирајући чвор, G' није комплетан граф, па је $\text{diam}(G') \geq 2$. Према томе, $\text{diam}(G') = 2$. Из претпоставке да је G контрапример за теорему најмањег реда и $n' = n-1$, следи да је $m' \geq 2n'-5$, при чему једнакост важи ако и само ако је $G \in \mathcal{G}$. С обзиром да је граф G изабран тако да је $m \leq 2n-5$, добија се да је

$$m' = m - 2 \leq (2n - 5) - 2 = 2n' - 5, m' = 2n' - 5$$

и $G' \in \mathcal{G}$. Ако би било $d_{G'}(x_1, x_2) = 1$, тј. $x_1x_2 \in E$ онда би се граф G могао добити од G' додавањем чвора x и гране xx_1 и xx_2 . Овако добијен граф морао би бити дијаметра 3 (запажање 2.1), што је контрадикција, па је $d_{G'}(x_1, x_2) = 2$. Нека је $x' \in N_{G'}(x_1) \cap N_{G'}(x_2)$ заједнички сусед чворова x_1 и x_2 у графу G' . Ако $d_{G'}(x') = 2$, онда се граф G може добити од графа G' дуплирањем чвора x' , због чега је $G \in \mathcal{G}$, што је контрадикција. Према томе $d_{G'}(x') \geq 3$. У овом случају граф G се може добити од графа G' деструктивним дуплирањем чвора x' , па је према леми 2.4 $\text{diam}(G) \geq 3$, поново контрадикција. \square

Лема 2.7. $\delta(G) = 3$

Доказ. Ако би било $\delta(G) \geq 4$, онда би збир степена свих чворова у графу G био бар $4n$ и $m \geq 2n$, супротно претпоставци. Према томе, $\delta(G) \leq 3$. Нека је x чвор са најмањим степеном у G . Пошто је $\text{diam}(G) = 2$, граф G је повезан,

па је $d(x) \in \{1, 2, 3\}$. Ако би било $d(x) = 1$, онда би неки сусед чвора x био доминирајући чвор, што је контрадикција, па је $d(x) \in \{2, 3\}$

Претпоставиља се да је $d(x) = 2$ и да је $N(x) = \{x_1, x_2\}$. На основу леме 2.6 је $x_1x_2 \notin E$ и $N(x_1) \cap N(x_2) = \{x\}$. За сваки чвор $u \in V \setminus \{x, x_1, x_2\}$ је $\text{dist}(u, x) \leq 2$, па је чвор u суседан или чвору x_1 или чвору x_2 (али не са оба ова чвора). Ако је $X_i = N(x_i) \setminus \{x\}$, $i \in \{1, 2\}$, онда је $V = X_1 \cup X_2 \cup \{x, x_1, x_2\}$ и $|X_1| + |X_2| = n - 3$. Ако је $d(u) \geq 3$ за сваки чвор $u \in X_1 \cup X_2$, онда је

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \sum_{u \in V} d(u) = \frac{1}{2} \left(d(x) + d(x_1) + d(x_2) + \sum_{u \in X_1} d(u) + \sum_{u \in X_2} d(u) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} (2 + (|X_1| + 1) + (|X_2| + 1) + 3|X_1| + 3|X_2|) \\ &= 2(|X_1| + |X_2| + 1) = 2n - 4, \end{aligned}$$

што је контрадикција. Дакле, неки чвор из скупа $X_1 \cup X_2$ је степена 2 у G . У таквом графу постоји чвор $y_1 \in X_1$ такав да је $d(y_1) = 2$. Нека је $N(y_1) = \{x_1, y_2\}$; пошто $\text{dist}(x_2, y_1)$, мора да буде $y_2 \in X_2$.

Претпоставиља се да је $d(y_2) = 2$. Ако постоји чвор $z \in (X_1 \cup X_2) \setminus \{y_1, y_2\}$, онда мора да буде $\text{dist}(y_1, z) = \text{dist}(y_2, z) = 2$, што за последицу има да је $z \in N(x_1) \cap N(x_2) = \{x\}$, што је контрадикција. Дакле, $|X_1| = |X_2| = 1$ и $G = C_5 \in \mathcal{G}$, што је такође контрадикција. Закључује се да је $d(y_2) \geq 3$. Нека је $z_2 \in N(y_2) \setminus \{x_2, y_1\}$. Пошто је $d(y_1) = 2$, на основу леме 2.6 закључује се да је $d_{G-y_1}(x_1, y_2) \geq 3$, и даље $z_2 \notin X_1$. Према томе, $z_2 \in X_2$. Даље, због $\text{dist}(x_1, x_2) \leq 2$ и $(x_1, x_2) \notin E$, постоји чвор $z_1 \in X_1 \setminus \{y_1\}$, такав да $z_1 \in N(x_1) \cap N(x_2)$. Пошто је $d(y_1) = 2$, на основу леме 2.6 закључује се $y_2z_1 \notin E$. Нека је $X'_i = X_i \setminus \{y_i, z_i\}$, $i \in \{1, 2\}$. Запажа се да је $n = |X'_1| + |X'_2| + 7$. Нека је $m' = |E(G[\{x, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2\}])|$; запажа се да је $m' = 9$

Претпоставља се да је $d(z_1) = 2$. Пошто је $d(x) = d(y_1) = d(z_1) = 2$, на основу леме 2.6 закључује се да не постоји чвор у скупу X'_1 , који је суседан неком од чворова из скупа $\{x_2, y_2, z_2\}$. Даље, пошто је $\text{diam}(G) = 2$, скупови $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, y_2\}$ и $\{x_1, z_2\}$ су доминирајући у графу G . Због тога, ако је $u \in X'_2$, онда је $ux_1 \notin E$, и $\{ux_2, uy_2, uz_2\} \subseteq E$. Дакле, $|[X'_2, \{x_2, y_2, z_2\}]| = 3|X'_2|$. Ако је $u \in X'_1$, онда $ux_1 \in E$ и због $\text{dist}(u, x_2) \leq 2$ за неки чвор $u' \in X'_2$ важи $uu' \in E$. Према томе, $|[X'_1, X'_2 \cup \{x_1\}]| \geq 2|X'_1|$, па ако је $X'_1 \neq \emptyset$ онда важи $X'_2 \neq \emptyset$, или еквивалентно, ако је $X'_2 = \emptyset$, онда је $X'_1 = \emptyset$. Пребројавањем грана у графу G ,

добија се

$$\begin{aligned} m &\geq |[X'_1, X'_2 \cup \{x_1\}]| + |[X'_2, \{x_2, y_2, z_2\}]| + m' \\ &\geq 2|X'_1| + 3|X'_2| + 9 \\ &= 2(|X'_1| + |X'_2| + 7) - 5 + |X'_2| = 2n - 5 + |X'_2|. \end{aligned}$$

Међутим, из $m \leq 2n - 5$ следи да је $m = 2n - 5$ и $X'_2 = \emptyset$. Из тога даље следи $X'_1 = \emptyset$. Међутим, тада је $G = G_{18.3} \in \mathcal{G}$, што је контрадикција. Дакле, $d(z_1) \geq 3$.

Нека је e грана суседна чвору z_1 , различита од x_1z_1 и z_1z_2 . Пошто је $d(x) = d(y_1) = 2$, на основу леме 2.6 закључује се да ниједан чвор из скупа X'_1 није суседан ни једном од чворова x_2, y_2 . Даље, пошто је $\text{diam}(G) = 2$, оба скупа $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_1, y_2\}$ су доминирајући у G . Према томе, ако је $u \in X'_2$, онда $ux_1 \notin E$, па је $\{ux_2, uy_2\} \subseteq E$. Дакле, $|[X'_2, \{x_2, y_2\}]| = 2|X'_2|$. Такође, ако је $u \in X'_1$, онда је $ux_1 \in E$, па је због $\text{dist}(u, x_2) \leq 2$ за неки чвор $u' \in X'_2 \cup \{z_2\}$ важи да је $uu' \in E$. Према томе, $|[X'_1, X'_2 \cup \{x_1, x_2\}]| \geq 2|X'_1|$. Пребројавањем грана у графу G , добија се

$$\begin{aligned} m &\geq |[X'_1, X'_2 \cup \{x_1, x_2\}]| + |[X'_2, \{x_2, y_2\}]| + m' + |\{e\}| \\ &\geq 2|X'_1| + 2|X'_2| + 10 = 2(|X'_1| + |X'_2| + 7) - 4 = 2n - 4, \end{aligned}$$

што је контрадикција. Тиме је жељено тврђење доказано. \square

Лема 2.8. Нека је u чвор са најмањим степеном у графу G , $U = N(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ и нека је $W = V \setminus N[v]$. За сваки чвор $w \in W$ важи $d(w) = 3$ и $d_U(w) = 1$. Поред тога, U је независан скуп.

Доказ. За сваки чвор $w \in W$ важи $\text{dist}(u, w) = 2$, па је $d_U(w) \geq 1$. Због тога је $|[U, W]| \geq |W| = n - 4$, са једнакошћу ако и само ако је $d_U(w) = 1$ за сваки чвор $w \in W$. Нека је m' број грана у индукованом подграфу одређеном скупом U . Сумирајући степене свих чворова из скупа U , узимајући у обзир три гране из чвора u , m' грана из чворова у $G[U]$, и на крају гране између U и W , добија се

$$\sum_{v \in U} d(v) = d_U(u) + 2m' + |[U, W]| \geq 3 + 2m' + (n - 4) = n - 1 + 2m',$$

са једнакошћу ако и само ако је $|[U, W]| = n - 4$. Као што је речено, ово важи ако и само ако $d_U(w) = 1$ за сваки чвор $w \in W$. Сабирањем степенова свих

чворова из скупа W , добија се

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq \delta(G)|W| = 3(n-4) = 3n-12,$$

са једнакошћу ако и само ако је $d(w) = 3$ за сваки чвор $w \in W$. Како је $m \leq 2n-5$, добија се

$$\begin{aligned} 4n-10 &\geq 2m = \sum_{v \in V} d(v) = d(u) + \sum_{v \in U} d(v) + \sum_{v \in W} d(v) \\ &\geq 3 + (n-1+2m') + (3n-12) = 4n-10+2m' \end{aligned}$$

С обзиром да је $m' \geq 0$, закључује се да је $m' = 0$ и да једнакости важе дуж овог низа неједнакости. Према томе, $d(w) = 3$ и $d_U(w) = 1$ за све чворове $w \in W$, што је требало доказати. Даље, из $m' = 0$ следи да је U независан скуп. \square

Прелази се на доказ теореме.

