УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марија Катић

РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА p-ХАБ МЕДИЈАНЕ НЕОГРАНИЧЕНИХ КАПАЦИТЕТА СА ВИШЕСТРУКИМ АЛОКАЦИЈАМА МЕТОДОМ ПРОМЕНЉИВИХ ОКОЛИНА

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

др Стефан Мишковић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Мирослав Марић, редовни професоор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Нина Радојичић Матић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Захваљујем се професору Стефану Мишковићу,
породици и пријатељима.

Наслов мастер рада: Решавање проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама методом промењивих околина

Rezime: Локацијски проблеми чине значајну групу проблема оптимизације, који налазе широку примену у пракси код оптимизација трошкова у транспортним, логистичким и телекомуникационим мрежама. Хабови (енг. hub) су посебно изабрани чворови на мрежи који омогућавају замену директних веза између свака два чвора са неколико индиректних веза преко једног или више хабова. У пракси, коришћење хабова резултира нижим трошковима мреже, међутим често је изазовно одредити где би хабови требало да буду лоцирани (тзв. проблем локације) и како би они требало да буду додељени чворовима (тзв. проблем алокације), како би се оптимизовали трошкови. Овај оптимизациони проблем је NP-тежак. У раду је предложена, имплементирана и тестирана метода промењивих околина као хеуристички приступ решавању проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама. Опсежно су тестиране различите комбинације варијанти методе и параметара и предложена метода је пажљиво прилагођена карактеристикама разматраног проблема. Дати су резултати на AP тест инстанцама као и неке интерпретације добијених резултата.

Кључне речи: дискретна оптимизација, математичка оптимизација, линеарно програмирање, локацијски проблеми, хаб локацијски проблеми, проблеми p-хаб медијане, UMApHMP, метода промењивих околина, RVNS, хеуристика, метахеуристика

Садржај

Глава 1

Увод

Математичка оптимизација се бави методама проналажења минимума и максимума реалинх функција. Општи проблем оптимизације је облика:

$$\min_{x \in D} \quad f(x) \tag{1a}$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, L \tag{1b}$$

Функција f, чија се вредност минимизује, назива се функција циља, скуп D домен, а услови (1b) ограничења. Подскуп скупа D на којем су задовољена сва ограничења назива се претраживачки простор. Елемент из домена који задовољава сва ограничења, тј. елемент из претраживачког простора, назива се допустиво решење. Проблем математичке оптимизације је проблем проналажења оног допустивог решења за које је вредност циљне функције најмања. Приметимо да дата формулација обухвата и проналежење максимума, пошто се проналажење максимума функције f може свести на проналажење минимума функције $-f$. Такође се и једнакосна ограничења лако уклапају у наведену формулацију. Наиме, ограничење $g(x) = 0$ се може представити помоћу два ограничења: $g(x) \leq 0$ и $g(x) \geq 0$. Уколико је претраживачки простор коначан или пребројив, ради се о дискретној оптимизацији, док уколико је у питању непребројив претраживачки простор, најчешће подскуп скупа $\mathbb{R}^n$, ради се о континуалној оптимизацији.

Математичка оптимизација се још назива и математичко програмирање, а назив линеарно програмирање је широко распорстрањен назив за математичку оптимизацију са линеарном функцијом циља f и функцијама ограничења g_i. У време када је настао израз, појам рачунарског програма још увек није био у широкој употреби, те се програмирање односило на проблеме планирања. Општи проблем линеарног програмирања је следећег облика:

$$\min_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2a}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq 0, \quad i = 1, \ldots, L, \tag{2b}$$

$$x_k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, n \tag{2c}$$

Ако су све променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из скупа целих бројева, проблем називамо целобројним линеарним програмирањем (енгл. Integer Linear Programming). У општем случају, проблем целобројног линеарног програмирања је NP-тежак. Уколико услов целобројности не важи за све променљиве, то је проблем мешовитог целобројног линеарног програмирања (енгл. Mixed Integer Linear Programming, MIP или MILP), који је и даље NP-тежак.

Математичка оптимизација има широку примену у пракси. Користи се у решавању многих проблема свакодневног живота из различитих области као што су саобраћај, инжењерство, телекомуникације, ланци снабдевања, системи наводњавања, молекуларна биологија, економија, физика, вештачка интелигенција итд.

Локацијски проблеми (енгл. Facility Location Problems) чине значајну класу проблема оптимизације. Највећу примену имају у оптимизацији трошкова у транспортним и телекомуникационим мрежама. Састоје се у одређивању оптималне локације за постављање објеката, а некад и успостављање транспортних веза између објеката, под одређеним условима, тако да се минимизују унапред дефинисани трошкови. Примери трошкова које треба оптимизовати су највеће растојање између два скупа објеката, укупна сума транспортних трошкова, укупно време транспорта, цене успостављања одређених ресурса, максимална покривеност итд.

Посебну врсту локацијских проблема чине локацијски проблеми на мрежи, где је на улазу дата мрежа, тј. граф, где чворови представљају локације објеката, гране представљају директне везе између објеката, а тежине грана су цене одговарајућих транспортних трошкова. Ограничења се могу односити на везе између објеката, капацитете објеката или веза и слично.

Хабови (енгл. hub) су посебно изабрани чворови на мрежи који омогућавају замену директних веза између свака два чвора у мрежи са неколико индиректних веза преко једног или више хабова. У пракси су то често посебни објекти, који су специјализовани за колекцију и консолидацију великог протока. Код хаб локацијских проблема је обично потребно идентификовати чворове на мрежи који ће бити хабови, и придружити везе како би се успоставио транспорт у мрежи преко хабова.

Проблем p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама, који ћемо разматрати у наставку овог рада, припада класи хаб локацијских оптимизационих проблема. Код хаб локацијских проблема је потребно идентификовати оптималне локације за хабове у мрежи. Дат је потпуно повезани усмерени граф, тј. мрежа, где чворови представљају објекте у мрежи, а гране директне везе између објеката. Затим је дата потражња ресурса између свих парова чворова. У том контексту кажемо да је почетни чвор снабдевач, а крајњи чвор корисник ресурса. И дата је јединична цена транспорта за све директне везе. У већини хаб локацијских проблема је такође дато да ће цене директних веза између хабова имати умањење за коефицијент уштеде $\alpha < 1$. Притом, кад треба успоставити везе, најчешће постоји ограничење да није дозвољена директна веза између два чвора који нису хабови.

Остали параметри хаб локацијских проблема варирају, и према томе хаб локацијске проблеме можемо класификовати на следеће начине.

- Према претраживачком простору проблема, постоје дискретни и континуални хаб локацијски проблеми. Код дискретних, скуп чворова мреже је коначан скуп, док је код континуалних проблема најчешће дат део равни или сфере за могуће локације објеката.

- Према функцији циља, постоје проблеми хаб центара и проблеми хаб медијане. Први спадају у min-max проблеме математичке оптимизације, док други спадају у min-sum проблеме математичке оптимизације. Min-max проблеми су они проблеми код којих се минимизује функција циља која представља функцију максимума, док је код min-sum проблема функција циља функција суме. У проблему хаб центара минимизује се максимална цена транспорта између два чвора у мрежи, док се у проблему хаб медијане минимизује сума транспортних трошкова између свих чворова, тј. укупни трошкови мреже.

- Према броју хабова које треба поставити, тражени број хабова може бити унапред задат или је дозвољено да варира. Када је унапред задат, то су p-хаб проблеми.

- Према ограничењу капацитета, разматрају се проблеми ограничених капацитета и проблеми неограничених капацитета. Код проблема ограничених капацитета, дата су додатна ограничења капацитета чворова или грана, док код проблема неограничених капацитета не постоје таква ограничења.

- Према ограничењима везаним за успостављање, тј. алокацију, веза, имамо проблеме једноструке алокације, и проблеме вишеструке алокације. Ради се о ограничењу над алокацијама веза између хабова и обичних чворова. Код једноструке алокације, дозвољено је обичном чвору придружити само један хаб, док је код вишеструке алокације дозвољено придружити више хабова једном обичном чвору.

Наведени проблеми су углавном NP-тешки и од великог су практичног значаја. Бројни радови у литератури се баве решавањем ових проблема. Класификација и детаљан преглед литературе се може наћи у раду [1].

