

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

САЊА ПРИБАНОВИЋ

ГЕОМЕТРИЈА КОМПЛЕКСНИХ ПОЛИНОМА

• МАСТЕР РАД •

Београд, 2023.

МЕНТОР

- др Бобан Карапетровић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

ОСТАЛИ ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

- др Владимир Божин, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду
- др Миљан Кнежевић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Садржај

Увод	i
1 Основна тврђења и Основна теорема алгебре	1
2 Конвексни скупови и Гаус-Лукасова теорема	10
3 Реални полиноми и Јенсенова теорема	16
4 Теорема Грејса о аполарним полиномима	21
4.1 Кружни домени и поларни изводи	21
4.2 Лагерова теорема, њене варијације и примена	23
4.3 Аполарност полинома	27
4.4 Грејсова теорема	32
5 Комплексни аналог Ролове теореме	35
Литература	38
Списак симбола	39

Увод

Најважнији проблем теорије комплексних полинома је проналажење нула и критичних тачака датог полинома, односно, проналажење региона у комплексној равни који садржи одређени број нула или критичних тачака датог полинома. Основни циљ рада је презентовање основних резултата који се односе на геометрију полинома у комплексној равни, међу којима су базна варијанта Гаус-Лукасове теореме, као и теорема Грејса о аполарним полиномима.

У првом поглављу овог рада дата су нека основна тврђења и Основна теорема алгебре, као и Принцип аргумената и Теорема о непрекидности, које ћемо користити у даљем раду.

Један од основних резултата у овој области представља Гаус-Лукасова теорема, која каже да све нуле првог извода (критичне тачке) неконстантног полинома у комплексној равни припадају конвексном омотачу који формирају нуле тог полинома. Постоји много уопштења претходне теореме. О томе ће бити речи у другом поглављу овог рада. Пре тога дефинисаћемо конвексне скупе у комплексној равни, конвексни омотач и најмањи конвексан скуп.

Поред тога, за полиноме са реалним коефицијентима могуће је извести још неколико додатних закључака о њиховим критичним тачкама, користећи Јенсенове дискове и Јенсенову теорему о критичним тачкама. Јенсенова теорема и њен доказ доводи до разних занимљивих последица, које ће бити наведене уз теорему у трећем поглављу.

Такође, конвексни омотачи нула два аполарна полинома у комплексној равни не могу бити дисјунктни, што представља директну последицу познате теореме Грејса о аполарним полиномима, која је један од централних резултата у овој области. У четвртном поглављу, ће бити речи о кружним доменима и поларним изводима. Користећи ознаке за кружне домене, могу се констатовати еквивалентне формулације Гаус-Лукасове теореме. Једна од њих је и Лагерова теорема, која даље имплицира корисну репрезентацију за логаритамски извод полинома.

Последњи део рада посветићемо занимљивој Грејс-Хивудовој теорему, која је комплексни аналог Ролове теореме. Од великог је значаја утврдити концентричан диск, такав да полином не може имати исту вредност у било које две тачке тог диска. То нас доводи до довољно корисног услова да полином буде једновалентан на диску, што нам говори теорема Какеја.

На крају, желим да се захвалим ментору, професору др Бобану Карапетровићу, на великој помоћи током израде рада и веома корисним саветима. Такође, захваљујем се и члановима комисије на корисним примедбама и сугестијама које су допринеле бољем квалитету рада.

Сања Прибавић

Глава 1

Основна тврђења и Основна теорема алгебре

Теорема 1.1 (Ролова теорема) Нека је f реална функција, непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$, диференцијабилна на отвореном интервалу (a, b) , при чему је $f(a) = f(b)$, тада постоји бар једна тачка ξ из отвореног интервала (a, b) , таква да је $f'(\xi) = 0$.

Доказ. Функција $f(x)$ достиже највећу и најмању вредност на $[a, b]$. Нека је

$$M = \max_{a \leq x \leq b} f(x) \quad \text{и} \quad m = \min_{a \leq x \leq b} f(x).$$

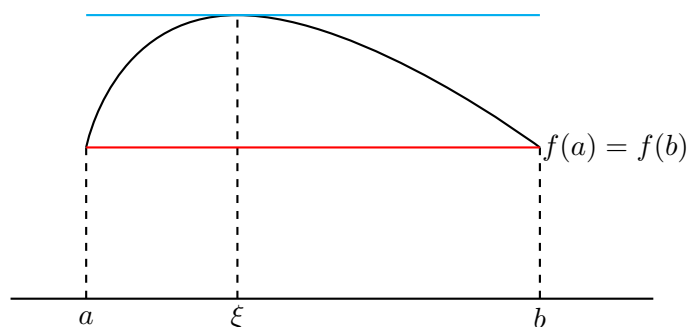
Дакле

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Ако је $m = M$, функција $f(x)$ је константна и за ξ можемо узети било коју тачку интервала (a, b) . Ако је $m \neq M$, тада је $f(a) = f(b) > m$ или $f(a) = f(b) < M$.

Нека је $f(a) = f(b) < M$. Постоји бар једна тачка $\xi \in (a, b)$, таква да је $f(\xi) = M$, што значи да у тачки ξ функција f има локални максимум.

На основу Фермаове теореме је $f'(\xi) = 0$. Случај када је $f(a) = f(b) > m$ разматра се на сличан начин. ■



Слика 1.1: Геометријска интерпретација Ролове теореме: Ако функција задовољава услове теореме, тада постоји тачка ξ , у интервалу (a, b) , таква да је тангента функције у тој тачки водоравна.

Напомена 1.1 (Фермаова теорема) Ако функција $f(x)$ има локални екстремум у тачки $x_0 \in (a, b)$ и диференцијабилна је у тој тачки, онда $f'(x_0) = 0$.

Доказ. Нека, на пример, функција $f(x)$ има локални максимум у тачки $x_0 \in (a, b)$. Тада за $x_0 < x < x_0 + \delta$ важи $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, одакле следи

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (1.1)$$

Такође за $x_0 - \delta < x < x_0$ налазимо $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ и

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) добијамо $f'(x_0) = 0$. ■

Нека је $[a, b]$ сегмент на реалној правој.

Дефиниција 1.1 Нека је $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ дата непрекидна функција. Тада је

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) dt.$$

Лема 1.1 Нека је $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција. Тада важи

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Доказ. Користећи поларну форму комплексног броја, имамо

$$\int_a^b \varphi(t) dt = r e^{i\theta},$$

за неке $r \geq 0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$. Тада

$$\begin{aligned} \underbrace{\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|}_{\in \mathbb{R}} &= r = e^{-i\theta} r e^{i\theta} = e^{-i\theta} \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \varphi(t) \right) dt + \underbrace{i \int_a^b \operatorname{Im} \left(e^{-i\theta} \varphi(t) \right) dt}_{=0, \text{ лева страна је реалан број}} \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \varphi(t) \right) dt \\ &\leq \int_a^b \left| e^{-i\theta} \varphi(t) \right| dt \\ &= \int_a^b |\varphi(t)| dt, \end{aligned}$$

што је и требало показати. ■

Дефиниција 1.2 Непрекидно пресликавање $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ је **крива** у области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Ако је пресликавање $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ непрекидно диференцијабилно, тада је γ **глатка крива**.

Крива $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ је **део по део глатка** ако постоји подела $a < c_1 < \dots < c_n < b$ сегмента $[a, b]$, тако да је γ непрекидно диференцијабилна на сегментима $[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_n, b]$.

