

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Petar Kostić

HIDRODINAMIČKA I SINHROTRONSKA
RADIO-EVOLUCIJA OSTATAKA
SUPERNOVIH U NEHOMOGENOJ
MEĐUZVEZDANOJ SREDINI

doktorska disertacija

Beograd, 2023.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Petar Kostić

HYDRODYNAMIC AND RADIO
SYNCHROTRON EVOLUTION OF
SUPERNOVA REMNANTS IN NON-UNIFORM
INTERSTELLAR MEDIUM

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2023.

Mentor:

dr Branislav VUKOTIĆ, naučni savetnik
Astronomska opservatorija, Beograd

Članovi komisije:

prof. dr Dejan UROŠEVIĆ, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

prof. dr Bojan ARBUTINA, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Slađana KNEŽEVIĆ, naučni saradnik
Astronomska opservatorija, Beograd

dr Dušan ONIĆ, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: _____

„Why do stars fall down from the sky

Every time you walk by?

Just like me, they long to be

Close to you”

Carpenters – Close to you

(Kristini)

„Što da pričam, da te učim,

biće bolje da te ljubim”

Arsen Dedić – Sine moj

(Oliveru)

Zahvalnica

Uprkos mom višegodišnjem učenju i samostalnom radu na ovoj doktorskoj disertaciji, moram da istaknem zasluge ljudi bez čije pomoći i podrške ovaj rad ne bih uspeo da završim.

Pre svih, zahvalio bih se svom mentoru i prijatelju dr Branislavu Vukotiću, koji mi je tokom celog istraživanja pružao profesionalnu i moralnu podršku. Od početnog oblikovanja ideje za rad, preko ekspresnog kursa programiranja u C-u i kreiranja grafičkih prikaza, debugovanja kodova, tumačenja rezultata, i neiscrpnih diskusija o mogućim tokovima istraživanja, Bane je bio uz mene. Takođe, onda kada je to bilo potrebno, sebi svojstvenim motivacionim pristupom bi mi dao vetar u leđa da rešim probleme koji su se u pojedinim trenucima činili suviše teškim ili nerešivim.

Posebnu zahvalnost dugujem sjajnoj ekipi kolega koji su mi često objašnjavali teoriju i fenomene vezane za evoluciju ostataka supernovih i bili izvrstan korekcionni faktor sadržaja disertacije, čitajući rad nemali broj puta. Ovde pre svega mislim na prof. dr Dejana Uroševića, veterana ove naučne oblasti, koji je uvek spreman da pomogne i odgovori na sva pitanja i nedoumice, i prof. dr Bojana Arbutinu, koji mi je bio nezaobilazan sagovornik i saradnik prilikom razvijanja pojedinih teorijskih modela. Takođe, zahvaljujem se dr Marku Pavloviću, dr Vladimiru Zekoviću, dr Salvatoreu Orlandu, dr Olegu Petruku, doc. dr Dušanu Oniću i dr Slađani Knežević na uvek konstruktivnim razgovorima i savetima.

Želeo bih da pomenem i kolege sa Astronomske stanice Vidojevica, Miodraga Sekulića i dr Olivera Vincea, jer su dugogodišnji rad i druženje sa njima boravak na Vidojevici, tokom kojeg je dobar deo ove disertacije i nastao, učinili prijatnim ambijentom za rad.

Na kraju, najveću zahvalnost dugujem svojim dvema porodicama. Roditeljima Ilonki i Zdravku, i bratu Mihailu, jer su zaslužni za to kakav sam čovek postao, a supruzi Kristini i sinu Oliveru, mojim voljenima, na ljubavi i sreći koju mi pružaju.

Naslov disertacije: Hidrodinamička i sinhrotronska radio-evolucija ostataka supernovih u nehomogenoj međuzvezdanoj sredini

Sažetak: Modeli sinhrotronske radio-emisije ostataka supernovih (OSN) pretpostavljaju homogenu gustinu ispred udarnog talasa, pa se tako i evolucija njihove luminoznosti najčešće proučava u takvoj sredini, preko zavisnosti površinskog sjaja od prečnika, tzv. Σ - D relacije. Istraživanja u ovoj oblasti su značajna zbog boljeg uvida u evoluciju OSN, razvijanje modela proizvodnje zračenja, kao i metoda za određivanje udaljenosti do OSN. Ovo nije lak zadatak jer je rasturanje tačaka Σ - D uzorka OSN u Mlečnom putu veoma veliko.

U disertaciji se razmatra drugačiji pristup Σ - D relaciji (koja je uobičajeno tretirana kao stepena funkcija), pretpostavljajući da nehomogena sredina u okolini zvezda značajno utiče na njen oblik i nagib, koji može da varira tokom širenja OSN. Time struktura okolne gustine postaje novi važan faktor čiji uticaj mora biti istražen. Razvijen je numerički kod za hidrodinamičke (HD) simulacije, kao i model emisije zračenja. Izvedene su 3D HD simulacije u različitim nehomogenim sredinama, uključujući mehure niske gustine i brojne grudvaste modele. Na osnovu rezultata simulacija je razvijen semi-analitički 3D sfernosimetrični model HD i Σ - D evolucije OSN u grudvastoj sredini, koji je korišćen za generisanje velikih Σ - D uzoraka.

Rezultati pokazuju da nakon ulaska u grudvastu sredinu sjaj OSN poraste, ali se potom Σ - D nagib dodatno ustrmljuje, skraćujući trajanje evolucije sjaja. Uprkos evidentnom porastu nagiba u grudvastoj sredini, Galaktički uzorak pokazuje poravnanje prosečnog Σ - D nagiba na ≈ 13 - 50 pc. Analizom generisanih uzoraka OSN u grudvastoj sredini zaključeno je da značajno Σ - D poravnanje i rasturanje tačaka u Galaktičkom uzorku potiče od sporadičnih skokova emisije pojedinačnih OSN u ograničenom intervalu njihovih prečnika. Potrebne su dodatne analize selekcionih efekata da bi se ovo istražilo.

Ključne reči: međuzvezdana sredina: ostaci supernovih, međuzvezdana sredina: oblaci, hidrodinamika, udarni talasi, mehanizmi zračenja: netermalni, metodi: numerički, metodi: analitički

Naučna oblast: astrofizika

Uža naučna oblast: ostaci supernovih

Dissertation title: Hydrodynamic and radio synchrotron evolution of supernova remnants in non-uniform interstellar medium

Abstract: The models of radio synchrotron emission of supernova remnants (SNRs) imply uniform density ahead of shock wave, so the evolution of luminosity is usually studied in such an environment, most often through the surface-brightness-to-diameter dependence, the Σ - D relation. This field aims to better understand the SNR evolution, the emission models, but also the methods for determining their distance. It is not an easy task because of a very large scatter in the Σ - D Milky Way sample.

The dissertation puts a different perspective at the Σ - D relation (usually treated as power-law function), assuming that non-uniform environment around the stars considerably affects its shape and slope, that may vary during the SNR expansion. It makes the ambient density structure an important factor whose impact must be investigated. The numerical code for hydrodynamic (HD) simulations and the emission model were developed. The 3D HD simulations were performed in different non-uniform environments, including low-density bubbles and a variety of clumpy models. Based on the simulation results, a semi-analytical 3D spherically-symmetric model of HD and Σ - D evolution of SNRs in clumpy medium was developed, which is used to generate large Σ - D samples.

The results show that after entering the clumpy medium the SNR brightness enhances, but afterward the Σ - D slope steepens, shortening the brightness evolution lifetime. Despite the evident increase in slope in clumpy medium, the Galactic sample average slope flattens at ≈ 13 -50 pc. After analyzing the generated SNR samples in clumpy medium it is concluded that the significant flattening and scatter in Galactic sample originates in sporadic emission jumps of individual SNRs in a limited diameter interval. The additional analyses of selection effects are needed to investigate these issues.

Key words: interstellar medium: supernova remnants, interstellar medium: clouds, hydrodynamics, shock waves, radiation mechanisms: non-thermal, methods: numer-

ical, methods: analytical

Scientific field: astrophysics

Scientific subfield: supernova remnants

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Σ - D relacija	6
1.2	Hidrodinamička evolucija	7
1.3	Ubrzavanje čestica	8
1.4	OSN u nehomogenoj sredini	10
2	Hidrodinamičke simulacije	13
2.1	Jednačine dinamike fluida	14
2.2	Numerički metodi	16
2.3	MUSCL-Hancock metod	17
2.3.1	Rekonstrukcija	18
2.3.2	Evolucija	21
2.3.3	Rimanov problem	21
2.3.4	Vremenski korak	25
2.3.5	Pritisak na granicama ćelije i očuvanje pozitivnosti	26
2.3.6	Granični uslovi	27
2.4	Testovi validacije	28
2.4.1	Test I - Sodov problem talasne cevi	29
2.4.2	Test II - Razbijanje sfernog oblaka pod udarnim talasom	30
2.4.3	Test III - Širenje grudvičastog materijala odbačenog eksplozijom	32
3	Model emisije	37
4	Opis simulacija ostataka supernovih	42
4.1	Početni uslovi OSN	42

4.1.1	Sedovljevo rešenje	43
4.2	Modeli međuzvezdane materije	45
4.2.1	Homogena sredina	45
4.2.2	Mehur niže gustine	46
4.2.3	Grudvasta sredina	46
4.3	Detekcija i određivanje lokalnih osobina udarnog talasa	48
4.3.1	Detekcija udarnog talasa	49
4.3.2	Lokalna brzina udarnog talasa	50
4.3.3	Lokalna zapremina detektovanih tačaka	50
5	Semi-analitički model	55
5.1	Tranzicija iz manje u veću gustinu – model mehura	56
5.2	Prostiranje udarnog talasa kroz grudvastu sredinu	60
5.2.1	Premise	60
5.2.2	Osnove modela	62
5.2.3	Površina udarnog talasa	63
5.2.4	Efektivni odnos brzina v_j^*	67
5.2.5	Brzina udarnog talasa nakon ulaska u grudvastu sredinu	70
5.2.6	Ekspanzioni eksponent m	72
6	Rezultati	74
6.1	Homogena sredina – U1. Kalibracija podataka	74
6.2	Mehur niže gustine – LDB2, LDB5, LDB10	75
6.3	Grudvasta sredina – C10, C30, C100	77
7	Diskusija	81
7.1	Međuzvezdana i okozvezdana sredina	81
7.2	Uticao grudvaste sredine na Σ - D zavisnost	82
7.3	Analiza Galaktičkog uzorka OSN	85
7.4	Aproksimacija test-čestice <i>vs.</i> modifikovani udarni talas	89
7.5	Selekcionni efekti	91
8	Siže	94

SADRŽAJ

9 Zaključak	96
Bibliografija	100

Glava 1

Uvod

Ostaci supernovih (OSN) se proučavaju tokom više decenija i mnogi aspekti njihove dinamičke evolucije i mehanizama proizvodnje zračenja su sada poznati ili dovoljno razjašnjeni. Tri faze evolucije OSN: faza dominacije odbačenog zvezdanog materijala, Sedov-Tejlorova faza i radijativna faza, su standardni teorijski koncept njihove dinamičke evolucije (Woltjer, 1972), ali je jasno da faze ne mogu biti strogo razdvojene jedna od druge. Takođe, posmatrani su ostaci čiji su delovi istovremeno u različitim fazama evolucije usled složene strukture okolne sredine ili anizotropije u eksploziji supernovih (SN), npr. ostatak RCW 86 (Vink, 2012). Brojna posmatranja u rendgenskom, optičkom ili radio-domenu dovela su do nekoliko načina na koje se OSN klasifikuju. Uopšteno, oni su podeljeni u dve kategorije: ljuskasti OSN, koji imaju izraženu ljusku, i plerioni, koji zrače iz centralne regije usled rotacionih gubitaka pulsara preostalog nakon eksplozije SN tipa II (npr. masivne B zvezde). Ukoliko plerioni imaju ljusku, ovaj tip OSN se naziva kompozitni. Na osnovu optičke emisije ljuskasti ostaci se dele na one sa izraženim Balmerovim linijama (eng. *Balmer-dominated*) ili linijama kiseonika (eng. *oxygen-rich*). OSN sa izraženim Balmerovim linijama najverovatnije potiču od SN tipa Ia, dok OSN bogati kiseonikom potiču od SN tipa Ib ili Ic, kada udarni talas interaguje sa okozvezdanim materijalom odbačenim sa zvezde-roditelja (masivne O ili Volf-Rajeove zvezde) tokom završnih faza evolucije (Van den Bergh, 1988). Pored ljuskastih i plerionskih/kompozitnih, postoji i treća kategorija – specijalni slučaj, a to su OSN mešane morfologije (eng. *mixed-morphology*), koji pored ljuske poseduju centralnu rendgensku komponentu koja

potiče od prebrisanog materijala. Oni obično evoluiraju u složenim i gustim sredinama (npr. molekulskim oblacima).

Nakon eksplozije supernove, odbačeni zvezdani materijal se u početku gotovo slobodno kreće, sabijajući retku okozvezdanu materiju ispred sebe (faza slobodnog širenja). Na granici između sabijenog materijala i neporemećene sredine formira se udarni talas. Vremenom, kada odbačeni materijal počne da gubi dinamičku dominaciju nad nagomilanom materijom ispred sebe i krene da usporava, formira se povratni udarni talas koji se kreće unazad, dok prednji udarni talas nastavlja da se kreće u radijalnom smeru, takođe usporavajući (Sedov-Tejlorova faza). Ovaj talas takoreći „jede” materiju ispred sebe, ostavljajući iza sebe kompresovanu i jonizovanu materiju, sa ubrzanim česticama i pojačanim magnetnim poljem, što su osnovni preduslovi za pojavu sinhrotronskog zračenja. Kompresija gustine i magnetnog polja iza udarnog talasa zavisi od njegove jačine, koju karakteriše Mahov broj, tj. odnos brzine udarnog talasa i brzine zvuka u sredini u kojoj se on prostire ($M = v_s/a_0$). Udarni talas se smatra jakim kad je $M \gg 1$, a približno je jak već na $M \approx 10$ – 20 (kod najmlađih ostataka $M \sim 1000$). Ipak, prema Rankin-Igonioovim uslovima za jak udarni talas, najveća kompresija koja može da se dostigne iza udarnog talasa iznosi $X = 4$, a kod slabijih udarnih talasa ova vrednost je manja. Ovo znači da, bez obzira kolika je gustina ili magnetno polje ispred udarnog talasa, postoji ograničenje njihovog maksimalnog uvećanja iza udarnog talasa. Ograničenje važi bez obzira na jačinu udarnog talasa, odnosno na vrednost Mahovog broja, ali zavisi od odnosa specifičnih toplota ili adijabatskog indeksa, $\gamma = c_p/c_v$, gde su c_p i c_v toplotni kapaciteti pri konstantnom pritisku i zapremini, respektivno. U standardnoj aproksimaciji monoatomskog gasa adijabatski indeks je $\gamma = 5/3$, za koji je izvedena gore navedena maksimalna kompresija ($X = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$).

Sinhrotronska emisija nastaje kada se (ultra)relativističke naelektrisane čestice kreću ubrzano u magnetnom polju. Prolaskom udarnog talasa kroz neutralnu sredinu dolazi do sudarne jonizacije čestica (za razliku od HII regiona koji su fotojonizacione emisije magline), pa iza njega ostaje jonizovani gas. Međutim, o načinu na koji se materija u udarnom talasu zagreva do visokih energija i jonizuje ne zna se dovoljno, ali se pretpostavlja da ključnu ulogu imaju fluktuacije u elektromagnet-

nom polju. Problem je u tome što je srednji slobodni put za sudarne interakcije u retkoj međuzvezdanoj sredini suviše dugačak u odnosu na dimenzije mladih ostataka, tako da zagrevanje plazme ne može biti posledica Kulonovih interakcija. Zato se pretpostavlja da fluktuacije električnog i magnetnog polja dovode do „kolektivnih interakcija” među česticama (Vink, 2012), zbog čega se udarni talasi OSN nazivaju bezsudarnim udarnim talasima. Prema opšteprihvaćenoj teoriji, protoni i elektroni u gasu se ubrzavaju u procesu koji je poznat kao Fermijevo ubrzanje I reda. Ovaj proces ubrzava čestice prebacujući ih s jedne strane udarnog talasa na drugu, pri čemu im se uzastopno uvećava energija, stvarajući kosmičke zrake (KZ). Ubrzavajući se na udarnim talasima, čestice bivaju zahvaćene pojačanim magnetnim poljima oko udarnog talasa, emitujući sinhrotronsko zračenje u radio-području elektromagnetnog (EM) spektra, koje je moguće detektovati radio-teleskopima¹. Ostaci supernovih koji na ovaj način dominantno zrače iz regije udarnog talasa predstavljaju ljuskasti tip. Zbog veoma složene prirode njihove evolucije, u ovom radu se razmatra jedino ovaj tip OSN.

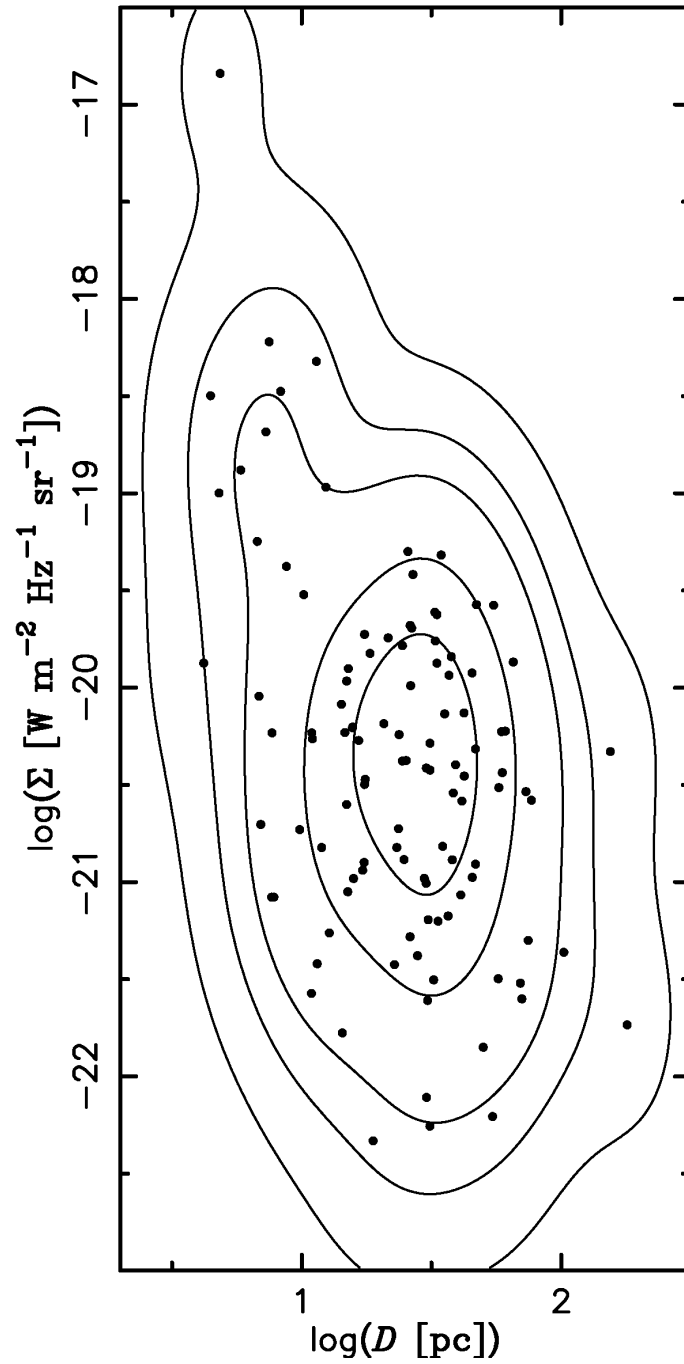
Pogodna osobina radio-talasa je njihova slaba interakcija sa česticama gasa na putu do detektora, pa se detektovana energija zračenja može aproksimirati ukupnom energijom koja je emitovana ka detektoru. Zahvaljujući tome, definisana je tzv. Σ - D relacija kao posmatrački fenomen, gde je Σ površinski sjaj ostatka na određenoj radio-frekvenciji (npr. 1 GHz), a D njegov prečnik. Ova relacija ima oblik $\Sigma \propto D^{-\beta}$ (detaljnije će biti opisana u poglavlju 1.1). S obzirom da površinski sjaj predstavlja luminoznost ostatka raspoređenu po njegovoj projektovanoj površini i prostornom uglu, trivijalna Σ - D relacija, u kojoj bi luminoznost bila konstantna, bi imala zavisnost $\Sigma \propto D^{-2}$ (Arbutina et al., 2004). Eksponent -2 u tom slučaju predstavlja širenje projektovane površine ostatka sa porastom prečnika. Međutim, kako luminoznost nije konstantna zbog toga što efikasnost ubrzavanja čestica zavisi od brzine udarnog talasa, tako i eksponent u prethodnoj jednačini varira i uglavnom je niži od -2 . Teorijske i empirijske Σ - D relacije imaju nagibe u intervalu $\beta = 2-6$ (videti Kostić et al., 2016, i njihove reference). Istraživanja relacije za ostatke u

¹Postoje OSN koji takođe emituju netermalno rendgensko zračenje sinhrotronskog porekla (Berezhko & Völk, 2004).

Mlečnom putu su pokazala značajno rasturanje tačaka u Σ - D ravni, bilo da se koristi vertikalno ili ortogonalno linearno fitovanje (Pavlović et al., 2013, 2014; Vukotić et al., 2019). Galaktički uzorak OSN koji će biti korišćen u ovoj disertaciji preuzet je iz rada Vukotića sa saradnicima (Vukotić et al., 2019, u daljem tekstu V19) i prikazan na Slici 1.1. Na grafiku je prikazano 110 ostataka iz ovog rada, a preko njih su ucrtane konture raspodele gustine verovatnoće koja je računata metodom iz rada Dojna (Duin, 1976). Ovaj metod vrši sumiranje normalnih (Gausovih) raspodela gustine verovatnoće centriranih u svakoj tački uzorka (tzv. kernel funkcija), gde se širina raspodele, odnosno parametar ravnjanja, računa na osnovu međusobnog rastojanja tačaka u uzorku. Gustina verovatnoće je normirana tako da je njena maksimalna vrednost jednaka jedinici, a konture na slici predstavljaju mesta sa gustinama verovatnoće 0.025, 0.1, 0.2, 0.5 i 0.8. Ovakva raspodela gustine verovatnoće će biti korišćena prilikom poređenja modelovanih i posmatranog uzorka OSN u Glavi 7. Tri očigledna autlajera (eng. *outlier*, odnosno tačke koje značajno odstupaju) u ovom uzorku, koji se nalaze na najnižim gustinama verovatnoće su izbačeni prilikom analiza u ovom radu.

Pored brzine udarnog talasa, koja prvenstveno određuje jačinu emisije sinhrotronskog zračenja, najvažniji činioci ove emisije su gustina materije (koncentracija čestica) i jačina magnetnog polja sredine. Sinhrotronska emisija je srazmerna obeima veličinama. Posmatranja pokazuju da magnetno polje međuzvezdane materije (MZM) u Galaksiji na većim skalama ne odstupa mnogo od svoje prosečne vrednosti, oko $5 \mu\text{G}$, osim u slučajevima kada se kompresuje u gustim gasnim grudvama usled važenja zakona održanja magnetnog fluksa (tzv. efekta zamrznutosti). Prema tome, ostaje gustina materije kao najvažniji činilac jačine sinhrotronske radio-emisije udarnih talasa OSN, zbog toga što ona ima izrazito širok raspon mogućih vrednosti u galaktičkom okruženju, čak 6–7 redova veličine. Treba pomenuti da gustina materije takođe ima presudan uticaj na brzinu udarnog talasa OSN. Zbog toga su gustina ambijentalne sredine i njena raspodela od izuzetnog značaja za proučavanje evolucije sjaja ostataka supernovih.

Naredna četiri poglavlja predstavljaju rekapitulaciju teorijske pozadine iz oblasti izučavanja OSN koje se tiču ove disertacije. Kako bi bio postavljen kontekst



Slika 1.1: Uzorak od 110 ostataka supernovih posmatranih u Mlečnom putu. Konture predstavljaju raspodelu gustine verovatnoće i objašnjene su u tekstu. Podaci su preuzeti iz rada [V19](#).

istraživanja dat je uvod na temu Σ - D relacije, hidrodinamičke evolucije OSN, ubrzanja čestica na udarnom talasu i implikacija koje nosi nehomogenost sredine u kojoj evoluiraju OSN.

1.1 Σ - D relacija

Gore pomenuta relacija između površinskog radio-sjaja (Σ_ν) i prečnika ostatka (D) se može koristiti kao jedna od metoda za procenu udaljenosti do posmatranih OSN, kao i njihovog evolucionog statusa (Urošević, 2020), zbog toga što se površinski sjaj i uglovni prečnik dobijaju iz posmatranja. Ova relacija je predložena od strane Šklovskog (Shklovskii, 1960):

$$\Sigma_\nu(D) = AD^{-\beta}, \quad (1.1)$$

a takođe se može predstaviti kao log-log linearna funkcija:

$$\log \Sigma_\nu(D) = \log A - \beta \log D, \quad (1.2)$$

sa odsečkom $\log A$ i nagibom β . Parametar A zavisi od osobina supernove kao što su energija eksplozije E_0 , izbačena masa (eng. *ejected mass*) M_e , tip eksplozije SN, ali takođe zavisi od gustine i magnetnog polja okolne sredine, ρ_0 i B_0 . Uobičajena je pretpostavka da nagib β ne zavisi od ovih parametara, već zavisi od procesa ubrzanja čestica, kroz spektralni indeks radio-emisije α , i evolucije magnetnog polja. U radu Arbutine sa saradnicima (Arbutina et al., 2004) je sugerisano da bi nagib Σ - D relacije mogao da zavisi od gustine ambijentalne sredine i/ili njene prostorne raspodele, kao i od starosti ostatka. Arbutina i Urošević (Arbutina & Urošević, 2005) ističu ključnu ulogu ambijentalne gustine u evoluciji OSN, a posebno u disperziji Σ - D relacije. Ukoliko ambijentalna gustina zaista ima dominantan uticaj na sjaj OSN, onda bi heterogenost sredine kroz koju se ostaci šire mogla da ima značajan uticaj na oblik i nagib Σ - D relacije pojedinačnih ostataka. Dodatno, potencijalna $\rho(D)$ zavisnost bi mogla da rezultuje drugačijom $\Sigma(D)$ zavisnošću od one koja se dobija u homogenoj sredini. U notaciji koja je data u jednačinama (1.1) i (1.2) možemo govoriti o rastu ili „ustrmljivanju” nagiba sa porastom vrednosti β , jer je Σ

obrnuto proporcionalno sa D . Dakle, evolucija površinskog radio-sjaja predstavlja ozbiljan problem koji zavisi od mnogo faktora. Đurić i Sikvist (Đuric & Seaquist, 1986) ističu da postojanje posmatrane Σ - D relacije znači da je evolucija OSN očigledno dominantnija od varijacija drugih faktora unutar posmatranog uzorka, što pruža dovoljan razlog za njeno proučavanje. S druge strane, pojedini autori (Berkhuijsen, 1986; Bandiera & Petruk, 2010) daju drugačiju interpretaciju posmatračkih podataka, prema kojoj i površinski sjaj i prečnik ostatka zavise od ambijentalne gustine: sjajni ostaci malog prečnika evoluiraju pretežno u gustoj sredini, a oni koji uspeju da se rašire do velikih prečnika su ostaci koji evoluiraju u niskim gustinama pa otuda imaju i nizak sjaj.

1.2 Hidrodinamička evolucija

Faza slobodnog širenja se karakteriše dinamikom koju diktira materijal odbačen eksplozijom. Ovaj materijal se širi slobodno, praktično bez usporavanja, kroz mnogo ređu okozvezdanu sredinu. Tek kada prebrisana masa okolnog materijala postane uporediva sa odbačenom masom, počinje faza tranzicije u Sedovljevu fazu (poznatu kao adijabatska faza) kroz koju se ostatak širi po Sedov-Tejlorovom zakonu (Sedov, 1959):

$$R(t) = 1.15 \left(\frac{E_0 t^2}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad (1.3)$$

gde $R(t)$ predstavlja zavisnost poluprečnika ostatka od vremena, a E_0 i ρ_0 su energija eksplozije i gustina okolne homogene sredine, respektivno. Izvod ove jednačine:

$$v_s(t) = \frac{2}{5} \frac{R(t)}{t} \propto t^{-3/5} \propto R^{-3/2}, \quad (1.4)$$

daje brzinu udarnog talasa koja opada sa vremenom i poluprečnikom. Ostatak najduže ostaje u ovoj fazi, u kojoj radijalne raspodele gustine, brzine i pritiska ostaju samo-slične tokom širenja.

Udarni talas predstavlja oštri diskontinuitet koji se kreće i razdvaja dva različita stanja fluida. Tokom širenja u sredini gustine ρ_1 udarni talas kompresuje materiju za ranije pomenuti faktor X . Ovaj proces se može posmatrati u referentnom sistemu vezanom za udarni talas, gde fluid protiče kroz diskontinuitet talasa. Regija ispred

udarnog talasa se naziva „uzvodna” struja, a iza njega je „nizvodna” struja (eng. *upstream* i *downstream*). Ako gustinu, brzinu i pritisak u uzvodnoj regiji obeležimo sa „1”, a u nizvodnoj sa „2”, i brzine transformišemo u referentni sistem udarnog talasa, ($\vec{v}_1 = -\vec{v}_s$), postoje relacije koje povezuju ova dva stanja, izvedene iz zakona održanja mase, impulsa i energije, koje se nazivaju Rankin-Igonioove relacije:

$$\begin{aligned}\rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2, \\ \rho_1 v_1^2 + P_1 &= \rho_2 v_2^2 + P_2, \\ \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}P_1 &= \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}P_2.\end{aligned}\tag{1.5}$$

U simulacijama u ovom radu se gas smatra monoatomskim, pa je adijabatski indeks $\gamma = 5/3$. Iz jednačine (1.5) može se izvesti kompresioni faktor X , kao i odnos pritiska Y (videti npr. [Shu, 1991](#)):

$$\begin{aligned}X &= \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}, \\ Y &= \frac{P_2}{P_1} = \frac{\gamma+1+2\gamma(M^2-1)}{\gamma+1},\end{aligned}\tag{1.6}$$

gde je $M = v_s/a_1$ Mahov broj, a a_1 brzina zvuka ispred udarnog talasa. Za visoke Mahove brojeve $X \rightarrow 4$, pa je ovo maksimalna kompresija koju nemodifikovani i neradijativni talas može dostići. Ako se vratimo u laboratorijski sistem reference gde je $v_1 = 0$, a udarni talas se kreće brzinom v_s , onda:

$$v_2 = \frac{X-1}{X}v_s.\tag{1.7}$$

1.3 Ubrzavanje čestica

Jako sinhrotronsko radio-zračenje iz ljuski OSN predstavlja reprezentativni dokaz ubrzavanja čestica (barem elektrona) na njihovim udarnim talasima. Proces ubrzavanja se uglavnom odvija Fermijevim mehanizmom prvog reda. Kako se naelektrisane čestice reflektuju od magnetnih nestabilnosti „napred–nazad” preko fronta udarnog talasa, pri svakoj refleksiji one dobijaju malo energije. U slučaju „probne čestice” (eng. *test-particle case*), u kojem su same ubrzane čestice energetski beznačajne za uslove skoka na udarnom talasu, pokazano je da je njihova raspodela po energijama

stepeni zakon (videti Reynolds, 2008; Vink, 2012; Arbutina, 2017; Urošević et al., 2019; Vink, 2020):

$$N(E) = KE^{-\Gamma}, \quad \Gamma = \frac{X + 2}{X - 1}, \quad (1.8)$$

gde je X kompresija na udarnom talasu. U nizvodnoj regiji, fluktuacije u turbulენტnom magnetnom polju deluju kao centri rasejanja, dok su u uzvodnoj regiji to Alfenovi talasi pobuđeni energetskim česticama (kosmičkim zracima) koje napuštaju udarni talas. Ovaj mehanizam, poznat kao difuzno ubrzavanje na udarnom talasu (eng. *diffusive shock acceleration*—DSA), razvijen je krajem 70-ih godina prošlog veka (Axford et al., 1977; Krymskii, 1977; Bell, 1978, Blandford & Ostriker, 1978) i široko prihvaćen kao glavni mehanizam za ubrzavanje kosmičkih zraka u OSN, barem do energije reda veličine $\sim 10^{15}$ eV na kojoj se posmatrani spektar KZ ustrmljuje. Važno pitanje koje se i dalje razmatra je ubrizgavanje čestica u sam proces ubrzavanja. Prema jednom objašnjenju, termalna Maksvelova raspodela ima rep supratermalnih protona sa žiromodulusima koji prevazilaze debljinu udarnog talasa. Ipak, pravi problem se odnosi na elektrone koji imaju $\sim m_p/m_e$ puta manji žiromodulus od protona pa nisu u stanju da savladaju udarni talas. S obzirom da u Mlečnom putu u blizini Sunca posmatrani odnos broja elektrona i protona u populaciji KZ iznosi $\sim 10^{-2}$, ova vrednost može poslužiti kao osnova u istraživanjima, kao što je usvojeno u ovom radu.

Ostaci supernovih moraju predati $\sim 10\%$ energije eksplozije kosmičkim zracima (Vink, 2012) da bi bili dominantan izvor Galaktičke populacije KZ gustine energije $\sim 1\text{--}2$ eV cm $^{-3}$. U ovom slučaju čestice ubrzane u DSA procesu ne mogu biti energetski nevažne za udarni talas kao što je slučaj sa probnom česticom. Naprotiv, one imaju dinamički uticaj na udarni talas, kao i značajan udeo u njegovom pritisku (povratna reakcija KZ, eng. *CR back-reaction*, videti Drury, 1983; Malkov & Drury, 2001; Blasi, 2002; Urošević et al., 2019). Nelinearni DSA mehanizam dovodi do formiranja modifikovanog udarnog talasa koji se sastoji od dva strukturalna dela: dinamički prekursor i termalni nemodifikovani udarni talas. Dinamički prekursor predstavlja zonu ispred nemodifikovanog udarnog talasa u kojoj se profili brzine i gustine fluida modifikuju naletom kosmičkih zraka. Iako kompresija na nemodifikovanom udarnom talasu iznosi ≤ 4 (za $\gamma = 5/3$), sa uključenjem prekursora totalna

kompresija (od regije daleko ispred do regije iza udarnog talasa) može biti viša, $X_{\text{tot}} \sim 7\text{--}10$ (Pavlović, 2017).

1.4 OSN u nehomogenoj sredini

Kostić sa saradnicima (Kostić et al., 2016) je postavio hipotezu da bi radijalno opadanje prosečne gustine, koje je svojstveno fraktalno strukturiranoj gustini materije, trebalo da ustrmi prosečan nagib radio Σ – D relacije OSN, u odnosu na teorijski izvedenu relaciju za homogenu sredinu. Autori ovog rada su koristili teorijski izvedenu Σ – D relaciju iz rada Đurića i Sikvista (Duric & Seaquist, 1986), u prilagođenom obliku,

$$\Sigma_{1\text{GHz}} = 4 \cdot 10^{-15} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0.5} D^{-3.5}, \quad (D \gg 1 \text{ pc}), \quad (1.9)$$

gde ρ predstavlja srednju gustinu unutar ostatka prečnika D , a $\rho_0 = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$. Ovo je veoma pojednostavljen pristup jer pored toga što uzima srednju gustinu unutar sfere ostatka, površinski sjaj računa kao stepenu funkciju te gustine. Njihova ideja je da radijalni profil gustine utiče na nagib Σ – D relacije, ukoliko postoji zavisnost $\rho(D)$. U slučaju fraktalne raspodele materije sa fraktalnom dimenzijom D_f , ova zavisnost je $\rho \propto D^{D_f-3}$, pa se korišćenjem jednačine (1.9) dobija:

$$\Sigma \propto D^{0.5(D_f-3)-3.5}, \quad (1.10)$$

što sa uobičajeno korišćenom vrednošću $D_f = 2.6$ za MZM daje $\Sigma \propto D^{-3.7}$.

Međutim, glavni problem Σ – D uzoraka OSN je što se ne mogu opisati prostom linearnom funkcijom, što je posebno izraženo u uzorku Mlečnog puta. Sedovljev zakon iz jednačine (1.3) važi samo ako ostatak evoluiru u homogenoj sredini, pa i u tom slučaju evolucija sjaja sa prečnikom zavisi od kompleksnosti modela emisije i ne mora biti linearna kao u jednačini (1.2). Takođe, energija eksplozije E_0 i okolna gustina ρ_0 nisu iste za sve ostatke iz uzorka, čineći ga podložnim rasturanju po vrednostima Σ . S druge strane, posmatranja su pokazala da mnogi ostaci interaguju sa sredinom koja je nehomogene gustine, a koja može biti i anizotropna.

