

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



МАСТЕР РАД

# Хеликоидне површи са константном средњом кривином. Бурова теорема

Филип Вукојевић

Београд, 2023.

**Ментор:**

проф. др Мирослава Антић, ванредни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије:**

проф. др Зоран Ракић, редовни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Срђан Вукмировић, ванредни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: \_\_\_\_\_

## Захвалница

Захваљујем својој менторки, проф. др Мирослави Антић, на помоћи при избору теме и изаради овог рада. Велико хвала на саветима и труду, који апсолутно превазилази обавезе једног ментора, а поготову на речима подршке и мотивације, које су ми биле подједнако, ако не и више, важне од ма какве математичке помоћи. Тематиком рада ме је подстакла на истраживање и дала мотивацију за даљим учењем и усавршавањем, на чему сам јој немерљиво захвалан.

Члановима комисије, проф. др Зоран Ракићу и проф. др Срђану Вукмировићу, сам изразито захвалан на исказаном разумевању, а поготову на корисним примедбама и сугестијама који су сам рад учинили значајно бољим.

Посебно бих споменуо и захвалио се проф. др Мирјани Ђорић на огромном труду, стрпљењу у раду са мном, и надасве, ентузијазму и вољи за рад. Савети које ми је пружила током ове школске године су били пресудан фактор квалитета рада као и тога да рад не оде у погрешном смеру. Иако никаквом формалном обавезом везана за овај мастер рад, пружила ми је непроцењиву помоћ и своје драгоцене време и на томе јој од срца захваљујем.

На огромној техничкој помоћи и бројним корисним сугестијама, без којих би израда овог рада бесконачно дуже трајала, велику захвалност дугујем свом драгом пријатељу, др Николи Леласу, коме бих уз речи захвалности овом приликом и пожелео сву срећу у будућим животним подухватима, јер је она увек неопходна, чак и најбољима.

Овај рад посвећујем својој породици и једној специјалној Ивани, која је мој живот, а својим преводилачким способностима и овај рад, учинила неупоредиво бољим. Адекватних речи захвалности на њиховом стрпљењу и љубави, без којих овог рада сигурно не би било, једноставно нема.

**Наслов мастер рада:** Хеликоидне површи са константном средњом кривином. Бурова теорема

**Резиме:** Делони је у свом раду [5] описао ротационе површи константне средње кривине. Скоро 150 година касније, До Кармо и Дајћер су у свом раду [7] потпуно описали природно уопштење Делонијевих површи- хеликоидне површи константне средње кривине. Врло занимљиво, на том путу кључну улогу је одиграо резултат из XIX века до кога је дошао Бур у [3]. У овом раду је дат опис Делонијевих површи и како се до њих може доћи. У кратким цртама дат је и динамички начин како се до њих долази, управо како је Делони до њих и дошао. Резултат рада [7] је у потпуности презентован и детаљно је објашњена повезаност са Делонијевим површима. Описана је и једна модернија интерпретација До Кармовог и Дајћеровог рада, што говори у прилог актуелности теме овог рада.

**Кључне речи:** Средња кривина, Делонијева површ, хеликоидна површ, *СМС* површ, изометричка деформација

<b>Увод</b>	<b>2</b>
<b>1 Увод у локалну теорију површи</b>	<b>3</b>
1.1 Основни појмови . . . . .	3
1.2 Гаусово пресликавање. Друга фундаменална форма .	12
1.3 Средња кривина. Минималне површи . . . . .	17
1.4 Изотермални параметри . . . . .	22
<b>2 Хеликоидне и ротационе површи. Површи Делонија</b>	<b>27</b>
2.1 Ротационе површи . . . . .	27
2.2 Хеликоидне површи . . . . .	32
2.3 Делонијеве површи . . . . .	36
<b>3 Бурова теорема</b>	<b>45</b>
<b>4 Хеликоидне површи константне средње кривине</b>	<b>51</b>
4.1 Бурова фамилија . . . . .	51
4.2 Карактеризациона једначина . . . . .	55
4.3 Репрезентациона формула . . . . .	60
<b>5 Динамичка интерпретација</b>	<b>67</b>
5.1 Покретна трака криве . . . . .	67
5.2 Увојци . . . . .	69
<b>6 Закључак</b>	<b>77</b>
<b>Литература</b>	<b>81</b>



Питање закривљености површи једно је од најзначајних питања у теорији тих математичких објеката, тим пре јер је ситуација неупоредиво комплекснија у односу на ону код кривих. Две најзначајније вредности преко чијег понашања су математичари покушавали да дају одговор на то питање су Гаусова и средња кривина.

Историјски гледано, један од првих математичара који се бавио питањем закривљености површи је Ојлер<sup>1</sup> још у 18. веку. Велики напредак на овом пољу постиже Гаус<sup>2</sup> век касније, где практично засађује клицу диференцијалне геометрије какву данас знамо. Својом *Величанственом теоремом* доказаном 1827. године, установљава да је Гаусова кривина унутрашње својство површи, тј. да се чува при изометријама, што даје један врло ефикасан механизам за разврставање површи.

Међутим, средња кривина није унутрашње својство површи, па директно зависи од параметризације површи, односно смештања у еуклидском простору. Као таква, више се односи на материјална својства површи што је од интереса у практичним применама.

Површи константне средње кривине физички можемо описати као решење проблема минимизирања површине неког тродимензионог објекта без мењања његове запремине. Како се тај проблем може још више формализовати употребом функционала површине и запремине, ове површи пружају интересантну спрегу диференцијалне геометрије и комплексне анализе. Њихов посебан случај су минималне површи, код којих је средња кривина нула. Потрага за новим примерима минималних површи је инспирисала бројне математичаре 19. и 20. века доводећи до разних нових површи.

---

<sup>1</sup> *Leonhard Euler* (1707-1783), швајцарски математичар и астроном. Један од најзначајнијих математичара 18. века. Поред многих достигнућа, сматра се и оцем теорије графова.

<sup>2</sup> *Johann Carl Friedrich Gauss* (1777-1855), немачки математичар и физичар. Сматра се једним од најутутицајнијих математичара икада. Дао је немерљив допринос бројним математичким дисциплинама, попут алгебре, теорије бројева и Фуријеове анализе. Уз Римана се сматра оснивачем модерне диференцијалне геометрије.

Један од првих систематских радова на налажењу неке класе површи константне средње кривине је Делонијев<sup>3</sup> рад [5] из 1841. године у коме описује ротационе површи константне средње кривине. Минималну међу њима, катеноид, је открио Ојлер још 1744. године.

Хеликоидне површи су природно уопштење ротационих површи. Делонијев савременик и земљак, Бур<sup>4</sup>, се интензивно бавио њима и ротационим површима. Ослањајући се на резултат из Буровог рада [3], који чак није ни био уско везан са проблематиком површи константне средње кривине, скоро век и по касније, До Кармо<sup>5</sup> и Дајћер<sup>6</sup> у свом раду [7] дају потпуну класификацију хеликоидних површи константне средње кривине, повезујући их с Делонијевим површима и дајући њихову експлицитну параметризацију, што је с напретком технологије омогућило и њихову бољу визуелизацију.

Следи кратак преглед овог рада по главама:

- Прва глава представља рекапитулацију основних појмова из диференцијалне геометрије са акцентом на површима и њиховој локалној теорији.
- У другој глави уводимо појмове ротационих и хеликоидних површи на два начина- у контексту теорије површи, као и преко њиховог динамичког настајања. Дата је и класификација Делонијевих површи на мало другачији начин неголи у [5].
- У трећој глави је доказана Бурова теорема, класичан резултат које потврђује везу унутрашњих геометрија ротационих и хеликоидних површи.
- Четврта глава представља кључни део рада. У њој се конструише фамилија хеликоидних површи која садржи и једну ротациону површ, али чланови те фамилије нису нужно исте средње кривине, чак неким члановима и није константна уопште. Међутим, на основу те фамилије се долази до диференцијалне једначине која карактерише хеликоидне површи константне средње кривине и њеном анализом се, као у раду [7], долази до репрезентационе формуле хеликоидних површи константне средње кривине.
- У петој глави проверавамо да ли је могуће динамички генерисати неке хеликоидне површи константне средње кривине по узору на оригиналну конструкцију Делонијевих површи.
- Шеста глава представља кратку сумацију свих закључака до којих се у раду дошло.

<sup>3</sup> Charles – Eugene Delaunay (1816-1872), француски астроном и математичар.

<sup>4</sup> Jacques Edmond Emile Bour (1832-1866), француски математичар и инжењер. Познат по свом раду на теорији минималних површи од којих једна и носи његово име.

<sup>5</sup> Manfredo Perdigao do Carmo (1928-2018), бразилски математичар. Дао велики допринос у области диференцијалне геометрије

<sup>6</sup> Marcos Dajczer (1948-), бразилски математичар, аргентинског порекла. До Кармов студент и сарадник.



У раду се, поред пар слика преузетих с наведених извора, налазе и бројне слике које су креиране у програмима *Mathematica* и *GeoGebra* у случају тродимензионих слика, као и у програму *Desmos* у случају дводимензионих. Кодови слика нису унети у рад због растерећења текста.

---

Увод у локалну теорију површи

---

У овој глави је дата рекапитулација основних појмова и тврђења локалне теорије површи. Из практичних разлога, многи битни појмови нису споменути, док су неки мање формално објашњени. Циљ овог поглавља је да се уведу појмови неопходни за даљи ток рада без одласка у неке дубље воде диференцијалне геометрије.

### 1.1 Основни појмови

**Дефиниција 1.1.** Нека је  $\Omega$  област<sup>1</sup> у  $\mathbf{R}^2$ . **Параметризована регуларна елементарна површ класе  $\mathbf{C}^k$**  (краће регуларна инјективна закрпа<sup>2</sup>) је "1-1" пресликавање  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  класе  $\mathbf{C}^k$  такво да су вектори  $\frac{\partial r}{\partial u}(u, v)$  и  $\frac{\partial r}{\partial v}(u, v)$  линеарно независни за сваку тачку  $(u, v) \in \Omega$ <sup>3</sup>.

У овом раду ће, сем када је другачије наглашено,  $k$  бити  $+\infty$ , и таква параметризована регуларна елементарна површ ће бити **глатка**. Од сада па надаље у раду ћемо термин површ користити за глатке параметризоване регуларне елементарне површи, сем у случајевима када се захтева општија дефиниција. Пресликавање  $r$  из дефиниције 1.1 има веома лепо својство да је дифеоморфизам до на слику, те ћемо саму површ доживљавати као скуп слика  $r(\Omega)$ , док ћемо пресликавање

$$r(u, v) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega$$

звати **параметризацијом површи**.

Лако се доказује да су следећи услови су еквивалентни:

---

<sup>1</sup> отворен и повезан скуп

<sup>2</sup> енг. *patch*

<sup>3</sup> чиме се у свакој тачки  $r(u, v)$  површи обезбеђује егзистенција тангентне равни, чији је јединични вектор нормале  $\frac{r'_u \times r'_v}{\|r'_u \times r'_v\|}$

1. Вектори  $r_u(u_0, v_0)$  и  $r_v(u_0, v_0)$  су линеарно независни.
2.  $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$ .

3. Ранг Јакобијеве матрице  $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$  у тачки  $(u_0, v_0)$  је 2.

Глатко пресликавање  $r$  које испуњава ове услове се у литератури назива и **имерзија**.

Уочљиво је размимоилажење геометријске интуиције појма површи и појма површи као скупа слика  $r(\Omega)$ . Најочигледнији пример је да јединична сфера  $S^1$ , као компактан скуп, не испуњава услове дефиниције 1.1 али се може покрити са коначно много скупова слика параметризација, што оправдава термин глатка регуларна инјективна закрпа као алтернативно име за површ.

Претходно разматрање нас доводи до следеће дефиниције:

**Дефиниција 1.2.**  $n$ -димензиона тополошка многострукост  $M$  је Хаусдорфов тополошки простор са пребројивом базом, такав да за сваку тачку  $p \in M$  постоји њена околина<sup>4</sup>  $U(p)$  и хомеоморфизам  $\phi : U(p) \rightarrow V$ , где је  $V$  неки отворен скуп  $n$ -димензионог еуклидског простора. Уређени пар  $(U(p), \phi)$  је **локална карта многострукости  $M$** , док је  $\phi^{-1}$  њена **локална параметризација**.

Скуп локалних карата  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$  многострукости  $M$  такав да је  $M = \cup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$  називамо **атлас многострукости  $M$** . Обазирјући се на то да се карте атласа лепо преклапају на својим пресецима долазимо до следеће дефиниције:

**Дефиниција 1.3.** Нека је  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$  атлас многострукости  $M$  такав да је за сваке његове две карте  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  и  $(U_\beta, \phi_\beta)$  тзв. **функција прелаза**

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} |_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

гладак дифеоморфизам. Тада је  $\mathcal{A}$  **гладак атлас многострукости  $M$** .

Унија два атласа јесте атлас, међутим унија два глатка атласа нужно не мора бити гладак атлас. На скупу глатких атласа многострукости  $M$  можемо дефинисати бинарну релацију  $\sim$  на следећи начин: Нека су  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  глатки атласи многострукости  $M$ .

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \text{ је гладак атлас многострукости } M.$$

Непосредно се показује да је  $\sim$  једна релација еквиваленције на скупу глатких атласа многострукости  $M$ , чија класа представља максимални гладак атлас на многострукости  $M$ . **Глатка многострукост  $M$**  је тополошка многострукост снабдевена једним таквим атласом.

<sup>4</sup>неки отворен базни скуп који ту тачку садржи

Сада видимо да појму површи који одговара геометријској интуицији најбоље одговара појам глатке дводимензионе многострукости и да површ у смислу дефиниције 1.1 представља баш оно што њено алтернативно име назначавача: једну од закрпа које су неопходне да би се у потпуности покрила површ која одговара класичној геометријској визуелизацији. Но како је за главни део овог рада и више него довољна локална теорија површи, увек ће нам реч површ бити резервисана за појам дефинисан дефиницијом 1.1, сем ако разматрање захтева општији контекст.

Како су површи одређене скупом слика њихових имерзија, желимо да знамо конкретно када су две површи једнаке. Нека су површи  $M$  и  $N$  дате параметризацијама  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^3$ , респективно и нека важи да је  $r_1(\Omega) = r_2(\Pi)$ . Тада постоји гладак дифеоморфизам  $\phi : \Pi \rightarrow \Omega$  такав да је  $r_2 = r_1 \circ \phi$  који називамо **репараметризација површи  $N$** . Јасно тада је  $r_2(\Pi) = r_2(\phi^{-1}(\Omega))$ , па како је  $r_2 \circ \phi^{-1}$  дифеоморфизам, њиме је сада  $N$  параметризована параметрима из  $\Omega$ , те је термин репараметризација оправдан.<sup>5</sup>

Фиксирањем параметара  $u$  и  $v$ , респективно, добијамо на површи  **$v$ -параметарске и  $u$ -параметарске криве**.

**Дефиниција 1.4. Тангентни вектор  $X$  на површ  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  у тачки  $P$**  представља почетну брзину неке криве на површи која почиње у тачки  $P$ , тј. постоји крива  $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$  таква да је  $\alpha(0) = P$  и  $\alpha'(0) = X$ .

Скуп тангентних вектора на површ  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  у  $P = r(u_0, v_0)$ , укључујући нула-вектор, чини један дводимензиони реалан векторски простор који називамо **тангентни простор површи  $r$  у тачки  $P$**  (у ознаци  $T_P(r)$ ). Једну базу тог простора чине

$$\{r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0)\}.$$

Како је  $T_P(r)$  један реалан дводимензиони векторски простор, тангентни простор површи у тачки наслеђује једно битно својство од  $\mathbf{R}^2$  коме је изоморфан, а то је постојање скаларног производа. Одатле је оправдана следећа конструкција:

Нека је  $w \in T_P(r)$  произвољан тангентни вектор у тачки  $P$ . Тада постоје диференцијабилне криве  $u, v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}^3$  такве да је  $P = r(u(0), v(0))$  и  $w = u'(0)r_u + v'(0)r_v$ . Рестрикцијом стандардног скаларног производа са  $\mathbf{R}^2$  на  $T_P(r)$  коректно је дефинисана следећа квадратна форма:

$$I_P(w) = \langle w, w \rangle_P$$

коју називамо **прва фундаментална форма површи  $r$  у  $P$** . Желимо наћи матрицу те квадратне форме у стандардној бази

<sup>5</sup> Потпуно аналогно би се у овој ситуацији и  $M$  могла репараметризовати параметрима из  $\Pi$ .

векторског простора  $T_P(r)$ , те користећи билинеарност стандардног скаларног производа добијамо:

$$\begin{aligned} I_P(w) &= \langle w, w \rangle_P = \langle u'(0)r_u + v'(0)r_v, u'(0)r_u + v'(0)r_v \rangle_P \\ &= (u'(0))^2 \langle r_u, r_u \rangle_P + 2u'(0)v'(0) \langle r_u, r_v \rangle_P + (v'(0))^2 \langle r_v, r_v \rangle_P. \end{aligned}$$

Увођењем коефицијената

$$E := \langle r_u, r_u \rangle_P \quad F := \langle r_u, r_v \rangle_P \quad G := \langle r_v, r_v \rangle_P \quad (1.1)$$

видимо да се прва фундаментална форма може записати и као

$$I_P(w) = E(u'(0))^2 + 2Fu'(0)v'(0) + G(v'(0))^2.$$

На основу чињенице да су у свакој тачки  $P$  површи  $r$  вектори  $r_u$  и  $r_v$  линеарно независни, видимо да у свакој тачки површи важи да је  $EG - F^2 > 0$  као детерминанта Грамове<sup>6</sup> матрице линеарно независних вектора

$$\begin{bmatrix} \langle r_u, r_u \rangle_P & \langle r_u, r_v \rangle_P \\ \langle r_v, r_u \rangle_P & \langle r_v, r_v \rangle_P \end{bmatrix}$$

што уз то да је  $E > 0$ , по Силвестеровом<sup>7</sup> критеријуму, даје позитивну дефинитност прве фундаменталне форме површи  $r$  у свакој тачки. Машинерија линеарне алгебре нам на основу позитивности прве фундаменталне форме сада уистину обезбеђује скаларни производ на тангентном простору у свакој тачки површи, те ако су дата два тангентна вектора на површ својим координатама у стандардној бази за  $T_P(r)$   $u = (u_1, u_2)$  и  $v = (v_1, v_2)$ , онда је коректно дефинисан њихов скаларни производ са:

$$\langle u, v \rangle := I(u, v) = [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Коефицијенте  $E$ ,  $F$  и  $G$  у литератури називамо и метричким коефицијентима површи (или коефицијентима метричког тензора). Тај назив је веродостојан јер преко тих коефицијената можемо рачунати дужине тангентних вектора на површ<sup>8</sup> као и углове између њих:

$$(\forall u, v \in T_P(r)) \quad \|u\| = \sqrt{I(u, u)} \quad \cos \angle(u, v) = \frac{I(u, v)}{\sqrt{I(u, u)}\sqrt{I(v, v)}}.$$

<sup>6</sup> *Jorgen Pedersen Gram* (1850-1916), чувени дански математичар. Оставио значајан траг на пољу теорије бројева.

<sup>7</sup> *James Joseph Sylvester* (1814-1897), енглески математичар. Дао битан допринос у теорији бројева, комбинаторици и теорији матрица. Сковао многе битне математичке изразе, попут матрице и дискриминанте.

<sup>8</sup> а тиме и дужине кривих које леже на површи

**Пример 1.5.** Површ параметризовану са

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad (u, v) \in (-R, R) \times (0, 2\pi) \quad (1.2)$$

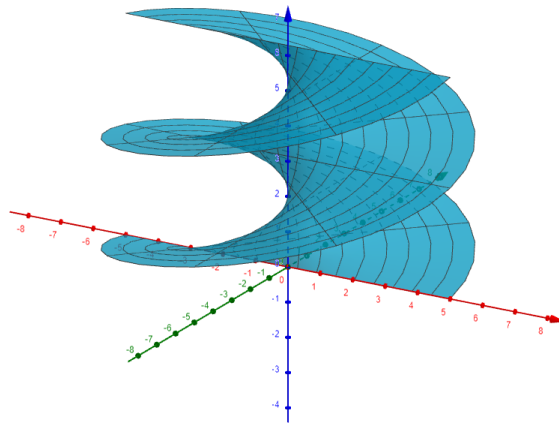
називамо **хеликоид**. Његове  $v$ -параметарске криве хеликси, а  $u$ -параметарске криве праве.

Како је  $r_u = (\cos v, \sin v, 0)$  и  $r_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$ , добијамо да су коефицијенти прве фундаменталне форме хеликоида

$$E = 1 \quad F = 0 \quad G = u^2 + 1,$$

тј. да је прва фундаментална форма хеликоида

$$du^2 + (u^2 + 1)dv^2. \quad (1.3)$$



Слика 1.1: Хеликоид за  $R = 5$

**Пример 1.6.** Катеноид је површ параметризована са

$$r(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad (u, v) \in (-R, R) \times (0, 2\pi). \quad (1.4)$$

Како је

$$r_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)$$

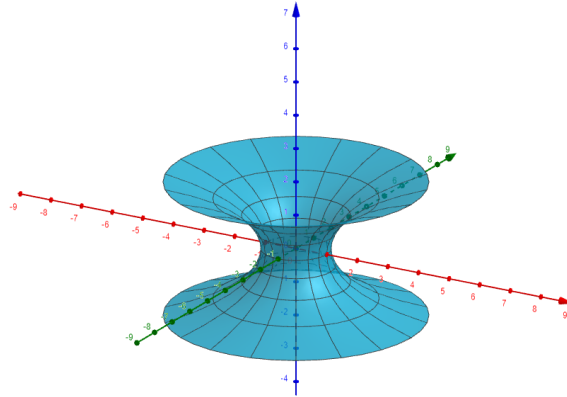
$$r_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0),$$

то су коефицијенти прве фундаменталне форме катеноида

$$E = \cosh^2(u) \quad F = 0 \quad G = \cosh^2(u),$$

односно његова прва фундаментална форма је:

$$\cosh^2(u)(du^2 + dv^2). \quad (1.5)$$

Слика 1.2: Катеноид за  $R = 2$ 

Како смо површи дефинисали као пресликавања из области у равни у еуклидски простор  $\mathbf{R}^3$ , да бисмо добили пресликавање између површи, морамо прво задати пресликавање између области где су њихови параметри дефинисани:

**Дефиниција 1.7.** Нека су површи  $M$  и  $N$  дате параметризацијама  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^3$ , респективно. **Диференцијабилно пресликавање**  $f : M \rightarrow N$  је пресликавање индуковано дифеоморфизмом  $F : \Omega \rightarrow \Pi$ , тј. пресликавање дефинисано тако да

$$(\forall P = r_1(u, v) \in M) \quad f(P) := r_2(F(u, v)).$$

**Дефиниција 1.8.** **Изометрија површи**  $M$  и  $N$ , датих својим параметризацијама  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^3$ , респективно, је дифеоморфизам који чува дужине кривих, односно пресликавање  $f : M \rightarrow N$  такво да за сваку криву  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  важи

$$\|\alpha(t)\| = \|f(\alpha(t))\|.$$

Уколико такво пресликавање постоји, кажемо да су **површи**  $M$  и  $N$  **изометричне**.

**Дефиниција 1.9.** **Локална изометрија површи**  $M$  и  $N$  је локални дифеоморфизам  $f : M \rightarrow N$  који чува дужине кривих. Уколико такво пресликавање постоји, кажемо да су **површи**  $M$  и  $N$  **локално изометричне**.

Користан начин за проверавање постојања локалне изометрије између површи дат је следећим тврђењем:

**Лема 1.10.** Површи  $M$  и  $N$  су локално изометричне акко постоје њихове параметризације  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ , где  $r_1(\Omega) = M$  и  $r_2(\Omega) = N$  тако да имају исте прве фундаменталне форме.