Део по део глатка крива је **контура**. Ако је $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ контура и $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ за све $t \in [a, b]$, тада је

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad \text{дужина контуре } \gamma$$

Крива $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ је затворена ако важи $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Дефиниција 1.3 Нека $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ контура у области Ω у комплексној равни и нека је $f \in C(\Omega)$. Тада је

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

И још

$$\int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \ell(\gamma) \quad \text{дужина контуре } \gamma.$$

Теорема 1.2 (Основна интегрална неједнакост) Нека је γ контура у области Ω у комплексној равни и нека је $f \in C(\Omega)$. Тада важи

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Доказ. Нека је $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ контура. Користећи Лему 1.1

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$$

лако доказујемо ово тврђење. ■

Теорема 1.3 (Кошијева интегрална формула) Нека је функција f холоморфна у неком отвореном скупу који садржи затворење ограничене области Ω , чија је граница $\partial\Omega$ дисјунктна унија коначно много простих, затворених контура, које су позитивно орјентисане и нека је $z \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}_0$. Тада важи

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw. \quad \text{■}$$

Теорема 1.4 (Тејлоров развој) Нека је функција $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D}(z_0; R))$. Тада, за све

$z \in \mathcal{D}(z_0; R)$, важи $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, где је

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{D}(z_0; r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

за све $n \in \mathbb{N}_0$ и $0 < r < R$. ■

Теорема 1.5 (Лиувилова теорема) *Нека је $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ цела и ограничена функција. Тада је f константна функција.*

Доказ. Ако је f цела и ограничена функција, тада постоји ненегативна константа M , таква да је $|f(z)| \leq M$ за све $z \in \mathbb{C}$. Хоћемо да докажемо да је f степена не већег од 0. Како је f холоморфна у комплексној равни, представимо је у облику

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

где је $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ за све $n \in \mathbb{N}$ (Тејлоров развој). Нека је γ_r позитивно орјентисана кружница са центром у тачки 0, полупречника r и $n \in \mathbb{N}$. Применом Кошијеve интегралне формуле и Основне интегралне неједнакости добијамо да важи

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{M}{|z|^{n+1}} |dz| \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot \ell(\gamma_r) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{M}{r^n}. \end{aligned}$$

Пошто је $n \geq 1$ онда важи

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Следи да је $a_n = 0$ за све $n \geq 1$, односно $f(z) = a_0$. Према томе, добијамо да је f константна функција, што смо и желели да докажемо. ■

Теорема 1.6 (Основна теорема алгебре) *Сваки неконстантан полином има нулу у комплексној равни.*

Доказ. Нека је f неконстантан полином у комплексној равни. Следи $f(z) \rightarrow \infty$ када $z \rightarrow \infty$. Тада постоји $R > 0$ тако да важи

$$|f(z)| > |f(0)| \quad \text{за све} \quad |z| > R.$$

Треба да докажемо да мора бити $f(z_0) = 0$. Па претпоставимо супротно, да f нема нуле у $\mathbb{C}$. Тј. да $f(z_0) \neq 0$. Развојем полинома f степена $n \geq 1$ у односу на тачку z_0 добијамо

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{j=k}^n a_j (z - z_0)^j,$$

где је $1 \leq k \leq n$ природан број и $a_k \neq 0$, при чему такав ненулти коефицијент мора постојати, јер је f неконстантан полином. Тада важи $\frac{-f(z_0)}{a_k} \in \mathbb{C}^\times$, што значи да је

$$\frac{-f(z_0)}{a_k} = r e^{i\theta}$$

за неке $r > 0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$. Означимо са

$$\omega = \sqrt[k]{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{k}}.$$

Можемо одабрати довољно мало $\varepsilon > 0$, тако да су следећи услови испуњени

$$z_0 + \omega\varepsilon \in \mathcal{D}(0; R), \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=k+1}^n |a_j \omega^j| \varepsilon^{j-k} < |f(z_0)|.$$

Тада је

$$f(z_0 + \omega\varepsilon) = f(z_0) + \sum_{j=k}^n a_j (\omega\varepsilon)^j = (1 - \varepsilon^k) f(z_0) + \sum_{j=k+1}^n a_j \omega^j \varepsilon^j.$$

Након тога добијамо

$$\begin{aligned} |f(z_0)| \leq |f(z_0 + \omega\varepsilon)| &= \left| \left(1 - \varepsilon^k\right) f(z_0) + \sum_{j=k+1}^n a_j \omega^j \varepsilon^j \right| \\ &\leq \left(1 - \varepsilon^k\right) |f(z_0)| + \sum_{j=k+1}^n |a_j \omega^j| \varepsilon^j \\ &= |f(z_0)| - \left(|f(z_0)| - \sum_{j=k+1}^n |a_j \omega^j| \varepsilon^{j-k} \right) \varepsilon^k \\ &< |f(z_0)|, \end{aligned}$$

што је контрадикција. Па важи $f(z_0) = 0$, а то је у ствари и требало доказати. ■

Напомена 1.2 Основну теорему алгебре можемо доказати и на следећи начин.

Доказ. Нека је $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ и $n \geq 1$. Важи $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, па постоји $R > 0$ тако да $|z| > R$, одакле следи да $|f(z)| \geq 1$.

Претпоставимо супротно, да полином $f(z)$ нема нуле у комплексној равни. Нека је $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ добро дефинисана, цела и неконстантна функција. Тада је $M = \max_{\overline{\mathcal{D}(0; R)}} |g|$

и још за $|z| > R$ важи $|g(z)| \leq 1$. Према томе $|g(z)| \leq \max\{M, 1\}$ за све $z \in \mathbb{C}$. Сада на основу Лиувилове теореме следи да је g константна, а то је контрадикција. Закључујемо да полином f има нуле у комплексној равни. ■

Применом Теореме 1.6, Основне теореме алгебре, може се закључити да полином $f(z)$ степена $n \in \mathbb{N}$ има тачно n нула у комплексној равни $\mathbb{C}$, укључујући и вишеструкости. Наиме, на основу Теореме 1.6, полином $f(z)$ има нулу $z_1 \in \mathbb{C}$, што значи да постоји полином $g(z)$ степена $n - 1$, такав да је $f(z) = (z - z_1)g(z)$. Индуктивно настављајући претходни поступак долазимо до следећег закључка.

Теорема 1.7 Сваки полином f степена $n > 0$ има укупно n комплексних нула и може се представити као

$$f(z) = a_n \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{m_j},$$

где је $a_n \neq 0$, $z_1, \dots, z_k$ различите нуле и $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ такви да $m_1 + \dots + m_k = n$. ■

У погледу ове теореме јављају се следећи проблеми за полином f .

Проблем 1 Колико нула полинома f је садржано у подскупу комплексне равни, Ω ?

Проблем 2 Одређивање подскупа од $\mathbb{C}$ који садржи најмање m нула полинома f , где је m цео број и $1 \leq m \leq \deg f$.

Одговор на Проблем 1, садржан је у следећој теорему. Навешћемо је у најопштијем облику.

Теорема 1.8 (Принцип аргумената) Нека је γ позитивно орјентисана Жорданова крива у комплексној равни и нека је f рационална функција дефинисана у домену који садржи γ и њену унутрашњост. Претпоставимо да γ не садржи ни нуле, нити полове функције f . Нека се z креће по γ у позитивном смеру. Онда

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = 2\pi(m - \ell),$$

где је m број нула, а ℓ број полова који леже у унутрашњости криве γ узимајући у обзир и њихове вишеструкости, при чему је $\Delta_\gamma \arg f(z)$ је прираштај аргумента функције f дуж криве γ .

Доказ. Узмимо почетну тачку a на кривој γ и изаберимо $\arg(z - \zeta)$ у довољно малој околини тачке a . Тада, како се z креће по γ у позитивном смеру, прираштај $\arg(z - \zeta)$ тежи 2π ако ζ лежи унутар γ , али је нула ако лежи изван γ .

