

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Јована Б. Лозанов

ПРЕБРОЈАВАЊЕ СТАБАЛА И АЦИКЛИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

проф. др Горан Ђанковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Радовановић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Резиме

Пребројавање стабала је математички концепт који се бави одређивањем броја различитих начина на које се могу формирати стабла. Стабло је структура која се састоји од чворова и грана, при чему гране повезују чворове без стварања циклуса. Овај концепт је широко примењив у различитим областима, укључујући математику, рачунарство и биологију.

Ациклична функција, с друге стране, је функција у којој не постоји одређен пут који почиње и завршава на истом чвору. Ове функције су битне у областима као што су теорија графова, алгоритама претраге и рекурзија. Ацикличне функције се често користе за решавање проблема који захтевају обраду или манипулацију података који су организовани у структури графа.

Комбиновање пребројавања стабала и ацикличних функција може бити од велике користи у решавању сложених проблема који укључују структуре података са својствима стабла и захтевају израчунавање или манипулацију начинима на које се ти подаци могу организовати.

Укратко, пребројавање стабала се бави одређивањем броја могућих начина формирања стабала, док се ацикличне функције односе на функције које немају циклусе. Комбинација ових концепата може бити од кључног значаја у различитим областима, пружајући алате за решавање сложених проблема и оптимизацију перформанси.

Кључне речи: граф, стабло, чвор, грана, функција, дефиниција

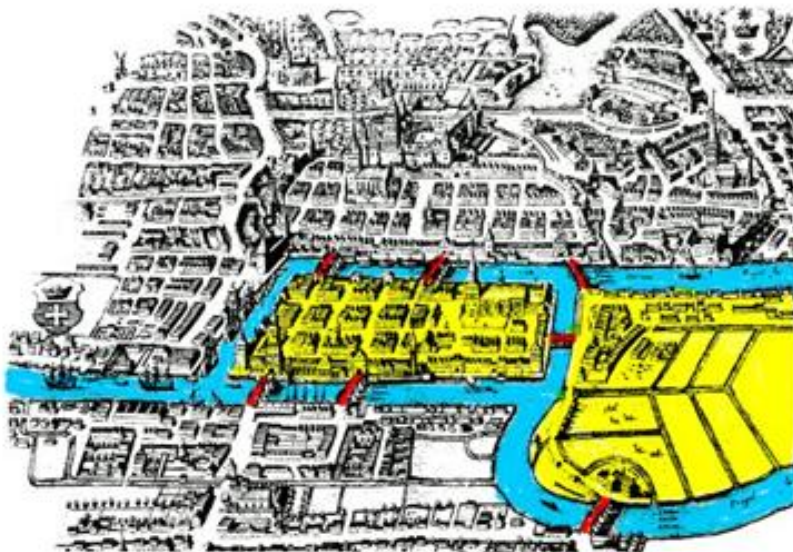
Садржај

1	Увод	1
2	Разрада	10
2.1	Основни појмови	10
2.2	Специјални графови.....	13
2.3	Стабла	17
2.3.1	Дефиниција и основне особине.....	17
2.3.2	Покривајућа стабла.....	21
2.3.3	Коренска стабла.....	28
2.3.4	Означена стабла.....	29
2.4	Ацикличне функције.....	39
2.5	Паркинг функције	41
2.6	Задаци	44
3	Закључак.....	48
	Литература	49

Глава 1

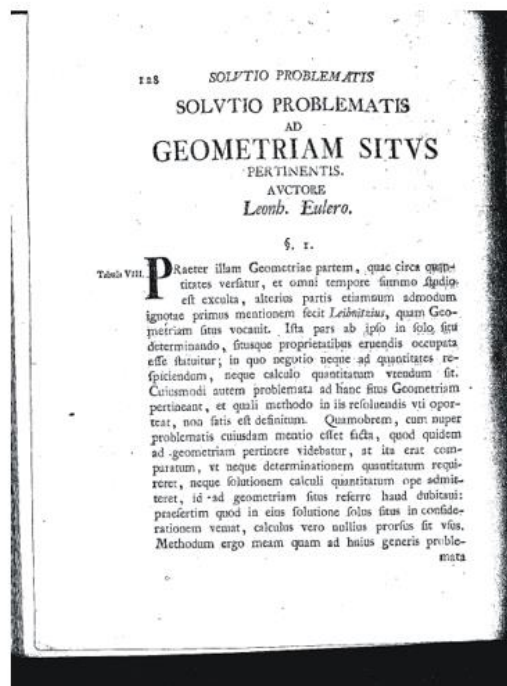
1 Увод

Теорија графова је математичка дисциплина која датира тек нешто више од 100 година уназад. Њен буран развој почиње, отприлике, половином прошлог века и траје још увек. Узрокован је понајвише развојем рачунарства и информатике. Међутим, графови налазе своје место и примене и у другим научним дисциплинама као што су електротехника, транспортне и телекомуникационе мреже, хемија, па чак и друштвене науке као што је социологија. Графови су посебно занимљиви јер помоћу њих можемо моделовати сложене проблеме веома једноставно, као што је постављање саобраћајница, постављање електричних мрежа, рачунарских мрежа и сл. Најразличитије дискретне структуре које се појављују у рачунарству погодно се описују графовима. Први проблем и његово решење изнесени на начин који је другачији у односу на претходне и може се сматрати претечом теорије графова јесте рад Леонарда Ојлера (*Leonhard Euler*) под називом *Седам мостова Кенигсберга* (eng. *The Seven Bridges of Konigsberg*), објављен 1736. године (Слика 1.1).



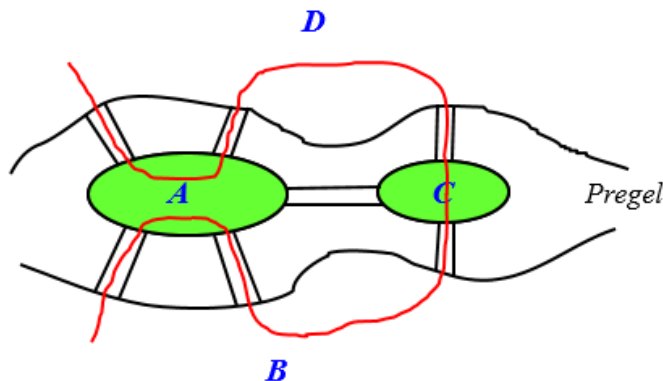
Слика 1.1: Седам мостова Кенигсберга

Швајцарском математичару *Леонарду Ојлеру* су током боравка у Кенигсбергу (данашњи Санкт Петербург) мештани поставили проблем да пређе преко свих 7 мостова (који спајају 2 обале реке Прегел међусобно и са 2 острва) тако да преко сваког пређе тачно једанпут. У то време Ојлер је живео и радио у Санкт Петербургу као члан чувене Санкт Петербуршке академије наука. Ојлер је нашао решење задатог проблема у којем је показао да тражена шетња не постоји. Ојлер је прво презентовао свој рад, 26.августа 1735.године, на овом проблему Санкт Петербуршкој академији наука доказујући да је такав обилазак мостова немогућ уз напомену да се његов метод може проширити на произвољан распоред острва и мостова. Потом га је публикувао као научни рад под насловом *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* који у преводу са латинског гласи *Решење проблема геометрије положаја* (Слика 1.2). Рад је објављен у аналима Санкт Петербуршке академије наука 1736. године. На следећој слици можемо видети како је изгледала прва страница Ојлеровог рада.



Слика 1.2: Прва страна научног рада - *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*

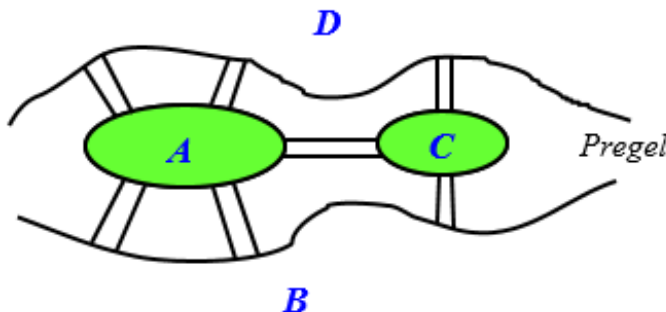
Пре него што изложимо Ојлерово решење, изнећемо неколико важних запажања. Као што то математичари често раде, Ојлер је панораму Кенигсберга заменио следећом, једноставном, геометријском сликом (Слика 1.3):



Слика 1.3: Ојлерова замена Кенигсбергове панораме

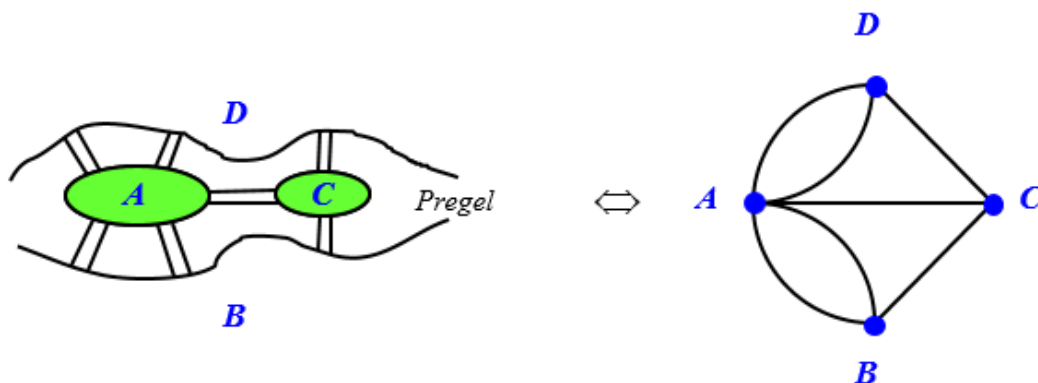
На њој су острва обојена зелено и означена са A и C , док су обале реке Прегел означене са B и D . Сад се свакој шетњи преко мостова може придружити један низ чији су елементи слова A, B, C и D .

Ево како то изгледа на једном конкретном примеру: посматрајмо следећу шетњу која почиње на обали B . Дакле, прво слово у низу је B . Нека шетња једним од мостова прелази на острво A . Тада на друго место у низу стављамо слово A . Нека се потом другим мостом враћа на обалу B . Следеће слово у низу је B . Затим прелази на острво C , те је четврто слово у низу C . Затим иде на обалу D , а низ се наставља словом D . Онда једним од мостова на острво A па на шесто место у низу долази слово A и коначно другим мостом поново на обалу D тако да је на последњем месту у низу слово D . Тиме се шетња завршава јер се ни преко једног моста не сме прећи више од једанпут. Приметимо да су свака два суседна слова у добијеном низу различита и да она представљају један од мостова. У овом случају пређено је преко 6 мостова те стога низ садржи 7 слова. Приметимо још да при овом покушају мост између острва A и C није пређен ниједанпут. Разуме се, овај неуспели покушај није доказ да тражена шетња не постоји. Право објашњење, које ћемо ускоро видети, дао је Ојлер. Ево сада Ојлеровог елегантног решења (Слика 1.4).



Слика 1.4: Ојлерово решење

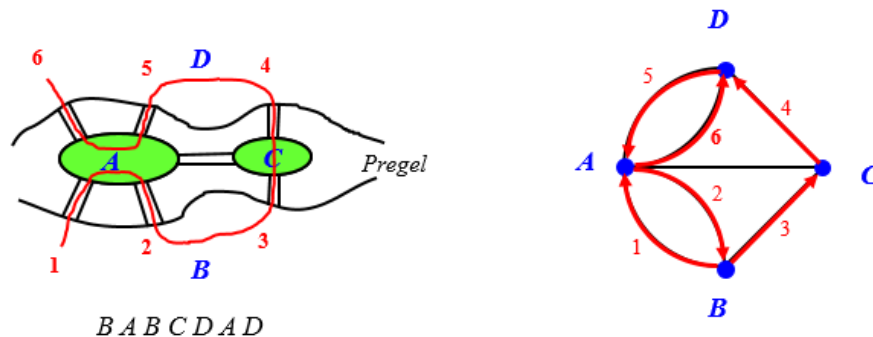
Претпоставимо да постоји шетња W преко 7 мостова која сваким мостом прелази тачно једанпут. Према претходном разматрању њој одговара низ $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$ чији елементи припадају скупу слова A, B, C, D . Притом суседна слова x_i и x_{i+1} представљају један од мостова. У вези с тим приметимо следеће: свако слово које се налази унутар низа W покрива тачно 2 моста. Ако је то слово x_i мостови су $x_{i-1}x_i$ и x_ix_{i+1} , а ако се налази на једном од крајева низа тада покрива тачно један мост. Последице овог запажања су следећи закључци: острво A има 5 мостова, према томе слово A појављује се 3 пута у низу W . Даље, обала B има 3 моста, па се слово B појављује 2 пута у низу. Острво C и обала D такође имају по 3 моста, па се слова C и D такође појављују по 2 пута у низу. Из ових закључака следи да низ W садржи 9 симбола, а то је контрадикција са претпоставком да низ има 8 симбола, с обзиром да је број мостова једнак 7. Према томе, тражена шетња не постоји. Можда сте приметили да Ојлеров рад који садржи ово решење има 12 страна. Ако је наведено решење стало на отприлике једну страну, шта онда садрже преосталих 11 страна? Одговор није тешко одгонетнути. Као готово сви математичари, Ојлер је одмах разматрао уопштења. Шта ако је други број мостова и други број острва, шта ако су мостови овако или онако распоређени и тако даље. Постоји још једна ствар која пажљивом читаоцу може да падне на памет. Ради се о следећем: добро, видели смо један леп и интересантан проблем и још лепше и интересантније Ојлерово решење али какве то има везе са теоријом графова? Убрзо ћемо видети да има. Ствар је у томе што се Ојлерова упрошћена слика Кенигсберга и његових мостова може додатно упростити на следећи начин. Острва и обале A и C односно B и D могу се заменити тачкама у равни (Слика 1.5). Ако између два подручја постоји мост, он је представљен луком или дужи која спаја одговарајуће тачке. Тако је од читаве панораме Кенигсберга остао овај граф:



Слика 1.5: Упрошћена слика

Тачније, то је мултиграф с обзиром да садржи паралелне гране између чворова A и B односно A и D (Слика 1.6). Сада, свакој шетњи преко Кенигсбершких мостова одговара једна стаза у добијеном мултиграфу. Ради се о стази јер се гране не могу понављати с обзиром да се преко сваког моста може прећи највише једанпут.

Ево како то иде. Имамо Ојлерову шему Кенигсберга и његових мостова и паралелно с њом поменути мултиграф. Размотримо ранију шетњу $BABCDAD$. Први део шетње почиње на обали B и завршава се на острву A . То се у мултиграфу манифестује црвеним луком BA . Стрелица служи да покаже да је почетак овог дела шетње у B , а завршетак у A . Даље имамо прелаз са острва A на обалу B . Њему одговара оријентисани црвени лук AB и тако даље. На крају имамо прелаз од острва A ка обали D и одговарајући лук AD . Као што се види црвене гране поређане наведеним редом представљају једну стазу у мултиграфу. Притом та стаза не садржи грану AC што одговара чињеници да шетња није прешла мостом између острва A и C , и тако смо стигли до графова.



Слика 1.6: Мултиграф

Напомена: Основне појмове о графовима уводимо у наредном поглављу, док их овде користимо како би комплетирали причу о настанку теорије графова.

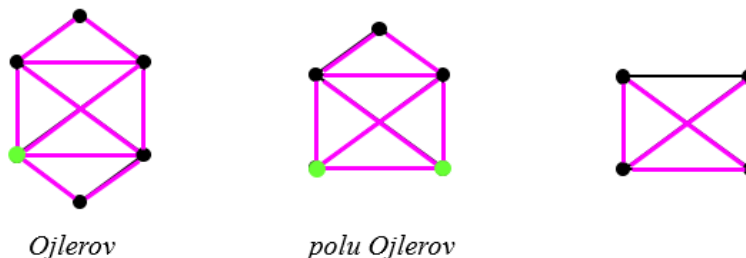
Дефиниција.

За граф G кажемо да је **Ојлеров** ако и само ако садржи затворену стазу W која садржи све његове гране. Такву затворену стазу зовемо **Ојлерова контура**.

Дефиниција.

За граф G кажемо да је **полу Ојлеров** ако и само ако садржи стазу W која садржи све гране графа G . Такву стазу зовемо **Ојлеров пут**.

Као што се из дефиниција види сваки Ојлеров граф је полу Ојлеров, док обратно не мора да важи. Ево неколико примера (Слика 1.7). Граф са леве стране је Ојлеров јер му је затворена стаза Ојлерова контура. Затим, граф у средини је полу Ојлеров јер садржи Ојлеров пут, док последњи пример графа није ни Ојлеров ни полу Ојлеров, јер се може показати да нема ни Ојлерову контуру ни Ојлеров пут. Свака његова стаза може да покрије највише 5 грана. Једна од таквих је приказана на слици.