У наредној глави 2 описује се проблем који је тема ове тезе и разматрају се две математичке формулације из литературе. Глава 3 садржи преглед релевантне литературе са кратким освртима на коришћене приступе. У глави 4 се описује метода промењљивих околина којом се решава разматрани проблем и представљају се детаљи предложене имплементације решавања датог проблема. У глави 5 се могу наћи детаљи експеримента којим је изабрана предложена метода, као и коначни резултати предложене методе упоређени са резултатима комерцијалног CPLEX решавача. Такође су дати резултати на великим тест инстанцама, чија оптимална решења нису позната.

Глава 2

Опис проблема и математичке формулације

Проблем p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама (енгл. Uncapacitated multiple allocation p-hub median problem, UMApHMP) дефинише се на следећи начин: за дату мрежу, са јединичним ценама директних транспортних веза као тежинама грана, снабдевач-корисник потражњама, и фактором умањења цене веза између хабова α, потребно је одредити оптималне локације хабова и алоцирати везе, тако да се минимизује укупна цена транспорта у мрежи, уз услове да нису могуће директне везе између два обична чвора, и да је могуће једном обичном чвору доделити више хабова. Подразумева се да за јединичне цене транспорта у мрежи важи неједнакост троугла, тј. да је увек повољнија директна веза од путање преко трећег чвора.

Приметимо, када не би било услова који забрањује гране између два обична чвора, минимумалну укупну цену транспорта би имао потпуно повезани граф. У пракси не желимо потпуно повезане мреже из очигледних разлога као што су цена изградње и одржавања великог броја веза, и зато и уводимо хабове уз овај или сличан услов.

Проблем p-хаб медијане неограничених капацитета је NP-тежак, и притом је са условом једноструке алокације чак и потпроблем алокације, када су познати хабови, NP-тежак [29]. Са условом вишеструке алокације, потрпоблем алокације је решив у полиномијалном времену. Како није ограничено на колики број хабова један чвор може да се повеже, најоптималније је транспорт између пара чворова вршити најповољнијом допуштеном путањом, тј. најповољнијом путањом преко хабова. Заиста, функција циља у проблемима хаб медијане се може видети као сума цена путања између свих парова чвора, па онда важи:

$$\min \sum_{uw} (c_{uw}) = \sum_{uw} \min(c_{uw}) \tag{3}$$

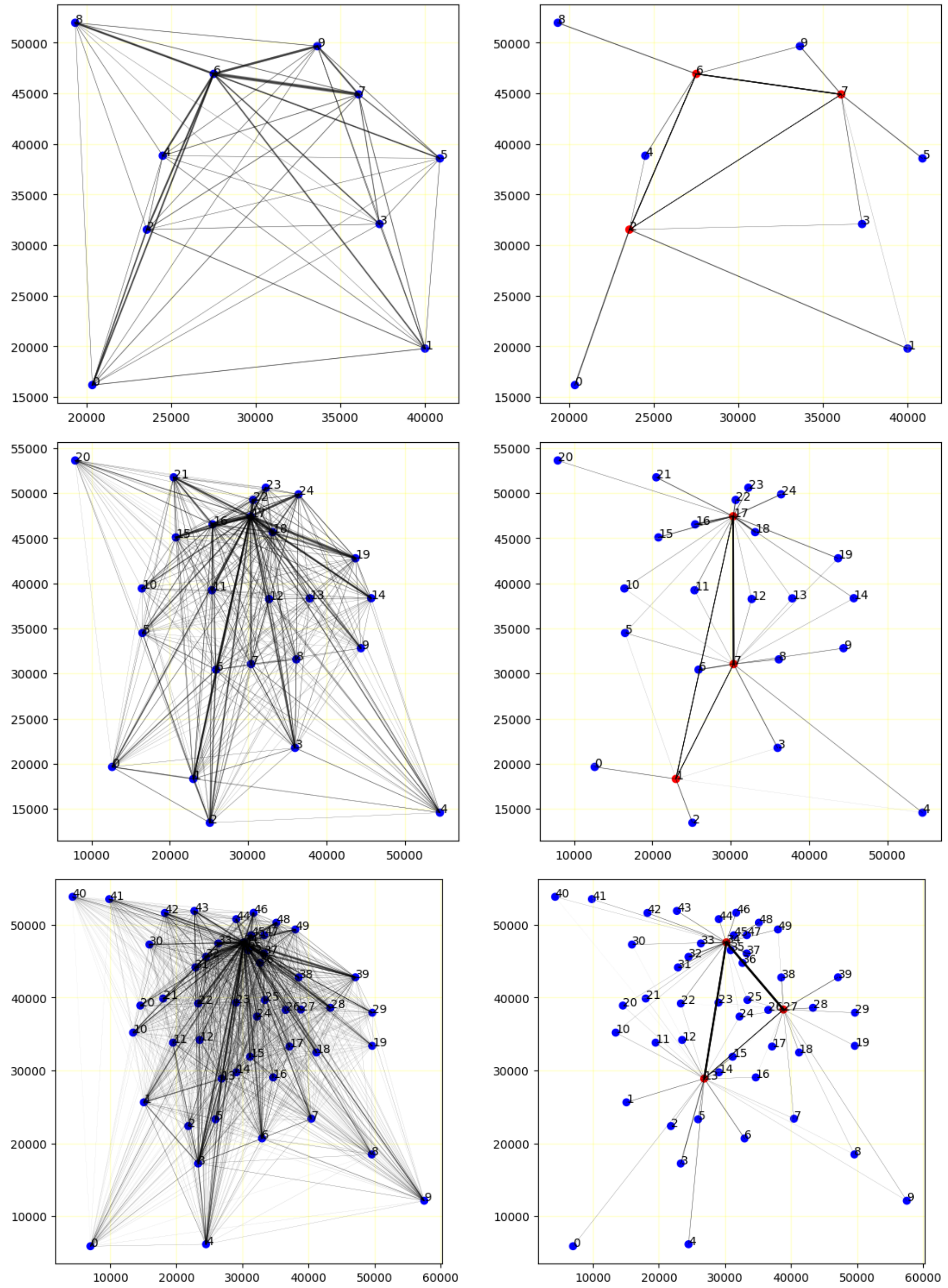
где је c_{uw} цена путање од u до w. Ова једнакост важи јер су, са условом вишеструке алокације, све путање c_{uw} независне једна од друге. Дакле, довољно је минимизовати трошкове путања између свих парова снабдевач-корисник независно. Најоптималније путање је могуће пронаћи, прилагођеним Флојд-Варшаловим алгоритмом за најкраће путеве у графу (енгл. Floyd-Warshall algorithm) [18] [43], у временској сложености $\mathcal{O}(pn^2)$, за број чворова у мрежи n, и тражени број хабова p.

Занимљиво је још приметити, да ће све путање између снабдевача и корисника бити дужине највише 4, тј. проток од снабдевача до корисника ће ићи преко највише два хаба. Заиста, ако су и снабдевач и корисник обични чворови, мораће да постоји макар један хаб између њих у путањи. За $\alpha = 1$, важи неједнакост троугла у графу, па ће увек постојати тачно један хаб између, тј. све путање бити дужине највише 3. Када је $\alpha < 1$, потенцијално се нарушава неједнакост троугла између два хаба и једног обичног чвора, па се може десити да је јефтинија путања преко два хаба од путање преко једног хаба. А са друге стране, неједнакост троугла и даље важи међу хабовима, јер су све цене умањене за исти коефицијент, па ће између два хаба најкраћи пут бити директан, те је зато 4 горња граница.

На слици 1 дато је неколико примера потпуно повезане мреже која је дата на улазу, лево, и оптималног решења проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама, десно. Потражња ресурса је илустрована дебљинама грана. Хабови су истакнути црвеном бојом. Примери су из скупа инстанци *AP* (Australia Post) који је стандардни скуп инстанци за тестирање решења у литератури.

2.1 Математичке формулације

Први радови у литератури који су се бавили проблемом p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама бавили су се дефинисањем проблема као целобројног линеарног програма [1]. Први је, 1992.



Слика 1: Оптимална решења проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама на AP инстанцама за $p = 3$ и $n = \{10, 20, 50\}$

године, математичку формулацију проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама дао Campbell, у раду [10], у облику проблема целобројног линеарног програмирања. Дајемо ту формулацију у наставку.

