UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

FORSING U TEORIJI MODELA

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

MILAN Z. GRULOVIĆ

BEOGRAD, 1984.

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

Forsing, koji je u teoriju skupova uveo P.Cohen, je postupak konstruisanja "generične" ekstenzije polaznog (tranzitivnog i prebrojivog) modela teorije ZFC, dodavanjem "generičnog" skupa, uz pomoć kompletnog niza uslova. Ključni pojmovi ove metode su (konačni) uslovi i forsing relacija izmedju uslova i rečenica (adekvatnog jezika), a sama konstrukcija se odvija u prebrojivo beskonačno mnogo koraka. U svakoj fazi odlučuje se o samo konačno mnogo relacija pripadanja koje će važiti u modelu. Skup tih relacija je odgovarajući po redu uslov posmatranog kompletnog niza, a sva svojstva novog modela su odredjena skupom uslova, drugim rečima (dato) svojstvo će u njemu važiti ako i samo ako je determinisano (forsirano) nekim od uslova. No, premda je pojam "forsiranja" u vezi sa pojmom impliciranja esencijalno se od njega razlikuje u sledećem: ako uslov p forsira svojstvo ϕ neće nužno i svaki model koji zadovoljava p zadovoljavati i ϕ.

U teoriji skupova forsing se iskazao (i još uvek se iskazuje) kao vrlo pogodna metoda za konstrukciju modela kojima se dokazuju brojni rezultati vezani za pitanja konsistentnosti. Prvi medju njima su Cohen-ovi o nezavisnosti aksiome izbora (AC) od Zermelo-Fraenkel-ove aksiomatike (ZF) i nezavisnost kontinuum hipoteze (CH) od ZF+AC.

Tokom 1969. i 1970. godine A.Robinson generalizuje metodu forsinga za (klasičnu) teoriju modela, razvijajući prvo konačni a potom i beskonačni forsing, dok K.J.Barwise teoriju Robinson-ovog konačnog forsinga uopštava za beskonačne logike. Konačni forsing je neposredno inspirisan Cohen-ovim skupovnim forsingom (opet se koriste kompletni nizovi uslova za konstrukciju generičnog modela). U slučaju i jednog i drugog forsinga kreće se od (neke) teorije i njene klase modela i konstruišu nove klase modela koje sa svojim teorijama predstavljaju (u odnosu na polaznu klasu i teoriju) analogone algebarski zatvorenih polja i njihove teorije (u odnosu na klasu i teoriju polja).(Upravo je primer algebarski zatvorenih polja naveo A.Robinsona na uvodjenje pojma modelskog kompletiranja,a kasnije je E.Bers izvlačeći esenciju iz te definicije,imajući u vidu primer formalnih realnih polja,definisao modelsko pridruženje).Klasa modela dobijena beskonačnim forsingom je modelski kompletna i modelski konsistentna sa polaznom,dok konačni forsing daje (za prebrojiv jezik) samo modelski kompletnu klasu,čija je teorija modelski konsistentna sa originalnom (ako je jezik neprebrojiv može se desiti da uopšte nemamo generičnih modela).Oba forsinga definišu operatore pridruženja,koji,kao uostalom i svi ostali operatori pridruženja,produkuju,u slučaju njegove egzistencije,modelsko pridruženje.

Metoda forsinga pokazala se i u teoriji modela (konačnih i beskonačnih logika) i model teoretskoj algebri korisnom (što se već vidi i iz gore navedenog) kako za dobijanje novih tako i za simplifikaciju dokaza već postojećih rezultata.Navodimo samo,reč je o prvoj primeni forsinga u algebri,A.Macintyre-ov dokaz obrata tvrdjenja B.H.Neumann-a: ako se konačno generisana grupa može utopiti u svaku netrivijalnu algebarski zatvorenu grupu onda je ona rekurzivno predstavljiva sa rešivim problemom reči.

Ova disertacija naš je prilog teoriji (konačnog) forsinga u teoriji modela.

U prvom paragrafu prvog poglavlja,razradjujući ideje iz doktorske disertacije Jean-Pierre Keller-a,pokazujemo neophodnost formulisanja forsing pridruženja preko "slabih" formula u slučaju forsing relacija za beskonačne logike ($L_{\lambda\mu}$) ako se želi sintaktička aparatura adekvatno proširiti a da pritom forsing pridruženje ostane deduktivno zatvoren skup,koji sadrži sve logički valjane formule (1.16).Čak i ako se ostane pri sintaktičkoj aparaturi za konačne logike,ako je L jezik s jednakošću,upućeni smo na isti korak (1.23),jer je iskaz: za svaki uslov p $p \Vdash {\sim\sim}\bigwedge\Phi$ akko $p \Vdash \bigwedge{\sim\sim}\Phi$ (*)) dovoljan ali ne i potreban (1.24) uslov za: za svako p $p \Vdash {\sim\sim}PC11$.Uslov da svaki neopadajući lanac (dužine manje od λ) ima gornje ograničenje je,pak,dovoljan (1.11) ali ne i potreban (1.22) za (*).

U drugom paragrafu dajemo korekciju dokaza slabe interpolacione teoreme za beskonačne logike prezentiranog u Keller-ovoj tezi. Osnovnu grešku, korišćenje relacije koja u opštem ne mora da bude (i u slučajevima od stvarnog interesa i nije) forsing relacija dok se istovremeno koriste svojstva forsing relacije, otklonili smo formiranjem forsing relacije (1.35-1.46) koja sa datom ima presek "po meri" (1.47). No, prethodno smo morali izvršiti još neke ispravke i poboljšanja pojedinih rezultata vezanih za ovaj dokaz, od kojih neki u novoj varijanti (posebno 1.26) nalaze i kasnije primenu.

U drugoj glavi iznosimo uglavnom suštinu magistarskog rada. Mnogi dokazi su, medjutim, pojednostavljeni, a korigovana su delimično i dva tvrdjenja, pri čemu je (kontra)primerima pokazano nevaženje njihovih prvobitnih (kompletnih) verzija (2.7, 2.9, 2.10). Izloženim materijalom dokazujemo da se sva bitna svojstva Robinson-ovog konačnog forsinga prenose na n-konačne forsinge, u smislu njihovog "transliranja za n" (2.15-2.23, 2.27) ($(-)^{e_n}$ je, takodje, n-operator pridruženja (2.26)) i dajemo konstrukciju n-konačnog forsing pridruženja pomoću aproksimativnih lanaca P. Henrard-a (dakle, standardnim metodama teorije modela) (2.28-2.37).

U trećoj glavi ukazujemo prvo na to da ako se na n-konačni forsing gleda prevashodno kao na sredstvo za dobijanje n-konačnog forsing pridruženja i ostalih za tu teoriju relevantnih rezultata izbor skupa uslova nije jedinstven (3.1-3.10) (posebno npr. u slučaju (Robinson-ovog) konačnog forsinga za skup uslova možemo, s tog stanovišta, uzeti i skup čiji su elementi konačni skupovi (konsistentni sa datom teorijom) rečenica ekvivalentnih sa kvantifikatorsko slobodnim rečenicama). Glavni rezultat ovog poglavlja je da za svaku teoriju T jezika L postoji proširenje T', definisano u adekvatnom proširenju L' jezika L, takvo da je $T^{fn} = (T')^{f} \cap \mathrm{SENT}(L)$ (3.11-3.13). Odatle onda sledi i da se (za dato n) svaka teorija jezika L može proširiti do teorije T^{ω} (dobro) proširenog jezika L^{ω} za koju je $(T^{\omega})^{f} = (T^{\omega})^{fn}$ (3.14-3.18).

Četvrtim poglavljem načinjemo jednu veliku temu: odnos izmedju date teorije i njoj korespondentnih n-konačnih forsing pridruženja i medjusobni odnosi n-konačnih forsing pridruženja ($n\in\omega$). Pored rezultata opšteg karaktera (4.1-4.8) koji su nam (zajedno sa 2.18, 2.23 i još nekim iz druge glave) bili osnovni "alat" u tom ispitivanju dokazujemo i sledeće: $T_{DLOM}=T_{DLOM}^{f_n}$, $T_G=T_G^{f_n}$, $T_{AG}=T_{AG}^{f_n}$, $T_F=T_F^{f_n}$ za svako $n>1$ (4.9, 4.12, 4.13, 4.14), gde su T_{DLOM}, T_G, T_{AG} i T_F, respektivno, teorija gustog linearnog uredjenja sa maksimalnim i minimalnim elementom, grupa, Abelovih grupa i polja. Za kompletnu aritmetiku (T_N) imamo $T_N=T_N^{f_n}$ za svako $n\in\omega$ (4.10), a za Peanovu aritmetiku (T_{PA}) važi: za svako n postoji $k>n$ takvo da je $T_{PA}^{f_n}\neq T_{PA}^{f_k}$ i nijedna od teorija $T_{PA}^{f_n}$ nije modelski kompletna, niti (sigurno) za $n>1$ kompletna (4.11).

Rezultati petog poglavlja uopštenja su već poznatih, u prvom redu onih od J.Hirschfeld-a, i iznosimo ih ovde, s obzirom da je sama "translacija za n", o kojoj je reč, rutinski i ne baš inventivan posao, poglavito zbog njihove povezanosti sa materijalom izloženim u drugoj i četvrtoj glavi i mogućnosti koju oni pružaju u traženju odgovora na pitanja koja iz tog materijala proizilaze (tu, pre svega, mislimo na korišćenje (topoloških) prostora kompletnih i (n+1)-egzistencijalnih tipova u ispitivanju pojmova vezanih za teorije n-operatora pridruženja i n-konačnog forsinga i (n+1)-egzistencijalne kompletnosti-5.3, 5.4, 5.6, 5.11, 5.24-5.27). Naš udeo se, stoga, pre ogleda u modifikaciji i dopuni pojedinih stavova i dokaza čime se navedena veza još bolje sagledava.

Želim na kraju da spomenem one koji su mi, posredno ili neposredno, pomogli u izradi ove disertacije. Akademik profesor dr. Mirko Stojaković mi je držao predavanja iz svih kurseva algebre na redovnim studijama i učinio da zavolim taj predmet. Profesor dr. Slaviša Prešić me je na postdiplomskim studijama zainteresovao za teoriju modela i uputio na izučavanje teorije forsinga. Stručni razgovori sa profesorom dr. Svetozarem Milićem su mi uvek bili od koristi. Docent dr. Žarko Mijajlović mi je svojim idejama, sugestijama i primedbama u mnogome olakšao rad na tezi. Na njihovoj pomoći iskreno im se zahvaljujem.

UVODNE NAPOMENE

Notacija korišćena u disertaciji u standardnoj je upotrebi u teoriji modela. I pored toga, tekst nudi (eventualno) potrebna tumačenja većine simbola i izraza, naravno, obavezno onih koje mi uvodimo. Za svaki slučaj dajemo ovde još neke napomene.

Modele ćemo obeležavati sa $\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{K},\ldots$ a njihove domene sa odgovarajućim velikim latiničnim slovima M,N,K,...

Ako je L (dati) jezik i A skup (novih) konstanti, L(A), prosta ekspanzija jezika L, je jezik sa funkcijskim i relacijskim simbolima iz L i konstantama iz i L i A. Posebno, ako je $\mathcal{M}$ model jezika, L(M) je prosta ekspanzija jezika L pri čemu postoji bijektivno preslikavanje skupa M na skup novih konstanti (u literaturi se često elementi skupa M i njima korespondentne konstante označavaju istim slovima).

Skupove Σ_n, Π_n formula jezika L definišemo induktivno:

$$\Sigma_o = \Pi_o = \{\phi \mid \phi \text{ je formula jezika L bez kvantifikatora}\}$$

$$\Sigma_{n+1} = \{\exists v_o \ldots \exists v_{m-1}\phi \mid \phi \in \Pi_n, \quad m \in \omega\}$$

$$\Pi_{n+1} = \{\forall v_o \ldots \forall v_{m-1}\phi \mid \phi \in \Sigma_n, \quad m \in \omega\}.$$

U konačnim logikama svaka formula je ekvivalentna sa nekom iz skupa Σ_n, Π_n, za dovoljno veliko n. S obzirom na to mi ćemo, ukoliko ne naglasimo drugačije, formulu (jezika L) zvati Σ_n, Π_n formulom ako je ekvivalentna sa nekom formulom iz skupa Σ_n, Π_n.

Teorija T jezika L je deduktivno zatvoren, konsistentan skup rečenica (jezika L). Teoriju obično "zastupa" neki njen podskup (skup aksioma), čija je ona deduktivno zatvorenje. Ako je skup aksioma podskup skupa Π_n, kažemo da je teorija Π_n aksiomatizibilna.

Π_n segment teorije T jezika L, u oznaci $T\cap\Pi_n$, definišemo formalno kao skup rečenica $\{\phi|\phi$ je Π_n rečenica jezika L i $T\vdash\phi\}$. Teorija T je, prema tome, Π_n aksiomatizibilna ako je jedan njen skup aksioma (podskup od) $T\cap\Pi_n$. No, mi u tom slučaju neformalno stavljamo i $T=T\cap\Pi_n$ naglašavajući time da je T deduktivno zatvorenje skupa $T\cap\Pi_n$. Uopšte ako su T_1 i T_2 dva (konsistentna) skupa rečenica jezika L $T_1=T_2$ će za nas značiti da dati skupovi imaju isto deduktivno zatvorenje, drugim rečima, za svaku rečenicu ϕ jezika L $T_1\vdash\phi$ je ekvivalentno sa $T_2\vdash\phi$.

Ako su M i N modeli jezika L i h preslikavanje skupa M u N , h je n-elementarno utapanje ($h:M\to_n N$) akko za svaku Σ_n, Π_n formulu $\phi(v_o,\dots,v_{m-1})$ jezika L važi

$$M\models\phi[a_o,\dots,a_{m-1}] \text{ akko } N\models\phi[a_o,\dots,a_{m-1}],\ a_i\in M,$$
$$i=0,\dots,m-1.$$

Ako je N ekstenzija modela M i h identično utapanje pišemo $M\prec_n N$ i kažemo da je N n-elementarna ekstenzija modela M.

Lanac modela $M_o\subseteq M_1\subseteq\dots\_M_\alpha\subseteq\dots$, $\alpha<\beta$ je n-elementaran lanac modela ako $M_\gamma\prec_n N_\delta$ za sve ordinale $\gamma,\delta<\beta$, $\gamma<\delta$. (Poznata je teorema da je u tom slučaju $M=M\bigcup_{\alpha<\beta}M_\alpha$ n-elementarna ekstenzija svakog modela M_α, $\alpha<\beta$).

U osnovi većine rezultata za konačne logike su sledeće teoreme na koje ćemo se pozivati implicite:

Teorema dedukcije. Skup rečenica je konsistentan ako i samo ako je svaki njegov konačan podskup konsistentan.

Teorema kompletnosti. Skup rečenica je konsistentan ako i samo ako ima model.

Teorema kompaktnosti. Skup rečenica ima model ako i samo ako svaki njegov konačan podskup ima model.

Takodje ćemo se često (i opet uvek prećutno) koristiti tzv. lemama prenosa (koje su direktne posledice teoreme kompaktnosti) |32|.

Lema prenosa I. Ako su M i N modeli jezika L i $h:M\to N$ injektivni homomorfizam modela M u N postoji model N' (jezika L) takav da je sledeći dijagram

$$\begin{tikzcd} & N' \arrow[dr, phantom, sloped, "\cong"] & \\ M \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[rr, "h"] & & N \end{tikzcd}$$

komutativan.

Lema prenosa II. Ako su M i N modeli jezika L i $h:M\to N$ injektivni homomorfizam modela M u N postoji model M' (jezika L) takav da je sledeći dijagram

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dr, phantom, sloped, "\supseteq"] & \\ M \arrow[ur, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[rr, "h"] & & N \end{tikzcd}$$

komutativan.

($M\cong N$ znači: postoji bijektivni homomorfizam modela M na N).

I poslednja napomena: sa Φ_m u drugom i trećem poglavlju obelažavamo skupove Σ_m,Π_m rečenica (jezika L(A)), a u petom ((n+1)-)egzistencijalne m-tipove. No, nedoumice nema, s obzirom da se u tekstu ovi pojmovi ne javljaju istovremeno.

I GLAVA
APSTRAKTNI FORSING

§ 1. FORSING RELACIJA

Definicije i neke od rezultata vezanih za forsing relaciju preuzimamo iz |26|. Definicija forsing relacije je uopštenje (u svakom slučaju ne suštinsko) definicije iz |25| utoliko što posmatramo samo dati jezik L dok se u |25| (kao i u |37|, |2|) uvodi i (prebrojivo) beskonačan skup novih konstanti. No, svejedno, bez konstanti ne možemo. Pretpostavljamo u svim opštim razmatranjima da je L jezik prvog reda, što više nećemo posebno naglašavati, (konačan ili beskonačan) koji sadrži bar jednu konstantu. Za osnovne logičke simbole uzimamo $\sim$(negacija), $\&$(konačna konjunkcija), $\exists$(egzistencijalni kvantifikator) i (u slučaju da je L beskonačan jezik) $\bigwedge$(beskonačna konjunkcija), a ostale $\vee$(konačna disjunkcija), $\forall$(univerzalni kvantifikator), $\rightarrow$(implikacija) i $\bigvee$(beskonačna disjunkcija), definišemo na uobičajen način preko osnovnih.

Neka je $\langle C,\leq,0\rangle$ parcijalno uredjen skup sa najmanjim elementom 0, AT(L) skup atomarnih i SENT(L) skup svih rečenica jezika L (pisaćemo i samo, kad kontekst dozvoli, AT, odnosno SENT).

Definicija 1.1 Unarna relacija $||\!-$ nad skupom CxSENT je forsing relacija ako ispunjava sledeće uslove:

(1) uslov saglasnosti: za svako $p,q\in C$, za svako $\phi\in AT$ $(p,\phi)\in ||\!-$ i $p\leq q$ implicira $(q,\phi)\in ||\!-$;

ako je L jezik s jednakošću zahtevamo takodje

(1)(i) za svako $p\in C$ i svaki zatvoren term t postoji $q\in C$, $p\leq q$ i $(q,t=t)\in ||\!-$;

(1)(ii) za sve zatvorene terme t_1,t_2, za sve atomarne formule $\phi(v)$ (s najviše jednom slobodnom promenljivom) i za svako $p\in C$ postoji $q\in C$, $q\geq p$ takvo da ili $(p,t_1=t_2)\notin ||\!-$ ili $(p,\phi(t_1))\notin ||\!-$ ili $(q,\phi(t_2))\in ||\!-$;

(2) $(p,\phi_1\&\phi_2)\varepsilon\ ||\!-$ akko $(p,\phi_1)\varepsilon\,||\!-$ i $(p,\phi_2)\varepsilon\,||\!-$;

kada je u pitanju beskonačna logika, uvodimo i

(2)(i) $(p,\Lambda\Phi)\varepsilon\ ||\!-$ akko (p,ϕ) za svako $\phi\varepsilon\Phi$;

(3) $(p,\sim\phi)\varepsilon||\!-$ akko za svako $q\geq p$ $(q,\phi)\not\varepsilon\ ||\!-$;

(4) $(p,\exists v\phi(v))\varepsilon\ ||\!-$ akko za neki zatvoren term t $(p,\phi(t))\varepsilon\,||\!-$.

Umesto $(p,\phi)\varepsilon\,||\!-$ i $(p,\phi)\not\varepsilon\,||\!-$ koristićemo nadalje standardniju notaciju: $p\,||\!-\phi$, odnosno $p\,||\!\not-\phi$. Elemente skupa C zovemo uslovima, a $p||\!-\phi$ čitamo: (uslov) p forsira ϕ. Ako $p\,||\!-\sim\sim\phi$ kažemo i da p slabo forsira ϕ.

U opisu kakve forsing relacije (nad CxSENT(L)) formulisaćemo samo njen presek sa CxAT(L) (koji je očigledno u potpunosti odredjuje).

Definicija 1.2 Forsing sistem je uredjena trojka $<C, ||\!-, L>$, gde je C parcijalno uredjen skup sa najmanjim elementom, L data logika i $||\!-$ forsing relacija (skupa CxSENT(L)).

Definicija 1.3 Neka je $<C, ||\!-, L>$ forsing sistem, gde je L konačna logika. Za $p\varepsilon C$

$T^C[p] = \{\phi\varepsilon SENT|p\,||\!-\sim\sim\phi\}$.

$T^C[0]$ (0-najmanji element skupa C) kraće se piše T^C.

T^C zovemo forsing pridruženjem (the companion).

Direktno, na osnovu definicije forsing relacije, proizilaze stavovi:

Teorema 1.4 *(a)* Za svaki uslov p i svaku rečenicu ϕ iz $p\,||\!-\phi$ i $q\geq p$ sledi $q||\!-\phi$.

(b) Za svaki uslov p i svako $\phi\varepsilon SENT$ $p||\!\not-\sim\phi$ ili $p\,||\!\not-\phi$.

(c) Za svaki uslov p i svako $\phi\varepsilon SENT$ postoji $q\varepsilon C$, $q\geq p$ i $q\,||\!-\phi$ ili $q\,||\!-\sim\phi$.

Lema 1.5 *(a)* Ako $p\,||\!-\phi$ tada $p||\!-\sim\sim\phi$;

(b) $p\,||\!-\sim\phi$ akko $p\,||\!-\sim\sim\sim\phi$;

(c) $p\,||\!-\sim\sim\&\Phi$ akko $p||\!-\&\sim\sim\Phi$;

(d) $p\,||\!-\sim\exists v\sim\phi(v)$ akko za svaki zatvoren term t $p\,||\!-\sim\sim\phi(t)$.

U |26| je dat iscrpan (sintaktički) dokaz sledeće teoreme:

Teorema 1.6 Neka je <C, ||–, L> forsing sistem, gde je L konačna logika (jezik L je proizvoljne kardinalnosti). Tada za svako $p \in C$

(1) $T^C[p]$ je (konsistentan) deduktivno zatvoren skup (iz $T^C[p] \vdash_L \phi$ sledi $\phi \in T^C[p]$ za $\phi \in SENT$) i

(2) ako je $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ logički valjana formula ($\vdash_L \phi(v_1, \ldots, v_n)$) onda za sve zatvorene terme $t_1, \ldots, t_n$ jezika L $\phi(t_1, \ldots, t_n) \in T^C[p]$.

Sistem aksioma korišćen u dokazu prirodno se deli u sledeće grupe:

(A) (aksiome nastale od tautologija propozicionalnog računa)

PC1 $\phi \to (\psi \to \phi)$

PC2 $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$

PC3 $(\sim\phi \to \sim\psi) \to (\psi \to \phi)$

PC4a $\phi \& \psi \to \phi$

PC4b $\phi \& \psi \to \psi$

PC5 $(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi \& \chi))$

PC6a $\phi \to \phi \vee \psi$

PC6b $\psi \to \phi \vee \psi$

PC7 $(\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \vee \psi \to \chi))$

(B) bazične kvantifikatorske aksiome

PC8 $\forall v \phi(v) \to \phi(t)$ gde je t term slobodan za promenljivu v u ϕ

PC9 $\forall v \psi(v) \to (\exists v \chi(v) \to \phi)$ ϕ je formula koja ne sadrži slobodnu promenljivu v, a $\psi(v) \to (\chi(v) \to \phi)$ je iz (A)

i (D) generalisane kvantifikatorske aksiome

ϕ je kvantifikatorska aksioma ako postoji konačan niz formul. $\phi_1, \ldots, \phi_n \equiv \phi$ takav da za i, $1 \leq i \leq n$ ϕ_i je iz (B) ili postoje indeksi $j,k<i$ takvi da ϕ_i je $\phi_j \& \phi_k$ ili postoji $m<i$ i ϕ_i je $\forall v \phi_m(v)$.

Konačno, ako je L jezik sa jednakošću, tu je i

(C)

PC10 $\forall v(v=v)$

PC11 $\forall v \forall u(v=u \rightarrow (\phi \rightarrow \phi'))$ gde je u promenljiva slobodna za promenljivu v u formuli ϕ i ϕ' je rezultat zamene slobodnih pojavljivanja od v u ϕ (ne nužno svih) promenljivom u.

Od pravila izvodjenja imamo samo

(E) iz ϕ i $\phi \rightarrow \psi$ sledi ψ (modus ponens).

Ovaj sistem je kompletan, drugim rečima, valjanost i logička valjanost se poistovećuju (tj. $\vdash \phi$ akko $\models \phi$). On se evidentno može reducirati u delu (A), što bi, pak, samo učinilo mnoge dokaze dužim (npr. kompletnosti), ali zato gore pomenuti kraćim.

Sam izbor sistema je u ovom slučaju irelevantan i stvar je, u prvom redu, procene autora o njegovoj pogodnosti za izlaganje tehničkih detalja. Dokaz, inače, sledi ideju iz |2|, gde je dobijen analogan rezultat za konačni forsing (i recimo uzgred, korišćen drugi sistem aksioma). U vezi sa teoremom 1.6, mišljenja smo da je bitno uočiti sledeće:

Prvo, uslov (ma koji) p zapravo forsira (a ne samo slabo forsira) svaki aksiom. Ovo je posledica lema 1.5 i

Leme 1.7 $p \Vdash \sim(\sim\sim\phi \& \psi)$ akko $p \Vdash \sim(\phi \& \psi)$,

koje daju

Lemu 1.8 $p \Vdash \sim\sim(\phi \rightarrow \psi)$ akko $p \Vdash (\phi \rightarrow \psi)$.

Naravno, uslov je da se držimo definicije 1.1, jer npr. u |2| u okviru definicije je dato

$p \Vdash \phi \vee \psi$ akko $p \Vdash \phi$ ili $p \Vdash \psi$

dok mi imamo

Lemu 1.9 Postoji $r \geq q$, $r \Vdash \phi \vee \psi$ akko postoji $r \geq q$, $r \Vdash \phi$ ili $r \Vdash \psi$.

Drugo, rezultat teoreme 1.6 se ne može generalisati, tj. analogno tvrdjenje za beskonačne logike s jednakošću ne važi u opštem čak i ako ostanemo pri istoj "sintaktičkoj aparaturi" obogaćenoj samo uvodjenjem aksiome (sledimo i dalje notaciju iz |26|)

$PC_{\infty}2$ $\Lambda\Phi \rightarrow \phi$ za svako ϕ iz Φ.

Napomenimo odmah da važi

<u>*Lema 1.10*</u> Svaki uslov p slabo forsira $\Lambda\Phi\to\phi$ i s te strane smo mirni. Ali pokušajmo da dokažemo $p\,||\!-\sim\sim PC11$ (dokaz smo u slučaju konačne logike bazirali na definiciji 1.1 i indukciji po složenosti formule). Primetimo prvo da

$p\,||\!-\sim\sim\forall v\forall u(v=u\to(\phi\to\phi'))$ akko za sve zatvorene terme t_1,t_2 $p\,||\!-\sim(t_1=t_2\ \&\ \phi(t_1)\ \&\ \sim\phi'(t_1,t_2))$.

Uzmimo da je formula ϕ beskonačna konjukcija $\Lambda\Psi$ i probajmo, imajući u vidu induktivnu pretpostavku, dokaz dati *reductio ad absurdum*. Hipoteza je, dakle, da postoji uslov $q\geq p$ takav da $q\,||\!-t_1=t_2\&\Lambda\Psi\&\sim\Lambda\Psi'$. Iz $q\,||\!-t_1=t_2$ i $q\,||\!-\psi$ gde $\psi\varepsilon\Psi$ sledi $q\,||\!\not-\sim\psi'$ pa izvodimo $q\,||\!\not-\sim\Lambda\sim\sim\Psi'$. (U protivnom bi,naime, imali da za svako $r\geq q$ postoji formula $\psi'\varepsilon\Psi'$ takva da $r\,||\!\not-\sim\sim\psi'$. Fiksirajmo $r\geq q$ i $\psi'\varepsilon\Psi'$ tako da $r\,||\!\not-\sim\sim\psi'$. Onda za neko $s\geq r(\geq q)$ $s\,||\!-\sim\psi'$ ali i $s\,||\!-t_1=t_2$ i $s\,||\!-\psi$, što je kontradiktorno sa induktivnom hipotezom). No, da li $q\,||\!\not-\sim\Lambda\sim\sim\Psi'$ protivureči $q\,||\!-\sim\Lambda\Psi'$? Jedinstvenog odgovora kao što ćemo videti (lema 1.12 i primer 1.22), nažalost, nema u opštem, tj. sama definicija forsing relacije ga ne daje i jedini izlaz je ili u postavljanju izvesnih novih uslova ili u preformulaciji skupa $T^C[p]$ (naravno, intencija nam je da teorema 1.6 ostane u važnosti).

