

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Данијел Ђорђевић

ТЕОРИЈА СИМПЛЕКТИЧКЕ ХОМОЛОГИЈЕ

мастер рад

Београд, септембар 2023.

Ментор:

др Игор УЉАРЕВИЋ, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Александра МАРИНКОВИЋ, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Дарко МИЛИНКОВИЋ, редовни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Велику захвалност дугујем свом ментору, др Игору Уљаревићу, прво јер ми је својим предавањима, саветима и коментарима додатно приближио ову област и учинио да пуно напредујем у њој. Такође му се захваљујем и за помоћ у избору теме и велику ангажованост да одговори на свако моје питање, као и на разумевању и стрпљењу током свег времена настанка овог рада.

Захваљујем се и осталим члановима комисије на свом знању које сам стекао слушајући њихова предавања и корисним коментарима и сугестијама које су допринели квалитету овог рада.

За крај, захвалио бих се и својој породици, пријатељима и колегама на њиховој неизмерној подршци коју имам све време.

Садржај

1	Дефиниције, основни појмови и тврђења	2
1.1	Диференцијална геометрија	2
1.2	Симплектичка топологија	3
1.3	Контактна топологија	5
2	Морсова теорија	7
2.1	Морсове функције и основна тврђења	7
2.2	Градијентни ток Морсове функције	11
2.3	Стабилне и нестабилне многострукости	13
2.4	Морсов ланчасти комплекс и хомологија	15
3	Флорова теорија - затворен случај	20
3.1	Хамилтонове петље и функционал дејства	20
3.2	Енергија решења – појам и класификација	24
3.3	Градуисање и Конли–Цендеров индекс	26
3.4	Флоров ланчасти комплекс и хомологија	28
4	Симплектичка хомологија	31
4.1	Лиувилони домени	31
4.2	Функционал дејства и Флорова једначина	34
4.3	Градуисање и ланчасти комплекс	37
	Литература	39

Увод

Циљ овог рада је да објасни настанак теорије симплектичке хомологије као важног алата у симплектичкој топологији.

У првој, уводној, глави дате су основне дефиниције, ознаке и тврђења са којом се студенти (као и аутор) углавном срећу на вишим годинама основних и мастер студијама, а биће коришћена у овом раду. Она су разврстана по областима о којој говоре.

У другој глави презентујемо Морсову теорију која се хронолошки развила пре Флорове, као и све њене концепте који су могли да се генерализују и зато послужили као мотивација за настанак Флорове теорије. Ту су изложени сви детаљи који омогућавају конструкцију Морсове хомологије да бисмо у наредна два поглавља могли да се ослањамо на њих.

Предмет треће главе је управо поменута Флорова теорија и већински је писана тако да симулира елементе Морсове теорије, али при различитој поставци проблема, те је велики број дефиниција и тврђења изведен као директно уопштење одговарајућих дефиниција и тврђења из Морсове теорије.

Коначно, четврта глава се управо бави темом наслова овог рада односно приказује како се теорија из треће главе може даље искористити за израчунавање хомологије нове класе многострукости – Лиувиллових домена користећи резултате свих претходних делова овог рада.

Глава 1

Дефиниције, основни појмови и тврђења

Прво наводимо једно тврђење из реалне анализе.

Тврђење 1.0.1 (Арцела–Асколијева теорема – општа верзија) *Нека је (X, d) компактан метрички простор и $\mathcal{F}$ ограничена фамилија непрекидних функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ које су равномерно непрекидне на X шј.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X) \quad d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Тада је ова фамилија релативно компактан скуп у простору свих непрекидних реалних функција на M са максимум метриком.

1.1 Диференцијална геометрија

Дефиниција 1.1.1 *Нека је M латка мноштрукост и R и S њене латке подмноштрукости. Кажемо да се R и S секу трансверзално ако важи $R \cap S = \emptyset$ или је за свако $p \in R \cap S$ испуњено $T_p R + T_p S = T_p M$.*

Тврђење 1.1.1 *Нека је M латка мноштрукост R и S њене латке подмноштрукости које се секу трансверзално. Тада је и $R \cap S$ латка подмноштрукост од M и важи $\text{codim}(R \cap S) = \text{codim} R + \text{codim} S$ шј. $\dim(R \cap S) = \dim R + \dim S - \dim M$.*

Дефиниција 1.1.2 *Нека је $f : M \rightarrow N$ латко пресликавање између латких мноштрукости. За тачку $p \in M$ кажемо да је регуларна тачка овог пресли-*

кавања ако је његов извод у тачки p шј. $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ сурјективан. У суштини, тачка p је критична тачка пресликавања f .

Дефиниција 1.1.3 Нека је $f : M \rightarrow N$ глатко пресликавање између глатких мноштва. За тачку $q \in N$ кажемо да је регуларна вредност овог пресликавања ако скуп $f^{-1}(q) \subset M$ садржи само регуларне тачке. Иначе, q је критична вредност пресликавања f .

Тврђење 1.1.2 Нека је $q \in N$ регуларна вредност глатког пресликавања $f : M \rightarrow N$ између глатких мноштва. Тада је $f^{-1}(q)$ глатка подмноштва од M чије је димензија $\dim M - \dim N$.

Дефиниција 1.1.4 Нека је M глатка мноштва и $A \subset M$. Кажемо да је скуп A мере нула уколико је скуп $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ Лебеगेве мере нула за сваку карту (U, φ) од M .

Тврђење 1.1.3 (Сардова теорема) Скуп критичних тачака глатког пресликавања $f : M \rightarrow N$ између глатких мноштва је мере нула.

Тврђење 1.1.4 Свака повезана и компактна глатка мноштва димензије 1 дифеоморфна је или кружници $\mathbb{S}^1$ или интервалу $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Тврђење 1.1.5 Нека је G Лијева група која слободно и својствено дејствује на глатку мноштва M . Тада је количнички простор M/G тополошка мноштва димензије $\dim M - \dim G$ на којој се на јединствен начин може задати глатка структура таква да пројекција $\pi : M \rightarrow M/G$ буде глатка субмерзија.

1.2 Симплектичка топологија

Дефиниција 1.2.1 Нека је M глатка мноштва и ω недегенерисана затворена диференцијална 2-форма на њој. Тада за ову мноштва кажемо да је симплектичка мноштва, а ω је њена симплектичка форма.

Тврђење 1.2.1 Свака коначнодимензиона симплектичка мноштва је парне димензије.

Доказ: Свака симплектичка форма има своју матрицу у одабраној бази простора $T_p M$ (као билинеарно пресликавање) коју ћемо означити са A . Како је ω недегенерисана, A је инвертибилна тј. $\det A \neq 0$. Додатно, A је антисиметрична, јер је то и ω (као свака диференцијална форма), па је $A^T = -A$. Зато је

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^{\dim M} \det A,$$

па је коначно $(-1)^{\dim M} = 1$ (због $\det A \neq 0$) и $\dim M$ паран број. $\square$

Пример 1.2.1 Нека је $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$ диференцијална 2-форма на $\mathbb{R}^{2n}$ (са координатама $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$). Тада је $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ симплектична многострукост. Њена матрица у овим координатама је блок-матрица $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix}$, где је са E_n означена јединична матрица димензије n .

Лако се може показати да је услов недегенерисаности 2-форме ω еквивалентан са $\omega^{\wedge n} \neq 0$, што специјално значи да је свака симплектичка многострукост оријентабилна.

Дефиниција 1.2.2 За дифеоморфизам $\phi : M \rightarrow M$ симплектичке многострукости (M, ω) кажемо да је симплектикоморфизам ако чува симплектичку форму ω тј. ако је испуњено $\phi^* \omega = \omega$.

Дефиниција 1.2.3 За матрицу $M \in M_{2n}(\mathbb{R})$ кажемо да је симплектичка уколико важи $M^T \Omega M = \Omega$. Симплектичке матрице димензије $2n$ чине групу у односу на множење коју означавамо са $Sp(2n)$.

Тврђење 1.2.2 $Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$

Дефиниција 1.2.4 Скоро комплексна структура на симплектичкој многострукости (M, ω) је тачка фамилија линеарних пресликавања $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ таквих да је $J_p^2 = -Id$. Уколико је са $\omega(\cdot, J\cdot)$ дефинисана Риманова метрика на M , кажемо да је скоро комплексна структура J сагласна са ω .

Није тешко показати да, користећи ознаке из претходне дефиниције, важи $\omega(X, JY) = -\omega(JX, Y)$ и $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$.

Тврђење 1.2.3 (Картанова формула) *Нека је M глатка многострукост, $\alpha \in \Omega^k(M)$ k -форма и $X \in \mathcal{X}(M)$ векторско поље на њој. Тада важи*

$$\mathcal{L}_X \alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha),$$

где је $\mathcal{L}_X$ Лијев извод у правцу поља X , а $\lrcorner$ ознака за унутрашњи извод диференцијалне форме по векторском пољу.

1.3 Контактна топологија

Нека је M глатка многострукост, TM њено тангентно раслојење и $\xi \subset TM$ глатка фамилија хиперравни на M ($\xi_p \leq T_p M$, $\dim \xi_p = \dim M - 1$ и додељивање $p \mapsto \xi_p$ је глатко). Овакву фамилију хиперравни називамо дистрибуцијом кодимензије 1 на M .

Тврђење 1.3.1 *Дистрибуција ξ се локално може приказати као $\ker \alpha$ за неку диференцијабилну 1-форму α .*

Доказ: Нека је g произвољна Риманова метрика на M и $\xi^\perp \subset TM$ ортогонални комплемент од ξ у односу на ову метрику. Дакле, $\xi^\perp$ је једнодимензионо подраслојење од TM . Тада је $TM = \xi \oplus \xi^\perp$ и $\xi^\perp \cong TM/\xi$. Подраслојење $\xi^\perp$ је локално тривијално (као и свако раслојење), па за произвољну тачку $p \in M$ постоји околина U и ненула векторско поље $X \in \mathcal{X}(U)$ такво да је $X_q \in \xi_q^\perp$ за све $q \in U$. Дефинишемо $\alpha := g(X, \cdot)$ и очигледно је $\ker \alpha = \xi|_U$. $\square$

Дефиниција 1.3.1 *Нека је M глатка многострукост димензије $2n + 1$ и $\xi \subset TM$ глатка фамилија хиперравни локално задата 1-формом α таквом да је $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$. Тада пар (M, ξ) називамо контактном многострукости. Уколико је форма α глобално дефинисана, називамо је контактном формом на M , а структуру ξ кооријентабилном.*

Коментар: Приметимо да иако форма α фигурише у дефиницији контактне многострукости, контактна структура је заправо задата дистрибуцијом ξ . Дефиниција је у том смислу добра, јер уколико је β нека друга 1-форма таква да је $\ker \beta = \xi$, тада је $\beta = f\alpha$ за неку глатку функцију f свуда различиту од нуле, па имамо

$$\beta \wedge (d\beta)^{\wedge n} = f\alpha \wedge (df \wedge \alpha + f d\alpha)^{\wedge n} = f\alpha \wedge (f^n d\alpha^{\wedge n}) = f^{n+1} \alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0,$$

при чему смо у рачуну користили да је $\alpha \wedge \alpha = 0$, што важи за сваку 1-форму.