Слика 1.7: Препознавање графа

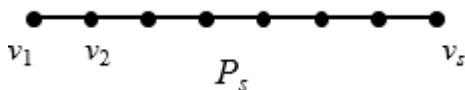
Тако долазимо до следећег **проблема**: *Како разликовати Ојлерове графове од полу Ојлерових односно од оних који нису ни први ни други?* Или, што је исто, која је карактеризација Ојлерових односно полу Ојлерових графова?

Следеће помоћно тврђење користимо за даља испитивања Ојлерових графова.

Лема 1.1. Ако је $\delta(G) \geq 2$, тада G садржи контуру.

Доказ.

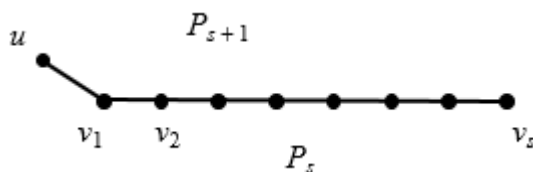
Нека је G граф у којем је минимални степен чворова већи или једнак 2, што значи да је степен сваког чвора бар 2. Нека је $P_s = v_1 v_2 \cdots v_s, s \geq 3$ најдужи пут у G .



Успут напоменимо да је $s \geq 3$ јер је степен сваког чвора већи или једнак 2. Како је степен чвора v_1 већи или једнак 2, он осим v_2 има бар још једног суседа, означимо га са u . С обзиром на пут P_s за чвор u имамо две могућности:

а) Чвор u не припада путу P_s

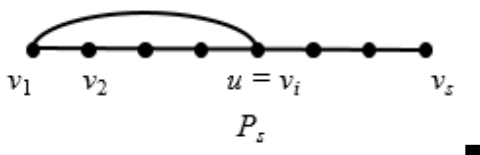
Тада је $u v_1 v_2 \cdots v_s$ пут P_{s+1} са $s + 1$ чвором.



Стога је његова дужина већа од дужине пута P_s . То је контрадикција са претпоставком да је P_s најдужи пут у графу G . Према томе, случај а) је немогућ.

б) Чвор u припада путу P_s

С обзиром да је различито од v_2 , u је неки чвор $v_i, 3 \leq i \leq s$. Тада је $v_1 v_2 \cdots v_i v_1$ контура C_i у графу G .



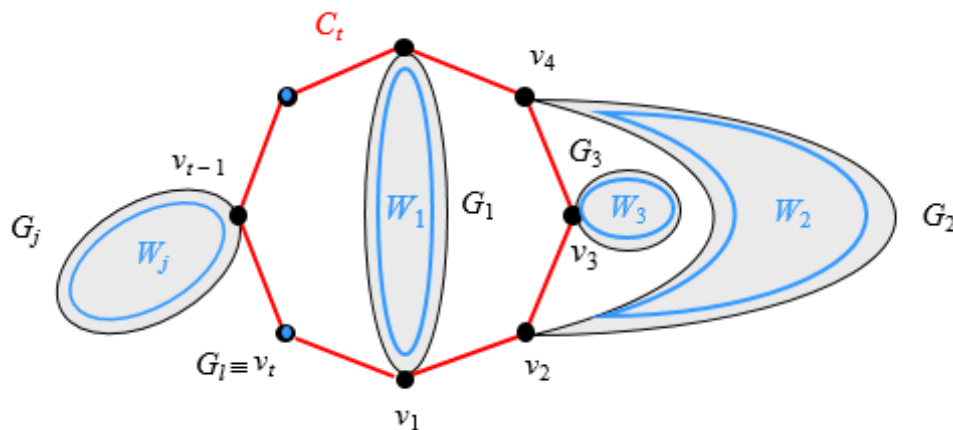
Теорема 1.1. (Euler 1736, Hierholzer 1873) Повезан граф G је Ојлеров ако и само ако су сви чворови парног степена.

Доказ.

($\Rightarrow$) Нека је G повезан Ојлеров граф. Треба доказати да је степен сваког чвора графа G паран број. Нека је затворена стаза $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_k e_{k+1} v_0$ Ојлерова контура у G . По дефиницији она садржи све гране графа G . Нека је v_i чвор графа G различит од v_0 и нека се он s пута појављује у стази W . Како Ојлерова контура садржи све гране графа G и како је свако појављивање чвора v_i везано за две гране које из њега излазе степен тога чвора једнак је $2s$ тј. паран број. Размотримо сада степен чвора v_0 . Осим што се два пута појављује на крајевима стазе W узмимо да се појављује још t пута унутар те стазе. Из тога следи да је његов степен $2 + 2t$, а то је поново паран број. Из наведеног следи да је степен сваког чвора графа G паран број, што је и требало да се докаже (Слика 1.8).

($\Leftarrow$) Нека је G повезан граф чији су сви чворови парног степена. Треба доказати да је G Ојлеров граф. Приметимо да комплетан граф K_1 задовољава горње услове. Како он нема грана, по дефиницији се узима да се Ојлерова контура комплетног графа K_1 састоји од тог једног чвора. Због тога ћемо овај тривијални случај оставити по страни и узети да граф G има бар два чвора. Како је G повезан граф чији су сви чворови парног степена следи да су степени чворова графа G парни бројеви већи или једнаки 2. Очигледно ниједан чвор не може бити степена 0 јер би тада био изолован и граф не би био повезан. Подсећамо да граф G има бар два чвора. Доказ иде индукцијом по m -броју грана графа G . Лако се види да је $m \geq 3$. Заиста, за $m < 3$ G или није повезан граф или му сви чворови нису парних степена. Било једно било друго супротно је горњој претпоставци. Узмимо прво да је $m = 3$ тј. да G има 3 гране. Тада G не може да има 5 или више чворова јер тада не би био повезан. Не може да има ни 4 чвора јер би због повезаности и 3 гране био стабло, а свако стабло са 2 или више чворова садржи висеће чворове, а висећи чворови су степена 1 тј. непарног степена, што је контрадикција са претпоставком. Тако остаје да граф G има 3 чвора и 3 гране, те се стога своди на комплетан граф K_3 , а он је очигледно Ојлеров. Према томе, тврђење важи за $m = 3$. Нека индукцијска хипотеза каже да је сваки повезан граф са m' грана $m' < m, m > 3$ и чији су сви чворови парног степена Ојлеров. Нека је G повезан граф са бар 2 чвора и $m, m > 3$ грана и чији су сви чворови парног степена. Покажимо да је он Ојлеров. С обзиром на наведене услове као у претходном разматрању закључујемо да је степен сваког чвора већи или једнак 2. На основу Леме 1.1. следи да G садржи контуру, рецимо C_t . Нека је то контура $v_1 v_2 \cdots v_t v_1$. Означимо са G' граф добијен из графа G уклањањем грана ове контуре. Нека су $G_1, G_2, \dots, G_l, l \geq 1$ компоненте графа G' . Како је G повезан граф, свака компонента G_i има бар један заједнички чвор с контуром C_t . Тада за компоненте $G_1, G_2, \dots, G_l$ важи следеће: прво, свака од њих је повезан граф. Друго, сви чворови сваке од компоненти имају парне степене. Објаснимо мало ближе ову чињеницу.

Ако чвор компоненте G_i не припада контури C_t тада је његов степен у тој компоненти исти као степен у графу G , а то значи паран број, а ако чвор припада контури C_t тада се након уклањања грана те контуре његов степен из графа G смањује за 2. Како је у G био паран број, остао је паран. Треће, број грана сваке од компоненти мањи је од броја грана графа G тј. од m . Из овога на основу индукцијске хипотезе, следи да је свака компонента G_i Ојлеров граф. Нека је W_i њена Ојлерова контура. Комбинујући контуру C_t и Ојлерове контуре појединих компоненти графа G' формираћемо Ојлерову контуру графа G . Почињемо са контуром C_t и њеним обиласком почев од, рецимо, чвора v_1 . Чвор v_1 припада некој од компоненти графа G' . Нека је то компонента G_1 . Као што смо видели она је Ојлеров граф чија је Ојлерова контура W_1 . Обиђемо ту Ојлерову контуру почевши и завршивши у чвору v_1 . Потом контуром C_t настављамо у чвор v_2 . Он се такође налази у некој компоненти графа G' . Ако је то малопређашња компонента G_1 настављамо контуром C_t у чвор v_3 . Узмимо да је то нека нова компонента, рецимо, G_2 . Слично као у претходном случају опишемо Ојлерову контуру W_2 те компоненте тако што почнемо и завршимо у чвору v_2 . Након тога идемо контуром C_t у чвор v_3 . Уколико се он налази у једној од претходне две компоненте G_1 и G_2 настављамо ка чвору v_4 . У противном v_3 припада некој трећој компоненти, рецимо, G_3 чија је Ојлерова контура W_3 . Опишемо W_3 тако што почнемо и завршимо у чвору v_3 и потом наставимо контуром C_t у чвор v_4 . Како је у конкретном случају чвор v_4 у ранијој компоненти G_2 настављамо ка чвору v_5 . Међутим и он је у ранијој компоненти G_1 те настављамо ка чвору v_6 . Он се налази у новој тривијалној компоненти коју чини само тај чвор. Опишемо њену Ојлерову контуру која је по дефиницији само тај чвор. Потом идемо у наредни чвор контуре C_t и тако даље. У последњем кораку из чвора v_t враћамо се у чвор v_1 . Тако смо добили затворену стазу $W = v_1 W'_1 v_1 v_2 W'_2 v_2 v_3 W'_3 v_3 v_4 v_5 \dots v_{t-1} W'_{j'} v_{t-1} v_t v_1$. Са W'_i означен је унутрашњи део Ојлерове контуре W_i . На пример, W'_1 , је део Ојлерове контуре W_1 без чвора v_1 . Лако се види да је затворена стаза W Ојлерова контура у графу G .



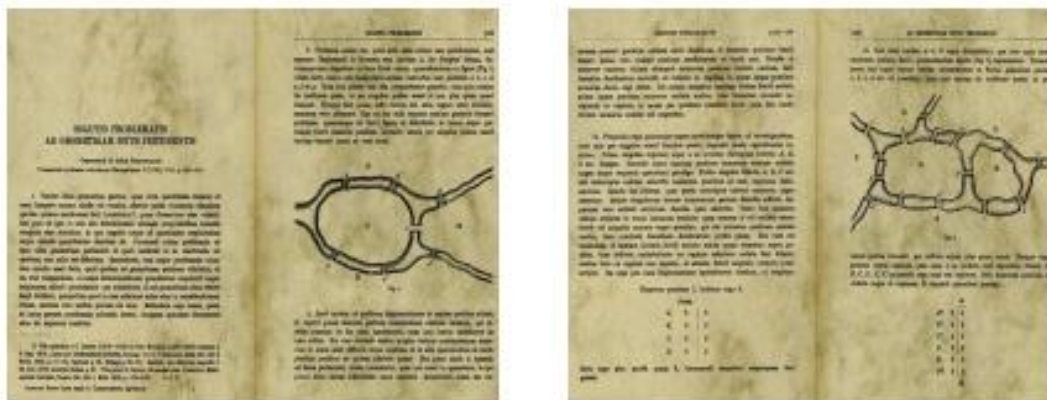
Слика 1.8: Доказ теореме 1.1.

Напоменимо да је Ојлер доказао само потребан услов из ове теореме. Доказ да је тај услов и довољан дошао је више од 100 година након Ојлеровог. Припада немачком математичару Хирхолцеру (нем. Hierholzer). Хирхолцеров доказ уједно је алгоритам за конструкцију једне Ојлерове контуре у датом Ојлеровом графу (Слика 1.9). Треба још рећи да Ојлер, Хирхолцер и многи други математичари тога времена нису користили термин *граф* иако је јасно да су тако нешто имали у виду.



Слика 1.9. Хирхолцеров доказ

Ојлер је чланак о Проблему Кенигсбершких мостова написао 1736. године (и стога се та година узима за оснивање теорије графова) и он је први пут објављен 1741. године, али је тада пробудио мало интереса међу осталим математичарима. Неке странице из овог рада су приказане на наредној слици. Овај проблем и резултат су остали мало познати до краја 19. века када су га енглески математичари Џорџ Лукас (енг. George Lucas, 1882) и Раус Бол (енг. Rouse Ball, 1892) укључили у своје књиге о рекреативној математици. Појам Ојлеровог графа за граф који се може нацртати не подижући оловку са папира се одомаћио захваљујући Кенигу, који га је искористио у својој пионирској књизи о Теорији графова (1936. године) (Слика 1.10).



Слика 1.10. Странице књиге о Теорији графова

Тражење Ојлеровог пута налази примену у још неким проблемима Комбинаторне оптимизације, попут Проблема кинеског поштар, али и у раду са ласерима, где нам је циљ да оптимално користимо ласер и самим тим појефтинимо цену финалног производа (методама Комбинаторне оптимизације постигнута је уштеда времена рада и до 90%)

Глава 2

2 Разрада

2.1 Основни појмови

Дефиниција.

Граф $G = (V, E)$ је уређени пар који се састоји од скупа V и скупа $E \subseteq \binom{V}{2}$, где је $\binom{V}{2}$ скуп свих двоелементних подскупова скупа V . Елементе скупа V зовемо *чворови* графа, а елементе скупа E *гране* графа. Често ћемо скуп чворова графа G означавати са $V(G)$, скуп грана са $E(G)$, број чворова са $n(G)$, а број грана са $m(G)$. За чворове $u, v \in V$ кажемо да су *суседни* ако је $\{u, v\} \in E$. Ако је $e = \{u, v\} \in E$ кажемо да грана e има *крајеве* u и v . Такође, када је $e = \{u, v\} \in E$, кажемо да су чворови u и v *инцидентни* са граном e . Уз све ово, за две гране у графу кажемо да су *суседне* уколико имају заједнички крај (чвор).

Напомена: Граф из претходне дефиниције зовемо још и *прост граф*. У зависности од потреба, могуће је проширити ову дефиницију. На пример: - *Неоријентисани граф* $G = (V, E)$ је уређени пар скупова чворова V и грана E , где је $E \subseteq \binom{V}{2} \cup V$. Разлика је у томе што можемо имати и гране облика $e = v$ (где је $v \in V$), тј. гране којима су оба краја у истом чвору v . Такве гране се називају *петље*.

- *Оријентисани граф* или *диграф* $G = (V, E)$ је уређени пар скупова чворова V и грана E , где је $E \subseteq V \times V$. Разлика је у томе што гране у овом случају имају оријентацију: грана $e = (x, y)$ има почетни чвор x и крајњи чвор y .

Графове најчешће представљамо цртежима у равни тако што чворове представљамо тачкама (у ствари, чешће их представљамо кружићима), а гране представљамо непрекидним (Жордановим) кривама између тачака одређених њиховим крајевима. Код графова често важи позната изрека да **слика вреди хиљаду речи**.

Дефиниција.

- Под *околином* $N_G(u)$ чвора u графа $G = (V, E)$ подразумевамо скуп свих суседа чвора u : $N_G(u) = \{v \in V: \{u, v\} \in E\}$.

- Околина $N_G(U)$ скупа чворова $U \subseteq V$ је скуп чворова из V који су суседни са бар једним чвором из U .

- Степен $d_G(u)$ чвора u је број његових суседа $d_G(u) = |N_G(u)|$. За чвор чији је степен 0 рећи ћемо да је *изолован*. За чвор степена 1 ћемо рећи да је *висећи(лист)*. Најмањи и највећи степен чвора имају следеће ознаке: $\delta(G) = \min_{u \in V} d_G(u)$, $\Delta(G) = \max_{u \in V} d_G(u)$.

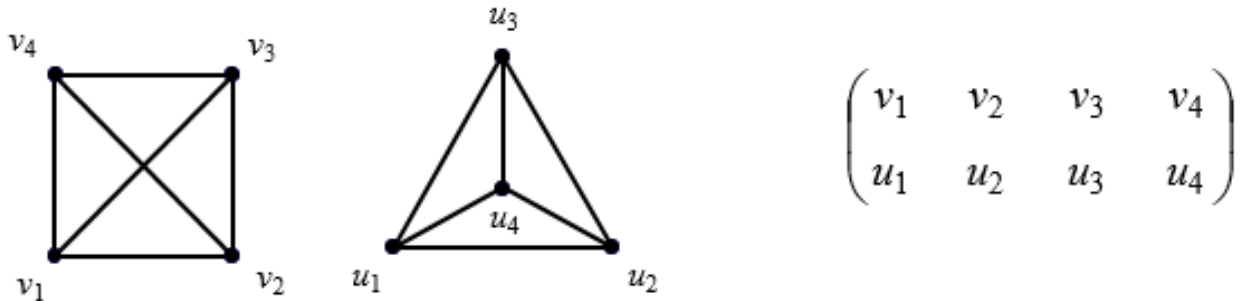
- Граф G је *регуларан* ако сви чворови имају исти степен тј. ако је $\delta(G) = \Delta(G)$. Ако је $\delta(G) = \Delta(G) = r$ кажемо да је G *регуларан граф степена r* или *r -регуларан*.