Нека је дато n чворова, од којих сви могу бити и снабдевачи и корисници и потенцијални хабови, тражени број хабова p, и коефицијент умањења цене директног транспорта између хабова α. Затим, нека су дате јединичне цене директног транспорта између свих парова чворова. Обележимо са C_{ij} јединичну цену директног транспорта између чворова i и j. За њих важи да је $C_{ij} = C_{ji}$, и важи неједнакост троугла. Нека је, затим, дата потражња ресурса између свих парова снабдевач-корисник. Обележимо са W_{ij} потражњу од чвора-снабдевача i до чвора-корисника j. Уведимо још и следеће ознаке и најавимо шта оне представљају за оптимално решење у односу на дату формулацију.

- X_{ijkm} – удео протока од снабдевача i до корисника j, који пролази путањом $i - k - m - j$. У сваком допустивом решењу k и m су хабови.
- H_k – индикатор хаба. За $H_k = 0$, k је обичан чвор, а за $H_k = 1$, k је хаб.
- $C_{ijkm} = C_{ik} + C_{mj} + \alpha C_{km}$

$$\min \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} X_{ijkm} C_{ijkm} \tag{4a}$$

$$\sum_k \sum_m X_{ijkm} = 1, \quad \forall i, j, \tag{4b}$$

$$\sum_k H_k = p, \tag{4c}$$

$$X_{ijkm} \leq H_k, \qquad \forall i, j, k, m, \tag{4d}$$

$$X_{ijkm} \leq H_m, \qquad \forall i, j, k, m, \tag{4e}$$

$$X_{ijkm} \geq 0, \qquad \forall i, j, k, m, \tag{4f}$$

$$H_k \in \{0, 1\}, \qquad \forall k \tag{4g}$$

Функција циља у (4а) представља укупни трошак транспорта на мрежи. Сумира се трошак транспорта између свих парова чворова i и j путањама преко два хаба k и m. Присетимо се, све путање у оптималном решењу ће бити дужине највише 4, па је отуда оваква функција циља довољна. За $k \neq m$ пут је дужине 4, за $k = m$ пут је дужине 3 итд. Услови (4b) и (4f) дефинишу X_{ijkm} као удео протока од i до j. Услов (4c) намеће да допустиво решење има тачно p хабова. А услови (4d) и (4e) забрањују путеве преко чворова који нису хабови. Приметимо да, пошто је у питању проблем неограничених капацитета, постоји оптимално решење за које су $X_{ijkm} \in \{0,1\}, \forall i,j,k,m$, јер јесте оптимално да сав проток између i и j прође једним, најкраћим путем. Видимо да ова формулација има $\mathcal{O}(n^4)$ променљивих и $\mathcal{O}(n^3)$ огрничења.

Ернст и Кришнамурти објављују 1998. године ефикаснију формулацију овог проблема у облику мешовитог целобројног линеарног програма у раду [16]. Њихова формулација садржи $\mathcal{O}(n^3)$ променљивих и $\mathcal{O}(n^2)$ огрничења.

Нека ознаке n, p, α, C_{ij}, W_{ij}, H_k важе и у овој формулацији. Уведимо још нових ознака и најавимо шта ће оне представљати у оптималном решењу.

- Z_{ik} – количина протока од снабдевача i која граном иде у хаб k,
- Y^i_{kl} – део протока који се транспортује граном $k - l$, а потекао је од чвора i, при чему су k и l хабови,
- X^i_{lj} – део протока који директном граном $l - j$ завршава у кориснику j, а потекао је од чвора i. У сваком допустивом решењу l је хаб.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_i (\chi \sum_k C_{ik} Z_{ik} + \ \alpha \sum_k \sum_l C_{kl} Y^i_{kl} + \ \delta \sum_l \sum_j C_{lj} X^i_{lj}) && && \text{(5a)}\\
& \sum_k Z_{ik} = \sum_j W_{ij}, && \forall i, && \text{(5b)}\\
& \sum_l X^i_{lj} = W_{ij}, && \forall i,j, && \text{(5c)}\\
& \sum_l Y^i_{kl} + \sum_j X^i_{kj} - \sum_l Y^i_{lk} - Z_{ik} = 0, && \forall i,k, && \text{(5d)}\\
& \sum_k H_k = p, && && \text{(5e)}\\
& Z_{ik} \leq \sum_j W_{ij} H_k, && \forall i,k, && \text{(5f)}\\
& \sum_i X^i_{lj} \leq \sum_i W_{ij} H_k && \forall l,j, && \text{(5g)}\\
& Y^i_{kl}, X^i_{lj}, Z_{ik} \geq 0, && \forall i,j,k,l, && \text{(5h)}\\
& H_k \in \{0,1\}, && \forall k && \text{(5i)}
\end{aligned}
$$

Услови (5b) – (5d) прецизно дефинишу оно што желимо да променљиве Z_{ik}, Y^i_{kl} и X^i_{lj} представљају у оптималном решењу. Једначином (5b), Z_{ik} се дефинише као проток из i. Једначином (5c), X^i_{lj} се дефинише као проток између снабдевача i и корисника j. Док једначина (5d) спаја све три променљиве следећом логиком: проток који излази из чвора k – прва два сабирка, једнак је протоку који долази у k – друга два сабирка, а да се притом ради само о делу протока који потиче из i. Оваква једначина подразумева и да један део протока може да остане у k, јер обухвата специјалне случајеве $k = l$. Поново, услов (5e) намеће да допустиво решење има тачно p хабова. Услови (5f) и (5g) спречавају директне везе између два обична чвора.

Дакле, идеја ове формулације је да променљиве представљају проток кроз 3 гране на путу $i - k - l - j$, Z_{ik} – проток снабдевач-хаб гране, Y^i_{kl} – проток хаб-хаб гране и X^i_{lj} – проток хаб-корисник гране. Функција циља сумира по i, укупну цену протока у мрежи коју шаље чвор i.

Примећујемо да су у овом раду аутори претпостављали да постоје и коефицијенти $\chi \geq 1$ и $\delta \geq 1$, који представљају поскупљење снабдевач-хаб транспорта и хаб-корисник транспорта, тим редом. Ово не мења карактеристике проблема, а прилично је реалистичан захтев. На пример, у поштанским системима, колекција, интерни трансфер и дистрибуција пошиљки се обављају на три прилично различита начина. Такође га је лако додати у прву формулацију, дефинисањем $C_{ijkm} = \chi C_{ik} + \alpha C_{km} + \delta C_{mj}$.

Глава 3

Преглед релевантне литературе

У раду [10] из 1992. године, Камбел уводи прву математичку формулацију проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама. То је формулација (4) у глави 2.1.

Затим 1994. године, Камбел у раду [11] обрађује хаб локацијске проблеме са два додатна услова: постојање доњег прага за количину протока у гранама између хабова и обичних чворова и постојање фиксиране цене транспорта у истим гранама, и наводи математичку формулацију за овај проблем за те специјалне случајеве.

Ејкин у раду [2] из 1995. године и Камбел у раду [12] из 1996. године решавају овај проблем хеуристичком методом која се састоји из похлепне фазе и фазе размене (енгл. Greedy-interchange method). У Ејкиновом решењу похлепна фаза креће од скупа свих чворова и похлепним алгоритмом елиминише чвор по чвор док не остане p чворова за хабове. У Камбеловом решењу се креће од празног скупа и похлепним алгоритмом се добија скуп од p чворова за хабове. У оба случаја фаза размене се састоји од размена једног хаб-чвора са једним обичним чвором све док таква размена смањује функцију циља. Оба решења користе чињеницу да је допустиво решење довољно представити као скуп од p чворова који ће бити хабови, јер се гране могу ефикасно алоцирати када су хабови познати. Занимљиво је још напоменути да је примарни циљ рада [12] решавање проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са једноструким алокацијама (UMApHSP), али се решење проблема са вишеструким алокацијама користи као почетна тачка за решавање проблема са једноструким алокацијама.

У раду [39] из 1996. године, аутори смањују број ограничења у Камбеловој формулацији (4), преформулишући ограничења (4d) и (4e) на следећи начин:

$$\sum_m X_{ijkm} \leq H_k, \ \forall i, j, k, \qquad \sum_k X_{ijkm} \leq H_m, \ \forall i, j, m.$$

Ово једноставно побољшање има значајан ефекат и они успевају да реше готово све инстанце CAB скупа за тестирање.

Значајан напредак затим представља рад [16], где Ернст и Кришнамурти дају нову математичку формулацију која садржи за $\mathcal{O}(n)$ мање промењљивих и ограничења. То је формулација (5) у глави 2.1. У том раду они предлажу и неколико метода за решавање проблема: егзактну методу експлицитне енумерације (енгл. Explicit enumeration method), егзактну методу грањања и ограничавања (енгл. Branch-and-Bound) користећи нову математичку формулацију, и хеуристичку методу која се заснива на најкраћим путевима.