*Доказ.* ( $\Leftarrow$ ) Нека су  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  параметризације површи  $M$  и  $N$  такве да им је прва фундаментална форма иста. За пресликавање између области параметара узимамо  $F := \text{id}_\Omega$  и дефинишемо  $f : M \rightarrow N$  са

$$(\forall r_1(u, v) \in M) \quad f(r_1(u, v)) := r_2(u, v).$$

$f$  је очито локални дифеоморфизам и како за сваку криву на  $M$  облика  $\alpha(t) = r_1(u(t), v(t))$  важи

$$f(\alpha(t)) = f(r_1(u(t), v(t))) = r_2(u(t), v(t)),$$

из једнакости првих фундаменталних форми за  $r_1$  и  $r_2$  закључујемо да ће  $\alpha(t)$  и  $f(\alpha(t))$  имати исте дужине.

( $\Rightarrow$ ) Нека су површи  $M$  и  $N$  локално изометричне, преко локалног дифеоморфизма  $f : M \rightarrow N$  индукованог дифеоморфизмом  $F : \Omega \rightarrow \Pi$ , и нека су дате параметризацијама  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Прво желимо да параметризујемо обе површи истим параметрима, па можемо репараметризовати  $N$ :

$$(\forall (\bar{u}, \bar{v}) \in \Pi)(\exists (u, v) \in \Omega) \quad r_2(\bar{u}, \bar{v}) = r_2(F(u, v)).$$

За произвољну криву  $\alpha(t) = r_1(u(t), v(t))$  на површи  $M$  видимо да је њена слика локалном изометријом  $f$  заправо

$$f(\alpha(t)) = r_2 \circ F(u(t), v(t)).$$

Ако су коефицијенти прве фундаменталне форме површи  $M$  при параметризацији  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и површи  $N$  при параметризацији  $r_2 \circ F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$   $E_1, F_1, G_1$ , односно  $E_2, F_2, G_2$ , користећи да је  $f$  локална изометрија имамо да је

$$E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2 = E_2(u')^2 + 2F_2u'v' + G_2(v')^2. \quad (1.6)$$

Примењујући (1.6) на  $u$ -параметарске и  $v$ -параметарске криве редом добијамо да је  $E_1 = E_2$  и  $G_1 = G_2$ , док применом (1.6) на криву  $(u(t), v(t)) = (t+A, t+B)$  за одговарајуће константе  $A$  и  $B$ , добијамо и да је  $F_1 = F_2$ , те тврђење важи.  $\square$

Изометричне и локално изометричне површи имају исту унутрашњу геометрију. Будући да је тематика овог рада везана за локалну теорију површи, од сада ћемо под изометријама подразумевати локалне изометрије, сем ако се не нагласи другачије.

**Пример 1.11.** Посматрајмо хеликоид и катеноид дефинисане у 1.5 и 1.6 (односно, њихове делове):

$$\begin{aligned} r_1(u, v) &:= (u \cos v, u \sin v, v), \\ & \quad (u, v) \in (-1, 1) \times (0, 2\pi) \\ r_2(\bar{u}, \bar{v}) &:= (\cosh \bar{u} \cos \bar{v}, \cosh \bar{u} \sin \bar{v}, \bar{u}), \\ & \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in (\text{arsinh}(-1), \text{arsinh} 1) \times (0, 2\pi). \end{aligned}$$



Ако репараметризујемо катеноид истим параметрима као и хеликод, односно увођењем координатне трансформације

$$(\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow (\underbrace{\sinh \bar{u}}_u, \underbrace{\bar{v}}_v)$$

његова параметризација постаје

$$r_2(u, v) = (\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \sin v, \operatorname{arsinh} u), \quad (u, v) \in (-1, 1) \times (0, 2\pi). \quad (1.7)$$

Како је

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_2}{\partial u} &= \left( \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cos v, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \sin v, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right) \\ \frac{\partial r_2}{\partial v} &= \left( -\sqrt{1+u^2} \sin v, \sqrt{1+u^2} \cos v, 0 \right), \end{aligned}$$

видимо да су коефицијенти прве фундаменталне форме катеноида након репараметризације  $E = 1$ ,  $F = 0$  и  $G = 1 + u^2$ , те су по 1.10 катеноид и хеликод изометрични.

Пресликавање које испуњава мало слабији услов од изометрија, тј. да чува углове између кривих дефинисано је на следећи начин:

**Дефиниција 1.12. (Локално) Конформно пресликавање површи  $M$  и  $N$ ,** датих својим параметризацијама  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^3$ , респективно, је (локални) дифеоморфизам који чува углове између кривих, односно пресликавање  $f : M \rightarrow N$  такво да за сваке две регуларне криве  $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  такве да је  $\alpha(0) = \beta(0) = P \in r_1(\Omega)$  важи да је

$$\angle(\alpha'(0), \beta'(0)) = \angle((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)). \quad (1.8)$$

Уколико такво  $f$  постоји кажемо да су површи  $M$  и  $N$  (локално) **конформне**.

И код конформних пресликавања постоји ефективан начин установљавања њихове евентуалне егзистенције међу површима параметризованим истим параметрима:

**Лема 1.13.** Површи  $M$  и  $N$  су локално конформне акко постоје њихове параметризације  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ , где  $r_1(\Omega) = M$  и  $r_2(\Omega) = N$  тако да су им **метрике конформно еквивалентне**, односно да постоји не-нула диференцијабилна функција  $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  таква да, ако су  $E_1, F_1$  и  $G_1$ , односно  $E_2, F_2$  и  $G_2$ , коефицијенти прве фундаменталне форме површи  $M$ , односно  $N$ , респективно, за коју важи

$$E_2 = \lambda^2(u, v)E_1 \quad F_2 = \lambda^2(u, v)F_1 \quad G_2 = \lambda^2(u, v)G_1 \quad .$$

Доказ. ( $\Leftarrow$ ) Нека су  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  параметризације површи  $M$  и  $N$  такве да су им метрике конформно еквивалентне. За пресликавање између области параметара узимамо  $F := \text{id}_\Omega$  и дефинишемо  $f : M \rightarrow N$  са

$$(\forall r_1(u, v) \in M) \quad f(r_1(u, v)) := r_2(u, v).$$

$f$  је очито локални дифеоморфизам. Нека је  $P = r_1(u, v)$  произвољна тачка површи  $M$  и нека су  $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow r_1(\Omega)$  произвољне регуларне криве за које је  $\alpha(0) = \beta(0) = P$ . Тада постоје диференцијабилне функције  $u_1, v_1, u_2, v_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}$  такве да је  $\alpha(t) = r_1(u_1(t), v_1(t))$  и  $\beta(t) = r_1(u_2(t), v_2(t))$ . Сада директним рачуном добијамо:

$$\begin{aligned} & \cos \angle((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)) \\ &= \cos \angle \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r_2(u_1(t), v_1(t)), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r_2(u_2(t), v_2(t)) \right) \\ &= \frac{\lambda^2 (Eu'_1(0)u'_2(0) + Fu'_1(0)v'_2(0) + Fu'_2(0)v'_1(0) + Gv'_1(0)v'_2(0))}{\sqrt{\lambda^2 I_M(u'_1(0), v'_1(0))} \sqrt{\lambda^2 I_M(u'_2(0), v'_2(0))}} \\ &= \frac{I_M((u'_1(0), v'_1(0)), (u'_2(0), v'_2(0)))}{\sqrt{I_M(u'_1(0), v'_1(0))} \sqrt{I_M(u'_2(0), v'_2(0))}} \\ &= \angle(\alpha'(0), \beta'(0)). \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) Нека су површи  $M$  и  $N$  дате параметризацијама  $r_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и  $r_2 : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^3$  локално конформне преко локалног дифеоморфизма  $f : M \rightarrow N$  индукованог дифеоморфизмом  $F : \Omega \rightarrow \Pi$ . Идентично као у доказу 1.10, параметризујемо обе површи истим параметрима и можемо сматрати да су обе површи параметризоване параметрима из  $\Omega$ . За произвољне криве  $\alpha(t) = r_1(u_1(t), v_1(t))$  и  $\beta(t) = r_1(u_2(t), v_2(t))$  на површи  $M$  такве да је  $\alpha(0) = \beta(0) = P \in M$ , због локалне конформности  $f$  важи:

$$\cos \angle(\alpha'(0), \beta'(0)) = \cos \angle((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)), \quad (1.9)$$

што нам даје једнакост:

$$\begin{aligned} & \frac{I_N((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0))}{\sqrt{I_N((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \alpha)'(0))} \sqrt{I_N((f \circ \beta)'(0), (f \circ \beta)'(0))}} \\ &= \frac{I_M(\alpha'(0), \beta'(0))}{\sqrt{I_M(\alpha'(0), \alpha'(0))} \sqrt{I_M(\beta'(0), \beta'(0))}}. \end{aligned}$$

Посматрајмо канонску ортонормирану базу  $\{e_1, e_2\}$  простора  $T_p M$ . Тада имамо регуларне криве  $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  такве да је  $\alpha(0) = \beta(0) = P$  и  $\alpha'(0) = e_1$  и  $\beta'(0) = e_2$ . Будући да је пресликавање  $f$  конформно, то ће вектори  $(f \circ \alpha)'(0)$  и  $(f \circ \beta)'(0)$  бити ортогонални у  $T_{f(p)} N$ .<sup>9</sup> Означимо коефицијенте прве фундаменталне форме на  $M$  и  $N$  са  $E_1, F_1$  и  $G_1$ , односно са  $E_2, F_2$  и  $G_2$ , респективно. Нека је  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  произвољан. Посматрајмо векторе  $v_1, v_2 \in T_p(r)$  дефинисане са:

$$v_1 := e_1 \quad v_2 := \cos \phi e_1 + \sin \phi e_2.$$

Уведимо следеће ознаке:

$$A := I_N((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \alpha)'(0))$$

$$B := I_N((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0))$$

$$C := I_N((f \circ \beta)'(0), (f \circ \beta)'(0))$$

Применом (1.9) на векторе  $v_1$  и  $v_2$  добијамо да је:

$$\cos \phi = \frac{A \cos \phi + B \sin \phi}{\sqrt{A^2 \cos^2 \phi + 2 \cos \phi \sin \phi A B + \sin^2 \phi A C}} \quad (1.10)$$

Заменом  $\phi = \frac{\pi}{2}$  у (1.10) добијамо да је  $B = 0$ , што смо, због конформности  $f$ , већ и знали. Но, сада (1.10) постаје:

$$\sqrt{A} \cos \phi = \cos \phi \sqrt{A \cos^2 \phi + C \sin^2 \phi},$$

што након сређивања и користећи чињеницу да је сада  $\phi \neq \frac{\pi}{2}$  даје:

$$A = A \cos^2 \phi + C \sin^2 \phi. \quad (1.11)$$

Закључујемо да је  $A = C$ , односно да је

$$I_N((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \alpha)'(0)) = I_N((f \circ \beta)'(0), (f \circ \beta)'(0)), \quad (1.12)$$

Закључили смо да је :

$$AI_M(e_1, e_1) = I_N((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \alpha)'(0))$$

$$AI_M(e_1, e_2) = I_N((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0))$$

$$AI_M(e_2, e_2) = I_N((f \circ \beta)'(0), (f \circ \beta)'(0)),$$

те ће по билинеарности прве фундаменталне форме важити и овај смер тврђења.  $\square$

## 1.2 Гаусово пресликавање. Друга фундаменална форма

На регуларној површи у свакој тачки имамо коректно дефинисану тангентну раван, односно одабир јединичног вектора нормале. Тиме је дефинисано следеће пресликавање:

<sup>9</sup> Али не нужно ортонормирани!

**Дефиниција 1.14.** Нека је површ  $M$  дата својом параметризацијом  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Пресликавање  $n : M \rightarrow S^2$  дефинисано са

$$(\forall p = r(u_0, v_0) \in M) \quad n(p) := \frac{r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)}{\|r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)\|}$$

зовемо **Гаусово пресликавање површи  $M$** .

**Напомена.** Јасно је да Гаусово пресликавање може бити дефинисано и на регуларним елементарним површима које нужно нису глатке, већ само регуларне.

Гаусово пресликавање је диференцијабилно, те је коректно дефинисан његов диференцијал  $dn_p : T_p M \rightarrow T_{n(p)} S^2$ , који због идентификације  $T_p M$  и  $T_{n(p)} S^2$  са  $\mathbf{R}^2$  можемо доживљавати као

$$dn_p : T_p M \rightarrow T_p M.$$

Како су елементи тангентног простора  $T_p M$  почетне брзине диференцијабилних кривих на  $M$  са почетком у  $p$ , то је  $dn_p$  дефинисано природно као почетна брзина добијене криве на сфери  $S^2$ :

$$(\forall \alpha'(0) \in T_p M) \quad dn_p(\alpha'(0)) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} n(\alpha(t)).$$

Будући да базу векторског простора  $T_p M$  чине  $\{r_u, r_v\}$ <sup>10</sup>, корисно је знати њихове слике при пресликавању  $dn_p$ . Како су  $r_u$  и  $r_v$  почетне брзине  $u$ -параметарских, односно  $v$ -параметарских кривих, то је:

$$dn_p(r_u) = n_u \quad dn_p(r_v) = n_v.$$

**Дефиниција 1.15.** Нека је  $V$  реалан векторски простор снабдевен скаларним производом  $\langle, \rangle$ . **Линеаран оператор**  $f : V \rightarrow V$  је **симетричан** уколико важи:

$$(\forall v_1, v_2 \in V) \quad \langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle. \quad (1.13)$$

Најважније својство оператора  $dn_p$  је исказано тврђењем:

**Теорема 1.16.** Нека је површ  $M$  дата имерзијом  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Диференцијал Гаусовог пресликавања  $dn_p : T_p M \rightarrow T_p M$  је један симетричан линеарни оператор.

Доказ. Линеарност  $dn_p$  директно следи из:

$$dn_p(u'(0)r_u + v'(0)r_v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} n(r(u(t), v(t))) = u'(0)n_u + v'(0)n_v,$$

Због линеарности оператора  $dn_p$ , довољно је показати да симетричност важи на базним векторима, односно довољно је доказати да важи

$$\langle dn_p(r_u), r_v \rangle = \langle r_u, dn_p(r_v) \rangle,$$

<sup>10</sup> Наравно, мисли се на њихову вредност у  $(u_0, v_0)$ .

односно да је  $\langle n_u, r_v \rangle = \langle r_u, n_v \rangle$ .

Пошто је  $n \perp T_p M$ , то је  $\langle n, r_u \rangle = \langle n, r_v \rangle = 0$ , па диференцирањем тих једнакости добијамо:

$$0 = \langle n_u, r_v \rangle + \langle n, r_{vu} \rangle$$

$$0 = \langle n_v, r_u \rangle + \langle n, r_{uv} \rangle.$$

Одатле закључујемо да је  $\langle n_u, r_v \rangle = -\langle n, r_{vu} \rangle = \langle r_u, n_v \rangle$ , тј. да је линеарни оператор  $dn_p$  и симетричан.  $\square$

У пракси се из техничких разлога више пажње посвећује оператору  $S_p := -dn_p$ , који се назива **оператор облика површи  $M$** . Тај оператор чува информације о промени векторског поља нормала како се крећемо дуж  $M$ , па у неку руку оно што представља кривина код регуларних кривих, то представља овај оператор за површи, и даје нам информације о закривљености површи и њеном смештању у простору  $\mathbf{R}^3$ .

На основу 1.16 видимо да је  $dn_p$ , а тиме и  $S_p$  један симетричан линеарни оператор, те је коректно дефинисана следећа симетрична билинеарна форма на  $T_p M$ :

$$(\forall v, w \in T_p M) \quad II(v, w) := \langle S_p(v), w \rangle,$$

коју називамо **друга фундаментална форма површи  $M$  у  $p$** . Сада можемо лако наћи другу фундаменталну форму (тј. њене коефицијенте) у стандардној бази за  $T_p M$ :

$$\begin{aligned} II(v, v) &= \langle S_p(v), v \rangle = \langle S_p(u'r_u + v'r_v), u'r_u + v'r_v \rangle \\ &= -\langle dn_p(u'r_u + v'r_v), u'r_u + v'r_v \rangle \\ &= -\langle u'n_u + v'n_v, u'r_u + v'r_v \rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

где су коефицијенти

$$e = -\langle n_u, r_u \rangle = \langle n, r_{uu} \rangle$$

$$f = -\langle n_v, r_u \rangle = -\langle n_u, r_v \rangle = \langle n, r_{uv} \rangle$$

$$g = -\langle n_v, r_v \rangle = \langle n, r_{vv} \rangle$$

**коефицијенти друге фундаменталне форме површи  $M$  у  $p$** .

Преко коефицијената  $I$  и  $II$  фундаменталне форме површи се могу изразити деформационе формуле њеног вектора нормале, тј. важе **једначине Вајнгартена**:

$$\begin{cases} n_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2} r_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2} r_v \\ n_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2} r_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2} r_v. \end{cases} \quad (1.14)$$

**Дефиниција 1.17.** Нека је  $\alpha(t)$  регуларна крива на површи  $M$  која пролази кроз тачку  $p \in M$ ,  $\theta$  угао између вектора нормале криве и вектора  $n(p)$  и  $\kappa$  кривина криве  $\alpha(t)$ . **Нормална кривина криве  $\alpha(t)$  у тачки  $p$**  (у ознаци  $\kappa_n(p)$ ) је број  $\kappa \cos \theta$ .

Везу друге фундаменталне форме и нормалне кривине даје следеће тврђење:

**Лема 1.18.** Нека је  $\alpha(s)$  природно параметризована крива на површи  $M$  за коју важи  $\alpha(0) = p \in M$ . Тада је

$$II(\alpha'(0)) = \kappa_n(p).$$

Доказ. Посматрајмо  $n(s)$  као рестрикцију Гаусовог пресликавања на криву  $\alpha$ . Како је  $n \perp T_p M$ , то је  $\langle n, \alpha'(s) \rangle = 0$ . Диференцирањем те релације по  $s$  добијамо да је  $\langle n, \alpha''(s) \rangle + \langle n', \alpha'(s) \rangle = 0$ , тј.

$$\langle n'(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle n(s), \alpha''(s) \rangle.$$

Сада је

$$\begin{aligned} II(\alpha'(0)) &= -\langle dn_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle dn_p(u'r_u + v'r_v), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle u'n_u + v'n_v, \alpha'(0) \rangle = -\langle n'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle n(0), \alpha''(0) \rangle \qquad \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{\text{Френе-Серове формуле}} \qquad \langle n(0), \kappa(0)n(0) \rangle \\ &= \kappa(0) \|n(0)\| \|n(0)\| \cos \angle(n(0), n(0)) = \kappa_n(p). \end{aligned}$$

□

**Напомена.** За површи је битна и следећа конструкција: у произвољној тачки  $p$  површи  $M$  фиксирајмо јединични вектор  $v \in T_p M$  и посматрајмо раван разапету векторима  $v$  и вектором  $n(p)$ . Назовимо ту раван  $\pi$ . Криву  $\alpha_{p,w} := \pi \cap M$  називамо **нормалним сечењем површи  $M$  одређеним тачком  $p$  и вектором  $w$** . У околини тачке  $p$ , вектор нормале криве  $\alpha_{p,w}$  се управо поклапа са вектором  $\pm n(p)$  или  $\mathbf{0}$ , те је  $|\kappa_n(p)|$  тада заправо кривина криве  $\alpha_{p,w}$  у тачки  $p$ .

По 1.16 смо закључили да је  $dn_p$  симетричан, па је тиме и дијагонализибилан линеарни оператор, тј. постоји ортонормирана база  $\{e_1, e_2\}$  за  $T_p M$  таква да

$$dn_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$$

$$dn_p(e_2) = -\kappa_2 e_2.$$

Вредности  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  представљају максимум и минимум друге фундаменталне форме рестриковане на јединичну сферу у  $T_p M$ <sup>11</sup>, те самим тим представљају максималну и минималну вредност нормалне кривине у тачки  $p$ .

<sup>11</sup> коју чине почетне брзине природно параметризованих кривих на  $M$  кроз тачку  $p$

**Дефиниција 1.19.** Вредности  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  називају се **главне кривине у тачки  $p$** , док су вектори  $e_1$  и  $e_2$  **главни вектори у тачки  $p$** . Крива чији је вектор брзине у свакој тачки главни вектор назива се **линија кривине површи**.

Линије кривине површи карактерише следеће тврђење:

**Лема 1.20.** Нека је површ  $M$  дата параметризацијом  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  и нека је  $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$  крива на  $M$ . Тада је  $\alpha(t)$  линија кривине на  $M$  акко

$$\begin{vmatrix} -(v')^2 & u'v' & -(u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

*Доказ.* Нека је  $\alpha(t) = r(u(t), v(t))$  крива на површи  $M$  и нека су  $(u', v')$  координате њене почетне брзине  $\alpha'(0)$  у бази  $\{r_u, r_v\}$ . Како се да видети да су главне кривине решења једначине  $\det(II - \lambda I) = 0$ , где су  $I$  и  $II$  матрице прве, тј. друге фундаменталне форме површи  $M$ , то линеарни оператори  $II - \kappa_i I$  имају нетривијална језгра, па до главних вектора можемо доћи тражећи нетривијална решења следећег система једначина:

$$\begin{bmatrix} e - \kappa_i E & f - \kappa_i F \\ f - \kappa_i F & g - \kappa_i G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

што се претвара у једначине

$$(eu' + fv') - \kappa_i(Eu' + Fv') = 0$$

$$(fu' + gv') - \kappa_i(Fu' + Gv') = 0.$$

Сада закључујемо да је нетривијалност језгра оператора  $II - \kappa_i I$  еквивалентна томе да је  $(1, -\kappa_i)$  нетривијално решење система:

$$(eu' + fv')x + (Eu' + Fv')y = 0$$

$$(fu' + gv')x + (Fu' + Gv')y = 0,$$

тј. да је детерминанта тог система једнака нули, одакле се добија да важи једначина:

$$(eF - fE)u'^2 + (eG - Eg)u'v' + (fG - gF)v'^2 = 0$$

која се може записати и као:

$$\begin{vmatrix} -(v')^2 & u'v' & -(u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0,$$

одакле видимо да тврђење важи.  $\square$

Један од најстаријих резултата из теорије површи (1760.) је следеће тврђење:

**Теорема 1.21. (Ојлерова теорема)** Нека је  $\alpha(s)$  природно параметризована крива на површи  $M$  таква да  $\alpha(0) = p$  и нека су  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  главне кривине површи  $M$  у тачки  $p$ , а  $e_1$  и  $e_2$  главни вектори у  $p$ . Ако је  $\theta$  угао који заклапају  $e_1$  и  $\alpha'(0)$ , тада је

$$\kappa_n(p) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.$$

*Доказ.* Како је  $\{e_1, e_2\}$  ортонормирана база за  $T_p M$ , то су координате  $\alpha'(0)$  у тој бази  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Одатле користећи 1.18 добијамо:

$$\begin{aligned} \kappa_n(p) &= II(\alpha'(0)) = -\langle dn_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle dn_p(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2), \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= -\langle \cos \theta dn_p(e_1) + \sin \theta dn_p(e_2), \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= \langle \kappa_1 \cos \theta e_1 + \kappa_2 \sin \theta e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle \\ &= \underbrace{\hspace{10em}}_{\{e_1, e_2\} \text{ ортонормирана база}} \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

□

Оператор облика оправдава своје име и јер се њиме могу класификовати тачке површи, тј. кажемо да је тачка  $p$  површи  $M$ :

1. елиптичка, ако је  $\det(dn_p) > 0$ ;
2. хиперболичка, ако је  $\det(dn_p) < 0$ ;
3. параболичка, ако је  $\det(dn_p) = 0$  и  $dn_p \neq 0$ ;
4. планарна, ако је  $dn_p = 0$ ;
5. умбиличка, ако је  $\kappa_1 = \kappa_2$ .

### 1.3 Средња кривина. Минималне површи

На основу главних кривина површи  $M$  можемо увести две веома битне вредности:

1. **Средњу кривину површи у тачки  $p \in M$** , као њихову аритметичку средину, тј.  $H(p) := \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}$
2. **Гаусову кривину површи у тачки  $p \in M$** , као њихов прои-звод, тј.  $K(p) := \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p)$ .