- Низ степена чворова графа G је низ бројева $(d_1, \dots, d_n)$ који се добија тако што се степени свих чворова у графу поређају у нерастући или неоппадајући поредак. Ако су чворови графа G означени са $v_1, \dots, v_n$ тако да је $\delta(v_1) \leq \dots \leq \delta(v_n)$ или $\delta(v_1) \geq \dots \geq \delta(v_n)$, онда је $(\delta(v_1), \dots, \delta(v_n))$ низ степена чворова тог графа.

Дефиниција.

Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ су *изоморфна* ако постоји бијекција $f: V_1 \rightarrow V_2$ за коју важи да је $\{u, v\} \in E_1$ ако и само ако је $\{f(u), f(v)\} \in E_2$. Функција f се назива *изоморфизам* графова, а чињеницу да су графови G_1 и G_2 изоморфни означавамо са $G_1 \cong G_2$ (Слика 2.1).

Пример.



Слика 2.1: Изоморфизам графова

Дефиниција.

Нека су $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ графови.

- Ако је $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$, тада кажемо да је G' *подграф* графа G , у ознаци $G' \leq G$, док је G *надграф* графа G' . Кажемо још и да G садржи G' .

- Ако је $V' = V$, тада кажемо да је G' *покривајући (разапњујући) подграф* графа G .

- Нека је v чвор, а e грана графа G . Са $G - v$ означавамо граф који се од графа G добија уклањањем чвора v и свих њему инцидентних грана. Са $G - e$ означавамо граф који се од графа G добија уклањањем гране e . Јасно, $V(G - e) = V(G)$.

Дефиниција.

Комплемент графа $G = (V, E)$ је граф $\bar{G}$ дат са $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Према томе, комплемент $\bar{G}$ садржи тачно оне гране које не садржи граф G . *Комплетан* граф K_n је граф који има n чворова који су сви међусобно спојени гранама, док је *празан* граф онај чији је скуп грана празан. На пример, комплетни граф K_n и празан граф $\bar{K}_n$ су комплементи један другог.

Прва теорема теорије графова представља први комбинаторни принцип ове теорије.

Прва теорема. Збир степена чворова сваког графа је паран број и једнак двоструком броју грана, тј.

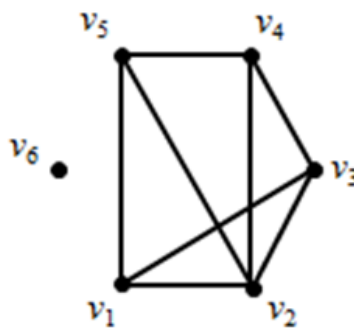
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Доказ.

Доказ је комбинаторног типа и састоји се у томе да се покаже да и лева и десна страна горње једнакости пребрајају један те исти скуп (Слика 2.2). Десна страна, очигледно, сваку грану графа броји два пута. Показаћемо да исто чини и лева страна. Нека је e грана са крајевима u и v , $e = uv$. Њу Σ на левој страни броји два пута, једном у степену чвора u као грану која излази из тог чвора и једанпут у оквиру степена чвора v . Према томе и лева страна броји сваку грану графа два пута.

$$\begin{aligned} d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) + d(v_6) &= \\ 3 + 4 + 3 + 3 + 3 + 0 &= \\ 16 = 2 * 8 = 2|E(G)| \end{aligned}$$

Збир степена чворова графа из примера једнак је 16, а то је једнако 2 пута по 8 односно 2 пута број грана тога графа.



Слика 2.2: Комбинаторни тип

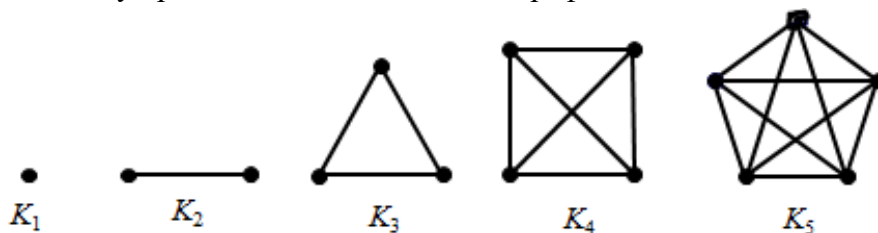
Последица 2.1. Број чворова непарног степена сваког графа је паран. (*Напомена:* Ова последица се у литератури често зове *Лема о руковању*: У сваком друштву број особа који су се руковале непаран број пута је паран. Овде особе из друштва представљају чворове графа, тако да између две особе постоји грана уколико су се оне руковале.)

Последица 2.2. Ако су сви чворови графа непарног степена, тада је број чворова паран.

Последица 2.3. Ако граф има непаран број чворова, тада је бар један чвор парног степена.

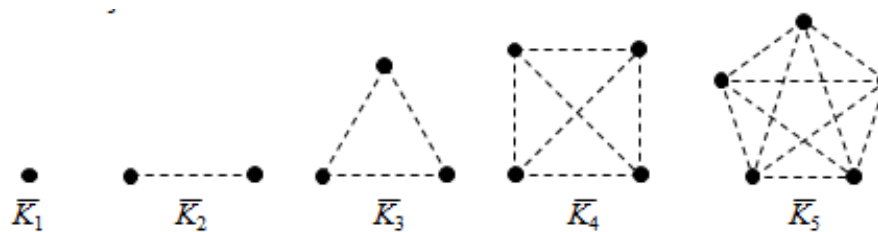
2.2 Специјални графови

Са K_n означавамо граф који има n чворова и код кога су свака два чвора суседна. Овај граф се зове *комплетан (потпун) граф* са n чворова. Комплетан граф са n чворова је $(n - 1)$ – регуларан и има $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ грана. Граф са n чворова може имати највише $\binom{n}{2}$ грана. На слици 2.3 су приказани неки комплетни графови.



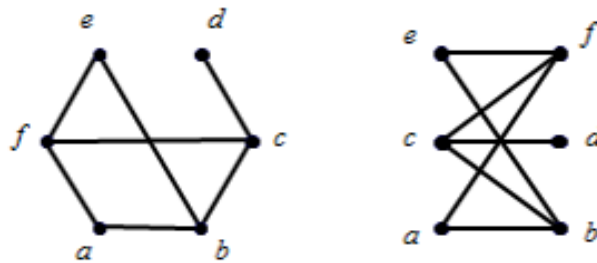
Слика 2.3: Комплетни графови

Празан граф $\overline{K}_n$ је граф са n чворова код кога никоја два чвора нису суседна. Овакав граф је 0 – регуларан. На слици 2.4 су приказани неки празни графови (Слика 2.4).



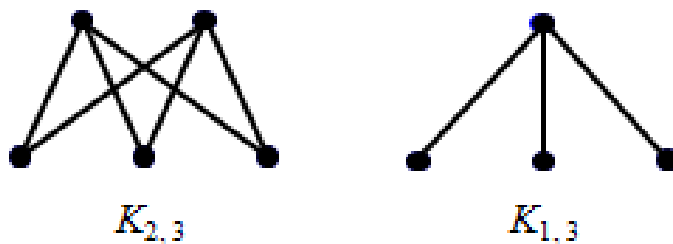
Слика 2.4: Празни графови

Граф G је *бипартитан* ако се скуп његових чворова може поделити на два дела, X и Y , тако да свака грана тог графа спаја један чвор скупа X са једним чвором скупа Y . Пар (X, Y) се тада зове *бипартиција скупа чворова графа* G . Код бипартитног графа са m грана и бипартицијом скупа чворова (X, Y) је $\sum_{v \in X} \delta(v) = \sum_{v \in Y} \delta(v) = m$. На слици 2.5 су приказани примери бипартитног графа.



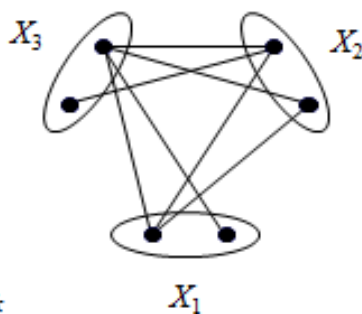
Слика 2.5: Бипартитни графови

Комплетан бипартитан граф је бипартитан граф са таквом бипартицијом (X, Y) код које је сваки чвор из X суседан са сваким чвором из Y . Комплетан бипартитан граф означавамо са $K_{s,t}$, где је $s = |X|$, $t = |Y|$. Граф $K_{s,t}$ има $s \cdot t$ грана. На слици 2.6 су приказани примери комплетног бипартитног графа.



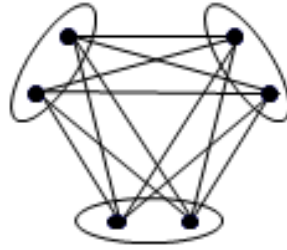
Слика 2.6. Комплетни бипартитни графови

Граф G је k – партитан, $k \geq 2$, ако постоји партиција $(X_1, \dots, X_k)$ скупа његових чворова тако да за сваку грану $e = \{u, v\}$ графа постоје индекси $i \neq j$ са особиним $u \in X_i, v \in X_j$. Другим речима, свака грана спаја чвор једне класе са чвором неке друге класе у уоченој партицији. Бипартитан граф је k – партитан граф код кога је $k = 2$. На слици 2.7 је приказан пример k – партитног графа.



Слика 2.7. k – партитни граф

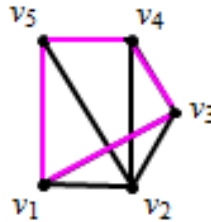
Комплетан k – партитан граф, је k – партитан граф са таквом партицијом $(X_1, \dots, X_k)$ код које за све индексе $i \neq j$, за свако $x \in X_i$ и свако $y \in X_j$ имамо да су x и y суседни чворови. Комплетан k – партитан граф означавамо са $K_{s_1, \dots, s_k}$, где је $s_1 = |X_1|, \dots, s_k = |X_k|$. На слици 2.8 је приказан комплетан k – партитан граф.



$$K_{2,2,2}$$

Слика 2.8: k - партитан граф

Контура са n чворова, у ознаци C_n , је граф који садржи n чворова и n грана. Прецизније, ако чворове контуре означимо са $v_1, \dots, v_n$, онда граф C_n има n грана $e_1, \dots, e_n$ које изгледају овако: $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Контура је 2 – регуларан граф. На слици 2.9 је приказана контура C_4 .

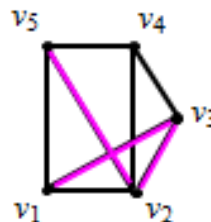


$$C_4 = v_1 v_3 v_4 v_5 v_1$$

Слика 2.9: Контура C_4

Шетња у графу G је низ $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ чворова и грана графа G такав да је $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ за све $i \in \{1, \dots, k\}$. Чворови v_0 и v_k се зову крајеви шетње. Такође кажемо да ова шетња повезује чворове v_0 и v_k .

Пут у графу је низ различитих чворова $v_1, \dots, v_s$ тог графа такав да су v_i и v_{i+1} суседни за све $i \in \{1, \dots, s-1\}$. Број грана на путу зовећемо дужина пута. За пут у графу G кажемо да је максималан ако се он не може продужити. Пут у графу који има највећу дужину је увек максималан, мада обрат не мора да важи. На слици 2.10 је приказан пут P_4 .



$$P_4 = v_1 v_3 v_2 v_5$$

Слика 2.10: Пут P_4

Теорема 2.1.1. Ако постоји шетња која повезује чворове u и v графа G , онда постоји и пут који их повезује.

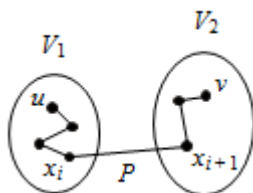
Дефиниција.

Граф G је *повезан* ако за свака два чвора тог графа постоји пут који их повезује. Максималан повезан подграф графа G зове се *компонента повезаности* тог графа. Број компоненти повезаности графа G означавамо са $\omega(G)$. Граф G је *повезан* ако и само ако је $\omega(G) = 1$.

Теорема 2.1.2. Граф G је повезан ако и само ако за свако разбијање $V(G)$ на непразне дисјунктне подскупе V_1 и V_2 ($V_1 \cup V_2 = V(G)$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$) постоји $[V_1 - V_2]$ –грана, тј. грана uv , где $u \in V_1$ и $v \in V_2$.

Доказ.

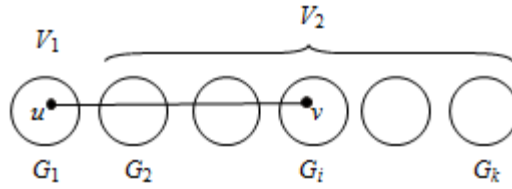
($\Rightarrow$) Покажимо прво да је услов потребан. Нека је G повезан граф. (1) Треба показати да за свако V_1, V_2 разбијање скупа чворова $V(G)$ постоји $[V_1 - V_2]$ –грана у G . Претпоставимо супротно, тј. да постоји разбијање V_1, V_2 скупа чворова $V(G)$ у којем нема $[V_1 - V_2]$ –гране. Нека су $u \in V_1, v \in V_2$ произвољни чворови. Како је, по претпоставци, G повезан граф у њему постоји uv пут. Нека је то пут $P = ux_1 \dots x_k v, k \geq 0$ (Слика 2.11).



Слика 2.11: Доказ теореме 2.1.2

Додајмо да P може да буде само грана uv (у том случају је $k = 0$). Нека је $x_i (0 \leq i \leq k; x_0 = u)$ „последњи” чвор, тог пута, који припада скупу V_1 . Чвор u смо означили са x_0 . Овде последњи значи да сви чворови на путу P после чвора x_i припадају скупу V_2 . Такав чвор x_i мора да постоји јер је u у V_1 , а v у V_2 . Дакле, $x_i \in V_1$, док чворови $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k, x_{k+1} \in V_2$. Са x_{k+1} смо означили чвор v . Међутим, тада је $x_i x_{i+1}$ једна $[V_1 - V_2]$ –грана у G , а то је контрадикција са нашом претпоставком да у G не постоји $[V_1 - V_2]$ –грана.

($\Leftarrow$) Покажимо сада да је услов и довољан. Претпоставимо да за свако разбијање V_1, V_2 скупа чворова графа G постоји $V_1 V_2$ – грана (Слика 2.12). Треба показати да је G повезан граф односно да има тачно једну компоненту повезаности ($\omega(G) = 1$). Претпоставимо супротно тј. $\omega(G) = k \geq 2$. Нека су $G_1, G_2, \dots, G_k$ компоненте повезаности. Извршимо сада разбијање скупа чворова графа G на скупове V_1, V_2 на следећи начин: у скуп V_1 ставимо чворове компоненте G_1 ($V_1 = V(G_1)$), а у скуп V_2 чворове свих осталих компоненти ($V_2 = V(G_2) \cup \dots \cup V(G_k)$).



Слика 2.12. V_1V_2 – грана

Сходно нашој претпоставци постоји $[V_1 - V_2]$ – грана. Нека је то грана $uv \in E(G)$, где $u \in V_1, v \in V_2$. Сагласно дефиницији скупова V_1 и V_2 , чвор u припада првој компоненти G_1 ($u \in V(G_1)$), а чвор v некој компоненти G_i $v \in V(G_i), 2 \leq i \leq k$. Међутим, тада G_1 и G_i чине једну компоненту $(G_1 \cup G_i)$, а не две, односно граф G има $k - 1$ компоненту а не k , а то је контрадикција са нашом претпоставком да има k компоненти. Дакле, претпоставка да G има више од једне компоненте води контрадикцији, из чега следи да је број компоненти графа G једнак 1, а то значи да је G повезан граф.

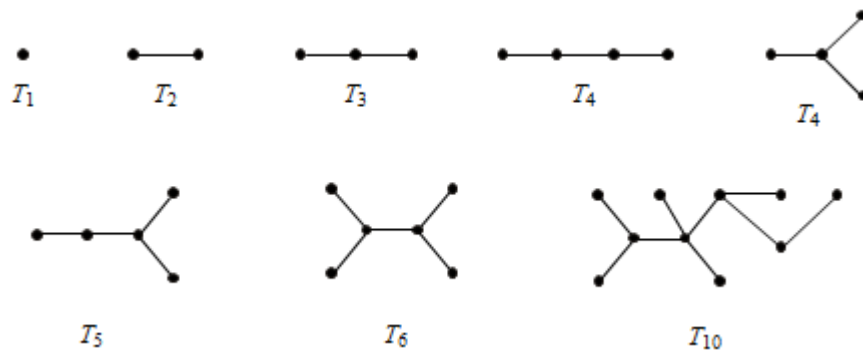
2.3 Стабла

2.3.1 Дефиниција и основне особине

Стабла (или дрвета) представљају уједно једну од најједноставнијих, али и најважнијих класа графова (Слика 2.13). Дакле, она имају релативно једноставну структуру, али ипак довољно сложену да заслужују посебно интересовање. Многе особине графова зависе управо од стабала, као њихових саставних делова. Посебан значај стабла имају у разним применама (у електротехници, рачунарству, физици, хемији итд.).