Доказ. Нека је $W_i = N_W(u_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Из леме 2.7 следи да су свака два од скупова W_1 , W_2 и W_3 дисјунктни. Даље, пошто је U независан скуп и пошто је $\delta(G) = 3$, закључује се да је $|W_i| \geq 2$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Нека је $w_1 \in W_1$. За $i \in \{2, 3\}$ је $u_i w_1 \notin E$, па чвор w_1 има суседа, на пример чвор x_i , у скупу W_i . Примећује се да је $N(w_1) = \{u_1, x_2, x_3\}$. Нека је $w_2 \in W_2 \setminus \{x_2\}$. Због $w_2 \notin N(w_1)$ је $\text{dist}(w_1, w_2) = 2$ и чвор w_2 је суседан неком чвору из скупа $N(w_1) = \{u_1, x_2, x_3\}$. Јасно је да је $u_1 w_2 \notin E$. Ако је $w_2 x_2 \in E$, онда је $N(x_2) = \{u_2, w_1, w_2\}$, и $\text{dist}(u_3, x_2) = 3$, што је контрадикција. Дакле, $w_2 x_3 \in E$. Сада је $N(x_3) = \{u_3, w_1, w_2\}$. Због $u_3 x_2 \notin E$ је $\text{dist}(u_3, x_2) = 2$. Нека је $w_3 \in N(u_3) \cap N(x_2)$; при томе је $w_3 \notin \{u, x_3\}$. Слично, $u_1 w_2 \notin E$; нека је $x_1 \in N(u_1) \cap N(w_2)$; при томе важи $x_1 \in \{u, w_1\}$. Сада је $N(x_2) = \{u_2, w_1, w_3\}$ и $N(w_2) = \{u_2, x_1, x_3\}$. Пошто је $x_1 x_2 \notin E$, закључује се да је $\text{dist}(x_1, x_2) = 2$ и због тога $x_1 w_3 \in E$.

Претпоставља се да је $d(u_i) \geq 4$, $i \in \{1, 2, 3\}$, и да је на пример $d(u_1) \geq 4$. Нека је $y_1 \in W \setminus \{w_1, x_1\}$. Тада је $y_1 x_2 \notin E$ и чвор y_1 није суседан ни једном чвору из скупа $N(x_2) = \{u_2, w_1, w_3\}$, пошто је $y_1 u_2 \notin E$, $N(w_1) = \{u_1, x_2, x_3\}$ и $N(w_3) = \{u_3, x_1, x_2\}$. Међутим, тада је $\text{dist}(y_1, x_2) > 2$, што је контрадикција. Дакле, за сваки чвор $v \in V$ важи $d(v) = 3$ и G је Петерсенов граф. Али тада је $G \in \mathcal{G}$, што је опет контрадикција. Закључак је да граф G који задовољава наведене услове не постоји, чиме је завршен доказ теореме. \square

2.4 Неке фамилије D2C графова

Описују се две фамилије графова које су еквивалентне класи D2C графова: фамилија графова засићених троугловима, и фамилија самоцентрираних графова. Поред тога, описана је конструкција која полазећи од произвољног D2C графа без троуглова даје бесконачну фамилију D2C графова без троуглова.

2.4.1 Графови засићени троугловима

У наставку су описани графови засићени троугловима, за које је у раду [5] доказано да су уствари D2C графови.

Разапињући подграф је подграф који настаје искључиво брисањем грана. Граф G је *засићен троугловима*, у даљем тексту *засићени граф*, ако се додавањем било које гране добија граф са већим бројем троуглова. Комплетан граф није засићен, јер се у њега не може додати грана. Додавањем било које гране у засићени граф добија се граф са бар једним троуглом више. Према томе, било који засићени граф је D2 граф. Важи и обрнуто: сваки D2 граф је засићен.

Минимални засићени граф је граф који је засићен троугловима, такав да ни један његов разапињући подграф није засићен троугловима. Другим речима, уклањањем било које гране граф губи својство засићености троугловима.

Теорема 2.5. *Граф је минимални засићени граф ако и само ако је D2C граф.*

Доказ. Нека је граф G минимални граф засићен троугловима.

- Претпоставља се супротно, да граф G није дијаметра 2. Тада постоје чворови u и v такви да је $\text{dist}_G(u, v) > 2$. Како је G минимални граф засићен троугловима, додавање гране uv повећава број троуглова; нека је u, v, x, u новодобијени троугао. Међутим, тада је $\text{dist}_G(u, v) = 2$, супротно претпоставци. Према томе, $\text{diam}(G) = 2$.
- Предпоставља се даље да G није D2C граф, тј. да постоји нека грана uv , чије уклањање не доводи до повећања дијаметра. У графу $F = G - uv$ по претпоставци постоје чворови x и y такви да додавање гране xy не повећава број троуглова у графу F . Тада додавање гране vy у граф G

не повећава број троуглова, супротно претпоставци да је G минимални граф засићен троугловима.

Претпоставља се сада да је G D2C граф. Из дефиниције следи да је сваки D2 граф засићен, па је G засићен. Уклањање било које гране из D2C графа повећава дијаметар, па граф губи својство засићености, што значи да је G минимални засићени граф. \square

Важна потфамилија минималних засићених графова (а тиме и D2C графова) је фамилија *минималних графова без троуглова* — графова који немају троуглове, али се после додавања било које гране, у њима појављује неки троугао.

2.4.2 Минимални самоцентрирани графови

У наставку су описани самоцентрирани графови, видети рад [16].

Унија $G \nabla H$ два графа G и H настаје додавањем гране између сваког чвора из G и сваког чвора из H . Специјално, v -конус над графом G је унија графа G и празног графа реда 1 који има само чвор v .

Тврђење 2.1. *Унија $G \nabla H$ је D2C граф ако и само ако су G и H празни графови и ред $G \nabla H$ је бар 3.*

Доказ. Ако су G и H празни графови и G има барем 2 чвора, онда је $\text{diam}(G \nabla H) = 2$. Уклањањем гране $uv \in E(G \nabla H)$ из таквог графа добија се $d_{G \nabla H - uv}(u, v) > 2$, што значи да је $G \nabla H$ D2C граф.

Претпоставља се сада да је $G \nabla H$ D2C граф. Пошто је $\text{diam}(G \nabla H) = 2$, бар један од графова G и H има више од једног чвора. Претпоставља се да нпр. граф G садржи неку грану uv . Тада је

$$d_{G \nabla H - uv}(a, b) \begin{cases} = 1 & \text{ако тачно један од чворова } a, b \text{ припада } V(G), \\ \leq 2 & \text{у противном,} \end{cases}$$

што значи да $G \nabla H$ није D2C граф, тј. изведена је контрадикција. \square

Последица 2.1. *Тачна су следећа тврђења:*

- (1) *конус је D2C граф ако и само ако је звезда са бар 3 чвора.*
- (2) *сшабло је D2C граф ако и само ако је звезда са бар 3 чвора.*

Доказ. Последица 2.1 је директна последица тврђења 2.1. У вези са тврђењем (2), запажа се да је дијаметар стабла које нема доминирајући чвор бар 3. Заиста, једина стабла која су дијаметра 2 су звезде, притом звезда је D2C граф. Такође, једини конуси који су D2C графови су звезде, остали конуси имају звезду као подграф па нису D2C. Према томе, дијаметар стабла је 2 ако и само ако је стабло звезда са бар три чвора. Поред тога, таква звезда је D2C граф. \square

Ексцентрицитет $\text{ecc}(v)$ чвора v је његова највећа удаљеност од неког другог чвора у графу. Граф је *самоцентриран* ако сваки његов чвор има исти ексцентрицитет. *Пречник графа* је најмањи ексцентрицитет његових чворова. *Минимални самоцентрирани граф* је самоцентрирани граф у коме уклањање било које гране доводи до тога да граф више није самоцентриран. Граф је *минимални d -самоцентрирани граф* ако је самоцентрирани граф и има дијаметар d .

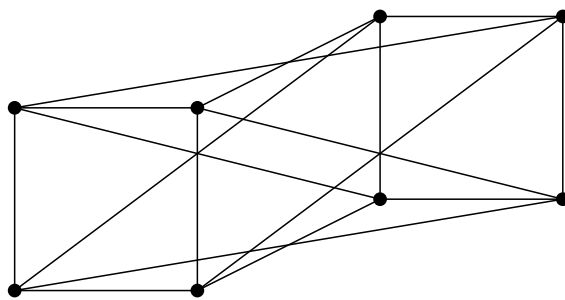
Тврђење 2.2. *Сваки минимални 2-самоцентрирани граф је D2C. Обрнуто, сваки D2C граф који није звезда је минимални 2-самоцентрирани граф.*

Доказ. Нека је G минимални 2-самоцентрирани граф. Тада је по дефиницији $\text{diam}(G) = 2$. Поред тога, пошто је G минимални 2-самоцентрирани граф, закључује се да уклањање било које гране графа повећава дијаметар, па је G D2C граф.

Нека је сада G D2C граф. Ако је G звезда, онда је $r(G) = 1$, што значи да G није минимални 2-самоцентрирани граф. Ако G није звезда, онда G према последици 2.1 није конус, што значи да је $r(G) \neq 1$. С обзиром да је $r(G) \leq \text{diam}(G) = 2$, следи да је $r(G) = \text{diam}(G)$, па је G самоцентрирани граф дијаметра 2. Ако се претпостави да G није минимални 2-самоцентрирани граф, онда постоји грана e таква да је $G - e$ самоцентриран, и то дијаметра 2. Међутим, $\text{diam}(G) = \text{diam}(G - e)$ је у супротности са полазном претпоставком да је G D2C граф. Према томе, G је минимални 2-самоцентрирани граф, чиме је доказ је завршен. \square

2.4.3 Бесконачна фамилија G^{\odot_s}

У наставку се разматра фамилија G^{\odot_s} , која је описана у раду [16].



Слика 2.14: Граф $C_4^{(2)}$.

Ако је G граф са скупом чворова $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ и $s \in \mathbb{N}$, граф $G^{(s)}$ има скуп чворова $V(G^{(s)}) = \{(u_p, v) : 1 \leq p \leq n, 1 \leq v \leq s\}$, при чему су чворови (a, b) и (c, d) суседни ако и само су чворови a и c суседни у G . Очигледно је $G \cong G^{(1)}$. На слици 2.14 приказан је граф $C_4^{(2)}$.