Експлицитна енумерација представља обилажење дрвета свих допустивих решења. Допустиво решење је и овде представљено као скуп чворова величине p. Дакле сложеност овог алгоритма је пропорционална броју допустивих решења, $\mathcal{O}(n^p)$, полиномијална по n, али експоненцијална по p.

Метода грањања и орагничавања је позната метода за решавање проблема целобројног линеарног програмирања, предложена 1960. године од стране Ланд и Доиг у [31]. Идеја је поделити скуп допустивих решења на подскупове помоћу ограничавања вредности промењљивих и одбацивати потпроблеме чија процењена доња граница превазилази тренутно оптимално решење. Доња граница се у оригиналном алгоритму процењује тако што се потпроблем релаксира уклањањем услова целобројности, јер су такви оптимизациони проблеми лакши за решавање.

Исте године касније, у раду [17], Ернст и Кришнамурти побољшавају предложено решење са грањањем и ограничавањем тако што, за процену доње границе, уместо стандардне релаксације потпроблема линеарног програмирања, они користе алгоритам за најкраће путеве. Ова измена је побољшала претходно решење са грањањем и одсецањем за 500 пута у смислу времена извршавања на тестираним инстанцама. Открили су оптимална решења за све AP инстанце за $n = 200$ и $p = 3$. Међутим, још увек нису успели да реше инстанце проблема за $n = 100$ и $p \geq 5$ и за $n = 200$ и $p \geq 3$.

У раду [5], 2004. године, аутори додатно побољшавају доње границе алгоритма и тако побољшавају ефикасност претходног решења на одређеним мањим инстанцама (AP, $n \leq 50$ и $p \leq 5$).

У раду [38] из 1999. године, аутори обрађују специјални случај проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама у којем нису дозвољена два хаба на путањама. Називају га проблемом p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама са једном станицом (енгл. 1-stop UMApHMP), предлажу формулацију у облику мешовитог целобројног линеарног програмирања, предлажу једну варијанту решења са грањањем и одсецањем, и једну похлепну хеуристику, и решавају га на CAB инстанцама за тестирање.

У раду [40], 2008. године, Станимировић предлаже генетски алгоритам за решавање овог проблема. Генетски алгоритми, предложени од стране Холанда 1975. године у књизи [27], су врста еволутивних алгоритама, који претражују решења техникама инспирисани биолошким појавама природне селекције, као што су мутација, селекција, crossover, итд. Допустиво решење је у раду представљено као бинарни низ дужине n са p јединица. Алгоритам успева да реши инстанце из AP скупа до $n = 200$ и $p = 2$. Затим 2010. године, у раду [32], Милановић представља приступ такође заснован на еволуцији.

Гарсија и још два аутора, у раду [19], 2021. године предлажу нову математичку формулацију, која има само $\mathcal{O}(n^2)$ променљивих. Предлажу и егзактну методу грањања са одсецањем (енгл. Branch-and-Cut) за решавање користећи нову фомрулацију. Метода грањања са одсецањем је први пут предложена 1991. године у [37]. Ради се о надоградњи већ поменуте методе грањања и ограничавања. Наиме када се добију мањи потпроблеми они се решавају методом одсецања (енгл. Cutting planes) [23], која итеративно смањује интервал за нецелобројне вредности променљивих. Њихов приступ открива нека нова решења на познатим тест инстанцама, а посебно се добро показује за веће вредности p.

Кратица 2013. године у раду [30] предлаже алгоритам који се заснива на метахеуристици инспирисаној електромагнетизмом (енгл. Electromagnetism-like metaheuristic). То је метахеуристика која је заснована на популацијама и која моделује односе између решења као односе наелектрисаних честица у електромагнетизму. Алгоритам је достигао сва претходно позната решења.

Талби и Тодосијевић, у раду [42] 2017. године, баве се робусном оптимизацијом у проблему p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама. Робусна оптимизација [36] је приступ који узима у обзир непоузданост улазних података. Како ће подаци варирати задаје се помоћу интервала из којег улаз може да узима вредност. На пример, један могући начин како квантификовати робусност је min-max критеријум – минимизовати максимални трошак свих могућих сценарија на улазу. У раду се претпоставља непоузданост потражње ресурса између чворова, дефинише се нова мера робусности решења оптимизационих проблема, дефинише се нова математичка формулација проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама која даје робусна решења, и као хеуристичка метода предлаже се метода промењљивих околина (енгл. Variable Neighbourhood Search, VNS) [35] која се показује као робусна.

Гафаринасаб се такође бави проблемом непоуздане потражње између чворова. У раду [20], 2018. године, даје математичку формулацију оваквог проблема и робусно решење комбиновањем табу претраге (енгл. Tabu Search) са егзактним методама над датом формулацијом. Табу претрага [22] је варијанта локалне претраге са додатним забранама враћања у већ посећена решења. У раду [21], 2021. године, представља нову формулацију која је прилагођена другачијој робусној варијанти проблема.

Бримберг, Тодосијевић, Урошевић и Младеновић у раду [9] предлажу нову математичку формулацију прилагођену проблемима p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама код којих није задовољена неједнакост троугла за јединичне трошкове транспорта. Такви проблеми могу имати оптимално решење са више од два хаба у путањама. Тестирају га на стандардном решавачу за дискретну оптимизацију, и чак се и тако добијају бољи резултати од примене дотадашњих алгоритама који нису специјализовани за ову додатну карактеристику.

У контексту ове тезе значајно је поменути још два рада ове четворице аутора који се баве блиским проблемима. У раду [7], они решавају проблем p-хаб центара неограничених капацитета са једноструким алокацијама методом промењљивих околина. У раду [6] је дато решавање проблема p-хаб центара неограничених капацитета са вишеструким алокацијама методом промењљивих околина. Проблем из другог рада је ближи проблему обрађеном у овој тези и биће референциран у наставку, док је код првог рада занимљиво упоредити како услов једноструке алокације, који и алокацију чини NP-тешком, утиче на разлике у репрезентацији проблема и избор околина за методу промењљивих околина.

Глава 4

Примена методе промењљивих околина

Методу промењљивих околина предложили су Младеновић и Хансен, 1997. године у раду [35]. То је метахеуристика која представља уопштење локалне претраге за решавање проблема математичке оптимизације. Главна идеја је увести више различитих типова околина у односу на које се претражују локални минимуми. Метода се, како аутори наводе у раду, заснива на следећим чињеницама.

1. Локални минимум за један тип околине не мора нужно бити локални минимум за други тип околине.
2. Глобални минимум представља локални минимум за све типове околина.
3. За многе проблеме у пракси, локални минимуми више типова околина су релативно близу један другог.

Уведимо ознаке које ћемо користити у наставку. Нека ознаке из дефиниције проблема математичке оптимизације (1) и даље важе. Са x_{opt} ћемо означавати оптимално решење, тј. глобални минимум, проблема математичке оптимизације. Означимо са N_k, $k = 1, \ldots, k_{max}$ унапред изабраних k_{max} типова околина, а са $N_k(x)$ скуп решења из k-те околине од x. Локални минимум у односу на околину N је оно $x' \in X$ такво да не постоји $x \in N(x') \subset X$ где је $f(x) < f(x')$.

Локална претрага (енгл. Local Search) проналази један локални минимум оптимизационог проблема у односу на неку околину N. Алгоритам полази од неког иницијалног решења x, тражи правац спуста функције f из x, унутар околине $N(x)$ и помера се унутар $N(x)$ у том правцу. Уколико нема таквог правца локална претрага се зауставља и тренутно решење пријављује као локални минимум, уколико има правца спуста наведени процес се понавља итеративно. Најчешће се користи правац најбољег спуста (енгл. Best Improvement). У дискретној оптимизацији то би значило да се сва решења унутар околине $N(x)$ морају проверити. Како то може бити недовољно ефикасно, алтернатива је зауставити претрагу околине када се пронађе први правац спуста (енгл. First Improvement). Обе верзије алгоритма су дате у наставку.