Дефиниција.

Ацикличан граф је граф који нема контура. *Стабло* је повезан и ацикличан граф. *Шума* је граф без контура. Компоненте повезаности шуме су стабла, или, другачије речено, шума је унија стабала. Подграф шуме је шума. T_n – стабло са n чворова



Слика 2.13. Стабла

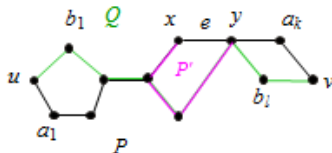
Дефиниција.

Разапињуће стабло је разапињући подграф који је стабло, а *разапињућа шума* је максимални разапињући подграф који је шума. Ако је разапињуће стабло $T = (V, E')$ графа $G = (V, E)$ тада граф $G' = (V, E \setminus E')$ називамо *костабло*. За неповезан граф $G = (V, E)$ и његову разапињућу шуму $T = (V, E')$ уводимо *кошуму* са $G' = (V, E \setminus E')$. Да разјаснимо овде шта подразумевамо под максималним подграфом који је шума. Максималан је у смислу броја грана, тј. ако бисмо додали било коју грану то више не би била шума, него граф који садржи тачно једну контуру. Стога, разапињућа шума садржи разапињућа стабла као своје компоненте повезаности.

Теорема 3.1.1. Свака два чвора стабла су повезана јединственим путем.

Доказ.

Нека су $u, v \in V(T_n), n \geq 2$ два чвора стабла T_n . Како је стабло T_n повезан граф, у њему постоји $(u - v)$ – пут (Слика 2.14). Нека је то пут $P = ua_1 \dots a_k v, k \geq 0$. Напоменимо, за $k = 0$, је $P = uv$. Претпоставимо да постоји још један $(u - v)$ – пут $Q = ub_1 \dots b_l v, l \geq 0$ $Q \neq P$. Како су $Q \neq P \Rightarrow \exists e = xy \in E(P), e \notin E(Q)$, тј. постоји бар једна грана која припада једном путу, а не припада другом. Означимо са $G' = P \cup Q - e$ граф из ког је уклоњена грана e . G' је очигледно подграф стабла T_n ($G' \subset T_n$) и уз то тврдимо да је G' повезан. Како је повезан, у графу G' постоји $(x - y)$ – пут. Нека је то пут $P' = x \dots y$. Када се том путу дода грана e добија се контура $(P' \cup e)$ у T_n .



Слика 2.14: Доказ теореме 3.1.1

Међутим, то је контрадикција, будући да је T_n стабло, а стабла су ациклични графови.

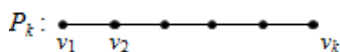
Дефиниција.

За чвор v кажемо да је *висећи* (крајњи) чвор ако је његов степен 1.

Теорема 3.1.2. Свако стабло са бар два чвора има бар два висећа чвора.

Доказ.

Нека је $T_n, n \geq 0$ стабло са бар два чвора и нека је $P_k = v_1 v_2 \dots v_k, k \geq 2$ пут који је најдужи у стаблу T_n (Слика 2.15).

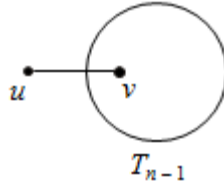


Слика 2.15. Доказ теореме 3.1.2

Q : 

The diagram shows a horizontal line with several black dots representing vertices. The vertices are labeled from left to right as v_1 , v_2 , ..., $X = v_i$, ..., v_k . A curved line (arc) connects the vertex v_1 to the vertex $X = v_i$. This arc represents a path P_1 in the graph.

19



Слика 2.18: Доказ теореме 3.1.3.

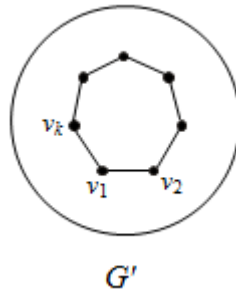
Ако из стабла T_n уклонимо чвор u тврдимо да добијемо стабло са $n - 1$ чворова, тј. $T_n - u = T_{n-1}$ – стабло. На основу индукцијске хипотезе добијено стабло T_{n-1} има $n - 2$ гране, односно $|E(T_{n-1})| = (n - 1) - 1 = n - 2$. Са друге стране, стабло T_n има једну грану више од стабла T_{n-1} , то је грана uv . $|E(T_n)| = |E(T_{n-1})| + 1 = (n - 2) + 1 = n - 1$. Као што смо навели стабла представљају веома важну класу графова. Због тога је корисно да имамо што више индикатора за њих, а то значи што више потребних и довољних услова да неки граф буде стабло. Један од њих је сама дефиниција стабла, тј. повезан и ацикличан граф. Други је као што смо поменули да су свака два чвора повезана јединственим путем. Наредно тврђење даје још два згодна потребна и довољна услова која ћемо користити касније.

Теорема 3.1.4. Ако је G граф са $n, n \geq 1$, чворова, тада су следећа тврђења еквивалентна:

- а) G је стабло,
- б) G је повезан и има $n - 1$ грану
- в) G је ацикличан и има $n - 1$ грану.

Доказ.

Доказаћемо $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (v) \Rightarrow (a)$. Најпре да из $(a) \Rightarrow (b)$. Дакле, G је стабло са n чворова. Тада из дефиниције стабла и претходне теореме ТЗ.1.3 следи да је G повезан и да има $n - 1$ грану, а то је управо тврђење (б). Покажимо сада да из (б) $\Rightarrow$ (в). Сада је претпоставка да је G повезан граф са n чворова и $n - 1$ граном. Да би доказали тврђење (в) довољно је да докажемо да је G ацикличан. Претпоставимо супротно, а то је да G садржи контуру. Нека је то контура $C = v_1 v_2 \dots v_k v_1 \subset G$. Означимо са G' граф који се добија из графа G уклањањем гране $v_1 v_2$ са контуре C , тј. $G' = G - v_1 v_2$ (Слика 2.19).



Слика 2.19: Доказ теореме 3.1.4

Тврдимо да је граф G' повезан. Са друге стране, граф G' има n чворова као и граф G и $n - 2$ гране. Све у свему, G' је повезан граф са n чворова и $n - 2$ гране. Међутим, то је контрадикција са ранијом теоремом (*Теорема: Граф са $n(n \geq 2)$ чворова и мање од $n - 1$ грана није повезан.*) која каже да граф са n чворова и мање од $n - 1$ гране није повезан. Према томе, граф G је ацикличан и има $n - 1$ грану, тј. важи тврђење (в). Докажимо још да из (в) $\Rightarrow$ (а). У овом случају претпоставка је да је G ацикличан граф са n чворова и $n - 1$ граном. Да би доказали да је G стабло довољно је да докажемо да је повезан. Нека су $G_1, \dots, G_k, k \geq 1$ компоненте графа G (Слика 2.20).



Слика 2.20: Компоненте графа G

Како је G ацикличан граф и свака његова компонента је ацикличан граф, а како је уз то свака компонента повезан граф, из дефиниције стабла, следи да је свака компонента стабло. Нека компонента G_i има n_i чворова, односно $|V(G_i)| = n_i$. Тада на основу претходне теореме ТЗ.1.3 та компонента има $n_i - 1$ грану. Са друге стране између компоненти нема грана, стога је $|E(G_1)| + |E(G_2)| + \dots + |E(G_k)| = |E(G)| \Rightarrow (n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n - 1 \Rightarrow (n_1 + \dots + n_k) - k = n - 1 \Rightarrow n - k = n - 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow k = \omega(G) = 1 \Rightarrow G - \text{повезан} \Rightarrow (а)$

2.3.2 Покривајућа стабла

Посебан значај, а и примену имају тзв. *покривајућа* стабла.

Дефиниција.

Стабло T је *покривајуће* стабло графа G ако и само ако је стабло T покривајући подграф графа G . Да се подсетимо, то значи да се скуп чворова стабла T поклапа са скупом чворова графа G и да је скуп грана тога стабла подскуп скупа грана графа G . Интуитивно је јасно да је граф који има покривајуће стабло, повезан, и обратно да сваки повезан граф има покривајуће стабло. Ипак докажимо то тврђење.

Теорема 3.2.1. Граф има покривајуће стабло ако и само ако је повезан.

Доказ.

($\Rightarrow$) Претпоставимо да граф G има покривајуће стабло T . Треба доказати да је G повезан граф. Дакле, стабло T је покривајући подграф графа G . Као што смо рекли његов скуп чворова поклапа се са скупом чворова графа G , док му је скуп грана подскуп скупа грана графа G .

Нека су u, v два произвољна чвора графа G . Тада су они истовремено чворови стабла T , а како је стабло повезан граф постоји $(u - v)$ –пут, означимо га са P , у T . Како су чворови и гране стабла T истовремено чворови и гране графа G , P је $(u - v)$ –пут и у графу G . Дакле, за свака два чвора u, v графа G постоји $(u - v)$ –пут у G , а то значи да је граф G повезан. Тиме је доказ овога дела завршен. ($\Leftarrow$) Нека је G повезан граф. Треба доказати да G има покривајуће стабло. Ако G има највише 2 чвора лако се види да тврђење важи. Наиме, тада се G поклапа са својим покривајућим стаблом. Стога, узмимо да G има бар 3 чвора. Како је G повезан граф са n чворова, на основу раније доказане теореме он има бар $n - 1$ грану. Размотримо 2 случаја: (а) Нека је број грана графа G једнак $n - 1$. На основу претходне теореме, следи да је сам граф G стабло. Према томе, тражено покривајуће стабло T је граф G и доказ је завршен. (б) Нека је број грана графа G већи од $n - 1$, односно већи или једнак од n . За то испитивање биће нам од користи следећа лема која је сама од себе важан резултат.

Лема 3.2.1. Ако је G граф са $n(n \geq 3)$ чворова и бар n грана, тада G садржи контуру.

Доказ.

Нека је G граф са n чворова, где је $n \geq 3$, и који има бар n грана. Треба доказати да G садржи контуру. Прво, приметимо да се без утицаја на општост може узети да је G повезан граф. Ево због чега: претпоставимо да је G неповезан и да су му компоненте $G_1, \dots, G_k, k \geq 2$. Нека компонента G_i има n_i чворова и e_i грана. Тврдимо да тада постоји компонента $G_l, 1 \leq l \leq k$ чији је број грана већи или једнак од броја чворова. Претпоставимо да није тако. Тада је за свако i број грана компоненте G_i мањи или једнак од $n_i - 1$. Како је свака компонента повезан граф, следи да је у овом случају број грана сваке компоненте једнак $n_i - 1$. Како између компоненти нема грана, $|E(G)| = e_1 + \dots + e_k = (n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) = (n_1 + \dots + n_k) - k = n - k < n$. То је контрадикција са условом теореме да G има бар n грана. Према томе, постоји компонента G_l чији је $e_l \geq n_l$. Даље, посматрамо ту компоненту G_l и показујемо да она садржи контуру. Разуме се, тада и граф G садржи контуру, а то значи, да смо могли узети да се G своди на ту компоненту G_l тј. да је повезан. Дакле, G је повезан граф са n чворова и бар n грана. Претпоставимо супротно тј. да G нема контура односно да је ацикличан. По дефиницији, тада је G стабло. Но, тада према раније доказаној теореме G има $n - 1$ грану, а то је контрадикција са претпоставком да је број грана графа G већи или једнак од n . Према томе, G садржи контуру. Тиме је ова лема доказана. Вратимо се сада доказу теореме који ће ићи индукцијом по броју грана графа G који је већи или једнак од n . Ако је тај број једнак n тада на основу доказане леме граф G садржи контуру C . Ако је e произвољна грана са те контуре, означимо са G' граф који се добије из графа G уклањањем гране e . Тада је граф G' повезан са n чворова и $n - 1$ граном.

На основу раније теореме, G' је стабло, а како има исти скуп чворова као и граф G , G' је покривајуће стабло графа G . Према томе, G има покривајуће стабло. Нека је индукцијска хипотеза следеће тврђење: Ако је G повезан граф са n чворова и m ($m \geq n$) грана, тада G има покривајуће стабло.

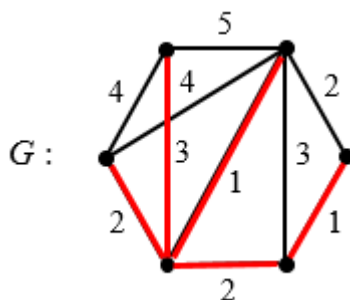
Нека је G повезан граф са n чворова и $m \geq n$ грана. На основу претходне леме, G садржи контуру C . Означимо са G' граф добијен од графа G уклањањем гране e са контуре C . Тада је G' повезан граф са n чворова и $m - 1$ граном. На основу индукцијске хипотезе, G' има покривајуће стабло T . Како је G' покривајући подграф графа G , свако његово покривајуће стабло истовремено је и покривајуће стабло графа G . Према томе, T је покривајуће стабло графа G .

За покривајућа стабла везан је један практичан проблем. За његову формулацију потребно је неколико додатних појмова. Први је појам **тежинског графа**.

Дефиниција.

Тежински граф G је уређена тројка (V, E, w) , где су као и раније, V и E скупови чворова, односно скупови грана, док је $w: E(G) \rightarrow R^+$. Слика гране e тј. $w(e)$ зове се **тежина** дотичне гране. Збир тежина свих грана графа G , $w(G)$, зваћемо тежином графа G , $\sum_{e \in E(G)} w(e) = w(G)$.

Пример (Слика 2.21).



$$w(G) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 31$$

Слика 2.21: Пример тежинског графа

Како је овај граф повезан, он има покривајуће стабло. Нека је T чије су гране обојене црвено једно од њих. Тада је $w(T) = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$. Како повезан тежински граф може имати више покривајућих стабала, може нас интересовати оно покривајуће стабло које је најмање тежине. Другим речима, проблем је следећи: **ПРОБЛЕМ**: За дати повезани тежински граф одредити покривајуће стабло најмање тежине.

Овакво стабло зваћемо још *минимално* покривајуће стабло. Ако је у питању обичан граф са n чворова чије све гране имају исту тежину, рецимо 1, тада свако покривајуће стабло има тежину $n - 1$ и свако је решење наведеног проблема. Међутим, када је у питању тежински граф који садржи гране различитих тежина ситуација је неупоредиво сложенија.

За налажење минималног покривајућег стабла датог тежинског графа постоје више поступака односно алгоритама. Један од њих је **Примов алгоритам** (R. Prim 1957, V.Jarnik 1930). Интересантно је да носи име по америчком математичару Приму, иако је до истог резултата дошао чешки математичар Јарник читавих 27 година пре Прима. Дат је повезан тежински граф G са n чворова. Након завршетка примене алгоритма који ћемо описати добија се минимално покривајуће стабло графа G . Алгоритам се састоји од одређеног броја команди које се примењују на следећи начин:

Команда 1: У графу G уочи се произвољан чвор v_1 и он се прогласи за граф T_1 .

Команда 2: Уочи се грана e_1 која излази из чвора v_1 . Нека је то грана $v_1 v_2$. Притом се грана e_1 бира тако да је она најмање тежине међу свим гранама које излазе из чвора v_1 . Ако таквих грана минималне тежине има више, бира се било која од њих. Са T_2 означимо граф чији су чворови v_1 и v_2 и чији се скуп грана састоји од гране e_1 . Затим се граф T_1 замени графом T_2 .

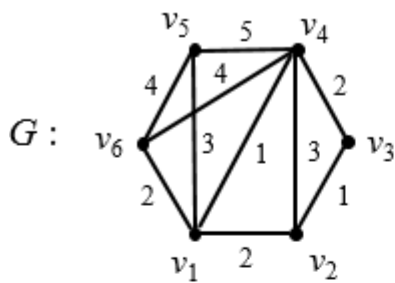
Команда 3: Нека је за $i \geq 2$ добијен граф T_i чији је скуп чворова $v_1, \dots, v_i$ и чији је скуп грана $e_1, \dots, e_{i-1}$. Означимо са T_{i+1} граф чији је скуп чворова $v_1, \dots, v_i, v_{i+1}$ и чији је скуп грана $e_1, \dots, e_{i-1}, e_i$. Као што се види граф T_{i+1} у односу на граф T_i има један чвор више, то је чвор v_{i+1} , и једну грану више, то је грана e_i . Додатни чвор v_{i+1} и додатна грана e_i бирају се на следећи начин: $e_i = v_j v_{i+1}$. Притом за чворове v_j и v_{i+1} важи следеће $w(v_j v_{i+1}) = \min_{\substack{v_s v_t \in E(G) \\ s \in \{1, \dots, i\} \\ t \notin \{1, \dots, i\}}} w(v_s v_t)$. Другим речима, грана e_i бира се међу гранама чији је један

крај у скупу $v_1, \dots, v_i$, а чији је други крај ван тог скупа и притом се бира она која је најмање тежине. Ако таквих има више бира се било која од њих. Затим се граф T_i замени графом T_{i+1} и пређе на команду 4.