Гаус је 1827. у својој величанственој теорему доказао да  $K(p)$  зависи само од унутрашње геометрије површи<sup>12</sup>, док за  $H(p)$  то не важи у општем случају, те она директно зависи од тога како је површ смештена у  $\mathbf{R}^3$ .

<sup>12</sup>тј. да зависи само од прве фундаменталне форме површи и да се чува при изометријама



Свакако је од значаја имати израз за Гаусову и средњу кривину у локалним координатама, па је корисно наћи матрицу линеарног оператора  $dn_p$  у стандардној бази  $\{r_u, r_v\}$  за  $T_p M$ <sup>13</sup>. Пошто знамо како се сликају базни вектори ( $dn_p(r_u) = n_u$  и  $dn_p(r_v) = n_v$ ), користећи Вајнгартенове једначине (1.14) добијамо да је матрица

оператора  $dn_p$  у стандардној бази једнака  $\begin{bmatrix} \frac{fF-eG}{EG-F^2} & \frac{gF-fG}{EG-F^2} \\ \frac{eF-fE}{EG-F^2} & \frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{bmatrix}$ .

Сада можемо наћи сопствене вредности матрице оператора  $dn_p$  као решења једначине:

$$\begin{vmatrix} \frac{fF-eG}{EG-F^2} - \lambda & \frac{gF-fG}{EG-F^2} \\ \frac{eF-fE}{EG-F^2} & \frac{fF-gE}{EG-F^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.15)$$

односно решења једначине

$$(EG - F^2)\lambda^2 + (gE + eG - 2fF)\lambda + eg - f^2 = 0. \quad (1.16)$$

Користећи Вијетове формуле и чињеницу да су решења једначине (1.16)  $-\kappa_1$  и  $-\kappa_2$ , добијамо изразе за Гаусову и средњу кривину у локалним координатама:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \quad (1.17)$$

**Дефиниција 1.22.** Површ  $M$  код које је у свакој тачки  $p \in M$  средња кривина  $H(p)$  једнака нули називамо **минимална површ**.

Минималне површи су специјалан случај површи код којих је средња кривина у свакој тачки константна- **СМС**<sup>14</sup> **површи**.

**Дефиниција 1.23.** Површ  $M$  код које је у свакој тачки  $p \in M$  Гаусова кривина  $K(p)$  једнака нули називамо **равна**<sup>15</sup> **површ**.

Директна последица Гаусове величанствене теореме је да све равне површи имају исту унутрашњу геометрију као еуклидска раван.

**Пример 1.24.** Сада можемо наћи средњу кривину катеноида и хеликоида из 1.6 и 1.5.

Њихови други деформациони вектори су, за катеноид:

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0) \\ r_{uv} &= (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0) \\ r_{vv} &= (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0), \end{aligned}$$

<sup>13</sup> Јер ће њене сопствене вредности управо бити  $-\kappa_1$  и  $-\kappa_2$ , а сопствене вредности линеарног оператора не зависе од одабира базе векторског простора.

<sup>14</sup> *Constant Mean Curvature*

<sup>15</sup> енг. *flat*

а за хеликоид:

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (0, 0, 0) \\ r_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ r_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0). \end{aligned}$$

Директан рачун нам даје да је Гаусово пресликање катеноида

$$n(u, v) = \left( -\frac{\cos v}{\cosh u}, -\frac{\sin v}{\cosh u}, \frac{\sinh u}{\cosh u} \right),$$

као и да је Гаусово пресликавање хеликоида

$$n(u, v) = \left( \frac{\sin v}{\sqrt{u^2 + 1}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{u^2 + 1}}, \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \right).$$

На основу досасњих резултата налазимо да су коефицијенти друге фундаменталне форме катеноида

$$\begin{aligned} e &= -\cosh^2(u) \\ f &= 0 \\ g &= \cosh^2(u), \end{aligned}$$

док су коефицијенти друге фундаменталне форме хеликоида:

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ f &= -\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ g &= 0. \end{aligned}$$

А сада, користећи (1.17), видимо да су и катеноид и хеликоид минималне површи.

**Пример 1.25.** Нека је  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  произвољан реалан број. Посматрајмо следећу једнопараметарску фамилију површи  $\phi(u, v; t)$ :

$$\begin{cases} x(u, v) := \sinh u \sin v \cos t + \cosh u \cos v \sin t \\ y(u, v) := -\sinh u \cos v \cos t + \cosh u \sin v \sin t \\ z(u, v) := v \cos t + u \sin t \end{cases} \quad (1.18)$$

при чему су параметри  $u$  и  $v$  у области  $(-R, R) \times (-\pi, \pi)$ . Примећујемо да за  $t = 0$  суштински добијамо хеликоид из примера 1.5, док за  $t = \frac{\pi}{2}$  заправо добијамо катеноид из примера 1.6. Строго формално, и једна и друга површ су у односу на контекст примера 1.5 и 1.6 репараметризоване и транслиране дуж  $z$ -осе. Како су

базни тангентни вектори ове фамилије

$$\begin{aligned}\phi_u &= (\cosh u \sin v \cos t + \sinh u \cos v \sin t, \\ &\quad - \cosh u \cos v \cos t + \sinh u \sin v \sin t, \sin t) \\ \phi_v &= (\sinh u \cos v \cos t - \cosh u \sin v \sin t, \\ &\quad \sinh u \sin v \cos t + \cosh u \cos v \sin t, \cos t),\end{aligned}$$

добивамо да су коефицијенти прве фундаменталне форме чланова фамилије једнаки:

$$\begin{cases} E &= \cosh^2 u \cos^2 t + \sinh^2 u \sin^2 t + \sin^2 t = \cosh^2 u \\ F &= 0 \\ G &= \sinh^2 u \cos^2 t + \cosh^2 u \sin^2 t + \cos^2 t = \cosh^2 u. \end{cases} \quad (1.19)$$

На основу 1.10 закључујемо да су сви чланови фамилије међусобно изометрични и да им прва форма не зависи од параметра  $t$ , док се лако показује да то није случај са другом фундаменталном формом, која зависи од  $t$ . Фамилијом  $\phi_t$  представљена је једна **изометрична деформација** хеликоида у катеноид.

Можемо се и играти са разним параметризацијама ових површи, рецимо баш са онима из примера 1.24, покушавајући изометрички да деформишемо катеноид у хеликоид или обратно. Међутим, пар ствари у овом примеру нису случајне: да су почетна и крајња средња кривина добијене површи биле исте (у овом случају 0), као и да је метрика чланова фамилије била конформно еквивалентна еуклидској<sup>16</sup>. Уопштење ове конструкције ће бити темељ главног резултата овог рада у 4. глави, но још смо далеко од тога.

**Напомена.** Неформално говорећи, параметар  $t$  фамилије  $\phi_t$  из 1.25 можемо третирати као време. Како време тече, тако хеликоид постепено прелази у катеноид. При тој непрекидној деформацији, због изометричности, растојања остају иста, па је могуће замислити и један знатно неформалнији пример:

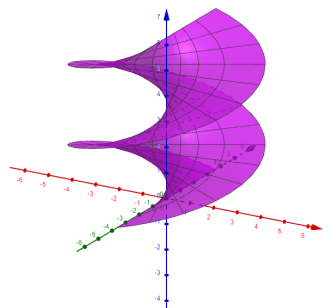
Замислимо човечуљка који живи на територији хеликоида у доба турбулентних изометричких деформација и по цео дан се шета око свога ограђеног имања, главе погнуте у земљу због лоше економске ситуације држављана хеликоида<sup>17</sup>. Ако би изашао у своју стандардну шетњу у 0 сати и са њоме завршио у  $\frac{\pi}{2}$  сати<sup>18</sup>, када би напослетку дигао главу схватио би да је, сасвим неприметно, постао држављанин катеноида. Додуше, то му у будућности главу од земље дићи неће, јер му се стање у катастарским списима није побољшало<sup>19</sup>.

<sup>16</sup> Важило је да је прва фундаментална форма сваког члана фамилије  $\cosh^2 u (du^2 + dv^2)$ , чиме по 1.13 видимо да је сваки члан фамилије конформан  $\mathcal{O}_u$  равни, односно њеном делу.

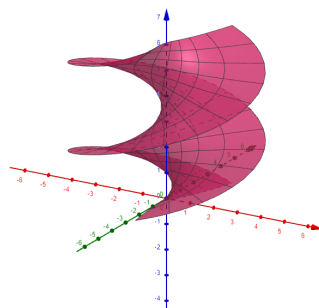
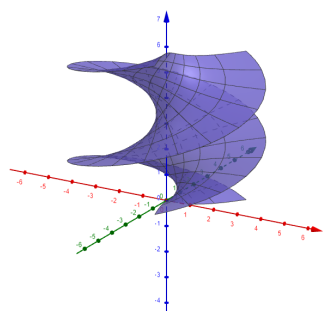
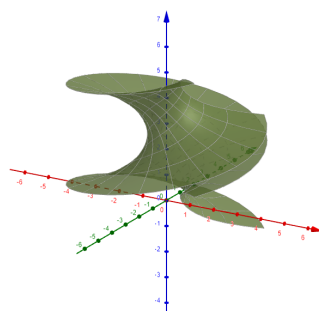
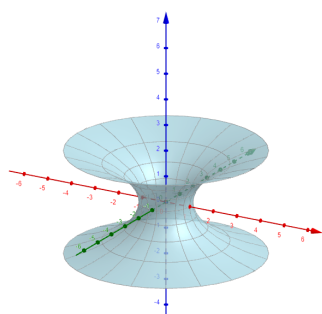
<sup>17</sup> Овај део примера ће читаоцу вероватно најтеже пасти да апстрахује.

<sup>18</sup> Очито, једна од брига становника хеликоида је и недостатак бољих мерних јединица за време.

<sup>19</sup> Али ни погоршало!



(1) Полазна станица-хеликоид

(2) Деформација у тренутку  $t = \frac{\pi}{16}$ (3) Деформација у тренутку  $t = \frac{\pi}{8}$ (4) Деформација у тренутку  $t = \frac{\pi}{4}$ 

(5) Коначна станица- катеноид

Слика 1.3: Изометричка деформација из 1.25 за  $u \in (-2, 2)$ .

## 1.4 Изотермални параметри

У теорији *СМС*, а поготову минималних површи, важно место заузимају параметри у којима је прва фундаментална форма површи конформно еквивалентна еуклидској метрици<sup>20</sup>.

**Дефиниција 1.26.** Нека је површ дата својом параметризацијом  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  тако да постоји строго позитивна функција  $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  таква да су коефицијенти прве фундаменталне форме

$$E = G = \lambda^2(u, v) \quad F = 0.$$

Тада кажемо да су параметри  $(u, v) \in \Omega$  изотермални.

У изотермалним параметрима вектори  $r_u$  и  $r_v$  су ортогонални и исте дужине ( $\lambda(u, v)$  у свакој тачки  $r(u, v)$  површи).

Преко изотермалних параметара теорија *СМС* површи се повезује са комплексном анализом, о чему говоре и следећа два тврђења:

**Теорема 1.27.** Нека је површ дата изотермалном параметризацијом  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Тада је она *СМС* површ ако је функција

$$(\forall (u, v) \in U) \quad \phi(u + iv) := \frac{e - g}{2} - if$$

аналитичка комплексна функција.

Доказ. У изотермалним параметрима једначине (1.14) постају врло једноставније:

$$\begin{cases} n_u &= -\frac{e}{\lambda^2}r_u - \frac{f}{\lambda^2}r_v \\ n_v &= -\frac{f}{\lambda^2}r_u - \frac{g}{\lambda^2}r_v \end{cases} \quad (1.20)$$

док је средња кривина површи једнака  $H = \frac{e+g}{2\lambda^2}$ . Користећи да је  $\{r_u, r_v, n\}$  база векторског простора  $\mathbf{R}^3$  имамо да је:

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \alpha_1 r_u + \beta_1 r_v + \gamma_1 n \\ r_{vv} &= \alpha_2 r_u + \beta_2 r_v + \gamma_2 n \\ r_{uv} &= \alpha_3 r_u + \beta_3 r_v + \gamma_3 n. \end{aligned}$$

Скаларним множењем добијамо да је

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\langle r_{uu}, r_u \rangle}{E} = \frac{E_u}{2\lambda^2} = \frac{\lambda_u}{\lambda} & \alpha_2 &= \frac{\langle r_{vv}, r_u \rangle}{E} = -\frac{E_u}{2\lambda^2} = -\frac{\lambda_u}{\lambda} & \alpha_3 &= \frac{\lambda_v}{\lambda} \\ \beta_1 &= \frac{\langle r_{uu}, r_v \rangle}{E} = -\frac{E_v}{2\lambda^2} = -\frac{\lambda_v}{\lambda} & \beta_2 &= \frac{\langle r_{vv}, r_v \rangle}{E} = \frac{E_v}{2\lambda^2} = \frac{\lambda_v}{\lambda} & \beta_3 &= \frac{\lambda_u}{\lambda} \\ \gamma_1 &= \langle r_{uu}, N \rangle = e & \gamma_2 &= \langle r_{vv}, N \rangle = g & \gamma_3 &= \langle r_{uv}, N \rangle = f. \end{aligned}$$

<sup>20</sup> Можемо приметити да прва фундаментална форма катеноида у примеру 1.6 управо испуњава тај услов.

Одавде смо добили да је:

$$\begin{cases} r_{uu} = \frac{\lambda_u}{\lambda} r_u - \frac{\lambda_v}{\lambda} r_v + en \\ r_{vv} = -\frac{\lambda_u}{\lambda} r_u + \frac{\lambda_v}{\lambda} r_v + gn \\ r_{uv} = \frac{\lambda_v}{\lambda} r_u + \frac{\lambda_u}{\lambda} r_v + fn. \end{cases} \quad (1.21)$$

Користећи да је:  $r_{uuv} = r_{uvu}$  и  $r_{vuv} = r_{vuv}$  добијамо једначине:

$$e_v - f_u - \frac{\lambda_v}{\lambda}(e + g) = 0 \quad f_v - g_u + \frac{\lambda_u}{\lambda}(e + g) = 0$$

из којих следе једнакости:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 H_v &= -\frac{(e+g)_v}{2} + \frac{\lambda'_v(e+g)}{\lambda} = -\frac{(e+g)_v}{2} + e_v - f_u = \frac{(e-g)_v}{2} - f_u \\ \lambda^2 H_u &= \frac{(e+g)_u}{2} - \frac{\lambda'_u(e+g)}{\lambda} = \frac{(e+g)_u}{2} + f_v - g_u = \frac{(e-g)_u}{2} + f_v. \end{aligned}$$

Сада закључујемо да је константност средње кривине посматране површи ( $H_u = H_v = \text{const}$ ) еквивалентна једначинама

$$\begin{cases} \frac{(e-g)_u}{2} = -f_v \\ \frac{(e-g)_v}{2} = f_u \end{cases}$$

што су заправо Коши<sup>21</sup>-Риманови<sup>22</sup> услови комплексне функције  $\phi(u + iv) := \frac{e-g}{2} - if$ , те тврђење следи.  $\square$

**Напомена.** Вреди приметити да и једначина главних кривина у изотермалним параметрима постаје знатно једноставнија:

$$\lambda^4 \kappa^2 - \lambda^2(e+g)\kappa + eg - f^2 = 0,$$

као и да је  $|\kappa_1 - \kappa_2| = \frac{\sqrt{\lambda^4(e+g)^2 - 4\lambda^4(eg-f^2)}}{\lambda^4} = \frac{2\sqrt{(\frac{e-g}{2})^2 + f^2}}{\lambda^2} = 2\frac{|\phi(u+iv)|}{\lambda^2}$ . Одатле видимо да је СМС површ или потпуно умбиличка или има изоловане умбиличке тачке.

**Последица 1.28.** Нека је површ дата изотермалном параметризацијом  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Тада је она минимална површ акко је  $r$  хармонијско пресликавање, тј.  $\Delta r = 0$ .

Доказ. На основу (1.21) је

$$\Delta r = r_{uu} + r_{vv} = (e+g)n. \quad (1.22)$$

<sup>21</sup> *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857), један од највећих француских математичара. Бројна фундаментална тврђења и концепти реалне и комплексне анализе носе његово име.

<sup>22</sup> *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826-1866), немачки математичар. Својим радом практично сам засновао модерну диференцијалну геометрију. Његова хипотеза до данашњих дана представља извор инспирације многим математичарима широм света.

А како је минималност површи у изотермалним параметрима еквивалентна са тиме да је  $e + g = 0$ , добијамо да ово тврђење важи.

Можемо констатовати из (1.22) да је у изотермалним параметрима  $\Delta_r \parallel n$ .  $\square$

Код минималних површи интересантна је и конструкција дата у идућој напомени.

**Напомена.** Посматрајмо површ дату као график функције две променљиве, тј.  $z = f(x, y)$  и нађимо јој средњу кривину у  $p$ . Одговарајућом изометријом можемо постићи да тачка  $p$  буде  $(0, 0, 0)$ , као и да тангентна раван у њој буде паралелна  $O_{xy}$  равни. Посматрајући параметризацију

$$r(x, y) := (x, y, f(x, y))$$

из задатих услова видимо да је

$$p = f(0, 0) \quad n(p) = (0, 0, 1) \quad f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = (0, 0).$$

А како је  $r_{xx} = (0, 0, f_{xx})$  и  $r_{yy} = (0, 0, f_{yy})$ , одатле је  $e = f_{xx}(0, 0)$  и  $g = f_{yy}(0, 0)$ , па користећи (1.17) и да је  $E = 1$ ,  $F = 0$  и  $G = 1$  добијамо израз за средњу кривину површи у тачки  $p$ :

$$H(p) = \frac{f_{xx}(0, 0) + f_{yy}(0, 0)}{2} = \frac{\Delta_f(0, 0)}{2}.$$

Сада видимо да теорија минималних површи сем веза са хармонијским функцијама има јаке везе и са теоријом елиптичких парцијалних диференцијалних једначина.

У вези са 1.28 интересантно је и следеће разматрање: Ако имамо минималну површ  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  ( $r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$ ) параметризовану изотермалним параметрима и комплексне функције дефинисане на следећи начин

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\})(\forall (u, v) \in U) \quad \phi_i(u + \mathbf{i}v) := \frac{\partial r_i}{\partial u} - \mathbf{i} \frac{\partial r_i}{\partial v},$$

за њих добијамо да важи:

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \left( \frac{\partial r_1}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_2}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_3}{\partial u} \right)^2 - \left( \left( \frac{\partial r_1}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_2}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_3}{\partial v} \right)^2 \right) \\ &\quad - 2\mathbf{i} \left( \frac{\partial r_1}{\partial u} \frac{\partial r_1}{\partial v} + \frac{\partial r_2}{\partial u} \frac{\partial r_2}{\partial v} + \frac{\partial r_3}{\partial u} \frac{\partial r_3}{\partial v} \right) = \lambda^2 - \lambda^2 - 2\mathbf{i}0 = 0. \end{aligned}$$

Како је, по 1.28  $r$  хармонијска функција, то важи:

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\}) \quad \frac{\partial^2 r_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r_i}{\partial v^2} = 0,$$

што је заправо један од два Коши-Риманова услова функција  $\phi_i$ , а како је и други тривијално испуњен, јер важи  $\frac{\partial^2 r_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 r_i}{\partial v \partial u}$ , добијамо да су функције  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  и  $\phi_3$  холоморфне.

За функције  $\phi_i$  важи и

$$\sum_{i=1}^3 |\phi_i|^2 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_3}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_3}{\partial v}\right)^2 = 2\lambda^2 > 0.$$

Претходно разматрање се може уопштити и може се доказати (видети [13] и [14]):

**Теорема 1.29.** Нека је  $\Omega$  просто повезана област у  $\mathbf{C}$  и нека су  $\phi_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  холоморфне на  $\Omega$  такве да је  $\sum_{i=1}^3 |\phi_i|^2 \neq 0$  и  $\sum_{i=1}^3 \phi_i^2 = 0$ . Тада је пресликавањем  $r : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  ( $r = (r_1, r_2, r_3)$ ) где су функције  $r_i$  дефинисане на следећи начин:

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\}) \quad r_i(\underbrace{u + iv}_z) := \Re \left( \int_{z_0}^z \phi_i(z) dz \right),$$

дефинисана минимална површ. Претходни интеграл не зависи од пута који спаја тачке  $z_0$  и  $z$ .





---

## Хеликоидне и ротационе површи. Површи Делонија

---

У овој глави уводимо ротационе површи, а затим и њихову генерализацију у виду хеликоидних површи. За тематику овог рада је врло битна конструкција и класификација Делонијевих површи дата у 3. одељку ове главе, јер ће се оне испоставити као неизбежна станица на путу до хеликоидних *СМС* површи.

### 2.1 Ротационе површи

Ротационе површи су једна од најважнијих и најпрепознатљивијих класа површи. Неформално говорећи, до њих се долази тако што једна регуларна раванска крива ротира око праве са којом нема пресека, где се уз наметање додатних услова кривој која ротира испуњавају услови из дефиниције 1.1.

**Дефиниција 2.1.** Нека је  $\pi$  раван у еуклидском простору  $\mathbf{R}^3$ ,  $l$  права у тој равни и нека је  $\alpha(u)$  диференцијабилна крива у  $\pi$ . **Ротациона површ** је скуп тачака  $M$  који се добија ротацијом криве  $\alpha(u)$  око праве  $l$ . Праву  $l$  називамо **осом ротације површи**  $M$ , док криву  $\alpha(u)$  називамо **профилна крива површи**  $M$ .

Ради једноставнијих једначина, раван  $O_{xz}$  ћемо узети за  $\pi$ , за осу ротације  $z$ -осу, а регуларну<sup>1</sup> криву

$$\alpha(u) = (x(u), 0, z(u)) \quad (2.1)$$

за коју су  $x(u)$  и  $z(u)$  диференцијабилне функције при чему је  $x(u)$  строго позитивна<sup>2</sup>, ћемо узети за профилну криву.

---

<sup>1</sup>  $(\forall u \in (a, b)) \quad (x'(u))^2 + (z'(u))^2 \neq 0$

<sup>2</sup> Овај услов је неопходан, јер би у супротном профилна крива секла  $z$ -осу, те би у тим тачкама била нарушена регуларност површи. Код неких цртежа ће регуларност у свакој тачки бити жртвована из естетских разлога.

Примењујући матрицу ротације око  $z$ -осе за угао  $v \in (0, 2\pi)$ <sup>3</sup>

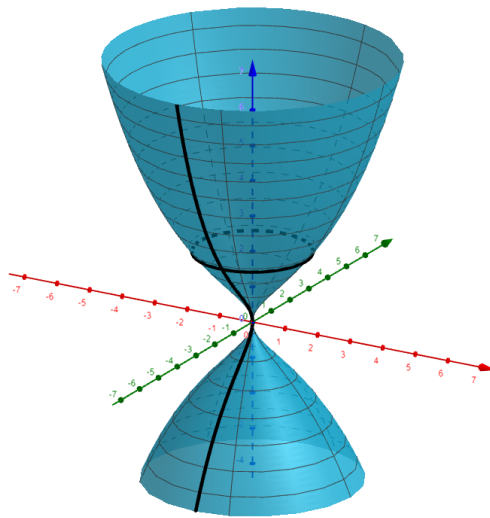
$$\begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

на криву  $(x(u), 0, z(u))$  добијамо да је параметризација ротационе површи<sup>4</sup>:

$$R(u, v) := (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)), \quad (u, v) \in (a, b) \times (0, 2\pi). \quad (2.2)$$

Што се координатних криви ротационих површи тиче, оне су:

- $u$ -параметарске криве  $(x(u) \cos v_0, x(u) \sin v_0, z(u))$ , које су заправо копије профилне криве. Њих називамо **меридијанима ротационе површи**<sup>5</sup>  $M$ .
- $v$ -параметарске криве  $(x(u_0) \cos v, x(u_0) \sin v, z(u_0))$ , које су кругови полупречника  $x(u_0)$  на висини  $z(u_0)$ . Њих називамо **паралелама ротационе површи**  $M$ .



