Универзитет у Београду, Математички факултет

Мастер рад

Математички модели у животном и пензионом осигурању

Студент: Јована Кубура 1012/2015

Ментор: Проф. Др. Слободанка Јанковић

Београд, 2018.

Садржај

Увод ... 2
1 Вероватноћа смртности ... 3
1.1 Таблице смртности ... 6
1.2 Актуарске садашње вредности (APV) ... 10
1.2.1 Фактор дисконтовања ... 11
1.2.2 Комутативни бројеви ... 13
1.2.3 Корист од доприноса ... 15
2 Ренте ... 17
2.1 Одложена актуарска садашња вредност ... 20
2.2 Рачунање премије ... 24
2.3 Принцип еквиваленције ... 26
2.3.1 Дугорочно животно осигурање са годишњим премијама ... 27
2.3.2 Мешовито осигурање живота ... 27
2.3.3 Тренутне ренте са једнократном исплатом ... 28
2.3.4 Одложене ренте ... 28
2.4 Додатак за сигурност ... 29
2.5 Марковљев ланац у животном осигурању ... 31
2.5.1 Директни и обрнути Колмогоровљев систем ... 36
2.5.2 Марковљево својство Пуасоновог процеса ... 38
2.5.3 Нехомогени случај Марковљевог процеса скокова ... 39
3 Пензије ... 41
3.1 Актуарска садашња вредност у моделу више стања ... 47
3.2 Фракционо трајање ... 51
3.3 Актуарска садашња вредност за пензије ... 56
4 Резерве ... 58
4.1 Основе ... 58
4.2 Израчунавање математичке резерве по нето ретроспективној методи ... 58
4.3 Израчунавање математичке резерве по нето проспективној методи ... 61
4.4 Израчунавање математичке резерве по књиговодственој методи ... 63
Закључак ... 65
Литература ... 66

Увод

У раду је дат кратак увид у широку примену математике у животном и пензионом осигурању. Актуарска математика, као грана примењене математике, обрађује математичке основе животног и неживотног осигурања. Одређује обавезе између осигураника и осигуравајућих друштава.

Рад је обрађен кроз четири поглавља: Вероватноћа смртности, Ренте, Пензије и Резерве.

У првом поглављу је обрађен појам вероватноће смртности са таблицама смртности и основним појмовима које актуари користе у животном и пензионом осигурању. Дато је појашњење појма актуарске садашње вредности и где се она користи, и описани су комутативни бројеви. Због разлика у наслеђивању и у условима живота, а и због догађаја случајне природе, животних околности, као што су на пример несреће и болести, дужине живота варирају међу појединцима. Дужина живота новорођене бебе може се представити ненегативном случајном величином са функцијом расподеле.

Кроз друго поглавље размотрене су ренте (ануитети), врсте ренти, модел бенефита и премије и како постићи поштени договор између осигуравајуће компаније и осигураника, помоћу дефинисаног принципа еквиваленције. Такође, у овом поглављу су дефинисани и уговори животног осигурања.

Најпознатији пример ануитета су пензије о којима је реч у трећем поглављу. Код пензија имамо више плаћања, а самим тим и најкомплекснији модел.

У четвртом, последњем поглављу, обрађена је тема резерви, као и различити начини обрачуна математичке резерве. Математичка резерва се креира због будућих обавеза осигураника, како би у каснијим годинама био обезбеђен. У овом поглављу се највише користи [5], која је у широкој употреби у осигуравајућим компанијама које се баве животним осигурањем, као што је Grawe.

1 Вероватноћа смртности

За израду главе коришћени су следећи извори: [1], [3], [6], [9].

Актуарске ознаке

Међународно удружење актуара (IAA) је поставило стандардне ознаке које су општеприхваћене међу актуарима широм света.

Означићемо старост у тренутку смрти (изражену у годинама) са X, где је X случајна променљива, $X \geq 0$.

Увешћемо стандардне ознаке које се користе у осигурању.

Вероватноћу да ће особа која има x година живети и наредних t година означавамо на следећи начин:

$$P(X > x + t|\ X > x) =:_t p_x$$

Вероватноћу да особа неће преживети наредних t година рачунамо као вероватноћу супротног догађаја, и добијамо:

$$P(X \leq x + t|\ X > x) =:_t q_x$$

Вероватноћу да ће особа након преживљавања u година преживети још највише наредних t, означавамо на следећи начин:

$$P(\ x + u\ \leq\ X \leq x + t + u\ |X\ > x) =:_{u|t} q_x$$

Дефинисане вероватноће можемо записати и преко функције расподеле случајне променљиве X,

$F_X(x) = P(X\ \leq x)$:

$$_tp_x = P(X > x + t|X > x) = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} = \frac{1 - P(X \leq x + t)}{1 - P(X \leq x)} = \frac{1 - F(x + t)}{1 - F(x)},$$

$$_tq_x = P(X \leq x + t|X > x) = \frac{P(x < X \leq x + t)}{P(X > x)} = \frac{P(X \leq x + t) - P(X \leq x)}{1 - P(X \leq x)} = \frac{F(x + t) - F(x)}{1 - F(x)}.$$

$$ {}_{u|t}q_x = P(x+u < X \leq x+u+t \,|X > x) = \frac{P(x+u < X \leq x+u+t)}{P(X > x)} = $$
$$ = \frac{F(x+u+t) - F(x+u)}{1 - F(x)}. $$

Лема 1.1

a) ${}_tp_x + {}_tq_x = 1$

b) ${}_{u|t}q_x = {}_up_x \cdot {}_tq_{x+u} = {}_up_x - {}_{u+t}p_x = {}_{u+t}q_x - {}_uq_x.$

У даљем раду користићемо и функцију преживљавања која се дефинише преко функције расподеле вероватноћа на следећи начин:

$$ S(X) = 1 - F(X) = P(X > x) => 1 - S(X) = F(X) = P(X \leq x). $$

Сада можемо дефинисати вероватноће смртности и преко функције преживљавања:

$$ {}_tp_x = \frac{S(x+t)}{S(x)}, $$

$$ {}_tq_x = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} = 1 - {}_tp_x, $$

$$ {}_{u|t}q_x = \frac{S(x+u) - S(x+u+t)}{S(x)}. $$

Лема 1.2 *(Функционалне једнакости за p и q)*

a) ${}_tp_x = {}_sp_x \cdot {}_{t-s}\,p_{x+s}\,,\ x \geq 0,\ 0 \leq s \leq t$

b) ${}_tq_x = {}_sq_x + {}_sp_x \cdot {}_{t-s}q_{x+s}\,.$

Доказ леме 1.2

a) ${}_sp_x \cdot {}_{t-s}\,p_{x+s} = \frac{S(x+s)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+s+t-s)}{S(x+s)} = \frac{S(x+t)}{S(x)} = {}_tp_x$

b) ${}_sq_x + {}_sp_x \cdot {}_{t-s}q_{x+s} = \frac{S(x) - S(x+s)}{S(x)} + \frac{S(x+s)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+s) - S(x+s+t-s)}{S(x+s)} = \frac{S(x) - S(x+s) + S(x+s) - S(x+t)}{S(x)} = {}_t\,q_x.$

⊠

Напомена 1.1

$S(x) = \frac{S(x+0)}{S(0)} =_x p_0$, где је $S(0) = 1 - F(0) = 1$.

Интерпретација:

Посматрајмо новорођене бебе. Њихов број ћемо да означимо са $l_0 \geq 0$. Број преживелих до године x означимо случајном променљивом l_x. Као што можемо приметити, у животном осигурању није неуобичајено да се за стандардне ознаке случајних променљивих користе мала слова.

Питамо се, коју ће расподелу имати та случајна променљива? Како нам l_0 представља број извршених експеримената, односно број новорођених беба а ${}_xp_0$ је вероватноћа да ће новорођена беба доживети годину x (и постоје само два могућа исхода), можемо закључити да се ради о Биномној расподели:

$l_x \sim B(l_0,\ {}_x p_0)$, где је l_0 број новорођених беба, а ${}_xp_0$ је вероватноћа да ће новорођена беба доживети годину x.

Актуари често раде са очекиваним вредностима уместо са вероватноћама. Посматрајмо популацију новорођених беба на које примењујемо већ описани закон смртности. Очекивани број преживелих у години x ће бити:

E(l_x) = $l_0 \cdot {}_x p_0$ = $l_0 \cdot S(x) = l_x$, очекивани број преживелих =>

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0}.$$

Имамо да је:

$${}_tp_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} \cdot \frac{l_o}{l_0} = \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

$${}_tq_x = \frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)} \cdot \frac{l_o}{l_0} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x},$$

$${}_{u|t}q_x = \frac{l_{x+u} - l_{x+u+t}}{l_x}.$$

1.1 Таблице смртности

За израду поглавља су коришћени извори [1], [3], [6].

" Знате ли која је разлика између енглеског и сицилијанског актуара? Па, енглески актуар може предвидети прилично прецизно колико ће грађана умрети наредне године. Исто тако, сицилијански актуар може предвидети број Сицилијанаца који ће умрети наредне године, с тим што он може навести и имена".

Таблице смртности су израђивала осигуравајућа друштва или посматрањем целокупног становништва или посматрањем самих осигураника. Осигуравајући завод је посматрањем својих осигураника нашао правилност и утврдио да постоји природни закон који још није пронађен, али по ком се може приближно наслутити умирање људи.

Енглески актуар Gompertz је 1825. године дао образац којим је хтео да утврди ову законитост.

Образац гласи:

$l_x = K \cdot g \cdot c^x$,

где је x старост особе, а, g, K и c константе.

Како се назначена формула није слагала са праксом, 1860. године, енглески актуар Makeham је изменио формулу увођењем елемента S^x у формулу, како би се приближио дешавањима у пракси.

Тако је добијена Gompertz – Makeham- ова формула:

$l_x = K \cdot S^x \cdot g \cdot c^x$,

која служи за састављање таблица смртности. S такође представља одређену константу.

У таблицама смртности користимо следеће ознаке:

x – старост особе

l_x – број живих особа старих x година

d_x – број умрлих особа у току $(x + 1)$ године старости, тј. број лица која су преживела x- ту годину али нису доживела $(x + 1)$ годину старости.

Број преживелих особа опада са повећањем броја година:

$l_x \geq l_{x+1}$.

Можемо приметити везу између дефинисане ознаке d_x за број умрлих између године x и $x+1$, и броја преживелих особа l_x:

$d_x = l_x - l_{x+1}$.

Актуари рачунају смртност у произвољној години x помоћу једногодишње стопе смртности: $q_x = \frac{d_x}{l_x}$,

која говори колико ће људи који доживе годину x умрети до наредне године.

Следећа форула приказује једногодишњу стопу преживљавања:

$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x$.

Вероватноћа смртности зависи само од година старости и од пола особе. У Србији је пракса да се таблице израђују до стоте године живота. На слици у наставку је дат приказ табица до четврте године живота. Прве две слике приказују разлику у зависности од пола особе, а на трећој су дате таблице укупног становништва.

Детаљне таблице морталитета за Републику Србију, 2010–2012.

РЕПУБЛИКА СРБИЈА – мушко становништво
REPUBLIC OF SERBIA – male population

Старост / *Age*	Број посматраних становника *Number of observed population*	Број умрлих *Number of deaths*	Сирова вероватноћа смрти *Raw probability of death*	Изравната вероватноћа смрти *Smoothed probability of death*	Вероватноћа доживљења *Probability of surviving*	Број живих *Number of surviving*	Број мртвих *Number of deaths*	Збир бројева живих *Total number of person-years*	Средње трајање живота *Life expectancy*
x	L_x	T_x	q'_x	q_x	p_x	l_x	d_x	N_x	$\overset{0}{e}_x$
0	68914	481	0,00698	0,00698	0,99302	100000	698	7246319	71,96
1	69476	38	0,00055	0,00055	0,99945	99302	54	7146319	71,46
2	69278	21	0,00030	0,00030	0,99970	99248	30	7047017	70,50
3	68570	13	0,00019	0,00019	0,99981	99218	19	6947769	69,52
4	69013	5	0,00007	0,00007	0,99993	99199	7	6848551	68,54

...

РЕПУБЛИКА СРБИЈА – женско становништво
REPUBLIC OF SERBIA – female population

Старост / Age	Број посматраних становника *Number of observed population*	Број умрлих *Number of deaths*	Сирова вероватноћа смрти *Raw probability of death*	Изравната вероватноћа смрти *Smoothed probability of death*	Вероватноћа доживљења *Probability of surviving*	Број живих *Number of surviving*	Број мртвих *Number of deaths*	Збир бројева живих *Total number of person-years*	Средње трајање живота *Life expectancy*
x	L_x	T_x	q'_x	q_x	p_x	l_x	d_x	N_x	$\overset{0}{e}_x$
0	64988	370	0,00569	0,00569	0,99431	100000	569	7762123	77,12
1	65541	21	0,00032	0,00032	0,99968	99431	32	7662123	76,56
2	64576	14	0,00022	0,00022	0,99978	99399	22	7562692	75,58
3	64239	8	0,00012	0,00012	0,99988	99377	12	7463293	74,60
4	65332	9	0,00014	0,00014	0,99986	99365	14	7363916	73,61

...

СРБИЈА – СЕВЕР – укупно становништво
SRBIJA – SEVER – total population

Старост / Age	Број посматраних становника *Number of observed population*	Број умрлих *Number of deaths*	Сирова вероватноћа смрти *Raw probability of death*	Изравната вероватноћа смрти *Smoothed probability of death*	Вероватноћа доживљења *Probability of surviving*	Број живих *Number of surviving*	Број мртвих *Number of deaths*	Збир бројева живих *Total number of person-years*	Средње трајање живота *Life expectancy*
x	L_x	T_x	q'_x	q_x	p_x	l_x	d_x	N_x	$\overset{0}{e}_x$
0	71555	391	0,00546	0,00546	0,99454	100000	546	7503255	74,53
1	70958	24	0,00034	0,00034	0,99966	99454	34	7403255	73,94
2	68871	19	0,00028	0,00028	0,99972	99420	27	7303801	72,96
3	67491	9	0,00013	0,00013	0,99987	99393	13	7204381	71,98
4	67206	7	0,00010	0,00010	0,99990	99380	10	7104988	70,99

...

Пример

У примеру ћемо користити таблицу смртности за Републику Србију за 2010 – 2012. годину, дату у извору [9].

Посматрано на узорку мушкараца:

$${}_{48}p_{22} = \frac{l_{22+48}}{l_{22}} = \frac{l_{70}}{l_{22}} \approx \frac{63417}{98674} \approx 0{,}64, \text{ прочитано из таблице смртности.}$$

Посматрано на узорку жена:

$${}_{48}p_{22} \approx \frac{79260}{99037} \approx 0{,}8.$$

△

Уводимо нове ознаке за рачунање вероватноће смртности:

$${}_{t}q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{\text{очекивани број умрлих у временском интервалу } (x, x+t]}{\text{очекивани број преживелих у години } x} = \frac{{}_{t}d_x}{l_x}\ .$$

До сада смо радили само на дискретном моделу и x, t, u смо дефинисали као целе бројеве из скупа N_0.

Ознаке које ћемо користити у даљем раду су следеће:

${}_1p_x = p_x$,

${}_1q_x = q_x$,

${}_1d_x = d_x$.

У таблицама смртности по колонама су дате конкретне вредности за x, l_x, q_x, d_x, где смо d_x дефинисали на следећи начин:

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

Уколико нам је позната вероватноћа q_x, да особа неће доживети наредну годину, онда помоћу рекурзије можемо израчунати ${}_kp_x$, вероватноћу да ће особа стара x година преживети наредних k година:

Како нам је q_x познато, можемо поставити рекурзивну једначину:

$l_{x+1} = l_x \cdot (1 - q_x)$, рекурзија почиње од познате вредности l_0.