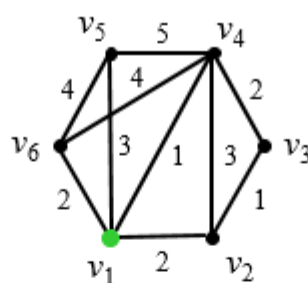
Команда 4: Ако је $i = n$ тада СТОП, а ако није поновити команду 3.

Пре него што се упустимо у анализу Примовог алгоритма приказаћемо како он функционише (Слика 2.22).

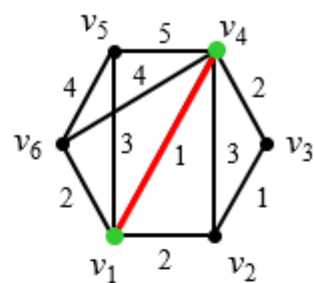
Пример.



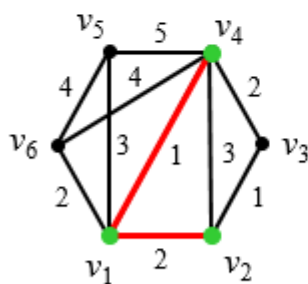
$n = 6$



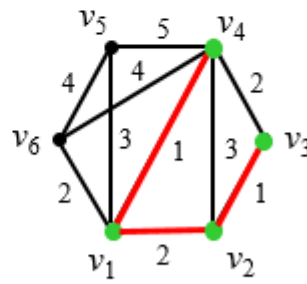
1. $T_1 = v_1$
 $i = 1 < 6$



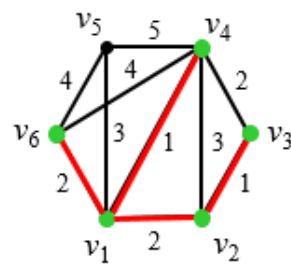
2. $T_2 \quad V(T_2) = \{v_1, v_4\}$
 $E(T_2) = \{v_1v_4\}$
 $i = 2 < 6$



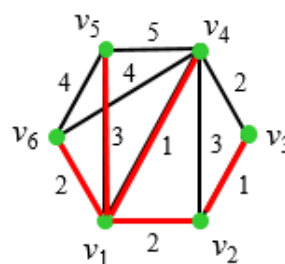
3. $T_3 \quad V(T_3) = \{v_1, v_4, v_2\}$
 $E(T_3) = \{v_1v_4, v_1v_2\}$
 $i = 3 < 6$



3. $T_4 \quad V(T_4) = \{v_1, v_4, v_2, v_3\}$
 $E(T_4) = \{v_1v_4, v_1v_2, v_2v_3\}$
 $i = 4 < 6$



3. $T_5 \quad V(T_5) = \{v_1, v_4, v_2, v_3, v_6\}$
 $E(T_5) = \{v_1v_4, v_1v_2, v_2v_3, v_1v_6\}$
 $i = 5 < 6$



3. $T_6 \quad V(T_6) = \{v_1, v_4, v_2, v_3, v_6, v_5\}$
 $E(T_6) = \{v_1v_4, v_1v_2, v_2v_3, v_1v_6, v_1v_5\}$
 $i = 6 \quad \text{STOP}$

$$w(T_6) = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$$

Слика 2.22. Пример функционисања Примовог алгоритма

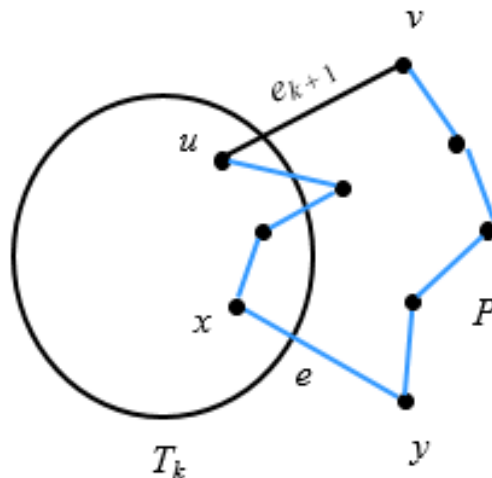
Према Примовом алгоритму, граф T_6 представља минимално покривајуће стабло тежинског графа G . Тежина тога стабла је 9. Из самог описа Примовог алгоритма не види се зашто је завршни граф T_n покривајуће стабло тежинског графа G , а ако и јесте није јасно зашто би то било минимално покривајуће стабло. Због тога је неопходно следеће тврђење које одговара доказу конструкције у геометријским задацима.

Теорема 3.2.2. Примов алгоритам, примењен на повезан тежински граф, даје покривајуће стабло минималне тежине.

Доказ.

Нека је G повезан тежински граф са n чворова и нека је T_n завршни граф добијен Примовим алгоритмом. Тврдимо да је **T_n минимално покривајуће стабло у графу G** (Слика 2.23). Покажимо прво да је **T_n покривајуће стабло у G** . Сходно Примовом алгоритму граф T_1 се своди на чвор v_1 . Граф T_2 добија се тако што се графу T_1 дода висећи чвор v_2 . Затим граф T_3 настаје од графа T_2 додавањем висећег чвора v_3 и тако даље. Уопште граф T_{i+1} настаје од графа T_i додавањем висећег чвора v_{i+1} . Завршни граф T_n настаје од графа T_{n-1} додавањем висећег чвора v_n . Како се у сваком кораку додаје нови чвор, граф T_n има n чворова колико и граф G . Према томе, T_n је покривајући подграф графа G . Покажимо да је T_n стабло. У сврху тога вратимо се на почетак алгоритма. Граф T_1 је повезан будући да се састоји од само једног чвора. Кад му се дода висећи чвор настаје граф T_2 који је такође повезан. Уопште, лако се види да се додавањем висећег чвора повезаном графу добија поново повезан граф. Према томе и граф T_3 је повезан и тако даље и граф T_n је такође повезан. Дакле, T_n је повезан граф са n чворова. С друге стране, T_n има $n - 1$ грану јер је почев од другог корака додавана по једна нова грана. На основу раније теореме T_n је стабло, а како је истовремено покривајући подграф T_n је покривајуће стабло у графу G . Покажимо сада да је добијено стабло **T_n покривајуће стабло најмање тежине** или како смо га још звали **минимално покривајуће стабло**. Нека је T_n завршно стабло и нека су $e_1, \dots, e_{n-1}$, редом, његове гране добијене Примовим алгоритмом. Претпоставимо да T_n није минимално стабло. Означимо са S минимално стабло. Тада је његова тежина мања од тежине стабла T_n . Тих минималних стабала може бити више. Нека је S оно које има следећу особину: од свих минималних стабала графа G , стабла T_n и S имају првих k заједничких почетних грана e_i где је k највеће могуће. Другим речима, важи следеће: пошто је стабло T_n различито од минималног стабла S величина k може да узима вредности $0, \dots, n - 2$. Наиме, k не може да буде једнако $n - 1$ јер би тада стабла T_n и S имала исте гране па би се поклапала. Нека је e_{k+1} грана uv која припада стаблу T_n , а не припада стаблу S . Притом, сходно Примовом алгоритму, један њен крај, рецимо u припада графу T_k , док други крај v није чвор тога графа. Пошто је стабло S повезан граф у њему постоји uv — пут, означимо га са P .

Како грана e_{k+1} не припада стаблу S , она не припада ни путу P . Тако у стаблу S имамо пут P који спаја чвор u који припада графу T_k са чвором v који је ван графа T_k . Притом чворови u и v нису суседни у стаблу S . Из тога следи да на путу P постоји грана e са крајевима x и y таква да чвор x припада графу T_k док је чвор y ван тог графа.



Слика 2.23: Примов алгоритам, примењен на повезан тежински граф

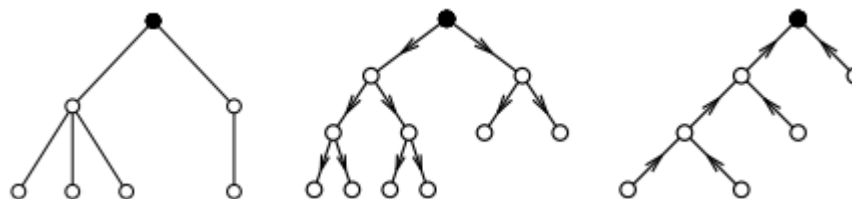
Вратимо се сада Примовом алгоритму и тренутку када смо бирали грану e_{k+1} тј. када смо од графа T_k формирали граф T_{k+1} . У том тренутку на располагању нам је била и грана $e = xy$. Међутим, изабрали смо грану e_{k+1} односно грану uv . Објашњење за то је следеће: грана e_{k+1} је била мање тежине од гране e , па је према Команди 3 Примовог алгоритма, имала приоритет над граном e . Друга могућност је да су гране e_{k+1} и e имале исте тежине, па је свака од њих могла бити изабрана, а ми смо се одлучили за грану e_{k+1} . Све у свему, из Команде 3 Примовог алгоритма, следи да је тежина гране e_{k+1} мања или једнака од тежине гране e . За даљи ток доказа важна је следећа лема:

Лема 3.2.2. Ако се у стаблу T уклони једна грана, добија се неповезан граф G који се састоји од два стабла T' и T'' . Ако се потом графу G дода грана која спаја било који чвор из T' с било којим чвором из T'' , добија се поново стабло (које не мора да буде стабло T). Означимо са S' граф који се добија из стабла S уклањањем гране e и додавањем гране e_{k+1} . На основу наведене леме, S' је такође покривајуће стабло у графу G . С обзиром на начин како је настало, $w(S') = w(S) - w(e) + w(e_{k+1}) \leq w(S)$. Како је S минимално стабло, следи $w(S') = w(S)$, што значи да је S' такође минимално стабло. Међутим, стабло S' има са стаблом T_n заједничке гране $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}$, а то значи једну грану више него стабло S . Но, то је контрадикција са максималношћу величине k . Дакле, претпоставка да завршно покривајуће стабло T_n које се добија Примовим алгоритмом није минимално води контрадикцији. Следи да је T_n минимално покривајуће стабло тежинског графа G , чиме је потврђена исправност Примовог алгоритма.

2.3.3 Коренска стабла

Дефиниција.

Стабло у коме је један чвор посебно издвојен назива се *коренско стабло*, а тај чвор се назива *корен* стабла (Слика 2.24).



Слика 2.24. Коренска стабла

Ако је T коренско стабло, а v чвор различит од корена, *родитељ* чвора v је чвор u такав да је uv оријентисана грана од u ка v . Тада је v дете чвора u . Чворови са истим родитељем u су *деца* чвора u . Код коренских стабала се понекад гране оријентишу од родитеља ка деци или од деце ка родитељима. *Преци* чвора u , који није корен, су сви чворови који леже на путу од корена до чвора u (без u). *Потомци* чвора u су сви чворови који имају чвор u као претка. *Лист* је чвор без деце (такви чворови се називају и *терминални*, односно *завршни чворови*). Остали чворови су *унутрашњи чворови* (или *интерни чворови*). Корен је интерни чвор ако стабло T садржи бар два чвора. Ако је u чвор коренског стабла, тада је подстабло са кореном u стабло индуковано чвором u и његовим потомцима.

Дефиниција.

Коренско стабло се назива *m -арно стабло* ако сваки интерни чвор има највише m деце. *Потпуно m -арно стабло* је стабло у коме сваки интерни чвор има тачно m деце. За $m = 2$ одговарајуће *m -арно стабло* се назива *бинарно стабло*. На слици 2.25 можемо видети три *m -арна коренска стабла*.

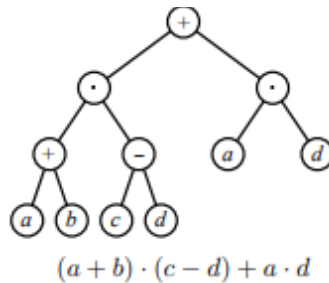


Слика 2.25: m -арно стабло

Уређена коренска стабла су стабла у којима су деца сваког интерног чвора дата у одређеном поретку. Приликом цртања тих графова, чворови се смештају слеве на десну страну уз респектовање поретка. Тиме су уједно и гране стабла уређене. Код бинарних стабала, ако родитељ има два детета, тада су у употреби и појмови *лево дете* (подстабло), или *десно дете* (подстабло). Понекад, ако родитељ има само једно дете, оно може бити или лево или десно дете.

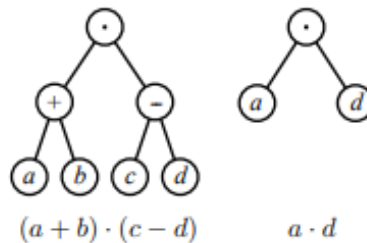
Важно својство коренског стабла је да је између сваког чвора графа и корена постоји јединствен пут. У односу на корен, може се извршити партиција скупа чворова графа на следећи начин: V_0 се састоји само од корена, $V_i, i > 1$ је скуп чворова графа на растојању i од корена. Дакле имамо да се скуп чворова графа може представити на следећи начин $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_h$.

Уобичајено је да се каже да су чворови V_i на i -том нивоу у односу на r (корен стабла). Уједно, h је *висина* стабла. Коренска стабла имају велику примену у рачунарству. Показаћемо на примеру како се нека формула може представити коренским стаблом (Слика 2.26).



Слика 2.26. Пример представљања формуле коренским стаблом

Корен одговара целој формули $(a + b) \cdot (c - d) + a \cdot d$. Сваки унутрашњи чвор одговара некој подформули: на пример, лево подстабло корена одговара подформули $(a + b) \cdot (c - d)$, а десно подстабло корена одговара подформули $a \cdot d$ (ова два подстабла су представљена на слици 2.27), итд. листови стабла одговарају словним симболима (променљивим).



Слика 2.27. Подстабла

Дефиниција.

За коренско стабло се каже да је *бинарно* ако сваки чвор стабла (родитељ) има највише два суседна чвора на следећем нивоу (детета). У стандардном приказу бинарног стабла дете са леве стране се назива *лево дете*, а дете са десне стране *десно дете*.

2.3.4 Означена стабла

За стабла је везан један доста озбиљан комбинаторни проблем. Потиче из органске хемије и односи се на испитивање угљоводоника. Ради се о такозваним *означеним стаблима*.

Дефиниција.

За два стабла T_n, T'_n , са по n чворова, кажемо да су **означена** уколико имају исти скуп чворова $V(T_n) = V(T'_n)$, рецимо скуп природних бројева $\{1, \dots, n\}$. Означена стабла T_n, T'_n сматрамо **различитим** уколико им се разликују скупови грана, а то значи да постоји бар један пар чворова $\{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$ који су суседни у једном стаблу, а у другом нису.

$$T_n \neq T'_n \Leftrightarrow E(T_n) \neq E(T'_n) \Leftrightarrow \exists \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}, ij \in E(T_n) \wedge ij \notin E(T'_n)$$

Обратите пажњу на то да два различита означена стабла могу бити изоморфна. То ће се видети из примера који следе.

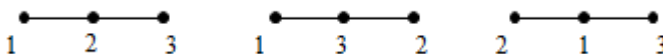
За $n = 1$ постоји само једно означено стабло. То је тривијално стабло са једним чвором.



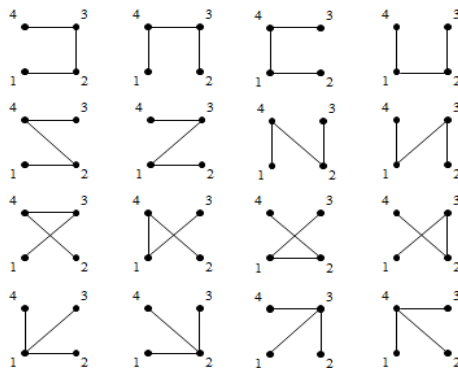
За $n = 2$, поново је означено стабло јединствено.