Слика 2.1: Ротациона површ чија је профилна крива  $(\ln(1+u^2), 0, u)$ ,  $u \in (-10, 10)$ . На слици су назначени паралела  $u = 2$  и меридијан  $v = \frac{3\pi}{2}$ .

<sup>3</sup> Отворен скуп је формално неопходан због тога што је скуп параметара регуларне елементарне површи област, чиме се жртвује остварење потпуне ротације, и опет многе површи које природно доживљавамо као ротационе то у смислу наше дефиниције неће бити. И у овом случају наша дефиниција ротационе површи опет само "крпи" делове ротационих површи како смо навикли да их визуелизујемо, мада ни то у раду неће чинити неку превелику препреку.

<sup>4</sup> Ову параметризацију ротационе површи називамо стандардном.

<sup>5</sup> Очито, нашем дефиницијом ротационе површи и параметризацијом (2.2) жртвован је један меридијан из наше класичне представе о ротационим површима.

Следећим тврђењем добијамо све битне податке о метричком и тензору облика ротационе површи.

**Тврђење 2.2.** Нека је ротациона површ дата својом профилном кривом  $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))$ ,  $u \in (a, b)$  и стандардном параметризацијом (2.2). Тада су њени коефицијенти прве и друге фундаменталне форме:

$$\begin{cases} E &= (x'(u))^2 + (z'(u))^2, \quad F = 0, \quad G = (x(u))^2 \\ e &= \frac{-x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u)}{\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{x(u)z'(u)}{\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}}, \end{cases}$$

док је њено Гаусово пресликавање

$$n = \frac{1}{\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}} (-z'(u) \cos v, -z'(u) \sin v, x'(u)).$$

Средња и Гаусова кривина, као и њене главне кривине су:

$$\begin{cases} K &= \frac{z'(u)(-x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u))}{x(u)(x'(u)^2 + z'(u)^2)^2} \\ H &= \frac{z'(u)(x'(u)^2 + z'(u)^2) + x(u)(-x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u))}{2x(u)(x'(u)^2 + z'(u)^2)^{3/2}} \\ \kappa_1 &= \frac{-x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u)}{(x'(u)^2 + z'(u)^2)^{3/2}} \\ \kappa_2 &= \frac{z'(u)}{x(u)\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}}. \end{cases}$$

Доказ. Директним рачуном добијамо да је

$$R_u = (x'(u) \cos v, x'(u) \sin v, z'(u))$$

$$R_v = (-x(u) \sin v, x(u) \cos v, 0),$$

одакле су коефицијенти прве фундаменталне форме:

$$E = (x'(u))^2 + (z'(u))^2, \quad F = 0, \quad G = (x(u))^2.$$

Како је

$$\begin{aligned} R_u \times R_v &= x(u) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(u) \cos v & x'(u) \sin v & z'(u) \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= x(u) (-z'(u) \cos v, -z'(u) \sin v, x'(u)), \end{aligned}$$

добијамо да је  $\|R_u \times R_v\| = x(u)\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}$ , па је Гаусово пресликавање ротационе површи једнако

$$n = \frac{1}{\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}}(-z'(u) \cos v, -z'(u) \sin v, x'(u)).^6$$

Док на основу деформационих вектора

$$R_{uu} = (x''(u) \cos v, x''(u) \sin v, z''(u))$$

$$R_{uv} = (-x'(u) \sin v, x'(u) \cos v, 0)$$

$$R_{vv} = (-x(u) \cos v, -x(u) \sin v, 0)$$

добијамо и коефицијенте друге фундаменталне форме:

$$e = \frac{-x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u)}{\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{x(u)z'(u)}{\sqrt{(x'(u))^2 + (z'(u))^2}}.$$

Пошто знамо коефицијенте прве и друге фундаменталне форме, по (1.17) можемо израчунати Гаусову и средњу кривину:

$$K = \frac{z'(u)(-x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u))}{x(u)(x'(u)^2 + z'(u)^2)^2}$$

$$H = \frac{z'(u)(x'(u)^2 + z'(u)^2) + x(u)(-x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u))}{2x(u)(x'(u)^2 + z'(u)^2)^{3/2}}.$$

Како је  $f = F = 0$ , једначина (1.15) постаје знатно једноставнија и добијамо да су главне кривине

$$\kappa_1 = \frac{e}{E} = \frac{-x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u)}{(x'(u)^2 + z'(u)^2)^{3/2}}$$

$$\kappa_2 = \frac{g}{G} = \frac{z'(u)}{x(u)\sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

□

На основу претходног тврђења примећујемо да су Гаусова и средња кривина, главне кривине, као и коефицијенти прве и друге фундаменталне форме константни дуж паралела.

**Напомена.** Читав рачун у 2.2 постаје неупоредиво лакши ако претпоставимо да је профилна крива природно параметризована, тј. да је

$$(\forall u \in (a, b))(x'(u))^2 + (z'(u))^2 = 1. \quad (2.3)$$

<sup>6</sup>Сада видимо да је услов регуларности профилне криве заиста неопходан због егзистенције тангентне равни у свакој тачки површи, тј. због њене регуларности.

Тада су коефицијенти прве и друге фундаменталне форме:

$$E = 1 \quad F = 0 \quad G = (x(u))^2 \quad (2.4)$$

$$e = -x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u) \quad f = 0 \quad g = x(u)z'(u). \quad (2.5)$$

Гаусово пресликавање постаје

$$n = (-z'(u) \cos v, -z'(u) \sin v, x'(u)),$$

док су Гаусова и средња кривина

$$K = -\frac{x''(u)}{x(u)} \quad H = \frac{z'(u) - x(u)x''(u)z'(u) + x(u)x'(u)z''(u)}{2x(u)}. \quad (2.6)$$

Главне кривине су сада :  $\kappa_1 = -x''(u)z'(u) + x'(u)z''(u)$  и  $\kappa_2 = \frac{z'(u)}{x(u)}$ .

Битно својство ротационих површи дато је следећим тврђењем:

**Тврђење 2.3.** Меридијани и паралеле ротационе површи  $M$  су линије кривине у тачкама које нису умбиличке.

Доказ. За површ  $M$  једначина линија кривина по 1.20 постаје :

$$\begin{vmatrix} -(v')^2 & u'v' & -(u')^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = 0,$$

односно

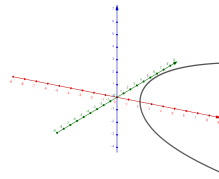
$$u'v'(Ge - Eg) = 0. \quad (2.7)$$

Али како не радимо у умбиличким тачкама, тј. тачкама за које су главне кривине једнаке, мора важити  $eG + gE - 2fG \neq 0$ , односно  $eG + gE \neq 0$ . Сада видимо да су једина решења једначине (2.7) криве  $u' = 0$  и  $v' = 0$ , тј. паралеле и меридијани.  $\square$

**Пример 2.4.** Посматрајмо за произвољно  $a > 0$  криву  $\alpha(t)$  у  $O_{xz}$  равни дату у параметарском облику

$$\left( a \cosh \frac{t}{a}, 0, t \right), \quad t \in (-R, R).$$

Та крива се назива **ланчаница** (или **катенара**). Очигледно да за  $a = 1$  њеном ротацијом око  $z$ -осе настаје катеноид из примера 1.6.

Слика 2.2: Ланчаница за  $a = 2$  и  $t \in (-10, 10)$  гледано у 3 димензије.

Слика 2.3: Облик ланчанице као естетска инспирација при декорацији улица. Извор: интернет.

## 2.2 Хеликоидне површи

Хеликоидне површи су фамилија површи која представља генерализацију ротационих површи. Њих је прво проучавао Миндинг<sup>7</sup>. Попут ротационих, и хеликоидне површи иницијално можемо увести њиховом кинематичком репрезентацијом.

Нека су појмови осе ротације и профилне криве површи дефинисани као у претходном одељку, са разликом да ће се сада профилна крива истовремено ротирати око осе ротације и транслирати за вектор паралелан оси<sup>8</sup> тако да је брзина транслације пропорционална угаоној брзини ротације. Скуп тачака који профилна крива опише при овом кретању ће представљати хеликоидну површ, а однос брзина транслације и угаоне брзине ротације при непрекидном завојном кретању ћемо звати **нагиб**<sup>9</sup> **хеликоидне површи**. Очито, како при креирању ротационих површи немамо компоненту ротације, ротационе површи можемо видети као хеликоидне површи нагиба нула.

Сада можемо наћи и локалну параметризацију хеликоидне површи уз одређена поједностављења. Оса ротације је опет  $z$ -оса а профилна крива регуларну крива  $(x(u), 0, z(u))$ ,  $u \in (a, b)$  где је  $x(u)$  позитивна функција на интервалу  $(a, b)$ . Уводећи нормализацију угаоне брзине, можемо увести константу  $h$  која ће представљати **распон хеликоидне површи**<sup>10</sup>, величину која представља

<sup>7</sup> *Ernst Ferdinand Adolf Minding* (1806-1885), немачко-руски математичар. Један од првих који је почео користити Гаусов приступ теорији површи.

<sup>8</sup> Ово кретање је слично кретању завртња па се у литератури назива и **непрекидно завојно кретање** (енг. *screw motion*).

<sup>9</sup> енгл. *slant*

<sup>10</sup> енгл. *pitch*

висинску разлику у положају једне тачке након извршења непрекидног завојног кретања у фиксираној јединици времена<sup>11</sup>. Закључујемо да је **хеликоидна површ распона  $h$**  дата параметризацијом:

$$H(u, v) := (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u) + hv), (u, v) \in (a, b) \times (0, 2\pi). \quad (2.8)$$

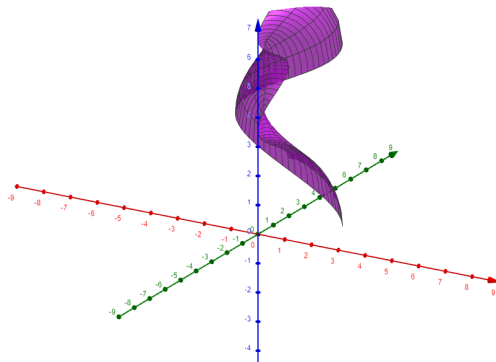
Очито, ротационе површи сматрамо хеликоидним површима распона 0, те се види да пребацивање терминологије са нагиба на распон при дефинисању хеликоидних површи суштински не мења ништа у њиховом геометријском значењу.

Сада можемо и описати координатне криве хеликоидне површи у случају када је  $h > 0$ :

1.  $u$ -параметарске криве су  $(x(u) \cos v_0, x(u) \sin v_0, z(u) + hv_0)$  и њих називамо **меридијанима хеликоидне површи**. Меридијане хеликоидне површи можемо добити у пресецима хеликоидне површи са равнима управним на осу ротације.
2.  $v$ -параметарске криве су  $(x(u_0) \cos v, x(u_0) \sin v, z(u_0) + hv)$  хеликси са почетком у  $(x(u_0), 0, z(u_0))$ , које називамо **паралелни хеликси хеликоидне површи**.

**Пример 2.5.** Узимајући за профилну криву кружницу са центром у  $(0, 0)$  и полупречика  $a$ <sup>12</sup> и распон  $h > 0$  добијамо површ по имену **уврнута сфера**. Она занимљива површ има параметризацију:

$$(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u + hv).$$

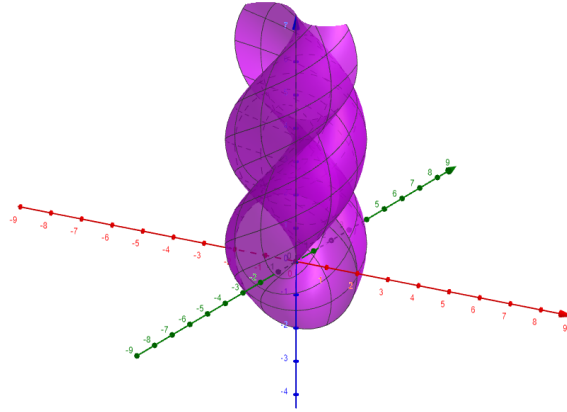


Слика 2.4: Уврнута сфера за  $a = 2$  распона 1 и где  $(u, v) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ .

<sup>11</sup> или просто  $2\pi$  умножак нагиба

<sup>12</sup> односно њен део да би услов регуларности површи био испуњен





Слика 2.5: Увртута сфера за  $a = 2$  распона 1 и где  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ . Регулартност површи у свакој тачки је жртвована из естетских разлога.

**Напомена.** Сада видимо да је хеликоид<sup>13</sup> дефинисан у примеру 1.5 једна хеликоидна површ јединичног распона која се кинематички може генерисати тако што један позитиван део  $x$ -осе врши непрекидно завојно кретање око  $z$ -осе.

Формалнији приступ појму непрекидног завојног кретања нам даје механизам да спојимо кинематички аспект хеликоидних површи са формализмом диференцијалне геометрије, и што је најбитније, снабде нас дефиницијом која обухвата и хеликоидне површи у смислу глатких дводимензионих многострукости, а не само њихове делове преко закрпа. За ту дефиницију нам је неопходно уопштење појма непрекидног завојног кретања.

Нека је  $t \in \mathbf{R}$  произвољан, а  $h \geq 0$  фиксиран реалан број. Посматрајмо пресликавање  $g_t : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  дефинисано са:

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3) g_t(x, y, z) := (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z + ht). \quad (2.9)$$

То пресликавање видимо и као

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{bmatrix},$$

одакле је јасно да за свако  $t \in \mathbf{R}$ ,  $g_t$  представља једну изометрију еуклидског простора  $\mathbf{R}^3$ . Пресликавање  $g_t$  зовећемо **хеликоидно**

<sup>13</sup>Односно његов део дефинисан за вредност параметра  $u \in (0, R)$  да би формализам позитивности  $x$ -координате профилне криве био испуњен.

**креање са распоном  $h$  и осом  $O_z$ .** Како је  $g_0 = \text{id}_{\mathbf{R}^3}$  и

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3) (\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}) \quad g_{t_1} \circ g_{t_2}(x, y, z) = \\ (x \cos(t_1 + t_2) - y \sin(t_1 + t_2), x \cos(t_1 + t_2) + y \sin(t_1 + t_2), z + h(t_1 + t_2)),$$

видимо да хеликоидна кретања са распоном  $h$  и осом  $O_z$  чине једнопараметарску подгрупу<sup>14</sup> групе изометрија еуклидског простора  $\mathbf{R}^3$ . За  $h = 0$ ,  $g_t$  постаје само ротација за угао  $t$  око  $O_z$  осе у позитивном смеру, док се једнопараметарска подгрупа коју чине  $g_t$  скупља у групу тих ротација.

**Дефиниција 2.6.** Хеликоидна површ распона  $h \geq 0$  са осом  $O_z$  је свака глатка дводимензиона многострукост<sup>15</sup> фиксна<sup>16</sup> при  $g_t$  за свако  $t \in \mathbf{R}$ .

**Напомена.** Претходна дефиниција нам из алгебарске тачке гледишта говори да су све хеликоидне површи распона  $h \geq 0$  са осом  $O_z$  потпуно описане орбитом неког елемента при дејству једнопараметарске групе хеликоидних кретања са распоном  $h$  и осом  $O_z$  на скуп  $\mathbf{R}^3$ . Специјално, орбитом дела хеликоида за  $u \in (0, R)$  из примера 1.5 потпуно су описане хеликоидне површи са осом  $O_z$  јединичног распона.

Аналогон тврђења 2.2 за хеликоидне површи представља:

**Тврђење 2.7.** Нека је хеликоидна површ распона  $h \geq 0$  дата профилном кривом  $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))$ ,  $u \in (a, b)$  и својом параметризацијом (2.8). Тада су њени коефицијенти прве и друге фундаменталне форме:

$$\begin{cases} E &= (x'(u))^2 + (z'(u))^2 & F &= hz'(u) & G &= (x(u))^2 + h^2 \\ e &= \frac{x(x'z'' - x''z')}{\sqrt{(x')^2h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2)}} & f &= -\frac{h(x')^2}{\sqrt{(x')^2h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2)}} \\ g &= \frac{x^2z'}{\sqrt{(x')^2h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2)}}, \end{cases}$$

док су њена Гаусова кривина и срења кривина

$$\begin{cases} K &= \frac{x^3z'(x'z'' - x''z') - h^2(x')^4}{((x')^2h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2))^2} \\ H &= \frac{2h^2(x')^2z' + x(x^2 + h^2)(x'z'' - x''z') + ((x')^2 + (z')^2)x^2z'}{2((x')^2h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2))^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Доказ. Директним рачуном је

$$H_u = (x'(u) \cos v, x'(u) \sin v, z'(u))$$

$$H_v = (-x(u) \sin v, x(u) \cos v, h),$$

<sup>14</sup>хоморфизам Лијевих група  $(\mathbf{R}, +)$  и  $(G, \cdot)$

<sup>15</sup>евентуално многострукост у смислу дефиниције 1.2

<sup>16</sup>али не тачка по тачка

одакле су коефицијенти прве фундаменталне форме

$$E = (x'(u))^2 + (z'(u))^2, F = hz'(u)^{17} \text{ и } G = (x(u))^2 + h^2.$$

Лако се добија и да је Гаусово пресликавање хеликоидне површи

$$n(u, v) = \frac{(x'h \sin v - xz' \cos v, -xz' \sin v - hx' \cos v, xx')}{\sqrt{(x')^2 h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2)}},$$

па налазимо да су коефицијенти друге фундаменталне форме

$$e = \frac{x(x'z'' - x''z')}{\sqrt{(x')^2 h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2)}}, f = -\frac{h(x')^2}{\sqrt{(x')^2 h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2)}} \text{ и}$$

$$g = \frac{x^2 z'}{\sqrt{(x')^2 h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2)}}.$$

Како имамо коефицијенте прве и друге фундаменталне форме, користећи (1.17), можемо наћи и Гаусову и средњу кривину хеликоидне површи те добијамо да је  $K = \frac{x^3 z'(x'z'' - x''z') - h^2(x')^4}{((x')^2 h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2))^2}$  и

$$H = \frac{2h^2(x')^2 z' + x(x^2 + h^2)(x'z'' - x''z') + ((x')^2 + (z')^2)x^2 z'}{2((x')^2 h^2 + x^2((x')^2 + (z')^2))^{\frac{3}{2}}}.$$

□

### 2.3 Делонијеве површи

Да би се могло дискутовати о хеликоидним *СМС* површима неопходно је потпуно разумети ротационе површи константне средње кривине. Њих 1841. године први потпуно класификује Делони у [5] који закључује да се њихове профилне криве добијају као рулети жижа коника<sup>18</sup>. У овом поглављу ћемо укратко описати један другачији начин како се може доћи до Делонијевог резултата са јачим акцентом на диференцијалним једначинама а мало мањим на самој геометријској визуелизацији попут оне у Делонијевом раду. За више детаља о поступцима овог одељка погледати [11] и [10].

Али пре свега, можемо покушати на наивнији начин да решимо проблем налажења ротационих површи константне средње кривине. О томе говори наредни пример.

**Пример 2.8.** Претпоставимо да је профилна крива ротационе површи дата у облику

$$(r(s), 0, s), s \in (a, b).$$

Њена параметризација је тада

$$R(s, \theta) = (r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, s), (s, \theta) \in (a, b) \times (0, 2\pi),$$

<sup>17</sup> Овде видимо да координатне криве хеликоидне површи у општем случају нису ортогоналне, сем ако су распона 0, тј. ако се ради о ротационим површима.

<sup>18</sup> Путања коју описује жижа конике приликом њеног котрљања по фиксној правој.

па је на основу 2.2 њена средња кривина једнака

$$H = \frac{1 + (r')^2 - rr''}{2r(1 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.10)$$

Уколико је  $r' = 0$ , онда је

$$(\forall s \in (a, b)) \quad r(s) = c > 0.$$

У овом случају добијамо да је  $H = \frac{1}{2c} > 0$ , те се заиста ради о некој површи константне средње кривине. Будући да ротирамо праву, односно део праве

$$(c, 0, s) = (c, 0, 0) + s(0, 0, 1),$$

која је паралелна  $z$ - осе око ње, добијена површ је цилиндар.

Претпоставимо ли да је  $H = 0$  добијамо диференцијалну једначину

$$1 + (r')^2 - rr'' = 0.$$

Уводећи смену  $r' := f(r)$  та једначина се своди на

$$1 + f^2 - ff'r = 0.$$

Како је то обична диференцијална једначина која раздваја променљиве, можемо је решити простом интеграцијом:

$$\frac{fdf}{1 + f^2} = \frac{dr}{r}. \quad (2.11)$$

Интегралећи (2.11) добијамо да је

$$1 + f^2 = Dr^2,$$

где је  $D$  позитивна реална константа. Враћањем смене долазимо до диференцијалне једначине  $r' = \sqrt{Dr^2 - 1}$  односно

$$\frac{dr}{\sqrt{Dr^2 - 1}} = ds.$$

Њеном интеграцијом добијамо да важи  $\operatorname{arcosh}(\sqrt{D}r) = \sqrt{D}(s + E)$ , што нас доводи до тога да је

$$r(s) = \lambda \cosh\left(\frac{s}{\lambda} + F\right),$$

при чему је уведена позитивна константа  $\lambda := \frac{1}{\sqrt{D}}$  и реална константа  $F := \sqrt{D}E$ . Избором константе  $F = 0$ , на основу примера 2.4, видимо да се ради о ланчаници и добијена површ је катеноид.

Нека је сада  $H = \text{const} \neq 0$ . Након множења са  $r'$  једначина (2.10) постаје:

$$2rr'H = \frac{r'}{\sqrt{1+(r')^2}} - \frac{rr'r''}{(1+(r')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

што се може записати као

$$\frac{d}{ds} \left( Hr^2 - \frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} \right) = 0.$$

Сада смо стигли до диференцијалне једначине

$$Hr^2 - \frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} = \text{const},$$

која се не може решити.

На основу претходног примера видимо да смо од ротационих површи константне средње кривине једноставним рачуном стигли до цилиндра и хеликоида. На путу до преосталих биће потребно употребити сложенија разматрања.

