Универзитет у Београду

Математички факултет

Марина Сладојевић

Фибоначијева репрезентација природних бројева

Мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

проф. др Небојша Икодиновић
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Горан Ђанковић
Универзитет у Београду, Математички факултет

др   Александра Костић
Универзитет у Београду, Математички факултет

Садржај

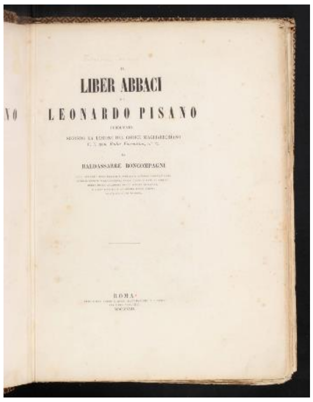
1. Увод

Позициони бројевни системи заузимају важно место у настави математике и информатике. Изучавање разноврсних алтернативних начина репрезентације бројева може бити веома корисно и за увођење ученика у истраживачки рад и за откривање различитих приступа решавању неких практичних проблема. Фибоначијева репрезентација природних бројева је заснована на следећој теореми: *сваки природан број се на јединствен начин може представити као збир Фибоначијевих бројева, при чему међу сабирцима не постоје два узастопна Фибоначијева броја*.
Штавише, Фибоначијев низ је једини низ који задовољава претходну теорему.

У првом делу рада биће изложене основне особине Фибоначијевог низа и теореме на којима је заснован Фибоначијев бројни систем и рачун у овом систему.

Други део рада биће посвећен применама Фибоначијевог система: од сасвим једноставних, попут брзог претварања километара у миље (и обратно), до сложенијих и важних примена, попут Фибоначијевог кодирања.

1.1 Leondardo Fibonacci (око 1170- око 1250.)



Слика 1:Liber abbaci

Фибоначи је био италијански математичар из Пизе. Већи део свог образовања стекао је на северу Африке, где је, између осталог, приметио другачију методу записивања бројева од оне која је коришћена у Европи. То су били бројеви „1,2,...,9“ и за њега до тада непозната цифра „0“. Када се вратио у Италију 1202. године издаје књигу „Liber abbaci“ (Књига о рачунању), која је његово најутицајније дело. Овом књигом увео је арапску нотацију бројева у Европу и решио много комбинаторних проблема. Победио је на математичком такмичењу у Пизи 1225. године, задививши краља Фридриха II, који је изградио Универзитет у Напуљу 1224. године.

Неки од Фибоначијевих дела, поред горе поменутог, су:

„Practica geometriae“ – 1220.

„Flos“ - 1225.

„Liber quadratorum“ – 1225.

2. Познатији бројевни системи

Бројевни (бројни) системи су системи помоћу којих се представљају бројеви. Сваки бројевни систем се састоји од скупа цифара и правила за записивање бројева помоћу изабраних цифара. Бројевни системи се деле на непозиционе (они системи код којих значење цифре не зависи од позиције те цифре у запису броја) и позиционе бројевне системе. Избор цифара у позиционим системима одређује основа, односно база система. У позиционом систему са основом b, симболе за записивање бројева $0, 1, \ldots, b-1$ користимо за записивање свих природних бројева. По бази коју користе, позициони бројевни системи су добијали имена: декадни или децимални (b=10), бинарни (b=2), октални (b=8), хексадекадни (b=16),... Пример непозиционог бројевног система представља такозвани римски систем записивања бројева.

Генерички запис броја X у било ком позиционом систему са базом b гласи:

$(X)_b = \sum_{i=0}^{n} x_i b^i$,

где су:

b- основа бројевног система

$n \geq 0$ – цео број

x_i- цифре у бројевном систему. Важи $0 \leq x_i \leq b-1$.

Природан број X у систему са основом b можемо записати у облику

$(X)_b = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \cdots + x_1 b^1 + x_0 b^0$,

где су ознаке $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0$ било која од цифара система од 0 до $b-1$.

Теорема: Нека је $b > 1$ цео број. Тада се свако $X \in \boldsymbol{N}$ на јединствен начин може записати у следећем облику:

$$X = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \cdots + x_1 b + x_0$$

где је $x_n \neq 0$ и $0 \leq x_i < b$ за све $0 \leq i \leq n$.

Доказ: Теорему доказујемо индукцијом (по X). Ако је $X \epsilon \{1,2, \ldots, b-1\}$ тврђење, јасно, следи. Претпоставимо да се сваки број мањи од X може записати у овом облику, при чему је $X \geq b$. Како дати услови захтевају да важи $0 \leq x_i < b$ и $b|(X - x_0)$, следи да x_0 мора бити остатак броја X при дељењу са бројем b, тј. x_0 је јединствено одређено. Нека је сада $X' = (X - x_0)/b$, тј. целобројни количник X при дељењу са b. Пошто је $0 < X' < X$, тада по индукцијској претпоставци имамо да се X' на јединствен начин може записати у траженом облику:

$$X' = x_m b^m + x_{m-1} b^{m-1} + \cdots + x_2 b + x_1.$$

Како је $X = X'b + x_0$, следи $X = x_m b^{m+1} + x_{m-1} b^m + \cdots + x_1 b + x_0$, па добијамо жељени запис за X. Он је јединствен, јер ако би било $X = x_k' b^k + \cdots + x_1' b + x_0'$,

где је $x_k' \neq 0$ и $0 \leq x_j' < b$ за све $0 \leq j \leq k$, на основу ранијег закључка имамо $x_0' = x_0$, па је $x_k' b^{k-1} + \cdots + x_1' = x_m b^m + \cdots + x_1$.

На основу јединствености из индуктивне претпоставке следи да мора бити $k = m$ и

$x_i' = x_i$ за све $1 \leq i' \leq m$, што се и тражило. ■

2.1 Децимални систем

У широкој употреби је децимални систем и заснива се на систему десетица. Зашто баш 10? Верује се да је због тога што су раније системи били засновани на бројању помоћу прстију. За овакво представљање потребно нам је 10 симбола 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и они се називају декадне цифре.

Представимо број 4507 помоћу овог система:

$$4507 = 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

Сваки природан број се може записати као збир производа чији је један чинилац цифра система, а други декадна јединица (односно степен броја 10).

2.2 Бинарни систем

Бинарни систем је заснован на степену броја 2. Постоје две бинарне цифре, то су 0 и 1. Овај систем је најзаступљенији у рачунарству.

Пример 1: Представљање броја 1011 из бинарног у декадни систем:

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

Пример 2: Ако желимо број 11 да из декадног записа преведемо у бинарни, то радимо на следећи начин:

- Прво се дели 11 са 2:

  $11 : 2 = 5$, остатак је 1

  Остатак се записује са стране, а 5 се дели са 2:

$5:2 = 2$, остатак је 1,

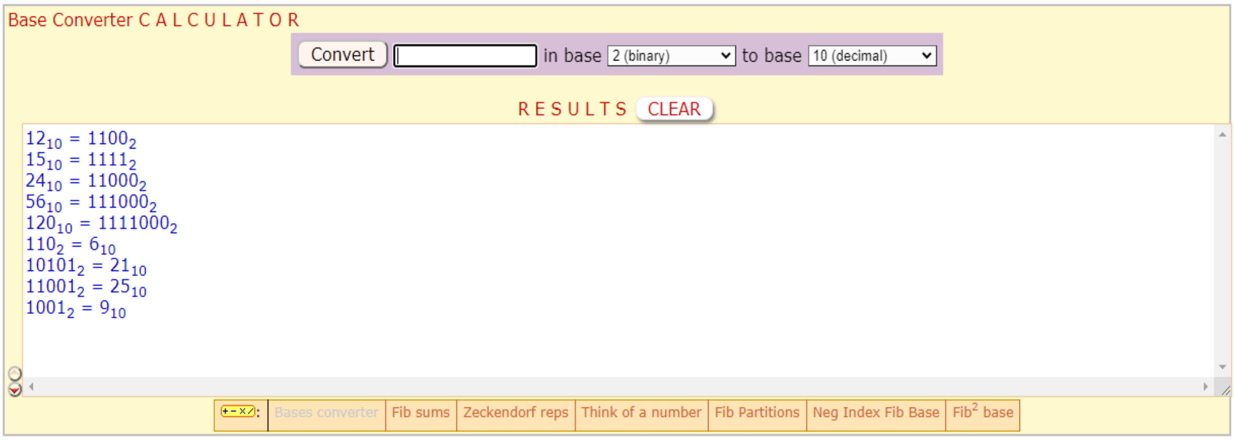
По истом принципу настављамо док као количник не добијемо 0:

$2:2 = 1$, остатак је 0

$1:2 = 0$, остатак је 1

Затим се записују сви остаци али у супротном редоследу од оног којим су добијани. Добијамо број 1011.