Последично, уколико је α контактна форма на многострукости M , тада је она оријентабилна.

Пример 1.3.1 *Посматрајмо $\mathbb{R}^{2n+1}$ са координатама $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$ и 1-форму $\alpha = dz + \sum_{j=1}^n x_j dy_j$. Ово је контактна форма, а $\xi := \ker \alpha$ називамо стандардном контактном структуром на $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

У случају $n = 1$ тј. $\dim M = 3$ контактне многострукости (M, ξ) услов $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ еквивалентан је са условом да за сваку тачку $p \in M$ и свака два линеарно независна векторска поља $X, Y \in \xi$ важи $[X, Y]_p \notin \xi_p$ што следи из познатог идентитета за 1-форме

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

и чињенице да $X, Y \in \xi = \ker \alpha$.

Дефиниција 1.3.2 *Нека је (M, ξ) кооријентабилна контактна многострукост са контактном формом α . Векторско поље $R_\alpha \in \mathcal{X}(M)$ за које је исцуњено $R_\alpha \lrcorner d\alpha = 0$ и $\alpha(R_\alpha) = 1$ називамо Ребовим векторским пољем.*

Објаснимо да је Ребово векторско поље јединствено одређено овим условима. Из услова $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$, следи да је и $(d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$, па је форма $d\alpha_p$ антисиметрична билинеарна форма ранга $2n$, те има једнодимензионо језгро генерисано вектором R_p . Како је из контактнoг услова и $\alpha \neq 0$, то можемо скалирати векторско поље R_α да задовољава услов $\alpha(R_\alpha) = 1$.

Глава 2

Морсова теорија

2.1 Морсове функције и основна тврђења

Нека је M затворена (компактна и без границе) глатка многострукост димензије $n \in \mathbb{N}$ и $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција на њој.

Дефиниција 2.1.1 *За тачку $p \in M$ кажемо да је критична тачка функције f уколико је $(df)_p = 0$.*

Скуп свих критичних тачака функције f означавамо са $\text{Crit}(f)$.

Критичној тачки $p \in M$ можемо придружити билинеарну форму $H_p(f) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$H_p(f)(X_p, Y_p) = X_p(Y(f)),$$

где је $Y \in \mathcal{X}(M)$ произвољно векторско поље на M такво да које је у тачки p једнако Y_p . Лако је видети да је ова дефиниција добра тј. да вредност $H_p(f)(X_p, Y_p)$ не зависи од избора поља Y , као и да је ова билинеарна форма (коју називамо *Хесијаном*) симетрична. То нам омогућује да уведемо следећи појам.

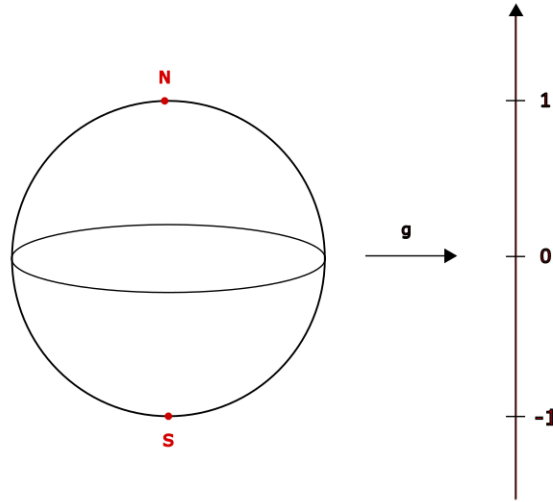
Дефиниција 2.1.2 *За критичну тачку $p \in M$ функције $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је недејенерисана ако је форма $H_p(f)$ недејенерисана.*

Дефиниција 2.1.3 *Функција f је Морсова ако су све њене критичне тачке недејенерисане.*

Наводимо једно једноставно, али важно тврђење чији доказ следи из Теореме о инверзној функцији, а које ће нам омогућити да касније добро дефинишемо Морсов ланчasti комплекс.

Тврђење 2.1.1 *Критичне тачке Морсове функције су изоловане.*

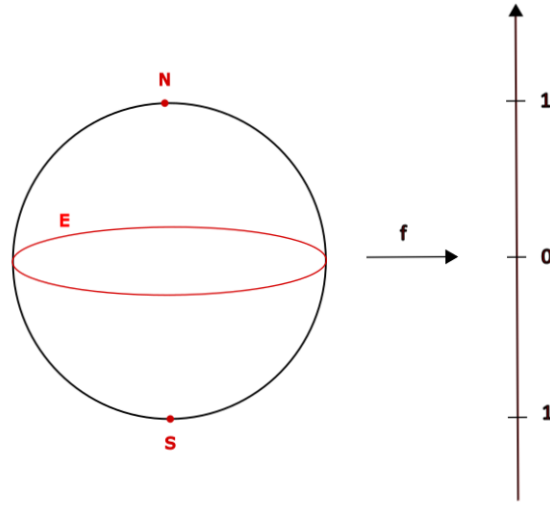
Пример 2.1.1 Функција висине $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на сфери $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ дата са $g(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$ је Морсова функција. Њене критичне тачке су северни (N) и јужни пол (S).



Слика 2.1: Функција висине на сфери $\mathbb{S}^n$

Пример 2.1.2 Функција $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}^2$ има за критичне тачке северни (N) и јужни пол (S), као и све тачке са екватора $E = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^1 \mid x_{n+1} = 0\}$. Како је S^n компактна, уколико би ова функција била Морсова, на основу претходног тврђења би морала имати само коначно много критичних тачака, што није случај. Дакле, то није Морсова функција.

Другим речима, скуп критичних функција Морсове функције је дискретан, а како је многострукост M компактна, то је он и коначан.

Слика 2.2: Квадрат функције висине на сфери $\mathbb{S}^n$

У локалним координатама $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, $\varphi : U \ni p \rightarrow \mathbb{R}^n$ критичне тачке p матрица Хесијана $H_p(f)$ у бази $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$ је $\left[\frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p)) \right]_{1 \leq i, j \leq n}$ и она је очигледно симетрична због симетричности парцијалних извода вишег реда (што је и за очекивати пошто је Хесијан симетричан), док је услов не-дегенерисаности тачке p еквивалентан инвертибилности ове матрице односно чињеници да је њена детерминанта различита од 0. Пошто је та матрица симетрична, знамо да су све њене сопствене вредности реалне, а пошто је и инвертибилна, ниједна од њих није једнака нули тј. свака њена сопствена вредност је или позитивна или негативна. Наравно, променом базе простора $T_p M$ мења се и матрица Хесијана, али постоји једна важна инваријанта. Прецизније, уколико је P матрица преласка са једне на другу базу и ако је G матрица Хесијана у првој бази, тада је $P^T G P$ матрица Хесијана у другој бази. Као што смо рекли, матрица Хесијана се променила, али број негативних и број позитивних сопствених вредности су остали исти као код матрице G (иако су се, можда, њихове вредности промениле). То нам омогућује да уведемо следећу

Дефиниција 2.1.4 Индекс критичне тачке p Морсове функције f , у ознаци $\text{Ind}_f(p)$ је број негативних сопствених вредности матрице Хесијана $H_p(f)$ у

некој (а шиме и свакој) бази танјеншној простора $T_p M$.

Приметимо да је индекс заправо максимална димензија неког потпростора од $T_p M$ на коме је рестрикција Хесијана $H_p(f)$ негативно дефинитна.

За свако $k \in \mathbb{N}_0$ ћемо са $c_k(f)$ означавати број критичних тачака функције f чији је индекс једнак k . Како је $0 \leq \text{Ind}_p(f) \leq n$, за свако $k > n$ је $c_k(f) = 0$, а због претходних примедба су сви бројеви $c_k(f)$ коначни.

Из линеарне алгебре знамо да се свака симетрична матрица може дијагонализовати над $\mathbb{R}$, па се тако за Хесијан $H_p(f)$ као симетричну билинеарну форму, може наћи погодна база у којој је матрица која му одговара дијагонална. Затим се евентуалним скалирањем и пермутовањем координата долази до базе у којој је матрица овог Хесијана такође дијагонална, при чему је првих $\text{Ind}_f(p)$ елемената на дијагонали једнако -1 , а остали су једнаки 1 . Наредно тврђење сумира претходну дискусију и говори о томе да се у околини критичне тачке може наћи погодна карта (на горе описани начин) таква да Морсова функција у њеним координатама има леп запис. Детаљи се могу видети у [17].

Тврђење 2.1.2 (Морсова лема) *Нека је p критична тачка индекса k Морсове функције $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Тада постоји карта (U, φ) таква да важи $p \in U$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(p) = 0$ и*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Природно се може поставити питање егзистенције Морсових функција на произвољној компактној многострукости тј. да ли увек постоје и ако је одговор потврдан, колико их има. Испоставља се да на свакој многострукости постоје и да их има „много” о чему президије говори наредно тврђење.

Тврђење 2.1.3 *Скуп Морсових функција на многострукости M је свуд густ у одскоу скупа $C^\infty(M)$ у C^2 норми. Другим речима, за свако $\varepsilon > 0$ и тлајку функцију $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ постоји Морсова функција $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је $\|f - g\|_{C^2} < \varepsilon$.*

Доказ: По Витнијевој теореме, M се може уложити у $\mathbb{R}^N$ за довољно велико $N \in \mathbb{N}$. Може се показати да је $f(x_1, \dots, x_N) := g(x_1, \dots, x_N) + \langle L, (x_1, \dots, x_N) \rangle$ Морсова функција за скоро све (у односу на Лебегову меру на $\mathbb{R}^N$) векторе

$L \in \mathbb{R}^N$, при чему је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ стандардни скаларни производ на $\mathbb{R}^N$. Детаљи се могу видети у [17]. $\square$

2.2 Градијентни ток Морсове функције

Да бисмо успешно наставили ка дефинисању Морсове хомологије, сада је потребно да уведемо додатну структуру на многострукости – Риманову метрику g . Дакле, надаље у овој глави ћемо сматрати да је (M, g) глатка Риманова многострукост и $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Морсова функција на њој. Одатле имамо да је добро дефинисано векторско поље $\text{grad} f = \nabla f \in \mathcal{X}(M)$ релацијом

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f)$$

за свако векторско поље $X \in \mathcal{X}(M)$. Приметимо најпре да уколико $p \in \text{Crit}(f)$ важи $(df)_p = 0$, па из недегенерисаности скаларног производа g_p имамо $\nabla f(p) = 0$. Наравно, важи и обрнуто – ако је $\nabla f(p) = 0$, тада је $p \in \text{Crit}(f)$. Сада можемо посматрати диференцијалну једначину генерисану са ∇f , односно одговарајући Кошијев проблем и размотрити одређена својства која његова решења поседују.

