

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Цвија Васић

ТЕСЕЛАЦИЈЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

др Срђан ВУКМИРОВИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Мирослав МАРИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Иван ДИМИТРИЈЕВИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 2023.

Мами и папи

Садржај

Увод	v
1 Теселације	1
1.1 Историјски преглед	1
1.2 Појам и класификација	8
1.3 Регуларне (правилне) теселације	13
1.4 Архимедове теселације	16
2 Теселације у настави математике	36
2.1 Могућности примене у настави основне школе	37
2.2 Могућност примене у настави средње школе	56
2.3 Наставни листићи	59
3 Теселације у Геогебри	63
4 Закључак	69
Библиографија	71

Увод

Неформално говорећи, теселација је поплочавање различитих површи облицима који се понављају, без међусобног преклапања и шупљина између њих. Још су стари Египћани, Персијанци, стари Грци и Римљани на тај начин украшавали подове и зидове, а поплочавање је примењивано и у Кини, Јапану и другим старим цивилизацијама. На многим цртежима уочавају се геометријске фигуре које се са одређеном правилношћу понављају, стварајући много разних симетричних слика. Примери поплочавања могу се видети на улицама и трговима, као и на многим другим местима. Наведени примери сведоче да математика и уметност имају много тога заједничког, као и да је математика свуда око нас.

У овом раду биће приказане теселације еуклидске равни. Посебна пажња се посвећује задацима и активностима које почивају на принципу теселација, а применљиве су у настави математике. Видећемо и да је математички концепт теселација идеалан модел за објашњавање различитих математичких појмова. И пре свега појма симетрије.

Прва глава овог рада је посвећена историјском развоју, математичким основама и класификацији теселација. Детаљније ће бити изучавана поплочавања правилним многоугловима која делимо на правилна и полуправилна поплочавања. Друга глава се бави могућностима примене теселација у настави математике, како у основним тако и у средњим школама. Видећемо како теселације можемо користити за објашњавање и увежбавање неких основних математичких појмова. Геогebra је софтвер намењен конструисању динамичке геометрије. У трећој глави ће бити приказан један аплет који реализује Архимедову теселацију конструисану у овом софтверу.

Глава 1

Теселације

1.1 Историјски преглед

Теселације су вековима кориштене у уметничке, архитектонске али и математичке сврхе. Могу бити креативне и лепе попут оних које је урадио М. К. Ешер или се једноставно користи за објашњење симетрије, ротације и просторног односа објеката. Због својих карактеристика и декоративне естетике, теселације су се подједнако користиле у уметности и архитектури, обезбеђујући облоге за зидове, тротоаре и плафоне многих објеката.

Геометријски облици који се слажу заједно и стварају разноврсне шаре и тако прекривају неке површи могу се наћи у свим земљама света. Скоро да не постоји народ који није користио методе теселације из естетских или верских разлога. У различитим епохама коришћени су различити принципи теселације, различити облици и боје.

Порекло теселација може се пратити до 4.000 година пре нове ере, када су Сумерани користили глинене плочице за компоновање украса у својим домовима и храмовима. Одатле је теселација нашла своје место у уметности многих цивилизација, од Египћана, Персијанаца, Римљана и Грка до Византинаца, Арапа, Јапанаца, Кинеза и Мавара. Наравно, природа и дизајн плочица су варирали и прилагођавали су се да одговарају свакој од ових култура и традиција. Током средњег века до 19. века, група интелектуалаца почела је да посматра теселације присутне у природи како би објаснила њихове геометријске структуре, што је резултирало бројним истраживањима

заснованим на математици.



Слика 1.1: Врста зидне декорације на подручју Мезопотамије

Реч теселација потиче од јонске верзије грчке речи *tesseres* што би се превело као четири. У одређеним реченицима можемо пронаћи да *tessellate* значи поплочавати квадратима као да се прави мозаик. Стварно, прва поплочавања различитих површи јесу била са квадратним плочицама. Тако су, на пример, стари Кинези прекривали кровове својих палата и храмова четвороугаоним плочицама различитих боја.

Најимпресивнији примери поплочавања су камени зидови које су користиле Инке правећи терасе обрадиве земље на стрмим радинама на којима су живели. Били су и прави уметници када је реч о клесању камена и грађењу помоћу тих блокова. Без икаквих везивних материјала који се данас користе у грађевинарству, они су подизали камене структуре које нас импресионирају и данас. Очигледно је да правећи те зидове Инке нису користиле принцип симетрије па зато ово није пример теселације али јесте један од лепих и функционалних начина прекривања равни. Оно што је занимљиво је да не постоје два камена која су иста и да су они тако добро уклопљени да не постоји ни најмања шупљина. Чак су тако близу постављени да не може да се провуче ни општрица жилета. Ове конструкције су тако јаке да се при земљотресима мале и средње јачине грађевине уопште не померају, а при јачим земљотресима се блокови померају и онда, по престанку померања тла, легну на исто место и уклопе се како су и раније стајали.

Најзанимљивији примери технике теселације могу се наћи у исламској

уметности и архитектури, посебно код муслиманских становника Магреба, Северне Африке, Пиринејског полуострва, Сицилије и Малте током средњег века. Концепт обојених геометријских облика се савршено уклапао, пошто ислам забрањује живи предмет као представу у уметности, па су они на спектакуларан начин прихватили апстрактне карактеристике теселације. Осим у палати Алхамбра, геометријски узорци и плочице коришћени су и у декоративној уметности, попут текстила и грнчарије.



Слика 1.2: Мотиви теселација у палати Алхамбра

Док су стари Грци и Римљани декорисали плочице које су користили за теселације сликајући људске ликове у елементима мозаика, Арапи су правили врло сложене геометријске облике и фигуре користећи једноставне плочице и мало различитих боја. Посматрајући спољашње зидове византијских цркви уочавамо многе шаре и орнаменте од опеке које јако подсећају на украсе који су прављени у Персији.

Данас се принцип теселације користи у многим индустријама (на пример текстилној), у уметности, грађевинарству, изради оптичких инструмената, у кристалографији код атома који чине кристале, у компјутерској графици итд. Прекривање равни са којима се радо забављају генерације деце из целог света су слагалице и кинеска игра танграм као и неке игре на компјутеру. Једна од таквих игара је тетрис у којој се слажу плочице настале склапањем четири квадрата. Свих 7 начина спајања квадрата могу сами за себе да чине теселацију равни.

Први математичар који се бавио слагањем полигона без шупљина и пре-

клапања и тиме поставио основе за развијање идеја и принципа теселација је Архимед¹. По њему се тринеаст полуправилних полиедара, која се могу посматрати као теселација сфере, зову Архимедова тела. Архимедова тела се састоје од подударних рогљева који су састављени од две или више врста правилних полигона. Правилни полиедри (Платонова тела), који се такође могу посматрати као теселације сфере, се састоје од подударних рогљева у којима се додирују полигони само једне врсте.

Један од првих сачуваних математичких радова о теселацијама је рад немачког астронома и математичара Кеплера². Он је 1619. године извршио потпуну нумерацију униформних теселација еуклидске равни која се сматра и данас савременом. О правилним и Архимедовим теселацијама писао је у књизи Хармонија света³. Сматра се да је био први који је истражио и објаснио хексагоналне структуре саћа и пахуље.

Кеплеров рад о теселацијама је био заборављен скоро три века и на његов значај је тек 1905. године указао Сомервил⁴, доказавши Кеплерово тврђење да постоји тачно 11 униформних теселација у еуклидској равни.

Математичару Давиду Хилберту⁵ проблем теселација равни се у почетку чинио неинтересантним и тривијалним. Он се у свом делу из 1900. године бавио искључиво попловавањем у просторима са три и више димензија. Касније је један од Хилбертових ученика детаљније истраживао проблем теселација у равни и Хилберта заинтересовао за проблем проналаска алгорита са коначним бројем корака који одређује да ли одређена група плочица може бити модел који се може користити за попловавање целе равни. Тада је Хилберт уочио да је проблем далеко од тривијалног. Алгоритам до данас није направљен, иако постоји основана сумња да је алгоритам могуће написати.

Руски математичар Јевграф Фјодоров⁶ 1891. доказује да свако периодично

¹старогрчки математичар, физичар и астроном живео од 287. до 212. г.п.н.е.

²Johannes Kepler (1571-1630), немачки астроном, математичар и астролог

³Harmonices Mundi, 1619., дело које је у целисти написано на латинском и говори о хармонији и подударности у геометријским облицима и физичким појавама

⁴Duncan MacLaren Young Sommerville (1879-1934), шкотски математичар

⁵David Hilbert (1862-1943), немачки математичар

⁶Evgraf Stepanovich Fedorov (1853-1919), руски математичар, кристалограф и геолог

поплочавање равни садржи једну од седамнаест различитих врста изометрија. Фјодоровљев рад означио је неслужбени почетак математичког истраживања мозаика.

Последња открића везана за теселације су била осамдесетих година прошлог века. Наиме, посматрајући арапске грађевине из XII века може се закључити да постоје апериодична поплочавања⁷ са само две врсте плочица. Тако су многи математичари схватили да јако мало знамо о старој арапској математици. Међу научницима је био и британски физичар Роџер Пенроуз⁸ који је почео да се занима за апериодична прекривања равни. Полазећи од Кеплерових цртежа у којима је користио полигоне у облику петокраких звезда, Пенроуз је први конструисао апериодично поплочавање користећи шест врста плочица да би касније (1984. године) смањио број плочица које учествују у теселацији на две.

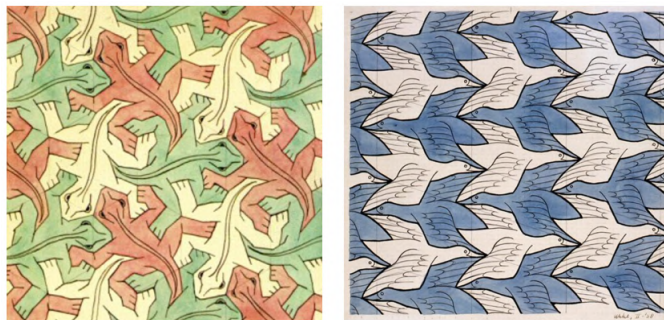
Графичким представљањем теселација успешно се бавио холандски уметник Морис Корнелис Ешер⁹. Његов најпознатији цитат „*Обожавам хаос јер волим да стварам ред*” објашњава страст коју је осјећао за равнотежом, хармонијом и савршенством. Одлучујући моменат који је уметника погуро као стварању уметности коју највише повезујемо са његовим именом био је пут у Гранаду у Шпанији и посета палати Алхамбра. Тамо је пажљиво копирао неке од геометријских плочица које су прекривале фасаду палате и од тог тренутка је његова продукција постала мање опсервативна и формално инвентивна. Његови најславнији радови пратећи принципе теселација истраживали су основне обрасце, али је уметник даље елаборирао, изобличавајући облике и претварајући их у животиње (птице, инсекте, гуштере, рибе) и друге фигуре. Дати дизајни су се у великој мери ослањали на његову љубав према свету природе.

Распоређивање његових облика по еуклидској равни на такав начин да размаци између њих чине друге препознатљиве облике очигледно је у већини

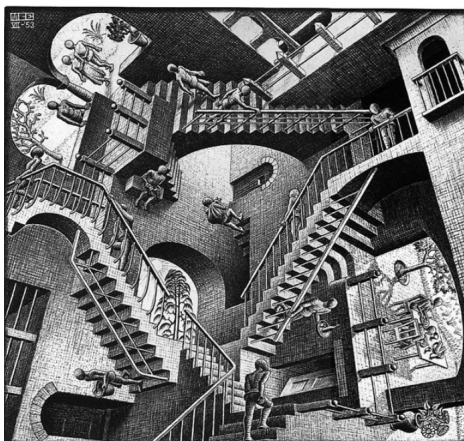
⁷апериодичне плочице прекривају раван тако да се ниједном нигде не понови иста шара. Код апериодичног поплочавања се понављају исте плочице али никада на исти начин. Пример оваквог поплочавања је прекривање равни у облику спирала

⁸Roger Penrose, енглески математичар, физичар и филозоф, добитник Нобелове награде за физику, рођен 1931. године

⁹Maurits Cornelis Escher (1898-1972), холандски уметник и графичар

Слика 1.3: Ешера дела : *Гушџери* и *Две њиџе*

Ешерових теселација од којих су најистакнутије црно-беле слике. На многим од ових слика, разлика између предњег и позадине је избрисана и гледалац може изабрати да види један или други скуп облика као први план по жељи.

Слика 1.4: Ешерово дело *Релативна решеткица*

Хиперболичке теселације приказане у разним моделима хиперболичног простора, а посебно у Поенкареовом диск моделу, су и визуелно привлачне. Прве слике теселације у Поекнареовом диск моделу су се јавиле већ крајем XIX века. Први цртеж теселације хиперболичке равни појавио се у књизи „Предавања из теорије аутоморфних функција”, Феликса Клајна¹⁰ и Роберта Фрикеа¹¹, која је издата у Лајпцигу 1890. године. Проблематика теселације хиперболичке равни са две или више врста полигона није привлачила толику

¹⁰Felix Klein (1849-1925), немачки математичар

¹¹Karl Emanuel Robert Fricke (1861-1930), немачки математичар

пажњу па су ређе слике таквих теселација. Ешер је уз теоријску помоћ Коксетера¹² израдио неке од најпознатијих слика и литографија које су у основи теселације хиперболичке равни. Многи популаризатори науке, попут Карла Сејгана¹³, Стивена Хокинга¹⁴ или Роџера Пенроуза, користили су управо Ешерове илустрације како би својим читаоцима приближили тешко схватљиве научне теорије.

¹²Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), канадски математичар

¹³Carl Edward Sagan (1934-1996), амерички астроном и астробиолог

¹⁴Stephen William Hawking (1942-2018), енглески теоретски физичар, космолог, аутор и директор истраживања за теоријску космологију на Универзитету у Кембриџу

1.2 Појам и класификација

Под *попољчавањем равни* ћемо подразумевати прекривање равни облицима који се по неком правилу понављају тако да између њих нема шупљина и да се ти облици не преклапају. Сада можемо увести и прецизну дефиницију теселације равни и још неких основних појмова.

Дефиниција 1 *Под теселацијом равни π ћодрозумевамо пребројиву фамилију $\tau = \{\tau_i, i \in \mathbf{N}\}$ затворених полигонских површи τ_i . Свака ивица неког полигона τ_i ивица је само још једног полигона, свака тачка равни π припада бар једној полигонској површи и мера пресека било која два полигона $\tau_i, i \neq j$, је нула. Сваки пресек три и више полигонских површи садржи највише једну тачку, коју називамо шеме полигона. Полигоне које чине теселацију називамо плочицама. Уколико плочице имају заједничку ивицу оне се називају суседне.*

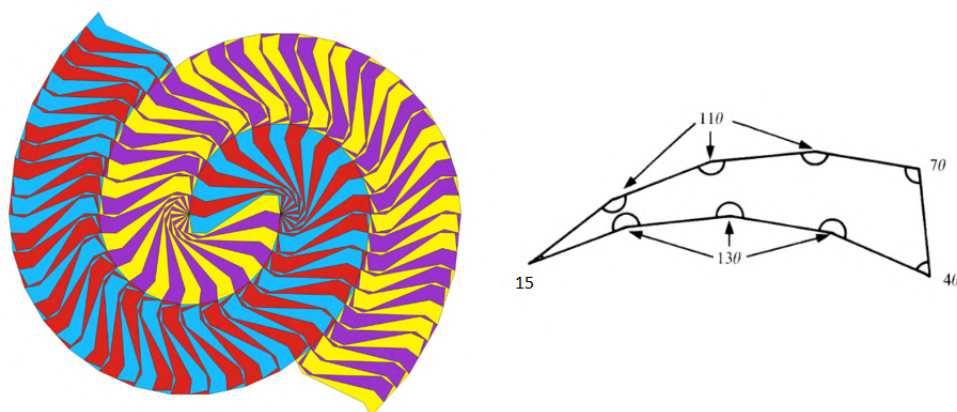
Теселације се могу посматрати у Еуклидској (E^2), хиперболичкој равни (H^2) или на сфери (S^2). Теселација еуклидске и хиперболичке равни је бесконачна, односно постоји бесконачно много полигона који формирају теселацију, док је теселације сфере ограничена површином те сфере.

Надаље у овом раду говоримо о теселацијама еуклидске равни и називаћемо је раван π . Углавном ћемо се бавити теселацијама еуклидске равни где је свака ивица теселације уједно и цела ивица полигона те теселације, називаћемо је *теселација ивица на ивицу*. Посматрајући тачку равни која је врх једног од полигона у теселацији ивица на ивицу уочавамо да је та тачка такође врх сваког другог полигона коме припада; па ћемо је називати *шеме теселације*. Слично, свака ивица једног од полигона је ивица тачно још једног полигона и зваћемо је *ивица попољчавања*.

Навели смо да је теселација пребројива фамилија скупова што значи да иако плочица може бити бесконачно много, можемо их пребројати, што не бисмо били у стању без услова да је мера пресека било којих τ_i нула (дужи и тачке имају меру нула).