${}_kp_x = \frac{l_{k+x}}{l_x} = \frac{l_{k+x-1}}{l_x} \cdot (1 - q_{k+x-1}) = \frac{l_{k+x-2}}{l_x} \cdot (1 - q_{k+x-1}) \cdot (1 - q_{k+x-2}) = \cdots =$

$= \frac{l_x}{l_x} \cdot (1 - q_{k+x-1}) \cdot (1 - q_{k+x-2}) \cdot \ldots \cdot (1 - q_x)$

=>

${}_kp_x = \frac{l_x}{l_x} \cdot p_{x+k-1} \cdot p_{x+k-2} \cdot \ldots \cdot p_x.$

Израчунали смо вероватноћу да је особа која је преживела x година преживела и све до $x + k$: $x + k - 1$, $x + k - 2$, …

1.2 Актуарске садашње вредности (APV)

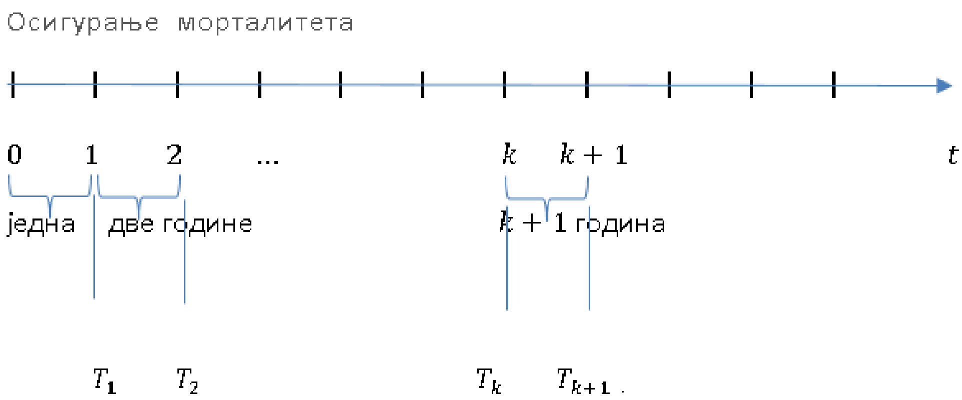
За израду поглавља су коришћени извори: [2], [6].

Циљ рачунања актуарске садашње вредности је израчунавање цене животног осигурања.

Нека је $K(x) = k, k = 0, 1, 2, \ldots$ *дискретна случајна променљива.*

Дефинишемо вероватноћу:

$$P(K(x) = k) = P(x + k < X \leq x + k + 1 \mid X > x) = {}_k p_x \cdot q_{x+k}.$$



Претпоставимо да се смрт догодила у интервалу $(k, k+1)$ који одговара исплати бенефита T_{k+1}, у тренутку $k+1$.

Вредност у тренутку $k = 0$ је $T_{k+1} \cdot v_{k+1}$, где је v_{k+1} фактор дисконтовања од тренутка $t = k+1$ до $t = 0$.

Вредност тог осигурања морталитета је случајна променљива Z:

$$T_{k(x)+1} \cdot v_{k(x)+1} = Z$$

Z називамо садашња вредност тог осигурања.

Ако је $K(x) = k$, онда имамо да је $Z = T_{k(x)+1} \cdot v_{k(x)+1}$ са вероватноћом

$P(K(x) = k) = {}_k p_x \cdot q_{x+k}$,

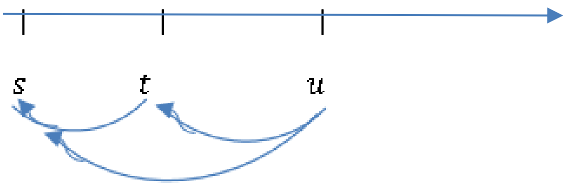
из чега можемо израчунати математичко очекивање садашње вредности осигурања:

$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Z_k} \cdot P(K(x) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{k+1} \cdot v_{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$,

$E(Z)$ називамо актуарска садашња вредност бенефита.

1.2.1 Фактор дисконтовања

Под дисконтовањем у осигурању подразумевамо поступак проналажења садашњих вредности будућих новчаних исплата.



$v(s,u) = v(s,t) \cdot v(t,u)$

Уколико посматрамо каматне стопе током времена:

$$i_1, i_2, i_3, \dots, i_{k+1}$$

$$(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot\ldots\cdot(1+i_{k+1}) = v_{k+1}$$

Уколико нам је каматна стопа константна у току времена,

$i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_{k+1} = i$, онда дисконтни фактор можемо лако изразити преко каматне стопе:

$$v_{k+1} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k+1} = v^{k+1}, \text{где је } v = \frac{1}{1+i}.$$

У осигурању користимо и термин загарантоване камате, коју гарантује осигуравајућа кућа приликом продаје осигурања (инвестициони ризик осигуравача).

<u>Примери</u>

1. **Ризико осигурање (term insurance)** је најједноставнији облик животног осигурања. Ова врста осигурања подразумева да ће осигурана сума бити исплаћена уколико дође до смрти.

n – број година

$E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} s \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = s \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} =$
$s \cdot {}_{|n} A_x$, где је

$$ {}_{|n}A_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}. $$

Са $|n$ смо означили горње ограничење за $n \in N$.

$$ T_{k+1} = \begin{cases} s, & \text{ако је } k+1 \le n \\ 0, & \text{ако је } k+1 > n \end{cases} . $$

2. **Доживотно осигурање живота (whole life insurance)**

Овакво осигурање спада међу најређе врсте осигурања.

$T_{k+1} = s,\ \forall\, k$ – уговор се прекида у тренутку смрти, нема унапред одређеног ограничења.

$$ E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} s \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = s \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = s \cdot A_x, $$

где је $A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}.$

Δ

Напомена 1.2

a) ${}_k p_x \cdot q_{x+k} = \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \Rightarrow l_x \cdot E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{k+1} \cdot v_{k+1} \cdot d_{x+k}$, где је v_{k+1} претпостављена каматна стопа, а d_{x+k} очекивани број умрлих особа између година $x+k$ и $x+k+1$.

b) $D(Z) := E(Z^2) - E(Z)^2$, где нам је $E(Z)^2$ већ позната вредност.

$$ E(Z^2) = E\left(\left(T_{k(x)+1} \cdot v_{k(x)+1}\right)^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{k+1} \cdot v_{k+1})^2 \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} $$

Израчунаћемо варијансу на примеру доживотног животног осигурања:

$$ E(Z^2) = \sum_{k=0}^{n-1} s^2 \cdot (v^{k+1})^2 \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = s^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (v^2)^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 $$

$$ = \frac{1}{1 + 2 \cdot i + i^2} = \frac{1}{1 + \tilde{\imath}} = \tilde{v} = s^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{v}^{\,2})^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = s^2 \cdot {}_{|n}\tilde{A}_x. $$

Дакле,

$$D(Z) \;=\; s^2 \cdot {}_{|n}\tilde{A}_x - \left(s \cdot_{|n} A_x\right)^2.$$

Дисперзија је израчуната за модификовану каматну стопу, $\tilde{\imath} = 2 \cdot i + i^2$ и одговарајући фактор дисконтовања, $\tilde{v} \;= \frac{1}{1+\,\tilde{\imath}}$.

-

1.2.2 Комутативни бројеви

У овом поглављу су коришћени извори [3], [6], [11].

Комутативни бројеви су осмишљени још у 18. веку и од тада су нашли веома широку примену у актуарству.

Поред назначених основних, у таблицама се јављају и комутативни бројеви

D_x, C_x, N_x, M_x и R_x који имају огромну практичну вредност.

Табеле комутативних бројева поједностављују израчунавање нумеричких вредности многих актуарских функција.

Очекиване вредности, као што су нето једнократне премије, могу се извести унутар детерминистичког модела који је уско повезан са комутативним бројевима.

Код производа са редовним плаћањем, користићемо комутативне бројеве који се поново обрачунавају према начину плаћања премије назначеном у полиси, на следећи начин:

$$\mathrm{D}_x \;=\; l_x \;\cdot\; v^x$$

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

$$N_x \;=\; \sum_{k=0}^{n} D_{x+k}$$

$$M_x \;=\; \sum_{k=0}^{n} c_{x+k}$$

$$R_x \;=\; \sum_{k=0}^{n} M_{x+k}$$

Комутативне бројеве користимо непосредно у израчунавању нето премије животног осигурања.

Лема 1.3

$\boldsymbol{a})\ A_x = \dfrac{M_x}{D_x}$

$\boldsymbol{b})\ {}_{|n}A_x = A_x - v^u \cdot\ {}_u p_x \cdot A_{x+n}$

$\boldsymbol{c})_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$.

Доказ леме 1.3

a) $\frac{M_x}{D_x} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{c_{x+k}}}{l_x \cdot v^x} = \frac{\sum_{k=0}^{n} d_{x+k} * v^{x+k+1}}{l_x \cdot v^x} = \frac{\sum_{k=0}^{n} d_{x+k} * v^{k+1}}{l_x}$ = из *напомене 1.2*, под a) = $\sum_{k=0}^{n} v^{k+1} \cdot_k p_x \cdot q_{x+k} = A_x$.

b) $A_x - v^u \cdot_u p_x \cdot A_{x+u} = \sum_{k=0}^{n} v^{k+1} \cdot_k p_x \cdot q_{x+k} - v^u \cdot_u p_x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot k =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot_k p_x \cdot q_{x+k} - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1+n} \cdot_n p_x \cdot_k p_{x+n} \cdot q_{x+n+k} = A_x - A_{x+n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot_k p_x \cdot q_{x+k}$.

c) $\frac{M_x - M_{x+n}}{\mathrm{D}_x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{c_{x+k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{c_{x+n+k}}}{l_x \cdot v^x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{c_{x+k}}}{l_x \cdot v^x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_{x+k} \cdot v^{x+k+1}}{l_x \cdot v^x} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot_k p_x \cdot q_{x+k} = {}_{|n}A_x$.

⊠

1.2.3 Корист од доприноса

У овом поглављу су коришћени извори [2], [8], [11]

Накнада се исплаћује када осигурана особа доживи унапред одређени датум. Обично се на тај датум исплаћује укупна сума, тј. уплата се врши једном.

Правимо разлику између осигурања за случај доживљења и традиционалног осигурања доприноса.

Осигурање за случај доживљења (pure endowment)

Исплаћује се осигурана сума на унапред одређени финсирани датум уколико је осигураник жив.

Нека је $K(x)$ дискретна случајна промењљива за коју важи да је $P(K(x) = k) = P(x + k < X \leq x + k + 1 \,|X > x)$. Код чистих доприноса посматрамо период трајања од n година.

Означићемо са s – бенефит од преживљавања.

$$\textit{Исплата:} = \begin{cases} s, & \text{ако је } K(x) \geq n \\ 0, & \text{ако је } K(x) < n \end{cases}.$$

Дефинисаћемо случајну промењљиву Z:

$$Z = s \cdot v_n \cdot I_{\{K(x) \geq n\}} := s \cdot v_n \cdot \begin{cases} 1, & \text{ако је } K(x) \geq n \\ 0, & \text{ако је } K(x) < n \end{cases}.$$

Из претходног видимо да је Z $= s \cdot v_n$ Бернулијева промењљива са параметром:

$$P(K(x) \geq n) = P(X > x + n \,|X > x) = {}_n p_x.$$

Садашњу вредност случајне промењљиве Z, APV, можемо представити и на следећи начин:

$$APV := E(Z) = s \cdot v_n \cdot {}_n p_x.$$

Напомена 1.3

Уколико имамо константну годишњу каматну стопу i:

$v^n \cdot_n p_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} \; => \frac{l_{x+n} \cdot v^{n+x}}{l_x \cdot v^x} \; = \frac{D_{x+n}}{D_x} =_n E_x$, што се може прочитати директно из табеле.

Мешовито осигурање за случај смрти и доживљења (endowment)

Ово осигурање представља комбинацију ризико осигурања и осигурања за случај доживљења. Ово је најчешћи облик осигурања које исплаћује осигурану суму на фиксиран датум у будућности у случају доживљења, или раније уколико дође до смрти (осигурана сума за случај смрти не мора бити иста осигураној суми за доживљење).

Најчешће се продаје као допунско осигурање за незгоде.

Овде је бенефит:=

$$\begin{cases} s, & \text{у тренутку смрти, ако осигурана особа умре у периоду од } n \text{ година} \\ s, & \text{по прекиду уговора, ако осигураник преживи } n \text{ година} \end{cases}.$$

Садашњу вредност (*APV*) у овом случају рачунамо на следећи начин:

$$Z = s \cdot v_{k(x)+1} \cdot I_{\{k(x)<n\}} + \; s \cdot v_n \cdot I_{\{k(x) \geq n\}}$$

$Z = Z_1 + \; Z_2$, односно, садашња вредност дугорочног животног осигурања сабрана са чистим доприносима.

$$APV \; = \; E(Z) = \; E(Z_1) \; + \; \; E(Z_2) = \; \sum_{k=0}^{n-1} s \cdot \; v_{k+1} \cdot_k p_x \cdot q_{x+k} \; + \; \; s \cdot v_n \cdot_n p_x$$

Напомена 1.4

Уколико је каматна стопа константна, $v_{k+1} = v^{k+1}$,

$APV \; = \; \; E(Z) = s \cdot_{|n} A_x + s \cdot_n E_x = s \cdot [_{|n}A_x + _nE_x] := \; s \cdot A_{x:n|}$.

Лема 1.4

a) $A_{x:n|} = A_x + v^n \cdot_n p_x \cdot (1 - A_{x+n})$
b) $A_{x:n|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$.

Доказ леме 1.4

a) Доказ леме 1.4 следи на основу доказане леме 1.3:

$$A_{x:n|} =_{|n} A_x +_n E_x = [\text{из леме } 1.3] = A_x - v^u \cdot_u p_x \cdot A_{x+n} + v^n \cdot_n p_x = A_x + v^n \cdot_n p_x \cdot (1 - A_{x+n}).$$

b) Користимо већ доказане једнакости:

Из *леме 1.3*, c): ${}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

И *напомене 1.3*: ${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$,

$$A_{x:n|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.$$

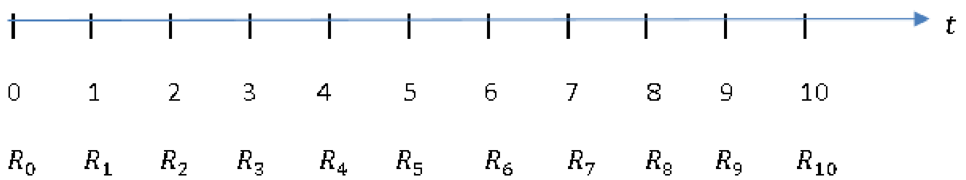
⊠

2 Ренте

У овој глави су коришћени следећи извори: [1], [2], [6], [7], [8], [9], [12].

Рентно осигурање (life annuity) подразумева годишње исплате унапред договорених износа (ренте), док је осигураник жив.