-Примери превођења бројева из децималне базе у бинарну и обрнуто, добијени применом интерактивних калкулатора (https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibrep.html#section2.1):



Слика 2. Примери превођења бројева из децималне базе у бинарну, и обрнуто

Још неке од база су:

- база 3 се зове тернарна,
- база 4 се зове квартарна,
- база 5 се зове квинарна,
- база 6 се зове сенарна,
- база 7 се зове септенарна,
- база 8 се зове октонална или октална,
- база 9 се зове нонарна,....

Најранији систем записивања бројева јесте унарни бројевни систем. У њему је сваки број представљен низом јединица (цртица или зареза) одговарајуће дужине.

Пример: $2 = 11$

$5 = 11111$

2.3 Базе веће од 10

За представљање бројева у базама већим од 10 користи се десет цифара и слова. Узимамо почетна слова абецеде, па би слово А као цифра одговарало броју 10 записаном у декадном систему, слово B би одговарало броју 11, слово C броју 12, и тако даље.

Пример: Приказаћемо број 876 (записан у декадном систему) у систему са базом 16:

$876 = 54 \cdot 16 + 12$

$54 = 3 \cdot 16 + 6$ $\qquad\qquad 876 = (36C)_{16}$

$3 = 0 \cdot 16 + 3$

За представљање броја узимамо остатке добијене при дељењу, од последњег до првог добијеног, с тим да бројеве веће од 9 записујемо помоћу слова, као што је горе објашњено.

2.4 Римски бројеви

Римска цифра	I	V	X	L	C	D	M
Вредност	1	5	10	50	100	500	1000

Табела 1. Ознаке римских бројева

Уместо цифара, у овом систему су коришћена слова латинског алфабета, по следећим правилима:

- ниједна цифра (слово) не сме да се јави више од три пута узастопно
- када се мања цифра нађе непосредно испред веће онда се мања од веће одузима, па је $IV = V - I = 5 - 1 = 4$
- када се мања цифра нађе непосредно иза веће цифре, онда се оне сабирају, па је $VI = V + I = 5 + 1 = 6$
- за записивање бројева већих од хиљаду ставља се црта изнад римских бројева, где надвучени број означава хиљаду пута већу вредност од вредности тог броја, па је $\overline{IV} = 4000$, $\overline{XX} = 20000.$
- када се цифра налази између две цифре веће вредности, њена вредност се одузима од друге цифре и та разлика се додаје вредности прве цифре, па је $XIV = 10 + (5 - 1) = 10 + 4 = 14.$
- када се цифре налазе у опадајућем поретку, све вредности се сабирају, па имамо $XVII = 10 + 5 + 1 + 1 = 17.$

3. Фибоначијев бројевни систем

3.1 Фибоначијеви бројеви

Фибоначијеви бројеви представљају низ бројева у којем је вредност сваког члана низа, почев од трећег, добијена као збир претходна два члана. Прва два члана овог низа су 0 и 1, а сваки наредни члан се добија по описаном правилу.

Дакле, тај низ чине следећи бројеви:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Фибоначи је тај низ у својој „Књизи о абакусу" представио „Проблемом зечева":

Задатак: Претпоставимо да на почетку имамо пар зечева, једну мушку и једну женску јединку, које посматрамо од првог месеца њиховог живота. Зечеви достижу полну зрелост другог месеца живота. Полно зрела женка сваког следећег месеца рађа нови пар зечева. Колико ће парова зечева бити после n месеци? Претпоставимо да зечеви не умиру.

Решење: Са f_n означимо број парова после n месеци. $f_1 = 1$ и $f_2 = 1$, јер зечеви у прва два месеца нису добили нов пар зечева. Како у другом месецу живота достижу полну зрелост, у трећем месецу имамо један пар зечева из претходног месеца и један нови пар зечева, укупно два пара. У четвртом месецу први пар добија још један нови пар зечева, а пар који је рођен у трећем месецу није достигао полну зрелост, па нема нових потомака. Што значи да у четвртом месецу имамо укупно три пара зечева. Настављајући на исти начин, закључујемо следеће: f_n- број парова зечева у n- том месецу се добија када се броју парова из прошлог месеца f_{n-1} дода број новорођених парова, а њих ће бити колико и парова зечева од пре два месеца f_{n-2} (јер су они у овом месецу добили потомке).

Добијамо : $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Што значи да је Фибоначијев низ задат следећим једнакостима:

$f_0 = 0$

$f_1 = 1$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,, n \geq 2$

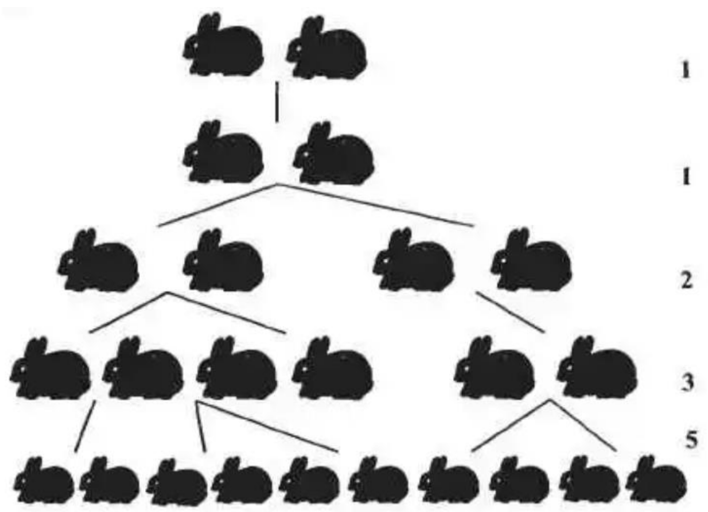
Одатле можемо добити $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$, па користећи ту релацију Фибоначијев низ може се проширити и на негативне бројеве

$$f_0 = 0 \text{ и } f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n\ ,$$

тада низ постаје $\ldots, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

	Број нових парова зечева	**Број полно зрелих зечева**	**Укупан број парова зечева**
Почетак Јануар	1	0	1
После месец дана Фебруар	0	1	1
После два месеца Март	1	1	2
После три месеца Април	1	2	3
После четири месеца Мај	2	3	5
После пет месеци Јун	3	5	8
После шест месеци Јул	5	8	13
После седам месеци Август	8	13	21
После осам месеци Септембар	13	21	34
После девет месеци Октобар	21	34	55
После десет месеци Новембар	34	55	89
После једанаест месеци Децембар	55	89	144
После годину дана Јануар	89	144	233

Табела 2:„Проблем зечева“ представљен по месецима



Слика 3: „Проблем зечева“ представљен илустративно

Такође, познат комбинаторни проблем има за решење Фибоначијев низ:

<u>Задатак</u>: На колико начина можемо да пређемо n степеница, прескачући при том пењању једну или две степенице?

<u>Решење</u>: Означимо са S_n број начина да се попнемо уз n степеница. Ставићемо да је $S_0 = 0$, а очигледно важи да је $S_1 = 1$. Сви начини за $n \geq 2$ се могу поделити у две групе. Ако има n степеника, треба разликовати два случаја, у зависности од начина на који почиње прелазак.

1) Почиње прескакањем једне степенице (остало је дакле $n - 1$ степеник),
2) почиње прескакањем два степеника (остало је дакле $n - 2$ степеника).

У првом случају је S_{n-1} број начина да се попнемо уз степенице, а у другом случају је број начина S_{n-2}. Како за укупан број начина имамо могућност избора између ова два случаја, тада добијамо да је укупан број начина да се попнемо уз n степеница једнак $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, што је управо Фибоначијев низ.

Фибоначијев низ се често повезује са бројем φ („фи“). Број φ је математичка константа која представља однос између две величине, који је једнак односу суме те две вредности наспрам веће вредности $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$.

Ако у претходној једначини заменимо $\frac{b}{a}$ са $\frac{1}{\varphi}$ добијамо

$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$, па је $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$.

Дакле, имамо $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$, то јесте $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Ако посматрамо другу једначину и обе стране помножимо са φ добијамо $1 = \varphi^2 - \varphi$. Тада је $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Решења ове квадратне једначине су:

$\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Тако добијамо да је општи члан рекурентне једначине $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$f_n = A \cdot \varphi_1^n + B \cdot \varphi_2^n$

Како је $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$ заменом $n = 0$ и $n = 1$ у опште решење добијамо

$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Следи да је општи члан Фибоначијевог низа

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Кеплер је доказао да однос два узастопна члана низа у бесконачности тежи вредности златног пресека (φ_1).