Tako ako je u pitanju $L_{\kappa\mu}$ $(\kappa>\omega)$, logika važi (podrazumevamo, što ćemo i ubuduće činiti, aksiomu izbora):

<u>*Lema 1.11*</u> Ako parcijalno uredjen skup uslova $<P,\leq>$ ima svojstvo da za svako $\lambda<\kappa$ svaki monotoni niz $p_0\leq p_1\leq\cdots\leq p_\alpha\leq\cdots$, $\alpha<\lambda$ ima gornje ograničenje tada za svaki uslov p (i svaki skup formula Φ, $|\Phi|<\kappa$)

$p\,||\!-\Lambda\sim\sim\Phi$ ako i samo ako $p\,||\!-\sim\sim\Lambda\Phi$ (*).

<u>*Dokaz*</u> Razmotrimo samo manje trivijalnu implikaciju. Neka je $\Phi=\{\phi_\gamma\,|\gamma<\lambda(<\kappa)\}$, $p,q\varepsilon P$, $q\geq p$ i $p\,||\!-\Lambda\sim\sim\Phi$ i pretpostavimo da smo za dato $\alpha<\lambda$ već konstruisali niz $q\leq p_0\leq\cdots\leq p_\beta\leq\cdots$, $\beta<\alpha$ tako da $p_\beta\,||\!-\phi_\gamma$ za svako $\gamma\leq\beta$. Ako je α granični ordinal upravo nam učinjena pretpostavka o parcijalno uredjenom skupu $<P,\leq>$ omogućava da proširimo niz nekim uslovom p_α ($p_\alpha\geq p_\beta$ za $\beta<\alpha$) koji forsira sve formule ϕ_γ, $\gamma\leq\alpha$ (sada jednostavno možemo da "premostimo jaz" izmedju naslednih i graničnih ordinala) dok slučaj α je nasledni ordinal nije ni predstavljao problem

(uporediti sa 1.5(c)). Tako konačno dobijamo i p_λ takvo da $p_\lambda \geq q$ i $p_\lambda \Vdash \wedge\Phi$.

Primetimo samo na kraju da druga (više trivijalna) implikacija važi uvek.

Iz (*) direktno proizilazi $p \Vdash \sim\sim PCll$ i ako je L beskonačna logika jer

Lema 1.12 Uslovi "(*)" i "za svaki uslov p $p \Vdash \sim\wedge\Phi$ akko $p \Vdash \sim\wedge\sim\sim\Phi$" su ekvivalentni.

Drugi način je da na adekvatan način, kao što je rečeno, ako već ne želimo da definiciju forsing relacije opterećujemo "amandmanima", definišemo $T^C[p]$. I kao što smo "slabo forsiranje" uveli zbog modus ponensa da bi mogli "izvući" dvostruku negaciju ispred $\wedge$, koristimo "slabe formule" (u oznaci ϕ^{wk}).

Definicija 1.13 Za formulu ϕ (beskonačne) logike L definišemo ϕ^{wk} na sledeći način:

(i) ako je ϕ atomarna formula, ϕ^{wk} je $\sim\sim\phi$;

(ii) ako je ϕ formula $\wedge\Psi$, onda $(\wedge\Psi)^{wk}$ je $\wedge\Psi^{wk}$ (tj. $\bigwedge_{\psi\in\Psi}\psi^{wk}$), (ovaj slučaj podrazumeva i konačnu konjunkciju);

(iii) ako je ϕ $\exists v\psi(v)$, $(\exists v\psi(v))^{wk}$ je $\sim\sim\exists v\psi^{wk}(v)$ i

(iv) ako je ϕ $\sim\psi$ tada $(\sim\psi)^{wk}$ je $\sim\psi^{wk}$.

Lema 1.14 Ako je L konačna logika i $\langle C, \Vdash, L\rangle$ forsing sistem, onda (za svaki uslov p i svaku formulu ϕ logike L)

$p \Vdash \sim\sim\phi$ ako i samo ako $p \Vdash \phi^{wk}$.

Dokaz Rutinska provera indukcijom po složenosti formule (od pomoći je i $p \Vdash \sim\sim\exists v\phi(v)$ akko $p \Vdash \sim\sim\exists v\sim\sim\phi(v)$).

Lema 1.15 $p \Vdash \sim\sim\phi^{wk}$ ako i samo ako $p \Vdash \phi^{wk}$.

(Mala) napomena: Nedoslednost u formulisanju tvrdjenja - pominjanje, odnosno nepominjanje forsing sistema - naša je odbrana od monotonog ponavljanja "Ako je $\langle C, \Vdash, L\rangle$ forsing sistem...". Jer, jasno je, on je uvek, dakle, i nepomenut, prisutan (u ovoj glavi mi ništa drugo i ne radimo do ispitujemo opšta svojstva forsing relacije) i to apsolutno proizvoljan ukoliko već preostali deo teksta ne uvodi izvesne restrikcije.

Zaključujemo da su "slabe formule" i više nego ispunile zadatak, mada se od toga nećemo posebno okoristiti (ne samo da smo "izvukli" dvostruku negaciju ispred Λ, mi smo je zapravo eliminisali):

$p \Vdash \Lambda \sim\sim \Phi^{wk}$ akko $p \Vdash \Lambda \Phi^{wk}$ akko $p \Vdash \sim\sim \Lambda \Phi^{wk}$).

Tek sada smo ujedno u mogućnosti da za "potrebe" beskonačne logike uključimo i:

$PC_{\infty}1$ $\qquad \Lambda \sim\sim \Phi \to \Lambda \Phi$

E_{∞} $\qquad$ iz $\psi \to \phi$ za svako $\phi \in \Phi$ sledi $\psi \to \Lambda \Phi$

a definiciju generalisane kvantifikatorske aksiome prirodno uopštimo:

D_{∞}: U logici $L_{\kappa\lambda}$ ϕ je kvantifikatorska aksioma ako postoji niz $(\phi_{\gamma})_{\gamma \leq \delta}, \delta < \lambda$, formula logike $L_{\kappa\lambda}$ takav da ϕ_{δ} je ϕ i za $\gamma \leq \delta$

(1) ϕ_{γ} je iz (B) ili (2) za neki podniz $(\phi_{\alpha_\beta})_{\beta < \xi}, \xi < \gamma$ i $\alpha_{\beta} < \gamma$ ϕ_{γ} je $\bigwedge_{\beta < \xi} \phi_{\alpha_{\beta}}$ ili (3) postoji indeks $\alpha < \gamma$ za koji je ϕ_{γ} $\forall v \phi_{\alpha}(v)$.

Da to ranije nije bilo moguće kaže nam

Teorema 1.16 Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) (*)

(b) za svaki uslov p $p \Vdash \sim\sim\phi$ akko $p \Vdash \phi^{wk}$,

(c) za svaki uslov p $p \Vdash \sim\sim PC_{\infty}1$

i (d) za svaki uslov p iz $p \Vdash \sim\sim(\psi \to \phi)$ za svako $\phi \in \Phi$ sledi $p \Vdash \sim\sim(\psi \to \Lambda \phi)$.

Dokaz (a) $\to$ (d)

S ozbirom da slabi forsing očuvava modus ponens (ovo tvrdjenje je deo teoreme 1.6) prema lemi 1.7 (d) je ekvivalentno sa

(d') za svaki uslov p $p \Vdash \sim\sim(\bigwedge_{\phi \in \Phi} \sim\sim(\psi \to \phi) \to (\psi \to \Lambda \Phi))$, tj. $p \Vdash \sim(\bigwedge_{\phi \in \Phi} \sim(\psi \& \sim\phi) \& \psi \& \sim \Lambda \Phi)$.

Smatramo da je jednostavnije proveriti (a) $\to$ (d').

Pretpostavimo da važi (a) ali da za neki uslov p postoji uslov $q \geq p$ takav da $q \Vdash \bigwedge_{\phi \in \Phi} \sim(\psi \& \sim\phi) \& \psi \& \sim\Lambda \Phi$. Prema 1.12 $q \Vdash \sim \Lambda \sim\sim \Phi$ pa za neku rečenicu $\phi_o \in \Phi$ $q \not\Vdash \sim\sim\phi_o$. Znači za neki uslov $r \geq q$ $r \Vdash \sim\phi_o$, no tada i $r \Vdash \sim(\psi \& \sim\phi_o)$ i $r \Vdash \psi \& \sim\phi_o$, kontradikcija.

(d) → (c)

Kako (za svako $\phi\varepsilon\Phi$) $p||\!-\sim\sim(\Lambda\sim\sim\Phi\to\sim\sim\phi)$ (lema 1.10) i $p||\!-\sim\sim(\sim\sim\phi\to\phi)$ to prema lemi 1.5(c) $p||\!-\sim\sim((\Lambda\sim\sim\Phi\to\sim\sim\phi)\&(\sim\sim\phi\to\phi))$ a onda i $p||\!-\sim\sim(\Lambda\sim\sim\Phi\to\phi)$ (primetimo samo da su sve tautologije izvedive iz skupa aksioma PC1-7 pomoću modus ponensa) pa zbog (d) $p||\!-\sim\sim(\Lambda\sim\sim\Phi\to\Lambda\Phi)$, tj. $p||\!-\sim(\Lambda\sim\sim\Phi\&\sim\Lambda\Phi)$.

(c) → (b)

Uz pretpostavku da (c) važi, (b) dokazujemo indukcijom po složenosti formule. Da se ne bi ponavljali (videti teoremu 1.14) prelazimo odmah na slučaj: formula je oblika $\Lambda\Phi$.

$p||\!-(\Lambda\Phi)^{wk}$ akko za svako $\phi\varepsilon\Phi$ $p||\!-\phi^{wk}$ akko (po induktivnoj pretpostavci) za svako $\phi\varepsilon\Phi$ $p||\!-\sim\sim\phi$ akko $p||\!-\Lambda\sim\sim\Phi$ akko $p||\!-\sim\sim\Lambda\Phi$ (u poslednjem koraku koristimo: iz $p||\!-\Lambda\sim\sim\Phi$ i (c) sledi da za svaki uslov $q\geq p$ $q||\!\not-\sim\Lambda\Phi$, dakle, $p||\!-\sim\sim\Lambda\Phi$).

(b) → (a)

Upravo smo pokazali da uvek $p||\!-(\Lambda\phi)^{wk}$ akko $p||\!-\Lambda\sim\sim\Phi$ a (b) nam daje i $p||\!-(\Lambda\Phi)^{wk}$ akko $p||\!-\sim\sim\Lambda\Phi$.

Prema tome, proširenje aksiomatike beskonačne logike (ne nužno s jednakošću) bilo sa aksiomom (tačnije rečeno aksiom šemom) $PC_\infty 1$ bilo s pravilom izvodjenja E_∞ (videti primedbu nakon teoreme 1.20) uslovljava isti korak.

Prirodno je na ovom mestu postaviti i pitanje svrsishodnosti definisanja forsing relacije uzimanjem za osnovni logički simbol Λ radije nego V, jer sa (|25|) $p||\!-V\Phi$ akko za neko $\phi\varepsilon\Phi$ $p||\!-\phi$ odmah bismo imali i tako željeno $p||\!-\Lambda\Phi$ akko $p||\!-\Lambda\sim\sim\Phi$ (gde sada $\Lambda\Phi$ zamenjuje $\sim V\sim\Phi$) pa onda i

$p||\!-\phi^{wk}$ akko $p||\!-\sim\sim\phi$

što bi nas, znači, oslobodilo uvodjenja "slabih formula" (videti primer 1.22). Opravdanje, pre svega, vidimo u privrženosti navedenoj (i često korišćenoj) prezentaciji aksiomatike beskonačne logike (|23|). Primetimo još da su u |2|,|37| simboli & i v posmatrani nezavisno jedan od drugog no kada se, kao u ovom slučaju, potencira sintaktički pristup i to posebno i za beskonačne logike (konačne logike nam i, inače, nisu zadavale, bar kad je reč o formulaciji skupa $T^C[p]$, problem-teorema 1.6) jasno je da ćemo minimizirati skup logičkih simbola koje koristimo.

Lema 1.17 Ako $p\|\!-(\phi\to\psi)^{wk}$ i $p\|\!-\phi^{wk}$, onda $p\|\!-\psi^{wk}$.

Lema 1.18 *(a)* $p\|\!-(\Lambda\sim\sim\Phi\to\Lambda\Phi)^{wk}$ (tj. $p\|\!-(PC_\infty 1)^{wk}$);

(b) $p\|\!-(\bigwedge_{\phi\varepsilon\Phi}(\psi\to\phi)\to(\psi\to\Lambda\Phi))^{wk}$; odatle iz $p\|\!-(\psi\to\phi)^{wk}$ za svako $\phi\varepsilon\Phi$ sledi $p\|\!-(\psi\to\Lambda\Phi)^{wk}$;

(c) Ako je $\phi(v_1,\dots,v_\mu)$, $\mu<\lambda$ kvantifikatorska formula, tada za sve zatvorene terme $t_1,\dots,t_\mu$ $p\|\!-\phi^{wk}(t_1,\dots t_\mu)$.

Dokaz *(a)* $p\|\!-(\Lambda\sim\sim\Phi\to\Lambda\Phi)^{wk}$ je (prema definiciji implikacije $(\to)$, definiciji 1.13 i lemi 1.15) ekvivalentno sa: za svako $q\geq p$, $q\|\!\not-\Lambda\Phi^{wk}$ ili $q\|\!\not-\sim\Lambda\Phi^{wk}$.

(b) Kao i u delu (a) izvodimo

$$p\|\!-(\bigwedge_{\phi\varepsilon\Phi}(\psi\to\phi)\to(\psi\to\Lambda\Phi))^{wk} \quad \text{akko} \quad p\|\!-\sim(\bigwedge_{\phi\varepsilon\Phi}(\psi\to\phi)^{wk}\&\psi^{wk}\&\sim\Lambda\Phi^{wk})$$

a pretpostavka da postoji uslov $q\geq p$ takav da

$$q\|\!-\bigwedge_{\phi\varepsilon\Phi}(\psi\to\phi)^{wk}\&\psi^{wk}\&\sim\Lambda\Phi^{wk}$$

vodi u kontradikciju (onda, naime, za neko $\phi_o\varepsilon\Phi$ $q\|\!\not-\phi_o^{wk}$ dok s druge strane $q\|\!-(\psi\to\phi_o)^{wk}$ i $q\|\!-\psi^{wk}$, te stoga i $q\|\!-\phi_o^{wk}$).

(c) Razmotrimo posebno svaki slučaj (videti definiciju kvantifikatorske formule). (1) je već dokazano (teorema 1.6 i lema 1.14). Dokaz za (2) i (3) se bazira na indukciji. (2) je trivijalno, a za (3) (ϕ_γ je $\forall v\phi_\alpha(v,v_1,\dots,v_\mu)$, $\alpha<\gamma$) imamo: prema induktivnoj hipotezi za sve zatvorene terme $t_o,t_1,\dots,t_\mu$ $p\|\!-\phi_\alpha^{wk}(t_o,t_1,\dots,t_\mu)$, tj. (lema 1.15) $p\|\!-\sim\sim\phi_\alpha^{wk}(t_o,t_1,\dots,t_\mu)$, a ovo je ekvivalentno sa, redom

(lema 1.5(d)) $\quad p\|\!-\sim\exists v\sim\phi_\alpha^{wk}(v,t_1,\dots,t_\mu)$

(lema 1.5(b)) $\quad p\|\!-\sim\sim\sim\exists v\sim\phi_\alpha^{wk}(v,t_1,\dots,t_\mu)$

(definicija 1.13) $\quad p\|\!-(\forall v\phi_\alpha(v,t_1,\dots,t_\mu))^{wk}$.

Preostaje nam još samo da uvedemo

Definiciju 1.19 Neka je $\langle C,\|\!-,L\rangle$ forsing sistem (gde je L ma kakva logika). Za $p\varepsilon C$

$$T^C[p] = \{\phi\varepsilon SENT \mid p\|\!-\phi^{wk}\}$$

$T^C[0]$ se kraće piše T^C

(zadržali smo notaciju iz definicije 1.3 jer definicija 1.19 je samo njeno uopštenje za slučaj L je beskonačna logika - - videti lemu 1.14) i zaključimo da važi

Teorema 1.20 Neka je $\langle C, \|\!-, L\rangle$ forsing sistem, gde je L beskonačna logika sa skupom aksioma i pravilima izvodjenja

$$\Lambda_0 = \{PC1\text{-}11, PC_\omega 1, PC_\omega 2, \text{modus ponens}, D_\omega, E_\omega\}.$$

Tada za svako $p \in C$

(1) $T^C[p]$ je deduktivno zatvoren skup;

(2) Ako je $\phi(v_1,\ldots,v_\mu)$ formula logike L i $\vdash_L \phi(v_1,\ldots,v_\mu)$, onda za sve zatvorene terme $t_1,\ldots,t_\mu$ $\phi(t_1,\ldots,t_\mu) \in T^C[p]$.

Primedba. Ponovo smo aksiomatiku (koja inače nije kompletna-iz $\models \phi$ ne sledi nužno $\vdash \phi$, |8|, |26|) "preopteretili". Lako se uvidja npr. da $PC_\infty 2$ i E_∞ daju $PC_\infty 1$ (ovde mislimo na direktan dokaz, a ne onaj prezentiran u |26|, gde, pomenimo i to, takodje nalazimo i $p \|\!- \bigwedge_{\phi\in\Phi}(\psi\to\phi)\to(\psi\to\bigwedge\sim\sim\Phi)$ (u proveri koristiti lemu 1.7), odakle gotovo direktno: za svako p $p\|\!-\sim\sim P_\infty$ implicira: forsing relacija očuvava E_∞, tj. (za svako p) iz $p\|\!-\sim\sim(\psi\to\phi)$ za svako $\phi\in\Phi$ sledi $p\|\!-\sim\sim(\psi\to\bigwedge\Phi)$, no to je samo deo tvrdjenja 1.16.

Navedimo neke primere forsing sistema.

Primer 1.21 |25| Neka je μ klasa modela konačnog jezika L, L_A fragment logike $L_{\omega_1\omega}$ a Φ, neki njegov deo koji sadrži sve atomarne formule i zatvoren je u odnosu na (uzimanje) podformule (za svako $\phi\in\Phi$ $\mathrm{sub}(\phi)=\{\psi\mid\psi$ je podformula formule $\phi\}\subseteq\Phi$) i C beskonačan skup konstanti takav da $L\cap C=\emptyset$. Neka je, dalje, K_A najmanji fragment logike $L(C)_{\omega_1\omega}$ koji sadrži L_A (lako se uvidja da su njegovi elementi formule dobijene zamenom konačno mnogo slobodno promenljivih konstantama iz C u formulama fragmenta L_A) i $\Phi(C)$ skup $\{\phi(c_1,\ldots,c_n)\in SENT(K_A) \mid \phi(v_1,\ldots,v_n)\in\Phi\}$. Tada je $\langle P, \|\!-, K_A\rangle$ forsing sistem gde je $P=\{p \mid p$ je konačan podskup skupa $\Phi(C)$ realiziv u proširenju nekog modela M iz $\mu\}$ skup uslova, $\leq$ relacija inkluzije i za $\phi(c_1,\ldots,c_n)\in AT(L(C))$ i $p\in P$ $p\|\!-\phi(c_1,\ldots,c_n)$ ako i samo ako $\phi(c_1,\ldots c_n)\in p$.

Ukoliko za fragment L_A uzmemo baš L i za Φ skup atomarnih i negacije atomarnih (bazičnih) formula, a za klasu μ klasu modela teorije $T\cap\Pi_1$ ($=\{\phi\mid\phi$ je univerzalna rečenica jezika L i $T\vdash\phi\}$), pri čemu je L jezik u kome je teorija T definisana, imamo Robinsonov konačni forsing (|2|,|21|,|37|). Svojstva,pak, forsing sistema kod koga je Φ skup Σ_n U Π_n formula i u klasa modela teorije $T \cap \Pi_{n+1}$ (L_A je, još uvek, L) u korelaciji su sa svojstvima konačnog forsinga (slikovito rečeno radi se o "translaciji za n") |16|.

Osvrnimo se ovom prilikom, kad je već o konačnom forsingu (i ne samo njemu) reč, na još jedan detalj. Naime, tako dugo dok smo "u sferi sintakse" u dobijanju za nas relevantnih rezultata, dovoljno je pretpostaviti da je skup (novih) konstanti C beskonačan, npr. prebrojivo beskonačan. Situacija se, medjutim, menja kad se predje na semantiku. Tako u samom pojmu generičnog modela nailazimo na preslikavanje skupa konstanti C na skup generatornih elemenata modela, što u opštem teoretskom razmatranju (egzistencija generičnog modela nije zagarantovana u slučaju neprebrojivog jezika L) znači da nam treba "neiscrpna zaliha" konstanti, dakle, prava klasa (podrazumevamo ovde da ne želimo nikakvih ograda po pitanju kardinalnosti generičnih modela - u |25| skup C (i uopšte fragment K_A) je prebrojiv, pa su i svi generični modeli, kao kanonički, automatski prebrojivi). Na raspolaganju su nam dve mogućnosti: ili da po potrebi "dopunjavamo" skup konstanti (s tim u vezi videti teoremu 2.13 u |37|) ili da odmah za C uzmemo pravu klasu. Ovo drugo istina nije u skladu sa definicijom 1.1, no, istina je isto tako da bi se ta definicija mogla i preinačiti dozvoljavajući da su uslovi elementi prave klase. Dosad navedeni rezultati ostali bi u važnosti i jedina razlika bila bi u promeni prirode objekata sa kojima se radi.

Primer 1.22 Neka je M prebrojiv model prebrojivog jezika L i $\Delta=\{\phi_n \mid n\in\omega\}$ njegov dijagram (skup bazičnih rečenica jezika L(M) koje važe u M). Posmatrajmo forsing sistem $\langle P, \Vdash, L(M)_{\omega_1\omega}\rangle$ gde $P=\{p_n \mid n\in\omega\}$ je skup uredjen relacijom inkluzije i $p_n=\{\phi_i \mid 0\leq i\leq n\}, n\in\omega$ i za $p_i\in P$ i $\phi\in AT(L(M))$ $p_i \Vdash \phi$ ako i samo ako $\phi\in p_i$. Lako se uvidja da svaki uslov p_j forsira $\bigwedge\sim\sim\Delta$, ali ne i $\sim\sim\bigwedge\Delta$ (tj. $p_j \Vdash \bigwedge\sim\sim\Delta$ i $p_j \Vdash \sim\bigwedge\Delta$).

Uredimo sada skup $\Delta=\Phi_1 \cup \Phi_2$ (Φ_1 i Φ_2 su, respektivno, skupovi atomarnih i negacije atomarnih rečenica iz Δ), tako da je $\Phi_1=\{\phi_n \mid n<\omega\}$ i $\Phi_2=\{\phi_{\omega+k} \mid k\in\omega\}$ i uzmimo da je

$P_1=\{p_\alpha \mid \alpha<\omega+\omega\}$, $p_\alpha=\{\phi_\beta \mid \beta\leq\alpha\}$ (npr. $p_\omega=\Phi_1 \cup \{\phi_\omega\}$). P_1 takodje uredjujemo relacijom inkluzije, a i forsing relaciju odredjujemo kao u prethodnom slučaju. Za forsing sistem $\langle P_1, ||\!-, L(M)_{\omega_1\omega}\rangle$ važi:

ako je $p=p_\alpha$ uslov i Φ skup rečenica jezika $L(M)_{\omega_1\omega}$ kardinalnosti $\leq\omega$, tada $p_\alpha ||\!- \sim\sim\wedge\Phi$ ako i samo ako $p_\alpha ||\!- \wedge\sim\sim\Phi$.

Pokažimo to. Kako je $\langle P_1,\subseteq\rangle$ linearno uredjen skup (s najmanjim elementom $p_o=\{\phi_o\}$) za svako $\beta,\gamma(<\omega+\omega)$ i svako $\phi\varepsilon L(M)_{\omega_1\omega}$

$$p_\beta ||\!- \sim\sim\phi \text{ ako i samo ako } p_\gamma ||\!- \sim\sim\phi.$$

S obzirom na to dovoljno je dokazati tvrdjenje za $\alpha=\omega$. Naime, to smo već ranije konstatovali, jedino je problematičan $(\leftarrow)$ smer, a uz hipotezu da tvrdjenje važi za barem jedno α lako se izvodi da važi za svako β; jer ako $\beta\neq\alpha$ i $p_\beta ||\!- \wedge\sim\sim\Phi$ onda i $p_\alpha ||\!- \wedge\sim\sim\Phi$ pa, dakle, i $p_\alpha ||\!- \sim\sim\wedge\Phi$, a odatle $p_\beta ||\!- \sim\sim\wedge\Phi$.

No, za svaku rečenicu ϕ logike $L(M)_{\omega_1\omega}$

$p_\omega ||\!- \phi$ ako i samo ako $p_\omega ||\!- \sim\sim\phi$ (onda jasno $p_\omega ||\!- \wedge\sim\sim\Phi$ implicira $p_\omega ||\!- \wedge\Phi$, dakle, i $p_\omega ||\!- \sim\sim\wedge\Phi$).

Dokaz je indukcijom po složenosti formule.

Ako je ϕ atomarna rečenica, u pitanju je neposredna posledica činjenice $\Phi_1\subseteq p_\omega$. Ako je ϕ oblika $\exists v\psi(v)$ i $p_\omega ||\!- \sim\sim\exists v\psi(v)$ za neko $n\varepsilon\omega$ i neki zatvoren term t $p_{\omega+n} ||\!- \psi(t)$. Stoga $p_\omega ||\!- \sim\sim\psi(t)$ i po induktivnoj pretpostavci $p_\omega ||\!- \psi(t)$, tj. $p_\omega ||\!- \exists v\psi(v)$. Ostali slučajevi su još lakši.

Napomena Ovim primerom smo pokazali da je uslov za parcijalno uredjen skup P dat u lemi 1.11, koji garantuje

$$p ||\!- \sim\sim\wedge\Phi \text{ ako i samo ako } p ||\!- \wedge\sim\sim\Phi$$

dovoljan, ali ne i potreban.

Mi smo pokazali da (*) implicira $T^C[p] \vdash PC11$ za svako p (tj. za svaku formulu ϕ koja pripada aksiom šemi PC11 $T^C[p] \vdash\phi$, odnosno $\phi\varepsilon T^C[p]$). Stoga u slučaju kada (*) ne važi, moramo da proveravamo posebno da li $T^C[p] \vdash PC11$ važi ili ne.

Sledeći primer u svakom slučaju potvrdjuje našu primedbu datu nakon leme 1.9.

Primer 1.23 Neka je L jezik koji sadrži (samo) relaciju jednakost = i M beskonačno prebrojiv model za L u kome se = interpretira kao relacija ekvivalencije tako da barem jedna klasa sadrži beskonačno mnogo elemenata. Neka je A jedna takva klasa i a,b dva elementa iz A. Neka je $\Delta_p=\Delta_1\cup\Delta_2$ pozitivni dijagram od M, gde je Δ_1 skup atomarnih rečenica u kojima se javlja konstanta c_a koja odgovara elementu a $(\Delta_2=\Delta_p-\Delta_1)$ i neka je Δ_p tako numerisano da $\Delta_1=\{\phi_n|n\varepsilon\omega\}$ i $\Delta_2=\{\phi_{\omega+k}|k<\omega\}$. Opet stavljamo $p_\alpha=\{\phi_\beta|\beta\leq\alpha\}$, $C=\{p_\alpha|\alpha<\omega+\omega\}$ i definišemo za jezik $L(M)_{\omega_1\omega}$ forsing relaciju kao ranije.

Sada ne postoji uslov koji bi slabo forsirao $c_a=c_b\to(\wedge\Delta_1\to\wedge\Delta_1')$, gde je Δ_1' skup rečenica dobijenih kao rezultat substitucije konstante c_a konstantom c_b u rečenicama iz Δ_1, jer

$$p_\omega||\!- c_a = c_b\&\wedge\Delta_1\&\sim\wedge\Delta_1'$$

Posebno ni jedan uslov ne forsira slabo $\forall v\forall u(v=u\to(\wedge\Delta_1(v)\to\wedge\Delta_1(u))$, gde $\Delta_1(v)$ i $\Delta_1(u)$ se dobijaju iz Δ_1 i Δ_1' zamenom konstanata c_a, c_b sa, respektivno, promenljivima v i u.

Konačno, primetimo da (*) nije i potreban uslov za: za svako p $T^C[p]\vdash PC11$. Pokazujemo to

Primerom 1.24. Neka je L jezik s jednakošću i bez funkcijskih simbola i konstanti i M beskonačno prebrojiv model za L u kome se = interpretira kao relacija identiteta. Numerišimo dijagram modela M $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$, gde $\Delta_1=\{c_a\neq c_b|a,b\varepsilon M,a\neq b\}$ $(\Delta_2=\Delta-\Delta_1)$ na sledeći način: $\Delta_1=\{\phi_n|n<\omega\}$, $\Delta_2=\{\phi_{\omega+k}|k<\omega\}$. Za skup uslova C uzimamo, kao i u prethodnim primerima, $\{p_\alpha|\alpha<\omega+\omega\}$, $p_\alpha=\{\phi_\beta|\beta\leq\alpha\}$ a i forsing relaciju $||\!-$ za jezik $L(M)_{\omega_1\omega}$ takodje definišemo standardno: za $p\varepsilon C$ i $\phi\varepsilon AT(L(M))$ $p||\!-\phi$ akko $\phi\varepsilon p$.