Означимо са $R_0, R_1, \ldots, R_k, R_{k+1}$ бенефите (осигуране суме) од преживљавања:



Садашња вредност $Z = \sum_{k \geq 0} R_k \cdot v_k \cdot I_{\{K(x) \geq k\}} = \sum_{k \geq 0}^{K(x)} R_k \cdot v_k$, где $K(x)$ представља тачан број година које је осигураник доживео.

$$E(Z) = E\left(\sum_{k\geq 0} R_k \cdot v_k \cdot I_{\{K(x)\geq k\}}\right)$$

$$= \sum_{k\geq 0} R_k \cdot v_k \cdot E\big(I_{\{K(x)\geq k\}}\big)$$

$$= \sum_{k\geq 0} R_k \cdot v_k \cdot \big(1 \cdot P(K(x) \geq k) + 0 \cdot P(K(x) < k)\big)$$

$=> E(Z) = \sum_{k\geq 0} R_k \cdot v_k \cdot_n p_k$, дакле, очекивана актуарска садашња вредност је сума осигурања за случај доживљења.

Напомена 2.1

Сваки члан $R_k \cdot v_k$ представља осигурање за случај доживљења.

<u>Пример</u> *(Појашњење појма рата)*

Претпоставимо да имамо константну каматну стопу i и константни бенефит ренте, *R*.

а) Непосредне доживотне ренте

Када су у питању непосредне доживотне ренте, наплате се извршавају на почетку сваке године, све док је осигураник жив.

$$E(Z) = \sum_{k\geq 0} R \cdot v^k \cdot_k p_x = R \cdot \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x := R \cdot \ddot{a}_x.$$

Увели смо нову ознаку: $\ddot{a}_x = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x$

Посматрајмо опет непосредне доживотне ренте, али овај пут исплате се врше на крају године, уколико је осигураник жив.

$$E(Z) = \sum_{k\geq 1} R \cdot v^k \cdot_k p_x = R \cdot \sum_{k\geq 1} v^k \cdot_k p_x := R \cdot a_x.$$

Приметимо да је једина разлика у томе сто бројач почиње од 1.

Увели смо нову ознаку: $a_x := \ddot{a}_x - v^0 \cdot_0 p_x = \ddot{a}_x - 1.$

b) Коначне (фиксне) ренте

Коначне ренте се такође исплаћују на годишњем нивоу, али период исплаћивања је коначан, може трајати највише n година.

$R_0 = R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = R$ – пре него што истекне уговор

$R_n = R_{n+1} = \ldots = 0$ – након што истекне уговор.

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} R \cdot v^k \cdot_k p_x = R \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot_k p_x := R \cdot \ddot{a}_{x:n|},$$

где је уведена нова ознака: $\ddot{a}_{x:n|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot_k p_x$.

c) Одложене ренте

У овом случају имамо:

$$R_0 = R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = 0$$

$R_n = R_{n+1} = \ldots = R$ – исплате почињу након што прође период одлагања од n година.

$$E(Z) = \sum_{k\geq n} R \cdot v^k \cdot_k p_x = R \cdot \sum_{k\geq n} v^k \cdot_k p_x := R \cdot_{n|} \ddot{a}_x ,$$

где је ${}_{n|}\ddot{a}_{x:n|} = \sum_{k\geq n} v^k \cdot_k p_x$.

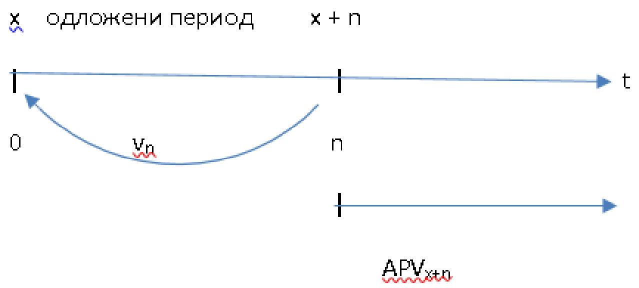
Δ

Лема 2.1

a) ${}_{n|}\ddot{a}_x = v^n \cdot_k p_x \cdot \ddot{a}_{x+n}$
b) $\ddot{a}_{x:n|} = \ddot{a}_x - {}_{n|}\ddot{a}_x$
c) ${}_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \Rightarrow \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$
d) $\ddot{a}_{x:n|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$.

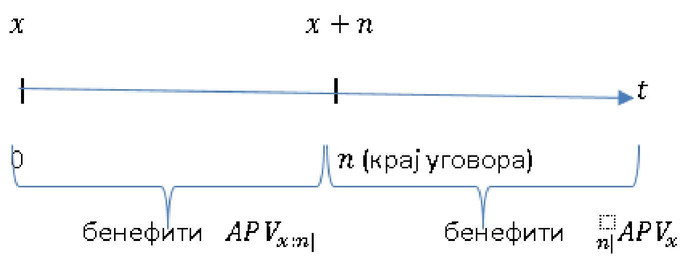
2.1 Одложена актуарска садашња вредност

Код одложене актуарске садашње вредности имамо следећу ситуацију:



$$ {}_{|n}APV_x = v^n \cdot {}_n p_x \cdot APV_{x:n|}. $$

Можемо је приказати на следећи начин:



$$ => APV_x = APV_{x:n|} + {}_{n|}APV_x $$

$$ Z = \sum_{k=0}^{\infty} R_k \cdot v_k \cdot I_{\{k(x) \geq k\}} $$

$$ APV = E(Z) $$

Теорема 2.1

Нека су i дата константна каматна стопа, $i \in (0,1)$, осигурана сума s = 1, осигурање морталитета где је Z_T садашња вредност осигурања морталитета и доживотно осигурање где је Z_R садашња вредност доживотног осигурања.

Разматрамо два случаја:

1. *T – осигурање целог живота, R – доживотна рента*
2. *T – осигурање на доживљење (доприноса), R – фиксна рента, и у оба случаја важи:*

$(1 - v) \cdot Z_R + Z_T = 1$, *где је v фактор дисконтовања.*

Непосредне последице теореме:

Математичко очекивање:

$$1 = E(1) = E\big((1 - v) \cdot Z_R + Z_T\big) = (1 - v) \cdot E(Z_R) + E(Z_T).$$

a) $1 = (1 - v) \cdot \ddot{a}_x + A_x$
b) $1 = (1 - v) \cdot \ddot{a}_{x:n|} + A_{x:n|}$.

Варијанса:

$$(1 - v) \cdot Z_R = 1 - Z_T$$

$$D((1 - v) \cdot Z_R) = D(1 - Z_T)$$

$$(1 - v)^2 \cdot D(Z_R) = (-1)^2 \cdot D(Z_T).$$

Доказ теореме 2.1

1. $Z_T = T_{K(x)+1} \cdot v^{K(x)+1} = 1 \cdot v^{K(x)+1} = v^{K(x)+1}$

$$Z_R = \sum_{k=0}^{K(x)} 1 \cdot v^k = \sum_{k=0}^{K(x)} 1 \cdot v^{K(x)} = [\text{геометријски ред}] = \frac{1-v^{K(x)+1}}{1-v} = \frac{1-Z_T}{1-v}.$$

Како је $0 \leq v < 1$, то значи да је Z_R увек дефинисано.

2.

$$Z_T = \begin{cases} v^{K(x)+1} \cdot 1, & \text{ако је } K(x) < n \\ v^n \cdot 1, & \text{ако је } K(x) \geq n \end{cases}.$$

$$Z_R = \begin{cases} \sum_{k=0}^{K(x)} v^k, & \text{ако је } K(x) < n \ - \text{ ако дође до смрти пре истека уговора} \\ \sum_{k=0}^{n-1} v^k, & \text{ако је } K(x) \geq n \end{cases}.$$

За $K(x) < n$:

$$Z_R = \sum_{k=0}^{K(x)} v^k = [\text{геометријски ред}] = \frac{1 - v^{K(x)+1}}{1 - v} = \frac{1 - Z_T}{1 - v},$$

За $K(x) \geq n$:

$$Z_R = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = [\text{геометријски ред}] = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - Z_T}{1 - v}.$$

⊠

<u>Појашњење појмова:</u>

Z_T – садашња вредност која се исплаћује супружнику осигураника на крају године након смрти осигураника.

Z_R – садашња вредност (последња исплата) која се исплаћује на почетку године након смрти осигураника.

$n - 1$ - последња година уговора чије је трајање n година.

<u>Пример</u> *(Рачунање варијансе)*

a) Доживотна рента

За рачунање варијансе користићемо напомену 2.1 b) и теорему 2.1.

У рачуну ће нам користити и последица теореме 2.1: $D(Z_R) \cdot (1 - v)^2 = D(Z_T)$.

$$
\begin{aligned}
D(Z_R) = D\left(\frac{1-Z_T}{1-v}\right) = \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 \cdot D(1-Z_T) &= \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 \cdot D(Z_T) \\
&= \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 \cdot \left(\widetilde{A_x} - (A_x)^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 \cdot \left[1 - (1-\tilde{v}) \cdot \widetilde{\ddot{a}_x} - (1-(1-v)\cdot \ddot{a}_x)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 \cdot \left[1 - (1-v^2) \cdot \widetilde{\ddot{a}_x} - (1-(1-v)\cdot \ddot{a}_x)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 \cdot \left[-(1-v)\cdot(1+v)\cdot \widetilde{\ddot{a}_x} + 2\cdot(1-v)\cdot \ddot{a}_x - \ddot{a}_x^2 \cdot (1-v)^2\right] \\
&= -\frac{1+v}{1-v} \cdot \widetilde{\ddot{a}_x} + \frac{2}{1-v} \cdot \ddot{a}_x - \ddot{a}_x^2
\end{aligned}
$$

Ово смо рачунали под претпоставком да је бенефит $s = 1$.

b) Привремена животна рента

И за привремену животну ренту можемо користити исти приступ:

$$(1-v)\cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 - A_{x:\overline{n}|}$$

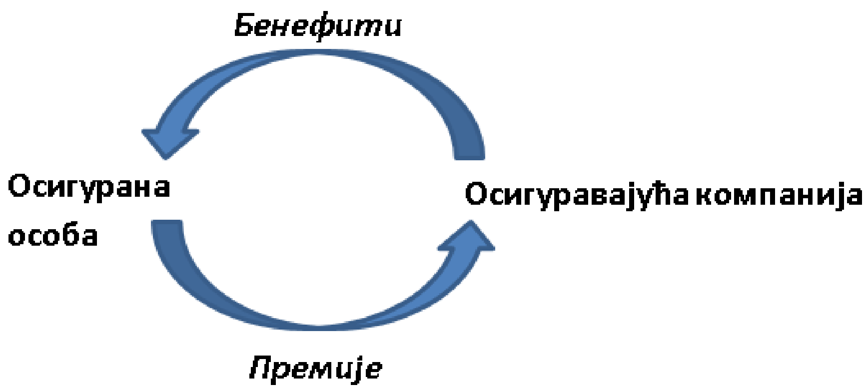
$$=> D(Z) = -\frac{1+v}{1-v} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|} + \frac{2}{1-v} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2$$

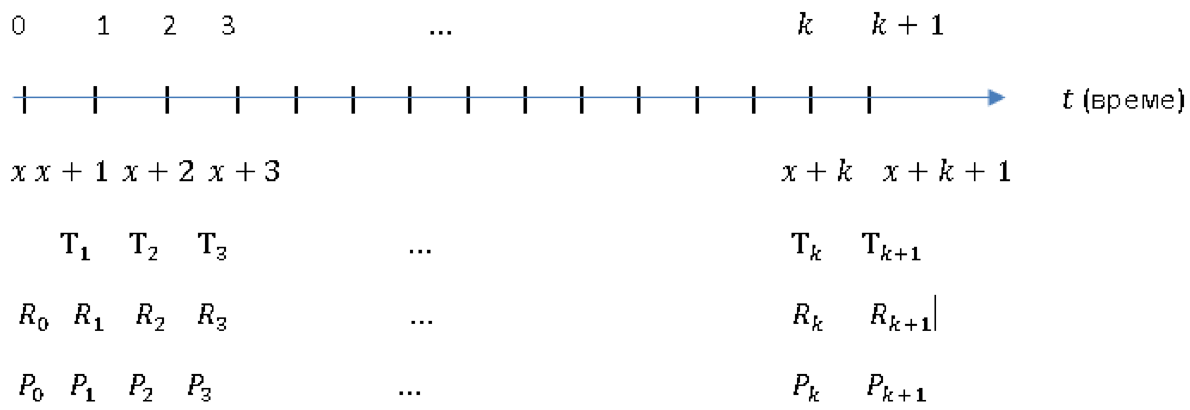
Увели смо ознаку $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ да означимо садашњу вредност ренте. Због n годишњих исплата јединице 1, почевши од тренутка 0, имамо да је
$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}$.

Δ

2.2 Рачунање премије

Општи модел за рачунање премије можемо да прикажемо следећом сликом:





Где T_i представља тренутак умирања у i-тој години.

Са $R_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, k, k+1\}$ смо означили осигуране суме (бенефите). Они представљају ток новца $R_{k+1} = (R_0, R_1, \dots, R_{k+1})$ који осигуравајућа компанија плаћа осигуранику.

Са $P_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, k, k+1\}$ смо означили одговарајуће премије. Премије се плаћају на почетку године, под условом да је особа и даље жива.

Премија је новчана надокнада коју је осигураник дужан да плати осигуравајућој команији као надокнаду за обезбеђивање осигуравајуће заштите. Може се интерпретирати као ток новца који се плаћа осигуравајућој компанији, $P_{k+1} = (P_0, P, \dots . P_{k+1})$.

Обично се премије плаћају унапред, а у зависности од уговора могу се плаћати месечно, квартално, полугодишње или годишње. Износ премије не мора бити константан.

Смрти (када се плаћа на крају године)

Размотрићемо плаћања у случају

Рате/Ануитета (Ако је особа и даље жива, плаћа се на почетку потписивања уговора)

Посматрајмо модел садашње вредности исплата, односно све могуће бенефите. Тада се садашња вредност бенефита Z рачуна као сума од 0 до n свих исплата помножених са фактором дисконтовања и индикатором који одређује да ли су испуњени услови за плаћање.

Ако посматрамо садашњу вредност осигурања морталитета:

$$Z_T = \sum_{k=0}^{n} T_{k+1} \cdot v_{k+1} \cdot I_{\{k(x)=k\}} = T_{k(x)+1} \cdot v_{k(x)+1},$$

где је $I\{K(x) = k\}$ индикатор умирања између k. И $k+1$. године, или преживљавање k. године.

- Садашња вредност бенефита:

$$Z_l = T_{k(x)+1} \cdot v_{k(x)+1} + \sum_{k=0}^{n} R_k \cdot v_k \cdot I_{\{k(x)\geq k\}} \,,$$

где l представља осигурање од одговорности (liability).

- Садашња вредност премије:

$$Z_p = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot v_k \cdot I_{\{k(x)\geq k\}} \,,$$

Из угла гледишта компаније, посматра се губитак:

$$L = Z_l - Z_p.$$

Како бисмо постигли поштени договор између осигурања и осигураника, дефинисаћемо принцип еквиваленције.

2.3 Принцип еквиваленције

Принцип еквиваленције у осигурању се своди на то да очекиване садашње вредности премије и бенефита буду једнаке.

$E(L) = 0.$

$E\left(Z_l - Z_p\right) = 0 \qquad =>$

$E(Z_l) = E(Z_p)$

Горња једнакост важи из линеарности BPV и PPV, где је BPV очекивана садашња вредност бенефита а PPV очекивана садашња вредност премије.

$$E(Z_l) = E\left(T_{k(x)+1} \cdot v_{k(x)+1}\right) + E\left(\sum_{k=0}^{n} R_k \cdot v_k \cdot I_{\{k(x) \geq k\}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} T_{k+1} \cdot v_{k+1} \cdot {}_k\, p_x \cdot q_{x+k} + \sum_{k=0}^{n} R \cdot v_k \cdot {}_k\, p_x$$

$E(Z_p) \;\; = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot v_k \cdot {}_k\, p_x$

Када заменимо добијене једнакости у принцип еквиваленције, добијамо следеће:

$$\sum_{k=0}^{n} T_{k+1} \cdot v_{k+1} \cdot {}_k\, p_x \cdot q_{x+k} + \sum_{k=0}^{n} R_k \cdot v_k \cdot {}_k\, p_x \;=\; \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot v_k \cdot {}_k\, p_x\,.$$

На овај начин, добили смо општу формулу принципа еквиваленције за наш модел, који зависи од вероватноће преживљавања/умирања.