Алгоритам 1: Best improvement локална претрага

Data: inicijalno rešenje x, okolina N

Result: Lokalni minimum u odnosu na okolinu N optimizacionog problema $\min_x f(x)$ počevši iz x

while $f(x) \leq f(x')$ **do**
    $x' \leftarrow x$;
    $x \leftarrow \text{argmin}_{y \in N(x)} f(y)$;
end
return x'

Алгоритам 2: First improvement локална претрага

Data: inicijalno rešenje x, okolina N

Result: Lokalni minimum u odnosu na okolinu N optimizacionog problema $\min_x f(x)$ počevši iz x

do
    $x' \leftarrow x$;
    $i \leftarrow 0$;
    do
        $i \leftarrow i + 1$;
        $x \leftarrow \text{argmin}\{f(x), f(x_i)\}$, $x_i \in N(x)$;
    while $f(x_i) \leq f(x)$ *and* $i < |N(x)|$;
while $f(x) < f(x')$;
return x'

У прилог једноставности и ефективности ове методе говоре бројне успешне примене на оптимизационе проблеме. У раду [24] аутори ове методе дају детаљан преглед варијанти и примена у литератури. Овај рад је посебно занимљив у контексту ове тезе, јер аутори посвећују један део рада генералним саветима како развијати методу променљивих околина за дати проблем, и које типичне модификације испробати уколико основна метода не даје задовољавајуће резултате.

Постоје различите варијанте методе променљивих околина у зависности од баланса између детерминистичког и стохастичког експлоатисања основне идеје дате чињеницама (1) – (3).

Метода променљивог спуста (енгл. Variable Neighbourhood Descent, VND) је уопштење локалне претраге коришћењем више типова околина. Локалне претраге се врше редом у односу на задате типове околина. Ако важи $k_{max} = 1$, реч је о обичној локалној претрази. Како је ова варијанта спора, најчешће се узима $k_{max} = 1$ или $k_{max} = 2$ [24]. Приметимо, за $k_{max} = 1$ добијено решење је локални минимум, а са $k_{max} > 1$ повећавамо шансе да је добијено решење и глоблани минимум, ослањајући се на чињеницу (2).

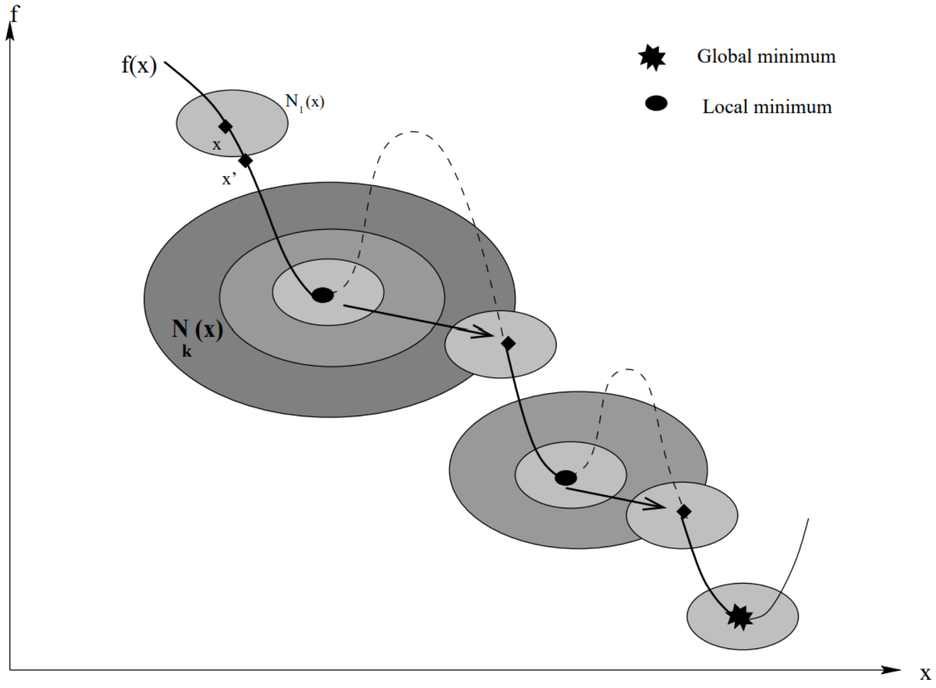
Алгоритам 3: Метода променљивог спуста

Data: kriterijum zaustavljanja, tipovi okolina $N_k, 1 \leq k \leq k_{max}$

Result: Najbolje pronađeno rešenje optimizacionog problema $\min_x f(x)$

$x \leftarrow inicijalizacija()$;
while *nije zadovoljen kriterijum zaustavljanja* **do**
    $k \leftarrow 1$;
    while $k \leq k_{max}$ **do**
        $x'' \leftarrow lokalna\_pretraga(x', N_k(x))$;
        $prelazak\_u\_narednu\_iteraciju(x, x', k)$;
    end
end
return x

Основна метода променљивих околина (енгл. Basic Variable Neighbourhood Search, BVNS) комбинује детерминистички и стохастички приступ у претрази. Пре сваке локалне претраге ради се тзв. размрдавање (енгл. shaking), тј. бира се ново произвољно решење у текућој оклини од којег креће претрага, како би се избегло заглављивање у локалном минимуму. То је илустровано на слици 2 преузетој из [24].



Слика 2: Основни метод промењљивих околина

Алгоритам 4: Основна метода промењљивих околина

Data: kriterijum zaustavljanja, tipovi okolina $N_k, 1 \leq k \leq k_{max}$

Result: Najbolje pronađeno rešenje optimizacionog problema $\min_x f(x)$

$x \leftarrow inicijalizacija()$;
while *nije zadovoljen kriterijum zaustavljanja* **do**
  $k \leftarrow 1$;
  while $k \leq k_{max}$ **do**
    $x' \leftarrow razmrdavanje(x, N_k(x))$;
    $x'' \leftarrow lokalna\_pretraga(x', N_k(x))$;
    $prelazak\_u\_narednu\_iteraciju(x, x'', k)$;
  end
end
return x

Редукована метода промењљивих околина (енгл. Reduced Variable

Neighbourhood Search, RVNS) се у односу на основну методу променљивих околина разликује по томе што је потпуно изостављена локална претрага. Дакле, у тренутној околини се само бира произвољно решење, не тражи се спуст. Корисна је на великим инстанцама проблема. У пракси се показало да је најбоља вредност за параметар k_{max} најчешће 2 [24]. Као критеријум заустављања се најчешће узима максимални број итерација између два побољшања. Иако веома слична Монте Карло методи, често се показује успешнијом јер на систематичнији начин претражује произвољна решења [24].

Алгоритам 5: Редукована метода променљивих околина

Data: kriterijum zaustavljanja, tipovi okolina $N_k, 1 \leq k \leq k_{max}$
Result: Najbolje pronađeno rešenje optimizacionog problema $\min_x f(x)$

$x \leftarrow inicijalizacija()$;
while *nije zadovoljen kriterijum zaustavljanja* **do**
    $k \leftarrow 1$;
    while $k \leq k_{max}$ **do**
        $x' \leftarrow razmrdavanje(x, N_k(x))$;
        $prelazak\_u\_narednu\_iteraciju(x, x', k)$;
    end
end
return x

Алгоритам 6: Уопштена метода променљивих околина

Data: kriterijum zaustavljanja, tipovi okolina $N_k, 1 \leq k \leq k_{max}$
Result: Najbolje pronađeno rešenje optimizacionog problema $\min_x f(x)$

$x \leftarrow inicijalizacija()$;
while *nije zadovoljen kriterijum zaustavljanja* **do**
    $k \leftarrow 1$;
    while $k \leq k_{max}$ **do**
        $x' \leftarrow razmrdavanje(x, N_k(x))$;
        $x'' \leftarrow vnd(x', N_k(x))$;
        $prelazak\_u\_narednu\_iteraciju(x, x'', k)$;
    end
end
return x

Уопштена метода променљивих околина (енгл. General Variable Neighbourhood Search, GVNS) се од основне разликује по томе што се уместо локалне претраге у свакој итерацији користи метода променљивог супста. Ова варијанта методе променљивих околина је најуспешнија у применама [24].

Дати су псеудокодови наведених варијанти методе променљивих околина у алгоритмима 3, 4, 5 и 6. Начин преласка у наредну итерацију је заједнички за све варијанте и дат је у наставку као алгоритам 7. Уколико је пронађено боље решење, прави се корак у то решење и покреће се претрага околина испочетка, а уколико није пронађено боље решење, наставља се претрага у односу на наредну врсту околине. Иницијализација почетног решења може бити насумична или чешће нека ефикасна похлепна метода. Критеријум заустављања може бити максимално процесорско време, максималан број итерација, максималан број итерација између два побољшања и сл.