<u>Теорема</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi_1$

<u>Доказ</u>: Како је $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ следи да је $\left|\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right| = \left|\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$. Када $n \to \infty$ добијамо $\left|\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right|^n \to 0$ и $\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^n \to 0$.

Према томе, имамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1})/(\varphi_1 - \varphi_2)}{(\varphi_1^n - \varphi_2^n)/(\varphi_1 - \varphi_2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}}{\varphi_1^n - \varphi_2^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1 - \varphi_2(\varphi_2/\varphi_1)^n}{1 - (\varphi_2/\varphi_1)^n} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2(0)}{1 - 0} = \varphi_1$$

■

Неке најважније особине Фибоначијевих бројева:

<u>Особина 1</u>: Ако знамо Фибоначијеве бројеве f_m и f_n онда можемо наћи број f_{m+n} по формули $f_{m+n} = f_{(m-1)} f_n + f_m f_{n+1}$

<u>Доказ</u>: Доказаћемо индукцијом по m

База индукције:
За $m = 1$ једнакост очигледно важи.

За $m = 2$ имамо:

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= f_{2-1}f_n + f_2 f_{n+1} \\ &= f_1 f_n + f_2 f_{n+1} \\ &= f_n + f_{n+1} \\ &= f_{n+1} + f_n \end{aligned}$$

Индукцијска претпоставка:
Претпоставимо да једнакост важи за $m = k$ и $m = k + 1$:

$$f_{k+n} = f_{k-1}f_n + f_k f_{n+1}$$
$$f_{k+1+n} = f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1}$$

Индукцијски корак:
Показујемо да једнакост важи за $m = k + 2$:

$$\begin{aligned} f_{n+k+2} &= f_{n+k+1} + f_{n+k} \\ &= f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} + f_{k-1} f_n + f_k f_{n+1} \\ &= f_n(f_k + f_{k-1}) + f_{n+1}(f_k + f_{k+1}) \\ &= f_n f_{k+1} + f_{n+1} f_{k+2} \end{aligned}$$

Према томе, једнакост важи за све $n \in N$.

<u>Особина 2</u>: f_n је дељив са f_m ако и само ако је n дељиво са m

<u>Доказ</u>: Претпоставимо да је n дељиво са m, односно $n = mk$.

Доказујемо индукцијом по k.
Ако је $k = 1$ онда важи да је $m = n$, па важи и да је f_n дељиво са f_m.
Претпоставимо да је f_{mk} дељив са f_m. Проверавамо да ли важи за $f_{m(k+1)}$.
Како је $f_{m(k+1)} = f_{mk+m}$, добијамо

$$f_{m(k+1)} = f_{mk-1} f_m + f_{mk} f_{m+1}$$

Десна страна једнакости је очигледно дељива са f_m (f_{mk} је према претпоставци дељив са f_m), па је и лева страна једнакости, тј. $f_{m(k+1)}$ дељиво са f_m.

Обрнуто тврђење: Претпоставимо да је f_n дељиво са f_m. Хоћемо да покажемо да важи $nzd(f_m, f_n) = f_{nzd(m,n)}$. Можемо n да представимо на следећи начин $n = mk + r,\ 0 \leq r < m$.

$$\begin{aligned} nzd(f_m, f_n) &= nzd(f_m, f_{mk+1} f_r + f_{mk} f_{r-1}) && \text{ово добијамо применом особине 1} \\ &= nzd(f_m, f_{mk+1} f_r) && \text{јер } f_m | f_{mk} \\ &= nzd(f_m, f_r) \end{aligned}$$

Настављамо поступак Еуклидовим алгоритмом све док за остатак r не добијемо нулу. Остатак који добијемо у претпоследњем кораку нам управо представља највећи заједнички делилац за почетне бројеве.
Ако исти поступак применимо на индексе добићемо $nzd(m, n) = nzd(s, 0) = s$.

Даље имамо $nzd(f_m, f_n) = nzd(f_s, 0) = f_s = f_{nzd(m,n)}$.
Закључак, ако $f_m | f_n$ тада $m|n$.

Особина 3: За $n \geq 0, (f_n, f_{n+1}) = 1$

Доказ: Доказаћемо индукцијом да важи $(f_n, f_{n+1}) = 1$, за $n \geq 0$

Како је $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$ имамо $(f_0, f_1) = (0,1) = 1$, што јесте тачно.
Претпоставимо да је $(f_{n-1}, f_n) = 1$
Нека је $d > 1$ и важи да d дели f_n и f_{n+1}.
Знамо да је $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Ако d дели f_n и f_{n+1}, тада d дели и f_{n-1}. Али, рекли смо да је $(f_{n-1}, f_n) = 1$, што је контрадикција. Дакле, следи тврђење.

Особина 4: Збир Фибоначијевих бројева до f_n мањи је од f_{n+2}

Доказ: Доказаћемо да важи $\sum_{r=0}^{n} f_r = f_{n+2} - 1$, за $n \geq 0$.

Користићемо рекурзивну дефиницију Фибоначијевих бројева

$$f_0 = f_2 - f_1$$

$$f_1 = f_3 - f_2$$

$$f_2 = f_4 - f_3$$

$$\dots\dots$$

$$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$$

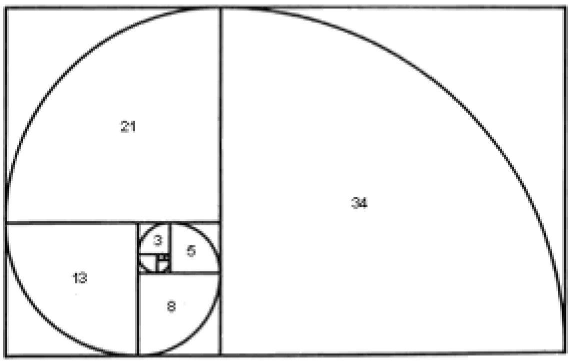
$$f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$$

Када саберемо ових $n + 1$ једнакости добијамо

$$\sum_{r=0}^{n} f_r = (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \cdots + (f_{n+1} - f_n) + (f_{n+2} - f_{n+1}) =$$

$$= -f_1 + (f_2 - f_2) + (f_3 - f_3) + \cdots + (f_n - f_n) + (f_{n+1} - f_{n+1}) + f_{n+2}$$

$$= f_{n+2} - 1$$



Слика 4:Фибоначијева или златна спирала

Фибоначијева или златна спирала је настала исцртавањем лукова који спајају супротне углове квадрата у Фибоначијевој мрежи.

Дужина крака спирале у једном квадрату је у односу на дужину крака спирале у претходном квадрату приближно φ.

Пример: Посматрамо квадрате страница 34 и 21. Дужина крака спирале представља кружни лук с полупречником 34, односно 21 у мањем квадрату. Када се израчуна на основу полупречника, дужина крака спирале у већем квадрату је $l_1 = 53{,}38$, а дужина крака спирале у мањем квадрату је $l_2 = 32{,}97$. Што значи да је однос те две спирале $\frac{l_1}{l_2} = \frac{53{,}38}{32{,}97} \approx 1{,}618$ ..., што заиста јесте приближно једнако броју φ.

3.2 Теорема Закендорфа

Фибоначијеви бројеви имају примену при коришћењу као базе за приказивање природних бројева. У тој бази природне бројеве приказујемо као збир неких Фибоначијевих бројева, уз одређене услове.

Теорема (Zeckendorf[1])[2]: Сваки природан број може се на јединствен начин изразити као сума Фибоначијевих бројева у којој се не појављују ниједна два узастопна Фибоначијева броја.

Доказ: Доказ егзистенције радимо применом потпуне математичке индукције. Јасно је да је $F_2 = 1,\ F_3 = 2, F_4 = 3$ и $4 = F_2 + F_4 = 3 + 1$.

Претпоставимо да таква репрезентација постоји за све природне бројеве не веће од k и покажимо да важи и за $k + 1$.

Ако је $k + 1$ Фибоначијев број, доказ је готов.

[1] Edouard Zeckendorf (2.5.1901-16.5.1983.) је био белгијски лекар, војни официр и математичар.

[2] Теорема са доказом је преузета из књиге „Егзотични бројевни системи“- Небојша Ч. Динчић

Ако $k+1$ није Фибоначијев број, тада се он налази између два Фибоначијева броја, тј. постоји $j \epsilon N$ тако да $F_j < k+1 < F_{j+1}$.

Дефинишемо број $a = k+1-F_j$. Како је $a \leq k$ према индуктивној претпоставци он има репрезентацију.

Приметимо и да $a + F_j = k+1 < F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$, одакле $a < F_{j-1}$. То значи да репрезентација броја a не садржи F_{j-1}, па је $k+1 = F_j + a$ репрезентација броја $k+1$, што је и требало доказати.