Рационалну функцију можемо записати као $f = \frac{P}{Q}$, где су P и Q полиноми без заједничке нуле. Онда је

$$\arg f(z) = \arg P(z) - \arg Q(z).$$

Ако изоставимо тривијалан случај где је P константно, из Теореме 1.7 добијамо

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{m_j},$$

из чега следи

$$\arg P(z) = \arg a_n + \sum_{j=1}^k m_j \arg(z - z_j).$$

Слично, добијамо и за $\arg Q(z)$. Из претходног лако долазимо до жељеног резултата. ■

Претпоставимо да полином f има m нула модула који не прелазе r . Тада у геометријској интерпретацији диск $\overline{D}(0; r)$ садржи m нула. Дакле, следећа теорема даје решење претходно наведеног проблема 2.

Теорема 1.9 Нека је

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}$$

монични полином степена n и нека је $m \in \mathbb{N}$ тако да $m \leq n$. Тада f има најмање m нула модула који не прелазе

$$2 \max_{0 \leq \mu \leq m-1} |a_{\mu}|^{\frac{1}{n-\mu}}.$$

Доказ. Прво докажимо слабије тврђење. Нека f припада класи $\mathcal{M}_{m,n}$ која се састоји од моничних полинома облика $\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu}$ степена n за које $|a_{\mu}| \leq 1$, где $\mu = 0, \dots, m-1$.

Поредећи нуле z_{ν} полинома f као $|z_1| \leq \dots \leq |z_n|$, тврдимо да $|z_m| \leq 2$.

Да докажемо ово, настављамо на следећи начин. Претпоставимо да $|z_{m+1}| > 2$, што је једини нетривијални случај. Желимо да издвојимо нуле $z_{m+1}, \dots, z_n$. Нека је ζ једна од њих и дефинишимо

$$g(z) := \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu} z^{\nu} := \frac{f(z)}{z - \zeta} \quad \text{и} \quad b_{-1} := b_n := 0.$$

Тада, изједначавајући коефицијенте, налазимо да $a_{\nu} = -\zeta b_{\nu} + b_{\nu-1}$, за $\nu = 0, \dots, n$. Из овога закључујемо да

$$b_j = - \sum_{\nu=0}^j \frac{a_{\nu}}{\zeta^{j-\nu+1}} \quad (j = 0, \dots, n-2),$$

такође, на основу наше претпоставке

$$|b_{\mu}| \leq \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{|a_{\nu}|}{2^{\mu-\nu+1}} \leq \sum_{l=1}^{\mu+1} 2^{-l} < 1 \quad (\mu = 0, \dots, m-1).$$

Стога $g \in \mathcal{M}_{m,n-1}$. Понављајући овај процес, видимо да

$$h(z) := \sum_{\nu=0}^m c_{\nu} z^{\nu} := \frac{f(z)}{(z - z_{m+1}) \dots (z - z_n)} \quad (c_m = 1)$$

припада $\mathcal{M}_{m,m}$.

Даље, нека је w нула од h . Тада

$$w^m = - \sum_{\nu=0}^{m-1} c_{\nu} w^{\nu}.$$

Према томе, у случају где је $|w| > 1$, имамо

$$|w| \leq \sum_{\nu=0}^{m-1} |c_{\nu}| \cdot |w|^{\nu-m+1} \leq \sum_{l=0}^{\infty} |w|^{-l} = \frac{1}{1 - |w|^{-1}},$$

што повлачи да је $|w| \leq 2$. Дакле, у било ком случају, $|z_m| \leq 2$. Закључујемо да је тврђење о полиномима класе $\mathcal{M}_{m,n}$ потврђено.

Изјава теореме се сада лако изводи. Нека је

$$\lambda := \max_{0 \leq \mu \leq m-1} |a_{\mu}|^{\frac{1}{n-\mu}}$$

и изостављајући тривијалан случај, претпоставимо да је $\lambda > 0$. Тада

$$\Phi(z) := \lambda^{-n} f(\lambda z)$$

припада $\mathcal{M}_{m,n}$. Дакле, Φ има најмање m нула модула који не прелазе 2, самим тим f има најмање m нула модула који не прелазе 2λ . ■

Теорема 1.10 (О непрекидности) *Нека је*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu} = \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{m_j} \quad (m_1 + \dots + m_k = n)$$

моничан полином степена n , са различитим нулама $z_1, \dots, z_n$ вишеструкости $m_1, \dots, m_k$. Тада, ако је $\varepsilon > 0$ одабрано тако да

$$\varepsilon < \min_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|z_i - z_j|}{2},$$

онда постоји δ такво да било који моничан полином $g(z) = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu} z^{\nu}$ чији коефицијенти задовољавају $|b_{\nu} - a_{\nu}| < \delta$, за $\nu = 0, \dots, n-1$, има тачно m_j нула у диску

$$\mathcal{D}(z_j; \varepsilon) \quad (j = 1, \dots, k).$$

Доказ. Нека су f и g дати тако да

$$f(z + z_j) := f_j(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}^{[j]} z^{\nu} \quad \text{и} \quad g(z + z_j) := g_j(z) = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu}^{[j]} z^{\nu},$$

где

$$a_{\nu}^{[j]} = \sum_{k=\nu}^n \binom{k}{\nu} a_k z_j^{k-\nu}, \quad b_{\nu}^{[j]} = \sum_{k=\nu}^n \binom{k}{\nu} b_k z_j^{k-\nu} \quad (\nu = 0, \dots, n-1)$$

и $a_n^{[j]} = a_n = b_n = b_n^{[j]} = 1$. У наставку, како је z_j нула полинома f вишеструкости m_j , имамо $a_0^{[j]} = \dots = a_{m_j-1}^{[j]} = 0$ и тако

$$b_{\mu}^{[j]} = b_{\mu}^{[j]} - a_{\mu}^{[j]} = \sum_{k=\mu}^{n-1} \binom{k}{\mu} (b_k - a_k) z_j^{k-\mu} \quad (\mu = 0, \dots, m_j - 1).$$

Сада, примењујући Теорему 1.9 на g_j за $m = m_j$ и уводећи

$$\rho_j := 2 \max_{0 \leq \mu \leq m_j-1} \left(\sum_{k=\mu}^{n-1} \binom{k}{\mu} |b_k - a_k| \cdot |z_j|^{k-\mu} \right)^{\frac{1}{n-\mu}},$$

налазимо да $\mathcal{D}_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_j| \leq \rho_j\}$ садржи најмање m_j нула од g . Избором довољно малог δ , радијуси ρ_j могу бити направљени тако да буду мањи од ε . Тада су дискови $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ дисјунктни. Самим тим, закључујемо да $\mathcal{D}_j$ садржи тачно m_j нула полинома g . ■

Теорема 1.11 Нека су f и g полиноми такви да $|f(x)| \leq |g(x)|$ за све $x \in \mathbb{R}$. Претпоставимо да g има све своје нуле у затвореној горњој полуравни.

Тада $|f(z)| \leq |g(z)|$ за $\operatorname{Im} z \leq 0$. Штавише, једнакост се постиже у тачки из доње полуравни ако и само ако $f(z) \equiv e^{i\theta} g(z)$ за неко $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказ. Нека је $f = d \cdot f_1$ и $g = d \cdot g_1$, где је d највећи заједнички моничан делилац полинома f и g . Тада $|f_1(x)| \leq |g_1(x)|$ за све $x \in \mathbb{R}$. Стога, $g_1(x) \neq 0$ за $x \in \mathbb{R}$ и $\deg f_1 \leq \deg g_1$. Штавише, ако запишемо

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu \quad \text{и} \quad g_1(z) = \sum_{\nu=0}^n b_\nu z^\nu$$

где је $b_n \neq 0$, долазимо до закључка да је $|a_n| \leq |b_n|$.

