УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јована Маловић

ПРОБЛЕМИ ДЕШИФРОВАЊА РАЧУНСКИХ ОПЕРАЦИЈА НА МАТЕМАТИЧКИМ ТАКМИЧЕЊИМА

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Александра Костић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: септембар 2023.

Мами и тати

Садржај

Глава 1

Увод

„Let my playing be my learning,
and my learning be my playing.”

Johan Huizinga [1], Homo Ludens

Игра је несумњиво старија од броја. Потребу човека за игром најбоље је изразио Фридрих Шилер[2] речима: „Човек се игра само кад је човек у правом смислу, а човек је у правом смислу само кад се игра.”

Проблеми дешифровања, којима се бавимо у овом раду, представљају проблеме који спадају у математичку разоноду и као такви повезују математику и игру. Будући да су и математика и игра, засебно, веома важне за развој сваког детета, ови проблеми заузимају (или би требало да заузимају) важно место у настави математике, посебно у млађим разредима основне школе. Сем што представљају неку врсту игре, ови проблеми су значајни и због тога што доприносе суштини наставе математике, а то је формирање младих људи који логично размишљају и закључују.

Имајући у виду несумњив значај који проблеми дешифровања имају у настави математике, као и чињеницу да је искуство добијено вежбањем важан фактор при решавању оваквих проблема, одлучила сам се да прикупим задатке овог типа који су се појављивали на математичким такмичењима и начиним својеврсну збирку задатака. Надам се да ће збирка бити од користи будућим такмичарима и њиховим наставницима и да ће послужити у сврху популаризације математике.

[1] Johan Huizinga (1872-1945), холандски социолог и историчар.
[2] Friedrich Schiller (1759-1805), немачки песник, драматург, филозоф и историчар.

Користим прилику и да се захвалим свим својим учитељима и професорима који су обликовали моје математичко знање и утицали на мене као математичара и човека. Посебну захвалност дугујем свом ментору, професорки Тањи Стојадиновић, која ме уз пуно подршке пратила на путу стварања овог рада.

Глава 2

Дефинисање проблема и пар примера за почетак

Проблеми дешифровања рачунских операција или математички ребуси односе се на задатке у којима се тражи да се реконструише запис неког рачуна, уз претпоставку да је тај рачун тачан. Постоји неколико типова математичких ребуса. Ми ћемо се у овом раду ограничити на два типа, која се могу описати на следећи начин:

(i) Неке или све цифре у запису су замењене звездицама. Потребно је реконструисати цео запис тако да једнакост буде тачна.

(ii) Неке или све цифре у запису су замењене словима. Потребно је реконструисати цео запис тако да једнакост буде тачна. При томе се подразумева да су различите цифре замењене различитим словима, а једнаке цифре истим словима.

Обично се о решавању оваквих задатака говори као о дешифровању рачунских операција, односно о дешифровању ребуса. Да би се задаци овог типа урадили, потребно је употребити знање о рачунским операцијама и степеновању, затим, логичко закључивање и мало креативности.

Овакви задаци могу имати више решења, јединствено решење или бити без решења. Из формулације задатка је обично јасно да ли се траже сва могућа решења или само нека.

Пре примера кроз које ћемо илустровати неке од метода за решавање посматраног проблема, осврнућемо се на један математички ребус који је познат широм света. Реч је о једном од ребуса који је објавио енглески математичар H. E. Dudeney [1] 1924. године:

$$\begin{array}{ccccc} & S & E & N & D \\ + & M & O & R & E \\ \hline M & O & N & E & Y \end{array}$$

Приметимо најпре да су сабирци четвороцифрени бројеви. Како је највећи четвороцифрени број једнак 9999, то је $9999 + 9999 < 20000$, па закључујемо да M мора бити једнако 1. Приметимо још једну важну чињеницу, а то је да при сабирању цифара хиљада постоји пренос, односно да је $S + M \geq 10$.

Заменимо $M = 1$ у почетни проблем.

$$\begin{array}{ccccc} & S & E & N & D \\ + & 1 & O & R & E \\ \hline 1 & O & N & E & Y \end{array}$$

Када сабирамо цифре хиљада, разликујемо два случаја:

(1) Нема преноса при сабирању цифара стотина, односно, $S + 1 = 10 + O$, одакле је $S = 9 + O$.

(2) Постоји пренос при сабирању цифара стотина, односно, $S+1+1 = 10+O$, одакле је $S = 8 + O$.

Како је S цифра, следи да O може бити једнако 0 или 1. Међутим, како је $M = 1$ и различитим словима одговарају различите цифре, следи да је $O = 0$. Заменимо $O = 0$.

$$\begin{array}{ccccc} & S & E & N & D \\ + & 1 & 0 & R & E \\ \hline 1 & 0 & N & E & Y \end{array}$$

Посматрајмо сада цифре стотина. Како различитим словима одговарају различите цифре, мора бити $E + 0 + 1 = N$, односно, постоји пренос при сабирању цифара десетица. Такође, како N не може бити једнако 0, следи да је $E < 9$, из чега можемо закључити да нема преноса при сабирању цифара стотина, одакле је $S = 9 + O$, односно $S = 9$.

Посматрајмо сада цифре десетица, имајући на уму да важи $E+1 = N$ и да смо претходно закључили да постоји пренос при сабирању цифара десетица.

Разликујемо два случаја:

[1] H. E. Dudeney (1857-1930), енглески математичар.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 9 & E & N & D \\
+ & 1 & 0 & R & E \\
\hline
1 & 0 & N & E & Y
\end{array}
$$

(1) Нема преноса при сабирању цифара јединица, односно, $N + R = 10 + E$, одакле, заменом $E + 1 = N$ следи $E + 1 + R = 10 + E$, одакле је $R = 9$, што није могуће јер је цифра 9 већ употребљена.

(2) Постоји пренос при сабирању цифара јединица, што на основу претходног закључујемо да мора бити случај. Тада је $N+R+1 = 10+E$, одакле следи $E + 1 + R + 1 = 10 + E$, одакле је $R = 8$.

Заменимо $R = 8$ и коначно, посматрајмо цифре јединица имајући на уму да постоји пренос при сабирању цифара јединица.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 9 & E & N & D \\
+ & 1 & 0 & 8 & E \\
\hline
1 & 0 & N & E & Y
\end{array}
$$

Приметимо да је Y различито од 0 и од 1 јер смо те цифре већ употребили. То значи да је $D + E \geq 12$. Такође, D и E не могу бити једнаки 9, као ни 8, јер су те цифре такође употребљене. Једине могућности које преостају за збир $D + E$ су $7 + 5 = 12$ или $7 + 6 = 13$. Закључујемо да је $E = 7$ или $D = 7$. Претпоставимо да је $E = 7$. Тада из једнакости $E + 1 = N$, следи да је $N = 8$, што је немогуће. Дакле, $D = 7$.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 9 & E & N & 7 \\
+ & 1 & 0 & 8 & E \\
\hline
1 & 0 & N & E & Y
\end{array}
$$

За E важи $E = 6$ или $E = 5$. Претпоставимо да је $E = 6$. Тада из једнакости $E+1 = N$, следи да је $N = 7$, што је немогуће јер је $D = 7$. Дакле, $E = 5$, одакле следи да је $N = 6$ и $Y = 2$.

Коначно, решење полазног проблема је:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 9 & 5 & 6 & 7 \\
+ & 1 & 0 & 8 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 6 & 5 & 2
\end{array}
$$

Размотримо сада пар примера кроз које ћемо илустровати неколико метода за решавање проблема дешифровања рачунских операција.

Пример 1. *Дешифровати једнакост:* $\overline{ABBB} - A = 1998$.

Решење. Дати ребус можемо решити **методом еквивалентне трансформације операција**, односно превођењем ребуса у еквивалентно сабирање $A + 1998 = \overline{ABBB}$. Како је A прва цифра збира, јасно је да A може бити само 1 или 2. Ако је $A = 1$ онда имамо $1 + 1998 = 1999$, одакле је $B = 9$, па почетна једнакост гласи $1999 - 1 = 1998$. Ако је $A = 2$ онда имамо $2 + 1998 = 2000$, одакле је $B = 0$, па почетна једнакост гласи $2000 - 2 = 1998$.

Пример 2. *Дешифровати једнакост:* $1998 : A = \overline{BBB}$.

Решење. Овај ребус се решава **методом дељивости**, јер је A очигледно једноцифрен делилац броја 1998. Како 1998 није дељиво са 4, 5, 7 и 8, то A може бити само 1, 2, 3, 6 или 9. Како је $1998 : 1 = 1998$, то A није 1, па остају могућности $1998 : 2 = 999$, $1998 : 3 = 666$, $1998 : 6 = 333$ и $1998 : 9 = 222$. Дакле, B може бити 9, 6, 3 или 2.

Пример 3. *Дешифровати једнакост:* $\overline{*******B} \cdot B = \overline{AAAAAAAAA}$.

Решење. На овом примеру илустроваћемо **метод разликовања случајева** јер ћемо у обзир узети све могуће случајеве за B.

(1) Цифра B није 0, 1, 5 и 6, јер би тада и A морало бити редом 0, 1, 5 и 6, а то је немогуће, јер су A и B различите цифре.

(2) Ако је $B = 2$, онда је $A = 4$.

Тада је број $\overline{*******B} = 444444444 : 2 = 222222222$, што је немогуће, јер је 222222222 деветоцифрен број, а $\overline{*******B}$ је осмоцифрен број.

(3) Ако је $B = 3$, онда је $A = 9$.

Тада је број $\overline{*******B} = 999999999 : 3 = 333333333$, што је опет немогуће, јер је 333333333 деветоцифрен број, а $\overline{*******B}$ је осмоцифрен број.

(4) Ако је $B = 4$, онда је $A = 6$.

Тада имамо једнакост $\overline{*******4} \cdot 4 = 666666666$. Како је лева страна једнакости дељива са 4, мора бити и десна, што овде није испуњено, тако да је и овај случај немогућ.

(5) Ако је $B = 7$, онда је $A = 9$. Овај случај је такође немогућ, јер је лева страна једнакости $\overline{*******7} \cdot 7$ дељива са 7, а десна страна једнакости, односно број 999999999 није дељив са 7.

(6) Ако је $B = 8$, онда је $A = 4$.

Тада имамо једнакост $\overline{*******8} \cdot 8 = 444444444$. Како је лева страна једнакости дељива са 8, мора бити и десна, што овде није испуњено, тако да је и овај случај немогућ.

(7) Ако је $B = 9$, онда је $A = 1$. Тада је $111111111 : 9 = 12345679$ па је $12345679 \cdot 9 = 111111111$ решење ребуса.

Пример 4. *Решити бројевни ребус* $** + *** = ****$*, ако се сваки број чита исто и с лева у десно и с десна у лево.*

Решење. Превођењем са језика звездица на језик слова, добија се ребус $\overline{AA} + \overline{BCB} = \overline{DEED}$. Како је $\overline{AA}$ највише 99, а $\overline{BCB}$ највише 999, то је $\overline{DEED}$ највише 1098, па је $D = 1$ и $E = 0$. Ако је $B \leq 8$, онда је $\overline{AA} + \overline{BCB}$ највише $99 + 898 = 997$, што је немогуће, јер мора бити једнако $\overline{DEED} = 1001$. Значи, $B > 8$, тј. $B = 9$. Тада је $A = 2$ и $C = 7$, па је решење ребуса $22 + 979 = 1001$. У решавању овог ребуса користили смо **метод неједнакости**, јер су кључни подаци добијени закључивањем о највећој могућој вредности.

Пример 5. *Дешифровати једнакост:* $*2* \cdot 45 = (**)^2$.

Решење. Како је број $(**)^2$ потпун квадрат и како је дељив са 45, то је он дељив са 9 и са 5. Одавде закључујемо да број $*2*$ мора бити облика $5k^2$. Дакле, $120 \leq *2* = 5k^2 \leq 925$, па је $24 \leq k^2 \leq 185$. Значи да је $5 \leq k \leq 13$. Тада је $*2* = 5k^2 \in \{125, 180, 245, 320, 405, 500, 605, 720, 845\}$. Условима задатка одговарају само бројеви $125, 320$ и 720. Решење је само $125 \cdot 45 = 75^2$, јер је $320 \cdot 45 = 120^2$ и $720 \cdot 45 = 180^2$ а бројеви 120 и 180 су троцифрени.

У овом задатку смо комбиновали више различитих метода за решавање математичких ребуса: **метод дељивости**, **метод неједнакости** и **метод разликовања случајева**.