Нека је $x \in M$ произвољна тачка. Посматрајмо Кошијев проблем

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= -\nabla f(\gamma(t)), \\ \gamma(0) &= x.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Пошто је f глатка функција, а тиме и ∇f глатко векторско поље на M , задовољени су услови Пикарове теореме, па овај Кошијев проблем има јединствено решење (на целом $\mathbb{R}$, јер је M компактна). То решење називамо градијентном линијом Морсове функције f . Наравно, овим је за свако $t \in \mathbb{R}$ дефинисан и ток $\phi_t : M \rightarrow M$ (аутономног) векторског поља ∇f који називамо градијентним током функције f . Фамилија $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ је једнопараметарска група дифеоморфизама на M .

Размотримо сада градијентне линије функције f . Прво, уколико $x \in \text{Crit}(f)$, због примедбе одозго закључујемо да $\gamma(t) \equiv x$ јесте решење Кошијевог проблема 2.1, а због јединствености је и једино његово решење.

Размотримо сада нетривијални случај када $x \notin \text{Crit}(f)$. Јасно је да у том случају решење $\gamma(t)$ не садржи ниједну критичну тачку (иначе би на основу

претходно размотреног случаја морало бити константно, што очигледно није). Дакле, градијентна линија је или константна (и једнака критичној тачки) или не садржи ниједну критичну тачку. Увидећемо два важна својства решења $\gamma(t)$ која ће нам бити касније од користи.

Тврђење 2.2.1 *Функција f моноћоно опада дуж градијентне линије. Прецизније, ако је $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ решење Кошијевог проблема 2.1, шада је функција $f \circ \gamma$ моноћоно опадајућа. Додаћоно, уколико γ не садржи критичне тачке, $f \circ \gamma$ је строго опадајућа.*

Доказ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) &= (df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (df)_{\gamma(t)}(-\nabla f(\gamma(t))) = g_{\gamma(t)}(\nabla f(\gamma(t)), -\nabla f(\gamma(t))) \\ &= -\|\nabla f(\gamma(t))\|_{\gamma(t)}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

за свако $t \in \mathbb{R}$, па је ова функција заиста монотонно опадајућа. Штавише, за градијентну линију која је константна, ово тврђење је тривијално, док за градијентну линију која не садржи критичне тачке $\nabla f(\gamma(t))$ никад није једнак 0, па је израз $-\|\nabla f(\gamma(t))\|_{\gamma(t)}^2$ негативан и зато у овом случају f строго опада дуж градијентне линије. $\square$

Тврђење 2.2.2 *Нека је $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ решење Кошијевог проблема 2.1. Тада, устоје тачке $p, q \in \text{Crit}(f)$ шакве да је $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = q$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = p$.*

Доказ: Ако је $x \in \text{Crit}(f)$, тврђење је тривијално ($p = q = x$). У супротном, на основу претходног тврђења знамо да је $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) < 0$ за свако $t \in \mathbb{R}$. Пошто је M компактна, f је ограничена (јер је непрекидна), па је и функција $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такође ограничена. Из Њутн-Лајбницевог формуле имамо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f \circ \gamma)(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} (f \circ \gamma)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) dt,$$

па како је лева страна ограничена, несвојствени интеграл на десној страни конвергира. С обзиром да је подинтегрална функција сталног знака, закључујемо да је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = 0$, па је на основу претходног тврђења и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \|\nabla f(\gamma(t))\| = 0$. Даље, нека су $\{p_1, \dots, p_k\}$ све критичне тачке функције f . Оне су изоловане, па постоје њихове дисјунктне отворене околине $U_1, \dots, U_k$. Означимо $U := \bigcup_{j=1}^k U_j$. Скуп $M \setminus U$ је затворен, па и компактан,

те непрекидна функција $\|\nabla f(\gamma(t))\|$ достиже свој минимум на њему, који ћемо означити са m . Важи $m > 0$, јер скуп $M \setminus U$ не садржи критичне тачке функције f . Како је $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\nabla f(\gamma(t))\| = 0$, постоји довољно велико $t_0 \in \mathbb{R}$ такво да је за свако $t > t_0$ испуњено $\|\nabla f(\gamma(t))\| < m$, а тиме и $\gamma(t) \notin M \setminus U$ тј. $\gamma(t) \in U$. Скуп $\{\gamma(t) \mid t > t_0\}$ је повезан, па мора бити подскуп U_j за неко $j \in \{1, \dots, k\}$. Другим речима, за сваку околину U_j тачке $p_j \in \text{Crit}(f)$ постоји $t_0 \in \mathbb{R}$ такво да за свако $t > t_0$ важи $\gamma(t) \in U_j$, па је зато $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = p_j$ и можемо узети $p = p_j$. Аналогно се доказује и егзистенција тачке $q \in \text{Crit}(f)$ такве да је $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = q$. $\square$

Последње тврђење, дакле, говори да свака неконстантна градијентна линија Морсове функције „излази” из једне и „улази” у неку другу њену критичну тачку. То нам омогућује да уведемо нове појмове, важне за даљи развој ове теорије.

2.3 Стабилне и нестабилне многострукости

Дефиниција 2.3.1 *Стабилна многострукост критичне тачке p је скуп*

$$W^s(p) = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = p\},$$

док је нестабилна многострукост критичне тачке p скуп

$$W^u(p) = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = p\}.$$

Дакле, стабилну многострукост чине све тачке $x \in M$ за које градијентна линија која их садржи завршава у тачки p , а нестабилну многострукост чине тачке $x \in M$ такве да градијентна линија која их садржи почиње у тачки p . Да су називи у претходној дефиницији оправдани, говори следећа теорема.

Тврђење 2.3.1 *Нека је $\text{Ind}_f(p) = k$. Тада су $W^s(p)$ и $W^u(p)$ глатке подмногострукости од M које су дифеоморфне, редом, дисковима D^{n-k} и D^k .*

Доказ: Видети [17]. $\square$

Такође, уз претходне претпоставке имамо и Томову декомпозицију многострукости M .

Тврђење 2.3.2

$$M = \bigsqcup_{p \in \text{Crit}(f)} W^u(p).$$

Доказ: Директно из егзистенције и јединствености градијентне линије кроз произвољну тачку и Тврђења 2.2.2. $\square$

Да би Морсова функција била довољно лепа и омогућила нам рачунање хомологије многострукости, захтеваћемо да испуњава додатни, Морс–Смејлов услов.

Дефиниција 2.3.2 *За Морсову функцију $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је Морс–Смејлова уколико за сваке две тачке $p, q \in \text{Crit}(f)$ важи $W^u(p) \cap W^s(q)$.*

Надаље ћемо претпостављати да је f Морс–Смејлова функција на M . Као што видимо из претходне дефиниције, Морс–Смејлов услов осим од саме функције, зависи и од Риманове метрике g . Испоставља се да за дату функцију f увек можемо погодно одабрати Риманову метрику g такву да она задовољава Морс–Смејлов услов и такве метрике ћемо звати генеричким. Дакле, уз одабир генеричке метрике наша функција постаје Морс–Смејлова, те ово није никакав додатни услов који сама Морсова функција мора да испуњава.

За сваке две $p, q \in \text{Crit}(f)$ означимо са $\mathcal{M}(p, q)$ скуп свих параметризованих градијентних линија које почињу у p и завршавају у q . Тада се $\mathcal{M}(p, q)$ може идентификовати са $W^u(p) \cap W^s(q)$. На основу Тврђења 1.1.1 имамо да је $W^u(p) \cap W^s(q)$ подмногострукост од M и лако рачунамо њену димензију

$$\begin{aligned} \dim(W^u(p) \cap W^s(q)) &= \dim W^u(p) + \dim W^s(q) - \dim M = \\ &= \text{Ind}_f(p) + (n - \text{Ind}_f(q)) - n = \text{Ind}_f(p) - \text{Ind}_f(q), \end{aligned}$$

па је зато и $\mathcal{M}(p, q)$ многострукости димензије $\text{Ind}_f(p) - \text{Ind}_f(q)$.

Сада ћемо дефинисати дејство групе $(\mathbb{R}, +)$ на подмногострукост $\mathcal{M}(p, q)$ која ће нам донети есенцијалан закључак за дефинисање Морсовог ланчастог комплекса. За свако $s \in \mathbb{R}$ и градијентну линију $\gamma \in \mathcal{M}(p, q)$ дефинишемо $(s \cdot \gamma)(t) \mapsto \gamma(t + s)$. Овим дејством се идентификују све градијентне линије које имају исти траг. Означимо са $\widehat{\mathcal{M}}(p, q) = \mathcal{M}(p, q)/\mathbb{R}$ количнички простор при овом дејству. Ово је заправо скуп непараметризованих градијентних линија које почињу у p и завршавају се у q .

Тврђење 2.3.3 $\widehat{\mathcal{M}}(p, q)$ је мноґострукост димензије $\text{Ind}_f(p) - \text{Ind}_f(q) - 1$.

Доказ: Посматрајмо пресликавање $\varphi : \mathcal{M}(p, q) \rightarrow R$ дато са $\varphi(\gamma) = f(\gamma(0))$. Како је из Тврђења 2.2.1 функција $f \circ \gamma$ опадајућа, то је $\varphi(\mathcal{M}(p, q)) = (f(q), f(p))$. Нека је $c \in (f(q), f(p))$ регуларна вредност функције φ (она постоји на основу Тврђења 1.1.3) и нека је $\mathcal{M}^c(p, q) = \varphi^{-1}(c)$. На основу Тврђења 1.1.2 $\mathcal{M}^c(p, q)$ је подмногострукост од $\mathcal{M}(p, q) - 1$ димензије $\dim(\mathcal{M}(p, q)) = \text{Ind}_f(p) - \text{Ind}_f(q) - 1$. Претходно дефинисано дејство је слободно на $\mathcal{M}^c(p, q)$, па се њиме остварује дифеоморфизам између $\mathcal{M}^c(p, q)$ и $\widehat{\mathcal{M}}(p, q)$, одакле следи тврђење. $\square$

Први специјалан случај претходне теореме који ће нам бити од велике важности је када је $\text{Ind}_f(p) - \text{Ind}_f(q) = 1$ о чему говори следеће тврђење.

Тврђење 2.3.4 Уколико је $\text{Ind}_f(p) - \text{Ind}_f(q) = 1$, мноґострукост $\widehat{\mathcal{M}}(p, q)$ је компактна и димензије 0 шј. коначан скуи шакака.

Доказ:

Видети $\square$.

Уколико су $p, r \in \text{Crit}(f)$ такве да је $\text{Ind}_f(p) = k$ и $\text{Ind}_f(q) = k - 2$, тада, као што знамо, $\mathcal{M}(p, r)$ је многострукост димензије 2, а $\widehat{\mathcal{M}}(p, r)$ компактна многострукост димензије 1 са границом. Њену границу чине све изломљене градијентне линије настале надовезивањем једне градијентне линије која почиње у p и завршава се у $q \in \text{Crit}(f)$, $\text{Ind}_f(q) = k - 1$ и друге која почиње у q , а завршава се у r . Детаљи се могу видети у [17].

Последње две чињенице ће бити круцијалне у конструкцији Морсовог ланчастог комплекса и доказу да то заиста јесте ланчасти комплекс што је предмет наредне одељка.