Lako se proverava da za svaki uslov p $p||\!-\forall v\forall u(v=u\to(\phi\to\phi'))$ (tj. za sve konstante c_a,c_b $p||\!-\sim(c_a=c_b\&\phi\&\sim\phi')$ dok s druge strane važi: za svako p $p||\!-\wedge\sim\sim\Phi$ i $p||\!-\sim\wedge\Phi$ gde je $\Phi=\{c_a=c_a|a\varepsilon M\}$.

2. SLABA INTERPOLACIONA TEOREMA ZA BESKONAČNE LOGIKE

Na primer iz |26| imamo odredjene primedbe. Kako smatramo da su one relevantne za ispitivanje i same date relacije i njene primene pozabavićemo se time detaljnije. Citiramo prvo primer.

Primer 1.25 |26| Neka su dati logika L (s pravilima izvodjenja Λ_o), konsistentna teorija T logike L, skupovi A_1 i A_2, respektivno, novih konstanti, odnosno relacijskih i funkcijskih simbola, pri čemu je $|A_2| \leq |A_1| = \bigcup_{\phi \in L} |\phi| \leq |L| = \kappa$ ($|\phi|$ je kardinalnost tranzitivnog zatvorenja formule ϕ) i skup $F \subseteq L(A_1 \cup A_2)$ koji ima sledeća svojstva:

(1) iz $\phi \in F$ sledi $sub(\phi) \subset F$;

(2) iz $\phi \in F$ sledi $\sim\phi \in F$;

(3) ako $\Phi \subseteq F$ i $|\Phi| < \kappa_o$ onda $\wedge\Phi \in F$;

(4) ako $\phi(v) \in F$ i $c \in A_1$ onda $\phi(c) \in F$

i (5) za svaku formulu ϕ iz F postoji konstanta c iz A_1 koja se ne javlja u ϕ,

i neka je κ_o supremum dužine dokaza u L, dakle, λ, ako je L fragment logike $L_{\lambda\mu}$ (podsećamo na definiciju: T $\vdash \phi$ akko postoji podskup Δ od T, takav da $|\Delta| < \kappa_o$ i $\vdash \wedge\Delta \to \phi$).

Skup uslova C (u F u odnosu na T) parcijalno uredjen relacijom inkluzije ima za elemente sve podskupove (p) skupa $SENT(F) = SENT(L(A_1 \cup A_2)) \cap F$ koji ispunjavaju

(i) ako $p \in C$ onda $|p| < \kappa_o$;

(ii) za $p \in C$ $T \cup p$ je konsistentna teorija u $L(A_1 \cup A_2)$

i (iii) formule koje se javljaju u uslovima nisu konjukcije

(Forsing?) relaciju (u $L(A_1 \cup A_2)$) $\Vdash (\subseteq C \times SENT(L(A_1 \cup A_2)))$ ponovo odredjujemo sa

$p \Vdash \phi$ ako i samo ako $\phi \in p$ (gde $\phi \in AT(L(A_1 \cup A_2))$).

Odmah uočavamo da u slučaju logike s jednakošću, bez naknadnih uslova za F, $\langle C, \Vdash, L(A_1 \cup A_2) \rangle$ uopšte ne mora biti forsing sistem. Štaviše ni tvrdjenje kao što je:

ako su t_1, t_2 zatvoreni termi koji se javljaju u F i $\phi(v)$ formula iz F tada

(i) $\emptyset \Vdash \sim\sim(t_1=t_2)$

(ii) za svako p postoji $q \supseteq p$ takvo da ili $p \nVdash t_1=t_2$ ili $p \nVdash \phi(t_1)$ ili $q \Vdash \phi(t_2)$

ne važi uvek.

Izgleda najprirodnije uvesti uslov da F sadrži kompletnu odgovarajuću finitarnu logiku i onda ako je λ singularan kardinal nužno oslabiti (3) kako bi (5) ostalo u važnosti. Uslov (3) je i inače suviše jak. Njega, recimo i to, skupovi $F\phi_1$, $F\phi_2$ i F_o, koje koristimo u dokazu oslabljene verzije interpolacione teoreme za beskonačne logike, u opštem i ne ispunjavaju; podsetimo se, premda ovde nije baš o tome reč, da iz definicije fragmenta L_A date beskonačne logike L kao njenog preseka sa kakvim tranzitivnim skupom A, koji ima odredjena svojstva, proizilazi samo da ako je Φ skup formula takav da $\Phi \subseteq L_A$ i $\Phi \varepsilon A$ tada i $\wedge\Phi \varepsilon L_A$ (|24|). Posmatrano i neovisno od teorije forsinga (3) je zajedno sa (4), bez naknadnih velikih ograničenja, u koliziji sa (5) za λ singularno.

Sledeća dva rezultata, ako se i ne radi o forsing relaciji, interesantna su sama po sebi, a u izvesnim slučajevima mogu biti i od koristi baš u primeni forsinga.

Neka je λ regularan kardinal (ovaj uslov uvodimo s jedinom namerom da pojednostavimo "priču"), $\mathcal{L}$ fragment logike L i A_1, A_2 i T kao u 1.25, a što se tiče skupa C isključujemo tačku (iii) koja, mišljenja smo, u datim razmatranjima nema posebnu funkciju. Onda za relaciju $\Vdash \subseteq C\times SENT(\mathcal{L}(A_1 \cup A_2))$ koju definišemo za atomarne rečenice na već poznat način, a za složenije na način na koji definišemo forsing relacije s tim što (za $p\varepsilon C$)

$p \Vdash \exists v\phi(v)$ akko postoji c iz A_1 tako da $p \Vdash \phi(c)$ (alternativa ovoj soluciji, ako bi se insistiralo na što većoj sličnosti sa forsing relacijom, bilo bi "pojačanje" skupa F sa (4') kao zamenom za (4): (4') ako je $\phi(v)\varepsilon F$ i t zatvoren term tada i $\phi(t)\varepsilon F$) važi:

<u>*Lema 1.26*</u> (i) $p \Vdash \phi^{wk}$ ako i samo ako $p \Vdash \sim\sim\phi^{wk}$

(ii) Ako je $\phi\varepsilon SENT(F)$, $p\varepsilon C$ i (1) $\phi\varepsilon P$, (2) $p \Vdash \phi^{wk}$, (3) $T \cup p \nvdash \sim\phi$ i (4) postoji q takvo da $q \supseteq p \cup \{\phi\}$ tada:

(a) (1)→(2), (b) (2)→(3) i (c) (3)→(4).

Dokaz (ii) (c) je trivijalno a (a) i (b) dokazujemo (simultano) indukcijom po složenosti formule ϕ. S obzirom na izvršene preformulacije dajemo dopunu (uz nužne korekcije) dokaza iz |23|.

Neka je $\Lambda\Phi\varepsilon p$, $q\supseteq p$ i $\phi\varepsilon\Phi$. Kako je $TUqU\{\phi\}$ konsistentno $r=qU\{\phi\}$ je uslov i po induktivnoj pretpostavci $r||-\phi^{wk}$. Proizilazi $p||-\sim\sim\phi^{wk}$, tj. $p||-\phi^{wk}$, dakle, i $p||-(\Lambda\Phi)^{wk}$.

Ako $p||-(\Lambda\Phi)^{wk}$, ali ne i $TUp|\not-\sim\Lambda\Phi$, onda je $TUpU\{\sim\Lambda\Phi\}$ konsistentno, pa je i za neko $\phi\varepsilon\Phi$ $TUpU\{\sim\Lambda\Phi,\sim\phi\}$ konsistentno. No, za $q\supseteq pU\{\sim\Lambda\Phi,\sim\phi\}(\varepsilon C)$ $q||-\sim\phi^{wk}$ je u protivurečnosti sa $p||-\phi^{wk}$, a iz $q||\not-\sim\phi^{wk}$ sledi egzistencija uslova $r\supseteq q$ takvog da $r||-\phi^{wk}$ i stoga $TUr|\not-\sim\phi$ dok $\sim\phi\varepsilon r$ i opet kontradikcija.

Ako $\exists v\phi(v)\varepsilon p$ za neko $c\varepsilon A_1$ $TUpU\{\phi(c)\}$ je konsistentno; lako se proverava da je ovo tačno za svaku konstantu c iz A_1 koja se ne javlja u rečenicama uslova p. Analogno i za svako $q\supseteq p$ postoji c iz A_1 tako da je $r=qU\{\phi(c)\}$ uslov, pa kako, po induktivnoj hipotezi $r||-\phi^{wk}(c)$ (znači i $r||-\exists v\phi^{wk}(v)$) $p||-\sim\sim\exists v\phi^{wk}$, tj. $p||-(\exists v\phi)^{wk}$.

Iz $p||-(\exists v\phi(v))^{wk}$ sledi, pak, da postoji $r\supseteq p$ i c iz A_1 tako da $r||-\phi^{wk}(c)$. Pretpostavka $TUr|\not-\sim\phi(c)$ implicira $TUr|\not-\forall v\sim\phi(v)$, dakle, i $TUp|\not-\sim\exists v\phi(v)$.

Korolar 1.27 Za $\phi\varepsilon SENT(F)$ i $p\varepsilon C$
$p||-\phi^{wk}$ ako i samo ako $TUp|-\phi$.

Napomena. S obzirom na pretpostavku da je λ regularan kardinal ograničenje $|T|<\lambda$ je nepotrebno. U protivnom (kada je λ singularan kardinal) uvodimo ga zbog primene pravila E_∞.

Primetimo, takodje, da uslov (3) za skup F se ne koristi u dokazu leme 1.26.

Osvrnimo se u vezi sa primerom 1.25 i na dokaz stava kojim kompenziramo nevaženje interpolacione teoreme u opštem slučaju za beskonačne logike (|26|).

Teorema 1.28 Neka su ϕ_1 i ϕ_2 dve rečenice date logike $L_{\lambda\mu}$ s jednakošću (i pravilima izvodjenja Λ_o) i neka $|-\phi_1\to\phi_2$. Tada postoji rečenica ϕ te logike takva da $|-\phi_1\to\phi$ i $|-\phi\to\phi_2$ i da svaka konstanta i svaki funkcijski i relacijski simbol izuzimajući = koji se javlja u ϕ javlja se i u ϕ_1 i u ϕ_2.

Osnovna ideja, koja dobrim delom sugeriše i tehnička rešenja, preuzeta je iz dokaza interpolacione teoreme u (klasičnoj) $L_{\omega\omega}$ logici u kome smo uz pretpostavku da ne postoji interpolant za ϕ_1 i ϕ_2 izvodili egzistenciju teorije Hintike koja je sadržavala formule ekvivalentne sa ϕ_1 i $\sim\phi_2$, dakle i modela (odgovarajući kanonički model) za ϕ_1 i $\sim\phi_2$. Sada, shodno zameni $\models$ sa $\vdash$, koristimo sintaktičku aparaturu. U tom cilju proširujemo prvo jezik L skupom (novih) konstanti A kardinalnosti $\bigcup_{\xi\in I_\iota}|\xi|$ pa u $L(A)_{\lambda\mu}$ definišemo $F\phi_i$, $i=1,2$ kao skup formula sa svojstvom da se svaka konstanta i svaki funkcijski i relacijski (različit od =) simbol jezika L, koji se javlja u njima javlja i u ϕ_i i koje sadrže ne više konstanti iz A nego što je dozvoljeno kvantifikovanja (što nam uz ostalo ostavlja mogućnost da se, kada to bude potrebno "oslobodimo" tih konstanti). Sem treće $F\phi_i$ ispunjava sve ostale tačke definicije u 1.25. No, u svakom slučaju ako $\Phi\subseteq F\phi_i$ i $|\Phi|<cf\mu$ onda $\wedge\Phi\varepsilon F\phi_i$. Stoga i po analogiji sa dokazom Craig-ove teoreme i uzimamo za elemente skupa C sve podskupove $p=p_1\cup p_2$ skupa $SENT(F\phi_1\cup F\phi_2)$ (podrazumevamo $p_i\subseteq F\phi_i$, $i=1,2$) kardinalnosti manje od $cf\mu$ i takve da je unija teorija $Thm(\wedge p_i)=\{\xi\varepsilon F_o=F\phi_1\cap F\phi_2 \mid \wedge p_i\vdash\xi\}$, $i=1,2$ konsistentna. Relacija $\Vdash\subseteq C\times SENT(L(A)_{\lambda\mu})$ je definisana kao $(\Vdash\!\!-)$ u 1.26. Ovog puta korišćenjem oznake $\Vdash$ umesto $\Vdash\!\!-$ naglašavamo da se ne radi (nužno) o forsing relaciji.

U dokazima sledećih lema neophodne su manje ispravke, bolje reći, dopune. Osnovno je stvarna mogućnost pretpostavke da za skupove Δ korišćene u njima $(\Delta\subseteq Thm(\xi_i), \xi_i\varepsilon F\phi_i$ i $|\Delta|<\kappa_o)$ važi $\wedge\Delta\varepsilon F_o$.

Lema 1.29 Ako $\xi_i\varepsilon F\phi_i$, $i=1,2$ i $\xi\varepsilon F_o$ tada $Thm(\xi_1\&\xi)\cup Thm(\xi_2)$ je konsistentna ako i samo ako je $Thm(\xi_1)\cup Thm(\xi_2\&\xi)$ konsistentna teorija.

Lema 1.30 Ako $\xi_i\varepsilon F\phi_i$, $i=1,2$ i $Thm(\xi_1)\cup Thm(\xi_2)$ je nekonsistentna teorija postoji interpolant $\xi\varepsilon F_o$ za ξ_1 i $\sim\xi_2$ $(\vdash\xi_1\rightarrow\xi$ i $\vdash\xi\rightarrow\sim\xi_2)$.

Lema 1.31 Neka $\xi_i\varepsilon F\phi_i$, $i=1,2$ i $Thm(\xi_1)\cup Thm(\xi_2)$ je konsistentno. Onda je i $\{\xi_1\}\cup Thm(\xi_1)\cup Thm(\xi_2)$ konsistentno.

Lema 1.32 Ako $\xi_i \varepsilon F\phi_i$, $i=1,2$, $\phi \varepsilon F\phi_1$ i $\mathrm{Thm}(\xi_1 \& \phi) \cup \mathrm{Thm}(\xi_2)$ je nekonsistentna teorija, tada $\{\xi_1\} \cup \mathrm{Thm}(\xi_2) \vdash \sim\phi$ i $\mathrm{Thm}(\xi_1 \& \sim\phi) \cup \mathrm{Thm}(\xi_2)$ je konsistentno.

Lema 1.33 Ako $\xi_i \varepsilon F\phi_i$, $i=1,2$, $\Lambda\Phi \varepsilon F\phi_1$ i $\mathrm{Thm}(\xi_1 \& \sim\Lambda\Phi) \cup \mathrm{Thm}(\xi_2)$ je konsistentna teorija za neko $\phi \varepsilon \Phi$ i $\mathrm{Thm}(\xi_1 \& \sim\Lambda\Phi \& \sim\phi) \cup \mathrm{Thm}(\xi_2)$ je konsistentna teorija.

Lema 1.34 Neka $p \varepsilon C$ i $\psi \varepsilon F\phi_i$ $(i \varepsilon \{1,2\})$. Tada (1)→(2) i (2)→(3) gde je (1) $\psi \varepsilon p$, (2) $p \Vdash \psi^{wk}$ i (3) postoji q u C tak- vo da $p \cup \{\psi\} \subseteq q$.

Dokaz Standardno, indukcijom po složenosti formule. Kako su nam već date leme 1.29-1.33, preostalo je malo toga da se uradi. Ilustrujemo to na primeru ψ je $\exists v \phi(v)$ (ostali su, smatramo, lakši).

Pretpostavimo da $\exists v\phi(v) \varepsilon F\phi_1$ i $\exists v\phi(v) \varepsilon p_1 \subseteq p_1 \cup p_2 = p$ (što svakako ne utiče na opštost razmatranja). Tada za neko c iz A $\mathrm{Thm}(\Lambda p_1 \& \phi(c)) \cup \mathrm{Thm}(\Lambda p_2)$ je konsistentno, jer u suprotnom bi za svako $c \varepsilon A$ bilo $\Lambda p_1 \cup \mathrm{Thm}(\Lambda p_2) \vdash \sim\phi(c)$ (1.32), no, ako je c konstanta koja se ne javlja ni u Λp_1 ni u Λp_2, imali bismo i $\Lambda p_1 \cup \mathrm{Thm}(\Lambda p_2) \vdash \sim\exists v\phi(v)$, kontradiktorno sa 1.31 (1.29 nas oslobadja posebnog razmatranja teorije $\mathrm{Thm}(\Lambda p_1) \cup \mathrm{Thm}(\Lambda p_2 \& \phi(c))$ u slučaju $\exists v\phi(v) \varepsilon F_o$). Prema tome, za svako $q \varepsilon C$, $q \supseteq p$ postoji c iz A tako da $q \cup \{\phi(c)\} = r \varepsilon C$, te zbog $r \Vdash \phi^{wk}(c)$ $p \Vdash \sim\sim\exists v\phi^{wk}(v)$, odnosno $p \Vdash (\exists v\phi(v))^{wk}$.

Ako $p \Vdash (\exists v\phi(v))^{wk}$ za neko $q \varepsilon C$ i neko $c \varepsilon A$ $q \Vdash \phi^{wk}(c)$. Onda $q \cup \{\phi(c)\} \subseteq r \varepsilon C$, pa i $r \cup \{\exists v\phi(v)\} \varepsilon C$.

Potrebna nam je, medjutim, još i forsing relacija ($\Vdash\!-$) takva da su uslovi elementi datog skupa C a za $\phi \varepsilon F\phi_i$ $(i \varepsilon \{1,2\})$ (i $p \varepsilon C$)

$$p \Vdash\!- \phi^{wk} \text{ ako (i samo ako) } p \Vdash \phi^{wk}.$$

Jer sa njom dokaz je tu. Naime, prema 1.30 dovoljno je da pokažemo da $\{\phi_1, \sim\phi_2\} \notin C$. No, pretpostavka $p = \{\phi_1, \sim\phi_2\} \varepsilon C$ sada vodi u kontradikciju zbog teoreme 1.20 i (hipoteze $\vdash \phi_1 \to \phi_2$) $p \Vdash\!- \sim(\phi_1 \& \sim\phi_2)^{wk}$ dok prema 1.34 $p \Vdash \phi_1^{wk} \& \sim\phi_2^{wk}$, dakle i $p \Vdash\!- \phi_1^{wk} \& \sim\phi_2^{wk}$.

Pretpostavljamo u daljem da jezik L od nelogičkih simbola sadrži samo one koje se javljaju u formulama ϕ_1 i ϕ_2 i ukoliko već nije uključen i relacijski simbol $=$, tj. $L=L_1 \cup L_2 \cup \{=\}$ gde su L_1 i L_2 jezici čiji su elementi simboli formula ϕ_1 i ϕ_2 respektivno.

Za zatvoreni term t jezika $L(A)$ reći ćemo da je bazični ako je ili konstanta jezika $L(A)$ ili oblika $f(c_1,\dots,c_n)$ gde je f n-arno funkcijsko slovo i $c_1,\dots,c_n$ elementi iz A.

Lema 1.35 Za svaki bazični term t i svako $p\in C$ postoji c iz A i $q\in C$ tako da $p\cup\{t=c\}\subseteq q$.

Dokaz Neposredna posledica lema 1.31 i 1.32.

Relaciju $p\|\!- t=c$ gde je $p\in C$, t zatvoren term i $c\in A$ definišemo za $t=c\in F\phi_1 \cup F\phi_2$ sa

(a) $p\|\!- t=c$ ako i samo ako $t=c\in p$;

u suprotnom induktivno (po složenosti terma t) i s obzirom na (a)

(b) ako $t=f(t_1,\dots,t_n)$ $p\|\!-t=c$ ako i samo ako postoje elementi $c_1,\dots,c_n$ iz A takvi da $p\|\!-t_i=c_i$, $i=1,\dots,n$ i $p\|\!-f(c_1,\dots,c_n)=c$.

Relacija $p\|\!-c=t$ se analogno odredjuje.

Ubuduće nećemo (uvek) posebno naglašavati da su prve komponente $(p,q,r,\dots)$ elemenata relacije $\|\!-$ elementi skupa C (tj. nećemo stalno ponavljati $p\in C$, $q\in C$, $r\in C\dots$).

Lema 1.36 Iz $p\|\!- t=c$ $(p\|\!- c=t)$ i $q\supseteq p$ sledi $q\|\!- t=c$ $(q\|\!-c=t)$.

Lema 1.37 Ako $p\|\!- t=c$ $(p\|\!-c=t)$ postoji q, $q\supseteq p$ i $q\|\!-c=t$ $(q\|\!-t=c)$.

Lema 1.38 Za svaki zatvoren term t i svako p postoji q i $c\in A$, tako da je $p\subseteq q$ i $q\|\!-t=c$ $(q\|\!-c=t)$.

Dokaz Ako su svi simboli iz t iz $L_1(L_2)$ tvrdjenje proizilazi iz činjenice da postoji $c\in A$ koje se ne javlja u formulama skupa p. Inače koristimo indukciju po složenosti terma.

Lema 1.39 Neka su t,t_1 zatvoreni termi i $c,d\in A$.

(a) Ako $p\|\!-t=c$ i $p\|\!-t=d$ postoji q, tako da $q\supseteq p$ i $q\|\!-c=d$;

(b) Ako $p\|\!-t=c$ i $p\|\!-c=d$ postoji q tako da $q\|\!-t=d$ i $q\supseteq p$

(c) Ako $p\|\!-t=t_1$ i $p\|\!-t=c$ postoji q tako da $q\supseteq p$ i $q\|\!-t_1=c$.

(d) Ako $p\|\!-t=t_1$, $p\|\!-t=c$ i $p\|\!-t_1=d$ postoji q tako da $q\supseteq p$ i $q\|\!-c=d$.

Sada na prirodan način proširujemo relaciju $\|\!-$ uz napomenu da ćemo za proširenje koristiti isti simbol

Definicija 1.40 Neka je $\phi\equiv\rho(t_1,\dots,t_n)$ (za n=2 ρ može biti i =) atomarna rečenica (jezika $L(A)$) i $p\in C$. Relacija $\|\!-\subseteq C\times AT(L(A))$ je data sa

(a) $p\|\!-\phi$ ako i samo ako $\phi\in p$, ako $\phi\in F\phi_1\cup F\phi_2$, odnosno,

(b) $p\|\!-\phi$ ako i samo ako postoje konstante $c_1,\dots,c_n$ iz A takve da $p\|\!-t_i=c_i$ i $\rho(c_1,\dots,c_n)\in p$ (tj. prema (a) $p\|\!-\rho(c_1,\dots,c_n)$), ako $\phi\notin F\phi_1\cup F\phi_2$. (Jasno, izmena zahteva $p\|\!-c_i=t_i$ umesto $p\|\!-t_i=c_i$ suštinski ništa ne menja-1.37).

Lema 1.41 Ako je ϕ atomarna rečenica, $p\|\!-\phi$ i $q\supseteq p$ tada i $q\|\!-\phi$.

Lema 1.42 Za sve zatvorene terme t_1,t_2,t_3 i svaki skup $p\in C$ važi:

(a) postoji q, $q\supseteq p$ i $q\|\!-t_1=t_1$;

(b) ako $p\|\!-t_1=t_2$ postoji q, $q\supseteq p$ i $q\|\!-t_2=t_1$;

(c) ako $p\|\!-t_1=t_2$ i $p\|\!-t_2=t_3$ postoji q, $q\supseteq p$ i $q\|\!-t_1=t_3$.

Lema 1.43 Neka su t_i,t_i', $i=1,\dots,n$, zatvoreni termi, f i ρ funkcijsko, odnosno relacijsko slovo dužine n i $p\in C$. Ako $p\|\!-t_i=t_i'$ postoji q, $q\supseteq p$ i $q\|\!-f(t_1,\dots,t_n)=f(t_1',\dots,t_n')$. Ako još i $p\|\!-\rho(t_1,\dots,t_n)$ postoji r, $r\supseteq p$ i $r\|\!-\rho(t_1',\dots,t_n')$.

Lema 1.44 Neka su t,t_1 i σ zatvoreni termi, σ' term koji nastaje zamenom u σ (ne nužno svih pojavljivanja) terma t sa t_1 i $p\in C$. Ako $p\|\!-t=t_1$ postoji q, $q\supseteq p$ i $q\|\!-\sigma=\sigma'$.

Dokaz Indukcijom po složenosti terma uz primenu prethodne leme.

Lema 1.45 Neka su t,t_1 zatvoreni termi i $\phi(v)$ atomarna formula sa najviše jednom slobodno promenljivom. Tada za svako p postoji q tako da ili $p\|\not\vdash t=t_1$ ili $p\|\not\vdash\phi(t)$ ili $q\|\vdash\phi(t_1)$.

Prema lemama 1.41 i 1.45 relacija $\|\vdash$ odredjuje forsing relaciju (koju takodje obeležavamo sa $\|\vdash$ i) za koju važi:

Lema 1.46 Neka je p uslov (sada, shodno usvojenoj terminologiji elemente skupa C zovemo uslovima), t zatvoren term i $\phi(v)$ formula sa najviše jednom slobodnom promenljivom (jezika $L(A)$), c element iz A i neka $p\|\vdash t=c$. Tada

$p\|\vdash(\phi(t))^{wk}$ ako i samo ako $p\|\vdash(\phi(c))^{wk}$.

Dokaz Indukcijom po složenosti formule.

Ako je $\phi(v)$ atomarna formula,tvrdjenje je neposredna posledica prethodnih triju lema. Ostali slučajevi su trivijalni.

Na osnovu već rečenog dokaz teoreme 1.28 proizilazi iz

Leme 1.47 Za $\phi\varepsilon F\phi_1 U F\phi_2$ i $p\varepsilon C$

$p\|\vdash\phi^{wk}$ ako i samo ako $p\|\phi^{wk}$.

Dokaz Indukcijom po složenosti formule. Jedini interesantan slučaj imamo kad je ϕ oblika $\exists v\psi(v)$ (gde je $\psi(v)$ formula sa najviše jednom slobodno promenljivom).

Neka $p\|\vdash(\exists v\psi(v))^{wk}$ (tj. $p\|\vdash\sim\sim\exists v\psi^{wk}(v)$) i $q\supseteq p$. Tada za neko $r\supseteq q$ i neki zatvoren term t $r\|\vdash\psi^{wk}(t)$. Prema 1.38 postoje $s(\varepsilon C)$ i $c\varepsilon A$ tako da $s\supseteq r$ i $s\|\vdash t=c$. No, onda i(1.46) $s\|\vdash\psi^{wk}(c)$, dakle, i $p\|(\exists v\psi(v))^{wk}$. Dokaz u suprotnom smeru je jasan.

II GLAVA
n-KONAČNI FORSING

Prvi deo

U primeru 1.21 već smo spomenuli forsing sistem sa forsing relacijom koju ćemo u daljem zvati n-konačni forsing. Za $n=0$ nemamo, doduše, baš Robinson-ov konačni forsing, ali ni esencijalnu razliku izmedju njega i 0-konačnog forsinga (videti naredno poglavlje, teoremu 3.10). Što se tiče ostalih model teoretskih pojmova, uz koje stoji parametar n, kada je $n=0$ koristićemo njihova standardna imena (parametar u tom slučaju jednostavno nećemo spominjati). Isto tako smatraćemo koji put izlišnim i da se samo zbog parametra navodi definicija pojma koji je nastao iz već nama familijarnog jer je uloga parametra uglavnom evidentna. Ilustrujemo to sledećim primerima (notaciju, uz već nasledjenu iz prve glave, preuzimamo uz izvesne izmene iz |16|; ovde samo podsećamo: $\mu(T)$ je klasa svih modela teorije T; $fv(\phi)$ je skup slobodno promenljivih formule ϕ; ako pišemo $\phi(v_o,\ldots,v_m)$, onda $fv(\phi)\subseteq\{v_o,\ldots,v_m\}$; neki put ćemo (ako kontekst dozvoli) umesto $\phi(v_o,\ldots,v_m)$, odnosno $\phi(t_o,\ldots,t_m)$, pisati kraće samo $\phi(\tilde{v})$, odnosno $\phi(\tilde{t})$; takodje napominjemo da ćemo umesto T^C u daljem koristiti, u teoriji konačnog forsinga standardno T^f, odnosno T^{f_n}) |16|:

<u>*Definicija 2.1*</u> Teorija T je n-modelski kompletna ako za svako $\mathcal{M},\mathcal{N}\in\mu(T)$ iz $\mathcal{M}\prec_n\mathcal{N}$ sledi $\mathcal{M}\prec\mathcal{N}$.