Алгоритам 7: Помоћни метод *prelazak_u_narednu_iteraciju*

def *prelazak_u_narednu_iteraciju(x, x', k)*:
  if $f(x') < f(x')$ **then**
    $x \leftarrow x'$;
    $k \leftarrow 1$;
  else
    $k \leftarrow k + 1$;
  end

Метода променљивих околина има бројне успешне примене на дискретне локацијске проблеме у литератури. Међу проблемима дискретне оптимизације проблем p-медијане је играо централну улогу у развоју ове метахеуристике [24], почевши радом [25]. Неки од примера примена методе променљивих околина на локацијске проблеме се могу наћи у [26], [34], [4], [15], [28], [41], [33], [7], [14], [13], [42].

4.1 Предложени алгоритам

У наставку су дати детаљи предложене методе променљивих околина за решавање проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама. Нека је $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ скуп чворова дат на улазу. Репрезентација решења која је коришћена је скуп $H \subset I$, $|H| = p$ чворова који се бирају за хабове. Функција циља се рачуна тако што се прво алоцирају везе модификацијом Флојд-Варшаловог алгоритма за најкраће путеве у графу, у временској сложености $\mathcal{O}(pn^2)$, а потом се саберу трошкови свих алоцираних веза помножени одговарајућим потражњама и параметрима α, δ и χ, у истој временској сложености.

Предлаже се редукована метода променљивих околина са похлепном иницијализацијом почетног решења, три типа угњеждених околина и средњим интезитетом размрдавања. За иницијално решење се узима p чворова са минималном максималном ценом њихове гране. Прецизније, ако са $g(h)$ обележимо максималну цену гране из h,

$$g(h) = \max\{c_{ih} | i \in I, i \neq h\}, \quad h \in I,$$

онда је иницијално решење p чворова са најмањом вредношћу g. Овај метод иницијализације је већ коришћен у литератури, у [42] и [8]. Као основни тип околине предлаже се околина код које су суседи добијени разменом једног хаба и једног обичног чвора. Друга, шира околина, се добија разменом два хаба са два обична чвора. Трећа, најшира околина се добија разменом три хаба. Можемо прецизније дефинисати околине на следећи начин:

$$N_k(H) = \{H' | H' \subset N, |H \cap H'| \geq p - k\}, \quad k \in \{1, 2, 3\}. \tag{6}$$

Ови типови околина су стандардни у литератури за сличне проблеме. На пример, коришћени су такође у [42] и [8]. Под средњим интезитетом размрдавања се подразумева да се при размрдавању не узима потпуно произвољни сусед из околине, већ се из половине околине која је случајно изабрана бира најбоље решење. Критеријум заустављања проверава да ли је број итерација без побољшања већи од 5. У поглављу 5.1 може се наћи више о томе како је извршен избор методе и које алтернативе су тестиране.

Глава 5

Експериментални резултати

Сви експериментални резултати у наставку добијени су на рачунару са 3.0 GHz Intel Scalable процесором и 16 GB RAM меморије. Имплементација је доступна на `https://github.com/marijakatic/VNS_for_UMApHMP`. Кључни делови алгоритма имплементирани су у програмском језику C, док се алгоритми покрећу и подаци обрађују у програмском језику Python.

За тестирање добијених решења коришћен је ORLIB [3] скуп за тестирање, познат у литератури као AP (Australia Post). Добијен је из практичног проблема Аустралијског поштанског система. Највећа инстанца проблема има 200 чворова. Потражња ресурса је несиметрична матрица $[W_{ij}]$, и важи да је $W_{ii} \neq 0$, јер је могуће да пошиљка буде послата на исту адресу са које се шаље.

Резултати добијени предложеном методом упоређени су са резултатима добијеним коришћењем комерцијалног CPLEX решавача на математичкој формулацији проблема (5). CPLEX решавач, верзија 22.1.1.0, је покретан на рачунару са истим карактеристикама као и предложена хеуристика.

5.1 Подешавање параметара алгоритма

Предложена метода за решавање проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама дата у поглављу 4.1 добијена је тестирањем различитих комбинација неколико параметара алгоритма и варијанти методе промењљивих околина. У наставку ће бити дати детаљи експеримента.

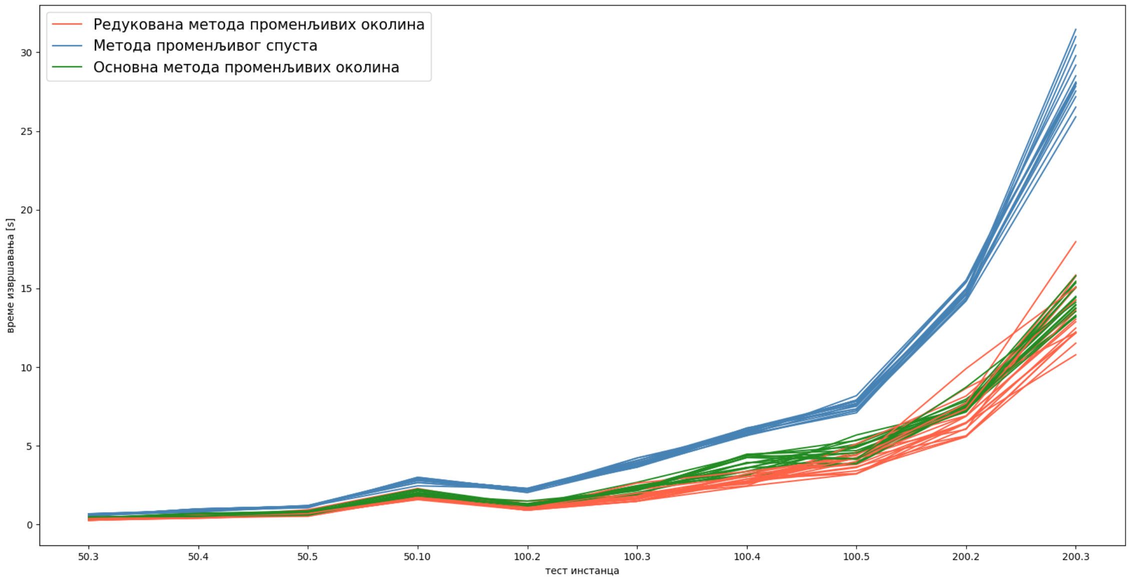
Размотрене су две похлепне варијанте иницијализације почетног решења и насумична (енгл. random) иницијализација ради поређења да ли прве две имају ефекта. Прва варијанта је она која је предложена у 4.1. У другој варијанти иницијализације, нађе се средишња тачка C у односу на све дате чворове, подели се раван на p углова величине $2\pi/p$ са центром у C и из сваког угла се узима по један чвор за хаб, онај који је на средини у односу на удаљеност од C. Уколико неки угао не садржи ни један чвор, што је ретко случај, узима се произвољни чвор уместо тога. Инспирација за овакву иницијализацију је настала тако што је примећено да прва варијанта иницијализације даје хабове који су углавном у центру у односу на мрежу, док су оптимални хабови најчешће разбацани по мрежи.

Размотрено је обично размрдавање и размрдавање различитих интезитета (енгл. intensification vs. diversification) [24]. Метода променљивих околина на улазу добија параметар интензитета размрдавања $r \in [0, 1]$, и он се затим пресликава у целобројну вредност $l \in \{1, 2, \ldots, p\}$ у односу на улазну променљиву p. Размрдавање се врши тако што се из околине узима узорак суседа величине l из којег се бира најбољи сусед. За $l = 1$, тј. $r = 1$, у питању је обично размрдавање. Тестирано је неколико вредности интезитета размрдавања. Прелиминарни резултати су показали да различите вредности из $r \in (0, 1)$ дају слична решења па је у коначном поређењу тестирано $r = 1$ и $r = 0.5$. Размотрене су околине дефинисане у (4.1) до $k_{max} = 3$.

Такође су размотрене три варијанте методе променљивих околина, основна, редукована и метода променљивог спуста. Тестиране су са свим комбинацијама следећих вредности параметара:

- $LS \in [best, first]$ – локална претрага најбољег и првог спуста,
- $r \in [0.5, 1]$ – интезитети размрдавања,
- $k_{max} \in [1, 2, 3]$ – број околина,
- $init \in [rand, grane, ugovi]$ – горе предложени алгоритми иницијализације: $rand$ – насумична иницијализација, $grane$ – избор p хабова са најјефтинијом најскупљом граном, $ugovi$ – подела равни на p углова.