Наведени примери илуструју неке од метода за решавање математичких ребуса. Није могуће дати опште смернице који се ребус којом методом решава. Осећај за то се стиче вежбањем, при чему је најгори метод несистематично погађање, а најбољи сваки који број могућности своди на минималан. Најчешће се математички ребуси могу решити на више начина - применом разних метода. Најважније је да се ребус реши и да при том обухватимо сва решења.

Глава 3

Задаци са математичких такмичења

Наредна три одељка садрже задатке са математичких такмичења у којима се директно или индиректно појављују проблеми дешифровања рачунских операција, односно математички ребуси. Задаци овог типа су чести на такмичењима у млађим разредима, као и у петом и шестом разреду основне школе, а појављују се и на пријемном испиту за упис у Математичку гимназију. На такмичењима у старијим разредима основне школе и у средњој школи, појављују се, али не у већој мери.

3.1 Проблеми дешифровања на такмичењима у млађим разредима основне школе

Задатак 1. *У збиру $KU+KU+RI+KU$ исша слова йредсшављају исше цифре, а различиша слова различише цифре. Колика је највећа мођућа вредносш шођ збира?*

(Ойшшинско шакмичење 2014. III разред)

Решење. Цифре десетица у сабирцима треба да буду што је могуће веће, а како се слово K појављује три пута као цифра десетица, највећи збир се добија за $K=9$ и $R=8$. Слично, пошто се слово U појављује три пута као цифра јединица, највећи збир се добија за $U=7$ и $I=6$. Дакле, највећи могући збир је $97+97+86+97=377$.

Задатак 2. *Замени слова цифрама шако да рачун буде шачан ако знаш да је ММ број чешврше десешице. Различиша слова замени различишим цифрама, а исша слова исшим цифрама.*

$$\begin{array}{cccc} & & \text{М} & \text{М} \\ + & & \text{Л} & \text{Л} \\ \hline & \text{Д} & \text{М} & \text{С} \end{array}$$

(Ойшшинско шакмичење 2013. III разред)

Решење. ММ је број четврте десетице, па мора бити ММ $=33$, а како је збир троцифрен број, мора бити Д $=1$. Заменимо М $=3$ и Д $=1$ у почетни проблем.

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 3 \\ + & & \text{Л} & \text{Л} \\ \hline & 1 & 3 & \text{С} \end{array}$$

Лако закључујемо да је Л $=9$ и С $=2$, па је решење $33+99=132$.

Задатак 3. *У наведеном сабирању треба заменити свако слово једном цифром (иста слова истим, а различита различитим цифрама), тако да сабирање буде тачно. Нађи два начина како то може да се уради.*

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{S} & \mathrm{A} & \mathrm{T} \\ & \mathrm{S} & \mathrm{A} & \mathrm{T} \\ + & \mathrm{S} & \mathrm{A} & \mathrm{T} \\ \hline & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{T} \end{array}$$

(Општинско такмичење 2018. III разред)

Решење. Слово T може имати само вредност 0 или 5. Ако је $T = 5$, онда постоји пренос при сабирању цифара јединица. Међутим, тада не постоји вредност за A таква да се збир $A + A + A + 1$ завршава цифром A. Дакле, $T = 0$. Једина могућа вредност за A је $A = 5$. За S можемо узети само вредности 1 или 2 јер за $S > 2$ збир није троцифрен број. Ако је $S = 1$, имамо $150+150+150 = 450$, па је $M = 4$. Ако је $S = 2$, имамо $250+250+250 = 750$, па је $M = 7$.

Задатак 4. *Дешифруј множење $AAA \cdot B = CCC$. Различита слова замени различитим, а иста слова истим цифрама. Нађи сва решења.*

(Општинско такмичење 2016. III разред)

Решење. Како су цифре A, B и C различите, не може бити $A = 1$, као ни $B = 1$. Ако је $A = 2$, B може бити једнако 3 или 4, одакле имамо решења $222 \cdot 3 = 666$ и $222 \cdot 4 = 888$. Ако је $A = 3$, B може бити једнако 2, одакле имамо решење $333 \cdot 2 = 666$. Ако је $A = 4$, B може бити једнако 2, одакле имамо решење $444 \cdot 2 = 888$. За $A > 4$ нема решења.

Задатак 5. *Дешифруј сабирање (исте цифре су замењене истим, а различите различитим словима):*

$$AA + BB + CC = ABC.$$

(Општинско такмичење 2019. III разред)

Решење. Како сабирци могу највише бити једнаки 99, то A може бити једнако 1 или 2. Провером закључујемо да не може бити $A = 2$. Дакле $A = 1$.

Из сабирања цифара јединица добијамо $1 + B + C = 10 + C$, одакле је $B = 9$. Из сабирања цифара десетица добијамо $1 + 9 + C + 1 = 19$, одакле је $C = 8$. Дакле, решење је $11 + 99 + 88 = 198$.

Задатак 6. *Попуни празна поља одговарајућим цифрама тако да буде тачна једнакост.*

$$(251\square 89 \cdot 6 + 10598\square) : 5 = 322984$$

(Општинско такмичење 2017. IV разред)

Решење. Дата једнакост се може написати у облику $251\square 89 \cdot 6 + 10598\square = 322984 \cdot 5$, тј. $251\square 89 \cdot 6 + 10598\square = 1614920$. Последња цифра првог сабирка на левој страни је 4, па последња цифра другог сабирка на левој страни мора бити једнака 6. Добија се једнакост $251\square 89 \cdot 6 = 1614920 - 105986$, тј. $251\square 89 \cdot 6 = 1508934$. Сада се дељењем добија $1508934 : 6 = 251489$, па су тражене цифре 4 и 6.

Задатак 7. *Дешифруј сабирање $AABB + BA = CDDEE$. Различита слова представљају различите цифре.*

(Општинско такмичење 2015. IV разред)

Решење. Како $AABB$ највише може бити 9999 а BA највише 99, то збир $CDDEE$ највише може бити $9999 + 99 = 10098$, одакле закључујемо да мора бити $C = 1$ и $D = 0$. Мора бити и $A = 9$, јер се за $A < 9$ не добија петоцифрен збир. Дакле, имамо $99BB + B9 = 100EE$. Приметимо да постоји пренос при сабирању цифара јединица и цифара десетица, одакле је $B > 4$. Провером за $B = 5$, $B = 6$, $B = 7$ и $B = 8$, налазимо да мора бити $B = 8$ и $E = 7$. Решење је $9988 + 89 = 10077$.

Задатак 8. *Звездице заменити одговарајућим цифрама:*

$$\begin{array}{cccccc}
4 & * & 3 & \cdot & 2 & * \\
\hline
 & & & * & 8 & 3 \\
 & + & * & * & * & \\
\hline
 & * & * & * & * & *
\end{array}$$

(Окружно такмичење 2003. IV разред)

Решење. Производ цифара јединица чинилаца се завршава цифром 3 и цифра јединица једног од чинилаца је једнака 3, па цифра јединица другог чиниоца мора бити једнака 1, одакле је други чинилац једнак 21. Множењем првог чиниоца цифром јединица другог, закључујемо да цифра десетица првог чиниоца мора бити једнака 8, одакле откривамо први чинилац, 483. Из множења дешифрујемо остатак:

$$
\begin{array}{cccccc}
4 & 8 & 3 & \cdot & 2 & 1 \\
\hline
 & & & 4 & 8 & 3 \\
 & + & 9 & 6 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3
\end{array}
$$

Задатак 9. *Дешифровати множење* $** \cdot * \cdot *9 = 2001$*, тако што ће се уместо звездица ставити одговарајуће цифре. Колико различитих решења има?*

(Окружно такмичење 2001. IV разред)

Решење. Како је $2001 = 3 \cdot 667 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, могућа су следећа решења: $23 \cdot 3 \cdot 29 = 2001$, $69 \cdot 1 \cdot 29 = 2001$ и $29 \cdot 1 \cdot 69 = 2001$.

Задатак 10. *Дешифруј сабирање* $ML + ML = DMS$ *ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре. Одреди сва решења.*

(Окружно такмичење 2012. IV разред)

Решење. Збир два двоцифрена броја је увек мањи од 200, па је $D = 1$. Да би збир био троцифрен, M мора бити веће или једнако од 5. Како је цифра десетица сабирака једнака цифри десетица збира, провером за $M = 5$, $M = 6$, $M = 7$, $M = 8$ и $M = 9$, долазимо до закључка да мора бити $M = 9$ и да постоји пренос при сабирању цифара јединица, одакле је $L > 4$. Дакле, имамо $\overline{9L} + \overline{9L} = \overline{19S}$. Провером добијамо да су сва решења: $95 + 95 = 190$, $96 + 96 = 192$, $97 + 97 = 194$ и $98 + 98 = 196$.

Задатак 11. *Свако слово замени цифром (различита слова различитим цифрама, а иста слова истим цифрама) тако да важи једнакост*

$$ЉУ + ЉА = ШКА$$

и да седмоцифрени број ЉУЉАШКА буде највећи могућ.

(Окружно такмичење 2015. IV разред)

Решење. Како седмоцифрени број ЉУЉАШКА треба да буде највећи могућ, узећемо да је Љ = 9. Одатле је Ш = 1. Како други сабирак и збир имају исту последњу цифру, мора бити У = 0. Тада је $90 + \overline{9A} = \overline{1KA}$. Одавде је К = 8. За А узмимо највећу цифру која је преостала, тј. узимимо А = 7.

Задатак 12. *Звездице заменити цифрама тако да се добије тачна једнакост:*

$$7 * 8 = * 9 \cdot 8 + 7 *.$$

(Окружно такмичење 2005. IV разред)

Решење. На месту треће звездице (с лева на десно) мора да стоји цифра 6, јер је $9 \cdot 8 = 72$. Ако на место средње звездице ставимо цифру 7, добијамо $708 = 79 \cdot 8 + 76$. Ако на место средње звездице ставимо цифру 8, добијамо $788 = 89 \cdot 8 + 76$.

Задатак 13. *Дешифруј сабирање ако се оба сабирка читају исто и са леве и са десне стране.*

$$\begin{array}{rcccc} & & * & * & * \\ + & * & * & * & * \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

(Окружно такмичење 2009. IV разред)

Решење. Прва цифра четвороцифреног сабирка мора бити 1 (да би збир био 2009), па је и његова последња цифра једнака 1. Одатле, последња цифра троцифреног сабирка мора бити 8, а самим тим и прва. За сада имамо $8 * 8 + 1 * * 1 = 2009$. Како се збир броја 8 и неког другог броја завршава са 0, тај број мора бити 2 или 1 (ако постоји пренос при сабирању цифара десетица). Дакле, могући четвороцифрени бројеви су 1221 или 1111.

Ако је четвороцифрени сабирак једнак 1221, тада је троцифрени сабирак једнак $2009 - 1221 = 788$, а ово не може бити тражени троцифрени број. Ако је четвороцифрени сабирак једнак 1111, тада је троцифрени сабирак једнак $2009 - 1111 = 898$, што даје решење.

Задатак 14. *Четвороцифрен и троцифрен број у разлици* $**** - *** = 2011$ *имају исту вредност ако их читамо и са леве и са десне стране. Одреди те бројеве.*

(Окружно такмичење 2011. IV разред)

Решење. Четвороцифрен број је облика $\overline{ABBA}$, а троцифрен $\overline{CDC}$. Преласком са звездица на слова и трансформацијом дате једнакости, добијамо $\overline{ABBA} = \overline{CDC} + 2011$. Лако закључујемо да A може бити једнако 2 или 3. Ако би било $A = 3$, онда би на основу сабирања цифара јединица $C + 1 = A$, морало бити $C = 2$, међутим, тада се за цифру A хиљада не би могло добити 3 јер је $2D2 + 2011 < 3000$. Дакле, $A = 2$, а из $C + 1 = A$ закључујемо да је $C = 1$. Сада имамо $\overline{2BB2} = \overline{1D1} + 2011$. Из сабирања цифара стотина, закључујемо да може бити $B = 1$ или $B = 2$ (уколико постоји пренос при сабирању цифара десетица). Ако би било $B = 2$, онда из $D + 1 = B$ следи да мора бити $D = 1$, међутим, нема преноса при сабирању цифара десетица, па ово није могуће. Закључујемо да мора бити $B = 1$ и $D = 0$. Решење су бројеви 2112 и 101.