Нека је профилна крива ротационе површи регуларна природно параметризована крива  $(x(s), 0, z(s))$  класе бар  $C^2$  где  $s \in (a, b) \ni 0$  и нека је  $x(s)$  позитивна функција на интервалу  $(a, b)$ . Прво ћемо спровести рачун за средњу кривину која не мора нужно бити константна а одатле извести закључке за случај када јесте. Пошто је профилна крива природно параметризована, користећи (2.6) добијамо да за средњу кривину ротационе површи  $M$  важи:

$$2x(s)H(s) - z'(s) + x(s)x''(s)z'(s) - x(s)x'(s)z''(s) = 0. \quad (2.12)$$

Множећи (2.12) са  $x'$  добијамо:

$$\begin{aligned} 0 &= 2xx'H(s) - z'x' + xx'x''z' - x(x')^2z'' \\ &= 2xx'H(s) - x'z' - x(z')^2z'' - x(x')^2z'' = 2xx'H(s) - \underbrace{x'z' - xz''}_{(xz)'} . \end{aligned}$$

Док множењем (2.12) са  $z'$  добијамо:

$$\begin{aligned} 0 &= 2xH(s)z' - (z')^2 + xx''(z')^2 - xx'z'z'' \\ &= 2xH(s)z' - (z')^2 + \underbrace{xx''(z')^2 + x(x')^2x''}_{xx''} \\ &= 2xH(s)z' + \underbrace{xx'' + (x')^2}_{(xx)'} - 1. \end{aligned}$$

Спајањем претходних једначина у једну закључујемо да за профилну криву и средњу кривину  $H(s)$  важи релација

$$2H(s)(xz' - xx') + (xx' + xz')' - 1 = 0. \quad (2.13)$$

Дефинишимо помоћну комплексну функцију

$$f(s) := xx' + \mathbf{i}xz'.$$

Директним рачуном добијамо:

$$\begin{aligned} f'(s) - 2\mathbf{i}H(s)f(s) - 1 &= (xx')' + \mathbf{i}(xz')' - 2\mathbf{i}H(s)xx' + 2H(s)xz' - 1 \\ &= \underbrace{(xx')' + 2H(s)xz' - 1}_{=0} - \underbrace{\mathbf{i}(2xx'H(s) - (xz')')}_{=0}. \end{aligned}$$

Из свега до сада закључили смо да за профилну криву ротационе површи, њену средњу кривину  $H(s)$  и помоћну функцију  $f(s)$  важи следећа диференцијална једначина:

$$f'(s) - 2\mathbf{i}H(s)f(s) - 1 = 0. \quad (2.14)$$

Будући да је (2.14) линеарна диференцијална једначина 1.реда, одмах знамо да је њено решење дато као :

$$f(s) = e^{2\mathbf{i} \int_0^s H(t)dt} \left( C + \int_0^s e^{-2\mathbf{i} \int_0^t H(u)du} dt \right), \quad C = c_1 + c_2\mathbf{i} \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}. \quad (2.15)$$

Увођењем функција

$$\begin{cases} F(s) := \int_0^s \sin \left( 2 \int_0^t H(u)du \right) dt \\ G(s) := \int_0^s \cos \left( 2 \int_0^t H(u)du \right) dt \end{cases} \quad (2.16)$$

(2.15) постаје знатно једноставнија:

$$\begin{aligned} f(s) &= (G'(s) + \mathbf{i}F'(s)) (c_1 + c_2\mathbf{i} + G(s) - \mathbf{i}F(s)) \\ &= F'(s)(c_1\mathbf{i} - c_2 + \mathbf{i}G(s) + F(s)) - \mathbf{i}G'(s)(c_1\mathbf{i} - c_2 + \mathbf{i}G(s) + F(s)) \\ &= (F'(s) - \mathbf{i}G'(s))(c_1\mathbf{i} - c_2 + \mathbf{i}G(s) + F(s)). \end{aligned}$$

Сада видимо да решење једначине (2.14) можемо записати као

$$f(s) = (F'(s) - \mathbf{i}G'(s)) ((F(s) - c_2) + \mathbf{i}(G(s) + c_1)). \quad (2.17)$$

Желимо да на основу  $f(s)$  дођемо до координатних функција профилне криве. Због природне параметризације профилне криве је  $|f(s)|^2 = x(s)^2$ , а одатле добијамо

$$\begin{aligned} x(s) &= \sqrt{|f(s)|} = \sqrt{|(F(s) - c_2) + \mathbf{i}(G(s) + c_1)| |F'(s) - \mathbf{i}G'(s)|} \\ &= \sqrt{|(F(s) - c_2) + \mathbf{i}(G(s) + c_1)|} = \sqrt{(F(s) - c_2)^2 + (G(s) + c_1)^2}. \end{aligned}$$

На основу једнакости  $f(s) - \overline{f(s)} = 2ix(s)z'(s)$  добијамо и другу координатну функцију профилне криве:

$$\begin{aligned} z(s) &= \int_0^s \frac{2i((G(t) + c_1)F'(t) - (F(t) - c_2)G'(t))}{2ix(t)} dt \\ &= \int_0^s \frac{(G(t) + c_1)F'(t) - (F(t) - c_2)G'(t)}{\sqrt{(F(s) - c_2)^2 + (G(s) + c_1)^2}} dt + c_3, \quad c_3 \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Сумирајући досадашње закључке долазимо до тропараметарске<sup>19</sup> фамилије профилних кривих :

$$\left\{ \begin{aligned} X(s; H(s), c_1, c_2, c_3) &:= (\sqrt{(F(s) - c_2)^2 + (G(s) + c_1)^2}, 0, \\ &\int_0^s \frac{(G(t)+c_1)F'(t)-(F(t)-c_2)G'(t)}{\sqrt{(F(s)-c_2)^2+(G(s)+c_1)^2}} dt + c_3), \quad s \in (a, b) \end{aligned} \right. \quad (2.18)$$

**Напомена.** Вреди приметити да је у тачкама  $s_0 \in (a, b)$  за које  $F(s_0) - c_2 = 0$  и  $G(s_0) + c_1 = 0$ , по Лопиталовом<sup>20</sup> правилу, подинтегрална функција на  $z$  координати непрекидна, те је фамилија профилних кривих (2.18) заиста класе барем  $C^2(a, b)$ .

Геометријско значење реалних константи  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  дато је са:

$$\left\{ \begin{aligned} X(0; H(s), c_1, c_2, c_3) &= \left( \sqrt{c_2^2 + c_1^2}, 0, c_3 \right) \\ X'(0; H(s), c_1, c_2, c_3) &= \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_2^2 + c_1^2}}, 0, \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + c_1^2}} + c_3 \right). \end{aligned} \right. \quad (2.19)$$

У [10] је доказано да важи и обратно: да се за сваку непрекидну функцију  $H(s)$  на  $(a, b) \ni 0$  и произвољну тројку реалних бројева  $(c_1, c_2, c_3)$  на основу Кошијевих услова (2.19) и једначине (2.18) може конструисати природно параметризована профилна крива ротационе површи са средњом кривином  $H(s)$  која ће задовољавати (2.12).

Сада можемо анализом (2.18) покушати да пронађемо преостале ротационе *СМС* површи. Прво желимо видети може ли се доћи до још неке минималне ротационе површи, тј. шта се све може добити уколико је  $H(s) \equiv 0$ . На основу (2.16) видимо да је  $F(s) = 0$  и  $G(s) = s$ , те профилна крива (2.18) постаје

$$\left( \sqrt{c_2^2 + (s + c_1)^2}, 0, \int_0^s \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + (t + c_1)^2}} dt + c_3 \right). \quad (2.20)$$

<sup>19</sup> Параметра  $c_3$  се можемо ослободити већ сада транслацијом дуж  $z$ -осе, но то још нећемо урадити.

<sup>20</sup> *Guillaume de l' Hopital* (1661-1704), истакнути француски математичар 17. века. Дао велики допринос развоју инфинитезималног рачуна.

Разликујемо два случаја:

1.  $c_2 = 0$ : Добијена профилна крива је<sup>21</sup>

$$(s + c_1, 0, c_3) = s(1, 0, 0) + (c_1, 0, c_3),$$

што је права паралелна  $x$ -оси. Њеном ротацијом око  $z$ -осе добијамо раван, односно њен део.

2.  $c_2 \neq 0$ : Уводећи нови параметар профилне криве са  $\bar{s} := s + c_1$  и сменом у интегралу на  $z$ -координати, профилна крива (2.20)

постаје  $\left(\sqrt{c_2^2 + \bar{s}^2}, 0, \int_{c_1}^{\bar{s}} \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 + p^2}} dp + c_3\right)$ , а те криве погодним намештањима параметра  $c_3$ <sup>22</sup> сводимо на облик

$$\left(\sqrt{c^2 + s^2}, 0, \int_0^s \frac{c}{\sqrt{c^2 + t^2}} dt\right) \quad c > 0, s \in \mathbf{R}.$$

Како једноставном интеграцијом видимо да је  $z(s) = c \operatorname{arsinh}\left(\frac{s}{c}\right)$ , добијамо да за профилну криву у овом случају важи релација

$$x = c \sinh\left(\frac{z}{c}\right),$$

те, по (1.7), видимо да се за свако  $c_2 \neq 0$  ради о катеноиду.

Претходно разматрање нам је дало да су ротационе минималне површи раван и катеноид, док сада треба проверити случај ненула константне средње кривине ( $H(s) = H \neq 0$ ). По (2.16) тада су

$$F(s) = \frac{1 - \cos(2Hs)}{2H} \quad G(s) = \frac{\sin(2Hs)}{2H}$$

и профилна крива (2.18) након translације дуж  $z$ -осе ( $c_3 = 0$ ) постаје:

$$\left(\frac{1}{2|H|} \sqrt{(1 - \cos(2Hs) - 2Hc_2)^2 + (\sin(2Hs) + 2Hc_1)^2}, 0, \int_0^s \frac{(\sin(2Ht) + 2Hc_1) \sin(2Ht) - (1 - \cos(2Ht) - 2Hc_2) \cos(2Ht)}{\sqrt{(1 - \cos(2Hs) - 2Hc_2)^2 + (\sin(2Hs) + 2Hc_1)^2}} dt\right).$$

Увођењем нове константе  $B_0 = 2Hc_1$  и задавањем  $c_2 = \frac{1}{2H}$ , профилна крива добија једноставнији облик:

$$\left(\frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + 2B_0 \sin(2Hs) + B_0^2}, 0, \int_0^s \frac{1 + B_0 \sin(2Ht)}{\sqrt{1 + 2B_0 \sin(2Ht) + B_0^2}} dt\right). \quad (2.21)$$

<sup>21</sup> бирајући такво  $c_1$  да је  $(\forall s \in (a, b)) \quad s + c_1 > 0$

<sup>22</sup> погодним translацијама профилне криве дуж  $z$ -осе



Ту криву можемо обележавати  $X(s; H, B_0)$  и пошто она испуњава следећа својства:

- $X(s; -H, B_0) = X(s; H, -B_0)$
- $X(s; H, -B_0) = X(s - \frac{\pi}{2H}; H, B_0) + (0, 0, const)$
- $(\forall \lambda > 0) X(s; \lambda H, B_0) = \frac{1}{\lambda} X(\lambda s; H, B_0)$

у даљој дискусији ћемо сматрати да је  $B_0 \geq 0$  и  $H > 0$ .

Желимо да видимо које све ротационе *СМС* површи може изгенерисати профилна крива (2.21). Суштински, овде имамо четири различита случаја :

1.  $B_0 = 0$ : У овом случају профилна крива постаје

$$\left( \frac{1}{2H}, 0, s \right) = \left( \frac{1}{2H}, 0, 0 \right) + s(0, 0, 1),$$

тј. права паралелна  $z$ -оси па је добијена површ цилиндар.

2.  $B_0 = 1$ : Сада профилна крива постаје

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2H}} \underbrace{\sqrt{1 + 2 \sin(2Hs)}}_{= \sqrt{(\cos(Hs) + \sin(Hs))^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \sqrt{1 + 2 \sin(2Ht)} dt \right).$$

Рестрикујући се на интервал  $s \in (-\frac{\pi}{4H}, \frac{3\pi}{4H})$  профилна крива се своди на

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2H}} (\cos(Hs) + \sin(Hs)), 0, \frac{1}{\sqrt{2H}} (1 - \cos(Hs) + \sin(Hs)) \right),$$

одакле видимо да она задовољава једначину

$$(x(s))^2 + (z(s))^2 = \frac{1}{2H^2}.$$

Како постоје и коначни су одговарајући леви и десни лимеси функција  $x(s)$  и  $z(s)$  у бочним тачкама интервала  $(-\frac{\pi}{4H}, \frac{3\pi}{4H})$  закључујемо да се ради о полукругу, те је у овом случају добијена ротациона *СМС* површ сфера.

Може се такође показати (погледати[11]) да се за  $s \in \mathbf{R}$  профилна крива непрекидно продужава у непрекидан низ суседних полукругова истог полупречника  $\frac{1}{\sqrt{2H}}$ .

3. За  $B_0 \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , можемо прво посматрати понашање координатне функције  $z(s)$ . Пошто је

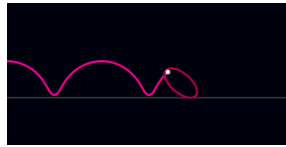
$$z'(s) = \frac{1 + B_0 \sin(2Hs)}{\sqrt{1 + 2B_0 \sin(2Hs) + B_0^2}},$$

примећујемо да је  $z(s)$  растућа функција на  $(0, +\infty)$  у случају када је  $B_0 \in (0, 1)$ , док када је  $B_0 \in (1, +\infty)$  то неће бити случај. Али се у оба случаја може доказати да је

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = +\infty$$

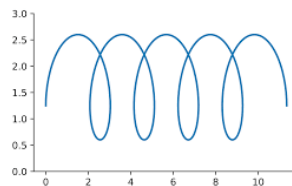
на основу чињенице да је профилна крива  $X(s; H, B_0)$  периодична са периодом  $\frac{\pi}{2H}$  (видети [10]). Посматрано на засебним подинтервалима, параметар  $B_0$ , сем у смислу смештања профилне криве у равни, неће имати даљи геометријски утицај те суштински добијамо још само две различите профилне криве:

- $B_0 \in (0, 1)$  Добијена крива у овом случају се назива **ундулара**<sup>23</sup>, а ротациона *СМС* површ коју ова крива генерише називамо **ундулоид**.



Слика 2.6: Динамичко генерисање ундуларе. Извор: [www.discretization.de/gallery](http://www.discretization.de/gallery).

- $B_0 \in (1, +\infty)$  Добијена крива се назива **нодара**<sup>24</sup>, а ротациона *СМС* површ коју она генерише називамо **нодоид**.



Слика 2.7: Нодара. Извор: интернет.

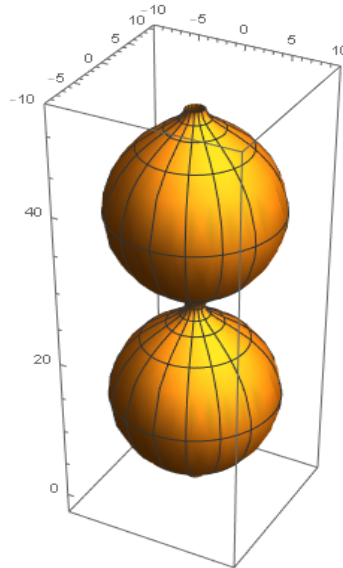
Рекапитулација досадашњих закључака овог одељка нам даје потпун списак ротационих *СМС* површи, које ћемо називати и **Делонијевим површима**. Тиме смо и доказали следеће тврђење:

**Теорема 2.9. (Делонијева теорема)** Раван, катеноид, цилиндар, сфера, нодид и ундулоид су једине ротационе површи константне средње кривине. Специјално, раван и катеноид су једине минималне ротационе површи.

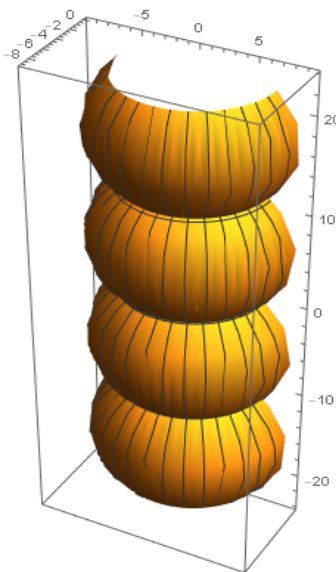
<sup>23</sup> Динамички гледано, крива настаје као путања коју једна жица елипсе опише при котрљању по правој.

<sup>24</sup> Динамички гледано, крива настаје као путања коју једна жица хиперболе опише при котрљању по правој.

**Напомена.** Занимљива последица претходних разматрања је та да за фиксирано  $H > 0$ , варирањем параметра  $B_0 \in [0, +\infty)$ <sup>25</sup> добијамо непрекидну деформацију цилиндра преко фамилије ундулоида, сфере у тренутку  $B_0 = 1$ , па све у фамилију нодоида.<sup>26</sup>



Слика 2.8: Ундулоид



Слика 2.9: Нодоид

<sup>25</sup> тј. његовим доживљањем као протока времена

<sup>26</sup> Чланови споменутих фамилија су, попут полазног цилиндра и сфере, исте средње кривине  $H$ , али за разлику од примера 1.25, овде нема ни говора о томе да је деформација изометричка.

---

Бурова теорема

---

Тврђење описано у овој глави је први доказао Бур у [3]. Оно говори о вези унутрашње геометрије хеликоидних и ротационих површи и интересантно је с историјског аспекта као један од првих резултата из ове тематике, а и доказ је конструктиван сам по себи.

**Теорема 3.1. (Бурова теорема)** Свака хеликоидна површ је изометрична некој ротационој површи и то тако да хеликсима хеликоидне површи одговарају паралеле ротационе површи.

Доказ. Посматрајмо хеликоидну површ дату параметризацијом

$$H(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \phi(u) + av) \quad (3.1)$$

и нађимо њену прву фундаменталну форму:

$$H_u(u, v) = (\cos v, \sin v, \phi'(u))$$

$$H_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, a).$$

Одавде видимо да су коефицијенти  $I$  фундаменталне форме за  $H(u, v)$  једнаки  $E = 1 + (\phi'(u))^2$ ,  $F = a\phi'(u)$  и  $G = u^2 + a^2$ , те је прва фундаментална форма површи  $H(u, v)$ :

$$ds^2 = (1 + (\phi'(u))^2)du^2 + 2a\phi'(u)dudv + (u^2 + a^2)dv^2. \quad (3.2)$$

Желимо репараметризовати површ  $H(u, v)$  тако да јој прва фундаментална форма буде дијагонална, и то тако да  $u$ -параметарске криве и даље буду хеликси, а да  $v$ -параметарске буду ортогоналне на њих.

За почетак, нађимо на  $H(u, v)$  криве ортогоналне на хеликсе (тј. на криве  $u = \text{const}$ ). Нека су координате вектора почетне брзине те криве у стандардној бази тангентног простора  $(u', v')$ . Тада је :

$$[u'v'] \begin{bmatrix} 1 + (\phi'(u))^2 & a\phi'(u) \\ a\phi'(u) & u^2 + a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

одакле добијамо једначину

$$u' a \phi'(u) + v'(u^2 + a^2) = 0,$$

чијим множењем са  $dt$  долазимо до диференцијалне једначине

$$a \phi'(u) du + (u^2 + a^2) dv = 0,$$

односно диференцијалне једначине која раздваја променљиве

$$dv = -\frac{a \phi'(u)}{u^2 + a^2} du,$$

за чије се решење лако добија да је

$$v + \int \frac{a \phi'(u)}{u^2 + a^2} du = \text{const.}$$

Сада репараметризујемо површ  $H(u, v)$ :

$$\begin{cases} \bar{u} = u \\ \bar{v} = v + \int \frac{a \phi'(u)}{u^2 + a^2} du. \end{cases} \quad (3.3)$$

Прецизније увели смо трансформацију

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \Psi(u, v) = (\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v)) := \left( u, v + \int \frac{a \phi'(u)}{u^2 + a^2} du \right).$$

Како је

$$\det J(\Psi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a \phi'(u)}{u^2 + a^2} & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

заиста је са (3.3) дата једна репараметризација површи  $H(u, v)$ . Након те репараметризације, њена прва фундаментална форма постаје:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + (\phi'(\bar{u}))^2) d\bar{u}^2 + \\ & 2a \phi'(\bar{u}) d\bar{u} \left( d\bar{v} - \frac{a \phi'(\bar{u})}{\bar{u}^2 + a^2} d\bar{u} \right) + (\bar{u}^2 + a^2) \left( d\bar{v} - \frac{a \phi'(\bar{u})}{\bar{u}^2 + a^2} d\bar{u} \right)^2 \\ &= \left( 1 + (\phi'(\bar{u}))^2 - \frac{2a^2 \phi'(\bar{u})^2}{\bar{u}^2 + a^2} + \frac{a^2 \phi'(\bar{u})^2}{\bar{u}^2 + a^2} \right) d\bar{u}^2 + (\bar{u}^2 + a^2) d\bar{v}^2 \\ &= \left( 1 + \frac{\bar{u}^2 (\phi'(\bar{u}))^2}{\bar{u}^2 + a^2} \right) d\bar{u}^2 + (\bar{u}^2 + a^2) d\bar{v}^2. \end{aligned}$$

Овде можемо увести још једну координатну трансформацију:

$$\begin{cases} u_1 = \int \sqrt{1 + \frac{\bar{u}^2 (\phi'(\bar{u}))^2}{\bar{u}^2 + a^2}} d\bar{u} \\ v_1 = \bar{v}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Пошто је

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u_1}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v_1}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{1 + \frac{\bar{u}^2 (\phi'(\bar{u}))^2}{\bar{u}^2 + a^2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1 + \frac{\bar{u}^2 (\phi'(\bar{u}))^2}{\bar{u}^2 + a^2}} \neq 0,$$

то је са (3.4) заиста дефинисана још једна репараметризација хеликоидне површи након које је њена  $I$  фундаментална форма:

$$ds^2 = du_1^2 + (f(u_1))^2 dv_1^2, \quad (3.5)$$

где је уведена помоћна функција  $f(u_1) := \sqrt{\bar{u}^2 + a^2}$ .

Ако сада посматрамо ротациону површ дату параметризацијом

$$R(\tilde{u}, \tilde{v}) := (\tilde{u} \cos \tilde{v}, \tilde{u} \sin \tilde{v}, \lambda(\tilde{u})),$$

за њу важи:

$$R_{\tilde{u}} = (\cos \tilde{v}, \sin \tilde{v}, \lambda'(\tilde{u}))$$

$$R_{\tilde{v}} = (-\tilde{u} \sin \tilde{v}, \tilde{u} \cos \tilde{v}, 0)$$

$$E = 1 + (\lambda'(\tilde{u}))^2, \quad F = 0, \quad G = \tilde{u}^2.$$

Видимо да је  $I$  фундаментална форма ротационе површи  $R(\tilde{u}, \tilde{v})$

$$ds^2 = (1 + (\lambda'(\tilde{u}))^2) d\tilde{u}^2 + \tilde{u}^2 d\tilde{v}^2. \quad (3.6)$$

Поређењем (3.5) и (3.6) закључујемо да ћемо следећом репараметризацијом ротационе површи:

$$\begin{cases} u_1 &= \int \sqrt{1 + (\lambda'(\tilde{u}))^2} d\tilde{u} \\ v_1 &= \tilde{v} \end{cases} \quad (3.7)$$

уз додатни услов да је

$$f(u_1) = \tilde{u} \quad (3.8)$$

на основу 1.10 доћи до изометрије хеликоидне и ротационе површи. Пошто је

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{1 + (\lambda'(\tilde{u}))^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1 + (\lambda'(\tilde{u}))^2} \neq 0,$$

(3.7) јесте једна репараметризација ротационе површи.