Један облик плочице у теселацији назива се прототип. На основу броја коришћених прототипа, поплочавања које имају само један прототип називају се

вамо *моноедарским теселацијама*. Ова врста поплочавања се састоји само од једног облика, што значи да су све кориштене плочице подударне једна другој. У почетку бисте могли помислити да је ова врста поплочавања једноставна и прилично досадна, али дефинитивно није тако. Посебно занимљив тип моноедарског поплочавања је спирално моноедарско поплочавање које је први открио Хајнц Водерберг¹⁵ 1936. године. Прототип наведеног поплочавања је издужен неконвексан деветоугао. Најзанимљивија карактеристика овог полигона је чињеница да две његове копије прототипа могу у потпуности да обухвате трећи. На пример, најнижи љубичасти деветоугао је затворен са два жута, а сва три су идентичког облика. Пре Водерберговог открића, математичари су се питали да ли је то уопште могуће. Поплочавање може



Слика 1.5: Водербертова теселација - пример моноедарског поплочавања

бити и *диедарско*. У овом случају, поплочавање се састоји од два различита облика. Слично, постоје *триедарске*, *четириедарске* или *n - едарске* теселације које означавају учешће три, четири или n прототипа.

На основу врсте полигона, теселације се деле на *правилне*, *полуправилне* и *неправилне* теселације. Правилне теселације су веома симетричне, теселације ивица на ивицу састављене од истих правилних полигона. Постоје тачно три у еуклидској равни, састављене од једнакостраничних троуглова, квадрата или правилних шестоуглова. Све три су моноедарске теселације. Полуправилне теселације су састављене од правилних полигона који не морају бити истог типа, али темена морају бити истог типа, што значи да је свако те-

¹⁵Heinz Voderberg (1911-1945), немачки математичар

ме окружено истим полигонима распоређених у истом цикличком распореду. Наведене теселације обично се називају *Архимедовим теселацијама*. Њихову класификацију излажемо у поглављу 1.4. Постоји осам полуправилних теселација које укључују различите комбинације једнакоугаоних троуглова, квадрата, шестоуглова, осмоуглова и дванаестоуглова. Неправилне теселације немају ограничења у погледу врсте полигона који се користе или њиховог распореда око темена. Верује се да постоји бесконачан број неправилних теселација.

Када посматрате завршену теселацију, могли бисте приметити да се оригинална плочица, или мотив, понавља у шаблону. Једна математичка идеја која се може нагласити кроз теселације је симетрија. Симетрију прототипа не треба мешати са симетријом поплочавања равни. Постоје три врсте симетрије у равни које померају мотив на начин да се и даље тачно поклапа са оригиналним: транслација, ротација и клизајућа рефлексација. Транслација је резултат транслације фигуре за одређени вектор. Обрасци теселације такође се могу ротирати око одређене тачке са одређеним углом ротације и то се назива ротациона симетрија. Клизајућа рефлексација укључује транслацију и рефлексацију мотива. То је једини тип који укључује два корака. Ове три врсте симетрије су изометријске, што значи да плочице не мењају величину. Али, постоје и узорци који се састоје од тога да се плочице постепено смањују или повећавају. Многи математичари не би назвали ово теселацијом јер плочице нису исте величине и не могу у потпуности да попуне раван.



Слика 1.6: Примери уклапања плочица у теселације коришћењем транслације, ротације и рефлексације

Свакој теселацији τ еуклидске равни придружујемо групу $S(\tau)$ њених симетрија која представља све изометријске трансформације равни π и које ту теселацију остављају инваријантном. Те трансформације могу бити транслација, ротација, рефлексација и клизајућа рефлексација.

Теселације се могу направити различитим комбинацијама трансформација. Заправо постоји 17 могућих начина на које се узорак може користити за поплочавање равне површине. Оне се називају групама тапета¹⁶ и то је математичка класификација заснована на симетријама у дводимензионалном мотиву. Доказ о броју могућих теселационих фигура први је извео Евграф Федоров¹⁷ 1891. године, а независно га је извео математичар Џорџ Поља¹⁸ 1924. Пољин рад је инспирисао Ешера који је, иако није разумео апстрактни концепт група о којима се расправља, разумео ових 17 група симетрије и касније на основу њих произвео 43 цртежа. Верује се да палата Алхамбра у Гранади садржи примере свих 17 група.

Теселације се могу класификовати и према томе како су распоређени обрасци који садрже једну или више плочица. Ако се образац понавља тј. има најмање две независне транслационе симетрије теселација се назива *периодичном*. Другим речима, ако постоје два неколинеарна вектора таква да транслација за те векторе пресликава поплочавање у њега самог кажемо да је таква теселација периодична. Све правилне и полуправилне теселације су периодичне. Ако распоред плочица формира неправилан или насумичан образац, теселација се тада назива *непериодична* (*апериодична*). Неки од најпознатијих примера апериодичних шаблона теселације су Пенроузове¹⁹ плочице које користе два различита четвороугла или плочице Пинхвел²⁰ где се плочице појављују у бесконачно много оријентација (слика 1.7). Другу врсту апериодичних теселација чине Ванг плочице²¹ (слика 1.8) које се слажу једна до друге тако да су им додирни делови обојени истом бојом - као у некад популарној игрици TetraVex. У тој игрици су делови квадрата, уместо бојама, често означени само бројевима (слика 1.9). Као и у тој игрици, дат нам је скуп плочица које смо смо користити и плочице не можемо окретати, већ само померати. Сваку плочицу смо смо користити онолико пута колико желимо.

¹⁶Wallpaper group

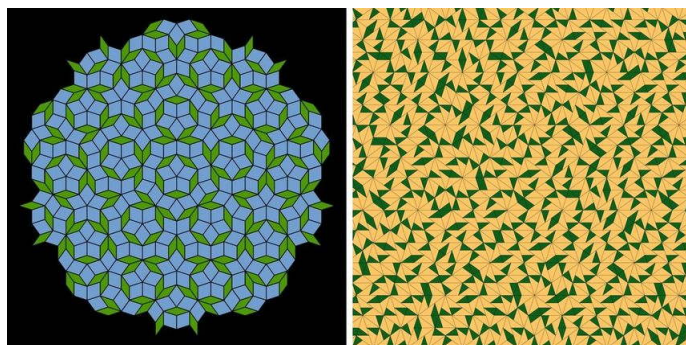
¹⁷Evgráf Stepanovič Fëdorov (1853-1919), руски математичар, кристалограф и минералог

¹⁸Polya György (1887-1985), мађарски математичар

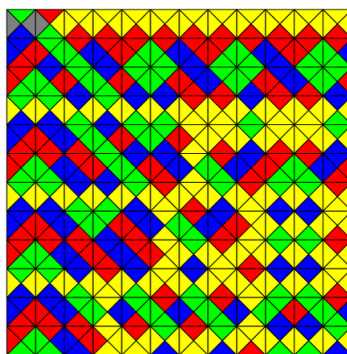
¹⁹Roger Penrose (1931-), енглески математички физичар, математичар, филозоф науке и добитник Нобелове награде за физику

²⁰Пинхвел плочице су непериодичне плочице које је дефинисао Чарлс Радин и засноване су на конструкцији Дона Конвеја

²¹Ванг плочице су квадрати којима су делови тј. једнакокрако-правоугли троуглови одређени пресеком дијагонала обојени



Слика 1.7: Примери аperiодичних теселација: лево - Пенроузова теселација и десно - Пинхвелова теселација

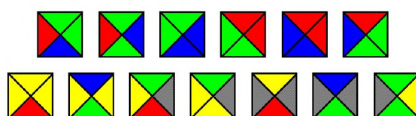


Слика 1.8: Пример аperiодичне теселације - Ванг плочице



Слика 1.9: Игрица TetraVex - правила слагања квадрата

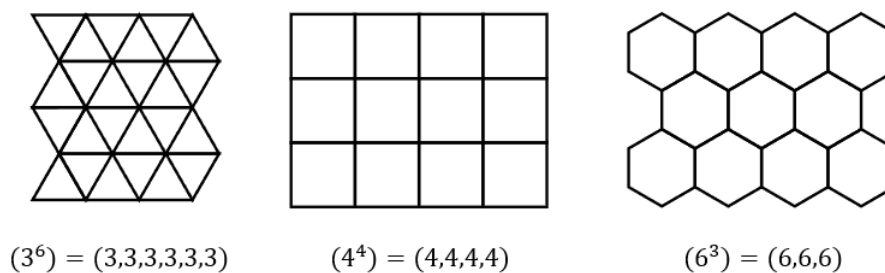
Понекад се називају и Ванг домине, *ови обрасци теселације могу појлочати равн, али само аperiодично*. На слици 1.10, приказан је данас најмањи познати аperiодичан скуп Вангових плочица.



Слика 1.10: Најмањи познати скуп Вангових плочица

1.3 Регуларне (правилне) теселације

Питање о могућностима поплочавања равни подударним копијама једног правилног многоугла има следећи једноставан и прилично очигледан одговор, чије се порекло губи у антици. Једина могућа поплочавања равни од ивице до ивице међусобно подударним правилним конвексним полигонима су три правилна поплочавања једнакостраним троугловима, квадратима или правилним шестоугловима. Наведена поплочавања била су и прва поплочавања која су била предмет математичког истраживања. Ко што смо већ поменули, оне заузимају истакнуто место у пионирском делу Кеплера. Оне представљају једини пример моноедарске теселације ивица на ивицу. Као прототип, имају редом, једнакостранични троугао, квадрат и правиан шестоугао. Називају се *регуларне (правилне) теселације*. Пример сваке од ове три теселације је илустрован на слици 1.11.



Слика 1.11: Три правилне теселације равни

Код правилних и Архимедових теселација су полигони око једног темена увек поређани на исти начин. Приликом именовања прво пишемо број страница полигона са најмањим бројем страница, нека је то a , па број страница полигона са бројем страница b , итд. Тако добијамо циклични низ који одређује то теме, кажемо да је теме типа $a, b, c, \dots, x, y, z$ и ту теселацију, у ознаци $(a, b, c, \dots, x, y, z)$. Тако ћемо правилну теселацију код које се полигон p појављује k пута писати $(p, p, p, \dots, p, p)$, односно, краће (p^k) , види слику 1.11. Сада погледај слику 1.14, у горњем реду са леве стране видимо теселацију $(3, 6, 3, 6)$ која означава да се у сваком темену теселације додирују у цикличном распореду, троугао, шестоугао, троугао и шестоугао. Наравно, подразумевамо да су дати n -тоуглови правилни. Тип темена наведене теселације означавамо $3, 6, 3, 6$. Типови темена су јединствени све до цикличног преуређења (и евен-

туално обрнутог редоследа). На пример 3, 12, 12 се такође може написати као 12, 12, 3 или 12, 3, 12. Да бисмо добили јединствен симбол за сваки тип темена, правило је да се навођење започне од многоугла са најмањим бројем страница.

Теорема 1.3.1 *Постоје тачно три регуларне теселације еуклидске равни и то су попољчавања равни једнакостраничним троугловима и то по шест око сваког темена, попољчавање квадрата, по њих четири око сваког темена и теселација правилним шестоугловима по три око сваког темена.*

Доказ. Уочимо једну тачку еуклидске равни и регуларну теселацију (p^q). Дакле, око сваког темена теселације биће q правилних p -углова. Унутрашњи угао једног правилног p -угла рачунамо по формули

$$\alpha = \frac{(p-2) \cdot 180^\circ}{p}.$$

Да би ти p -углови лежали у равни без преклапања и без шупљина збир унутрашњих углова тих q p -углова мора бити 360° . Дакле, важи следећа једнакост

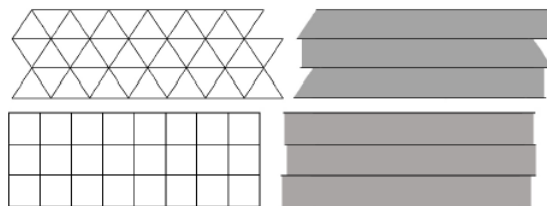
$$q \cdot \frac{(p-2) \cdot 180^\circ}{p} = 360^\circ.$$

Множењем једначине са p и дељењем са 180° сводимо је на облик $q(p-2) = 2p$. Наведена једначина еквивалентна је са $q = \frac{2p}{p-2}$, односно са једначином $q = 2 + \frac{4}{p-2}$. Решења тражимо у скупу природних бројева где $p-2$ дели 4 тј. $p-2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ и како је $p \geq 3$, p може имати вредности 3, 4 или 6. Решења ове једначине су $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$, што је и требало доказати.

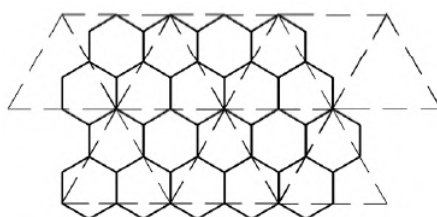
□

Да попољчавања једнакостраничним троугловима и квадратима заиста воде до теселација еуклидске равни доказујемо директно, разматрајући две фамилије (за сваку теселацију по једну фамилију) паралелних правих које чине ивице бесконачних плочица.

Правилну теселацију помоћу правилних шестоуглова можемо изостављањем одређених темена те теселације свести на теселацију правилним троугловима која како смо у претходном разматрању закључили да сигурно постоји.



Слика 1.12: Формирање теселација помоћу бесконачних трака које су настале брисањем одговарајућих темена теселације (3^6) и (4^4) тако да остану фамилије паралелних правих које су границе тих бесконачних трака

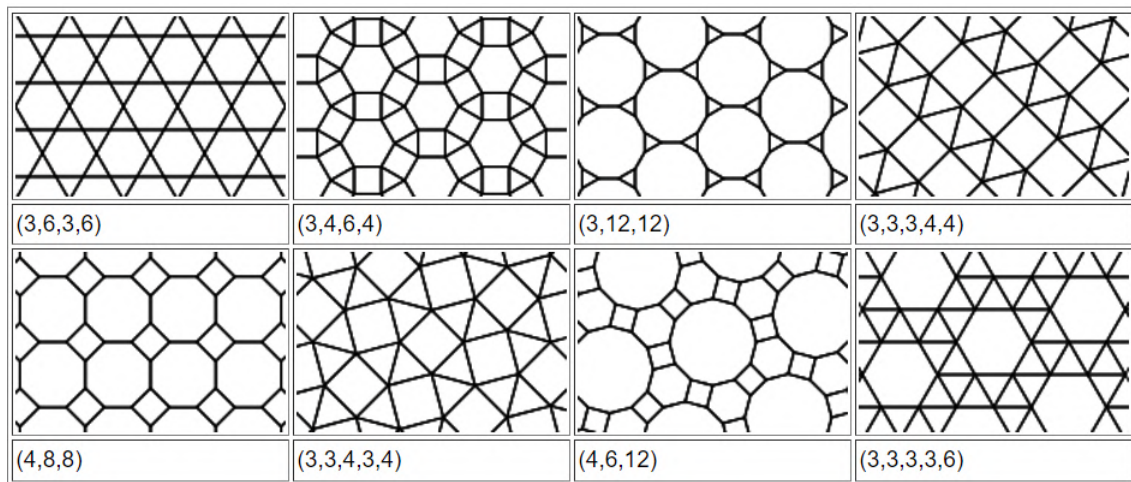


Слика 1.13: Свођење теселације (6^3) на (3^6) изостављањем неких темена теселације

Дакле, у еуклидској геометрији, када причамо о правилним теселацијама постоје само три вредности за p и q , али нема ограничења у величини полигона.

1.4 Архимедове теселације

Постојање само три правилне теселације еуклидске равни поприлично је интуитивно и крајње једноставно. Међутим, постојање поплочавања где се у једном темену теселације еуклидске равни може састати више различитих правилних полигона знатно је интересантније и сложеније. Оваква поплочавања се називају *полуправилне (семирегуларне) теселације*. Примери ових теселација илустровани су на слици 1.14.



Слика 1.14: Полуправилне теселације

Полуправилне теселације су састављене од правилних полигона који не морају бити истог типа, али темена морају бити истог типа, што значи да је свако теме окружено истим полигонима у истом цикличном распореду. Оне се често називају *Архимедовим теселацијама* и јасно је да њима припадају и три правилне теселације. Дакле, да би теселација била Архимедова мора испуњавати следеће услове:

- све плочице су правилни многоуглови,
- свака ивица теселације уједно и цела ивица полигона те теселације,
- сва темена су истог типа,
- то је теселација, стога нема преклапања нити шупљина између полигона.

Јасно је да се у једном темену теселације еуклидске равни може саставити најмање 3, а највише 6 правилних полигона. Унутрашњи угао било ког

правилног многоугла је мањи од 180° тако да се у једном темену теселације еуклидске равни може додиривати најмање три правилна многоугла. Број правилних многоуглова који се састају у једном темену је највише 6 јер је правилни многоугао са најмањим унутрашњим углом троугао, са углом од 60° , па онда највише 6 правилних троуглова може да се додирује у једном темену.

Затим ћемо размотрити питање колико различитих правилних многоуглова може да се састаје у једном темену теселације еуклидске равни. Може нам се учинити да је могуће да се састане много различитих многоуглова у једном темену, али то није случај.

Показаћемо да се у једном темену теселације могу додиривати највише три различита правилна полигона.