Задатак 15. *Дешифруј ребус на слици. Различита слова представљају различите цифре, а иста слова исте цифре. Нађи сва решења.*

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \text{М} & \text{Л} \\
 & \text{Д} & \text{М} & \text{С} \\
+ & \text{Д} & \text{М} & \text{С} \\
\hline
2 & 0 & 1 & 7
\end{array}
$$

(Окружно такмичење 2017. IV разред)

Решење. Мора бити Д = 9 (иначе се не би могао добити збир 20) и притом је пренос при сабирању цифара десетица једнак 2. Сада добијамо да мора бити М = 7 и да нема преноса при сабирању цифара јединица, односно да је Л + С + С = 7. Из последње једнакости закључујемо да Л мора бити непаран број и разликујемо три могућности: Л $= 1$ и С $= 3$, Л $= 3$ и С $= 2$, Л $= 5$ и С $= 1$. Решења ребуса су: $71 + 973 + 973 = 2017$, $73 + 972 + 972 = 2017$ и $75 + 971 + 971 = 2017$.

Задатак 16. *Дата су четири броја: $AABB$, CDD, CB и B. Почевши од другог, сваки број је једнак производу цифара претходног. Одреди број $AABB$. (У бројевима су једнаке цифре замењене истим словима, а различите различитим).*

(Окружно такмичење 2014. IV разред)

Решење. Како је $B = C \cdot B$, то је $B = 0$ или $C = 1$. Ако би било $B = 0$, онда би други број CDD морао бити једнак 0 као производ цифара броја $AABB$, што није могуће. Дакле, $C = 1$. Како је $1 \cdot D \cdot D = \overline{1B}$, D је цифра коју када помножимо собом даје број друге десетице. То је једино могуће за $D = 4$. Како је $4 \cdot 4 = 16$, то је $B = 6$. Сада имамо $A \cdot A \cdot 6 \cdot 6 = 144$, односно, $A \cdot A = 144 : 36 = 4$, одакле је $A = 2$. Дакле, тражени број $AABB$ је 2266.

Задатак 17. *Дешифруј сабирање*

$$\overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 3000$$

тако да истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима одговарају различите цифре.

(Окружно такмичење 2022. IV разред)

Решење. Цифра A не може да буде 1 (јер се тако не може добити збир 3000), а не може ни бити већа од 2, па је $A = 2$. Дакле, имамо $\overline{2B}+\overline{2BC}+\overline{2BCD} = 3000$ односно $20+B+200+\overline{BC}+2000+\overline{BCD} = 3000$, одакле је $B+\overline{BC}+\overline{BCD} = 780$. Одавде закључујемо да мора бити $B = 7$. Из $7+\overline{7C}+\overline{7CD} = 780$ закључујемо да мора бити $C = 0$ и $D = 3$. Решење је $27 + 270 + 2703 = 3000$.

Задатак 18. *Дешифруј ребус $A + BA + CBA + DCBA = 2016$. Иста слова замени једнаким цифрама, а различита различитим.*

(Окружно такмичење 2016. IV разред)

Решење. Збир четири слова A завршава се цифром 6 па је $A = 4$ или $A = 9$. Ако је $A = 4$, тада се $3B + 1$ завршава цифром 1, тј. $3B$ се завршава цифром 0, одакле је $B = 0$, што је немогуће. Дакле, $A = 9$. Сада се $3B + 3$ завршава цифром 1, одакле се $3B$ завршава цифром 8. То је могуће једино ако је $B = 6$. Даље се $2C + 2$ завршава цифром 0, одакле се $2C$ завршава цифром 8, па је $C = 4$ (јер је $A = 9$) и $D = 1$. Решење ребуса је $9 + 69 + 469 + 1469 = 2016$.

Задатак 19. *Дата је једнакост ВУК + ЛОВАЦ = БАЈКА. Иста слова заменити истом цифром, а различита слова различитим цифрама, тако да једнакост буде тачна. Познато је да слово Л треба заменити цифром 5.*

(Окружно такмичење 2007. IV разред)

Решење. Имамо ребус

$$\begin{array}{cccccc} & & & \text{В} & \text{У} & \text{К} \\ + & 5 & \text{О} & \text{В} & \text{А} & \text{Ц} \\ \hline & \text{Б} & \text{А} & \text{Ј} & \text{К} & \text{А} \end{array}$$

Како је Б различито од Л, мора бити Б = 6. Како сабирци могу највише бити једнаки 999 и 59999, збир може највише бити једнак 60998, одакле закључујемо да је А = 0. Сада имамо

$$\begin{array}{cccccc} & & & \text{В} & \text{У} & \text{К} \\ + & 5 & \text{О} & \text{В} & 0 & \text{Ц} \\ \hline & 6 & 0 & \text{Ј} & \text{К} & 0 \end{array}$$

Како при сабирању цифара стотина пренос може бити највише 1, закључујемо да је О = 9. Како мора постојати пренос при сабирању цифара стотина, мора бити В = 7 или В = 8. Не може бити В = 8 јер би било Ј = 6, а та цифра је већ искоришћена. Према томе, В = 7 и Ј = 4. Сада имамо

$$\begin{array}{cccccc} & & & 7 & \text{У} & \text{К} \\ + & 5 & 9 & 7 & 0 & \text{Ц} \\ \hline & 6 & 0 & 4 & \text{К} & 0 \end{array}$$

Како је К + Ц = 10 и У +1 = К, то користећи преостале цифре 1, 2, 3 и 8, добијамо да мора бити К = 2, Ц = 8 и У = 1. Након замене, дата једнакост гласи: $712 + 59708 = 60420$.

Задатак 20. *Ана, Биља и Цеца су замислиле три броја. Ако се обрише прва цифра Аниног броја добија се Биљин број. Брисањем прве цифре Биљиног броја добија се Цецин број. Збир Аниног, Биљиног и Цециног броја је* 912. *Одреди збир цифара броја који је Ана замислила. Напомена: Прва цифра броја је цифра највеће месне вредности у том броју.*

(Окружно такмичење 2023. IV разред)

Решење. Да би збир ова три броја био троцифрен, Ана је морала да замисли троцифрен број, Биља двоцифрен и Цеца једноцифрен. Ако је Анин број $\overline{ABC}$, онда је Биљин број $\overline{BC}$, а Цецин C (A, B и C су цифре) и важи $\overline{ABC} + \overline{BC} + C = 912$. Како се збир $C + C + C$ завршава цифром 2, то је могуће само ако је $C = 4$. За цифре десетица важи да се збир $B + B + 1$ завршава цифром 1, односно да се збир $B + B$ завршава цифром 0. То је могуће само у случају $B = 5$ (случај $B = 0$ не разматрамо јер онда $\overline{BC}$ не би био двоцифрен број). Заменом вредности за B и C добијамо $\overline{A54}+54+4 = 912$, одакле је $A = 8$. Дакле, Ана је замислила број 854, а збир цифара њеног броја је $8 + 5 + 4 = 17$.

3.2 Проблеми дешифровања на такмичењима у старијим разредима основне школе

Задатак 21. *Дешифруј множење* $*7 \cdot 30 = *0**$.
(*Општинско такмичење 2013. V разред*)

Решење. Последња цифра производа је 0. Даље дешифрујемо $*7 \cdot 3 = *0*$. Последња цифра овог производа је 1. Цифра јединица производа прве звезде с лева и броја 3 једнака је 8. Отуда, прва звездица с лева мора бити једнака 6. Дакле, решење је $67 \cdot 30 = 2010$.

Задатак 22. *Које године је рођена особа која 2011. године пуни онолико година колики је збир цифара године њеног рођења?*
(*Општинско такмичење 2011. V разред*)

Решење. Означимо годину рођења са $\overline{ABCD}$. Тада је $\overline{ABCD}+A+B+C+D = 2011$, тј. $1001A + 101B + 11C + 2D = 2011$. Једино је могуће да је $A = 1$. Тада имамо $101B + 11C + 2D = 1010$. Једина могућност за B је да је $B = 9$. Тада је $11C + 2D = 101$. Једина могућност за C је да је $C = 9$, одакле је $D = 1$. Дакле, особа је рођена 1991. године.

Задатак 23. *Ана је замислила четвороцифрени број. Лана је том броју обрисала цифру јединица и када је тороцифрени број, који је преостао, помножила обрисаном цифром, добила је* 2020. *Који број је Ана могла да замисли?*
(*Општинско такмичење 2021. V разред*)

Решење. Треба заправо дешифровати множење $*** \cdot * = 2020$. Растављањем броја 2020 на просте чиниоце добијамо $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Постоје две могућности: $505 \cdot 4 = 2020$ и $404 \cdot 5 = 2020$. Ана је могла да замисли број 5054 или 4045.

Задатак 24. *У бројевном ребусу*

$$ИСПИТ + ИСПИТ = ШКОЛА$$

истим словима одговарају исте, а различитим различите цифре. Колику најмању вредност може имати број ИСПИТ?

(Општинско такмичење 2014. V разред)

Решење. Да би вредност броја ИСПИТ била најмања могућа, вредности слова И, С, П, Т морају бити што мање. Нека је И = 1. У том случају слова Ш и Л морају имати једну од вредности 2 и 3. Следећа најмања цифра коју можемо узети за С је 0 или 4. Ако би било С = 0, онда би слово К морало да има једну од вредности 0 или 1, међутим обе цифре су већ искоришћене тако да узимамо С = 4. Ако је С = 4 тада К има вредност 8 или 9. Следећа најмања цифра коју можемо узети за П је 5. Ако је П = 5 тада је О = 0, па је К = 9, због преноса са места стотина. Остале су још вредности 6, 7 и 8, па је једино могуће Т = 8 и А = 6. Дакле, из сабирања 14518 + 14518 = 29036 закључујемо да је најмања вредност броја ИСПИТ једнака 14518.

Задатак 25. *У запису $AB + ABB + CBBC = BCDC$ замени свако слово цифром (иста слова истом цифром, а различита слова различитим цифрама) тако да сабирање буде тачно.*

(Општинско такмичење 2020. V разред)

Решење. A, B и C не могу бити 0 јер су бар у једном броју цифре највеће месне вредности. Збир цифара јединица је $B + B + C = 10 + C$, одакле је $B = 5$. Дакле, $\overline{A5} + \overline{A55} + \overline{C55C} = \overline{5CDC}$. На основу сабирања хиљада је $C = 4$, па је $\overline{A5} + \overline{A55} + 4554 = \overline{54D4}$. На основу сабирања десетица (и преноса 1 са месне вредности јединица), важи $D = A + 1$ и постоји пренос 1 на месну вредност стотина. На основу сабирања стотина важи $A + 5 + 1 = 14$, одакле је $A = 8$ и $D = 9$. Дакле, решење је $85 + 855 + 4554 = 5494$.

Задатак 26. *Дешифруј рачун*

$$\frac{\overline{AAA}}{\overline{AB}} = A \cdot A.$$

Различитим словима одговарају различите цифре, а истим словима исте цифре.

(Окружно такмичење 2013. V разред)

Решење. Број $\overline{AAA}$ можемо записати као $\overline{AAA} = A \cdot 111$. Заменом у дату једнакост, добијамо $\dfrac{A \cdot 111}{\overline{AB}} = A \cdot A$, одакле је $\dfrac{111}{\overline{AB}} = A$, односно $111 = A \cdot \overline{AB}$. Како је $111 = 3 \cdot 37$, то је $A = 3$ и $B = 7$, па је решење: $\dfrac{333}{37} = 3 \cdot 3$.

Задатак 27. *Замени звездице одговарајућим цифрама (не обавезно једнаким) тако да је количник вредности разломка* $\dfrac{\overline{4 * 5 *}}{45}$ *и двоцифреног броја* $\overline{**}$ *једнак* 2*. Колико решења има задатак?*

(Окружно такмичење 2015. V разред)

Решење. Из услова задатка је $\dfrac{\overline{4 * 5 *}}{45} : \overline{**} = 2$, односно $\overline{4 * 5 *} = 2 \cdot 45 \cdot \overline{**}$, тј. $\overline{4 * 5 *} = 90 \cdot \overline{**}$. Број $\overline{4 * 5 *}$ треба да буде дељив са 90, односно са 9 и 10. Дакле, цифра јединица је 0, а цифра стотина може бити 0 или 9. Задатак има два решења: $\dfrac{4050}{45} : 45 = 2$ и $\dfrac{4950}{45} : 55 = 2$.