2.4 Морсов ланчасти комплекс и хомологија

Сада имамо све што је потребно за дефинисање Морсовог ланчастог комплекса. Иако се он може дефинисати и са коефицијентима у $\mathbb{Z}$ (уз пар претходних детаља везаних за оријентацију), овде ћемо ради једноставности ра-

дити са коефицијентима у $\mathbb{Z}_2$.

Означимо са $C_k(f, \mathbb{Z}_2)$ слободну Абелову групу генерисану свим критичним тачкама функције f индекса k . Наравно, $C_k(f, \mathbb{Z}_2) = 0$ за $k < 0$ и $k > n$. Дефинишемо оператор $\partial_k : C_k(f, \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_{k-1}(f, \mathbb{Z}_2)$ на генераторима групе $C_k(f, \mathbb{Z}_2)$ на следећи начин

$$\partial_k(p) = \sum_{\text{Ind}_f(q)=k-1} n(p, q)q,$$

где је $n(p, q)$ број елемената $\widehat{\mathcal{M}}(p, q)$ по модулу 2. Овако дефинисано пресликавање на генераторима једнозначно се продужује на свим елементима ове групе. Очекивано, важиће $\partial^2 = 0$, али да бисмо могли то да докажемо биће нам потребно следеће тврђење.

Тврђење 2.4.1 *Нека су $p, r \in \text{Crit}(f)$ такве да је $\text{Ind}_f(p) = k$ и $\text{Ind}_f(r) = k - 2$. Тада непараметризованих изломљених градијентних линија које почињу у p и завршавају се у r , а пролазе кроз неку критичну тачку индекса $k - 1$ има паран (коначан) број.*

Доказ: Из дискусије у претходном одељку знамо да управо поменуте изломљене линије чине границу компактне једнодимензионе многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(p, r)$, те их има паран број на основу Тврђења 1.1.4. $\square$

Сада смо спремни да покажемо главно тврђење овог одељка.

Тврђење 2.4.2 *Претходно дефинисан оператор јесте ланчасни шј. важи $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ за све $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказ: Довољно је ово доказати на генераторима групе $C_k(f, \mathbb{Z}_2)$. Нека је $p \in \text{Crit}(f)$ таква да је $\text{Ind}_f(p) = k$. Тада је

$$\begin{aligned} \partial_{k-1}(\partial_k(p)) &= \partial_{k-1} \left(\sum_{\text{Ind}_f(q)=k-1} n(p, q)q \right) = \sum_{\text{Ind}_f(q)=k-1} n(p, q)\partial_{k-1}(q) = \\ &= \sum_{\text{Ind}_f(q)=k-1} \left(n(p, q) \sum_{\text{Ind}_f(r)=k-2} n(q, r)r \right) = \sum_{\text{Ind}_f(q)=k-1} \sum_{\text{Ind}_f(r)=k-2} n(p, q)n(q, r)r. \end{aligned}$$

Приметимо да $\sum_{\text{Ind}_f(q)=k-1} n(p, q)n(q, r)$ у последњој суми представља број непараметризованих изломљених градијентних кривих које повезују критичне

тачке p и q . На основу Тврђења 2.4.1 знамо да је он паран за сваки овакав избор критичних тачака q и r , па је по модулу 2 једнак нули. Одатле је $\partial_{k-1}(\partial_k(p)) = 0$, па пошто је p била произвољна критична тачка индекса k , то је $\partial_k \circ \partial_{k-1} \equiv 0$. $\square$

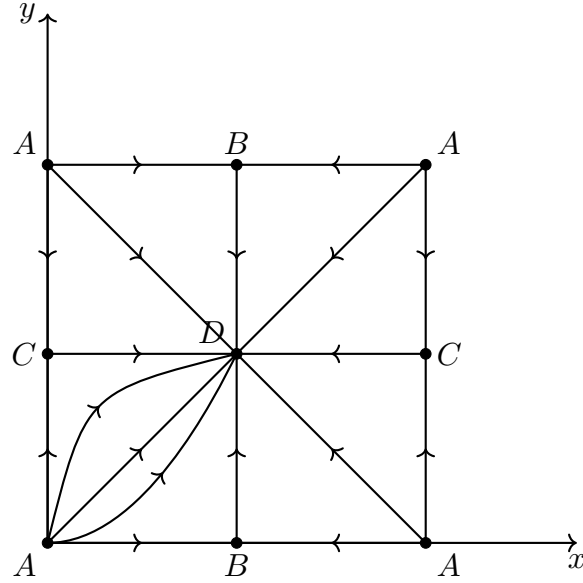
Сада имамо добро дефинисани Морсов ланчasti комплекс $(C_*(M, \mathbb{Z}_2), \partial)$, па можемо дефинисати и Морсову хомологију $H_n(M, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_n / \text{im} \partial_{n+1}$. Испоставља се да коју год Морсову функцију на M одабрали и на овај начин формирали Морсов ланчasti комплекс, Морсова хомологија је инваријантна (до на изоморфизам). Штавише, важи следеће тврђење.

Тврђење 2.4.3 (Теорема о Морсовој хомологији) *Морсова хомологија $H_*(M, f, \mathbb{Z}_2)$ је изоморфна сингуларној хомологији $H_*(M, \mathbb{Z}_2)$.*

Доказ: Видети у [17].

Илустроваћемо све претходне појмове и конструкције на једном примеру.

Пример 2.4.1 Нека је $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ торус са наслеђеном метриком из $\mathbb{R}^2$ и функција $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x, y) = \cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)$. Израчунаћемо Морсову хомологију ланчастог комплекса $C_*(f, \mathbb{Z}_2)$, при чему ћемо овај торус посматрати као квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ у $\mathbb{R}$ са идентификованим наспрамним ивицама у истом смеру. Прво, функција f је добро дефинисана, јер је $f(x, 0) = f(x, 1)$ и $f(0, y) = f(1, y)$ за све $x, y \in [0, 1]$. Такође је и глатка, јер је глатка схваћена са доменом $\mathbb{R}$, па можемо прећи на одређивање њених критичних тачака. Радићемо са стандардним координатама на $\mathbb{R}^2$. Како је $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2\pi \sin(2\pi x)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2\pi \sin(2\pi y)$, то лако видимо да је $\text{Crit}(f) = \{A(0, 0), B(\frac{1}{2}, 0), C(0, \frac{1}{2}), D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Директним израчунавањем Хесијан матрице видимо да су све четири критичне тачке недегенерисане и да је $\text{Ind}_f(A) = 2$, $\text{Ind}_f(B) = \text{Ind}_f(C) = 1$ и $\text{Ind}_f(D) = 0$, па је ова функција Морсова.

Слика 2.3: Градијентне линије функције f

Даље се лако одређују градијентне линије ове функције (неке од њих су приказане на слици), а самим тим и стабилне и нестабилне многострукости свих критичних тачака

$$W^u(D) = \{D\}, \quad W^u(B) = (\text{кржница } BDB) \setminus \{D\},$$

$$W^u(C) = (\text{кржница } CDC) \setminus \{D\}, \quad W^u(A) = \text{све остало}$$

и

$$W^s(A) = \{A\}, \quad W^s(B) = (\text{кржница } ABA) \setminus \{A\},$$

$$W^s(C) = (\text{кржница } ACA) \setminus \{A\}, \quad W^s(D) = \text{све остало}.$$

Директном провером утврђујемо да се све ове стабилне и нестабилне многострукости секу трансверзално, па је f заиста Морс–Смејлова функција и можемо формирати ланчasti комплекс $C_*(f, \mathbb{Z}_2)$, при чему је $C_0(f, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\langle D \rangle$, $C_1(f, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\langle B \rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle C \rangle$ и $C_2(f, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\langle A \rangle$. Наравно, $C_k(f, \mathbb{Z}_2) = 0$ за $k < 0$ и $k > 2$, па је

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2\langle A \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}_2\langle B \rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle C \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2\langle D \rangle \rightarrow 0.$$

Како постоје по две градијентне линије које почињу у A и завршавају се у B и у C , то је $\partial_2(A) = 0A + 0B = 0$, па је $\partial_2 \equiv 0$. Слично, постоје по

две градијентне линије које почињу у B и у C , а завршавају се у D , па је $\partial_1(B) = 0 = \partial_1(C)$, те је и $\partial_1 \equiv 0$. Одатле је $H_0(f, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_0 / \operatorname{im} \partial_1 = \mathbb{Z}_2 \langle D \rangle / \mathbf{0} \cong \mathbb{Z}_2$, затим $H_1(f, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2 = \mathbb{Z}_2 \langle B \rangle \oplus \mathbb{Z}_2 \langle C \rangle / \mathbf{0} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $H_2(f, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_2 / \operatorname{im} \partial_3 = \mathbb{Z}_2 \langle A \rangle / \mathbf{0} \cong \mathbb{Z}_2$. Јасно, $H_k(f, \mathbb{Z}_2) = \mathbf{0}$ за $k < 0$ и $k > 2$. Дакле,

$$H_k(\mathbb{T}^2, f, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k \in \{0, 2\}, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & k = 1, \\ \mathbf{0}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

што се и очекивало на основу Тврђења 2.4.3.

Глава 3

Флорова теорија - затворен случај

3.1 Хамилтонове петље и функционал дејства

Нека је (M, ω) затворена симплектичка многострукост димензије $2n$ и 1 -периодични Хамилтонијан $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$. Овај Хамилтонијан генерише векторско поље X_{H_t} релацијом $dH_t = X_{H_t} \lrcorner \omega$ које називамо Хамилтоновим векторским пољем и оно генерише једнопараметарску фамилију дифеоморфизама ϕ_t .

Дефиниција 3.1.1 *Уколико је џеџља $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ решење 1 -џериодично једначине $\gamma'(t) = X_{H_t}(\gamma(t))$ називамо је Хамилтоновом џеџљом.*

Дефиниција 3.1.2 *За Хамилтонову џеџљу γ кажемо да је недеџенерисана ако важи $\det(Id - d\phi_1(\gamma(0))) \neq 0$.*

Означимо са $\mathcal{LM}$ скуп свих 1 -периодичних контрактибилних петљи, а са $\mathcal{P}(H)$ све Хамилтонове контрактибилне петље. Желимо да у Флоровој теорији ове петље имају улогу критичних тачака из Морсове теорије, али пре тога морамо да дефинишемо појам који би био пандан Морсове функције. Пошто су петље контрактибилне, можемо их непрекидно продужити на јединични диск D^2 , што ћемо користити у наредној дефиницији. Пре тога, да би дефиниција била добра, препоставићемо да је M симплектички асферишна тј. да је

$$\int_{\mathbb{S}^2} v^* \omega = 0$$

за све $v : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$.

Дефиниција 3.1.3 Функционал дејства за Хамиљтонијан H_t је функција $\mathcal{A}_H : \mathcal{LM} \rightarrow \mathbb{R}$ која са

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = - \int_{D^2} u^* \omega - \int_0^1 H_t(\gamma(t)) dt,$$

где је $u : D^2 \rightarrow M$ произвољно продужење γ на диск D^2 ($u|_{S^1} = \gamma$).