Доказ јединствености: Нека је n природан број који има две различите репрезентације којима одговарају скупови S и T. Сваки од скупова S и T је скуп несуседних Фибоначијевих бројева чији је збир број n. Дефинишемо $S' = S \backslash T$ и $T' = T \backslash S$, чиме добијамо дисјунктне скупове. Како су овим оба скупа остала без истих елемената, суме се не мењају:

$$\sum_{x \epsilon S} x - \sum_{a \epsilon S \cap T} a = \sum_{y \in T} y - \sum_{b \in S \cap T} b$$

$$\sum_{x \epsilon S'} x = \sum_{y \epsilon T'} y$$

Ако је бар један од скупова S' или T' празан, његов допринос суми је нула, а како су сви сабирци ненегативни и друга сума је једнака нули, те је

$S' = T' = \emptyset$ и $S = T$.

Претпоставимо сада да ни S' ни T' нису празни. Означимо са F_s односно F_t максимални елемент скупа S' односно T', редом. Како су S' и T' дисјунктни, нека је без умањења општости: $F_s < F_t$.

Лема: Нека је S непразан скуп Фибоначијевих бројева, међу којима не постоје два суседна и чији је највећи члан F_s. Тада је $\sum_{x \epsilon S} x < F_{s+1}$.

Доказ: Индукцијом по броју елемената скупа S.

Тврђење очигледно важи ако S има само један елемент.

Претпоставимо да S има $k \geq 2$ елемената, и да тврђење важи за све скупове са мање од k елемената.

Скуп $S' = S \backslash \{F_S\}$ има $k-1$ елемент и највећи елемент овог скупа није већи од F_{S-2} (јер S не садржи два суседна Фибоначијева броја). Према индуктивној претпоставци:

$$\sum_{x \in S'} x < F_{s-1}$$

Дакле,

$$\sum_{x \in S} x = \sum_{x \in S'} x + F_s < F_{s-1} + F_s = F_{s+1} \qquad \blacksquare$$

Сада имамо $\sum_{x \in S'} x < F_{s+1} \leq F_t$.

Како су суме по S' и T' ненегативне и једнаке, дошли смо до контрадикције, те је $S' = T' = \emptyset$ и $S = T$. ■

Пример 1:

- Примери Закендорфове репрезентације*:*
  $100 = 89 + 8 + 3$
  Број 100 се може и на другачије начине представити као збир Фибоначијевих бројева, нпр. $100 = 89 + 8 + 2 + 1$, али то није Закендорфова репрезентација, јер су 2 и 1 два узастопна Фибоначијева броја.

Пример 2:

- Једна од примена Фибоначијевог бројног система је претварање километара у миље и обрнуто. $8km$ је приближно 5 миља, а 8 и 5 су Фибоначијева два узастопна броја, па је као што смо већ рекли њихов количник приближно φ, што нам говори да има приближно φ километара у једној миљи и φ^{-1} миља у једном километру.
- То такође значи да, ако узмемо неки Фибоначијев број за број километара, добијамо да је тај број у миљама онолики колики је први претходни Фибоначијев број, на пример $13km \approx 8mi$. По сличном принципу, ако узмемо за број миља неки Фибоначијев број, онда је тај број у километрима једнак следећем Фибоначијевом броју, нпр. $13mi \approx 21km$.
- Ако број километара (миља) није Фибоначијев број, представљамо га као суму Фибоначијевих бројева, а онда сваки број из суме заменимо претходним (следећим) Фибоначијевим бројем, нпр.

  $$20km = 13km + 5km + 2km \approx 8mi + 3mi + 1mi = 12mi$$

  $$20mi = 13mi + 5mi + 2mi \approx 21km + 8km + 3km = 32km.$$

3.3 Фибоначијево кодирање

Једна од најважнијих примена Фибоначијевог система је Фибоначијево кодирање. Фибоначијево кодирање је представљање природних бројева низом нула и јединица који добијамо на основу Закендорфове репрезентације. Другим речима, Фибоначијев код преводи природне бројеве у бинарни запис. Овај систем је заснован на већ доказаном тврђењу да се сваки природан број може представити као сума различитих чланова Фибоначијевог низа, без појављивања два узастопна члана.

Бројеве који припадају Фибоначијевом низу бројева представљамо цифрама 0 и 1, тако што на позицији броја који посматрамо у Фибоначијевом низу ставимо 1, а на позиције бројева пре тог броја у низу ставимо 0.

Број	Фибоначијев код неких бројева Фибоначијевог низа
1	1
2	10
3	100
5	1000
8	10000
13	100000

Табела 3: Фибоначијева код неких бројева Фибоначијевог низа

Природне бројеве који не припадају Фибоначијевом низу кодирамо на следећи начин: Елемент који се кодира замењује се са највећим Фибоначијевим бројем, мањим од тог елемента. Остатак се кодира крећући се уназад кроз Фибоначијев низ, узимајући број који је мањи или једнак преосталом делу и исти поступак се наставља до краја, то јест док не искодирамо цео број. Добијени Фибоначијеви бројеви се сабирају, поштујући правила Закендорфове теореме.

На тај начин се бројеви из децималног преводе у Фибоначијев систем бројева.

Сабирање у Фибоначијевој бази: Бројеви у Фибоначијевој бази сабирају се као у бинарној бази. Како је недозвољено да две јединице буду једна до друге, случај 11 се замењује кодом 100, јер важи $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$. Такође, број 2 који се може појавити у збиру се не може узети у коду, па се замењује са 1001 јер важи $2F_n = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} = F_{n+1} + F_{n-2}$.

Ово важи за $n > 3$. За $n = 2$ је $2F_2 = 2 = F_3$. За $n = 3$ је $2F_3 = F_4 + F_2$.

Пример Фибоначијевог кодирања:

Број	Фибоначијева репрезентација	Фибоначијев код
1	F(2)	1
2	F(3)	10
3	F(4)	100
4	F(4)+F(2)	101
5	F(5)	1000
6	F(5)+F(2)	1001
7	F(5)+F(3)	1010

Табела 4: Пример Фибоначијевог кодирања

Пример 1: Кодирамо број 11. Полазимо од највећег Фибоначијевог броја који је мањи од 11, то је број 8, то јест F(6). Остатак $11 - 8 = 3$ представљамо бројем 2, што је F(3).

Следећи остатак који добијамо $3-2=1$ представљамо бројем 1, што је F(2). Дакле, Фибоначијев код за број 11 добијамо сабирањем
$F(6)+F(3)+F(2)=10000+10+1$, што је 10011, примењујући описано правило за две јединице које су једна до друге, добијамо код 10100.

Пример 2: Кодирамо број 12. Највећи Фибоначијев број мањи од 12 је 8, то јест $F(6)$. Добијамо остатак 4. Највећи Фибоначијев број мањи од 4 је 3, што је $F(4)$. На крају добијамо остатак 1, што је $F(2)$. Када саберемо ове Фибоначијеве бројеве добијамо $F(6)+F(4)+F(2)=10000+100+1=10101$, што јесте код броја 12.

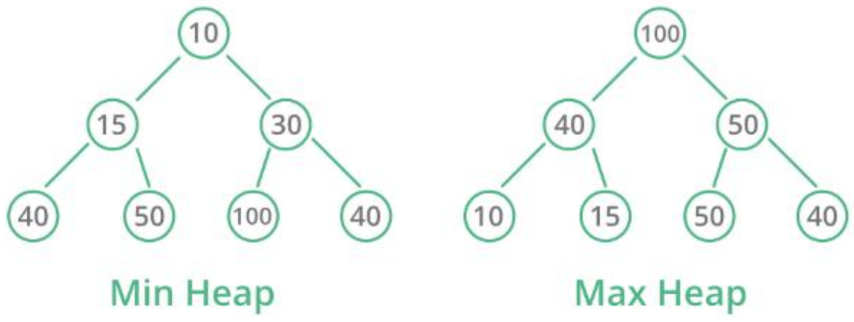
3.4 Фибоначијево стабло

У рачунарским наукама чест задатак са којим се рачунар сусреће јесте претраживање неке колекције података. Да би се задатак сматрао успешно завршеним, између осталог, битно нам је време за које се та претрага заврши. Претрага је отежана ако ред није уређен, а садржи велик број података који се морају испитати. Да би се подаци уредили и на тај начин се смањило време претраге осмишљена је структура података која се назива хип.

Хип (Heap) је структура података у којој су подаци распоређени у облику стабла, чији елементи се називају чворови и гране. У чворовима су распоређени подаци, односно вредности који се још називају и кључ. Први чвор у стаблу из ког се гранају остали чворови назива се корен стабла. Ако сваки чвор има највише две гране, онда се таква структура података назива бинарни хип.