Jedan od faktora koji narušavaju homogenost okozvezdane materije potiče od same evolucije zvezda. Zvezde gube svoju masu tokom života na glavnom nizu, a

posebno u kasnijim fazama. U zavisnosti od mase zvezde i spektralnog tipa postoji veliki raspon stope gubljenja mase i brzine zvezdanog vetra čije delovanje dovodi do stvaranja mehurova niske gustine oko zvezda, oivičenih gustim ljuskama. Unutar mehura gustina tipično opada sa kvadratom rastojanja, a prečnici mehura mogu da budu u intervalu od nekoliko do nekoliko desetina parseka (Dwarkadas, 2005). Zbog neujednačene brzine vetra po pravcima prostiranja takođe dolazi do turbulentnih kretanja i stvaranja grudvastih nehomogenosti unutar mehura. Ovakvi slučajevi mogu značajno da izmene nagib Σ - D relacije u ranim fazama evolucije OSN, u poređenju sa homogenom raspodelom gustine. Dodatno, u najranijim fazama evolucije postoji i problem vremena ubrzavanja čestica do najviših energija, pa kriva sinhrotronskog radio-sjaja mora imati fazu rasta (videti Pavlović et al., 2018, u daljem tekstu P18). Dalje, kada udarni talas naiđe na gušću sredinu izvan mehura, ili na njegovu ljusku, dolazi do nagle promene u gustini koja se mora odraziti na evoluciju sjaja i eventualni prelom u Σ - D evoluciji. Upravo na uzorku sa Slike 1.1 se primećuje karakteristična „grba” pozicionirana na prečnicima od ~ 20 – 30 pc ($\log D \approx 1.5$), a u kojoj preovlađuju OSN mešane morfologije koji često evoluiraju u sredinama molekulskih oblaka. Ta struktura bi mogla biti indikator ovih preloma.

Predmet istraživanja ove doktorske disertacije je uticaj grudvaste sredine na evoluciju OSN i njegovu radio-emisiju. Cilj je otići korak dalje od jednodimenzionog shvatanja gustine kao radijalnog profila i istražiti uticaj koji pojedinačne strukture oblaka imaju na geometriju i dinamiku širenja udarnog talasa i ostatka u celini. Iz tog razloga ovde nije naglašeno istraživanje radijalnog profila gustine (koja će, usrednjena na skali značajno većoj od grudvi, biti konstantna). Heterogena sredina je u ovom radu modelirana kao ansambl grudvi različitih gustina i prostornog udela, koji u datim opsezima parametara aproksimira nehomogenosti, poput turbulentne sredine ili molekulskih oblaka, koje su prisutne u MZM. Grudvasta sredina se prostire iza određenog radijusa, unutar kojeg je materija homogena, imitirajući okozvezdani mehur niske gustine. Kada udarni talas naiđe na grudve usporiće, dok će drugi delovi nastaviti da se obavijaju oko grudvi. Na ovaj način strukturne nehomogenosti „gužvaju” udarni talas, stvarajući niz efekata koji na prvi pogled nisu očigledni. Na primer, širenje ostatka ne usporava na isti način kao u slučaju homogene sredine iste

prosečne gustine. Takođe, površina udarnog talasa raste jer joj je narušena sferičnost, itd. Svi ovi efekti će biti proučeni i opisani u ovom radu, a rezultat njihovog razumevanja će, u kombinaciji sa modelom emisije, biti model Σ - D evolucije, koji će omogućiti statističku interpretaciju specifičnosti oblika i nagiba Galaktičke Σ - D relacije.

U okviru doktorske disertacije je razvijen novi numerički kod za hidrodinamičke simulacije koji je predstavljen u radu Kostića (Kostić, 2019). U Glavi 2 je opisan ovaj kod i prikazani su testovi njegove validacije. U Glavi 3 je predstavljen model sinhrotronske radio-emisije na udarnom talasu OSN, koji je korišćen u simulacijama. Opis simulacija sa karakteristikama međuzvezdane sredine, kao i metod detekcije udarnog talasa u simulacijama, dati su u Glavi 4. Rezultati simulacija su korišćeni za postavljanje semi-analitičkog modela hidrodinamičke i Σ - D evolucije OSN u grudvastoј sredini, koji je predstavljen u Glavi 5. Ovaj model je korišćen kao alat za generisanje velikih uzoraka OSN u različitim sredinama. Rezultati simulacija su prikazani u Glavi 6, a u Diskusiji (Glava 7) se analiziraju implikacije koje rezultati ovog rada imaju na interpretaciju posmatranog Galaktičkog uzorka OSN, u pogledu njihove raspodele na Σ - D dijagramu. U ovoj glavi je takođe dat kritički osvrt na korišćene metode i njihova ograničenja.

Glava 2

Hidrodinamičke simulacije

Ostaci supernovih se kao i mnogi hidrodinamički fenomeni u fizici mogu proučavati korišćenjem numeričkih simulacija. Računarska dinamika fluida poznaje dve glavne vrste simulacija, one zasnovane na česticama (tzv. Lagranžov pristup) i mreži (Ojlerov pristup). U Lagranžovim čestičnim simulacijama fluid se modeluje kao skup čestica različitih brzina i osobina, dok je kod Ojlerovih simulacija fluid raspoređen fiksnom ili adaptivnom mrežom u čijim čvorovima ili ćelijama se posmatraju makroskopske osobine fluida kao što su gustina, brzina i pritisak. U oblasti hidrodinamičkih simulacija OSN, simulacije na bazi mreže su se pokazale uspešnijim (Tasker et al., 2008). U današnjim istraživanjima se najčešće koriste vrhunski razvijeni paketi za numeričke simulacije od kojih su najpoznatiji FLASH (Fryxell et al., 2000), PLUTO (Mignone et al., 2007, 2012), RAMSES (Teyssier, R., 2002), ENZO (Bryan et al., 2014), itd. Takvi numerički kodovi sadrže različite module koji uključuju procese kao što su toplotno provođenje, radijativni gubici i slično. Takođe, poseduju adaptivnu mrežu čija struktura se hijerarhijski usitnjava u određenim delovima kako bi simulacija bila u stanju da precizno uhvati promene na malim skalama, poput turbulencija i fizičkih nestabilnosti.

Jedan od ciljeva rada na ovoj disertaciji je razvijanje novog hidrodinamičkog koda za simulacije koji može da se koristi za proučavanje hidrodinamičke evolucije OSN u nehomogenoj međuzvezdanoj sredini. Kod je napisan u programskom jeziku C, uz sve dodatne procedure i module za izvlačenje i prikaz dobijenih rezultata. Zasnovan je na fiksnoj pravougaonoj mreži i koristi metod konačnih zapremina, što znači

da parcijalne diferencijalne jednačine dinamike fluida rešava u formi algebarskih jednačina, računajući flukseve na površinama konačnih zapremina (pravougaonih ćelija) koje obuhvataju čvorove mreže. Dodatno, kod je paralelizovan tako što se sve numeričke procedure koje su vezane za pojedinačne ćelije dinamički razdeljuju na različite procesore, čime se simulacija na različitim delovima kompjuterske mreže izvršava istovremeno. Ovim se vreme trajanja simulacije ubrzava onoliko puta koliko je jezgara procesora na raspolaganju.

2.1 Jednačine dinamike fluida

Dinamika stišljivog fluida, poput međuzvezdanog gasa, se matematički opisuje Ojlerovim jednačinama koje obuhvataju tri prostorne dimenzije i vremenski su zavisne. Ove jednačine su predstavljene u formi sistema nelinearnih hiberboličkih zakona održanja. Stanje fluida se opisuje sa pet promenljivih: gustina $\rho(x, y, z, t)$, x -, y - i z -komponente brzine $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ i $w(x, y, z, t)$, i pritisak $p(x, y, z, t)$. Ova-ko date promenljive nazivaju se primitivnim. Međutim, brzina i pritisak ne podležu zakonima održanja, pa se stanje fluida takođe predstavlja konzervativnim promenljivama: gustina $\rho(x, y, z, t)$, x -, y - i z -komponente impulsa $\rho u(x, y, z, t)$, $\rho v(x, y, z, t)$ i $\rho w(x, y, z, t)$, i ukupna energija $E(x, y, z, t)$.¹ Sistem jednačina koje opisuju zakone održanja ovih pet promenljivih u diferencijalnom obliku dat je kao:

$$\begin{aligned}
 \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z &= 0, \\
 (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z &= 0, \\
 (\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y + (\rho vw)_z &= 0, \\
 (\rho w)_t + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2 + p)_z &= 0, \\
 E_t + [u(E + p)]_x + [v(E + p)]_y + [w(E + p)]_z &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

gde indeksi t , x , y i z predstavljaju parcijalne izvode (npr. $\rho_t = \partial\rho/\partial t$). Ukupna energija E je zbir unutrašnje i kinetičke energije po jedinici zapremine:

$$E = \rho e + \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2},
 \tag{2.2}$$

¹Tačnije, u pitanju su gustina impulsa (jedinica $\text{kg m}^{-2} \text{s}$) i gustina energije (jed. J m^{-3}), ali će radi lakše čitljivosti biti navođene u kraćem obliku kao impuls i energija.

gde je e specifična unutrašnja energija.

U svakoj od pet jednačina prvi član predstavlja promenu veličine sa vremenom, a ostala tri člana njenu promenu po trima prostornim dimenzijama. S obzirom da je sa desne strane jednakosti nula, jasno je da u svakoj tački fluida količina neke veličine zavisi od ukupnog fluksa te veličine kroz tu tačku u jedinici vremena. Upravo se ovde, kroz formu zakona održanja, vidi da su disipativni efekti zanemareni, pa tako i uticaj zračenja na dinamiku (u realnom slučaju, desna strana jednačina nije jednaka nuli). Sistem (2.1) se može prikazati na kompaktniji način uvođenjem vektora kolone $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ konzervativnih promenljivih i vektora fluksa $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ i $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ u pravcima x , y i z , respektivno:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y + \mathbf{H}_z = 0, \quad (2.3)$$

gde su

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(E + p) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Pritisak, koji se pojavljuje u izrazima za fluks impulsa i energije, je povezan sa specifičnom unutrašnjom energijom kroz jednačinu stanja koja opisuje prirodu medijuma. Međuzvezdani gas se tretira kao kalorički idealan gas, sa kaloričkom jednačinom stanja:

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (2.5)$$

gde je γ odnos specifičnih toplota ili tzv. adijabatski indeks, a vrednost $\gamma = 5/3$ opisuje monoatomski gas. Jednačina (2.5) obezbeđuje rešivost sistema Ojlerovih jednačina (2.1). Iako adijabatski indeks uopšteno nije konstantan, jer u sredini može doći do termalnih i hemijskih procesa (pogledati [Vaidya et al., 2015](#)), u ovom radu će biti korišćen kao konstanta.

2.2 Numerički metodi

Svi metodi konačnih zapremina (ili konačnih razlika) kod nelinearnih hiperboličnih zakona potiču od metoda Godunova (Godunov, 1959). Osnovni koncept metoda Godunova će biti predstavljen na primeru jednodimenzionih Ojlerovih jednačina radi jednostavnosti i lakšeg razumevanja. Detaljnija razmatranja iz ove oblasti mogu se pronaći u knjizi Toroa (Toro, 2009).

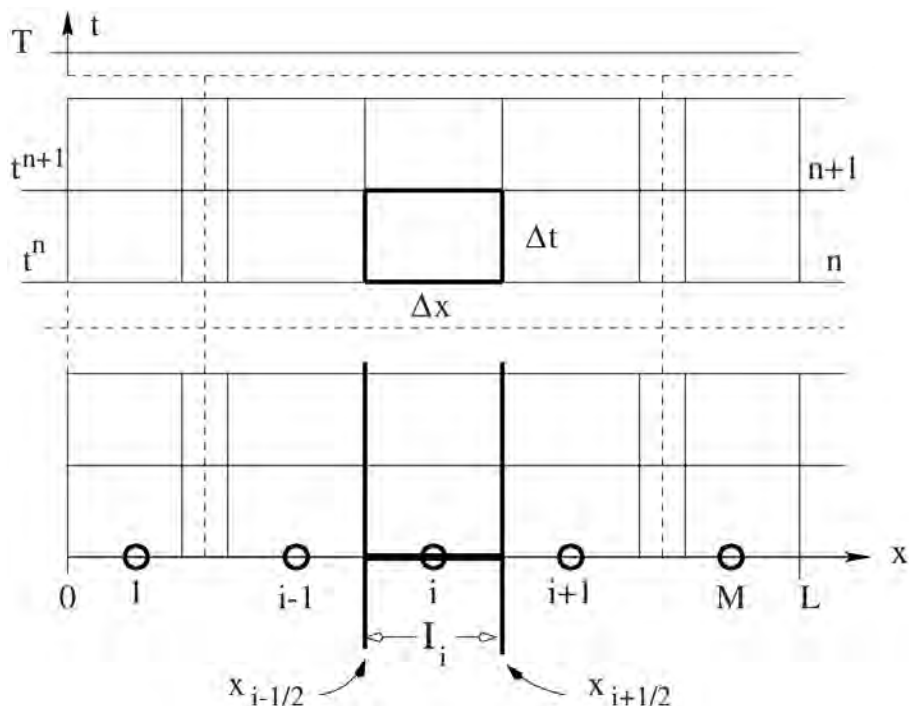
Krenimo od prostornog jednodimenzionog domena $x = [0, L]$ koji je podeljen u M ćelija. Sve ćelije $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ su istih dimenzija $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = L/M$, gde je $i = 1, \dots, M$. Prema numeraciji, pozicija ćelije je u njenom centru. Stoga, indeksi $i - \frac{1}{2}$ i $i + \frac{1}{2}$ označavaju granicu ćelije prema „levoj” i „desnoj” ćeliji (Slika 2.1). Vremenski domen $t = [0, T]$ je podeljen u vremenske korake Δt promenljive dužine. Diskretne trenutke u vremenu obeležavamo sa t^n , gde indeks n označava redni broj vremenskog koraka ($t^0 = 0$, $t^1 = t^0 + \Delta t_1$, ..., $t^n = t^{n-1} + \Delta t_n$). U ovako postavljenom formalizmu svi podaci unutar prostornog domena u trenutku t^n se zapisuju u formi $\mathbf{U}_i^n = \mathbf{U}(x_i, t^n)$. Vektor kolona \mathbf{U}_i označava prosečne vrednosti stanja unutar zapremine ćelije I_i . Zbog toga se ovaj metod naziva metodom konačnih zapremina, dok metod konačnih razlika uzima vrednosti stanja u diskretnim tačkama domena (recimo, u centrima ćelija).

Po metodu Godunova, evolucija stanja iz \mathbf{U}_i^n u $\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}(x_i, t^n + \Delta t)$ data je sledećom formulom:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}]. \quad (2.6)$$

Dužina vremenskog koraka Δt zavisi od maksimalne brzine signala unutar domena x , pa se on iznova računa u svakom koraku.

Jednačina (2.6) proizlazi iz Ojlerovih jednačina, što znači da je ukupna promena stanja na kraju vremenskog koraka jednaka razlici flukseva \mathbf{F} kroz levu i desnu granicu ćelije tokom trajanja koraka. Za rešenje jednačine evolucije neophodno je pronaći flukseve na granicama svih ćelija u domenu, a to je moguće uraditi koristeći stanja sa leve i sa desne strane granice, što predstavlja tzv. Rimanov problem. Fluks $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ se računa rešavanjem Rimanovog problema $RP(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n)$, a metodi za rešavanje se zovu Rimanovi rešavači. U izvornom metodu Godunova raspodela stanja \mathbf{U}_i^n unutar



Slika 2.1: Ilustracija prikazuje diskretizaciju prostornog i vremenskog domena. Preuzeto iz knjige Toroa (Toro, 2009).

ćelija predstavljena je kao deo-po-deo konstantna (eng. *piece-wise constant*), što ga čini metodom prvog reda prostorne tačnosti. Međutim, red tačnosti je moguće povećati ukoliko se raspodela unutar ćelija predstavi polinomom prvog ili drugog stepena kako bi se granične vrednosti stanja sa obe strane granice međusobno približile.

2.3 MUSCL-Hancock metod

U numeričkom kodu razvijenom i korišćenom u ovom radu je implementirana tzv. MUSCL-Hancock šema. MUSCL (skraćenica od *Monotonic Upstream-Centred Scheme for Conservation Laws*) je metod konačnih zapremina na bazi metoda Godunova, ali drugog reda prostorne tačnosti, razvijen od strane Bram van Lera (Van Leer, 1979). Viši red tačnosti se postiže uz pomoć deo-po-deo linearne raspodele stanja unutar ćelije, zadržavajući istu integralnu (ili prosečnu) vrednost. Rešenje stanja za naredni vremenski korak se dobija na isti način kao u metodu Godunova,

a ono u trodimenzionom prostornom domenu izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j,k}^n &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j,k} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}] \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta y} [\mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2},k} - \mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2},k}] \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta z} [\mathbf{H}_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{i,j,k+\frac{1}{2}}], \end{aligned} \quad (2.7)$$

gde indeksi i , j i k predstavljaju broj ćelije u tri prostorne koordinate x , y i z . S obzirom da u ovom radu koristimo uniformnu mrežu, važi $\Delta x = \Delta y = \Delta z$.

Osnovni zadatak ovog metoda je da ponudi što preciznija rešenja za flukseve \mathbf{F} , \mathbf{G} i \mathbf{H} na granicama ćelija. Klasičan metod Godunova ima prvi red tačnosti u prostoru i vremenu, ali se na njegovoj osnovi mogu graditi šeme višeg reda, kao što je MUSCL-Hancock šema koja je drugog reda prostorne i vremenske tačnosti. Postoje tri koraka koja dovode do određivanja flukseva u ovoj šemi:

- (i) Rekonstrukcija,
- (ii) Evolucija,
- (iii) Rimanov problem.

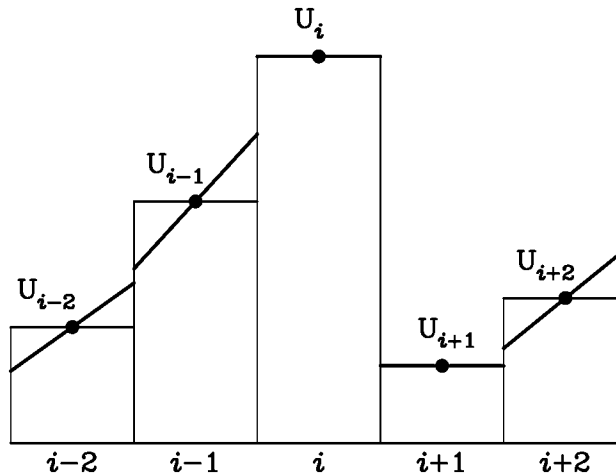
U prvom i trećem koraku postoje različiti metodološki pristupi, pa će biti predstavljeni samo oni koji su usvojeni za potrebe ovog rada.

2.3.1 Rekonstrukcija

Glavni korak MUSCL-Hancock šeme za rešavanje Ojlerovih jednačina dinamike fluida, zbog kojeg ona osigurava prostornu tačnost drugog reda, je rekonstrukcija raspodele stanja \mathbf{U}_i^n unutar ćelija. Ideja je da se konstantna raspodela u ćeliji zameni linearnom funkcijom kako bi što približnije pratila stvarnu raspodelu fluida, s tim da prosečna vrednost stanja ostane nepromenjena. Ovakva raspodela stanja, kada se posmatra niz ćelija, se naziva deo-po-deo linearna raspodela (Slika 2.2). Rekonstruiše se svako od pet stanja po sve tri koordinate nezavisno. Nagib konstruisane linearne funkcije se određuje pomoću vrednosti stanja u obe susedne ćelije, kao i u posmatranoj ćeliji. Nagibi moraju da budu tako izbalansirani da u rekonstruisanoj deo-po-deo

linearnoj raspodeli ne dolazi do uvođenja novih lokalnih ekstremuma. Ovaj ključni uslov, koji je potreban da ne bi došlo do stvaranja i propagiranja lažnih oscilacija (o ovom fenomenu više u Toro, 2009), se zove uslov umanjavanja ukupnih varijacija (eng. *total variation diminishing*—TVD uslov). Zbog ispunjenosti TVD uslova MUSCL šema ima reč „monotona” u svom nazivu.

Nagib linearne raspodele stanja u nekoj ćeliji I_i bi se u osnovi mogao konstruisati kao $(\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n)/\Delta x$ ili $(\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n)/\Delta x$, i u tim slučajevima bismo šemu nazvali „desnom” ili „levom”, jer rešenje nije simetrično u odnosu na smer koordinatne ose. Međutim, da bi rešenje bilo simetrično („centralna” šema), kao i zbog ograničenja koje uvodi TVD uslov, moraju se uzeti u obzir oba rešenja. U zavisnosti od toga kakav je odnos ova dva nagiba, uvodi se ograničeni nagib, odnosno limiter nagiba koji je rezultat njihove kombinacije ili, u slučaju da su nagibi različitog znaka, jednak nuli. Ograničavanje nagiba je potrebno da $\mathbf{U}_{i\pm\frac{1}{2}}$ ne bi postalo novi lokalni ekstremum, posebno u blizini udarnih talasa ili diskontinuiteta. Postoji više metoda za ograničavanje nagiba od kojih su neki: *minbee* (ili *minmod*), *superbee*, *van Leer*, *ospre*, *UMIST*, itd.



Slika 2.2: Ilustracija deo-po-deo linearne rekonstrukcije. Zadebljane linije predstavljaju rekonstruisana stanja \mathbf{U}_i korišćenjem ograničenog nagiba po Van Leru.

Ako definišemo konačni nagib linearne raspodele u ćeliji I_i kao:

$$s_i = \phi(r) (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i), \quad (2.8)$$

gde je $\phi(r)$ funkcija limitera nagiba koja zavisi od vrednosti količnika levog i desnog

nagiba:

$$r = \frac{\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}}{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i}, \quad (2.9)$$

onda se prva tri od gore navedenih limitera nagiba definišu na sledeći način:

- *Minbee* (mb):

$$\phi_{\text{mb}}(r) = \begin{cases} 0, & r < 0, \\ r, & 0 \leq r < 1, \\ 1, & r \geq 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

- *Superbee* (sb):

$$\phi_{\text{sb}}(r) = \begin{cases} 0, & r < 0, \\ 2r, & 0 \leq r < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq r < 1, \\ r, & 1 \leq r < 2, \\ 2, & r \geq 2. \end{cases} \quad (2.11)$$

- *Van Leer* (vl):

$$\phi_{\text{vl}}(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ \frac{2r}{1+r}, & r > 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Nakon određivanja nagiba može se izvršiti ekstrapolacija vrednosti na levoj i desnoj granici ćelije:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j,k}^{x-} &= \mathbf{U}_{i,j,k}^n - \Delta_i, & \mathbf{U}_{i,j,k}^{x+} &= \mathbf{U}_{i,j,k}^n + \Delta_i, \\ \mathbf{U}_{i,j,k}^{y-} &= \mathbf{U}_{i,j,k}^n - \Delta_j, & \mathbf{U}_{i,j,k}^{y+} &= \mathbf{U}_{i,j,k}^n + \Delta_j, \\ \mathbf{U}_{i,j,k}^{z-} &= \mathbf{U}_{i,j,k}^n - \Delta_k, & \mathbf{U}_{i,j,k}^{z+} &= \mathbf{U}_{i,j,k}^n + \Delta_k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

gde $\Delta_l = s_l/2$ predstavlja ekstrapolacioni član u pozitivnom smeru ($l = i, j, k$ je indeks traženog pravca). Znaci „-” i „+” u eksponentu se odnose na levu i desnu ekstrapoliranu vrednost stanja. Vrednosti iz jednačina (2.13) se nazivaju granične ekstrapolirane vrednosti (GEV) i ima ih šest za svaku ćeliju $I_{i,j,k}$.

2.3.2 Evolucija

Za razliku od klasične šeme Godunova, ovaj korak obezbeđuje drugi red vremenske tačnosti MUSCL-Hancock šemi. Pre nadogradnje rešenja za vremenski korak Δt , stanja se prvo ažuriraju za vremenski korak $\Delta t/2$, ali sa fluksevima računatim na graničnim ekstrapoliranim vrednostima:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{l\pm} = & \mathbf{U}_{i,j,k}^{l\pm} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i,j,k}^{x-}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i,j,k}^{x+})] \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta y} [\mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j,k}^{y-}) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{i,j,k}^{y+})] \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta z} [\mathbf{H}(\mathbf{U}_{i,j,k}^{z-}) - \mathbf{H}(\mathbf{U}_{i,j,k}^{z+})], \end{aligned} \quad (2.14)$$

za $l = x, y, z$. U ovom koraku koji se naziva evolucija, koristi se aproksimacija GEV kako bi se približno dobile vrednosti stanja na polovini vremenskog koraka, čime se povećava red tačnosti po vremenu. Kao što se vidi iz jednačine (2.14), isti evolucioni priraštaj se dodaje svim graničnim ekstrapoliranim vrednostima unutar ćelije (poslednja tri člana su ista za svako l u oba smera), jer svi fluksevi potiču iz iste ćelije.

2.3.3 Rimanov problem

Ključni korak za dobijanje flukseva na granicama ćelija u jednačini (2.7) je rešavanje Rimanovog problema (RP). Ovo je jedini korak u algoritmu koji je fizičke prirode i nezavisan je od numeričkih metoda. RP je početni problem zakona održanja:

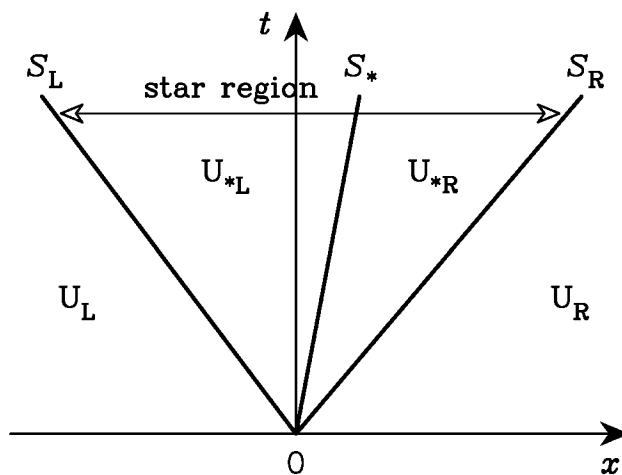
$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

uz početne uslove:

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, \\ \mathbf{U}_R, & x > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Zakoni održanja iz jednačine (2.15) predstavljaju jednodimenzioni problem radi lakšeg opisa rešenja. Ako se u početnom trenutku dva različita konstantna stanja, \mathbf{U}_L i \mathbf{U}_R , nađu sa dve strane granice diskontinuiteta ($x = 0$), ovaj sistem će u svakom

sledećem trenutku evoluirati u zavisnosti od njihovih početnih stanja. Evolucija ovog sistema se ogleda u propagaciji m talasa iz tačke diskontinuiteta, gde je broj m jednak broju zakona održanja u sistemu. U jednačini (2.15) ima tri zakona održanja (gustina, impuls i energija), pa će uslediti propagacija tri talasa povezanih sa svojim vrednostima Jakobijana funkcije fluksa, $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = u$ i $\lambda_3 = u + a$, koje predstavljaju brzine širenja informacije (a je brzina zvuka). U egzaktnom rešenju RP ova tri talasa dele četiri različita konstantna stanja fluida: krajnje levo i desno su početna stanja, U_L i U_R , a dva nova nepoznata stanja razdvojena središnjim talasom, U_{*L} i U_{*R} , pripadaju tzv. srednjoj regiji (u literaturi ona je kolokvijalno nazvana „regijom zvezdice”—eng. *star region*—po indeksu kojim se obeležavaju veličine unutar nje). Rešenje je grafički prikazano na Slici 2.3.



Slika 2.3: Trotalasnno rešenje Rimanovog problema predstavljeno u $x-t$ ravni. Između levog i desnog talasa, brzine S_L i S_R , nalazi se regija zvezdice koja je podeljena kontaktним diskontinuitetom brzine S_* . Preuzeto iz rada Kostića (Kostić, 2019).

Središnji od tri talasa, brzine S_* , uvek predstavlja kontaktni diskontinuitet, koji razdvaja materiju levo i desno od početne granice diskontinuiteta, dok levi i desni talas (S_L i S_R) mogu da budu ili udarni ili razređujući talasi. Stoga, u zavisnosti od početnih stanja, moguće je dobiti četiri različita scenarija kao rešenje RP, i oni zavise isključivo od vrste levog i desnog talasa: dva udarna talasa, dva razređujuća talasa, levi udarni i desni razređujući talas, i levi razređujući i desni udarni talas. Ova rešenja se odnose na idealni gas sa kaloričkom jednačinom stanja (2.5). Svaki od ovih talasa predstavlja skok konzervativnih stanja fluida. Međutim, ako posmatramo primitivna stanja, analizom sopstvenih vrednosti Ojlerovih jednačina dobija se da su brzina

i pritisak konstantni unutar srednje regije. Ova zgodna osobina se koristi prilikom rešavanja RP, kada se traži jednačina pritiska p_* . Pored pritiska, potrebno je pronaći brzinu u srednjoj regiji, u_* , i gustinu levo i desno od kontaktnog diskontinuiteta, ρ_{*L} i ρ_{*R} , da bi rešenje bilo kompletno.

Kada se posmatra sistem Ojlerovih zakona održanja u tri dimenzije, kao u jednačini (2.3), onda imamo tzv. podeljeni RP, gde se po svakoj od tri koordinate RP rešava zasebno. Tako, Jakobijan po x -osi ima svojstvene vrednosti $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u$ i $\lambda_5 = u + a$. Dve nove svojstvene vrednosti λ_3 i λ_4 identične su λ_2 , a sa njima se povezuju dva smičuća talasa na kojima tangencijalne komponente brzine trpe skok. Sa druge strane, dokazano je da se tangencijalne komponente ne menjaju na krajnjem levom i desnom talasu (tzv. nelinearnim talasima), već jedino na svojim smičućim talasima koji se nalaze na mestu kontaktnog diskontinuiteta. Dakle, $v_{*L} = v_L$ i $v_{*R} = v_R$, a analogno važi i za w . Ovo je još jedna zgodna osobina zbog koje se trodimenzioni podeljeni RP rešava isto kao odgovarajući jednodimenzioni slučaj.

RP je u praksi ispitan eksperimentom udarnog talasa u cevi (eng. *shock-tube problem*) koji je razvio Sod (1978). Ovaj eksperiment je specijalan slučaj RP u kojem se dva gasa različite gustine i pritiska drže u cevi koja je razdvojena dijafragmom. Inicijalno u stanju mirovanja, nakon izvlačenja dijafragme stvara se sistem sa udarnim i razređujućim talasom i kontaktnim diskontinuitetom. Sodov eksperiment i njegovo teorijsko rešenje se koriste kao test uspešnosti numeričkih hidrodinamičkih kodova.

Premda postoji egzaktno rešenje $\mathbf{U}(x, t > 0)$, procedura rešavanja je računarski zahtevna jer se svodi na iterativno pronalaženje pritiska u srednjoj regiji. Zato su razvijeni aproksimativni Rimanovi rešavači kao što su HLLE, HLLC, PVRs, *Roe solver*, *Osher solver*, itd. U simulacijama ovog rada koristi se HLLC Rimanov rešavač (*Harten-Lax-van Leer-Contact*), pa će ukratko biti predstavljen njegov algoritam za dobijanje međučelijskog fluksa, u obliku recepta. HLLC rešavač pretpostavlja trolasno rešenje, sa konfiguracijom od četiri već pomenuta vektora stanja \mathbf{U}_L , \mathbf{U}_{*L} , \mathbf{U}_{*R} i \mathbf{U}_R (vidi Sliku 2.3). Levi i desni vektor stanja, kao ulazni parametri rešavača, uzimaju granične ekstrapolirane vrednosti iz prethodnog koraka MUSCL šeme, $\mathbf{U}_L \equiv \hat{\mathbf{U}}_i^{x+}$ i $\mathbf{U}_R \equiv \hat{\mathbf{U}}_{i+1}^{x-}$ (u slučaju x -ose). Izlazni parametar rešavača je

jedinstveni fluks $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{\text{hllc}}$ na granici ćelija I_i i I_{i+1} . Kako bi ovaj fluks bio pronađen potrebno je izvršiti sledeća tri koraka:

(i) Pritisak.

Pritisak u srednjoj regiji, $p_* = p_{*L} = p_{*R}$, se može proceniti na više načina, od kojih koristimo sledeći (Shen et al., 2016):

$$p_*^{\text{hllc}} = \frac{\alpha_R p_L - \alpha_L p_R - \alpha_L \alpha_R (u_L - u_R)}{\alpha_R - \alpha_L}, \quad (2.17)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \alpha_L &= \rho_L (S_L - u_L), \\ \alpha_R &= \rho_R (S_R - u_R). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Brzine S_L i S_R tražimo u sledećem koraku.

(ii) Brzine talasa.

Iako je u pitanju procena, talasne brzine S_L , S_R i S_* se računaju kao (Shen et al., 2016):

$$\begin{aligned} S_L &= \min(u_L - a_L, u_R - a_R), \\ S_R &= \max(u_L + a_L, u_R + a_R), \\ S_*^{\text{hllc}} &= \frac{\alpha_R u_R - \alpha_L u_L + p_L - p_R}{\alpha_R - \alpha_L}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

gde su a_L i a_R brzine zvuka u levoj i desnoj ćeliji.

(iii) HLLC fluks.

Na kraju, fluks se računa kao:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{\text{hllc}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & 0 \leq S_L \\ \mathbf{F}_{*L}, & S_L \leq 0 \leq S_* \\ \mathbf{F}_{*R}, & S_* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R, & 0 \geq S_R \end{cases}, \quad (2.20)$$

gde su:

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L), \quad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R), \quad (2.21)$$

i,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{*L} &= \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_{*L} - \mathbf{U}_L), \\ \mathbf{F}_{*R} &= \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_{*R} - \mathbf{U}_R).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Iz poslednje tri jednačine se može videti da fluks zavisi isključivo od smera u kom se fluid kreće. Funkcija rešavača je da proceni otežinjeni fluks u zavisnosti od smera i intenziteta brzine svakog od tri talasa. Zbog ove osobine Rimanovog rešavača MUSCL šema u svom nazivu nosi opis *upstream-centred*, što je sinonim za tzv. *upwind* („uz vetar”) šeme, koje, kao što im ime sugerise, koriste informacije o stanju fluida „uzvodno” u pravcu kretanja fluida kod određivanja međučelijskih flukseva.

Postoje i drugi načini za dobijanje pritiska i talasnih brzina. Više detalja o HLL i HLLC rešavačima se nalazi u radovima Šena sa saradnicima (Shen et al., 2016) i Toroa (Toro, 2009). Kada se dobiju svi međučelijski fluksevi u prostornom domenu u sva tri pravca (\mathbf{F} , \mathbf{G} i \mathbf{H}), uključujući flukseve na krajnjim granicama domena (o tome u poglavlju 2.3.6), rešenje se nadograđuje za sledeći vremenski korak korišćenjem jednačine (2.7).

2.3.4 Vremenski korak

Vremenski korak Δt mora da zadovolji uslov

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_{\max}^n},\tag{2.23}$$

gde je S_{\max}^n maksimalna talasna brzina unutar svih ćelija u trenutku t^n . Ovaj uslov je postavljen da bi rešenje RP ostalo u potpunosti unutar posmatranih ćelija i da ne dolazi do interakcije susednih RP. U trodimenzionoj mreži ćelija maksimalna brzina informacije se računa kao:

$$S_{\max}^n = \max_{i,j,k} \{|u_{i,j,k}^n| + a_{i,j,k}^n, |v_{i,j,k}^n| + a_{i,j,k}^n, |w_{i,j,k}^n| + a_{i,j,k}^n\}.\tag{2.24}$$

Ovde, $a_{i,j,k}^n$ predstavlja brzinu zvuka u ćeliji $I_{i,j,k}$ u trenutku t^n .

U slučaju kršenja uslova (2.23) javljaju se lažne oscilacije, pa je zbog toga uveden tzv. CFL koeficijent (*Courant-Friedrichs-Lewy* uslov), $C_{\text{cfl}} \leq 1$, uobičajene vrednosti

oko 0.9. Vremenski korak se tada računa kao:

$$\Delta t = C_{\text{cfl}} \frac{\Delta x}{S_{\text{max}}^n}. \quad (2.25)$$

Međutim, u trodimenzionim mrežama uzima se konzervativnije ograničenje CFL broja radi stabilnosti šeme, $C_{\text{cfl}} \leq \frac{1}{3}$. U simulacijama ovog rada se koristi vrednost 0.25.