<u>*Definicija 2.2*</u> T^* je n-modelsko pridruženje teorije T ako važi:

(i) $T^*\cap\Pi_{n+1}=T\cap\Pi_{n+1}$

i (ii) T^* je n-modelski kompletno.

<u>*Definicija 2.3*</u> Model $\mathcal{M}$ je n-egzistencijalno kompletan za teoriju T ako

(i) $\mathcal{M}$ je model jezika teorije T;

(ii) $\mathcal{M}\in\mu(T\cap\Pi_{n+1})$

(iii) $\mathcal{M}\prec_{n+1}\mathcal{N}$ za svako $\mathcal{N}\in\mu(T)$ takvo da $\mathcal{M}\prec_n\mathcal{N}$.

U |16| je konstatovano da se osnovna svojstva konačnog forsinga prirodno prenose na n-konačne forsinge: u gotovo svim tvrdjenjima za konačni forsing dovoljno je samo pojmove zameniti njima adekvatnim "n-pojmovima" (modelski kompletno sa n-modelski kompletno, modelsko pridruženje sa n-modelsko pridruženje itd.). Da bi se uverili u ispravnost ovakvog postupka u svim tim slučajevima treba to isto uraditi i u dokazima. Na osnovu svega nekoliko teorema iz teorije modela (|5|, |32|) lako se uvidja da sve ostaje u važnosti.

Kako nam je želja da nastavimo sa ispitivanjima započetim u |16| rekapitulираćemo u ovom poglavlju relevantne rezultate. Iskoristićemo ujedno to ponavljanje za korekciju nekih od njih i pojednostavljenje pojedinih dokaza.

Definicija n-konačnog forsinga vezana je za teoriju T (konsistentan, deduktivno zatvoren skup rečenica) konačnog jezika L i beskonačan skup novih konstanti A koje u daljem (ne samo kroz ovo poglavlje) smatramo fiksnim. Neka je $\Phi_n(A)$ skup svih Σ_n,Π_n formula jezika L(A) (formula je Σ_n,Π_n ako je logički ekvivalentna sa formulom koja je u preneks normalnoj formi i čiji preneks sadrži najviše n blokova kvantifikatora). Skup uslova C je onda skup svih konačnih podskupova skupa $SENT(\Phi_n(A))$ konsistentnih sa T. Za $\phi\in AT(L(A))$ i $p\in C$ $p\Vdash\phi$ akko $\phi\in p$. Shodno definiciji 1.1 ponovo usvajamo $p\Vdash\exists v\phi(v)$ akko $p\Vdash\phi(t)$ za neki zatvoren term jezika L(A); u |16| po uzoru na |25| tražilo se da t bude jedna od konstanti iz skupa A. Ovo suštinski ništa ne menja, jer je za nas, pre svega, relevantno "slabo forsiranje".

Ako je $A\subseteq A'$ a C i C', $\Vdash_{\overline{A}}$ i $\Vdash_{\overline{A}'}$, odgovarajući, respektivno, skupovi uslova i forsing relacije, onda za $p\in C$ i $\phi\in SENT(L(A))$ $p\Vdash_{\overline{A}}\phi$ akko $p\Vdash_{\overline{A}'}\phi$ (|37|). Možemo stoga, kada nam to zatreba (videti komentar uz 1.21) pretpostaviti da je skup A dovoljno (po potrebi) velike kardinalnosti.

Za n-konačni forsing važe i tvrdjenja analogna rezultatima 1.26 i 1.27 (dokaz ćemo dati u narednom poglavlju).

<u>*Teorema 2.4*</u> Neka je $p\in C$ i $\phi\in SENT(\Phi_n(A))$. Ako je (1) $\phi\in p$; (2) $p\Vdash\sim\sim\phi$; (3) $T\cup p\nvdash\sim\phi$ i (4) postoji uslov q takav da $p\cup\{\phi\}\subseteq q$, tada (a) $(1)\to(2)$; (b) $(2)\to(3)$ i c) $(3)\to(4)$.

<u>*Korolar 2.5*</u> Za $p\in C$ i $\phi\in SENT(\Phi_n(A))$

$p\Vdash\sim\sim\phi$ ako i samo ako $T\cup p\vdash\phi$.

Neka je M model jezika L. Uredjen par $\langle A,f\rangle$ gde je f preslikavanje skupa A u M, je dodeljivanje konstanti modelu M ako je $f(A)$ generatorni skup za M, tj. nijedna prava podstruktura modela M ne sadrži $f(A)$ (|2|) (jasno, kada je jezik L bez funkcijskih slova i konstanti preslikavanje f mora biti surjekcija). Prema tome, ako je $\langle A,f\rangle$ dodeljivanje konstanti modelu M i svako a iz A interpretiramo u M sa $f(a)$, svaki element iz M je, da tako kažemo, označen (bar) jednim zatvorenim termom (čija je on interpretacija) jezika $L(A)$. Odatle: $M\in\mu(T\cap\Pi_{n+1})$ akko je svaki konačan podskup skupa $D_n(M)=\{\phi\,|\,\phi$ je Σ_n,Π_n rečenica jezika $L(A)$ i $M\models\phi\}$ uslov ($D_n(M)$ je tzv. n-elementarni dijagram modela M). Za model $M\in\mu(T\cap\Pi_{n+1})$ i dodeljivanje $\langle A,f\rangle$ konstanti modelu M definišemo: $F_{\langle A,f\rangle}(M)=$ $=\{\phi(v_1,\dots v_k)\,|\,\phi(v_1,\dots,v_k)$ je formula jezika L takva da za sve zatvorene terme $t_1,\dots,t_k$ jezika $L(A)$ $M\models\phi(t_1,\dots,t_k)$ akko za neko $p\subset D_n(M)$ $p\Vdash\phi(t_1,\dots,t_k)\}$.

<u>*Teorema 2.6*</u> Neka je M model teorije $T\cap\Pi_{n+1}$ i $\langle A,f\rangle$ dodeljivanje konstanti modelu M. Tada skup $F_{\langle A,f\rangle}(M)$ sadrži sve bazične formule i zatvoren je u odnosu na konjunkciju i egzistencijalni kvantifikator.

Posebno za svaku Σ_n,Π_n formulu $\phi(v_o,\dots,v_m)$ i sve zatvorene terme $t_o,\dots,t_m$ jezika $L(A)$

$M\models\phi(t_o,\dots,t_m)$ akko $p\Vdash\sim\sim\phi(t_o,\dots t_m)$ za neko $p\subset D_n(M)$.

<u>*Dokaz*</u> Prvi deo teoreme očigledno važi. U dokazu drugog koristimo teoremu 2.4 i korolar 2.5.

Ako $M\models\phi(t_o,\dots,t_m)$ prema 2.4 $\{\phi(t_o,\dots,t_m)\}\Vdash\sim\sim\phi(t_o,\dots,t_m)$.

Ako za neko $p\subset D_n(M)$ $p\Vdash\sim\sim\phi$ prema 2.5 $T\cup p\vdash\phi$. Neka je N model teorije T takav da $M\prec_n N$. Tada $N\models\phi$ pa i $M\models\phi$.

U opštem $F_{<A,f>}(M)$ nije zatvoreno u odnosu na disjunkciju. Razlika u definiciji forsing relacije iz |2| u odnosu na "našu" (videti komentar pre leme i samu lemu 1.9) koju, inače, slabi forsing "briše" zatvara u |2| $F_{<A,f>}(M)$ i u odnosu na v.

Primer 2.7 Neka je T teorija koja "kaže" da je ρ relacija (striktnog) poretka (irefleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija) i $<M,\rho^M>$ njen model gde $M=\{a_i|i\varepsilon\omega\}$ i $\rho^M=\{<a_0,a_1>\}$. Neka je, dalje, $A=\{c_i|i\varepsilon\omega\}$, $f(c_i)=a_i$ i $||-$ konačni forsing. Odmah se uočava:

$$\exists v\rho(v,c_2), \exists v\rho(c_2,v)\varepsilon F_{<A,f>}(M) \text{ ali } M\models \sim\exists v\rho(v,c_2)\&\sim\exists v\rho(c_2,v)$$

tj. $M\not\models \exists v\rho(v,c_2)\vee\exists v\rho(c_2,v)$ dok $p||-\sim(\sim\exists v\rho(v,c_2)\&\sim\exists v\rho(c_2,v))$ za svako $p\subset\Delta(M)$ (tj. $p||-\exists v\,\rho(v,c_2)\vee\exists v\rho(c_2,v))$. Primetimo uzgred (već znamo da $F_{<A,f>}(M)$ nije zatvoreno u odnosu na negaciju)da $\sim\exists v\rho(v,c_2)\notin F_{<A,f>}(M)$, jer nijedan uslov $p\subset\Delta(M)$ ne forsira $\sim\exists v\rho(v,c_2)$ (kao što ne forsira ni $\exists v\rho(v,c_2)$.

Ako bi za $||-$ uzeli n-konačni forsing, $n\geq 1$, imali bismo, medjutim, $\sim\exists v\rho(c_2,v), \sim\exists v\rho(v,c_2)\varepsilon F_{<A,f>}(M)$, naravno onda i $\sim\exists v\rho(c_2,v)\&\sim\exists v\rho(v,c_2)\varepsilon F_{<A,f>}(M)$, ali i $\sim\exists v\rho(c_2,v)\vee\sim\exists v\rho(v,c_2)\varepsilon$ $F_{<A,f>}(M)$.

U slučaju da je za osnovni logički simbol uzeto v, a & definisano pomoću v i $\sim$ $F_{<A,f>}(M)$ ne bi nužno bilo zatvoreno u odnosu na konjunkciju.Za demonstraciju toga ponovo bi nam mogao poslužiti gornji primer. Ovim ujedno želimo da ukažemo na grešku učinjenu u |16|, gde smo u §1 usvojili definiciju forsing relacije iz |25|, ali smo u narednim paragrafima zapravo koristili onu iz |2|,|37|. To zahteva od nas da iz 3.3 u |16| izbacimo "konačnu konjunkciju"uz već, inače, pogrešno "prebrojivu" (disjunkciju), koje treba zameniti sa "konačnu".

Primer 2.8 (a) Neka je T, kao i u prethodnom primeru, relacija (striktnog) poretka i $<M,\rho^M>$ njen model, gde $M=\{a_i|i\varepsilon Z\}\cup\{b_j|j\varepsilon Z\}$ (Z-skup celih brojeva) i $\rho^M=\{(a_i,a_j)|i<j\}\cup\{(b_k,b_l)|k<l\}\cup\{(a_r,b_s)|s\geq r+1\}$. Za skup (novih) konstanti A uzimamo prebrojiv skup $\{c_i|i\varepsilon Z\}\cup\{d_j|j\varepsilon Z\}$ a $f:A\to M$ je zadano sa $f(c_i)=a_i$, $f(d_j)=b_j$. $||-$ je 1-konačni forsing.

Očigledno $\exists v\sim\exists u(\sim v=u\&\sim\rho(v,u)\&\sim\rho(u,v))\varepsilon F_{<A,f>}(M)$, ali, što je manje očigledno, $\sim\exists v\sim\exists u(\sim v=u\&\sim\rho(v,u)\&\sim\rho(u,v))\notin F_{<A,f>}(M)$. Imamo, naime, $M\models\sim\exists v\sim\exists u(\sim v=u\&\sim\rho(v,u)\&\sim\rho(u,v))$ ali ne i uslov $p\subset D_1(M)$ koji bi forsirao tu rečenicu. Ovo stoga što je $T\cup D_1(M)\cup\{\exists v\forall u(v=u\vee\rho(v,u)\vee\rho(u,v)\}$ konsistentno. Model te teorije je npr. $<N,\rho^N>$, gde $N=M\cup\{e\}$ i $\rho^N=\rho^M\cup\{(e,a_i)|i\varepsilon Z\}\cup\{(e,b_j)|j\varepsilon Z\}$. Da je M egzistencijalno kompletno u N sledi iz činjenice da za svaki konačan skup elemenata iz M postoji u M "donja granica".

(b) Neka u odnosu na elemente zadane u *(a)* jedina razlika bude u interpretaciji relacije ρ, koja je sada $\rho^M=\{(a_i,a_j)|i<j\}\cup\{(b_k,b_\ell)|k<\ell\}$. Onda ponovo $\exists v\sim\exists u(\sim v=u\&\sim\rho(v,u)\&\sim\rho(u,v))\varepsilon F_{<A,f>}(M)$, no ovog puta i $\sim\exists v\sim\exists u(\sim v=u\&\sim\rho(v,u)\&\sim\rho(u,v))\varepsilon F_{<A,f>}(M)$. Jer $\{\phi\}||-\exists v\sim\exists u(\sim v=u\&\sim\rho(v,u)\&\sim\rho(u,v))$, gde je $\phi\varepsilon D_1(M)$ (Π_1) - rečenica kojom se izražava da ne postoji element koji bi istovremeno bio u jednoj od relacija $=,\rho,\rho^{-1}$ (ne nužno istoj) i sa c_o i sa d_o (imati u vidu korolar 2.5).

<u>*Korolar 2.9*</u>. Neka je M model teorije $T\cap\Pi_{n+1}$, $<A,f>$ dodeljivanje konstanti modelu M i $\phi(v_o,\dots,v_m)$ Σ_{n+1} formula. Tada za sve zatvorene terme $t_o,\dots,t_m$ (jezika L(A)) važi:
(a) $M\models\phi(t_o,\dots,t_m)$ implicira: za neki uslov $p\subset D_n(M)$ $p||\!\not- \sim\sim\phi(t_o,\dots,t_m)$; (b) Ako za neki uslov $q\subset D_n(M)$ $q||-\sim\sim\phi(t_o,\dots t_m)$ postoji n-elementarna ekstenzija N modela M takva da $N\models T\cup\{\phi(t_o,\dots,t_m)\}$.

<u>*Dokaz:*</u> *(a)* je posledica teorema 1.6, 2.6 i (očiglednog) fakta: ako $p||-\sim\sim\psi(t)$ za neki zatvoren term ($\psi(v)$ je proizvoljna formula), onda i $p||-\sim\sim\exists v\psi(v)$, a *(b)* korolara 2.5.

Naredni primer ispravlja rezultat 3.4 iz |16| (pravu verziju (2.9) smo upravo dali). Naime, iz $p||-\sim\sim\phi$, gde je $p\subset D_n(M)$ i ϕ Σ_{n+1} rečenica ne proizilazi nužno i $M\models\phi$.

<u>*Primer 2.10.*</u> Ponovo je T teorija relacije (strogog) poretka. Za njen model uzimamo $<Z,<>$ (Z-skup celih brojeva), za A skup $\{c_i|i\varepsilon Z\}$, a f definišemo sa $f(c_k)=k$. $||-$ je 1-konačni forsing. Sada $Z\not\models\exists v\forall u(u=v\vee\rho(u,v))$ iako

$p \cup \{\forall u \forall v(u=v \vee \rho(u,v) \vee \rho(v,u))\} \Vdash \sim\sim\exists v \sim\exists u(\sim u=v \,\&\, \sim\rho(u,v))$. Ovo poslednje stoga što ako je $q \supseteq p$ i $N \models T \cup q$ N je linearno uredjen skup pa ili sam ima najveći element, ili je egzistencijalno kompletan u nekom modelu sa najvećim elementom (takav jedan možemo dobiti npr. dodavanjem novog elementa i njegovim proglašavanjem za najvećeg - analogan postupak imali smo u 2.8(a), a to, pak, znači da je za neku konstantu c $T \cup q \cup \{\sim\exists u(\sim u=c \,\&\, \sim\rho(u,c))\}$ konsistentno. Dakle, $r = q \cup \{\sim\exists u(\sim u=c \,\&\, \sim\rho(u,c))\}$ je uslov i, jasno, $r \Vdash \exists v \sim\exists u(\sim u=v \,\&\, \sim\rho(u,v))$.

Lema 2.11. Neka je $p(c_o,\ldots c_m) \in C$ gde su $c_o,\ldots,c_m$ sve konstante iz A koje se javljaju u rečenicama uslova p i $t_o,\ldots,t_m$ proizvoljni zatvoreni termi jezika $L(A)$. Ako $p(c_o,\ldots,c_m) \Vdash \phi(c_o,\ldots,c_m,c'_o,\ldots c'_k)$ i $p(t_o,\ldots,t_m)$ je uslov tada $p(t_o,\ldots,t_m) \Vdash \phi(t_o,\ldots,t_m,c'_o,\ldots,c'_k)$ (podrazumevamo da su u rečenicama uslova p i u ϕ sva pojavljivanja konstanti c_i, $0 \le i \le m$ zamenjena sa, respektivno, termima t_i).

Slobodu izbora dodeljivanja konstanti modelu bez posledica po opštost rezultata (što koristimo u dokazima tvrdjenja vezanih za svojstva (n)-konačno generičnih modela) daje nam

Teorema 2.12. Neka je M model teorije $T \cap \Pi_{n+1}$ i neka su $\langle A_1,f_1\rangle$ i $\langle A_2,f_2\rangle$ dva dodeljivanja konstanti modelu M. Tada $F_{\langle A_1,f_1\rangle}(M) = F_{\langle A_2,f_2\rangle}(M)$.

S obzirom na nezavisnost skupa $F_{\langle A,f\rangle}(M)$ od $\langle A,f\rangle$ pisaćemo nadalje samo $F(M)$.

Teorema 2.13. Neka je $p(c_o,\ldots,c_m)$ uslov i $\phi(c_o,\ldots,c_m)$ rečenica jezika $L(A)$, gde su $c_o,\ldots,c_m$ sve konstante iz A koje se javljaju u rečenicama uslova p ili ϕ. Onda iz $p \Vdash \sim\sim\phi(c_o,\ldots,c_m)$ sledi $\forall v_o \ldots \forall v_m(\&p(v_o,\ldots,v_m) \to \phi(v_o,\ldots,v_m)) \in T^{f_n}$.

Dokaz. Prema korolaru 2.5 i lemi 2.11

Definicija 2.14. Neka je M model jezika L i $\langle A,f\rangle$ (jedno) dodeljivanje konstanti modelu M. Model M zovemo T-n konačno generičnim ako važi:

(a) $M\in\mu(T\cap\Pi_{n+1})$;

(b) za svaku rečenicu ϕ jezika $L(A)$ $M\models\phi$ akko postoji $p\subset D_n(M)$ takav da $p\Vdash\phi$.

Teorema 2.15. Ako je jezik L prebrojiv postoji prebrojiv T-n konačno generični model M takav da $p\subset D_n(M)$.

Dokaz. Kao i u slučaju konačnog forsinga (koristimo, naravno, i 2.4).

Teorema 2.16. (i) Neka je M T-n konačno generičan model i N model teorije T^{f_n}. Tada iz $M\prec_n N$ sledi $M\prec N$;

(ii) Ako $M\in\mu(T^{f_n})$ i za svaki model $N\in\mu(T^{f_n})$ $M\prec_n N$ implicira $M\prec N$ onda je i M T-n konačno generičan;

(iii) Klasa F_T^n svih T-n konačno generičnih modela zatvorena je u odnosu na uniju n-elementarnih lanaca.

Korolar 2.17. T^{f_n} je n-modelski kompletna teorija ako i samo ako je svaki model teorije T^{f_n} T-n konačno generičan.

Teorema 2.18. Ako je L prebrojiv jezik, onda $T^{f_n}=Th(F_T^n)$ gde $Th(F_T^n)=\{\phi\mid\phi$ je rečenica jezika L i $M\models\phi$ za svako $M\in F_T^n\}$.

Korolar 2.19. Ako je jezik L prebrojiv, klasa F_T^n je aksiomatizibilna ako i samo ako je T^{f_n} n-modelski kompletna teorija.

Teorema 2.20. Ako je $M\prec_{n+1}N$ i $N\in F_T^n$, tada i $M\in F_T^n$.

Teorema 2.21. Svaki član klase $\mu(T\cap\Pi_{n+1})$ je n-elementaran podmodel nekog n-egzistencijalnog modela teorije T.

Teorema 2.22. Klasa E_T^n svih n-egzistencijalno kompletnih modela teorije T je jedinstvena podklasa C klase $\mu(T\cap\Pi_{n+1})$ koja ispunjava sledeće uslove:

(i) svaki član klase $\mu(T\cap\Pi_{n+1})$ je n-elementaran podmodel nekog člana iz C,

(ii) ako $M,M'\in C$ i $M\prec_n M'$, tada $M\prec_{n+1}M'$;

(iii) ako $M\in\mu(T\cap\Pi_{n+1})$, $M'\in C$ i $M\prec_n M'$ implicira $M\prec_{n+1}M'$, onda i $M\in C$.

Teorema 2.23. (i) $(T\cap\Pi_{n+1})^{f_n}=T^{f_n}$;

(ii) $T^{f_n}\cap\Pi_{n+1}=T\cap\Pi_{n+1}$;

(iii) $T^{f_n f_n}=T^{f_n}$;

(iv) Ako je $T_1\cap\Pi_{n+1}=T_2\cap\Pi_{n+1}$, onda $T_1^{f_n}=T_2^{f_n}$;

(v) T^{f_n} je kompletna teorija ako i samo ako T ima svojstvo n-pridruženog utapanja;

(vi) $T^{f_n}\cap\Pi_{n+2}=Th(E_T^n)\cap\Pi_{n+2}\supseteq T\cap\Pi_{n+2}$ gde $Th(E_T^n)=\{\phi|\phi$ je rečenica jezika L koja važi u svim modelima klase $E_T^n\}$.

(vii) Ako T ima n-modelsko pridruženje T^+, onda $T^+=T^{f_n}=Th(E_T^n)$;

(viii) Klasa svih T-n konačno generičnih modela je podklasa klase svih n-egzistencijalno kompletnih modela teorije T (u slučaju da je jezik L neprebrojiv, može se desiti da je F_T^n prazan skup).

Dokaz. (i) Skup uslova C je isti za teorije T i $T\cap\Pi_{n+1}$;

(ii) Prema teoremi 1.6 i korolaru 2.5 za Π_{n+1} rečenicu ϕ jezika $L(A)$ i uslov p važi $p||\!-\sim\sim\phi$ ako i samo ako $T\cup p\vdash\phi$;

(iii) Direktno na osnovu (i) i (ii);

(iv) Prema (i);

(v) Ako T ima svojstvo n-pridruženog utapanja, a p i q su uslovi, tada je i $p\cup q$ uslov, pa je T^{f_n} kompletna teorija.

Neka je sada T^{f_n} kompletna teorija, a ϕ i ψ neka su dve Σ_{n+1} rečenice jezika L konsistentne sa T. Prema korolaru 2.9 postoje uslovi p i q koji (slabo) forsiraju, respektivno, ϕ,ψ. Dakle, $\emptyset||\!-\sim\sim\phi\&\sim\sim\psi$. Onda za neki uslov r $r||\!-\phi\&\psi$ i ponovo prema korolaru 2.9 $\phi\&\psi$ je rečenica konsistentna sa T;

(vi) Neka je $\phi\in T^{f_n}\cap\Pi_{n+2}$ i $M\in E_T^n$. Kako je $T\cap\Pi_{n+1}=$ $=T^{f_n}\cap\Pi_{n+1}$, postoji model N takav da $M\prec_n N\models T^{f_n}$. No, tada i $M\prec_{n+1}N$ te $M\models\phi$ i $\phi\in Th(E_T^n)$.

Pretpostavka, pak, da postoji Π_{n+2} rečenica $\phi\ \forall v_0\ldots\forall v_m\exists u_0\ldots\exists u_k\psi(v_0,\ldots,v_m,u_0,\ldots,u_k)$ takva da $\phi\in Th(\mathcal{E}^n_T)$ i $\phi\notin T^{f_n}$ vodi u kontradikciju. Zbog $\phi\notin T^{f_n}$ postoje uslov p i zatvoreni termi $t_0,\ldots,t_m$ (možemo pretpostaviti da su to baš neke konstante iz A) takvi da $p\Vdash\sim\exists u_0\ldots\exists u_k\psi(t_0,\ldots,t_m,u_0,\ldots,u_k)$. Neka je M model teorije $T\cup p\cup\{t_0=t_0,\ldots,t_m=t_m\}$ i $N\in\mathcal{E}^n_T$ n-elementarna ekstenzija modela M. Kako $N\models\exists u_0\ldots\exists u_k\psi(t_0,\ldots,t_m,u_0,\ldots,u_k)$ postoji uslov $q\subset D_n(N)$ takav da $q\Vdash\sim\sim\exists u_0\ldots\exists u_k\psi(t_0,\ldots t_m,u_0,\ldots,u_k)$ (2.9) ali onda uslov $p\cup q\cup\{t_0=t_0,\ldots,t_m=t_m\}$ forsira kontradiktornu rečenicu.

Relacija $T\cap\Pi_{n+2}\subseteq Th(\mathcal{E}^n_T)\cap\Pi_{n+2}$ je jasna.

(vii) Kao n-modelski kompletna teorija T^+ je jednaka svom Π_{n+2} segmentu ($T^+=T^+\cap\Pi_{n+2}$) i ima svojstvo da za svaku formulu ϕ postoji Σ_{n+1} formula ψ takva da $T^+\vdash\phi\leftrightarrow\psi$. Lako se proverava $T^+=Th(\mathcal{E}^n_T)$. Odatle, prema (vi), $T^+\subseteq T^{t_n}$ i kako T^+ i T^{f_n} sadrže iste Σ_{n+1} rečenice važi takodje $T^+=T^{f_n}$;

(viii) Trivijalno.

Definicija 2.24. n-operator pridruženja je preslikavanje $(-)^*$ teorije T u teoriju T^* takvo da je za sve teorije T,T_1 ispunjeno:

(i) $T\cap\Pi_{n+1}=T^*\cap\Pi_{n+1}$;

(ii) Ako $T\cap\Pi_{n+1}=T_1\cap\Pi_{n+1}$, onda $T^*=T^*_1$;

(iii) $T\cap\Pi_{n+2}\subseteq T^*$.

Lema 2.25. Neka su $(-)^*$ i $(-)^+$ dva n-operatora pridruženja. Tada:

(1) $(T^*)^+=T^+$;

(2) $T^*\cap\Pi_{n+2}=T^+\cap\Pi_{n+2}$.

Dokaz. (1) Prema (i) i (ii) definicije 2.24.

(2) Prema (i) i 2.24 (iii).

Teorema 2.26. $(-)^{e_n}$ je n-operator pridruženja, gde $T^{e_n}=Th(\mathcal{E}^n_T)$.

Dokaz. Direktno na osnovu 2.22.

Teorema 2.27. $(-)^{f_n}$ je n-operator pridruženja.

Dokaz. Već dat - 2.23 (ii),(iv) i (vi).

Definicija 2.28. Teorija T je (n+k)-kompletna ako za svaku Π_{n+k+1} formulu ϕ, konsistentnu sa T, postoji Σ_{n+1} formula θ, konsistentna sa T takva da $fv(\theta)\subseteq fv(\phi)$ i $T\vdash\theta\to\phi$.

Lema 2.29. Iz $T\cap\Pi_{n+k+1}=T_1\cap\Pi_{n+k+1}$ i (n+k)-kompletnosti teorije T_1 sledi $T\cap\Pi_{n+k+2}\subseteq T_1$.

Korolar 2.30. Za svako $k\in\omega$ važi: ako su T i T_1 (n+k)-kompletne teorije i $T\cap\Pi_{n+1}=T_1\cap\Pi_{n+1}$, onda $T\cap\Pi_{n+k+2}=T_1\cap\Pi_{n+k+2}$.

Definicija 2.31. Teorija T je f_n-kompletna teorija ako za svaku formulu ϕ konsistentnu sa T, postoji Σ_{n+1} formula θ konsistentna sa T takva da $fv(\theta)\subseteq fv(\phi)$ i $T\vdash\theta\to\phi$.

Lema 2.32. Ako su T i T_1 f_n-kompletne teorije i $T\cap\Pi_{n+1}=T_1\cap\Pi_{n+1}$, tada $T=T_1$.

Dokaz. Neposredna posledica korolara 2.30.

Teorema 2.33. Za teoriju T T^{f_n} je jedinstvena f_n-kompletna teorija koja ima zajednički Π_{n+1} segment sa T.

Dokaz. Prema prethodnoj lemi i 2.13.

Korolar 2.34. Ako teorija T ima n-modelsko pridruženje T^*, onda $T^{f_n}=T^*$.

Dokaz. n-modelsko pridruženje T^*, ako postoji, je, jasno, f_n-kompletna teorija.