Постоје два облика хип-а:

1) Max-heap: Кључ у сваком чвору је већи или једнак од кључа у чворовима који се из њега гранају. Највећи кључ се налази у корену.
2) Min- heap: Супротно од претходног облика, кључ у сваком чвору је мањи или једнак од кључа у чворовима који се из њега гранају и најмањи кључ се налази у корену.



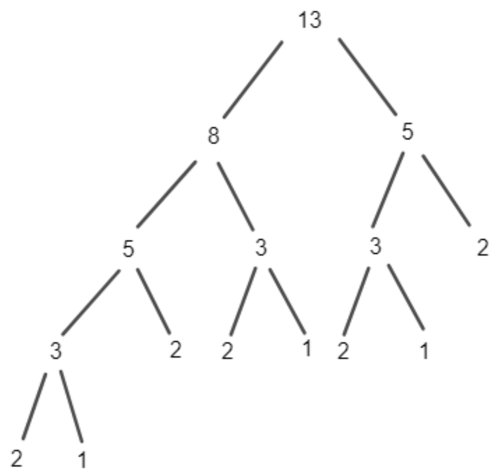
Слика 5. Пример минималног и максималног хипа

Степен чвора је број подстабала датог чвора. Чворови који немају гране називају се листови. Висина (ред) стабла је највећа удаљеност неког листа у стаблу од корена тог стабла.

Фибоначијево стабло је бинарно стабло реда n, коме је лево подстабло реда $n-1$, а десно подстабло реда $n-2$.

Број елемената стабла рачуна се као $2^h - 1$, где је $h -$ висина стабла. h је заправо број корака потребних за проналажење неког елемента.

Корен стабла садржи вредност Фибоначијевог броја који представља први члан Фибоначијевог низа. Сваки чвор садржи вредност која је збир вредности његова два подчвора.



Слика 6. Пример Фибоначијевог стабла, за n=13

Примери примене Фибоначијевог стабла у информатици:

- ’Фибоначијев хип’ омогућава брзо додавање и уклањање елемената, као и проналажење елемената са најмањом вредношћу.
- Криптографија- Фибоначијево стабло се примењује у различитим апликацијама које укључују генерисање случајних бројева.
- Фибоначијеви графови се често користе у алгоритмима претраживања, који омогућавају брзо проналажење најмање вредности у структури података...

3.5 Системи за лакше множење бројева

Фибоначијев систем нам омогућава да на лакши начин помножимо два броја. Ређе се користи у настави математике, али је интересантан, па ћемо га у наставку описати. Пошто је сличан египатском, оба начина ћемо представити.

3.5.1 Египатски систем за лакше множење бројева

Египатски систем за лакше множење бројева је древни начин множења коришћен у Египту. Ова техника омогућава множење бројева помоћу сабирања и дуплирања.

Пример 1: Помножићемо бројеве 19 и 65. У прву колону напишемо број 1, а у другу колону број 65. Бројеве у обе колоне удвостручујемо. То радимо док у првој колони не добијемо највећи број мањи од другог чиниоца (у овом примеру то је број 16, јер би следећи број био 32, што је веће од 19).

1	65	+
2	130	+
4	260	
8	520	
16	1040	+

Затим, означимо само оне врсте где смо у првој колони добијали бројеве чијим сабирањем добијамо први чинилац овог производа (19 = 1+2+16). Из означених врста сабирамо бројеве који се налазе у другој колони.

Добијамо 65 + 130 + 1040 = 1235 , што јесте производ бројева 19 и 65.

Пример 2: Помножићемо бројеве 13 и 26.

1	26	+
2	52	
4	104	+
8	208	+

Сабирамо бројеве $26 + 104 + 208 = 338$, што јесте производ бројева 13 и 26.

Овај систем бројева се може применити за множење било која два природна броја. Међутим, овај систем бројева није најефикаснији начин множења када су у питању велики бројеви. У таквим случајевима су кориснији неки други алгоритми.

Дефиниција: За низ S позитивних целих бројева кажемо да је потпун ако и само ако се сваки елемент n, где је n природан број, може представити као збир различитих елемената од S. Низ који се користи у Египатској методи множења представимо са T, где је $T_n = 2^n (n \geq 0)$. Комплетност овог низа једнака је могућности представљања бројева у бинарном бројевном систему. Да бисмо показали да је T комплетан, прво ћемо показати следећу лему.

Лема: $T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1} = T_n - 1$

Доказ: Доказаћемо је математичком индукцијом.

Нека је $P(n)$: $T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} = T_n - 1$

База индукције: $P(1)$: $T_0 = T_1 - 1$

$$1 = 2 - 1$$

Индукцијска хипотеза: Претпоставимо да важи

$P(k) = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{k-1} = T_k - 1$

Индукцијски корак: Хоћемо да покажемо $P(k+1)$: $T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_k = T_{k+1} - 1$

Из претпоставке имамо да је $P(k+1)$: $T_k - 1 + T_k = T_{k+1} - 1$

$$2T_k - 1 = T_{k+1} - 1$$

$$2T_k = T_{k+1}$$

Од $T_k = 2^k$ имамо $2T_k = T_{k+1}$, то јесте $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Како је $P(k)$ тачно, доказали смо да је и $P(k+1)$ тачно. ■

Теорема: Низ T, где је $T_n = 2^n (n \geq 0)$ је комплетан низ.

Доказ:

База индукције: $1 = 1$

$$2 = 2$$

$$3 = 2 + 1$$

$$4 = 4$$

$$5 = 1 + 4$$

$$6 = 2 + 4$$

$$7 = 1 + 2 + 4$$

Индукцијска хипотеза: Претпоставимо да постоји репрезентација за све позитивне целе бројеве N:

$$1 < N < 2^{n+1} - 1$$

Индукцијски корак: Показујемо да постоји репрезентација за све целе бројеве M:

$$2^{n+1} - 1 < M < 2^{n+2} - 1$$

Одузимањем 2^{n+1} од горње једначине добијамо

$$-1 < M - 2^{n+1} < 2^{n+2} - 2^{n+1} - 1$$

Нека је $Q = M - 2^{n+1}$, стога је $-1 < Q < 2^{n+1} - 1$

Из овога закључујемо да је Q представљено збиром степена 2 као по нашој индуктивној претпоставци.

Закључујемо да је и M представљено као збир степена 2 са $M = Q + 2^{n+1}$ и

$2^{n+1} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

■

3.5.2 Фибоначијев систем за лакше множење бројева

Лема: $f_{n+2} - 1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_n$

Доказ: Доказујемо математичком индукцијом.

$P(n)$: $f_{n+2} - 1 = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$

База индукције: $P(1)$: $f_3 - 1 = f_1$

$$2 - 1 = 1$$

Индукцијска хипотеза: Претпоставимо да важи $P(k)$: $f_{k+2} - 1 = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$

Индукцијски корак: Доказујемо $P(k+1)$: $f_{k+3} - 1 = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{k+1}$

Додамо f_{k+1} на обе стране у једначини $P(k)$, па добијамо

$$f_{k+2} + f_{k+1} - 1 = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k + f_{k+1}$$

Како знамо да је $f_{k+2} + f_{k+1} = f_{k+3}$ следи

$$f_{k+3} - 1 = f_1 + f_2 + \cdots + f_{k+1}$$ ■

Теорема: Фибоначијеви бројеви чине комплетан низ.

Доказ: Доказујемо математичком индукцијом.

База индукције:

$1 = f_1 = f_2$

$2 = f_3 = f_2 + f_1$

$3 = f_4 = f_3 + f_2$

$4 = f_4 + f_2 = f_3 + f_2 + f_1, \ldots$

Индукцијска хипотеза: Претпоставимо да постоји репрезентација за све природне бројеве N, тако да је $1 < N < f_{n+2} - 1$.

Индукцијски корак: Показујемо да постоје репрезентације за све природне бројеве M, тако да је $f_{n+2} - 1 < M < f_{n+3} - 1$

Одузмемо f_{n+2} од последње једначине, па добијамо

$$-1 < M - f_{n+2} < f_{n+3} - f_{n+2} - 1$$

Ово води до закључка да је Q представљено збиром Фибоначијевих бројева као у нашој претпоставци. Из овога можемо закључити да је M представљено као збир Фибоначијевих бројева са $M = Q + f_{n+2}$ и $f_{n+2} - 1 = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.

■

Пример: Множимо бројеве 19 и 65 Фибоначијевом методом. Прву колону крећемо са јединицом, а другу са на пример 65. У првом кораку те бројеве удвостручујемо, а после узимамо збир претходна два.