Претпоставимо супротно, тј. да се у сваком темену теселације може састати више од три различита многоугла долазимо до контрадикције. Уколико покушамо да сместимо четири различита правилна многоугла и то са најмањим унутрашњим угловима (једнакостранични троугао са унутрашњим углом 60° , квадрат са унутрашњим углом 90° , правилни петугао са унутрашњим углом 108° и правилни шестоугао са унутрашњим углом 120°) у једно теме теселације еуклидске равни видећемо да то не можемо да урадимо без преклапања полигона. Заиста, збир углова тих полигона износи 378° што је веће од 360° . Испитивали смо правилне многоуглове са најмањим бројем страница и самим тим и најмањим унутрашњим угловима, ако бисмо заменили неки од разматраних многоуглова многоуглом са већим бројем страница само бисмо добили већу суму углова, тј. више преклапања тако да закључујемо да је највећи број правилних многоуглова које се може састати у једном темену теселације еуклидске равни три.

И пре него што докажемо колико има Архимедових теселација еуклидске равни, показаћемо који све многоуглови и на који начин могу да се додирују у једном темену без међусобних преклапања и без шупљина између њих.

Докажимо да има 17 комбинација правилних полигона који могу да се

додирују у једном темену шеселације еуклидске равни. Те комбинације ћемо звати *врстама темена*.

Претпоставимо да се у једном темену теселације еуклидске равни додирује p_1 правилних полигона чији је број страница n_1 , p_2 правилних полигона чији је број страница n_2 и p_3 правилних полигона чији је број страница n_3 . Поново постављамо услов да је збир унутрашњих углова многоугла око тог темена 360° :

$$p_1 \frac{n_1 - 2}{n_1} 180^\circ + p_2 \frac{n_2 - 2}{n_2} 180^\circ + p_3 \frac{n_3 - 2}{n_3} 180^\circ = 360^\circ.$$

Скратићемо једначину са 180° и поставити још неке додатне услове. Наиме, знамо да број страница правилних многоуглова не може бити мањи од 3 па важи да су $n_1, n_2, n_3 \geq 3$. Затим, број правилних многоуглова који се састају у једном темену је најмање 3, а највише 6. Па имамо још један услов: $3 \leq p_1 + p_2 + p_3 \leq 6$.

Разликујемо следеће случајеве:

случај 1: $p_1 \neq 0, p_2, p_3 = 0$ подразумева да се око темена теселације састаје само једна врста многоугла: дати случај је већ разматран - *регуларне шеселације*.

случај 2: $p_1, p_2 \neq 0, p_3 = 0$, тј. када се у једном темену теселације додирује две врсте правилних многоуглова. Тада почетна једначина постаје:

$$2 = p_1 \frac{n_1 - 2}{n_1} + p_2 \frac{n_2 - 2}{n_2},$$

тј.

$$p_1 \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + p_2 \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) = 2.$$

Имајући на уму претходно постављене услове $3 \leq p_1 + p_2 \leq 6$ долазимо до закључка да p_1 и p_2 могу имати следеће вредности:

2.1. $p_1 = 1$ и $p_2 = 2$ или $p_1 = 2$ и $p_2 = 1$,

2.2. $p_1 = 1$ и $p_2 = 3$ или $p_1 = 3$ и $p_2 = 1$,

2.3. $p_1 = 1$ и $p_2 = 4$ или $p_1 = 4$ и $p_2 = 1$,

2.4 $p_1 = 2$ и $p_2 = 2$,

2.5. $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$ или $p_1 = 3$ и $p_2 = 2$.

Анализирајмо случај **2.1.** када се у једном шмену теселације састају један правилан многоугао једне врше и два правилна многоугла неке групе врше. Тада полазна једначина постаје:

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + 2 \frac{n_2 - 2}{n_2} = 2.$$

После мало сређивања једначину можемо представити на следећи начин:

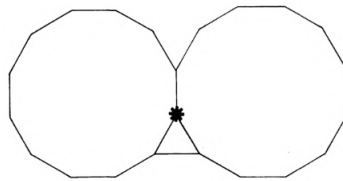
$$\frac{1}{2} - \frac{2}{n_2} = \frac{1}{n_1}.$$

Односно, ако изразимо n_1 преко n_2 добијамо:

$$n_1 = 2 + \frac{8}{n_2 - 4}.$$

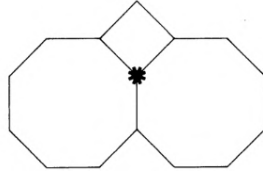
Одатле, имајући на уму да су n_1 и n_2 број страница многоуглова који морају бити природни бројеви, следи да 8 мора бити дељиво са $(n_2 - 4)$ те добијамо скуп могућих решења за n_2 , $n_2 \in \{5, 6, 8, 12\}$. Знамо да број страница многоугла не може бити негативан, нити мањи од три па су прихватљива решења једначине:

- $n_2 = 12$ и $n_1 = 3$, односно теме у којем се додирују два правилна дванаестоугла и један троугао, у ознаци 3,12,12.

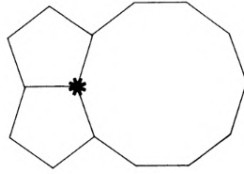


Слика 1.15: Теме типа 3,12,12

- $n_2 = 8$ и $n_1 = 4$, односно теме у којем се додирују два правилна осмоугла и један квадрат, у ознаци 4,8,8.
- $n_2 = 6$ и $n_1 = 6$, овај случај представља регуларну теселацију правилним шестоугловима у ознаци (6,6,6).
- $n_2 = 5$ и $n_1 = 10$, односно теме у којем се додирују два правилна петоугла и један десетоугао, у ознаци 5,5,10.



Слика 1.16: Теме типа 4,8,8



Слика 1.17: Теме типа 5,5,10

Закључујемо да смо потенцијално добили три нова типа темена теселације еуклидске равни правилним многоугловима. Наведени типови темена су јединствени јер без обзира како пермутовали три полигона око темена, изглед и облик добијеног покривања равни увек је исти.

Анализирајмо случај 2.2., када се у једном темену теселације додирује један правилан многоугао једне врсте и три правилна многоугла друге врсте. Желимо да пронађемо које су то могуће врсте многоуглова. Поново ћемо кренути од услова да је збир унутрашњих углова многоугла око тог темена 360° , па имамо следећу једначину:

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + 3 \frac{n_2 - 2}{n_2} = 2.$$

Односно, ако изразимо одатле n_1 преко n_2 добијамо:

$$n_1 = 1 + \frac{3}{n_2 - 3}.$$

Као и случају 2.1. решења за n_1, n_2 морају бити природни бројеви већи од три, па закључујемо да $(n_2 - 3) \mid 3$. Односно, $n_2 \in \{4, 6\}$. Ако је $n_2 = 6$ онда је $n_1 = 2$ што не можемо да прихватимо јер број страница многоугла не може бити 2. Ако је $n_2 = 4$ онда је и $n_1 = 4$ и тај случај смо већ разматрали (прекривање равни квадратима).

Анализирајмо сада случај 2.3. када се у једном темену теселације до-

дирују један *правилан* *многоугао* *једне врсте* и *четири* *правилна* *многоугла* *неке групе врсте*. На основу услова да је збир унутрашњих углова правилних многоуглова који се додирују у једном темену 360° имамо једначину:

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + 4 \frac{n_2 - 2}{n_2} = 2.$$

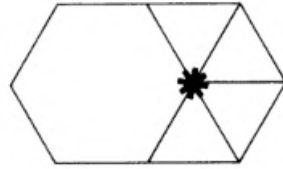
Ако добијену једначину средимо и изразимо n_1 преко n_2 добијамо:

$$n_1 = \frac{2n_2}{3n_2 - 8}.$$

Знамо да важи $n_1 \geq 3$ па даље имамо:

$$3 \leq \frac{2n_2}{3n_2 - 8},$$

односно услов $7n_2 \leq 24$ тј. $n_2 \leq \frac{24}{7} \approx 3$ одакле закључујемо да је једино решење ове једначине у скупу природних бројева $n_1 = 6$ и $n_2 = 3$. Распоред многоуглова и у овом случају је јединствен јер без обзира како распоредили пет многоуглова при чему је један различите врсте изглед и облик добијеног покривања равни остаје исти.



Слика 1.18: Теме типа 3,3,3,3,6

Анализирајмо случај 2.4. када се у једном темену састају два правилна многоугла стране n_1 и два правилна многоугла стране n_2 . Полазећи од услова да је збир унутрашњих углова тих многоуглова око заједничког темена 360° добијамо следећу једначину:

$$2 \frac{n_1 - 2}{n_1} + 2 \frac{n_2 - 2}{n_2} = 2,$$

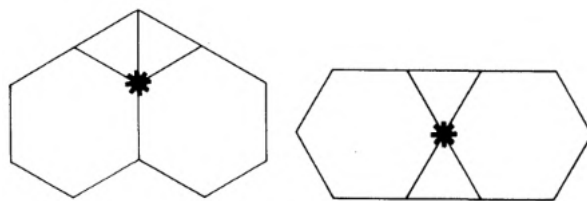
после множења са $\frac{1}{2}$ и мало сређивања добијамо једначину:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2}.$$

Ако одатле изразимо n_2 преко n_1 добијамо:

$$n_2 = 2 + \frac{4}{n_1 - 2}.$$

Решење тражимо у скупу природних бројева па добијамо да је $n_1 - 2$ треба да дели 4. Одатле добијамо два могућа решења полазне једначине, то су: $1.n_1 = 4$ и $n_2 = 4$, $2.n_1 = 6$ и $n_2 = 3$. Први случај смо већ размотрили (прекривање равни квадратима), тако да ћемо разматрати случај 2. када се у једном темену додирују два правилна троугла и два правилна шестоугла. С обзиром да имамо 4 многоугла и две различите врсте, постоје два начина на који многоуглови могу бити распоређени у цикличном поретку. Могућности расподеле ових многоуглова су: 3, 3, 6, 6 и 3, 6, 3, 6. Позиција полигона је различита, добијени облик и изглед је другачији. Код распореда 3, 3, 6, 6 троуглови су један поред другог исто као и шестоуглови, а код 3, 6, 3, 6 троуглови су један наспрам другог исто као и шестоуглови. Наведена два начина постоје јер је у питању циклични распоред многоуглова, па преостали распореди одређују облик који се добија ротацијом неког од облика представљених на слици 1.19.



Слика 1.19: Теме типа 3,3,6,6 и 3,6,3,6

И за крај, анализирајмо случај **2.5.** када се у једном темену састају два правилна многоугла једне врсте и три правилна многоугла друге врсте. Тада имамо следећу једначину:

$$2\frac{n_1 - 2}{n_1} + 3\frac{n_2 - 2}{n_2} = 2.$$

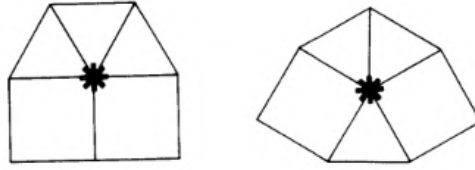
Опет ћемо изразити број страница једног многоугла преко броја страница другог многоугла:

$$n_1 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3(n_2 - 2)}.$$

Пошто n_1 мора бити цео број закључујемо да $(n_2 - 2)$ мора делити 8. У скупу целих бројева n_2 може имати следеће вредности $n_2 \in \{-6, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 10\}$.

Наравно, нека решења нећемо разматрати пошто број страница многоугла не може бити негативан, нити мањи од три. Једино решење ове

Диофантовске једначине добијамо за $n_2 = 3$ и тада је $n_1 = 4$, у осталим случајевима добијамо да n_1 није цео број што је немогуће. Овде поново можемо поређати многоуглове на два начина, а то су 3, 3, 3, 4, 4 и 3, 3, 4, 3, 4. Наведена два начина распореда постоје због цикличног распореда многоуглова, сви преостали распореди одређују исти изглед и облик прекривања равни као и наведени.



Слика 1.20: Теме типа 3,3,3,4,4 и 3,3,4,3,4

случај 3: $p_1, p_2, p_3 \neq 0$, тј. када се у једном темену теселације додирују три врсте правилних многоуглова.

Поставимо услов да је збир унутрашњих углова око једног темена теселације 360° :

$$p_1 \frac{n_1 - 2}{n_1} 180^\circ + p_2 \frac{n_2 - 2}{n_2} 180^\circ + p_3 \frac{n_3 - 2}{n_3} 180^\circ = 360^\circ,$$

да је број страница сваког многоугла већи или једнак три и да је број многоуглова који се састају у једном темену мањи од шест али већи од два, тада за p_i имамо следеће комбинације:

3.1. $p_1 = 1, p_2 = 1$ и $p_3 = 1$;

3.2. $p_1 = 1, p_2 = 2$ и $p_3 = 1$ или $p_1 = 2, p_2 = 1$ и $p_3 = 1$ или $p_1 = 1, p_2 = 1$ и $p_3 = 2$;

3.3. $p_1 = 1, p_2 = 3$ и $p_3 = 1$ или $p_1 = 3, p_2 = 1$ и $p_3 = 1$ или $p_1 = 1, p_2 = 1$ и $p_3 = 3$.

Анализирајмо случај **3.1.** када се у једном темену теселације додирују по један многоуглао сваке врсте. Тада добијамо следећу једначину:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}.$$

Тражимо решења ове једначине у скупу природних бројева. Претпоставићемо да важи $n_1 < n_2 < n_3$, аналогно бисмо разматрали и друге случајеве. Даље, знамо да су $n_1, n_2, n_3 \geq 3$. Кренимо редом, претпоставимо да је $n_1 = 3$. Тада добијамо да је

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6},$$

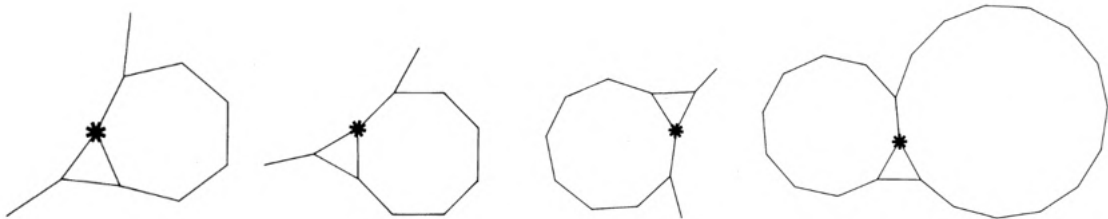
односно

$$n_3 = \frac{6n_2}{n_2 - 6}.$$

Како n_3 мора бити позитивно можемо извући услов да $\frac{6n_2}{n_2-6} > 0$, тј. како је n_2 сигурно веће од нуле ро имамо услов да је $n_2 > 6$. Први цео број већи од 6 је 7, па ћемо разматрати које вредности може имати n_3 када је $n_1 = 3$ и $n_2 \geq 7$:

- $n_1 = 3, n_2 = 7$ и $n_3 = 42$;
- $n_1 = 3, n_2 = 8$ и $n_3 = 24$;
- $n_1 = 3, n_2 = 9$ и $n_3 = 18$;
- $n_1 = 3, n_2 = 10$ и $n_3 = 15$.

Ако бисмо ишли даље, када је $n_1 = 3, n_2 = 11$, решавањем полазне једначине за n_3 не бисмо добили цео број који би представљао број страница многоугла. Такође, ако бисмо анализирали случај $n_1 = 3, n_2 = 12$ тада би било $n_3 = 12$, што не задовољава услов да су сви многоуглови који се састају у овом темену са различитим бројем страница. Ту ћемо стати јер ако бисмо повећали даље n_2, n_3 би се смањивао и не би била задовољена почетна претпоставка $n_1 < n_2 < n_3$. Претпоставимо сада да



Слика 1.21: Теме типа 3,7,42 ; 3,8,24 ; 3,9,18 и 3,10,15

је $n_1 > 3$. Тада за $n_1 = 4$ из полазне једначине добијамо:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4},$$

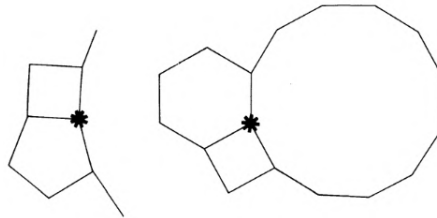
одатле можемо изразити n_3 преко n_2 и добијамо опадајућу функцију:

$$n_3 = \frac{4n_2}{n_2 - 4}.$$

Аналогно разматрању за $n_1 = 3$ знајући да n_3 мора бити позитивно, добијамо услов да је $n_2 \geq 4$. Како је $n_2 > n_1$ то постоје два решења ове једначине ако претпоставимо да је $n_1 = 4$:

- $n_1 = 4, n_2 = 5$ и $n_3 = 20$;
- $n_1 = 4, n_2 = 6$ и $n_3 = 12$.