То је за основну методу дало 36 различитих варијанти алгоритма, док је за методу промељивог спуста и редуковану методу дало по 18 варијанти алгоритма.



Слика 3: Поређење варијанти методе промењљивог спуста

На графику 3 је приказано поређење времена извршавања тестираних алгоритама до проналаска оптималног решења у секундама. Јасно се види да се метода промењљивог спуста лошије показује за овај проблем. Види се и да се најбоље показују неки алгоритми редуковане методе промењљивих околина, али да је важно пажљиво одабрати параметре методе. У ту сврху анализирани су подаци добијени покретањем редуковане методе промењљивих околина, дати у табели 1, где су дата времена извршавања алгоритама, до проналаска оптималног решења, у секундама. Једна колона у табели представља једну варијанту алгоритма у односу на изабране параметре r, k_{max} и иницијализацију. Као критеријум ефикастости методе коришћена је средња вредност времена извршавања алгоритма на 16 различитих тест инстанци. Тај податак је дат у последњем реду табеле. Овде је коришћен мањи скуп већих тест инстанци, тачније $n \in \{40, 50, 100, 200\}$, како би средња вредност на различитим инстанцама била добар критеријум. У табели је дато првих осам алгоритама сортираних по средњој вредности времена извршавања. У последњој, деветој колони, дата је најгора варијанта RVNS. Није изненађујуће да се најгоре показала варијанта RVNS методе са параметрима $r = 1$, $k_{max} = 1$ и насумичном иницијализацијом, с обзиром да је све потпуно насумично. На основу ових података изабран је алгоритам из прве колоне табеле за најбољи и предложен у поглављу 4.1.

Занимљиво је још приметити да међу најбољим алгоритмима доминира иницијализација са бирањем чворова са минималним максималним гранама. Са друге стране, примећено је да се код методе променљивог спуста далеко боље показује иницијализација са поделом равни на углове. Док су код основне методе променљивих околина перформансе ове две иницијализације изједначене.

Табела 1: RVNS алгоритми сортирани према средњем времену извршавања

	RVNS								
r:	0.5	1	1	0.5	0.5	1	1	1	1
k_{max}:	3	3	1	1	2	2	3	1	1
init:	*grane*	*grane*	*grane*	*grane*	*grane*	*grane*	*uglovi*	*uglovi*	*rand*
n.p	време извршавања до проналаска оптималног решења [s]								
40.2	0.12	0.15	0.13	0.14	0.15	0.12	0.14	0.13	0.12
40.3	0.2	0.18	0.24	0.27	0.18	0.19	0.26	0.29	0.26
40.4	0.33	0.31	0.46	0.38	0.33	0.43	0.33	0.29	0.31
40.5	0.39	0.44	0.42	0.46	0.42	0.44	0.48	0.44	0.48
40.10	1.19	1.02	1.09	1.02	1.19	1.24	1.23	1.08	1.07
50.2	0.21	0.24	0.2	0.21	0.24	0.2	0.21	0.22	0.24
50.3	0.36	0.44	0.37	0.46	0.4	0.42	0.46	0.45	0.41
50.4	0.62	0.57	0.65	0.69	0.56	0.55	0.66	0.63	0.57
50.5	0.74	0.77	0.74	0.8	0.73	0.8	0.9	0.84	0.77
50.10	2.02	2.03	2.11	2.1	1.95	2.04	2.02	2.42	2.29
100.2	1.28	1.34	1.27	1.27	1.54	1.4	1.28	1.28	1.47
100.3	2.09	2.31	2.2	2.09	2.42	2.09	2.3	2.73	2.30
100.4	3.17	3.77	3.47	3.17	3.17	3.31	3.51	3.61	4.23
100.5	4.78	4.59	5.23	5.48	5.2	4.79	4.59	4.83	5.60
200.2	8.64	8.19	8.19	8.65	8.22	10.34	8.62	9.47	9.90
200.3	14.39	14.38	14.41	14.35	15.12	14.43	16.55	15.81	20.90
ср.вр.	2.53	2.54	2.57	2.59	2.61	2.67	2.72	2.78	3.18

5.2 Коначни резултати

Предложена редукована метода променљивих околина, дата у поглављу 4.1 је тестирана на инстанцама AP скупа за тестирање за $n \in \{10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$ и $p \in \{2, 3, 4, 5, 8, 10, 15, 20, 25, 30\}$. У табели (2) дато је поређење предложене методе и CPLEX решавача на математичкој формулацији (5). У прве две колоне је решење и време извршавања CPLEX решавача, а у наредне три колоне дато је решење, девијација решења од оптималног и време извршавања предложене редуковане методе променљивих околина. У табели се може видети да је предложена метода већ на малим инстанцама 20 до 40 пута ефикаснија од CPLEX решавача, док је на већим инстанцама, за $n = 50$, 300 до 400 пута ефикаснија. Такође, видимо да је на већини инстанци предложена метода пронашла оптимално решење, док је на неколико инстанци девијација до 2.5%. У литератури су већ достигнуте оптималне вредности за све инстанце из табеле 2.

Табела 2: Резултати предложене редуковане методе променљивих околина на малим тест инстанцама AP

n.p	cplex		rvns		
	решење	t[s]	решење	dev[%]	t[s]
10.2	163603.94	0.23	163603.94	0.0	0.01
10.3	131581.79	0.31	131581.79	0.0	0.01
10.4	107354.73	0.26	107354.73	0.0	0.01
10.5	86028.88	0.28	86028.88	0.0	0.01
20.2	168599.79	1.37	168599.79	0.0	0.03
20.3	148048.3	2.0	148048.29	0.0	0.04
20.4	131665.43	1.77	131665.43	0.0	0.06
20.5	118934.97	1.77	118934.97	0.0	0.07
25.2	171298.1	3.43	171298.08	0.0	0.04
25.3	151080.66	4.26	153172.09	1.38	0.07
25.4	135638.58	4.76	135638.58	0.0	0.09
25.5	120581.99	3.43	120581.99	0.0	0.12
40.2	173415.96	24.42	173415.96	0.0	0.12
40.3	155458.61	72.1	159197.6	2.41	0.19
40.4	140682.74	69.48	140682.74	0.0	0.35
40.5	130384.74	61.73	130384.74	0.0	0.41
40.8	109971.92	64.51	110358.25	0.36	0.77
40.10	99452.67	40.81	100345.22	0.9	1.12
50.2	174390.03	82.15	174390.03	0.0	0.2
50.3	156014.73	391.48	156014.73	0.0	0.37
50.4	141153.38	318.4	141153.38	0.0	0.68
50.5	129412.6	234.29	129505.83	0.07	0.79
50.8	109926.6	450.71	110320.04	0.35	1.43
50.10	100508.95	307.66	100644.72	0.14	1.93

У табели (3) дати су резултати предложене методе на великим тест инстанцама. То су тест инстанце за које CPLEX није успео да пронађе решење у временском ограничењу од 4 сата. У првој колони су дата најбоља решења пронађена у литератури, у радовима [40], [30] и [42]. У наредне три колоне дато је решење, девијација решења од оптималног и време извршавања предложене редуковане методе променљивих околина. Видимо да предложена метода достиже оптимална или најбоља позната решења из литературе на 11 тест инстанци, док је за остале инстанце из табеле (3) девијација од најбољег решења мања од 0.01%.

Табела 3: Резултати предложене редуковане методе променљивих околина на великим тест инстанцама AP

n.p	најбоље из литературе	rvns		
		решење	dev[%]	t[s]
100.2	176245.38	176245.38	0.000	1.35
100.3	157869.93	157869.93	0.000	2.3
100.4	143004.31	143004.31	0.000	3.75
100.5	133482.57	133482.57	0.000	6.07
100.8	114295.92	115180.52	0.007	9.53
100.10	104794.05	104794.05	0.000	15.83
100.15	88882.05	89037.18	0.002	27.61
100.20	79191.02	79409.05	0.003	51.56
100.25	-	72164.19	0.000	74.13
100.30	-	67200.95	0.000	104.1
200.2	178093.99	178093.99	0.000	8.26
200.3	159725.11	159725.11	0.000	14.46
200.4	144508.20	144508.20	0.000	40.19
200.5	136761.83	136761.83	0.000	33.78
200.8	117709.98	118322.91	0.005	78.35
200.10	107846.82	107846.82	0.000	122.25
200.15	92646.39	92857.68	0.002	270.54
200.20	83385.94	83385.94	0.000	511.86
200.25	-	77052.07	0.000	781.56
200.30	-	72252.28	0.000	941.56

Како имплементација предложене методе променљивих околина има простора за оптимизацију, на пример кеширање вредности функције циља, наведени резултати показују потенцијал примене методе променљивих околина на решавање проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама.