Ова једнакост се не може применити на фиксно осигурање (term fixed-insurance).

За сада, све калкулације ће бити засноване на индивидуалној нето основи, односно, принцип еквиваленције се примењује на сваку полису појединачно, без обзира на додатне трошкове. Добијене премије називамо појединачне нето премије.

У најједноставнијем случају, пуна премија се уплаћује као једнократни износ одмах по почетку израде полисе. Резултујућа једнократна нето премија је само очекивана садашња вредност од бенефита.

У уговору о животном осигурању подразумевано је да одређена сума, коју називамо осигурана сума, мора бити исплаћивана након смрти осигураника.

2.3.1 Дугорочно животно осигурање са годишњим премијама

У овом случају, код BPV (очекиване садашње вредности бенефита) се осигурана сума s исплаћује на крају године у којој особа умре, током трајања уговора.

PPV(очекивана садашња вредност премије) у овом случају подразумева да се премија P уплаћује годишње на почетку године, све док је осигураник жив, током трајања уговора.

Како је $BPV \ = \ PPV$, онда важи:

$\sum_{k=0}^{n-1} s \cdot v^{k+1} \cdot_k p_x \cdot q_{x+k} \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} P \cdot v^k \cdot_k p_x$, на основу принципа еквиваленције.

$s \cdot_{|n} A_x \ = \ P \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}|} \ => \ P \ = \ \frac{S \cdot_{|n} A_x}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}$.

Добили смо премију која представља нето премију.

2.3.2 Мешовито осигурање живота

Рачун је сличан као у претходном случају, уз додатак исплате S, након преживљавања до краја трајања осигурања.

$S \cdot_{|n} A_x + \ S \cdot v^n \cdot_n p_x \ = \ P \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}|}$, где је $S \cdot_{|n} A_x + \ S \cdot v^n \cdot_n p_x \ = \ \ddot{A}_{x:\bar{n}|}$.

$P \ = \ \frac{S \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}$, нето премија.

2.3.3 Тренутне ренте са једнократном исплатом

Ова врста ренти подразумева да се исплате R исплаћују годишње, све док је осигурана особа жива.

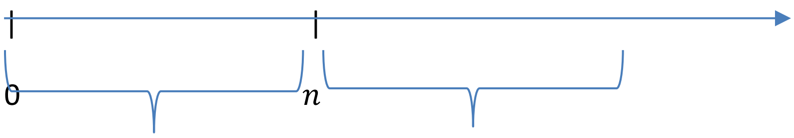
Користећи принцип еквиваленције добијамо:

$R \cdot \ddot{a}_x = P \cdot v^0 \cdot {}_0 p_x$, дакле,

$P = R \cdot \ddot{a}_x$.

2.3.4 Одложене ренте

У овом случају имамо:



P - исплаћене премије R – бенефити (ренте)

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = R \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x => P = \frac{R \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}.$$

Напомена 2.2

Премије се обично уплаћују годишње. Обележимо годишњу уплату премија са P, премију са једнократном уплатом унапред са $\tilde{P}$.

Тада је веза између једнократне и годишње премије следећа:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = BPV = \tilde{P} => \frac{\tilde{P}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = P.$$

2.4 Додатак за сигурност

Осигуравајуће компаније имају неколико начина да се обезбеде од могућих ризика.

Како би се носили са ризиком и смањили га у што већој мери, осигуравајуће куће користе:

1. Капитал за непредвиђене трошкове
2. Реосигурање
3. Додатак за сигурност

Додатак за сигурност се додаје на нето премију, заједно са ризико премијом[1], која касније учествује у калкулацији бруто премије.

Размотримо случај када имамо портфолио од n идентичних независних уговора о животном осигурању. Узмимо једну премију P унапред од сваке особе и добијамо укупни приход $n \cdot P$. Хоћемо да проверимо да ли је то довољно да се исплате сви бенефити.

Означимо бенефите са $Z_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и тоталне бенефите једног портфолиа са: $\sum_{i=1}^{n} Z_i = Z_{TOT}$. Испитујемо да ли је задовољена неједнакост:

$Z_{TOT} \leq n \cdot P.$

Тражимо калкулацију премије такву да задовољава услов:

$P(Z_{TOT} \leq n \cdot P) \geq 1 - \alpha, \alpha \in (0, 1).$

Фактор α је познатији као вероватноћа разарања, а у Европи се обично користи да је $\alpha \approx 0.5$.

Да бисмо применили централну граничну теорему, рачунамо:

$E\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(Z_i) = \mu.$

Из независности Z_iважи: $D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(Z_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$

$$P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq x\right) \to N_X(0, 1), n \to \infty.$$

[1] Ризико премија је намењена за покриће ризика и једнака је очекиваној вредности уплата по уговору о осигурању.

Нека је $\Phi(x)$ функција расподеле случајне променљиве X која има стандардну нормалну расподелу, $X \in N(0,1)$. Вршимо следећу апроксимацију:

$$\Phi\left(\frac{P - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

Означимо са $q_{1-\alpha}$ $(1 - \alpha)$. квантил од случајне величине са стандардном нормалном расподелом, $X \in N(0,1)$.

Онда је:

$$\Phi(q_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

$$\frac{P - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = 1 - \alpha <=> P = \mu + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot q_{1-\alpha} \cdot \sigma$$

У добијеном изразу за премију, додатак за сигурност је $q_{1-\alpha}$, константа која зависи од α.

Напомена 2.3

a) $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot q_{1-\alpha} \cdot \sigma$ називамо апсолутни додатак за сигурност
b) $P = \mu\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot q_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\mu}\right)$, у овом случају имамо релативни додатак за сигурност.

2.5 Марковљев ланац у животном осигурању

У овом поглављу су коришћени следећи извори: [9], [12].

Претпоставимо да разматрамо физички систем који у дискретним тренуцима времена, које ћемо означити са 0, 1, 2,..., прелази из једног стања у друго. Претпоставимо такође да је скуп стања, који се назива *фазни простор* или *простор стања,*пребројив, и нека су његови елементи нумерисани целим бројевима*,* тј. елементима скупа $\mathbb{Z}$. Нека је X_t стање система у тренутку t, које настаје као резултат случајних промена стања $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_t \rightarrow \cdots$ и нека је

$$p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}.$$

Вероватноћа p_{ij} дата горњом формулом се назива *вероватноћа преласка* система из стања i у стање j за један корак, и за њу претпоставимо да не зависи од тренутка t, као ни од низа стања у којима се систем налазио до тренутка $t-1$ закључно. Другим речима, претпоставимо да важи

$$p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i\}$$

кад год су вероватноће са обе стране једнакости добро дефинисане[2].

Описана једнакост назива се *Марковљево својство*. Претходно описана схема назива се *хомоген Марковљев ланац*. Користимо уобичајене ознаке, за ненегативан скуп целих бројева $\mathbb{N}_0$, а за скуп целих бројева $\mathbb{Z}$. Формална дефиниција Марковљевог ланца гласи:

Дефиниција 2.1 *(Марковљев ланац)*

Случајни низ $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ *зове се хомоген Марковљев ланац са простором стања* $\mathbb{Z}$*, ако за свако* $t \in \mathbb{N}_0$ и све $i, j, i_0, \dots, i_{t-1} \in \mathbb{Z}$ *важи једнакост* $p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i\}$*. Број* p_{ij} *зове се вероватноћа преласка из стања* i *у стање* j*, а матрица* $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]_{|\mathbb{Z}|\times|\mathbb{Z}|}$*зове се матрица вероватноћа преласка.*

Ако вероватноћа преласка система из стања i у стање j зависи од тренутка t, онда се одговарајућа вероватносна схема назива *нехомоген Марковљев ланац.*

На пример, простор стања у животном осигурању се састоји од 2 исхода: $S = \{l, d\}$, где l представља стање преживљавања, а d стање умирања.

---

[2] Вероватноћа је добро дефинисана ако испуњава услове нормираности, ненегативности и $\sigma-$адитивности. Појашњење појмова и дефиниција вероватноће могу се наћи у [8].

Матрица вероватноћа преласка $\boldsymbol{P} = \left[p_{ij}\right]_{|\mathbb{Z}|\times|\mathbb{Z}|}$ задовољава следећа два услова:

1. $p_{ij} \geq 0, \forall i,$ j $\in S$, где је S скуп стања
2. $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S.$

Из успуњених услова видимо да је матрица $\boldsymbol{P} = \left[p_{ij}\right]_{|\mathbb{Z}|\times|\mathbb{Z}|}$ *стохастичка*.

При разматрању Марковљевих ланаца јавља се потреба и за разматрањем вероватноћа преласка из једног стања у неко друго стање у већем броју корака.

Дефиниција 2.2 *(Матрица вероватноћа преласка у n корака)*

Матрица $\boldsymbol{P_n} = \left[p_{ij}\right]_{|\mathbb{Z}|\times|\mathbb{Z}|}$чији су чланови одређени једнакостима $p_{ij}(n) = P\{X_{m+n} = j|X_m = i\}, i, j \in \mathbb{Z}$, зове се матрица вероватноћа преласка у n корака.

Напомена 2.4

a) Овакав процес који зависи само од претходног стања називамо процес без памћења.
b) Купцу животног осигурања се често додељује неко стање. Може бити здрав, болестан или може прећи у стање мртав. Тада је Марковљев ланац модел процеса промене стања током времена.

Ознака

$I_j(t)_\omega = \begin{cases} 1, & ako\ je\ X_t(\omega) = j \\ 0, & ako\ je\ X_t(\omega) \neq j \end{cases}$, где је $t_0 \in N_0, \omega \in \Omega, j \in S.$

Важи да је $I_j(s) \cdot I_k(t) = 1$ ако и само ако је процес у стању j у тренутку s и у стању k у тренутку t.

Осигурана сума (бенефити)

Нека је $t \in N_0$ и нека су дата стања $i, j, k \in S.$ Означимо са $L_j(t)$ бенефит који је исплаћен у тренутку t ако се осигурана особа налази у стању j. Означимо са $L_{ij}(t+1)$ бенефит који је исплаћен у тренутку $t + 1$ ако осигурана особа прелази из стања i (у тренутку t) у стање j у тренутку $t+1$. Бенефити могу да зависе од почетног стања и од крајњег стања осигураника.

$L_{ii}(t+1) = 0$ јер нема преласка из стања у стање, стање се не мења.

<u>Пример</u> (На животном осигурању)

$L_l(t)$ ануитет, исплата бенефита док је особа жива, у ратама.

$L_{ld}(t+1)$ бенефит који се исплаћује супружнику након смрти осигураника.

$L_{dd}(t) = L_{ll}(t) = 0$, пошто је стање остало непромењено, не постоји прелазак.

Δ

Нека је $\{X_t\ , t \geq\ 0\}$ случајни процес са пребројивим скупом стања $S \subseteq\ \mathbb{Z}\ , S\ \neq \emptyset$.

Дефиниција 2.3 *(Марковљеви ланци у непрекидном времену)*

Случајни процес $\{X_t\ , t \geq\ 0\}$ има Марковљево својство , ако за све природне бројеве n, произвољне $i_1, \dots , i_{n-1}, j \in S$ и све тренутке $t_1\ < t_2\ < \cdots < t_n$ важи једнакост:

$P\{X(t_n) = j \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots , X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} = P\{X(t_n) = j \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}$.

У том случају $\{X_t\ , t \geq\ 0\}$ зове се Марковљев ланац у непрекидном времену и са пребројивим скупом стања S.

Овако дефинисан Марковљев процес је познат у актуарству и као *Марковљев процес скокова*.

Вероватноћу преласка из стања i у стање j дефинисемо на следећи начин:

$$P\left(X_t\ = j \,\middle|\, X_s\ = i\ \right) = p_{ij}(s,t), i, j \in S, 0 \leq s\ \leq t, P\left(X_s\ = i\right)\ \neq 0$$

Напомена 2.5

1) $\mathrm{E}\left(I_j(t) \,\middle|\, X_s\ = i\ \right) = 1 \cdot P\left(X_t\ = j \,\middle|\, X_s\ = i\ \right) + 0 \cdot\ (X_t \neq j \mid X_s\ = i\ ) = p_{ij}(s,t)$
2) Матрица преласка:

Означимо скуп стања $S\ =\ \{i_1, i_2, \dots , i_n\}$.

$$\boldsymbol{P}(s,t) = \begin{pmatrix} p_{i_1 j_1}(s,t) & p_{i_1 j_2}(s,t) & \dots & p_{i_1 j_n}(s,t) \\ p_{i_2 j_1}(s,t) & p_{i_2 j_2}(s,t) & \dots & p_{i_2 j_n}(s,t) \\ p_{i_n j_1}(s,t) & p_{i_n j_2}(s,t) & \dots & p_{i_n j_n}(s,t) \end{pmatrix}$$

3) Сума сваке врсте матрице $\boldsymbol{P}(s,t)$ по j је 1. То својство називамо нормираност матрице.

За $p_{ij}(s,t) \geq 0, \sum_{j \in S} p_{ij}(s,t) = \sum_{j \in S} P\left(X_t = j \,\middle|\, X_s = i\right) = 1$

<u>Пример </u>(Животно осигурање)

$S = \{l, d\}$, скуп стања

$$\boldsymbol{P}(s,t) = \begin{pmatrix} p_{ll}(s,t) & p_{ld}(s,t) \\ p_{dl}(s,t) & p_{dd}(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_{t-s}p_{x+s} & {}_{t-s}q_{x+s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0 s t

|______|__________|_______________________ време

x $x+s$ $x+t$ године

∆

Напомена 2.6

Претпоставка је да када напустимо тренутно стање i, да се процес никада неће вратити у то стање.

У том случају важи:

$p_{ji}(s,t) = 0, \ \forall j \neq i.$

У животном осигурању, ако посматрамо претходно дефинисани скуп стања $S = \{l, d\}$, важи да је $p_{dl}(s,t) = 0$, где су $s \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{N}_0, s \geq t$, произвољни временски тренуци.

Лема 2.2 *(Једначина Чепмен – Колмогорова)*

У ланцу Маркова важи:

$p_{ij}(s,n) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s,t) \cdot p_{kj}(t,n)$, за дате $i, j \in S, 0 \leq s \leq t \leq n$.

Важе и једнакости $\boldsymbol{P}_{m+n} = \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{P}_n$ *и* $\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}^n$, где је $\boldsymbol{P}^n$ *ознака на* n*-ти степен матрице* $\boldsymbol{P}$.

Доказ леме 2.2 *За догађаје A, B и C који испуњавају услове* $P(BC)\ >0$ и $P(C)\ >0$, *важи следеће:*

$$P(AB|C)=\frac{P(ABC)}{P(C)}=\frac{P(A|BC)\cdot P(BC)}{P(C)}=P(A|BC)\cdot P(B|C).$$

За доказ леме користићемо формулу потпуне вероватноће и Марковљево својство.

$$p_{ij}(s,n)=P\{X_n=j|X_s=i\}=\sum_{k\in S}P\{X_n=j,X_t=k|X_s=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X_n=j|X_t=k,X_s=i\}\cdot P\{X_t=k\ |X_s=i\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X_n=j|X_t=k\}\cdot P\{X_t=k\ |X_s=i\}=\ \sum_{k\in S}p_{ik}(s,t)\cdot\ p_{kj}(t,n),$$

где је $i<t\ <j$.