2.3.5 Pritisak na granicama ćelije i očuvanje pozitivnosti

Metod koji je opisan može da dovede do kolapsa simulacije u slučaju da postoje ćelije u kojima kinetička energija značajno dominira u odnosu na unutrašnju energiju. Tada mogu da se jave negativni pritisci na graničnim ekstrapoliranim vrednostima, a ovo nefizičko rešenje onemogućuje računanje brzine zvuka koja je potrebna u Rimanovom rešavaču. Ova situacija se dešava u ćelijama koje su na ivici velikih diskontinuiteta, gde je rekonstruisani nagib energije nula, a nagib gustine strm, kao što je slučaj kod modela materijala odbačenog eksplozijom (poglavljje 2.4.3). Jedino rešenje ovog problema je dodatno ograničenje svih pet nagiba u problematičnom pravcu, kako bi se vrednost negativnog graničnog pritiska dovela barem na nulu. Ovo se postiže nalaženjem koeficijenta k , takvog da lokalna unutrašnja energija bude jednaka nuli:

$$E \pm k \Delta_E - \frac{(\rho u \pm k \Delta_{\rho u})^2 + (\rho v \pm k \Delta_{\rho v})^2 + (\rho w \pm k \Delta_{\rho w})^2}{2(\rho \pm k \Delta_{\rho})} = 0, \quad (2.26)$$

gde su ρ , ρu , ρv , ρw i E članovi vektora kolone $\mathbf{U}_{i,j,k}^n$, a Δ_{ρ} , $\Delta_{\rho u}$, $\Delta_{\rho v}$, $\Delta_{\rho w}$ i Δ_E njihovi ekstrapolacioni članovi iz jednačine (2.13). Jednačina (2.26) predstavlja kvadratnu jednačinu po k čije je rešenje:

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (2.27)$$

gde su:

$$\begin{aligned} A &= 2\Delta_E \Delta_{\rho} - (\Delta_{\rho u})^2 - (\Delta_{\rho v})^2 - (\Delta_{\rho w})^2, \\ B &= \pm 2(\rho \Delta_E + E \Delta_{\rho} - \rho u \Delta_{\rho u} - \rho v \Delta_{\rho v} - \rho w \Delta_{\rho w}), \\ C &= 2E\rho - (\rho u)^2 - (\rho v)^2 - (\rho w)^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

U jednačinama (2.26) i (2.28), „ \pm ” označava levu ($-$) ili desnu ($+$) granicu ćelije. Kako k ima dva rešenja, treba izabrati ono koje zadovoljava uslov $0 < k < 1$, dok je drugo nefizičko. Sada svih pet nagiba (odnosno ekstrapolacionih članova) treba redukovati za faktor k , $\Delta_i \rightarrow k\Delta_i$, ali samo za onaj pravac u kom je detektovan negativan pritisak.

2.3.6 Granični uslovi

Pored početnih vrednosti metod Godunova zahteva i poznavanje graničnih uslova da bi rešenje moglo biti nadograđeno. To je zbog toga što se rekonstrukcija nagiba, kao ni RP, ne mogu izvršiti u krajnjim ćelijama domena (na stranicama simulacione kutije) bez poznavanja stanja u obe susedne ćelije. Zbog toga se mora pretpostaviti stanje u ćelijama van domena, u zavisnosti od vrste problema, a za to se najčešće koriste tri tipa graničnih uslova: reflektivni, transmisivni i ulivajući.

- Reflektivni.

Kod ovog tipa se granice domena posmatraju kao ogledala iza kojih ćelije izgledaju simetrično u odnosu na ćelije unutar domena. Stoga, za slučaj jednodimenzionog niza \mathbf{U}_i^n , $i = 1, \dots, M$, granične ćelije s početka i kraja niza, \mathbf{U}_0^n i \mathbf{U}_{M+1}^n , primaju vrednosti:

$$\mathbf{U}_0^n = \begin{bmatrix} \rho_1^n \\ -(\rho u)_1^n \\ E_1^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{M+1}^n = \begin{bmatrix} \rho_M^n \\ -(\rho u)_M^n \\ E_M^n \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

U trodimenzionoj mreži dodatna dva člana koja se odnose na tangencijalne komponente brzine ne menjaju znak. Ovaj tip graničnih uslova se koristi kada zid simulacione kutije treba da predstavlja neprobojan zid od koga se reflektuje fluid. Na primer, ukoliko postoji sferosimetričan problem, kakav je ostatak supernove, onda je radi uštede procesorskog vremena dovoljno simulirati jedan njegov oktant. Ovako, simulaciona kutija predstavlja parče u prostoru koje je ograničeno samo pozitivnim domenom koordinata, gde je koordinatni početak u centru simetrije. Unutrašnje stranice ovog domena, na koordinatama $x = 0$,

$y = 0$ i $z = 0$, se definišu kao reflektivne površine. Vrednosti graničnih ćelija se moraju upisivati u svakom vremenskom koraku.

- Transmisivni.

Kada je potrebno dozvoliti da fluid slobodno ističe iz simulacionog domena, tada se koristi transmisivni tip graničnih uslova. U trivijalnom slučaju granične ćelije postaju kopije svojih suseda sa ivice domena:

$$\mathbf{U}_0^n = \begin{bmatrix} \rho_1^n \\ (\rho u)_1^n \\ E_1^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{M+1}^n = \begin{bmatrix} \rho_M^n \\ (\rho u)_M^n \\ E_M^n \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Pored trivijalnog slučaja, vrednosti graničnih ćelija se mogu modelirati, odnosno ekstrapolirati na osnovu gradijenata stanja unutar domena, uzimajući u obzir niz od dve ili više ćelija domena.

- Ulivajući.

U slučaju da se modelira ulivanje fluida u domen iz njegovih granica, onda se stanja u graničnim ćelijama definišu shodno zadatim parametrima problema. Ako je priliv fluida konstantan tokom simulacije, nije potrebno upisivati granična stanja u svakom vremenskom koraku, već samo na početku simulacije.

Analogno prosečnim stanjima se zadaju i granične ekstrapolirane vrednosti u graničnim ćelijama. Na primer, u reflektujućoj graničnoj ćeliji na početku domena, I_0 , desna GEV normalne komponente impulsa je $(\rho u)_{0,R}^n = -(\rho u)_{1,L}^n$. Važno je napomenuti da se ove vrednosti upisuju nakon koraka evolucije. Kod transmisivnih i ulivajućih granica nagibi su ili nulti ili se modeliraju u zavisnosti od vrste problema. U narednom poglavlju, u testovima validacije numeričkog koda, biće korišćene sve tri vrste graničnih uslova.

2.4 Testovi validacije

Da bi numerički kod mogao da se koristi neophodno je da prođe testove validacije. Testovi koriste sve procedure MUSCL-Hancock šeme koji su opisani u ovom

poglavljju. Prvi test, poznat kao Sodov problem udarnog talasa u cevi, je uobičajeni test za validaciju HD/MHD kodova. Drugi test, simulacija razbijanja sfernog oblaka ravnim udarnim talasom, koja je preuzeta u izvornom obliku iz rada Orlando sa saradnicima (Orlando et al., 2005), služi za validaciju koda kroz poređenje rezultata. Konačno, treći test predstavlja širenje grudvičastog materijala odbačenog eksplozijom supernove, kod kojeg se ispoljavaju očekivane Rejli-Tejlorove nestabilnosti na kontaktnom diskontinuitetu.

2.4.1 Test I - Sodov problem talasne cevi

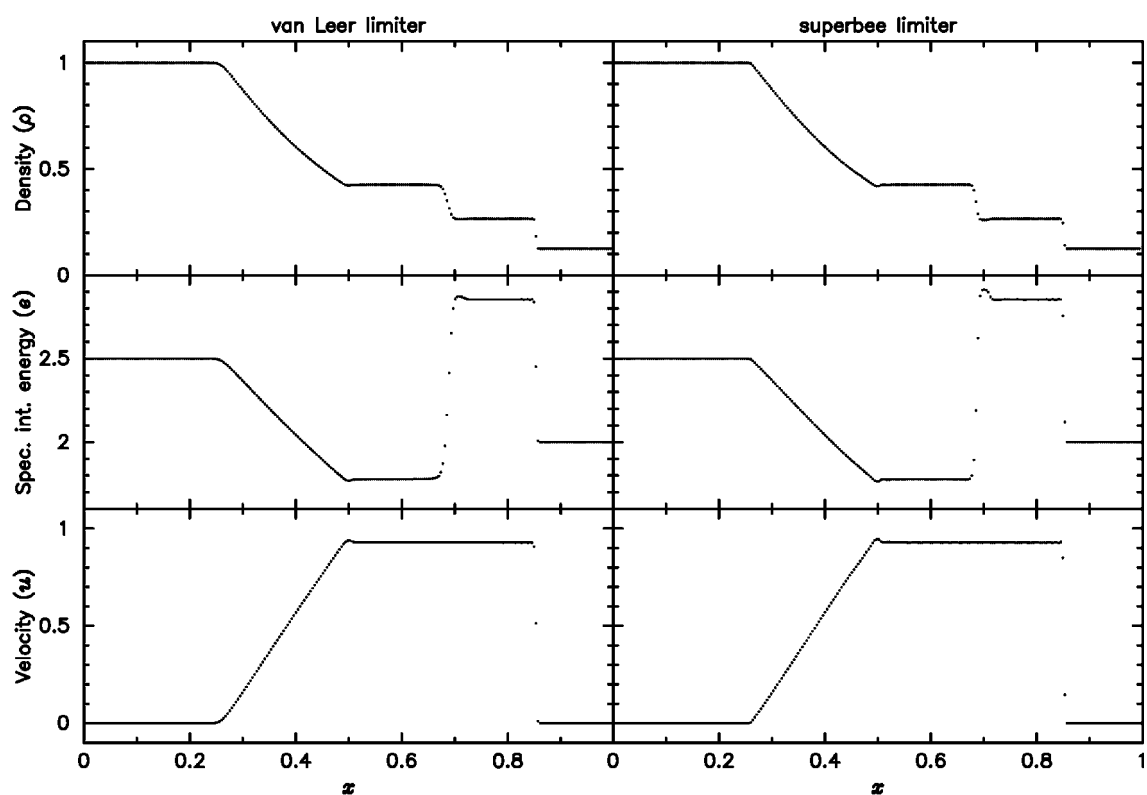
Sodov problem (Sod, 1978) je uobičajeni i osnovni test preciznosti HD koda, jer pokazuje sposobnost koda da razdvoji udarni talas, kontaktni diskontinuitet (KD) i razređujući talas. U preciznim kodovima, formirani udarni talas i kontaktni diskontinuitet treba da zauzimaju što manji broj ćelija po debljini zone diskontinuiteta, s obzirom da su u pitanju formalno beskonačno tanki diskontinuiteti. Profil razređujućeg talasa, s druge strane, ima svoju raspodelu koju kod treba pravilno da reprodukuje. Ukoliko udarni talas ili KD zauzimaju suviše veliki broj ćelija po debljini, onda se povećava difuzivnost koda čime se otežava formiranje stvarnih efekata kao što su Kelvin-Helmholcove (KH) i Rejli-Tejlorove (RT) nestabilnosti. Recimo, ove efekte je gotovo nemoguće dobiti sa deo-po-deo konstantnom, pa čak i linearnom minmod raspodelom stanja. Test će pokazati da izbor tipa rekonstrukcije umnogome utiče na difuzivnost.

Sodov problem je jednodimenzioni problem diskontinuiteta u strujanju fluida i ovde će biti izveden identično kao u poglavljju 7.2 u radu Friksela i saradnika (Fryxell et al., 2000). Domen jedinične dužine je podeljen na 256 ćelija. Fluid ima dva konstantna stanja levo i desno od sredine domena, a početna brzina u svim ćelijama je nula. Leva i desna početna stanja su:

$$\begin{bmatrix} \rho_L \\ u_L \\ p_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \rho_R \\ u_R \\ p_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

gde je adijabatski indeks $\gamma = 1.4$.

Rezultati u trenutku $t = 0.2$ su prikazani na Slici 2.4 za *van Leer* (VL) i *superbee* (SB) rekonstrukcije. Grafici prikazuju profile gustine, brzine i specifične unutrašnje energije. Kod oba tipa rekonstrukcije udarni talas pokriva ~ 2 ćelije. Kontaktni diskontinuitet sa VL rekonstrukcijom pokriva ~ 7 ćelija, dok sa SB rekonstrukcijom pokriva $\sim 3-4$ ćelije. Poređenja radi, u testu za FLASH kôd (Fryxell et al., 2000) KD kao i udarni talas pokriva ~ 2 ćelije. Duplo uži KD region SB rekonstrukciju čini manje difuznom od VL, što će biti pokazano u Testu II ovog poglavlja. Međutim, SB rekonstrukcija često u blizini jakih diskontinuiteta proizvodi lažne oscilacije i teži formiranju stepenica u glatkim regionima (osobina poznata kao kompresivnost).



Slika 2.4: Rezultati Sodovog testa u trenutku $t = 0.2$ sa *van Leer* (levo) i *superbee* (desno) ograničenjima nagiba. Grafici raspodela odozgo nadole prikazuju: gustinu, specifičnu unutrašnju energiju i brzinu. Preuzeto iz rada Kostića (Kostić, 2019).

2.4.2 Test II - Razbijanje sfernog oblaka pod udarnim talasom

Ovaj test je baziran na simulaciji iz rada Orlando sa saradnicima (Orlando et al., 2005). Homogen sferni oblak poluprečnika 1 pc, gustine 1 cm^{-3} i tempera-

ture 10^3 K nalazi se u hidrostatičkoj ravnoteži sa okolnom sredinom čija je gustina $\rho_0 = 0.1 \text{ cm}^{-3}$, a temperatura 10^4 K. Pritisak, $p = nk_B T$, gde je k_B Bolcmanova konstanta, je isti u obe sredine. Na oblak nailazi ravan udarni talas Mahovog broja $M = 50$ i razbija ga. Gustina, brzina i pritisak nailazećeg talasa (odnosno sredine iza udarnog talasa) su:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \\ u &= \frac{2}{\gamma + 1} v_s \quad (v_s = Ma), \\ p &= \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 v_s^2.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Evolucija ovog fenomena je predodređena sa dva parametra: Mahovim brojem koji određuje jačinu udarnog talasa i kontrastom gustine između oblaka i okolne sredine, bez obzira na apsolutne vrednosti kao što su gustina materije i brzina udarnog talasa.

Radi uštede računarskog vremena, simulaciona kutija pokriva samo jedan kvadrant oblaka čiji se centar nalazi na koordinatama $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Granični uslovi na stranicama $x = 0$ i $y = 0$ su reflektivni, na $x = x_{\max}$, $y = y_{\max}$ i $z = z_{\max}$ su transmisivni, a na $z = z_{\min}$ su konstantno ulivajući, jer sa te strane nailazi ravan udarni talas. Dimenzije kutije su $2 \times 2 \times 5.5$ pc sa mrežom od $200 \times 200 \times 550$ ćelija. Da bi se postigla glatka raspodela gustine na granicama oblaka prema okolnoj sredini, gustina u ćelijama koje se samo delimično nalaze u oblaku se računa kao prosek od $10 \times 10 \times 10$ sub-ćelija.

Rezultati su prikazani na Slici 2.5 sa uporednim prikazom preseka gustine u simulacijama sa VL i SB rekonstrukcijom. Na mestu prvog kontakta primarnog udarnog talasa sa gustim oblakom javljaju se dva sekundarna udarna talasa, jedan transmitovani koji nastavlja da propagira kroz oblak i jedan reflektovani, tzv. lučni talas koji zaostaje iza transmitovanog. Primarni talas ubrzo obavija čitav oblak kompresujući ga transmitovanim talasom sa svih strana. On se zatim susreće sa samim sobom pod uglom u najdaljoj tački oblaka, gde se takođe dešava transmisija i (konusna) refleksija usled kojih primarni talas iza oblaka ima kompleksan oblik i unutrašnjost. Susretanje kosih udarnih talasa na osi simetrije proizvodi efekat „Mahovog diska” (Klein et al., 1994). Nakon što biva kompresovan, oblak počinje da se širi pod pritiskom, pritom razvijajući hidrodinamičke nestabilnosti na svojim granicama usled

vtložnja izazvanog od strane primarnog talasa. Sve veća deformisanost oblaka do-
vodi do njegove fragmentacije i raspadanja. Ove slike se dobro slažu sa Slikom 3 iz
rada Orlanda i saradnika (Orlando et al., 2005), iako je njihova rezolucija nešto veća,
132 ćelije po radijusu, što predstavlja minimalnu adekvatnu rezoluciju za razvijanje
nestabilnosti predviđenu u radovima Klajna i saradnika (Klein et al., 1994) i Mek
Loua i saradnika (Mac Low et al., 1994). Razbijanje oblaka udarnim talasom se, vrlo
slično prikazanim simulacijama, pojavljuje u posmatranju ostatka Cygnus Loop od
strane Fesena i saradnika (Fesen et al., 1992), kao što je prikazano na Slici 2.6.

Očigledna je razlika između VL i SB rekonstrukcije po pitanju turbulencija i
nestabilnosti. Na levim panelima gustine se već na početku vidi suzbijenost nestabi-
lnosti na površini oblaka. Klajn sa saradnicima (Klein et al., 1994) je demonstrirao
da vrtložnje koje se javlja u zoni sudara udarnog talasa sa oblakom nije numerički
artefakt nego rezultat fizičkih procesa.

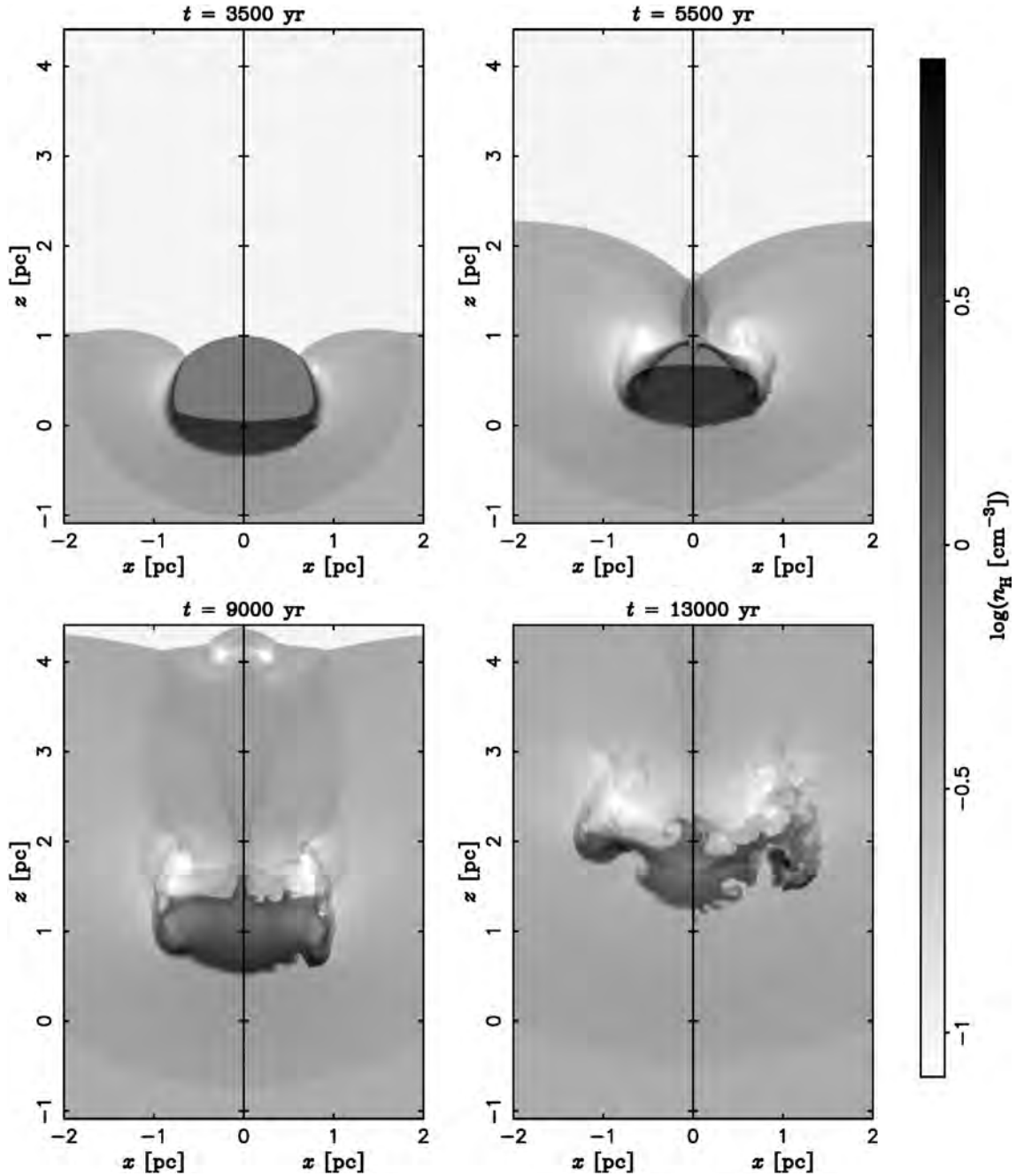
Orlando sa saradnicima (Orlando et al., 2005) je puštao iste simulacije sa dodat-
nim modulima koji simuliraju radijativne gubitke i termalnu kondukciju. Bitno je
napomenuti da ova dva efekta imaju značajni uticaj na evoluciju ovog fenomena.

2.4.3 Test III - Širenje grudvičastog materijala odbačenog eksplozijom

Ovaj test je baziran na modelu pod oznakom EX-C1.5-D1 iz rada Orlanda sa
saradnicima (Orlando et al., 2012). Dvarkadas i Ševalije (Dvarkadas & Chevalier,
1998) su gustinu zvezdanog materijala odbačenog eksplozijom tipa Ia predstavili
eksponencijalnim profilom. Za deflagracione modele profil gustine je stepeni sa in-
deksom $n = 7$ (Chevalier, 1983; Nomoto et al., 1984). Početna postavka ovog testa
sadrži sferosimetrični materijal eksponencijalnog profila gustine, koji se širi brzi-
nom koja je srazmerna radijusu (pseudo-Hablov tok, Hole et al., 2010):

$$\begin{aligned}\rho(r) &= Ae^{-r/R}, \\ v(r) &= \frac{r}{R}v_e,\end{aligned}\tag{2.33}$$

gde je R početni (maksimalni) radijus sfere, a v_e je brzina materijala na radijusu R .
Ako postavimo ukupnu masu odbačenog materijala, $M_e (= 1.4M_\odot)$, kao i njegovu

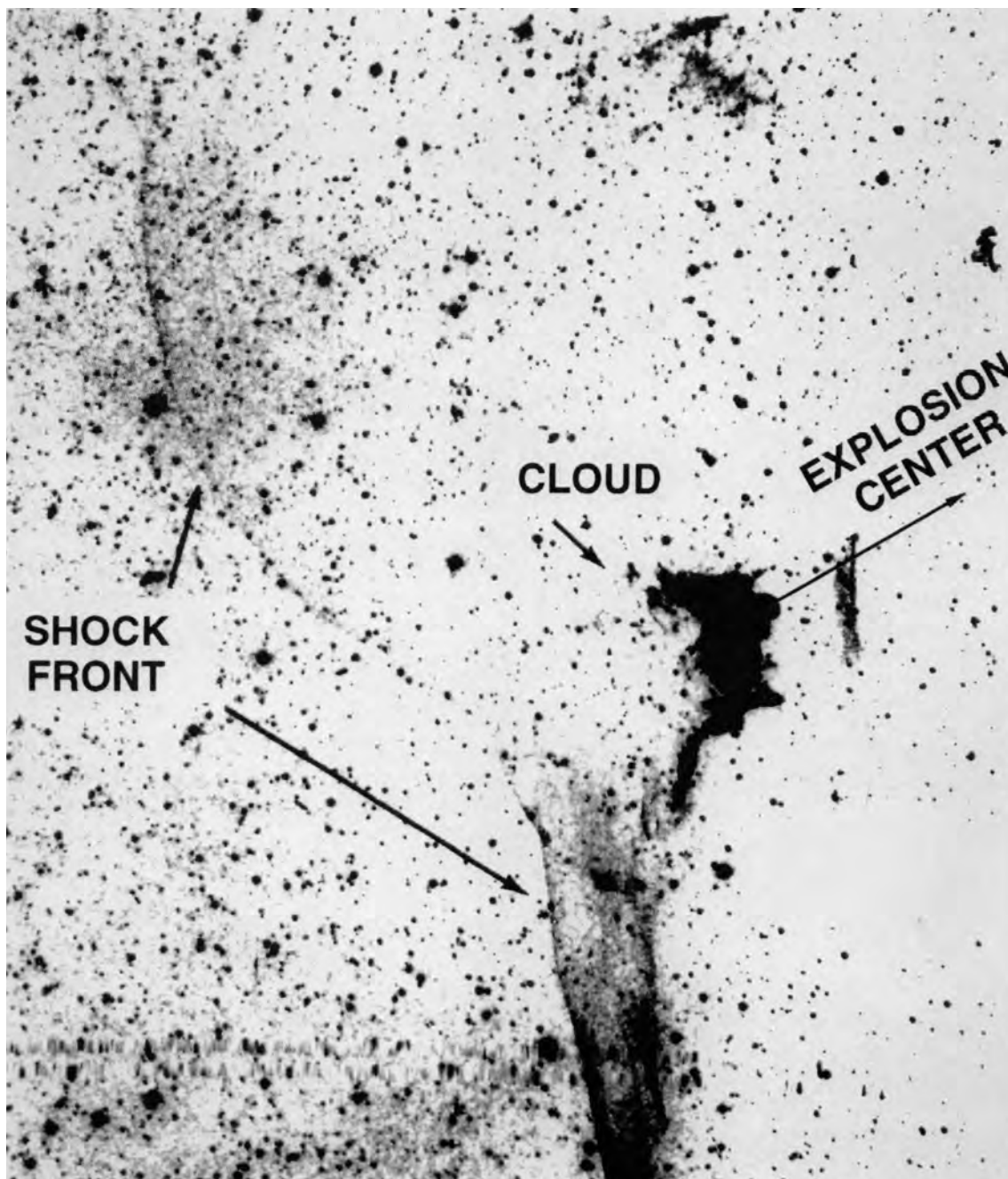


Slika 2.5: Preseci gustine u testu razbijanja oblaka ravnim udarnim talasom. Vremena prikazanih slika su 3500, 5500, 9000 i 13000 godina nakon početka simulacije. U jedinicama karakterističnog vremena potrebnog za razbijanje oblaka, definisanog u radu Orlando sa saradnicima (Orlando et al., 2005) kao $\tau_{\text{cc}} = r_{\text{cl}}/v_{\text{cl}} \approx 5400$ yr, ova vremena su $0.62\tau_{\text{cc}}$, $0.99\tau_{\text{cc}}$, $1.64\tau_{\text{cc}}$ i $2.38\tau_{\text{cc}}$ (mereno od prvog kontakta). Leve i desne „polovine” panela predstavljaju simulacije sa VL i SB rekonstrukcijama, respektivno.

kinetičku energiju, onda imamo:

$$A = \frac{M_e}{4\pi R^3(2 - 5/e)},$$

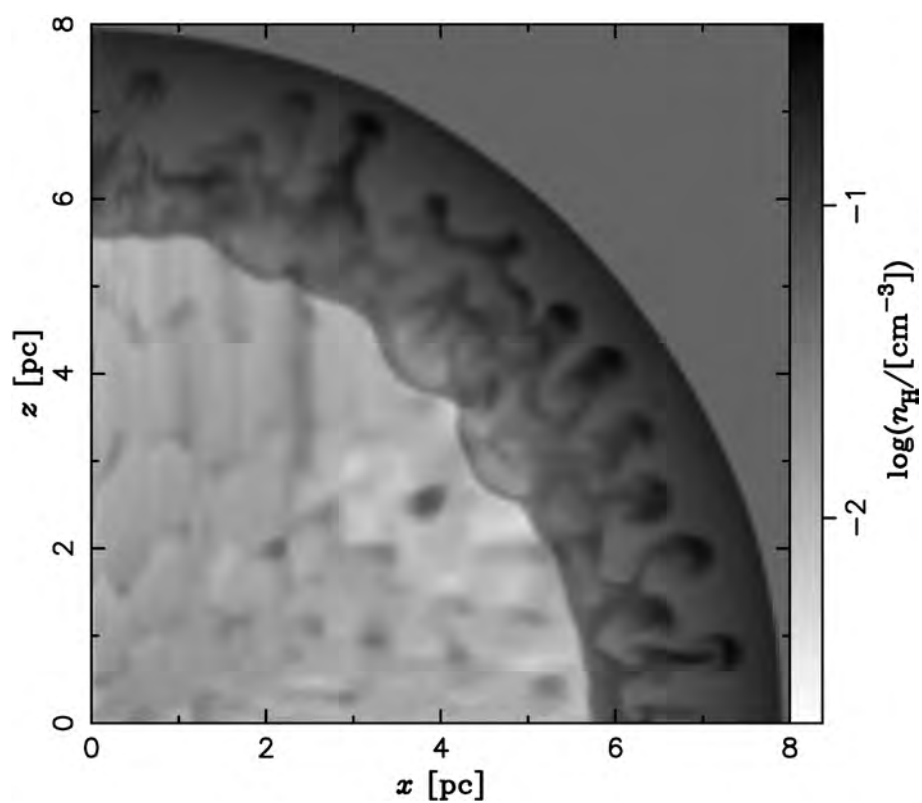
$$v_e = \left(\frac{4e - 10}{24e - 65} \frac{E_k}{M_e} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.34)$$



Slika 2.6: Slika prikazuje posmatranje ostatka supernove Cygnus Loop od strane Fesena i saradnika (Fesen et al., 1992). Prikazan je deo ostatka na kom se vidi oblak gasa preko kog je prešao udarni talas. Morfologija udarnog talasa i oblaka se dobro poklapaju sa simulacijama ovog fenomena. Talas koji je vidljiv iza oblaka, prema centru ostatka, nije reflektovani lučni talas kao što je pretpostavljeno u radu Fesena sa saradnicima (Fesen et al., 1992), već projektovana emisija koja nije povezana sa ovim sudarom. Lučni talas bi bio zakrivljen konkavno u odnosu na oblak i njegova $H\alpha$ emisija bi bila daleko slabija s obzirom da je sredina iza udarnog talasa potpuno jonizovana. Preuzeto iz rada Klajna sa saradnicima (Klein et al., 1994).

Kinetička energija odbačenog materijala je definisana kao 99% ukupne ($E_0 = 10^{51}$ erg), u svakoj ćeliji. Da bi se postigao efekat nehomogenosti materijala, gustina je perturbovana od ćelije do ćelije slučajnim faktorom između 0.625 i 1.5, uz stepenu raspodelu verovatnoće sa indeksom -1 . Ovim parametrima se postiže da integralna vrednost mase nakon perturbacije ostane M_e . Iako perturbacija gustine utiče na vrednost impulsa i energije u ćelijama, pritisak ostaje gladak, kao bez perturbacije. Ovo je uobičajeni model grudvičaste strukture u kojem mesta manje gustine predstavljaju mehuriće u materijalu u kojima se stvara nikl. Ovakva nehomogena struktura je najodgovornija za formiranje Rejli-Tejlorovih nestabilnosti na kontaktnom diskontinuitetu (Orlando et al., 2012; Pavlović, 2017). Okolna sredina je homogeni monoatomski gas gustine 0.05 cm^{-3} i temperature 10^3 K . Grudvičasti materijal iz ovog testa ne treba mešati sa grudvastom međuzvezdanom sredinom o kojoj će biti reči u Glavi 4 i kasnije.

Ostatak je inicijalizovan kao oktant sfere kako bi se postigla veća rezolucija za kraće vreme izvršenja simulacije. U tom slučaju granice na $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ moraju biti reflektivne, a $x = x_{\max}$, $y = y_{\max}$ i $z = z_{\max}$ bi trebalo da budu transmisivne, premda je simulacija gotova onda kada materijal dosegne ivicu kutije. Na Slici 2.7, posle skoro 1000 godina od početka simulacije, vide se razvijene RT nestabilnosti na kontaktnom diskontinuitetu.



Slika 2.7: Presek gustine iz testa širenja grudvičastog zvezdanog materijala. Starost ostatka je približno 920 godina. U regiji između prednjeg i povratnog udarnog talasa se razvijaju Rejli-Tejlorove nestabilnosti koje imaju oblik pečurki.

Glava 3

Model emisije

Cilj ove glave je modelovanje emisije sinhrotronskog zračenja na udarnom talasu OSN. Glavni ulazni parametri modela su faktor kompresije X i brzina udarnog talasa v_s , koji se računaju iz simulacija (videti poglavlje 4.3). U nelinearnom DSA mehanizmu, ubrzane čestice čine dominantni udeo u pritisku, menjajući strukturu udarnog talasa, pri čemu se kompresija podiže iznad $X = 4$ (za $\gamma = 5/3$). Ključna posledica ovog procesa je izmenjeni spektar čestica koji se konkavno podiže na repu raspodele (Blasi et al., 2005). Činjenica je da modifikacija udarnog talasa usled nelinearnih efekata ne može biti simulirana hidrodinamičkim kodom, pa će u ovom radu biti korišćena aproksimacija test-čestice. Ukupno zračenje OSN će biti računato kao integralna količina zračenja test-čestica sa cele površine udarnog talasa. Ovakav model nije realan u svim slučajevima, ali ovde će poslužiti kao jednostavan način za implementaciju emisije u HD simulacije, kao i u semi-analički hidrodinamički model iz Glave 5. Uzgred, većina radio-spektara OSN imaju oblik prostog stepenog zakona, sugerišući slabu modifikaciju. Za više detalja o radio-spektrima OSN, videti rad Uroševića (Urošević, 2014).

Za stepenu raspodelu ubrzanih elektrona $N(E)dE = KE^{-\Gamma}dE$, koja se podrazumeva u modelu, emisivnost sinhrotronskog zračenja u cgs jedinicama je (Pacholczyk, 1970):

$$\varepsilon_\nu = c_5 K B_2^{\alpha+1} \left(\frac{\nu}{2c_1} \right)^{-\alpha} [\text{erg s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ cm}^{-3} \text{ sr}^{-1}], \quad (3.1)$$

gde je E energija čestica, B_2 magnetno polje iza udarnog talasa, $\alpha = (\Gamma - 1)/2 = 3/(2X - 2)$ je radio-spektralni indeks, a ν frekvencija (u ovom radu se razmatra

zračenje na $\nu = 1$ GHz). Konstante $c_1 = 6.27 \cdot 10^{18}$ i $c_5 = 1.8786 \cdot 10^{-23}$, u cgs jedinicama, su definisane u knjizi Paholjčika (Pacholczyk, 1970). Konstanta K je (Arbutina, 2017):

$$K = N(\Gamma - 1)(p_{inj}^e c)^{(\Gamma-1)}, \quad (3.2)$$

gde $N = \eta_e n_2$ predstavlja ukupan broj ubrzanih čestica po jedinici zapremine, p_{inj}^e je ubrizgani impuls elektrona iznad kog se oni ubrzavaju i c je brzina svetlosti. Vrednost η_e , efikasnost ubrzavanja, je udeo elektrona koji prešavši preko udarnog talasa učestvuju u procesu ubrzavanja.

Pretpostavljena je jednakost ubrizganog impulsa elektrona i protona, $p_{inj}^e = p_{inj}^p$. Odnos broja elektrona i protona, $K_{ep} = 10^{-2}$, zasnovan na posmatranjima Galaktičkih kosmičkih zraka, daje $\eta_e = \eta_p 10^{-2}$. Sledeći recept za ubrizgavanje čestica iz „termalnog bazena”, iz rada Blazija i saradnika (Blasi et al., 2005), p_{inj}^p se dobija u odnosu na impuls protona na termalnom vrhu Maksvelove raspodele, u regionu iza udarnog talasa:

$$\begin{aligned} p_{inj}^p &= \xi p_{th}^p, \\ p_{th}^p &= \sqrt{2m_p k_B T_2^p}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gde je $\xi \sim 3-4$ parametar ubrizgavanja koji određuje impuls iznad kojeg se sve čestice ubrzavaju do energija kosmičkih zraka, a T_2^p je temperatura protona u regionu iza udarnog talasa. Iako ubrizgavanje iz termalnog bazena nije mnogo realistično, isti recept se primenjuje na *shock-drift* ili *micro-DSA* predubrzanje protona i elektrona (Arbutina & Zeković, 2021). U slučaju test-čestice $\xi \approx 4$, a T_2^p se izvodi iz Rankin-Igonioovih relacija (Vink et al., 2015):

$$k_B T_2^p = \frac{1}{X} \left(\frac{1}{\gamma M^2} + 1 - \frac{1}{X} \right) m_p v_s^2. \quad (3.4)$$

Efikasnost ubrizgavanja protona veoma zavisi od ξ usled eksponencijalnog karaktera Maksvelove raspodele na višim impulsima (Blasi et al., 2005):

$$\eta_p = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (X - 1) \xi^3 e^{-\xi^2}, \quad (3.5)$$

ali uz fiksirani parametar ubrizgavanja, ona zavisi samo od kompresije na udarnom talasu. Sada su poznati svi članovi jednačine (3.2).