Тврђење 2.3. *Ако је G D2C граф без троуглова, онда је за свако $s \in \mathbb{N}$ граф $G^{(s)}$ шакође D2C граф без троуглова.*

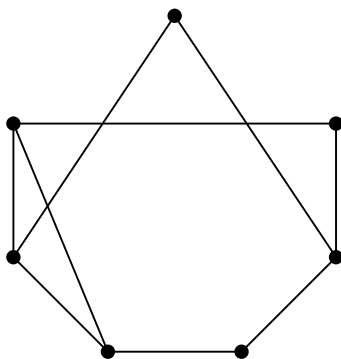
Доказ. Претпоставиља се да у графу $G^{(s)}$ постоји троугао са чворовима (a, b) , (c, d) и (e, f) . По дефиницији су тада чворови a, c, e суседни у графу G , супротно претпоставци да у графу G нема троуглова.

Ако је $\text{diam}(G^{(s)}) > 2$, онда не постоје несуседни чворови (a, b) и (c, d) такви да немају заједничког суседа. Другим речима, сваки чвор $(e, f) \notin \{(a, b), (c, d)\}$ је суседан највише једном од ова два чвора, што значи да је чвор e суседан највише једном од два чвора a, c у G , из чега следи да је $d_G(a, c) > 2$, супротно претпоставци.

Претпоставиља се да се уклањањем гране између нпр. чворова (a, b) и (c, d) не добија граф дијаметра 2. То онда значи да је $d_{G^{(s)} - \{(a, b), (c, d)\}}((a, b), (c, d)) = 2$. Другим речима, ова два чвора имају заједничког суседа у $G^{(s)} - (a, b)(c, d)$ и $G^{(s)}$, али је немогуће да постоји троугао у $G^{(s)}$, па је то контрадикција. \square

Напомена 2.3. *Да је претпоставка да граф G нема троуглове битна у претходном доказу показује пример на слици 2.15. Граф G је D2C граф и испуњен је услов $s \geq 2$. Уклањањем гране између чворова (a, b) и (c, b) , где су a, c чворови у графу G који су део троугла, долази се до графа дијаметра 2, што значи да $G^{(s)}$ није D2C граф.*

Тврђење 2.3 омогућује конструкцију бесконачних фамилија D2C графова. Довољно је одабрати неки D2C граф G без троуглова, после чега се за свако



Слика 2.15: Графа који се користи у напомени 2.3.

$s \in \mathbb{N}$ добијају различити D2C графови $G^{(s)}$; добијени графови такође немају троуглове. Наредна последица даје еквивалентни опис ове конструкције.

Последица 2.2. *Нека је G D2C граф без троуглова. За свако $k \geq 0$ граф који се добија следећим итеративним постројењем*

$$\begin{cases} G_0 \cong G, \\ G_{k+1} \cong G_k^{(s)}, \text{ за } s \geq 2, \end{cases}$$

је D2C граф без троуглова.

Доказ. Резултат је директна последица тврђења 2.3 према коме, ако је G_k D2C граф без троуглова, онда је и $G_{k+1} \cong G_k^{(s)}$ D2C граф без троуглова. \square

Глава 3

Критични графови дијаметра 2 реда до 13

У овом поглављу описано је генерисање D2C графова филтрирањем списка свих неизоморфних повезаних графова у оквиру програма *geng* [3]. У програм су додати тестови дијаметра и критичности. Овим приступом добијени су сви D2C графови реда до 13, што је искорак у односу на досадашње резултате — у претходном раду [13] објављен је списак D2C графова реда до 10. Описани су и анализирани добијени резултати. Проверено је неколико хипотеза о највећем броју грана у D2C графовима, од којих је за једну пронађен контрапример.

3.1 Добијање критичних графова филтрирањем

За добијање канонског облика свих неизоморфних графова користи се скуп алата из пакета *nauty*. Овај пакет има могућност обраде графова у неколико подржаних формата. У наставку се описује начин интеграције теста дијаметра и критичности у програм *geng*, који је део наведеног пакета. Поред тога, разматра се могућност паралелизације извршавања.

3.1.1 Формат *gb*

Један од подржаних формата у програму *geng* је формат *graph6* (скр. *gb*). Формат *gb* за представљање графова користи 64 ASCII карактера од знака „?” до знака „~”. Сваки знак представља низ од шест битова, тако да знак

$$\begin{array}{c}
 \text{FF??Fw} \rightarrow \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \right|
 \end{array}
 \end{array}$$

Слика 3.1: Претварања формата gb у матрицу повезаности

„?” представља низ битова $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$, а знак „~” представља низ битова $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$. За (неусмерени) граф G који треба представити у формату gb најпре се формира низ битова конкатенацијом битова из доњег троугла (симетричне) матрице повезаности, врста по врста, с лева на десно. На крај низа додаје се потребан број нула, да би дужина низа битова била дељива са 6.

Приказ графа у формату gb увек има бар два ASCII карактера. Први кодира ред графа, а остали карактери кодирају низ бита из доњег троугла матрице повезаности. Пошто је сваки карактер представљен са шест битова, максимални ред графа који се може представити у формату gb је 63.

Пример 3.1. На слици 3.1 приказано је одређивање матрице повезаности графа чија је представљава формату gb "FF??Fw".

3.1.2 Тест дијаметра

У оквиру провере да ли је дијаметар графа 2 користи се варијанта алгорита BFS , са ограничењем дубине на 2, чиме се за изабрани чвор v одређује скуп $N_2(v)$. За задати граф $G = (V, E)$ и чвор $v \in V = V(G)$, скуп $N_2(v)$ графа може се ефикасно одредити ако је граф представљен низом A целих бројева, чије бинарне цифре одговарају врстама матрице повезаности. Пример овакве структуре података приказан је на слици 3.2.

Услов $\text{diam}(G) = 2$ еквивалентан је тада услову $\bigvee_{w \in N(v)} A_w = 2^n - 1$, јер врсти од свих јединица одговара број $2^n - 1$. На слици 3.3 приказан је код алгорита $N2(A, n, v)$ који реализује овај услов. У том коду $\text{Bit}(m, i)$ означава i -ти бит броја m , при чему је индекс најнижег бита 0. Променљива $N2v$ представља скуп $N_2[v]$, а број 2^v одговара врсти са једном јединицом на по-

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 126 \end{array} \end{array}$$

Слика 3.2: Пример представљања матрице повезаности низом целих бројева чије бинарне цифре су одговарајуће врсте матрице повезаности.

```
// A[n] - низ бројева који
// представљају матрицу
// повезаности графа G = (V, E)
// n = |V|;
// v ∈ V - почетни чвор;
N2(A, n, v)
  N2v ← 0
  for i ← 0 to n - 1 do
    if Bit(A_v, i) = 1 then
      N2v ← N2v ∨ A_i
  return N2v
```

Слика 3.3: $N2(A, n, v)$.

зицији v , па је услов $N_2[v] = V$ еквивалентан са условом $N2v \vee 2^v = 2^n - 1$. Сложеност алгорита са овим кодом је $O(|V|)$.

Услов $\text{diam}(G) = 2$ еквивалентан је условима $|E| < \binom{|V|}{2}$ (да G није комплетан граф) и $N2(A, n, v) \vee 2^v = 2^n - 1$ за свако $v = 0, 1, \dots, n - 1$. Ова провера се може усавршити одговарајућим избором чвора $v \in V$ за који се прво проверава испуњеност услова $N2(A, n, v) \vee 2^v = 2^n - 1$:

- ако услов није испуњен за чвор v , тада је $\text{diam}(G) > 2$ и нема потребе проверавати исти услов за остале чворове.
- ако је услов испуњен за чвор v , лако се проверава да је довољно проверити исти услов само још за чворове из околине $N(v)$.

Усавршена варијанта провере реализована је кодом $isd2(A, n, m)$ приказаним на слици 3.4. Сложеност ове провере је $O(|V| \cdot |N_2[v]|)$

У погледу начина избора почетног чвора $v \in V(G)$ изведени су експерименти са две хеуристике:

```

// A[n] - низ бројева који
// представљају матрицу
// повезаности графа G = (V, E)
// n = |V|;
// m = |E|;
isd2(A, n, m)
    if m =  $\binom{n}{2}$  then return false
    choose a starting node v
    N2v ← N2(A, n, v)
    if N2v ∨ 2v < 2n - 1 then
        return false
    for w ← 0 to n - 1 do
        if Bit(N2v, w) = 1 then
            N2w ← N2(A, n, w)
            if N2w ∨ 2w < 2n - 1 then
                return false
    return true

```

Слика 3.4: $isd2(A, n, m)$.

- Н1: Почетни чвор v је један од чворова са највећим степеном у графу G ;
- Н2: Почетни чвор v је један од чворова са најмањим степеном у графу G .

Ако постоји више чворова који задовољавају изабрани критеријум, онда се узима први такав чвор према редоследу чворова у канонском облику графа.

Сврха хеуристике Н1 је да смањи број позива функције $N2(A, n, w)$. С друге стране, ако је $\text{diam}(G) > 2$, хеуристика Н2 повећава вероватноћу откривања да је $\text{diam}(G) > 2$ првом провером, што чини остале провере $N2(A, n, w)$ сувишним. Укупна сложеност теста дијаметра је $O(|V|^2)$, односно

- $O(|V|)$, ако је $N_2(v) \neq V$, и
- $O(|V||N_2(v)|)$, ако је $N_2(v) = V$.

3.1.3 Тест критичности графа дијаметра 2

Провера да ли је граф $G = (V, E)$ D2C граф врши се само ако је $\text{diam}(G) = 2$. Нека је A матрица низ целих бројева чије су бинарне цифре врсте матрице

```

// A[n] - низ бројева који
// представљају матрицу
// повезаности графа G = (V, E)
// n = |V|;
// m = |E|;
isd2c(A, n, m)
if ¬isd2(A, n, m) then
    return false
for u ← 0 to n - 1 do
    for v ← u + 1 to n - 1 do
        if Bitv(Au) ≠ 0 then
            if Au ∧ Av ≠ 0 then
                A' ← array of G \ (u, v)
                if ¬isd2(A', n, m - 1) then
                    return false
return true

```

Слика 3.5: $isd2c(A, n, m)$.

повезаности. Грана $uv \in E$ је троугаона ако је $A_u \wedge A_v \neq 0$. Додатно унапређење теста критичности заснива се на чињеници да је довољно проверити услов $\text{diam}(G \setminus uv) > 2$ само за троугаоне гране $uv \in E$. Описани тест реализован је кодом $isd2c(A, n, m)$ приказаним на слици 3.5 Сложеност ове провере је $O(|E||V|^2) = O(|V|^4)$.

3.1.4 Интеграција тестова у програм *geng*

Програм *geng* [3] је део пакета *nauty* и користи се за листање свих повезаних неизоморфних графова који имају задат број чворова и број грана. Пронађени графови приказују се у формату *graph6* који је описан у тачки 3.1. Имплементација листања свих D2C графова урађена је уградњом описаних тестова дијаметра и критичности у програм *geng*.