Тиме је доказана једнакост, а једнакости $\boldsymbol{P}_{m+n}=\ \boldsymbol{P}_m\boldsymbol{P}_n$ и $\boldsymbol{P}_n=\ \boldsymbol{P}^n$, су једноставне последице.

$\boxtimes$

2.5.1 Директни и обрнути Колмогоровљев систем

Означимо са $\boldsymbol{P}(s,t)$ матрицу са елементима $p_{ij}(s,t)$, из Чепмен – Колмогоровљеве једначине. Можемо је записати као:

$$\boldsymbol{P}(s,t) = \boldsymbol{P}(s,u)\boldsymbol{P}(u,t), \forall\, s < u < t.$$

Уколико знамо матрицу вероватноћа преласка $\boldsymbol{P}(s,t)$ и почетну расподелу $p_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}$, користећи Марковљево својство можемо наћи опште вероватноће коначнодимензионе расподеле за процес X_t. На пример, за

$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$P\{X_0 = i, X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n\} = p_i^{(0)} \cdot p_{ij_1}(0,t_1) \cdot p_{j_1 j_2}(t_1,t_2) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1},t_n)$ и

$$P\{X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n\} = \sum_{i \in S} p_i^{(0)} \cdot p_{ij_1}(0,t_1) \cdot p_{j_1 j_2}(t_1,t_2) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1},t_n).$$

Ми ћемо претпоставити да су функције $p_{ij}(s,t)$ непрекидно диференцијабилне.

Уочимо ли да је

$$p_{ij}(s,s) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ако је } i \neq j \\ 1, & \text{ако је } i = j \end{cases}$$

То повлачи постојање следећих функција

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t)|_{t=s} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(s,s+h) - \delta_{ij}}{h}.$$

Еквивалентно, важе следеће релације, за $h \to 0$ $(h > 0)$:

$$p_{ij}(s,s+h) = \begin{cases} h \cdot \sigma_{ij}(s) + o(h) & \text{за } i \neq j \\ 1 + h \cdot \sigma_{ij}(s) + o(h) & \text{за } i = j \end{cases}$$

где функција $f(h) = o(h)$ спорије расте од h, односно, важи да је $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

Видимо да је у случају када је $i \neq j$ вероватноћа прелаза из i у j за време кратког временског интервала $[s, s+h]$ пропорционална са h. Из тог разлога уводимо назив *интензитет преласка* за $\sigma_{ij}(s)$. Интензитет преласка има фундаментални значај јер у потпуности одређује непрекидни ланац Маркова. Да бисмо то видели, диференцирамо једначину $p_{ij}(s,t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s,u) \cdot p_{kj}(u,t)$ по t, ставимо да је $u = t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t) = \sum_{k \,\epsilon\, S} p_{ik}(s,t) \cdot \sigma_{kj}(t).$$

Овако добијене једначине називамо *директни Колмогорављев систем*. Оне се могу записати у компактном облику као

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t) = \boldsymbol{P}(s,t)\boldsymbol{A}(t),$$

где је $\boldsymbol{A}(t)$ матрица са елементима $\sigma_{ij}(t)$.

У извођењу горње једнакости имплицитно је претпостављено да је простор стања коначан. У том случају, за све фиксне $s, i,$ $\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t) = \sum_{k \,\epsilon\, S} p_{ik}(s,t) \cdot \sigma_{kj}(t)$ је *коначан* линеарни систем *обичних* диференцијалних једначина (тачније, s и i се појављују само у почетном услову $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}$). Према томе, за дате интензитете преласка $\sigma_{ij}(t)$, једначина $\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t) = \sum_{k \,\epsilon\, S} p_{ik}(s,t) \cdot \sigma_{kj}(t)$ има јединствено решење компатибилно са $p_{ij}(s,s) = \delta_{ij}$. Из тог разлога се Марковљеви модели најчешће описују једноставним одређивањем њихових интензитета преласка $\sigma_{ij}(t)$.

Уколико диференцирамо једначину $p_{ij}(s,t) = \sum_{k \,\epsilon\, S} p_{ik}(s,u) \cdot p_{kj}(u,t)$ по s уместо по t (и стављајући да је $u = s$), можемо добити *обрнути Колмогорављев систем*:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t) = -\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{P}(s,t).$$

Уколико важи да су интензитети преласка ограничени,

$$\sup_{i,j} |\sigma_{ij}(t)| < \infty, \forall t \geq 0,$$

онда су *обрнути Колмогорављев систем* и *директни Колмогорављев систем* еквивалентни. Међутим, уколико не важи да је $\sup_{i,j} |\sigma_{ij}(t)| < \infty$, *обрнути Колмогорављев систем* се чешће користи.

Уочимо коначно да из

$$p_{ij}(s,s+h) = \begin{cases} h \cdot \sigma_{ij}(s) + o(h) & \text{за } i \neq j \\ 1 + h \cdot \sigma_{ij}(s) + o(h) & \text{за } i = j \end{cases}$$

следи да је $\sigma_{ij}(s) \geq 0,\ i \neq j$, али је $\sigma_{ii}(s) \leq 0$. У ствари, диференцирање једнакости

$\sum_{j \,\epsilon\, S} p_{ij}(s,t) = 1$, по t и $t = s$ повлачи

$$\sigma_{ii}(s) = -\sum_{j \neq i} \sigma_{ij}(s).$$

Због тога сваки ред матрице $\boldsymbol{A}(s)$ има збир нула.

2.5.2 Марковљево својство Пуасоновог процеса

Пуасонов процес са параметром $\boldsymbol{\lambda}$ *је непрекидно – временски процес* $\{N_t, t \geq 0\}$*, са следећим својствима:*

1. $N_0 = 0$
2. N_t *има независне прираштаје*
3. N_t *има стационарне прираштаје са Пуасоновом расподелом*

$$P\{N_t - N_s = s\} = \frac{[\lambda \cdot (t-s)]^n \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{n!}, s < t.$$

То је *Марковљев процес скокова* са скупом стања $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Доказаћемо да процес има Марковљево својство. За произвољне реалне бројеве

$0 = t_0 < t_1 < \cdots t_n$ и ненегативне целе бројеве $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$ важи

$$P\{N(t_n) = k_n | N(t_1) = k_1, \dots, N(t_{n-1}) = k_{n-1}\} =$$

$$\frac{P\{N(t_1) = k_1,\ N(t_1, t_2] = k_2 - k_1, \dots, N(t_{n-1}, t_n] = k_n - k_{n-1}\}}{P\{N(t_1) = k_1,\ N(t_1, t_2] = k_2 - k_1, \dots, N(t_{n-2}, t_{n-1}] = k_{n-1} - k_{n-2}\}} =$$

$$P\{N(t_{n-1}, t_n] = k_n - k_{n-1}\} =$$

$$\frac{\{N(t_{n-1}, t_n] = k_n - k_{n-1}\} \cdot P\{N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}}{P\{N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}} =$$

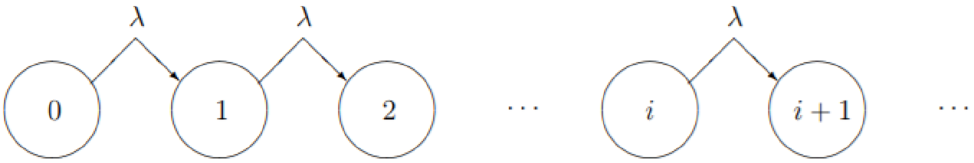
$$\frac{P\{N(t_n) = k_n,\ N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}}{P\{N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}} = P\{N(t_n) = k_n \mid N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}.$$

Процес није стационаран, чак ни слабо. Овај процес има фундаментално значење код бројања укупног броја појављивања неког догађаја кроз одређени временски интервал $[0, t]$, без обзира на природу догађаја (аутомобилска несрећа, штета за осигуравајуће друштво, долазак муштерија на сервис,...)

Посматрајмо Марковљев процес скокова са скупом стања $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ и интензитетима преласка:

$$\sigma_{ij}(\mathrm{t}) \;=\; \begin{cases} \lambda \text{ за } j = i+1 \\ 0 \qquad \text{иначе} \end{cases}.$$

Скокове можемо приказати и дијаграмом:



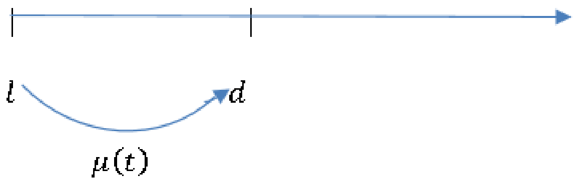
а матрица $\boldsymbol{A}$ у Колмогоровљевим једначинама је

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda\;\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda \\ 0 & & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Пуасонов процес се углавном примењује као *бројећи процес*. X_t моделира број појављивања неког догађаја у одређеном временском интервалу.

2.5.3 Нехомогени случај Марковљевог процеса скокова

Посматрајмо следећи модел доживљења: прелазак из стања "жив"(*l*) у стање "мртав"(*d*) догађа се са интензитетом $\mu(t)$.



Другим речима, $\mu(t)$ је интензитет смртности.

Како је $\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} -\mu(t) & \mu(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *директни Колмогоровљев систем* даје

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ll}(s,t) = -\mu(t) \cdot p_{ll}(s,t).$$

Решење које одговара почетном услову $p_{ll}(s,s) = 1$ је

$$p_{ll}(s,t) = e^{-\int_s^t \mu(x)dx}.$$

Еквивалентно, вероватноћа да ће особа старости s преживети временски период дужине бар ω је

$$ {}_{\omega}p_s = p_{ll}(s, s+\omega) = e^{-\int_s^{s+\omega} \mu(x)dx} = e^{-\int_0^{\omega} \mu(s+y)dy}. $$

Добијена формула илуструје потребу за временски зависним интензитетима у смртности и многим другим актуарским моделима: константа μ би довела до вероватноће доживљења ${}_{\omega}p_s$ независне од старости особе, што би био апсурдан резултат.

За непрекидни ланац Маркова дефинишемо *резидуално време задржавања* R_s као (случајни) износ времена између s и следећег скока:

$$ \{R_s > \omega, \qquad X_s = i\} = \{X_u = i, s \le u \le s+\omega\}. $$

Формула ${}_{\omega}p_s = e^{-\int_0^{\omega} \mu(s+y)dy}$ даје вероватноћу да је $R_s > \omega$ ако је дато стање l ("жив") у тренутку s. Пратећи исте кораке као у доказу за Чепмен-Колмогоровљеве једначине, може се доказати да је

$$ P\{R_s > \omega | X_s = i\} = e^{-\int_s^{s+\omega} \lambda_i(u)du}. $$

Штавише, карактеризација стања

$$ X_s^{(+)} = X_{s+R_s} $$

У који процес скочи, слична је хомогеном случају:

$$ P\left\{X_s^{(+)} = j \middle| X_s = i, R_s = \omega\right\} = \frac{\sigma_{ij}(s+\omega)}{\lambda_i(s+\omega)}. $$

Добијене формуле се често користе у пракси за израчунавање интегралног облика обрнутог и директног Колмогоровљевог система.

3 Пензије

За израду главе коришћени су следећи извори [1], [2], [6], [13]

Пензије су ануитети који долазе из радног односа. Често су засноване на уговору између запосленог и послодавца.

Најпознатији пример пензија су професионалне пензије, које заправо представљају социјално осигурање.

Бенефити:

1. У случају смрти (ануитети ће припасти супружнику преминулог)

2. У случају пензионисања

3. У случају инвалидитета

Обичај је да компаније гарантују одређене бенефите.

Разликујемо следеће бенефите компанија:

1. Уговором унапред дефинисани бенефити

Компаније одређују унапред доприносе (премије) које се праве на основу одређених инвестиција (бенефита). У ту групу спадају инвестициони фондови, штедни уговори, уговори о осигурању,…

2. Унапред дефинисани план доприноса

Инвестициони ризик преузима запослени (у случају уговором унапред дефинисаног бенефита) или послодавац (у случају унапред дефинисаног плана доприноса).

Пензије се исплаћују од годишњих профита. Према интернационалним стандардима, IFRS, компанија има обавезу да исплаћује пензије које се третирају као зајам компанији, односно то зовемо обавезе на билансу стања.

Напомена 3.1

Шта се дешава када напустимо компанију?

Обично постоји обавезни минимални период рада. Уколико се ради краће од минималног периода пензије се губе, а уколико се ради дуже од минималног периода, пензије се морају исплатити.

1) Специјални случај: запослени уплаћују део својих плата у пензиони фонд.

Одложена компензација смањује плату у сврху касније сигурности у виду исплата пензија.

У овом случају нема периода неизвесности, пензије морају бити исплаћене чак и ако се промени послодавац.

2) Шта уколико се догоди стечај пензионих фондова компаније?

Од 1986. године успостављен је пензиони безбедносни систем такав да осигуравајуће компаније преузимају одговорност и воде бригу о том проблему.

Направићемо пензиони модел уз следеће претпоставке:

1) Особа се може пензионисати у фиксираној години z
2) Занемарујемо случајеве када инвалидитет може прећи у активно стање

Уз овакве претпоставке можемо направити директни граф без петљи (без враћања у стање које смо напустили) и калкулације се поједностављују. Број могућих прелазака је мањи од број могућих стања.

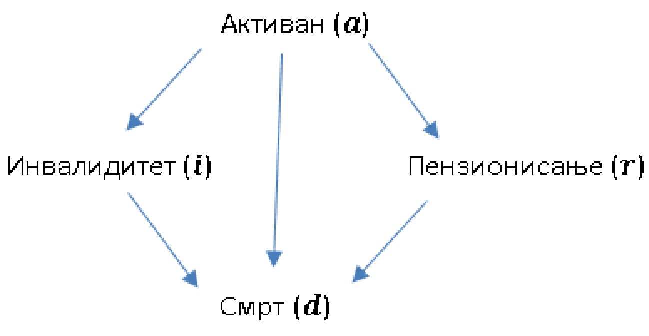
Рачунамо вероватноћу да останемо у тренутном стању:

$$p_{ii}(s,t) = p_{ii}(s,s+1) \cdot p_{ii}(s+1,s+2) \cdot \ldots \cdot p_{ii}(t-1,t)$$

1) Овако дефинисан модел се назива Heubeck-ов модел

2) Занемарићемо могуће флуктуације, у промени компанија

3) Направићемо посебан модел у случају да постоји супружник преминулог и ради једноставности модела, претпоставићемо да нема супружника преминулог. Овако дефинисани поједностављени модел можемо представити шемом:



Пошто смо претпоставили да се особа може пензионисати тачно када доживи годину z, ради се о дискретном догађају у уговору о инвалидитету или смрти.

1) Размотримо случај када особа пређе годину z, $x \geq z$ (пензионисање).

Формирамо једногодишњу матрицу преласка из скупа стања $S = \{a, i, r, d\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_x^r & q_x^r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где су по колонама (као и врстама) дата редом стања а – активно стање, i - инвалидитет, r - пензионисање и d - смрт.

2) Ако је $x = z - 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p_x^{ar} & q_x^{ar} \\ 0 & 1 & p_x^{i} & q_x^{r} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$q_x^a = P($активан статус у години $z - 1$ и смрт у години $z - 1$ из активног статуса | активан статус за $x = z - 1$)

$$p_x^{ar} = 1 - q_x^{ar}$$

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai}$$

Дупли прелазак: активан -> инвалидитет -> смрт

3) Ако је $x < z - 1$:

p_x^{ai} – особа прелази из активног стања у инвалидитет, при чему не долази до смрти.