Других решења нема јер за $n_1 = 4$ и $n_2 = 7$, n_3 није из скупа природних бројева. Ако бисмо ставили да су $n_1 = 4$ и $n_2 = 8$ онда добијамо да је $n_3 = 8$ што се не слаже са почетном претпоставком да су сви многоуглови који се састају у овом темену различити. Даља решења нећемо разматрати пошто смо рекли да је једначина $n_3 = \frac{4n_2}{n_2-4}$ опадајућа и не бисмо могли да добијемо ниједно решење које већ нисмо добили. Ово су



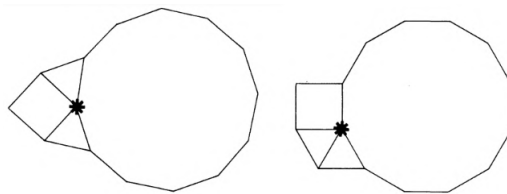
Слика 1.22: Теме типа 4,5,20 и 4,6,12

сва решења случаја 3.1. тј. када се у једном темену теселације додирује по један многоугао сваке врсте. Наиме, уколико бисмо за n_1 узимали веће вредности и представљали n_3 као функцију од n_2 та функција би била поново опадајућа са хоризонталном асимптотом $n_3 = 3$ и за било које $n_2 > n_1$ тада n_3 или не би био природан број или би било мање од n_1 и n_2 што не бисмо могли да прихватимо као решење. У свим овим случајевима распоред многоуглова је јединствен јер без обзира како пермутовали три различита многоугла око темена изглед и облик добијеног

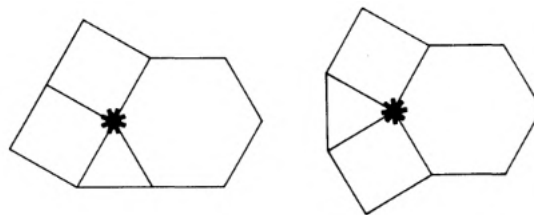
прекривања равни је увек исти.

Анализирајмо случај **3.2.** када се у једном темењу теселације додирује два многоугла једне врсте (број странеца n_1) и по један неке друге врсте (n_2 и n_3). Тада из услова да је збир унутрашњих углова око темена 360° добијамо две могуће комбинације правилних многоуглова:

- $n_1 = 3, n_2 = 12$ и $n_3 = 4$;
- $n_1 = 4, n_2 = 3$ и $n_3 = 6$.



Слика 1.23: Теме типа 3,4,3,12 и 3,3,4,12



Слика 1.24: Теме типа 3,4,4,6 и 3,4,6,4

Код ова два случаја поново распоред многоуглова око темена није јединствен. Број распореда четири правилна многоугла око темена теселације од којих су два четвороуглови, један троугао и један дванаестоугао (шестоугао) је два. Дакле, због цикличног распореда постоје само два различита начина на који полигони могу бити распоређени.

Анализирајмо случај **3.3.** када се у једном темењу теселације додирују три многоугла једне врсте (број странеца n_1) и по једној правилној многоугла са бројем странеца n_2 и n_3 . Да ли је овај случај уопште могућ? Претпоставимо да је могуће и да су у питању правилни троугао, четвороугао и петоугао. Да би ова комбинација могла да чини теме теселације еуклидске равни збир унутрашњих углова тих многоуглова

Табела 1.1: У овој табели је дат приказ свих могућих врста и типова темена у теселацији ивица на ивицу помоћу правилних многоуглова

Табеларни приказ свих темена		
Редни број врсте темена	Редни број типа темена	Тип темена
1	1	3,3,3,3,3,3
2	2	4,4,4,4
3	3	6,6,6
4	4	4,8,8
5	5	3,12,12
6	6	5,5,10
7	7	3,3,3,3,6
8	8	3,3,6,6
8	9	3,6,3,6
9	10	3,3,3,4,4
9	11	3,3,4,3,4
10	12	3,3,4,12
10	13	3,4,3,12
11	14	3,4,6,4
11	15	3,4,4,6
12	16	4,6,12
13	17	3,7,42
14	18	3,8,24
15	19	3,9,18
16	20	3,10,15
17	21	4,5,20

око заједничког темена треба да буде 360° . Међутим, збир је 378° . То значи да постоји преклапање многоуглова што је у контрадикцији са дефиницијом теселација и ово решење не можемо прихватити. Ни једно друго решење нећемо моћи да прихватимо јер смо у претходном случају изабрали правилан троугао, четвороугао и петоугао који имају најмањи унутрашњи угао и кад бисмо неки од њих заменили са неким другим многоуглом добили бисмо само још већа преклапања многоуглова.

Тиме смо доказали да постоји 17 комбинација правилних полигона који могу да се додирују у једном темену. Те комбинације зовемо *врстама темена*, а видели смо да неке врсте темена имају по две комбинације распореда правилних многоуглова њих ћемо називати *шиловима темена*. Постоји укупно 21 тип темена. У табели 1.1 дат је приказ наведених врста и типова темена. Дата

табела даје приказ свих могућих врста и типова темена у теселацији ивица на ивицу помоћу правилних многоуглова.

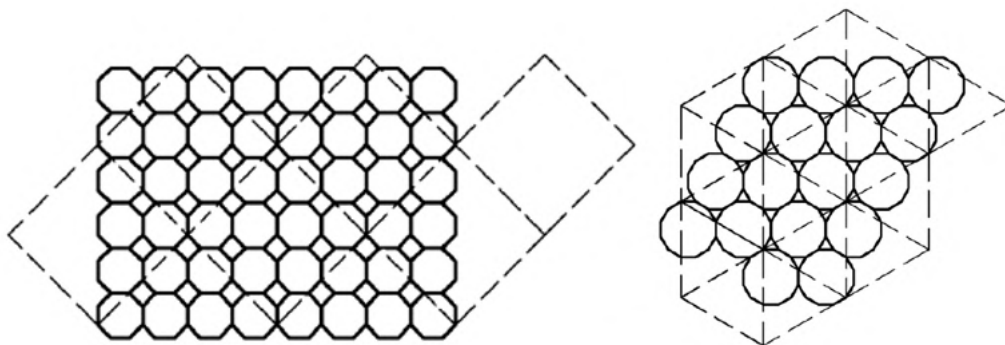
Доказали смо да постоји 21 тип темена теселације. Сада ћемо навести теорему и доказ о броју Архимедових теселација еуклидске равни. Истражићемо који тип темена се може проширити на теселацију еуклидске равни.

Теорема 1.4.1 *Постоји тачно осам Архимедових теселација (које нису регуларне) еуклидске равни. То су $(3^4, 6)$, $(3^3, 4^2)$, $(3^2, 4, 3, 4)$, $(3, 4, 6, 4)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 12^2)$, $(4, 6, 12)$ и $(4, 8^2)$.*

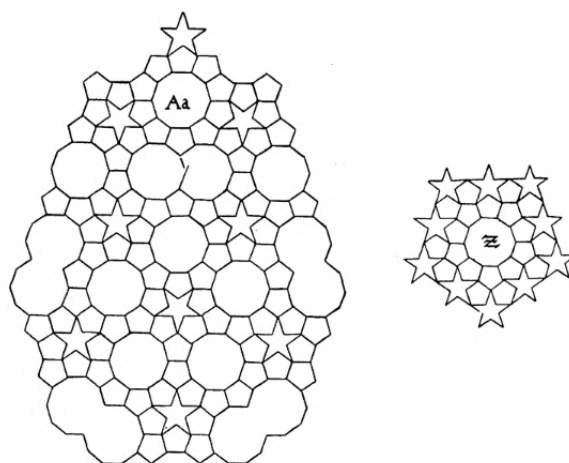
Доказ. Да наведене теселације воде до Архимедових теселација доказујемо тако што ћемо правилне теселације еуклидске равни сводити на наведене теселације. Постојање правилних теселација еуклидске равни смо доказали прављењем бесконачних трака. Осим тога, потребно је показати да се преостали типови темена приказаних у табели 1.1 заправо не могу проширити у Архимедову теселацију еуклидске равни.

Постојање Архимедових теселација $(4, 8^2)$ и $(3, 12^2)$ доказујемо помоћу постојања регуларних теселација. Полазећи од регуларне теселације правилним четвороугловима и додавањем одређених темена и ивица можемо доћи до Архимедове теселације $(4, 8^2)$. На сличан начин, помоћу регуларне теселације правилним троугловима долазимо до Архимедове теселације $(3, 12^2)$. Наведена „допуњавања” приказана су на слици 1.25. Даље, ако анализирамо теме $3, 3, 3, 3, 6$ схватићемо да можемо понављајући исту комбинацију многоуглова да прекријемо целу раван. Слично, као и код темена $3, 12, 12$ можемо „допуњавајући” теселацију правилним троугловима добити тражену теселацију $(3, 3, 3, 3, 6)$.

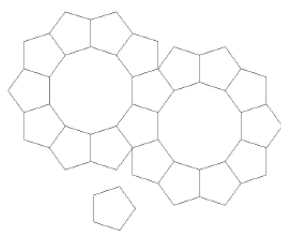
Међутим, теме $5, 5, 10$ се не може проширити у Архимедову теселацију еуклидске равни без шупљина или преклапања. Стварно, ако скицирамо једно теме $5, 5, 10$ и означимо га са T_1 и онда покушамо да наставимо теселацију тако што код темена A_2 додамо још један петоугао, код темена A_3 један десетоугао и код темена A_4 још један петоугао добијамо да код темена A_5 имамо шупљину, односно нема довољно места да стане још један петоугао.



Слика 1.25: Додавањем неких темена и ивица теселацији (4^4) , (3^6) може се конструисати редом теселација $(4, 8^2)$, $(3, 12^2)$ и тиме показати да теселације $(4, 8^2)$ и $(3, 12^2)$ постоје



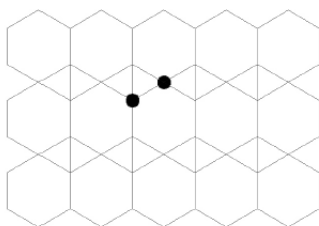
Слика 1.26: Кеплер је у књизи *Хармонија свећа* (Harmonices Mundi) показао да теме 5,5,10 не може да се прошири у теселацију равни.



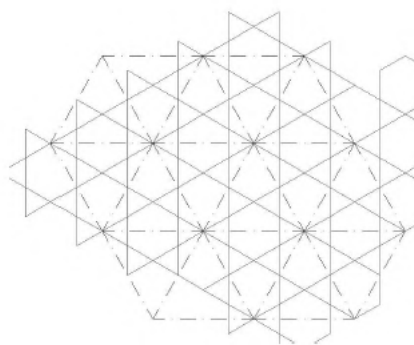
Слика 1.27: Теме 5,5,10 се не може проширити у теселацију еуклидске равни

Ако размотримо теме 3,3,6,6 не можемо користећи само тај тип темена прекрити целу раван, односно теселација неће бити Архимедова. Док теме

типа $3,6,3,6$ можемо проширити у Архимедову теселацију еуклидске равни. Ово потврђујемо тако што теселацији (3^6) , за коју смо већ показали да се може проширити у теселацију равни, додајемо одређена темена и ивице тако да добијемо тражену теселацију $(3, 6, 3, 6)$.

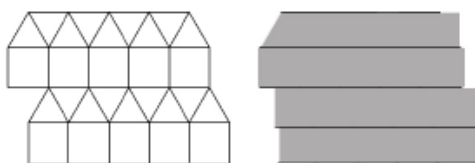


Слика 1.28: Помоћу темена типа $3,3,6,6$ не можемо формирати Архимедову теселацију



Слика 1.29: Доказ о постојању Архимедове теселације $(3,6,3,6)$

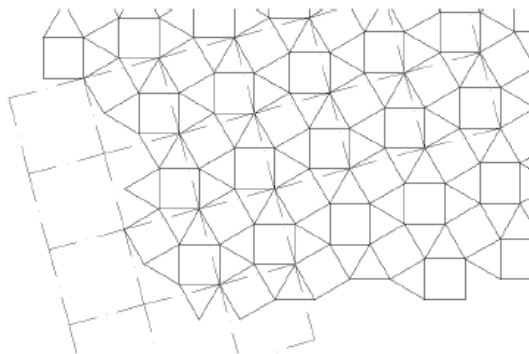
Теме $3,3,3,4,4$ такође може бити теме Архимедове теселације. То се може показати дељењем равни на отворене тополошке дискове (бесконачне траке).



Слика 1.30: Доказ о постојању Архимедове теселације $(3,3,3,4,4)$

Као у случају када смо анализирали теме $4,8,8$ тако и теме $3,3,4,3,4$ јесте

теме Архимедове теселације јер додавањем неких темена и ивица теселацији (4^4) можемо конструисати дату теселацију.

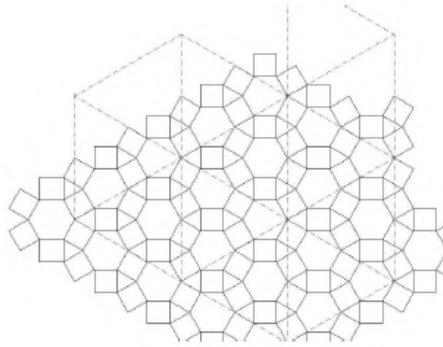


Слика 1.31: Доказ о постојању Архимедове теселације $(3,3,4,3,4)$

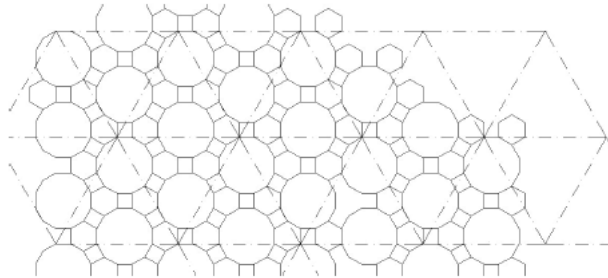
Испитаћемо сада теме у коме се састају два правилна троугла, један квадрат и један правилни дванаестоугао. Уочили смо да постоје два типа овога темена, $3,3,4,12$ и $3,4,3,12$. С обзиром да Архимедова теселација „тражи” да су сва темена истог типа, оба ова типа темена се не могу проширити у Архимедову теселацију еуклидске равни.

Ако уочимо у равни теме у коме се састаје један правилан троугао, два квадрата и један правилан шестоугао опет је очигледно да постоје две типа овог темена, $3,4,6,4$ и $3,4,4,6$. Оба темена се могу проширити на теселацију еуклидске равни, али се само теме типа $3,4,6,4$ може проширити у Архимедову теселацију еуклидске равни. На крају, теме $4,6,12$ је последње које можемо проширити у Архимедову теселацију еуклидске равни.

Остаје нам још да докажемо да типове темена у којима се додирују три правилна многоугла различитих врста (а то су следећих пет врста темена: $3,7,42$; $3,8,24$; $3,9,18$; $3,10,15$ и $4,5,20$) не можемо проширити на Архимедову теселацију еуклидске равни. Очигледно, сваки од наведених типова темена садржи бар један многоугао са непарним бројем страница. Прво ћемо одатле издвојити оне типове темена која садрже правилни троугао и за њих користити заједничку ознаку $3, p, q$, где p и q представљају број страница одговарајућих многоуглова. Означимо темена са T_1, T_2 и T_3 . Желимо да проверимо да ли полазећи од темена $3, p, q$, можемо да добијемо Архимедову теселацију еуклидске равни. То значи да би сва три темена троугла морала да буду исти



Слика 1.32: Додавањем неких темена и ивица теселацији (3^6) може се формирати теселација $(3, 4, 6, 4)$ и тако показати да теселација $(3, 4, 6, 4)$ постоји



Слика 1.33: Додавањем неких темена и ивица теселацији (3^6) може се конструисати теселација $(4, 6, 12)$ и тако показати да теселација $(4, 6, 12)$ постоји

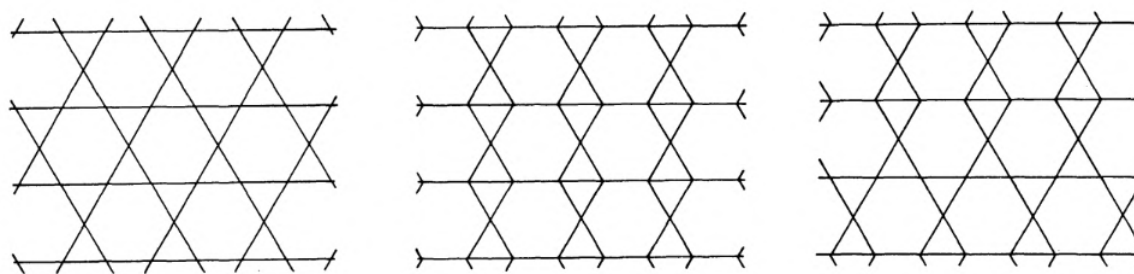
тип темена, односно, да у сваком темену треба да додирују сва три многоугла. Претпоставимо да је страница T_1T_2 заједничка страница троугла и многоугла са бројем страница p и да је страница T_1T_3 заједничка страница троугла и многоугла са бројем страница q . Претпоставимо да је T_2 теме Архимедове теселације $(3, p, q)$. Страница T_1T_2 је страница правилног многоугла са бројем страница p и онда је и угао код темена T_2 подударан са углом код темена T_1 . Даље, како смо претпоставили да је T_2 теме Архимедове теселације, тако је трећи полигон који садржи теме T_2 многоугао са бројем страница q . То су једина три многоугла која се састају у том темену па је T_2T_3 страница многоугла са бројем страница q и унутрашњи угао тог многоугла у темену T_3 једнак је оном код темена T_2 . Са друге стране, страница T_1T_3 је заједничка страница троугла и многоугла са бројем страница q па је унутрашњи угао тог многоугла код темена T_3 подударан унутрашњем углу код темена T_2 . Тако смо добили да су многоуглови који се састају у темену T_3 једнакостранични троугао и два правилна многоугла страница q што је у контрадикцији са претпоставком да

у темену теселације састају три различита многоугла. Закључујемо да темена 3,7,42; 3,8,24 ; 3,9,18 и 3,10,15 не могу бити темена ниједне Архимедове теселације еуклидске равни. Аналогно закључујемо да ни теме 4,5,20 не може бити теме Архимедове теселације еуклидске равни. Као и у случају код троугла добили бисмо контрадикцију ређајући полигоне око петоугла. Тиме смо доказали Теорему 1.4.1.