Уколико се кроз позив програма *geng* проследи аргумент *-c* са бројем n чворова графа, *geng* излистава све повезане графове реда n . Када функција *main* у програму *geng* добије аргумент *-c*, логичкој променљивој *connec1* додељује се вредност *TRUE*, а глобалној променљивој *connec* додељује се вредност 1. За излиставање графова рекурзивно се позива функција *genextend*. У функцији *genextend* на основу вредности глобалне променљиве *connec* графови се филтрирају позивањем функције *isconnected*.

На сличан начин функција *isd2c* имплементира тест критичности. У функцију *main* додата је провера да ли је кроз позив програма прослеђен аргумент $-k$, који означава да програм треба да излиста све D2C графове реда n . Додата је и глобална логичка променљива *d2c* чија вредност зависи од тога да ли је у програм прослеђен аргумент $-k$ и која одређује да ли функција *genextend* треба да позива функцију *isd2c* приликом филтрирања.

Функција *isd2c* са кодом на слици 3.5 имплементира проверу критичности и прихвата аргументе

- *graph *g* — граф који који треба проверити,
- *int n* — ред графа g , и
- *int m* — број грана у графу g .

Тип *graph* дефинисан је у пакету *nauty* и користи се за представљање графа целобројним низом (низ A у коду на слици 3.5). У функцији *isd2c* за сваку троугаону грану $e \in E$ позива се функција *isd2* која проверава услов $\text{diam}(G \setminus e) > 2$.

3.2 Резултати

Приказују се резултати експеримената спроведених да би се упоредила ефикасност две описане хеуристике. Формирани су каталози графова дијаметра 2 реда до 12 и D2C графова реда до 13. Користећи ове каталоге проверено је неколико хипотеза у вези са D2C графовима.

3.2.1 Поређење две хеуристике

Експериментима се процењује ефикасност генерисања D2C графова извршавањем описаног програма. Програм је извршаван на рачунару са процесором AMD Ryzen 7 4800H (2.90 GHz) са 8 језгара, и оперативном меморијом 16GB.

Ради поређења хеуристика сви неизоморфни повезани графови су подељени у неколико група:

- C0: сви повезани графови,

- C1: графови G код којих за избрани чвор v важи $N_2[v] \neq V$ (и због тога $\text{diam}(G) > 2$),
- C2: графови G код којих за избрани чвор v важи $N_2[v] = V$, при чему је $\text{diam}(G) \neq 2$, и
- D2: графови G за је $\text{diam}(G) = 2$.

За обе хеуристике важи $|C1| + |C2| = |C0| - |D2|$.

С обзиром да *genG* листа графове са задатим бројем чворова n и грана m , програм *genG* се може извршавати паралелно, независно за различите вредности m .

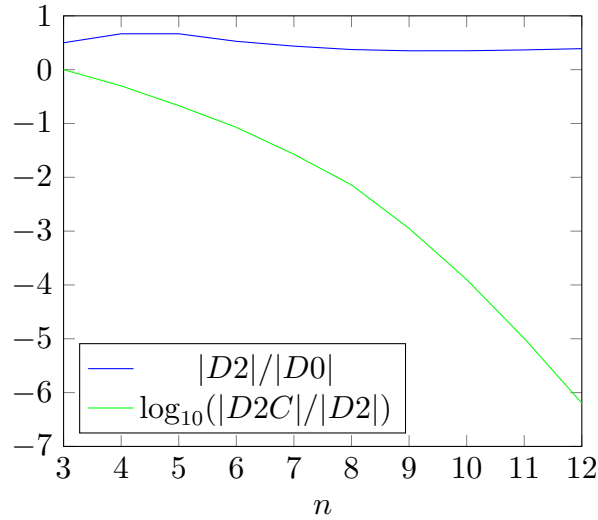
Комплетна листа D2C графова реда до 11 се може добити и без паралелизације. За графове реда 12 и 13 модификована верзија програма *genG* је извршавана паралелно. Паралелно проналажење свих D2C графова реда 13 трајало је преко месец дана.

Време у секундама потребно за листање свих графова дијаметра 2 реда до 12 приказано је у табели 3.1.

n	Секвенцијално		Паралелно	
	H1	H2	H1	H2
9	0.1	0.1		
10	2.9	3.2	0.6	0.7
11	278.8	303.9	41.3	44.6
12	43717.7	47796.0	6147.8	6839.0

Табела 3.1: Секвенцијално и паралелно време одређивања свих графова дијаметра 2 .

Ефикасност овако имплементиране паралелизације је ограничена чињеницом да број графова дијаметра 2 има приближно биномну расподелу у зависности од величине m . За графове реда 12 највише времена потребно је за проверу графова величине 33 из групе $C0$, и то за хеуристике $H1$ и $H2$ редом 4136.21s и 4552.41s; укупно време извршавања (тј. провере свих графова из групе $C0$) је 43717.69s и 47796.05s. Према томе, за паралелизацију претраге за графове реда 12 у идеалном случају је потребно 11 процесора (језгара). Како се хеуристике $H1$ показала ефикасније за графове реда 13 коришћена је само хеуристике $H1$.



Слика 3.6: Зависност $|D2|/|D0|$ и $\log_{10}(|D2C|/|D2|)$ од n , $n \leq 12$.

3.2.2 Најмање и највеће величине D2C графова реда $n \leq 13$

Број $D2$ графова реда до 12 и $D2C$ графова реда до 13 приказан је у табели 3.2. Дијаграм на слици 3.6 приказује зависност односа $|D2|/|D0|$ и његовог логаритма $\log_{10}(|D2C|/|D2|)$ од реда n графова.

n	$ D2 $	$ D2C $
3	1	1
4	4	2
5	14	3
6	59	5
7	373	10
8	4154	30
9	91518	103
10	4116896	519
11	369315249	3746
12	64093257952	40866
13		688118

Табела 3.2: Број $D2$ и $D2C$ графова.

Познато је да су скоро сви графови великог реда дијаметра 2 [4]. Дијаграм на слици 3.6 показује да је удео $D2C$ графова у односу на све повезане графове изнад $\frac{1}{3}$ за $n \leq 12$. С друге стране, однос $|D2C|/|D2|$ брзо опада са редом n

графова, бар за $n \leq 12$.

У табели 3.3 су приказане минималне и максималне величине D2C и PD2C графова за ред графа до 13. Минимални D2C графови су звезде S_n и само за њих се достиже доња граница величине.

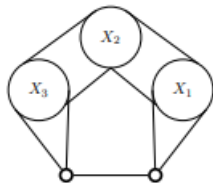
n	Мин. m D2C	Мин. m PD2C	Макс. m PD2C	Макс. m D2C
3	2			2
4	3			4
5	4	5	5	6
6	5	8	8	9
7	6	9	10	12
8	7	12	13	16
9	8	14	17	20
10	9	15	20	25
11	10	18	24	30
12	11	20	32	36
13	12	22	36	37

Табела 3.3: Најмање и највеће величине D2C, односно PD2C графова реда до 13.

У табели 3.4 је приказан број графова засићених троуглом без троуглова и број D2C графова.

n		$ D2C $
3	1	1
4	2	2
5	3	3
6	4	5
7	6	10
8	10	30
9	16	103
10	31	519
11	61	3746
12	147	40866
13	390	688118

Табела 3.4: Број графова засићених троуглом без троуглова и број D2C графова.



Слика 3.7: Бесконачна фамилија C_5^+ [10, Figure 1]

3.2.3 Провера хипотеза о D2C графовима

Листа добијених D2C графова реда до 13 је искоришћена да се провери неколико хипотеза наведених у раду [10].

Плесник [6] (Plesnik), Марти (Murty) и Сајмон [8] (Simon) су независно формулисали следећу хипотезу о горњој граници величине D2C графова.

Хипотеза 3.1. *D2C граф реда n има највише $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ трана. Једнакост се достиже само за уравниошечене комплетне бијартитне графове.*

Фан (Fan, [9]) је доказао да је ова хипотеза тачна за графове реда до $n \leq 24$. Овде је та тврдња делом проверена за графове реда $n \leq 13$. Због значаја овог тврђења, његов доказ је изложен у пододељку 2.3.2.

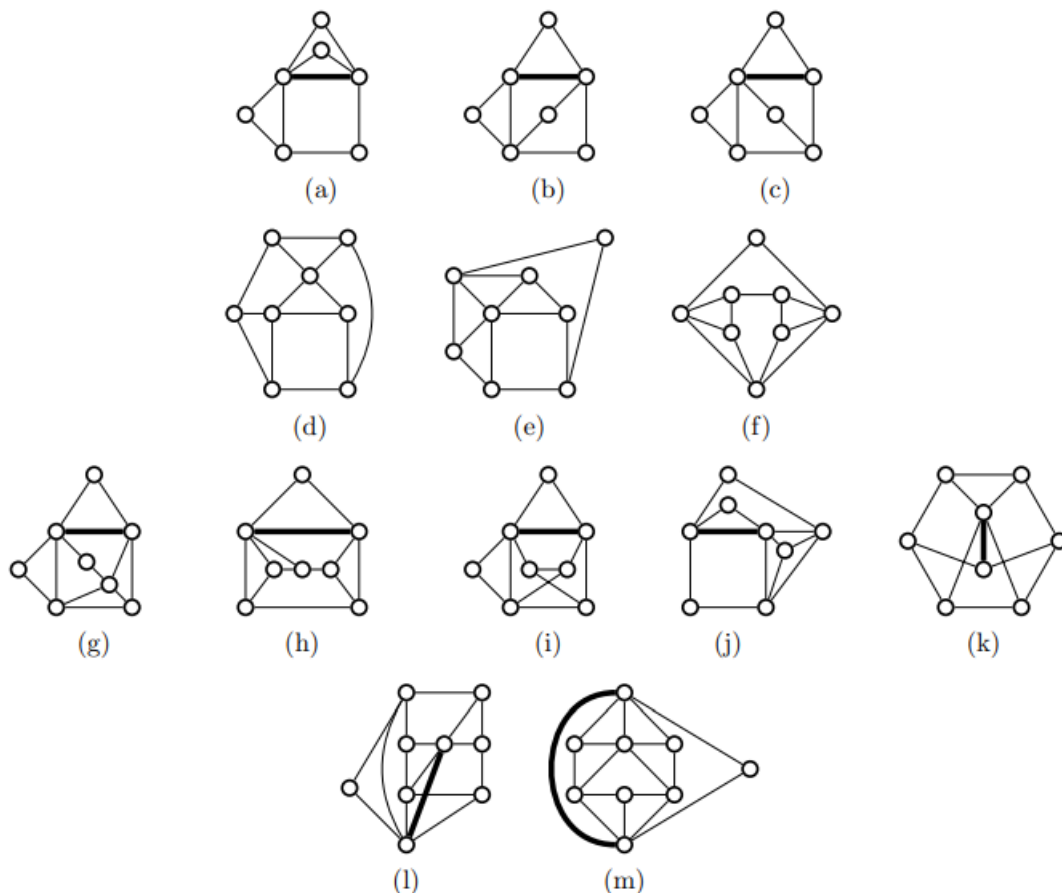
Доминирајућа трана је грана за коју важи да је сваки чвор графа суседан барем једном крају те гране. Фамилија графова означена са C_5^+ [7] је фамилија графова која се добија заменом три узастопна чвора x_1, x_2, x_3 из циклуса графа C_5 са три независна скупа чворова X_1, X_2, X_3 таквих да је $|X_2| \in \{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor, \lceil \frac{n-2}{3} \rceil\}$, где је n ред тако добијеног графа, видети пододељак 2.4.3.