Предуслов тврђења 1.10 је да површи буду параметризоване истим параметрима, па сада желимо видети како ротациона површ изгледа у локалној параметризацији са параметрима  $u$  и  $v$ :

$$\tilde{u} = f(u_1) = \sqrt{\bar{u}^2 + a^2} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$\tilde{v} = v_1 = \bar{v} = v + \int \frac{a\phi'(u)}{u^2 + a^2} du.$$

Остаје још питање колико је функција  $\lambda(\tilde{u})$  изражена у параметрима  $u$  и  $v$ . Из (3.7) је  $du_1^2 = (1 + \lambda'(\tilde{u})^2)d\tilde{u}^2$ , а одатле је

$$\begin{aligned}\lambda(\tilde{u}) &= \int \lambda'(\tilde{u})d\tilde{u} = \int \sqrt{\frac{du_1^2}{d\tilde{u}^2} - 1}d\tilde{u} = \int \sqrt{du_1^2 - d\tilde{u}^2} \\ &= \int \sqrt{1 + \frac{u^2(\phi'(u))^2}{u^2 + a^2} - \frac{u^2}{u^2 + a^2}}du = \int \sqrt{\frac{a^2 + u^2(\phi'(u))^2}{u^2 + a^2}}du.\end{aligned}$$

Резимирањем досадашњих опажања добијамо да је хеликоидна површ (3.1) изометрична ротационој површи  $R(u, v)$  датој са:

$$\begin{cases} x = \sqrt{u^2 + a^2} \cos \left( v + \int \frac{a\phi'(u)}{u^2 + a^2} du \right) \\ y = \sqrt{u^2 + a^2} \sin \left( v + \int \frac{a\phi'(u)}{u^2 + a^2} du \right) \\ z = \int \sqrt{\frac{a^2 + u^2(\phi'(u))^2}{u^2 + a^2}} du. \end{cases} \quad (3.9)$$

А како су хеликси на хеликоидној криве облика  $u = u_0 = \text{const}$ , то је  $\phi'(u) = 0$  и при Буровој изометрији хеликс ће се сликати у круг полупречника  $\sqrt{u_0^2 + a^2}$  на висини  $a \operatorname{arsinh}(\frac{u_0}{a})$ , што је управо паралела на ротационој површи.  $\square$

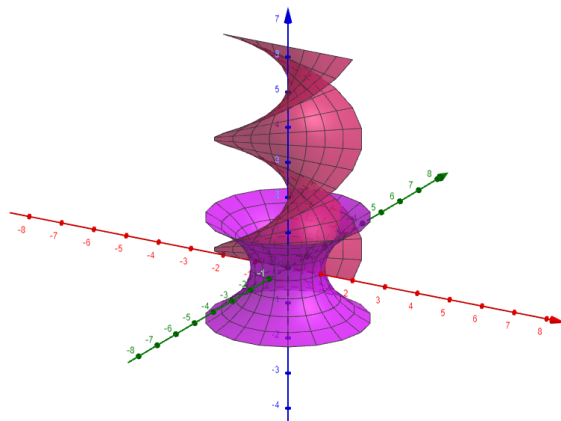
**Напомена.** Сада можемо видети која ротациона површ је изометрична хеликоиду преко Бурове изометрије. Пошто у контексту (3.1) за хеликоид важи да је  $\phi(u) = 0$  и  $a = 1$ , на основу (3.9) видимо да је њој изометрична ротациона површ

$$R(u, v) = (\sqrt{u^2 + 1} \cos v, \sqrt{u^2 + 1} \sin v, \operatorname{arsinh} u), \quad (3.10)$$

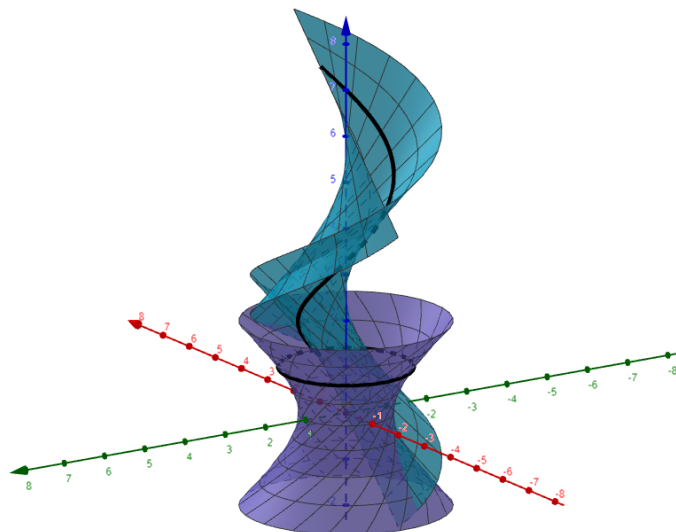
за шта знамо по (1.7) да је заправо репараметризација катеноида.

**Напомена.** Веома је битно приметити следећу ствар коју смо имплицитно<sup>1</sup> провукли у доказу претходне теореме: параметризацијом (3.1) је подразумевано да се профилна крива хеликоидне површи може задати као график функције променљиве  $x$ . И ово је, по теореме о имплицитној функцији, могуће у тачкама криве код којих је  $\frac{dx}{dt} \neq 0$ . Међутим, сасвим је могуће да постоји тачка у којој је  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Али тада због регуларности криве мора бити  $\frac{dy}{dt} \neq 0$  те бисмо у околини те тачке криву могли представити графиком функције променљиве  $y$  и тврђење би опет уз незнатне модификације важило.

<sup>1</sup>ненамерна игра речи



Слика 3.1: Хеликоид за  $u \in (-2, 2)$  и катеноид (3.10) као његова слика Буровом изометријом.



Слика 3.2:  $H(u, v)$  за  $\phi(u) = u$ ,  $u \in (-2, 2)$  и њој изометрична ротациона површ Буровом изометријом. На слици су означени хеликс  $u = 1$  на  $H(u, v)$  и његова слика при Буровој изометрији.





---

## Хеликоидне површи константне средње кривине

---

За разлику од Делонијевих површи, решење проблема класификације хеликоидних *СМС* површи морало је чекати 80–е године прошлог века и рад [7] бразилских математичара До Кармоа и Дајћера. Ово поглавље углавном држи линију тог рада, уз нијансирано мимоилажење по питању рачуна, закључака, као и формулације на неким местима.

Прва два одељка ове главе су кључна; у првом од њих се фамилија хеликоидних *СМС* посматра у оквиру шире, Бурове фамилију, познате још из рада [3]. То повећање општости долази на наплату у другом одељку где се на основу Бурове фамилије добија ефикасан начин провере да ли је хеликоидна површ Бурове фамилије константне средње кривине или није- карактеризациона једначина. Трећи одељак, уз додатак напредније математичке машинерије, даје потпун одговор на питање класификације хеликоидних површи константне средње кривине и чини главни део овог рада.

### 4.1 Бурова фамилија

Посматрајмо хеликоидну површ распона  $h_0 \geq 0$  дату имерзијом:

$$H(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda(r) + h_0 \theta), \quad (r, \theta) \in (a, b) \times (0, 2\pi). \quad (4.1)$$

За почетак ћемо ову површ сместити у фамилију њој изометричних хеликоидних површи, али које неће нужно имати исту средњу кривину; већи део њих неће ни имати константну средњу кривину.

Следеће тврђење је први доказао Бур у [3], док ће изложени доказ умногоме пратити Дарбуов<sup>1</sup> из [4].

---

<sup>1</sup>*Jean – Gaston Darboux* (1842-1917), француски математичар. Оставио дубок трак на пољима диференцијалне геометрије и математичке анализе. Његов рад [4] представља, у правом смислу, једну малу енциклопедију теорије површи.

**Лема 4.1. (Бурова лема)** За сваку хеликоидну површ (4.1) постоји двопараметарска фамилија хеликоидних површи њој изометрична<sup>2</sup>.

Доказ. На основу 2.7 видимо да је прва фундаментална форма површи (4.1) облика

$$(1 + (\lambda'(r))^2)dr^2 + 2h_0\lambda'(r)drd\theta + (r^2 + h_0^2)d\theta^2. \quad (4.2)$$

Већ смо приметили да хеликоидне површи не-нула распона немају ортогоналне координатне криве. Желимо репараметризовати површ (4.1) тако да њена прва фундаментална форма буде дијагонална. Како (4.2) можемо записати и на следећи начин:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{(\lambda'(r))^2(r^2 + h_0^2)}{(r^2 + h_0^2)}\right) dr^2 + 2h_0\lambda'(r)drd\theta + (r^2 + h_0^2)d\theta^2 \\ &= \left(1 + \frac{r^2(\lambda'(r)^2)}{(r^2 + h_0^2)}\right) dr^2 + \underbrace{\frac{h_0^2(\lambda'(r))^2 dr^2}{r^2 + h_0^2} + 2h_0\lambda'(r)drd\theta + (r^2 + h_0^2)d\theta^2}_{(r^2 + h_0^2) \left(d\theta^2 + \frac{2h_0\lambda'(r)drd\theta}{r^2 + h_0^2} + \frac{h_0^2(\lambda'(r))^2}{(r^2 + h_0^2)^2} dr^2\right)} \\ &= \left(1 + \frac{r^2(\lambda'(r)^2)}{(r^2 + h_0^2)}\right) dr^2 + (r^2 + h_0^2) \left(d\theta + \frac{\lambda'(r)h_0}{r^2 + h_0^2} dr\right)^2, \end{aligned}$$

примећујемо да координатном трансформацијом

$$\begin{cases} s = s(r, \theta) := \int \sqrt{1 + \frac{(\lambda'(r))^2(r^2 + h_0^2)}{(r^2 + h_0^2)}} dr \\ t = t(r, \theta) := \theta + h_0 \int \frac{\lambda'(r)}{r^2 + h_0^2} dr \end{cases} \quad (4.3)$$

прва фундаментална форма површи (4.1) постаје дијагонална:

$$ds^2 + U(s)^2 dt^2, \quad (4.4)$$

где је уведена позитивна функција  $U(s) := \sqrt{(r(s))^2 + h_0^2}$ .

Битно је приметити две ствари:

- Јакобијан пресликавања  $(r, \theta) \rightarrow (s(r, \theta), t(r, \theta))$  је

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial \theta} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{1 + \frac{(\lambda'(r))^2(r^2 + h_0^2)}{(r^2 + h_0^2)}} & 0 \\ h_0 \frac{\lambda'(r)}{r^2 + h_0^2} & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1 + \frac{(\lambda'(r))^2(r^2 + h_0^2)}{(r^2 + h_0^2)}} \neq 0,$$

<sup>2</sup> коју ћемо звати **Бурова фамилија**

па је (4.3) уистину једна координатна трансформација, односно њоме смо коректно репараметризовали  $H(r, \theta)$ <sup>3</sup>.

- $s$  не зависи од  $\theta$

Нека је  $h \geq 0$  произвољан број<sup>4</sup> и  $U(s)$  позитивна функција. Сада желимо обрнути поступак и на основу њих доћи до функција  $r$ ,  $\lambda$  и  $\theta$  које зависе од  $s$  и  $t$  и за које ће важити:

$$\begin{cases} ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{r^2+h^2}d\lambda^2 \\ U(s)dt = \pm\sqrt{r^2+h^2}(d\theta + \frac{h}{r^2+h^2}d\lambda) \end{cases} \quad (4.5)$$

Очито овако добијене функције  $r$  и  $\lambda$  неће зависити од  $t$ . Делећи другу једнакост у (4.5) са  $\pm\sqrt{r^2+h^2}$  долазимо до једначине

$$d\theta = \pm\frac{U(s)}{\sqrt{r^2+h^2}}dt - \frac{h}{r^2+h^2}d\lambda = \pm\frac{U(s)}{\sqrt{r^2+h^2}}dt - \frac{h}{r^2+h^2}\frac{d\lambda}{ds},$$

па како је  $d\theta = \theta'_s ds + \theta'_t dt$  добијамо следеће једначине:

$$\theta'_s = -\frac{h}{r^2+h^2}\frac{d\lambda}{ds} \quad \theta'_t = \pm\frac{U(s)}{\sqrt{r^2+h^2}} \quad (4.6)$$

Како десна страна прве од тих једначина не зависи од  $t$  долазимо до закључка да је  $0 = \frac{\partial^2\theta}{\partial s\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial t\partial s}$ , те добијамо да је

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \pm\frac{U(s)}{\sqrt{r^2+h^2}} \right) = 0, \quad (4.7)$$

што нам даје и други од два параметра из исказа леме:

$$\pm\frac{U(s)}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{1}{m} \neq 0. \quad (4.8)$$

Примећујемо да је параметар  $m$  не-нула, као и да се сада друга једначина у (4.5) трансформише у:

$$\frac{1}{m}dt = d\theta + \frac{h}{r^2+h^2}d\lambda$$

одакле добијамо једначину преко које можемо наћи  $\theta$  када нађемо функцију  $\lambda$ :

$$d\theta = \frac{1}{m}dt - \frac{h}{r^2+h^2}d\lambda. \quad (4.9)$$

Из (4.8) видимо да је

$$m^2(U(s))^2 = r^2 + h^2 \quad (4.10)$$

<sup>3</sup> параметре  $s$  и  $t$  називамо природним параметрима хеликоидне површи

<sup>4</sup> за који ће се на крају испоставити да је један од два жељена параметра из исказа тврђења

чијим диференцирањем долазимо до

$$2m^2U(s)\frac{dU}{ds} = 2r\frac{dr}{ds}, \quad (4.11)$$

а квадрирањем те једнакости и заменом  $r^2$  са  $m^2(U(s))^2 - h^2$  добијамо диференцијалну једначину

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{m^4(U(s))^2}{m^2(U(s))^2 - h^2} \left(\frac{dU}{ds}\right)^2. \quad (4.12)$$

На основу (4.12) можемо добити диференцијалну једначину која ће нам дати функцију  $\lambda(s)$ :

$$\begin{aligned} d\lambda^2 &= \frac{r^2 + h^2}{r^2} (ds^2 - dr^2) = \frac{m^2(U(s))^2}{m^2(U(s))^2 - h^2} \left(1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right) ds^2 \\ &= \frac{m^2(U(s))^2}{(m^2(U(s))^2 - h^2)^2} \left(m^2(U(s))^2 - h^2 - m^4(U(s))^2 \left(\frac{dU}{ds}\right)^2\right) ds^2. \end{aligned}$$

Сумирајући овај резултат са (4.10) и (4.9) долазимо до жељених функција  $r$ ,  $\theta$  и  $\lambda$ :

$$\begin{cases} r(s) = \sqrt{m^2(U(s))^2 - h^2} \\ \theta(s, t) = \frac{t}{m} - \frac{h}{m} \int \frac{\sqrt{m^2(U(s))^2 (1 - m^2(\frac{dU}{ds})^2) - h^2}}{U(s)(m^2(U(s))^2 - h^2)} ds \\ \lambda(s) = \int \frac{mU(s)}{m^2(U(s))^2 - h^2} \sqrt{m^2(U(s))^2 \left(1 - m^2\left(\frac{dU}{ds}\right)^2\right) - h^2} ds. \end{cases} \quad (4.13)$$

Добијени резултати нас мотивишу да посматрамо за произвољну позитивну функцију  $U(s)$  и произвољни реалан број  $h \geq 0$  фамилију хеликоидних површи распона  $h$  добијену заменом (4.13) у (4.1):

$$X(s, t) = [U, m, h](s, t) := (r(s) \cos \theta(s, t), r(s) \sin \theta(s, t), \lambda(s) + h\theta(s, t)), \quad (4.14)$$

где су функције  $r(s)$ ,  $\theta(s, t)$  и  $\lambda(s)$  дефинисане са (4.13) за произвољну не-нула реалну константу  $m$ .

Сада можемо израчунати базне векторе тангентног простора:

$$X_s = (r' \cos \theta - r \sin \theta \theta'_s, r' \sin \theta + r \cos \theta \theta'_s, \lambda' + h\theta'_s)$$

$$X_t = \theta'_t (-r \sin \theta, r \cos \theta, h).$$

а на основу њих доћи и до коефицијената прве фундаменталне форме фамилије  $[U, m, h]$ :

$$\begin{aligned} E &= (r')^2 + (\lambda')^2 - (r^2 + h^2)(\theta'_s)^2 = (r')^2 + \frac{r^2(\lambda')^2}{r^2 + h^2} \\ &= \frac{m^4(U(s))^2(U'(s))^2}{m^2(U(s))^2 - h^2} + \frac{r^2 - m^4(U(s))^2(U'(s))^2}{r^2} = 1 \end{aligned}$$

$$F = r^2\theta'_s + h(\lambda' + h\theta'_s) = \theta'_s(h^2 + r^2) + h\lambda' = -h\lambda' + h\lambda' = 0$$

$$G = (\theta'_t)^2(r^2 + h^2) = (U(s))^2.$$

Закључујемо да независно од параметара  $m$  и  $h$  сви чланови фамилије  $[U, m, h]$  имају исту фундаменталну форму која је једнака (4.4), па је по 1.10 хеликоидна површ (4.1) изометрична свакој површи конструисане двопараметарске фамилије  $[U, m, h]$ , те тврђење важи.  $\square$

**Напомена.** Сем што је изометрична члановима Бурове фамилије, хеликоидна површ (4.1) од које смо кренули је уједно и члан те фамилије<sup>5</sup>. Свака Бурова фамилија садржи и једну ротациону површ<sup>6</sup>. Делује да већ на овом месту можемо извршити нормализацију, олакшати посао колико-толико и барем се ослободити параметра  $m$  погодном трансформацијом, или простије речено постављајући га на вредност 1 без губљења општости, но то нећемо учинити из разлога који ће се касније показати.

## 4.2 Карактеризациона једначина

Како је циљ ове главе опис хеликоидних површи константне средње кривине, а чланови Бурове фамилије немају нужно исту средњу кривину, а камоли константну, делује да смо се удаљили од циља. Међутим, корист Бурове фамилије је што можемо врло ефикасно окарактерисати када њен члан има константну средњу кривину што казује следећа теорема:

**Теорема 4.2.** Хеликоидна површ Бурове фамилије  $[U, m, h]$  има константну средњу кривину  $H$  ако њена генераторна функција  $U(s)$  задовољава диференцијалну једначину:

$$-2H\sqrt{m^2(U(s))^2(1 - m^2(U'(s))^2) - h^2} = m^2U(s)U''(s) - 1 + m^2(U'(s))^2. \quad (4.15)$$

*Доказ.* Пре свега морамо наћи другу фундаменталну форму по-

<sup>5</sup> за вредности параметара фамилије  $m = 1$  и  $h = h_0$

<sup>6</sup> за вредности параметара  $m = 1$  и  $h = 0$

врши из Бурове фамилије. Директним рачуном добијамо:

$$\begin{aligned} X_s \times X_t &= \theta'_t \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r' \cos \theta - r \sin \theta \theta'_s & r' \sin \theta + r \cos \theta \theta'_s & \lambda' + h \theta'_s \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & h \end{vmatrix} \\ &= \theta'_t (hr' \sin \theta - \lambda' r \cos \theta, -\lambda' r \sin \theta - hr' \cos \theta, rr'). \end{aligned}$$

На основу тога имамо да је

$$\begin{aligned} \|X_s \times X_t\| &= |\theta'_t| \sqrt{(r')^2(r^2 + h^2) + (\lambda')^2 r^2} \\ &= |\theta'_t| \sqrt{\frac{m^6 U^2 (U')^2}{r^2} + \frac{m^2 U^2 (m^2 U^2 - m^4 U^2 (U')^2 - h^2)}{r^2}} \\ &= \theta'_t m U, \end{aligned}$$

те је Гаусово пресликавање Бурове фамилије

$$n(s, t) = \frac{1}{mU} (hr' \sin \theta - \lambda' r \cos \theta, -\lambda' r \sin \theta - hr' \cos \theta, rr').$$

У претходном рачуну је обрађена посебна пажња на то да су  $\theta'_t$  и не-нула константа  $m$  истог знака. На основу деформационог вектора

$$n_t = \frac{1}{mU} (hr' \cos \theta \theta'_t + \lambda' r \sin \theta \theta'_t, -\lambda' r \cos \theta \theta'_t + hr' \sin \theta \theta'_t, 0)$$

добијамо следеће коефицијенте друге фундаменталне форме:

$$\begin{aligned} f &= -\langle n_t, X_s \rangle = -\frac{\theta'_t}{mU} (h(r')^2 - r^2 \lambda' \theta'_s) = -\frac{h \theta'_t}{mU} = -\frac{h}{m^2 U(s)} \\ g &= -\langle n_t, X_t \rangle = \frac{r^2 \lambda' (\theta'_t)^2}{mU(s)} = \frac{\sqrt{m^2 (U(s))^2 (1 - m^2 (U'(s))^2) - h^2}}{m^2}. \end{aligned}$$

А како се директним рачуном добије и да је

$$e = \frac{-m^4 (U(s))^3 U''(s) + h^2}{m^2 (U(s))^2 \sqrt{m^2 (U(s))^2 (1 - m^2 (U'(s))^2) - h^2}},$$

на основу (1.17) имамо да ће хеликоидна површ Бурове фамилије  $[U, m, h]$  имати константну средњу кривину  $H$  акко је:

$$\begin{aligned} 2(U(s)^2)H &= eG + gE = \frac{h^2 - m^4 (U(s))^3 U''(s)}{m^2 \sqrt{m^2 (U(s))^2 (1 - m^2 (U'(s))^2) - h^2}} \\ &\quad + \frac{\sqrt{m^2 (U(s))^2 (1 - m^2 (U'(s))^2) - h^2}}{m^2}. \end{aligned}$$

Множењем са  $\sqrt{m^2(U(s))^2(1 - m^2(U'(s))^2) - h^2}$  и дељењем обе стране претходне једнакости са  $-(U(s))^2$  добијамо једначину (4.15).  $\square$

Сада желимо да решимо диференцијалну једначину (4.15). Увођењем помоћних функција

$$x(s) := mU(s) \quad y(s) := \sqrt{(x(s))^2 - (x(s))^2(x'(s))^2 - h^2} \quad (4.16)$$

она постаје:

$$-2Hy(s) = x(s)x''(s) - 1 + (x'(s))^2.$$

Ако једначину

$$(y(s))^2 + h^2 = (x(s))^2 - (x(s))^2(x'(s))^2 \quad (4.17)$$

диференцирамо по  $s$  долазимо до релације

$$2y \frac{dy}{ds} = 2x \frac{dx}{ds} - 2x \left( \frac{dx}{ds} \right)^3 - 2x^2 \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2},$$

док множећи ту једначину са  $\frac{ds}{2x dx}$  добијамо да је:

$$\frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = 1 - \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 - xx''.$$

Сада је јасно да (4.15) постаје

$$-2Hy = 1 - (x')^2 - \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} - 1 + (x')^2,$$

што, након сређивања, видимо да је обична диференцијална једначина која раздваја променљиве:  $2Hx dx = dy$ . Њено решење је

$$y = Hx^2 + a, \quad a \in \mathbf{R}. \quad (4.18)$$

Враћањем тог добијеног резултата у другу једначину у (4.16) долазимо до једноставније диференцијалне једначине где фигурира само функција  $x(s)$  и њен извод:

$$(Hx^2 + a)^2 = x^2 - x^2(x')^2 - h^2. \quad (4.19)$$

Увођењем нове помоћне функције  $z(s) := (x(s))^2$  је  $\frac{dz}{ds} = 2x \frac{dx}{ds}$ , те како је  $x(s)$  позитивна функција, (4.19) постаје:

$$z' = 2\sqrt{-H^2z^2 + (1 - 2aH)z - a^2 - h^2}. \quad (4.20)$$

Анализом диференцијалне једначине (4.20) можемо доћи до свих хеликоидних СМС површи облика (4.1). Поступак се овде грана на два случаја:



1.  $H = 0$ 

У овом случају једначина (4.20) се трансформише у

$$\frac{dz}{2\sqrt{z - (a^2 + h^2)}} = ds, \quad (4.21)$$

коју решавамо табличном интеграцијом и добијамо

$$\sqrt{z - (a^2 + h^2)} = s + c.$$

Након враћања смена добијамо израз за генераторну функцију Бурове фамилије

$$U(s) = \frac{\sqrt{a^2 + h^2 + (s + c)^2}}{m}. \quad (4.22)$$

Погодним трансформацијама константу  $a$  можемо наместити да буде 0 и добијамо

$$r(s) = \sqrt{m^2 U^2 - h^2} = s + c.$$

Сада нам (4.12) даје  $U' = \frac{r(s)}{m^2 U}$  и одатле је  $\theta(s, t) = \frac{t}{m}$  и  $\lambda(s) = 0$ . Закључујемо да је хеликоидна СМС површ у овом случају облика

$$X(s, t) = \left( (s + c) \cos\left(\frac{t}{m}\right), (s + c) \sin\left(\frac{t}{m}\right), h_0 \frac{t}{m} \right)$$

Узимајући константе  $c = 0$  и  $m = 1$  постаје јасно да се ради о хеликоиду, и то са још широм области важења параметара неголи у примеру 1.5.