За $n = 3$ имамо три означена стабла. То су следећа:



Приметимо да су сва три изоморфна ако се занемаре ознаке. Уз ознаке она су, сходно горњој дефиницији, различита. На пример, у првом стаблу постоји грана 12 које у другом нема. За $n = 4$ постоје 16 различитих означених стабала. Притом су, ако се занемаре ознаке, првих 12 међусобно изоморфна као и последња четири (Слика 2.28).



Слика 2.28. 16 различитих означених стабала

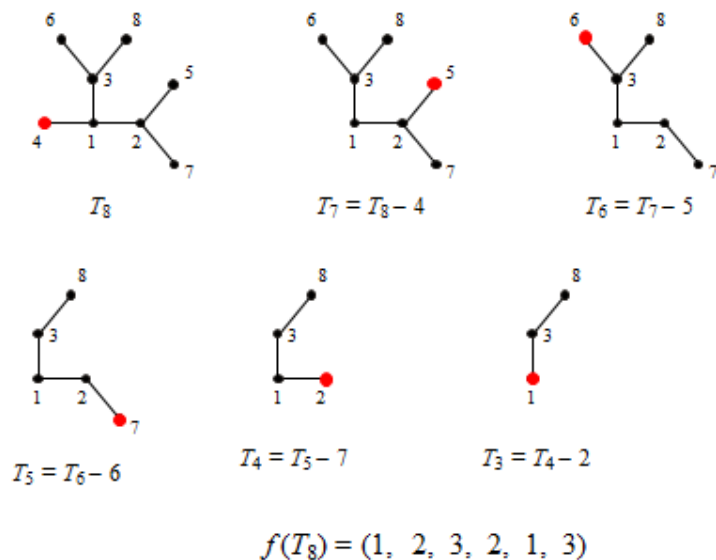
Тако се на природан начин поставља следеће питање: *Колико има различитих означених стабала са n чворова?* До одговора на наведено питање може се доћи на више начина. Један од њих заснива се на блиставој идеји немачког математичара **Прифера (Heinz Prufer 1896-1934)**. Приферова идеја сматра се правим бисером у математици. Ради се о следећем:

Ако желите да опишете неки граф чији је скуп чворова дат или се подразумева, неопходно је да дате скуп његових грана. При том структура графа не зависи само од броја грана већ и од њиховог распореда.

Прифер је смислио начин како да опише стабло на скупу од n чворова помоћу једног низа дужине $n - 2$ чији су елементи поједини чворови стабла поређани одређеним редом. При томе се чворови тога низа могу понављати укључујући и случај када су сви једнаки. Такав низ зове се **Приферов код** или **Приферов низ**. Ево како се до њега долази.

Нека је T_n стабло са скупом чворова V и скупом грана E , тј. $T_n = (V, E)$. Нека скуп чворова чине природни бројеви $V(T_n) = \{1, \dots, n\}$. Нека је $f: T_n \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}), a_i \in \{1, \dots, n\}$ пресликавање које стабло T_n слика у уређену $(n - 2)$ – торку, при чему елементи те $(n - 2)$ – торке припадају скупу чворова стабла T_n . Елементи наведене $(n - 2)$ – торке добијају се на следећи начин:

Нека је b_1 најмањи висући чвор у стаблу T_n и нека је a_1 његов једини сусед. То a_1 је управо први члан горње $(n - 2)$ – торке. Затим се из стабла T_n уклони висући чвор b_1 . Као резултат настаје стабло T_{n-1} . Онда се у њему уочи најмањи висући чвор, рецимо да је то, b_2 . Нека је a_2 једини сусед чвора b_2 у том стаблу. Чвор a_2 је други члан горње $(n - 2)$ – торке. Даље наставимо на сличан начин. Из стабла T_{n-1} уклонимо висући чвор b_2 и добијамо стабло T_{n-2} . У њему уочимо најмањи висући чвор и тако даље. У $n - 2$. кораку у стаблу T_3 које се добија из претходног стабла T_4 уклањањем висућег чвора b_{n-3} уочимо најмањи висући чвор, нека је то b_{n-2} . Ако је чвор a_{n-2} једини његов сусед у том стаблу тај чвор долази на последње место у горњој $(n - 2)$ – торки. Тако добијена уређена $(n - 2)$ – торка тј. тако добијени низ $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ зове се **Приферов код** или **Приферов низ** за означено стабло T_n . Као илустрацију приказаћемо формирање Приферовог кода за једно конкретно означено стабло (Слика 2.29).



Слика 2.29: формирање Приферовог кода

Нека је T_8 означено стабло са 8 чворова. Формирајмо његов Приферов код $f(T_8)$. Његов најмањи висући чвор је 4 чији је једини сусед чвор 1. Према томе, чвор 1 долази на прво место у Приферовом коду.

Затим се из стабла T_8 уклони висећи чвор 4 и добије стабло T_7 . Најмањи висећи чвор у њему је чвор 5 чији је једини сусед чвор 2. Чвор 2 долази на друго место у Приферовом коду. Потом се у стаблу T_7 уклони висећи чвор 5 и добије стабло T_6 . У њему је најмањи висећи чвор 6 чији је једини сусед чвор 3. Стога чвор 3 долази на треће место у Приферовом коду. Даље се из стабла T_6 уклони чвор 6 и добије стабло T_5 . У њему је сад најмањи висећи чвор 7 чији је једини сусед чвор 2. Дакле, чвор 2 заузима четврто место у Приферовом коду. Онда се из стабла T_5 уклони висећи чвор 7 и добије стабло T_4 . У њему је најмањи висећи чвор 2 чији је једини сусед чвор 1. Тако чвор 1 долази на пето место у Приферовом коду. Потом се из стабла T_4 уклони висећи чвор 2 и добије стабло T_3 . У њему је најмањи висећи чвор 1 чији је једини сусед чвор 3. Чвор 3 долази на шесто и последње место у Приферовом коду. Тако Приферов код, датог означеног стабла T_8 , гласи $(1, 2, 3, 2, 1, 3)$.

За Приферов код важи следеће тврђење:

Лема 3.4.1. Сваком означеном стаблу одговара тачно један Приферов код.

Доказ.

Доказ следи из дефиниције пресликавања f тј. начина формирања Приферовог кода. Као што смо видели, Приферов код је уређена $(n - 2)$ – торка чији су чланови елементи скупа $\{1, 2, \dots, n\}$. При том нема никаквих ограничења у смислу да се чланови те $(n - 2)$ – торке могу понављати. Испоставиће се да се свакој таквој $(n - 2)$ – торки може придружити означено стабло са n чворова за које је та $(n - 2)$ – торка Приферов код.

Тај поступак зове се **декодирање** дотичне $(n - 2)$ – торке, а као што смо рекли то значи одређивање означеног стабла са n чворова чији је то Приферов код.

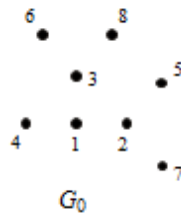
Дефиниција.

Декодирање $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ је одређивање означеног стабла T_n чији је Приферов код a . Ево како изгледа то декодирање. Почиње се са празним графом са n чворова који ћемо означити са G_0 . Нека је $V(G_0) = V(\overline{K_n}) = \{1, \dots, n\}$. Први корак у декодирању: у скупу чворова уочимо најмањи чвор који се не појављује у Приферовом коду. Ако је то чвор b_1 то можемо записати на следећи начин $b_1 = \min\{i | i \in \{1, \dots, n\} - \{a_1, \dots, a_{n-2}\}\}$. Потом графу G_0 додамо грану $b_1 a_1$ и добијени граф означимо са $G_1 = G_0 + b_1 a_1$. Затим прелазимо на други корак: из скупа чворова избришемо чвор b_1 а из Приферовог кода први члан a_1 . Тада на редуковани списак чворова и редуковани Приферов код применимо сличну процедуру као у првом кораку. У редукованом списку чворова уочимо најмањи чвор који се не појављује у редукованом Приферовом коду. Ако је то чвор b_2 то можемо слично као у првом кораку записати на следећи начин $b_2 = \min\{i | i \in \{1, \dots, n\} - \{b_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}\}$. Затим графу G_1 додамо грану $b_2 a_2$ и добијени граф означимо са $G_2 = G_1 + b_2 a_2$. Даље наставимо на сличан начин. У $(n - 2)$. кораку редуковани скуп чворова садржи три чвора, док редуковани Приферов код садржи само један чвор, то је a_{n-2} . Сада у редукованом скупу чворова бирамо најмањи чвор који је различит од a_{n-2} . Ако је у питању чвор b_{n-2} то можемо записати слично као у претходним случајевима, $b_{n-2} = \min\{i | i \in \{1, \dots, n\} - \{b_1, \dots, b_{n-3}, a_{n-2}\}\}$.

Након тога претходно добијеном графу G_{n-3} додамо грану $b_{n-2}a_{n-2}$ и добијени граф означимо са $G_{n-2} = G_{n-3} + b_{n-2}a_{n-2}$. У $(n - 1)$. кораку, сада су у редукованом скупу чворова тачно два чвора. Нека су то b_{n-1} и b_n . То су иначе чворови који остају када се $\{b_{n-1}, b_n\} = \{1, \dots, n\} - \{b_1, \dots, b_{n-2}\}$. Графу G_{n-2} додамо грану $b_{n-1}b_n$ и добијени граф означимо са $G_{n-1} = G_{n-2} + b_{n-1}b_n$. Граф G_{n-1} је тражено означено стабло T_n , тј. $G_{n-1} = T_n$.

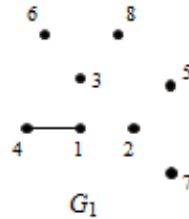
Пример.

Као илустрацију за декодирање одредимо стабло чији је Приферов код следећа уређена шесторка $a = (1, 2, 3, 2, 1, 3)$. Ако погледате у претходном примеру, a је Приферов код стабла T_8 . То значи да након декодирања треба да добијемо дотично стабло T_8 . Починемо са празним графом G_0 чији је скуп чворова $\{1, 2, \dots, 8\}$.



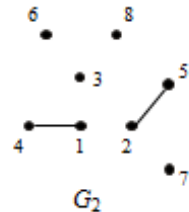
Слика 2.30: Илустрација за декодирање

Најмањи чвор у скупу чворова, а који се не налази у Приферовом коду, је 4. Њега спајамо са првим чланом Приферовог кода, а то је чвор 1 и тако добијамо граф G_1 (Слика 2.31).



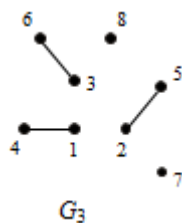
Слика 2.31: Добијање графа G_1

Након тога, бришемо чвор 4 из скупа чворова и чвор 1 у Приферовом коду, и на тај начин добијамо редуковани скуп чворова и редуковани Приферов код. Сада у графу G_1 примењујемо исту процедуру. У новом редукованом списку чворова бирамо најмањи чвор који се не налази у редукованом Приферовом коду, то је чвор 5. Њега спајамо са првим чланом редукованог Приферовог кода тј. са чвором 2. Тако добијамо граф G_2 (Слика 2.32).



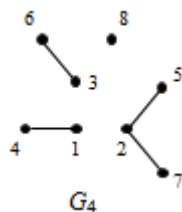
Слика 2.32: Добијање графа G_2

Потом бришемо чвор 5 из последњег списка чворова и чвор 2 из редукованог Приферовог кода и тако добијамо нови списак чворова и нови редуковани Приферов код. Најмањи чвор у новом списку, а који се не појављује у новом редукованом Приферовом коду је 6. Спајамо чвор 6 са чвором 3, првим чланом новог редукованог Приферовог кода. Резултат је граф G_3 (Слика 2.33).



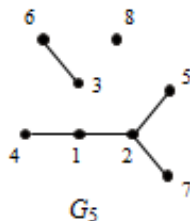
Слика 2.33: Добијање графа G_3

Даље бришемо чворове 6 и 3 и тако добијамо нови списак чворова и нови редуковани Приферов код. У новом списку чворова бирамо најмањи који није у новом Приферовом коду. То је чвор 7 и њега спајамо са првим чвором новог Приферовог кода, а то је чвор 2. Тако настаје нови граф G_4 (Слика 2.34).



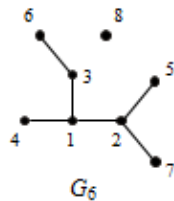
Слика 2.34: Добијање графа G_4

Затим из претходног списка чворова бришемо чвор 7, а из претходног редукованог Приферовог кода први члан, тј. чвор 2. Тако добијамо нови списак чворова и нови редуковани Приферов код. Даље, у новом списку чворова бирамо најмањи који се не налази у новом Приферовом коду, то је чвор 2 који спајамо са првим чланом новог Приферовог кода, а то је чвор 1. Новонастали граф означимо са G_5 (Слика 2.35).



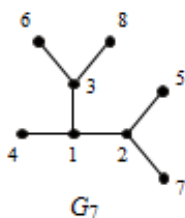
Слика 2.35: Добијање графа G_5

У претходном списку чворова бришемо чвор 2, а у претходном редукованом Приферовом коду бришемо први члан. Тако добијамо нови списак чворова који садржи три чвора и нови редуковани Приферов код који је сада једночлан. У новом списку чворова бирамо најмањи који се не налази у новом редукованом Приферовом коду. То је чвор 1 који спајамо са чвором 3 и добијамо граф G_6 (Слика 2.36).



Слика 2.36: Добијање графа G_6

Чвор 1 бришемо из претходног списка чворова, а чвор 3 из претходног редукованог Приферовог кода. На тај начин добијамо нови списак чворова који садржи два чвора и нови редуковани Приферов код који је сада празан. У последњем кораку спајамо два чвора из последњег списка и из графа G_6 добијамо граф G_7 (Слика 2.37).



Слика 2.37: Добијање графа G_7

Граф G_7 је тражено означено стабло са осам чворова. Заиста, граф G_7 је означено стабло T_8 из претходног примера, а његов Приферов код је, као што смо видели, $(1, 2, 3, 2, 1, 3)$. У вези с декодирањем важи тврђење чијим се доказом нећемо бавити.

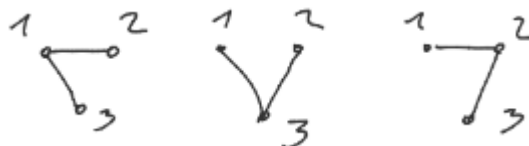
Лема 3.4.2. За сваку $(n - 2)$ – торку $a = (a_1, \dots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \dots, n\}$, постоји једно и само једно стабло T_n , $V(T_n) = \{1, \dots, n\}$, за које је a Приферов код, тј. $f(T_n) = a$. Коначно смо у прилици да дамо одговор на питање колико има означених стабала са n чворова. Има их n^{n-2} и то је резултат познатог енглеског математичара Кејлија (*Arthur Cayley 1821-1895*). *Кејлијева теорема* за број означених стабала је један од најпознатијих и најлепших резултата у комбинаторици.

Теорема 3.4.1. (Cayley 1889) Број означених стабала са n чворова једнак је n^{n-2} .

Напомена: Поред тога што даје елегантан и једноставан одговор на природно постављено питање, ова теорема је занимљива и лепа и зато што се може доказати користећи различите комбинаторне или алгебарске методе.

Доказ бијекцијом.

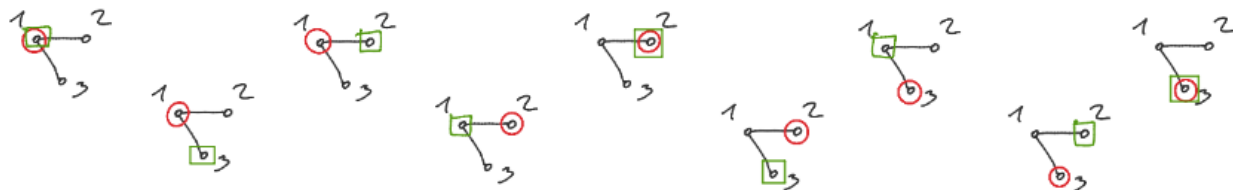
Стабла са 3 чвора:



Означена стабла са 3 чвора која придружујемо стаблу



су:



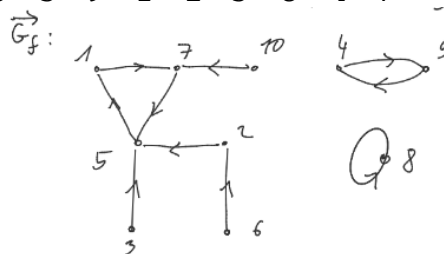
и има их $3 \cdot 3 = 9$, тј. сваком стаблу можемо придружити n^2 истакнутих стабала, где је n број чворова у стаблу. Обележимо са T_n број стабала са n чворова. Сваком стаблу можемо придружити n^2 означених стабала (стабла у којима постоји тачно један чвор обележен са $\circ$ и тачно један чвор обележен са $\square$). Означимо скуп означених (истакнутих) стабала са τ_n . Тада важи $|\tau_n| = n^2 \cdot T_n$. Довољно је показати да је $|\tau_n| = n^n$. Нека је N^N скуп свих функција $f: N \rightarrow N$, где је $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Успоставимо бијекцију F између скупова N^N и τ_n . Значи, циљ нам је да функцији $f \in N^N$ придружимо неко истакнуто стабло из τ_n , а до тог истакнутог стабла ћемо доћи у неколико корака:

1. Наћи ћемо прво усмерени граф $\overrightarrow{G_f}$
2. У графу $\overrightarrow{G_f}$ ће се пронаћи све компоненте повезаности
3. Свака компонента повезаности ће имати тачно један циклус
4. Из диграфа $\overrightarrow{G_f}$ обрисаћемо гране које учествују у циклусима, обрисаћемо смерове у преосталим гранама. На тај начин ћемо добити много малих стабала (више него што је било компоненти повезаности у $\overrightarrow{G_f}$)
5. На крају ћемо повезати мала стабла и добити тражено стабло $F(f)$

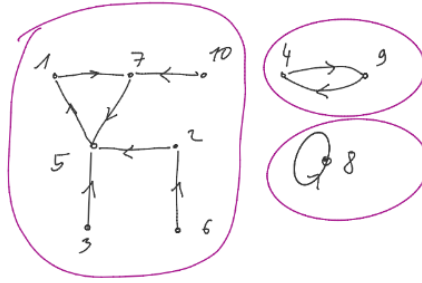
Па да кренемо:

1. Усмерени граф $\overrightarrow{G_f}$ са чворовима $1, 2, \dots, n$ се добија од функције f спајањем чворова $i \rightarrow f(i)$ за све $i \in N$.