Дејли (Dailly) је у раду [10] формулисао следећу хипотезу о горњој граници величине небипартитног D2C графа без доминирајуће гране.

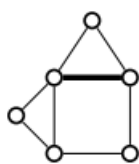
Хипотеза 3.2. *Нека је G небипартитни D2C граф без доминирајуће гране. Тада G има највише $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$ трана. За довољно велико n тврдња важи ако и само ако G припада фамилији C_5^+ .*

Наведена хипотеза је проверена за D2C графове реда до 13; није пронађен ниједан контрапример.

Хипотеза 3.3. *Нека је G небипартитни D2C граф реда n . Ако G није изоморфан графу H_5 приказаном на слици 3.9, онда G има највише $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$ трана. Број трана достиже ову горњу границу ако и само ако G припада фа-*



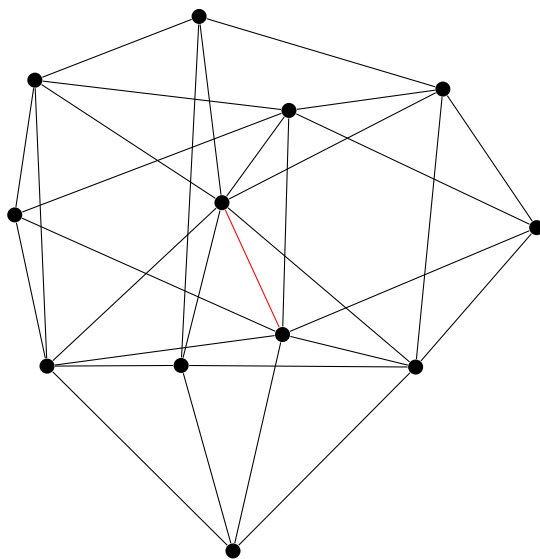
Слика 3.8: Небипартитни D2C графови реда до 11 са $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$ грана који не припадају фамилији C_5^+ . Доминирајуће гране су подебљане [10, Figure 3].



Слика 3.9: Граф H_5 је D2C граф са доминирајућом граном (подебљана на слици) [10, Figure 2].

милији C_5^+ или је изоморфан једном од шринаести графова (изузетака) реда $n \leq 11$ приказаних на слици 3.8.

Листа изузетака са графовима реда $n \leq 11$ је верификована. Поред тога, пронађен је још један нови граф — изузетак реда 12 величине 32, што је веће од $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1 = 31$, видети слику 3.10. Тај граф има доминирајућу грану која



Слика 3.10: Граф који је контрапример хипотези 3.3. Доминирајућа грана је обојена црвено.

је на слици обојена црвено. Наравно, проверени су и сви графови реда 13; међу њима није пронађен ни један контрапример.

Глава 4

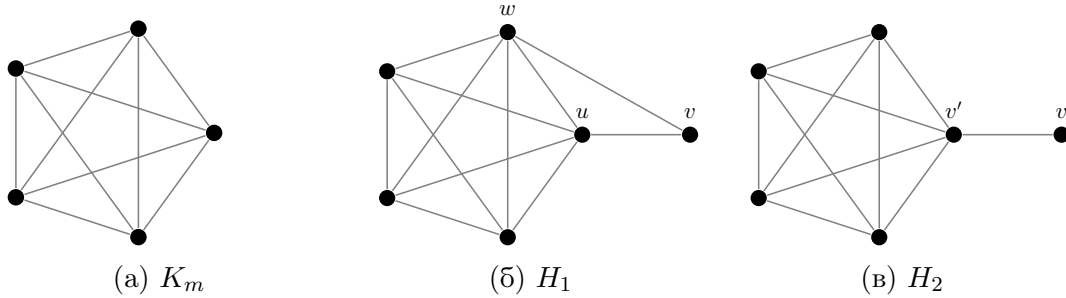
Минимални D2C графови који садрже клику K_m

У овом поглављу се показује да ако је $m \geq 3$, онда D2C граф који садржи клику K_m као подграф има бар $2m$ чворова (одељак 4.2) и да до на изоморфизам постоји тачно један D2C граф са $2m$ чворова који садржи клику K_m (одељак 4.3). У доказу се користи лема о структури D2C графа који садржи клику K_m (одељак 4.1) и теорема 2.2 о критеријуму критичности гране у графу.

4.1 Лема о структури D2C графа који садржи клику K_m

Ако D2C граф G садржи клику K_m , $m \geq 3$, онда из $\text{diam}(K_m) = 1$ следи да је $|V(G)| \geq m + 1$. Нека $K = K(G) \subseteq V(G)$ означава скуп чворова који припадају клици и нека је $A = A(G) = (\cup_{v \in K} N(v)) \setminus K$ скуп чворова графа суседних чворовима клике. Из чињенице да је граф G повезан следи да је $|A| \geq 1$. За чвор $v \in A$ такав да је $|N(v) \cap K| = 1$ каже се да је *једнострукто повезан* чвор (у односу на клику). За једнострукто повезани чвор v нека v' означава други крај гране која v повезује са кликом, тј. нека је $N(v) \cap K = \{v'\}$.

Лема 4.1. *D2C граф који садржи клику K_m у односу на клику има бар $m - 1$ једнострукто повезаних чворова.*



Слика 4.1: Графови који се разматрају у оквиру доказа леме о структури D2C графа који садржи клику K_m за $m = 5$.

Доказ. Претпоставиља се да је $v \in A$ неки чвор ван клике, такав да је $|N(v) \cap K| = k \geq 1$.

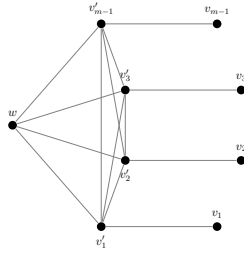
- Ако је $k > 1$ и $u, w \in N(v) \cap K$ (граф H_1 , слика 4.1б), онда чвор v није раздвајајући ни за једну грану у клици која је повезана са чвором u , јер је чвор v повезан са оба чвора u, w . Исти закључак важи и ако је $k > 2$.
- У противном, ако је $k = 1$, онда је чвор v раздвајајући за сваку грану (v', w) , $w \in K \setminus \{v'\}$ (граф H_2 , слика 4.1в).

Ако је број једноструко повезаних чворова у графу G мањи од $m - 1$, онда постоје барем два чвора $u, w \in K$ који нису једноструко повезани. У том случају троугаона грана uw није критична, јер у графу у односу на њу не постоји раздвајајући чвор (другим речима, уклањањем те гране не повећава се дијаметар). Дакле, у D2C графу G који садржи клику K_m као подграф постоје бар $m - 1$ једноструко повезаних чворова у односу на клику. \square

4.2 Доња граница за ред D2C графа који садржи клику K_m

Теорема 4.1. Нека је $m \geq 3$ и нека је G је D2C граф који садржи клику K_m . Тада је $|V(G)| \geq 2m$.

Доказ. Претпоставиља се супротно, да је $m \geq 3$ и да постоји D2C граф G реда $2m - 1$ који садржи клику K_m . На основу леме 4.1 је $|A| = |A(G)| = m - 1$. Нека је $A = \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}$. Нека је чвор $v_i \in A$ повезан са чвором $v'_i \in K$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$, и нека је w преостали чвор клике, тј. $K \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\} =$



Слика 4.2: Граф који се користи у доказу доње границе за ред D2C графа који садржи клику K_m за $m = 5$.

$\{w\}$. Означено са H_3 (слика 4.2) граф који садржи клику и $m - 1$ додатне гране које повезују чворове клике са одговарајућим једноструко повезаним чворовима. Ако је $i \neq j$, онда је $d_{H_3}(v_i, v_j) = 3 > 2$, тј. сам граф H_3 није D2C граф.

Пошто су по претпоставци чворови v_1, v_2, \dots, v_{m-1} једноструко повезани, да би се од графа H_3 добио D2C граф, могуће је додати само неку од грана $v_i v_j, i \neq j$. Међутим, тада је $\{v_i, v'_j\} \subseteq N(v'_i) \cap N(v_j)$ и $\{v_j, v'_i\} \subseteq N(v'_j) \cap N(v_i)$, и чвор v_i није раздвајајући за гране $v'_i v'_j$ и $v'_i v'_j$, те су ове гране сувишне. Према томе, немогуће је додати грану у граф H_3 тако да тако добијени граф буде D2C. Тиме је доказано да величина D2C графа који садржи клику K_m мора да буде бар $2m$. \square

4.3 Јединствени D2C граф реда $2m$ који садржи клику K_m

Нека је за $m \geq 3$ граф G_m дефинисан својим скупом чворова

$$V(G_m) = \{w, x\} \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} \{v'_i, v_i\}$$

и грана

$$E(G_m) = (v'_1, x) \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} \left\{ \{(w, v'_i), (v'_i, v_i), (v_i, x)\} \cup \bigcup_{j=i+1}^{m-1} (v'_i, v'_j) \right\}.$$

На слици 4.3д приказан је граф G_5 . У наставку се доказује да је са тачношћу до на изоморфизам G_m једини D2C граф реда $2m$ који садржи клику K_m .

Теорема 4.2. Нека је $m \geq 3$ и нека је G D2C \bar{r} граф реда $2m$ који садржи клику K_m . Тада је \bar{r} граф G изоморфан са \bar{r} графом G_m .