$p_x^a + p_x^{ai} + q_x^a = 1$

Претпоставимо да имамо непрекидни модел $X_t =$ стање особе у тренутку t

${}_tq_x^r = P$(особа је преминула у години $x + t$ | пензионисана у години x).

Са q_x^a означавамо укупан морталитет, или вероватноћу смртности на нивоу читаве популације(комбинација активног и онеспособљеног стања особа).

За пензионо осигурање у Немачкој користи се Heubeck-ова табела, коју ћемо описати у даљем тексту.

Уводимо следеће ознаке:

$q_x^{ai} = P$(активно стање → инвалидитет → смрт|активан у години x).

Користићемо идеју смањења, које се појављује пропорционално током времена.

У животном осигурању важи: ${}_tq_x = t \cdot q_x,\ x = 0, 1, 2, \dots$

Претпоставимо да се први прелазак догоди у сред године:

0	$\frac{1}{2}$	1	време
x	$x + \frac{1}{2}$	$x + 1$	године
a	i	d	стање

Уводимо ознаку $q_x^{ai} := i_x \cdot {}_{\frac{1}{2}}q^i_{x+\frac{1}{2}}$, где је

Математичка тачност описаног модела:

- Све вероватноће су веће или једнаке од 0
- Сума сваке врсте матрице преласка је 1 .

<u>Пример</u>

Нека је z унапред одређена година пензионисања и важи да је $x < z - 1$.

Посматрајмо „активну“ врсту из матрице:

$(\,p_x^a,\ p_x^{ai},\ 0,\ q_x^a\,)$

Знамо да је:

$$q_x^a = q_x^{aa} + q_x^{ai},$$

дакле:

$$p_x^a + p_x^{ai} + q_x^{aa} + q_x^{ai} = 1$$

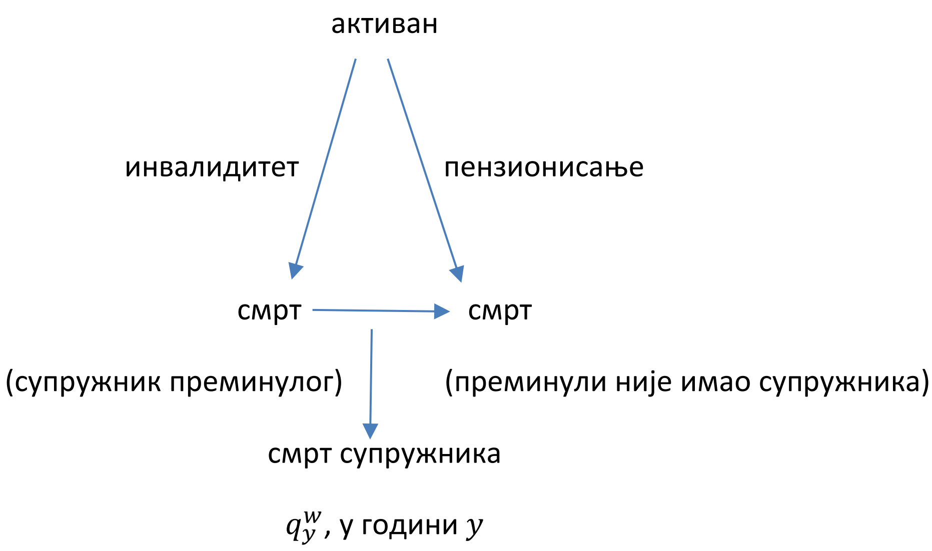
Како је $p_x^{ai} + q_x^{ai} = i_x$,

$$p_x^a = 1 - q_x^{aa} - i_x.$$

Ознаке: q_x^{aa}, q_x^i, q_x^r.

Рачунање пензије партнера преминулог

P(особа се налази у активном стању x $=>$ умире као активна и пензија остаје партнеру) = P(Пензија остаје партнеру | особа умире као активна у години x) $= h_x = P$(особа умире као активна) $= q_x^{aa}$.



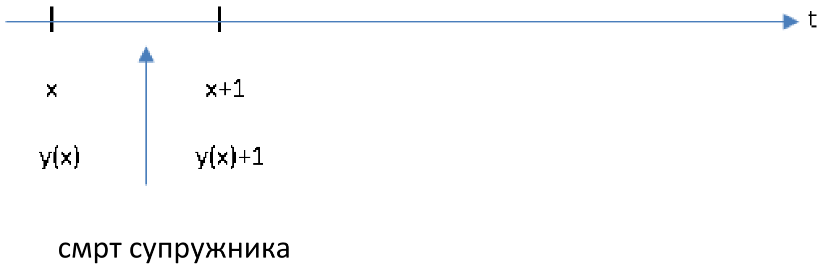
На дијаграму су приказана могућа стања и након смрти осигураника. Потребно је израчунати вероватноћу смрти супружника преминулог старости y, q_y^w.

$\triangle$

Напомена 3.2

Занима нас да израчунамо $p_y^w = P(X_{n+1} = S_{n+1} \,|X_n = S_n)$, где је y број година удовице.

Питање је да ли ће супружник преминулог доживети целокупну пензију супружника? Решење може бити да заменимо индивидуалне исплате пензије партнеру преминулог на једну исплату.



где $x + i, i = 1, 2, \ldots$ представља године супружника, а

$y(x) + i, i = 1, 2, \ldots$ представља године удовице

Означићемо са R_1, R_2,... пензије које прима удовица. Једнократну уплату коју удовица прима унапред рачунамо:

$\sum_{k=0}^{n} R_k \cdot v_k \cdot p_k$,

где је v_k фактор дисконтовања а p_k вероватноћа преживљавања.

За супружника преминулог користимо ознаке: i, r, d, а за активно стање: p_x^a. Ако искористимо ${}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$, добијамо следећу једнакост:

$$1 - p_x^a = q_x^a => l_x^a = l_{x-1}^a \cdot p_{x-1}^a.$$

3.1 Актуарска садашња вредност у моделу више стања

Генерални модел

Означимо са S простор стања, са X_t Марковљев процес и са $L_j(t)$ бенефите у стању *j* у тренутку t.

Означимо са $L_{jk}(t+1)$ прелазак из стања j у стање k, из тренутка t у тренутак $t+1$.

$0(s)$	t	$t+1$	време
i	j	k	стање
	$L_j(t)$	$L_{jk}(t+1)$	

Садашња вредност

$$Z(i,0) = \sum_{t\geq 0} \sum_{j\epsilon S} \left(L_j(t)\cdot I_j(t)\cdot v^t + \sum_{k\epsilon S} L_{jk}(t+1)\cdot v^{t+1}\cdot I_{j(t)}\cdot I_{k(t+1)}\right),$$

где је:

$$I_j(t) = \begin{cases} 1, & X_t = j \\ 0, & X_t \neq j \end{cases},$$ j $\neq k$, а $j(t)$ и $k(t+1)$ су случајне промењиве.

Уколико генерализујемо горе описану садашњу вредност, добијамо следећу једнакост:

$$Z(i,s) = \sum_{t\geq s} \sum_{j\epsilon S} I_j(t)\cdot v(s,t)\cdot \left(L_j(t) + \sum_{k\epsilon S} L_{jk}(t+1)\cdot I_{k(t+1)}\cdot v(t,t+1)\right).$$

Дакле, случајност зависи од иницијалног стања процеса, $X_s = i$.

Напомена 3.3

До сада нисмо искористили Марковљево својство, у следећем кораку ћемо применити Марковљево својство за рачунање актуарске садашње вредности.

Актуарска садашња вредност (*APV, ASV*)

Актуарску садашњу вредност дефинишемо на следећи начин:

$APV(i,s) := E(Z(i,s))$

Претпоставићемо да је $s = 0$, ради поједностављивања рачуна.

$E\left(I_J(t)\right) = 1 \cdot P\left(X_t \;= j \,\middle|\, X_0 \;= i\right) + 0 = p_{ij}(0,t)$

Користећи својство Маркова:

$$E\left(I_J(t) \cdot I_{jk}(t+1)\right) = 1 \cdot P\left(X_t \;= j \;\wedge\; X_{t+1} = k \,\middle|\, X_0 \;= i\right) = P(X_{t+1} = k \,|\, X_t \;= j) \cdot P\left(X_t \;= j \,\middle|\, X_0 \;= i\right) = p_{jk}(t,t+1) \cdot p_{ij}(0,t)$$

$$APV(i,0) = \sum_{t \geq 0} \sum_{j \epsilon S} v(\,t) \cdot p_{ij}(0,t) \cdot \left(L_j(t) + \sum_{k \epsilon S} \mathrm{L_{jk}}(t+1) \cdot v(t,t+1) \cdot p_{jk}(t,t+1)\right).$$

Лема 3.1 *(Рекурзивна формула)*

$$APV(i,0) = L_i(0) + v_i \cdot \sum_{j \epsilon S} p_{ij}(0,1) \cdot (L_{ij}(1) \; + APV(j,1)\,)$$

Доказ леме 3.1

Из дефиниције актуарске садашње вредност знамо да важи следећа једнакост:

$$APV(i,0) \coloneqq v_0 \cdot p_{ii}(0,0) \cdot (L_i(0) + \textstyle\sum_{k=0}^{n} L_{ik}(1) \cdot v(0,1) \cdot p_{ik}(0,1)) + \displaystyle\sum_{t \geq 0} \sum_{j \epsilon S} v_t \cdot p_{ij}(0,t) = v_0 \cdot 1 \cdot (L_i(0) + \textstyle\sum_{k=0}^{n} L_{ik}(1) \cdot v(0,1) \cdot p_{ik}(0,1)) + \displaystyle\sum_{t \geq 0} \sum_{j \epsilon S} v_1 \cdot v(1,t) \cdot p_{ij}(0,t) = L_i(0) + v_1 \cdot \sum_{j \epsilon S} L_{ij}(1) \cdot p_{ij}(0,1) + \; v_1 \cdot$$

$\sum_{m\epsilon S} p_{im}(0,1) \cdot \sum_{t\geq 1} \sum_{j\epsilon S} v(1,t) \cdot p_{mj}(1,t) \cdot \left(L_j(t) + \cdots\right) = L_i(0) + v_1 \cdot \sum_{j\epsilon S} L_{ij}(1) \cdot p_{ij}(0,1) + v_1 \cdot \sum_{m\epsilon S} p_{im}(0,1) \cdot APV(m,1).$

$\boxtimes$

Дефиниција 3.1

Нека je $0 \leq s \leq t.$

Вероватноћу да ће процес остати у истом стању дефинишемо на следећи начин:

$p_{ii}\,(s,t) := P\left(X_{s+1} = X_{s+1} = \cdots = X_{t-1} = X_t = i \,\middle|\, X_s = i\right).$

Напомене 3.4

1) Под остати подразумевамо остајање у временском тренутку који је цео број
2) Ако нема повратка у напуштено стање, онда важи: $$p_{ii}\,(s,t) = p_{ii}(s,t)$$
3) $p_{ii}\,(s,u) = p_{ii}\,(s,t) = p_{ii}\,(t,u),$ за $0 \leq s \leq t \leq u$.

Лема 3.2 *(Друга рекурзивна формула)*

Ако са i означимо стање а са s време, онда важи:

$$APV(i,s) = \sum_{t\geq s} v(s,t) \cdot p_{ii}\,(s,t) \cdot [L_i(t) + v(t,t+1) \cdot \sum_{j\epsilon S, j\neq i} p_{ij}(t,t+1) \cdot \{L_{ij}(t+1) + APV(j,t+1)\}].$$

Пример

Размотримо Heubeck-ов модел и пензије особе са инвалидитетом, која је иницијално била активна (у години x).

$t = 0$	k	$k+1$		t		време
a	a	i	i		d	стање
$0\ldots$	$0\ \ldots$	$1\ \ldots$	$1\ \ldots$		0	исплате пензија

интервал у коме долази до инвалидитета

Пензије се у Немачкој особама са инвалидитетом обично исплаћују унапред, на годишњем нивоу.

APV: $\ddot{a}_x^{a_i}$ - договорена садашња вредност (обећана вредност која ће се исплаћивати у будућности)

a – ануитет

$\ddot{a}$ —ануитет на почетку године

ai — прелазак из активног стања у инвалидитет

Искористићемо Лему 3.2 за рачунање договорене вредности исплата пензија особама са инвалидитетом:

$$\ddot{a}_x^{ai} = \sum_{t=0}^{z-x-1} v_t \cdot {}_t p_x^a \cdot \Big[0 + v(t, t+1) \cdot \mathrm{p}_{x+t}^{a^i} \cdot$$
$$\{APV \text{ од ануитета особе са инвалидитетом у години x } + t + 1\}\Big],$$

$$L_{\text{инвалидитет}}(t) = 1$$

$$=>$$

$$\ddot{a}_x^{a_i} = \sum_{t=0}^{z-x-1} v_{t+1} \cdot {}_t p_x^a \cdot \mathrm{p}_{x+t}^{ai} \cdot \ddot{a}_{x+t+1}^i$$

, $_tp_x^a = \frac{l_{x+t}^a}{l_x^a}$, $v^{t+1} = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{t+1}$, $i_{x+t} = p_{x+t}^{ai}$,

$\ddot{a}_{x+t+1}^i = \sum_{k\geq 0} v_k \cdot_k p_{x+t+1}^i$, доживотни ануитет за особе са инвалидитетом.

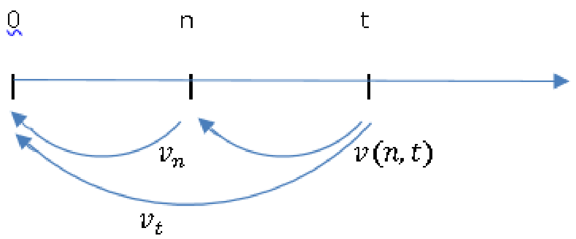
$j \epsilon S, j \neq a, j \epsilon \{i, d, r\}$, где d и r представљају број бенефита.

△

Напомена 3.5

1 $\quad {}_{|n}APV(i,0) + APV_{n|}(i,0) = APV(i,0)$

2 $\quad {}_{|n}APV(i,0) = v_n \cdot p_{ii}\,(0,n) \cdot APV(i,n).$



3.2 Фракционо трајање

У пракси се пензије, ануитети или премије обично исплаћују месечно, не годишње, као што смо до сада користили за рачун.

Наш модел ради чак иако време није мерено само у целим годинама (ако време није цео број).

$$Z(i,0) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}(0,t) \cdot v_t \cdot L_j(t)$$

APV: $\;{}^{(t)}\ddot{a}_x = \sum_{\frac{m}{t}, m=0,1,2} \frac{1}{t} \cdot v_{\frac{m}{t}} \cdot_{\frac{m}{t}} p_x \cdot$ разлика до $\ddot{a}_x$.