Да докажемо теорему, треба да покажемо да, ако $|f_1(\zeta)| \geq |g_1(\zeta)|$ у тачки ζ за $\operatorname{Im} \zeta < 0$, онда $f_1(z) \equiv e^{i\theta} g_1(z)$. За овај закључак, довољно је да покажемо да је полином

$$h(z) := g_1(z)f_1(\zeta) - f_1(z)g_1(\zeta)$$

идентички једнак нули. Претпоставимо супротно, $h(z) \not\equiv 0$, за $|f_1(\zeta)| \geq |g_1(\zeta)|$. Онда постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ тако да $h(\lambda) \neq 0$. Посматрајмо сада фамилију полинома

$$F(t, z) := \frac{z^n [g_1(z^{-1} + \lambda)f_1(\zeta) - tf_1(z^{-1} + \lambda)g_1(\zeta)]}{g_1(\lambda)f_1(\zeta) - tf_1(\lambda)g_1(\zeta)} \quad (t \in [0, 1]).$$

Приметимо да је $F(t, z)$ моничан полином степена n у тачки z , и, за $t \in [0, 1]$ именилац не нестаје. Штавише, пресликавања

$$\varphi : z \rightarrow \frac{1}{z - \lambda} \quad \text{и} \quad \varphi^{-1} : z \rightarrow z^{-1} + \lambda$$

су бијекције проширене комплексне равни $\widehat{\mathbb{C}}$ које пресликавају $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ у себе, горњу полураван у доњу, и обрнуто. Стога $F(0, \cdot)$ има све своје нуле у доњој полуравни, док $F(1, \cdot)$ нестаје у $(\zeta - \lambda)^{-1}$, што је тачка у горњој полуравни. По Теорему 1.10, најмање једна нула мора сећи реалну праву кад t иде од 0 до 1. Дакле, постоје $t^* \in (0, 1)$ и $x^* \in \mathbb{R}$ такви да $F(t^*, x^*) = 0$. Одавде следи да

$$|g_1((x^*)^{-1} + \lambda)| < |f_1((x^*)^{-1} + \lambda)| \quad \text{ако} \quad x^* \neq 0$$

и $|b_n| < |a_n|$ ако је $x^* = 0$. У оба случаја имамо контрадикцију. ■

Глава 2

Конвексни скупови и Гаус-Лукасова теорема

Дефиниција 2.1 (Конвексни скупови у комплексној равни) Скуп $K \subset \mathbb{C}$ је конвексан ако за сваке две тачке $z_1, z_2 \in K$ и за свако $t \in [0, 1]$ важи:

$$(1-t)z_1 + tz_2 \in K.$$

Лема 2.1 Ако је $K \subset \mathbb{C}$ конвексан скуп, $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_n \in K$ и $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, при чему је $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, тада важи:

$$\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n \in K.$$

Доказ. Проверавамо да ли тврђење важи за $n = 1$. Нека су $z_1, z_2 \in K$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ при чему су $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, следи $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$. Тада, како је $\lambda_2 \in [0, 1]$, по Дефиницији 2.1 важи:

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = (1 - \lambda_2)z_1 + \lambda_2 z_2 \in K.$$

Сада, претпоставимо да тврђење важи за n . Докажимо да важи за $n + 1$. Нека су $z_1, \dots, z_{n+1} \in K$ и $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$, при чему је $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n + 1$. Означимо

$$\Lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Тада је $\Lambda \in [0, 1]$ и $\Lambda + \lambda_{n+1} = 1$. Ако је $\Lambda = 0$, тада је $\lambda_{n+1} = 1$ и следи да важи $\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n + \lambda_{n+1} z_{n+1} = 0 + 1 \cdot z_{n+1} = z_{n+1} \in K$. Па претпоставимо да је $\Lambda \in (0, 1]$. Тада важи:

$$\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_{n+1} z_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{\Lambda} z_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\Lambda} z_n \right) + \lambda_{n+1} z_{n+1} \in K,$$

јер је K конвексан и $\frac{\lambda_1}{\Lambda} z_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\Lambda} z_n \in K$ по индуктивној претпоставци, имајући у виду да је $\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\Lambda} = 1$.

По принципу математичке индукције доказујемо да тврђење важи за све $n \in \mathbb{N}$. ■

Ово тврђење заправо значи да су конвексни скупови затворени за конвексне комбинације својих елемената.

Дефиниција 2.2 (Конвексан омотач) Конвексан омотач скупа $S \subset \mathbb{C}$ се дефинише на следећи начин:

$$\mathcal{C}(S) = \bigcap \{K : K \text{ је конвексан скуп и } S \subset K\}.$$

Лема 2.2 (Најмањи конвексан скуп) Конвексан омотач неког скупа у комплексној равни је најмањи конвексан скуп који га садржи.

Доказ. Нека су $z_1, z_2 \in \mathcal{C}(S)$ и $t \in [0, 1]$ произвољни. Нека је $K \supset S$ конвексан скуп. Тада су $z_1, z_2 \in K$, па важи $(1-t)z_1 + tz_2 \in K$ по Дефиницији 2.1. Како ово важи за сваки конвексан скуп $K \supset S$, следи да је $(1-t)z_1 + tz_2 \in \mathcal{C}(S)$. Закључујемо да је $\mathcal{C}(S)$ конвексан скуп. ■

Теорема 2.1 (Гаус-Лукасова) Све нуле првог извода неконстантног полинома у комплексној равни припадају конвексном омотачу који формирају нуле тог полинома.

Доказ. Нека је $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ полином у комплексној равни, где је $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Хоћемо да докажемо да све нуле полинома $f'(z)$ припадају конвексном омотачу нула полинома $f(z)$. Нека су $z_1, \dots, z_n$ све нуле, рачунајући и вишеструкости, полинома $f(z)$ у комплексној равни. Нека је $S = \{z_1, \dots, z_n\}$, $\mathcal{C}(S)$ одговарајући конвексан омотач и α нула полинома $f'(z)$. Ако је $f(\alpha) = 0$, тада важи $\alpha \in S \subset \mathcal{C}(S)$. Претпоставимо да је $f(\alpha) \neq 0$. Приметимо да важи:

$$f(z) = a_n \prod_{j=1}^n (z - z_j),$$

отуда

$$f'(z) = a_n \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (z - z_j).$$

Следи да је

$$0 = \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{a_n \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (\alpha - z_j)}{a_n \prod_{j=1}^n (\alpha - z_j)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha - z_k}. \quad (2.1)$$

Конјуговањем претходне једнакости (2.1), добија се

$$0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\overline{\alpha - z_k}} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha - z_k}{|\alpha - z_k|^2},$$

одатле важи

$$\alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{|\alpha - z_k|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|\alpha - z_k|^2} z_k.$$

Коначно, нека је

$$\lambda_j = \frac{\frac{1}{|\alpha - z_j|^2}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{|\alpha - z_k|^2}} \geq 0,$$

за све $j = 1, \dots, n$. Сада, директно следи $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, па важи да је

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \in \mathcal{C}(S),$$

јер је $\mathcal{C}(S)$ конвексан скуп. ■

Лема 2.3 *Нека су f и g полиноми такви да $|f(x)| \leq |g(x)|$ за све $x \in \mathbb{R}$. Ако g има све своје нуле у затвореној горњој полуравни, онда $|f'(z)| \leq |g'(z)|$ за $\operatorname{Im} z \leq 0$.*