Задатак 28. *Звездице заменити одговарајућим цифрама:*

$$
\begin{array}{l}
1\ 5\ *\ *\ * : *6 = 4\ *\ * \\
-\ \ \ *\ *\ * \\
\hline
\ \ 1\ 0\ 4 \\
\ -\ \ *\ 2 \\
\hline
\ \ 3\ *\ * \\
\ -\ *\ *\ * \\
\hline
\ 0
\end{array}
$$

(Окружно такмичење 2003. V разред)

Решење. Очигледно је

$$
\begin{array}{l}
1\ 5\ 4\ 4\ * : *6 = 4\ *\ * \\
-\ 1\ 4\ 4 \\
\hline
\ \ 1\ 0\ 4 \\
\ -\ \ 7\ 2 \\
\hline
\ \ 3\ 2\ * \\
\ -\ 3\ 2\ * \\
\hline
\ 0
\end{array}
$$

Даље је јасно да је делилац једнак 36 јер је $144 : 4 = 36$, као и да је цифра десетица количника једнака 2 јер је $72 : 36 = 2$. И на крају, како број $32*$ мора да буде дељив са 36, он мора бити дељив са 4 и са 9 па је цифра јединица дељеника једнака 4. Решење је:

$$\begin{array}{rl}
15444 : 36 = 429 & \\
-\,144 & \\
\hline
104 & \\
-\,72 & \\
\hline
324 & \\
-\,324 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Задатак 29. *Дешифруј сабирање на слици ако су цифре P, Q, R и S различити прости бројеви.*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathrm{P} \\
 & & & \mathrm{P} & \mathrm{Q} \\
 & & \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \\
+ & \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} \\
\hline
 & * & \mathrm{S} & \mathrm{Q} & \mathrm{P}
\end{array}$$

(Окружно такмичење 2011. V разред)

Решење. P, Q, R и S могу имати вредности 2, 3, 5 и 7. Како је збир цифара јединица сабирака једнак P и $2 + 3 + 5 + 7 = 17$, то је $P = 7$ и постоји пренос 1. При сабирању цифара десетица сабирака добијамо $7 + 1 + Q + R = Q + 10$, одакле је $R = 2$ и постоји пренос 1. При сабирању цифара стотина добијамо $7 + 1 + Q = S + 10$, тј. $Q = S + 2$, одакле је $S = 3$ и $Q = 5$. Решење је $7 + 75 + 752 + 7523 = 8357$.

Задатак 30. *Одредити природан број ЈОВАН (једнаким словима одговарају једнаке цифре, различитим словима одговарају различите цифре) којем је збир цифара једнак 10, такав да збир петоцифрених бројева ЈОВАН и НАВОЈ представља петоцифрени број чије су све цифре једнаке. Колико решења има?*

(Окружно такмичење 1998. V разред)

Решење. Како је збир цифара броја JOBAH једнак 10 и како су све цифре J, O, B, A и H различите, једина могућност је $0+1+2+3+4=10$. Како је JOBAH + HABOJ = $*****$, при чему звезда представља исту цифру, имамо да је $*=4$, односно, збир је једнак 44444. Важи и J+H=4, O+A=4 и 2B=4, односно, B=2. Има четири решења, JOBAH $\in \{10243, 14203, 30241, 34201\}$.

Задатак 31. *Никола је у тачном примеру сабирања заменио једнаке цифре истим словом, а различите цифре различитим словима и добио ребус*

$$M+A+T+E+M+A+T+I+K+A=\overline{EE}.$$

Која је највећа цифра коју може заменити слово E?

(Окружно такмичење 2020. V разред)

Решење. Дата једнакост се може написати у облику $2M+3A+2T+I+K=10E$. Цифра E ће бити већа ако словима која имају више понављања доделимо веће вредности, тј. ако је $A=9$, $M=8$ (или 7) и $T=7$ (или 8). Тада је $I+K$ највише 11, па би збир био највише $57+11=68$, што повлачи да је $E\leq 6$. Ако је $I=1$ и $K=2$, почетни збир је 66, па је највећа цифра коју E може заменити једнака 6.

Задатак 32. *Лука је на тастатури хтео да укуца двоцифрени број $\overline{ab}$. Грешком је испред прве цифре и после друге цифре укуцао 4. На тај начин добио је четвороцифрени број 54 пута већи од двоцифреног броја $\overline{ab}$. Одреди број $\overline{ab}$.*

(Општинско такмичење 2013. VI разред)

Решење. Лука је укуцао број $\overline{4ab4}$, па имамо да је $\overline{4ab4}=54\cdot\overline{ab}$, па је то једнакост коју треба дешифровати. Како је $\overline{4ab4}=4004+10\cdot\overline{ab}$, имамо $4004+10\cdot\overline{ab}=54\cdot\overline{ab}$, тј. $4004=44\cdot\overline{ab}$, одакле је $\overline{ab}=91$.

Задатак 33. *Докажи да не постоје цифре a, b, c, d и e, такве да је*

$$\overline{abcd,e}\cdot e=\overline{cadeb}.$$

(Општинско такмичење 2015. VI разред)

Решење. Како је $\overline{abcd,e} = \overline{abcd} + \dfrac{1}{10}e$, то је $\left(\overline{abcd} + \dfrac{1}{10}e\right) \cdot e = \overline{cadeb}$, одакле је $\dfrac{1}{10}e \cdot e = \overline{cadeb} - \overline{abcd} \cdot e$. Разлика на десној страни последње једнакости је природан број, па и лева страна мора бити природан број, а то је могуће само за $e = 10$. Како су a, b, c, d и e цифре, закључујемо да тражене цифре не постоје.

Задатак 34. *Ако различитим словима одговарају различите цифре, решити ребус*

$$\begin{array}{rcccc} & & Ђ & А & К \\ + & Б & Л & О & К \\ \hline К & Њ & И & Г & А \end{array}$$

(Општинско такмичење 2004. VI разред)

Решење. Како сабирци могу највише бити једнаки 999 и 9999, збир може највише бити једнак 10998, одакле закључујемо да је К $=1$, Њ $=0$, А $=2$, и Б $=9$. Приметимо да мора бити Ђ $+$ Л >10, јер мора постојати пренос 1 са места стотина. Разликујемо три случаја:

(1) Ако је О $=3$ тада је Г $=5$. Мора бити Ђ $=6$ (или 8) и Л $=8$ (или 6);

(2) Ако је О $=4$ тада је Г $=6$. Мора бити Ђ $=5$ (или 8) и Л $=8$ (или 5), или Ђ $=7$ (или 8) и Л $=8$ (или 7);

(3) Ако је О $=5$ тада је Г $=7$. Мора бити Ђ $=6$ (или 8) и Л $=8$ (или 6).

Ребус има осам решења: $621 + 9831 = 10452$, $821 + 9631 = 10452$, $521 + 9841 = 10362$, $821 + 9541 = 10362$, $721 + 9841 = 10562$, $821 + 9741 = 10562$, $621 + 9851 = 10472$ и $821 + 9651 = 10472$.

Задатак 35. *Ако истим словима одговарају исте, а различитим различите цифре, решити ребус*

$$M : A = T - E = M \cdot A = T : I = K - A.$$

(Окружно такмичење 2004. VI разред)

Решење. Из $M : A = M \cdot A$ одмах закључујемо да је $A = 1$. Сада се ребус своди на $M = T - E = T : I = K - 1$. Како је $T : I = M$ и слова I и M нису једнака 1 и представљају различите цифре, закључујемо да може бити $T = 6$ или $T = 8$. Ако би било $T = 6$ тада би било $I = 2$, $M = 3$, $E = 3$ и $K = 4$ или $I = 3$, $M = 2$, $E = 4$ и $K = 3$, међутим, оба случаја су немогућа будући да различитим словима одговарају различите цифре. Дакле, мора бити $T = 8$. Може бити $I = 2$ или $I = 4$. Ако је $I = 2$, онда је $M = 4$ и $E = 4$, па закључујемо да мора бити $I = 4$. За $T = 8$ и $I = 4$ даље добијамо да је $M = 2$, $E = 6$ и $K = 3$.

Задатак 36. *Дешифруј множење $\overline{xx} \cdot \overline{yz} \cdot \overline{xyz} = \overline{xyzxyz}$ ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре.*

(Окружно такмичење 2012. VI разред)

Решење. Како је $\overline{xyzxyz} = \overline{xyz000} + \overline{xyz} = 1000 \cdot \overline{xyz} + \overline{xyz} = 1001 \cdot \overline{xyz}$, имамо $\overline{xx} \cdot \overline{yz} \cdot \overline{xyz} = 1001 \cdot \overline{xyz}$, односно $1001 \cdot \overline{xyz} - \overline{xx} \cdot \overline{yz} \cdot \overline{xyz} = 0$, одакле је $\overline{xyz} \cdot (1001 - \overline{xx} \cdot \overline{yz}) = 0$. Овај производ је једнак 0 ако је $1001 - \overline{xx} \cdot \overline{yz} = 0$, односно $\overline{xx} \cdot \overline{yz} = 1001$. Како је $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 91 = 77 \cdot 13$ закључујемо да је $x = 7$, $y = 1$ и $z = 3$.

Задатак 37. *Одреди све троцифрене природне бројеве који су пет пута већи од производа својих цифара.*

(Државно такмичење 2015. VI разред)

Решење. Нека су тражени троцифрени бројеви облика $\overline{ABC}$, при чему различита слова не морају нужно означавати различите цифре. Из услова задатка важи да је $\overline{ABC} = 5 \cdot A \cdot B \cdot C$. Број $\overline{ABC}$ је дељив са 5, па је $C = 0$ или $C = 5$. Запис броја $\overline{ABC}$ не може садржати 0 јер би онда производ био 0. Дакле, мора бити $C = 5$. Сада имамо $\overline{AB5} = 25 \cdot A \cdot B$, одакле закључујемо да је број $\overline{ABC}$ дељив са 25, па је $B = 2$ или $B = 7$. Ако би било $B = 2$, имали бисмо $\overline{A25} = 50 \cdot A$ што није могуће јер је десна страна једнакости дељива са 10 а лева није. Дакле, мора бити $B = 7$. Сада имамо $\overline{A75} = 175 \cdot A$, одакле је $100A + 75 = 175A$, односно, $75A = 75$, па је $A = 1$. Дакле, једини троцифрени број који задовољава услове задатка је 175.

Задатак 38. *Колико различитих решења има дати бројевни ребус (истим словима одговарају исте, а различитим словима различите цифре)?*

$$\begin{array}{rccccc} & A & B & B & C & B \\ + & B & C & A & D & A \\ \hline & D & B & D & D & D \end{array}$$

(Државно такмичење 2021. VI разред)

Решење. Како је $A + B = D < 10$ и $C + D = D$, то је $C = 0$ (C не може имати вредност 9 јер нема преноса 1 при сабирању цифара јединица). Цифра D може имати вредности 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Тада A и B могу имати следеће вредности:

D	$A + B$
3	$1+2$, $2+1$
4	$1+3$, $3+1$
5	$1+4$, $2+3$, $3+2$, $4+1$
6	$1+5$, $2+4$, $4+2$, $5+1$
7	$1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$
8	$1+7$, $2+6$, $3+5$, $5+3$, $6+2$, $7+1$
9	$1+8$, $2+7$, $3+6$, $4+5$, $5+4$, $6+3$, $7+2$, $8+1$

Дакле, укупно је 32 решења.

Задатак 39. *Колико најмање сабирака може да буде у изразу да би важило*

$$BROJ + BROJ + \cdots + BROJ = AAAAAA.$$

(Државно такмичење 2011. VI разред)

Решење. Најмање сабирака ће бити ако је $A = 1$. Растављањем броја 111111 на просте чиниоце добијамо $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Како би број сабирака био што мањи, четвороцифрени сабирци треба да буду што је могуће већи. Највећи четвороцифрени број који можемо записати коришћењем нека четири од наведених пет чинилаца је $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 8547$. Дакле, 13 је најмањи број четвороцифрених сабирака са различитим цифрама ($BROJ = 8547$) који у збиру дају број 111111.

Задатак 40. *Вера је замислила петоцифрени број A. Ратко је броју A дописао с десне стране цифру 1. Славољуб је броју A с леве стране дописао цифру 1. На овај начин Ратко је добио три пута већи број од Славољубовог. Који број је Вера замислила?*

(Општинско такмичење 2012. VII разред)

Решење. Ратков број је $\overline{A1}$ а Славољубов $\overline{1A}$ и важи $\overline{A1} = 3 \cdot \overline{1A}$. Како је број A петоцифрен, имамо да је $10A + 1 = 3 \cdot (100000 + A)$, одакле после сређивања добијамо $7A = 299999$, па је Вера замислила број 42857.