□

На самом почетку овог поглавља смо нагласили да Архимедове теселације захтевају да сва темена буду истог типа. Захтев да су сва темена истог типа је веома важан. *Ако бисмо посматрали поплочавања ивица на ивицу која се састоје од правилних многоуглова и код којих су сва темена само исте врсте, онда долазимо до постојања бесконачно много различитих теселација.* У наредним редовима ћемо се анализирати које теселације можемо направити ако попустимо услов да су темена истог типа и допустимо да су темена теселације исте врсте.

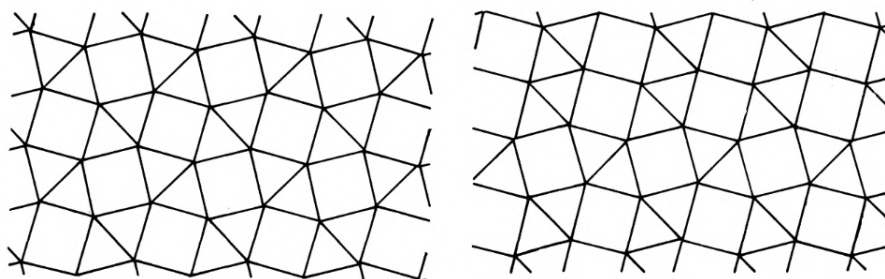
Прво ћемо разматрати врсту темена под редним бројем 8 (погледај слику 1.34). Јасно је да је могуће на једнаком растојањима поставити паралелне линије и тако поделити раван на бесконачне траке које се могу независно померати. Тако добијамо две нееквивалентне позиције полигона. Како трака има бесконачно много, тако имамо и бесконачно много теселација.



Слика 1.34: Могуће је направити бесконачно много поплочавања чија су темена врсте под редним бројем 8 (типови темена су 3,3,6,6 и 3,6,3,6)

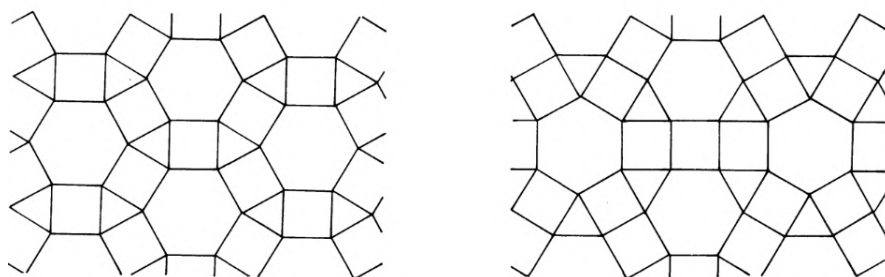
Посматрајмо сада прекривања равни квадратима и правилним троугловима, односно врсту темена под редним бројем 9 (погледај слику 1.35). Поново можемо приметити да хоризонталним цик-цак линијама, које су постављене

на једнаким растојањима, можемо поделити раван на бесконачне траке које се могу независно померати. Можемо померати било коју траку или је мењати њеном сликом у огледалу и опет добијамо бесконачно много поплочавања равни.



Слика 1.35: Поплочавања чија су темена врсте под редним бројем 9 (типови темена су 3,3,3,4,4 и 3,3,4,3,4)

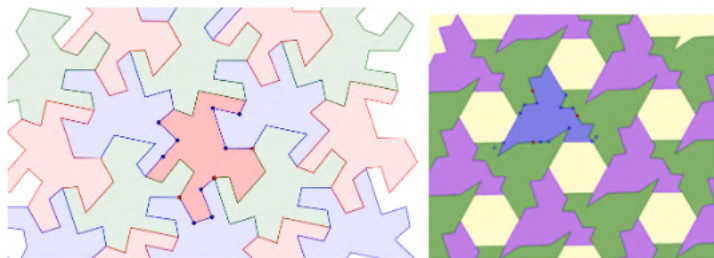
И на крају, размотримо врсту темена под редним бројем 10 (погледај слику 1.36). Овде ћемо посматрати дискове који настају тако што скуп од једног шестоугла и квадрата и троуглова око њега третирамо као једну плочицу. Ако ротирамо било који диск за 30° добијамо нове теселације. Како у равни можемо уочити бесконачно много оваквих дискова, то закључујемо да имамо бесконачно много различитих теселација помоћу врсте темена 10.



Слика 1.36: Поплочавања чија су темена врсте под редним бројем 10 (типови темена су 3,3,4,6 и 3,4,3,6)

Претходна два поглавља смо посветили детаљнијем изучавању правилних и полуправилних теселација еуклидске равни. Поред наведених поплочавања правилним многоугловима постоје и поплочавања која не подразумевају да многоуглови буду правилни. Дате теселације називамо *неправилним теселацијама*. Неправилне теселације немају ограничења у погледу врсте полигона који се користе или њиховог распореда око темена. Дата особина их не

чини мање интересантним од правилних теселација. Шта више, чак и ако посматрамо само моноедарска поплочавања долазимо до веома занимљивих теселација. На слици 1.37 приказана су два примера наведених теселација. Неправилне теселације подразумевају и теселације које су формиране од било којих геометријских облика, не само нужно од многоуглова.



Слика 1.37: Пример моноедарске теселације неправилним полигоном (лево) и пример диедарске теселације неправилним полигонима (десно)

Глава 2

Теселације у настави математике

Математика је један од најважнијих алата за развој мишљења која су потребна за решавање свакодневних проблема. Са друге стране, математика се најчешће сматра једним од најтежих школских предмета. Основни разлог због ког ученици сматрају да је математику тешко разумети је тај што је током учења потребно схватити специфичну мрежу апстрактних односа. Стога је од највеће важности квалитетно подучавање из ове области, које би морало да почне од најранијих разреда основне школе. Квалитетно подучавање подразумева заправо активно учествовање ученика у процесу учења јер: *Памтићим 10% онога што прочитаћам, 20% онога што чујем, 30% онога што видим, 50% онога што видим и чујем, 70% онога о чему сам говорим и 90% онога што сам испробам и изведем.*

Као што је већ речено, математика се сматра једним од најтежих школских предмета, а геометрија је неретко код ученика најтежа област математике. Ово је поприлично контардикторно јер је улога геометрије у свакодневном животу енормна. За разлику од алгебре, која уме да буде апстрактна, геометрија нам пружа јасне везе између математике и света чулности. Могуће објашњење ове појаве је недовољна мисаона активизација ученика у сазнајном процесу. Мобилни телефони, телевизија и други аудио-визуелни медији гурају ученике у пасивност и наставницима је због тога све теже постићи улогу доброг предавача.

У последњих десетак година инсистира се да у настави уместо подучавања у којем доминира монолошка метода, мора далеко јаче бити наглашен активни, кооперативни и креативни рад учења. Теселације су математички концепт који подстиче активно, самостално и креативно учење са наглашеним искуственим учењем које је забавно. Дакле, теселације могу бити добар пример квалитетног подучавања геометрије.

Теселације су вековима коришћене у уметничке и у математичке сврхе. Могу бити креативне и лепе попут оних које је урадио Ешер или се једноставно користити за објашњавање просторног односа објеката, симетрије и ротације. Оне имају и математичке примене у различитим пољима попут биологије, архитектуре и физике. Међутим, у школском наставном плану и програму математике ова тема тежи да буде укључена као средство за развијање разумевања геометријских идеја код ученика, а не као вредна математичка идеја сама по себи. Шта више, сам појам скоро да се уопште не појављује у школској литератури. У наставку овог рада покушаћу да дам примере како је то могуће исправити и да покажем колику улогу у практичној настави могу имати теселације.

2.1 Могућности примене у настави основне школе

Како појам теселација није у наставном плану и програму следе примери задатака који могу послужити као делови одређених наставних јединица или као добри примери квалитетне и занимљиве радионице или пројектне наставе. Ученици могу бити упознати са појмом теселација, а затим дати појам искористити и за постизање циљева датог наставног часа или радионице. С обзиром да у основној школи нове појмове треба објашњавати уочавањем њима сличних објеката у окружењу, теселације су и више него погодне за учење и ефикасно савладавање.

Наиме, у наредним редовима биће дат пример радионице по имену „Теселације” која се може организовати у основној школи. Познато је да радионице представљају савремени модел групног рада чији је крајњи циљ добити за учеснике. Наведена радионица би представљала креативну, едукативну и

когнитивну радионицу јер би подстицала стваралачко мишљење, креативност, решавање проблемских задатака и стицање нових и увежбавање већ постојећих знања. Подразумевала би корелацију са наставним предметом Ликовна култура и рад у групама различитог узраста. Делови ове радионице могу бити искоришћени у редовној настави како би поспешили усвајање и увежбавање наставних јединица планираних наставним планом и програмом.

Радионица „Теселације” би се састајала од:

- уводног - *Теселације у математици и ликовној култури*,
- средишњег - *Неке математичке основе теселација* и
- завршног дела - *Цртање и илустрација теселација*,

и подразумевала би низ радионица са одређеним циљем и на одређену тему. Наведена радионица се на овај начин може реализовати и кроз пројектну наставу у склопу редовне наставе.

Уводни час - Теселације у математици и ликовној култури

Уводни део би подразумевао један наставни час и ученици би били упознати са појмом теселација и са историјским пореклом и развојем теселација како у математици тако и у ликовној култури. Следи и структура наведеног часа.

Циљ радионице: Ученици разумеју концепт теселација и увиђају њихово присуство и примену у окружењу, као и у математици и ликовној култури

Трајање радионице: 45 минута

Учесници: ученици од 11 до 14 година

Материјал:

- пројектор, презентација,
- свеска и прибор за писање.

Структура и ток радионице (уводни, главни и завршни гео)

Уводни гео (5 минута):

Наставник представља тему и циљ радионице. Након тога им показује пар примера теселација из свакодневног окружења (плочице, саће, шаховска табла).



Слика 2.1: Теселације око нас

Главни гео (35 минута):

Наставник математике поистовећује теселације са поплочавањем како би деци приближио дати појам. На основу уводног дела наводи их да својим речима дефинишу теселације на начин да *Теселације представљају прекривање равне површи геометријским облицима*. Наставник наглашава да је битно да приликом поплочавања равни не долази до преклапања датих геометријских облика и да између њих нема празнина. Затим се поново враћа на уводне примере и објашњава им који геометријски облици формирају дате теселације. Пита их да наведу примере теселација са којима су се они сусрели, као и да покушају навести помоћу којих облика су формирана та поплочавања. Долазе до закључка да су се до сада најчешће сусретали са поплочавањима квадратима и правилним шестоугловима и да су то примери поплочавања једним обликом. Сугерише им да постоје и примери теселација који формирају два и више облика и да ће детаљније бити упознати са неким од њих на наредним радионицама.

У циљу провере усвојености концепта теселација наставник може ученицима поставити следеће питање:

Који од геометријских облика слици 2.2 може образовати теселацију? Мо-

жеће користити само један облик за једно попољчавање.



Слика 2.2: Геометријски облици који могу/не могу образовати теселацију

Очекиван одговор: Теселација се може образовати помоћу другог и четвртог геометријског облика приказаног на слици.

Напомена: током решавања овог задатка наставник може поновити са ученицима старијих разреда основне школе појам затворене изломљене линије, многоугла и конвексног/неконвексног многоугла.

Кроз презентацију ученицима се објашњава и показује порекло теселација и њихова примену у архитектури и грађевинарству. Дати слајдови обилују фотографијама са акцентом на закључак да математика и уметност имају много тога заједничког.



Слика 2.3: Теселације и архитектура

Након приказивања примене у архитектури и грађевинарству, ученицима се представљају јединствена и фасципатна дела, прожета многим математичким идејама, холандског уметника Ешера. Акценат је пре свега на дела са математичким проблемима прекривања равни. Као што су фотографије „Гуштери”, „Рибе и чамци” и „Лептири” (слика 2.4).

Завршни гео (5 минута):

Наставник математике говори да ће на следећој радионици бити упознати



Слика 2.4: Теселације и уметност

детаљније са теселацијама; да ће радити по групама занимљиве задатке кроз које ће научити шта су правилне и полуправилне теселације; као и да ће кроз наведене задатке поновити нека основна знања из геометрије.

Други час - Математичке основе теселација

На другом часу радионице „Теселације” ученици би били детаљније упознати са математичким концептом теселација, као и са правилним и полуправилним теселацијама. Решавали би задатке везане за теселације помоћу којих би провежбали појмове предвиђене наставним планом и програмом као што су многоуглови, врсте многоуглова и збир углова многоугла.

Циљ радионице: Ученици знају разликују правилне и полуправилне теселације; разумеју шта оне представљају и решавају задатке које почивају на особинама теселација

Трајање радионице: 45 минута

Учесници: ученици од 11 до 14 година

Материјал:

- пројектор, презентација,
- свеска и прибор за писање,

- наставни листићи.

Структура и ток радионице (уводни, главни и завршни гео)

Уводни гео (5 минута):

Наставник ученицима показује пар примера правилних и полуправилних теселација и подстиче их да уоче сличности и разлике. Након тога им саопштава да наведени примери представљају два типа теселација *правилне и полуправилне теселације*.

Главни гео (30 минута):

Ученицима се дефинише многоугао.

Затворена изломљена линија чије несуседне стране немају заједничких тачака и гео равни који је њоме ограничен чине фигуру у равни коју називамо многоугао.

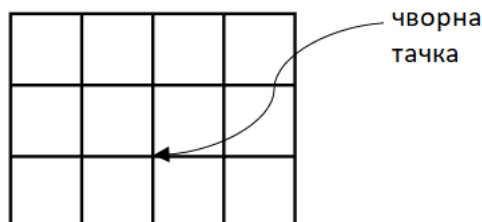
Показују им се примери геометријских облика који јесу и нису многоуглови у циљу комплетнијег разумевања појма многоугла. Говори им да зависно од броја дужи (страница) које затварају многоугао, разликујемо: троуглове, четвороуглове, петоуглове, шестоуглове, итд. Затим им дефинише какве многоуглове називамо правилним многоугловима. Ученици закључују да је правилан троугао једнакостраничан троугао, а правилан четвороугао квадрат.

Правилни многоугао је многоугао који има једнаке стране и једнаке углове.

Ученици поново посматрају уводне примере и уочавају да су *геометријски облици који формирају дате теселације подударни правилни многоуглови*. Као и да су неки примери теселација образовани само од једне врсте правилних многоуглова, а неки од две или више врста подударних правилних многоуглова. Наравно, како би била теселација не сме бити прекапања нити празнина између њих.

Наставник им говори да сада обратe пажњу на темена датих правилних

многоуглова. Ученици примећују да правилни многоуглови имају највише једно заједничко теме. Наставник им говори да ту тачку називамо *чворна тачка*. Збир углова многоуглова око чворне тачке је 360° . Посматрајући ра-



Слика 2.5: Приказ чворне тачке

според многоуглова око чворних тачака, ученици закључују да је *распоред многоуглова око сваке чворне тачке идентичан без обзира да ли имамо само један или два или више тачака многоуглова. Кажемо да су чворне тачке истој тачки*. Наставник објашњава да управо тај распоред многоуглова именује дату теселацију. Ово значи да на основу датог распореда теселације добијају одговарајуће ознаке.

Наставник им говори да размисле у каквом све положају могу бити многоуглови правилне и полуправилне теселације. Ученици примећују да дати *правилни многоуглови могу да немају заједничких тачака, да имају заједничко теме или да деле једну страну*. Након што су ученици уочили ове особине, наставник дефинише правилне и полуправилне теселације.

Теселација је правилна уколико важи да:

- сви многоуглови су исте врсте и подударни су,
- чворне тачке су истој тачки,
- многоуглови или немају заједничких тачака или имају заједничко теме или заједничку страну.

Полуправилне теселације имају исте услове као правилне с тим да је нарушен први услов, односно у теселацији учествују две или више врста подударних правилних многоуглова.

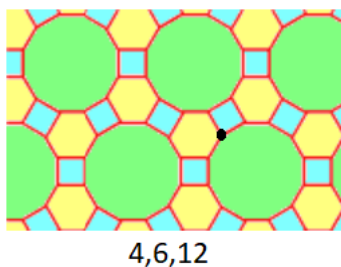
Наставник укратко понавља ученицима научено (теселације, многоуглови, правилне и полуправилне теселације). Након тога им дели *Наставни листић* - *правилне и полуправилне теселације* [2.3]. За решавање ових задатака ученици на располагању имају 5 минута. Затим их наставник прозива и заједно проверавају тачност њихових решења.

Главни део овог часа се завршић покрећује именовању теселација. Ученици се подсећају чворне тачке и да су све чворне тачке истог типа. Тај исти тип односно исти распоред многоуглова око чворне тачке даје назив теселацији. Наставник им указује *да приликом именовања теселације праће следећа три корака.*

Корак 1. Уочите произвољну чворну тачку и многоугао који има најмањи број страница чије је једно теме та чворна тачка.