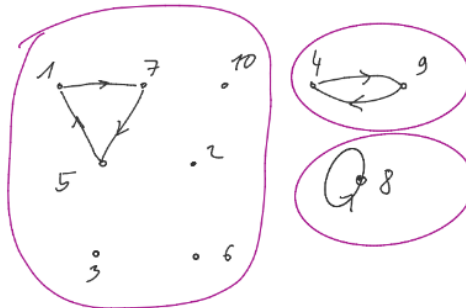
На пример за $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 9 & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ добијамо:



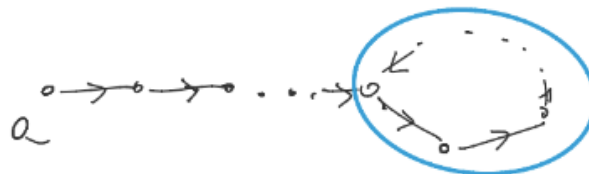
2. Усмерени граф $\overrightarrow{G_f}$ има своје компоненте повезаности (максимални повезани подграфи). На нашем примеру то су три компоненте повезаности заокружене љубичастим. Приметимо да су компоненте повезаности дисјунктне.



3. Диграф $\overrightarrow{G_f}$ је ипак специјалан усмерен граф код кога из сваког чвора излази тачно једна грана (излазни степен сваког чвора је 1). Последица тога је да свака компонента повезаности садржи тачно један циклус. На нашем примеру то су:

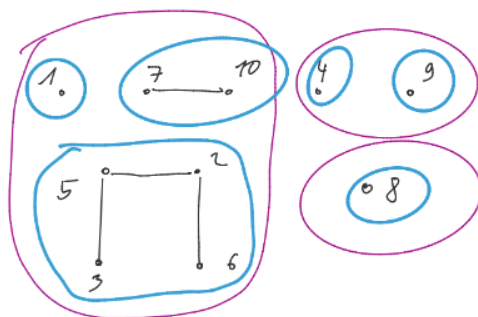


Зашто је то тако? Ако узмемо један чвор, рецимо a , који нема улазних грана (улазни степен му је 0) и уочимо најмањи подграф који садржи чвор a , и све гране које излазе из његових чворова. Тада тај подграф мора бити следећег облика (назовимо га G_a и он садржи тачно један циклус), јер из сваког чвора излази тачно једна грана, број чворова је коначан па се нека грана мора вратити у неки чвор кроз који је већ прошао усмерени пут од чвора a . На тај начин смо добили један усмерени циклус (заокружен плавим).



Сад се питамо да ли у једној компоненти повезаности може да постоји више од једног циклуса. Претпоставимо да постоје два циклуса C_1 и C_2 у једној компоненти повезаности. Како из сваког чвора излази једна грана, онда је $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ (претпоставимо да су различити циклуси). Нека је $\overline{C_1} = \{i \in N \mid C_1 \subseteq G_i\}$ и $\overline{C_2} = \{i \in N \mid C_2 \subseteq G_i\}$, тј. $\overline{C_k}$ је највећи скуп чворова који генеришу повезани подграф који у себи садржи циклус C_k . Тада важи $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} = \emptyset$ јер $\overline{C_1}$ садржи тачно један циклус C_1 , $\overline{C_2}$ садржи тачно један циклус C_2 , а ако би $b \in \overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ онда би циклус из G_b припадао и $\overline{C_1}$ и $\overline{C_2}$, а то је контрадикција.

4. Обришимо сада у графу $\overrightarrow{G_f}$ гране које припадају циклусима, а код преосталих грана избришимо смер. На нашем примеру се добија неоријентисани граф.



На овај начин се добио граф са мало више компоненти повезаности (заокружено плавим) и у свакој плавој компоненти се налази тачно један чвор (представник) који је припадао неком циклусу. Обележимо са M скуп тих представника плавих компоненти, тј. скуп свих чворова који припадају неком циклусу. У нашем примеру је $M = \{1, 7, 5, 4, 9, 8\}$. Ниједна од плавих компоненти не садржи циклус па су све те компоненте нека мала стабла.

5. Сад ћемо повезати мала стабла преко њихових представника тако што ћемо додати једну стазу која повезује све те чворове из скупа M . Уочимо рестрикцију $f|_M$ и запишимо је

$$f|_M: \begin{pmatrix} a & b & z \\ f(a) & f(b) & f(z) \end{pmatrix}$$

где је $M = \{a, b, \dots, z\}$ и $a, b, \dots, z$ је сортиран низ (растући). Поред тога, важи и $M = \{f(a), f(b), \dots, f(z)\}$ јер је $f|_M$ бијекција на скупу M (унија циклуса). У графу са плавим компонентама повежемо гранама суседне чворове из низа $f(a), f(b), \dots, f(z)$, и чвор $f(a)$ прогласимо за истакнути чвор и обележимо са $\circ$, а чвор $f(z)$ прогласимо за истакнути и обележимо са $\square$. На овај начин смо добили једно истакнуто стабло (са $\circ$ и $\square$), тј. $F(f)$. На нашем примеру имамо да је:

$$f|_M: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

(обрисане су колоне из f чији елементи нису у M), па убацујемо гране $7-9-1-5-8-4$ и истуримо $\circ$ и $\square$. Убачене су љубичасте гране, тј. љубичаста стаза која је повезала плаве компоненте, а није направила циклус. До сада смо описали функцију F која функцији f из N^N придружује истакнуто стабло ($F(f)$). Треба показати да је F бијекција. F је "1-1": претпоставимо да $f, g \in N^N$ и да је $F(f) = F(g)$. То значи да стабла $F(f)$ и $F(g)$ имају исте истурене чворове $\circ$ и $\square$, и важи:

1. исте су им стазе које повезују истурене чворове,
2. исте су им "плаве" компоненте као и њихови "представници" (чворови из стазе који се уједно налазе и у плавим компонентама).

Из 1. можемо закључити да је скуп M исти за функције f и g , и важи $f|_M = g|_M$, а то значи да $\overrightarrow{G_f}$ и $\overrightarrow{G_g}$ ван плавих компоненти имају исте гране и да су једнако усмерене.

Како код усмереног графа $\overrightarrow{G_f}(\overrightarrow{G_g})$ у плавим компонентама су све гране "усмерене" ка "представнику" те компоненте (сви путеви воде ка "представнику") добијамо на основу

2. да су све гране једнако усмерене у плавим компонентама код $\overrightarrow{G_f}$ и $\overrightarrow{G_g}$. Из наведеног следи да је $\overrightarrow{G_f} = \overrightarrow{G_g}$, а одатле следи да је $f = g$. F је “НА”: поставља се питање да ли за свако истакнуто стабло S постоји функција $f \in N^N$ таква да је $F(f) = S$. У S имамо истакнуте чворове $\circ$ и $\square$. Нека је M скуп чворова који се налазе на стази која повезује чворове $\circ$ и $\square$, и на том скупу дефинишемо пресликавање f' као $f': \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k \end{pmatrix}$ где је $b_1 - b_2 - \dots - b_k$ горе поменута стаза, $M = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Ако у стаблу S обришемо све гране које се појављују у горе поменутој стази, остаће k стабала и у сваком малом стаблу по један чвор из M . Тада у сваком новом стаблу усмеримо гране тако да сви путеви воде ка чворовима из скупа M . Проширимо сада пресликавање f' на $f \in N^N$ на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{ако } x \in M \\ c, & \text{ако } x \notin M \text{ и постоји грана } x \rightarrow c \end{cases}$$

За овако конструисано f важи $F(f) = S$.

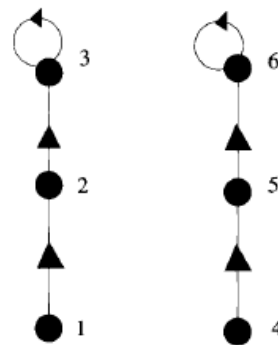
Напомена: овом конструкцијом се постигло да циклуси у $\overrightarrow{G_f}$ образују граф $\overrightarrow{G_{f'}}$.

2.4 Ацикличне функције

Кратки дијаграм функције $f: [n] \rightarrow [n]$ састоји се од n тачака које представљају елементе $[n]$ и n стрелица које представљају дејство f на $[n]$. Функција $f: [n] \rightarrow [n]$ је *ациклична* ако њен кратки дијаграм садржи петље, а не садржи контуре. Мора да садржи петље, јер би у супротном добили контуру што не може.

Пример.

Нека је $n = 6$. Тада је функција $f: [n] \rightarrow [n]$ дефинисана као $f(i) = i + 1$ ако i није дељиво са 3, а $f(i) = i$ иначе, ациклична, као што можемо видети на слици 2.38.



Слика 2.38: Ацикличне функције

Следеће тврђење повезује ацикличне функције са стаблима и шумама.

Теорема 4.1. Број ацикличних функција са n чворова је $(n + 1)^{n-1}$.

Доказ I.

Посматрајмо природну бијекцију H која скуп ацикличних функција са n чворова пресликава на коренска стабла са n чворова. Ако је f ациклична функција са n чворова, онда тврдимо да је приказ f шума (не узимајући у обзир стрелице осим оних на петљама) са једним чвором у свакој компоненти која има петљу око себе. Заиста, пошто је f ациклична следи да свака путања која почиње у било ком чвору из скупа $\{1, \dots, n\}$ мора да се заврши у петљи. Дакле, свака компонента садржи петљу. Ниједна компонента не може имати две петље јер би то значило да постоји чвор излазног степена бар 2. Стога, можемо једноставно поставити да је $H(f)$ неусмерени кратки дијаграм f са чворовима, чије су петље корени компоненте. Супротно томе, ако је F коренско стабло, лако је пронаћи $H^{-1}(F)$ на следећи начин: Ако је x корен компоненте, онда поставимо да је $f(x) = x$. У супротном, поставимо да је $f(x) = y$, где је y јединствени сусед x , који је ближи корену своје компоненте него x . Ово показује да H има инверзну функцију, па следи да је то бијекција. Дакле, ацикличних функција са скупом чворова $\{1, \dots, n\}$ има онолико колико и коренских стабала и овиме је тврђење доказано.

Доказ II.

Да бисмо доказали ову теорему, можемо користити математичку индукцију. Ево корака доказа:

База индукције: Прво, проверимо тврђење за $n = 1$ (један чвор). Са само једним чвором, имамо само једну могућу функцију (тачно или нетачно), што одговара изразу $(1 + 1)^{(1-1)} = 1$. Дакле, основа је тачна.

Индукцијска хипотеза: Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$, где k представља број чворова. То значи да постоји $(k + 1)^{(k-1)}$ ацикличних функција са k чворова.

Индукциони корак: Сада ћемо доказати да тврђење важи за $n = k + 1$. Размотримо граф са $k + 1$ чворова. Да бисмо добили ацикличне функције са $k + 1$ чвором, можемо размотрити два случаја:

а. Случај 1: Чвор $k + 1$ није повезан ни са једним другим чвором. Тада имамо исти број ацикличних функција као за $n = k$, јер $k + 1$ чвор не доприноси цикличним функцијама.

б. Случај 2: Чвор $k + 1$ је повезан са једним или више чворова из првих k чворова. У овом случају, можемо користити индукцијску хипотезу. За сваки чвор из првих k , можемо одабрати да ли ће бити укључен у функцију или не, што даје 2^k могућности. Како имамо $k + 1$ чворова за повезивање са k чворова, укупан број ацикличних функција за овај случај је 2^k пута $(k + 1)^{(k-1)}$.

Сада можемо израчунати укупан број ацикличних функција за $n = k + 1$ додавањем резултата из случаја 1 и случаја 2:

$$\text{Број ацикличних функција за } n = k + 1 = (2^k + 1) \cdot (k + 1)^{(k-1)} = (k + 2)^k.$$

Дакле, тврђење важи и за $n = k + 1$. То значи да ако тврђење важи за $n = 1$ и ако важи за $n = 1$, онда важи и за $n = k + 1$. По принципу математичке индукције, тврђење важи за све позитивне целе бројеве n .

2.5 Паркинг функције

Дефиниција.

Функција паркирања дужине n је низ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ позитивних целих бројева чије неоппадајуће преуређење $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ задовољава $b_i \leq i$. Са P_n означавамо скуп свих функција паркирања дужине n .

Нека ауто C_i преферира паркинг место a_i . Ако је a_i заузето, онда C_i заузима следеће расположиво паркинг место. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ називамо **паркинг функција** (дужине n) ако су сви аутомобили паркирани.

Нека тржни центар има n паркинг места дуж једносмерне улице. Једнога јутра, тачно n аутомобила стиже у тржни центар у различитим временима. Једном када је аутомобил паркиран, не одлази пре него што стигну сви остали аутомобили. Сваки од аутомобила има своје омиљено паркинг место. Наиме, сваки аутомобил прво иде на своје омиљено место. Ако је то тражено омиљено место слободно, аутомобил ће га заузети, у супротном ће се паркирати на следеће паркинг место. Затим, ако следеће паркинг место није слободно, аутомобил ће отићи до наредног места, и тако даље, док не пронађе слободно паркинг место.

Ако нема слободних места после (и укључујући) омиљеног места аутомобила, онда тај аутомобил неће имати паркинг место, а ми ћемо рећи да је паркинг процес био неуспешан. Док, ако је сваки аутомобил пронашао паркинг место, онда ћемо рећи да је процес паркирања био успешан. Док, ако се појаве празна паркинг места, онда је процес паркирања био неуспешан.

Питамо се који скуп преференција за паркирање ће довести до успешног процеса паркирања? Означимо скуп од n аутомобила са $[n]$ и скуп од n паркинг места такође са $[n]$. Нека је $f(i)$ омиљено паркинг место од аутомобила i . Тада је $f: [n] \rightarrow [n]$ функција. Ако је паркинг процес био *успешан*, онда ћемо рећи да је f **функција паркирања** на $[n]$.

Пример.

Нека су дата два аутомобила као и два паркинг места која ћемо означити са 1 и 2. Првом аутомобилу омиљено је место 1, а другом је омиљено место 2. Тада је $(1,2)$ функција паркирања зато што ће сви аутомобили бити паркирани. С друге стране, $(2,2)$ није функција паркирања зато што неће сви аутомобили бити паркирани.

Пример.

Ако је f пермутација, онда је f функција паркирања пошто ће сваки аутомобил наћи своје омиљено место празним. Функција $f(i) = 1$ за све $i \in [n]$ је такође паркинг функција, али функција $f(i) = 2$ за све $i \in [n]$ није, пошто аутомобил који последњи стигне неће имати место за паркирање. У овом тренутку је природно поставити два питања. Прво, посматрајући функцију $f: [n] \rightarrow [n]$, како можемо рећи да ли је f функција паркирања или не? Друго, колико функција паркирања постоји на скупу $[n]$? Када погледамо прво питање, неки неопходни услови ће лако пасти на памет. На пример, може постојати највише један аутомобил чије омиљено место је последње место (тј. може бити највише једно i тако да је $f(i) = n$), пошто аутомобили који прво оду до последњег места, неће добити другу шансу. Слично томе, могу постојати највише два аутомобила чија су омиљена места из скупа $\{n - 1, n\}$.