Za model pojačanja magnetnog polja je usvojen pristup iz rada Sarbadikarija sa saradnicima (Sarbadhicary et al., 2017), gde se pojačano magnetno polje (ispred

udarnog talasa) sastoji od dva dela: rezonantnog, koje dominira u kasnim fazama kada udarni talas slabi, i nerezonantnog, koje dominira u ranim fazama evolucije OSN. Magnetno polje ispred udarnog talasa B_1 zavisi od gustine energije kosmičkih zraka ϵ_{CR} , Alfenovog Mahovog broja M_A i brzine udarnog talasa v_s (Sarbadhicary et al., 2017):

$$\frac{B_1^2}{8\pi} = \frac{\epsilon_{\text{CR}}}{2} \left(\frac{v_s}{c} + \frac{1}{M_A} \right). \quad (3.6)$$

Prvi i drugi član u zagradi predstavljaju doprinos nerezonantnog i rezonantnog režima, respektivno. Alfenov Mahov broj se aproksimira Mahovim brojem, pretpostavljajući njihovu približnu jednakost. Kako se samo transverzalna komponenta B_1 kompresuje iza udarnog talasa, pod pretpostavkom izotropnog magnetnog polja, pojačano magnetno polje iza udarnog talasa je:

$$B_2 = \sqrt{\frac{1 + 2X^2}{3}} B_1. \quad (3.7)$$

U modelu se pretpostavlja da protoni dominiraju kosmičkim zracima, a njihova gustina energije je (Arbutina, 2017):

$$\epsilon_{\text{CR}} \approx \epsilon_p = \eta_p n_2 (\Gamma - 1) x_{\text{inj}}^{\Gamma-1} m_p c^2 I(x), \quad (3.8)$$

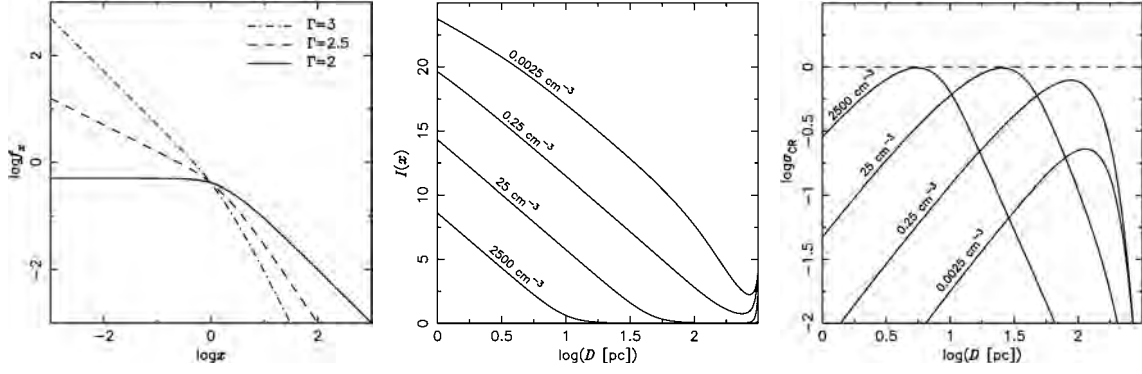
gde je $I(x)$ integral impulsa protona, izraženog u jedinicama $m_p c$, u granicama x_{inj} i x_{max} :

$$I(x) = \int_{x_{\text{inj}}}^{x_{\text{max}}} x^{-\Gamma} \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right) dx. \quad (3.9)$$

Ovaj integral se rešava numerički, a njegove granice su:

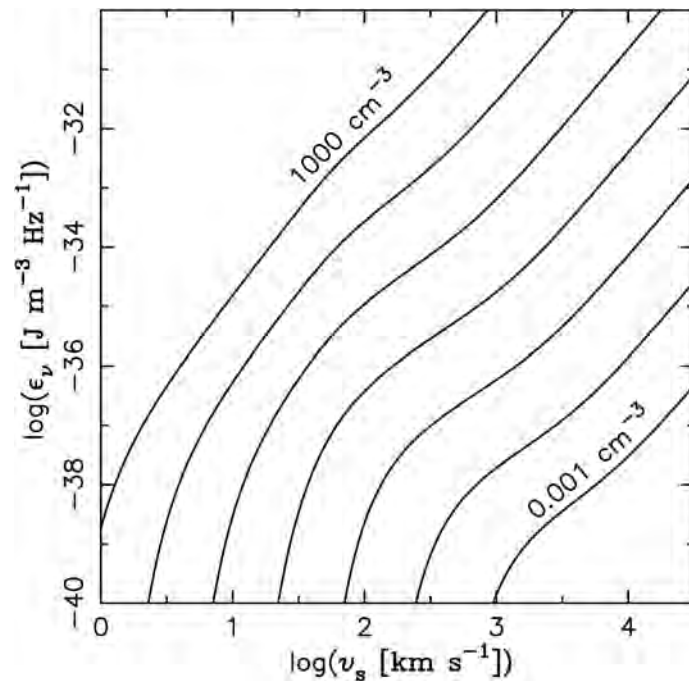
$$\begin{aligned} x_{\text{inj}} &= \frac{p_{\text{inj}}^p}{m_p c}, \\ \log x_{\text{max}} &= 1 + \frac{5}{2} \log \left(\frac{v_s}{100 \text{ km s}^{-1}} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aproksimativna zavisnost maksimalnog impulsa protona od brzine udarnog talasa, bazirana na radu Ptuškina i Zirakašvilija (Ptuskin & Zirakashvili, 2003), osigurava da frakcija pritiska na udarnom talasu koja pripada kosmičkim zracima, $\sigma_{\text{CR}} \equiv \epsilon_{\text{CR}} / (\rho_0 v_s^2)$, bude manja od jedan. Levi grafik na Slici 3.1 prikazuje funkciju ispod integrala, $f_x = x^{-\Gamma} (\sqrt{x^2 + 1} - 1)$, koja predstavlja raspodelu impulsa ubrzanih protona. Srednji i desni grafik prikazuju evoluciju $I(x)$ i σ_{CR} sa prečnikom OSN.



Slika 3.1: *Levo.* Funkcija pod integralom iz jednačine (3.9), $f_x = x^{-\Gamma} \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right)$, za tri vrednosti Γ . Funkcija predstavlja stepenu raspodelu impulsa ubrzanih elektrona i ima dva režima nagiba, za nerelativističke (nagib $2 - \Gamma$) i relativističke čestice ($1 - \Gamma$). U slučaju jakog udarnog talasa ($\Gamma = 2$) više čestica se ubrzava do relativističkih energija. *Sredina.* Integral $I(x)$ kao funkcija prečnika OSN, za četiri vrednosti n_0 . Očigledno je da vrednost integrala, pored gustine, zavisi i od brzine udarnog talasa (tj. x_{\max}). *Desno.* Odnos između gustine energije kosmičkih zraka i udarnog talasa, σ_{CR} , kao funkcija prečnika OSN, za četiri vrednosti n_0 .

Kao što se vidi iz prezentovanog modela, za računanje emisivnosti ε_ν su potrebni samo brzina udarnog talasa v_s , koncentracija čestica iza udarnog talasa n_2 i Mahov broj M . U poglavlju 4.3 su izvedene jednačine koje povezuju ove vrednosti sa lokalnom brzinom iza udarnog talasa v_2 , lokalnom okolnom koncentracijom čestica n_0 i lokalnom okolnom brzinom zvuka a_0 , koje se dobijaju iz simulacija. Na Slici 3.2 je prikazana zavisnost emisivnosti od v_s za različite vrednosti okolne koncentracije n_0 .



Slika 3.2: Zavisnost emisivnosti od brzine udarnog talasa, za više različitih vrednosti okolne koncentracije (n_0 se od svake susedne krive razlikuje za jedan red veličine). Opseg brzina od 100 do 20 000 km/s pokriva tipične brzine udarnih talasa OSN. Ovde je korišćen okolni pritisak $p = 2500k_B$.

Glava 4

Opis simulacija ostataka supernovih

U ovoj glavi će biti opisane postavke simulacija OSN u homogenoj i nehomogenoj, odnosno grudvastoj sredini. Sve simulacije su puštane pomoću numeričkog koda opisanog u poglavlju 2.3, odnosno u radu [Kostić \(2019\)](#). U pitanju su hidrodinamičke simulacije u koje nije uključeno magnetno polje, niti gasna fizika poput radijativnog hlađenja, termalne kondukcije ili jonizacije.

Glavni izlazni podaci koji se sakupljaju iz simulacija, i kasnije modeluju, su gustina, brzina i energija/pritisak u svim ćelijama koje se nalaze na prednjem udarnom talasu ostatka. S obzirom da je prednji udarni talas prva perturbacija koja nailazi na okolnu materiju koja se nalazi ispred njega, on praktično predstavlja površinu ostatka pa će često tako biti razmatran ili nazivan. Tokom simulacije se u definisanim vremenskim razmacima računa radio-sinhrotronska emisija sa površine OSN pomoću modela prikazanog u Glavi 3 koji je implementiran u kod. Metod implementacije koji uključuje detekciju prednjeg udarnog talasa je opisan u poglavlju 4.3.

4.1 Početni uslovi OSN

U svim simulacijama se koristi kockasta kutija čije koordinate stranica imaju raspon od 0 do 40 parseka, sa rezolucijom od 320^3 ćelija. Sferni oktant OSN se postavlja tako da se centar sfere poklapa sa koordinatnim početkom koji se nalazi u ćošku simulacione kocke. Koriste se predefinisane Sedovljeve raspodele gustine, impulsa i energije opisane u sledećem poglavlju, a gustina van ostatka se postavlja u

skladu sa modelima koji će biti opisani u narednim poglavljima. S obzirom da ostaci imaju Sedovljeve profile, postulirano je da je masa zvezdanog materijala zanemarljiva i da su ostaci u Sedovljevoj fazi. Ova postavka je potrebna zbog lakšeg analitičkog pristupa hidrodinamici OSN u grudvastoj sredini koji će biti opisan u Glavi 5, sa zadatkom da se modeluju rezultati simulacija. Biće posmatrana evolucija ostataka u rasponu prečnika od 10 do 80 pc. Energija eksplozije je $E_0 = 10^{51}$ erg = 10^{44} J, okolna gustina potrebna za dobijanje Sedovljevih profila, ujedno gustina između grudvi, je $\rho_0 = 0.05 \text{ cm}^{-3}$, a inicijalni poluprečnik OSN je $R_0 = 2.5$ pc.

4.1.1 Sedovljevo rešenje

U ovom poglavlju će biti opisana rešenja Sedovljevih samo-sličnih profila. Prezentovano rešenje se odnosi na tačkastu eksploziju u uniformnoj okolnoj sredini. Za udarne talase koji se kreću kroz sredinu sa gradijentom gustine $\rho = \rho_0 r^{-\omega}$, videti rad Kama i Timsa (Kamm & Timmes, 2007). Sedovljevo rešenje (Sedov, 1959) je skup parametarskih jednačina za radijus, gustinu, brzinu i pritisak. Sedov ih je dao u opštem obliku kao funkciju prostorne dimenzionalnosti ν , odnosa specifičnih toplota γ i promenljive V koja određuje poziciju između centra eksplozije i udarnog talasa. Opseg varijacije V unutar ovog domena je:

$$\frac{2}{(\nu + 2)\gamma} \leq V \leq \frac{4}{(\nu + 2)(\gamma + 1)}. \quad (4.1)$$

Naredne četiri jednačine (nakon zamene $\nu = 3$ i $\gamma = 5/3$) daju relativne vrednosti radijusa r , gustine ρ , brzine v i pritiska p , u odnosu na njihove vrednosti odmah iza udarnog talasa, kao funkciju V :

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_2} &= \left(\frac{10}{3}V\right)^{-\frac{2}{5}} \left(\frac{50}{3}V - 4\right)^{-\alpha_2} (5 - 10V)^{-\alpha_1}, \\ \frac{\rho}{\rho_2} &= \left(\frac{50}{3}V - 4\right)^{\alpha_3} (4 - 10V)^{\alpha_5} (5 - 10V)^{\alpha_4}, \\ \frac{v}{v_2} &= \frac{10}{3}V \frac{r}{r_2}, \\ \frac{p}{p_2} &= \left(\frac{10}{3}V\right)^{\frac{6}{5}} (4 - 10V)^{\alpha_5+1} (5 - 10V)^{\alpha_4-2\alpha_1}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gde su:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{10} - \frac{25}{12}\alpha_2, \quad \alpha_2 = -\frac{2}{13}, \quad \alpha_3 = \frac{9}{13}, \\ \alpha_4 &= 15\alpha_1, \quad \alpha_5 = -6.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Ako su poznati energija eksplozije E_0 , okolna gustina ρ_0 i radijus ostatka r_s (ili vreme posle eksplozije t), Sedovljevi profili $\rho(r)$, $v(r)$ i $p(r)$ se dobijaju numerički iz jednačina (4.2) korišćenjem relacija:

$$\begin{aligned}r_2 &= r_s = 1.15 \left(\frac{E_0 t^2}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}}, \\ v_s &= \frac{2}{5} \frac{r_s}{t}, \\ \rho_2 &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \\ v_2 &= \frac{2}{\gamma + 1} v_s, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 v_s^2,\end{aligned}\tag{4.4}$$

gde je v_s brzina udarnog talasa. Prve dve jednačine u (4.4) predstavljaju Sedovljev zakon širenja, a izrazi za ρ_2 , v_2 i p_2 su Rankin-Igonioovi uslovi za jak udarni talas.

Važno je napomenuti da se pri implementaciji profila gustine u simulacije određene korekcije moraju dodati u blizini centra ostatka, u kome unutrašnja energija i temperatura teže beskonačnosti, a gustina je nula. Malo povećanje gustine u ovoj regiji osigurava konačnu temperaturu, kao i smanjenje brzine zvuka koje je od izuzetne važnosti jer ova brzina diktira dužinu vremenskog koraka simulacije. Ovo se postiže uvođenjem maksimalne dozvoljene brzine zvuka u zoni oko centra ostatka:

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},\tag{4.5}$$

gde se ρ dobija iz ove jednačine. Ograničenje a_{\max} je odabrano tako da ne utiče na stabilnost Sedovljevih profila tokom evolucije ostatka.

Inicijalizacija stanja OSN se vrši ubacivanjem ovih profila u mrežu simulacione kutije. Međutim, odmah nakon puštanja simulacije stvara se mala perturbacija koja kreće od vrha udarnog talasa prema centru i posle određenog vremena se „utopi” u profil (kada ostatak dostigne radijus od približno 5 pc). Tada se numerički stabilizuju Sedovljevi profili u simulaciji, koji se ipak malo razlikuju od analitičkih, posebno

u regionu samog udarnog talasa koji je malo „razmazan”, odnosno ne poseduje toliko oštar analitički diskontinuitet. Ovaj numerički efekat potiče od ograničene preciznosti numeričkog metoda i konačne dimenzije ćelija.

4.2 Modeli međuzvezdane materije

Simulacije evolucije OSN se puštaju u nekoliko različitih vrsta sredina. Prvo se pušta jednostavan slučaj u homogenoj sredini radi dobijanja kalibracionih faktora za poređenje rezultata simulacija sa teorijskim modelima. Druga sredina uključuje mehur niže gustine u kojem ostatak evoluira dok ne dostigne radijus iza koga je gustina sredine viša za određen faktor. Ovo je test kojim se utvrđuju fizičke posledice skoka okolne gustine po udarni talas i ostatak u celini. Na kraju sledi niz simulacija u grudvastoj sredini, sa različitim gustinama i učestanostima grudvi, čiji rezultati će biti upotrebljeni za razvoj semi-analitičkog modela hidrodinamičke evolucije OSN u grudvastoj sredini. U naredna tri potpoglavlja će biti opisane fizičke osobine ovih sredina.

4.2.1 Homogena sredina

Udarni talasi i kontaktne diskontinuiteti u simulacijama nikada ne mogu biti beskonačno tanki diskontinuiteti jer ćelije u simulacionoj mreži imaju konačnu širinu. Posledica ovoga, kao i konačne preciznosti šeme za rešavanje Ojlerovih jednačina, je „razmazanost” diskontinuiteta, a to znači da je skok između regiona ispred i iza udarnog talasa raspodeljen unutar nekoliko ćelija (kao što je prikazano na Slici 2.4 kod simulacije Sodovog problema). Stoga, postoje odstupanja između teorijskih i simuliranih vrednosti parametara udarnog talasa (npr. kompresija je uvek ispod teorijske), koja se smanjuju povećavanjem rezolucije. Radi lakšeg poređenja simuliranih i teorijski modeliranih podataka, potrebno je kalibrisati podatke dobijene iz simulacija, što je urađeno pomoću faktora kalibracije dobijenih iz jedne simulacije OSN u homogenoj sredini. Pošto se preciznost simuliranih parametara udarnog talasa takođe povećava sa prečnikom ostatka, jer tokom širenja on obuhvata sve više ćelija mreže,

faktori kalibracije su određeni u funkciji prečnika ostatka i tako se primenjuju u svim ostalim simulacijama.

U ovoj simulaciji, koja je nazvana U1, gustina okolne sredine je $\rho_0 = 0.05 \text{ cm}^{-3}$. Koristi se univerzalni pritisak od $p_0/k_B = 2500 \text{ K cm}^{-3}$, koji u ovom slučaju odgovara temperaturi od 50 000 K. Sredina je u stanju mirovanja, odnosno nulte brzine (impulsa), što važi i za sredine iz ostalih modela.

4.2.2 Mehur niže gustine

Mehur niže gustine (u daljem tekstu samo mehur) je sferna zapremina homogene gustine $\rho_0 = 0.25 \text{ cm}^{-3}$, unutar radijusa $r = 5 \text{ pc}$. Izvan tog radijusa gustina je viša, takođe homogena. Model mehura nije konstruisan da simulira neke realne pojave, već kao test hidrodinamike ostatka, posebno udarnog talasa. Naime, kada udarni talas OSN koji se prostire kroz uniformnu sredinu odjednom naiđe na sredinu veće gustine, dešava se velika hidrodinamička promena, kako na udarnom talasu tako i unutar ostatka, i talas koji nastavi prostiranje u novoj sredini ima drugačije osobine od prethodnog. Pri tome, ovaj problem nije moguće poistovetiti sa prostim Rimanovim problemom, jer se radi o zatvorenom trodimenzionom sistemu koji ima konačnu energiju. Da bi ovi problemi bili analizirani i pravilno modelirani, puštaju se tri simulacije, pod nazivom LDB2, LDB5 i LDB10 (LDB – *low-density bubble*, broj predstavlja faktor skoka gustine na radijusu r). Isto kao i u simulaciji U1, pritisak modelirane sredine je p_0 , a impuls je nula.

4.2.3 Grudvasta sredina

U cilju jednostavnog analitičkog modeliranja prostiranja udarnog talasa kroz grudvastu sredinu, kao model grudve je uzeta sfera homogene gustine (veće u odnosu na okolinu), uz uslov da se grudve ne preklapaju u prostoru. Ovo možda izgleda kao suviše pojednostavljen prikaz nehomogene MZM, ali sama struktura nehomogenosti neće uticati na važne kvalitativne zaključke koji proizlaze iz ovih simulacija. Drugi efekti, poput radijativnog hlađenja grudvi mnogo više utiču na ishod simulacija i o njima će biti diskutovano. Nehomogena MZM, iako po prirodi fraktalna i bez

oštrih diskontinuiteta gustine, u aproksimaciji se uvek može predstaviti grudvama određene gustine i prečnika. Pretpostavka je da ukupna masa sredine kroz koju evoluira OSN ima mnogo veći uticaj na njegovu hidrodinamičku evoluciju od same raspodele gustine, barem u aproksimaciji adijabatske faze.

Nakon nasumične raspodele grudvi u celoj simulacionoj kutiji, gustina unutar radijusa $r = 5$ pc je svedena na $\rho_0 = 0.05 \text{ cm}^{-3}$, što je ujedno i gustina između grudvi. Grudvama koje su svojom zapreminom presecale zamišljenu sferu radijusa r su isečeni delovi unutar ove sfere. Na ovaj način se približno izjednačava udeo grudvastog materijala u prostoru i na sfernoj površini ostatka prilikom njegovog prvog susreta sa grudvama, i ujednačava prostorni udeo grudvi nakon radijusa r . Ovaj nagli prelaz, iako nerealističan, je važan zbog jasnog uočavanja efekata tranzicije među sredinama, kao i lakše interpretacije rezultata pri poređenju sa semi-analitičkim modelom. Radijus od 5 pc za granicu uniformne i grudvaste sredine je izabran da dimenzije grudvi i ostatka ne bi bile uporedive, čime bi se mogao narušiti pseudo-sferni oblik ostatka.

Grudvasta sredina se sastoji od dve faze: sredine između grudvi (eng. *interclump medium* – ICM) koja je iste gustine kao i uniformna sredina unutar radijusa r ($\rho_{\text{icm}} = \rho_0$) i ansambla identičnih grudvi gustine $\rho_c > \rho_{\text{icm}}$ (indeks „c” je od engleskog *clump*). Postavke grudvaste sredine se razlikuju po gustini grudvi i po njihovom prostornom udelu. Rezultati će biti predstavljeni za tri gustine grudvi: 10, 30 i 100 puta veće od gustine između grudvi, sa oznakama C10, C30 i C100, respektivno. Ove vrednosti su odabrane kako bi se pokrio širok opseg kontrasta gustine. Za svaki od ovih tipova grudvi puštaju se simulacije sa dva različita prostorna udela: $f_c = 0.1$ i 0.25 , sa oznakama F10 i F25, respektivno. Broj grudvi je takav da osigurava ravnomernu srednju gustinu duž radijusa ostatka, ali da zapremina grudve pokrije dovoljan broj ćelija mreže. U režimu F10 broj grudvi je 1400, tako da je poluprečnik jedne grudve $r_c \approx 1.03$ pc (što iznosi ≈ 8.24 ćelija). Parametri svih simulacija su navedeni u Tabeli 4.1. Za potrebe određivanja parametara opisanih u poglavljima 5.2.4 i 5.2.6 puštane su simulacije C3 i C300, sa kontrastom gustine od 3 i 300, ali ove simulacije nisu prikazane u rezultatima radi izbegavanja opširnosti.

Tabela 4.1: Parametri simulacija.

Model	Sredina	Gustina [cm^{-3}]	
U1	Uniformna	$\rho_0 = 0.05$	
		$\rho_l (R < 5 \text{ pc})$	$\rho_h (R \geq 5 \text{ pc})$
LDB2		0.25	$2\rho_l$
LDB5	Uniformna	0.25	$5\rho_l$
LDB10		0.25	$10\rho_l$
		$\rho_{\text{icm}} (i R < 5 \text{ pc})$	ρ_c
C3		0.05	$3\rho_{\text{icm}}$
C10		0.05	$10\rho_{\text{icm}}$
C30	Grudvasta	0.05	$30\rho_{\text{icm}}$
C100		0.05	$100\rho_{\text{icm}}$
C300		0.05	$300\rho_{\text{icm}}$

4.3 Detekcija i određivanje lokalnih osobina udarnog talasa

U ovom poglavlju će biti opisan metod detekcije udarnog talasa u toku simulacije, kao i određivanje brzine i površine njegovih lokalnih detektovanih tačaka. Implementacija ovog metoda u numerički kod je neophodna kako bi se tokom simulacije mogla računati lokalna sinhrotronska emisija sa udarnog talasa po modelu iz Glave 3. Krajnji rezultat ove implementacije je računanje ukupne luminoznosti simuliranog ostatka i njegov površinski sjaj.

Pozicija udarnog talasa se detektuje na numeričkoj mreži kao skup reprezentativnih tačaka, odnosno ćelija, koje ispunjavaju određene uslove. Ovaj postupak je opisan u poglavlju 4.3.1. Na svakoj od tačaka se računa brzina udarnog talasa kao ulazni parametar modula koji računa emisivnost (poglavlje 4.3.2). Ostali ulazni parametri su koncentracija n_0 i brzina zvuka a_0 neporemećene sredine na toj tački pre nailaska udarnog talasa. Koncentracija se računa preko gustine, podrazumevajući da se materija sastoji od atomskog vodonika. Za računanje lokalnih luminoznosti, čija suma po celoj površini ostatka predstavlja njegovu ukupnu luminoznost, potrebne su zapremine detektovanih tačaka. Određivanje ovih zapremina će biti opisano u poglavlju 4.3.3.

4.3.1 Detekcija udarnog talasa

Pozicija udarnog talasa se obično opaža na ćelijama koje ispunjavaju niz hidrodinamičkih uslova, kao što je promena znaka drugog izvoda gustine (Fryxell et al., 2000). Na ovaj način udarni talas se detektuje na pozicijama ispred vrhova profila gustine, brzine i pritiska (u smeru vektora brzine), u ćelijama gde su njihove vrednosti oko polovine maksimalnih. U numeričkim simulacijama se one mogu shvatiti kao tačne pozicije udarnog talasa, jer je za razliku od analitičkog profila simulirani udarni talas raspodeljen preko nekoliko ćelija. Međutim, brzina ovako detektovanog udarnog talasa se teško može izračunati, pogotovo u 3D simulacijama. Stoga, usvajanjem pretpostavke da se pozicije udarnog talasa nalaze na ćelijama sa maksimalnim hidrodinamičkim stanjima, može se makar približno odrediti brzina udarnog talasa, sa onolikom preciznošću koliko dozvoljava rezolucija simulacione kutije.

U prezentovanom metodu, pozicije udarnog talasa se nalaze na ćelijama u kojima ukupni impuls dostiže maksimum u pravcu vektora brzine. Impuls je izabran zato što u sebi sadrži gustinu i brzinu, a na udarnom talasu obe veličine imaju snažan diskontinuitet, odnosno izraženu „grbu” u raspodeli. Dati uslov se formalno može napisati kao:

$$\frac{dp}{dv} = 0, \quad (4.6)$$

ali se ne može implementirati kao takav, jer numerički izvodi nikad nisu egzaktno nula. Algoritam zato traži i obeležava ćelije preko kojih ovaj izvod menja znak u pravcu vektora brzine. Potom, niz petlji skida oznake sa detektovanih ćelija koje su suvišne. Kriterijum za određivanje suvišnih ćelija je ukupna brzina u ćeliji: ukoliko postoje dve susedne detektovane ćelije (po nekoj od koordinata mreže), ćelija sa manjom brzinom je suvišna; ovaj algoritam je osetljiv na ugao između pravca brzine i koordinatne mreže, tako da obrađuje samo one ćelije koje delimično upiru svojim vektorima brzine jedna u drugu. Cilj čišćenja suvišnih tačaka je proređivanje finalno detektovanih tačaka udarnog talasa što je više moguće, zbog algoritma za računanje lokalnih površina koje pripadaju svakoj od tačaka, a koji će biti opisan kasnije.

U slučaju nehomogene sredine, uslov za detekciju udarnog talasa mogu da ispune i mnoge ćelije iz unutrašnjosti zapremine ostatka. Da bi se izbeglo obeležavanje

ovih ćelija, poseban algoritam prati širenje zapremine ostatka tako što kumulativno obeležava ćelije sa $dp/dv > 0$ u svakom vremenskom koraku. Ćelije koje su obeležene ovim oznakama i njima susedne ćelije (po nekoj od koordinata) su izostavljene iz algoritma za detekciju udarnog talasa.

Konačno, tačkama udarnog talasa se smatraju centri finalno obeleženih ćelija. Kada su one pronađene, algoritam dalje računa lokalnu brzinu udarnog talasa za svaku tačku pojedinačno.

4.3.2 Lokalna brzina udarnog talasa

Ovde će biti opisan metod računanja brzine udarnog talasa u detektovanim tačkama njegove površine. Kod plan-paralelnog udarnog talasa, relacija između brzine talasa v_s i brzine fluida iza udarnog talasa v_2 je poznata iz Rankin-Igonioovih uslova:

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{X}{X-1}v_2, \\ X &= \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}, \\ M &= v_s/a_0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ako su v_2 i a_0 poznati, a $\gamma = 5/3$, onda se iz ovog sistema jednačina izvodi kompresija kao:

$$\begin{aligned} X &= \frac{f^2 + 2/3 + \sqrt{f^2 + 4/9}}{f^2 + 1/3}, \\ f &= a_0/v_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Brzina v_2 je brzina u detektovanim ćelijama udarnog talasa. Ona je nešto niža od stvarne brzine v_2 usled razmazanosti udarnog talasa i konačne rezolucije, ali se sa porastom rezolucije ona svakako približava stvarnoj vrednosti.

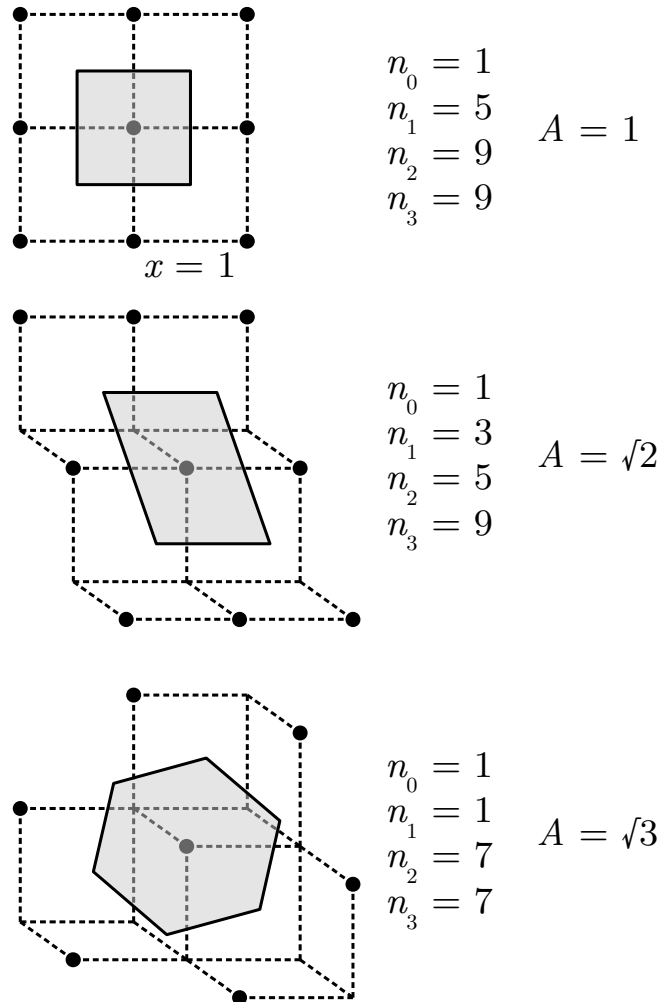
4.3.3 Lokalna zapremina detektovanih tačaka

Zapremina detektovane tačke se dobija kao proizvod površine koja pripada toj tački i debljine ljuske udarnog talasa na toj poziciji. Usvojeno je da je debljina ljuske ΔR proporcionalna rastojanju tačke od centra ekspanzije, tj. iznosi 1% tog rastojanja.

Površina koja pripada određenoj tački se računa numerički, uzimajući kao parametar broj okolnih tačaka. Koncept ovog metoda je ilustrovan na Slici 4.1, prikazujući tri reprezentativna slučaja gde ravan udarni talas putuje u tri karakteristična pravca u odnosu na koordinatnu mrežu. Prikazane prostorne raspodele tačaka odgovaraju metodu detekcije tačaka udarnog talasa koji je opisan u poglavlju 4.3.1, nakon izbacivanja suvišnih tačaka. Ideja je da se tačke udarnog talasa prorede koliko je to moguće, tako da nekolicina najbližih tačaka ostanu u približno istoj ravni. Metod detekcije standardizuje razmak između susednih tačaka, koji ne bi trebalo da bude veći od $\sqrt{3}$ dužine ivice ćelije. U tri karakteristična slučaja prikazana na slici, tačke su raspoređene egzaktno u istoj ravni, pa ovi slučajevi mogu da posluže kao etalon za izvođenje površine u ravni koja pripada jednoj tački u zavisnosti od broja i raspodele okolnih tačaka.

Kod prvog slučaja, ravan talas putuje u pravcu paralelnom jednoj od koordinatnih osa, recimo z -osi. Kao što vidimo, svaka ćelija u x - y ravni (na arbitrarnoj koordinati z) je obeležena kao tačka na udarnom talasu. Dakle, svakoj tački pripada površina x^2 , ako sa x obeležimo ivicu ćelije. U drugom slučaju, udarni talas putuje u pravcu normalnom na jednu osu, recimo z -osu, ali pod uglom od 45 stepeni u odnosu na x - i y -osu, pa pripadajuća površina ovde iznosi $\sqrt{2}x^2$. Analogno, za treći slučaj gde pravac prostiranja udarnog talasa zaklapa isti ugao sa sve tri koordinatne ose, pripadajuća površina je $\sqrt{3}x^2$, što se lako može pokazati.

Prema matematičkom konceptu prezentovanog metoda, ove površine se mogu izračunati u funkciji prostorne raspodele tačaka na rastojanju $\leq \sqrt{3}x$ od razmatrane tačke (uključujući i nju). Rastojanje od $\sqrt{3}x$ je izabrano uz pretpostavku da je udarni talas na toj skali i dalje približno ravan, kao i zbog toga što je prema metodu detekcije udarnog talasa to najveći razmak između detektovanih tačaka. Problem je što broj tačaka unutar ovog radijusa može biti isti, a da površina po tački bude različita, kao u slučajevima 1 i 2 u kojima ima devet tačaka. Zbog toga je potrebno uzeti u obzir raspodelu površinske frekvencije tačaka po udaljenosti od razmatrane tačke. Susedne tačke se jedino mogu naći na diskretnim vrednostima udaljenosti, redom na $x, \sqrt{2}x, \sqrt{3}x, \dots, \sqrt{nx}$, gde je n pozitivan ceo broj. Pretpostavljajući da se tačke na rastojanjima $\leq \sqrt{3}x$ nalaze u istoj ravni (zanemarujemo moguća mala odstupanja),



Slika 4.1: Ilustracija tri karakteristična slučaja prostiranja udarnog talasa kroz koordinatnu mrežu. U prvom slučaju (gornja skica) ravan udarnog talasa je paralelna sa dve koordinatne ose, a normalna na treću. U drugom slučaju (srednja skica) ravan je paralelna sa jednom osom, a sa druge dve zaklapa ugao od 45 stepeni. U trećem slučaju (donja skica) pravac prostiranja udarnog talasa zaklapa isti ugao sa sve tri ose. Isprekidane linije spajaju centre susednih ćelija mreže, a crne tačke predstavljaju one ćelije koje su detektovane na udarnom talasu. Površina udarnog talasa je podeljena između detektovanih tačaka, a površina koja pripada jednoj tački je osenčena i obeležena sa A , u jedinicama x^2 . Ukupan broj tačaka unutar krugova radijusa $<1, 1, \sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ je obeležen sa n_0, n_1, n_2 i n_3 , respektivno.

otežinjena površinska frekvencija je:

$$f_w = \int_{A_{\min}}^{\pi} \frac{n_0}{A} dA + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{n_1}{A} dA + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{n_2}{A} dA + \int_{3\pi}^{A_{\max}} \frac{n_3}{A} dA, \quad (4.9)$$

gde $n_0 = 1$ predstavlja razmatranu tačku, dok su n_1 , n_2 i n_3 ukupan broj tačaka unutar radijusa x , $\sqrt{2}x$ i $\sqrt{3}x$ od razmatrane tačke, respektivno (uključujući tačke na ovim radijusima). Počevši sa jednačinom (4.9), nadalje će x biti izostavljeno zbog lakšeg čitanja i računa ($x = 1$), pa će sve dužine biti izražene u jedinicama ivice ćelije. Granične vrednosti A između A_{\min} i A_{\max} predstavljaju površinu kruga na datim radijusima, dok su ove dve za sada nepoznate. Integral iz jednačine (4.9) se svodi na:

$$f_w = f_0 + l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3, \quad (4.10)$$

gde su f_0 , l_1 , l_2 i l_3 površinski koeficijenti koji se množe brojem tačaka unutar datih površinskih opsega ($f_0 = l_0 n_0$, gde je $n_0 = 1$). Vrednosti koeficijenata f_0 i l_3 , koji proizlaze iz graničnih vrednosti A_{\min} i A_{\max} , se dobijaju numerički minimizovanjem proizvoda apsolutnih odstupanja:

$$\min \left(\left| \frac{f_1/f_2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| \left| \frac{f_1/f_3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right| \right), \quad (4.11)$$

računatih za sistem jednačina:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + 5l_1 + 9l_2 + 9l_3, \\ f_2 &= f_0 + 3l_1 + 5l_2 + 9l_3, \\ f_3 &= f_0 + l_1 + 7l_2 + 7l_3, \end{aligned} \quad (4.12)$$

gde su f_1 , f_2 i f_3 otežinjene frekvencije kod slučajeva 1, 2 i 3. Rezultat je:

$$f_0 = -0.252500, \quad l_3 = 0.378700, \quad (4.13)$$

sa kojim odnosi otežinjenih frekvencija (inverzni odnosima pripadajućih površina) iznose:

$$\begin{aligned} f_1/f_2 &= 1.414200 \quad (1.414214), \\ f_1/f_3 &= 1.732051 \quad (1.732051), \\ f_2/f_3 &= 1.224757 \quad (1.224745). \end{aligned} \quad (4.14)$$

U zagradama su date vrednosti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{3/2}$, koje predstavljaju odnose pripadajućih površina za tri reprezentativna slučaja. Otežinjene frekvencije za sve ostale pravce prostiranja udarnog talasa se nalaze negde između ova tri slučaja. Nakon kalibrisanja frekvencija na vrednost f_1 , pripadajuća površina i -te tačke udarnog talasa (u jedinicama x^2) je:

$$A_i = \frac{f_1}{f_0 + l_1 n_{1i} + l_2 n_{2i} + l_3 n_{3i}}, \quad (4.15)$$

koja pomnožena sa debljinom ljuske daje zapreminu koja pripada datoj tački udarnog talasa:

$$V_i = A_i x^2 \Delta R_i. \quad (4.16)$$

Vrednosti l_1 , l_2 i f_1 su:

$$\begin{aligned} l_1 &= \ln 2, \\ l_2 &= \ln(3/2), \\ f_1 &= 10.270722. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Luminoznost simuliranog ostatka se sada može izračunati kao:

$$L = \sum_i \varepsilon_i V_i, \quad (4.18)$$

gde je ε_i emisivnost date tačke, koja se računa korišćenjem modela emisije iz Glave 3.