<u>Претпоставке:</u>

1. $v_{k+\frac{\lambda}{t}} = v^k \cdot \frac{1}{1+i\cdot\frac{\lambda}{t}} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^k \cdot \frac{1}{1+i\cdot\frac{\lambda}{t}}$, $k = 0, 1, 2, \dots, \lambda = 0, 1, 2, \dots, t-1.$
2. Током сваког периода произвољне дужине. Вероватноћа умирања током интервала има исту расподелу.

$${}_{t}q_x = t \cdot q_x$$

$$=> \ {}_{\tau}\, p_x = 1- \ {}_{\tau}q_x = 1 - \tau \cdot q_x = 1 - \ \tau \cdot (1 - p_x)$$

$${}_{k+\frac{\lambda}{t}}p_x = {}_{k}p_x \cdot {}_{\frac{\lambda}{t}}\, p_{x+k}.$$

Лема 3.3

$\ddot{a}_x - \ {}^{(\lambda)}\ddot{a}_x = k^{(t)} = \frac{(1+i)}{t} \cdot \ \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t+i\cdot\lambda}.$

Горња *једнакост важи уз следеће претпоставке:*

1. $k^{(t)}$ је независно од x
2. ${}^{(t)}\ddot{a}_x = \ \ddot{a}_x - k^t$

<u>Пример</u>

За уобичајену каматну стопу се узима 0,9%, 6%:

${}^{(12)}\ddot{a}_x = \ \ddot{a}_x - k^{(12)}$*,* где је $k^{(12)} \ \approx 0{,}45.$

Δ

Претпоставимо да важи лема 3.3 и да $i \to 0$. Тада је:

$$k^{(t)} \approx \frac{1}{t} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t} = \frac{1}{t^2} \sum_{\lambda=0}^{t-1} \lambda = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{t \cdot (t-1)}{2} = \frac{t-1}{2 \cdot t}.$$

Доказ леме 3.3

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x - {}^{(t)}\ddot{a}_x = & \sum_{k\geq 0} 1 \cdot v^k \cdot_k p_x \\
& - \sum_{k\geq 0}\sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{1}{t} \cdot v^k \cdot \left(\frac{1}{1 + i \cdot \left(\frac{\lambda}{t}\right)}\right) \cdot_k p_x \cdot_{\frac{\lambda}{t}} p_{x+k} = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x \\
& = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x \cdot \left[1 - \frac{1}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{1 - \frac{\lambda}{t} \cdot (1 - p_{x+k})}{1 + i \cdot \frac{\lambda}{t}}\right] \\
& = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x \cdot \left[\frac{1}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} 1 - \frac{1}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{1 - \frac{\lambda}{t} \cdot (1 - p_{x+k})}{1 + i \cdot \frac{\lambda}{t}}\right] \\
& = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot p_x \cdot \frac{1}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} (1 - \frac{t - \lambda + \lambda \cdot p_{x+k}}{t + i \cdot \lambda}) \\
& = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x \cdot \frac{1}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} (\frac{t + i \cdot \lambda - t + \lambda - \lambda \cdot p_{x+k}}{t + i \cdot \lambda}) \\
& = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x \cdot \frac{1}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} (\frac{\lambda \cdot (1 + i - p_{x+k})}{t + i \cdot \lambda}) \\
& = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x \cdot \frac{(1 + i - p_{x+k})}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t + i \cdot \lambda} \\
& = \frac{1+i}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t + i \cdot \lambda} \cdot \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x \cdot \frac{1 + i - p_{x+k}}{1+i}
\end{aligned}$$

За $i \to 0$:

$k(t) = \frac{1+i}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t+i \cdot \lambda}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x \cdot \frac{1 + i - p_{x+k}}{1+i} = & \frac{1+i}{1+i} \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x - \sum_{k\geq 0} v^k \cdot \frac{1}{1+i} \cdot_k p_x \cdot p_{x+k} \\
& = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot_k p_x - \sum_{k\geq 0} v^{k+1} \cdot_{k+1} p_x \\
& = (1 + v_1 \cdot p_x + v^2 \cdot_2 p_x + v^3 \cdot_3 p_x + \cdots) \\
& - (v_1 \cdot p_x + v^2 \cdot_2 p_x + v^3 \cdot_3 p_x + \cdots) = 1.
\end{aligned}$$

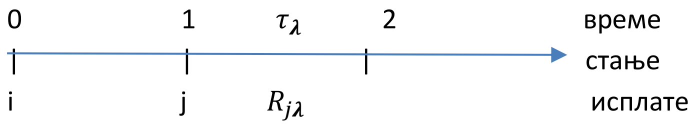
⊠

Ануитети који се исплаћују током године, уз претпоставку да исплате почињу од тренутка t = 0 износе:

$^{(t)}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - k^{(t)}$.

Желимо да размотримо шта се догађа у погледу одложених плаћања, на пример са пензијама за особе са инвалидитетом за активну особу.

Уводимо ознаку за условљену садашњу вредност $^{(t)}\ddot{a}_x{}^{a_i}$ која представља ренту која може да се обећа да ће бити исплаћена.



Претпоставке:
$R_{j\lambda}$ ознака за исплату пензија у стању j у тренутку τ_λ.

$$APV(i,0) = \sum_{s\geq 0} \sum_{j\in S, j\neq i} v_s \cdot p_{ij}(0,s) \cdot R_{j\lambda}, s, s = k + \tau_\lambda, k \in \{0,1,2,\dots\}$$

1) $v_{k+\tau_\lambda} = v^k \cdot \frac{1}{1+i\cdot\tau_\lambda}$
2) $p_{ij}(k, k+\tau), \forall j \in S, j \neq i, k = 0,1,2,\dots 0 \leq \tau \leq 1.$

Ознаке:

1) $p_{ij}(k, k+1) = (1-\tau)\cdot p_{ij}(k,k+1) + \tau \cdot p_{ij}(k,k+1) \geq 0$
2) $\sum_{j\in S} p_{ij}(k,k+1) = 1 \Rightarrow p_{ii}(k,k+\tau) = 1 - \sum_{j\in S, j\neq i} p_{ij}(k,k+\tau) \Rightarrow$ линеарна по τ.
3) Чемпман $-$ Колмогоров: $p_{ij}(0,k+\tau) = \sum_{m\in S} p_{im}(0,k)\cdot p_{mj}(k,k+\tau)$.

Теорема 3.1 *(Принцип инваријације)*

Условљена садашња вредност је идентична одговарајућој годишњој условљеној садашњој вредности

$\Rightarrow \ ^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} = \ddot{a}_x^{ai} = ^{(1)}\ddot{a}_x^{ai}$.

Ове условљене садашње вредности су независне од тренутка у ком се пензије исплаћују током године.

Доказ теореме 3.1:

$$APV(i,0) = \sum_{k\geq 0}\sum_{\lambda=0}^{t-1}\sum_{j\in S} v_{k+\tau_\lambda}\cdot p_{ij}\,(0,k+\tau_\lambda)\cdot R_{j\lambda}$$

$$= \sum_{k\geq 0}\sum_{\boldsymbol{\lambda=0}}^{t-1}\sum_{j\in S} v^k\cdot\frac{1}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot\sum_{m\in S} p_{im}(0,k)\cdot p_{mj}\,(k,k+\tau_\lambda)\cdot R_{j\lambda}$$

$$= \sum_{k\geq 0}\sum_{\boldsymbol{\lambda=0}}^{t-1}\sum_{j\in S,m\in S} v^k\cdot\frac{1}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot p_{im}(0,k)$$

$$\cdot\left[(1-\tau_\lambda)\cdot p_{mj}(k,k)+\tau_\lambda\cdot p_{mj}(k,k+1)\right]\cdot R_{j\lambda} = \Big\{\sigma_{mj}$$

$$= \begin{cases}1, m=j\\ 0, m\neq j\end{cases}\Big\}$$

$$= \sum_{k\geq 0}\sum_{\lambda=0}^{t-1}\sum_{j\in S} v^k\cdot\frac{1}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot p_{ij}(0,k)\cdot(1-\tau_\lambda)\cdot R_{j\lambda}$$

$$+ \sum_{k\geq 0}\sum_{\lambda=0}^{t-1}\sum_{j\in S,m\in S} v^k\cdot\frac{\tau_\lambda}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot p_{im}(0,k)\cdot p_{mj}(k,k+1)\cdot R_{j\lambda} =$$

$$= \sum_{k\geq 0}\sum_{j\in S} v^k\cdot p_{ij}(0,k)\sum_{\lambda=0}^{t-1}\frac{1-\tau_\lambda}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot R_{j\lambda} + \sum_{k\geq 0}\sum_{\lambda=0}^{t-1}\sum_{j\in S}\frac{v^{k+1}}{v}\cdot p_{ij}(0,k+1)\cdot\frac{\tau_\lambda}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot R_{j\lambda}$$

$$=$$

$$= \sum_{k\geq 0}\sum_{j\in S} v^k\cdot p_{ij}(0,k)\sum_{\lambda=0}^{t-1}\frac{1-\tau_\lambda}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot R_{j\lambda} + \sum_{k\geq 0}\sum_{j\in S} v^{k+1}\cdot p_{ij}(0,k+1)\sum_{\lambda=0}^{t-1}\frac{(1+i)\cdot\tau_\lambda}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot R_{j\lambda}$$

$$\{\text{за } k=0: p_{ij}(0,0)=\sigma_{ij}=0\}$$

$$= \sum_{k\geq 1}\sum_{j\in S} v^k\cdot p_{ij}(0,k)\sum_{\lambda=0}^{t-1}\left[\frac{1-\tau_\lambda}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot R_{j\lambda} + \frac{(1+i)\cdot\tau_\lambda}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot R_{j\lambda}\right] =$$

$$= \sum_{k\geq 1}\sum_{j\in S} v^k\cdot p_{ij}(0,k)\sum_{\lambda=0}^{t-1}\frac{R_{j\lambda}}{1+i\cdot\tau_\lambda}\cdot(1-\tau_\lambda+\tau_\lambda+i\cdot\tau_\lambda) =$$

$$= \sum_{k\geq 1}\sum_{j\in S} v^k\cdot p_{ij}(0,k)\sum_{\lambda=0}^{t-1} R_{j\lambda}\text{, где је}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{t-1} R_{j\lambda} - \text{контингентна садашња вредност, укупна сума пензија у стању j.}$$

$\boxtimes$

Напомена 3.6

Најбитније део доказа је претпоставка да су сви преласци линеарни. Можемо да претпоставимо да је $p_{ij}(k, k+\tau)$ линеарно по τ када су преласци униформно распоређени током године, нпр. Смрт, инвалидитет, али не и пензионисање.

3.3 Актуарска садашња вредност за пензије

Претпоставимо да имамо годишње исплате пензије, независно од стања (пензионисање, удовица, инвалидитет) . Претпоставимо да имамо фиксну каматну стопу i = 6% и да важи Heubeck - ов модел.

1. Случај: Пензије су већ исплаћене

У дефинисању пензионисања искористићемо *Лему 3.3*:

${}^{(12)}\ddot{a}_x^r = \ddot{a}_x^r - k^{(12)} = \sum_{k\geq 0} v^k \cdot {}_k p_x^r - k^{(12)}$.

$$\frac{l_{x+k}^r}{l_x^r} = {}_k p_x^r, \text{из } Heubeck - \text{ове табеле}$$

Означимо са ${}^{(12)}\ddot{a}_y^w$ условљену садашњу вредност супружника преминуле особе, где ω означава стање у којем се налази особа (widow), а y представља старост супружника. (12) означава учесталост исплата пензија.

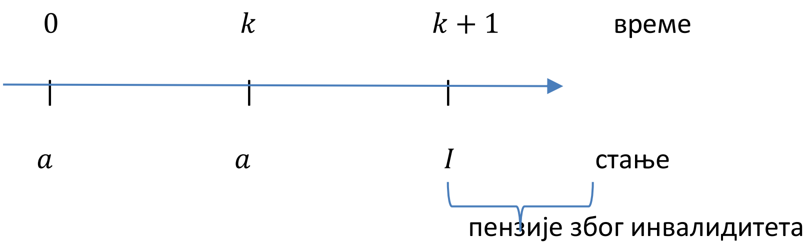
Обележићемо са i стање инвалидитета. Тада су условљене пензије дате са ${}^{(12)}\ddot{a}_x^i$.

2. случај: Пензије које се исплаћују у будућности

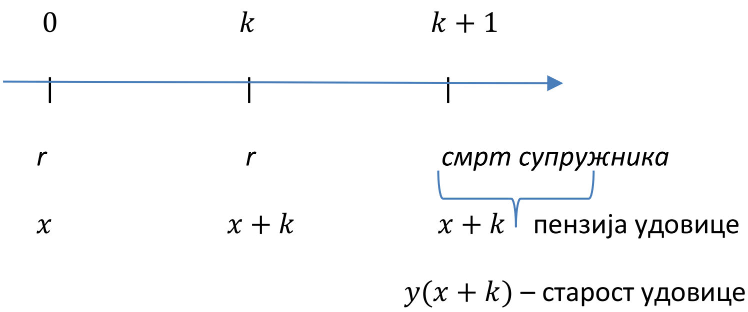
Прелазак из активног стања у инвалидитет: (униформна расподела)

Искористићемо теорему 3.1:

$$^{(12)}\ddot{a}_x^{a_i} = \ddot{a}_x^{a_i} = \sum_{k=0}^{z-x-1} {}_kp_x^a \cdot p_{x+k}^{a_i} \cdot v^{k+1} \cdot \ddot{a}_{x+k+1}^{i}$$



инвалидитет -> смрт супружника : $^{(12)}\ddot{a}_x^{iw} = \ddot{a}_x^{iw}$, по теореми 3.1.



пензионисање -> смрт супружника:

$$^{(12)}\ddot{a} = \ddot{a}_x^{rw} = \sum_{k\geq 0} {}_kp_x^r \cdot p_{x+k}^{rw} \cdot v^{k+1} \cdot \ddot{a}_{y(x+k)+1}, \quad \text{где је} \quad p_{x+k}^{rw}$$

$$= q_{x+k}^r \cdot h_{x+k} \cdot \frac{1}{2} \cdot p_{y(x+k)+\frac{1}{2}}$$

q_{x+k}^r – смрт у старости $x + k$,

h_{x+k} – вероватноћа да је супруг био ожењен (да је оставио удовицу)

$p_{y(x+k)+\frac{1}{2}}$ – преживљавање удовице до краја године $x + k$.

4 Резерве

4.1 Основе

За израду главе коришћени су следећи извори: [5], [11].

Дефиниција 4.1

Премијска резерва је фонд који осигуравајући завод формира из примљених премија осигураника.

У првим годинама плаћања премије просечна премија је већа од природне а у каснијим је мања, па се вишак уплаћене премије издваја из године у годину да би се из тих издвојених средстава образовао фонд који се у књиговодству завода појављује као фонд премијске резерве осигурања живота.

Тај фонд премијске резерве служи за обезбеђење осигуравачевих исплата у оним каснијим годинама у којима су просечне премије, које осигураник плаћа, мање од стварних.

Осигуравајући завод не сме да сматра уплаћене премије као свој приход, већ је дужан да их издвоји као резерву која ће служити као покриће исплате у каснијим годинама када уплате не буду довољне за подмирење тих потреба.

Разликујемо три метода обрачуна математичке резерве:

1. Књиговодствени метод
2. Ретроспективни метод
3. Проспективни метод

Можемо закључити да је математичка резерва један фонд који заједно са свим очекиваним годишњим премијама и интересом на интерес обезбеђује осигуравача да може извршити све исплате осигураних сума сходно таблицама смртности.

4.2 Израчунавање математичке резерве по нето ретроспективној методи

Како премијску, односно математичку резерву, у моменту t њеног обрачуна представља разлика данашње вредности примљених нето премија и данашње вредности исплаћених износа, то да бисмо је израчунали, треба знати вредности свих доспелих нето премија до тренутка t као и вредности свих извршених исплата до истог тренутка t.

Показаћемо израчунавање помоћу ове методе на примеру доживотног осигурања за случај смрти са доживотним плаћањем премије за лице које је са x година ступило у осигурање, а обрачун се врши после трајања од t година.