Доказ. Под претпоставком леме, закључујемо да $|f(z)| \leq |g(z)|$ за $\operatorname{Im} z \leq 0$, на основу Теореме 1.11. Како је $g(z) \neq 0$ у отвореној доњој полуравни $\mathcal{H}_L$, следи да, за било који комплексни број λ модула већег од 1, полином

$$h_\lambda(z) := f(z) - \lambda g(z)$$

не нестаје у $\mathcal{H}_L$. Дакле, он има своје нуле у затвореној горњој полуравни $\overline{\mathcal{H}}_U$. По Гаус-Лукасовој теореме, све нуле полинома h'_λ такође леже у $\overline{\mathcal{H}}_U$. Стога, $f'(z) \neq \lambda g'(z)$ кад год је $z \in \mathcal{H}_L$ и $|\lambda| > 1$. Ово је могуће једино ако је $|f'(z)| \leq |g'(z)|$ за $z \in \mathcal{H}_L$, и, свакако, за $\operatorname{Im} z \leq 0$ по непрекидности. ■

Лема 2.4 *Нека је $\mathcal{K}(S)$ скуп свих конвексних комбинација елемената скупа S . Тада је и $\mathcal{K}(S)$ један конвексан скуп.*

Доказ. Дакле, нека је $\mathcal{K}(S)$ скуп елемената облика

$$\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n,$$

за све $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_n \in S$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, при чему је $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.

Узмимо произвољне $z, w \in \mathcal{K}(S)$ и $t \in [0, 1]$. Следи

$$z = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \quad \text{и} \quad w = \sum_{i=1}^m \mu_i w_i,$$

за неке $n, m \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m \in S$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, где је $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ и $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$. Тада је

$$(1-t)z + tw = \sum_{j=1}^n (1-t)\lambda_j z_j + \sum_{i=1}^m t\mu_i w_i,$$

при чему важи

$$\sum_{j=1}^n (1-t)\lambda_j + \sum_{i=1}^m t\mu_i = (1-t) \sum_{j=1}^n \lambda_j + t \sum_{i=1}^m \mu_i = 1-t+t=1,$$

што директно повлачи $(1-t)z + tw \in \mathcal{K}(S)$. Према томе, $\mathcal{K}(S)$ је заиста конвексан скуп. ■

Последица 2.1 *Конвексан омотач $\mathcal{C}(S)$ скупа S је заправо скуп свих конвексних комбинација елемената тог скупа. Дакле, важи*

$$\mathcal{C}(S) = \mathcal{K}(S).$$

Доказ. Будући да је $\mathcal{C}(S)$ конвексан скуп који садржи S , он садржи и све конвексне комбинације елемената тог скупа, јер су конвексни скупови затворени за конвексне комбинације својих елемената. Па је $\mathcal{C}(S) \supset \mathcal{K}(S)$. Са друге стране, у Лему 2.4 смо показали да је $\mathcal{K}(S)$ конвексан скуп и $\mathcal{K}(S) \supset S$. Како је $\mathcal{C}(S)$ најмањи конвексан скуп који садржи S , следи да је $\mathcal{C}(S) \subset \mathcal{K}(S)$. Закључујемо $\mathcal{C}(S) = \mathcal{K}(S)$. ■

Теорема 2.2 (Каратеодоријева теорема о конвексним скуповима) *Нека је $S \subset \mathbb{C}$ и $z \in \mathcal{C}(S)$. Тада је z конвексна комбинација нека три елемента скупа S .*

Доказ. Како важи $z \in \mathcal{C}(S) = \mathcal{K}(S)$, то је z конвексна комбинација неких елемената скупа S . Следи

$$z = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j,$$

за неке $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_n \in S$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, при чему важи $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. За $n \leq 3$,

тврђење важи. Претпоставимо да је $n > 3$. Тада су вектори $z_2 - z_1, \dots, z_n - z_1$ линеарно зависни, будући да је $n - 1 > 2$. Према томе, за неке реалне бројеве $\mu_2, \dots, \mu_n$, који нису сви једнаки нули, важи

$$\sum_{j=2}^n \mu_j (z_j - z_1) = 0.$$

Поред тога, нека је

$$\mu_1 = - \sum_{j=2}^n \mu_j.$$

На основу претходног следи:

$$\sum_{j=1}^n \mu_j z_j = \sum_{j=2}^n \mu_j z_j + \mu_1 z_1 = \sum_{j=2}^n \mu_j (z_j - z_1) = 0.$$

Како бројеви $\mu_1, \dots, \mu_n$ нису сви једнаки нули и како важи

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 0,$$

то је бар један од њих строго већи од нуле и стога, дефинишемо

$$\alpha = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \quad \text{за неко } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Приметимо да тада важи

$$z = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j - \alpha \sum_{j=1}^n \mu_j z_j = \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \alpha \mu_j) z_j.$$

Због начина на који смо дефинисали број α , закључујемо да је

$$\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0, \quad \text{за све } j = 1, \dots, n.$$

Такође је

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j - \alpha \mu_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j - \alpha \sum_{j=1}^n \mu_j = 1.$$

Како важи

$$\lambda_i - \alpha \mu_i = 0,$$

то је

$$z = \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \alpha \mu_j) z_j.$$

Из претходног, следи да је z конвексна комбинација $n - 1$ елемената скупа S . Ако је $n - 1 \leq 3$ доказ је завршен. Иначе, ако је $n - 1 > 3$, понављамо претходну процедуру, све док не добијемо представљање тачке z као конвексне комбинације три елемената из скупа S . ■

Растојање између тачака $z = x + iy$ и $w = u + iv$, где су $z, w \in \mathbb{C}$ и $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ износи

$$|z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Тада се **дијаметар скупа** $S \subset \mathbb{C}$ дефинише на следећи начин:

$$\text{diam } S = \sup_{z, w \in S} |z - w|.$$

Испоставља се да је дијаметар неког скупа једнак дијаметру његовог конвексног омотача. Па важи следеће тврђење.

Теорема 2.3 *Нека је $S \subset \mathbb{C}$. Тада важи*

$$\text{diam } S = \text{diam } \mathcal{C}(S).$$

Доказ. Како је $S \subset \mathcal{C}(S)$, то директно важи $\text{diam } S \leq \text{diam } \mathcal{C}(S)$. Са друге стране, нека су $z, w \in \mathcal{C}(S)$ произвољно одабрани. Применом претходне теореме можемо закључити да се z и w могу представити као конвексне комбинације од по три елемената скупа S . Самим тим, можемо писати $z = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j$ и $w = \sum_{i=1}^3 \mu_i w_i$, где су

$z_j, w_i \in S$ и $\lambda_j, \mu_i \geq 0$ за све $j, i = 1, 2, 3$, при чему важи $\sum_{j=1}^3 \lambda_j = \sum_{i=1}^3 \mu_i = 1$.