Корак 2. Именујте дати многоугао на начин да ћете записати само број који представља број углова датог многоугла. Дакле, ако уочите троугао записујете број 3.

Корак 3. Крећите се око темена у смеру многоугла са мањим бројем страница и именујете и преостале многоуглове, раздвајајући их зарезом.



Слика 2.6: Именовање теселација

Након објашњавања поступка именовања теселација наставник им дели *Наставни листић* - *именовање теселација* [2.3] са задатком који подразумева именовање теселација. Ученици дати задатак решавају самостално 5 минута. Након тога наставник заједно са ученицима дискутује о њиховим решењима и даје тачна решења.

Завршни део (10 минута):

Обнављање наученог на овој радионици: *школа су то правилне, а школа*

неправилне теселације и како именујемо даће теселације. Кратак осврт на научено кроз *Наставни листић - математичке основе теселација* [2.3]. Након 5 минута, наставник прозива ученике како би дали одговоре на наведени задатак и говори им да за домаћи покушају пронаћи још неки пример полу-правилне теселације, да је скицирају и именују.

Напомена: Ученици седмог и осмог разреда могу покушати и конструисати неку теселацију.

Трећи час - Постојање правилних и полуправилних теселација

На трећем часу радионице „Теселације” ученици би дошли до закључка да постоје три различите правилне теселације и осам полуправилних теселација. Ученици старијих разреда основне школе би помоћу особина правилних многоуглова дошли до наведеног закључка, а остали би визуелно помоћу облика од картона уочили постојаност правилних и полуправилних теселација.

Циљ радионице: Ученици знају да објасне и илуструју постојање тачно три правилне и осам полуправилних теселација равни

Трајање радионице: 45 минута

Учесници: ученици од 11 до 14 година

Материјал:

- пројектор, презентација,
- свеска и прибор за писање, цртање и бојење,
- наставни листићи,
- правилни многоуглови - облици од картона,
- илустрације у Геогебри.

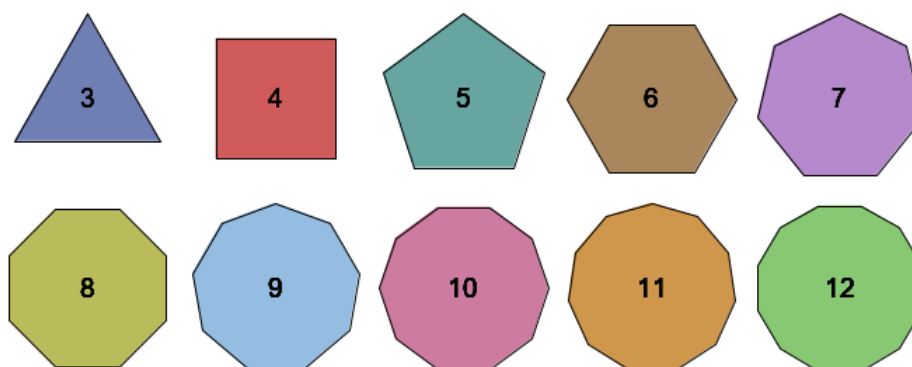
Структура и ток радионице (уводни, главни и завршни део)

Уводни гео (5 минућа):

Наставник пита ученике да ли су решавали домаћи задатак и заједно дискутују до каквих решења су дошли. Ученицима се саопштава да ће се данас упознати са свим типовима правилних и полуправилних теселација.

Главни гео (35 минућа):

Наставник ученике дели у групе. Постоје два различита типа група *Проналазак теселација помоћу облика од картона* - млађи разредни основне школе и *Проналазак теселација помоћу особина правилних многоуглова* - старији разреди основне школе. Наставник формира више група и једног и другог типа у зависности од броја ученика. Наведена два типа група имају различите задатке у складу са њиховим узрастом. Након поделе у групе, наставник се осврће на претходну радионицу и понавља које услови треба да буду испуњени да би теселација била правилна/полуправилна. После кратког обнављања групама које чине ученици млађих разреда основне школе дели *Наставни листић - проналазак теселација помоћу облика од картона* [2.3], а групама које чине ученици старијих разреда дели *Наставни листић - проналазак теселација помоћу особина правилних многоуглова* [2.3]. Након тога свакој групи ученика млађих разреда дели облике од картона који представљају правилне многоуглове, слика 2.7.



Слика 2.7: Правилни многоуглови - облици од картона

После наведених активности по групама, наставник заједно са по једним учеником из групе представља добијене резултате осталим ученицима. Зајед-

но их анализирају и долазе до закључка о броју правилних и полуправилних теселација. Наставник помоћу *програmsког пакета Геоџебра* приказује свих једанаест теселација до којих су могли доћи користећи наведене правилне многоуглове. Долазе до закључка *да постоје тачно три правилне теселације и тачно осам полуправилних теселација*. Наставник им говори да се ове полуправилне теселације често називају *Архимедове теселације*.

Завршни гео (5 минута):

Наставник укратко понавља шта је био главни циљ овог часа и још једном приказује свих једанаест типова правилних/полуправилних теселација.

Четврти час - теселације и симетрија

На четвртом часу радионице „Теселације” ученици би се упознали са везом између симетрије и теселација.

Циљ радионице: Ученици обнављају појам осне симетрије и број оса симетрије правилних многоуглова, а затим уочавају и колико оса симетрије може да има одређена теселација равни

Трајање радионице: 45 минута

Учесници: ученици од 11 до 14 година

Материјал:

- пројектор, презентација,
- свеска и прибор за писање,
- илустрације у Геогебри.

Структура и ток радионице (уводни, главни и завршни гео)

Уводни гео (5 минута):

Наставник упознаје ученике са циљом ове радионице и говори да ће данас

увидети све лепоте правилних/полуправилних теселација. Радионицу почињу кратким освртом на појам и особине осне симетрије, а затим уочавају везу између осне симетрије и теселација.

Главни гео (35 минута):

Наставник кроз следеће реченице подсећа ученике на појам и неке особине осне симетрије.



Слика 2.8: Симетрија шареног лептира, гранчице једне врсте чемпреса, лист украсне биљке алокације

Реч симетрија означава потпуни склад, равномерни распоред, лепоту облика. Симетрија је уобичајена у природи. Погледајмо само симетрију снежних пахуљица, листа, цвета, симетрију животиња, као и људског тела. Симетрија се испољава у равнотежи и једнакости двеју страна. За сваки од ових ликова можемо одредити по једну праву према којој се њихове половине одсликавају као у огледалу. Те праве су на слици 2.8 обојене и означене са словом *s*.

Када пресавијањем цртежа по некој правој, нацртаној или замишљеној, потпуно преклопимо његова два дела, каже се да тај цртеж има *особину осне симетричности*. За делове цртежа који се на тај начин преклапају каже се да су *оносиметрични*. Права по којој се цртеж савија назива се *оса симетрије*. Фигуру која има осу симетрије називамо *оносиметричном фигуром*.

За фигуру и њен лик у огледалу каже се да су симетрични. Људско тело је наизглед симетрично. Да ли је баш тако? Посматрајмо лице девојчице на фотографији. На компјутеру можемо да урадимо следеће: фотографију ћемо

исећи по замишљеној оси симетрије и од левог дела направити један лик, а од десног дела други, као што је приказано на слици 2.9. Добијени ликови нису сасвим једнаки, али су веома слични. Дакле, људско лице није сасвим симетрично. Каже се да се у благој несиметричности крије његова љепота. На сличан начин од своје фотографије можеш да направиш два различита лика.



Слика 2.9: Симетричност лица

Након кратком увода у осну симетрију, наставник им помоћу Геогebre приказује правилне и полуправилне теселације. Говори им да погледају дате теселације и да покушају уочити њихове осе симетрија. Заједно анализирају регуларну теселацију $3,3,3,3,3,3$ тако што им наставник поставља следећа два питања:

1. Да ли дата правилна теселација има осу симетрије?
2. Колико оса симетрије има ова теселација?

Наставник им на табли помоћу аплета у Геогбери илуструје одговоре на наведена питања до који су претходно ученици дошли. Говори им да сада погледају и преостале теселације и да заједно по групама одговоре на наведена два питања. Након тога наставник проверава са ученицима њихове одговоре и као резултат добијају табелу 2.1.

Завршни гео (5 минута):

Наставник још једном наглашава да су правилне и полуправилне теселације веома симетричне, што су на овом часу могли и видети. Након тога их упућује у наредну и последњу радионицу. Говори им да ће бити најкреативнија до сада и упућује их који прибор да припреме.

Табела 2.1: Врсте теселација и њихов број оса симетрије

Врста теселације	Број оса симетрије
3,3,3,3,3,3	6
4,4,4,4	4
6,6,6	6
3,6,3,6	6
3,4,6,4	6
4,8,8	4
3,3,4,3,4	2
3,12,12	6
3,3,3,4,4	2
4,12,6	6
3,3,3,3,6	0

Пети час - Теселације и уметност

На петом часу радионице „Теселације” ученици би решавали задатак који би их довео до неких веома занимљивих и креативних теселација равни, попут оних које је створио познати сликар М.К.Ешер. На наведеном часу је циљ и да ученици искажу своју креативност.

Напомена: Ученици старијих разреда би уочили везу између наведених теселација и транслагације/ротације.

Циљ радионице: Креирати неправилну теселацију равни помоћу одређених трансформација квадрата. Дата теселација треба да буде модел и идеја да ученици и самостално креирају своју неправилну теселацију равни.

Трајање радионице: 45 минута

Учесници: ученици од 11 до 14 година

Материјал:

- пројектор, презентација,
- А4 бели папир, картон у облику квадрата, маказице, трака, маркери, акварел оловке, водене бојице.

Структура и ток радионице (уводни, главни и завршни део)

Уводни гео (5 минућа):

Упознавање ученика са појмом и постојањем *неправилних теселација равни*. Дефинишу неправилне теселације као *теселације које немају ограничења у погледу врсте полигона који се користе или њиховог распореда око шемена*. Шта више, *геометријски облици чак и не морају бити многоуглови*. Говори им да ће на овом часу да креирају једну неправилну теселацију равни и да им она може послужити као идеја за многе друге занимљиве теселације равни.

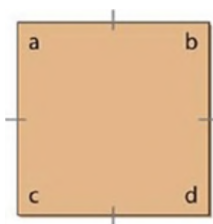
Главни гео (30 минућа):

Наставник подсећа ученике на уметност М.К.Ешера и његових уметничких дела налик на слагалицу. Говори им да ће они по угледу на овог уметника на сада створити једно такво дело. Било да је у питању укрштеница, слагалица или судоку, оне ангажују наш мозак на више начина. Научници су открили да када радимо на слагалици, користимо обе стране мозга, побољшавајући памћење, когнитивне функције и вештине решавања проблема у том процесу. Користећи загонетке, људи могу стимулисати мозак и побољшати неколико вештина.

У овој радионици ћемо почевши од квадрата креирати понављајући дизајн *Рибе* који функционише као делови слагалице. И да ја најважније да се на овом часу забавимо и да наставимо да стварамо!

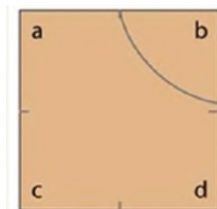
Упутства:

Корак 1. Означите четири угла вашег картона словом и означите средину сваке стране квадрата.



Слика 2.10: Корак 1

Корак 2. У горњем десном углу нацртајте и исеците кружни исечак, остављајући мало равног простора који ћемо назвати „нос“.



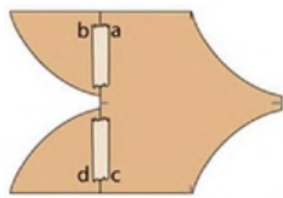
Слика 2.11: Корак 2

Корак 3. Комад горњог кружног исечка се пребацује и исцртава да би се направила симетрична верзија. Изрежите облик.



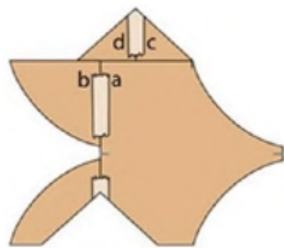
Слика 2.12: Корак 3

Корак 4. Оба исечена кружна исечка поравнамо са неисеченом страницом квадрата и залепимо их траком на начин који се налази на фотографији изнад, водимо рачуна да нема преклапања нити шупљина између датих делова. Кружни исечци треба да буду залепљени на начин који је истакнут на слици (одговарајућа слова са одговарајућим словима).



Слика 2.13: Корак 4

Корак 5. Изрежите један једнакостранични троугао са дна облика. Затим га поравнајте и залепите са наспрамном страном као на слици.



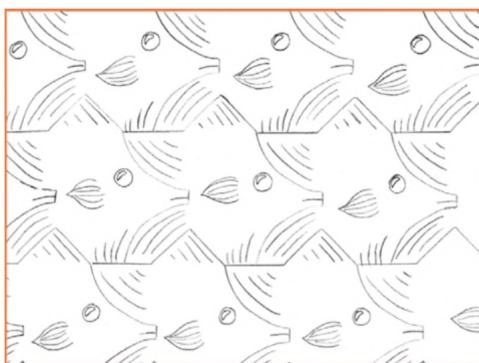
Слика 2.14: Корак 5

Корак 6. Поставите шаблон за рибу на папир за цртање величине А4 и оцртајте га оловком. Најбоље је прво направити један ред који иде преко папира, а затим додати редове на врх, увек спајајући облике приликом праћења.



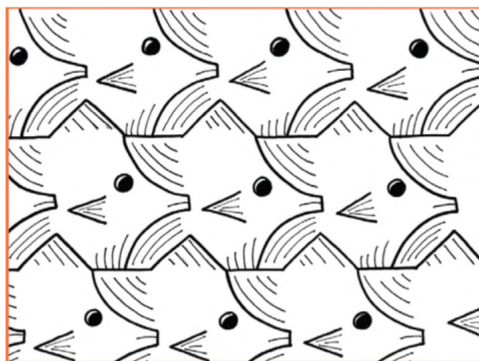
Слика 2.15: Корак 6

Корак 7. Завршите исцртавање целог папира и додајте детаље својој риби као што су очи, крљушти или било који дизајн по жељи.



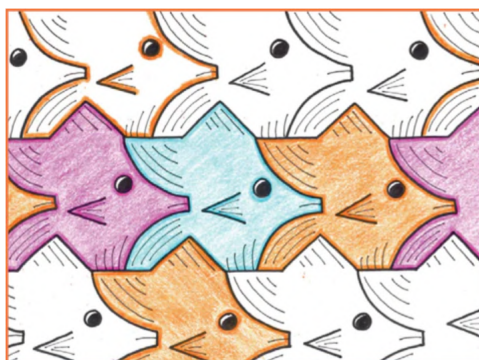
Слика 2.16: Корак 7

Корак 8. Црним маркером исцртајте линије и детаље рибе.



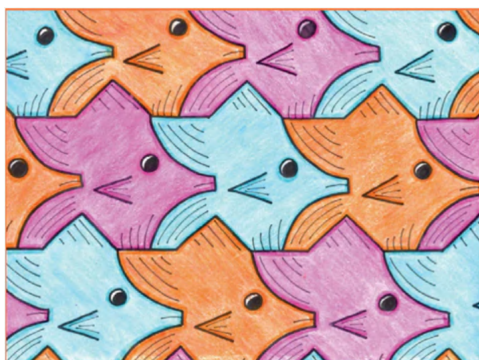
Слика 2.17: Корак 8

Корак 9. Изаберите 3 различите акварел оловке и у потпуности обојите своју рибу у дизајн шаре у боји.



Слика 2.18: Корак 9

Корак 10. Када завршите са бојењем акварел оловкама, користите се влажном четком да бисте спојили боје. Време је да уоквирите своје ремек-дело!



Слика 2.19: Корак 10

Наведена упутства наставник корак по корак објашњава и тек када сви ученици одраде одређени корак, наставник прелази на наредни корак.

Завршни гео (10 минута):

Ученици предају наставнику своје радове и наставник их појединачно показује целом одељењу. Наставник кратко објашњава цео процес и скреће пажњу да наведена дела представљају један облик теселације равни, а са старијим ученицима понавља појам транслације, ротације и осне симетрије.

2.2 Могућност примене у настави средње школе

У наставном плану и програму средњих школа *теселације* се не појављују као наставна јединица, али постоје лепе могућности примене овог математичког концепта у оквиру изучавања одређених наставних тема. У наредним редовима ћемо видети примену током изучавања *Изометријских трансформација* које су по плану и програму првог разреда гимназије.

Циљ лекције: Пронаћи осне симетрије (рефлексije), транслације и ротације у теселацијама

Прво ћемо у наредним редовима навести неопходне дефиниције за разумевање наведене лекције.

Изометријска трансформација. Пресликавање $f : E^n \rightarrow E^n, n \in \{1, 2, 3\}$, које је бијекција и које сваке две тачке A и B простора E^n пресликава у тачке A' и B' такве да је $(A, B) \cong (A', B')$ назива се *изометријска трансформација* или *изометрија* простора E^n . Међу изометријама најједноставнији је пример трансформације која сваку тачку пресликава у саму себе, такво пресликавање се назива *коинциденција* (трансформација код које свака тачка „мирује”). Дакле, изометријска трансформација је обострано једнозначно пресликавање скупова тачака које дуж пресликава у подударну дуж. Она очувава (не мења) колинеарност, распоред тачака и подударност.