Као што смо већ рекли, ово продужење u увек постоји, јер су петље у $\mathcal{A}_H$ контрактибилне, а такође вредност функционала дејства не зависи од продужења због претпоставке да је M симплектички асферична. Заиста, уколико су u и $\tilde{u}$ два продужења контрактибилне петље γ на диск D^2 , лепљењем граница ових дискова добијамо пресликавање $v : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ које је на горњој полусфери једнако u , на доњој $\tilde{u}$ и на екватору γ . Тада је

$$0 = \int_{\mathbb{S}^2} v^* \omega = \int_{\mathbb{S}^2} u^* \omega - \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{u}^* \omega,$$

те је

$$\int_{\mathbb{S}^2} u^* \omega = \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{u}^* \omega.$$

Сада ћемо извести формулу за диференцијал функционала дејства и одредити његове критичне тачке чиме ћемо показати да ова поставка одговара поставци из Морсове теорије.

Тврђење 3.1.1 Важи $d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = \int_0^1 \omega(\gamma'(t) - X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt$ за све $\xi \in T_\gamma \Lambda M$.

Доказ: Нека је γ_s пут у ΛM такав да је $\gamma_0 = \gamma$ и $\xi(t) = \frac{d}{ds} \gamma_s(t)$ и u_s продужење петље γ_s на диск B за свако s . Тада је

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = \left. \frac{d}{ds} \mathcal{A}_H(\gamma_s) \right|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(- \int_B u_s^* \omega - \int_0^1 H_t(\gamma_s(t)) dt \right) \Big|_{s=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_B \frac{d}{ds} u_s^* \omega \Big|_{s=0} - \int_0^1 (dH_t)_{\gamma(t)}(\xi(t)) dt = - \int_B u_s^* (d(Y \lrcorner \omega) + Y \lrcorner (d\omega)) \Big|_{s=0} \\
&\quad - \int_0^1 \omega(X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt = - \int_B d(u_0^*(Y \lrcorner \omega)) - \int_0^1 \omega(X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt = \\
&\quad \quad \quad - \int_0^1 \gamma^*(Y \lrcorner \omega) - \int_0^1 \omega(X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt = \\
&\quad - \int_0^1 \omega(Y(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt - \int_0^1 \omega(X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt = \int_0^1 \omega(\gamma'(t) - X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt.
\end{aligned}$$

Овде смо погодно одабрали векторско поље Y тако да је $Y(\gamma(t)) = \xi(t)$, што увек можемо. $\square$

Дакле, видимо да функционал дејства $\mathcal{A}_H$ заиста испуњава оно што смо желели, јер је $\text{Crit}(\mathcal{A}_H) = \{\gamma : S^1 \rightarrow M \mid \gamma'(t) = X_{H_t}(\gamma(t))\} = \mathcal{P}(H)$. Претпоставићемо надаље да смо тако одабрали H и J генерички тј. тако да су све Хамилтонове петље недегенерисане.

Даље, као што смо раније посматрали градијентни ток Морсових функција, сада желимо исто да урадимо са градијентним током функционала дејства, али да бисмо могли да говоримо о градијенту, прво морамо да уведемо метрику на $T_\gamma \Lambda M$. Нека је J_t 1-периодична фамилија скоро комплексних струкутра компатибилних са ω . Дакле, $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = \omega(\cdot, J_t \cdot)$ је фамилија Риманових метрика. Сада можемо дефинисати метрику на $T_\gamma \Lambda M$ као

$$\langle \xi, \zeta \rangle = \int_0^1 \langle \xi(t), \zeta(t) \rangle_t dt$$

и имати добро дефинисано векторско поље $\text{grad} \mathcal{A}_H(\gamma(t))$.

Тврђење 3.1.2

$$\text{grad} \mathcal{A}_H(\gamma)(t) = J_t(\gamma(t) - X_H(\gamma(t))).$$

Доказ: По дефиницији је

$$\langle \text{grad} \mathcal{A}_H(\gamma), \xi \rangle = d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi).$$

Одатле, расписивањем и користећи претходно тврђење добијамо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(\gamma'(t) - X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt &= d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = \langle \text{grad}\mathcal{A}_H(\gamma), \xi \rangle = \\ &= \int_0^1 \langle \text{grad}\mathcal{A}_H(\gamma)(t), \xi(t) \rangle_t dt = \int_0^1 \langle \xi(t), \text{grad}\mathcal{A}_H(\gamma)(t) \rangle_t dt = \\ &= \int_0^1 \omega(\xi(t), J_t \text{grad}\mathcal{A}_H(\gamma)(t)) dt = - \int_0^1 \omega(J_t \text{grad}\mathcal{A}_H(\gamma)(t), \xi(t)) dt \end{aligned}$$

одакле је коначно

$$\int_0^1 \omega(\gamma'(t) - X_{H_t}(\gamma(t)) + J_t \text{grad}\mathcal{A}_H(\gamma)(t), \xi(t)) dt = 0$$

за свако $\xi \in T_\gamma \Lambda M$. Ово је једино могуће ако важи $\gamma'(t) - X_{H_t}(\gamma(t)) + J_t \text{grad}\mathcal{A}_H(\gamma)(t) = 0$ тј. $\text{grad}\mathcal{A}_H(\gamma)(t) = J_t(\gamma'(t) - X_{H_t}(\gamma(t)))$. $\square$

Сада, мотивисани теоријом Морса можемо да посматрамо једначину градијентног тока функционала дејства $\mathcal{A}_H$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s, t) = -\text{grad}\mathcal{A}_H(u(s, t)).$$

Користећи формулу за градијент коју смо управо извели, ову једначину можемо записати у следећем облику

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s, t) + J_t \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) - J_t X_{H_t}(u(s, t)) = 0. \quad (3.1)$$

и називамо је Флоровом једначином.

Изведимо и формулу за градијент Хамилтонијана H у односу на Риманову метрику $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J_t \cdot)$ на M . Како је

$$\omega(J_t \nabla H_t, \cdot) = -\omega(\nabla H_t, J_t \cdot) = -g(\nabla H_t, \cdot) = -dH_t(\cdot) = -\omega(X_{H_t}, \cdot),$$

из недегенерисаности симплектичке форме ω следи $-X_{H_t} = J_t \nabla H_t$ тј. $\nabla H_t = J_t X_{H_t}$.

Пре детаљније анализе решења Флорове једначине, застаћемо овде на тренутак и посматрати њен специјалан случај када решење $u(s, t) = u(s)$ и Хамилтонијан $H_t = H$ не зависе од t односно када се састоји од дегенерисаних петљи тј. тачака. Тада је, наравно, $\frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = 0$, па се једначина своди на

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s) - JX_H(u(s)) = 0$$

односно

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s) = \nabla H(s),$$

што је у ствари једначина позитивног градијентног тока функције H . Зато оправдано кажемо да је Флорова теорија уопштење Морсове.

3.2 Енергија решења – појам и класификација

За разлику од теорије Морса где је без икаквих додатних претпоставки о Морсовој функцији или градијентној линији важило да она почиње и завршава се у некој критичној тачки (не нужно истој), овде неће важити да свако решење једначине 3.1 почиње и завршава у критичној тачки функционала дејства (тј. контрактибилној Хамилтоновој петљи). Да бисмо издвојили и касније посматрали само таква решења, уводимо следећи појам.

Дефиниција 3.2.1 *Енергија решења $u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow M$ једначине 3.1 је*

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_t}(u) \right|^2 \right) ds dt.$$

Приметимо да из 3.1 је

$$\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 = \left| J_t(u) \left(X_{H_t}(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|^2 = \left| X_{H_t}(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_t}(u) \right|^2,$$

па је зато $E(u) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 ds dt = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_t}(u) \right|^2 ds dt$. Нас ће занимати само она решења u једначине 3.1 која имају коначну енергију тј. за које је $E(u) < +\infty$, те уводимо ознаку за њих

$$\mathcal{M} = \{ u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow M \mid u \text{ задовољава 3.1, контрактибилно је и } E(u) < +\infty \}.$$

Приметимо да је $E(u) = 0$ ако и само ако решење $u(s, t) = u(t)$ не зависи од s што заправо значи да је ово решење „мирује” у једној Хамилтоновој петљи. У супротном је $E(u) > 0$.

Наредно тврђење је аналог Тврђењу 2.2.2 у Морсовој теорији. Свако решење Флорове једначине коначне енергије почиње и завршава се у критичној тачки функционала дејства тј. у Хамилтоновој петљи.

Тврђење 3.2.1 *Нека је $u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow M$ континуирано решење једначине 3.1 такво да је $E(u) < +\infty$. Тада постоје цетиље $\gamma^+, \gamma^- \in \mathcal{P}(H)$ такве да је*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = \gamma^-(t),$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = \gamma^+(t),$$

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) = 0.$$

Доказ: Видети [17]. □

Сада, налик Морсовој теорији, уводимо ознаку

$$\mathcal{M}(\gamma^-, \gamma^+) = \left\{ u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow M \mid u \text{ задовољава 3.1 и } \lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s, t) = \gamma^\pm(t) \right\}.$$

Следеће тврђење приказује како се енергија решења Флорове једначине може изразити у терминима њених крајњих петљи.

Тврђење 3.2.2 *Нека је $u \in \mathcal{M}(x, y)$. Тада је $E(u) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y)$.*

Доказ:

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right\rangle dt ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u}{\partial s}, J_t(u) \left(X_{H_t}(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\rangle dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_t}(u) \right) dt ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt ds - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, X_{H_t}(u) \right) dt ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 dH_t(u) \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 u^* \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 H_t(u) dt ds = \int_C u^* \omega - \int_{D_x} u^* \omega + \int_{D_y} u^* \omega + \int_0^1 H_t(u(+\infty, t)) dt \\
& - \int_0^1 H_t(u(-\infty, t)) dt = - \int_{D_x} u^* \omega + \int_{D_y} u^* \omega + \int_0^1 H_t(y(t)) dt - \int_0^1 H_t(x(t)) dt = \\
& = - \int_{D_x} u^* \omega - \int_0^1 H_t(x(t)) dt - \left(- \int_{D_y} u^* \omega - \int_0^1 H_t(y(t)) dt \right) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y),
\end{aligned}$$

при чему смо користили да је $\int_C u^* \omega = 0$, јер је затворени цилиндар C хомеоморфан сфери $\mathbb{S}^2$ и многострукост M симплектички асферична, док су D_x и D_y дискови ограничени контрактибилним петљама x и y , редом. $\square$

Како је увек $E(u) > 0$ за неконстантно решење Флорове једначине u , то је $\mathcal{A}_H(x) > \mathcal{A}_H(y)$. Дакле, за свако решење Флорове једначине функционал дејства узима већу вредност у својој почетној петљи у односу на крајњу петљу. Ова чињеница ће нам бити важна приликом доказа да постоји коначно много решења Флорове једначине која почињу у u и завршавају се у y , јер приликом ограничења функционала дејства почетне петље, аутоматски ће бити ограничена и његова вредност у крајњој петљи.