Задатак 41. *Одреди све двоцифрене бројеве такве да је збир тог броја и броја који је написан истим цифрама обрнутим редом квадрат неког броја.*

(Општинско такмичење 2011. VII разред)

Решење. Означимо са $\overline{ab}$ тражени број. Из услова задатка $\overline{ab} + \overline{ba} = n^2$ добијамо $11(a+b) = n^2$. Како је $2 \leq a+b \leq 18$, мора бити $a+b = 11$. Тражени бројеви су: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

Задатак 42. *Одреди све двоцифрене природне бројеве $\overline{ab}$ за које важи $\overline{ab} - \overline{ba} = n^2$, где је $n \in \mathbb{N}$.*

(Општинско такмичење 2013. VII разред)

Решење. Из услова задатка $\overline{ab} - \overline{ba} = n^2$ добијамо $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9 \cdot (a - b) = n^2$. Како је 9 квадрат броја 3, то и $a - b$ мора бити квадрат целог броја, а то је могуће за $a - b \in \{1, 4\}$. Разликујемо два случаја:

(1) Ако је $a - b = 1$, тада је $a = b + 1$, одакле добијамо двоцифрене бројеве: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 и 98;

(2) Ако је $a - b = 4$, тада је $a = b + 4$, одакле добијамо двоцифрене бројеве: 51, 62, 73, 84 и 95.

Дакле, тражени бројеви су: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84 и 95.

Задатак 43. *Када се три последње цифре шестоцифреног броја a преместе на почетак, у истом поретку, добија се 6 пута већи број. Одреди број a.*

(Општинско такмичење 2015. VII разред)

Решење. Означимо са $\overline{ABCDEF}$ тражени шестоцифрени број. Треба уствари решити ребус $\overline{ABCDEF} \cdot 6 = \overline{DEFABC}$. Означимо $x = \overline{ABC}$ и $y = \overline{DEF}$. Тада је $6 \cdot (1000x + y) = 1000y + x$, тј. $6000x + 6y = 1000y + x$, где су x и y природни бројеви са највише три цифре. Даље је $5999x = 994y$, тј. $857x = 142y$. Како су бројеви 857 и 142 узајамно прости, једино решење је $x = 142$ и $y = 857$. Тражени број је 142857.

Задатак 44. *Дата су четири броја: $ABBCD$, BAC, AC, C. Почевши од другог, сваки број је једнак производу цифара претходног. Одреди о којим бројевима је реч. (У бројевима су једнаке цифре замењене истим словима, а различите различитим).*

(Окружно такмичење 2014. VII разред)

Решење. Како је $A \cdot C = C$, то је $C = 0$ или $A = 1$. Ако би било $C = 0$, онда би и производ цифара броја $ABBCD$ био једнак 0, што није могуће. Дакле, $A = 1$. Како је $B \cdot C = \overline{1C}$, то C може бити 2 или 5. Ако је $C = 2$, тада је $B = 6$ и имамо низ бројева: $\overline{1662D}$, 612, 12, 2. У том случају би морало да важи да је $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot D = 612$, што није могуће јер је D цифра, тако да у овом случају нема решења. Ако је $C = 5$, тада је $B = 3$ и имамо низ бројева: $\overline{1335D}$, 315, 15, 5. Тада је $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot D = 315$, одакле је $D = 7$, па су тражени бројеви: 13357, 315, 15, 5.

Задатак 45. *Одреди четвороцифрени број чији је збир цифара једнак производу прве две цифре и једнак двоцифреном завршетку тог четвороцифреног броја.*

(Окружно такмичење 2011. VII разред)

Решење. Тражени четвороцифрени број $\overline{abcd}$ задовољава услове $a+b+c+d = a \cdot b$ и $a + b + c + d = \overline{cd}$. Из другог услова добијамо да је $a + b = 9c$, одакле закључујемо да мора бити $c = 1$ (ако би било $c = 2$, морало би бити $a = b = 9$, али тада би из првог услова следило да је $d = 61$ што је немогуће). Сада имамо да је $10 + d = a \cdot b$ одакле је $10 \leq a \cdot b \leq 19$. Како је $a + b = 9$ и $10 \leq a \cdot b \leq 19$ добијамо следећа решења: 2714 ($a = 2$, $b = 7$, $d = 4$), 7214 ($a = 7$, $b = 2$, $d = 4$), 3618 ($a = 3$, $b = 6$, $d = 8$) и 6318 ($a = 6$, $b = 3$, $d = 8$).

Задатак 46. *Одредити све двоцифрене бројеве* $\overline{ab}$ *чији је корен једнак* $a+\sqrt{b}$.
(Окружно такмичење 2006. VII разред)

Решење. Из једнакости $\sqrt{\overline{ab}} = a + \sqrt{b}$ добијамо да је $10a + b = (a + \sqrt{b})^2 = a^2+2a\sqrt{b}+b$, односно, $10a = a^2+2a\sqrt{b}$. Како је $a \neq 0$, следи да је $a = 10-2\sqrt{b}$. То значи да је $\sqrt{b}$ цео број, па b може бити само 0, 1, 4 или 9. Налажењем одговарајуће вредности за a и провером датог услова добијамо да су тражени бројеви: 81, 64 и 49.

Задатак 47. *Збир четвороцифрених бројева* $\overline{1ABC}$ *и* $\overline{CBA1}$ *је број* $\overline{BBDD}$. *Дешифруј дато сабирање, ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.*
(Републичко такмичење 1998. VII разред)

Решење. Треба дешифровати ребус

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ + & \mathrm{C} & \mathrm{B} & \mathrm{A} & 1 \\ \hline & \mathrm{B} & \mathrm{B} & \mathrm{D} & \mathrm{D} \end{array}$$

Приметимо да се приликом сабирања цифара јединица C и 1 добија цифра D, а да се приликом сабирања цифара хиљада C и 1 добија цифра B и да при том нема преноса. То је једино могуће ако постоји пренос приликом сабирања цифара стотина A и B. На основу овога имамо: $C + 1 = D$, $A + B = 10 + D$, $A + B + 1 = 10 + B$ и $1 + C + 1 = B$. Из треће једнакости добијамо да је $A = 9$, а сређивањем осталих једнакости имамо: $D = C + 1$ и $B = C + 2$. У зависности од $C \neq 0$ добијамо следећа решења:

(1) $C = 1$, $D = 2$, $B = 3$ тј. $1931 + 1391 = 3322$;

(2) $C = 2$, $D = 3$, $B = 4$ тј. $1942 + 2491 = 4433$;

(3) $C = 3$, $D = 4$, $B = 5$ тј. $1953 + 3591 = 5544$;

(4) $C = 4$, $D = 5$, $B = 6$ тј. $1964 + 4691 = 6655$;

(5) $C = 5$, $D = 6$, $B = 7$ тј. $1975 + 5791 = 7766$;

(6) $C = 6$, $D = 7$, $B = 8$ тј. $1986 + 6891 = 8877$.

Задатак 48. *Ћирило је написао на табли низ од пет бројева тако да је разлика сваког броја (почев од другог) и његовог претходника један исти број. Онда је дошао Методије и заменио све цифре словима, и то исте цифре истим словима, а различите цифре различитим словима. Тако је добијен запис: A, BC, BD, CE, FF. Које бројеве је написао Ћирило?*

(Државно такмичење 2007. VII разред)

Решење. Нека је разлика сваког броја и његовог претходника једнака d. Приметимо да други и трећи број у низу имају исту цифру десетица, одакле следи да је $d < 10$. Како је први број у низу једноцифрен, а други двоцифрен, мора бити $B = 1$. Даље следи да је $C = 2$ и $F = 3$. Овим смо одредили други и пети број у низу: 12 и 33. Како је $12 + 3d = 33$, то је $d = 7$. Ћирило је на табли написао бројеве: 5, 12, 19, 26, 33.

Задатак 49. *Одреди цифре a, b и c тако да важи $(\overline{ab})^a = \overline{bcb}$.*

(Државно такмичење 2013. VII разред)

Решење. За $a = 1$ број $(\overline{ab})^a$ је двоцифрен. За $a \geq 3$ је $(\overline{ab})^a > 1000$, односно број $(\overline{ab})^a$ није троцифрен, па је $a = 2$. Дакле, имамо једнакост $(\overline{2b})^2 = \overline{bcb}$. Цифре јединица бројева $\overline{2b}$ и $(\overline{2b})^2$ су једнаке, па је $b \in \{1, 5, 6\}$. Услов је једино испуњен за $b = 6$, одакле је $c = 7$. Дата једнакост гласи $26^2 = 676$.

Задатак 50. *Да ли је могуће заменити слова цифрама (различита слова различитим цифрама) тако да буде тачна следећа једнакост*

$$ZEC + VUK + SLON = 2010?$$

(Државно такмичење 2010. VII разред)

Решење. Показаћемо да то није могуће. Приметимо да у једнакости учествује десет различитих слова, што значи да ако бисмо слова заменили цифрама, искористили бисмо свих десет цифара. Претпоставимо да је могуће слова заменити цифрама тако да дата једнакост буде тачна. Тада је збир $(Z+E+C)+(V+U+K)+(S+L+O+N)$ једнак 45, тј. дељив је са 9. Како је $ZEC + VUK + SLON = 999S + 99(Z + V + L) + 9(E + U + O) + (Z + E + C) + (V + U + K) + (S + L + O + N)$, на основу претходног, закључујемо да је збир $ZEC + VUK + SLON$ дељив са 9. Међутим, 2010 није дељиво са 9.

Задатак 51. *Одредити цифре x, y и z такве да је* $\dfrac{1}{x+y+z} = 0,\overline{xyz}$. *Наћи сва решења.*

(Општинско такмичење 2006. VIII разред)

Решење. Множењем почетне једнакости са $1000(x+y+z)$ добијамо $1000 = \overline{xyz}\cdot(x+y+z)$. Како је $x+y+z \leq 27$, могућа су следећа представљања броја 1000 као производа два броја: $500\cdot 2$, $250\cdot 4$, $200\cdot 5$, $125\cdot 8$, $100\cdot 10$, $50\cdot 20$ и $40\cdot 25$. Провером налазимо да је једино решење задатка: $x=1$, $y=2$, $z=5$.

Задатак 52. *Да ли постоји четвороцифрени број који се повећа 4 пута кад се његове цифре испишу обрнутим редом?*

(Општинско такмичење 2014. VIII разред)

Решење. Нека је дати број $\overline{abcd}$. По услову задатка, за тај број важи $\overline{dcba} = 4\cdot\overline{abcd}$. Јасно је да је $a \leq 2$. Не може бити $a=1$, јер би се онда број $\overline{dcba}$ који је дељив са 4, завршавао непарном цифром 1. Дакле, $a=2$. Тада је $d=8$ или $d=9$. Не може бити $d=9$, јер се производ $4\cdot 9 = 36$ не завршава цифром 2. Дакле, $d=8$. Заменом добијених вредности имамо $\overline{8cb2} = 4\cdot\overline{2bc8}$, тј. $\overline{cb2} = 4\cdot\overline{bc8}$. Јасно је да је $b \leq 2$, тј. да $b \in \{0,1,2\}$. Провером закључујемо да ни $b=0$, ни $b=2$ не дају решења. За $b=1$ имамо $\overline{c12} = 4\cdot\overline{1c8}$, одакле је $c=7$, јер је $4\cdot 178 = 712$. Дакле, тражени број постоји и једнак је 2178.

Задатак 53. *У једнакости*

$$(A+B)\cdot(C+D)\cdot(E+F)\cdot(G+H) = 5005$$

слова заменити цифрама 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (различита слова различитим цифрама) тако да се добије тачна једнакост. На колико начина се то може урадити?

(Општинско такмичење 2018. VIII разред)

Решење. Број 5005 се раставља на просте чиниоце као $5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, па сваки од збирова у наведене четири заграде мора бити једнак једном од бројева 5, 7, 11 или 13. Постоје два начина да се то оствари: $8+5=13$, $7+4=11$, $6+1=7$, $3+2=5$ или $7+6=13$, $8+3=11$, $5+2=7$, $4+1=5$. У сваком од та два случаја, фактори могу променити места на $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ начина, а у сваком збиру, сабирци могу заменити места на 2 начина, па је укупан број начина да се добије тачна једнакост $2\cdot 24\cdot 2^4 = 768$.