Lema 2.35. Za svako $k\in\omega$ i svaku teoriju T postoji teorija $T^{(k)}$ koja zadovoljava sledeće uslove:

(i) $T\cap\Pi_{n+k+1} = T^{(k)}\cap\Pi_{n+k+1}$;

(ii) $T^{(k)}=T^{(k)}\cap\Pi_{n+k+2}$;

(iii) Ako je ϕ Π_{n+k+1} formula konsistentna sa $T^{(k)}$, onda postoji Σ_{n+k+1} formula θ konsistentna sa $T^{(k)}$ i takva da $fv(\theta)\subseteq fv(\phi)$ i $T^{(k)}\vdash\theta\to\phi$.

Dokaz. $T^{(k)}=\{\phi \mid \phi$ je Π_{n+k+2} rečenica (jezika L) konsistentna sa T takva da je $(T\cap \Pi_{n+k+1})\cup\{\phi\})\cap\Pi_{n+k+1}=T\cap\Pi_{n+k+1}\}$.

Lema 2.36. Neka je za datu teoriju T $T^{o}=T^{(o)}$, $T^{k+1}=(T^{k})^{(k+1)}$. Tada:

(i) $T^{k}\cap\Pi_{n+k+2} = T^{k+1}\cap\Pi_{n+k+2}$;

(ii) T^{k} je Π_{n+k+2} aksiomatizibilna teorija;

(iii) $T^{k}\subseteq T^{k+1}$;

(iv) $T\cap\Pi_{n+1}=T^{k}\cap\Pi_{n+1}$.

(v) T^{k} je (n+k)-kompletna teorija.

Teorema 2.37. $T^{f_n}=\bigcup_{k\in\omega}T^{k}$.

Dokaz. $\bigcup_{k\in\omega}T^{k}\cap\Pi_{n+1}=T\cap\Pi_{n+1}$ prema tački (iv) prethodne leme, a lako se verifikuje i da je $\bigcup_{k\in\omega}T^{k}$ f_n-kompletna teorija.

Napomenimo odmah da medju n-konačnim forsing pridruženjima za datu teoriju T (T^{f_n}) u opštem ne vlada hijerarhijski odnos. Istina, skupovi uslova C_n, $n\in\omega$ (pisaćemo $\Vdash_n$, C_n da bi naglasili koji je paramater u pitanju) su linearno uredjeni inkluzijom: $C_m\subseteq C_n$ za $m<n$, ali iz $p\Vdash_m\phi$ $(p\in C_m)$ ne sledi nužno i $p\Vdash_n\phi$, pa ne mora biti ni $T^{f_n}\subseteq T^{f_m}$. Ilustrujemo to sledećim

Primerom 2.38. |37| Neka je T teorija linearnog uredjenja sa najvećim elementom (definisana u jeziku $L=\{\rho\}$). Tada $\neg\exists v\forall u(u=v\vee\rho(u,v))\in T^{f}$ (ne postoji konačan skup bazičnih rečenica p konsistentan sa T, takav da $p\Vdash\exists v\forall u(u=v\vee\rho(u,v))$ |37|, dok $\exists v\forall u(u=v\vee\rho(u,v))\in T^{f_m}$ za svako $m>0$ (2.23)(vi) (videti i primer 2.8).

III GLAVA

n-KONAČNI FORSING

Drugi deo

Neka je T (proizvoljna) teorija jezika L, $L(A)$ normalna ekstenzija jezika L ($|A|\geq\aleph_0$) i neka su, za dato n $\Phi'_n(A)$, $\Phi''_n(A)$ i C'_n, C''_n redom, skupovi $\{\phi\varepsilon\Phi_n(A)\,|\,sub(\phi)\subset\Phi_n(A)\}$, $\{\phi\varepsilon\Sigma_n(A)\,|\,\phi$ je u preneks normalnoj formi$\}$ ($\Phi_n(A)$ je, podsećamo, skup svih Σ_n, Π_n formula jezika $L(A)$), odnosno $\{p'\subset SENT(\Phi'_n(A)\,|\,p'$ je konačan skup konsistentan sa $T\}$, $\{p''\subset SENT(\Phi''_n(A))\,|\,p''$ je konačan skup konsistentan sa $T\}$. Neka su, dalje, $\|\!\frac{'}{n}\subseteq C'_n\times SENT(L(A))$, $\|\!\frac{''}{n}\subseteq C''_n\times SENT(L(A))$ forsing relacije definisane na isti način kao i forsing relacija u prethodnom poglavlju (skupovi C'_n, C''_n su, dakle, uredjeni relacijom inkluzije i za $\phi\varepsilon AT(L(A))$ i $p\varepsilon C'_n(C''_n)$ $p\|\!\frac{'}{n}\phi(p\|\!\frac{''}{n}\phi)$ akko $\phi\varepsilon p$). n-konačni forsing i njegov skup uslova obeležićemo ovog puta sa $\|\!\frac{}{n}$, tj. C_n.

Lema 3.1 Za sve uslove $p=\{\phi_1,\ldots,\phi_k\}\varepsilon C_n$, $p'=\{\phi'_1,\ldots,\phi'_k\}\varepsilon C'_n$ i $p''=\{\phi''_1,\ldots,\phi''_k\}\varepsilon C''_n$ takve da su ϕ_i,ϕ'_i i ϕ''_i, $i=1,\ldots,k$ medjusobno ekvivalentne formule u osnosu na T, i svako $\phi\varepsilon SENT(L(A))$ važi:

$$p\|\!\frac{}{n}\sim\sim\phi \text{ akko } p'\|\!\frac{'}{n}\sim\sim\phi \text{ akko } p''\|\!\frac{''}{n}\sim\sim\phi.$$

Dokaz. Rutinska provera indukcijom po složenosti formule ϕ. Dokazaćemo,koliko ilustracije radi, samo

$$p\|\!\frac{}{n}\sim\sim\phi \text{ akko } p'\|\!\frac{'}{n}\sim\sim\phi$$

Ako je ϕ atomarna formula

$$p\|\!\frac{}{n}\sim\sim\phi \text{ akko } T\cup p\vdash\phi \text{ akko } T\cup p'\vdash\phi \text{ akko } p'\|\!\frac{'}{n}\sim\sim\phi.$$

Slučaj $\phi\equiv\phi_1\&\phi_2$ je trivijalan.

Ako je $\phi\equiv\sim\phi_1$, $p\|\!\frac{}{n}\sim\phi_1$ i $q'\supseteq p'$, $q'\varepsilon C'_n$ q' ne može forsirati ϕ, (u protivnom, po induktivnoj pretpostavci, $q=p\cup(q'-p')\|\!\frac{}{n}\sim\sim\phi_1$, pa $p'\|\!\frac{'}{n}\sim\phi_1$. Isto tako iz $p'\|\!\frac{'}{n}\sim\phi_1$,sledi $p\|\!\frac{}{n}\sim\phi_1$.

Neka je sada $\phi \equiv \exists v\phi_1(v)$, $p \Vdash_n \sim\sim\exists v\phi_1(v)$ i $q' \supseteq p'$. Za $q = p \cup (q' - p')$ postoje uslov $r \in C_n$, $r \supseteq q$ i zatvoren term t takvi da $r \Vdash_n \phi_1(t)$. Prema induktivnoj hipotezi $r' = q' \cup (r-q)' \Vdash'_n \sim\sim\phi_1(t)$. Stoga $p' \Vdash'_n \sim\sim\exists v\phi_1(v)$. Analogno teče dokaz u suprotnom smeru.

Korolar 3.2. $T^{f_n} = T^{f'_n} = T^{f''_n}$, gde su $T^{f'_n}$ i $T^{f''_n}$ forsing pridruženja, respektivno, (forsing) relacija $\Vdash'_n$ i $\Vdash''_n$.

Napomenimo da smo s lemom 3.1. ujedno dokazali sledeći rezultat: ako su $p = \{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ i $q = \{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ elementi skupa $C_n(C'_n, C''_n)$ i ako je $T \vdash \phi_i \leftrightarrow \theta_i$ za $i = 1, \ldots, k$ onda za svaku rečenicu ψ jezika $L(A)$ $p \Vdash_n \sim\sim\psi$ akko $q \Vdash_n \sim\sim\psi$ ($p \Vdash'_n \sim\sim\psi$ akko $q \Vdash'_n \sim\sim\psi$, $p \Vdash''_n \sim\sim\psi$ akko $q \Vdash''_n \sim\sim\psi$).

Za date forsing relacije važi i (naizgled) jače tvrdjenje (zbog 3.1 dovoljno ga je dokazati za $\Vdash_n$ forsing relaciju):

Lema 3.3. Neka su p i q uslovi iz C_n i $T \vdash \&p \leftrightarrow \&q$. Tada za svako $\phi \in SENT(L(A))$ $p \Vdash_n \sim\sim\phi$ ako i samo ako $q \Vdash_n \sim\sim\phi$. Posebno $T^{f_n}[p] = T^{f_n}[q]$.

Dokaz. Recimo da $p(c_0, \ldots, c_m) \Vdash_n \sim\sim\phi(c_0, \ldots, c_m)$ gde su $c_0, \ldots, c_m$ sve konstante iz A koje se javljaju u rečenicama uslova p ili ϕ. Prema 2.13 $\forall v_0 \ldots \forall v_m(\&p(v_0, \ldots, v_m) \to \phi(v_0, \ldots, v_m)) \in T^{f_n} \subseteq T^{f_n}[q]$ pa

$$q \Vdash \sim\sim(\&p(c_0, \ldots, c_m) \to \phi(c_0, \ldots, c_m)).$$

Kako za svako $\psi \in p$ $T \cup q \vdash \psi$, na osnovu 2.5. $q \Vdash \sim\sim\psi$, dakle, $q \Vdash \&\sim\sim p$, tj. $q \Vdash \sim\sim\&p$. Proizilazi $q \Vdash \sim\sim\phi$.

Simetrija stvari čini dokaz u suprotnom smeru izlišnim.

Ostali smo još dužni za dokaz leme 2.4. i korolara 2.5. No, analogoni ovih tvrdjenja su tačni za forsing relacije $\Vdash'_n$ (i skup $\Phi'_n(A)$) (lema 1.26, korolar 1.27-$\Phi'_n(A)$ je zatvoreno u odnosu na negaciju i uzimanje podformula, a konstatovali smo da je uslov zatvorenosti u odnosu na konjukciju suvišan), pa dokaz leme 2.4. i korolara 2.5. direktno sledi na osnovu 1.6. i 3.1. Demonstrirajmo to na slučaju: (za $p \in C_n$ i $\phi \in \Phi_n(A)$) $\phi \in p$ implicira $p \Vdash_n \sim\sim\phi$.

Neka je $p=\{\phi_1,\ldots,\phi_k\}$ i $\phi\equiv\phi_i$ za neko i, $1\le i\le k$, i neka je $p'=\{\phi_1',\ldots,\phi_k'\}\in C_n'$, gde $\vdash\phi_j\leftrightarrow\phi_j'$, $j=1,\ldots,n$. (Prema 1.26.) $p'\Vdash_n'\sim\sim\phi'$ i prema 1.6. $p'\Vdash_n'\sim\sim(\phi'\to\phi)$. Stoga $p'\Vdash_n'\sim\sim\phi$ a onda i (lema 3.1.) $p\Vdash_n\sim\sim\phi$.

Jasno, tvrdjenja korespondentna lemi 2.4. i korolaru 2.5. važe i za forsing relaciju $\Vdash_n''$ (i skup $\Phi_n''(A)$).

Neka su sada C, C_o, C' i C_o' redom skupovi (uslova)

$\{p\mid p$ je konačan skup baznih rečenica jezika $L(A)$, konsistentan sa $T\}$,

$\{p\mid p$ je konačan podskup skupa $SENT(\Phi_o(A))$, konsistentan sa $T\}$,

$\{p\mid p$ je konačan skup konjunkcija baznih rečenica jezika $L(A)$, konsistentan sa $T\}$

i $\{p\mid p$ je konačan skup kvantifikatorsko slobodnih rečenica jezika $L(A)$ u disjunktivnoj normalnoj formi, konsistentan sa $T\}$

a $\Vdash$, $\Vdash_o$, $\Vdash'$ i $\Vdash_o'$ i T^f, T^{fo}, $T^{f'}$, $T^{fo'}$ njima, respektivno, odgovarajuće forsing relacije, odnosno forsing pridruženja (za svaku eventualnost ponavljamo: skupovi su uredjeni relacijom inkluzije i u svim slučajevima uslov p forsira atomarnu rečenicu ϕ ako (i samo ako) je ova njegov element); $\Vdash$ je Robinsonov konačni forsing i $\Vdash_o$ 0-konačni forsing.

Prema lemi 3.1. odmah sledi:

Lema 3.4. $T^{fo}=T^{fo'}$.

Lema 3.5. Za $p'\in C'$ neka je $p(\in C)$ skup svih baznih rečenica koje se javljaju kao konjugati rečenica iz p'. Tada: za svako $p'\in C'$ i svako $\phi\in SENT(L(A))$

$p'\Vdash'\sim\sim\phi$ ako i samo ako $p\Vdash\sim\sim\phi$.

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule ϕ.

Korolar 3.6. $T^f=T^{f'}$.

Lema 3.7. Ako je $p'=\{V\Phi_{1_i},\ldots,V\Phi_{k_i}\}\in C_o'$ (Φ_{m_i} - konjunkcija baznih rečenica) i $p\in C'\subseteq C_o'$ uslov nastao izborom po jednog "reprezenta" (disjunkta) iz svake rečenice uslova p' (može se dogoditi da se neki "reprezenti" podudaraju), onda za svako $p' \in C'_o$ i svako $\phi \in SENT(L(A))$

$$p' \,||\!\frac{\prime}{o}\, \sim\sim\phi \text{ implicira } p \,||\!\frac{\prime}{o}\, \sim\sim\phi .$$

Dokaz. Očigledno; jer ako $p \subseteq q' \in C'_o$ $q' \cup p'$ je takodje uslov.

Korolar 3.8. Ako $p \in C' \subseteq C'_o$ i $\phi \in SENT(L(A))$ $p \,||\!-'\, \sim\sim\phi$ ako i samo ako $p \,||\!\frac{\prime}{o}\, \sim\sim\phi$.

Korolar 3.9. $T^{f'} = T^{f'_o}$.

Teorema 3.10. $T^f = T^{f_o}$.

Prema tome ako na (konačnu) forsing relaciju gledamo prevashodno kao na sredstvo za dobijanje forsing pridruženja i ostalih, za tu teoriju, relevantnih rezultata slobodni smo u izboru bilo kojeg od četiri data skupa (C, C_o, C', C'_o) za skup uslova, odnosno kada je u pitanju n-konačni forsing u izboru izmedju C_n, C'_n i C''_n (naravno i tu smo "izbor" mogli proširiti, recimo, izmedju ostalog i skupom svih Σ_n, Π_n rečenica u preneks normalnoj formi, čije su "matrice" u disjunktivnoj normalnoj formi).

Za dobijanje n-forsing pridruženja dovoljna nam je, medjutim, i samo konačna forsing relacija. Štaviše, svaka teorija T jezika L sadržana je u (nekoj) teoriji definisanoj u (odgovarajućem) proširenju jezika L, za koju se konačno i n-konačno forsing pridruženje podudaraju. Sledi dokaz ovih tvrdjenja.

Pridružimo svakoj formuli $\phi(v_{i_1}, \ldots v_{i_m})$ iz $\Phi_n (= \Phi_n(A) \cap FORM(L))$, gde $fv(\phi) = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}\}$ i $\tilde{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ je na jedinstven način odredjeno (recimo, redosledom slobodnih pojavljivanja promenljivih v_{i_k}, $1 \leq k \leq m$ u ϕ), relacijski simbol $R_{\phi,\tilde{v}}$ dužine m ($R_{\phi,\tilde{v}}(t_1, \ldots, t_m)$ onda uvek tumačimo kao rezultat zamene promenljivih v_{i_j}, $1 \leq j \leq m$ u $R_{\phi,\tilde{v}}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ termima, respektivno, $t_1, \ldots, t_m$); ukoliko je ϕ rečenica njoj odgovarajući relacijski simbol (sada samo R_ϕ) je dužine jedan.

U jeziku L' dobijenom proširenjem jezika L ovim novim relacijskim simbolima neka je T' skup rečenica

$$T\cup\{\forall v_{i_1}\ldots\forall v_{i_m}(\phi(v_{i_1},\ldots,v_{i_m})\leftrightarrow R_{\phi,\tilde{v}}(v_{i_1},\ldots,v_{i_m})\mid$$

$$\mid\phi\in\Phi_n-SENT(\Phi_n)\}\cup\{(\phi\leftrightarrow\forall v_o R_\phi(v_o))\,\&\,(\forall v_o R_\phi(v_o)\vee\forall v_o\sim R_\phi(v_o))\mid$$

$$\mid\phi\in SENT(\Phi_n)\}$$

Lema 3.11. T' je konsistentno.

Dokaz. Očigledno. Svaki se model M teorije T proširuje do modela M' (sa istim domenom) za T' interpretacijom novih relacijskih simbola $R_{\phi,\tilde{v}}$ sa $R^{M'}_{\phi,\tilde{v}}$ gde $(a_1,\ldots,a_m)\in R^{M'}_{\phi,\tilde{v}}$ ako i samo ako $M\models\phi[a_1,\ldots,a_m]$, dok $R^{M'}_\phi = M$ ako $M\models\phi$, inače $R^{M'}_\phi=\emptyset$.

U daljem ćemo pod T' podrazumevati teoriju generisanu (istoimenim) skupom aksioma.

Uočavamo odmah da važi:

$$T'\vdash\forall v_o R_\phi(v_o)\leftrightarrow\exists v_o R_\phi(v_o)$$

dakle, i

$$T'\vdash\forall v_o R_\phi(v_o)\leftrightarrow R_\phi(t) \text{ za svaki zatvoren term } t.$$

Primetimo, takodje, da za svaku baznu rečenicu jezika L'(A) postoji njoj ekvivalentna u odnosu na T' atomarna rečenica oblika $R_{\phi,\tilde{v}}(t_1,\ldots,t_m)$ ili $R_\phi(t)$ (ovo proizilazi iz činjenice da je skup Φ_n zatvoren u odnosu na negaciju).

Neka je C_n skup uslova n-konačnog forsinga ($\Vdash$) za teoriju T i jezik L(A), C' skup uslova Robinsonovog konačnog forsinga ($\Vdash'$) za T' i jezik L'(A) i C"=$\{p'\in C'\mid$ elementi uslova p' su rečenice oblika $R_{\phi,\tilde{v}}(t_1,\ldots,t_m)$, odnosno $R_\phi(c)$ gde su $t_1,\ldots,t_m$(zatvoreni) termi jezika L'(A) i c, fiksirana, ali, inače, proizvoljno odabrana konstanta jezika L(A)$\}$. Za $p'=\{R_{\phi_1,\tilde{v}1}(\tilde{t}^1),\ldots,R_{\phi_m,\tilde{v}m}(\tilde{t}^m), R_{\psi_1}(c),\ldots,R_{\psi_k}(c)\}\in C"$ $(m\geq0,k\geq0)$ neka je $f(p')=\{\phi_1(\tilde{t}^1),\ldots,\phi_m(\tilde{t}^m),\psi_1,\ldots,\psi_k\}(\in C_n)$. Očigledno f je surjektivno preslikavanje skupa C" u skup C_n (a u slučaju da je jezik L bez konstanti takodje i injektivno). $q'\varepsilon f^{-1}(p)$ znači da $f(q')=p$. Jasno, za $p',q'\varepsilon f^{-1}(p)$ $T'\vdash \& p' \leftrightarrow \& q'$.

Teorema 3.12. Za (proizvoljno) $\phi\varepsilon SENT(L(A))$ i svako $p'\varepsilon C"$

$f(p')\,||\!\frac{}{n}\, \sim\sim\phi$ ako i samo ako $p'\,||\!\overset{\prime}{-}\, \sim\sim\phi$.

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule ϕ.

Ako je ϕ atomarna rečenica $T\cup f(p')\vdash\phi$ akko $T'\cup p'\vdash\phi$, prema tome i $f(p')\,||\!\frac{}{n}\,\sim\sim\phi$ ako i samo ako $p'\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\sim\phi$.

Slučaj $\phi\equiv\phi_1\&\phi_2$ je isto tako trivijalan.

Neka je $\phi\equiv\sim\phi_1$ i $f(p')\,||\!\frac{}{n}\,\sim\phi_1$, ali $p'\,||\!\overset{\prime}{\not-}\,\sim\phi_1$. S obzirom na već konstatovano (i lemu 3.3) postoji uslov $q'\varepsilon C"$ takav da $q'\supseteq p'$ i $q'\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\sim\phi_1$. Sledi, prema induktivnoj pretpostavci, $f(q')\,||\!\frac{}{n}\,\sim\sim\phi_1$, što je, medjutim, kontradiktorno sa $f(p')\,||\!\frac{}{n}\,\sim\phi_1$. Ako, pak, $p'\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\phi_1$, ali ne i $f(p')\,||\!\frac{}{n}\,\sim\phi_1$, onda za neko $q\varepsilon C_n$, $q\supseteq f(p')$ $q\,||\!\frac{}{n}\,\phi_1$. Neka je $q'\varepsilon C'$ takav uslov da $q'\varepsilon f^{-1}(q)$ i $p'\subseteq q'$. Tada (ponovo imamo u vidu 3.3 i gornje napomene) $q'\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\sim\phi_1$ i opet kontradikcija.

Dokaz za slučaj $\phi\equiv\exists v\phi_1(v)$ je samo tehnički nešto složeniji. Pretpostavimo $f(p')\,||\!\frac{}{n}\,\sim\sim\exists v\phi_1(v)$ i neka je $p'\subseteq q"\varepsilon C'$. Formirajmo uslov $(p'\subseteq)q'\varepsilon C"$ zamenom baznih rečenica jezika $L(A)$ i negacija atomarnih rečenica jezika $L'(A)$ iz $q"$ njima ekvivalentnim (u odnosu na T') atomarnim rečenicama oblika $R_{\phi,\ddot{v}}(\bar{t})$, odnosno $R_\psi(c)$ i zamenom u rečenicama oblika $R_\theta(t)$ terma t sa c. Ako su $r\varepsilon C_n$ i t zatvoren term takvi da $f(q')\subseteq r$ i $r\,||\!\frac{}{n}\,\phi(t)$, a r' uslov takav da $q'\subseteq r'\varepsilon f^{-1}(r)$, onda $r'\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\sim\phi_1(t)$, stoga i $r"=q"\cup(r'-q')\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\sim\phi_1(t)$, pa $p'\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\sim\exists v\phi_1(v)$. Konačno, neka $p'\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\sim\exists v\phi_1(v)$ i neka je $q\supseteq f(p')$. Ako $p'\subseteq q'\varepsilon f^{-1}(q)$ postoje uslov $r"\varepsilon C'$ i zatvoren term t takvi da $q'\subseteq r"$ i $r"\,||\!\overset{\prime}{-}\,\phi_1(t)$. Tada $(q'\subseteq)r'\,||\!\overset{\prime}{-}\,\sim\sim\phi_1(t)$, gde smo uslov $r'\varepsilon C'$ dobili (iz $r"$) na isti način kao q' (iz $q"$) u prethodnom slučaju, te, prema induktivnoj hipotezi, i $(q\subseteq)f(r')\,||\!\frac{}{n}\,\sim\sim\phi_1(t)$. Dakle, takodje, $f(p')\,||\!\frac{}{n}\,\sim\sim\exists v\phi_1(v)$.

Korolar 3.13. $T^{fn} = (T')^{f} \cap SENT(L)$.

Definišimo sada rekurzivno (i simultano) nizove teorija T^k i jezika L^k na sledeći način:

$L^o = L$, $T^o = T$

$L^{k+1} = (L^k)'$, $T^{k+1} = (T^k)'$ (gde podrazumevamo $(L^k)'$ i $(T^k)'$ se formiraju proširenjem jezika L^k, odnosno teorije T^k na način analogan dobijanju L' i T' (u prethodnim tvrdjenjima) od L i T).

Neka je $L^{\omega} = \bigcup_{k\in\omega} L^k$ i $T^{\omega} = \bigcup_{k\in\omega} T^k$.

Lema 3.14. T^{ω} je konsistentno.

Lema 3.15. Neka su C^{ω} i $C^k, k\in\omega$ respektivno skupovi uslova Robinsonovog konačnog forsinga za teoriju T^{ω} i jezik $L^{\omega}(A)$, odnosno za teoriju T^k i jezik $L^k(A)$. Tada $C^{\omega} = \bigcup_{k\in\omega} C^k$.

Dokaz. Jasno. Svaki se model teorije T^k može proširiti do modela teorije T^{ω}.

Naravno, važi i

Lema 3.16. Neka su C_n^{ω} i $C_n^k, k\in\omega$ respektivno skupovi uslova n-konačnog forsinga za teoriju T^{ω} i jezik $L^{\omega}(A)$, odnosno za teoriju T^k i jezik $L^k(A)$. Onda $C_n^{\omega} = \bigcup_{k\in\omega} C^k$.

Lema 3.17. Za svako $\phi\in SENT(L^{\omega}(A))$ i svako $p\in C^{\omega}$

$p \Vdash \sim\sim\phi$ ako i samo ako $p \Vdash_n \sim\sim\phi$

gde su $\Vdash$ i $\Vdash_n$ konačna, odnosno n-konačna forsing relacija za teoriju T^{ω} i jezik $L^{\omega}(A)$.

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule.

Slučajevi: ϕ je atomarna formula i $\phi \equiv \phi_1 \& \phi_2$ su trivijalni. Slučaj $\phi \equiv \sim\phi$, je neznatno teži, a $\phi\equiv\exists v\phi_1(v)$ zahteva (kao i u 3.12) samo malo više strpljenja, koji ćemo opet pokazati.

Neka $p \Vdash \sim\sim\exists v\phi_1(v)$ i $p\subseteq q\in C_n^{\omega}$, $q = p\cup\{\psi_1(\tilde{t}^1),\dots,\psi_k(\tilde{t}^k)\}$, $k\geq 0$. Neka su, dalje, $\bar{\psi}_1(\tilde{t}^1),\dots,\bar{\psi}_k(\tilde{t}^k)$ atomarne rečenice tak-

ve da $T^{\omega} \models \psi_i(\tilde{t}^i) \leftrightarrow \bar{\psi}_i(\tilde{t}^i)$, $i=1,\ldots,k$. (na raspolaganju nam je, jasno, širok izbor takvih rečenica, no, svaki izbor je jednako dobar za ovaj dokaz), a $r \in C^{\omega}$ uslov i t zatvoren term takvi da $p \cup \{\bar{\psi}_1(\tilde{t}^1),\ldots,\bar{\psi}_k(\tilde{t}^k)\} \subseteq r$ i $r \Vdash \phi_1(t)$. Prema induktivnoj pretpostavci $r \Vdash_n \sim\sim\phi_1(t)$ i stoga, prema 3.3, $q \cup r - \{\bar{\psi}_1(\tilde{t}^1),\ldots,\bar{\psi}_k(\tilde{t}^k)\} \Vdash_n \sim\sim\phi_1(t)$. Dakle, $p \Vdash \sim\sim\exists v\phi_1(v)$.
Ako, pak, $p \Vdash_n \sim\sim\exists v\phi_1(v)$ i $p \subseteq q \in C^{\omega}$ tada za neko $r \in C_n^{\omega}$ i neki zatvoren term t, $q \subseteq r$ i $r \Vdash_n \phi_1(t)$. Neka je r' uslov nastao zamenom rečenica iz $r-q$ njima ekvivalentnim u odnosu na T^{ω} atomarnim rečenicama. Onda $r' \Vdash_n \sim\sim\phi_1(t)$ pa i (prema induktivnoj hipotezi) $r' \Vdash \sim\sim\phi_1(t)$. Zaključujemo $p \Vdash \sim\sim\exists v\phi_1(v)$.

Teorema 3.18. $(T^{\omega})^f = (T^{\omega})^{f_n}$.

Dokaz. Direktna posledica lema 3.3 i 3.17.

IV GLAVA

n-KONAČNA FORSING PRIDRUŽENJA

Primerom 2.38 smo pokazali da medju n-konačnim forsing pridruženjima ne mora da vlada hijerarhijski odnos. Naredni rezultati daju tek neke od odgovora na brojna pitanja odnosa date teorije T i njoj korespondentnih n-konačnih forsing pridruženja.

Prva dva tvrdjenja su uopštenja već poznatih za konačni forsing (videti |2|).

Lema 4.1 *(a)* Ako je jezik L teorije T prebrojiv i $T=T^{f_n}$, onda za svaku rečenicu ϕ jezika L konsistentnu sa T postoji model M teorije $T\cup\{\phi\}$ takav da je $T\cup D_n(M)$ kompletna teorija (kažemo još i da M n-kompletira teoriju T);

(b) Neka je teorija T (jezika L proizvoljne kardinalnosti) takva da za svaku rečenicu ϕ jezika L konsistentnu sa T postoji model teorije $T\cup\{\phi\}$ koji n-kompletira T. Tada $T=T^{f_n}$ i uopšte $T=T^{f_k}$ za svako $k\geq n$.