1	65	+
2	130	
3	195	
5	325	+
8	520	
13	845	+
21		

У првој колони добијамо Фибоначијеве бројеве. Поступак понављамо док не престигнемо први чинилац, тј. последњи број у левој колони који посматрамо треба да буде последњи Фибоначијев број који је мањи од првог чиниоца у посматраном производу.

Сада бирамо оне врсте чији бројеви из леве колоне у збиру дају 19. Има више избора, није битно која комбинација се одабере. Сада се из тих врста узму бројеви из десне колоне и саберу се. Добијемо 65 + 325 + 845 = 1235 , што је производ $19 \cdot 65$.

4. Законитости у Фибоначијевим репрезентацијама

Показаћемо како замишљени сценарио размножавања зечева можемо представити у Фибоначијевом систему.

„Проблем зечева“ можемо представити на следећи начин:

Са 0 ћемо означити нови пар зечева, а са 1 ћемо означити зрели пар, тј. пар зечева који је достигао полну зрелост. У нултом месецу имамо само један нов пар, па га означавамо са „0“. У 1. месецу имамо један зрели пар, означимо га са „1“. Зрео пар, то јесте 1 следећег месеца постаје „01“, а незрео пар, то јест 0 следећег месеца постаје „1“. По овим правилима „01“ се трансформише у „101“, а то даље у „01101“.

На овај начин добијамо низ који одговара низу зечева:

010110101101101011010.....

За Фибоначијеве репрезентације користимо базу која се појављује у низу зечева на следећи начин:

Секвенца зеца	Колона 1	Колона 2	Колона 3
0	0	00	000
1	10	100	11000
0	0	00	000
1	10	100	11000
1	10	100	11000
0	0	00	000
1	10	100	11000

Свака цифарска позиција у Фибоначијевом бројевном систему представља степен броја 10.

Колона 1: У Фибоначијевом бројевном систему колона 1 представља јединице, па се свака јединица у низу зечева замењује са „10“, а свака нула остаје „0“.

Низ зечева: 01011010110110....

постаје: 0100101001001010010100100101001 00...

Колона 2: У Фибоначијевом бројевном систему колона 2 представља други степен броја 10 (10^2), па се свака јединица сада мења са „100“, а свака нула са „00“.

Низ зечева: 01011010110110....

Колона 2: 0010000100100001000010010000....

У трећој колони „1“ се замењује са „11000“, а „0“ са „000“

У четвртој колони „1“ се замењује са „11100000“, а „0“ са „00000“ и тако даље.

У колони i нула из низа зечева се замењује са $F(i)$ нула , а јединица се замењује са $F(i-1)$ јединица и $F(i)$ нула, које се налазе иза јединица.

4.1 Број јединица у Фибоначијевој репрезентацији

Минимална репрезентација је запис броја у којем има најмање појављивања цифре 1. Минимална Фибоначијева репрезентација јесте Закендорфова репрезентација, јер се у њој не појављују две узастопне јединице, па их има мање него у другим репрезентацијама, у којима то није ограничење.

Најмањи број Фибоначијевих бројева који дају у збиру n јесте број јединица у Фибоначијевој репрезентацији.

Другим речима, у Фибоначијевој репрезентацији јединице стављамо на место Фибоначијевих бројева које сабирамо да бисмо добили неки број n. То значи да онолико колико има јединица у Фибоначијевој репрезентацији броја n толико је најмање потребно Фибоначијевих бројева да бисмо у збиру добили тај број n.

n	n_{Fib}	Број јединица
1	1	1
2	10	1
3	100	1
4	101	2
5	1000	1
6	1001	2
7	1010	2
8	10000	1
9	10001	2
10	10010	2
11	10100	2
12	10101	3

Табела 5. Број јединица у Фибоначијевој репрезентацији

Када бисмо те бројеве представили на другачији начин:

n	Број јединица у Фибоначијевој репрезентацији броја n:
1	1
2	1
3, 4	1, 2
5, 6, 7	1, 2, 2
8, 9, 10, 11, 12	1, 2, 2, 2, 3
13, 14, ..., 20	1, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3
21, 22, ..., 33	1, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 4
34,35, ..., 54	1, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 4

Примећујемо да сваки следећи низ броја јединица почиње претходним низом. На овај начин је дефинисан један бесконачан низ.

4.2 Општији Фибоначијев систем који користи партиције

Композиција природног броја n је представљање броја n у облику збира природних бројева.

Партиција природног броја n је представљање броја n у облику збира природних бројева при чему је редослед сабирака небитан.

Два збира која се разликују само по редоследу сабирака се сматрају истим партицијама.

Пример 1:

Композиције броја 4: $4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+3, 1+1+1+1$

Партиције броја 4: $4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$

На примеру композиције броја 5 ћемо доћи до формуле за број композиција произвољног позитивног целог броја n. Број 5 представимо збиром јединица:

$$1+1+1+1+1$$

Имамо пет сабирака (број 1) и четири знака (+).

За скуп $\{1,2,3,4\}$ имамо $2^4 = 16$ подскупова.

Размотримо подскуп $\{1,3\}$ од скупа $\{1,2,3,4\}$ и формирамо партицију

$$(1+1)+(1+1)+1$$

Овде нам подкуп $\{1,3\}$ говори да стављамо заграде групишући јединице око првог и трећег знака плус. Саберемо јединице у свакој загради и то нам даје нову партицију броја 5, а то је $2+2+1$.

На исти начин подскуп $\{1,3,4\}$ нам даје партицију $(1+1)+(1+1+1)$, то јесте $2+3$.

У табели ћемо приказати четири партиције броја 5, са подскупом скупа $\{1,2,3,4\}$ који одређује сваку од тих партиција.

Партиција броја 5	**Подскуп скупа $\{1,2,3,4\}$**
1+1+1+1+1	$\emptyset$
1+2+2	$\{2,4\}$
3+2	$\{1,2,4\}$
5	$\{1,2,3,4\}$

Како постоји кореcподенција 1 на 1 између композиција броја 5 и подскупова скупа $\{1,2,3,4\}$ опет видимо да постоји $2^4 = 16$ композиција броја 5.

Другим речима, у композицији броја n представљеног збиром јединица имамо $n-1$ знака $+$. У свакој композицији броја n имамо две могућности- да неки знак $+$ изаберемо или да га не изаберемо. Према томе, број композиција природног броја n је $c_n = 2^{n-1}$.

Посматрамо сада композицију природних бројева n у којима користимо само цифре 1 и 2, за $n = 3,4,5$

$n = 3$: $2+1, 1+2, 1+1+1$

$n = 4$: $2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1$

$n = 5$: $2+2+1, 2+1+1+1, 1+2+1+1, 1+1+2+1, 1+1+1+2,$
$1+1+1+1+1, 2+1+2, 1+2+2$

Ако пустимо да c_n броји број композиција броја n, које су представљене цифрама 1 и 2, видимо да је $c_5 = 8 = 5+3 = c_4 + c_3$.

Првих пет композиција броја 5 можемо добити додавањем „+1“ на сваку од пет композиција броја 4, а последње три композиције броја 5 можемо добити додавањем „+2“ на три композиције броја 3. Ова идеја се преноси на општи случај, за $n \geq 3$ и добијамо

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \;\; c_1 = 1, c_2 = 2$$

и

$$c_{n=}f_{n+1}, \;\; n \geq 1$$

Партиције у Фибоначијевом систему представљају различите начине на које се одређени број може изразити као збир чланова Фибоначијевог низа.

Пример 2:

Једна партиција броја 11 у Фибоначијевом систему јесте $11 = 8 + 3 = f_6 + f_4$, а друга партиција броја 11 јесте $11 = 8 + 2 + 1 = f_6 + f_3 + f_2$.

Користећи партиције Фибоначијевих бројева чији је збир n, добијамо други систем за представљање бројева, који називамо репрезентација Фибоначијевим партицијама.

Репрезентација броја помоћу Фибоначијевих партиција се односи на представљање тог броја као збир чланова Фибоначијевих бројева, при чему се сваки члан низа може користити више пута, за разлику од стандардне репрезентације где се сваки члан користи највише једном.

Одређивањем учесталости појављивања сваког Фибоначијевог броја у посебној партицији неког броја даје репрезентацију Фибоначијеве партиције тог броја.

Пример 3:

Број 13 можемо добити као збир следећих бројева 13=5+2+2+2+1+1 , према томе испишемо Фибоначијеве бројеве од 1 до највећег Фибоначијевог броја у тој партицији и гледамо колико се пута сваки од тих бројева појављује.