3.3 Градуисање и Конли–Цендеров индекс

У Морсовој теорији, једноставно је било груписати критичне тачке Морсове функције на основу њиховог индекса и на тај начин формирати ланчасти комплекс. Овде, на први поглед није јасно како то учинити са Хамилтоновим петљама тј. како $\gamma \in \mathcal{P}(H)$ придружити ненегативан цео број k такав да γ буде један од генератора слободне групе $CF_k(H, J)$. Самим тим не знамо како формирати ланчасти комплекс $CF_*(H, J)$. Зато уводимо Конли–Цендеров индекс који ће нам разрешити овај проблем.

Означимо са $Sp^*(2n)$ скуп свих симплектичких матрица чије су све сопствене вредности различите од 1. Дакле, $Sp^*(2n) = \{M \in Sp(2n) \mid \det(M - E) \neq 0\}$. Овај скуп има две компоненте повезаности: $Sp^+(2n) = \{M \in$

$Sp(2n) \mid \det(M - E) > 0\}$ и $Sp^-(2n)\{M \in Sp(2n) \mid \det(M - E) < 0\}$. Штавише, $Sp^+(2n)$ и $Sp^-(2n)$ су просто повезани. Означимо $W^+ = -E_{2n}$ и $W^- = \text{diag}(2, -1, -1, \dots, -1, \frac{1}{2}, -1, -1, \dots, -1) \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Тада је $W^+ \in Sp^+(2n)$ и $W^- \in Sp^-(2n)$, па се свака матрица $A \in Sp^*(2n)$ може путем повезати са неком од ове две матрице.

Тврђење 3.3.1 *Постоји јединствено пресликавање $\rho : Sp(2n) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ које задовољава:*

- (1) $\rho(A) = \det A$, за све $A \in U(n)$;
- (2) $\rho(B^{-1}AB) = \rho(A)$ за све $A, B \in Sp(2n)$;
- (3) $\rho(A) \in \{-1, 1\}$ за све $A \in Sp^*(2n)$;
- (4) $\rho(A \oplus B) = \rho(A)\rho(B)$ за све $A \in Sp(2k), B \in Sp(2n - 2k)$.

Доказ: Видети [17]. □

Примера ради, за $n = 1$ тј. на $Sp(2)$ ово пресликавање је у два нама најкориснија случаја дефинисано на следећи начин

$$\rho(A) = \begin{cases} 1, & \text{ако су обе сопствене вредности матрице } A \text{ позитивне и } \text{tr}(A) \geq 2, \\ -1, & \text{ако су обе сопствене вредности матрице } A \text{ негативне и } \text{tr}(A) \leq -2. \end{cases}$$

Како је $W^+ \in U(n)$, одмах имамо $\rho(W^+) = \det W^+ = (-1)^n$, а лако се види и да је

$$\begin{aligned} \rho(W^-) &= \rho\left(\text{diag}\left(2, \frac{1}{2}, -1, -1, \dots, -1\right)\right) = \\ &= \rho\left(\text{diag}\left(2, \frac{1}{2}\right)\right) \rho(\text{diag}(-1, -1, \dots, -1)) = 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Сада смо спремни да дефинишемо Конли-Цендеров индекс за одређени тип путева у $Sp(2n)$.

Дефиниција 3.3.1 *Нека је пут $\psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2n)$ такав да $\psi(0) = E$ и $\psi(1) \in Sp^*(2n)$ и $\tilde{\psi} : [0, 2] \rightarrow Sp(2n)$ такав да $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$ за $t \in [0, 1]$, $\tilde{\psi}(t) \in Sp^*(2n)$ за $t \in [1, 2]$ и $\tilde{\psi}(2) \in \{W^+, W^-\}$. Тада је $\mu_{CZ}(\psi) := \deg(\rho^2 \circ \tilde{\psi}) \in \mathbb{Z}$ Конли-Цендеров индекс пута ψ .*

Треба прво објаснити да ова дефиниција има смисла и да је добра. Пут $\tilde{\psi}$ постоји као продужење пута ψ , јер је настао надовезивањем управо пута ψ и пута који повезује $\psi(1)$ са неком од матрица W^+ и W^- . Затим, $\rho^2 \circ \tilde{\psi} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{S}^1$ и $\rho^2(\tilde{\psi}(0)) = \rho^2(E) = \det E = 1 = \rho^2(\tilde{\psi}(2))$, јер $\tilde{\psi}(2) \in \{W^+, W^-\}$, а већ смо видели да $\rho(W^\pm) \in \{-1, 1\}$. Зато се ово пресликавање може схватити као $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ и има смисла посматрати његов степен. Коначно, због просте повезаности скупова $Sp^+(2n)$ и $Sp^-(2n)$ и чињенице да је степен пресликавања хомотопска инваријанта дефиниција Конли–Цендеровог не зависи од продужења $\tilde{\psi}$, па је добра.

3.4 Флоров ланчasti комплекс и хомологија

Наш наредни задатак је да свакој петљи $\gamma \in \mathcal{P}(H)$ придружимо пут (фамилију) симплектичких матрица који почиње у E , а завршава се у $Sp^*(2n)$. То ће нам омогућити да петљи γ доделимо ненегативан цео број у функцији од Конли–Цендеровог индекса придруженог пута. Помоћу тог броја ћемо знати како да групишемо петље и након тога формирамо Флоров ланчasti комплекс по аналогiji са Морсовим ланчастим комплексом.

Нека је $\gamma \in \mathcal{P}(H)$ петља и $u : D^2 \rightarrow M$ њено произвољно продужење на диск D^2 . Овај диск је контрактибилан, па је раслојење u^*TM тривијално. Показаћемо да постоји тривијализација $\beta : D^2 \times \mathbb{R}^{2n} = u^*TM$ таква да је $\omega(\beta(p, X), (p, Y)) = X^T \Omega Y$ за све $p \in D^2$, $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$. За почетак, одаберимо на M Леви–Чивита конексију ∇ која (осим, наравно, метрике) такође чува и скоро комплексну структуру J , а самим тим и ω . Нека је онда $\alpha(0, \cdot) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow (u^*TM)_{u(0)}$ изоморфизам. Тада је $\omega(\alpha(0, X), \alpha(0, Y)) = X^T \Omega_1 Y$ за неку антисиметричну инвертибилну матрицу Ω_1 . Постоји инвертибилна матрица S таква да је $S^T \Omega_1 S = \Omega$, па помоћу ње дефинишемо ново пресликавање $\beta(\cdot, \cdot) = \alpha(\cdot, S \cdot)$ такво да је $\omega(\beta(0, X), \beta(0, Y)) = X^T \Omega Y$. Дакле, за сада имамо дефинисано пресликавање β за $p = 0$. У произвољној тачки p диска D^2 дефинисаћемо га као резултат паралелног транспорта вектора $\beta(0, X)$ дуж полупречника овог диска који садржи управо тачку p . Прецизније, нека је $p \in D^2$ произвољна тачка и $\theta(t) = tp$ дуж таква да је $\theta(0) = 0$ и $\theta(1) = p$. Означимо са P_0^p паралелни транспорт дуж дужи θ и дефинишимо $\beta(p, X) =$

$P_0^p(\beta(0, X))$. Покажимо да ова тривијализација јесте симплектичка. Како је $\omega(\beta(p, X), \beta(p, Y)) = \omega(P_0^p(\beta(0, X)), P_0^p(\beta(0, Y))) = \omega(\beta(0, X), \beta(0, Y)) = X^T \Omega Y$, то заиста имамо оно што смо желели.

Дефинишимо сада $\psi(t) = (\alpha(e^{2pit}, \cdot))^{-1} \circ d\phi_t(\gamma(0)) \circ \alpha(1, \cdot)$. Тада је $\psi(t)$ фамилија симплектичких пресликавања (која можемо посматрати и као матрице у стандардној бази). Важи $\psi(0) = (\alpha(1, \cdot))^{-1} \circ \text{Id} \circ \alpha(1, \cdot) = \text{Id}$, па можемо сматрати $\psi(0) = E$. Затим, како је $\psi(1) = (\alpha(1, \cdot))^{-1} \circ d\phi_t(\gamma(0)) \circ \alpha(1, \cdot)$ слична матрици $d\phi_t(\gamma(0))$ и како друга нема 1 за сопствену вредност (због недегенерисаности петље γ), то нема ни прва, те $\psi(1) \in Sp^*(2n)$. Одатле следи да је Конли–Цендеров индекс пута $\psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2n)$ добро дефинисан, те коначно можемо дефинисати Конли–Цендеров индекс петље γ са

$$\mu_H(\gamma) = n - \mu_{CZ}(\Phi).$$

Приметимо да ова дефиниција у први мах зависи од продужења петље на диск D^2 , па се за различита продужења могу добити различите вредности Конли–Цендеровог индекса, што у општем случају и јесте тачно. Међутим, уколико додатно претпоставимо да је M асферична, за свако продужење се добија иста вредност, те је ова дефиниција добра.

Потпуно аналогно Морсовој теорији имамо следећу теорему.

Тврђење 3.4.1 *За сваке две петље $x, y \in \mathcal{P}(H)$ такве да је $\mu_H(x) > \mu_H(y)$ су $\mathcal{M}(x, y)$ је тачка мноштва мноштва димензије $\mu_H(x) - \mu_H(y) - 1$ и може се комбиновати до мноштва чија је граница сачињена од изломљених решења Флорове једначине.*

Доказ: Видети у []

□

У нашем важном случају када је $\mu_H(y) = \mu_H(x) - 1$, многострукост $\mathcal{M}(x, y)$ је димензије 0 и компактна, те је зато коначан скуп тачака. Означимо број тих тачака по модулу 2 са $n(x, y)$. Сада имамо све неопходно за дефинисање Флоровог ланчастог комплекса. Пре тога, претпоставићемо да су H и J генерички (тј. задовољавају одређена својства због којих ће даље конструкције

бити добре). Нека је

$$CF_k(H, J) = \bigoplus_{\mu_H(\gamma)=k} \mathbb{Z}_2 \langle \gamma \rangle$$

слободна Абелова група над $\mathbb{Z}_2$ генерисана Хамилтоновим петљама $\gamma \in \mathcal{P}(H)$ индекса k . На њеним генераторима дефинишемо пресликавање са

$$\partial_k(\gamma) = \sum_{\mu_H(\eta)=k-1} n(\gamma, \eta) \eta$$

и продужимо га линеарно на читавој $CF_k(H, J)$.

На истоветан начин као у Морсовој теорији може се показати да је овај оператор ланчаст тј. да је $\partial^2 = 0$, те је ово заиста ланчасти комплекс. Његову хомологију

$$H_k(H, J) = \ker \partial_k / \text{im} \partial_{k+1}$$

називамо Флоровом хомологијом многострукости M за Хамилтонијан H и скоро комплексну структуру J . У први мах може се чинити да избор H и J битно утиче на ову хомологију, међутим, као и у случају Морсове хомологије, може се показати да постоји природни изоморфизам $H_*(H^\alpha, J^\alpha)$ и $H_*(H^\beta, J^\beta)$ за генеричке $H^\alpha, H^\beta, J^\alpha, J^\beta$ (видети [17])

Глава 4

Симплектичка хомологија

У претходном поглављу смо приказали начин на који можемо рачунати Флорову хомологију затворене симплектичке многострукости. Предмет овог поглавља је генерализација те идеје на многострукости са конвексном границом. Прво ћемо увести многострукости које посматрамо у овом поглављу – Лиувиллове домене¹, затим дефинисати њихово комплетирање и све неопходне конструкције да бисмо коначно могли да дефинишемо њихову симплектичку хомологију на основу изложеног у претходном поглављу.