Задатак 54. *Одреди све трочифрене бројеве који су три пута већи од квадрата збира својих цифара.*

(Општинско такмичење 2017. VIII разред)

Решење. Нека је $\overline{abc}$ тражени број. Из услова $\overline{abc} = 3\cdot(a+b+c)^2$ следи $3 \mid \overline{abc}$, одакле следи да $3 \mid (a+b+c)$, па важи $(a+b+c) = 3\cdot n$, за неко $n \in \mathbb{Z}$, на основу чега добијамо да важи $\overline{abc} = 3 \cdot 9 \cdot n^2$. Из последње једнакости закључујемо да $9 \mid \overline{abc}$, одакле следи да $9 \mid (a + b + c)$, па важи $(a + b + c) = 9 \cdot m$, за неко $m \in \mathbb{Z}$, на основу чега добијамо да важи $\overline{abc} = 3 \cdot 81 \cdot m^2$, одакле следи да $243 \mid \overline{abc}$. Троцифрени бројеви дељиви са 243 су 243, 486, 729 и 972. Провером долазимо до закључка да бројеви 243 и 972 задовољавају услове задатка.

Задатак 55. *Које године двадесетог века је рођен човек који ове године пуни онолико година колики је производ цифара године његовог рођења?*

(Окружно такмичење 2014. VIII разред)

Решење. Година рођења је облика $\overline{19xy}$. По претпоставци задатка је $\overline{19xy} + 1 \cdot 9 \cdot x \cdot y = 2014$, одакле сређивањем добијамо $10x + y + 9 \cdot x \cdot y = 114$. Лако се види да је $x > 1$ и $y > 1$ (случајеви $x = 1$ и $y = 1$ се лако елиминишу). Приметимо и да је $x \cdot y < 12$ (јер је $9 \cdot 12 + 10 + 1 > 114$). Следи да је $x < 6$ и $y < 6$. На основу услова $1 < x < 6$, $1 < y < 6$ и $x \cdot y < 12$, преостају следеће могућности за $\overline{xy}$: 22, 23, 24, 25, 32, 33, 42 и 52. Провером налазимо да само за $\overline{xy} = 33$ и $\overline{xy} = 42$ важи $1933 + 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 3 = 2014$ и $1942 + 1 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2 = 2014$. Човек је рођен 1933. или 1942. године.

Задатак 56. *Докажи да следећи ребус нема решење ако различитим словима одговарају различите, а истим словима исте цифре.*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathrm{A} \\ & & & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ & & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ + & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

(Окружно такмичење 2009. VIII разред)

Решење. Како је $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 1111A + 111B + 11C + D = 2009$, јасно је да мора бити $A = 1$. Сада је $111B + 11C + D = 898$. Како је

$11C + D \leq 107$, то је $791 \leq 111B \leq 898$, па мора бити $B = 8$. Сада је $11C + D = 10$. Одавде закључујемо да мора бити $C = 0$, али тада је $D = 10$, што је немогуће јер је D цифра. Дакле, дати ребус нема решења.

Задатак 57. *Одреди непознати број $\overline{xyzt}$ ако за његове цифре важе следеће једнакости:*

$$xt + zt = 18, \quad xz + tz = 8, \quad xz + xt = 14, \quad x \cdot y \cdot z \cdot t = 0.$$

(Државно такмичење 2016. VIII разред)

Решење. Из прве три једнакости закључујемо да цифре x, z и t морају бити различите од 0, па је из четврте једнакости $y = 0$. Сабирањем прве три једнакости добијамо $xt + zt + xz = 20$. Одузимањем прве, друге и треће једнакости од једнакости $xt + zt + xz = 20$, добијамо редом, $xz = 2$, $xt = 12$ и $zt = 6$ $(*)$. Множењем последње три једнакости добијамо $(xzt)^2 = 144$, одакле је $xzt = 12$. Из последње једнакости и $(*)$ добијамо $x = 2$, $z = 1$ и $t = 6$. Тражени број је 2016.

Задатак 58. *Нека је A, BCD, AEF, GFG, HCI, DEA, IFD, JGF, $BFEG$, ... растући аритметички низ, тј. низ у коме је сваки следећи члан већи од претходног за један исти број d. У низу су једнаке цифре замењене истим, а различите цифре различитим словима. Одреди 16. члан овог низа.*

(Шеста српска математичка олимпијада 2012.)

Решење. Означимо чланове низа са a_1, a_2, ... , a_{16}, ... Како је a_1 једноцифрен број а a_9 четвороцифрен, имамо да важи $a_9 = a_1 + 8d > 1000$ тј. мора бити испуњено $8d > 991$ што нам даје услов да је $d > 123$. С друге стране, a_8 је последњи троцифрени члан низа па је $a_8 = a_1 + 7d < 1000$ тј. $7d < 999$ што нам даје и други услов $d < 143$. Дакле, $123 < d < 143$.
За било коју вредност првог члана низа и било коју вредност за d из одређеног интервала имамо да је $B = 1$ и $A = 2$. Посматрајући девети члан низа $1FEG$, уз услов задатка да различита слова означавају различите цифре, лако уочавамо да F не може бити цифра 1 или 2, јер су то већ B и A. А како је $123 < d < 143$ тј. $986 < 8d + 2 < 1146$, следи да је $F = 0$. Посматрајући четврти члан низа $G0G$ за који је $a_4 = a_1 + 3d = 2 + 3d$, због ограничења за d

имамо да важи $371 < 3d + 2 < 431$, па следи да је $G = 4$.
Када имамо одређена два члана низа, лако можемо одредити тачну вредност за d. Наиме, $a_4 = a_1 + 3d$, одакле лако добијамо да је $d = 134$. Коначно, $a_{16} = a_1 + 15d = 2 + 2010 = 2012$, тј. 16. члан низа је $AFBA$.

3.3 Проблеми дешифровања на такмичењима средњошколаца

Задатак 59. *Наћи трocифрен број $\overline{abc}$ ако је четвороцифрен број $\overline{abc1}$ три пута већи од четвороцифреног броја $\overline{2abc}$.*

(Општинско такмичење 2005. I разред, Б категорија)

Решење. Треба дешифровати једнакост $3 \cdot \overline{2abc} = \overline{abc1}$. Како се $3 \cdot c$ завршава са 1, следи да мора бити $c = 7$, па добијамо $3 \cdot \overline{2ab7} = \overline{ab71}$. Сада се $3 \cdot b + 2$ завршава са 7, односно, $3 \cdot b$ се завршава са 5, па мора бити $b = 5$. Заменом, добијамо $3 \cdot \overline{2a57} = \overline{a571}$, одакле закључујемо да се $3 \cdot a + 1$ завршава са 5, односно, $3 \cdot a$ се завршава са 4, па мора бити $a = 8$. Добијамо једнакост $3 \cdot 2857 = 8571$, одакле је $\overline{abc} = 857$.

Задатак 60. *Наћи све троцифрене бројеве x (који не почињу нулом) са следећим особинама:*

(1) ако се броју x дода његова цифра јединица, добија се број дељив са 7;

(2) ако се броју x дода његова цифра десетица, добија се број дељив са 11;

(3) ако се броју x дода његова цифра стотина, добија се број дељив са 13.

(Општинско такмичење 2021. I разред, Б категорија)

Решење. Нека је тражени број $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$.
Из (2) имамо да је број $x + b = 100a + 11b + c = 11(9a + b) + a + c$ дељив са 11, одакле следи да $11 \mid a + c$, а како је $1 \leq a + c \leq 18$, следи да је $a + c = 11$.
Из (1) имамо да је број $x + c = 100a + 10b + 2c = 98a + 10b + 22 = 7(14a + b + 3) + 3b + 1$ дељив са 7, одакле следи да $7 \mid 3b + 1$, па је $b = 2$ или $b = 9$.
Коначно, из (3) имамо да је број $x + a = 100a + 10b + 11 = 100a + 10b + 50 - 39 = 10(10a + b + 5) - 39$ дељив са 13, одакле следи да $13 \mid 10a + b + 5$. Ако је $b = 2$, онда $13 \mid 10a + 7 = 10(a + 2) - 13$, одакле следи $13 \mid a + 2$, што није могуће. Следи да је $b = 9$ и $13 \mid 10a + 14 = 10(a + 4) - 26$, одакле следи $13 \mid a + 4$, што је могуће једино за $a = 9$.
Из $a + c = 11$, следи да је $c = 2$, па је једино решење $x = 992$.

Задатак 61. *Цифре a и b су различите и такве да важи*

$$\overline{aa}\cdot\overline{ba}\cdot\overline{aba}=\overline{abaaba}.$$

Дешифровати ову једнакост.

(Општинско такмичење 2004. I разред, Б категорија)

Решење. Из $\overline{aa}\cdot\overline{ba}\cdot\overline{aba}=1001\cdot\overline{aba}$ због $a\neq b\neq 0$, након дељења са $\overline{aba}$, добијамо $\overline{aa}\cdot\overline{ba}=1001$. Како се $a\cdot a$ завршава са 1, следи $a=1$ или $a=9$. За $a=1$ имамо $11\cdot\overline{b1}=1001$, одакле добијамо $\overline{b1}=91$, па је $b=9$. За $a=9$ имамо $99\cdot\overline{b9}=1001$, али како 1001 није дељиво са 99, овај случај није могућ. Дакле, једино решење је $11\cdot 91\cdot 191=191191$.

Задатак 62. *Познато је да је*

$$5^{20}\cdot 20^5=30517578*************,$$

при чему свака звездица представља по једну цифру. Одредити цифре уместо којих се налазе звездице.

(Општинско такмичење 2011. I разред, Б категорија)

Решење. Нека је $x=5^{20}\cdot 20^5$. Како је $x=5^{20}\cdot 2^5\cdot 10^5=5^{15}\cdot 5^5\cdot 2^5\cdot 10^5=5^{15}\cdot 10^{10}$, то је последњих 10 цифара броја x једнако нули, а преостале три непознате цифре представљају последње три цифре броја 5^{15}. Приметимо да важи $5^{15}-5^3=5^3(5^{12}-1)=125(25^6-1)$. Како је $25\equiv 1 \pmod 8$, то је $25^6\equiv 1 \pmod 8$, па $8\mid 25^6-1$. Следи да $1000\mid 5^{15}-5^3$, одакле закључујемо да су последње три цифре броја 5^{15} исте као и последње три цифре броја 5^3, односно, преостале три непознате цифре су редом 1, 2 и 5.

Задатак 63. *Познато је да је*

$$28!=30488a34461171386050150 4b00000.$$

Одредити цифре a и b.

(Окружно такмичење 2002. I разред, Б категорија)

Решење. Број 28! дељив је са $5^6\cdot 2^6=10^6$, па се завршава са шест нула, одакле је $b=0$. Како је број 28! дељив са 9, збир његових цифара мора бити дељив са 9, односно $9\mid 82+a$, одакле следи да је $a=8$.

Задатак 64. *Нађи све цифре n и 2018-тоцифрене природне бројеве x, $x = \overline{a_{2017}\dots a_2a_1a_0}$, такве да важи*

$$n\cdot x = \overline{(a_{2017}+n)\dots(a_2+n)(a_1+n)(a_0+n)}.$$

(Окружно такмичење 2018. I разред, А категорија)

Решење. Означимо $y = \overline{(a_{2017}+n)\dots(a_2+n)(a_1+n)(a_0+n)}$. Приметимо да је цифра n различита од 0 и од 1.

Докажимо да је a_0 паран број. Претпоставимо супротно, a_0 је непаран број. Тада је x непаран број, па је из $y = n\cdot x$, број y паран ако и само ако је број n паран. Међутим, последња цифра броја y је a_0+n и она је парна ако и само ако је број n непаран, што је контрадикција. Дакле, a_0 је паран број, па су и бројеви x и y парни. Одавде је и a_0+n паран број, па је и n паран.

Приметимо и да је $a_0 \neq 0$, јер би у супротном и цифра јединица a_0+n броја y била једнака 0, што није могуће. Дакле, $a_0 \geq 1$, а како је a_0 паран, следи $a_0 \geq 2$. Из $a_0+n \leq 9$ следи $n \leq 7$, а како је n паран, следи $n \leq 6$. Дакле, $n \in \{2,4,6\}$.

За $n = 6$, из $a_0+n \leq 9$ добијамо $a_0 = 2$ и $a_0+n = 8$. Међутим, цифра јединица броја $6\cdot\overline{a_{2017}\dots a_2a_12}$ једнака је 2, а не 8.