Нека је нето премија за ово осигурање P_x, онда је на почетку осигурања вредност свих премија које ће доспети или су доспеле у току тих t година:

$$P_x \cdot a_{x,t},$$

где је $a_{x,t}$ данашња вредност једнократне премије за личну ренту од 1 динар за време трајања живота осигураног лица у току трајања од t година.

Исто тако је и вредност исплате услед смрти у току од тих t година једнака једнократној уплати за дугорочно осигурање за случај смрти кроз t година:

$$A_{x,t}$$

Вредности $P_x, a_{x,t}, A_{x,t}$ су познате вредности у моменту почетка осигурања.

Нама су потребне те вредности након t година, тј. у моменту обрачуна премијске резерве.

Пошто износ од 1 динар нарасте у осигурању за t година на $\frac{D_x}{D_{x+t}}$, то ће и износи $P_x \cdot a_{x,t}$ и $A_{x,t}$ за t година порасти на $P_x \cdot a_{x,t} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$ и $A_{x,t} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$.

Направимо разлику:

$$P_x \cdot a_{x,t} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} - A_{x,t} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

За резерву користимо ознаку ${}_tV_x$.

Важи да је ${}_tV_x = P_x \cdot a_{x,t} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} - A_{x,t} \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$.

$${}_tV_x = (P_x \cdot a_{x,t|} - A_{x,t|}) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

$${}_tV_x = (P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}} = \frac{\big(P_x \cdot (N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})\big)}{D_{x+t}}$$

где је

$\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} = a_{x,t|}$.

Важи да је математичка резерва:

$\frac{M_x - M_{x+t}}{D_x} = A_{x,t|}$.

Помоћу ове једначине могу се израчунати индивидуалне математичке резерве за следеће врсте осигурања:

a) За случај смрти са доживотним плаћањем годишњих премија
b) За случај смрти са ограниченим трајањем плаћања премија
c) За дугорочно осигурање
d) За мешовито осигурање (за случај смрти и доживљења)

Ако је осигурање извршено уплаћивањем годишње привремене премије, а премија се плаћа, уместо једначине ${}_tV_x = (P_x \cdot a_{x,t|} - A_{x,t|}) \cdot \frac{D_x}{D_{x+t}}$ имамо једначину:

$${}_tV\left[{}_mP(A_x)\right] = \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot [{}_mP(A_x) \cdot a_{x,t|} - A_{x,t|}].$$

Треба имати у виду да t код $a_{x,t}$ може имати највећу вредност m. Када је $t = m$, онда умањеник ${}_mP(A_x) \cdot a_{x,t|}$ постаје A_x. Према томе, ако је $t \geq m$, једначина постаје:

$${}_tV\left[{}_mP(A_x)\right] = \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot [\mathrm{A}_x - A_{x,t|}] = A_{x+t}.$$

Из ове једнакости видимо да се после уплате свих премија премијска резерва изједначава са мизом за исто осигурање али лица старог $x + t$ година.

Код осигурања капитала на случај смрти ма кад умро осигураник са уплатом доживотне премије уместо умањеника ${}_mP(A_x) \cdot a_{x,t|}$ треба ставити A_x. Из добијене једначине, ${}_tV(A_x) = \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot [\mathrm{A}_x - A_{x,t|}] = A_{x+t}$ изводимо опште правило за израчунавање премијске резерве када је осигурање извршено уплатом мизе[3].

То правило гласи:

Премијска резерва код свих врста осигурања извршена уплатом мизе једнака је мизи истог осигурања али лица старог онолико година колико је старо осигурано лице у моменту када се тражи премијска резерва.

[3] Миза је једнократна премија коју осигураник треба да уплати осигуравајућем друштву, да би у будућности, по основу тако уплаћене мизе, примао ренту као вишекратни износ, или капитал, као једнократни износ.

4.3 Израчунавање математичке резерве по нето проспективној методи

Обрачун математичке резерве у моменту t по проспективној методи заснива се на разлици дисконтованих вредности будућих исплата и дисконтованих вредности још очекиваних нето премија у тренутку t.

До тог закључка смо дошли јер је збир математичке резерве посматране у једном моменту t и дисконтоване вредности у истом моменту t свих још очекиваних годишњих премија једнак дисконтованој вредности у моменту t свих осигураних сума које треба осигуравач да исплати.

Дакле, ако је l_x лица од x година старости осигурано на случај смрти уз једнаке годишње премије P_x са доживотним плаћањем, онда ће после t година математичка резерва бити:

$$l_{x+t} \cdot {}_t V_x = \frac{d_{x+t}}{r} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2} + \frac{d_{x+t+2}}{r^3} \ldots - P_x \cdot \left(l_{x+t} + \frac{l_{x+t+1}}{r} + \cdots \right)$$

где је:

$$\frac{d_{x+t}}{r} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2} + \cdots$$

дисконтована вредност у моменту t свих осигураних сума које треба да се исплате по таблици смртности.

$P_x \left(l_{x+t} + \frac{l_{x+t+1}}{r} + \frac{l_{x+t+2}}{r^2} \ldots \right)$ је дисконтована вредност у моменту t свих годишњих премија које осигуравач има да прими до краја осигурања.

Ако поделимо горњу једначину са l_{x+t}, имамо:

$$ {}_t V_x = \frac{d_{x+t}}{r \cdot l_{x+t}} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2 \cdot l_{x+t+1}} + \cdots - P_x \cdot \left(\frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} + \frac{l_{x+t+1}}{r \cdot l_{x+t}} + \cdots \right),$$

што после множења и дељења са десне стране са r^{x+t} постаје:

$$ {}_t V_x = \frac{d_{x+t}}{r \cdot l_{x+t}} : \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2 \cdot l_{x+t+1}} : \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} + \cdots - P_x * \left(\frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} : \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} + \frac{l_{x+t+1}}{r \cdot l_{x+t}} : \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} + \cdots \right),$$

Односно,

$$ {}_t V_x = \frac{C_{x+t} + C_{x+t+1} + \cdots + C_w}{D_{x+t}} - P_x \cdot \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + \cdots D_w}{D_{x+t}},$$

што се може записати у облику:

$${}_tV_x = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - P_x \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

или

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot a_{x+t},$$

где је дисконтована вредност једног динара осигураног капитала после t година, а $P_x \cdot a_{x+t}$ је дисконтована вредност свих годишњих премија које једно лице од $x + t$ година треба да плати осигуравачу до краја осигурања.

Дакле, проспективни начин обрачуна премијске резерве у тренутку t дефинише премијску резерву као разлику нето једнократне премије за дотичну врсту осигурања лица старог $x + t$ година и дисконтоване вредности на дан обрачуна t свих наредних годишњих премија до краја њиховог исплаћивања.

Када се премија плаћа доживотно, али највише n година, тада уместо претходне једначине имамо једначину:

$${}_tV_x = A_{x+t} - n \cdot P_x \cdot a_{x+t,\ \overline{n-t|}}.$$

Ако је осигурање извршено уплатом мизе, будућих уплата нема, па је умањилац једнак нули. У том случају и проспективна метода даје исту формулу као и ретроспективна.

Овде је:

$${}_tV(A_x) = A_{x+t}.$$

Помоћу једначина које смо извели, водећи рачуна о датим напоменама код прве једначине, можемо за сваку врсту осигурања дати формулу за премијску резерву ако је осигурање извршено уплатом мизе.

Ако у једначини ${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot a_{x+t}$ уместо A_{x+t} ставимо $1 - d \cdot a_{x+t}$имамо:

$${}_tV_x = 1 - d \cdot a_{x+t} - a_{x+t} \cdot P_x$$

$${}_tV_x = 1 - (P_x + d) \cdot a_{x+t}$$

Исто тако заменом P_x са $\frac{1}{a_x} - d$ у ${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot a_{x+t}$ добијамо:

$${}_tV_x = 1 - \left(\frac{1}{a_x} - d + d\right) \cdot a_{x+t}$$

${}_{t}V_x = 1 - \frac{a_{x+t}}{a_x}$.

Једначине ${}_{t}V_x = 1 - (P_x + d) \cdot a_{x+t}$ и ${}_{t}V_x = A_{x+t} - P_x \cdot a_{x+t}$ су врло корисне за израчунавање математичке резерве за осигурање за случај смрти са доживотним плаћањем премија.

4.4 Израчунавање математичке резерве по књиговодственој методи

Други назив за књиговодствену методу је рекурзивна метода, пошто се према њој, математичка резерва текуће године изражава у функцији резерве претходне године.

Нека је дата резерва ${}_{t-1}V_x$ помоћу које треба одредити резерву ${}_{t}V_x$. Од l_xосигураних лица после $t-1$ година има живих $l_x + t - 1$ лица, па је њихова резерва:

$(l_x + t - 1) \cdot {}_{t-1}V_x$.

Збир ове резерве и нето премије коју ће $l_x + t - 1$ лица платити у току $t-1$ године:

$(l_x + t - 1) \cdot {}_{t-1}V_x + (l_x + t - 1) \cdot P_x$,

увећан за интерес до краја $t-1$ године даје:

$((l_x + t - 1) \cdot {}_{t-1}V_x + (l_x + t - 1) \cdot P_x) \cdot r = (l_x + t - 1) \cdot ({}_{t-1}V_x + P_x) \cdot r$.

Како је у току године умрло $d_x + t - 1$ лице чије се обавезе регулишу, то је резерва живих $l_x + t$ лица:

$(l_x + t) \cdot {}_{t}V_x = (l_x + t - 1) \cdot ({}_{t-1}V_x + P_x) \cdot r - (d_x + t - 1)$,

одакле је:

$${}_{t}V_x = \frac{l_x+t-1}{l_x+t} \cdot r \cdot \left({}_{t-1}V_x + P_x\right) - \frac{d_x+t-1}{l_x+t},$$

или после множења и дељења првог члана десне стране са r^{x+t-1} а другог са r^{x+t}:

$${}_{t}V_x = \frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}} \cdot \left({}_{t-1}V_x + P_x - \frac{C_{x+t-1}}{D_{x+t+1}}\right).$$

На сличан начин бисмо одредили и резерву ${}_{t+1}V_x$ помоћу резерве ${}_{t}V_x$. У том случају би било:

$${}_{t+1}V_x = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t-1}} \cdot \left({}_{t}V_x + P_x - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}}\right).$$

Ако једначину $\ _tV_x = \frac{l_x+t-1}{l_x+t} \cdot r \cdot \left(_{t-1}V_x + P_x \right) - \frac{d_x+t-1}{l_x+t}$ решимо по P_x, добићемо:

$P_x = \left(\frac{1}{r} \cdot _t V_x - _{t-1}V_x \right) + \frac{1}{r} \cdot q_{x+t-1} \cdot (_{1-t}V_x),$

одатле се види структура годишње премије једног осигурања на случај смрти.

Док израз $\frac{1}{r} \cdot _t V_x - _{t-1}V_x$ представља резервисану премију која служи за формирање премијске резерве, дотле израз $\frac{1}{r} \cdot q_{x+t-1} \cdot (_{1-t}V_x)$ звани ризико премија служи за исплате осигураних сума услед насталих смртних случајева у дотичној години (познатији као нето премија). То је удео у исплати који припада једном осигуранику.

Величина $\ _{1-t}V_x$ је ризико капитал а $\frac{1}{r} \cdot q_{x+t-1}$ природна премија за јединицу капитала лица старог $x + t - 1$ годину.

Закључак

У раду је описан кратак увид у широку примену математике у животном и пензионом осигурању.

Коришћени су уопштени модели који се прилагођавају потребама осигуравајуће куће.

У зависности од потреба државе, таблице смртности варирају, као и вредности параметара које се користе у формулама.

Актуарска математика, као грана примењене математике, обрађује математичке основе осигурања живота. Одређује обавезе између осигураника и осигуравајућих друштава.

Овде су описане методе којима се у животном и пензионом осигурању долази до фер рачуна, једнаког за све осигуранике.

У првом поглављу је обрађен појам вероватноће смртности са таблицама смртности и основним појмовима које актуари користе у животном и пензионом осигурању. Дато је појашњење појма актуарске садашње вредности и где се она користи, и описани су комутативни бројеви.

Кроз друго поглавље размотрене су ренте (ануитети), врсте ренти, модел бенефита и премије и како постићи поштени договор између осигурања и осигураника, помоћу дефинисаног принципа еквиваленције. Такође, у овом поглављу су дефинисани и уговори животног осигурања.

Најпознатији пример ануитета су пензије о којима је реч у трећем поглављу. Код пензија имамо више плаћања, а самим тим и најкомплекснији модел.

У четвртом, последњем поглављу, обрађена је тема резерви, као и различити начини обрачуна математичке резерве. Математичка резерва се креира због будућих обавеза осигураника, како би у каснијим годинама био обезбеђен.

Математика у осигурању се заснива у највећој мери на рачуну вероватноће. Основни принцип актуарске математике је принцип еквиваленције по коме збир свих уплата сведених на један рок мора бити једнак збиру свих исплата сведених на исти рок. Актуарска математика води рачуна да се сви осигураници третирају једнако праведно.

Литература

[1] Norberg R., Basic Life Insurance Mathematics, Lecture Notes, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 2002.

[2] Hans U. Gerber, Life Insurance Mathematics, Third Edition, Swiss Association of Actuaries Zürich, 1997. http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/Gerber.pdf

[3] Eric V. Slud, Acturial Mathematics and Life-Table Statistics, Mathematics Department University of Maryland, College Park, 2006

[4] David Promislow , Fundamentals of Actuarial Mathematics, Department of Mathematics and Statistics, York University, Toronto, Canada

[5] Проф. Др Рајко Ралевић, Финансијска и актуарска математика, II издање, Београд, 1975.

[6] Prof. Dr. Hans-Joachim Zwiesler, Life, Health and Pension Mathematics, Ulm University, Germany

[7] Проф. Др Јелена Кочовић, Управљање актуарским ризицима при формирању тарифа у осигурању

[8] Проф. Др. Павле Младеновић, Вероватноћа и статистика, Математички факултет, Београд, 2008.

[9] Републички завод за статистику, Детаљне таблице морталитета, 2010 – 2012

[10] **http://www.triglav.rs/osiguranja/fizicka-lica/zivotno-osiguranje/**

[11] Драган Вугделија, Актуарска математика, Суботица, 2008.

[12] Принципи актуарског моделирања, Faculty and Institute of Actuaries, 2000. http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/sm.pdf

[13] Neuburger, E.: Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen, 1997.

Кратка биографија

Јована Кубура је рођена 11. септембра 1992. године у Београду. Основну школу "Јован Стерија Поповић" завршила је у Београду, а затим Девету Београдску Гимназију, природно - математички смер.

Математички факултет, Универзитета у Београду, уписује 2011. године, смер: Статистика, актуарска и финансијска математика, а дипломира 5. октобра 2015. године.

Рад у свету осигурања започела је праксом у Триглав осигурању, у сектору за актуарство, од 1. јуна до 1. августа 2015. године.

Од 1. августа 2015. године запослена је у швајцарској компанији msg Global Solutions SEE као консултант за SAP.

Од тада је радила на пројектима у Холандији и Белгији, као консултант за осигуравајуће куће Achmea, NN и Credendo.

Од марта 2015. до јануара 2016. године ради као екстерни консултант у Ротердаму за осигуравајућу кућу NN (Nationale Nederlanden), на пројекту за пензионо осигурање, а од 1. августа 2017. ради као екстерни консултант у Хагу, такође за осигуравајућу кућу NN, на пројекту за неживотно осигурање.