...	5	3	2	1
	1	0	3	2^{Fib}

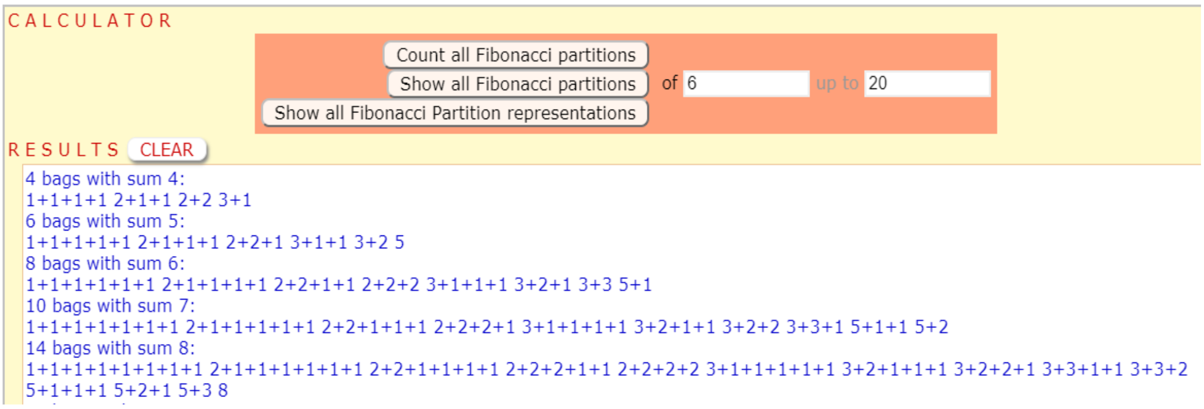
Дакле, број 13 је у датој репрезентацији представљен као 1032.

Ако представимо табелом број репрезентација Фибоначијеве партиције бројева од 1 до 18, добијамо следеће:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Број репр.	1	2	3	4	6	8	10	14	17	22	27	33	41	49	59	71	83	99

Табела 6. Број репрезентација Фибоначијеве партиције

Још неки од примера добијени коришћењем интерактивног калкулатора (https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibrep.html#section8.1):



Слика 7. Примери репрезентације Фибоначијеве партиције бројева

На овај начин добијамо бесконачан низ који је генерисан следећом функцијом:

$$\prod_{i=2}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{f(i)}} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 6x^5 + \cdots$$

Овај низ је Ојлерова генеративна функција за број партиција природног броја примењена на Фибоначијевим бројевима и Фибоначијевим партицијама.

Генеративна функција за број партиција природног броја $p(n)$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n &= p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \cdots \\ &= 1 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + \cdots \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}\end{aligned}$$

4.3 Палиндромске Фибоначијеве репрезентације

Описаћемо начин на који долазимо до композиција које су палиндроми.

То су композиције које се исто читају и слева надесно и здесна налево.

Посматраћемо композиције у којима се појављују само цифре 1 и 2, које су описане у претходном пасусу.

Разликујемо два случаја:

1. случај: Када је број који посматрамо непаран. Тада, у композицији средишњи елемент мора бити број и једина могућност у овом случају јесте да то буде број један. Са леве стране тог броја поставимо неку од композиција броја $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Тада нам је десна страна једнозначно одређена и мора изгледати као слика у огледалу у односу на леву страну. Таквих композиција имамо $f_{\frac{n+1}{2}}$.
2. случај: Када је број који посматрамо паран.

- Ако је средишњи елемент знак +, на левој страни одаберемо неку композицију броја $\frac{n}{2}$, а десна страна нам је једнозначно одређена. Таквих композиција имамо $f_{\frac{n+2}{2}} = f_{\frac{n}{2}+1}$.
- Ако је средишњи члан број, тај број мора бити два. Тада, на левој страни имамо неку од композиција броја $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$, а десна страна је једнозначно одређена. Таквих композиција имамо $f_{\frac{n-2}{2}+1} = f_{\frac{n}{2}-1+1} = f_{\frac{n}{2}}$.

Према томе за n парно, међу f_{n+1} композицијом броја n постоји $f_{n/2} + f_{(n/2)+1} = f_{(n/2)+2} = f_{(n+4)/2}$ композиција које су палиндроми.

Примери бројева који су палиндроми у Фибоначијевој репрезентацији:

N	Фиб. репрезентација броја N
1	1
4	101
6	1001
9	10001
12	10101
14	100001
22	1000001
27	1001001
33	1010101
35	10000001
51	10100101
56	100000001

Табела 7. Пример палиндрома у Фибоначијевој репрезентацији

5. Коришћење само негативно индексираних Фибоначијевих бројева

i ...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Fib(i) ...	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3

За било који број n можемо пронаћи скуп Фибоначијевих бројева који су сви са негативним Фибоначијевим индексима, чији је збир n и то важи и за позитивно и за негативно n.

Користимо скуп негативно индексираних Фибоначијевих бројева, а колоне попуњавамо само са 0 и 1, па опет имамо бинарну репрезентацију.

Пример 1: Представљамо број 5

i	-6	-5	-4	-3	-2	-1
Fib(i)	-8	5	-3	2	-1	1
5 =	0	1	0	0	0	0

Како знамо да је $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, тада „001“ у некој репрезентацији увек можемо заменити са „110“ и обрнуто. Представљамо то следећим примером:

Пример 2: Представљамо број 2

	Fib(i)	5	-3	2	-1	1
	2 =	0	0	1	0	0
Али, такође важи	2 =	1	1	0	0	0

Односно, 2=5+(-3).

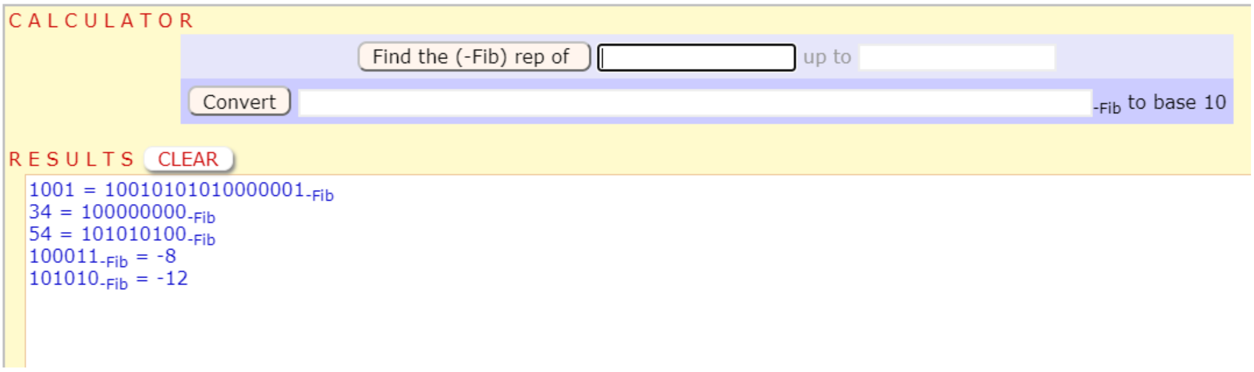
Све репрезентације које почињу са „1“ су исте као оне које су представљене са „001“, па на основу овог малопре закљученог свака јединица која је на првом месту са леве стране у репрезентацији се може заменити са „110“. На тај начин добијамо бесконачно много репрезентација сваког броја.

Начин да се ово спречи и да се добије јединствена репрезентација сваког броја јесте да се уведе услов да две јединице не смеју стајати једна до друге у било којој негативно индексираној Фибоначијевој репрезентацији.

Пример 3: Пример негативно индексиране Фибоначијеве репрезентације првих 12 позитивних и негативних бројева.

i	*-7*	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	***i***	*-7*	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*
Fib(i)	13	-8	5	-3	2	-1	1	**Fib(i)**	13	-8	5	-3	2	-1	1
-1		.	.	.	.	1	0	1	.	.	.	.	.	.	1
-2		.	.	1	0	0	1	2	.	.	.	.	1	0	0
-3		.	.	1	0	0	0	3	.	.	.	.	1	0	1
-4		.	.	1	0	1	0	4	.	.	1	0	0	1	0
-5		1	0	0	1	0	1	5	.	.	1	0	0	0	0
-6		1	0	0	1	0	0	6	.	.	1	0	0	0	1
-7		1	0	0	0	0	1	7	.	.	1	0	1	0	0
-8		1	0	0	0	0	0	8	.	.	1	0	1	0	1
-9		1	0	0	0	1	0	9	1	0	0	1	0	1	0
-10		1	0	1	0	0	1	10	1	0	0	1	0	0	0
-11		1	0	1	0	0	0	11	1	0	0	1	0	0	1
-12		1	0	1	0	1	0	12	1	0	0	0	0	1	0

Још неки од примера добијени коришћењем интерактивног калкулатора (https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibrep.html#section9.1):



Слика 8. Пример негативно индексиране Фибоначијеве репрезентације

6. Fibonacci² систем (Фибоначијева квадратна репрезентација)

Фибоначијева квадратна репрезентација је начин представљања позитивног целог броја као суме квадрата Фибоначијевих бројева.