Тада важи

$$\begin{aligned}
 |z - w| &= \left| \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j - w \right| = \left| \sum_{j=1}^3 \lambda_j (z_j - w) \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^3 \lambda_j |z_j - w| \\
 &= \sum_{j=1}^3 \lambda_j \left| z_j - \sum_{i=1}^3 \mu_i w_i \right| = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \left| \sum_{i=1}^3 \mu_i (z_j - w_i) \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^3 \lambda_j \sum_{i=1}^3 \mu_i |z_j - w_i| \\
 &\leq \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j \right) \left(\sum_{i=1}^3 \mu_i \right) \text{diam } S \\
 &= \text{diam } S.
 \end{aligned}$$

Према томе, преласком на супремум по свим $z, w \in \mathcal{C}(S)$, следи

$$\sup_{z, w \in \mathcal{C}(S)} |z - w| \leq \text{diam } S,$$

односно

$$\text{diam } \mathcal{C}(S) \leq \text{diam } S.$$

На основу свега претходног налазимо

$$\text{diam } S = \text{diam } \mathcal{C}(S),$$

што је и требало доказати. ■

Глава 3

Реални полиноми и Јенсенова теорема

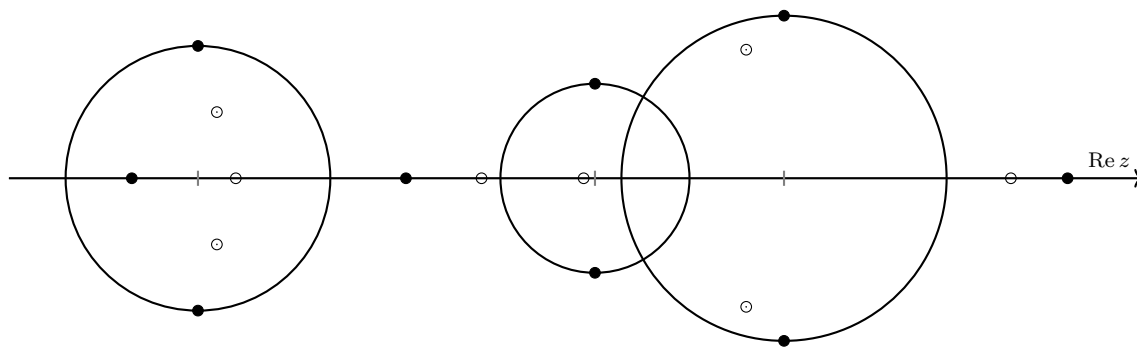
Ако полином f има реалне коефицијенте, онда можемо извести неколико тврђења о нулама првог извода тог полинома. Знамо да ако је нула полинома вишеструкости $m \geq 2$ онда је нула првог извода тог полинома, у даљем тексту критична тачка, вишеструкости $m - 1$. Штавише, ако је f реалне вредности на реалној правој, онда по Роловој теореме постоји бар једна реална критична тачка између било које две узастопне реалне нуле тог полинома. Према томе, ако f има укупно k реалних нула узимајући у обзир и њихове вишеструкости, онда f има најмање $k - 1$ критичних тачака. Ово можемо преформулисати на следећи начин.

Тврђење 3.1 *За полином са реалним коефицијентима број комплексних критичних тачака тог полинома не може бити већи од броја комплексних нула тог полинома. ■*

У претходном тврђењу свака комплексна нула има свој конјуговани пар. Ово се може користити за извођење занимљивог резултата који није покривен Гаус-Лукасовом теоремом.

Нека је f полином са реалним коефицијентима. Означимо са $z_1, \dots, z_n$ нуле које леже у отвореној горњој полуравни. Дискови

$$D_\mu := \{z \in \mathbb{C} : |z - \operatorname{Re} z_\mu| \leq \operatorname{Im} z_\mu\} \quad (\mu = 1, \dots, m)$$



Слика 3.1: Јенсенови дискови полинома степена 9. Нуле полинома су означене тачкицама, а критичне тачке, заокруженим тачкицама.

ће се називати Јенсенови дискови полинома f . Приметимо да сегмент који спаја конјуговани пар $z_\mu, \bar{z}_\mu$ формира вертикални пречник од $\mathcal{D}_\mu$ (видети слику 3.1).

Теорема 3.1 (Јенсенова) *Нека је f полином са реалним коефицијентима. Тада комплексне критичне тачке полинома f леже у унији свих Јенсенових дискова полинома f .*

Додатак. Комплексна критична тачка друге врсте лежи у унурашњости најмање једног од Јенсенових дискова осим ако је у питању гранична тачка сваког од њих. У том случају f не може имати ниједну реалну нулу.

Доказ. Нека је $f(z) := c \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ полином степена $n \in \mathbb{N}$ где су $z_1, \dots, z_n$ комплексне нуле полинома $f(z)$. Као и у доказу Гаус-Лукасове теореме имамо

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}.$$

Претпоставимо да је w комплексна критична тачка полинома f , тада је $f'(w) = 0$. Ако је $f(w) = 0$, онда је $w = z_k$ за неко k и w лежи на граници Јенсеновог диска одређеног са $w = z_k$. Зато претпоставимо да је $f(w) \neq 0$. Нека је $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$. За комплексну нулу $z_k = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\bar{z}_k$ је такође нула и $\bar{z}_k = x - iy$. Онда имамо

$$\frac{1}{w - z_k} + \frac{1}{w - \bar{z}_k} = \frac{1}{w - x - iy} + \frac{1}{w - x + iy} = \frac{2w - 2x}{(w - x)^2 + y^2}$$

Како је $\overline{(w - x)^2 + y^2} = (\bar{w} - x)^2 + y^2$, то је

$$\frac{2w - 2x}{(w - x)^2 + y^2} = \frac{(2w - 2x)((\bar{w} - x)^2 + y^2)}{|(w - x)^2 + y^2|^2}$$

Сада желимо да израчунамо знак имагинарног дела овог израза. Пошто је именилац реалан и позитиван, довољно је погледамо знак имагинарног дела бројиоца.

$$\begin{aligned} (2w - 2x)((\bar{w} - x)^2 + y^2) &= 2((w - x)(\bar{w} - x)(\bar{w} - x) + y^2(w - x)) \\ &= 2(|w - x|^2(\bar{w} - x) + y^2(w - x)) \\ &= 2(|w - x|^2(u - iv - x) + y^2(u + iv - x)). \end{aligned}$$

А имагинарни део овог броја је

$$2(-v|w - x|^2 + y^2v) = 2v(-|w - x|^2 + y^2).$$

Овај израз има негативан знак $-v$ јер смо претпоставили да је w ван Јенсеновог диска, па следи

$$y^2 < |w - x|^2.$$

Погледајмо сада знак имагинарног дела овог израза

$$\frac{1}{w - z_k}$$

у случају да је $z_k = x \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\frac{1}{w-x} \cdot \frac{\bar{w}-x}{\bar{w}-x} = \frac{u-iv-x}{|w-x|^2}.$$

Имагинарни део овог израза тачно знак од $-v$.

Сада у суми

$$0 = \frac{f'(w)}{f(w)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{w-z_k} = \sum_{\operatorname{Im} z_k=0} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{w-z_k} \right) + \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{w-z_k} + \frac{1}{w-\bar{z}_k} \right) \quad (3.1)$$

имамо две врсте нула, комплексне које могу бити упарене заједно са својим конјугованим паром и знак који им одговара је једнак $-v$ и реалне које такође имају имају знак једнак знаку $-v$. Закључујемо да наша сума има знак од $-v$, а како знамо да је $v \neq 0$, сума не може бити нула. Долазимо до контрадикције. Стога наша нула w мора припадати унутар или на граници једног од Јенсенових дискова.

Додатак се лако доказује из једначине (3.1). ■

Јенсенова теорема и њен доказ доводе до разних занимљивих последица. Следећа теорема се може сматрати теоремом раздвајања.

Последица 3.1 *Нека је f полином са реалним коефицијентима. Претпоставимо да је x^* тачка на реалној правој изван свих Јенсенових дискова полинома f . Ако је $f(x^*) = 0$, онда у свакој од полуравни*

$$\mathcal{H}_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < x^*\} \quad \text{и} \quad \mathcal{H}_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x^*\},$$

број нула је једнак броју критичних тачака.