4.1 Лиувиллови домени

Дефиниција 4.1.1 *Нека је W компактна многострукост димензије $2n$ са границом и $\lambda \in \Omega^1(W)$ 1-форма на W таква да*

- (1) $\omega = d\lambda$ је симплектичка форма на W ;
- (2) $\alpha := \lambda|_{\partial W}$ је компактна форма која задаје позитивну оријентацију.

Тада ову многострукост називамо Лиувиловим доменом са Лиувилловом формом λ .

Објаснимо горепоменути појам позитивне оријентације. Приметимо да пошто је ω симплектичка форма на W , $\omega^{\wedge n}$ је једна форма запремине на W , па задаје оријентацију многострукости W , а самим тим и индуковану оријентацију њене границе ∂W . С друге стране, α је контактна форма на ∂W , па је $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)}$

¹у литератури често називани *symplectic manifolds with contact type boundary*

такође форма запремине на ∂W . Ове две оријентације на ∂W не морају увек бити исте, а када кажемо „позитивна оријентација” сматрамо да јесу исте.

Дефиниција 4.1.2 Нека је (W, λ) Лиувилев домен. Релацијом $X^\lambda \lrcorner \omega = X^\lambda \lrcorner (d\lambda) = \lambda$ добро је дефинисано векторско поље $X^\lambda \in \mathcal{X}(W)$ које називамо Лиувилевим векторским пољем.

Тврђење 4.1.1 Лиувилев домен није затворена мноштвоуј. $\partial W \neq \emptyset$.

Доказ: Претпоставимо супротно. Применом Стоксове теореме долазимо до контрадикције

$$0 \neq \int_W \omega^{\wedge n} = \int_W d(\lambda \wedge \omega^{\wedge(n-1)}) = \int_{\partial W = \emptyset} \lambda \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = 0.$$

Наравно, користили смо $d(\omega^{\wedge(n-1)}) = 0$, јер је ω затворена форма. $\square$

Тврђење 4.1.2 Лиувилево векторско поље је трансверзално на границу ∂W и показује споља.

Доказ: Трансверзалност $X^\lambda \pitchfork \partial W$ заправо значи $(\forall p \in \partial W) X_p^\lambda \notin T_p(\partial W)$. Из услова (1) и (2) у Дефиницији 4.1.1 на ∂W важи

$$\begin{aligned} 0 \neq \alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)} &= \lambda \wedge (d\lambda)^{\wedge(n-1)} = (X^\lambda \lrcorner d\lambda) \wedge (d\lambda)^{\wedge(n-1)} = \frac{1}{n} X^\lambda \lrcorner (d\lambda)^{\wedge n} = \\ &= \frac{1}{n} X^\lambda \lrcorner \omega^{\wedge n} \end{aligned}$$

одакле је $X^\lambda \lrcorner \omega^{\wedge n} \neq 0$. Како је $\omega^{\wedge n}$ форма запремине на W , из последњег услова имамо $X_p^\lambda \notin T_p(\partial W)$ за свако $p \in \partial W$, те је заиста $X^\lambda \pitchfork \partial W$. Даље, из услова (2) у дефиницији оријентације коју задаје $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)} = \frac{1}{n} X^\lambda \lrcorner \omega^{\wedge n}$, односно индукује форма $\omega^{\wedge n}$ су исте на ∂W , па X^λ показује ка споља. $\square$

Такође, једноставном применом Картанове формуле израчунавамо Лијев извод форме ω у правцу Лиувиловог векторског поља

$$\mathcal{L}_{X^\lambda} \omega = X^\lambda \lrcorner d\omega + d(X^\lambda \lrcorner \omega) = d\lambda = \omega.$$

Означимо са φ_t^λ ток Лиувиловог векторског поља X^λ који ћемо звати Лиувилев ток. Извешћемо нека корисна својства Лиувиловог тока у оквиру наредног тврђења.

Тврђење 4.1.3 Уз претходне ознаке важи $(\varphi_t^\lambda)^* \lambda = e^t \lambda$ и $(\varphi_t^\lambda)^* \omega = e^t \omega$.

Доказ: Применом Картанове формуле имамо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi_t^\lambda)^* \lambda &= (\varphi_t^\lambda)^* (X^\lambda \lrcorner d\lambda + d(X^\lambda \lrcorner \lambda)) = (\varphi_t^\lambda)^* (\lambda + d(\lambda(X^\lambda))) = \\ &= (\varphi_t^\lambda)^* (\lambda + d(\omega(X^\lambda, X^\lambda))) = (\varphi_t^\lambda)^* \lambda. \end{aligned}$$

Одатле је $\frac{d}{dt} (e^{-t} (\varphi_t^\lambda)^* \lambda) = 0$, па је $(e^{-t} (\varphi_t^\lambda)^* \lambda) = \eta$ за неку 1-форму η која не зависи t . За $t = 0$ добијамо $\eta = \lambda$ што значи да је $e^{-t} (\varphi_t^\lambda)^* \lambda = \lambda$ и коначно $(\varphi_t^\lambda)^* \lambda = e^t \lambda$ за свако $t \in \mathbb{R}$.

Слично, имамо

$$\frac{d}{dt} (\varphi_t^\lambda)^* \omega = (\varphi_t^\lambda)^* (X^\lambda \lrcorner d\omega + d(X^\lambda \lrcorner \omega)) = (\varphi_t^\lambda)^* (0 + d\lambda) = (\varphi_t^\lambda)^* \omega,$$

па истим поступком као малопре закључујемо да је $(\varphi_t^\lambda)^* \omega = \omega$. $\square$

Тврђење 4.1.4 Нека је (W, λ) Лиувилев домен и $\alpha = \lambda|_{\partial W}$ контактна форма. Постоји улагање $\iota : \partial W \times (0, 1] \rightarrow W$ такво да је $\iota^* \lambda = r\alpha$ (где је r координата на $(0, 1]$) и $\iota(x, 1) = x$ за свако $x \in \partial W$.

Доказ: Нека је $\iota(x, r) := \varphi_{\ln r}^\lambda(x)$. Очигледно је $\iota(x, 1) = \varphi_0^\lambda(x) = x$. Затим, $\iota^* \lambda$ је 1-форма на $\partial W \times (0, 1]$ и на основу претходног тврђења је

$$\iota^* \lambda = (\varphi_{\ln r}^\lambda)^* \lambda = e^{\ln r} \lambda = r\lambda = r\alpha,$$

при чему последња једнакост следи из $\lambda|_{\partial W} = \alpha$. Да је ι улагање, може се видети у [17]. $\square$

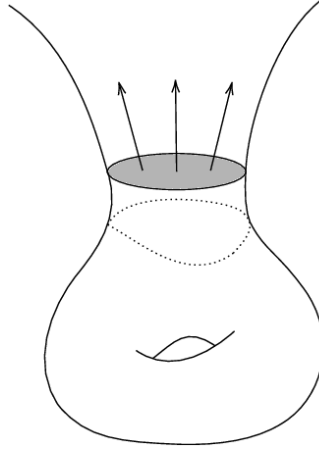
Ово нам омогућује продужење Лиувиловог домена у бесконачност, односно његово комплетирање (у смислу да ће Лиувилев ток сада бити дефинисан за све $t \in \mathbb{R}$), што видимо у следећој дефиницији.

Дефиниција 4.1.3 Комплетирање Лиувиловог домена (W, λ) је отворена шачна симплектичка мноштво $(\widehat{W}, \widehat{\lambda})$ дата са

$$\widehat{W} = W \sqcup ((\partial W) \times \mathbb{R}^+) / \iota,$$

при чему је $\widehat{\lambda} = \lambda$ на W и $\widehat{\lambda} = r\alpha$ на $\partial W \times [1, +\infty)$. Симплектичка форма $\widehat{\omega}$ на кој је дата са $\widehat{\omega} = \omega$ на W и $\widehat{\omega} = dr \wedge \alpha + r d\alpha$ на $\partial W \times [1, +\infty)$.

Дакле, природно смо идентификовали $\partial W \times (0, 1]$ помоћу улагања ι из претходног тврђења и комплетирање $\widehat{W}$ добили лепљењем $\partial W \times \mathbb{R}^+$ и W .



Слика 4.1: Комплетирање Лиувиловог домена

Надаље, под појмом *близу бесконачности* сматрамо „на скупу $\partial W \times (r, +\infty) \subset \widehat{W}$ за неко $r > 1$ ”, а са W^r ћемо означавати скуп $\widehat{W} \setminus (\partial W \times (r, +\infty))$. Такође, надаље ћемо ради једноставности претпостављати и да су W и ∂W повезани скупови.

4.2 Функционал дејства и Флорова једначина

Уведимо прво пар основних појмова који ће нам омогућити да у овом случају дефинишемо функционал дејства налик затвореном случају.

Дефиниција 4.2.1 За симплектоморфизам $\phi : W \rightarrow W$ кажемо да је *тачан* уколико је компактно подржан у унутрашњости од W ($\text{supp}(\phi) \subset \text{int}W$ је компактан) и 1-форма $\phi^*\lambda - \lambda$ је тачна.

За дати симплектоморфизам ϕ означимо са F_ϕ глатку функцију на W такву да је $dF_\phi = \phi^*\lambda - \lambda$ која је такође компактно подржана у унутрашњости од W .

Дефиниција 4.2.2 За број $a \in \mathbb{R}$ кажемо да је *допустив* у односу на Лиувилев домен (W, λ) уколико није једнак периоду неке орбите Ребовој векторској поља R_α на ∂W , док је $+\infty$ увек допустива.