Глава 6

Закључак

У овом раду је разматрана метода промењљивих околина за решавање проблема p-хаб медијане неограничених капацитета са вишеструким алокацијама. Дат је историјски преглед литературе која се бавила сродним темама и две математичке формулације проблема. Опсежно су тестиране комбинације неколико варијанти методе промељивих околина и различитих параметара алгоритма, и предложена варијанта која је дала најбоља решења на тест инстанцама. Разматрана је нова метода иницијализације решења која је показала потенцијал при коришћењу методе промењивог спуста. Предложена метода промењљивих околина за веома кратко времене достиже позната оптимална решења, а на великим тест инстанцама достиже неколико најбољих решења из литературе.

Како рад детаљно анализира примену различитих варијанти методе промењљивих околина на дати проблем он пружа широку основу за даља истраживања овог и сличних проблема. Правци даљег рада могу бити и техничке и истраживачке природе. Могу се даље побољшати перформансе предложеног решења, на пример кеширањем фукције циља. Могу се детаљније интерпретирати добијени резултати са различитим комбинацијама параметара и донети генерални закључци о корелацији између карактеристика проблема и перформанси хеуристика. Може се предложена метода иницијализације тестирати на сродне проблеме.

Библиографија

[1] Sibel Alumur Alev and Bahar Kara. Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research*, 190:1–21, 10 2008.

[2] Turgut Aykin. Networking policies for hub-and-spoke systems with application to the air transportation system. *Transportation Science*, 29:201–221, 08 1995.

[3] John E. Beasley. Obtaining test problems via internet. *Journal of Global Optimization*, 8(4):429–433, Jun 1996.

[4] Stefano Benati and Pierre Hansen. The maximum capture problem with random utilities: Problem formulation and algorithms. *European Journal of Operational Research*, 143(3):518–530, 2002.

[5] Natashia Boland, Mohan Krishnamoorthy, Andreas Ernst, and Jamie Ebery. Preprocessing and cutting for multiple allocation hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 155:638–653, 06 2004.

[6] Jack Brimberg, Nenad Mladenović, Raca Todosijević, and Dragan Urošević. A basic variable neighborhood search heuristic for the uncapacitated multiple allocation p-hub center problem. *Optimization Letters*, 11(2):313–327, Feb 2017.

[7] Jack Brimberg, Nenad Mladenović, Raca Todosijević, and Dragan Urošević. General variable neighborhood search for the uncapacitated single allocation p-hub center problem. *Optimization Letters*, 11(2):377–388, Feb 2017.

[8] Jack Brimberg, Nenad Mladenovic, Raca Todosijević, and Dragan Urosevic. A basic variable neighborhood search heuristic for the uncapacitated multiple allocation p-hub center problem. *Optimization Letters*, 11, 02 2017.

[9] Jack Brimberg, Raca Todosijević, Dragan Urosevic, and Nenad Mladenovic. Efficient flow models for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem on non-triangular networks. *Computers & Industrial Engineering*, 162:107723, 10 2021.

[10] James Campbell. Location and allocation for distribution systems with transshipments and transportion economies of scale. *Annals of Operations Research*, 40:77–99, 12 1992.

[11] James Campbell. Integer programming formulations of discrete hub location problem. *European Journal of Operational Research*, 72:387–405, 01 1994.

[12] James Campbell. Hub location and the p-hub median problem. *Operations Research*, 44:923–935, 12 1996.

[13] Aleksandar Djenić, Miroslav Marić, Zorica Stanimirović, and Predrag Stanojević. A variable neighbourhood search method for solving the long-term care facility location problem. *IMA Journal of Management Mathematics*, 28(2):321–338, 2017.

[14] Aleksandar Djenić, Nina Radojičić, Miroslav Marić, and Marko Mladenović. Parallel vns for bus terminal location problem. *Applied Soft Computing*, 42:448–458, 2016.

[15] Patricia Domínguez-Marín, Stefan Nickel, Pierre Hansen, and Nenad Mladenović. Heuristic procedures for solving the discrete ordered median problem. *Annals of Operations Research*, 136(1):145–173, Apr 2005.

[16] Andreas T. Ernst and Mohan Krishnamoorthy. Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 104(1):100–112, 1998.

[17] Andreas T. Ernst and Mohan Krishnamoorthy. An exact solution approach based on shortest-paths for p-hub median problems. *INFORMS Journal on Computing*, 10(1):149–162, 1998.

[18] Robert W. Floyd. Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the ACM*, 5:345, 1962.

[19] Sergio García Quiles, Mercedes Landete, and Alfredo Marín. New formulation and a branch-and-cut algorithm for the multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 220:48–57, 07 2012.

[20] Nader Ghaffarinasab. An efficient matheuristic for the robust multiple allocation p-hub median problem under polyhedral demand uncertainty. *Computers & Operations Research*, 97, 05 2018.

[21] Nader Ghaffarinasab. Exact algorithms for the robust uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *Optimization Letters*, 16(6):1745–1772, Jul 2022.

[22] Fred Glover. Tabu search - part 1. *INFORMS Journal on Computing*, 2:4–32, 01 1990.

[23] Ralph E. Gomory. An algorithm for integer solutions to linear programs. 1958.

[24] Pierre Hansen, Nenad Mladenović, and José A. Moreno Pérez. Variable neighbourhood search: methods and applications. *4OR*, 6(4):319–360, Dec 2008.

[25] Pierre Hansen and Nenad Mladenović. Variable neighborhood search for the p-median. *Location Science*, 5(4):207–226, 1997.

[26] Alain Hertz and Michel Mittaz. A variable neighborhood descent algorithm for the undirected capacitated arc routing problem. *Transportation Science*, 35:425–434, 11 2001.

[27] John H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. Bradford book. MIT Press, 1992.

[28] Aleksandar Ilić, Dragan Urošević, Jack Brimberg, and Nenad Mladenović. A general variable neighborhood search for solving the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research*, 206(2):289–300, 2010.

[29] Bahar Kara. Modeling and analysis of issues in hub location problem. *Ph.D. Thesis, Bilkent University, Industrial Engineering Department, Bilkent, Ankara, Turkey*, 1999.

[30] Jozef Kratica. An electromagnetism-like metaheuristic for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *Computers & Industrial Engineering*, 66(4):1015–1024, 2013.

[31] Ailsa H. Land and Alison G. Doig. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3):497–520, 1960.

[32] Marija Milanović. A new evolutionary based approach for solving the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. In *Soft Computing in Industrial Applications*, pages 81–88, Berlin, Heidelberg, 2010. Springer Berlin Heidelberg.

[33] Stefan Mišković, Zorica Stanimirović, and Igor Grujičić. An efficient variable neighborhood search for solving a robust dynamic facility location problem in emergency service network. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 47:261–268, 2015.

[34] Nenad Mladenovic, Martine Labbé, and Pierre Hansen. Solving the p-center problem with tabu search and variable neighborhood search. *Networks*, 42:48–64, 08 2003.

[35] Nenad Mladenović and Pierre Hansen. Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, 24(11):1097–1100, 1997.

[36] John Mulvey, Robert Vanderbei, and Stavros Zenios. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, 43:264–281, 04 1995.

[37] Manfred Padberg and Giovanni Rinaldi. A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, 33(1):60–100, 1991.

[38] Mihiro Sasaki, Atsuo Suzuki, and Zvi Drezner. On the selection of hub airports for an airline hub-and-spoke system. *Computers & Operations Research*, 26(14):1411–1422, 1999.

[39] Darko Skorin-Kapov, Jadranka Skorin-Kapov, and Morton O'Kelly. Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems. *European Journal of Operational Research*, 94:582–593, 04 1996.

[40] Zorica Stanimirović. An efficient genetic algorithm for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *Control and Cybernetics*, 37, 01 2008.

[41] Zorica Stanimirović, Miroslav Marić, Nina Radojicic, and Srdjan Božović. Two efficient hybrid metaheuristic methods for solving the load balance problem. *Applied and computational mathematics*, 13:332–349, 10 2014.

[42] El-Ghazali Talbi and Raca Todosijević. The robust uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *Computers & Industrial Engineering*, 110, 06 2017.

[43] Stephen Warshall. A theorem on boolean matrices. *J. ACM*, 9:11–12, 1962.