2.  $H \neq 0$ 

Можемо, без умањења општости, претпоставити да је  $H > 0$ . Интеграција једначине (4.20) даје:

$$\begin{aligned} s + c &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{-(H^2 z^2 + (2aH - 1)z) - (a^2 + h^2)}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2aH-1}{2H}\right)^2 - (a^2 + h^2) - \left(Hz + \frac{2aH-1}{2H}\right)^2}} \\ &= H \int \frac{dz}{\sqrt{1 - 4Ha - 4H^2 h^2 - (2H^2 z + 2aH - 1)^2}} \\ &= \frac{H}{\sqrt{1 - 4aH - 4H^2 h^2}} \int \left( 1 - \left( \frac{2H^2 z + 2aH - 1}{\sqrt{1 - 4aH - 4H^2 h^2}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dz. \end{aligned}$$

Сменом  $t = \frac{2H^2z+2aH-1}{\sqrt{1-4aH-4H^2h^2}}$  претходни интеграл се своди на таблични и након свега добијамо да је, до на константу:

$$s = \frac{1}{2H} \arcsin \left( \frac{2H^2z + 2aH - 1}{\sqrt{1 - 4aH - 4H^2h^2}} \right). \quad (4.23)$$

**Напомена.** До сада је мало ”испод жита” провлачена чије-ница да је израз  $1 - 4aH - 4H^2$  строго позитиван. Наиме, једначина:

$$1 - 4aH - 4H^2 = 0$$

након уврштавања у (4.18) постаје квадратна једначина по  $H$ :

$$H^2(x^2 - h^2) - Hy + \frac{1}{4} = 0. \quad (4.24)$$

чија су решења

$$\frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2 + h^2}}{2(x^2 - h^2)}. \quad (4.25)$$

А, по(4.17) видимо да је дискриминанта једнака  $-x^2(x')^2$ , те имамо контрадикцију. Случај да је  $x^2 - h^2 = 0$  би произвео да је  $r(s) = 0$ , те ни то није могућност.

Претходна напомена потпуно оправдава увођење строго позитивне константе

$$B := \sqrt{1 - 4aH - 4H^2h^2}$$

Сада нам враћање смене за  $z$  у (4.23) даје тропараметарски израз за  $U(s)$ :

$$(U(s))^2 = \frac{1 - 2aH + B \sin(2Hs)}{2m^2H^2}. \quad (4.26)$$

Пошто знамо генераторну функцију Бурове фамилије, можемо изразити и функцију  $r(s)$ :

$$\begin{aligned} r(s) &= \sqrt{\frac{1 - 2aH + B \sin(2Hs) - 2H^2h^2}{2H^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + B \sin(2Hs) + \frac{B^2-1}{2}}{2H^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs)}}{2H}. \end{aligned}$$

Док на основу следећих једнакости:

$$U(s)U'(s) = \frac{B}{2m^2H} \cos(2Hs)$$

$$\frac{1 + B \sin(2Hs)}{2H} = \sqrt{(r(s))^2 - m^4(U(s))^2(U'(s))^2}$$

користећи (4.13) и функцију  $\theta(s, t)$  можемо изразити тропараметарски:

$$\begin{aligned} \theta(s, t) &= \frac{t}{m} - \frac{h}{m} \int \frac{1 + B \sin(2Hs)}{2HU(s)(r(s))^2} ds \\ &= \frac{t}{m} - 2Hh \int \frac{1 + B \sin(2Hs)}{U(s)(1 + B^2 + 2B \sin(2Hs))} ds = \frac{t}{m} - 4H^2h \\ &\quad \times \int \frac{1 + B \sin(2Hs)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs) + 4H^2h^2(1 + B^2 + 2B \sin(2Hs))}} ds, \end{aligned}$$

као и функцију  $\lambda(s)$ :

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \int \frac{(1 + B \sin(2Hs))mU(s)}{2H(r(s))^2} ds \\ &= \frac{(1 + B \sin(2Hs))\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs) + 4H^2h^2}}{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs)} ds. \end{aligned}$$

### 4.3 Репрезентациона формула

Резултати с краја претходног одељка нам дају опис хеликоидних СМС површи облика (2.8) преко параметара  $m$ ,  $B$  и  $h$  и функција  $r$ ,  $\theta$  и  $\lambda$  које зависе од природних параметара  $(s, t)$ . До Кармо и Дајћер су у [7] на основу Лосоновог<sup>7</sup> рада [12] успели дати и потпунији резултат.

Циљ овог одељка је да се као у раду [7] за произвољни реалан број  $H > 0$  потпуно опише скуп свих хеликоидних површи чија је оса  $z$ -оса, распон  $h \geq 0$  и средња кривина  $H$ . Означимо тај скуп са  $\Sigma_H$ . Лосон је у [12], што уопштава пример 1.25, установио да за сваку површ  $M$  са константном средњом кривином  $H$  постоји њој  $2\pi$ -периодична фамилија  $\{f_\phi\}_{\phi \in [0, 2\pi]}$  међусобно изометричних површи које све имају исту константну средњу кривину  $H$  и за коју важи  $f_0 = M$ . Та фамилија површи се назива **придружена фамилија површи  $M$**  и јасно се ради о уопштењу конструкције из

<sup>7</sup> *Herbert Blaine Lawson Jr.*, амерички математичар рођен 1942. године, познат по својим радовима из теорије минималних површи.

примера 1.25.

Формалније говорећи, у овом раду ћемо без доказа користити следећу верзију теореме 8 из [12]<sup>8</sup>:

**Теорема 4.3. (Лосон)** Нека је површ  $M$  константне средње кривине  $H$  дата имерзијом  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Тада постоји диференцијабилна  $2\pi$ -периодична фамилија површи  $f_\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  које су све међусобно изометричне површи  $M$ ,  $f_0 = f$  и све површи фамилије имају исту константну средњу кривину  $H$ . Приде, фамилија  $\{f_\phi\}_{\phi \in [0, 2\pi]}$  је јединствена до на изометрију еуклидског простора  $\mathbf{R}^3$ .

Поступак с краја претходног одељка настављамо увођењем нових параметара  $a_0$  и  $\phi$  који ће умногоме олакшати даљи рачун:

$$\begin{cases} a := -\frac{a_0 \cos \phi}{1+2a_0H(1-\cos \phi)} \\ h := \frac{a_0 \sin \phi}{1+2a_0H(1-\cos \phi)} \\ m := \sqrt{\frac{1}{1+2a_0H(1-\cos \phi)}} \end{cases} \quad (4.27)$$

Након увођења параметара (4.27) константа  $B$  постаје:

$$B(a_0, \phi) = \frac{\sqrt{1+4a_0H}}{1+2a_0H(1-\cos \phi)}. \quad (4.28)$$

**Напомена.** Приметимо да за  $a = -a_0$ ,  $h = 0$  и  $m = 1$  добијамо ротациону површ константне средње кривине  $H > 0$  унутар Бурове фамилије  $[U, a, h, m]$ . Њу ћемо означавати са  $R(a_0)$ .

За доказ репрезентационе формуле хеликоидних *СМС* површи пресудну улогу ће имати следећа лема:

**Лема 4.4.** Нека су  $a_0$  и  $\phi \in [0, 2\pi]$  фиксирани и нека су параметри  $a$ ,  $h$  и  $m$  дефинисани једначинама (4.27). Тада:

а) За свако  $\phi \in [0, 2\pi]$  важи

$$U(a, h, m) = U(-a_0, 0, 1). \quad (4.29)$$

Другим речима за сваку ротациону површ  $R(a_0)$  дефинисану са (4.13) постоји једнопараметарска фамилија њој изометричних хеликоидних *СМС* површи са истом константном средњом  $H > 0$  и та фамилија је баш придружена фамилија ротационе површи  $R(a_0)$ .

<sup>8</sup> која је тамо доказана у знатно општијем контексту

б) За произвољну хеликоидну *СМС* површ  $M$  генерисану са (4.13) постоји ротациона површ  $R(a_0)$  и реалан број  $\phi \in [0, 2\pi]$  такав да је  $M$  унутар придружене фамилије ротационе површи  $R(a_0)$ .

Доказ. а) Убацујући нове параметре (4.27) у израз за генератрису Бурове фамилије (4.26) и користећи (4.28) добијамо:

$$U^2(a, h, m) = \frac{1 + 2a_0H + \sqrt{1 + 4a_0H} \sin(2Hs)}{2H^2} = U^2(-a_0, 0, 1),$$

те важи (4.29). Очито, варирањем  $\phi \in [0, 2\pi]$ , преко (4.27) добијамо фамилију хеликоидних површи које су изометричне са  $R(a_0)$  и исте константне средње кривине  $H > 0$ . Из јединствености придружене фамилије у Лосоновој теореме закључујемо да је ова фамилија хеликоидних површи која зависи од  $\phi \in [0, 2\pi]$  управо придружена фамилија ротационе површи  $R(a_0)$ .

б) Пођимо од произвољне хеликоидне површи са константном средњом кривином  $H > 0$ . Она припада некој Буровој фамилији

$$\bar{U}[\bar{a}, \bar{h}, \bar{m}].$$

Суштински, желимо доћи до ротационе површи  $R(a_0)$  средње кривине  $H$  и до њене изометричке деформације тако да наша хеликоидна површ настаје у неком конкретном тренутку  $\phi \in [0, 2\pi]$  те деформације. Сликвито речено, потребан нам је неки "рецепт" за  $\phi$  и  $a_0$  у терминима  $\bar{a}$ ,  $\bar{h}$  и  $\bar{m}$ .

Пре свега, корисно ће бити да представимо коефицијенте друге фундаменталне форме наше хеликоидне површи на мало погоднији начин. На основу доказа теореме 4.2, видимо да је:

$$\begin{cases} e = \frac{1}{x^2y}(h^2 - x^3x'') = H - \frac{\bar{a}}{m^2\bar{U}^2} \\ f = -\frac{\bar{h}}{m^2\bar{U}} \\ g = \frac{1}{m^2}(\bar{a} + H\bar{m}^2\bar{U}^2) = \frac{\bar{a}}{m^2} + H\bar{U}^2. \end{cases} \quad (4.30)$$

Сада, претпоставимо да тражена ротациона површ постоји. Њена ће метрика бити генерисана функцијом  $U(-a_0, 0, 1)$  за коју знамо да мора важити  $U = \bar{U}$ , јер су све површи које се појаве током изометричке деформације изометричне. Нека је друга фундаментална форма те површи  $e_0$ ,  $f_0 = 0$  и  $g_0$ . Уведемо ли репараметризацију те ротационе површи са  $p := \int_0^s \frac{dz}{\bar{U}(z)}$ , односно

$$ds = Udp,$$

њена прва фундаментална форма (4.4) постаје

$$U^2(dp^2 + dt^2),$$

те смо доби́ли изотермалне параметре, који су неопходни да бисмо могли спровести поступак из теореме 8 из [12], па нам конструкција из тог доказа даје придружену фами́лију хеликоидних површи која зависи од  $a_0$  и  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Поступак из доказа Лосонове теореме даје и коефицијенте друге фундамнталне форме те фами́лије<sup>9</sup>:

$$\begin{cases} e = H + \cos \phi (e_0 - H) \\ f = \frac{U}{2} \sin \phi \left( \frac{g_0}{U^2} - e_0 \right) \\ g = HU^2 + \cos \phi (g_0 - HU^2). \end{cases} \quad (4.31)$$

□

Поређењем (4.31) и (4.30) и користећи чињеницу да су сви чланови фами́лије изометрични<sup>10</sup> добијамо:

$$\begin{aligned} e_0 &= -\frac{\bar{a}}{U^2 \bar{m}^2 \cos \phi} + H \\ g_0 &= HU^2 + \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2 \cos \phi} \\ \bar{h} &= -\frac{\bar{m}^2 U^2}{2} \sin \phi \underbrace{\left( \frac{g_0}{U^2} - e_0 \right)}_{2 \frac{\bar{a}}{\bar{m}^2 U^2 \cos \phi}} = -\bar{a} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}. \end{aligned}$$

Сада смо нашли ”рецепт” за  $\phi$  преко  $\bar{a}$ ,  $\bar{m}$  и  $\bar{h}$ . Остаје да се исто уради и за  $a_0$ . За то ћемо искористити чињеницу да се ротациона површ с параметром  $a_0$  појављује у нултом тренутку Лосонове изометричке деформације, тј. да до ње долазимо за  $\phi = 0$ , као и да је у том тренутку  $\bar{a} = -a_0$ ,  $\bar{h} = 0$  и  $\bar{m} = 1$ . Користећи, по (4.27) да је  $\bar{a} = -a_0 \cos \phi \bar{m}^2$ , добијамо и ”рецепт” за  $a_0$ .

Сада треба показати да је наш ”рецепт” добар, односно, да ако дефинишемо  $\phi$  и  $a_0$  преко једнакости

$$\begin{cases} \bar{h} &= -\bar{a} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \\ a_0 &= -\frac{\bar{a}}{\cos \phi \bar{m}^2} \end{cases} \quad (4.32)$$

<sup>9</sup> Који, за разлику од прве, зависи од параметра  $\phi$ .

<sup>10</sup> те је  $U = \bar{U}$

за  $a_0$ ,  $\phi$ ,  $\bar{a}$ ,  $\bar{h}$  и  $\bar{m}$  ће важити (4.27).

Користећи то што је  $U(\bar{a}, \bar{m}, \bar{h}) = U(-a_0, 0, 1)$  добијамо да је:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\bar{a}H + \sqrt{1 - 4H^2\bar{h}^2 - 4\bar{a}H \sin(2Hs)}}{2\bar{m}^2 H^2} &= U(\bar{a}, \bar{m}, \bar{h}) \\ &= U(-a_0, 0, 1) = \frac{1 + 2a_0H + \sqrt{1 + 4a_0H \sin(2Hs)}}{2H^2}, \end{aligned}$$

што након унакрсног множења даје једнакости:

$$\bar{m}^2(1 + 2a_0H) = 1 - 2\bar{a}H = 1 + 2a_0H \cos \phi \bar{m}^2$$

$$\bar{m}^2 \sqrt{1 + 4a_0H} = \sqrt{1 - 4H^2\bar{h}^2 - 4\bar{a}H}.$$

Прва од тих једнакости даје

$$\bar{m}^2 = \frac{1}{1 + 2a_0H(1 - \cos \phi)}, \quad (4.33)$$

док квадрирање друге од њих даје једначину:

$$\bar{m}^4(1 + 4a_0H + 4a_0^2H^2 \sin^2 \phi) - 4a_0H \cos \phi \bar{m}^2 - 1 = 0,$$

чијим решавањем добијамо да је

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1 + 2a_0H(1 + \cos \phi)}{1 + 4a_0H + 4a_0^2H^2 \sin^2 \phi} = \frac{1 + 2a_0H(1 + \cos \phi)}{(1 + 2a_0H)^2 - 4a_0^2H^2 \cos^2 \phi} \\ &= \frac{1 + 2a_0H(1 + \cos \phi)}{(1 + 2a_0H + 2a_0H \cos \phi)(1 + 2a_0H(1 - \cos \phi))}, \end{aligned}$$

одакле поново добијамо (4.33).

Заменом (4.33) у (4.32) добијамо и да је:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= -\frac{a_0 \cos \phi}{1 + 2a_0H(1 - \cos \phi)} \\ \bar{h} &= \frac{a_0 \sin \phi}{1 + 2a_0H(1 - \cos \phi)}. \end{aligned}$$

Дакле, ако дефинишемо  $a := \bar{a}$ ,  $h := \bar{h}$  и  $m := \bar{m}$ , добићемо Лосонову фамилију хеликоидних СМС површи константне средње кривине  $H > 0$  која је у нултом тренутку у ротационој површи  $R(a_0)$  где је  $a_0$  дефинисано преко (4.32) и која је у неком тренутку у хеликоидној површи од које смо кренули, па и овај део тврђења важи.

**Напомена.** Сада можемо погледати шта смо претходним тврђењем доказали. Већ смо знали да унутар сваке Бурове фамилије

$[U, a, m, h]$  имамо по једну Делонијеву површ, и да можемо фиксирањем параметра <sup>11</sup>  $m = 1$ , као и параметра  $a = -a_0$  и варирањем параметра  $h$  од 0 па навише спровести изометричку трансформацију која почиње у тој Делонијевој површи и приликом које се ”прошетамо” кроз остатак фамилије. Но ово тврђење нам каже и више од тога: свака хеликоидна *СМС* површ константне средње кривине  $H > 0$  настаје изометричком деформацијом неке Делонијеве *СМС* површи исте средње кривине! Очито, због позитивности  $H$  мисли се на ундулоид, нодоид и евентуално цилиндар и сферу<sup>12</sup>, као граничне случајеве.

Пре главне теореме, можемо још ближе повезати закључке овог поглавља с онима из другог, тј. закључцима везаним за параметризацију Делонијевих површи. На основу (4.28) видимо да је вредност параметра  $B$  у тренутку  $\phi = 0$  једнака  $\sqrt{1 + 4a_0H}$ , што нас мотивише да дефинишемо нови параметар  $B_0$  на следећи начин:

$$B_0 := \sqrt{1 + 4a_0H}. \quad (4.34)$$

Након увођења тог параметра, можемо трансформисати параметре (4.27) и (4.28):

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{1 + 2H \frac{(B_0^2 - 1)(1 - \cos \phi)}{4H}} = \frac{2}{2 + (B_0^2 - 1)(1 - \cos \phi)} \\ h &= \frac{(B_0^2 - 1) \sin \phi}{4H + 2H (B_0^2 - 1)(1 - \cos \phi)} \\ B &= \frac{2B_0}{2 + (B_0^2 - 1)(1 - \cos \phi)}. \end{aligned}$$

Повезивањем свих досадасњих закључака овог поглавља долазимо до главног резултата рада- репрезентационе формуле хеликоидних површи са константном средњом кривином из [7].

**Теорема 4.5. (Репрезентациона формула)** Постоји сурјекција  $\Psi : [0, +\infty) \times S^1 \rightarrow \Sigma_H$ <sup>13</sup> таква да за је за свако  $B_0 \in [0, +\infty)$ ,  $\Psi(B_0, 0)$  ротациона површ и  $\{\Psi(B_0, \phi) | \phi \in [0, 2\pi]\}$  њена придружена фамилија. Приде, сем за  $\Psi(1, \phi)$ , што је случај сфере, свака хеликоидна површ  $\Psi(B_0, \phi)$  је дата параметризацијом

$$(r(s) \cos \theta(s, t), r(s) \sin \theta(s, t), \lambda(s) + h\theta(s, t)), (s, t) \in \mathbf{R}^2.$$

<sup>11</sup>Параметра који, што већ постаје пракса, у сваком примеру сравнимо на 1, међутим не фиксирамо га због његове користи при глобалним закључцима. Корист од његовог нефиксирања се најбоље могла видети у доказу претходне леме, без које ни нема главног резултата овог рада.

<sup>12</sup>Мада смо у примеру 1.25 видели да сличан закључак важи и за катеноид и хеликоид.

<sup>13</sup>Где јединичну кружницу  $S^1 = \{(\cos \phi, \sin \phi) | \phi \in [0, 2\pi]\}$  идентификујемо са тачком  $\phi$ .



Функције  $r(s)$ ,  $\theta(s, t)$  и  $\lambda(s)$  дефинисане су са:

$$\begin{cases} r(s) = \frac{\sqrt{1+B^2+2B \sin(2Hs)}}{2H}, \\ \theta(s, t) = \frac{t}{m} - 4H^2 h \int \frac{1+B \sin(2Hs)}{\sqrt{1+B^2+2B \sin(2Hs)+4H^2 h^2} (1+B^2+2B \sin(2Hs))} ds, \\ \lambda(s) = \frac{(1+B \sin(2Hs)) \sqrt{1+B^2+2B \sin(2Hs)+4H^2 h^2}}{1+B^2+2B \sin(2Hs)} ds \end{cases} \quad (4.35)$$

где су параметри  $B$ ,  $h$  и  $m$  дефинисани преко  $B_0$  и  $\phi$  као:

$$\begin{cases} B = B(B_0, \phi) := \frac{2B_0}{2+(B_0^2-1)(1-\cos \phi)} \\ h = h(B_0, \phi) := \frac{(B_0^2-1) \sin \phi}{2H(2+(B_0^2-1)(1-\cos \phi))} \\ m = m(B_0, \phi) := \sqrt{\frac{2}{2+(B_0^2-1)(1-\cos \phi)}}. \end{cases} \quad (4.36)$$

*Доказ.* Једино што је још остало доказати јесте шта се дешава када је  $B_0 = 1$ . Тада, по (4.36) параметар  $B$  добија такође вредност 1,  $h$  постаје 0, док је  $m = 1$  и  $a_0 = 0$ . И све то независно од времена  $\phi$ ! Дакле, изометричка трансформација овде све време "стоји" у једној те истој ротационој површи- сфери. Тада израз  $m^2(U(s))^2 - h^2$  постаје само  $(U(s))^2$ . А како  $U(s)$  за одређене вредности параметра  $s$  (нпр.  $s = \frac{3\pi}{4H}$ ) постаје 0, то параметризација (4.35) има сингуларитете, те у овим случајевима није глобална.  $\square$

---

## Динамичка интерпретација

---

У овом поглављу ћемо покушати да, слично Делонијевом раду у [5], дођемо до закључака како динамички генерисати хеликоидне *СМС* површи, или бар неке од њих за које је то могуће. Ова глава је заснована на интересантним радовима [16] и [17] Оскара Пердомоа<sup>1</sup>.

### 5.1 Покретна трака криве

У претходној глави смо видели јасну преплетеност хеликоидних *СМС* и Делонијевих површи гледано из перспективе диференцијалне геометрије. Логично је поставити питање да ли слична повезаност постоји и при њиховој динамичкој интерпретацији, тј. да ли, као при генерисању Делонијевих површи, постоји неки начин како профилна крива хеликоидне *СМС* површи настаје кинематички.

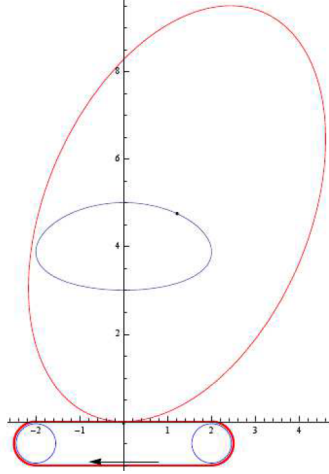
Како при настајању хеликоидних површи, сем ротације профилне криве око осе ротације имамо и њену симултану транслацију, то и при поступку динамичког креирања профилне криве хеликоидних *СМС* површи морамо модификовати поступак којим су настајали рулети Делонијевих површи. Пре свега, поступак генерисања Делонијевих рулета се може формализовати увођењем оператора који од конике и неке фиксне тачке генерише нову криву-рулет.

Сада желимо конструисати сличан оператор, али погоднији кривама које ће касније вршити хеликоидно кретање које нужно не мора бити ротационо. Конструкција коју ћемо изложити може бити од интереса сама по себи, неvezано за контекст овог рада. Најпре, на мало неформалан начин, можемо замислити да је нека раванска

---

<sup>1</sup>*Oscar Mario Perdomo*, колумбијски математичар рођен 1970. године, бави се диференцијалном геометријом.

крива<sup>2</sup> (у нашем случају ће бити у равни  $Oxz$ ) једном тачком при-  
качена за координатни почетак друге равни (у нашем случају за  
координатни почетак  $Oxy$  равни), и да се уместо котрљања креће  
по тој равни као по покретној траци<sup>3</sup>, или математички прецизније  
речено, да је током целог времена тог кретања тангентни вектор  
те криве у тачки  $(0, 0)$  вектор  $\vec{i}$ . Интересује нас крива коју ће при  
овом кретању описати тачка криве која се у почетку налазила у  
координатном почетку.



Слика 5.1: Концепт покретне траке криве. Извор:[17].

Желимо математички формализовати претходно наведени по-  
ступак увођењем оператора покретне траке који ће регуларне кри-  
ве преводити у регуларне криве.

**Дефиниција 5.1.** Нека је  $\alpha : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbf{R}^2$  раванска, природно  
параметризована регуларна крива која пролази кроз тачку  $(0, 0)$ .  
**Покретна трака криве  $\alpha$**  је крива

$$(TS(\alpha))(s) := \{\mathcal{J}(0, 0) | \mathcal{J} \in SE(2) (\forall s \in [-\epsilon, \epsilon]) \mathcal{J}(\alpha(s)) = (0, 0) \\ d\mathcal{J}_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = (1, 0)\}.$$

Следеће тврђење ће нам бити од велике користи у наредном  
одељку.