Glava 5

Semi-analitički model

hidrodinamičke evolucije i emisije

Puštanjem pojedinačnih simulacija dobijaju se podaci za određen skup ulaznih parametara. Međutim, kako je tih parametara mnogo, bilo bi potrebno puno simulacija koje zahtevaju značajnu količinu procesorskog vremena da bi bio ispitivan uticaj tih parametara na evoluciju OSN. S obzirom da je jedan od ciljeva ovog rada ispitivanje uticaja parametara nehomogene sredine na Σ - D relaciju, u ovoj glavi će analitičkim pristupom biti razvijen model hidrodinamičke evolucije OSN koji će za isti skup ulaznih parametara moći da računa osobine prednjeg udarnog talasa ostatka koji evoluiru u grudvastoj sredini. Pošto radio-sinhrotronska emisija kod OSN u Sedov-Tejlorovoj fazi dolazi sa prednjeg udarnog talasa, ovaj model daje sve potrebne podatke za računanje Σ - D zavisnosti kod ovakvih ostataka.

Semi-analitički model će biti razvijen i testiran pomoću simulacija koje su opisane u prethodnom poglavlju:

1. Uniformna sredina (simulacija U1). Ovo je trivijalan slučaj evolucije, gde se koristi Sedovljev zakon širenja u konstantnoj okolnoj gustini.
2. Mehur niže gustine (simulacije LDB2, LDB5 i LDB10) gde su ulazni parametri poluprečnik i gustine unutar i van mehura. Ove simulacije će biti test analitičkog metoda kod prelaska udarnog talasa u gušću sredinu.

3. Grudvasta sredina (simulacije C3F10–C300F10 i C3F25–C300F25). Ovom modelu će biti posvećeno najviše prostora.

Postavke simulacija su date u Tabeli 4.1. Prefiks semi- kod semi-analitičkog modela stoji zato što se neki parametri moraju računati numerički, kao što su izlazni parametri egzaktnog Rimanovog rešavača.

5.1 Tranzicija iz manje u veću gustinu – model mehura

Kada udarni talas koji se prostire kroz homogenu sredinu naiđe na radijalni diskontinuitet gustine, odnosno pređe iz niže u višu gustinu, dešava se značajna promena njegovih parametara. Ovde će biti izveden model koji opisuje evoluciju kroz takvu sredinu koja je postavljena u simulacijama mehura LDB2, LDB5 i LDB10.

Dok se prostire unutar mehura, evolucija ostatka je određena Sedovljevim zakonom. Tokom Sedov-Tejlorove faze, u slučaju jakog udarnog talasa ($X = 4$) kroz homogenu sredinu, uz adijabatski indeks $\gamma = 5/3$, gustina energije na udarnom talasu je:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \frac{p_2}{\gamma - 1} \\ &= \frac{9}{8}\rho_0 v_s^2 + \frac{9}{8}\rho_0 v_s^2 \\ &= \frac{9}{4}\rho_0 v_s^2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ukoliko se treća jednakost ove jednačine iskombinuje sa jednačinama (1.3) i (1.4), uz eliminaciju vremena, dobija se energija na udarnom talasu u sredini sa konstantnom okolnom gustinom:

$$E_2^{\text{uni}} = \frac{9}{25} 1.15^5 R^{-3} E_0. \tag{5.2}$$

Dakle, bez obzira na okolnu gustinu (dok god je ona uniformna – stoga indeks „uni“), E_2^{uni} zavisi jedino od E_0 i opada srazmerno sa R^{-3} . Međutim, pri prelasku iz niže u višu gustinu, udarni talas momentalno trpi skok svoje gustine, brzine i pritiska. Ako posmatramo dovoljno uzak prostor ispred i iza mesta susreta udarnog talasa i diskontinuiteta gustine, dobijamo Rimanov problem sa početnim uslovima

čijim rešavanjem ovi skokovi postaju poznati. Kako je $p_2 = E_2/3$, skokovi pritiska i energije na udarnom talasu su isti, $E_j = p_j = k_j$,

$$k_j E_2 = \frac{1}{2} \rho_j \rho_2 (v_j v_2)^2 + \frac{k_j p_2}{\gamma - 1}, \quad (5.3)$$

gde je ρ_j skok gustine sredine (kao i skok gustine na udarnom talasu), a v_j skok brzine. Kombinujući ovu jednačinu sa prvim redom jednačine (5.1) dolazimo do veze između ova tri skoka:

$$k_j = \rho_j v_j^2. \quad (5.4)$$

Skok brzine se može dobiti i korišćenjem analitičke aproksimacije iz rada Borkovskog sa saradnicima (Borkowski et al., 1997), ali je u prezentovanom modelu korišćen egzaktni Rimanov rešavač. Činjenica da energija i pritisak imaju isti skok, i posledično postojanje relacije (5.4), omogućuje nam da odredimo brzinu udarnog talasa pomoću njegove energije. Brzinu drugačije nije ni moguće odrediti jer ona nije konzervativna veličina, dok energija jeste. Stoga, da bismo pratili evoluciju udarnog talasa u modelu mehura, moramo ispratiti šta se dešava sa raspodelom gustine energije na udarnom talasu i unutar ostatka nakon prelaska preko diskontinuiteta gustine.

Nakon ulaska u gušću sredinu, udarni talas naglo usporava ($v_j < 1$), a njegova energija i gustina naglo rastu ($k_j, \rho_j > 1$). Daljim prostiranjem kroz novu homogenu sredinu, kompresovana energija iza udarnog talasa koja je narušila samo-slični Sedovljev profil prodire sve dublje u zapreminu ostatka, težeći da se raspodeli i povрати samo-slični profil. Ovo je ilustrovano na Slici 5.1 na primeru sukcesivnih trenutaka 1, 2 i 3 nakon prolaska granice diskontinuiteta. Početni skok energije udarnog talasa $k_j E_2^{\text{uni}}$ postepeno opada, vraćajući se na E_2^{uni} na dovoljno velikom radijusu R . Stoga, treba pronaći relaciju $k(R) = E_2(R)/E_2^{\text{uni}}$ koja bi determinisala gustinu energije udarnog talasa E_2 za svako $R > R_d$, gde je R_d radijus granice diskontinuiteta, odnosno mehura. Na radijusu R_d , $k(R)$ je jednako k_j , dok je na $R \rightarrow \infty$ njegova vrednost 1. Najjednostavnija aproksimacija ove relacije bi bila da se kompresovana energija rasprostire po zapremini ostatka prostim širenjem ostatka, odnosno:

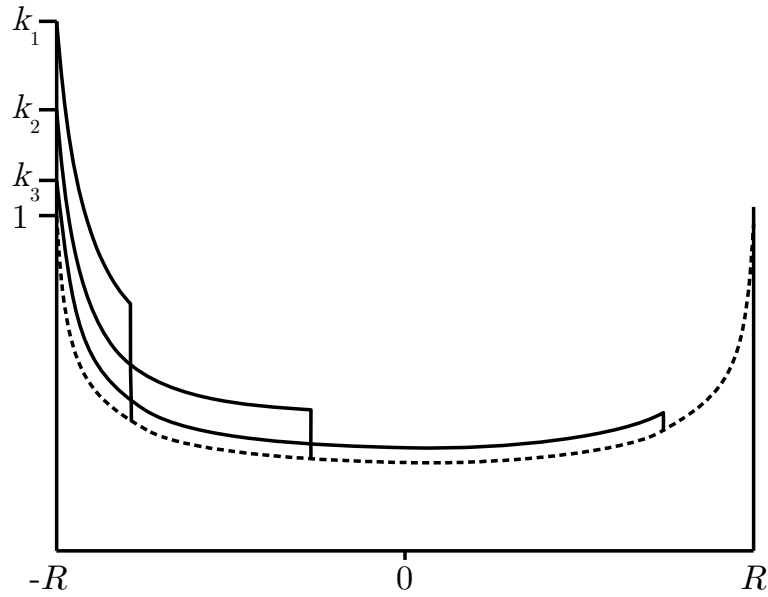
$$k(R) = 1 + (k_j - 1) \left(\frac{R_d}{R} \right)^3, \quad R \geq R_d. \quad (5.5)$$

Ono što u ovom, ipak pojednostavljenom prikazu nije uzeto u obzir je da se deo energije udarnog talasa pri susretu sa gušćom sredinom reflektuje nazad, kao što je

pokazano u Testu II (poglavlje 2.4.2). Prema rešenju RP, u sudaru udarnog talasa i gušće sredine nastaju dva udarna talasa: jedan koji nastavlja napred, koji se opisuje desnom središnjom regijom (regija zvezdice), čija je energija $E_R^* = k_j E_L$, i jedan reflektovani koji se prostire nazad (leva središnja regija, E_L^*). Ova dva talasa se udaljavaju od kontaktnog diskontinuiteta kao konstantna stanja, jer su u RP početna stanja konstantna. Međutim, radijalni profili gustine, brzine i energije u OSN nisu konstantni već imaju strmi pad iza udarnog talasa, zato što je energija eksplozije koja širi zapreminu ostatka konačna. Kao rezultat ovoga, reflektovani udarni talas ubrzano propagira ka centru ostatka odnoseći deo energije sa sobom, dok energija prednjeg talasa ostaje umanjena za taj deo. Ako deo energije koji je reflektovan obeležimo sa E_{ref} , a deo koji ostaje u prednjem talasu sa $E_{\text{for}} = 1 - E_{\text{ref}}$ (*forward* – prednji), onda je stvarni skok energije na diskontinuitetu $E_{\text{for}} k_j$. Bez oduzetog dela energije, prednji talas bi u slučaju $R \rightarrow \infty$ imao energiju $E_{\text{for}} E_2^{\text{uni}}$, ali reflektovana energija se nakon određenog vremena vraća tako što se reflektovani talas na dijametralno suprotnoj strani sjedinjuje sa prednjim talasom. Nakon ovog sjedinjenja evolucija prednjeg udarnog talasa OSN se nastavlja isto kao u sredini van mehura, odnosno kao da on više ne pamti svoju evoluciju kroz mehur.

U aproksimaciji u jednačini (5.5) takođe je netačna pretpostavka da se kompresovana energija rasprostire prostim širenjem zapremine ostatka. Reflektovani udarni talas u stvarnosti ne miruje na radijusu R_d , već se ubrzano kreće (usled opadanja gustine) ka centru ostatka, susrećući se u centru sa svojim odrazom sa druge strane. Između reflektovanog talasa i ljuske kompresovane energije se stvara uska zona niskog pritiska, pa ljuska kompresovane energije biva razvučena, prateći reflektovani talas. Na ovaj način kompresovana energija se mnogo brže raspodeljuje po unutrašnjosti ostatka nego što je aproksimirano, a efikasnost njene raspodele je srazmerna količini reflektovane energije. Ovo znači da, pod pretpostavkom stepene zavisnosti od R_d/R , eksponent u jednačini (5.5) mora biti veći od 3. Takođe, on mora zavisiti od kontrasta gustine unutar i van mehura, jer je pri većem kontrastu reflektovani talas brži.

Sada se jednačina (5.5) može revidirati uključivanjem reflektovane energije, kao



Slika 5.1: Ilustracija preraspodele gustine energije kompresovane iza udarnog talasa, nakon prelaska u gušću sredinu. Sedovljev profil je prikazan isprekidanom linijom. Skok gustine energije na udarnom talasu, $k(R) = E_2(R)/E_2^{\text{uni}}$, je najveći u trenutku kada on udari gušću sredinu. Potom, postepeno opada kako kompresovana energija ispunjava sve veći deo zapremine ostatka, da bi na dovoljno velikom radijusu ostatka pao na 1, a profil energije se vratio na Sedovljev.

i njenog povratka:

$$k(R) = \begin{cases} E_{\text{for}} + E_{\text{for}}(k_j - 1)(R_d/R)^m, & R_d \leq R < R_u, \\ 1, & R \geq R_u, \end{cases} \quad (5.6)$$

gde R_u predstavlja radijus ostatka na kom dolazi do sjedinjenja reflektovanog i prednjeg talasa. Eksponent $m > 3$ i radijus R_u su pronađeni iz simulacija kao empirijske funkcije od v_j na granici diskontinuiteta. Reflektovani deo energije se dobija iz rešenja Rimanovog problema kao $E_{\text{ref}} = (E_L^* - E_L)/E_L^*$.

Konačno, energija na udarnom talasu nakon diskontinuiteta je:

$$E_2(R) = k(R)E_2^{\text{uni}} = \frac{9}{4}\rho_h v_s^2(R), \quad (5.7)$$

a brzina udarnog talasa:

$$v_s(R) = \sqrt{\frac{4 E_2(R)}{9 \rho_h}}, \quad (5.8)$$

gde je ρ_h gustina sredine van mehura.

Radio-sinhrotronska emisija se računa pomoću gustine sredine $\rho(R)$ i brzine udarnog talasa $v_s(R)$, a dolazi iz zapremine sferne ljuske debljine ΔR . Poređenje modela i simulacija je prikazano u Rezultatima.

5.2 Prostiranje udarnog talasa kroz grudvastu sredinu

5.2.1 Premise

Semi-analitički model hidrodinamičke evolucije OSN kroz grudvastu sredinu je sfernosimetrični 3D model koji uzima u obzir osobine sredine i geometriju udarnog talasa. Njegov zadatak je da odredi raspodelu gustine i brzine udarnog talasa ostatka, kao i njegovu površinu tokom čitave evolucije koja se aproksimira adijabatskom fazom. Kada su ovi parametri poznati, onda se primenom modela radio-sinhrotronske emisije i integraljenjem po čitavoj emisionoj zapremini može izvesti evoluciona Σ - D relacija.

Osnovna premisa je da se grudvasta međuzvezdana sredina sastoji od dve homogene faze: grudvi i sredine između njih, isto kao i u postavkama simulacija. Stoga, raspodela gustine i brzine po površini ostatka zavisi od raspodele grudvi, kontrasta gustine i osobina interakcije udarnog talasa i grudvi. Ova interakcija dovodi do deformacije udarnog talasa i značajnog odstupanja od sferičnosti njegove površine. Zbog dvofazne prirode grudvaste sredine potrebno je poći od sledećih pretpostavki/premisa da bi se moglo analitički pristupiti razvoju modela:

- grudve su raspoređene ravnomerno i izotropno u odnosu na centar ostatka,
- grudve su znatno manje od ostatka, što znači da se prostiru iza određenog radijusa oko centra ostatka, R_d (u daljem tekstu: granica diskontinuiteta), koji je dovoljno veći od radijusa grudve.

Oba uslova su važna kako bi OSN bio pseudo-sferan i simetričan, jer se evolucija svih promenljivih u modelu vezuje za radijus ostatka. Drugi uslov je potreban da bi statistika koja se koristi u modelu bila primenjiva. Sada se radijus ostatka može

dobiti iz njegove zapremine V kao $R = [3V/(4\pi)]^{1/3}$. Naravno, ovi uslovi su ispunjeni i u postavkama simulacija na kojima je ovaj model testiran.

Najvažniji parametar ovog semi-analitičkog modela je brzina udarnog talasa. Osnovni zadatak modela je određivanje evolucije brzine, jer od nje zavisi emisivnost. Zato se kao izuzetno važno nameće pitanje brzine širenja OSN u grudvastoju sredini, koje se analizira u narednom odeljku.

5.2.1.1 Brzina udarnog talasa u pseudo-uniformnoj sredini

Kao što je demonstrirano u Testu II (poglavlje 2.4.2), kada udarni talas naiđe na grudvu gušće materije on se zakrivljuje i zaostaje za onim delovima koji obilaze sa strane. Ovaj primer pokazuje kako nehomogenost gustine značajno utiče na brzinu udarnog talasa, kako lokalno, tako i na prosečnu brzinu cele njegove površine. Međutim, zamislimo udarni talas koji prelazi preko velikog broja veoma malih grudvi u prostoru. Može se pretpostaviti da se ostatak kroz takvu sredinu širi kao da prelazi preko uniformne sredine srednje gustine. Činjenica da se unutar ostatka usled visoke temperature materijal meša i homogenizuje termalnom kondukcijom, raspadanjem oblaka i njihovim isparavanjem, znači da profili gustine, brzine i pritiska u ovakvoj sredini ostaju približno samo-slični, kao u slučaju Sedovljevih profila. Ovakav vid sredine ćemo nazvati pseudo-uniformnom sredinom i postaviti postulat o ekvivalenciji srednje brzine udarnih talasa u uniformnoj i pseudo-uniformnoj sredini istih prosečnih gustina.

Ostatak koji se širi u pseudo-uniformnoj sredini smatramo pseudo-sfernim, a njegova srednja brzina \bar{v}_s u funkciji radijusa se može izvesti iz Sedovljevog zakona širenja kombinujući jednačine (1.3) i (1.4) i eliminišući vreme:

$$\bar{v}_s(R) = \frac{2}{5} 1.15^{5/2} R^{-3/2} \sqrt{\frac{E_0}{\bar{\rho}(\leq R)}}. \quad (5.9)$$

Ovde, $\bar{\rho}(\leq R)$ predstavlja srednju gustinu MZM unutar radijusa R . Aproksimacija jednačine (5.9) važi jedino na velikim radijusima, kada $R \gg R_d$, i zato će biti korišćena za određivanje srednje brzine udarnog talasa na $R \rightarrow \infty$. Ovaj postulat će u značajnoj meri biti potvrđen rezultatima simulacija.

5.2.2 Osnove modela

Osnove modela se mogu objasniti pomoću trivijalne grudvaste sredine u kojoj su grudve (eng. *clumps*) tek neznatno gušće od svoje okoline. U ovakvoj postavci OSN tokom cele evolucije zadržava približno sferni oblik. Deo udarnog talasa koji u svakom momentu prelazi preko grudvi jednak je zapreminskom udelu grudvi, f_c . Stoga, onaj deo koji prelazi preko okoline jednak je $f_{\text{icm}} = 1 - f_c$. Radi lakšeg čitanja, ove dve frakcije udarnog talasa će u daljem tekstu biti nazivane „CL talas” i „ICM talas”. Srednja brzina CL talasa, v_c , je manja u odnosu na srednju brzinu ICM talasa, v_{icm} , a njihov odnos je obeležen sa v_j^* (nazovimo ga efektivni odnos brzina, jer se razlikuje od v_j iz Rimanovog rešenja). Srednja brzina udarnog talasa je funkcija ove dve brzine i njihovih odgovarajućih udela u udarnom talasu:

$$\bar{v}_s = f_{\text{icm}}v_{\text{icm}} + f_cv_c = v_{\text{icm}}(f_{\text{icm}} + f_cv_j^*). \quad (5.10)$$

Uz poznate brzine v_c i v_{icm} , mogu se naći emisivnosti CL i ICM talasa, $\varepsilon_{\nu c}$ i $\varepsilon_{\nu \text{icm}}$, respektivno. Ukupna luminoznost ovakvog ostatka je:

$$L_{\text{total}} = 4\pi R^2 \Delta R (f_c \varepsilon_{\nu c} + f_{\text{icm}} \varepsilon_{\nu \text{icm}}), \quad (5.11)$$

gde je ΔR debljina emisione ljuske, za koju je uzeto $\Delta R = 10^{-2}R$.

Jednačina (5.11) pokazuje osnovnu ideju kako se dobija luminoznost u ovom modelu. Ukupna luminoznost predstavlja zbir njene CL i ICM frakcije. Pored gustine, ovaj model i brzinu udarnog talasa posmatra u dve faze, v_c i v_{icm} , što predstavlja pojednostavljenje, jer se radi o prosečnim brzinama. Ukoliko je kontrast gustine između grudvi i okoline velik ($\rho_j \gg 1$), dešavaju se procesi koji značajno utiču na brzine CL i ICM talasa i njihove udele u površini ostatka. Rezultujuće CL i ICM frakcije u ukupnoj luminoznosti zavise od ovih procesa, pa ih je potrebno uključiti u model. Proces od najvećeg značaja su:

- Zaostajanje udarnog talasa na gustim grudvama. Ovo dovodi do narušavanja sferičnosti udarnog talasa. U slučaju veoma gustih grudvi, njihove neporemećene regije preživljavaju duže vreme pre nego što ih talas u potpunosti prebriše. Ovako se stvaraju „ostrva” oivičena udarnim talasom koja su odvojena od njegovog glavnog prednjeg fronta. Što je veći kontrast gustine, više je preživelih

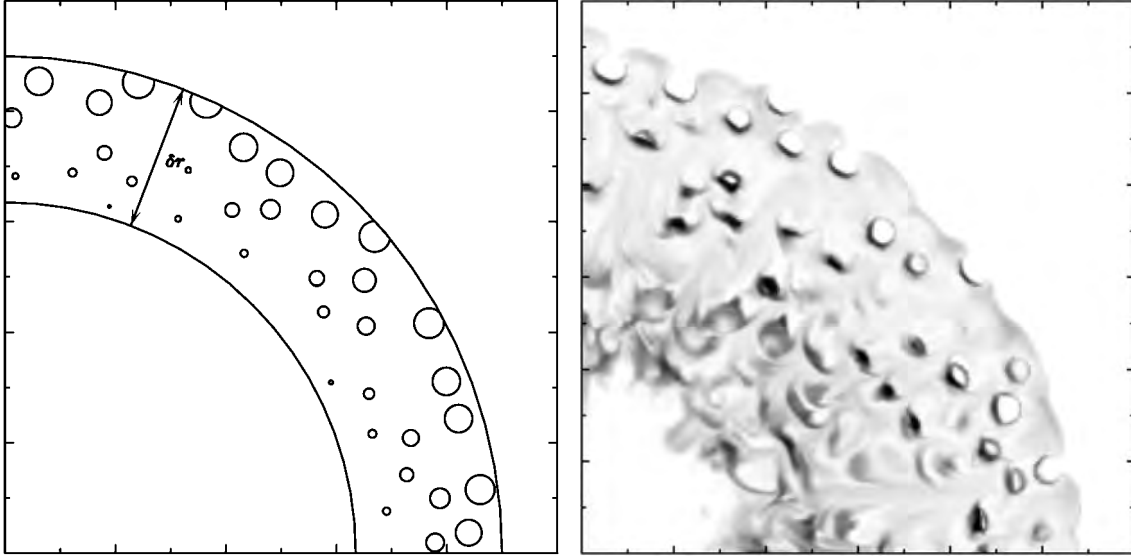
ostrva. Na ovaj način raste ukupna površina udarnog talasa, kao i njegova CL frakcija. Takođe, udarni talas koji obuhvata zaostala ostrva nije ujednačene brzine sa svih strana što utiče na efektivnu brzinu CL talasa u modelu.

- Refleksija i preraspodela energije po površini udarnog talasa. Energija se reflektuje od grudvi isto kao pri izlasku iz mehura, ali kako se ovde udarni talas stalno susreće sa novim grudvama energija se kontinuirano gubi. Međutim, ona se kontinuirano i vraća, tako što deo reflektovanih lučnih talasa završava na zaostajućim grudvama. Deo reflektovane energije završava i na ICM talasima, čime se menja efektivni odnos prosečne energije ICM i CL talasa, pa tako i njihovih prosečnih brzina. Zbog toga je uveden efektivni odnos njihovih brzina v_j^* , koji se zbog složenosti opisanih procesa mora odrediti semi-empirijski.

Ovi efekti značajno utiču na konačnu luminoznost objekta, pa se u model moraju uključiti: računanje površine ICM i CL talasa, efektivni odnos njihovih prosečnih brzina i eksponent širenja ostatka. Neki od ovih parametara će biti aproksimirani analitički, a neki će biti određeni empirijski iz simulacija. Takođe, biće razvijen model evolucije energije i brzine udarnog talasa sa radijusom ostatka, analogno modelu mehura.

5.2.3 Površina udarnog talasa

U trivijalnom slučaju kada su grudve neznatno gušće u odnosu na okolinu, udarni talas prolazi kroz grudve gotovo neometano, održavajući sferni oblik. Već sa relativno malim porastom gustine ($\rho_j \approx 2$) talas u grudvama sve više zaostaje. Kako se udarni talas savija na mestima na kojima se spajaju CL i ICM talas, njegova površina postaje veća od $S_0 = 4\pi R^2$ (nadalje, S_0 predstavlja površinu sfere radijusa R). Takođe, raste i frakcija CL talasa u ukupnoj površini. Ukoliko je kontrast gustine veći od ≈ 10 , ICM talas koji zaobilazi grudvu uspeva da se stopi sam sa sobom iza grudve pre nego što CL talas prebriše unutrašnjost grudve. Tada nastaje zaostajuće ostrvo CL talasa koji sa svih strana „jede” grudvu (u daljem tekstu „CL ostrvo”). Nakon što pojede celu unutrašnjost grudve, ostrvo CL talasa iščezava, a gusta materija grudve se pod visokim pritiskom i temperaturom unutar ostatka razilazi. Ovaj proces



Slika 5.2: *Levo*. Ilustracija modela CL ostrva. Iza ICM talasa prostire se ljuska koja sadrži grudve koje nisu u potpunosti prebrisane CL talasom, usled njegove niže brzine kroz gušću sredinu. Kako grudve tonu dublje kroz ljusku, njihovi neporemećeni delovi se smanjuju dok „ne ispare”. U aproksimaciji modela, radijus CL ostrva opada od r_c , na spoljašnjoj granici ljuske, do 0, na njenoj unutrašnjoj strani. Debljina ljuske je data jednačinom (5.12). *Desno*. Poprečni presek simulacije C100F25 koji prikazuje ukupni moment impulsa. CL ostrva, oivičena CL talasom, približno odgovaraju modelu na levom panelu.

je poznat pod nazivom isparavanje grudvi/oblaka i razmatran je u radu Mekija i Ostrajkera (McKee & Ostriker, 1977). Obilazeći ICM talas koji se ponovno spaja iza grudve prirodno teži ka zauzimanju sfernog oblika.

Očigledno, zaostajuća CL ostrva podižu ukupnu površinu udarnog talasa, kao i njegovu CL frakciju. U narednim redovima će biti izveden teorijski model evolucije ova dva parametra, odnosno njihova funkcionalna zavisnost od radijusa, $S(R)$ i $F_c(R)$ respektivno.

Maksimalna „dubina” do koje CL ostrva mogu da potonu unutar ostatka pre nego što iščeznu, u jedinicama radijusa grudve r_c , može se aproksimirati kao:

$$\delta = \frac{2(1 - v_j)}{v_j}. \quad (5.12)$$

Dužina δr_c , koja monotono raste sa kontrastom gustine, predstavlja maksimalnu debljinu ljuske OSN koja sadrži CL ostrva (Slika 5.2).

Porast površine ostatka u odnosu na S_0 se može definisati faktorom $\kappa \equiv S/S_0$, koji predstavlja sumu uvećanih frakcija $f'_c \equiv S_c/S_0 > f_c$ i $f'_{icm} \equiv S_{icm}/S_0 > f_{icm}$

(takođe u odnosu na S_0),

$$\kappa = f'_c + f'_{icm}. \quad (5.13)$$

Na radijusu R_d , kada sferni udarni talas prvi put naiđe na grudvastu sredinu, važi $f'_{icm} = f_{icm}$ i $f'_c = f_c$. U slučaju $\delta \ll 1$ ove vrednosti frakcija se ne menjaju kroz evoluciju, ali u slučaju većih kontrasta gustine ($\delta > 1$) simulacije pokazuju da obe vrednosti rastu kako se ostatak širi kroz grudvastu sredinu. Vrednost f'_{icm} raste dok ne dostigne ≈ 1 što proizlazi iz težnje širećeg ICM talasa da se prostire sferno. Ovaj rast se može definisati empirijskom jednačinom:

$$f'_{icm} = f_{icm} + C_1 A f_c, \quad (5.14)$$

gde je $C_1 = \min(\delta, 1)$ empirijski određena konstanta koja ima uticaj samo kada je $\delta < 1$, jer pri manjim kontrastima gustine ne dolazi do značajnije deformacije površine ICM talasa. Broj A je kumulativna frakcija površine udarnog talasa koja je pre datog trenutka bila u interakciji sa grudvama. Na radijusu R_d ova frakcija je 0, ali kako talas napreduje kroz grudvastu sredinu ona kumulativno raste do 1. Površina udarnog talasa se ovde može aproksimirati sferom. Kako je prostorna raspodela grudvi slučajna, priraštaj frakcije A je srazmeran stopi sudara udarnog talasa sa grudvama ($n_c S_0 dr$), poprečnom preseku grudvi ($r_c^2 \pi / S_0$) i frakciji površine koja ranije nije bila poremećena grudvama ($1 - A$):

$$dA = n_c r_c^2 \pi (1 - A) dr, \quad (5.15)$$

gde je n_c broj grudvi po zapremini. Integracijom ove jednačine od R_d do $R > R_d$,

$$\int_0^A \frac{dA}{1 - A} = C_0 \int_{R_d}^R dr, \quad (5.16)$$

gde je $C_0 = n_c r_c^2 \pi = \frac{3}{4} \frac{f_c}{r_c}$, dobija se:

$$A = 1 - e^{-C_0(R - R_d)}. \quad (5.17)$$

Kada se ostatak dovoljno dugo širi u grudvastoj sredini, $A \rightarrow 1$ i dolazi do platoa funkcije $f'_{icm}(R)$.

Za izvođenje funkcije $f'_c(R)$ potreban je model CL ostrva. Slika 5.2 prikazuje CL ostrva koja opstaju u ljusci debljine δr_c kod grudvi sa relativno visokim kontrastom

gustine ($\rho_j = 100$, $\delta \approx 7.5$). CL ostrva su modelovana kao sfere radijusa koji linearno opada od r_c , pri prvom kontaktu ICM talasa i grudve, do 0, na dubini δr_c unutar ostatka. Dakle, svaki sloj ljuske sadrži ostrva odgovarajućeg radijusa između 0 i r_c . Prema ovoj aproksimaciji, zbirna površina svih CL ostrva se dobija integracijom proizvoda odgovarajuće površine ostrva i broja grudvi kroz sve slojeve ljuske:

$$S_0 f'_c = R \int_{r_0}^1 \frac{(r - r_0)^2}{(1 - r_0)^2} 4\pi r_c^2 \cdot n_c r^2 S_0 dr = \frac{3f_c \delta S_0}{(1 - r_0)^3} \int_{r_0}^1 (r - r_0)^2 r^2 dr, \quad (5.18)$$

gde su $r_0 = 1 - \delta r_c / R$ i 1 unutrašnja i spoljašnja granica ljuske. Rešenje poslednje jednačine je:

$$f'_c = 3f_c \delta \frac{r_0^2 + 3r_0 + 6}{30}, \quad (5.19)$$

što je validna aproksimacija za $\delta \gg 1$, odnosno kad je zbirna površina CL ostrva dominantna u odnosu na ukupnu CL površinu. Međutim, kako bi bila validna i za slučaj $\delta \ll 1$, gde važi uslov $f'_c = f_c$, mora se ubaciti faktor $1 + 1/\delta$ pa se konačno dobija:

$$f'_c = f_c (\delta + 1) \frac{r_0^2 + 3r_0 + 6}{10}. \quad (5.20)$$

Evolucija $f'_c(R)$ se odvija u dva režima: 1) $\delta r_c > R - R_d$, i 2) $\delta r_c \leq R - R_d$. Jednačina (5.20) opisuje drugi režim. U prvom režimu, koji važi od trenutka nailaska ostatka na grudvastu sredinu ($R = R_d$) do trenutka kada mu se radijus uveća za δr_c , f'_c ubrzano raste jer udarni talas nailazi na nove grudve dok prethodne još nisu prebrisane do kraja. Zbirna površina CL ostrva u ovom slučaju se pronalazi na isti način kao u jednačini (5.18), s tim da granice integrala idu od $r_d \equiv R_d/R$ do 1. Konačno rešenje za režim 1) je:

$$f'_c = f_c (\delta + C_2) \frac{10r_0^2 (1 - r_d^3) - 15r_0 (1 - r_d^4) + 6 (1 - r_d^5)}{10 (1 - r_0)^3}, \quad (5.21)$$

gde je $C_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1-r_0}{1-r_d} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1-r_d}{1-r_0} \right)$. U graničnom slučaju $r_d = r_0$, što odgovara prelasku između režima 1) i 2), prethodna jednačina postaje jednačina (5.20).

Konačno, CL frakcija udarnog talasa u funkciji radijusa ostatka je:

$$F_c = \frac{f'_c}{\kappa}. \quad (5.22)$$

Daleko od granice diskontinuiteta ($R \rightarrow \infty$, $r_0 \rightarrow 1$) vrednost F_c dostiže asimptotsku vrednost:

$$F_c^\infty = \frac{f_c (\delta + 1)}{f_c (\delta + 1) + f_{icm} + C_1 f_c}. \quad (5.23)$$

Radijus ICM talasa je po definiciji jednak radijusu ostatka. Međutim, kako se CL ostrva nalaze na različitim radijusima, za njih je potrebno odrediti efektivni radijus koji bi se koristio za računanje srednje debljine emitujućeg sloja CL talasa. On se određuje numerički, pronalaženjem vrednosti r_d u jednačini (5.21), takve da se kao rezultat ove jednačine dobije $f'_c/2$. Ako tu vrednost obeležimo sa r_{eff} , onda je prosečna debljina emitujućeg CL sloja sa udarnog talasa $r_{\text{eff}}\Delta R$. Poređenje modela $\kappa(R)$ i $F_c(R)$ sa rezultatima simulacija je prikazano u Glavi 6.

5.2.4 Efektivni odnos brzina v_j^*

Efektivni odnos brzina $v_j^* \equiv v_c/v_{\text{icm}}$, pomenut u prethodnom poglavlju, predstavlja odnos između srednjih brzina CL i ICM talasa. Budući da se ICM talas prostire radijalno od centra ostatka, težeći sfernom širenju, on je pozicioniran pretežno na istom radijusu R od centra ostatka, i njegove varijacije brzine su male. Kod CL talasa je situacija drugačija jer on teži obavijanju grudvi. Kod grudvi niskog kontrasta gustine pravac širenja CL talasa ne odstupa mnogo od radijalnog, ali kod gustih grudvi, kada se formiraju CL ostrva, taj pravac zaklapa sve moguće uglove u odnosu na radijalni. Pravac prostiranja CL talasa značajno utiče i na njegovu brzinu, pa se tako stvara kontinualna raspodela brzina na CL talasu. Ipak, u ovom modelu će njegova brzina v_c , kao i v_{icm} , biti aproksimirana jednom srednjom vrednošću. U narednim redovima će biti opisan složen proces preraspodele energije i brzine u CL talasu, kao i teorijski model CL brzine, odnosno efektivnog odnosa brzina v_j^* .