Доказ. На основу леме 4.1 је $|A| = |A(G)| \geq m - 1$. Нека је H_3 граф из доказа претходне теореме, који садржи клику од чворова $w, v'_1, v'_2, \dots, v'_{m-1}$ и одговарајуће једноструко повезане чворове v_1, v_2, \dots, v_{m-1} , без иједне гране $v_i v_j$, $i \neq j$, видети слику 4.2. Нека је H_4 граф који се од графа H_3 добија додавањем изолованог чвора x (слика 4.3а). Разматра се да ли се додавањем неких грана од графа H_4 може добити D2C граф. Постоје две могућности:

- Додати најпре неку грану $v_i v_j$. Ако је на пример додата грана $v_1 v_2$ и чвор x није повезан са кликом, онда је грана $v'_1 v'_2$ сувишна. Једини начин да грана $v'_1 v'_2$ постане критична је да се у граф H_4 дода тачно једна од грана $v'_1 x, v'_2 x$.

Нека је H_5 граф који се добија од графа H_4 додавањем грана $v_1 v_2$ и $v'_1 x$ (слика 4.3б). Ако се грана $v_i v_j$ различита од $v_1 v_2$ дода у граф H_5 , онда грана клике $v'_i v'_j$ постаје сувишна. Ова грана не може да постане критична додавањем гране која повезује чвор x са кликом, зато што чвор x тада престаје да буде једноструко повезан и грана $v'_1 v'_2$ постаје сувишна. Ни једна грана $v_i v_j$ сем $v_1 v_2$ не може да се дода у граф H_5 . Пошто је тада $\text{dist}(v_i, x) > 2$ за свако $i \neq 1$, све гране $v_i x$, $i \neq 1$, морају бити додате у граф H_5 . Нека је H_6 (слика 4.3в) граф добијен на овај начин.

С обзиром да је $d_{H_6}(v_1, v_3) > 2$, смањење дијаметра се не може постићи додавањем нових грана у H_6 , што је у контрадикцији са претпоставком да грана $v_i v_j$ може да се дода у граф H_4 .

- Једине преостале гране које могу да се додају у граф H_4 су гране које садрже чвор x . Да би у добијеном графу био испуњен услов $\text{dist}(v_i, v_j) = 2$ за сваки пар (i, j) , $i \neq j$, чвор x мора да буде суседан са свим чворовима v_1, v_2, \dots, v_{m-1} . Нека је H_7 (слика 4.3г) граф који се добија од H_4 додавањем наведених грана.

Пошто је $d_{H_7}(w, x) = 3$, потребно је додати грану од чвора x ка неком чвору из клике. Ако се у H_7 дода грана $w x$, онда грана $w v'_1$ постаје сувишна. Једина преостала могућност је да се дода нека грана $v'_i x$, на пример грана $v'_1 x$. Нека је G (слика 4.3д) овако добијен граф.

ГЛАВА 4. МИНИМАЛНИ D2C ГРАФОВИ КОЈИ САДРЖЕ КЛИКУ
 K_m

Закључује се да је G једини (до на изоморфизам) граф који садржи клику K_m и који може да буде D2C.

При томе је $\text{diam}(G) = 2$, јер је

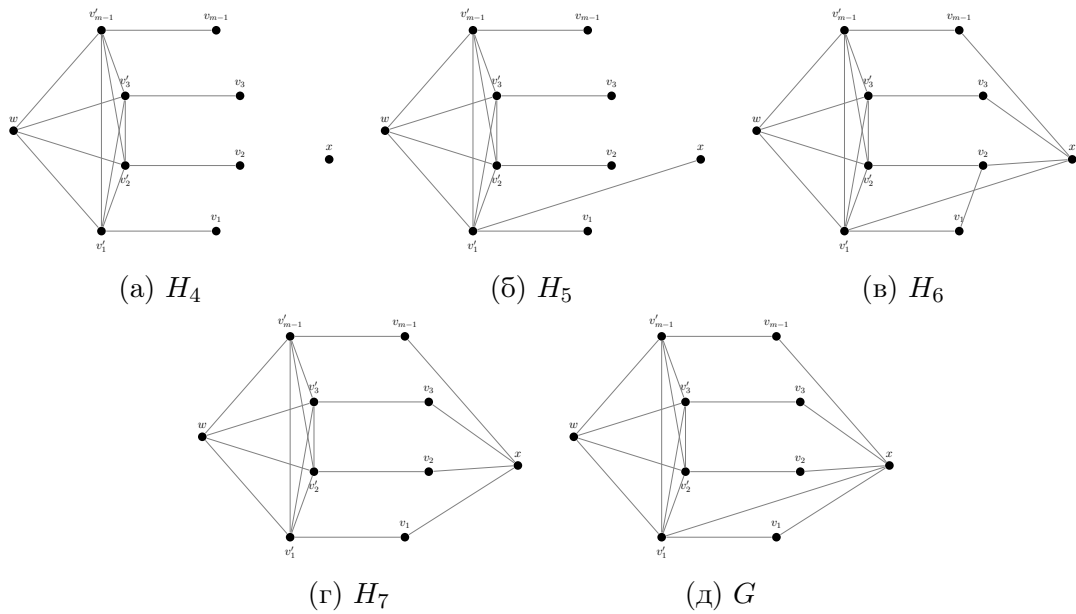
- $\text{dist}(a, b) = 1$ за свака два чвора $a, b \in K$, $a \neq b$;
- $\text{dist}(w, v_i) = 2$ за свако $1 \leq i < m$;
- $\text{dist}(w, x) = 2$;
- $\text{dist}(v'_i, v_j) = 1$ ако је $1 \leq i = j < m$;
- $\text{dist}(v'_i, v_j) = 2$ за свака два индекса $1 \leq i, j < m$, $i \neq j$;
- $\text{dist}(v'_1, x) = 1$;
- $\text{dist}(v'_i, x) = 2$ ако је $1 < i < m$;
- $\text{dist}(v_i, x) = 1$ за свако $1 \leq i < m$.

Поред тога, све троугаоне гране у графу G су критичне, јер

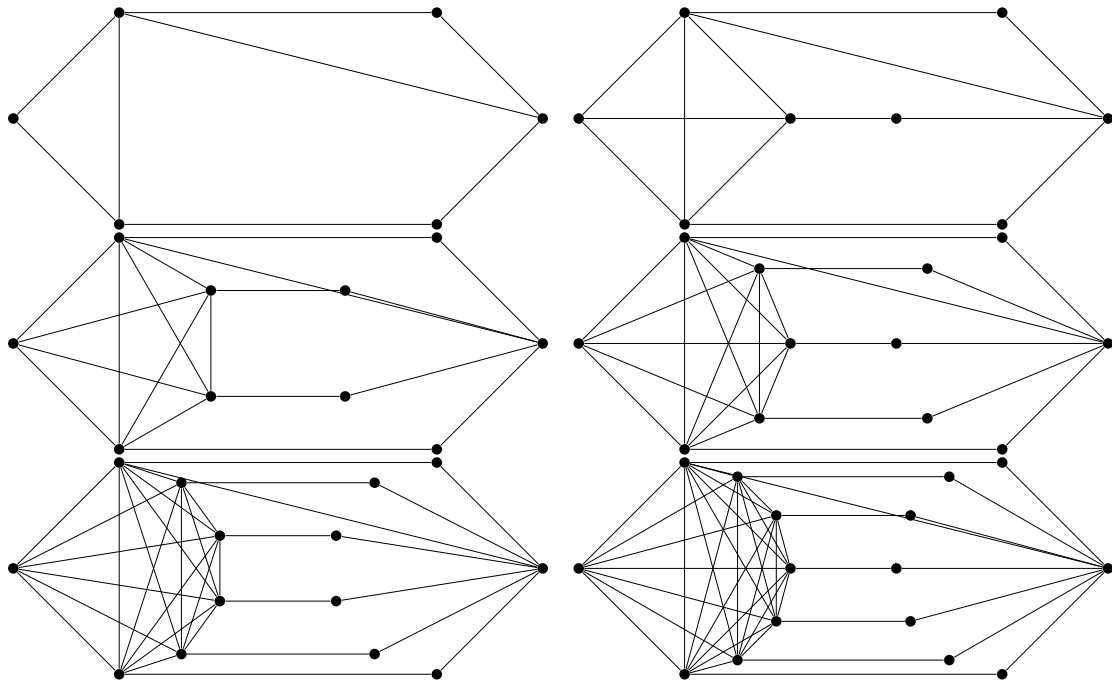
- грана wv'_1 је критична и v_1 је њен раздвајајући чвор;
- ако је $1 < i < m$, онда је грана $v'_1v'_i$ критична и v_1 је њен раздвајајући чвор;
- ако је $1 < i, j < m$, $i \neq j$, онда је грана $v'_iv'_j$ критична и v_i је њен раздвајајући чвор;
- чвор w је раздвајајући за гране v'_1v_1 и v'_1x ;
- чвор v_2 је раздвајајући чвор за грану v_1x .

D2C граф G изоморфан је графу G_m . Тиме је завршен доказ теореме. \square

Првих неколико графова G_m приказани су на слици 4.4.



Слика 4.3: Графови који се користе у доказу јединствености D2C графа реда $2m$ који садрже клику K_m за $m = 5$



Слика 4.4: D2C графови G_m реда $2m$, који садрже клику K_m , $3 \leq m \leq 8$.

Глава 5

D2C графови са најмањим бројем грана

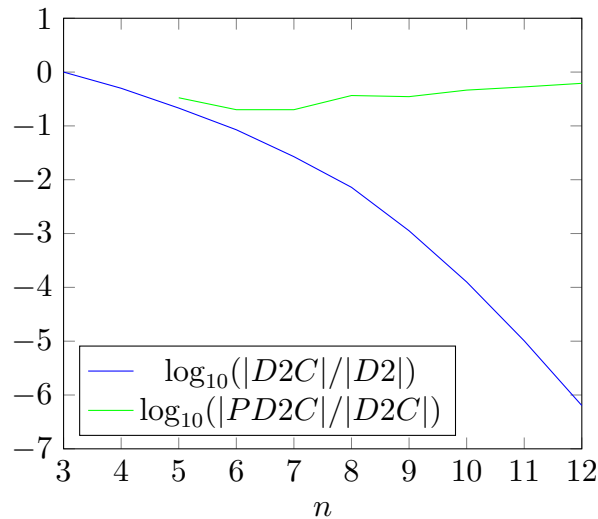
Према теорему Ердеша-Рењија (теорема 2.4 у одељку 2.3.3), величина сваког графа дијаметра 2 који нема доминирајући чвор је бар $2n - 5$. Доњу границу величине $2n - 5$ достижу графови из фамилије \mathcal{G} (видети слику 2.11) и графови који се од њих могу добити операцијом дуплирања чворова на растојању 2. Тачно три графа из фамилије \mathcal{G} су PD2C графови — то су управо графови приказани на слици 2.11. Следећи логичан корак је разматрање PD2C графова прве наредне могуће величине, $2n - 4$. У овом поглављу дефинише се бесконачна фамилија PD2C графова \mathcal{Z} која за свако $n \leq 6$ садржи по један PD2C граф величине $2n - 4$. Показује се да постоји укупно 7 Хамилтонових PD2C графова величине $2n - 4$. Поред тога, постоји један PD2C граф реда $n \leq 13$ величине $2n - 4$ који није из фамилије \mathcal{Z} и није Хамилтонов. Формулисана је хипотеза да сви PD2C графови реда $n \geq 10$ и величине $2n - 4$ припадају фамилији \mathcal{Z} .