Теорема 5.1. Функција $f: [n] \rightarrow [n]$ је функција паркирања ако и само ако за све $k \in [n]$ постоји највише k вредности $i \in [n]$ тако да је $f(i) \geq n - k + 1$.

Доказ.

($\Rightarrow$) Ниједан аутомобил неће покушати да се паркира пре свог омиљеног места. Стога, ако више од k аутомобила фаворизује место из последњих k места, тада постоји више од k аутомобила које ће прихватити само место из последњих k места. Дакле, постојаће бар један аутомобил који неће моћи да се паркира.

($\Leftarrow$) Насупрот томе, претпоставимо да постоји бар један аутомобил који нема своје паркинг место (или није у стању да се паркира). Нека C буде први такав аутомобил (хронолошки). То значи да када се аутомобил C доведе до свог омиљеног места i , тада су сва места $i, i + 1, \dots, n$ заузета.

Могуће је да постоје још места непосредно испред i која су такође заузета. Нека је j најмањи индекс тако да сва места нумерисана са $j, j + 1, \dots, n$ су заузета у тренутку када C стигне на паркиралиште. Тада мора да важи $j \geq 2$, пошто се аутомобил C још увек није паркирао, па знамо по дефиницији j , да је $j - 1$ слободно место.

Дакле, ниједан аутомобил који фаворизује место означено бројем $j - 1$ или мање није заузело место са бројем j или више. То значи да $n - j + 1$ места $j, j + 1, \dots, n$ су омиљена места за најмање $n - j + 2$ аутомобила, односно $n - j + 1$ аутомобила који паркирају на овим местима када C стигне, као и сам C . Другим речима, наш услов је нарушен за $k = n - j + 1$.

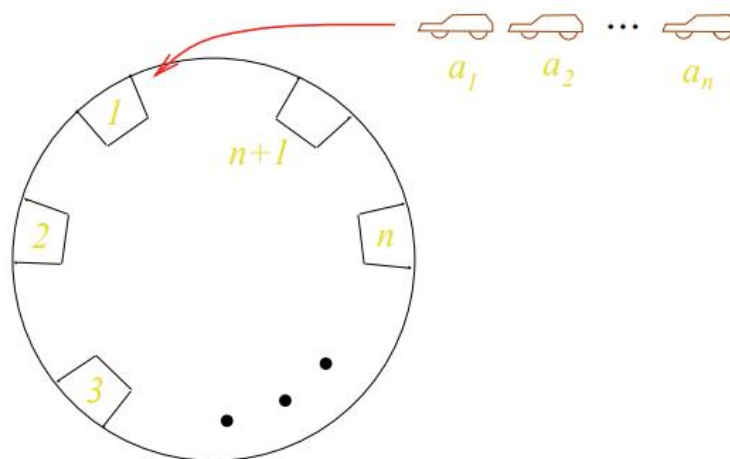
Посебно, имајте на уму да потребан и довољан услов да f буде функција паркирања не зависи од редоследа којим аутомобили стигну на паркиралиште.

Пређимо сада на наше друго питање, односно питање набрајања функција паркирања на $[n]$. Напишимо $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ за функцију f . Према претходној леми, ако је f функција паркирања, онда су и све функције добијене пермутацијом вредности од f . Ове функције ћемо звати *пермутацијама* од f .

Дакле, $(1,2,1)$ је пермутација од $(1,1,2)$. Нека је $P(n)$ број функција паркирања на $[n]$. Тада је $P(1) = 1$ и $P(2) = 3$ (за функције $(1,1)$, $(1,2)$ и $(2,1)$). Лако се проверава да је $P(3) = 16$ (за функције $(1,2,3)$, $(1,1,3)$, $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(1,1,1)$ и њихове пермутације).

Теорема 5.1. (Pyke, 1959; Konheim u Weiss, 1966). Нека је $f(n)$ број функција паркирања дужине n . Тада је $f(n) = (n + 1)^{(n-1)}$.

Доказ. (Pollak, 1974)



Слика 2.39: Доказ теореме 5.1

За почетак, хајде да реорганизујемо паркинг тако да постане кружни и да има $n + 1$ места. Још увек имамо n аутомобила који фаворизују једно од $n + 1$ места. Дакле, укупан број могућих паркинг преференција је $(n + 1)^n$.

Када аутомобил стигне до места $n + 1$ и не може да се паркира, он наставља до места 1, затим ако је потребно до места 2, и тако даље. На овај начин, сваки од n аутомобила ће имати место стога ће једно место остати празно.

Тврдимо да ће свако од $n + 1$ места једнако вероватно остати празно. Заиста, ако одређени скуп преференција остави место i празним, тада ће додавањем 1 свакој преференци паркирања, померити целу процедуру паркирања за један степен, остављајући место $i + 1$ празним. (Овде се $(n + 1) + 1$ тумачи као 1) Дакле, свако место остаје празно на $\frac{1}{(n+1)}$ времена. Приметимо да ако је место $n + 1$ остало празно, онда оно никада није било коришћено током процеса паркирања, па су само места $1, 2, \dots, n$ била потребна. Међутим, то значи да смо се заправо бавили функцијом паркирања. Дакле, број функција паркирања је $\frac{(n+1)^n}{(n+1)} = (n + 1)^{(n-1)}$.

2.6 Задаци

1. Свако стабло са бар два чвора садржи бар два viseћа чвора. Шума са k компоненти повезаности и s изолованих чворова садржи бар $2(k - s)$ viseћих чворова. Доказати.

Решење.

Свака компонента повезаности шуме која није изоловани чвор је стабло са бар два чвора. Њих има $k - s$, а свако стабло са бар два чвора има бар два viseћа чвора. Одатле, шума са k компоненти и s изолованих чворова има бар $2(k - s)$ viseћих чворова.

2. Доказати да у сваком стаблу са бар три чвора постоји чвор који није viseћи чвор, а чији највише један сусед није viseћи чвор.

Решење.

Претпоставимо да то није тачно. Тада постоји стабло T са следећом особином: сваки чвор који није viseћи чвор има бар два суседа који нису viseћи чворови. Нека су $x_1, \dots, x_s$ viseћи чворови стабла T . Посматрајмо сада граф $G = T - x_1 - \dots - x_s$. Према претпоставци, сваки чвор графа G има степен барем 2, тако да у G постоји контура. Због $G \leq T$ добијамо да и у T постоји контура – контрадикција.

3. У једном разреду има 20 ученика, при чему свака два ученика имају заједничког деда. Доказати да постоји деда који у том разреду има бар 14 унука.

Решење.

Нека је $V = \{d_1, \dots, d_n\}$ скуп свих деда свих ученика у том разреду. Сваки ученик има тачно двојицу деда и оба се налазе у скупу V . Показаћемо да важи следеће тврђење: $n = 3$ или постоји деда који је деда свим ученицима. Уочимо граф G чији скуп чворова је V , а два различита чвора су спојена граном ако и само ако та два деда имају заједничког унука.

Зато што свака два ученика имају заједничког деда, сваке две гране у графу су суседне. (Ако би у G постојале две несуседне гране, имали бисмо бар два ученика који немају заједничког деда).

То значи да је G повезан граф и да је дијаметар графа G највише 2. Ако G нема контуру, онда је G стабло дијаметра највише 2, односно, G је звезда. То значи да постоји чвор који је инцидентан са свим гранама, због чега постоји деда који је деда свим ученицима. Ако G има контуру, онда је $G \cong C_3$ зато што је C_3 једини граф који има контуру, а коме су све гране суседне. Тиме је показано да је $n = 3$ или да постоји деда који је деда свим ученицима. Ако постоји деда који је деда свим ученицима, он онда има 20 унука и тиме је тврђење показано. Ако такав деда не постоји, онда је $n = 3$, тј. постоје тачно три деда. Нека први има n_1 унука, други n_2 , а трећи n_3 унука. Зато што сваки унук има тачно двојицу деда, мора бити $n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot 20 = 40$. Бар један од ова три броја је ≥ 14 , што значи да бар један од ова три деда има бар 14 унука.

4. Нека је $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ коначан скуп и нека су $d_1, d_2, \dots, d_n$ природни бројеви такви да је $d_1 + \dots + d_n = 2n - 2$. Доказати да је број стабала са скупом чворова V таквих да чвор v_i има степен $d_i, i = 1, 2, \dots, n$, једнак

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \dots (d_n-1)!}$$

Решење.

Доказ спроводимо математичком индукцијом по n . За $n = 1, 2$ тврђење је тривијално тачно, па претпоставимо да је $n > 2$. Пошто је $d_1 + \dots + d_n = 2n - 2$, постоји i тако да је $d_i = 1$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $d_n = 1$. Нека је τ скуп свих стабала са скупом чворова V таквих да чвор v_i има степен $d_i, i = 1, 2, \dots, n$. Направимо партиципацију $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ скупа τ тако што у скуп τ_j ставимо стабла из τ у којима је чвор v_n суседан са чвором v_j . За свако стабло $T \in \tau_j$, граф $T' = T - v_n$ је стабло са чворовима $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. При томе је $\delta_{T'}(v_i) = d_i$ за $i \neq j$, док је $\delta_{T'}(v_j) = d_j - 1$. Према томе, $|\tau_j| = |\tau'_j|$, где је τ'_j скуп свих стабала са чворовима $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ и са низом степена чворова $d_1, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$. По индуктивној претпоставци, имамо да је

$$\begin{aligned} |\tau'_j| &= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{j-1}-1)!(d_j-2)!(d_{j+1}-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)! \dots (d_{j-1}-1)!(d_j-1)!(d_{j+1}-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} \end{aligned}$$

Како је $|\tau| = \sum_{j=1}^{n-1} |\tau_j|$ добијамо, због $d_n = 1$, да је

$$\begin{aligned} |\tau| &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} \sum_{j=1}^{n-1} (d_j-1) = \frac{(n-2)(n-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_{n-1}-1)!(d_n-1)!} \blacksquare \end{aligned}$$

5. Нека је T стабло са n чворова, $n \geq 2$. За природан број i , нека p_i означава број чворова степена i у стаблу T . Доказати да је $p_1 - p_3 - 2p_4 - \dots - (n-3)p_{n-1} = 2$.

Решење.

У произвољном графу G са n чворова збир степена чворова једнак је $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{i=1}^{n-1} i p_i$, а очигледно важи и $\sum_{i=1}^{n-1} p_i = n$. Ако је G стабло, његов број грана је $n - 1$, тако да добијамо $\sum_{i=1}^{n-1} i p_i = 2(n-1) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} p_i - 2$, што даје тражену једнакост $\sum_{i=1}^{n-1} (2-i) p_i = 2$, односно $p_1 - p_3 - 2p_4 - \dots - (n-3)p_{n-1} = 2$.

6. Краљ Шонгабонга је имао 4 сина, 10 од његових мушких потомака су имали по 3 сина сваки, 15 од његових мушких потомака су имали по 2 сина сваки, док су сви остали умрли без деце. Ако је познато да краљ Шонгабонга није имао женских потомака, колико је укупно мушких потомака имао овај краљ?

Решење.

Ако нацртамо родослов краља Шонгабонге, видимо да он представља стабло у коме чвор који одговара краљу има степен 4, док чвор који одговара неком краљевом потомку има степен за један већи од броја његових синова: по једна грана за сваког сина и још једна грана за његовог оца. Ако сада са p_i , означимо број чворова степена i у родослову, онда видимо да је $p_3 = 15$ и $p_4 = 10 + 1 = 11$. Како родослов садржи само чворове степена 1, 3 или 4, на основу претходног задатка имамо да је $p_1 = p_3 + 2p_4 + 2 = 39$, па је број чворова у стаблу једнак $n = 65$, а како је ту рачунат и краљ Шонгабонга, добијамо да је он имао 64 мушких потомака.

7. Ако је T стабло за које важи $\Delta(T) \geq k$, тада T има бар k листова. Доказати.

Решење.

Нека су $v_1, v_2, \dots, v_n$ чворови стабла T уређени тако да важи $d_T(v_1) \leq d_T(v_2) \leq \dots \leq d_T(v_n) = k$. Како стабло има $n - 1$ грану, то важи $\sum_{i=1}^n d_T(v_i) = 2n - 2$. С друге стране, претпоставимо да T има мање од k листова: тада је $d_T(v_k) \geq 2$ и важи $\sum_{i=1}^n d_T(v_i) \geq (k - 1) \cdot 1 + (n - k) \cdot 2 + k = 2n - 1$, што је контрадикција. Према томе, T има бар k листова.

Напомена: Стабло за које важи $\Delta(T) = k$ и има тачно k висећих чворова назива се *звездасто*: оно има један чвор степена k , док остали чворови имају степен 1 или 2.

8. VI разред, Савезно такмичење 1997. На једном острву постоји укупно 9 држава. Доказати да на овом острву постоји држава која међу њима има паран број пријатељских држава. Ако је држава А пријатељска са државом В, онда је и држава В пријатељска са државом А.

Решење.

Доказати да у графу G са 9 чворова постоји чвор парног степена. Претпоставимо да су сви степени чворова, $d_1, d_2, \dots, d_9$ непарни. Тада је збир $d_1 + d_2 + \dots + d_9$ непаран број, што је немогуће јер је $d_1 + d_2 + \dots + d_9 = 2m$, где је m број грана у G . Како смо добили контрадикцију, полазна претпоставка није тачна, па граф има чвор парног степена.

9. I разред, Савезно такмичење 1990. Цар жели да сагради дворца у којем ће бити 1990 соба у једном нивоу, тако да важе следећи услови:

1. Број врата на свакој соби је 0, 1 или 2.
2. Између сваке две собе су највише једна врата, а из сваке собе на улицу воде највише једна врата.
3. Број врата према улици једнак је 19, а број соба са једним вратима је 90.

Да ли је могуће саградити такав дворца?

Решење.

Да ли постоји граф са 1991 чворова, који има један чвор степена 19 и деведесет чворова степена 1, а остали чворови су степена 0 или 2?

Овде смо спољашњост дворца заменили једним чвором и гране нам представљају врата.

Одговор је одричан, јер је збир степена непаран број, што је немогуће јер је $\sum d_i = 2m$, где је m број грана графа.

$$\sum d_i = 19 + 90 \cdot 1 + k \cdot 0 + (1900 - k) \cdot 2$$

Глава 3

3 Закључак

У овом мастер раду сам се бавила темама пребројавања стабала и анализе ацикличних функција, које су изузетно важне у математици и рачунарству. Циљ рада био је пружити дубље разумевање ових концепата и истражити њихове примене у различитим областима.

Пребројавање стабала је сложен проблем који захтева комбинаторни приступ и правила која ограничавају структуру стабала. Ова анализа има велики значај у областима попут теорије графова, биоинформатике, оптимизације и вештачке интелигенције.

Анализа ацикличних функција нам омогућава разумевање структуре проблема и решавање оптимизационих изазова. Ацикличне функције не садрже циклусе у графу зависности, што их чини погодним за примену у алгоритмима претраге, анализи података и моделирању проблема. Кроз проучавање својстава ацикличних функција, можемо идентификовати оптимална решења и ефикасне алгоритме за различите домене.

Овај рад је показао да пребројавање стабала и анализа ацикличних функција имају значајне примене у разним областима. Њихова примена се може видети у пројектовању ефикасних алгоритама, оптимизацији ресурса, моделирању и анализи података. Разумевање и примена ових концепата може донети значајне предности у решавању проблема и унапређењу перформанси система.

Укупно гледано, овај мастер рад нам је омогућио дубље разумевање пребројавања стабала и анализе ацикличних функција.

Литература

1. Душко Јојић: Елементи Енумеративне Комбинаторике, Наша књига д.о.о, Београд, 2011.
2. Др Дарко Вељан: Комбинаторика с теоријом графова, Школска књига, Загреб, 1989.
3. Др Драгош Цветковић: Теорија графова и њене примене, Научна књига, Београд, 1981.
4. Frank Harary, Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
5. Miklós Bóna: Introduction to Enumerative Combinatorics
6. Martin Aigner, Günter M. Ziegler: Proofs from THE BOOK, Fourth Edition

Биографија аутора

Јована Б. Лозанов, рођена је 24.7.1995. године у Новом Саду, где је завршила Основну школу „Јован Поповић”, а после основне школе Гимназију „Светозар Марковић” општи смер.

Након завршене гимназије уписује Природно-математички факултет, Универзитета у Новом Саду, на студијском програму Дипломирани професор математике, Депарتمان за математику и информатику. После завршених основних академских студија, ради као програмер у компанији ExamRoom.AI у Београду.

Мастер студије на Математичком факултету, Универзитета у Београду, уписује 2020. године и успешно полаже предвиђене испите. Тема мастер рада „Пребројавање стабала и ацикличне функције”, ментор проф. др Горан Ђанковић, ванредни професор-ментор, одобрена је 8.2.2021. године.