U tački u kojoj ICM talas nailazi na grudvu (tačka 1 – unutrašnja strana) dešava se skok brzine na isti način kao u slučaju mehura, pa je brzina novoformiranog CL talasa $v_{\text{icm}}v_j\sqrt{E_{\text{for}}}$, jer reflektovani talas odnosi deo gustine energije sa sobom. Ukoliko je kontrast gustine dovoljno mali ($\delta \ll 1$), onda je $v_j^* = v_j\sqrt{E_{\text{for}}}$ dobra aproksimacija. U suprotnom, CL talas se savija prema obodima sferne grudve formirajući konkavnu površ. Ka periferiji ove površi CL talas je sve više zakošen u odnosu na protok gasa pa gubi brzinu srazmerno uglu inklinacije. Stoga, kako raste kontrast gustine srednja brzina CL talasa efektivno opada. U slučaju visokih kontrasta gustine i formiranja CL ostrva ($\rho_j > 10$), brži ICM talas prelazi duži put oko grudve i nadire kroz grudvu sa njenih oboda i sa zadnje strane. CL talas koji prodire u

grudvu sa suprotne strane od tačke prvog kontakta (tačka 2 – spoljašnja strana) je izuzetno slab jer u potpunosti potiče od pritiska iza ICM talasa. Dakle, po površini CL ostrva raspodela brzine između tačke 1 i 2 ide od $v_{\text{icm}}v_j\sqrt{E_{\text{for}}}$ do približno 0, sa srednjom vrednošću oko $0.5v_{\text{icm}}v_j\sqrt{E_{\text{for}}}$. Kako CL ostrvo tone dublje u unutrašnjost ostatka, ono se sažima u radijalnom pravcu sa obe strane. Na unutrašnjoj strani regija oko tačke 1 napreduje brže od periferije, pa se konkavna površ CL talasa polako zaravnjuje. Na spoljašnjoj strani regija oko tačke 2 biva kompresovana pod pritiskom stvorenim sjedinjavanjem ICM talasa iza grudve. Oba efekta povećavaju brzinu CL talasa sa svake strane, podižući mu srednju vrednost. Dodatni doprinos povećanju srednje CL brzine dolazi od reflektovane energije sa najskorije sudarenih grudvi koju apsorbuju zaostala CL ostrva. Svi ovi procesi utiču na efektivni odnos brzina CL i ICM talasa, pa se njegova evolucija može definisati kao:

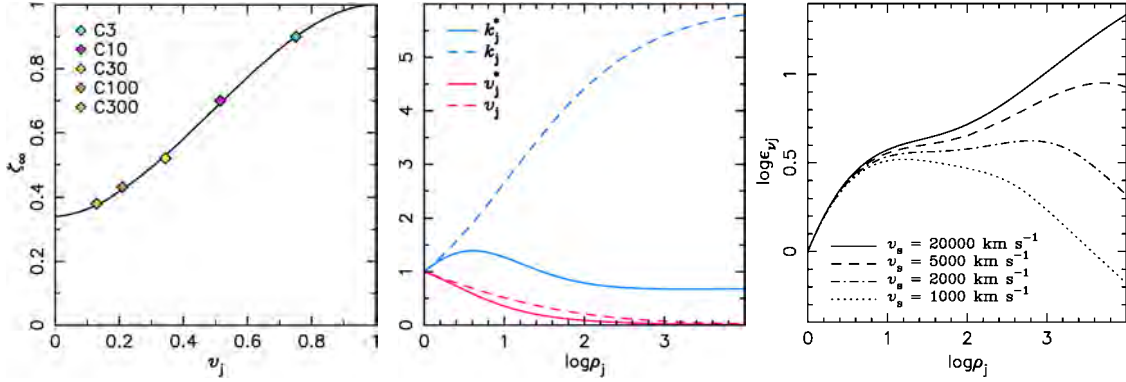
$$v_j^* = \zeta(R)v_j, \quad (5.24)$$

gde faktor $\zeta(R) \leq 1$ daje zajednički doprinos svih efekata i evoluira sa radijusom ostatka. U cilju što jednostavnijeg modeliranja $\zeta(R)$, evolucija ovog parametra je podeljena u dva režima: a) eksponencijalni pad sa početne vrednosti $\zeta(R_d) = \sqrt{E_{\text{for}}}$ do stapanja sa drugim režimom, kao funkcija radijusa oblika $\propto e^{-(R-R_d)/r_c}$, i b) postepeni rast usled apsorpcije reflektovane energije od strane zaostalih ostrva. Režim a) je dominantan samo dok ljuska sa grudvama ne naraste do debljine od nekoliko radijusa grudvi. Potom dominaciju preuzima režim b) u kojem je pretpostavljena proporcionalnost $\zeta(R) \propto \sqrt{F_c(R)}$, zato što sa porastom CL frakcije srazmerno raste verovatnoća apsorpcije energije na CL talasu, umesto na ICM talasu. Efikasnosti ovog procesa posebno doprinosi činjenica da su CL ostrva pozicionirana iza ICM talasa, u polju prostiranja reflektovane energije. Kao što važi $F_c(R) \rightarrow F_c^\infty$ daleko od diskontinuiteta, analogno sledi $\zeta(R) \rightarrow \zeta_\infty$ kada $R \rightarrow \infty$. Dakle, ako drugi režim definišemo kao:

$$\zeta_2 = \zeta_\infty \sqrt{F_c/F_c^\infty}, \quad (5.25)$$

onda se konačna jednačina evolucije parametra $\zeta(R)$, uključujući prvi režim, može izraziti kao:

$$\zeta(R) = \zeta_2 + \left(\sqrt{E_{\text{for}}} - \zeta_2 \right) e^{-(R-R_d)/r_c}. \quad (5.26)$$



Slika 5.3: *Levo.* Fit parametra ζ_∞ iz jednačine (5.27) kao funkcija od v_j . *Sredina.* Zavisnost skoka brzine i energije od skoka gustine. Efektivni odnosi brzine i energije, računati preko ζ_∞ , su predstavljeni punim linijama, dok isprekidane linije predstavljaju teorijske vrednosti iz rešenja Rimanovog problema. *Desno.* Zavisnost skoka emisivnosti $\varepsilon_{\nu j}$ na grudvama (računate preko ζ_∞) od skoka gustine i brzine ICM talasa, u režimu visokog Mahovog broja (koji važi za oba talasa – CL i ICM).

Da bi rešenje ove jednačine bilo poznato potrebno je pronaći ζ_∞ koje zavisi od kontrasta gustine. Vrednosti ovog parametra za različito ρ_j su dobijene iz simulacija i fitovane polinomom trećeg reda kao funkcija v_j :

$$\zeta_\infty = 0.34 + 0.06v_j + 1.86v_j^2 - 1.26v_j^3. \quad (5.27)$$

Ova funkcija, kao i efektivni odnosi brzina i energija CL i ICM talasa, v_j^* i k_j^* , računati korišćenjem parametra ζ_∞ , su prikazani na Slici 5.3. S obzirom da promena $\zeta(R)$ usled opisanih procesa nije drastična, pogotovo kod nižih kontrasta gustine, u prvoj aproksimaciji se može koristiti $\zeta(R) = \zeta_\infty$.

Kod modela mehura, refleksija energije na granici diskontinuiteta se desi odjednom, a tako se i vrati sjedinjavanjem reflektovanog i prednjeg udarnog talasa. Kod grudvaste sredine takođe dolazi do reflektovanih talasa na prvim grudvama na R_d , koji se ne mogu u potpunosti apsorbovati na pozadinskim grudvama kojih u tom trenutku nema (deo energije se ipak apsorbuje na susednim grudvama, jer je refleksija lučna). Od trenutka kada se ta energija vrati na prednji udarni talas (bilo da je CL ili ICM talas), uspostavlja se kvazi-ravnoteža refleksije i apsorpcije energije. Povraćaj inicijalno reflektovane energije se dešava približno na $2R_d$ i pre toga udarni talas evoluira sa smanjenom gustinom energije. Ovak proces, koji svakako ne utiče značajno na dinamiku ostatka, nije modeliran radi pojednostavljenja modela.

Slabljenjem srednje brzine CL talasa smanjuje se efektivna emisivnost na gru-

dvama, koja se u modelu računa korišćenjem v_c . Time se ograničava efektivni skok emisivnosti na grudvama, $\varepsilon_{\nu j}^* = \varepsilon_{\nu c} / \varepsilon_{\nu \text{icm}}$, kao što je prikazano na Slici 5.3 za jake udarne talase ($M \gg 1$). Do kontrasta $\rho_j \approx 5$ skok emisivnosti raste skoro eksponencijalno, posle čega stagnira na vrednosti $\varepsilon_{\nu j}^* \approx 4$ sve do $\rho_j \approx 50$ (čak i za najbrže udarne talase). Što se tiče zavisnosti skoka emisivnosti od radijusa ostatka, činjenica da $I(x)$ značajno zavisi od brzine širenja rezultuje padom skoka emisivnosti sa R . Međutim, kada Mahov broj ICM talasa počne da opada, skok emisivnosti ponovo raste zbog niže brzine zvuka (pa tako i višeg Mahovog broja) u grudvama.

5.2.5 Brzina udarnog talasa nakon ulaska u grudvastu sredinu

Iako je određivanje brzine udarnog talasa u grudvastoj sredini složeniji zadatak u odnosu na slučaj mehura, ono se u velikoj meri zasniva na konceptu iz poglavlja 5.1. U ovom poglavlju se pravi jasna razlika između zapreminskog udela grudvi, f_c , i frakcije udarnog talasa koji prolazi kroz grudve, F_c , uvedene u poglavlju 5.2.3. Takođe, u narednim jednačinama će se koristiti efektivni odnos brzina CL i ICM talasa, v_j^* iz prethodnog poglavlja, kao i efektivni odnos njihovih energija, $k_j^* = \rho_j v_j^{*2}$.

Kao u slučaju mehura, i kod grudvaste sredine se brzina udarnog talasa računa preko njegove energije, s tim da u ovom modelu svaka veličina ima CL, ICM i srednju vrednost. U slučaju brzine, ove vrednosti su povezane relacijom:

$$\bar{v}_s = v_{\text{icm}} F_{\text{icm}} + v_c F_c = v_{\text{icm}} (F_{\text{icm}} + F_c v_j^*). \quad (5.28)$$

Srednja energija na udarnom talasu se korišćenjem prethodne jednačine i jednačine (5.1) može izraziti kao funkcija srednje brzine:

$$\bar{E}_2 = \frac{9}{4} (F_{\text{icm}} \rho_{\text{icm}} v_{\text{icm}}^2 + F_c \rho_c v_c^2) = \frac{9}{4} \rho_{\text{icm}} \bar{v}_s^2 \frac{F_{\text{icm}} + F_c k_j^*}{(F_{\text{icm}} + F_c v_j^*)^2}, \quad (5.29)$$

Poslednje dve jednačine su veza između \bar{E}_2 i brzina v_{icm} i v_c . Stoga je cilj pronaći evoluciju $\bar{E}_2(R)$, što predstavlja analogan problem onom iz poglavlja 5.1. Evoluciju $\bar{E}_2(R)$ ćemo tražiti preko evolucije energetskog odnosa $\bar{k}(R) = \bar{E}_2(R) / E_2^{\text{uni}}$:

$$\bar{k}(R) = k_\infty + (\bar{k}_j - k_\infty) \left(\frac{R_d}{R} \right)^m, \quad (5.30)$$

gde je $k_\infty = \bar{k}(R \rightarrow \infty)$ vrednost energetskeg odnosa daleko od granice diskontinuiteta, a $\bar{k}_j = \bar{k}(R_d)$ srednji skok energije pri ulasku u grudvatu sredinu. Određivanje eksponenta m stepenog zakona će biti opisano u poglavlju 5.2.6.

Srednji skok energije na granici diskontinuiteta je:

$$\bar{k}_j = f_{\text{icm}} + f_c k_j^*(R_d) = f_{\text{icm}} + f_c k_j E_{\text{for}}, \quad (5.31)$$

gde je uračunata refleksija energije na grudvama. Energetski parametar daleko od granice diskontinuiteta se dobija uz pomoć postulata iz poglavlja 5.2.5, uz pretpostavku da grudvata sredina predstavlja pseudo-uniformnu sredinu (na $R \rightarrow \infty$, F_c i v_j^* takođe ostaju konstantni). Tada možemo izjednačiti srednju brzinu udarnog talasa sa brzinom koju bi on imao da se kreće kroz uniformnu sredinu srednje gustine. S obzirom da je energija udarnog talasa u ekvivalentnoj uniformnoj sredini:

$$E_2^{\text{uni}} = \frac{9}{4} \bar{\rho} \bar{v}_s^2 = \frac{9}{4} \rho_{\text{icm}} \bar{v}_s^2 (f_{\text{icm}} + f_c \rho_j), \quad (5.32)$$

energetski parametar k_∞ se dobija deljenjem jednačina (5.29) i (5.32):

$$k_\infty = \frac{\bar{E}_2(R \gg R_d)}{E_2^{\text{uni}}} = \frac{F_{\text{icm}}^\infty + F_c^\infty k_j^{*\infty}}{(f_{\text{icm}} + f_c \rho_j) (F_{\text{icm}}^\infty + F_c^\infty v_j^{*\infty})^2}. \quad (5.33)$$

Naravno, ovde se koriste vrednosti F_{icm} , F_c , k_j^* i v_j^* daleko od granice diskontinuiteta ($v_j^{*\infty} = \zeta_\infty v_j$ i $k_j^{*\infty} = \zeta_\infty^2 k_j$). Za razliku od slučaja mehura, gde naknadnim povratkom reflektovane energije k_0 postaje 1, ovde kontinuirani nailazak na grudve dovodi do $k_\infty < 1$, gde pad vrednosti k_∞ koreliše sa padom v_j .

Konačno, srednja energija na udarnom talasu na radijusu R iznosi:

$$\bar{E}_2(R) = \bar{k}(R) E_2^{\text{uni}}(R). \quad (5.34)$$

Kombinujući ovu jednačinu sa jednačinom (5.29) dobijamo srednju brzinu udarnog talasa na radijusu $R \geq R_d$:

$$\bar{v}_s(R) = \sqrt{\frac{4 \bar{k} E_2^{\text{uni}} (F_{\text{icm}} + F_c v_j^*)^2}{9 \rho_{\text{icm}} (F_{\text{icm}} + F_c k_j^*)}}, \quad (5.35)$$

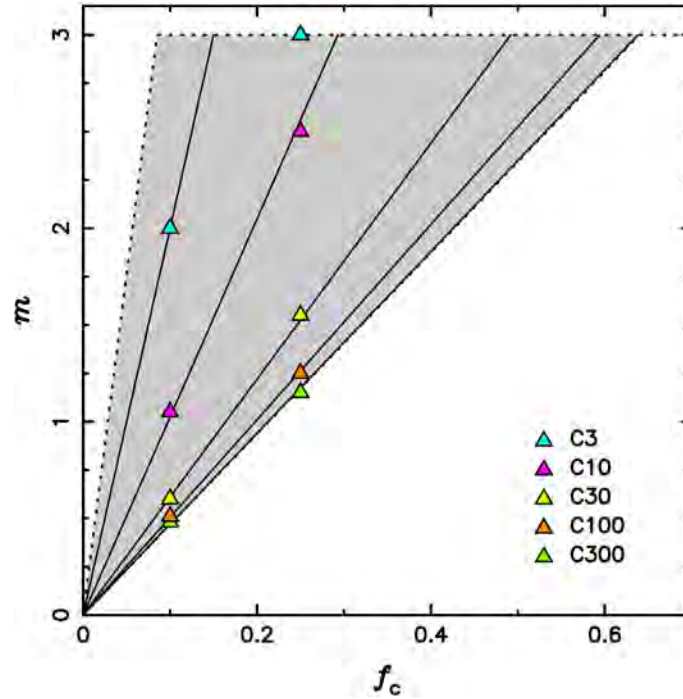
gde sve promenljive osim ρ_{icm} zavise od R .

5.2.6 Ekspanzioni eksponent m

Stopa širenja ostatka nakon ulaska u grudvastu sredinu je determinisana ekspanzionim eksponentom m u jednačini (5.30). Za razliku od modela mehura, gde se refleksija energije dešava odjednom na celoj površini udarnog talasa, ovde se ona dešava sve vreme lokalno, samo na grudvama. Ključna razlika je u pravcu prostiranja reflektovanog talasa: kod mehura je taj pravac isključivo radijalan, prema centru ostatka, dok se sa površine grudvi reflektuju lučni talasi koji u dosta manjoj meri putuju prema centru. Najveći deo reflektovanih lučnih talasa ubrzo završi opet na udarnom talasu, raspoređujući se na njegovoj CL i ICM frakciji. Ovako se ne samo smanjuje količina „izgubljene” energije, nego se i drastično smanjuje brzina kojom se kompresovana energija odvlači prema centru. Zbog ovakve prirode procesa dolazi do daleko postepenijeg usporavanja udarnog talasa, a eksponent m uzima mnogo manje vrednosti u odnosu na model mehura.

Pođimo od jednačine (5.5) gde $m = 3$, odnosno stopa raspoređivanja kompresovane energije ostatka zavisi od stope povećanja zapremine ostatka nakon radijusa R_d . Ipak, simulacije pokazuju da vrednost m značajno zavisi i od kontrasta gustine i od prostornog udela grudvi, i da je njena vrednost $m \leq 3$. Ovo znači da se energija kompresovana iza udarnog talasa ne raspoređuje po celoj zapremini ostatka (kao u slučaju mehura), već se zadržava u regiji iza udarnog talasa, šireći se zajedno sa ostatkom. U slučaju $m \approx 3$, unutrašnja granica ljuske u kojoj je sadržana kompresovana energija se efektivno zadržava na $R \approx R_d$, dok se u slučaju $m < 3$ ona pomera ka spolja tokom širenja ostatka. Za ovu lokalizaciju kompresovane energije je zaslužna lučna refleksija energije na grudvama. U slučaju gustih grudvi dodatnu ulogu imaju zaostala CL ostrva koja sakupljaju višak reflektovane energije, i čije pozicije predstavljaju minimalni radijus na kojima ona počiva nakon njihovog iščezavanja.

Posmatrajmo kakva je dinamika udarnog talasa nakon ulaska u grudvastu sredinu, uz fiksnu vrednost ρ_j , ali za različite vrednosti f_c . Ako $f_c \rightarrow 0$, dominantni ICM talas prolazi kroz uniformnu ICM sredinu pretežno neometano od strane grudvi, pa tako njihova prebrisana masa slabije utiče na umanjenje srednje energije udarnog talasa, kao i njegove srednje brzine ($m \rightarrow 0$). S druge strane, sa porastom f_c , CL talas sve više preuzima dominaciju nad ICM talasom, pa se srednja energija udarnog



Slika 5.4: Mapa predviđenih vrednosti ekspanzionog eksponenta m , računatih preko empirijske jednačine (5.36). Simboli označavaju vrednosti utvrđene individualnim simulacijama. Pune linije predstavljaju linearni fit nad simulacionim vrednostima, a osenčena površina oivičena isprekidanom granicom predstavlja domen mogućih vrednosti m . Nakon kritične vrednosti f_c , $m = 3$ nezavisno od kontrasta gustine.

talasa brže smanjuje ($m \rightarrow 3$). Ukoliko fiksiramo f_c , a $\rho_j \rightarrow 1$, nema zaostalih CL ostrva pa se reflektovana energija efikasnije raspoređuje unutar zapremine ostatka, čime $m \rightarrow 3$. Nasuprot tome, kako ρ_j raste, sve veća je masa unutar brojnih CL ostrva koja ne doprinosi dinamici ostatka (jer nije prebrisana udarnim talasom), umanjujući vrednost m . U ovom slučaju m ne teži 0, nego određenoj minimalnoj vrednosti (osim ako $f_c \rightarrow 0$).

Iako je zavisnost eksponenta m od oba parametra grudvaste sredine veoma složena, analizom simulacija je ustanovljena veoma jednostavna empirijska relacija:

$$m = \min \left(f_c \sqrt{22.4 + 1219v_j^{4.08}}, 3 \right), \quad (5.36)$$

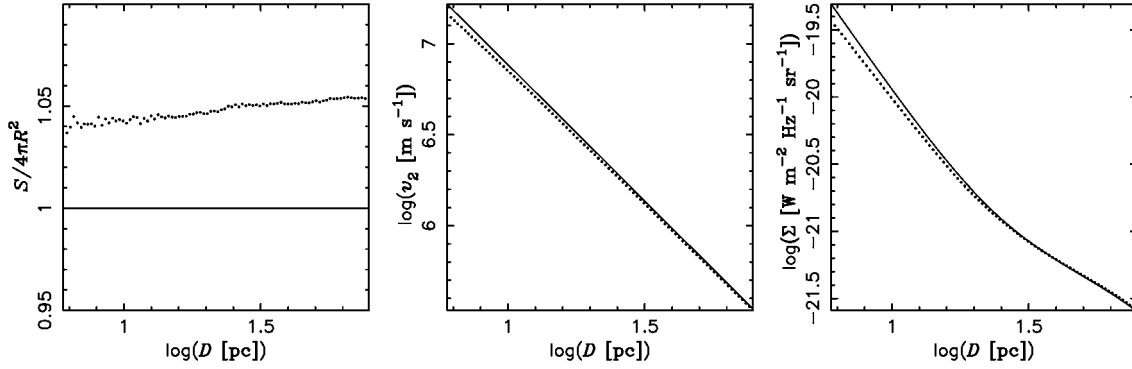
koja je prikazana na Slici 5.4 kao mapa predviđenih vrednosti m . Ova relacija je važna kako bi bilo moguće simulirati velike uzorke OSN u različitim sredinama ovog tipa, radi sintetizovanja veštačkih Σ - D dijagrama koji će biti analizirani u nastavku ovog rada.

Glava 6

Rezultati

6.1 Homogena sredina – U1. Kalibracija podataka

Zbog činjenice da u hidrodinamičkim simulacijama na numeričkoj mreži ne može biti reprodukovan teorijski beskonačno uzak profil udarnog talasa, vrednosti stanja fluida na grebenu simuliranog udarnog talasa ne mogu dostići svoje teorijske vrednosti. Posledica razmazanosti profila gustine, impulsa i energije (koja je opisana u poglavlju 4.2.1) je umanjenje kompresije udarnog talasa u odnosu na teorijsku, koje pre svega zavisi od rezolucije. Ovo umanjenje se takođe odnosi na brzinu iza udarnog talasa, iako je brzina samog udarnog talasa reprodukovana korektno. Dakle, sistematska greška maksimalne brzine iza udarnog talasa proizlazi isključivo zbog razmazane raspodele brzine i konačne dimenzije ćelije. Iako mala, sistematska greška određivanja brzine se prenosi i na emisivnost na udarnom talasu, pa tako i na površinski sjaj. Stoga, kako bi rezultati simulacija mogli biti upoređivani sa semi-analitičkim modelom, oni moraju biti kalibrisani. Kalibracioni faktori, koji izjednačavaju vrednosti simulacija i semi-analitičkog modela na identičnim radijusima ostatka, su dobijeni iz simulacije uniformne sredine (postavka U1), za koju je teorijsko rešenje poznato. Ovi faktori su korišćeni za sve ostale postavke simulacija. Razlike između nekalibrisanih i kalibrisanih rezultata postavke U1, za površinu udarnog talasa, brzinu v_2 i površinski sjaj, su prikazani na Slici 6.1. Kod levog grafika je primetna sistematska greška od $\approx 5\%$ koja potiče od nesavršenosti algoritma za računanje površine. Kod srednjeg i desnog grafika se jasno vidi da simulirane vrednosti



Slika 6.1: Poređenje teorijskih (linije) i nekalibrisanih (tačke) rezultata simulacije U1. Grafici prikazuju: površinu udarnog talasa S (*levo*), srednju brzinu iza udarnog talasa v_2 (*sredina*) i površinski sjaj Σ (*desno*) u funkciji prečnika OSN.

konvergiraju ka teorijskim kako OSN obuhvata veći broj ćelija, što se manifestuje kao efektivno povećanje rezolucije.

6.2 Mehur niže gustine – LDB2, LDB5, LDB10

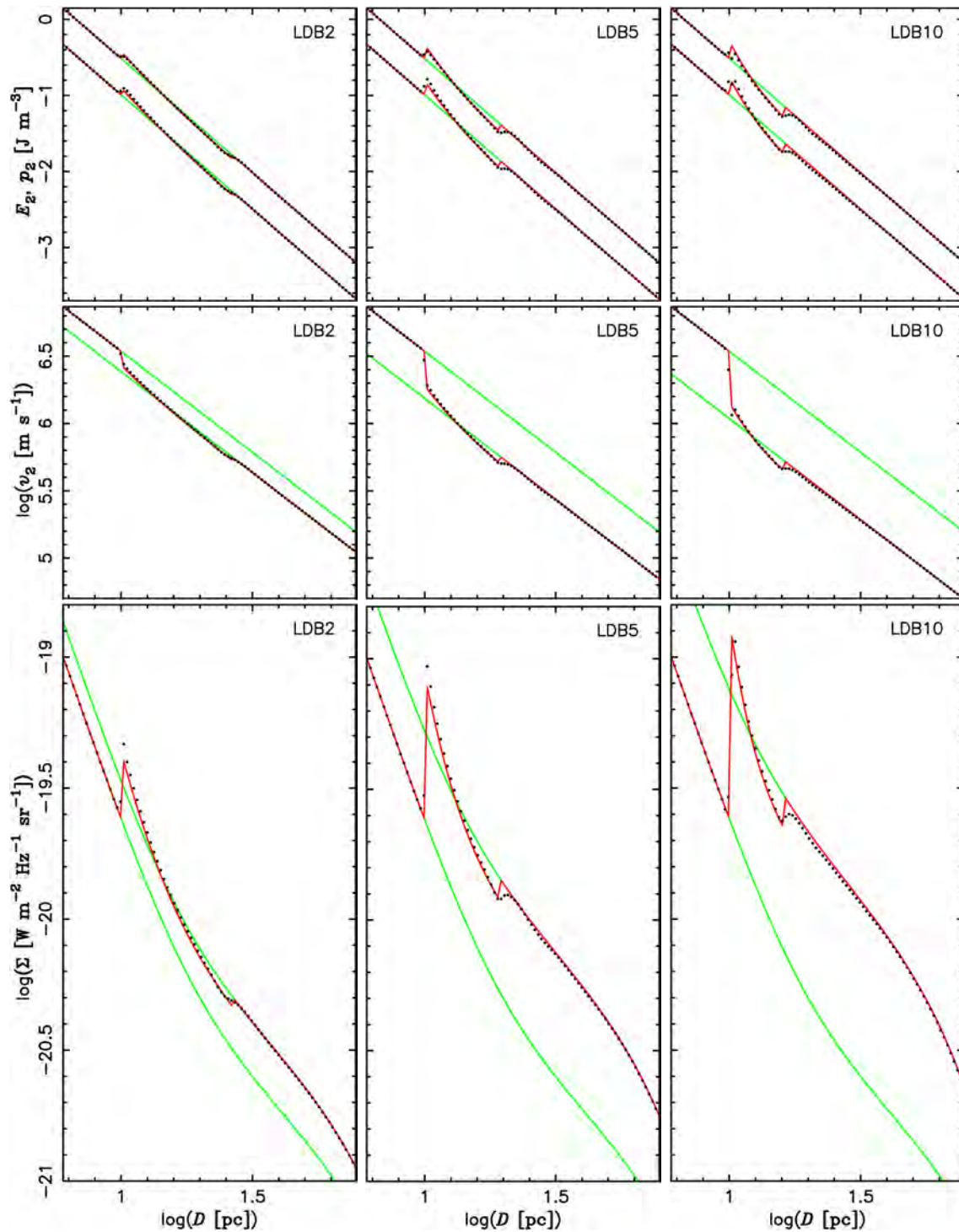
Rezultati simulacija mehura niže gustine (postavke LDB2, LDB5 i LDB10) su prikazani na Slici 6.2. Skok brzine i energije/pritiska je jasno vidljiv na granici diskontinuiteta, kao i na radijusu sjedinjavanja reflektovanog i prednjeg udarnog talasa. Energija udarnog talasa, redukovana za reflektovani deo, očekivano pada ispod nivoa E_2^{uni} pre nego što se reflektovani deo povraća. Kada se reflektovani talas sjedini sa prednjim udarnim talasom sa druge strane ostatka, energija skoči na nivo E_2^{uni} i nastavi svoju evoluciju kao da mehura nije ni bilo. Ovakva evolucija energije direktno utiče na evoluciju brzine udarnog talasa, kao i površinskog sjaja.

Slučaj mehura je iskorišćen za testiranje i postavljanje modela reflektovane energije na udarnom talasu. Radijus ujedinenja dve energije, R_u , kao i ekspanzioni eksponent m koji određuje stopu raspoređivanja energije po zapremini OSN, su procenjeni empirijski:

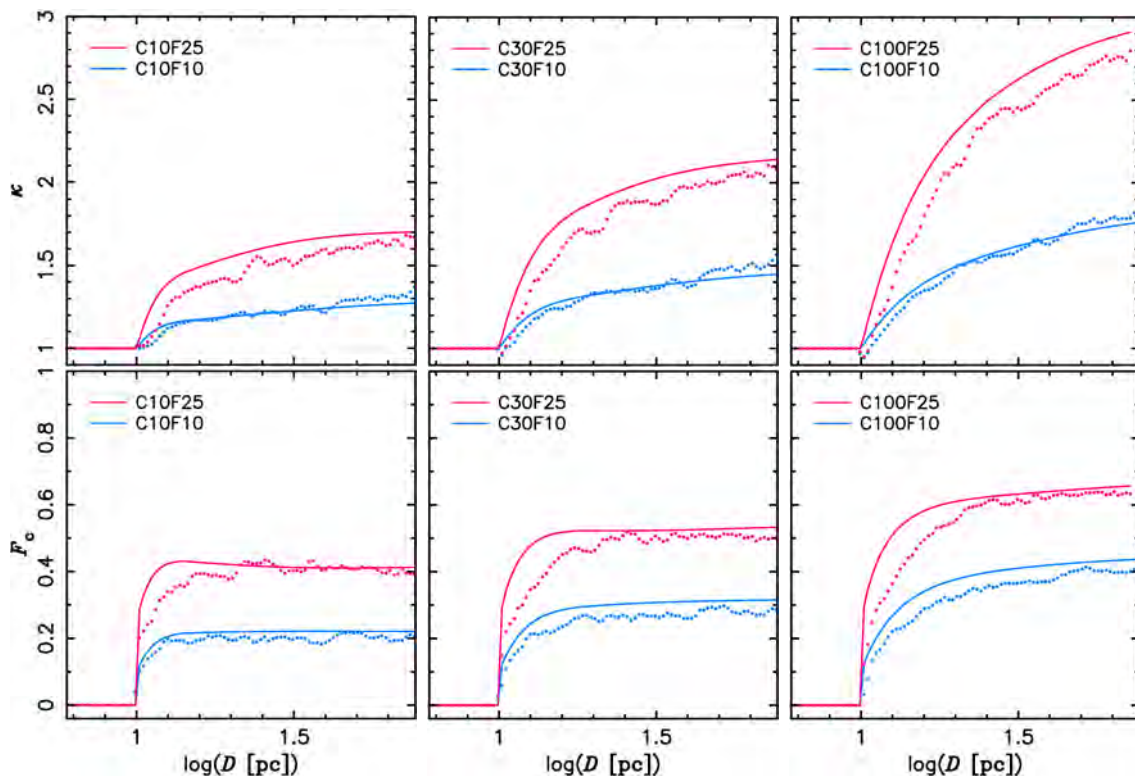
$$R_u = \frac{R_d}{1 - 0.75v_j}, \quad (6.1)$$

i

$$m = \frac{e^{5.651v_j} + 47.04}{e^{4.706v_j}}. \quad (6.2)$$



Slika 6.2: Rezultati simulacija (crne tačke) i semi-analičkog modela (crvene linije) za postavke LDB2, LDB5 i LDB10. Zelene linije predstavljaju evolucije u uniformnoj sredini pri okolnim gustinama ρ_l i ρ_h . Od gornjeg do donjeg reda: evolucija energije (gornja kriva) i pritiska (donja kriva), evolucija brzine iza udarnog talasa i Σ - D relacija.



Slika 6.3: *Gore*. Poređenje površina OSN iz simulacija i analitičkog modela. *Dole*. Poređenje CL frakcije udarnog talasa iz simulacija i analitičkog modela. Tačke i linije predstavljaju rezultate simulacija i analitičkog modela, respektivno. Postavke simulacija su naznačene u legendi.

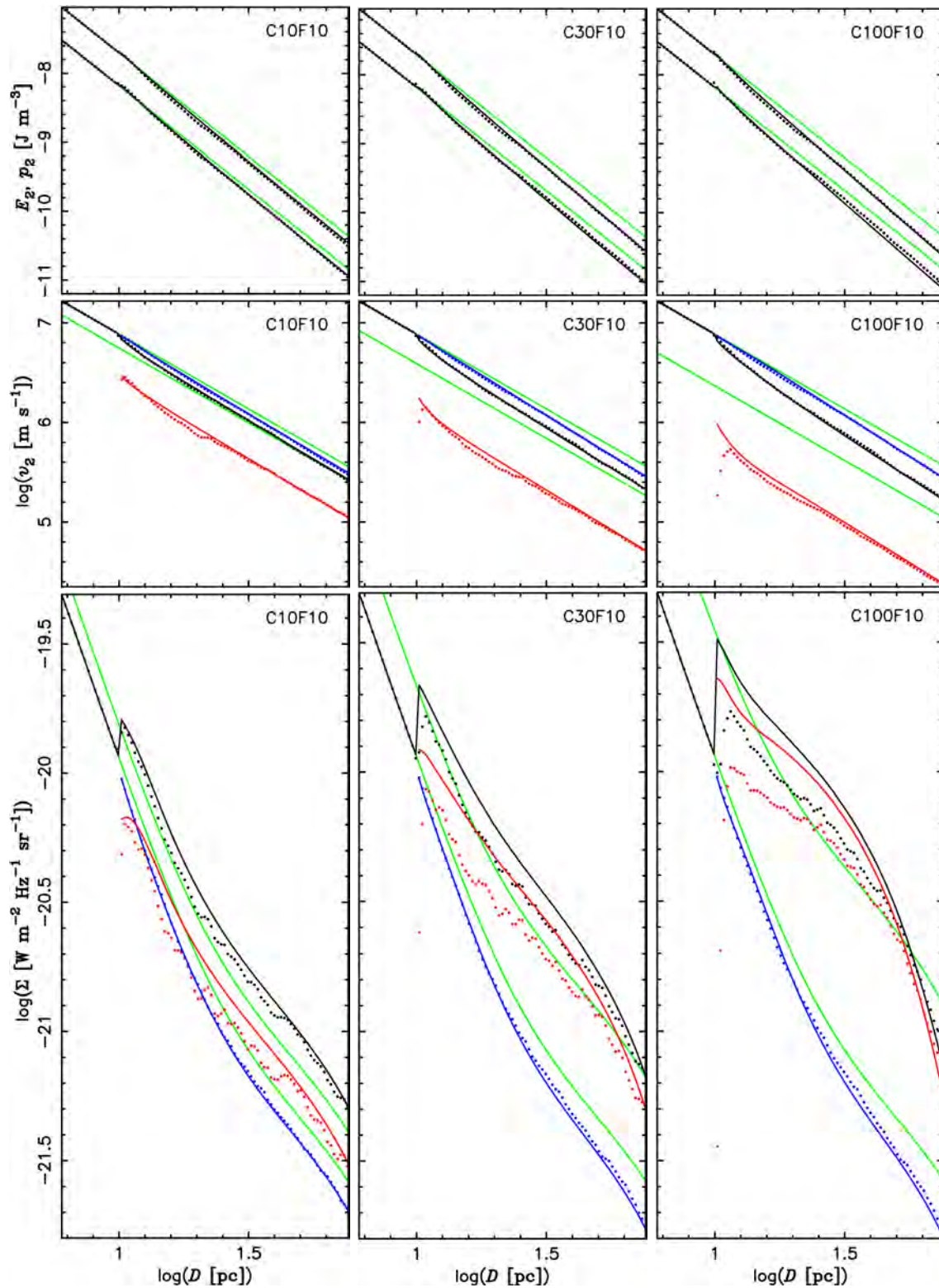
6.3 Grudvasta sredina – C10, C30, C100

Slika 6.3 prikazuje rezultate simulacija i semi-analitičkog modela za površinu udarnog talasa κ i CL frakciju F_c , za postavke C10, C30 i C100. Modeli dobro opisuju rezultate simulacija, iako blago precenjaju obe promenljive. Ipak, model površine udarnog talasa iz poglavlja 5.2.3 uspeva da proceni κ i F_c unutar opsega od dva reda veličine po ρ_j (od C3 do C300), što je dovoljna indikacija validnosti modela.

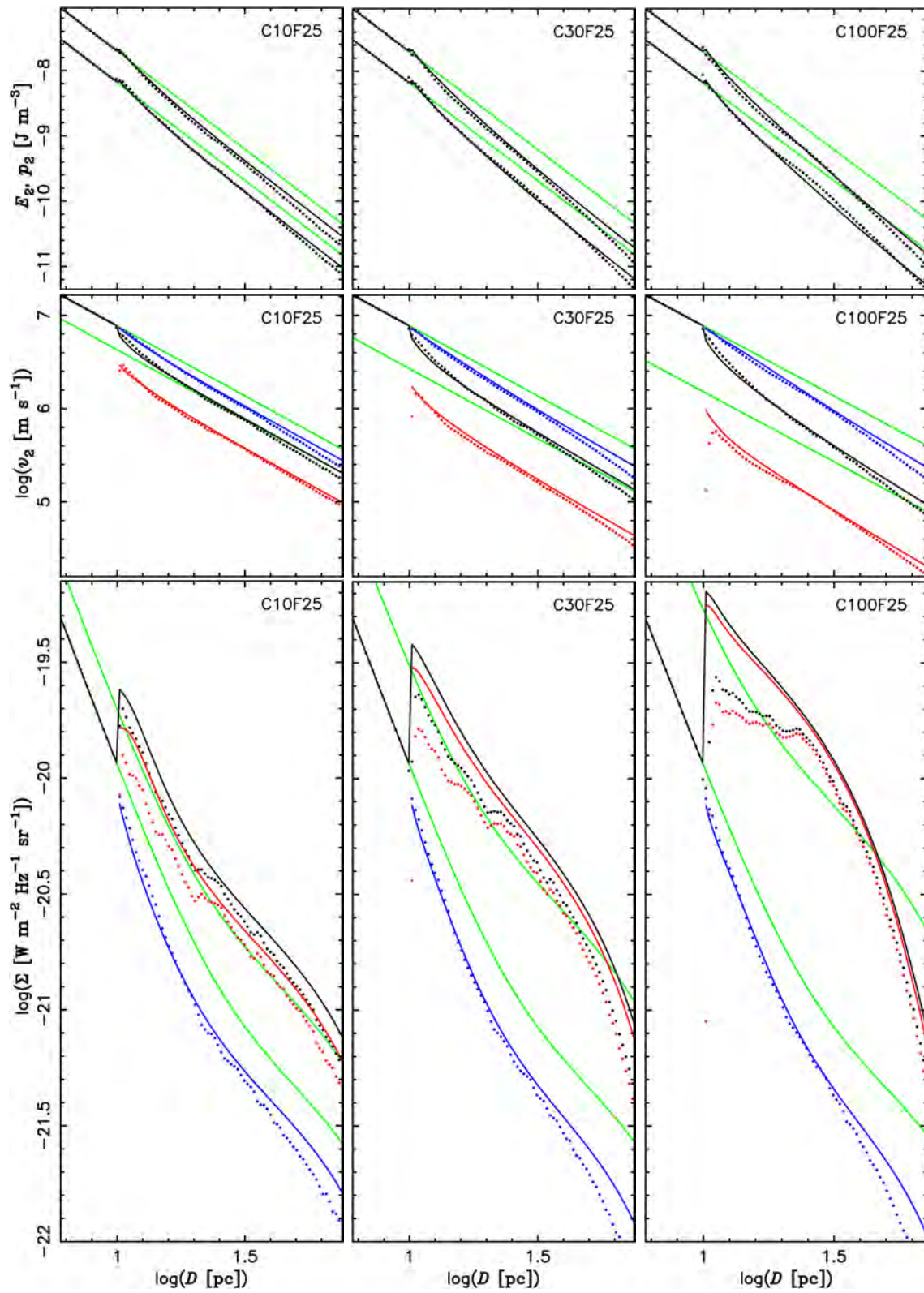
Rezultati evolucije energije/pritiska i brzine za iste postavke su prikazani na Slikama 6.4 i 6.5, za $f_c = 0.1$ i 0.25 , respektivno. Tri panela sleva nadesno, prikazuju evoluciju srednje energije i pritiska na udarnom talasu, srednju brzinu iza udarnog talasa i površinski sjaj (Σ - D relaciju). Na graficima su posebno prikazane srednja ICM i CL brzina, kao i površinski sjaj. Semi-analitički model prati rezultate simulacija, uključujući sistematsko precenjivanje F_c i κ koji u najvećoj meri uzrokuju blago

povišene vrednosti modeliranog površinskog sjaja. Umanjenje energije i brzine na radijusima 5–10 pc usled reflektovane energije se uočava u rezultatima simulacija, ali nije uključeno u semi-analitički model zbog složenosti. S obzirom da emisija ima strmu zavisnost od brzine, ova redukcija se najviše uočava na Σ - D graficima.