За $n = 4$, из $a_0+n \leq 9$ добијамо $a_0 = 2$ или $a_0 = 4$. За $a_0 = 2$ је $a_0+n = 6$, међутим, цифра јединица броја $4\cdot\overline{a_{2017}\dots a_2a_12}$ једнака је 8, а не 6. За $a_0 = 4$ је $a_0+n = 8$, међутим, цифра јединица броја $4\cdot\overline{a_{2017}\dots a_2a_14}$ једнака је 6, а не 8, па је и овај случај немогућ.

Дакле, остаје $n = 2$. Из $a_0+n \leq 9$ добијамо $a_0 \in \{2,4,6\}$. За $a_0 = 6$ је $a_0+n = 8$, међутим, цифра јединица броја $2\cdot\overline{a_{2017}\dots a_2a_16}$ једнака је 2, а не 8. За $a_0 = 4$ је $a_0+n = 6$, међутим, цифра јединица броја $2\cdot\overline{a_{2017}\dots a_2a_14}$ једнака је 8, а не 6. За $a_0 = 2$ је $a_0+n = 4$ и важи да је цифра јединица броја $2\cdot\overline{a_{2017}\dots a_2a_12}$ једнака 4. Закључујемо да је $a_0 = 2$. Сада из

$$2\cdot\overline{a_{2017}\dots a_2a_12} = \overline{(a_{2017}+2)\dots(a_2+2)(a_1+2)4}$$

следи

$$2\cdot\overline{a_{2017}\dots a_2a_1} = \overline{(a_{2017}+2)\dots(a_2+2)(a_1+2)}.$$

Даље на исти начин добијамо $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, итд. до $a_{2017} = 2$. Дакле, једино решење је $n = 2$ и $x = \underbrace{222\dots222}_{2018\text{ пута}}$.

Задатак 65. *Нека су a, b и c три различите цифре, од којих ниједна није једнака нули, за које важи*

$$\overline{abc} : c = \overline{bc}.$$

Одредити те цифре.

(*Републичко такмичење 2004. I разред, Б категорија*)

Решење. Преведимо дато дељење у множење: $\overline{bc} \cdot c = \overline{abc}$. Пошто се $c \cdot c$ завршава са c, следи да је $c = 5$ или $c = 6$ (јасно је да је $c \neq 0$ и $c \neq 1$).
За $c = 5$ имамо $\overline{b5} \cdot 5 = \overline{ab5}$. Лева страна једнакости је дељива са 25, па на основу десне следи да је $b \in \{2, 7\}$. За $b = 2$ је $25 \cdot 5 = 125$, што је једно решење, а за $b = 7$ је $75 \cdot 5 = 375$, што је друго решење. За $c = 6$ имамо $\overline{b6} \cdot 6 = \overline{ab6}$, одакле следи да се $b \cdot 6 + 3$ завршава са b, што није испуњено ни за једну цифру.
Дакле, решења су $(a, b, c) = (1, 2, 5)$ и $(a, b, c) = (3, 7, 5)$.

Задатак 66. *Решити ребус:*

$$ПЕТ \cdot ПЕТ = ДЕСЕТ$$

(истим словима одговарају исте а различитим словима различите цифре, и притом П, Д $\neq 0$).

(*Државно такмичење 2017. I разред, Б категорија*)

Решење. Како је $400 \cdot 400 = 160000 > 99999$, следи да мора бити $\text{П} < 4$, а како је $\text{П} \neq 0$, закључујемо да је $\text{П} \in \{1, 2, 3\}$. Пошто се $\text{Т} \cdot \text{Т}$ завршава са Т, следи да $\text{Т} \in \{0, 1, 5, 6\}$. Искључујемо могућност $\text{Т} = 0$, јер је тада $(\text{ПЕТ})^2 = (10 \cdot \text{ПЕ})^2 = 100 \cdot (\text{ПЕ})^2$, односно, број $(\text{ПЕТ})^2$ се завршава са 00, а то није могуће због десне стране почетне једнакости јер различитим словима одговарају различите цифре. Дакле, $\text{Т} \in \{1, 5, 6\}$.
Приметимо да се број $\text{ЕТ} \cdot \text{ЕТ}$ завршава са ЕТ, а како је $(\text{ЕТ})^2 = (10 \cdot \text{Е} + \text{Т})^2 = 100 \cdot \text{Е}^2 + 20 \cdot \text{Е} \cdot \text{Т} + \text{Т}^2$, закључујемо да се број $20 \cdot \text{Е} \cdot \text{Т} + \text{Т}^2$ мора завршавати са ЕТ.
Разликујемо три случаја у зависности од Т:

(1) За $\text{Т} = 1$, број $20 \cdot \text{Е} + 1$ мора се завршавати са Е1, тј. $2 \cdot \text{Е}$ се мора завршавати са Е, а то је могуће само за $\text{Е} = 0$. Провером могућности за $\text{П} \in \{2, 3\}$, добијамо: $201 \cdot 201 = 40401$, што није решење (због $\text{Д} \neq \text{С}$), као и $301 \cdot 301 = 90601$, што јесте решење.

(2) За Т $= 5$, број $100 \cdot$ Е $+ 25$ мора се завршавати са Е5, а то је могуће само ако је Е $= 2$. Провером могућности за П $\in \{1, 3\}$, добијамо: $125 \cdot 125 = 15625$ и $325 \cdot 325 = 105625$, али ништа од овога није решење.

(3) За Т $= 6$, број $120 \cdot$ Е $+ 36$ мора се завршавати са Е6, тј. $2 \cdot$ Е $+ 3$ се мора завршавати са Е, а то је могуће само за Е $= 7$. Провером могућности за П $\in \{1, 2, 3\}$, добијамо: $176 \cdot 176 = 30976$, $276 \cdot 276 = 76176$ и $376 \cdot 376 = 141376$, али ништа од овога није решење.

Дакле, једино решење ребуса је $301 \cdot 301 = 90601$.

Задатак 67. *Одредити све троцифрене бројеве* $\overline{abc}$, *где је* a, b, $c \neq 0$, *такве да важи* $\overline{abc} = 3 \cdot a! + 2 \cdot b! + c!$. *(*$\overline{abc}$ *је број коме су* a, b, c, *редом, цифре стотина, десетица и јединица у декадном систему.)*

(Државно такмичење 2022. I разред, А категорија)

Решење. Како је $6! = 720$ и $7! > 999$, мора бити $a, b \leq 5$ и $c \leq 6$. Тада је $\overline{abc} \leq 556$, па мора бити и $c \leq 5$.

Разликујемо случајеве у зависности од a:

(1) Ако је $a = 5$, онда је $500 + 10b + c = 3 \cdot 120 + 2b! + c!$, односно, $2b! + c! = 140 + 10b + c \in [151, 195]$. Не може бити $b = 5$, јер је тада $2b! + c! > 2 \cdot 120 = 240 > 195$. Не може бити ни $c \leq 4$, јер је тада $2b! + c! \leq 2 \cdot 24 + 24 = 72 < 151$. Следи $c = 5$, па је $2b! + 120 = 140 + 10b + 5$, тј. $2b! = 25 + 10b$, што нема решења јер је десна страна једнакости дељива са 5 а лева није.

(2) Ако је $a = 4$, онда је $400 + 10b + c = 3 \cdot 24 + 2b! + c!$, односно, $2b! + c! = 328 + 10b + c \in [339, 383]$. Не може бити $b \leq 4$, јер је тада $2b! + c! \leq 2 \cdot 24 + 120 = 168 < 339$. Не може бити ни $c \leq 4$, јер је тада $2b! + c! \leq 2 \cdot 120 + 24 = 264 < 339$. Следи $b = c = 5$, али тада је $2b! + c! = 2 \cdot 5! + 5! = 360$ и $328 + 10b + c = 383$, па ни у овом случају нема решења.

(3) Ако је $a = 3$, онда је $300 + 10b + c = 3 \cdot 6 + 2b! + c!$, односно, $2b! + c! = 282 + 10b + c \in [293, 337]$. Не може бити $b \leq 4$, јер је тада $2b! + c! \leq 2 \cdot 24 + 120 = 168 < 293$. Не може бити ни $c \leq 4$, јер је тада $2b! + c! \leq 2 \cdot 120 + 24 = 264 < 293$. Не може бити ни $b = c = 5$, јер је тада $2b! + c! = 360 > 337$, па ни у овом случају нема решења.

(4) Ако је $a = 2$, онда је $200 + 10b + c = 3 \cdot 2 + 2b! + c!$, односно, $2b! + c! = 194 + 10b + c \in [205, 249]$. Не може бити $b \leq 4$, јер је тада $2b! + c! \leq 2 \cdot 24 + 120 = 168 < 205$, а ако је $b = 5$, онда добијамо $2 \cdot 120 + c! = 194 + 50 + c$, тј. $c! = 4 + c$, што је једначина која нема решења.

(5) Ако је $a = 1$, онда је $100 + 10b + c = 3 \cdot 1 + 2b! + c!$, односно, $2b! + c! = 97 + 10b + c \in [108, 152]$. Не може бити $b = 5$, јер је тада $2b! + c! > 2 \cdot 120 = 240 > 152$. Не може бити ни $c \leq 4$, јер је тада $2b! + c! \leq 2 \cdot 24 + 24 = 72 < 108$. Следи $c = 5$, па је $2b! + 120 = 97 + 10b + 5$, односно $b! + 9 = 5b$, а решење те једначине је $b = 3$.

Дакле, постоји један број који задовољава наведени услов и то је $\overline{abc} = 135$.

Задатак 68. *Да ли је могуће у изразу*

$$ТРИ \cdot ТРИ = ДЕВЕТ$$

доделити истим словима исте а различитим словима различите цифре (и притом Т, Д $\neq 0$) а да се добије тачна једнакост?

(Окружно такмичење 2017. II разред, Б категорија)

Решење. Како је $400 \cdot 400 = 160000 > 99999$, закључујемо да је Т < 4. Како је Т цифра јединица броја који је потпун квадрат (ТРИ^2 се завршава са Т), следи да Т $\in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, а како је на основу претходног Т < 4 и по услову задатка Т $\neq 0$, закључујемо да мора бити Т $= 1$. Пошто се И $\cdot$ И завршава са Т, следи да И $\in \{1, 9\}$, а како различитим словима одговарају различите цифре, мора бити И $= 9$. Директном провером свих могућности за Р, добијамо: $109^2 = 11881$, $129^2 = 16641$, $139^2 = 19321$, $149^2 = 22201$, $159^2 = 25281$, $169^2 = 28561$, $179^2 = 32041$ и $189^2 = 35721$. Како се ни у једном од ових случајева не добија резултат који одговара обрасцу ДЕВЕТ, следи да није могуће испунити захтев из задатка.

Задатак 69. *Троцифрен број $\overline{abc}$ је паран, а његове цифре међусобно различите и различите од нуле. Познато је да је збир свих троцифрених бројева који се састоје од цифара a, b и c (без понављања) већи од 2700, а мањи од 3100. Који је највећи могући овакав број $\overline{abc}$?*

(Окружно такмичење 2020. II разред, Б категорија)

Решење. Троцифрени бројеви који се састоје од цифара a, b и c (без понављања) су $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ и $\overline{cba}$, а њихов збир је $222(a+b+c)$. Из услова задатка имамо $2700 < 222(a+b+c) < 3100$, а једини број дељив са 222 између 2700 и 3100 је $222 \cdot 13 = 2886$, одакле следи да је $a+b+c=13$.
Цифра a не може бити 9 јер би следило $\overline{abc} = 922$, што не може јер цифре морају бити различите. Ако је $a = 8$, добијамо да је највећи могући број са задатим условима $\overline{abc} = 832$.