Дакле, у Фибоначијевој квадратној репрезентацији број N је приказан на следећи начин:

$N = f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2$, где су $f_1, f_2, \dots, f_k$ неки Фибоначијеви бројеви.

Сваки природан број N се може представити на описан начин. То радимо тако што узмемо највећи Фибоначијев број чији је квадрат мањи или једнак посматраном броју N, за добијени остатак поновимо исти поступак. Када за остатак нема таквих Фибоначијевих бројева већих од 1, добијене квадрате саберемо са онолико квадрата броја 1 колико је потребно да би укупан збир био N.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Fib(i)	1	1	2	3	5	8	13	21
Fib(i)^2	1	1	4	9	25	64	169	441

Табела 8. Фибоначијеви квадрати

Пример 1: Представљамо број 7 као Фибоначијеву квадратну репрезентацију

$$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

Пример 2: Представљање првих 10 бројева као збир квадрата Фибоначијевих бројева.

$$1 = f_1^2$$
$$2 = f_1^2 + f_1^2$$
$$3 = f_1^2 + f_1^2 + f_1^2$$
$$4 = f_3^2$$
$$5 = f_3^2 + f_1^2$$
$$6 = f_3^2 + f_1^2 + f_1^2$$
$$7 = f_3^2 + f_1^2 + f_1^2 + f_1^2$$
$$8 = f_3^2 + f_3^2$$
$$9 = f_4^2$$
$$10 = f_4^2 + f_1^2$$

Фибоначијев квадратни систем је систем у ком се природни бројеви представљају на основу учесталости Фибоначијевих бројева у Фибоначијевој квадратној репрезентацији.

Пример 3: Број 7 смо у Фибоначијевој квадратној репрезентацији представили бројевима 2,1,1,1, а то су Фибоначијеви бројеви f_1 или f_2 и f_3. Број 2 се појављује једном у репрезентацији, број 1 се појављује 3 пута.

Према томе, можемо Фибоначијеве бројеве да искористимо на следећи начин: f_1 једанпут, f_2 два пута и f_3 једанпут. Што значи да је број 7 у Фибоначијевом квадратном систему једнак броју 121.

Пример представљања неких бројева у Фибоначијевом квадратном систему:

i:	…	*3*	*2*	*1*
Fib(i):	…	*2*	*1*	*1*
Fib(i)²:	…	*4*	*1*	*1*
1				1
			1	0
2				2
			1	1
			2	0
3			2	1
			1	2

i:	…	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
Fib(i):	…	*8*	*5*	*3*	*2*	*1*	*1*
Fib(i)²:	…	*64*	*25*	*9*	*4*	*1*	*1*
7					1	2	1
					1	1	2
12				1	0	2	1
				1	0	1	2
					2	2	2
127		1	2	1	1	0	0
		1	2	1	0	2	2

Слика 9. Репрезентација неких бројева у Фибоначијевом квадратном систему

6.1 Балансирана Fib² репрезентација

Уместо да користимо цифре 0, 1 и 2 као у Фибоначијевој квадратној репрезентацији, сада можемо да користимо цифре -1, 0 и 1, при чему када у табели за квадратни Фибоначијев број користимо цифру -1, значи да се у рачунању збира тај број одузима. Таква репрезентација се назива балансирана репрезентација.

Ево неких примера бројева представљених у балансираној Фибоначијевој квадратној репрезентацији:

9	4	1	1	вредност
1	-1	0	1	9-4+1=5
1	-1	1	0	9-4+1=5
-1	1	1	1	-9+4+1+1=-3

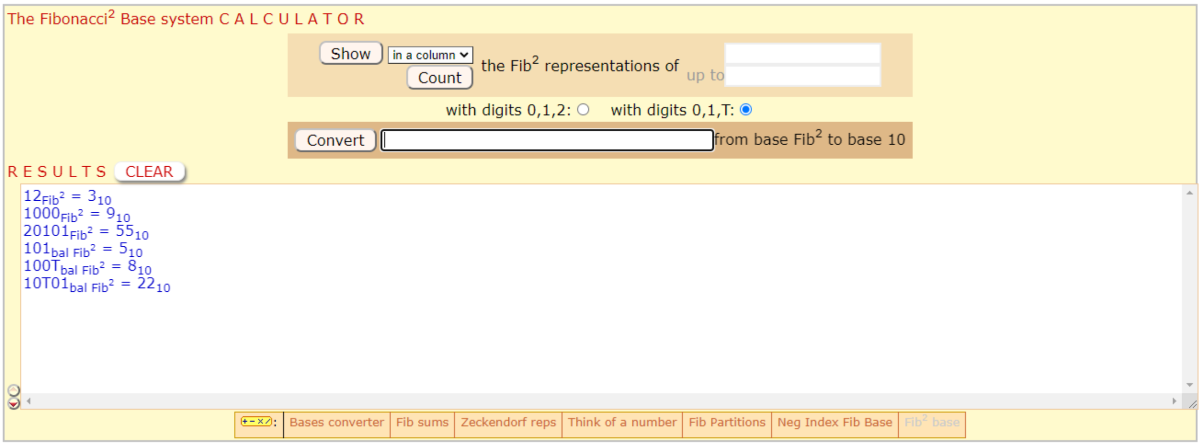
Табела 9. Примери бројева представљени у балансираном Фибоначијевом квадратном систему

У следећем примеру ћемо упоредити Fib² репрезентацију и балансирану Fib² репрезентацију (ради једноставнијег записа уместо цифре -1 користићемо знак T, који се равноправно користи у овој нотацији) :

n	Fib^2 репрез.	Балансирана Fib^2 репрез.
0	0	0, 1T, T1
1	10, 1	10, 1
2	20, 11, 2	1TT, 11
3	21, 12	1TTT, 10T, 1T0
4	100, 22	1T0T, 1TT0, 11T, 100, 1T1
5	110, 101	1T1T, 1T00, 1TT1, 110, 101

Табела 10. Поређење репрепрезентације бројева у Фибоначијевом квадратном и у балансираном Фибоначијевом квадратном систему

Још неки од примера добијени коришћењем интерактивног калкулатора- прва три примера приказују претварање из Фибоначијеве квадратне базе у базу 10, а последња три примера приказују претварање из балансиране Фибоначијеве квадратне базе у базу 10 (https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibrep.html#section10.2):



Слика 10. Примери претварања бројева из Фибоначијеве квадратне у базу 10, и обрнуто

6.2 Fibonacci^k систем

V Hoggatt Jr[3] и Bob Chow [4]су доказали да можемо формирати комплетан систем користећи k-степен Фибоначијевих бројева, ако користимо два пута квадрате Фибоначијевих бројева, четири пута бројеве трећег степена, осам пута бројеве четвртог степена, шеснаест пута бројеве петог степена, и тако даље, односно ако искористимо 2^{k-1} пута Фибоначијеве бројеве k-тих степена.

[3] V Hoggatt Jr (26.6.1921- 11.8.1980) је био амерички математичар, познат по свом раду на Фибоначијевим бројевима и у теорији бројева.

[4] Bob Chow- рођен 1948. у Шангају, Кина. Предавао је математику на Grossmont College, El Cajon, San Diego.

7. Литература

[1] Н. Икодиновић, Математика, Уџбеник са збирком задатака за први разред гимназије, Klett, 2019.

[2] Н. Динчић, Егзотични бројевни системи, доступно на https://www.pmf.ni.ac.rs/mii-content/2020-5-1/NDincic%20-%20Egzoticni%20brojevni%20sistemi.pdf

[3] Using the Fibonacci numbers to represent whole numbers , доступно на линку https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/fibrep.html

[4] https://sh.wikipedia.org/wiki/Fibona%C4%8Dijev_niz

[5] Grimaldi, Ralph P – Fibonacci and Catalan numbers- Wiley, 2012.

[6] Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann – The Fabulous Fibonacci Numbers, Prometheus Books, 2007.

[7] V. Atanassova, A. G. Shannon, J. C. Turner, Krassimir T. Atanassov- New Visual Perspectives on Fibonacci Numbers, World Scientific, 2002.

[8] Драган Стевановић, Мирослав Ћирић, Слободан Симић, Владимир Балтић, ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА- основе комбинаторике и теорије графова, 2007.

[9] Andrew V. Sills – Compositions, partitions and Fibonacci numbers