U postavkama sa višim kontrastima gustine se primećuje da CL brzina na radijusu R_d kreće od veoma niskih vrednosti, a potom naglo poraste na očekivane vrednosti, što nije hidrodinamički opravdano. Ovaj efekat se pojavljuje i u LDB10 postavci, iako u manjoj meri. Najverovatnije objašnjenje je da se ćelije sa maksimalnom brzinom i maksimalnim impulsom (koje detektuje algoritam, videti poglavlje 4.3.1) ne poklapaju tokom određenog broja vremenskih koraka u tranziciji udarnog talasa iz ICM u CL sredinu. Ćelije na ivicama grudvi zbog svoje visoke gustine mogu da imaju veći impuls nego susedne ICM ćelije, iako im je brzina niža. Na ovaj način, algoritam koji traži ćelije sa maksimalnim impulsom na udarnom talasu, ne pronalazi nužno one sa maksimalnom brzinom. Kasnije, kada udarni talas prođe u veći broj grudvi, ovaj efekat iščezava pa se srednja CL brzina vraća na svoje očekivane vrednosti. Stoga će ovaj numerički artefakt, koji se preslikava i na površinski sjaj ostatka, u tumačenju rezultata simulacija biti zanemaren, a vrednosti koje nudi semi-analitički model se mogu uzeti kao tačnije rešenje odmah iza granice diskontinuiteta.



Slika 6.4: Rezultati za postavke C10F10, C30F10 i C100F10. Tačke i linije prikazuju rezultate simulacija i semi-analičkog modela, respektivno. Plava i crvena boja predstavljaju prosečne ICM i CL vrednosti, respektivno. Crna boja predstavlja ukupni prosek (na grafiku brzine) ili ukupnu vrednost (na Σ - D grafiku). Zelene linije predstavljaju uniformne evolucije u okolnim gustinama ρ_{icm} i $\bar{\rho}$. Od gornjeg do donjeg reda: isto kao na Slici 6.2.



Slika 6.5: Rezultati za postavke C10F25, C30F25 i C100F25. Osobine grafika su iste kao na Slici 6.4.

Glava 7

Diskusija

7.1 Međuzvezdana i okozvezdana sredina

Posmatranja međuzvezdane sredine (MZS) snažno ukazuju na to da ona poseduje fraktalnu strukturu i da je hijerarhijski organizovana u grudve koje okružuje sredina manje gustine. Ovo posebno važi za molekulske oblake. Ove strukture izgledaju slično na velikim rasponima prostorne skale, od ~ 0.1 do ~ 100 pc (Bazell & Desert, 1988; Vogelaar et al., 1991; Elmegreen & Falgarone, 1996; Elmegreen, 1997; Federrath et al., 2009). Dakle, MZS uglavnom nije homogena pa je opravdano pretpostaviti da će veliki broj OSN interagovati sa grudvama tokom svoje evolucije. Zaista, oko ~ 30 – 50% posmatranih OSN u Mlečnom putu (MP) su u kontaktu sa molekulskim oblacima (V19; Jiang et al., 2010).

Ipak, masivne zvezde menjaju svoju okolinu zvezdanim vetrovima i jonizirajućim zračenjem, formirajući okozvezdanu sredinu (OZS). Ovo rade pretežno O i B zvezde sa masama ~ 8 – $35 M_{\odot}$, od kojih većina završava svoje živote u fazi crvenog superdžina (RSG – eng. *red supergiant*) i eksploziji supernove tipa II. Neke od još masivnijih zvezda ($> 35 M_{\odot}$), koje su mnogo manje zastupljene, mogu tokom evolucije da izgube spoljašnji sloj vodonika i eksplodiraju u Volf-Rajeovoj (WR – *Wolf-Rayet*) fazi. RSG zvezda u kasnoj fazi se nalazi u retkom mehuru koji je formiran vetrom zvezde dok je bila na glavnom nizu. Ovaj mehur (WBB – eng. *wind-blown bubble*) je oivičen gustom ljuskom nabijenog materijala MZS, a u centralnom delu sadrži spori stepeno opadajući RSG vetar koji se proteže do radijusa ~ 1 – 5 pc (videti npr. Dwarkadas,

2005). Kod WR zvezde, veoma brz WR vetar gura materijal RSG vetra ispred sebe, formirajući centralni mehur niske gustine (sa gustom ljuskom) koji posle dovoljno vremena može da sustigne i sjedini se sa spoljašnjom ljuskom WBB (Dwarkadas, 2007). Iako se u teoriji ove strukture često razmatraju kao stacionarne i glatke, ili homogenizovane, studije pokazuju da vetar, čak i u sfernosimetričnoj MZS, stvara grudvastu sredinu sa kontrastom gustine do ~ 2 reda veličine (Šurlan et al., 2012, 2013). U regionu tanke guste ljuske se razvijaju i veći kontrasti gustine, jer je njena struktura nalik mreži filamenata (videti rad Van Marlea i Kepensa, Van Marle & Keppens, 2012, za 3D simulacije WR vetrova). Štaviše, MZS u okolini zvezda je retko uniformna, pa se WBB ljuske dodatno obavijaju oko grudvi gasa, dovodeći do daljih turbulencija i zgrudvavanja.

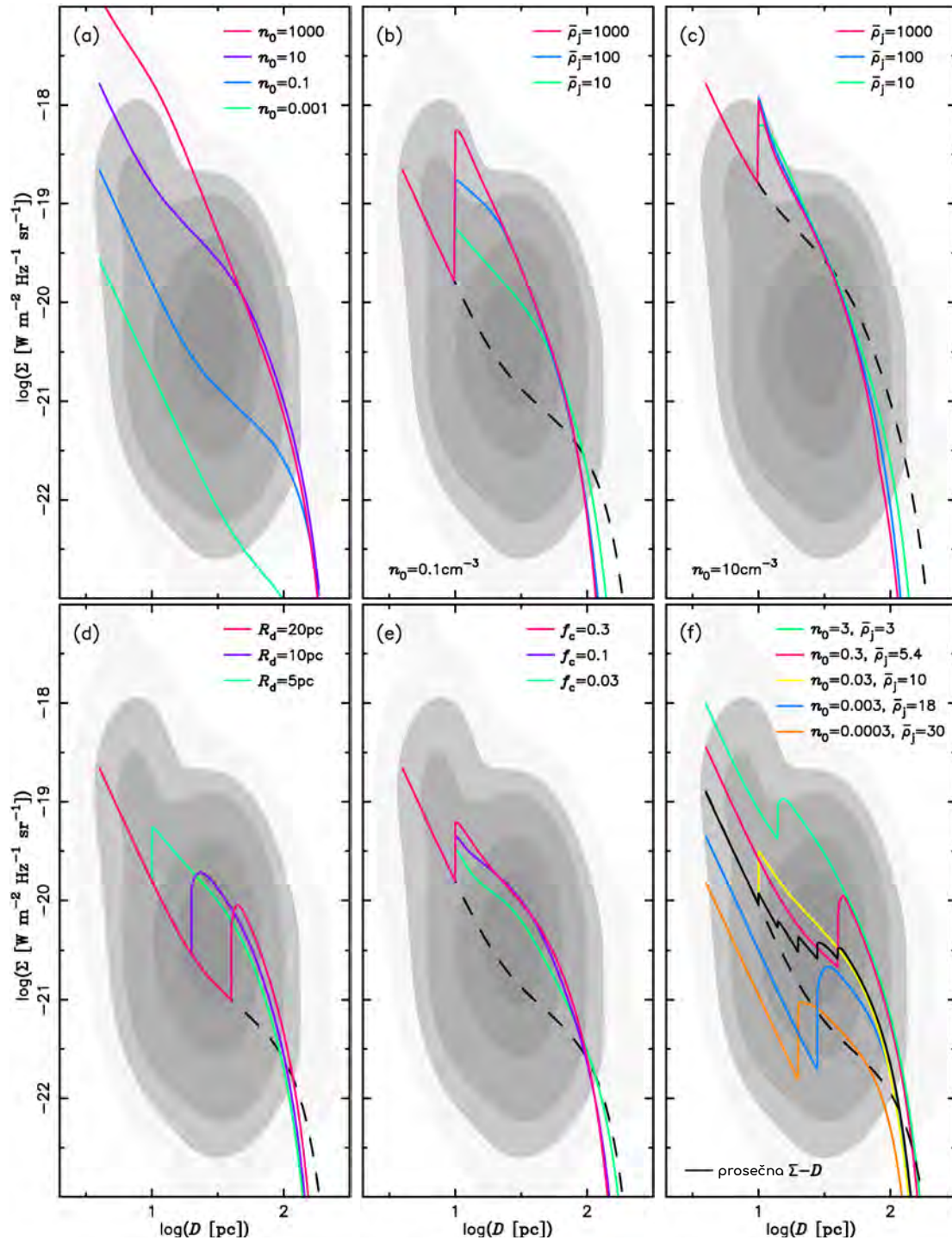
Uzimajući prethodno u obzir, u narednim poglavljima će biti rekonstruisan Galaktički uzorak OSN, uz primenu jednostavnih modela za OZS i MZS u Mlečnom putu. Ovaj postupak nije namenjen dobijanju eventualnih parametara OZS i MZS, već služi kao demonstracija veličine uticaja koji bi grudvasta sredina i nehomogenost MZS mogli imati na radio-sinhrotronsku evoluciju OSN.

7.2 Uticaj grudvaste sredine na Σ - D zavisnost

Sada kada su razvijeni modeli emisije i hidrodinamičke evolucije OSN (Glave 3 i 5), treba ispitati na koji način osobine grudvaste sredine utiču na Σ - D zavisnost za OSN. Glavni parametri grudvaste sredine koji imaju značajan uticaj na emisiju udarnog talasa su: gustina uniformne/ICM sredine (nazovimo je „osnovna” gustina, ρ_0), kontrast gustine između grudvi i ICM sredine (ρ_j), zapreminski udeo grudvi (f_c), i radijus granice između uniformne i grudvaste sredine (granica diskontinuiteta, R_d). Uticaj svake od ovih veličina pojedinačno je prikazan na Slici 7.1. Pozadina grafika je osenčena raspodelom gustine verovatnoće (PDD – eng. *probability density distribution*) uzorka OSN u Mlečnom putu, koji je preuzet iz rada V19. PDD je dobijena metodom iz rada Dojna (Duin, 1976) koja se takođe koristi u V19, a prikazane Σ - D zavisnosti je lakše upoređivati međusobno i sa Galaktičkim uzorkom uz datu raspodelu. Panel (a) prikazuje Σ - D evolucije u širokom opsegu različitih uniformnih

gustina, gde se jasno vidi da u gušćoj sredini Σ - D nagib teži ka strmijim vrednostima. Ovo je rezultat manje efikasnosti ubrzavanja KZ pri nižim brzinama udarnog talasa, koje su posledica više gustine. Stoga, u kasnim fazama evolucije kada udarni talas oslabi, sjaj ostataka u višim gustinama pada na nivo onih na nižim gustinama, čak i niže. Nagib β nije konstantan, već se uglavnom odlikuje blagim poravnanjem tokom evolucije praćenim ustrmljavanjem u finalnim fazama. Ovo se dešava usled prebacivanja iz dominantno nerezonantnog u rezonantni režim pojačanja magnetnog polja. Ista tendencija se primećuje u simulacijama OSN u radu P18. Panel (b) prikazuje uticaj srednjeg skoka gustine na granici R_d , $\bar{\rho}_j = f_{icm} + f_c \rho_j$, na oblik Σ - D zavisnosti. Isto prikazuje panel (c), ali sa većom osnovnom gustinom. Razlika između (b) i (c) je u visini skoka emisije i nagibu potonje evolucije. Na višim osnovnim gustinama udarni talas je slabiji, pa slabi i ubrzanje čestica (kao što je prikazano na desnom panelu Slike 5.3). Panel (d) prikazuje uticaj promene R_d koji je očekivan: poslednji skok je najviši zbog manje gustine u pređašnjoj evoluciji. Panel (e) prikazuje zavisnost od f_c . Kako se broj grudvi povećava, raste CL frakcija udarnog talasa i doprinosi sjaju, ali usled veće srednje gustine opada brzina udarnog talasa, smanjujući sjaj, pa je ova zavisnost relativno slaba.

Najinteresantniji je panel (f) gde je prikazano pet reprezentativnih Σ - D zavisnosti, kao i njihova usrednjena zavisnost. Pri modelovanju ovih zavisnosti primenjena je važna statistička pretpostavka da je srednji skok gustine $\bar{\rho}_j$ inverzno srazmeran osnovnoj gustini. Ideja iza ove pretpostavke je sledeća: kako zračenje odguruje od zvezde okolnu materiju, njena masa se akumulira iza određenog radijusa (ovde, kao i kod OSN, udarni talasi stvaraju mehur). Što se više materije očisti iz mehura, više se poveća gustina oko njega. Takođe se može pretpostaviti da sredina daleko od zvezde, iza ljuske nakupljenog materijala, u proseku ima neku univerzalnu srednju gustinu. Iz ove pretpostavke sledi antikorelacija srednjeg skoka gustine i osnovne gustine, koja je ubačena u model Galaktičkog uzorka OSN. Panel (f) pokazuje osobinu koja proističe iz ove veze, a koja je korisna za modelovanje MP uzorka: srednja Σ - D zavisnost se značajno zaravnjuje u domenu prečnika na kojima OSN nailaze na grudvastu sredinu. Nebitno je da li ostaci u višim ρ_0 nailaze ranije na grudve od onih u nižim ρ_0 , ili obrnuto. Čak i u (namerno modelovanoj) slučajnoj raspodeli R_d u



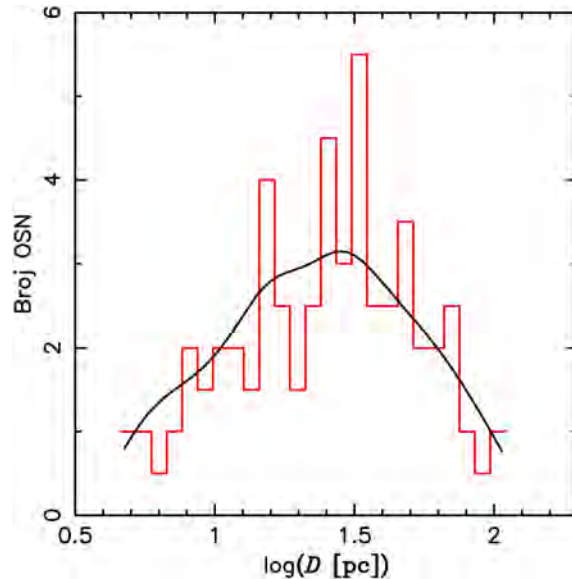
Slika 7.1: Uticaj osobina grudvaste sredine na Σ - D zavisnost, osim kod panela (a) koji prikazuje slučaj više različitih uniformnih gustina. U legendi su ispisane promenljive od značaja za grafik (n_0 je u cm^{-3}). Vrednosti svih ostalih promenljivih koje nisu eksplicitno navedene na grafiku su: $n_0 = 0.1 \text{ cm}^{-3}$, $\bar{\rho}_j = 10$, $f_c = 0.2$, $R_d = 5 \text{ pc}$. Isprekidana crna linija predstavlja uniformnu evoluciju. Poluprečnik grudve, $r_c = 1 \text{ pc}$, je isti za sve grafike. Na panelu (f) usrednjena Σ - D zavisnost je prikazana punom crnom linijom. Sive osenčene konture predstavljaju normalizovanu raspodelu gustine verovatnoće na nivoima 0.025, 0.1, 0.2, 0.5 i 0.8, za Galaktički uzorak preuzet iz V19.

ovih pet zavisnosti, njihova srednja Σ - D zavisnost se stabilno i postepeno zaravnjuje u domenu tranzicije, nakon čega nastavlja da opada strmije. Nivo poravnavanja nagiba se mnogo lakše uočava ako se ova zavisnost uporedi sa crnom isprekidanom linijom koja predstavlja evoluciju u uniformnoj srednjoj osnovnoj gustini.

Na svim graficima sa Slike 7.1 očigledno je da nakon početnog i naglog skoka sjaja sledi „iscrpljivanje” energije udarnog talasa, usled velike mase prebrisanog materijala, pa površinski sjaj kasnije opadne ispod nivoa uniformne evolucije (na osnovnoj gustini). Može se reći da je ovo glavna osobina Σ - D evolucije kroz grudvastu sredinu u prezentovanom modelu: nagli porast sjaja, praćen opadanjem koje postaje strmije sa opadanjem brzine udarnog talasa. Drugim rečima, grudve skraćuju životni vek sinhrotronske evolucije OSN. Posledično, srednji Σ - D nagib u MP uzorku, nakon početnog poravnanja, opada brže nego u uniformnoj sredini (npr. na svakom grafiku Slike 7.1, linija obojena magentom je globalno strmija od isprekidane crne linije, nakon diskontinuiteta). Ova osobina bi mogla delimično da objasni veliko rasipanje u Galaktičkom Σ - D uzorku.

7.3 Analiza Galaktičkog uzorka OSN

Na osnovu prethodno analiziranih uticaja grudvaste sredine na Σ - D evoluciju, modelovana su tri različita uzorka OSN (Model A, B i C) preko kojih je analiziran Galaktički uzorak. Uzorci, koji predstavljaju skup tačaka u Σ - D ravni, su modelovani korišćenjem semi-analitičkog modela iz Glave 5, a tačke su dobijene slučajnim odabirom unutar opsega ulaznih parametara. Ulazni parametri su: R , poluprečnik ostatka (koji ima predefinisane raspodele); $\rho_0 \equiv \rho_{\text{icm}}$, okolna gustina (u slučaju uniformne MZS) ili osnovna gustina u slučaju grudvaste sredine (logaritamska raspodela); $\bar{\rho}_j = f_{\text{icm}} + f_c \rho_j$, srednji skok gustine pri ulasku u grudvastu sredinu (log. ras.); $f_c = 0.25$, zapreminski udeo grudvi; i R_d , granica diskontinuiteta (log. ras.). Modelovani uzorci se sastoje od 1000 tačaka, od kojih je svaka dobijena slučajnim odabirom gore navedenih parametara (unutar svojih granica, sa raspodelom koja je navedena u zagradama). Poređenje modelovanog sa Galaktičkim uzorkom je izvršeno preko normalizovanih raspodela gustina verovatnoće (PDD), računatih nad tačkama



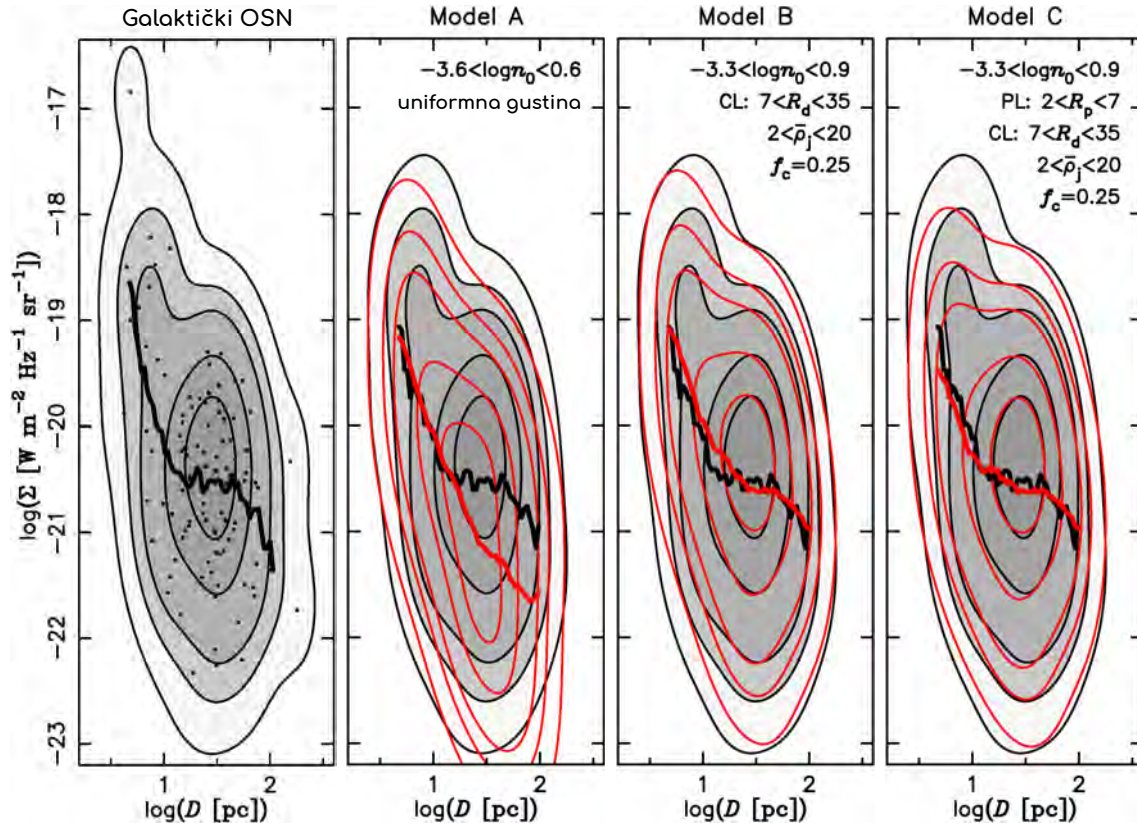
Slika 7.2: Crnom linijom je predstavljena raspodela verovatnoće prečnika OSN koja je korišćena u modelima veštačkih uzoraka. Crveni histogram predstavlja broj ostataka po prečnicima, između 4.6 i 100 pc, unutar 25 jednakih opsega po logaritamskoj skali.

u Σ - D ravni (PDD za MP uzorak je prethodno prikazan na graficima na Slici 7.1). Takođe, poređene su srednje Σ - D krive uzoraka. Galaktički uzorak je uzet iz V19, bez tri autlajera (jedan na $\log \Sigma > -17$, a dva na $\log D > 2.15$).

Poluprečnici generisanih ostataka su birani slučajno između 2.3 i 50 pc, iz raspodele verovatnoće koja odražava MP uzorak, a koja je dobijena metodom ravnjanja (Duin, 1976). Korišćen je dovoljno širok parametar ravnjanja (0.1 dex) kako raspodela ne bi sadržala male varijacije koje nisu od značaja za model. Model raspodele je prikazan na Slici 7.2, uporedo sa histogramom prečnika OSN iz MP uzorka. Raseljavanje po Σ u MP uzorku dozvoljava ρ_0 u rasponu od 3–4 reda veličine. Uz usvojenu vrednost debljine emitujuće ljuske od $10^{-2}R$, vrednosti ambijentalne/osnovne gustine padaju približno između $5 \cdot 10^{-4}$ i 8 cm^{-3} , a slučajni odabir se vrši po logaritamskoj raspodeli. Tipične gustine WBB padaju na donju granicu ove raspodele ($\sim 10^{-4}$ – 10^{-3} cm^{-3} , videti Vink, 2020), ali zvezde eksplodiraju i u gušćim sredinama. Debljina ljuske se obično aproksimira kao 10% poluprečnika, što bi odgovaralo homogenoj komprimovanoj ljusci na $X = 4$. Međutim, pošto profili gustine i brzine imaju strmi pad iza udarnog talasa, a u formuli za emisivnost figuriše koncentracija n_2 (sa vrha talasa), prikladnije je ovde koristiti debljinu ljuske značajno manju od 10%, kako bi se izbeglo precenjivanje ukupnog broja emitujućih elektrona.

Prateći zavisnost raspodele Galaktičkih OSN od prečnika, na Σ - D dijagramu na Slici 7.3, primećuje se da prosečna evolucija Σ ima prelom na $D \approx 13$ pc. Ovo se jasno vidi pri upoređivanju sa Modelom A, trivijalnim veštačkim uzorkom OSN koji evoluiraju u homogenim gustinama opsega prikazanog na grafiku. Crna kriva (MP uzorak) se očigledno odvađa od crvene (Model A), poravnavajući nagib do $\beta \approx 0$ na sličan način kao prosečna kriva na grafiku (f) na Slici 7.1. Sa druge strane, crvena kriva ima kontinuirani trend pada bez značajne promene nagiba, kao što je teorijski očekivano u homogenim sredinama. Dok uzroci za ovo razilaženje mogu biti razni, ovaj rad postavlja hipotezu da na određenim prečnicima dolazi do značajnog usporavanja širenja ostataka usled nailaska udarnog talasa na molekulske oblake ili guste WBB ljuske. Interakcija udarnog talasa sa gušćim materijalom dovodi do porasta emisije u početku, a kasnije do strmijeg pada, kao što je opisano na kraju poglavlja 7.2. Činjenica da raspodela Galaktičkih OSN po prečniku dostiže vrhunac na ≈ 31 pc, a potom veoma strmo opada ka višim prečnicima, snažno podupire ovo stanovište. Međutim, ako bismo pretpostavili da udarni talas nailazi na gustu sfernu WBB ljusku, recimo $\sim 10^3$ puta gušću od unutrašnje sredine, površinski sjaj bi morao naglo da opadne usled brzog radijativnog hlađenja (Haid et al., 2016), što ipak nije slučaj na posmatranom uzorku. Stoga se može zaključiti da ova gusta materija mora biti heterogena (raspoređena grudvasto ili fraktalno), a u slučaju WBB ljuske sferno asimetrična (u odnosu na centar ekspanzije), kako značajan deo udarnog talasa ne bi podlegao brzom radijativnom hlađenju. Nepravilna struktura lokalne MZS je zapravo i očekivana jer je dokazana posmatranjima i numeričkim simulacijama.

Pokazano je da pri nailasku na oblake više gustine radio-sinhrotronska emisija OSN poraste, najviše na početku ove interakcije. Pod pretpostavkom da postoji minimalni poluprečnik WBB mehura ili MZS bez prisustva gustih oblaka oko zvezde, nakon kojeg se ovakve strukture počinju pojavljivati, taj poluprečnik postaje tačka prevoja na kojoj se prosečna Σ - D kriva zaravnjuje. Ovo je kratki opis Modela B, koji je prikazan na Slici 7.3. U ovom modelu, poluprečnik diskontinuiteta R_d je biran slučajno između 7 i 35 pc (po logaritamskoj raspodeli), a osnovna gustina je unutar opsega $-3.3 < \log(n_0) < 0.9$. Dakle, minimalni poluprečnik mehura niske (osnovne)



Slika 7.3: Grafici upoređuju Galaktički uzorak OSN iz V19 sa Modelima A, B i C. Konture predstavljaju normalizovanu raspodelu gustine verovatnoće na nivoima 0.025, 0.1, 0.2, 0.5 i 0.8. Raspodela gustine verovatnoće je dobijena pomoću metoda iz rada Dojna (Duin, 1976), koji je korišćen u V19. Podebljana linija predstavlja vrednost Σ usrednjenu u intervalima po $\log D$ (linija povezuje srednje Σ u 50 intervala čija je širina 0.26). Crnom i crvenom bojom su obeleženi Galaktički i modelovani uzorak, respektivno. Parametri modela su navedeni na graficima; PL - stepena raspodela gustine (eng. *power-law*), CL - grudvasta sredina, n_0 je u cm^{-3} , R_p i R_d su u pc. Tri autlajera koji su prisutni u Galaktičkom uzorku su na ovim graficima izbačeni.

gustine je 7 pc. Kao što je diskutovano u prethodnom poglavlju, srednji skok gustine $\bar{\rho}_j$ je obrnuto proporcionalan osnovnoj gustini, tako da $\bar{\rho}_j = 20$ na minimalnom ρ_0 , a $\bar{\rho}_j = 2$ na maksimalnom ρ_0 . Pretpostavka je da je srednji skok gustine relativno veći iza mehura manje gustine (u proseku). Granice ovih raspodela su odabrane tako da se vrhovi PDD i njihove konture što bolje poklapaju. Model B značajno bolje opisuje Galaktički uzorak od Modela A, posebno kod ostataka na $D > 20$ pc.

Model C se razlikuje od Modela B jedino po tome što unutar mehura ima oblast stepene raspodele gustine, $\rho = \rho_0(R/R_p)^{-2}$, $R < R_p$, kao jednostavan model RSG vetra. Radijus R_p predstavlja granicu između oblasti stepene raspodele i konstantne gustine ρ_0 , a njegov opseg je 2–7 pc. Kao rezultat se dobija smanjenje površinskog

sjaja na $R < R_p$ usled usporavanja udarnog talasa gustim vetrom; brzina udarnog talasa kroz stepenu raspodelu gustine je računata pomoću jednačine (5.9). Iako izgleda da Model C bolje opisuje donji-levi deo Galaktičkog PDD, treba uzeti u obzir da su na ovako malim poluprečnicima ostaci često i dalje u fazi slobodnog širenja, pa ga treba uzeti sa rezervom. Dodatno, zvezdani vetar u mehuru može da putuje nezanemarljivom brzinom (kod RSG zvezda oko 10–100 km/s, a kod masivnih zvezda glavnog niza ili WR zvezda ~ 1000 km/s), pa brzina ispred udarnog talasa u referentnom sistemu vezanom za udarni talas može biti znatno manja, kao i emisija. Efekat ovoga bi mogao da bude dodatno poravnanje Σ - D relacije u regionu tranzicije iz mehura u sredinu van njega.

Gornji-levi deo Galaktičkog PDD ($\log \Sigma > -19.5$ i $\log D < 1$), koji se izdvaja kao posebna grana mladih ostataka sa nagibom $\beta \approx 6$, je gotovo nemoguće modelovati metodom opisanim u ovom radu, jer postoji visoka verovatnoća da oni nisu u potpunosti napustili fazu slobodnog širenja. Ovaj model je zasnovan na Sedov-Tejlorovom zakonu širenja, koji pretpostavlja dovoljno prebrisane mase MZS kako bi brzina zavisila od nje. U slučaju OSN sa masivnim odbačenim materijalom zvezde i sredinom niske gustine, faza slobodnog širenja može trajati do prečnika koji dosta premašuje 10 pc. Zbog toga, poređenju predstavljenih modela i posmatranja u ovoj regiji Σ - D ravni bi trebalo pristupiti sa neophodnim oprezom.

Na većim prečnicima, gde važi Sedov-Tejlorov zakon širenja, Modeli B i C uspešno rekonstruišu Galaktički uzorak. Srednje krive evolucije Σ i konture PDD ovih modela se dobro poklapaju sa uzorkom. Na osnovu ovoga se može izvući zaključak da gusta heterogena materija u zvezdanoj okolini, koja je po svemu sudeći grudva-sta, pruža dobro objašnjenje za poravnavanje posmatranog Σ - D uzorka od ≈ 13 do ≈ 50 pc, kao i veliko rasipanje tačaka.

7.4 Aproksimacija test-čestice *vs.* modifikovani udarni talas

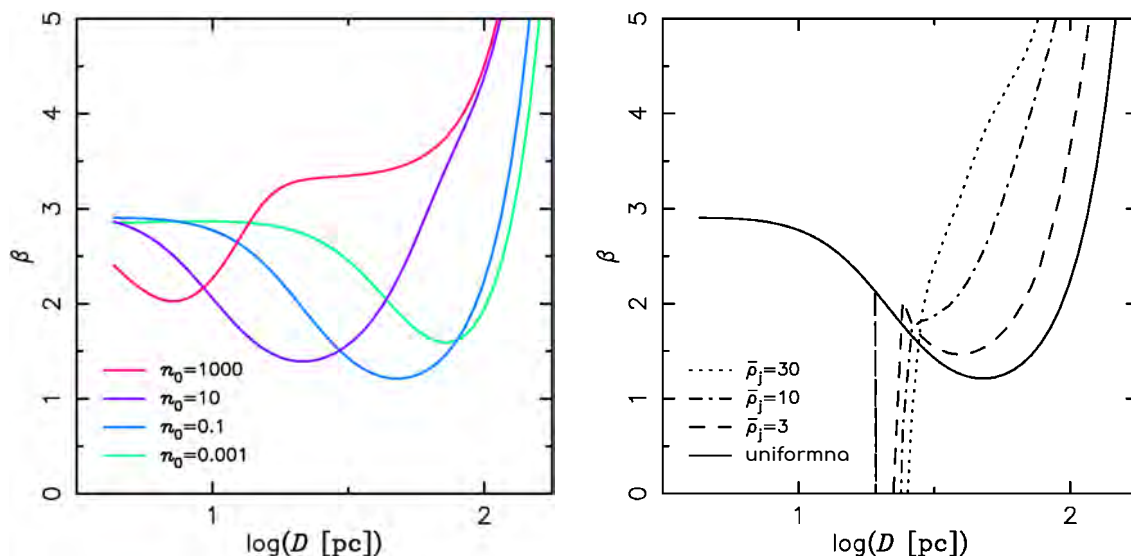
Model emisije iz Glave 3 je izveden uz aproksimaciju test-čestice, koristeći kompresiju iz Rankin-Igonioovih uslova na udarnim talasima i računato magnetno polje.

Ovde će biti predstavljeno kratko poređenje Σ - D modela za homogenu sredinu iz ovog rada i rada P18, čiji autori imaju temeljan pristup ubrzavanju čestica, računajući povratnu reakciju kosmičkih zraka u modifikovanom udarnom talasu. Oni razmatraju modifikaciju udarnog talasa koristeći efektivni adijabatski indeks γ_{eff} koji proizvodi nelinearnu ukupnu kompresiju, pa ona može da dostigne vrednosti $X \sim 10$ – 15 pri velikom Mahovom broju. Magnetno polje je računato na sličan način kao u ovom radu. Tokom faze slobodnog širenja ($D < 3$ – 4 pc), u njihovom modelu OSN koji potiče od supernove tipa Ia manifestuje se faza porasta sjaja usled rastućeg broja ubrzanih KZ (videti Pavlović, 2017, uz reference iz tog rada). U ovom radu faza porasta sjaja ne može biti prisutna *a priori*, zbog Sedov-Tejlorovog karaktera širenja ostataka, pa ostaci manjih prečnika nisu predmet razmatranja.

Uključivanje nelinearnih efekata u P18 daje frakciju pritiska KZ u udarnom talasu, σ_{CR} , oko 0.4–0.8 do poluprečnika ~ 10 – 30 pc, potom kontinuirano opada, uzimajući vrednost ≈ 0.2 na 100 pc (Slika 1 u P18). U ovom radu, tokom rane faze evolucije ova frakcija zavisi od brzine kao $\sigma_{\text{CR}} \propto v_s^{-1}I(x)$, što je rastuća funkcija prečnika približno kao $\propto D^{1.4}$, sve dok kompresija ne opadne ispod 4. Tada σ_{CR} počinje da opada kao $\propto D^{-2}$ ili strmije (desni grafik na Slici 3.1).

Posledično, model emisije iz P18 daje malo strmije Σ - D relacije u ST fazi ($\beta \approx 5$ – 6 , videti Sliku 5 u P18) nego što je slučaj u ovom radu. Levi panel na Slici 7.4 prikazuje evoluciju Σ - D nagiba modela u ovom radu, za različite gustine sredine. U ranoj fazi sve krive počinju sa vrednošću $\beta \approx 3$, potom imaju središnje poravnanje (uz ograničenje $\beta > 1$), nakon čega nagib raste do kraja evolucije. U P18, nagibi kod modela OSN sa kolapsirajućim jezgrom pokazuju sličan trend, premda sa globalno višim vrednostima. OSN tipa Ia nisu u potpunosti uporedivi sa modelom iz ovog rada zbog rane faze porasta sjaja, ali u kasnim fazama njihove Σ - D evolucije takođe pokazuju trend ustrmljavanja sa povećanjem gustine sredine.