Задатак 70. *Одредити све n, a, b, где је $n > 1$ природан број, а a и b цифре различите од 0, тако да постоји правоугли троугао чије су катете $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}0}$ и $\overline{\underbrace{b\ldots b}_{n}}$, а хипотенуза $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}b}$, где $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}0}$ представља број који у декадном запису има n цифара, првих $n-1$ једнаких a, а последња једнака 0, $\overline{\underbrace{b\ldots b}_{n}}$ представља број који у декадном запису има n цифара једнаких b, а $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}b}$ представља број који у декадном запису има n цифара, првих $n-1$ једнаких a, а последња једнака b.*

(Државно такмичење 2022. II разред, Б категорија)

Решење. На основу Питагорине теореме је $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}0}^2 + \overline{\underbrace{b\ldots b}_{n}}^2 = \overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}b}^2$.
Како је

$$\begin{aligned}
\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}0} &= 10 \cdot \overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}} = \tfrac{10a}{9} \cdot \overline{\underbrace{9\ldots 9}_{n\text{-}1}} = \tfrac{10a}{9} \cdot (10^{n-1}-1),\\
\overline{\underbrace{b\ldots b}_{n}} &= \tfrac{b}{9} \cdot \overline{\underbrace{9\ldots 9}_{n}} = \tfrac{b}{9} \cdot (10^{n}-1),\\
\overline{\underbrace{a\ldots a}_{n\text{-}1}b} &= b + 10 \cdot \tfrac{a}{9} \cdot \overline{\underbrace{9\ldots 9}_{n\text{-}1}} = b + \tfrac{10a}{9} \cdot (10^{n-1}-1),
\end{aligned}$$

следи $\frac{100a^2}{81} \cdot (10^{n-1}-1)^2 + \frac{b^2}{81} \cdot (10^n-1)^2 = \left(b + \frac{10a}{9} \cdot (10^{n-1}-1)\right)^2 = b^2 + \frac{20ab}{9} \cdot (10^{n-1}-1) + \frac{100a^2}{81} \cdot (10^{n-1}-1)^2$, тј. $81b^2 + 180ab(10^{n-1}-1) = b^2(10^n-1)^2 = b^2\left(10 \cdot (10^{n-1}-1)+9\right)^2 = 100b^2(10^{n-1}-1)^2 + 180b^2(10^{n-1}-1) + 81b^2$, односно $9a = 5b(10^{n-1}-1) + 9b$ (пошто је $b \neq 0$ и $10^{n-1}-1 \neq 0$). Како су a и b ненула цифре, следи $10^{n-1}-1 < 5b(10^{n-1}-1) + 9b = 9a \leq 81$, па је $n = 2$. Следи $a = 6b$, па како су a и b ненула цифре, мора бити $b = 1$ и $a = 6$. Уређена тројка $(n,a,b) = (2,6,1)$ јесте решење јер је $60^2 + 11^2 = 61^2$.

Задатак 71. *Постоје ли цифре a и b ($a \neq 0$) такве да је број $\overline{abbabbaabaab}$ у декадном запису квадрат природног броја?*

(Државно такмичење 2021. II разред, Б категорија)

Решење. Означимо $A = \overline{abbabbaabaab}$ и претпоставимо да је дати број потпун квадрат. Збир цифара броја A једнак је $6(a+b)$, па је A дељив са 3, а како је A потпун квадрат, следи да је дељив и са 9, па $9 \mid 6(a+b)$, одакле следи да $3 \mid a+b$.

Даље је $A = 100100110110a + 110011001001b = 11(9100010010a + 10010000091b)$, па је A дељив са 11, па мора бити дељив и са 11^2, одакле следи да $11 \mid 9100010010a + 1001000091b$. Како је $9100010010 \equiv (0+0+1+0+1)-(1+0+0+0+9) \equiv 3 \pmod{11}$ и $1001000091 \equiv (1+0+0+1+0)-(9+0+0+0+1) \equiv 3 \pmod{11}$, следи да је $9100010010 = 11k+3$ и $1001000091 = 11l+3$ за $k, l \in \mathbb{Z}$. Даље следи да $11 \mid 11(ka+lb)+3(a+b)$, одакле следи да $11 \mid 3(a+b)$, тј. $11 \mid a+b$. Из $3 \mid a+b$ и $11 \mid a+b$ следи да $33 \mid a+b$, што није могуће. Дакле, цифре a и b не постоје.

Задатак 72. *Дешифровати сабирање*

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & О & К & Р & У & Ж & Н & О \\
+ & & & Д & О & Б & Р & О \\
+ & & & Д & О & Б & Р & О \\
+ & & & Б & Р & А & В & О \\
+ & & & Б & Р & А & В & О \\
\hline
 & Д & Р & Ж & А & В & Н & О
\end{array}
$$

ако је познато да истим словима одговарају исте а различитим словима различите цифре, и притом је Р непарна цифра а В је парна цифра.

(Окружно такмичење 2016. III разред, Б категорија)

Решење. Из последње колоне, како се 5·О завршава са О, закључујемо да цифра О може бити 0 или 5, а како се О појављује и као почетна цифра првог сабирка, следи да мора бити О = 5.

Из неједнакости

$$5000000 < \text{ОКРУЖНО} + \text{ДОБРО} + \text{ДОБРО} + \text{БРАВО} + \text{БРАВО}$$
$$< 6000000 + 400000 = 6400000$$

следи да је $5000000 <$ ДРЖАВНО < 6400000, па следи Д $= 5$ или Д $= 6$, али како је цифра 5 већ искоришћена, мора бити Д $= 6$. Приметимо да из последње неједнакости следи и Р < 4, па користећи то и познате цифре, добијамо

$$\begin{gathered}\text{5КРУЖН5} + \text{65БР5} + \text{65БР5} + \text{БРАВ5} + \text{БРАВ5}\\ < 5940000 + 2 \cdot 66000 + 2 \cdot 100000 = 6272000,\end{gathered}$$

одакле следи да је 6РЖАВНО < 6272000, па је Р ≤ 2. Како је по услову задатка Р непарна цифра, следи Р $= 1$.
Посматрајмо сада претпоследњу колону (у којој постоји пренос 2 из последње колоне); добијамо да се $2 +$ Н $+ 1 + 1 +$ В $+$ В завршава са Н, односно да се $4 + 2$В завршава цифром 0, тј. 2В се завршава цифром 6, одакле је В $= 3$ или В $= 8$. Како је по услову задатка В парна цифра, следи В $= 8$.
Из неједнакости

$$\begin{gathered}6100000 < \text{ДРЖАВНО} = \text{5К1УЖН5} + \text{65Б15} + \text{65Б15} + \text{Б1А85} + \text{Б1А85}\\ < \text{5К20000} + 2 \cdot 66000 + 2 \cdot 100000 = \text{5К20000} + 332000\end{gathered}$$

следи да је 5К20000 > 5768000, одакле закључујемо да је К $= 8$ или К $= 9$, а како је цифра 8 већ искоришћена, следи К $= 9$. Одавде закључујемо да је пренос из пете колоне здесна у шесту једнак 2.
У другој колони је $2 +$ Н $+1 + 1 + 8 + 8 = 20 +$ Н, па је пренос у трећу колону једнак 2. Из треће колоне имамо да се збир 2+Ж+2Б+2А завршава цифром 8, односно, тај збир је паран, па следи да је цифра Ж парна, па Ж $\in \{0, 2, 4\}$. Пренос из четврте у пету колону може бити 1 или 2, будући да у четвртој колони за сада имамо У $+ 5 + 5 + 1 + 1$ плус потенцијални пренос из треће колоне, што све заједно не може премашити 29. Како се пренос из четврте колоне сабран са $1 + 6 + 6 + 2$Б завршава цифром Ж која је парна, следи да тај пренос мора бити једнак 1.
Сада из пете колоне имамо $1 + 1 + 6 + 6 + 2$Б $= 20 +$ Ж, тј. 2Б $= 6 +$ Ж. Заменом могућих вредности за Ж, добијамо (Ж, Б) $\in \{(0, 3), (2, 4), (4, 5)\}$, при чему последња могућност отпада јер је цифра 5 већ искоришћена.
Ако је (Ж, Б) $= (0, 3)$, тада у трећој колони имамо да се збир $2 + 0 + 3 + 3$+2А завршава цифром 8, тј. да се 2А завршава цифром 0, одакле следи А $= 0$ или А $= 5$, али обе цифре 0 и 5 су већ искоришћене, па то није могуће. Дакле, мора бити (Ж, Б) $= (2, 4)$.

Сада из треће колоне имамо да се збир $2+2+4+4+2\text{А}$ завршава цифром 8, тј. $12+2\text{А}$ се завршава цифром 8, одакле следи да је $\text{А}=3$ или $\text{А}=8$, а како је цифра 8 већ искоришћена, мора бити $\text{А}=3$.
Из четврте колоне (уз пренос 1 из треће колоне) имамо да се збир $1+\text{У}+5+5+1+1$, тј. $13+\text{У}$ завршава цифром 3, одакле следи да мора бити $\text{У}=0$. Остаје још $\text{Н}=7$, као једина неискоришћена цифра. Дакле, решење је:

$$\begin{array}{cccccccc} & 5 & 9 & 1 & 0 & 2 & 7 & 5 \\ + & & & 6 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ + & & & 6 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ + & & & 4 & 1 & 3 & 8 & 5 \\ + & & & 4 & 1 & 3 & 8 & 5 \\ \hline & 6 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 & 5 \end{array}$$

Задатак 73. *Ако је*

$$42! = 1405006ab77528798985431426062445115699363840000000000,$$

одредити непознате цифре a и b.

(Општинско такмичење 2022. IV разред, Б категорија)

Решење. Како је 42! дељиво са 9, следи да је и збир цифара овог броја дељив са 9, одакле следи да $9 \mid a+b+187$, односно, $9 \mid a+b+7$. Како су a и b цифре, важи $0 \leq a+b \leq 18$, па из $9 \mid a+b+7$ следи да је $a+b=2$ или $a+b=11$. Како је 42! дељиво са 11, следи да је број добијен као разлика збира цифара на непарним и збира цифара на парним местима у декадном запису броја 42! дељив са 11, одакле следи да $11 \mid a-b+33$, односно $11 \mid a-b$. Како су a и b цифре, важи $-9 \leq a-b \leq 9$, па из $11 \mid a-b$ следи да мора бити $a=b$. Сада је јасно да не може бити $a+b=11$, па је $a+b=2$, одакле, користећи чињеницу да је $a=b$, следи $a=b=1$.

Глава 4

Закључак

У овом раду сам покушала да, кроз задатке са математичких такмичења, представим методе за решавање проблема дешифровања рачунских операција. Свесна чињенице да је искуство добијено вежбањем важан фактор при решавању оваквих проблема, потрудила сам се да прикупим што већи број различитих такмичарских задатака за узраст од трећег разреда основне школе (када се ученици први пут сусрећу са математичким такмичењима) па све до краја средњошколског образовања. Својеврсна збирка задатака, која је овим путем настала, може послужити будућим такмичарима, њиховим наставницима али и свим заљубљеницима у математику који нису нужно математичари.

Идеја ми је била и да подсетим на важност игре и креативности у математици. Верујем да повременим укључивањем оваквих и сличних занимљивих проблема у редовну наставу можемо утицати на популаризацију математике и учинити наставу динамичнијом.

Надам се да ће ова збирка испунити своје циљеве и свима који је буду користили служити на радост!

Библиографија

[1] В. Андрић, *Бројевни ребуси*, Математички лист, бр. 6, Друштво математичара Србије, Београд 1998.

[2] Р. Тошић, *Још о дешифровању ребуса*, Математички лист, бр. 1, Друштво математичара Србије, Београд 2018

[3] P. Mladinić, *Rebusi*, Matka - časopis za mlade matematičare, br. 65, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 2008/2009.

[4] Државна комисија за математичка такмичења ученика основних школа, *1100 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 2012-2021. године*, Материјали за младе математичаре, св. 54, Друштво математичара Србије, Београд 2021.

[5] Републичка комисија за математичка такмичења ученика основних школа, *1100 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 2006-2015. године*, Материјали за младе математичаре, св. 54, Друштво математичара Србије, Београд 2015.

[6] Републичка комисија за математичка такмичења ученика основних школа, *1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1998-2007. године*, Материјали за младе математичаре, св. 31, Друштво математичара Србије, Београд 2007.

[7] Такмичења из математике ученика средњих школа, доступно на `https://dms.rs/matematika-srednje-skole/`

[8] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре, св. 15, Друштво математичара Србије, Београд 2021.

Биографија аутора

Јована Маловић (*Лесковац, Србија, 11. септембар 1992.*) је дипломирани професор математике и рачунарства Универзитета у Београду. Завршила је Гимназију у Лесковцу, природно-математички смер, 2011. године. Исте године уписала је Математички факултет у Београду, а по завршетку основних студија уписује мастер студије на истом факултету.

Од 2017. до 2021. године ради у школи програмирања за децу, *Kliker IT centar za decu*, као предавач на курсевима Scratch, App Inventor, Роботика и Веб програмирање.

Током првог полугодишта 2020. године ради у *Савременој гимназији у Београду* као професор математике и информатике и рачунарства.

Од 2021. године ради у *ОШ „Браћа Барух" у Београду* као професор математике и информатике и рачунарства.