Dokaz. *(a)* Kako je jezik L prebrojiv $T^{f_n}=Th(F_T^n)$ (2.18), te postoji bar jedan T-n konačno generični model M takav da $M\models\phi$;

(b) Dati uslov, jasno, važi i ako umesto rečenica jezika L posmatramo rečenice proširenog jezika $L(A)$, a koristeći se indukcijom po složenosti formule (jezika L) lako pokazujemo da svi modeli koji n-kompletiraju T su i T-n konačno generični (videti teoremu 2.6).

Pretpostavimo sada $\phi\notin T^{f_n}$. Onda za neki uslov q $q\|\!\frac{}{n}\sim\phi$ pa ako je M model za $T\cup q$ koji n-kompletira T, prema prethodnom, $M\models\sim\phi$ i $\phi\notin T$. Analogno rezonujemo i u slučaju $\phi\notin T$.

Korolar 4.2. Da bi kompletna teorija T bila n-forsing kompletna ($T=T^{f_n}$) dovoljan uslov je da postoji model $M\in\mu(T)$ koji n-kompletira T. Ako je jezik L teorije T prebrojiv, ovaj uslov je i potreban.

Korolar 4.3. Ako je jezik L teorije T prebrojiv i za neko n $T=T^{f_n}$, onda i $T=T^{f_k}$ za svako $k>n$.

Korolar 4.4. Ako je teorija T n-modelski kompletna, tada $T=T^{f_k}$ za svako $k\geq n$.

Dokaz. Prema 4.1. (b).

Dokaz se može dati i pozivanjem na tačke (ii) i (vi) teoreme 2.23 kao i poznate činjenice da n-modelski kompletna teorija ima Π_{n+2} aksiomatizaciju i da su dve n-modelski kompletne teorije sa istim Π_{n+1} segmentom jednake.

Lema 4.5. *(a)* Ako je teorija T kompletna i $T=T\cap\Pi_{n+2}$, tada $T=T^{f_k}$ za svako $k\geq n$;

(b) Ako je za (proizvoljnu) teoriju T počev od nekog n $T^{f_n}=T^{f_k}$ za svako $k>n$, onda i $T=T^{f_n}$.

Dokaz. *(a)* je direktna posledica tačke (vi), a *(b)* tačke (ii) teoreme 2.23.

Korolar 4.6. Ako je T kompletna teorija prebrojivog jezika L i $T=T\cap\Pi_{n+2}$, postoji model $M\epsilon\mu(T)$ koji n-kompletira T.

Lema 4.7. Ako je za neko $n(>0)$ T-n konačno forsing pridruženje T^{f_n} teorije T kompletna teorija, onda je i za svako $k<n$ T^{f_k} kompletna teorija.

Dokaz. Neposredna posledica tvrdjenja 2.23 (v).

Lema 4.8. Za svaku teoriju T jezika L postoji proširenje T_1 definisano u (adekvatnom) proširenju L_1 jezika L takvo da $T_1=T_1^{f_n}$ za svako $n\geq 0$.

Dokaz. Neka je M (ma koji) model teorije T i Γ_M njegov elementarni dijagram (skup svih rečenica jezika $L(M)$ koje važe u M). M, jasno, kompletira (kompletnu) teoriju Γ_M i prema 4.2. $\Gamma_M=\Gamma_M^{f_n}$ za svako $n\geq 0$ (uporediti ovo tvrdjenje sa 3.18).

Teorema 4.9. Neka je T_{DLOM} teorija gustog linearnog uredjenja sa maksimalnim i minimalnim elementom definisana u jeziku $L=\{\rho\}$ (ρ-binarni relacijski simbol). Tada $T_{DLOM}=T_{DLOM}^{f_k}$ za svako $k\geq 1$ i $T_{DLOM}\neq T_{DLOM}^{f}$. T_{DLOM}^{f} je (takodje) kompletna teorija.

Dokaz. T_{DLOM} je kompletna teorija jer nema konačnih modela i ω-kategorična je (Łoś-Vaught-ov test). No, ni jedan model ne kompletira teoriju (šta više, nijedan model teorije T_{DLOM} nije ni egzistencijalno kompletan za T_{DLOM}). Prema 4.2. i 4.6. $T_{DLOM} \neq T_{DLOM} \cap \Pi_2$ i $T_{DLOM} \neq T^f_{DLOM}$. Jasno $T_{DLOM} = T_{DLOM} \cap \Pi_3$, te $T_{DLOM} = T^{f_k}_{DLOM}$ za svako $k \geq 1$ (4.5(a)). Kako je $T^{f_1}_{DLOM}$ kompletna teorija, to je i T^f_{DLOM} kompletna teorija. T^f_{DLOM} je, zapravo, modelsko pridruženje teorije T_{DLOM} (dakle, i modelski kompletna teorija). To je teorija gustog linearnog uredjenja bez minimalnog i maksimalnog elementa. Dokaz smo mogli bazirati i na činjenici da teorija T_{DLOM} ima model koji je 1-kompletira. (Imamo i više od toga: ona je 1-modelski kompletna). Zaista, neka je M bilo koji njen prebrojiv model, $M \prec_1 N \models T_{DLOM}$ i K prebrojiv elementaran podmodel modela N takav da $M \subseteq K$. Naravno, onda i $M \prec_1 K$ pa, takodje, i $M \prec K$ (koristeći se Cantor-ovim argumentom lako se može pokazati da ako su $a_1, \ldots, a_m$ bilo koji elementi iz M i b proizvoljan element iz K postoji izomorfizam modela K na K koji element b preslikava na neki element a iz M, a ostavlja fiksnim $a_1, \ldots, a_m$ - za dokazivanje 1-modelski kompletnosti dovoljno je bilo ograničiti se samo na prebrojive modele). Dakle, i $M \prec N$.

Napomena. Da smo datu teoriju definisali u jeziku koji pored binarnog relacijskog simbola sadrži i dve konstante (oznake za minimalni i maksimalni element) dobili bismo kompletnu teoriju koja je jednaka svom Π_2 segmentu i stoga jednaka sa svim n-konačnim forsing pridurženjima (ovako definisana teorija je, primetimo, i modelski kompletna i slučaj je, na neki način, analogan primeru teorije gustog linearnog uredjenja bez minimalnog i maksimalnog elementa).

Teorema 4.10. Neka je T_N kompletna aritmetika (prvog reda)(skup svih rečenica jezika $L=\{+,\times,=,0,1\}$ koje važe u modelu $N=\langle N,+,\times,0,1\rangle$, gde je N skup prirodnih brojeva). Tada $T_N = T^{f_k}_N$ i N je jedini (T_N-k) konačno generični model za svako $k \geq 0$.

Dokaz. Kako su svi elementi modela N definabilni, može se na neki način T_N smatrati elementarnim dijagramom modela N. N, jasno kompletira T_N, te $T_N = T^{f_k}_N$ za svako k. No, N je i jedini model koji kompletira T_N (prema toma T_N nije modelski kompletna (videti takodje kraj teoreme 4.11.), a N je jedini (T_N-k)-konačno generični model). M.O.Rabin je, naime, dokazao da ni jedan nestandardni model kompletne aritmetike nije ni egzistencijalno kompletan (za teoriju T_N). S druge strane, spomenimo i to, A.Robinson je izveo da ni jedan egzistencijalno kompletan model teorije T_N različit od N nije model ni Peanove aritmetike |39|.

Teorema 4.11. Neka je T_{PA} Peanova aritmetika (definisana u jeziku $L=\{+,x,=,0,1\}$). Tada: (a) za svako n postoji $k>n$ tako da je $T_{PA}^{f_n}\neq T_{PA}^{f_k}$; (b) Nijedna teorija $T_{PA}^{f_k}$ za $k\geq 1$ nije kompletna; (c) N nije T_{PA} konačno generični model; (d) T_{PA}^{f} nije modelsko kompletiranje teorije T_{PA}.

Dokaz. *(a)* Pretpostavimo da je za neko n $T_{PA}^{f_n}=T_{PA}^{f_k}$ za svako $k>n$. Onda, prema 4.5 (b), $T_{PA}=T_{PA}^{f_n}$ i prema 2.18 $T_{PA}=Th(F^n_{T_{PA}})$. Prema tome, postoji nestandardni model Peanove aritmetike koji je n-kompletira. No, to je u suprotnosti sa sledećom teoremom |11| (citiramo je u potpunosti):

Za svako $n\geq 0$ postoji Σ_{n+1} formula $\phi(v)$ takva da svaki nestandardni model M teorije T_{PA} ima član c takav da $M \models \sim\phi[c]$ dok postoji n-elementarna ekstenzija M^* modela M koja je elementarno ekvivalentna sa M i koja ispunjava $M^* \models \phi[c]$. M^* je krajnja ekstenzija (end extension) jedne kofinalne elementarne ekstenzije modela M.

(b) i *(c)* (zapravo jedno šire tvrdjenje) proizilaze prema Gödel-ovom rezultatu (datom u nešto izmenjenoj verziji):

Za svaku podteoriju T teorije T_N sa efektivno datim rekurzivno nabrojivim skupom aksioma postoji rečenica ϕ oblika $\forall v_1 \ldots \forall v_m$ $(r\neq t)$, gde su r i t termi, takva da $N\models \phi$ (tj. $\phi \in T_N$), ali $\phi\notin T$.

Odatle nijedna takva teorija T, a T_{PA} je jedna od njih, nema svojstvo 1-pridruženog utapanja, te T^{f_1}, a onda ni bilo koje drugo forsing pridruženje T^{f_k} za $k>1$ ne može biti kompletna teorija. Kako $\phi\notin T_{PA}$, a $T_{PA}\cap\Pi_1=T_{PA}^{f_n}\cap\Pi_1$, N ne može kompletirati $T_{PA}^{f_n}$ (postoji prebrojiv T_{PA} konačno generični model M takav da $M \models \neg\phi$ i, jasno, $N \subseteq M$. Dijagram modela N je, da tako kažemo, sadržan u skupu kvantifikatorski slobodnih rečenica teorije T_{PA} (opet imamo u vidu definabilnost svih elemenata iz N).

Napomenimo da je u osnovi rezultata na koje smo se pozivali (u ovoj teoremi) fundamentalna teorema Matijaševiča da je svaka rekurzivno nabrojiva relacija diofantova kao i to da su za njeno dobijanje dovoljne upravo aksiome Peanove aritmetike. Ona se uostalom koristi i u dokazu sledećeg tvrdjenja (|12|), konkretno u konstrukciji dole pomenute formule ψ:

Ni jedna teorija T (jezika L) koja sadrži $T_{PA} \cap \Pi_2$ nije modelski kompletna teorija.

Postoji, naime, Σ_3 formula $\psi(v)$ (sa samo slobodno promenljivom v) takva da ako je M egzistencijalno kompletan model (ma koje) teorije T, koja je ekstenzija Π_2 segmenta Peanove aritmetike, tada: (a) $\{a \mid M \models \psi[a]\} = N$ (i (b) $M=N$ akko $M \models \forall v \phi(v)$). Sada ako bi T bilo modelski kompletna teorija, dakle, i $E_T = \mu(T)$ skup formula $\{\psi(v)\} \cup \{n<v \mid n \in N\}$ bi bio konsistentan sa teorijom T, pa bi se realizovao u nekom njenom modelu M. No, onda $\{a \mid M \models \psi[a]\} \neq N$ kontradiktorno sa (a).

Kao poseban zaključak izvodimo da $T_{PA}^{f_n}$ nije modelski kompletna ni za jedno $n \in \omega$, dakle, važi i (d).

Teorema 4.12. Neka je T_G teorija grupa (definisana u jeziku $L=\{\cdot, e\}$). Tada: (a) T^f je kompletna teorija; (b) $T=T^{f_k}$ za svako $k \geq 1$.

Dokaz. *(a)* Jasno, jer T_G ima svojstvo pridruženog utapanja. Primetimo uzgred da T_G nema modelsko pridruženje. Poznato je, naime, da teorija ima modelsko pridruženje ako i samo ako je klasa njenih egzistencijalno kompletnih modela elementarna - kaže se još, i elementarna u širem smislu (podsećamo: klasa modela μ je elementarna ako je $\mu = \mu(Th(\mu))$). Klasa modela je, opet, elementarna ako i samo ako je zatvorena u odnosu na formiranje ultraproizvoda i elementarnu ekvivalenciju. No, to nije slučaj sa klasom egzistencijalno zatvorenih grupa. Tako, npr. ako je M egzistencijalno kompletna grupa i D ω-nekompletan ultrafilter nad (proizvoljnim) beskonačnim skupom I M^I/D nije egzistencijalno kompletna grupa |10|.

Neka je sada ϕ rečenica konsistentna sa T_G. Kako svojstvo "biti beskonačna grupa" nije svojstvo prvog reda (suprotnu pretpostavku dovodi u kontradikciju primer $\prod_n C_n/D$ gde je D neglavni ultrafilter nad ω i C_n (ciklična) grupa reda n postoji konačna grupa M takva da $M\models\phi$. M, jasno, 1-kompletira teoriju T_G (u jeziku L(M) možemo univerzalnom rečenicom reći "da je svaki element jednak nekom od elemenata grupe M"), te je $T_G=T_G^{f_k}$ za svako $k\geq 1$. (4.1. (b)).

<u>*Teorema 4.13.*</u> Neka je T_{AG} teorija Abelovih grupa (definisana u jeziku $L=\{+,0\}$). T_{AG} ima modelsko kompletiranje, a za svako $k\geq 1$ $T_{AG}=T_{AG}^{f_k}$.

<u>*Dokaz.*</u> Prvo tvrdjenje je samo poseban slučaj mnogo opštijeg stava |10|.

Neka je T_R teorija modula nad prstenom s jedinicom R (odgovarajući jezik je $L_R=\{+,0\}\cup\{f_r|r\in R\}$, gde su f_r unarni funkcijski simboli; jasno $f_r(x)=rx$). Ako je R koherentan prsten (prsten R je koherentan ako je jezgro svakog homomorfnog preslikavanja prstena R^n u R konačno generisano) T_R ima modelsko kompletiranje i to je teorija $T_R^*=\mathrm{Th}(\sum_{I\leq R}E(R/I)^{(\aleph_0)})$, (gde je Σ oznaka za (slabu) direktnu sumu; $E(R/I)^{(\aleph_0)}$ je takodje direktna suma, a $E(R/I)$ je injektivni omotač cikličnog modula R/I-I je ideal prstena R). Da je prsten R koherentan ujedno je i potreban uslov za egzistenciju modelskog kompletiranja teorije T_R.

Kada je R komutativan Noether-ov prsten svaki injektivni modul E je izomorfan modulu oblika $\sum_{P\in\mathcal{P}}E(R/P)^{(\alpha_p)}$, gde je $\alpha_p\geq 0$, dok je $\mathcal{P}$ skup svih prostih ideala prstena R. α_p je jedinstveno odredjeno modulom E(|30|). Primenom ovog rezultata u |10| je dokazana ekvivalentnost sledećih tvrdjenja.

(I) E je model teorije T_R^*

(II) E je injektivan i ako $E\cong\sum_{P\in\mathcal{P}}E(R/P)^{(\alpha_p)}$, tada $\alpha_p>0$ za svaki maksimalni ideal P, a ako je još P takav maksimalan ideal da je prsten R/P konačan, onda $\alpha_p\geq\aleph_0$.

Na osnovu navedenog modelsko kompletiranje teorije Abelovih grupa (posmatranih kao Z-modula) je

$Th(\sum_p Z(p^{\omega})^{(\aleph_0)} \oplus Ra^{(k)})$, $k\geq 0$, p prost broj, tj. teorija $T^{*}_{AG}=T_{AG}\cup\{\forall u\exists v(nv=u)\mid n\in\omega\}\cup\{\exists v_1\ldots\exists v_m(\&_{i\neq j} v_i\neq v_j \& \&_{i=1}^{m}(0\neq v_i \& pv_i=0)\mid m\in\omega$, p prost broj$\}$ ($Z(p^{\omega})$ - grupa svih p^n-tih kompleksnih korena iz jedinice, Ra-aditivna grupa racionalnih brojeva). Injektivni Z-moduli su baš deljive grupe (modul je injektivan akko je direktni sumand svakog modula u kome je sadržan), a Z (komutativan) prsten glavnih ideala (ako je P maksimalan ideal onda $P=\langle p\rangle$, gde je p-prost broj, Z/P je konačni Z-modul (grupa ostataka po modulu p i $E(Z/P)=Z(p^{\omega})$). Naravno da je T^{*}_{AG} i kompletna teorija (modelski je kompletna i ima svojstvo pridruženog utapanja).

Jasno, teorija (Abelovih) deljivih grupa (s obzirom da je model konsistentna sa teorijom Abelovih grupa) ima isto modelsko pridruženje. Teorija T_{TFDG} torziono slobodnih deljivih grupa je modelski kompletna, više od toga ona je podmodelski kompletna. Jer, neka je M torziono slobodna deljiva grupa i N konačno generisana podstruktura (koja ne mora nužno biti i podgrupa). Tada $T_{TFDG}\cup D(N)$ nema konačnih modela i α-kategorična je za svako $\alpha\geq\omega_1$ (ako $G\models T_{TFDG}\cup D(N)$ minimalna deljiva podgrupa grupe G (dakle, i njen rang) koja sadrži podstrukturu $D(N)$ jedinstveno je odredjena).

Svojstvo "biti p-primarna deljiva grupa" nije uopšte aksiomatizibilno (nije generalno svojstvo prvog reda).

Teorija T_{IPP} beskonačnih p-primarnih grupa sa elementima reda p je i kompletna i modelski kompletna (prema Prüfer-ovoj teoremi takve grupe su direktne sume cikličnih grupa i otuda onda odmah proizilazi ω-kategoričnost. Naravno, teorija je i induktivna).

Isključimo li uslov beskonačnosti ostaje nam teorija T_{PP} čije je modelsko kompletiranje T_{IPP}, a, inače, $T_{PP}=T_{PP}^{f_k}$ za svako $k\geq 1$.

Teorema 4.14. Neka je T_F teorija polja definisana u jeziku $L=\{+,\cdot,0,1\}$. Tada $T_F=T_F^{f_k}$ za svako $k\geq 1$, a T^f je teorija algebarski zatvorenih polja T_{ACF}.

Dokaz. Pokazujemo prvo $T_F^f = T_{ACF}$.

Teorija algebarski zatvorenih polja je modelski kompletna, šta više, podmodelski kompletna. Jer, neka je M konačno generisana podalgebra algebarski zatvorenog polja N (s obzirom na izabrani jezik M nije nužno polje). Dijagram modela M odredjuje minimalno podpolje M' (polja N) u kome je sadržano M (ako su $a_1,\dots,a_m$ generatorni elementi $M'=K[a_1,\dots,a_m]$, gde je K ili polje racionalnih brojeva ili polje Z_p za neki prost broj p, ovisno od karakteristike polja N). Jasno, teorija $T_{ACF} \cup \Delta_M$ nema konačnih modela. Osim toga, ona je i λ-kategorična za svako $\lambda \geq \omega_1$. Naime, neka su N_1 i N_2 dva modela kardinalnosti $\lambda \geq \omega_1$ teorije $T_{ACF} \cup \Delta_M$. Pretpostavićemo da oba polja sadrže zajedničko prebrojivo potpolje (izomorfno sa) M' kao i to da nemaju drugih zajedničkih elemenata. Transcedentne baze C_1 i C_2 polja N_1 i N_2 nad M' su iste kardinalnosti (λ) pa postoji bijektivno preslikavanje f skupa C_1 na C_2. Preslikavanje $g: M'(C_1) \to M'(C_2)$ odredjeno sa $g|_{M'} = id_{M'}$ i $g|_{C_1} = f$ je izomorfizam datih polja koji se, dalje, može proširiti do izomorfizma njihovih algebarskih zatvorenja N_1 i N_2 (Steinitz-ova teorema).

Kako su T_F i T_{ACF} modelski konsistentne T_{ACF} je modelsko pridruženje teorije T_F pa $T_F^f = T_{ACF}$. Uzgred, teorija T_F ima i svojstvo amalgamiranja (ako su M i N ekstenzija polja K možemo ih utopiti u polje $M \oplus_K N/I$ gde je $M \oplus_K N$ tenzorski proizvod K-algebri i I njegov maksimalni idela) te je T_{ACF} i modelsko kompletiranje teorije T_F. Naravno, $T_{ACF} = T_{ACF}^{f_m}$ za svako $m \in \omega$.

Primetimo da iz onog što je već rečeno proizilazi da je teorija algebarski zatvorenih polja date karakteristike p (p je prost broj ili nula) kompletna teorija (da takva teorija nije ω-kategorična pokazuje primer algebarskih zatvorenja polja Z_p i $Z_p(x)$, odnosno ako je $p=0$ Ra i $Ra(x)$).

Što se tiče prvog dela tvrdjenja on je (kao i u slučaju teorije grupa) posledica činjenice da svojstvo "biti beskonačno polje" nije svojstvo prvog reda (posebno, "biti polje karakteristike 0" nije svojstvo prvog reda). Ilustrujemo ovo primerom $\prod_p Z_p/I$, gde je Z_p polje ostataka po modulu p, p prolazi skupom prostih brojeva, a I je neglavni ultrafilter nad tim skupom. Dakle, ako je rečenica ϕ konsistentna sa T_F, postoji konačno polje M u kome se ona realizuje i, naravno, $T_F \cup D_1(M)$ je kompletna teorije. Prema tome, $T_F = T_F^{f_1}$, uopšte $T_F = T_F^{f_k}$ za svako $k \geq 1$.

Ako je T_{RCF} teorija realnih zatvorenih polja (real closed fields), tada $T_{RCF} = T_{RCF}^{f_k}$ za svako $k \in \omega$. Jer T_{RCF} je modelski kompletna (takodje i kompletna) teorija. U dokazu ovog stava pozivamo sa na poznata svojstva realnih zatvorenih polja, uz primedbu da je dovoljno razmotriti samo slučajeve $M \subseteq M', M, M' \in \mu(T_{RCF})$ gde je stepen transcedentnosti polja M' u odnosu na polje M baš jedan:

svaki polinom nad realnim zatvorenim poljem (M) se razlaže u proizvod linearnih i kvadratnih faktora (s obzirom da je $M(\sqrt{-1})$ algebarski zatvoreno polje);

ako je M realno zatvoreno polje i $M(x)$ uredjena, prosta transcedentalna ekstenzija, tada uredjenje u $M(x)$ je jedinstveno odredjeno relacijama $a \leq x$, odnosno $x \leq a$, zavisno već koje važe u $M(x)$;

svaka dva realna zatvorenja M_1 i M_2 polja M su izomorfna.

Kako svako realno zatvoreno polje je ekstenzija polja realnih zatvorenih brojeva teorija T_{RCF} je i kompletna teorija.

Inače, T_{RCF} je modelsko pridruženje teorije formalnih realnih polja (T_{FRF}) (dakle, i njeno forsing pridruženje), ali nije njeno modelsko kompletiranje (koje stoga i ne postoji). Tako npr. i $M = Ra(\sqrt{2})(\sqrt{\sqrt{2}})$ i $N = Ra(\sqrt{2})(\sqrt{-\sqrt{2}})$ su formalna realna polja, pa će $\sqrt{2}$ u realnom zatvorenju polja M biti pozitivan, a u realnom zatvorenju polja N negativan element.

Medju teorijama sa modelskim kompletiranjem je i teorija Bulovih algebri (T_{BA}). Njeno modelsko kompletiranje je teorija bezatomičnih Bulovih algebri (T_{ALBA}). Dajemo u osnovnim crtama dokaz ovog tvrdjenja.

T_{ALBA} je podmodelski (znači i modelski) kompletna, jer podalgebra M Bulove algebre N generisana konačnim skupom M' je i sama konačna (za dato n postoji samo 2^{2^n} različitih Bulovih funkcija, a mi posmatramo funkcije sa najviše $|M'|$ promenljivih), pa ako su N_1 i N_2 dva prebrojiva modela teorije $T_{ALBA} \cup \Delta_M$ koristeći se Cantor-ovim argumentom možemo pokazati da se parcijalni izomorfizam $f: C_a^{N_1} \to C_a^{N_2}$, $a \in M$, može proširiti do izomorfnog preslikavanja algebre N_1 na algebru N_2. T_{ALBA} je, prema tome, ω-kategorična, stoga i kompletna (naravno nemamo konačnih modela).

Jasno je da su teorije T_{BA} i T_{ALBA} modelski konsistentne (direktni proizvod dve Bulove algebre je bezatomična Bulova algebra ako i samo ako je jedan od sumanada bezatomičan). No, teorija T_{BA} ima i svojstvo amalgamiranja (|9|). Zaista, neka su M, N_1 i N_2 Bulove algebre i neka su f i g injektivna preslikavanja algebre M u algebre N_1 i N_2 respektivno (pretpostavićemo odmah da su N_1 i N_2 netrivijalne Bulove algebre - u protivnom slučaj je trivijalan). Neka je, dalje, K slobodni proizvod algebri N_1 i N_2 (u klasi $\mu(T_{BA})$ slobodni proizvod algebri N_i, $i \in I$ uvek postoji, jer: za svaki kardinal λ (prema tome, i za $\lambda = \Sigma(|N_i| \mid i \in I)$) postoji slobodna Bulova algebra sa slobodno generatornim skupom kardinalnosti λ, $H(\mu(T_{BA})) \subseteq \mu(T_{BA})$ i postoji Bulova algebra N u koju se utapaju sve algebre N_i, $i \in I$) koje ćemo identifikovati sa njihovim slikama u K. Ako je I ideal u K generisan skupom $\{(f(a) \wedge g(a)') \vee (f(a)' \wedge g(a)) \mid a \in M\}$ s nešto truda se dokazuje da $N_i \cap I = \{0\}$, $i=1,2$, te su restrikcije prirodnog homomorfizma $h: K \to K/I$ na N_i, $i=1,2$, injektivna preslikavanja i, jasno $h(f_1(a)) = h(f_2(a))$ za svako $a \in M$.

Drugi jedan dokaz, da teorija T_{BA} ima svojstvo amalgamiranja, može se videti u |33|.

V GLAVA

n-KONAČNI FORSING I TEORIJA TIPOVA

Rezultati ovog poglavlja prirodna su uopštenja i dopune tvrdjenja iz [20], [21].

U svim razmatranjima teorija T i parametar n su fiksni, no, inače, potpuno proizvoljni, uz jedini uslov da je jezik L teorije T prebrojiv.

Za dati skup formula Γ $fv(\Gamma)=\cup\{fv(\phi)|\varepsilon\Gamma\}$. Kompletan m-tip teorije T je maksimalan skup formula konsistentan sa T takav da $|fv(\Gamma)|=m$. (n+1)-egzistencijalni m-tip se definiše analogno s tim što su njegovi elementi (samo) Σ_{n+1} formule. Kompletne (m)-tipove ćemo, generalno, obeležavati sa $\Gamma(\tilde{v})$ (ili samo Γ), (n+1)-egzistencijalne (m-) tipove sa $E(\tilde{v})$ (ili samo E), njihove elemente sa, respektivno, $\phi(\tilde{v})$, odnosno $\sigma(\tilde{v})$ (ili samo ϕ,σ), skup svih kompletnih m-tipova teorije T sa Ω_m i skup svih (n+1)-egzistencijalnih m-tipova teorije T sa Φ_m. Skupove Ω_m i Φ_m snabdećemo, takodje, topologijama, čiji bazični skupovi imaju za elemente $A\phi(\tilde{v})=\{\Gamma|\phi(\tilde{v})\varepsilon\Gamma\}$, tj. $A\sigma(\tilde{v})=\{E|\sigma(\tilde{v})\varepsilon E\}$.

Već nam je poznato da Φ_m $(m\varepsilon\omega)$, n-konačni forsing i n-modelsko pridruženje ovise jedino od Π_{n+1} segmenta teorije (videti 2.22, 2.2, 2.23(i)). Ovo je jedan od razloga (no, svakako, ne i jedini - s tim u vezi videti i ostale rezultate iz druge glave) koji je motivisao pokušaj da se izmedju izvesnih svojstava n-konačnog forsinga i n-modelskog pridruženja s jedne strane i skupova Φ_m, $m\varepsilon\omega$ s druge strane ustanovi veza.