Desni panel na Slici 7.4 prikazuje uticaj grudvaste sredine na nagib naknadne Σ - D evolucije. Pokazano je da grudvasta sredina uzrokuje povećanje nagiba Σ - D krive, a efekat ustrmljavanja raste sa povećanjem skoka srednje gustine grudvaste sredine.



Slika 7.4: *Levo*. Nagibi β u razlicitim homogenim gustinama sredine (u cm^{-3}), u zavisnosti od precnika OSN. *Desno*. Nagibi β nakon interakcije sa grudvastom sredinom razlicitog srednjeg skoka gustine ($n_0 = 0.1 \text{ cm}^{-3}$, $R_d = 10 \text{ pc}$, $f_c = 0.2$). Iza granice diskontinuiteta skok nagiba je negativan zbog porasta emisije. Nakon što Σ dostigne maksimalnu vrednost, dalje opadanje je značajno strmije nego u homogenoj sredini, dok nagib zavisi od srednjeg skoka gustine.

7.5 Selekcioni efekti

Posmatrački selekcioni efekti, koji nisu uključeni u modele veštačkih uzoraka, mogu imati značajnu ulogu u oblikovanju uzorka i njegove srednje empirijske Σ - D relacije. Neki od najvažnijih selekcionih efekata kod detekcije Galaktičkih OSN su (Green, 1991; Case & Bhattacharya, 1998; Urošević et al., 2005; Pavlović et al., 2013):

- (i) Donja granica senzitivnosti detektora, odnosno nemogućnost radio-teleskopa da detektuju OSN ispod određenog površinskog sjaja.
- (ii) Rezolucija detektora, odnosno nemogućnost detekcije OSN suviše malih uglovnih dimenzija.
- (iii) Neujednačena pokrivenost neba, jer pozadinski sjaj u Galaksiji nije isti u svim pravcima.
- (iv) Malmkvistov selekcioni efekat, odnosno favorizovanje intrinzično sjajnih objekata, jer se usled donje granice gustine fluksa ovi objekti uzorkuju iz veće prostorne zapremine.

(v) Pogrešna identifikacija objekata, odnosno moguća zamena HII regiona i OSN.

Kod vangalaktičkih uzoraka, odsecanje ostataka sa niskim površinskim sjajem (efekat senzitivnosti) uzrokuje lažno poravnanje srednje Σ - D relacije OSN (Urošević et al., 2005, 2010). Takođe, kod ovih uzoraka su značajni efekti rezolucije i pogrešne identifikacije objekta, dok Malmkvistovog efekta nema jer su svi objekti praktično na istom rastojanju od detektora.

Kod Galaktičkih OSN problemi su brojni, jer posmatračke misije imaju različite granice osetljivosti i rezolucije, dok se pozadinski sjaj menja u zavisnosti od pravca posmatranja. Malmkvistov efekat ovde igra vrlo značajnu ulogu, a pokazano je da je njegov uticaj na nagib Σ - D relacije suprotan efektu senzitivnosti, odnosno da ga ustrmljuje (Urošević et al., 2005; Urošević et al., 2009). Primetan je nedostatak mladih, a udaljenih OSN, zbog malih uglovnih dimenzija. Još više od te skupine nedostaju daleki, a niskosjajni, stari OSN. Svi ovi selekcionni efekti su međusobno povezani, pa ih je veoma teško modelovati.

Metode kojima se određuju udaljenosti do posmatranih OSN uključuju: prostorna poravnanja sa posmatranim HII regionima i molekulskim oblacima poznatih udaljenosti, asocijacije sa crvenim džinovima ili pulsarima, apsorpcione linije HI i polarizacija, radijalne brzine H α linije ili merenja sopstvenih kretanja (V19). S obzirom da neke od metoda nisu dovoljno precizne, greške u određivanju udaljenosti predstavljaju još jedan nepoželjan uticaj na Galaktički Σ - D uzorak. Zbog svega navedenog pojedini autori smatraju da Σ - D relacija nije od velike koristi za određivanje udaljenosti do OSN (Green, 1984, 2005).

Pretpostavimo da bi selekcionni efekat senzitivnosti mogao da bude delimični uzrok poravnanja nagiba Galaktičkog uzorka prikazanog na Slici 7.3, odnosno da u uzorku nedostaju OSN veoma niskog sjaja (koji bi se našli desno-dole na graficima). Pod pretpostavkom da je stvarna raspodela OSN po površinskom sjaju (za fiksno D) simetrična, bilo bi očekivano da odsecanje repa nižih vrednosti dovede do asimetrije u kojoj bi vrh raspodele bio pozicioniran prema nižim vrednostima Σ . Međutim, konture na Slici 7.3 jasno pokazuju da je vrh raspodele pozicioniran ka višim vrednostima Σ . Ovo znači da, ako je pretpostavka simetrije po Σ tačna, selekcionni efekat osetljivosti nema značajan uticaj u oblikovanju uzorka. Ipak, re-

zultati modela pokazuju da evolucione Σ - D krive na višim gustinama teže da se grupišu blizu jedna drugoj (videti Sliku 7.1), podižući statističku težinu uzorka ka višim vrednostima, što podriva pretpostavku o simetriji raspodele po Σ . Ovo otvara mogućnost da, iako je vrh raspodele pozicioniran prema višim vrednostima Σ , selekcionni efekat ima uticaj na poravnanje nagiba Σ - D uzorka. Stapanje evolucionih traka na velikim prečnicima (za različite gustine) se takođe pojavljuje kao rezultat u teorijskom radu Berežka i Felka (Berezhko & Völk, 2004). Sa druge strane, evidentno poravnanje (ili čak prelom) Galaktičkog uzorka oko $D \approx 10$ pc na visokim vrednostima Σ se ne može pripisati selekcionnom efektu osetljivosti, jer ne postoji gornja granica osetljivosti. Dakle, opravdano je tražiti druge uzroke ovog preloma, od kojih se jedan analizira u ovom radu. Potrebna je dodatna analiza selekcionnih efekata, posebno njihova zavisnost od tipa OSN, jer preliminarna analiza ukazuje da je promena Σ - D nagiba kod OSN koji ne interaguju sa molekulskim oblacima veća nego kod onih koji interaguju sa njima. Dublja analiza će dati više odgovora i bolju dijagnozu problema selekcionnih efekata.

Glava 8

Siže

Razvijen je 3D hidrodinamički kod za simulacije evolucije OSN u različitim okolnim sredinama. Teorijski koncept numeričkog koda je detaljno opisan u Glavi 2 koja predstavlja praktično uputstvo za HD simulacije OSN. Dodatna paralelizacija koda učinila ga je pogodnim za korišćenje i na standardnim personalnim računarima sa više procesorskih jezgara. Testovima validacije uspešno su reprodukovani hidrodinamički fenomeni poput transmitovanih i reflektovanih udarnih talasa, kao i Rejli-Tejlorove nestabilnosti. Simulacijama OSN su uspešno reprodukovani samslični Sedovljevi profili gustine, brzine i pritiska unutar ostatka. Kao rezultat razvoja ovog koda objavljen je rad [Kostić \(2019\)](#).

U Glavi 3 je predstavljen model sinhrotronske radio-emisije sa udarnog talasa koji je bio korišćen u simulacijama za računanje lokalnih emisivnosti, kao i ukupne luminoznosti OSN. Model se zasniva na aproksimaciji test-čestice sa podrazumevanom stepenom raspodelom ubrzanih protona i elektrona. Ovaj model je takav da se lako inkorporira u kod simulacije, jer emisivnost pretežno zavisi od brzine udarnog talasa i osobina sredine kroz koju se prostire, a to su izlazni i ulazni parametri simulacije, respektivno.

Izvršene su dve grupe simulacija OSN sa pažljivo odabranim parametrima sredine. Prvo su puštene simulacije OSN u razređenom mehurku kako bi bila proučena hidrodinamička evolucija udarnog talasa i unutrašnjosti ostatka nakon prelaska udarnog talasa iz retke u gustu sredinu (poglavljje 4.2.2). Kao rezultat ovih simulacija razvijen je teorijski model osobina prednjeg i reflektovanog udarnog talasa nakon

ulaska u gušću sredinu. Potom je izvršena grupa simulacija u grudvastoju sredini koja je modelovana kao ansambl nasumično raspoređenih grudvi poluprečnika oko 1 pc, koje su od 3 do 300 puta gušće od okolne sredine. Takođe, korišćene su postavke sa različitim zapreminskim udelima grudvi, od 10% i 25%. Opis svih navedenih simulacija je dat u Glavi 4, a rezultati simulacija su predstavljeni u Glavi 6.

Na osnovu rezultata simulacija, razvijen je statistički semi-analički 3D sferno-simetrični model hidrodinamičke evolucije OSN u grudvastoju sredini (Glava 5). Model se zasniva na složenoj geometriji površine udarnog talasa koji se prostire kroz grudvastu sredinu i skokovima hidrodinamičkih parametara stanja udarnog talasa pri interakciji sa grudvama. Ulazni parametri modela su veličina, gustina i zapreminski udeo grudvi u međuzvezdanoju sredini, kao i rastojanje granice grudvaste sredine od centra ekspanzije (unutar ovog radijusa sredina je homogena). Nakon implementacije modela emisije u semi-analički HD model dobijen je programski kod koji na osnovu date energije eksplozije ostatka i parametara grudvaste sredine daje konačnu Σ - D relaciju čije je poklapanje sa rezultatima simulacija na zadovoljavajućem nivou. Pomoću ovog programa omogućeno je kreiranje veštačkih uzoraka velikog broja OSN u Σ - D ravni veoma brzo (red veličine trajanja procedure je ~ 1 s), dok numerička simulacija samo jednog ostatka supernove zahteva daleko veće procesorsko vreme (~ 10 časova). Analiza poređenja veštački generisanih Σ - D uzoraka i Galaktičkog uzorka, kao i diskusija rezultata data je u Glavi 7.

Glava 9

Zaključak

Ova doktorska disertacija je potekla od ideje da se istraži na koji način raspodela gustine međuzvezdane materije utiče na evoluciju sinhrotronskog radio-sjaja ostataka supernovih. S obzirom da je u mnogim prethodnim istraživanjima Σ - D relacija proučavana samo za slučaj OSN u homogenoj sredini, pretpostavljeno je da nehomogena raspodela gustine mora ostaviti trag u ovoj relaciji u pogledu njenog nagiba i oblika. Ovo je, između ostalog, važno sa aspekta proučavanja Σ - D relacije kao potencijalnog metoda određivanja udaljenosti do posmatranih OSN, kao i njihovog evolucionog statusa (Urošević, 2020, 2022). Rezultati jednostavnog modela (tzv. modela-igračke) koji je direktno povezao sjaj ljuske OSN sa gustinom materije kroz koju se ona prostire ukazao je da bi fraktalna raspodela materije, koja je uobičajena za MZM, mogla uticati na dodatno ustrmljavanje nagiba Σ - D relacije (Kostić et al., 2016). Međutim, da bi se detaljnije ispitala ova hipoteza, bilo je potrebno koristiti složenije numeričke metode i bolji emisijski model, kako bi se preciznije ispratili fizički procesi koji dovode do zračenja tokom evolucije OSN. Pored toga, udarni talas koji se prostire kroz nehomogenu materiju ne može ostati sferan, već dolazi do njegove deformacije u zavisnosti od lokalne gustine materije koja se nalazi ispred njega, što dovodi do značajnih uticaja na geometriju i hidrodinamiku udarnog talasa. Zato je u okviru doktorske disertacije razvijen novi numerički kod za hidrodinamičke simulacije OSN (Kostić, 2019) u koji je implementiran model sinhrotronske radio-emisije. Cilj simulacija koje su primenjivane u ovom radu je bio pravljenje semi-analitičkog modela hidrodinamičke evolucije OSN sa porastom

prečnika. Zbog potrebe da se rezultati simulacija predstave analitički, bez preterane kompleksnosti analitičkog modela, kao model nehomogene materije je uzeta grudvasta sredina. Semi-analitički model je upotrebljen za generisanje velikih veštačkih uzoraka OSN u Σ - D ravni čijim su upoređivanjem sa posmatranim Galaktičkim uzorkom izvučeni određeni zaključci o statističkoj raspodeli gustine MZM u kojoj evoluiraju posmatrani ostaci.

Kao jedan od glavnih rezultata ovog istraživanja pokazano je da ostaci supernovih koji se prostiru kroz grudvastu sredinu imaju značajno drugačiju evoluciju sjaja od onih koji se šire u homogenoj sredini iste prosečne gustine. Ako evoluciju ovog sjaja posmatramo preko njihove Σ - D relacije, uočavamo da površinski sjaj pri ulasku u grudvastu sredinu najčešće doživljava inicijalni skok u odnosu na slučaj uniformne sredine, što je posledica naglog porasta broja grudvi u interakciji sa udarnim talasom, kao i povećanja ukupne emitujuće površine ostatka u odnosu na sfernu. Posle izvesnog vremena interakcija udarnog talasa sa grudvama stvara mrežu reflektovanih talasa koji odnose energiju ka unutrašnjosti, vraćajući samo deo energije ka preživelim grudvama (tzv. CL ostrvima), a udeo grudvi na udarnom talasu doživljava zasićenje. Na ovaj način udarni talas slabi, a njegov Mahov broj opada. Stoga, u kasnijim fazama evolucije ovakva sredina dovodi do bržeg pada ubrzavanja kosmičkih zraka i emisivnosti, posebno na grudvama. Takođe, ukoliko bi radijativni gubici bili uzeti u obzir, opadanje bi bilo izraženije čak i u ranijim fazama. Zbog toga, faza pojačanog sjaja traje ograničeno vreme tokom evolucije, verovatno ne više od ~ 10 pc tokom rasta poluprečnika ostatka nakon ulaska u grudvastu sredinu, što naravno zavisi od brojnih parametara.

Semi-analitički model drastično skraćuje vreme potrebno za dobijanje evolucionih Σ - D traka OSN. Na taj način je omogućeno generisanje veštačkih uzoraka OSN koji su poređeni sa posmatranim Galaktičkim uzorkom. Analizirana su tri jednostavna modela uzoraka, a rezultati njihovog poređenja sa posmatranim uzorkom sugerišu da bi značajan deo OSN morao da evoluiru u interakciji sa oblacima međuzvezdane materije, kako bi se objasnilo poravnanje u Galaktičkom Σ - D uzorku na prečnicima oko ~ 30 pc. Prema ovim rezultatima, značajan uticaj oblaka počinje na prečnicima u intervalu 14–70 pc, a prosečan skok gustine hipotetičke grudvaste sredine iznosi

~ 2 – 20 puta, zavisno od gustine okozvezdane sredine, odnosno WBB mehura. Što je manja gustina okozvezdane sredine, očekuje se veći skok prosečne gustine pri izlasku iz mehura ili pri nailasku na guste oblake gasa.

Nagib Σ – D relacije nije konstantan tokom evolucije OSN u homogenoj sredini. Ako zanemarimo fazu porasta sjaja koja je dobijena u radu P18, u ranim fazama evolucije $\beta \approx 3$, a potom opada do svog minimuma čija pozicija na β – D dijagramu zavisi od gustine sredine (Slika 7.4). Nakon toga, u kasnijim fazama evolucije, nagib monotono raste, bez ograničenja, sa slabljenjem jačine udarnog talasa. Kombinovanjem rezultata Σ – D nagiba u uniformnoj sredini korišćenjem emisionih modela iz P18 i ovog rada, ustanovljeno je da u Sedov-Tejlorovoj fazi nagib mora biti unutar opsega od $\beta \approx 1.2$, što je najniža vrednost u ovom radu, do $\beta \approx 6$, što je najviša vrednost iz P18. S obzirom da nagib prosečne Σ – D relacije Galaktičke populacije OSN na $D \approx 30$ pc iznosi ≈ 0 , dakle značajno ispod ovog opsega, predlaže se da efekat poravnavanja potiče od sporadičnih skokova emisije pojedinačnih OSN u uzorku. Ovi skokovi emisije se dešavaju u ograničenom intervalu prečnika OSN, gde je najznačajniji rezultat donja granica ovog intervala, $D \approx 14$ pc, kao što je prikazano na Slici 7.3. S obzirom da se nakon ovog prečnika prosečan nagib Galaktičke Σ – D relacije ubrzano zaravnjuje do $\beta \approx 0$, ovaj rezultat važi nezavisno od modela emisije. Zaključak ovog istraživanja je da uzrok skokova emisije nakon $D \approx 14$ pc leži u skoku prosečnog radijalnog profila gustine međuzvezdane sredine, koji se ogleda u rasprostranjenosti okolnih molekulskih oblaka ili zvezdanim vetrovima formiranih ljuski gasa.

Pretpostavka je da model grudvaste sredine koji je korišćen u ovom istraživanju može biti prva aproksimacija bilo koje nehomogene sredine, jer poseduje dve najvažnije osobine koje su prisutne u inače fraktalnoj MZM: veliki kontrast gustine i veliku prostornu nehomogenost. Jedina dokazana osobina MZM koju korišćeni model grudvaste sredine ne poseduje je fraktalnost, odnosno opadanje prosečne gustine sa radijusom sfere koja obuhvata materiju (a koje se karakteriše fraktalnom dimenzijom, videti u radu Kostića i saradnika, Kostić et al., 2016). Posledica ove osobine bi mogla biti ublažavanje nagiba Σ – D u kasnijim fazama evolucije, jer bi udarni talas na velikim prečnicima nailazio na manje grudvi čime bi efekat njegovog slabljenja bio

manji. Ovo verovatno ne bi značajnije uticalo na kvalitet dobijenih rezultata ovog rada koji se tiču poravnanja nagiba na srednjim prečnicima (oko 30 pc). Svakako, teorijski koncept semi-analičkog modela koji je predstavljen za slučaj grudvaste materije u ovom radu može da bude osnova za razvijanje složenijih modela koji bi uključivali i fraktalnost.

Razvoj veoma složenog modela emisije, koji bi uključivao modifikaciju udarnog talasa i DSA mehanizam ubrzanja čestica, je prevazilazio opseg ovog rada, jer je akcenat ove doktorske disertacije više bio na hidrodinamici evolucije OSN u nehomogenoj sredini. Postojeći napredni modeli sinhrotronske emisije imaju dovoljno problema i u homogenoj sredini. U ovom radu je korišćen teorijski model emisije test-čestice, jer se modifikacija udarnog talasa u DSA procesu ne može dobiti hidrodinamičkim simulacijama. Ono od čega bi buduće istraživanje imalo koristi je svakako uključivanje modifikacije udarnog talasa preko varijabilnog, odnosno efektivnog adijabatskog indeksa γ_{eff} (Ellison et al., 2004), koji bi se u hidrodinamičkim simulacijama tretirao kao pasivni skalar, kao i računanje oblika spektra ubrzanih protona i elektrona (P18; Arbutina & Zeković, 2021).

Što se tiče hidrodinamičkih simulacija OSN, razvijeni numerički kod je dovoljno dobar za potrebe ovog rada. Međutim, radi dobijanja boljih rezultata, posebno u regionu udarnog talasa, neophodna je metoda adaptivne mreže (AMR - eng. *adaptive mesh refinement*) koja dodatno skraćuje vreme izvršenja programa uz preciznije rezultate. Implementacija AMR metode u postojeći kod je takođe planirana. Pored toga što postoje napredni kodovi koji su pomenuti u ovom radu (PLUTO, FLASH i dr.), uvek postoji potreba za razvojem novih specijalizovanih kodova za različite namene, pa će tako i razvoj ovog koda biti nastavljen u tom smeru.

Bibliografija

- Arbutina, B. (2017). Evolution of Supernova Remnants. *Publications de l'Observatoire Astronomique de Beograd*, 97:1–92.
- Arbutina, B. and Urošević, D. (2005). Σ -D relation for supernova remnants and its dependence on the density of the interstellar medium. *MNRAS*, 360:76–80.
- Arbutina, B., Urošević, D., Stanković, M., and Tešić, L. (2004). L-D dependence for supernova remnants and its connection with the Σ -D relation. *MNRAS*, 350(1):346–350.
- Arbutina, B. and Zeković, V. (2021). Non-linear diffusive shock acceleration: A recipe for injection of electrons. *Astroparticle Physics*, 127:102546.
- Axford, W. I., Leer, E., and Skadron, G. (1977). The Acceleration of Cosmic Rays by Shock Waves. In *International Cosmic Ray Conference*, volume 11 of *International Cosmic Ray Conference*, page 132.
- Bandiera, R. and Petruk, O. (2010). A statistical approach to radio emission from shell-type SNRs. I. Basic ideas, techniques, and first results. *A&A*, 509:A34.
- Bazell, D. and Desert, F. X. (1988). Fractal structure of interstellar cirrus. *ApJ*, 333:353–358.
- Bell, A. R. (1978). The acceleration of cosmic rays in shock fronts - I. *MNRAS*, 182:147–156.
- Berezhko, E. G. and Völk, H. J. (2004). The theory of synchrotron emission from supernova remnants. *A&A*, 427:525–536.

- Berkhuijsen, E. M. (1986). Properties of supernova remnants at known distances. I - Surface brightness and radio spectral index. *A&A*, 166:257–270.
- Blandford, R. D. and Ostriker, J. P. (1978). Particle acceleration by astrophysical shocks. *ApJL*, 221:L29–L32.
- Blasi, P. (2002). A semi-analytical approach to non-linear shock acceleration. *Astroparticle Physics*, 16(4):429–439.
- Blasi, P., Gabici, S., and Vannoni, G. (2005). On the role of injection in kinetic approaches to non-linear particle acceleration at non-relativistic shock waves. *MNRAS*, 361(3):907–918.
- Borkowski, K. J., Blondin, J. M., and McCray, R. (1997). X-Rays from the Impact of SN 1987A with its Circumstellar Ring. *ApJ*, 477(1):281–293.
- Bryan, G. L., Norman, M. L., O’Shea, B. W., Abel, T., Wise, J. H., Turk, M. J., Reynolds, D. R., Collins, D. C., Wang, P., Skillman, S. W., Smith, B., Harkness, R. P., Bordner, J., Kim, J.-h., Kuhlen, M., Xu, H., Goldbaum, N., Hummels, C., Kritsuk, A. G., Tasker, E., Skory, S., Simpson, C. M., Hahn, O., Oishi, J. S., So, G. C., Zhao, F., Cen, R., Li, Y., and Enzo Collaboration (2014). ENZO: An Adaptive Mesh Refinement Code for Astrophysics. *ApJS*, 211(2):19.
- Case, G. L. and Bhattacharya, D. (1998). A New Σ -D Relation and Its Application to the Galactic Supernova Remnant Distribution. *ApJ*, 504:761–772.
- Chevalier, R. A. (1983). Blast waves with cosmic-ray pressure. *ApJ*, 272:765–772.
- Drury, L. O. (1983). An introduction to the theory of diffusive shock acceleration of energetic particles in tenuous plasmas. *Reports on Progress in Physics*, 46(8):973–1027.
- Duin, P. W., R. (1976). On the choice of smoothing parameters for parzen estimators of probability density functions. *IEEE Transactions on Computers*, C-25(11):1175–1179.

- Duric, N. and Seaquist, E. R. (1986). A theoretical interetation of the Sigma-D relation for supernova remnants. *ApJ*, 301:308–311.
- Dwarkadas, V. V. (2005). The Evolution of Supernovae in Circumstellar Wind-Blown Bubbles. I. Introduction and One-Dimensional Calculations. *ApJ*, 630(2):892–910.
- Dwarkadas, V. V. (2007). The Evolution of Supernovae in Circumstellar Wind Bubbles. II. Case of a Wolf-Rayet Star. *ApJ*, 667(1):226–247.
- Dwarkadas, V. V. and Chevalier, R. A. (1998). Interaction of Type IA Supernovae with Their Surroundings. *ApJ*, 497(2):807–823.
- Ellison, D. C., Decourchelle, A., and Ballet, J. (2004). Hydrodynamic simulation of supernova remnants including efficient particle acceleration. *A&A*, 413:189–201.
- Elmegreen, B. G. (1997). Intercloud Structure in a Turbulent Fractal Interstellar Medium. *ApJ*, 477:196–203.
- Elmegreen, B. G. and Falgarone, E. (1996). A Fractal Origin for the Mass Spectrum of Interstellar Clouds. *ApJ*, 471:816.
- Federrath, C., Klessen, R. S., and Schmidt, W. (2009). The Fractal Density Structure in Supersonic Isothermal Turbulence: Solenoidal Versus Compressive Energy Injection. *ApJ*, 692:364–374.
- Fesen, R. A., Kwitter, K. B., and Downes, R. A. (1992). H(alpha) Images of the Cygnus Loop: A New Look at Shock-Wave Dynamics in an Old Supernova Remanant. *AJ*, 104:719.
- Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., Timmes, F. X., Zingale, M., Lamb, D. Q., MacNeice, P., Rosner, R., Truran, J. W., and Tufo, H. (2000). FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes. *ApJS*, 131(1):273–334.

- Godunov, S. K. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 89:271–306.
- Green, D. A. (1984). Statistical studies of supernova remnants. *MNRAS*, 209:449–478.
- Green, D. A. (1991). Limitations Imposed on Statistical Studies of Galactic Supernova Remnants by Observational Selection Effects. *PASP*, 103:209.
- Green, D. A. (2005). Some statistics of Galactic SNRs. *MmSAI*, 76:534–541.
- Haid, S., Walch, S., Naab, T., Seifried, D., Mackey, J., and Gatto, A. (2016). Supernova blast waves in wind-blown bubbles, turbulent, and power-law ambient media. *MNRAS*, 460(3):2962–2978.
- Hole, K. T., Kasen, D., and Nordsieck, K. H. (2010). Spectropolarimetric Signatures of Clumpy Supernova Ejecta. *ApJ*, 720(2):1500–1512.
- Jiang, B., Chen, Y., Wang, J., Su, Y., Zhou, X., Safi-Harb, S., and DeLaney, T. (2010). Cavity of Molecular Gas Associated with Supernova Remnant 3C 397. *ApJ*, 712(2):1147–1156.
- Kamm, R. J. and Timmes, X. F. (2007). On efficient generation of numerically robust sedov solutions. *LANL Report LA-UR-07-2849*.
- Klein, R. I., McKee, C. F., and Colella, P. (1994). On the Hydrodynamic Interaction of Shock Waves with Interstellar Clouds. I. Nonradiative Shocks in Small Clouds. *ApJ*, 420:213.
- Kostić, P. (2019). A New Numerical Code for Hydrodynamical 3D Simulations of Supernova Remnants. *Serbian Astronomical Journal*, 199:65–82.
- Kostić, P., Vukotić, B., Urošević, D., Arbutina, B., and Prodanović, T. (2016). Interstellar medium structure and the slope of the radio Σ -D relation of supernova remnants. *MNRAS*, 461:1421–1430.

- Krymskii, G. F. (1977). A regular mechanism for the acceleration of charged particles on the front of a shock wave. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, 234:1306–1308.
- Mac Low, M.-M., McKee, C. F., Klein, R. I., Stone, J. M., and Norman, M. L. (1994). Shock Interactions with Magnetized Interstellar Clouds. I. Steady Shocks Hitting Nonradiative Clouds. *ApJ*, 433:757.
- Malkov, M. A. and Drury, L. O. (2001). Nonlinear theory of diffusive acceleration of particles by shock waves. *Reports on Progress in Physics*, 64(4):429–481.
- McKee, C. F. and Ostriker, J. P. (1977). A theory of the interstellar medium: three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate. *ApJ*, 218:148–169.
- Mignone, A., Bodo, G., Massaglia, S., Matsakos, T., Tesileanu, O., Zanni, C., and Ferrari, A. (2007). PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics. *ApJS*, 170(1):228–242.
- Mignone, A., Zanni, C., Tzeferacos, P., van Straalen, B., Colella, P., and Bodo, G. (2012). The PLUTO Code for Adaptive Mesh Computations in Astrophysical Fluid Dynamics. *ApJS*, 198(1):7.
- Nomoto, K., Thielemann, F. K., and Yokoi, K. (1984). Accreting white dwarf models for type I supern. III. Carbon deflagration supernovae. *ApJ*, 286:644–658.
- Orlando, S., Bocchino, F., Miceli, M., Petruk, O., and Pumo, M. L. (2012). Role of Ejecta Clumping and Back-reaction of Accelerated Cosmic Rays in the Evolution of Type Ia Supernova Remnants. *ApJ*, 749(2):156.
- Orlando, S., Peres, G., Reale, F., Bocchino, F., Rosner, R., Plewa, T., and Siegel, A. (2005). Crushing of interstellar gas clouds in supernova remnants. I. The role of thermal conduction and radiative losses. *A&A*, 444(2):505–519.
- Pacholczyk, A. G. (1970). *Radio astrophysics. Nonthermal processes in galactic and extragalactic sources*. W. H. Freeman and Co., San Francisco.

- Pavlović, M., Urošević, D., Vukotić, B., Arbutina, B., and Göker, Ü. D. (2013). Erratum: "The Radio Surface Brightness to Diameter Relation for Galactic Supernova Remnants: Sample Selection and Robust Analysis with Various Fitting Offsets". *ApJS*, 205:10.
- Pavlović, M. Z. (2017). Hydrodynamical and radio evolution of young supernova remnant G1.9+0.3 based on the model of diffusive shock acceleration. *MNRAS*, 468(2):1616–1630.
- Pavlović, M. Z., Dobardžić, A., Vukotić, B., and Urošević, D. (2014). Updated Radio Sigma-D Relation for Galactic Supernova Remnants. *Serbian Astronomical Journal*, 189:25–40.
- Pavlović, M. Z., Urošević, D., Arbutina, B., Orlando, S., Maxted, N., and Filipović, M. D. (2018). Radio Evolution of Supernova Remnants Including Nonlinear Particle Acceleration: Insights from Hydrodynamic Simulations. *ApJ*, 852:84. (P18).
- Ptuskin, V. S. and Zirakashvili, V. N. (2003). Limits on diffusive shock acceleration in supernova remnants in the presence of cosmic-ray streaming instability and wave dissipation. *A&A*, 403:1–10.
- Reynolds, S. P. (2008). Supernova remnants at high energy. *ARA&A*, 46:89–126.
- Sarbadhicary, S. K., Badenes, C., Chomiuk, L., Caprioli, D., and Huizenga, D. (2017). Supernova remnants in the Local Group - I. A model for the radio luminosity function and visibility times of supernova remnants. *MNRAS*, 464(2):2326–2340.
- Sedov, L. I. (1959). *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Academic Press, New York.
- Shen, Z., Yan, W., and Yuan, G. (2016). A robust HLLC-type Riemann solver for strong shock. *Journal of Computational Physics*, 309:185–206.
- Shklovskii, I. S. (1960). Secular Variation of the Flux and Intensity of Radio Emission from Discrete Sources. *AZh*, 37:256.

- Shu, F. (1991). *The Physics of Astrophysics: Gas dynamics*. Series of books in astronomy. University Science Books, Sausalito CA.
- Sod, G. A. (1978). A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 27(1):1–31.
- Tasker, E. J., Brunino, R., Mitchell, N. L., Michielsen, D., Hopton, S., Pearce, F. R., Bryan, G. L., and Theuns, T. (2008). A test suite for quantitative comparison of hydrodynamic codes in astrophysics. *MNRAS*, 390(3):1267–1281.
- Teyssier, R. (2002). Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement - a new high resolution code called ramses. *A&A*, 385(1):337–364.
- Toro, E. F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, third edition.
- Urošević, D., Pannuti, T. G., Duric, N., and Theodorou, A. (2005). The Σ D relation for supernova remnants in nearby galaxies. *A&A*, 435:437–447.
- Urošević, D., Vukotić, B., Arbutina, B., and Sarevska, M. (2010). The Orthogonal Fitting Procedure for Determination of the Empirical Σ -D Relations for Supernova Remnants: Application to Starburst Galaxy M82. *ApJ*, 719:950–957.
- Urošević, D. (2014). On the radio spectra of supernova remnants. *Ap&SS*, 354(2):541–552.
- Urošević, D. (2020). Determining the evolutionary status of supernova remnants. *Nature Astronomy*, 4:910–912.
- Urošević, D. (2022). On the Determination of the Evolutionary Status of Supernova Remnants from Radio Observation Data. *PASP*, 134(1036):061001.
- Urošević, D., Arbutina, B., and Onić, D. (2019). Particle acceleration in interstellar shocks. *Ap&SS*, 364(10):185.

- Urošević, D., Vukotić, B., Arbutina, B., Ilić, D., Filipović, M., Bojičić, I., Segan, S. ., and Vidojević, S. (2009). The Σ -D relation for planetary nebulae. *A&A*, 495(2):537–546.
- Vaidya, B., Mignone, A., Bodo, G., and Massaglia, S. (2015). Astrophysical fluid simulations of thermally ideal gases with non-constant adiabatic index: numerical implementation. *A&A*, 580:A110.
- Van den Bergh, S. (1988). Classification of Supernovae and Their Remnants. *ApJ*, 327:156.
- Van Leer, B. (1979). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov’s Method. *Journal of Computational Physics*, 32(1):101–136.
- Van Marle, A. J. and Keppens, R. (2012). Multi-dimensional models of circumstellar shells around evolved massive stars. *A&A*, 547:A3.
- Vink, J. (2012). Supernova remnants: the X-ray perspective. *A&A Rv*, 20:49.
- Vink, J. (2020). *Physics and Evolution of Supernova Remnants*. Springer Cham.
- Vink, J., Broersen, S., Bykov, A., and Gabici, S. (2015). On the electron-ion temperature ratio established by collisionless shocks. *A&A*, 579:A13.
- Vogelaar, M. G. R., Wakker, B. P., and Schwarj, U. J. (1991). Measuring the Fractal Structure of Interstellar Clouds. In Falgarone, E., Boulanger, F., and Duvert, G., editors, *Fragmentation of Molecular Clouds and Star Formation*, volume 147 of *IAU Symposium*, page 508.
- Šurlan, B., Hamann, W. R., Aret, A., Kubát, J., Oskinova, L. M., and Torres, A. F. (2013). Macroclumping as solution of the discrepancy between H α and P v mass loss diagnostics for O-type stars. *A&A*, 559:A130.
- Šurlan, B., Hamann, W. R., Kubát, J., Oskinova, L. M., and Feldmeier, A. (2012). Three-dimensional radiative transfer in clumped hot star winds. I. Influence of clumping on the resonance line formation. *A&A*, 541:A37.

BIBLIOGRAFIJA

Vukotić, B., Ćiprijanović, A., Vučetić, M. M., Onić, D., and Urošević, D. (2019). Updated Radio Σ -D Relation for Galactic Supernova Remnants - II. *Serbian Astronomical Journal*, 199:23–37. (V19).

Woltjer, L. (1972). Supernova Remnants. *ARA&A*, 10:129.

Biografija autora

Petar Kostić je rođen 17. 07. 1985. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu i gimnaziju je završio u Novom Sadu. Školske 2004/05. godine upisao je osnovne studije astronomije (sa astrofizikom) na Departmanu za fiziku, Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu. Diplomirao je sa prosečnom ocenom 9,19, a 2012/13. godine na istom fakultetu je upisao master studije i završio ih 2015. godine sa prosečnom ocenom 9,20, stekavši zvanje master fizičar (oblast: fizičke nauke – astronomija sa astrofizikom). Školske 2015/16. godine je upisao doktorske studije na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, studijski program Astronomija i astrofizika. Položio je sve ispite predviđene planom i programom doktorskih studija sa prosečnom ocenom 9,75.

U martu 2015. godine je izabran u zvanje istraživač-pripravnik na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, gde je 4 godine volonterski radio kao asistent na predmetu Opšta astronomija. Od marta 2018. je zaposlen na Astronomskoj opservatoriji kao tehnički operater na Astronomskoj stanici Vidojevica i u junu iste godine je izabran u zvanje istraživač-saradnik. Istovremeno je bio angažovan na projektima Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja “Vidljiva i nevidljiva materija u bliskim galaksijama: teorija i posmatranja” (176021, rukovodilac dr Srđan Samurović) i “Emisione magline: struktura i evolucija” (176005, rukovodilac dr Dejan Urošević), tokom 2018. i 2019. godine. Od 2005. je mlađi, a od 2012. stručni saradnik na programu astronomije u Istraživačkoj stanici Petnica.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а, Петар Костић

број уписа 2026/2015

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Хидродинамичка и синхротронска радио-еволуција остатака супернових у
нехомогеној међузвезданој средини

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _____ Петар Костић _____

Број уписа _____ 2026/2015 _____

Студијски програм _____ Астрономија и астрофизика _____

Наслов рада _____ Хидродинамичка и синхротронска радио-еволуција остатака
_____ супернових у нехомогеној међузвезданој средини _____

Ментор _____ Др Бранислав Вукотић _____

Потписани _____ Петар Костић _____

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, _____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Хидродинамичка и синхротронска радио-еволуција остатака супернових у
нехомогеној међузвезданој средини

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, _____

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.