Осна симетрија у односу на осу s пресликава тачку A у тачку A' тако да је права s симетрала дужи AA' . Изометрија је индиректна уколико мења оријентацију равни. Осна симетрија је индиректна изометрија.

Централна симетрија у односу на тачку S пресликава тачку A у тачку A' тако да је S средиште дужи AA' . Изометрија је директна уколико задржава оријентацију равни, тј. уколико сваки троугао пресликава у троугао исте оријентације. Централна симетрија је директна изометрија.

Транслација. Нека је M било која тачка равни, а $\vec{v}$ било који вектор.

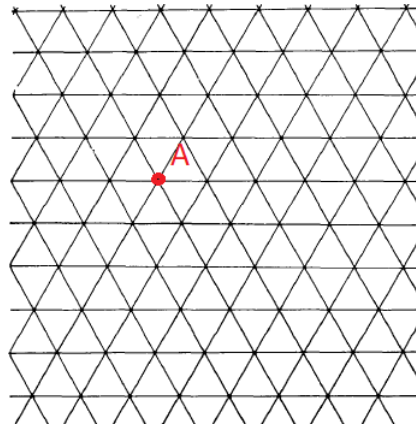
Пресликавање које тачку M пресликава у тачку M' , тако да је $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ назива се транслагација. Симболички:

$$\tau_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

Ротација. Ако је M било која тачка равни, тачка O дата тачка и α орјентисани угао исте равни. Кажемо да је M' слика оригинала M добивена ротацијом око тачке O за дати угао α , ако је $OM = OM'$ И $\angle MOM' = \alpha$. Тачка O је центар ротације, α угао ротације. Симболички:

$$\rho_{O,\alpha}(M) = M' \Leftrightarrow OM = OM' \wedge \angle MOM' = \alpha.$$

Након кратког осврта на наведене дефиниције, ученицима се објашњава појам, врсте и начин именовања теселација. Приказује им се свих 11 типова правилних и полуправилних теселација, говори им се да их пажљиво посматрају и да ћемо на датим теселацијама уочавати наведене изометријске трансформације.



Слика 2.20: Теселација (3,3,3,3,3) и фиксирана тачка А

Посматрање се започиње са теселацијом (3,3,3,3,3) и одговара се на питања дата у наставку.

Транслагација. Фокусирајмо се на тачку А. Да ли постоји било који правац по коме можемо померити (транслирати) дату тачку, а да се образац преслика

Табела 2.2: Теселације и изометријске трансформације

Врста теселације	Број смерова за транслирање тачке	Најмањи угао ротације	Број оса симетрије
3,3,3,3,3,3	6	60°	6
4,4,4,4	4	90°	4
6,6,6	6	60°	6
3,6,3,6	6	60°	6
3,4,6,4	6	60°	6
4,8,8	8	90°	4
3,3,4,3,4	4	90°	2
3,12,12	12	60°	6
3,3,3,4,4	4	180°	2
4,12,6	12	60°	6
3,3,3,3,6	6	60°	ни једна

сам у себе (да остане непромењен)? Ако је одговор да, колико различитих смерова померања постоји?

Ротација. Посматрајмо поново тачку A и нека је она центар ротације. Колико најмање износи угао ротације око дате тачке A ако желимо да се образац преслика сам у себе?

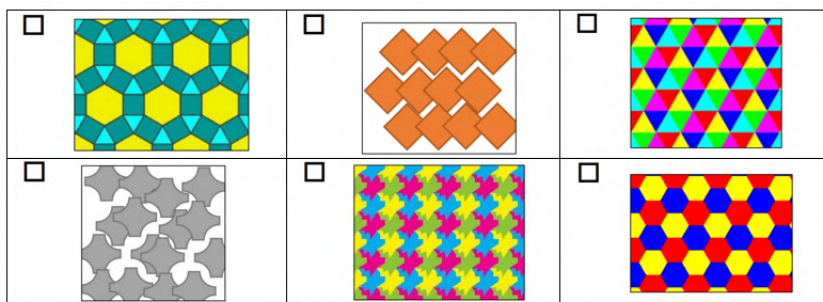
Рефлексија. Да ли дата правилна теселација има осу симетрије? Ако је одговор да, колико оса симетрије има ова теселација?

Ученици затим на наведена питања одговарају за сваку од 11 типова правилних/полуправилних теселација равни и попуњавају одговарајућу табелу. Дата табела је 2.2 и у њој су дати и очекивани одговори ученика. Ученици приликом попуњавања наведене табеле могу да користе и програмски пакет Геогebra који одлично може да илуструје све наведене изометријске трансформације.

2.3 Наставни листићи

Наставни листић - правилне и полуправилне теселације

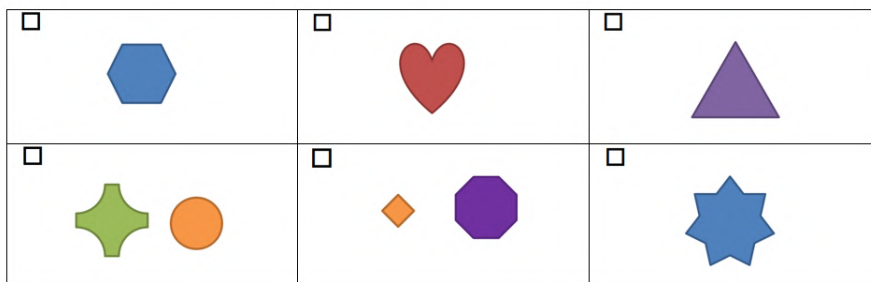
1. Означите шта од наведеног јесте теселација:



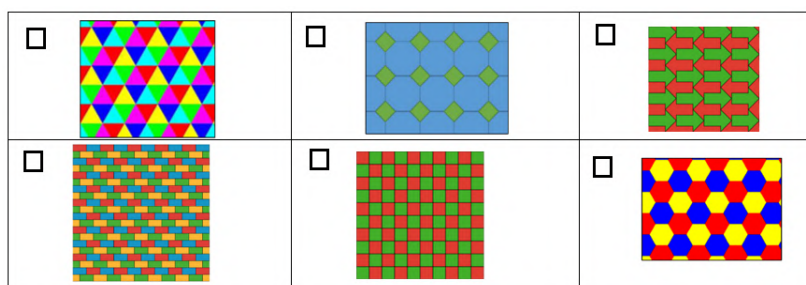
2. Прецртај геометријске облике који нису многоуглови.



3. Означите поља поред геометријских облика који могу да формирају теселацију:

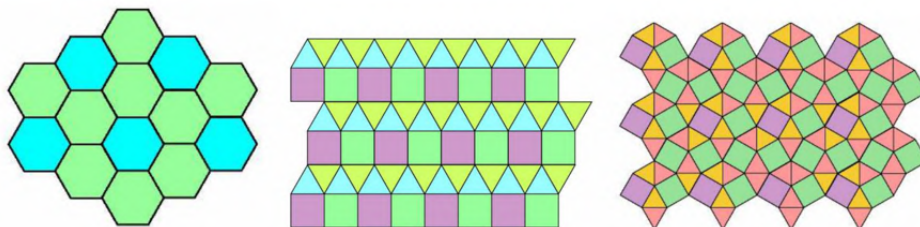


4. Означите шта од наведеног јесте правилна теселација:

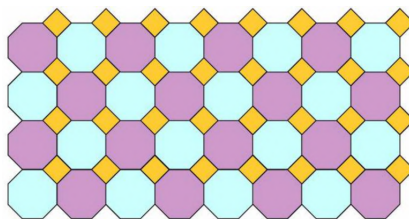


Наставни листић - именовање теселација

Задатак. Именуј дате три правилне (полуправилне) теселације.

**Наставни листић - математичке основе теселација**

На слици видимо пример полуправилне теселације.



Размотримо следећа питања и заокружимо слово испред тачног одговора.

1. Од којих правилних многоуглова је формирана дата теселација?
 - а) четвороуглова, петоуглова
 - б) четвороуглова, шестоуглова
 - в) четвороуглова, осмоуглова
2. Посматрај углове који имају заједничко теме - чворну тачку. Дати углови имају следећу меру:
 - а) 90° , 120° , 150°
 - б) 60° , 150° , 150°
 - в) 90° , 135° , 135°
3. Зашто је ово пример теселације равни?
 - а) Дата комбинација правилних многоуглова је теселација зато што је збир углова око сваке чворне тачке 360° .
 - б) Дата комбинација правилних многоуглова је теселација зато што је збир углова око сваке чворне тачке мањи од 360° .
4. Именуј дату полуправилну теселацију.

Наставни листић - проналазак теселација помоћу облика од картона

1. задатак: Креирајте неке правилне и полуправилне теселације користећи дате облике. Прецртајте их на папир и обојте сваки облик одговарајућом бојом. Постоји више различитих дизајна који могу бити креирани. Можете користити 1, 2, 3 или 4 различита облика да направите сваку теселацију. Покушајте да направите 10 - 12 различитих теселација. Након тога одговорите на следећа питања.

Колико различитих теселација је ваша група направила?

Које су комбинације облика користили у свакој од наведених теселација?

2. задатак: Сада када сте пронашли десетак различитих теселација, поделите их у три или четири групе. Групе се могу заснивати на било којој особини коју одаберете. Групе могу имати делове који се укрштају или могу бити неповезане. Направите листу група које је ваша група осмислила и напишите колико је теселација било у свакој од њих.

3. задатак: Разговарајте са другом групом о томе шта сте пронашли. Да ли сте пронашли исте врсте теселација? Да ли је ваша група нашла неке које друге нису? Да ли сте смислили исте категорије поделе?

Наставни листић - проналазак теселација помоћу особина правилних многоуглова

1. задатак: Користите следеће формуле да бисте попунили предстојећу табелу. Дате формуле произлазе из њихових дефиниција и извођене су на часовима математике и важе само за правилне многоуглове. Једнакостранични троугао је дат као пример како треба попунити редове табеле која је дата у наставку.

n —број страница датог многоугла

централни угао = $\frac{360^\circ}{n}$

унутрашњи угао = $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$

спољашњи угао = 180° —унутрашњи угао

Односно унутрашњи угао + спољашњи угао = 180° јер су суплементни углови. Након попуњавања табеле одговорити на следећа питања.

Табела 2.3: Неке особине правилних многоуглова

Име многоугла	Број страница	Централни угао	Унутрашњи угао	Спољашњи угао
Једнакостранични троугао	3	120°	60°	120°
Квадрат				
Правилан петоугао				
Правилан шестоугао				
Правилан седмоугао				
Правилан осмоугао				
Правилан деветоугао				
Правилан десетоугао				
Правилан једанаестоугао				
Правилан дванаестоугао				

Да ли примећујете било какву везу између спољашњег и централног угла правилног многоугла? Можете ли објаснити зашто долази до ове везе?

2. задатак: Скицирајте неке своје правилне и полуправилне теселације помоћу облика из табеле. Размислите колико различитих теселација можете направити. Можете користити 1, 2, 3 или 4 различита облика да направите сваку теселацију. Погледајте табелу коју сте малопре попунили, размислите да ли вам она даје наговештаје који се облици уклапају тако да нема шупљина и преклапања. Покушајте да направите 10 - 12 различитих теселација. Након тога одговорите на следећа питања.

Колико различитих теселација је ваша група направила?

Које су комбинације облика користили у свакој од наведених теселација?

3. задатак: Колико сте пронашли правилних, а колико полуправилних теселација? Испод сваке креиране теселација напиши да ли је она правилна, или полуправилна.

4. задатак: Покушајте да дате имена креираним теселацијама. Сетимо се претходне радионице и поступка именовања теселација.

5. задатак: Разговарајте са другом групом о томе шта сте пронашли. Да ли сте пронашли исте врсте теселација? Да ли је ваша група нашла неке које друге нису? Да ли сте на исти начин именовали заједничке теселације?

Глава 3

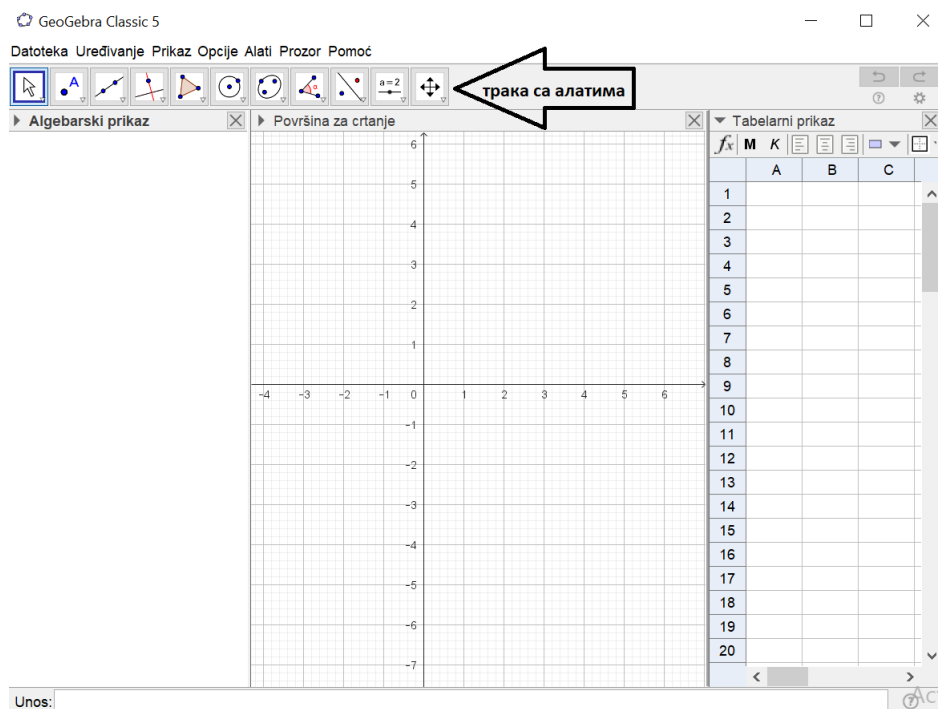
Теселације у Геогебри

Наставник, користећи могућности и предности савремених наставних средстава, техничких уређаја и помагала као и образовних софтвера, требао би да наставни процес учини динамичнијим, атрактивнијим и успешнијим. Образовни софтвер који се може користити за објашњавање, истраживање и моделирање математичког концепта теселација је *Геогебра*.

Геогебра је програмски пакет за динамичку математику који повезује геометрију, алгебру и математичку анализу. Развијен је за наставу и учење математике у школама. Већина делова Геогебре је бесплатан софтвер и могуће га је користити на свим популарним оперативним системима, као што су Windows, Linux и Mac; а такође и онлајн, без инсталације софтвера. Са отварањем Геогебра Центра у Београду и Геогебра Института у Новом Саду, постала је доступна и на српском језику, а и све више постаје популарна у настави математике код нас.

Постоје три различита приказа математичких објеката, то су графички приказ, алгебарски (бројчани приказ) и табеларни приказ. Ови начини приказа истог објекта су динамички повезани и аутоматски се прилагођавају свакој промени која се изврши у било којем приказу, независно од начина на који су објекти настали. Теселације се илуструју у *графичком приказу*, помоћу миша и алата за конструкције који се налазе у *траци са алатима*. Свака икона у траци са алатима представља једну *кутију са алатима* која садржи сличне алате за конструкцију. Кутину са алатима отворате кликом на малу стрелицу у доњем десном углу њене иконе. Употребом сваког од алата, тј. цр-

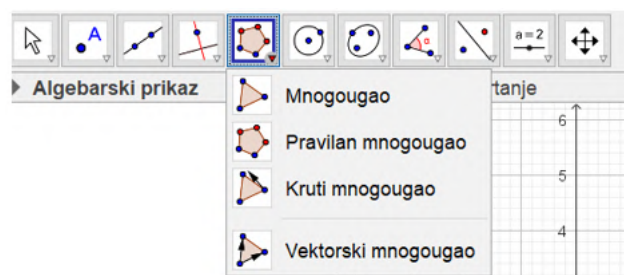
тањем мишом у делу за цртање, дешавају се промене у алгебарском приказу. Сваки од нацртаних објеката има своје име и једначину, а тачке координате, у алгебарском приказу.