Дефиниција 4.2.3 Под Флоровим $\bar{u}$ аром за $\bar{u}$ ачни симплектоморфизам $\bar{u}$ од-разумевамо сваки $\bar{u}$ ар (H, J) , где су $H : \mathbb{R} \times \widehat{W} \rightarrow \mathbb{R}$ Хамилтонијан и J скоро комплексна структура комбибилна са ω $\bar{u}$ акви да $\bar{u}$ осишоји $r_0 > 0$ и важи

$$H_{t+1} = H_t \circ \phi,$$

$$J_{t+1} = \phi^* J_t,$$

$$H_t(x, r) = ar \quad \text{на} \quad \partial W \times (r_0, +\infty),$$

$$dr \circ J_t(x, r) = -\lambda \quad \text{на} \quad \partial W \times (r_0, +\infty).$$

Дефиниција 4.2.4 Флоров $\bar{u}$ ар (H, J) називамо регуларним уколико за сваку фиксну $\bar{u}$ ачку x од $\phi \circ \psi_1^H$ важи

$$\det(d(\phi \circ \psi_1^H) - E) \neq 0.$$

По аналогји са затвореним случајем из претходном поглавља, на $\widehat{W}$ можемо посматрати простор свих глатких, али уврнутих, петљи

$$\Omega_\phi = \{\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \widehat{W} \mid \phi(\gamma(t+1)) = \gamma(t)\}$$

и дефинишемо функционал дејства на њему $\mathcal{A}_{\phi, H} : \Omega_\phi \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$\mathcal{A}_{\phi, H}(\gamma) = - \int_0^1 \gamma^* \lambda - \int_0^1 H_t(\gamma(t)) dt - F_\phi(\gamma(1)) = - \int_0^1 (\gamma^* \lambda + H_t(\gamma(t)) dt) - F_\phi(\gamma(1)).$$

Лако изводимо формулу за диференцијал функционала дејства као у претходном поглављу. Нека је γ_s пут у Ω_ϕ такав да је $\gamma_0 = \gamma$ и $\frac{d}{ds} \gamma_s(t) = \xi(t)$. Тада је

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_{\phi, H}(\gamma)(\xi) &= \frac{d}{ds} \mathcal{A}_{\phi, H}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(- \int_0^1 \gamma_s^* \lambda - \int_0^1 H_t(\gamma_s(t)) dt - F_\phi(\gamma_s(1)) \right) \Big|_{s=0} \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \gamma_s^* \lambda - \int_0^1 dH_t(\xi(t)) dt + (\lambda(\xi))(\gamma(1)) - (\lambda(\xi))(\gamma(0)) = \\ &= - \int_0^1 \gamma_0^*(\xi \lrcorner d\lambda + d(\xi \lrcorner \lambda)) - \int_0^1 \omega(X_{H_t}, \xi(t)) dt + (\lambda(\xi))(\gamma(1)) - (\lambda(\xi))(\gamma(0)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 \gamma^*(\xi \lrcorner \omega + d(\xi \lrcorner \lambda)) - \int_0^1 \omega(X_{H_t}, \xi(t)) dt + (\lambda(\xi))(\gamma(1)) - (\lambda(\xi))(\gamma(0)) = \\
&\quad - \int_0^1 \omega(\xi(t), \gamma'(t)) dt - \int_0^1 \gamma^* d(\lambda(\xi)) - \int_0^1 \omega(X_{H_t}, \xi(t)) dt + (\lambda(\xi))(\gamma(1)) \\
&\quad - (\lambda(\xi))(\gamma(0)) = \int_0^1 \omega(\gamma'(t), \xi(t)) dt - \int_0^1 d(\lambda(\xi) \circ \gamma)(t) dt - \int_0^1 \omega(X_{H_t}, \xi(t)) dt \\
&\quad + (\lambda(\xi))(\gamma(1)) - (\lambda(\xi))(\gamma(0)) = \int_0^1 \omega(\gamma'(t) - X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt \\
&\quad - (\lambda(\xi)(\gamma(1)) - \lambda(\xi)(\gamma(0))) + (\lambda(\xi))(\gamma(1)) - (\lambda(\xi))(\gamma(0)) = \\
&\quad = \int_0^1 \omega(\gamma'(t) - X_{H_t}(\gamma(t)), \xi(t)) dt.
\end{aligned}$$

У претходном рачуну смо користили Картанову формулу. Дакле, као што видимо, иста је формула за диференцијал функционала дејства као у затвореном случају, па су и критичне тачке одређене истом једначином $\gamma'(t) = X_{H_t}(\gamma(t))$. Означимо са $\mathcal{P}(\phi, H)$ све уврнуте петље које су уједно и критичне тачке овог функционала дејства. Такође, метрику на Ω_ϕ задајемо са

$$\langle \xi, \zeta \rangle = \int_0^1 \omega(\xi(t), J_t \circ \gamma(t) \zeta(t)) dt,$$

те лако рачунамо градијент функционала дејства у односу на њу као у затвореном случају

$$\text{grad} \mathcal{A}_{\phi, H}(\gamma)(t) = J_t(\gamma(t) - X_{H_t}(\gamma(t))).$$

Зато ће и Флорова једначина имати исти облик као раније уз додатни услов $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \widehat{W}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s}(s, t) + J_t \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) - J_t X_{H_t}(u(s, t)) &= 0, \\
\phi(u(s, t + 1)) &= u(s, t).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

4.3 Градуисање и ланчасти комплекс

Сада можемо кренути у конструкцију ланчастог комплекса. Прво ћемо објаснити како се врши индексирање уврнутих петљи из Ω_ϕ . Сваке две такве петље имају свој Конли–Цендеров индекс који конструишемо слично као у претходном поглављу (помоћу додељене фамилије симплектичких матрица из њихове симплектичке тривијализације). За хомотопију u која почиње у датој уврнутој петљи γ_0 и завршава се у γ_1 дефинишемо њен Масловљев индекс са

$$\mu(u) = \mu_H(\gamma_1) - \mu_H(\gamma_0).$$

Пошто Масловљев индекс не зависи од хомотопије u , већ само од уврнутих петљи које она повезује, уместо $\mu(u)$ ћемо некад писати и $\mu(\gamma_0, \gamma_1)$.

Наводимо важно тврђење које ће нам омогућити добро дефинисање ланчастог пресликавања овог комплекса и које подсећа на одговарајуће тврђење у затвореном случају.

Тврђење 4.3.1 *Нека је ϕ тачан симплектикоморфизам Лиувиловог домена (W, λ) и (H, J) регуларан Флоров пар за ϕ и нека су $\gamma^-, \gamma^+ \in \mathcal{P}(\phi, H)$. Скуп $\mathcal{M}(\phi, H, J, \gamma^-, \gamma^+)$ свих решења Флорове једначине 4.1 која почињу у γ^- и завршавају се у γ^+ је многострукост (може бити и празан скуп). Количник њеног k -димензионог дела $\mathcal{M}^k(\phi, H, J, \gamma^-, \gamma^+)$ на њу индукован групом $(\mathbb{R}, +)$ означавамо са $\widehat{\mathcal{M}}^k(\phi, H, J, \gamma^-, \gamma^+)$.*

Доказ: Видети у [17]. □.

За $k = 1$ у претходној теорему може се показати да је $\widehat{\mathcal{M}}^k(\phi, H, J, \gamma^-, \gamma^+)$ коначан скуп тачака, па ћемо са $n(\phi, H, J, \gamma^-, \gamma^+)$ означити број његових елемената по модулу 2.

Сада, за произвољну петљу $\gamma_0 \in \mathcal{P}(\phi, H)$ и $k \in \mathbb{Z}$ дефинишемо

$$CF_k(\phi, H, J) = \bigoplus_{\mu(\gamma, \gamma_0)=1} \mathbb{Z}_2 \langle \gamma \rangle,$$

при чему у директној суми посматрамо само $\gamma \in \mathcal{P}(\phi, H)$. Након тога, дефинишемо пресликавање $\partial : CF_k(\phi, H, J) \rightarrow CF_{k-1}(\phi, H, J)$ на генераторима са

$$\partial(\gamma) = \sum_{\mu(\gamma, \tilde{\gamma})=1} n(\phi, H, J, \gamma, \tilde{\gamma}) \tilde{\gamma}$$

и продужавамо га на целој групи за које се на основу Тврђења 4.3.1 може показати да је ланчасто, те заиста имамо дефинисану хомологију $HF_*(\phi, H, J)$. Јасно, у овој конструкцији градуисање зависи од избора петље γ_0 .

За два различита одабира регуларног Флоровог пара (H^α, J^α) и (H^β, J^β) линеарно пресликавање генерисано фамилијом регуларних Флорових парова (H_s, J_s) која их повезује

$$\gamma^\alpha \mapsto \sum_{\mu(\gamma^\alpha, \gamma^\beta)=0} n(\phi, H_s, J_s, \gamma^\alpha, \gamma^\beta) \gamma^\beta$$

индукује изоморфизам у Флоровој хомологији који зовео настављајућим пресликавањем². Стога $HF_*(\phi, H, J)$ не зависи од избора регуларног Флоровог пара (H, J) .

Коначно, можемо дефинисати симплектичку хомологију Лиувиловог домена (W, λ) . Нека је ϕ тачан симплектоморфизам и $\theta \in \Omega_\phi$. Пошто смо установили да $HF_*(\phi, H, J, \theta)$ не зависи од избора (H, J) , група $HF_*(\phi, a, \theta)$ је добро дефинисана. Онда можемо дефинисати и

$$HF_*(\phi, a) = \bigoplus_{\theta \in \Omega_\phi} HF_*(\phi, a, \theta).$$

Даље, за све $a_1 \leq a_2$ настављајуће пресликавање задаје хомоморфизам $HF_*(\phi, a_1, \theta) \rightarrow HF_*(\phi, a_2, \theta)$ одакле је добро дефинисан њихов директни лимес по $a \in \mathbb{R}$

$$HF_*(\phi, +\infty, \theta) = \varinjlim_a HF_*(\phi, a, \theta),$$

а онда је добро дефинисана и хомологија по свим $\theta \in \Omega_\phi$

$$HF_*(\phi, +\infty) = \bigoplus_{\theta \in \Omega_\phi} HF_*(\phi, +\infty, \theta).$$

Одабиром $\phi = \text{Id}$ добијамо симплектичку хомологију Лиувиловог домена (W, λ) са коефицијентима у $\mathbb{Z}_2$

$$SH_*(W, \mathbb{Z}_2) = HF_*(\text{Id}, +\infty)$$

и она је изоморфна Морсовој $H_{*+n}(W, \mathbb{Z}_2)$. Сви детаљи ових наведених конструкција могу се видети у [17].

²енг. *continuation map*

Литература

- [1] Дарко Милинковић, *Увод у рачун на мноґосѣрукосѣима*, Београд, 2021
- [2] Јелена, Катић *Диференцијалне једначине*, скрипта, Београд
- [3] Игор Уљаревић, *Симплектичке мноґосѣрукосѣи и критичне тачке функција*, мастер рад, Београд, 2011.
- [4] Dietmar Salamon, *Lecture notes on Floer homology*
- [5] Chris, Wendl, *A beginners overview of Symplectic homology*
- [6] Александра Перишић, *Морсова хомологија, диференцијално-топологијски и аналитички пристоји*, мастер рад, Београд, 2009.
- [7] Dusa McDuff, Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford University Press, 2017.
- [8] Hansjorg Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge University Press, 2008.
- [9] Helmut Hofer, Eduard Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhauser Basel, 2011.
- [10] Bourgeois, Frederic. *Lectures on Symplectic and Contact Homology*
- [11] Gutt, Jean. 2012. The Conley Zehnder index for a path of symplectic matrices
- [12] Brugues Mora, Joaquim. *Morse Theory and Floer theory*, master thesis
- [13] Michele Audin, Miahi Damian, *Morse Theory and Floer Homology*, Springer Verlag London, 2014.

- [15] Paul Seidel, *A biased view of symplectic cohomology*
- [16] Игор Уљаревић, *A symplectic Homology Theory for Automorphisms of Liouville Domains*, 2016.
- [17] Claude Viterbo, *Functions and computations in Floer homology with applications, part I*, Birkhauser Verlag, Basel, 1999