**Лема 5.2.** Нека је  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$ ,  $s \in [-\epsilon, \epsilon]$  природно параме-  
тризована крива. Дефинишимо за свако  $s \in [-\epsilon, \epsilon]$ :

$$\begin{cases} \xi_1(s) := x(s)x'(s) + z(s)z'(s) \\ \xi_2(s) := -x(s)z'(s) + z(s)x'(s). \end{cases} \quad (5.1)$$

Тада је  $TS(\alpha)(s) = (-\xi_1(s), -\xi_2(s))$ .

<sup>2</sup>е нужно коника

<sup>3</sup>енг. *Treadmill sled*

*Доказ.* Како је крива  $\alpha(s)$  природно параметризована, то постоји диференцијабилна функција  $\theta(s)$  таква да је

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)).$$

Посматрајмо изометрију  $\mathcal{J} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$  дефинисану са

$$(\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2) \mathcal{J}(a, b) := \begin{bmatrix} \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ -\sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi_1(s) \\ \xi_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Као композиција ротације и translације,  $\mathcal{J}$  је директна изометрија равни и за њу за свако  $s \in [-\epsilon, \epsilon]$  важи  $\mathcal{J}(\alpha(s)) = \mathcal{J}(x(s), z(s))$  као и

$$d\mathcal{J}_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = \begin{bmatrix} \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ -\sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta(s) \\ \sin \theta(s) \end{bmatrix} = (1, 0).$$

Пошто је је  $J$  једина оваква директна изометрија равни, то одмах по дефиницији и користећи (5.2) добијамо да је покретна трака криве  $\alpha(s)$  једнака  $\mathcal{J}(0, 0) = -(\xi_1(s), \xi_2(s))$ .  $\square$

**Напомена.**  $\xi_1(s)$  и  $\xi_2(s)$  нису неке вештачки наметуте координате. Ако посматрамо покретни Френе<sup>4</sup>-Серов<sup>5</sup> репер дуж криве  $\alpha(s)$ :

$$T(s) := \alpha'(s) = (x'(s), z'(s)) \quad N(s) := (-z'(s), x'(s)),$$

онда су  $\xi_1(s)$  и  $\xi_2(s)$  заправо координате тачке  $\alpha(s) = (x(s), z(s))$  у Френе-Серовој бази.

## 5.2 Увојци

У овом одељку ћемо дефинисати једну класу хеликоидних *СМС* површи од које ћемо имати двојаку корист: моћи ћемо да опишемо како њена профилна крива динамички настаје и њена профилна крива ће имати геометријски врло интересантан облик. Пре свега, за профилну криву  $(x(s), 0, z(s))$ , посматраћемо површи облика

$$\phi(s, t) := (x(s) \cos(\omega t) + z(s) \sin(\omega t), x(s) \sin(\omega t) - z(s) \cos(\omega t), t). \quad (5.3)$$

Нека је  $g_\tau$  произвољно хеликоидно кретање распона  $h$ . Како је

$$g_\tau(\phi(s, t)) = (x(s) \cos(\omega t + \tau) + z(s) \sin(\omega t + \tau),$$

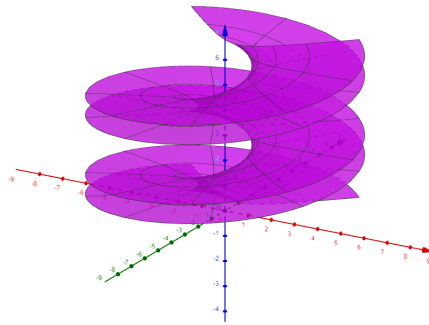
$$x(s) \sin(\omega t + \tau) - z(s) \cos(\omega t + \tau), t + h\tau),$$

видимо да ће се за  $t + h\tau = t + \frac{\tau}{\omega}$ , односно  $h = \frac{1}{\omega}$  (5.3) представљати једну хеликоидну површ. Дакле, за сваку угаону брзину  $\omega > 0$ , (5.3) ће давати локалну параметризацију хеликоидне површи одређеног распона.

<sup>4</sup> Jean Frederic Frenet (1816-1900), француски математичар и астроном

<sup>5</sup> Joseph - Alfred Serret (1819-1885), француски математичар

У овој глави нећемо бити превише рестриктивни по питању услова које профилна крива задовољава и биће нам сасвим довољно да је профилна крива регуларна и природно параметризована па макар некад добијена површ не била регуларна у свакој тачки. Напокон можемо и дефинисати површи које су главни циљ изучавања овог одељка.



Слика 5.2: Крива облика (5.3) за  $w = 2$  чија је профилна крива  $(\sinh(s), 0, -\cosh(s))$  и где  $(s, t) \in (-2, 2) \times (0, 2\pi)$ .

**Дефиниција 5.3.** Увојак<sup>6</sup> је хеликоидна површ облика (5.3) која је константне средње кривине.



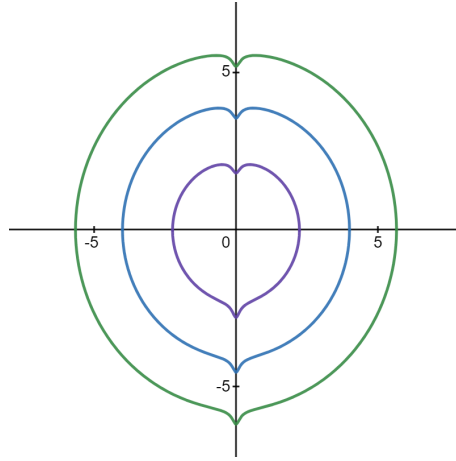
Слика 5.3: Слаткиши по имену *twizzlers* америчке компаније *Hershey's*. Извор : интернет.

Од посебног ће нам интереса бити увојци средње кривине 1, а при њиховом изучавању од велике користи ће бити координате покретне траке  $(\xi_1(s), \xi_2(s))$  дефинисане у претходном одељку. Такође, биће нам за фиксиране  $w > 0$  од значаја и функције облика

$$h_w(x, y) := x^2 + y^2 + \frac{y}{\sqrt{1 + \omega^2 x^2}}, \quad (5.4)$$

тј. криве задате имплицитно као  $h_w = M$ , где  $M \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ . Те криве су препознатљивог, срцоликог облика.

<sup>6</sup> енг. *twizzler*

Слика 5.4: Срцолике криве за  $w = 8$  и  $M = -1/4, 5, 16$  и  $32$ .

**Теорема 5.4.** Увојак дат параметризацијом (5.3) ће имати средњу кривину 1 акко функције  $\xi_1(s)$  и  $\xi_2(s)$  дефинисане са (5.1) задовољавају систем диференцијалних једначина

$$\begin{cases} \xi_1'(s) = f_1(\xi_1(s), \xi_2(s)) \\ \xi_2'(s) = f_2(\xi_1(s), \xi_2(s)) \end{cases} \quad (5.5)$$

где су функције  $f_1(x, z)$  и  $f_2(x, z)$  дефинисане као:

$$\begin{cases} f_1(x, z) := \frac{1 + \omega^2 x^2 + 2(1 + \omega^2 x^2)^{\frac{3}{2}} z}{1 + \omega^2 (x^2 + z^2)} \\ f_2(x, z) := \frac{\omega^2 z - 2(1 + \omega^2 x^2)^{\frac{3}{2}} x}{1 + \omega^2 (x^2 + z^2)} \end{cases} \quad (5.6)$$

Приде, функција  $h_\omega^{-1}(M)$  ће бити коначна дуж тог решења за све реалне бројеве  $M \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ .

*Доказ.* Пошто је профилна крива увојка природно параметризована, то је  $x'(s) = \cos \theta(s)$  и  $z'(s) = \sin \theta(s)$  за неку диференцијабилну функцију  $\theta(s)$ . Изражено преко ње, координатне функције покретне траке профилне криве су:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(s) \\ \xi_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ -\sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ z(s) \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Применом инверзне матрице на (5.7) добијамо координатне функције профилне криве изражене преко координатних функција покретне траке:

$$\begin{cases} x(s) = \cos \theta(s) \xi_1(s) - \sin \theta(s) \xi_2(s) \\ z(s) = -\sin \theta(s) \xi_1(s) - \cos \theta(s) \xi_2(s) \end{cases} \quad (5.8)$$

На основу (5.8) видимо да важи  $(x(s))^2 + (z(s))^2 = (\xi_1(s))^2 + (\xi_2(s))^2$ . Диференцирање (5.7) нас доводи до система диференцијалних једначина

$$\begin{cases} \xi_1'(s) = 1 + \theta'(s)(z \cos \theta(s) - x \sin \theta(s)) = 1 + \theta'(s)\xi_2(s) \\ \xi_2'(s) = -x'(s)x(s)\theta'(s) - z'(s)z(s)\theta'(s) = -\theta'(s)\xi_1(s). \end{cases} \quad (5.9)$$

Корисно је приметити и да важи

$$x'(s)z''(s) - z'(s)x''(s) = \theta'(s).$$

Сада можемо израчунати базне векторе тангентног простора површи (5.3) као и њихове деформационе векторе:

$$\begin{aligned} \phi_s &= (x'(s) \cos(\omega t) + z'(s) \sin(\omega t), x'(s) \sin(\omega t) - z'(s) \cos(\omega t), 0) \\ \phi_t &= \omega \left( -x(s) \sin(\omega t) + z(s) \cos(\omega t), x(s) \cos(\omega t) + z(s) \sin(\omega t), \frac{1}{\omega} \right) \\ \phi_{ss} &= (x''(s) \cos(\omega t) + z''(s) \sin(\omega t), x''(s) \sin(\omega t) - z''(s) \cos(\omega t), 0) \\ \phi_{st} &= \omega (-x'(s) \sin(\omega t) + z'(s) \cos(\omega t), x'(s) \cos(\omega t) + z'(s) \sin(\omega t), 0) \\ \phi_{tt} &= \omega^2 (-x(s) \cos(\omega t) - z(s) \sin(\omega t), -x(s) \sin(\omega t) + z(s) \cos(\omega t), 0) \end{aligned}$$

Одавде добијамо кофицијентне прве фундаменталне форме:

$$E = (x'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1 \quad F = \omega \xi_2(s) \quad G = 1 + \omega^2((\xi_1(s))^2 + (\xi_2(s))^2).$$

А како је

$$\begin{aligned} \phi_s \times \phi_t &= \\ & \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(s) \cos(\omega t) + z'(s) \sin(\omega t) & x'(s) \sin(\omega t) - z'(s) \cos(\omega t) & 0 \\ -x(s) \sin(\omega t) + z(s) \cos(\omega t) & x(s) \cos(\omega t) + z(s) \sin(\omega t) & \frac{1}{\omega} \end{vmatrix} \\ &= (\sin(\omega t - \theta(s)), -\cos(\omega t - \theta(s)), \omega \xi_1(s)). \end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је Гаусово пресликавање површи (5.3)

$$n(s, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2}} (\sin(\omega t - \theta(s)), -\cos(\omega t - \theta(s)), \omega \xi_1(s)).$$

Сад можемо наћи и коефицијенте друге фундаменталне форме

површи (5.3):

$$e = \frac{-x''(s) \sin \theta(s) + z''(s) \cos \theta(s)}{\sqrt{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2}} = \frac{\theta'(s)}{\sqrt{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2}}$$

$$f = -\frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2}}$$

$$g = \frac{\omega^2}{\sqrt{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2}}(x \sin \theta(s) - z \cos \theta(s)) = \frac{-\omega^2 \xi_2(s)}{\sqrt{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2}}.$$

Како су увојци средње кривине 1, за њих ће, по (1.17), важити  $2(EG - F^2) = eG - 2fF + Eg$ , односно једначина:

$$2(1 + \omega^2(\xi_1(s))^2) = \frac{\theta'(s)(1 + \omega^2((\xi_1(s))^2 + (\xi_2(s))^2)) + \omega^2 \xi_2(s)}{\sqrt{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2}}.$$

За решавање система (5.9) нам је неопходан израз за  $\theta'(s)$ :

$$\theta'(s) = \frac{2(1 + \omega^2(\xi_1(s))^2)^{\frac{3}{2}} - \omega^2 \xi_2(s)}{1 + \omega^2((\xi_1(s))^2 + (\xi_2(s))^2)} \quad (5.10)$$

Заменом (5.10), систем (5.9) постаје:

$$\begin{cases} \xi_1'(s) = \frac{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2 + 2(1 + \omega^2(\xi_1(s))^2)^{\frac{3}{2}} \xi_2(s)}{1 + \omega^2((\xi_1(s))^2 + (\xi_2(s))^2)} \\ \xi_2'(s) = \frac{\omega^2 \xi_2(s) - 2(1 + \omega^2(\xi_1(s))^2)^{\frac{3}{2}} \xi_1(s)}{1 + \omega^2((\xi_1(s))^2 + (\xi_2(s))^2)} \end{cases} \quad (5.11)$$

Директном провером се може видети да је функција

$$h_w(\xi_1, \xi_2) := \frac{\xi_2}{\sqrt{1 + \omega^2(\xi_1(s))^2}} + (\xi_1(s))^2 + (\xi_2(s))^2$$

први интеграл система (5.11), тј. да звако решење  $(\xi_1(s), \xi_2(s))$  тог система важи  $h_w(\xi_1(s), \xi_2(s)) = M$ , где је  $M$  реална константа, па закључујемо да тврђење важи.  $\square$

Суштински значај овог тврђења се огледа у његовој следећој директној последици.

**Последица 5.5.** Покретна трака профилне криве увојка је срцолика крива  $-h_w^{-1}(M)$  за неку реалну константу  $M \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ . Вредност  $M = -\frac{1}{4}$  одговара цилиндру полупречника  $\frac{1}{2}$ .

**Напомена.** Из претходног тврђења је јасно да нас од конкретних примера увојака дели само ефективна параметризација срцоликих



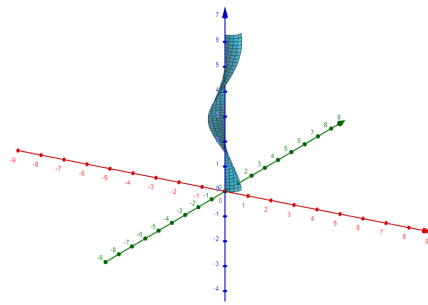
кривих  $h_\omega^{-1}(M)$ . У [17] је доказано да је за свако  $M > -\frac{1}{4}$  и свако  $w > 0$  срцолика крива  $h_\omega^{-1}(M)$  дата у параметарском облику:

$$\begin{cases} x(s) = A \cos s \\ z(s) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4M + B \cos^2 s} \sin s}{2\sqrt{1 + \omega^2 A^2 \cos^2 s}} \end{cases} \quad (5.12)$$

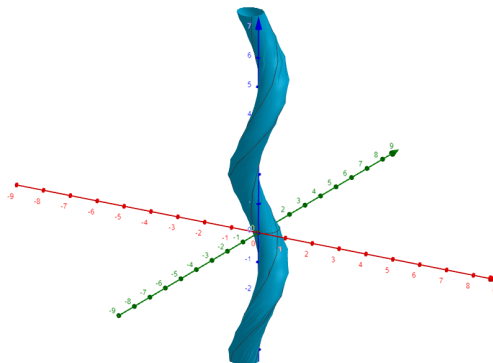
при чему су константе  $A$  и  $B$  дате као:

$$\begin{cases} A = \frac{\sqrt{-1 + M\omega^2 + \sqrt{1 + (1 + 2M)\omega^2 + M^2\omega^4}}}{\sqrt{2}\omega} \\ B = \frac{2 + 2M^2\omega^4 + \omega^2 + 2(M\omega^2 - 1)\sqrt{1 + (1 + 2M)\omega^2 + M^2\omega^4}}{\omega^2} \end{cases} \quad (5.13)$$

Сада можемо и дати примере увојака:



Слика 5.5: Увојак средње кривине 1 за  $M = 0$  и  $w = 1$  и за који  $(s, t) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$



Слика 5.6: Увојак средње кривине 1 за  $M = 0$  и  $w = 1$  и за који  $(s, t) \in (-20\pi, 20\pi) \times (-20\pi, 20\pi)$

Корисно би било имати, ако је могуће, и неке једноставније параметризације неких увојака за цртање. Разрешење те дилеме нам даје следећа теорема:

**Теорема 5.6.** Површ облика (5.3) је равна акко је покретна трака њене профилне криве тачка  $O_{xz}$  равни различита од  $(0, 0)$  (и у том случају је површ цилиндар) или вертикална полуправа с теменом на  $x$ -оси које није у координатном почетку. Профилна крива је тада експлицитно дата са:

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\sqrt{as+b}}{a}\right) + \sqrt{as+b} \sin\left(2\frac{\sqrt{as+b}}{a}\right) \\ z(s) = \sqrt{as+b} \cos\left(2\frac{\sqrt{as+b}}{a}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\sqrt{as+b}}{a}\right) \end{cases} \quad (5.14)$$

*Доказ.* Уколико је површ облика (5.3) равна, то је  $eg - f^2 = 0$ , па користећи коефицијенте друге фундаменталне форме површи (5.3) из доказа 5.4 добијамо једначину  $\omega^2(\theta'(s)\xi_2(s) + 1) = 0$ , која се своди на

$$\theta'(s) = -\frac{1}{\xi_2(s)}, \quad (5.15)$$

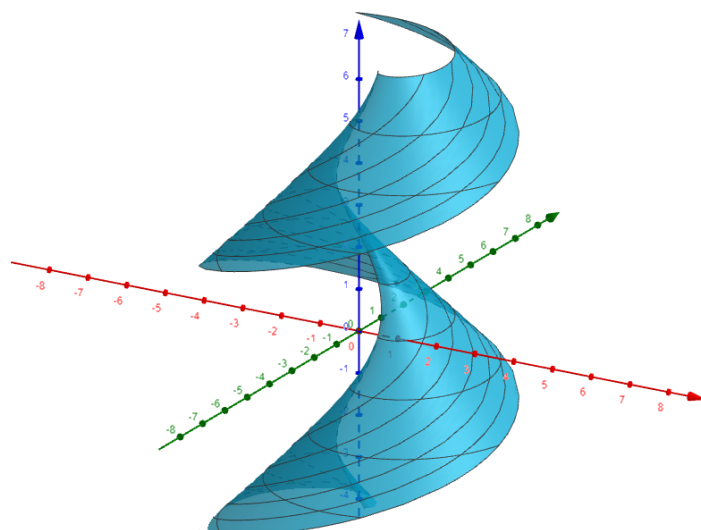
чијом заменом у систем (5.9) долазимо до система:

$$\begin{cases} \xi_1'(s) = 0 \\ \xi_2'(s) = \frac{\xi_1(s)}{\xi_2(s)}. \end{cases} \quad (5.16)$$

Решење прве једначине тог система је  $\xi_1(s) = \frac{a}{2}$  за неку реалну константу  $a$ . Зависно од природе те константе имамо два различита решења:

1. ( $a = 0$ ) У овом случају је  $\xi_1(s) = 0$  и  $\xi_2(s) = b \neq 0$ , те је покретна трака профилне криве  $(x(s), z(s))$  тачка различита од координатног почетка, док је сама профилна крива, по (5.8)  $(-b \cos \theta(s), -b \cos \theta(s))$  и пошто је површ равна, закључујемо да је у питању цилиндар.
2. ( $a \neq 0$ ) Друга једначина у (5.16) постаје  $2\xi_2'(s)\xi_2(s) = a$  чијом интеграцијом добијамо да је  $\xi_2(s) = \pm\sqrt{as+b}$ , док нам (5.15) даје диференцијалну једначину  $\theta'(s) = \mp\frac{1}{\sqrt{as+b}}$  која се решава директном интеграцијом и добијамо да је  $\theta(s) = \mp\frac{2\sqrt{as+b}}{a}$ . Заменом тог резултата у (5.8) добијамо једначине (5.14)

□



Слика 5.7: Равна површ облика (5.3) за  $a = 2$  и  $b = 0$  и за коју  $(s, t) \in (-2\pi, 2\pi) \times (-2\pi, 2\pi)$ .

---

### Закључак

---

Кроз цео рад смо видели преплетеност ротационих и хеликоидних површи. Почевши од самих њихових дефиниција у 2. поглављу, преко њихових метричких својстава (о чему је говорила Бурова теорема), и коначно до нивоа *СМС* површи, односно њиховог смештања у простору.

Делонијеве површи, иако историјски далеко од модерне математике, испоставиле су се као неопходан алат у разумевању хеликоидних површи константне средње кривине. Изометричка деформација хеликоид-катеноид је показала како од Делонијевих површи могу настати хеликоидне површи константне средње кривине, макар на нивоу минималних површи.

Главним резултатом овог рада доказано је да то није изолован случај, већ да је једини начин како хеликоидне *СМС* површи настају путем изометричких деформација Делонијевих површи. Закључили смо да све могуће хеликоидне површи константне средње кривине настају тако што одаберемо једну конкретну Делонијеву површ из једнопараметарске фамилије описане параметром  $B_0$  у 3. одељку друге главе овог рада и прођемо кроз њену придружену Лосонову фамилију у којој се, поред полазне Делонијеве површи, налазе све њој изометричне хеликоидне површи константне средње кривине једнаке полазној Делонијевој површи.

Коначно, у петој глави смо видели да се Делонијев рад може пренети на модерна разматрања чак и у контексту динамике. Идеја о генерисању Делонијевих површи у реалном времену се, уз одређене модификације, преноси на хеликоидне *СМС* површи концептом координата покретне траке.

И поврх свега, многе интересантне и актуелне теме сродне тематици овог рада, попут простора модула увојака, координата покретне траке Делонијевих површи, а поготову стабилности хелико-

идних површи константне средње кривине нису могле наћи место у завршној верзији овог мастер рада из практичних разлога.

---

## Биографија аутора

---

Филип Вукојевић је рођен у Новом Пазару 1. фебруара 1991. године. Основну и средњу школу завршио у Новом Пазару као носилац Вукове дипломе. Дипломирао на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене, са просечном оценом 8.05.



---

## Литература

---

- [1] Elsa Abbena, Simon Salamon, Alfred Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica (3rd edition)*, Chapman and Hall/CRC, London, 2006
- [2] Miroslava Antić, *Diferencijalna geometrija mnogostrukosti*, Matematički fakultet, Beograd, 2015
- [3] Edmond Bour, *Memoire sur le deformation de surfaces*, Journal de l'Ecole Polytechnique, XXXIX Cahier (1862), 1-148
- [4] Jean-Gaston Darboux, *Lecons Sur la Theorie Generale des Surfaces* Vol. I, Paris, 1914
- [5] Charles-Eugene Delaunay, *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures Appl. Series 1, 6 (1841), 309-320
- [6] Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976
- [7] Manfredo P. do Carmo, Marcos Dajczer, *Helicoidal Surfaces with Constant Mean Curvature*, Tohoku Math. J. 34 (1982), 425-435
- [8] Mirjana Đorić, *Geometrija 3 - Materijal za studente*, Matematički fakultet, Beograd, 2023
- [9] Toshihiko Ikawa, *Bour's theorem and Gauss map*, Yokohama Mathematical Journal Vol. 48 (2000), 173-180
- [10] Katsuei Kenmotsu, *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tohoku Math. J. 32 (1980), 147-153
- [11] Katsuei Kenmotsu, *Surfaces with constant mean curvature*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003
- [12] Herbert Blaine Lawson Jr., *Complete minimal surfaces in  $S^3$* , Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 92, No. 3, 335-374



- 
- [13] Rafael Lopez, *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013
  - [14] Rafael Lopez, *Surfaces with constant mean curvature in Euclidean space*, International Electronic Journal of Geometry Volume 3, No. 2, (2010), p. 67-101
  - [15] Eberhard Malkowsky, Vesna Veličković, *Visualisation of isometric maps*, Filomat Vol.17 (2003), 107-116
  - [16] Oscar Mario Perdomo, *A dynamical interpretation of the profile curve of CMC twizzler surfaces*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 258 (2012), 459-485
  - [17] Oscar Mario Perdomo, *The treadmill sled of a curve* arXiv 1105.3460 (2011)
  - [18] Zoran Rakić, *Geometrija 3 - Materijali za predmet*, Matematički fakultet, Beograd, 2018