5.1 Анализа списка PD2C графова величине $2n - 4$ реда до 13

Филтрирањем списка D2C графова добијен је списак PD2C графова реда $n \leq 13$. У табели 5.1 приказани су бројеви PD2C графова реда $n \leq 13$. Запажа се да је удео PD2C графова у оквиру D2C графова доста велики, бар за графове реда $n \leq 13$, видети дијаграм 5.1.

n	$ D2 $	$ D2C $	$ PD2C $
3	1	1	0
4	4	2	0
5	14	3	1
6	59	5	1
7	373	10	2
8	4154	30	11
9	91518	103	36
10	4116896	519	240
11	369315249	3746	1986
12	64093257952	40866	25259
13		688118	485958

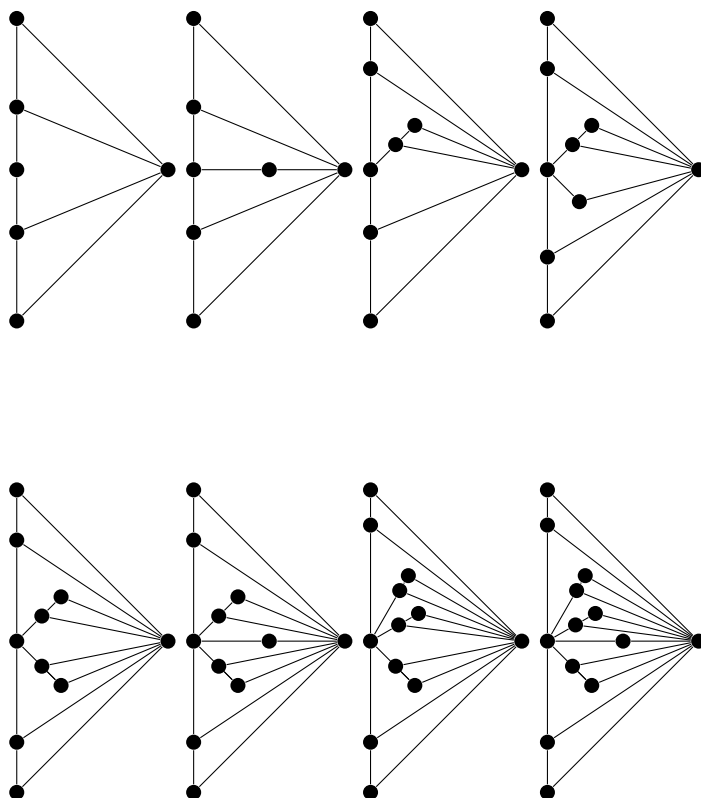
Табела 5.1: Број $D2$ и $D2C$ графова.



Слика 5.1: Однос $\log_{10}(|D2C|/|D2|)$ и $\log_{10}(|PD2C|/|D2C|)$ за $n \leq 12$.

Из добијеног списка PD2C графова реда $n \leq 13$ издвојени су PD2C графови величине $2n - 4$ и подељени у три групе:

- графови који имају један чвор великог степена (слика 5.2);
- Хамилтонови графови (слика 5.3);
- један од тих графова који нема чвор великог степена и није Хамилтонов (слика 5.4).



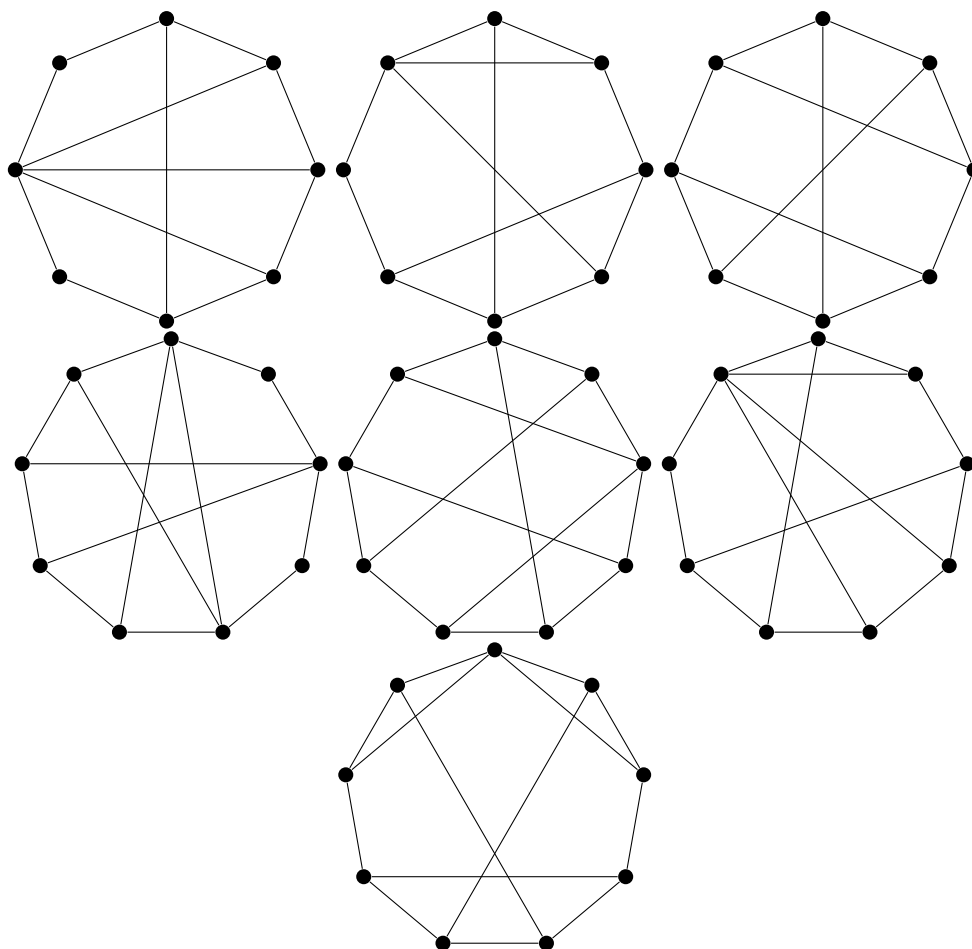
Слика 5.2: Графови Z_n реда n ($6 \leq n \leq 13$) и величине $2n - 4$.

5.2 Фамилија \mathcal{Z}

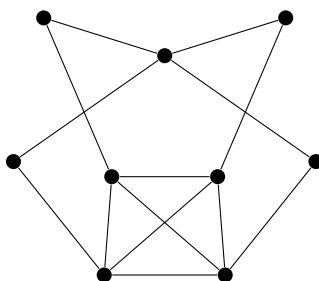
Граф Z_n , $n \geq 6$, дефинисан је на следећи начин. Нека је x остатак при дељењу n са 2 и нека је $y = (n - 2 - x)/2$. Нека је T уопштена звезда са чвором c као центром, са x путева дужине 1 и y путева дужине 2 који полазе из чвора c . Граф Z_n се добија од графа T додавањем чвора v повезаног гранама са свим чворовима из скупа $V(T) \setminus \{c\}$. На слици 5.2 су приказани графови Z_n , $6 \leq n \leq 13$. Нека је $\mathcal{Z} = \{Z_n \mid n \geq 6\}$ фамилија коју чине ови графови.

Запажа се да управо графови Z_n , $6 \leq n \leq 13$, приказани на слици 5.2 чине прву групу PD2C графова реда $n \leq 13$ величине $2n - 4$. Степен чвора c (најдеснијег на слици 5.2) у графу Z_n је $n - 2$, што је само за један мање од највеће могуће вредности.

Нека је $\mathcal{T} \supset \mathcal{Z}$ фамилија графова који постају стабла уклањањем једног чвора. У овој тачки одређени су сви PD2C графови из фамилије \mathcal{T} чија је величина $2n - 4$. Доказује се да је граф из фамилије \mathcal{T} PD2C граф величине $2n - 4$ ако и само ако припада фамилији $\mathcal{Z} \cup \{C_5\}$.



Слика 5.3: Хамилтонови PD2C графови реда $n \leq 13$ и величине $2n - 4$.



Слика 5.4: Јединствени PD2C граф реда $n \leq 13$ и величине $2n - 4$, који није Хамилтонов и није у \mathcal{Z} .

Лема 5.1. Нека је $G \in \mathcal{T}$ D2C граф и нека је $v \in V(G)$ чвор шакав да је $T \cong G - v$ сшабло. Тада је $\text{diam}(T) \leq 4$.

Доказ. Претпоставља се супротно, да је $\text{diam}(T) > 4$. Тада $\text{diam}(T)$ може бити паран или непаран број. Најпре доказује се да је у оба случаја граф G v -конус над стаблом T .

$\text{diam}(T) = 2k + 1$, $k \geq 2$. У овом случају граф T има тачно два централна чвора; нека су то чворови r_1 и r_2 . Нека су R_1 и R_2 стабла која су компоненте повезаности у графу $T - r_1 r_2$, при чему је $r_i \in V(R_i)$, $i = 1, 2$.

- Нека су $u_i \in V(R_i)$, $i = 1, 2$, било која два чвора $u_1 \neq r_1$, $u_2 \neq r_2$. Тада из $d_T(u_1, u_2) \geq 3$ и $d_G(u_1, u_2) \leq 2$ следи да је $vu_1, vu_2 \in E(G)$.
- Постоји бар један чвор $u_2 \in R_2$ такав да је $d_T(r_1, u_2) \geq 3$. Из чињенице да је $d_G(r_1, u_2) \leq 2$ следи $vr_1 \in E(G)$. На сличан начин показује се да важи $vr_2 \in E(G)$.

$\text{diam}(T) = 2k$, $k \geq 3$. Нека је r центар стабла T , нека је $N(r) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $k \geq 2$ и нека је R_i подстабло стабла T са кореном r такво да је $u_i r \in R_i$, $1 \leq i \leq k$. Пошто је r центар стабла T , постоје бар два оваква подстабла чија је висина бар 3. Без смањења општости претпоставља се да су то стабла R_1 и R_2 . Нека су $v_i \in R_i$, $i = 1, 2$, два чвора таква да је $d_T(r, v_i) \geq 3$.