Konstatujemo odmah da su Φ_m i Ω_m Hauzdorfovi topološki prostori sa otvoreno-zatvorenim (clopen) bazičnim skupovima. Jer, recimo, neka su $E_1(\tilde{v})$ i $E_2(\tilde{v})$ dva različita elementa iz Φ_m. Tada za neku formulu $\sigma_1(v)$ iz E_1 $\sigma_1(\tilde{v})\notin E_2$ pa u E_2 možemo naći formulu $\sigma_2(\tilde{v})$ takvu da $T\vdash\sigma_2(\tilde{v})\rightarrow\sim\sigma_1(\tilde{v})$ (u protivnom bi

$E_2 \cup \{\sigma_1(\tilde{v})\}$ bilo konsistentno sa T, tj. $\sigma_1(\tilde{v}) \varepsilon E_2$). Proizilazi: $\Gamma_1 \varepsilon A\sigma_1(\tilde{v})$, $E_2 \varepsilon A\sigma_2(\tilde{v})$ i $A\sigma_1(\tilde{v}) \cap A\sigma_2(\tilde{v}) = \emptyset$.

Koristićemo (obično prećutno) i sledeća svojstva prostora Ω_m: $A\phi_1(\tilde{v}) = A\phi_2(\tilde{v})$ akko $T \vdash \phi_1(\tilde{v}) \leftrightarrow \phi_2(\tilde{v})$; $A\phi_1(\tilde{v}) \subseteq A\phi_2(\tilde{v})$ akko $T \vdash \phi_1(\tilde{v}) \rightarrow \phi_2(\tilde{v})$ (jasno, pravci $(\leftarrow)$ važe i u Φ_m). Ako $T \nvdash \phi_1(\tilde{v}) \leftrightarrow \phi_2(\tilde{v})$, T je konsistentno sa $\exists\tilde{v}(\phi_1(\tilde{v}) \& \sim\phi_2(\tilde{v})) \vee \exists\tilde{v}(\phi_2(\tilde{v}) \& \sim\phi_1(\tilde{v}))$. Neka npr. u nekom modelu $M \varepsilon \mu(T)$ $M \models \phi_1[\tilde{a}] \& \sim\phi_2[a]$. Onda $\phi_1(\tilde{v}) \varepsilon \Gamma = \{\phi(\tilde{v}) \mid M \models \phi[\tilde{a}]\}$ i $\phi_2 \notin \Gamma$, dakle, $A\phi_1(\tilde{v}) \neq A\phi_2(\tilde{v})$. Analogno rezonujemo i u drugom slučaju.

Primetimo da skup Σ_{n+1} formula realizovanih nekom m-torkom u modelu teorije T nije nužno (n+1)-egzistencijalni m-tip. Navodimo ovom prilikom uz napomenu da je uslov o prebrojivosti jezika teorije T ovde suvišan

Lemu 5.1. *(a)* Model M iz $\mu(T \cap \Pi_{n+1})$ je n-egzistencijalno kompletan model teorije T akko svaka njegova m-torka ($m \varepsilon \omega$) realizuje (n+1)-egzistencijalni m-tip teorije T.

(b) E je (n+1)-egzistencijalni m-tip akko ga realizuje kakva m-torka nekog n-egzistencijalno kompletnog modela teorije T.

Dokaz. *(a)* U osnovi dokaza je sledeće tvrdjenje koje se lako proverava i važi za svaku teoriju T: Ako su M i N modeli teorije T, $a_o, \ldots, a_{m-1}$ i $b_o, \ldots, b_{m-1}$ elementi iz, respektivno, M i N takvi da $\{\sigma(v_o, \ldots, v_{m-1}) \mid M \models \sigma[a_o, \ldots, a_{m-1}]$, σ je Σ_{n+1} formula$\} \subseteq \{\sigma(v_o, \ldots, v_{m-1}) \mid N \models \sigma[b_o, \ldots, b_{m-1}]$, σ je Σ_{n+1} formula$\}$ tada se M i N mogu n-elementarno utopiti u model K teorije T tako da se slike elemenata a_i i b_i, $i=0, \ldots, m-1$ podudaraju.

(b) Videti 2.21.

U daljem radu pojmovi iz naredne definicije će imati ključnu ulogu (nećemo više posebno naglašavati da se radi o tipovima teorije T).

Definicija 5.2. Kompletan m-tip je normalan ako je ekstenzija (n+1)-egzistencijalnog m-tipa;

Kompletan m-tip je kompletan (n+1)-egzistencijalni m-tip ako je jedinstvena ekstenzija (n+1)-egzistencijalnog m-tipa.

Teorema 5.3. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) T je n-modelski kompletna teorija (videti definiciju 2.1);

(b) $\{A\sigma(\tilde{v}) \mid \sigma(\tilde{v})$ je Σ_{n+1} formula, $|fv(\sigma)| \leq m\}$ je baza prostora Ω_m (za svako $m\in\omega$) (gde sada, naravno, $A\sigma(\tilde{v}) = \{\Gamma\in\Omega_m \mid \sigma(\tilde{v})\in\Gamma\}$;

(c) Svaki kompletan tip je kompletan (n+1)-egzistencijalni tip;

(d) Svaki kompletan tip je normalan.

Dokaz. *(a)* → *(b)*

Jasno, jer T je n-modelski kompletna teorija akko za svaku formulu $\phi(\tilde{v})$ postoji Σ_{n+1} formula $\sigma(\tilde{v})$ takva da $T\vdash \phi(\tilde{v})\leftrightarrow\sigma(\tilde{v})$.

(b) → *(c)*

Neka je $\Gamma\in\Omega_m$ i $E=\{\sigma(\tilde{v})\in\Gamma \mid \sigma(\tilde{v})$ je Σ_{n+1} formula$\}$. Pretpostavimo da E nije (n+1)-egzistencijalni m-tip. Onda za neku Σ_{n+1} formulu $\sigma_o(\tilde{v})$ $\sigma_o(\tilde{v})\notin E$ i $E\cup\{\sigma_o(\tilde{v})\}$ je konsistentno sa T. Prema tome, $\Gamma\in A(\sim\sigma_o(\tilde{v})) = \bigcup_{i\in I} A\sigma_{i_o}(\tilde{v})$ i, recimo, $\Gamma\in A\sigma_{i_o}(\tilde{v}), i_o\in I$. Ali tada $\sigma_{i_o}(\tilde{v})\in E$ i $T\vdash \sigma_{i_o}(\tilde{v})\rightarrow\sim\sigma_o(\tilde{v})$, kontradiktorno sa pretpostavkom o konsistentnosti $T\cup E\cup\{\sigma_o(\tilde{v})\}$.

(c) → *(d)*

Jako trivijalno.

(d) → *(a)*

Dovoljno je da pokažemo da je svaka Π_{n+1} formula T-ekvivalentna sa nekom Σ_{n+1} formulom (onda je svaki model teorije T n-egzistencijalno kompletan i prema (adaptiranom) Robinsonovom testu T je n-modelski kompletna). Pretpostavimo da Π_{n+1} formula $\phi(\tilde{v})$ nema to svojstvo. Tada je za svaku Σ_{n+1} formulu $\sigma(\tilde{v})$ takvu da $T\vdash \sigma(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})$ $T\cup\{\phi(\tilde{v})\&\sim\sigma(\tilde{v})\}$ konsistentno. Kako $T\vdash \sigma_1(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})$ i $T\vdash \sigma_2(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})$ implicira $T\vdash \sigma_1(\tilde{v})\vee\sigma_2(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})$, a disjunkcija dve Σ_{n+1} formule je opet Σ_{n+1} formula, skup formula $\Gamma'=\{\phi(\tilde{v})\}\cup\{\sim\sigma(\tilde{v}) \mid T\vdash \sigma(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})\}$ je konsistentan sa T. No, ako je Γ tip koji sadrži Γ', Γ nije normalan (suprotno uslovu (d)), s obzirom da je $\sim\phi(\tilde{v})$ konsistentno sa $E=\{\sigma(\tilde{v})\varepsilon\Gamma \mid \sigma(\tilde{v})$ je Σ_{n+1} formula$\}$ (pretpostavka da $\phi(\tilde{v})\&\sigma(\tilde{v})$ nije konsistentno sa T za neko $\sigma(\tilde{v})\varepsilon E$ implicira $T\vdash \sigma(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})$, tj. $\sim\sigma(\tilde{v})\varepsilon\Gamma$).

Teorema 5.4.

(a) $T = T^{f}n$;

(b) Za svako $m\varepsilon\omega$, za svaki otvoren skup 0 u Ω_m postoji Σ_{n+1} formula $\sigma(\tilde{v})$ takva da $A\sigma(\tilde{v})\subseteq 0$;

(c) Za svako $m\varepsilon\omega$, skup kompletnih (n+1)-egzistencijalnih m-tipova je gust u Ω_m.

Dokaz. Pokažimo prvo da je *(b)* ekvivalentno sa

(b') T je f_n-kompletna teorija (definicija 2.31).

(b) $\rightarrow$ *(b')*

Neka je $\phi(\tilde{v})$ konsistentno sa T. Tada $A\phi(\tilde{v})\neq\emptyset$, te za neku Σ_{n+1} formulu $\sigma(\tilde{v})$ $A\sigma(\tilde{v})\subseteq A\phi(\tilde{v})$, dakle, i $T\vdash\sigma(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})$.

(b') $\rightarrow$ *(b)*

Ako je 0 prazan skup $A(\exists v(v\neq v))=0$. Pretpostavimo stoga da je 0 neprazan skup i $0=\bigcup_{i\varepsilon I} A\phi_i(\tilde{v})$. Onda za bar jedno $i\varepsilon I$ $A\phi_i(\tilde{v})\neq\emptyset$, pa za Σ_{n+1} formulu $\sigma(\tilde{v})$ konsistentnu sa T i takvu da je $T\vdash \sigma(\tilde{v})\rightarrow\phi_i(\tilde{v})$ $A\sigma(\tilde{v})\subseteq A\phi_i(\tilde{v})$ $(\subseteq 0)$.

Kako nam je *(a)*$\leftrightarrow$*(b')* već dato (teorema 2.33 (sa 2.23(ii)) dokazaćemo samo *(a)*$\rightarrow$*(c)* i *(c)*$\rightarrow$*(b')*.

(a) $\rightarrow$ *(c)*

Neka je $A\phi(\tilde{v})$ neprazan skup. Prema 4.1(a) postoji model M teorije $T\cup\{\exists\tilde{v}\phi(\tilde{v})\}$ takav da je $TUD_n(M)$ kompletna teorija. Ako je $M\models\phi[a]$, $\Gamma=\{\psi(\tilde{v})\mid M\models\psi[\tilde{a}]\}$ i $E=\{\sigma(\tilde{v})\mid M\models\sigma[\tilde{a}]\}$ E je (n+1)-egzistencijalni tip (5.1(b)) i zbog kompletnosti teorije $TUD_n(M)$ Γ je njegova jedinstvena ekstenzija. Γ je, znači, kompletan (n+1)-egzistencijalni tip i $\Gamma\varepsilon A\phi(\tilde{v})$. Proizilazi da skup kompletnih (n+1)-egzistencijalnih tipova ima neprazan presek sa svakim nepraznim otvorenim skupom, drugim rečima, on je gust u Ω_m.

(c) → (b')

Neka je $\phi(\tilde{v})$ formula konsistentna sa T, $\Gamma(\tilde{v})$ kompletan (n+1)-egzistencijalni tip iz $A\phi(\tilde{v})$ i $E(\tilde{v})$ (n+1)-egzistencijalni tip sadržan u Γ. Tada za neku formulu $\sigma(\tilde{v})\varepsilon E$ $T\vdash\sigma(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})$ (u suprotnom bi $T\cup E\cup\{\sim\phi(\tilde{v})\}$ bilo konsistentno i tip Γ ne bi bio jedinstvena ekstenzija od E).

n-egzistencijalno kompletan model teorije T nije nužno i model teorije T. Pravo pitanje je, zapravo, kada medju modelima klase $\mu(T)$ uopšte ima n-egzistencijalno kompletnih modela. Odgovor je, naravno, potvrdan ako $T=T\cap\Pi_{n+2}$ ili $T=T^{f_n}$ (videti 2.23(vi) i 4.1.) ali, npr. u 4.9 je data Π_3-aksiomatizibilna teorija (T_{DLOM}) bez svojih modela koji bi bili egzistencijalno kompletni, dok u $\mu(T_N)$ ima samo jedan egzistencijalno kompletan model za T_N (baš N). Teorema 5.6 ne nudi odgovor baš na naše pitanje, ali njen korolar to već čini u slučaju kompletnih teorija. No, dajemo prvo

<u>*Lemu 5.5.*</u> *(a)* Model $M\varepsilon\mu(T\cap\Pi_{n+1})$ je n-egzistencijalno kompletan model teorije T ako i samo ako za svaku Π_{n+1} formulu $\sim\sigma_o(\tilde{v})$ ispušta tip (ovde reč tip, jasno, ne podrazumeva maksimalnost skupa) $\{\sim\sigma_o(\tilde{v})\}\cup\{\sim\sigma(\tilde{v})\mid fv(\sigma)\subseteq fv(\sigma_o)$ i $T\vdash\sigma(\tilde{v})\rightarrow\sim\sigma_o(\tilde{v})\}$ (podsećamo na dogovor da je simbol σ rezervisan za Σ_{n+1} formule).

(b) Model $M\varepsilon\mu(T)$ n-kompletira T ako i samo ako za svaku formulu $\phi(\tilde{v})$ ispušta tip $\{\phi(\tilde{v})\}\cup\{\sim\sigma(\tilde{v})\mid fv(\sigma)\subseteq fv(\phi)$ i $T\vdash\sigma(\tilde{v})\rightarrow\phi(\tilde{v})\}$.

<u>*Dokaz.*</u> *(a)* (→) Neka je $M\varepsilon\mu(T\cap\Pi_{n+1})$ n-egzistencijalno kompletan model teorije T, $M\models\sim\sigma_o[\tilde{a}]$ i $E=\{\sigma(\tilde{v})\mid M\models\sigma[\tilde{a}]\}$. Prema 5.1(a) E je (n+1)-egzistencijalni tip, a za bar jednu formulu $\sigma(\tilde{v})$ iz E $T\vdash\sigma(\tilde{v})\rightarrow\sim\sigma_o(\tilde{v})$ (inače bi $T\cup E\cup\{\sigma_o\}$ bilo konsistentno, prema tome i $\sigma_o\varepsilon E$, kontradikcija).

(←) Pretpostavimo sada da M ispušta sve tipove oblika $\{\sim\sigma_o(\tilde{v})\}\cup\{\sim\sigma(\tilde{v})\mid fv(\sigma)\subseteq fv(\sigma_o)$ i $T\vdash\sigma(\tilde{v})\rightarrow\sigma_o(\tilde{v})\}$, $M\prec_n N\models T$ i $M\models\sim\sigma_o[\tilde{a}]$. Kako za neku Σ_{n+1} formulu $\sigma(\tilde{v})$ $M\models\sigma[\tilde{a}]$ i $T\vdash\sigma(\tilde{v})\rightarrow\sim\sigma_o(\tilde{v})$, sledi $N\models\sigma[\tilde{a}]$ i $N\models\sigma\rightarrow\sim\sigma_o$, stoga i $N\models\sim\sigma_o[\tilde{a}]$.

(b) $(\to)$ Neka M n-kompletira T i $M \models \phi[a_0,\dots,a_{m-1}]$. Kako je $T \cup D_n(M)$ kompletna teorija $T \cup D_n(M) \vdash \phi(c_{a_0},\dots,c_{a_{m-1}})$, te za neku formulu $\psi(c_{a_0},\dots,c_{a_{m-1}},c_{b_0},\dots,c_{b_{k-1}})$ iz $D_n(M)$ $T \vdash \psi(c_{a_0},\dots,c_{a_{m-1}},c_{b_0},\dots,c_{b_{k-1}}) \to \phi(c_{a_0},\dots,c_{a_{n-1}})$, a onda i (uz eventualno prenumerisavanje promenljivih)
$T \vdash \exists v_m \dots \exists v_{m+k-1} \psi(v_0,\dots,v_{m-1},v_m,\dots,v_{m+k-1}) \to \phi(v_0,\dots,v_{m-1})$. $\exists v_m \dots \exists v_{m+k-1} \psi(v_m,\dots,v_{m+k-1})$ je Σ_{n+1} formula i $M \models \exists v_m \dots \exists v_{m+k-1} \psi[a_0,\dots,a_{m-1}]$. M, znači, ispušta tip $\{\phi(v_0,\dots,v_{m-1})\} \cup \{\sim\sigma(v_0,\dots,v_{m-1}) \mid T \vdash \sigma \to \phi\}$.

$(\leftarrow)$ Kao *(a)* $(\leftarrow)$

<u>*Teorema 5.6.*</u> Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) Ako je $\phi(\tilde{v})$ konsistentno sa T teorija $T \cup \{\exists \tilde{v} \phi(\tilde{v})\}$ ima model koji je n-egzistencijalno kompletan model (teorije T);

(b) Za svako $m \in \omega$ skup normalnih m-tipova je gust u Ω_m.

<u>*Dokaz.*</u> *(a)* $\to$ *(b)*

Neka je $A\phi(\tilde{v})$ neprazan skup i M n-egzistencijalno kompletan model teorije T takav da $M \models T \cup \{\exists \tilde{v} \phi(\tilde{v})\}$. Pretpostavimo $M \models \phi[\tilde{a}]$. Tada je $\Gamma = \{\psi(\tilde{v}) \mid M \models \psi[\tilde{a}]\}$ normalan tip (jer $E = \{\sigma(\tilde{v}) \mid M \models \sigma[\tilde{a}]\} \subseteq \Gamma$ je (n+1)-egzistencijalni tip - 5.1(a)) i $\Gamma \in A\phi(\tilde{v})$.

(b) $\to$ *(a)*

Neka je formula $\phi(\tilde{v})$ konsistentna sa T. Prema proširenoj teoremi o ispuštanju tipova([5]) i 5.5.(a) teorija $T \cup \{\exists \tilde{v} \phi(\tilde{v})\}$ će imati model koji je i n-egzistencijalno kompletan model teorije T pod uslovom da za svaku formulu $\psi(\tilde{v})$ i svaku Π_{n+1} formulu $\sim\sigma_0(\tilde{v})$ važi: ako je $T \cup \{\exists \tilde{v} \phi(\tilde{v}), \psi(\tilde{v}), \sim\sigma_0(\tilde{v})\}$ konsistentno, onda je konsistentno i $T \cup \{\exists \tilde{v} \phi(\tilde{v}), \psi(\tilde{v}), \sim\sigma_0(\tilde{v}), \sigma(\tilde{v})\}$ za neku Σ_{n+1} formulu σ takvu da $T \vdash \sigma \to \sim\sigma_0$.

Pretpostavimo da je $T \cup \{\exists \tilde{v} \phi(\tilde{v}), \psi(\tilde{v}) \& \sim\sigma_0(\tilde{v})\}$ konsistentno. Kao neprazan otvoren skup $A(\exists \tilde{v} \phi(\tilde{v}) \& \psi(\tilde{v}) \& \sim\sigma_0(\tilde{v})\}$ sadrži normalan tip Γ i s obzirom da $\sigma_0(\tilde{v}) \notin \Gamma$ postoji u (n+1)-egzistencijalnom tipu $E = \{\sigma(\tilde{v}) \mid \sigma(\tilde{v}) \in \Gamma\}$ element σ takav da $T \vdash \sigma \to \sim\sigma_0$.

Sledi da je i $T\cup\{\exists\tilde{v}\phi(\tilde{v}),\ \psi(\tilde{v}),\ \sigma_o(\tilde{v}),\sigma(\tilde{v})$ konsistentno.

Korolar 5.7. Kompletna teorija T ima model koji je m-egzistencijalno kompletan ako i samo ako su normalni m-tipovi gusti u Ω_m za svako $m\in\omega$.

Korolar 5.8. Ako je T kompletna teorija takva da $T=\mathfrak{M}\Pi_{n+2}$, tada za svako $m\in\omega$ skup normalnih m-tipova je gust u Ω_m.

Dokaz. Prema 4.6. i 5.7.

Kako nam je već na raspolaganju 5.5. pomenućemo i

Teoremu 5.9. *(a)* Teorija klase E^n_T je aksiomatizibilna jednom (jedinom) rečenicom jezika $L_{\omega_1\omega}$.

(b) Teorija klase F^n_T je aksiomatizibilna jednom (jedinom)rečenicom jezika $L_{\omega_1\omega}$.

Dokaz. *(a)* Prema 5.5.(a) imamo direktno da je

$$\Lambda(T\cap\Pi_{n+1})\&\Lambda\{\psi_\phi|\phi(\tilde{v})\text{ je }\Pi_{n+1}\text{ formula (jezika L)}\},$$

gde je $\psi_\phi\equiv\sim\exists\tilde{v}(\phi(\tilde{v})\&\Lambda\{\sim\sigma(\tilde{v})|T\vdash\sigma\to\phi\})$, aksioma za E^n_T.

Napomena: Tvrdjenje (a) važi, ustvari, za svaku teoriju u smislu da ako je jezik teorije T kardinalnosti λ aksioma teorije $Th(E^n_T)$ je rečenica jezika $L_{\lambda^+\omega}$.

(b) Znamo da je model teorije T^{f_n} T-n konačno generičan ako i samo ako n-kompletira T^{f_n} (2.16 (i),(ii)). Zbog toga, a na osnovu 5.5.(b)

$$\Lambda T^{f_n}\&\Lambda\{\psi_\phi|\phi(\tilde{v})\text{ je formula (jezika L)}\},$$

gde $\psi_\phi\equiv\sim\exists\tilde{v}(\phi(\tilde{v})\&\Lambda\{\sim\sigma(\tilde{v})|T\vdash\sigma\to\phi\})$, je aksioma klase generičnih modela.

Prisetimo se još da u jeziku L klase E^n_T i F^n_T nisu uvek aksiomatizibilne; zapravo, ako je jedna onda je i druga, i u tom slučaju te dve klase se poklapaju, a njihova aksiomatizibilnost je, pak, ekvivalentna sa egzistencijom n-modelskog pridruženja.

Kao primere teorija sa svojstvom (a) iz 5.6 možemo navesti T^{f_n} i $Th(M)$ gde je M(ma koji) n-egzistencijalno kompletan model teorije T. Uverimo se u to samo u slučaju teorije $Th(M)$. Neka je $\phi(\tilde{v})$ formula konsistentna sa $Th(M)$. No, tada $M \models \exists \tilde{v}\phi(\tilde{v})$, a M je i n-egzistencijalno kompletan model za teoriju $Th(M)$. Zaista, pretpostavimo da je N model iz $\mu(Th(M))$ i $M \prec_n N$. Pošto $N \models T \cap \Pi_{n+1}$ N je n-elementaran podmodel nekog modela $K \in \mu(T)$, a kako je M $(n+1)$-elementaran podmodel modela K sledi i $M \prec_{n+1} N$.

Lema 5.10. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) Teorije T i T_1 imaju zajednički Π_{n+1} segment ($T \cap \Pi_{n+1} = T_1 \cap \Pi_{n+1}$);

(b) Za svako $m \in \omega$ teorije T i T_1 imaju isti prostor Φ_m (sa istom topologijom).

Dokaz. *(a) → (b)*

Neka je $E(\tilde{v})$ $(n+1)$-egzistencijalni tip za teoriju T. Prema 5.1.(b) on se realizuje u nekom n-egzistencijalno kompletnom modelu M teorije T. S obzirom da T i T_1 imaju zajednički Π_{n+1} segment M je n-egzistencijalno kompletan model i za teoriju T_1, dakle, $E(\tilde{v})$ je $(n+1)$-egzistencijalni tip i za teoriju T_1.

(b) → (a)

Neka je $T \cap \Pi_{n+1} \neq T_1 \cap \Pi_{n+1}$ i, pretpostavimo, $\sim\sigma$ Π_{n+1} rečenica takva da $\sim\sigma \in T - T_1$. Onda je $T_1 \cup \{\sigma\}$ konsistentno. Ako je M model teorije $T_1 \cup \{\sigma\}$ i N n-egzistencijalno kompletan model teorije T u koju se M n-elementarno utapa, tada $N \models \sigma$, pa ako je E bilo koji $(n+1)$-egzistencijalni tip koji se realizuje u N $\sigma \in E$. Naravno E nije $(n+1)$-egzistencijalni tip i za teoriju T.

Teorema 5.11. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) Teorija T ima n-modelsko pridruženje;

(b) Za svako $m \in \omega$ Φ_m je kompaktan topološki prostor.

Dokaz. *(a) → (b)*

Neka je T^+ n-modelsko pridruženje teorije T. Prema prethodnoj lemi T i T^+ imaju za svako $m\varepsilon\omega$ iste prostore Φ_m. Možemo stoga u dokazu (da je Φ_m kompaktan topološki prostor) Φ_m tretirati kao skup (n+1)-egzistencijalnih m-tipova teorije T^+. Na osnovu teoreme 5.3. prostori Φ_m i Ω_m^+ (Ω_m^+-skup kompletnih m-tipova teorije T^+) su homeomorfni (svaki m-tip je jedinstvena ekstenzija u njemu sadržanog (n+1)-egzistencijalnog m-tipa, što nam i daje homeomorfno preslikavanje). Osim toga, $\{A\sigma(\tilde{v}) \mid \sigma(\tilde{v})$ je Σ_{n+1} formula i $|fv(\sigma)| \leq m\}$ je baza za Ω_m^+. Dovoljno je zato da pokažemo da ako je $\Omega_m^+ = \bigcup_{i\varepsilon I} A\sigma_i(\tilde{v})$ postoji konačan podskup $\{A\sigma_{i_1}(\tilde{v}),\ldots,A\sigma_{i_k}(\tilde{v})\}$ (datog pokrivača) takav da je $\Omega_m^+ = A\sigma_{i_1}(\tilde{v})\cup\ldots\cup A\sigma_{i_k}(\tilde{v})$. Pretpostavimo suprotno. U tom slučaju $T^+\cup\{\sim\sigma_i(\tilde{v}) \mid i\varepsilon I\}$ je konsistentno jer za svaki konačan podskup formula $\{\sigma_{j_1}(\tilde{v}),\ldots,\sigma_{j_r}(\tilde{v})\}$ postoji tip Γ koji nije u $A\sigma_{j_1}(\tilde{v})\cup\ldots\cup A\sigma_{j_r}(\tilde{v})$ i, prema tome, $\sim\sigma_{j_1}(\tilde{v})\&\ldots\&\sim\sigma_{j_r}(\tilde{v})\varepsilon\Gamma$. No, ako je Γ kompletan tip koji sadrži $\{\sim\sigma_i(\tilde{v}) \mid i\varepsilon I\}$ sledi $\Gamma\notin A\sigma_i(\tilde{v})$ za svako $i\varepsilon I$, tj. $\Gamma\notin\Omega_m^+$, kontradikcija.

(b) → (a)

Prema 5.10. teorija T^{f_n} ima za svako $m\varepsilon\omega$ kompaktne topološke prostore Φ_m. Treba dokazati da je T^{f_n} n-modelski kompletna teorija, odnosno da je svaki kompletan tip i normalan. (5.3). Polazimo od suprotne pretpostavke. Neka je Γ kompletan tip iz Ω_m^f (Ω_m^f-skup kompletnih m-tipova teorije T_n^f) koji nije normalan, dakle, $E_\Gamma=\{\sigma(\tilde{v}) \mid \sigma\varepsilon\Gamma\}$nije (n+1)-egzistencijalni tip. Stoga za neku Σ_{n+1} formulu $\sigma_o(\tilde{v})$ $T^{f_n}\cup E_\Gamma\cup\{\sigma_o(\tilde{v})\}$ je konsistentno i $\sim\sigma_o(\tilde{v})\notin\Gamma$. Ako je A komplement skupa $A\sigma_o(\tilde{v})$ u Φ_m, onda za svako $E\varepsilon A$ postoji formula $\sigma_E(\tilde{v})\varepsilon A$ takva da $T^{f_n}\vdash\sigma_E(\tilde{v})\to\sim\sigma_o(\tilde{v})$ (u protivnom bi $E\cup\{\sigma_o(\tilde{v})\}$ bilo konsistentno sa T^{f_n}, tj. $\sigma_o(\tilde{v})\varepsilon E$). $A=\bigcup_{E\varepsilon A}\sigma_E(\tilde{v})$ i kako je $A\sigma_o(\tilde{v})$ otvoreno-zatvoren skup A je isti takav, prema tome i kompaktan. Neka je $\{\sigma_1(\tilde{v}),\ldots,\sigma_t(\tilde{v})\}$ konačan podskup skupa $\{\sigma_E(\tilde{v}) \mid E\varepsilon A\}$ takav da $A=\bigcup_{1\leq j\leq t}A\sigma_j(\tilde{v})$. Tada svaki (n+1)-egzistencijalni tip sadrži formulu $\sigma_0(\tilde{v})\vee\sigma_1(\tilde{v})\vee\ldots\vee\sigma_t(\tilde{v})$ (jer je ili u $A\sigma_0$ ili u A i čim sadrži jednu od formula $\sigma_0,\sigma_1,\ldots\sigma_t$ sadrži i njihovu disjunkciju). No, ni jedna od formula $\sigma_0(\tilde{v}),\sigma_1(\tilde{v}),\ldots,\sigma_t(\tilde{v})$ nije u Γ ($\sigma_j(\tilde{v})\in\Gamma$, $j=1,\ldots,t$, tj. $\sigma_j(v)\in E_\Gamma$ je u protivurečnosti sa konsistentnošću $T^{f_n}\cup E_\Gamma\cup\{\sigma_0\}$ (i $T^{f_n}\vdash\sigma_j\to\sim\sigma_0$)), znači $\sim\sigma_0(\tilde{v})\&\ldots\&\sim\sigma_t(\tilde{v})\in\Gamma$, u posebnom, $\sim\sigma_0(\tilde{v})\&\sim\sigma_1(\tilde{v})\&\ldots\&\sim\sigma_t(\tilde{v})$ je formula konsistentna sa T. Ali sada $A(\sim\sigma_0(\tilde{v})\&\sim\sigma_1(\tilde{v})\&\ldots\&\sim\sigma_t(\tilde{v}))$ ne sadrži ni jedan normalan tip (naime, pretpostavka da je Γ normalan tip iz $A(\sim\sigma_0(\tilde{v})\&\sim\sigma_1(\tilde{v})\&\ldots\&\sim\sigma_t(\tilde{v}))$ dala bi i $\sim\sigma_0(\tilde{v})\&\sim\sigma_1(\tilde{v})\&\ldots\&\sim\sigma_t(\tilde{v})\in\Gamma$ i $\sigma_0(\tilde{v})\vee\sigma_1(\tilde{v})\vee\ldots\vee\sigma_t(\tilde{v})\in\Gamma$), što je kontradiktorno sa 5.4. (T^{f_n} je f_n-kompletna teorija i zato je skup kompletnih (n+1)-egzistencijalnih m-tipova gust u Ω_m, a onda, naravno, i skup normalnih m-tipova).