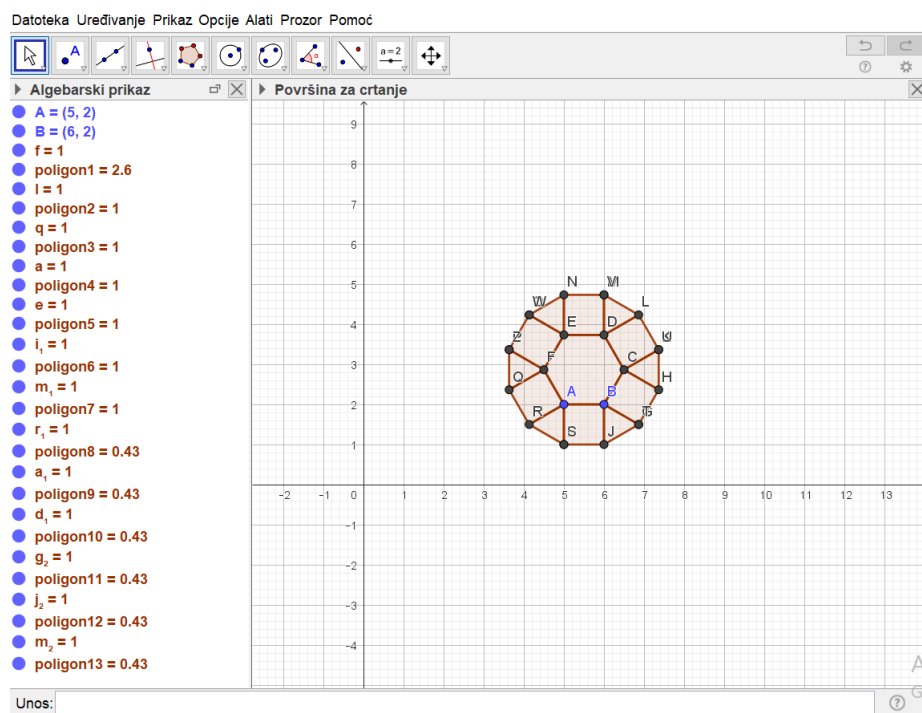
Слика 3.1: Окружење програма Геогедра

У наредним редовима биће дат пример илустрације једне Архимедове теселације помоћу наведеног програмског пакета. Конкретно, биће приказана Архимедова теселација $(3,4,6,4)$. На сличан начин се формирају и аплети преосталих правилних и полуправилних теселација.

Један од два најосновнија алата за конструкцију Архимедове теселације $(3,4,6,4)$ је алат *Pravilan mnogougao* који је приказан на слици 3.2. Помоћу наведеног алата можемо доћи до аплета који је приказан на слици 3.3. У наведеном аплету на самом почетку је одабрана алатка *Pravilan mnogougao* и помоћу ње одређена једна страница правилног многоугла (страница АВ). Потребно је да након одређивања једне странице правилног многоугла да у прозору који се појави уносом броја одредите који правиан многоугао желите

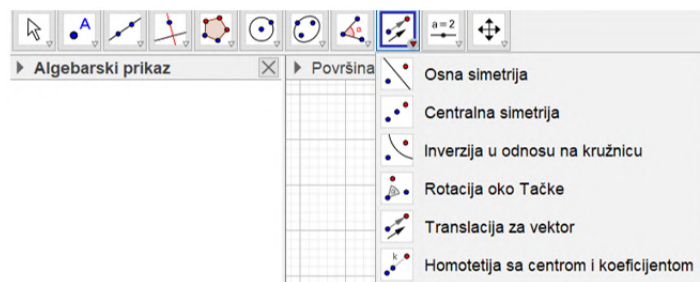
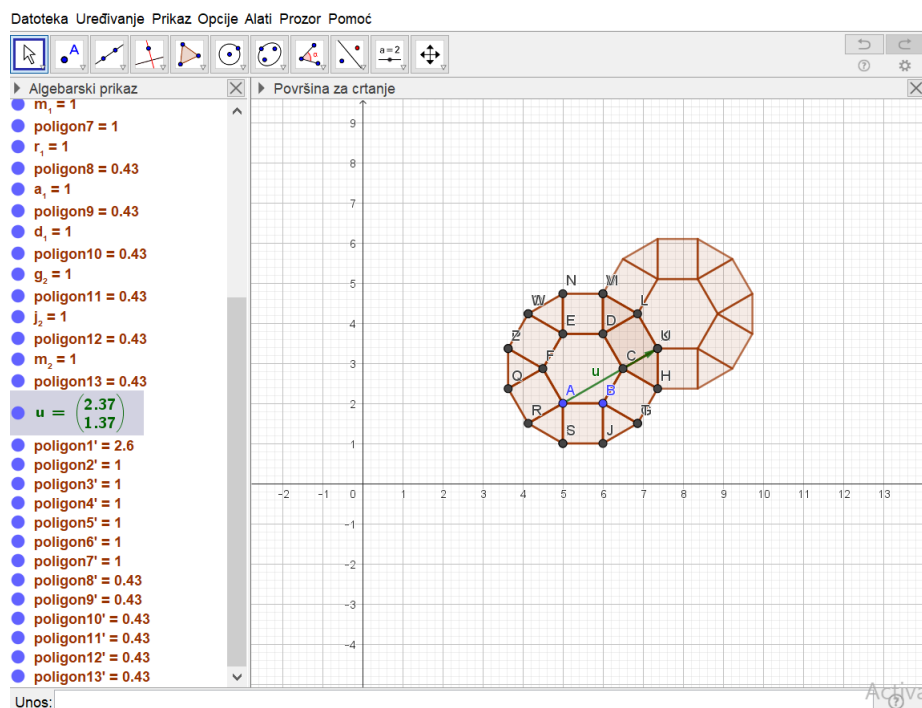
Слика 3.2: Изглед алата *Pravilan mnogougao*

да конструишете. Уносимо број 6 јер конструкцију полазимо од правилног шестоугла. Након тога Геогедбра аутоматски одређује преостале странице датог многоугла. Конструкцију настављамо тако што над страницама датог шестоугла конструишемо правилне четвороуглове, поново помоћу алатке *Pravilan mnogougao*, а затим конструишемо и правилне троуглове одређене страницом датих квадрата чије је једно теме и теме правилног шестоугла.

Слика 3.3: Аплет у којем је помоћу алата *Pravilan mnogougao* конструисан дио Архимедове теселације

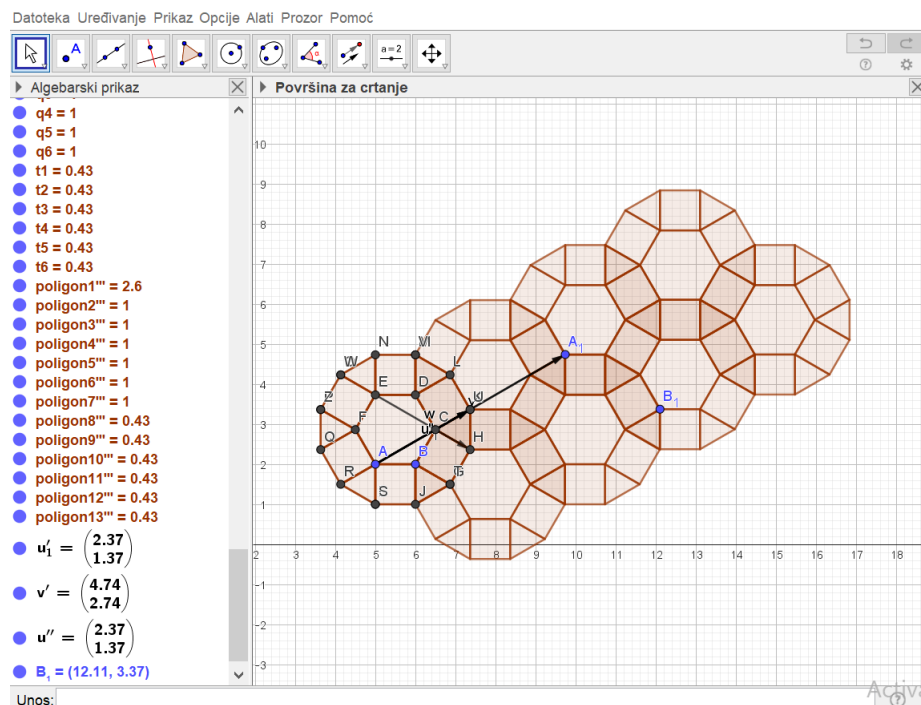
Други алат који ћемо користити за приказ Архимедове теселације је *Translacija*

за *vektor* који је приказан на слици 3.4. Након одабира наведеног алата потребно је прво означити фигуру претходно креирану, а затим одговарајући вектор за који желимо да транслирамо дату фигуру. У нашем примеру, означили смо тачку и транслирали је за вектор $\vec{u}$ који је који је пресликао тачку A у тачку K (слика 3.5).

Слика 3.4: Изглед алата *Translacija za vektor*Слика 3.5: Транслација датог полигона за вектор $\vec{u}$ који је пресликао тачку A у тачку K

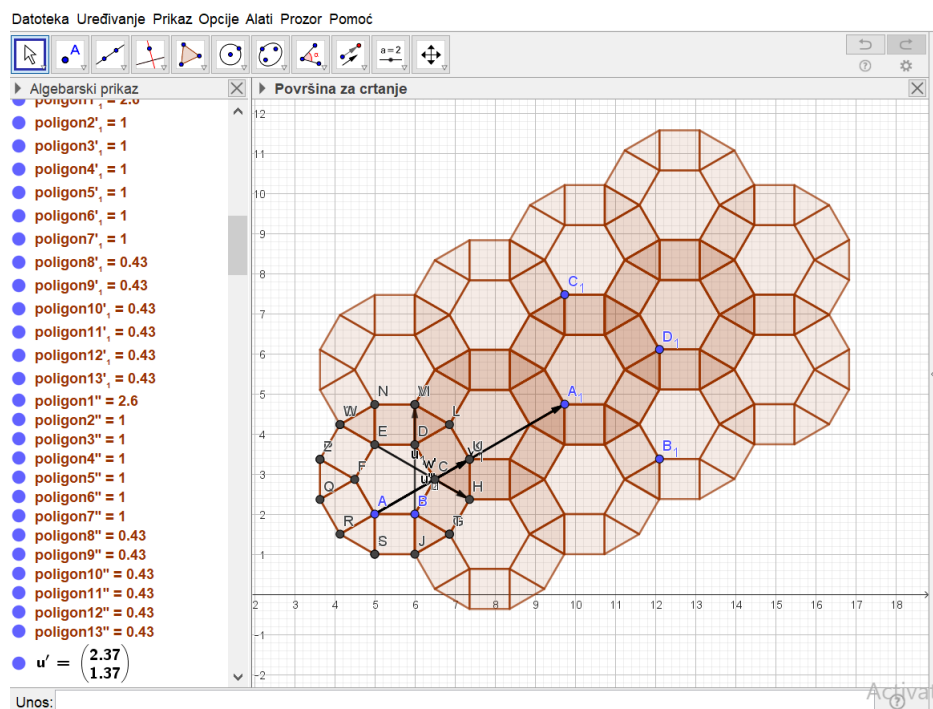
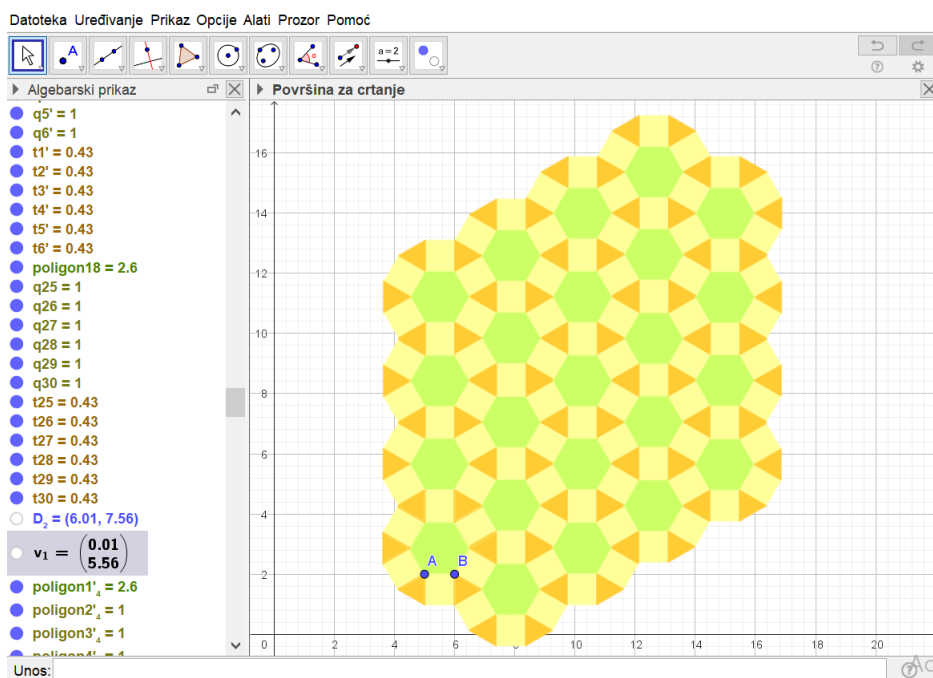
На слици 3.6 приказан је аплет у коме је прво постојећи полигон транслиран за вектор $\vec{v}$ који је пресликао тачку A у тачку A_1 , а затим тако добијени

полигон транслиран за вектор $\vec{w}$ који је пресликао тачку E у тачку H .



Слика 3.6: Транслација полигона за вектор $\vec{v}$ и вектор $\vec{w}$

Након тога наведени полигон је транслиран за вектор $\vec{u}_1$ који је транслирао тачку A у тачку M (слика 3.7). Наведени кораци се могу наставити транслирањем датог полигона за одговарајући вектор.

Слика 3.7: Транслација за вектор $\vec{u}_1$ 

Слика 3.8: Геоггебра пружа могућност уређивања датог графичког приказа како би тражени аплет био прегледнији

Глава 4

Закључак

„Деца не уче поезију само зато што ће порасли и постати песници. Ради се о навици ума. Ваш мозак не размишља апстрактно уколико то не захтеваће од њега - а потребно је да се то захтева од њега у релативно раном узрасту. Сиротињи и лоичности које подразумева математика јесу добар начин да увезбаће свој мозак.”

Наведени цитат илуструје главни циљ наставе математика како у основној, тако и у средњој школи. Иако теселације нису у наставном плану и програму наведених нивоа образовања, оне итекако могу послужити у остваривању циља реченим овим цитатом.

У овом раду приказано је како кроз занимљиву математичку радионицу или пројектни задатак укључити теселације у наставни процес. Наведена радионица се састоји од уводног, средишњег и завршног дела и подразумева пет лекција/часова. У уводном делу објашњен је појам теселација и дата је корелација математике са ликовном културом кроз наведени појам. Осим корелације са ликовном културом, ова лекција даје и корелацију са историјом. Познато је да је међупредметна корелација од великог значаја за наставни процес. Средишњи део подразумева три лекције кроз које ученици детаљније упознају математичке основе теселација, постојање правилних и полуправилних теселација и везу између симетрије и теселација. И у завршном делу, ученици упознају и илуструју једну неправилну теселацију еуклидске равни. Овај час ученицима даје могућност да покажу своју креативност и да се на тренутке поистовете са познатим холандским уметником Ешером.

Потребно је нагласити да лекције и задаци предвиђени датом радионицом могу послужити и приликом усвајања појмова који јесу предвиђени планом и програмом. Осим тога, дата радионица првенствено је предвиђена ученицима основне школе. У овом раду дат је приказ и лекције која повезује теселације са градивом средње школе. Тачније са изометријским трансформацијама.

Поред наведених примера примене теселација у основној и средњој школи, овај рад у првој глави приказује математичке основе и класификацију теселација. Дате су теореме о постојању и броју правилних и полуправилних теселација, као и њихов доказ. Наведени делови рада су погодни за изучавање на академском нивоу образовања.

Дат је и пример креирања и имплементације интерактивног садржаја везаног за теселације коришћењем програмског пакета Геогebra. Конкретно, приказана је једна Архимедова теселација конструисана у овом програмском пакету. Графички приказ теселација и њених особина врло се лепо и једноставно може реализовати помоћу наведеног програмског пакета. На тај начин Геогebra даје веома важан допринос у лакшем савладавању ових појмова.

Библиографија

- [1] Branko Grunbaum i G. C. Shepard, *Tilings and patterns* , Dover Publications, Mineola, New York, Second Edition, 2016.
- [2] Бранков Т. , *k-uniformne teselacije euklidske ravni*, Мастер рад, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2012.
- [3] Митровић М., Огњановић С., Вељковић М., Петковић Ј., Лазаревић Н., *Геометрија, за I разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 1998.
- [4] Стојановић В., *Математика, уџбеник за пети разред основне школе*, Математископ, 2018.
- [5] Стојановић В., *Математика, уџбеник за седми разред основне школе*, Математископ, 2018.
- [6] Kathryn L. Cerrone, *TESSELLATIONS: LESSONS FOR EVERY AGE*, The University of Akron, 2016.
- [7] Леп преглед тематике: <https://www.widewalls.ch/magazine/tessellation-mathematics-method-art>
- [8] Теселације полигонима: https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Tessellations_by_Polygons
- [9] Званично Геогембра упутство на српском језику: <https://www.geogebra.matf.bg.ac.rs/uputstvoGGB.pdf>
- [10] Балаговић М., „Wangove pločice”, *Math.e.*, vol. 8, br.1, str. 1-15, 2006. [online]. Доступно на: <http://e.math.hr/>
- [11] Наставни листићи везани за Теселације: <https://www.superteacherworksheets.com/tessellation.html>

Биографија аутора

Цвија Васић је рођена 30.7.1994. године у Бијељини. Основну школу „Свети Сава” завршила је у Лопарама 2009. године. Исте године је уписала општи смер гимназије у СШЦ „Вук Караџић” у Лопарама. Гимназију завршава 2013. као носилац Вукове дипломе. Након завршетка гимназије, уписала је основне академске студије на Природно-математичком факултету у Новом Саду, смер Дипломирани професор математике, а дипломирала је 2019. Исте године уписује мастер академске студије на Математичком факултету у Београду. У основној школи „Младост” у Београду радила је као наставник математике од фебруара 2020. до августа 2022. Након тога креће да ради у основној школи „Ђуро Стругар” у Београду где и тренутно ради.