- Из неједнакости $d_G(r, u_1) \leq 2$ следи да је $vr \in E(G)$.
- Нека је $w_1 \in T - R_1$ било који чвор који није у подстаблу R_1 . Из $d_T(w_1, u_1) \geq 3$ и $d_G(w_1, u_1) \leq 2$ следи да је $vw_1 \in E(G)$.
- Симетрично, нека је $w_2 \in T - R_2$ било који чвор који није у подстаблу R_2 . Из $d_T(w_2, u_2) \geq 3$ и $d_G(w_2, u_2) \leq 2$ следи да је $vw_2 \in E(G)$.

Дакле, у оба случаја је G v -конус над стаблом T . Међутим, на основу последице 2.1 v -конус над стаблом T није D2C граф. Тиме једоказано да је $\text{diam}(T) \leq 4$. □

Теорема 5.1. Нека је $G \in \mathcal{T}$ PD2C граф и нека је $v \in V(G)$ шакав чвор да је $T \cong G - v$ сшабло. Тада је $G \in \{C_5\} \cup \mathcal{Z}$.

Доказ. На основу леме 5.1 је $\text{diam}(T) \leq 4$, тако да су могући следећи случајеви:

$\text{diam}(T) = 0$. У овом случају је $T \cong K_1$, $G \cong P_2$ и $\text{diam}(G) = 1$, па G није PD2C граф.

$\text{diam}(T) = 1$. У овом случају је $T \cong K_2$ и $G \cong C_3$ или $G \cong P_3$. Ни један од ових графова није PD2C граф, пошто је $\text{diam}(C_3) = 1$, а граф P_3 није примитиван.

$\text{diam}(T) = 2$. У овом случају је $T \cong S_n$ звезда са $n \geq 3$ чвора. Нека је $V(T) = \{c, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$, где је c центар звезде T .

- Ако је $n = 3$, тј. $T \cong P_3$, онда додавањем чвора v могу да се добију пет различитих повезаних графова. Непосредно се проверава да ни један од њих није PD2C граф.
- Ако је $n > 3$, онда због $\text{diam}(G) = 2$ чвор v може да буде:
 - суседан c , или
 - суседан u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , или
 - суседан свим чворовима из $V(T)$.

У сваком од наведених случајева граф G није примитиван, јер нпр. u_1 и u_2 имају исти скуп суседа.

$\text{diam}(T) = 3$ У овом случају стабло T садржи две звезде чији су центри a и b повезани граном, тј. $T \cong S_{i,j}$, $i, j \geq 2$. Претпоставља се да је $\text{deg}(a) = i$, $\text{deg}(b) = j$. Због $\text{diam}(G) = 2$ чвор v мора да буде суседан свим чворовима из скупа $N(a) \cup N(b) \setminus \{a, b\}$. Ако се поред тога дода и грана va и/или vb , добијени граф није критичан, па се PD2C граф G може добити додавањем чвора v у стабло T на тачно један начин.

Ако је $i \geq 3$, онда свака два чвора из скупа $N(a) \setminus \{b\}$ имају исти пар суседа, па граф G није примитиван; стога је $i = 2$. Слично, мора да буде $j = 2$. Дакле, ако је $\text{diam}(T) = 3$, онда је C_5 једини PD2C граф који је могуће добити од стабла T додавањем чвора v и неких грана од чвора v .

$\text{diam}(T) = 4$. Нека је c центар стабла T и нека је $N(c) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Тада је сваки чвор v_i корен стабла висине највише 1, $1 \leq i \leq k$. Због услова $\text{diam}(T) = 4$ број стабала висине 1 мора да буде бар два.

Из услова $\text{diam}(G) = 2$ следи (на сличан начин као у доказу леме) да је чвор v суседан свим чворовима из скупа $V(T) \setminus \{c\}$. После додавања

гране vc граф престаје да буде критичан, па се додавањем чвора v у T стабло T може проширити до графа G на јединствен начин.

Ако подстабло са кореном у чвору v_i има два сина w' и w'' , онда је $N(w') = N(w'')$, па граф G није примитиван. Према томе, стабло T је уопштена звезда дијаметра 4.

Нека стабло T има y путева $cu'_i, u'_i u''_i$ из c дужине 2, $1 \leq i \leq y$, и x путева sw_i из c дужине 1, $1 \leq i \leq x$.

- Из претпоставке $\text{diam}(T) = 4$ следи да је $y \geq 2$.
- Ако је $x \geq 2$, онда због $N_G(w_1) = N_G(w_2)$ граф G није примитиван. Дакле, $x \leq 1$.

Закључује се да у овом случају граф G припада фамилији \mathcal{Z} и да је $G \cong Z_n$, где је $n = 2y + x + 2 \geq 6$.

Како је $\text{diam}(G) = 2$ и како је дијаметар сваког графа добијеног од графа G уклањањем гране $(vw_i, vu'_i, vu''_i, sw_i, cu'_i, u'_i u''_i)$ већи од 2, граф G је D2C граф. Поред тога, граф G је примитиван пошто:

- не постоје два суседа чвора c са истим скупом суседа, и
- не постоје два суседа чвора v са истим скупом суседа.

На основу размотрених случајева долази се до закључка да, ако се PD2C граф G може добити од стабла T , $\text{diam}(T) \leq 4$, додавањем чвора v и неких грана из v , онда је граф G изоморфан неком од графова из фамилије $\{C_5\} \cup \mathcal{Z}$.

□

5.3 Хамилтонови PD2C графови величине

$$2n - 4$$

Слика 5.3 приказује све Хамилтонове PD2C графове реда $n \leq 13$ величине $2n - 4$. Запажа се да ред ни једног од тих графова није већи од 9. Наредна теорема показује да не постоје други Хамилтонови PD2C графови величине $2n - 4$.

Теорема 5.2. *Ако је величина Хамилтоновог графа G реда n једнака $2n - 4$, онда је $n \leq 11$.*

Доказ. За произвољни чвор $v \in V = V(G)$ нека $n(v) = \deg(v) - 2$ означава број дијагонала из v у фиксираним Хамилтоновом циклусу графа G . Нека су чворови v' и v'' суседи чвора $v \in V$ у Хамилтоновом циклусу. Чворови који су на удаљености највише 2 од чвора v су:

- други крајеви дијагонала из v , сваки са своја два суседа;
- други крајеви дијагонала из v' , и
- други крајеви дијагонала из v'' .

Укупан број чворова на удаљености највише 2 од чвора v (укључујући и чвор v) је највише

$$|N_2[v]| \leq 3n(v) + n(v') + n(v'') + 5.$$

Како је $\text{diam}(G) = 2$, мора да важи једнакост $|N_2[v]| = n$. Сабирањем неједнакости $3n(v) + n(v') + n(v'') + 5 \geq n$ по свим чворовима $v \in V$ добија се:

$$5 \sum_{v \in V} n(v) \geq n(n - 5).$$

Укупан број дијагонала у Хамилтоновом циклусу је $|E| - n = n - 4$, па је $\sum_{v \in V} n(v) = 2(n - 4)$. Заменом овог израза у горњу неједнакост добија се потребан услов да величина Хамилтоновог графа G буде $2n - 4$: $10(n - 4) \geq n(n - 5)$, тј. $n^2 - 15n + 40 \leq 0$. Како је већи корен квадратног тринорма са леве стране $(15 + \sqrt{65})/2 \approx 11.53$, закључује се да мора бити испуњен услов $n \leq 11$. □

Последица доказане теореме је да су графови са слике 5.3 једини Хамилтонови PD2C графови реда n величине $2n - 4$.

На основу свега изложеног може се поставити следећа хипотеза:

Хипотеза 5.1. *Сви PD2C графови реда $n \geq 10$ и величине $2n - 4$ припадају фамилији Z .*

Библиографија

- [1] J. Sawada, Generating Rooted and Free Plane Trees, *ACM Transactions on Algorithms* 2 (2006), pp. 1–13
- [2] B. D. McKay, Practical graph isomorphism, *Congr. Numer.* 30, (1980), pp. 45–87.
- [3] B. D. McKay, A. Piperno, Practical Graph Isomorphism, II, *J. Symbolic Computation* 60 (2013), pp. 94–112.
- [4] B. Bollobás, Graph Theory, Springer-Verlag, (1979).
- [5] R. B. Eggleton, J. A. MacDougall, Triangle-free and triangle-saturated graphs, *Jour. Comb. Math. Comb. Comp.* 25 (1997), pp. 3–21
- [6] J. Plesnik, Critical graphs of given diameter, *Acta F.R.N. Univ. comenianae Math.* 30 (1975), pp. 71–93
- [7] C. Balbuena, A. Hansberg, T.W. Haynes, M.A. Henning, Total domination edge critical graphs with total domination number three and many dominating pairs, *Graphs Combin.* 31 (5) (2015), pp. 1163–1176.
- [8] L. Caccetta, R. Haggkvist, On diameter critical graphs, *Discrete Math.* 28 (1979), pp. 223–229.
- [9] G. Fan, On diameter 2-critical graphs, *Discrete Math.*, 67 (1987), pp. 235–240
- [10] A. Dailly, F. Foucaud, A. Hansberg, Strengthening the Murty-Simon conjecture on diameter-2-critical graphs, *Discrete Mathematics* 342 (11) (2019), pp. 3142–3159.

- [11] P. Erdős, and A. Rényi, On a problem in the theory of graphs (Hungarian. Russian, English summaries), *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl* 7 (1962), pp. 623–641.
- [12] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, Spectra of Graphs – theory and applications, third edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg-Leipzig, (1995).
- [13] J. Radosavljević, M. Živković, The list of diameter-2-critical graphs with at most 10 nodes, *IPSI Trans. Adv. Res.* 16(1), (2020), pp. 1–5.
- [14] J. Radosavljević, M. Živković, Minimal diameter-2-critical graphs containing clique K_m , submitted.
- [15] J. Radosavljević, Diameter-2-critical graphs with at most 13 nodes, *IPSI Bgd Trans. Int. Res.* 19(2), (2023), pp. 104–109.
- [16] J. Radosavljević, Z. Stanić, M. Živković, Primitive diameter 2-critical graphs, submitted.

Биографија аутора

Јован Радосавлјевић рођен је 19. јануара 1992. године. Завршио је гимназију у Јагодини, природно-математички смер 2011. године.

Основне студије Математичког факултета Универзитета у Београду, на смеру Информатика завршио је 2014.

Мастер студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, на смеру Информатика завршио је 2016. године одбраном мастер рада под насловом „Разбијање алгорита DES грубом силом коришћењем акцелератора „Maxeler”.

Докторске студије на Математичком факултету, студијски програм Информатика уписао је 2016. године.

Положио је све испите предвиђене планом и програмом докторских студија са просечном оценом 10.

Прилози