O odnosu n-egzistencijalno kompletnih i n-konačno-generičnih modela u slučaju kada teorija T ima svojstvo n-pridruženog utapanja saznajemo više iz narednih tvrdjenja.

Lema 5.12. Teorija T ima svojstvo n-pridruženog utapanja ako i samo ako za svaki n-egzistencijalno-kompletan model M teorije T i Th(M) imaju zajednički Π_{n+1} segment.

Dokaz. ($\to$) Neka je σ Π_{n+1} rečenica (jezika L) iz Th(M). Pretpostavimo da σ nije u T, drugim rečima,da postoji model N za $T\cup\{\sim\sigma\}$. No, tada ako je K model teorije T u koju se M i N n-elementarno utapaju (koristimo: M je n-elementaran (u stvari, (n+1)-elementaran) podmodel nekog modela M' teorije T) sledi $K\models\sim\sigma$ (zbog $N\models\sim\sigma$), no, onda i $M\models\sim\sigma$ (jer $M\prec_{n+1}K$), kontradikcija.

Obrnuta inkluzija nam je uvek data (2.23.(vi)).

($\leftarrow$) Podsetimo se prvo da je svojstvo n-pridruženog utapanja ekvivalentno sa: ako su σ_1 i σ_2 (ma koje) dve Σ_{n+1} rečenice (jezika L) konsistentne sa T, onda je i rečenica $\phi\equiv\phi_1\&\phi_2$ konsistentna sa T(videti 2.23(v)). Stoga ako T nema svojstvo n-pridruženog utapanja, za neke Σ_{n+1} rečenice σ_1 i σ_2 skupovi $T\cup\{\sigma_1\}$ i $T\cup\{\sigma_2\}$ su konsistentni dok $T\vdash\sim(\sigma_1\&\sigma_2)$. Neka je M n-egzistencijalno kompletan model takav da $M\models\sigma_1$

(opet imamo u vidu 2.21.). Naravno, onda $M\models\sim\sigma_2$, pa $\sim\sigma_2\in Th(M)$ i $\sim\sigma_2\notin T$.

Teorema 5.13. Ako je T teorija sa svojstvom n-pridruženog utapanja za n-egzistencijalno kompletan model M sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) M je n-konačno generičan model;

(b) $Th(M)\cup D_n(M)$ je kompletna teorija.

Dokaz. *(a) → (b)*

Prema 2.23.(v) T^{f_n} je kompletna teorija, a kako $T^{f_n}=Th(F_T^n)\subseteq Th(M)$ $(M\in F_T^n)$, to je $Th(M)=T^{f_n}$. Kao n-konačno generični model M n-kompletira $Th(M)$.

(b) → (a)

$Th(M)$ je kompletna teorija sa modelom koji je n-kompletira, pa je $Th(M)=(Th(M))^{f_n}$ (4.2.). Prema prethodnoj lemi $Th(M)$ i T imaju zajednički Π_{n+1} segment pa $(Th(M))^{f_n}=T^{f_n}$ (2.23.(iv)). Kako M n-kompletira T^{f_n} M je n-konačno generični model (2.16.(ii)).

Korolar 5.14. Za teoriju T sa svojstvom n-pridruženog utapanja sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) Svaki model se može n-elementarno utopiti u (neki) n-konačno generični model.

(b) Za svaki n-egzistencijalno kompletan model M $Th(M)\cup D_n(M)$ je kompletna teorija.

Dokaz. *(a) → (b)*

Direktna posledica teoreme 2.20.

(b) → (a)

Prema 5.13. ako (b) onda je svaki n-egzistencijalno kompletan model i n-konačno generičan, te data implikacija sledi iz 2.21.

Recimo na kraju nešto i o Π_{n+2} omotaču teorije T (u slučaju n=0 radi se o tzv. induktivnom omotaču (inductive hull) teorije T). Definišemo ga kao maksimalnu Π_{n+2} aksiomatizibilnu teoriju koja sa teorijom T ima zajednički Π_{n+1} segment. Naredna teorema dokazuje egzistenciju i jednoznačnost takvog omotača za svaku teoriju (kardinalnost jezika je po tom pitanju irelevantna) ([43]).

Teorema 5.15. Za datu teoriju T neka je

$I(T)=\{\phi \mid \phi$ je Π_{n+2} rečenica takva da $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\phi\}$ i T imaju zajednički Π_{n+1} segment$\}$.

Tada:

(1) I(T) je konsistentan skup rečenica;

(2) Teorija T^{o} generisana skupom aksioma I(T) ispunjava sledeće uslove:

(a) $T^{o}\cap\Pi_{n+1}=T\cap\Pi_{n+1}$;

(b) Ako je T^{*} Π_{n+2} aksiomatizibilna teorija koja sa teorijom T ima zajednički Π_{n+1} segment, onda $T^{*}\subseteq T^{o}$.

Dokaz. *(1)* Dovoljno je da pokažemo da je I(T) zatvoreno u odnosu na konjunkciju.

Neka su ϕ_1 i ϕ_2 dve rečenice iz I(T). $\phi_1\&\phi_2$ je Π_{n+2} rečenica pa preostaje jedino da se dokaže da je svaki model M teorije T n-elementaran podmodel nekog modela teorije $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\phi_1\&\phi_2\}$. S obzirom na to kako smo definisali I(T), postoje modeli N_o i N_1, respektivno, teorija $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\phi_1\}$ i $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\phi_2\}$ takvi da je $M\prec_n N_o\prec_n N_1$. Ponavljajući ovaj postupak iznalaženja redom modela pomenutih teorija takvih da je svaki n-elementarna ekstenzija prethodnog dobijamo lanac

$$M\prec_n N_o\prec_n N_1\prec_n N_2\prec_n N_3\prec_n \cdots$$

gde $N_{2i}\models(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\phi_1\}$, $N_{2i+1}\models(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\phi_2\}$, $i\in\omega$. Unija lanca $K=\bigcup_{i\in\omega}N_{2i}=\bigcup_{i\in\omega}N_{2i+1}$ je model teorije $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\phi_1\&\phi_2\}$, jer, uopšte, Π_{k+2} aksiomatizibilna teorija je zatvorena u odnosu na k-elementarne lance, a, takodje, (opet prema poznatoj teoremi iz teorije modela) važi $M\prec_n K$.

(2) (a) Jasno, $T\cap\Pi_{n+1}\subseteq T^{o}\cap\Pi_{n+1}$ $(T\cap\Pi_{n+2}\subseteq I(T))$. Ako je, pak, $\phi\in\Pi_{n+1}$ rečenica takva da $\vdash\psi\to\phi$ za neku (Π_{n+2}) rečenicu ψ iz $I(T)$ i M model teorije T, onda za neki model N teorije $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\psi\}$ $M\prec_n N$, pa kako $N\models\phi$ to i $M\models\phi$. Dakle, $T\models\phi$.

(b) Očigledno je da ako teorija T^* ispunjava navedene uslove svaka njena aksioma (a to je Π_{n+2} rečenica) je ujedno i element skupa $I(T)$.

Skup $I(T)$ se može okarakterisati i pozivanjem na $(n+1)$--egzistencijalne tipove. To upravo čini

Teorema 5.16. $I(T)=\{\forall\tilde{v}\sigma(\tilde{v})\mid A\sigma(\tilde{v})=\Phi_m\}$.

Dokaz. Pokazujemo zapravo da su komplementi datih skupova rečenica jednaki.

Neka $\forall\tilde{v}\sigma(\tilde{v})\notin I(T)$. Prema definiciji skupa $I(T)$ to znači da postoji model teorije $T\cap\Pi_{n+1}$ koji se ne može n-elementarno utopiti u model teorije $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\forall v\sigma(\tilde{v})\}$. Odatle sledi da postoji model M teorije $T\cap\Pi_{n+1}$ takav da za neke konstante $c_o,\dots,c_m$ jezika $L(M)$ $(T\cap\Pi_{n+1})\cup D_n(M)\cup\{\sigma(\tilde{c})\}$ nije konsistentno (u protivnom bi, naime, za svaki model M teorije $T\cap\Pi_{n+1}$ mogli formirati n-elementarni lanac $M\equiv M_o\prec_n M_1\prec_n M_2\prec_n\dots$ takav da $M_{i+1}\models T\cap\Pi_{n+1}\cup\{\sigma(\tilde{c})\mid c_o,\dots,c_m$ su konstante jezika $L(M_i)\}$, čija unija je model za $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\forall v\sigma(\tilde{v})\}$ $(L(N)=\bigcup_{i\in\omega}L(M_i))$, i prema tome, svaki model bi se mogao n-elementarno utopiti u model teorije $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\forall\tilde{v}\sigma(\tilde{v})\}$). Stoga za neku rečenicu $\psi(\tilde{c},\tilde{d})\in D_n(M)$ $(T\cap\Pi_{n+1})\vdash\psi(\tilde{c},\tilde{d})\to\sim\sigma(\tilde{c})$ što implicira $T\cap\Pi_{n+1}\vdash\forall\tilde{v}(\exists\tilde{u}\psi(\tilde{v},\tilde{u})\to\sim\sigma(\tilde{v}))$. $\exists\tilde{u}\psi(\tilde{v},\tilde{u})$ je Σ_{n+1} formula konsistentna sa $T\cap\Pi_{n+1}$ $(M\models\psi(\tilde{c},\tilde{d}))$, pa ako je E $(n+1)$-egzistencijalni tip koji je sadrži, jasno, $E\notin A\sigma(\tilde{v})$.

Obratno, neka je $A\sigma(\tilde{v})\neq\Phi_m$ $(|fv(\sigma)|=m)$ i neka $\sigma(\tilde{v})$ nije element $(n+1)$-egzistencijalnog tipa E. Tada za neku formulu $\sigma_o(\tilde{v})\in E$ $T\vdash\sigma_o(\tilde{v})\to\sim\sigma(\tilde{v})$ (ovaj argument smo več koristili u više navrata), te se model M u kome se realizuje $\sigma_o(\tilde{v})$ ne može n-elementarno utopiti u model teorije $(T\cap\Pi_{n+1})\cup\{\forall\tilde{v}\sigma(\tilde{v})\}$.

Teorema 5.17. $(-)^{o}$ $(T^{o}-\Pi_{n+2}$ omotač teorije $T)$ je n-operator pridruženja i to najmanji (u smislu inkluzije).

Dokaz. Prvi deo tvrdjenja je jasan (tačka (i) definicije 2.24 je već proverena, a očigledno je, iz same definicije skupa, $I(T)$, da on ovisi jedino od Π_{n+1} segmenta teorije T, kao i da $T\cap\Pi_{n+2}\subseteq(I(T))$.

Drugi deo je posledica Π_{n+2} aksiomatizibilnosti teorije T^{o} i 2.25(2).

Korolar 5.18. $T^{o}\subseteq T^{e_n}\subseteq T^{f_n}$.

Dokaz. Zbog 5.17 i činjenice da je klasa n-konačno generičnih modela podklasa klase n-egzistencijalno kompletnih modela. Naime, ako je M n-konačno generični model i $M\prec_n N\models T$ s obzirom da T i T^{f_n} imaju zajednički Π_{n+1} segment N je n-elementaran podmodel nekog modela K teorije T, a iz $M\prec K$ sledi $M\prec_{n+1}N$. Napomena: ovde se bitno koristi pretpostavka o prebrojivosti jezika teorije T - videti 2.19).

Za Π_{n+2} aksiomatizibilnu teoriju T i T^{e_n} se može odrediti uz pomoć $(n+1)$-egzistencijalnih tipova.

Neka je

$$T'=T\cup\{\sim\exists\tilde{v}\phi(\tilde{v})\mid A\phi(\tilde{v}) \text{ ne sadrži normalni tip}\}$$

i definišimo $T^{(\alpha)}$ induktivno po ordinalima na sledeći način:

$$T^{(o)}=T$$

$$T^{(\beta+1)}=(T^{(\beta)})'$$

$$T^{(\alpha)}=\bigcup_{\beta<\alpha}T^{(\beta)} \quad \text{za granični ordinal } \alpha.$$

Lema 5.19. Za (proizvoljnu) teoriju T T' generiše (konsistentnu) teoriju koja sa T ima zajednički Π_{n+1} segment.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\forall v\theta(\tilde{v})$ takva Π_{n+1} rečenica da je $T\cup\{\exists\tilde{v}\sim\theta(\tilde{v})\}$ konsistentna teorija dok $T'\vdash\forall\tilde{v}\theta(\tilde{v})$. No, kako postoji n-egzistencijalno kompletan model u kome važi (Σ_{n+1}) rečenica $\exists\tilde{v}\sim\theta(\tilde{v})$ (2.21) $A(\sim\theta(\tilde{v}))$ sadrži normalan tip, kontradiktorno sa $\sim\exists\tilde{v}\sim\theta(\tilde{v})\in T'$. Znači $T'\cap\Pi_{n+1}\subseteq T\cap\Pi_{n+1}$. Obrnuta inkluzija je (više nego) jasna.

Lema 5.20. *(a)* Ako $T^{(\alpha)}=T^{(\alpha+1)}$, onda $T^{(\alpha)}=T^{(\alpha+\beta)}$ za svaki ordinal β.

(b) Postoji prebrojiv ordinal α takav da je $T^{(\alpha)}=T^{(\alpha+1)}$

Dokaz. *(a)* Dovoljno je pokazati $T^{(\alpha+2)}=T^{(\alpha)}$, a to trivijalno sledi iz definicije;

(b) Jasno, jer je u pitanju prebrojiv jezik.

Ako je α ordinal za koji važi $T^{(\alpha)}=T^{(\alpha+1)}$ označimo $T^{(\alpha)}$ sa T^{∞}.

Korolar 5.21. $T^{\infty}\cap\Pi_{n+1}=T\cap\Pi_{n+1}$.

Lema 5.22. Ako teorija T ispunjava uslov (a) teoreme 5.6., tada $T^{e_n}\subseteq T$.

Dokaz. Trivijalno (2.19).

Teorema 5.23. Za Π_{n+2} aksiomatizibilnu teoriju T važi: $T^{\infty} = T^{e_n}$.

Dokaz. ($\to$) Prema 2.23(vi) $T\subseteq T^{e_n}$, a onda i $T^{(1)}=T'\subseteq T^{e_n}$. Jer, ako bi za neku rečenicu $\sim\exists\tilde{v}\phi(\tilde{v})$ bilo ispunjeno $\sim\exists\tilde{v}\phi(\tilde{v})\in T'$, ali ne i $\sim\exists\tilde{v}\phi(\tilde{v})\in T^{e_n}=Th(E_T^n)$ postojao bi n-egzistencijalno kompletan model $\mathcal{M}$ u kome važi $\exists\tilde{v}\phi(\tilde{v})$, pa ako, recimo, $\mathcal{M}\models\phi[\tilde{a}]$, kompletan tip $\Gamma=\{\psi(\tilde{v})\mid\mathcal{M}\models\psi[a]\}$ bi bio normalan tip (5.1(b)) iz $A_\phi(\tilde{v})$.

Gornje rasudjivanje nam, zapravo, daje generalno: ako $T^{(\alpha)}\subseteq T^{e_n}$, onda i $T^{(\alpha+1)}=(T^{(\alpha)})'\subseteq T^{e_n}$. Znači $T^{\infty}\subseteq T^{e_n}$.

($\leftarrow$) Dokažimo prvo da T^{∞} ispunjava uslov (b) (dakle, i (a) teoreme 5.6. Neka je $T^{\infty}=T^{(\alpha)}=T^{(\alpha+1)}$ i neka je $\phi(\tilde{v})$ formula konsistentna sa T^{∞}. Tada mora postojati (n+1)-egzistencijalni tip $E(\tilde{v})$ takav da je $T^{(\alpha)}\cup\{\phi(\tilde{v})\}\cup E$ konsistentno (u protivnom $A_\phi(\tilde{v})$ ne bi sadržavalo normalne tipove i, po definiciji, bilo bi $\sim\exists\tilde{v}\phi(\tilde{v})\in T^{(\alpha+1)}$ $(=T^{\infty})$). Prema tome, svaki neprazan otvoren skup $A\phi(\tilde{v})$ sadrži normalan tip.

Rezimiramo konačno: prema prethodnoj lemi $(T^{\infty})^{e_n}\subseteq T^{\infty}$, a prema 5.21 i 2.26 $(T^{\infty})^{e_n}=T^{e_n}$.

U vezi sa Π_{n+2} aksiomatizibilnim teorijama navešćemo i sledeće rezultate.

Teorema 5.24. Ako je T Π_{n+2} aksiomatizibilna i n-forsing kompletna, sledeći uslovi su ekvivalentni:

(a) Svaki model je n-elementaran podmodel (nekog) n-konačno generičnog modela;

(b) Svaki n-egzistencijalno kompletan model je i n-konačno generičan;

(c) $T\cup E(c_0,\dots,c_{m-1})$, gde su $c_0,\dots,c_{m-1}$ konstante koje nisu sadržane u jeziku L, je kompletna teorija za svaki (n+1)-egzistencijalni tip E (pisaćemo, naravno, kraće $E(\tilde{c})$).

Dokaz. Dokazujemo niz implikacija (a)→(b)→(c)→(b)→(a).

(a) → (b)

Prema 2.20.

(b) → (c)

Neka je $E(\tilde{v})$ (n+1)-egzistencijalni tip i N n-egzistencijalno kompletan model u kome se realizuje $E(\tilde{c})$ (5.1(b)). Prema (a) $N\in\mu(T)$ i $TUD_n(N)$ je kompletna teorija, a onda i $TUE(\tilde{c})$. (Rezonujemo kao i u slučaju dokaza za 5.5(b). Za svaku rečenicu $\psi(\tilde{c})$ ili $TUD_n(N)\vdash\psi(\tilde{c})$ ili $TUD_n(N)\vdash\sim\psi(\tilde{c})$, recimo $TUD_n(N)\vdash\psi(\tilde{c})$ Tada za neku rečenicu $\sigma(\tilde{c},\tilde{d})\in D_n(N)$ $T\vdash\sigma(\tilde{c},\tilde{d})\to\psi(c)$, dakle i $T\vdash\exists\tilde{v}\sigma(\tilde{c},\tilde{v})\to\sigma(c)$, dok $\exists\tilde{v}\sigma(\tilde{c},\tilde{v})\in E(\tilde{c})$).

(c) → (b)

Prema 2.23(vi) svaki n-egzistencijalno kompletan model N je (s obzirom na uslove teoreme) i model teorije T. Konstatujmo još i da je $TUD_n(N)$ kompletna teorija.

Neka je $\psi(\tilde{c})$ rečenica jezika L(N) i $E(\tilde{v})$ (n+1)-egzistencijalni tip koji u modelu N realizuju slike konstanti $c_0,\dots,c_{m-1}$. Po uslovu (c), $TUE(\tilde{c})$ je kompletna teorija te je ili $TUE(\tilde{c})\vdash\psi(\tilde{c})$ ili $TUE(\tilde{c})\vdash\sim\psi(\tilde{c})$, pretpostavimo $TUE(\tilde{c})\vdash\psi(\tilde{c})$. No, onda i $TUD_n(N)\vdash\psi(\tilde{c})$, jer ako je za $\exists\tilde{v}\sigma(\tilde{c},\tilde{v})\in E(\tilde{c})$ $T\vdash\exists\tilde{v}\sigma(\tilde{c},\tilde{v})\to\psi(c)$ hipoteza o konsistentnosti $TUD_n(N)\cup\{\sim\psi(\tilde{c})\}$ implicirala bi i konsistentnost skupa rečenica $T\cup\{\exists\tilde{v}\sigma(\tilde{c},\tilde{v})\}\cup\{\sim\psi(\tilde{c})\}$.

(b) → (a)

Trivijalno (2.21).

Lema 5.25. Ako su i T i $T^{f_n} \Pi_{n+2}$ aksiomatizibilne teorije i ako svi $(n+1)$-egzistencijalni tipovi teorije T kompletiraju T (uslov (c) prethodne teoreme), tada se svaki model teorije T može n-elementarno utopiti u neki n-konačno generični model.

Dokaz. Prema uslovima leme $T \subseteq T^{f_n}$ (2.33(vi)), a svaki n-egzistencijalno kompletan model teorije T je i n-konačno generičan (2.23(vi))(uzgred, teorije T i T^{f_n} imaju uvek zajedničku klasu n-egzistencijalno kompletnih modela, a onda i $(n+1)$-egzistencijalnih tipova (2.23(ii)). Preostaje nam još samo da se pozovemo na 2.21.

Korolar 5.26. Ako je $T^{f_n} \Pi_{n+2}$ aksiomatizibilna teorija, sledeći uslovi su ekvivalentni:

(a) Svaki model teorije T se može n-elementarno utopiti u (neki) n-konačno generičan model.

(b) Svaki $(n+1)$-egzistencijalni tip kompletira T^{f_n}.

Dokaz. Direktna posledica teoreme 5.24 (T^{f_n} je n-forsing kompletna (2.23(iii)), a svaki model teorije T^{f_n} je n-elementaran podmodel nekog modela teorije T).

Korolar 5.27. Ako je $T^{f_n} = T^{f_n} \cap \Pi_{n+2}$ teorija T^{f_n} je generisana skupom $\{\forall \tilde{v}\, \sigma(\tilde{v}) \mid A\sigma(\tilde{v}) = \Phi_m\}$.

Dokaz. Prema 5.18. $T^o \subseteq T^{f_n}$, a s obzirom na uslov korolara sada je i $T^{f_n} \subseteq T^o$. Dokaz onda sledi na osnovu 5.16.

B I B L I O G R A F I J A

|1| F.W.Anderson,K.Fuller: *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag,1973.

|2| K.J.Barwise,A.Robinson: *Completing Theories by Forcing*, Annals of Mathematical Logic-vol.2,№2(1970),119-142

|3| J.Bell,M.Machover: *A Course in Mathematical Logic*,North-Holland (Amsterdam),1977.

|4| J.Bell,A.B.Slomson: *Models and Ultraproducts*,North-Holland (Amsterdam),1971.

|5| C.C.Chang,H.J.Keisler: *Model Theory*,North-Holland (Amsterdam),1973.

|6| P.Cohen: *Set Theory and the Continuum Hypothesis*,W.A.Benjamin,Inc.Reading,Mass.,1966.

|7| P.M.Cohn: *Algebra vol.2*,John Wiley&Sons (London),1977.

|8| M.A.Dickmann: *Large Infinitary Languages*,North-Holland (Amsterdam),1975.

|9| P.Dwinger,M.F.Yaqub: *Generalized Free Products of Boolean Algebras with an Amalgamated Subalgebra*,Indag.Math.25(1963), 225-231

|10| P.Eklof,G.Sabbagh: *Model Completions and Modules*,Annals of Mathematical Logic-vol.2,№3(1970),251-295

|11| H.Gaifman: *A Note on Models and Submodels of Arithmetic*, Lecture Notes in Mathematics 255,Springer-Verlag,1972,128-144

|12| D.C.Goldrei,A.Macintyre,H.Simmons: *The Forcing Companions of Number Theories*,Israel J.Math.vol.14,1973,317-332

|13| R.Gostanian: *Lectures on Model Theory part I*,Lecture Notes Series,1974.

|14| G.Gratzer: *Universal Algebra*,D.Van Nostrand Company,Inc.1968.

|15| M.Grulović: Φ_n *forsing i neke primene u algebri*,Magistarski rad,Beograd 1978.

|16| M.Grulović: *Primedba o forsingu*,Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,br.10(1980),161-171

|17| M.Grulović: *A Note on Forcing and Weak Interpolation Theorem for Infinitary Logics*,Zbornik radova Prirodno-matema-čkog fakultata u Novom Sadu,vol.12(1982),327-348

|18| P.R.Halmos: *Lectures on Boolean algebras*,Springer-Verlag,1974.

|19| G.Higman,B.H.Neumann,H.Neumann: *Embedding Theorems for Groups*,J.London Math.Soc.24(1949),247-254

|20| J.Hirschfeld: *Finite Forcing,Existential Types and Complete Types*,J.Symb.Logic,vol.45,№1,1980,93-102

|21| J.Hirschfeld,W.H.Wheeler: *Forcing,Arithmetic,Division Rings*, Lecture Notes in Mathematics 454,Springer-Verlag,1975.

|22| N.Jacobson: *Lectures in Abstract Algebra vol.III*,D.Van Nostrand,1964.

|23| C.R.Karp: *Languages with Expressions of Infinite Lenght*, North-Holland,1964.

|24| H.J.Keisler: *Model Theory for Infinitary Logic*,North-Holland, (Amsterdam-London),1971.

|25| H.J.Keisler: *Forcing and the Omitting Types Theorem*,Studies in Mathematics (ed.A.Morley),vol.8,96-133

|26| Jean-Pierre Keller: *Abstract Forcing and Applications*,Ph.D. Thesis,New York University 1977.

|27| Дж.Л.Келли: Общая топология ,"Наука",Москва,1981.

|28| А.Г.Курош: Теория групп,"Наука",Москва,1967.

|29| A.Macintyre: *Omitting Quantifier-free Types in Generic Structures*,J.Symb.Logic,vol.37,№3,1972,512-520

|30| E.Matlis: *Injective Modules over Noetherian Rings*,Pacific J.Math.,8(1958),511-528

|31| E.Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*,D.Van Nostrand,1979.

|32| Ž.Mijajlović: *Prilog teoriji modela i Booleovih algebri*, Doktorska disertacija,Beograd 1977.

|33| Ž.Mijajlović: *On the Embedding Property of Models*,Third Algebraic Conference,Beograd 1982,103-110

|34| S.Prešić: *Elementi matematičke logike*,Matematička Biblioteka 34,Beograd 1968.

|35| Е.Расёва,Р.Сикорский: Математика метаматематики,"Наука", Москва,1979.

|36| A.Robinson: *Introduction to Model Theory and to Metamathematics of Algebra*,North-Holland (Amsterdam),1963.

|37| A.Robinson: *Forcing in Model Theory*,Proceedings of the Colloquium of Model Theory,Rome 1969,69-82

|38| A.Robinson: *Infinite Forcing in Model Theory*,Proceedings of Second Scandinavian Logic Symposium,Oslo 1970,317-340

|39| A.Robinson: *Nonstandard Arithmetic and Generic Arithmetic*, Proc. of the Fourth Internat. Congress for Logic,Methodology and Philosophy of Science,Buchares 1971,North-Holland, 1973.

|40| H.Rogers: *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*,Mc.Graw-Hill (New York),1967.

|41| H.Simmons: *Existentially Closed Structures*,J.Symb.Logic, vol.37,№2,1972,293-309

|42| H.Simmons: *The Use of Injective-like Structures in Model Theory*,Compositio Mathemattica,vol.28,1974,113-142

|43| H.Simmons: *Companion Theories (Forcing in Model Theory)*,Seminaires de Mathematique pure,Universitet Cattholique of Louvain,Louvain,1975.

|44| C.Wood: *Forcing for Infinitary Languages*,Zeitschrift für Math.Logik und Grundlagen d.Math.,Bd.18,385-402

|45| O.Zariski,P.Samuel: *Commutative Algebra vol.I*,Springer-Verlag,1958.