Доказ. Нека су $z_j = x_j + iy_j$, где су $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ за $j = 1, \dots, n$, нуле полинома f и дефинишимо

$$f_t(z) := c \prod_{j=1}^n (z - x_j - ity_j),$$

где је $t \in [0, 1]$ и c изабрано тако да је $f_1(z) \equiv f(z)$. Даље, нека је ε_t унија реалне осе и Јенсенових дискова полинома f_t . За $0 \leq t \leq 1$, очигледно је $\varepsilon_t \subseteq \varepsilon_1$. Последица важи за f_0 као последица Ролове теореме. Како t расте, нуле полинома f_t се непрекидно померају (Теорема о непрекидности 1.10), али остају у ε_1 .

Даље, у циљу да дођемо од $\mathcal{H}_1$ до $\mathcal{H}_2$ и обрнуто, критичне тачке полинома морају проћи кроз x^* . Ако се ово прво догоди за $t = s$, онда f_s мора имати нуле веће вишеструкости у тачки x^* , него што има f_0 . Али, то не би било у складу са претпоставкама о x^* и дефиницијом полинома f_t . ■

Као пандан претходној последици, наводимо следећи резултат.

Последица 3.2 *Нека је f полином са реалним коефицијентима. Претпоставимо да је x^* тачка на реалној правој изван свих Јенсенових дискова полинома f . Ако је $f(x^*) \neq 0$, онда у свакој од полуравни*

$$\mathcal{H}_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < x^*\} \quad \text{и} \quad \mathcal{H}_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > x^*\},$$

број нула је најмање једнак броју критичних тачака, али га може премашити само за једну.

Доказ. Нека је n_j број нула и n'_j број критичних тачака у $\mathcal{H}_j$, где $j = 1, 2$. Под претпоставком ове последице не може постојати ниједна нула на $\operatorname{Re} z = x^*$, па степен полинома f мора бити $n_1 + n_2 =: n$. Изаберимо позитивне бројеве a и b довољно велике да правоугаоник Γ са теменима у тачкама

$$-a - ib, \quad x^* - ib, \quad x^* + ib, \quad -a + ib$$

обухвата нуле и критичне тачке које леже у $\mathcal{H}_1$ али се не сусрећу ни са једним од Јенсенових дискова полинома f . Ако се z креће по Γ у смеру супротном од казаљке на сату, онда је према Теорему о принципу аргумената 1.8

$$\Delta(\Gamma) \arg \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) = 2\pi(n'_1 - n_1).$$

Како Јенсенова теорема важи за све $z \in \Gamma$, онда морамо имати $\Delta(\Gamma) = 2\pi\ell$, где је $\ell \in \{-1, 0, 1\}$. Ово повлачи $n_1 - 1 \leq n'_1 \leq n_1 + 1$. Аналогно, налазимо $n_2 - 1 \leq n'_2 \leq n_2 + 1$. Међутим ниједна од горњих граница за n'_1 и n'_2 се не може постићи, јер бисмо у супротном имали

$$n'_1 + n'_2 \geq n_1 + n_2 = n,$$

што је контрадикција са чињеницом да f има $n - 1$ критичну тачку. ■

Применом Последица 3.1 и 3.2 два пута, можемо закључити резултате о броју критичних тачака на вертикалној оси. Они су лаке последице Ролове теореме у случају кад су све нуле реалне. За илустрацију Последица 3.1 и 3.3 видети Сliku 3.1.

Последица 3.3 Нека је f полином са реалним коефицијентима и нека су a и b , $a < b$, две тачке на $\mathbb{R}$ изван свих Јенсенових дискова полинома f . Означимо са m број нула и са m' број критичних тачака на правој $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$. Тада

$$(i) \quad m' = m + 1 \quad \text{ако} \quad f(a) = 0 \quad \text{и} \quad f(b) = 0;$$

$$(ii) \quad m \leq m' \leq m + 1 \quad \text{ако} \quad f(a) = 0 \quad \text{или} \quad f(b) = 0;$$

$$(iii) \quad m - 1 \leq m' \leq m + 1 \quad \text{ако} \quad f(a) \neq 0 \quad \text{и} \quad f(b) \neq 0.$$

Доказ. Означимо са n_1 број нула и са n'_1 број критичних тачака на $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < a\}$. Нека су n_2 и n'_2 одговарајуће нуле и критичне тачке на $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > b\}$. Довољно је размотрити следећа три случаја.

$$1^\circ \quad f(a) = f(b) = 0$$

Означимо са k_1 вишеструкост нуле у тачки a . Из Последице 3.1 закључујемо за $x^* := a$ да је $n_1 = n'_1$ и за $x^* := b$ да је $n_1 + k_1 + m = n'_1 + k - 1 + m'$. Стога, важи (i);

$$2^\circ \quad f(a) = 0, \quad f(b) \neq 0$$

Последица 3.1 за $x^* := a$ даје да је $m + n_2 = m' + n'_2$. Осим тога, Последица 3.2 за $x^* := b$ даје да је $n_2 - 1 \leq n'_2 \leq n_2$. Стога $m \leq m' \leq m + 1$.

Примењујући ово на полином $f(-z + a + b)$, долазимо до истог закључка ако је $f(a) \neq 0, f(b) = 0$. Па важи (ii);

$$3^\circ \quad f(a) \neq 0, \quad f(b) \neq 0$$

Закључујемо из Последице 3.2 за $x^* := a$ да је $n_1 - 1 \leq n'_1 \leq n_1$ и за $x^* := b$ да је $n_1 + m - 1 \leq n'_1 + m' \leq n_1 + m$. Комбинацијом ових неједнакости, видимо да важи (iii).

■

У Последици 3.3 хипотеза да a и b нису садржане у Јенсеновом диску је кључна. Заиста, размотримо полином $f(z) := x^4 + 4$.

Он нема нула на правој $S := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Када би Последица 3.3 могла да се примени на $a = -1$ и $b = 1$ онда би полином f имао највише једну критичну тачку на S . Али, очигледно, полином f има критичну тачку вишеструкости 3 у нули.

Глава 4

Теорема Грегса о аполарним полиномима

4.1 Кружни домени и поларни изводи

Нека је $\widehat{\mathbb{C}}$ проширена комплексна равнина. Афино пресликавање

$$\varphi : \begin{cases} \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ z \rightarrow \alpha z + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0) \end{cases}$$

је бијекција и са композицијом пресликавања као операцијом, формира групу $\mathcal{G}_a$. Инверзну функцију од φ означавамо са φ^{-1} . Елементи групе $\mathcal{G}_a$ пресликавају дискове у дискове и полуравни у полуравни. Штавише, за било која два диска $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ (или било које две полуравни $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$), било да су оба отворена или оба затворена, постоји елемент групе $\mathcal{G}_a$ који се пресликава инјективно из $\mathcal{D}_1$ у $\mathcal{D}_2$ (или из $\mathcal{H}_1$ у $\mathcal{H}_2$).

Променом променљиве z полинома f степена n путем трансформације φ која припада групи $\mathcal{G}_a$, закључујемо да $g(z) := f(\varphi(z))$, што је опет полином степена n . Нуле и критичне тачке полинома g су повезане са нулама и критичним тачкама полинома f на врло једноставан начин. Тачка z^* је нула полинома g ако и само ако је $\varphi(z^*)$ нула полинома f ; исто тако ζ је критична тачка полинома g ако и само ако је $\varphi(\zeta)$ критична тачка полинома f .

Рационална функција степена 1, коју обично називамо Мебијусова трансформација

$$\psi : \begin{cases} \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ z \rightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

је такође бијекција и формира групу $\mathcal{G}_r$, која садржи групу $\mathcal{G}_a$ као одговарајућу подгрупу¹. Нека је $\mathcal{C}^*$ ознака за скуп свих кругова и свих правих у равнини. Значајно је да свако $\psi \in \mathcal{G}_r$ пресликава један елемент скупа $\mathcal{C}^*$ у један елемент скупа $\mathcal{C}^*$. Како је пресликавање ψ бијекција, следи да се, у $\widehat{\mathbb{C}}$, сваки домен чија граница припада скупу $\mathcal{C}^*$, пресликава у домен истог типа. Такве домene ћемо називати **кружним доменима** под условом да су отворени или затворени. Стога, није само диск (отворен или затворен) кружни домен, већ је и његов комплемент у односу на $\widehat{\mathbb{C}}$, кружни домен, такође, ово важи и за полураван.

¹У уџбеницима комплексне анализе елементе групе $\mathcal{G}_a$, па чак и од $\mathcal{G}_r$ често називају линеарним трансформацијама иако линеарност захтева $\gamma = \beta = 0$

За било која два кружна домена $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, било да су оба отворена или оба затворена, постоји елемент у $\mathcal{G}_r$ који се пресликава инјективно из $\mathcal{K}_1$ у $\mathcal{K}_2$. Из овог разлога, кружне домене ћемо дефинисати формалније на следећи начин.

Дефиниција 4.1.1 *Подскуп проширене комплексне равни је кружни домен, ако је он слика затвореног или отвореног јединичног диска пресликавања елемената (4.1.1) из групе $\mathcal{G}_r$.*

Посматрајмо полином f степена $n \geq 1$. Ако је $\psi \in \mathcal{G}_r \setminus \mathcal{G}_a$ онда $f(\psi(z))$ више није полином. Али, то није проблем. Како $\psi \notin \mathcal{G}_a$, ψ можемо записати као

$$\psi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta} \quad (\beta \neq \alpha\delta). \quad (4.1.2)$$

Стога, дефинишући полином

$$g(z) := (z + \delta)^n f(\psi(z)), \quad (4.1.3)$$

закључујемо да је полином $g(z) = f(\alpha)z^n + \dots$ степена највише n ; а степена n ако и само ако $f(\alpha) \neq 0$.

Приметимо да $-\delta$ не може бити нула полинома g јер је полином f степена n . Стога, ако је z^* нула полинома g , онда $\psi(z^*)$ мора бити нула полинома f . Са друге стране, ако је w^* нула полинома f , онда је $\psi^{-1}(w^*)$ нула полинома g , осим ако је $\psi^{-1}(w^*) = \infty$. У последњем случају g је степена мањег од n јер $\psi^{-1}(w^*) = \infty$ ако и само ако је $w^* = \alpha$, што значи да је $f(\alpha) = 0$.

У циљу да опишемо критичне тачке полинома g , прво рачунамо

$$\begin{aligned} g'(z) &= n(z + \delta)^{n-1} f(\psi(z)) + (z + \delta)^n f'(\psi(z)) \psi'(z) \\ &= (z + \delta)^{n-1} \left(n f(\psi(z)) + \frac{\alpha\delta - \beta}{z + \delta} f'(\psi(z)) \right) \\ &= (z + \delta)^{n-1} (n f(\psi(z)) - (\psi(z) - \alpha) f'(\psi(z))). \end{aligned}$$

Следи да, ако је ζ критична тачка полинома g , онда је $\psi(\zeta)$ или нула полинома

$$F(\alpha, z) := n f(z) - (z - \alpha) f'(z), \quad (4.1.4)$$

или $\zeta = -\delta$ и $F(\alpha, z)$ је степена мањег од $n - 1$. Обрнуто, ако је w нула полинома $F(\alpha, z)$, онда је $\psi^{-1}(w)$ критична тачка полинома g осим ако је $\psi^{-1}(w) = \infty$. У последњем случају, $w = \alpha$, и опет $f(\alpha) = 0$.

Ова разматрања указују на релевантност диференцијалног оператора првог реда

$$D_\alpha := n - (z - \alpha) \frac{d}{dz}$$

и на значај испитивања нула од $D_\alpha f$, што је полином $F(\alpha, \cdot)$ дефинисан у (4.1.4). Такође, можемо приметити да

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha} D_\alpha f \right) = f'.$$

Полином $F(\alpha, z)$ се често назива **извод полинома f** у односу на α или **поларни извод полинома f** са полом у α . Он је степена највише $n - 1$ и степена једнаког $n - 1$ ако и само ако $f^{(n-1)}(\alpha) \neq 0$.

Сва претходна разматрања ћемо сабрати у следеће тврђење.

Тврђење 4.1.2 Нека је f полином степена $n \geq 1$ и нека је

$$F(\alpha, z) := nf(z) - (z - \alpha)f'(z)$$

његов поларни извод у односу на α . Нека су ψ и g дате у (4.1.2) и (4.1.3). Тада важе следећа тврђења:

- (i) ако је z^* нула полинома g , онда је $\psi(z^*)$ нула полинома f ;
- (ii) ако је w^* нула полинома f , онда је или $\psi^{-1}(w^*)$ нула полинома g или $w^* = \alpha$ и $f(\alpha) = 0$;
- (iii) ако је ζ критична тачка полинома g , онда је или $\psi(\zeta)$ нула полинома $F(\alpha, \cdot)$ или $\zeta = -\delta$ и $f^{(n-1)}(\alpha) = 0$;
- (iv) ако је w нула полинома $F(\alpha, \cdot)$, онда је или $\psi^{-1}(w)$ критичка тачка полинома g или $w = \alpha$ и $f(\alpha) = 0$.

■

Примедба 4.1.3 Приметимо да постоји $1-1$ кореспонденција између нула полинома f и g ако $f(\alpha) \neq 0$. Слична кореспонденција постоји између нула полинома $F(\alpha, \cdot)$ и критичних тачака полинома g , ако поново $f(\alpha) \neq 0$ и додатно $f^{(n-1)}(\alpha) \neq 0$.

4.2 Лагерава теорема, њене варијације и примена

Користећи нотацију за кружне домене, можемо констатовати следеће еквивалентне формулације Гаус-Лукасове теореме

- (I) Сваки кружни домен који садржи све нуле полинома f , али не и тачку у ∞ , садржи све критичне тачке полинома f .
- (II) Нека је f полином степена $n \geq 2$ и нека је ζ било која његова критична тачка друге врсте, тада је $f'(\zeta) = 0$, али $f(\zeta) \neq 0$. У наставку, нека је $\mathcal{L}$ било која права која пролази кроз ζ . Тада, обе отворене полуравни чија је граница права $\mathcal{L}$, садрже најмање једну нулу полинома f осим ако све њене нуле леже на $\mathcal{L}$.

Следећа теорема уопштава ова тврђења.

Теорема 4.2.1 (Лагер) Нека је f полином степена $n \geq 2$ и нека је $\alpha \in \mathbb{C}$.

- (i) Кружни домен $\mathcal{K}$ који садржи све нуле полинома f , али не и тачку α , садржи све нуле поларног извода полинома $F(\alpha, z) := nf(z) - (z - \alpha)f'(z)$.
- (ii) Нека је $\zeta \neq \alpha$ нула полинома $F(\alpha, z)$ таква да $f(\zeta) \neq 0$. Тада, сваки круг $\mathcal{C}$ који пролази кроз α и ζ раздваја најмање две нуле полинома f , осим ако све оне леже на кругу $\mathcal{C}$.

Доказ. Посматрајмо пресликавање $\psi : z \rightarrow \frac{\alpha z + 1}{z}$, које је специјалан случај од (4.1.2) и дефинишимо

$$g(z) := z^n f(\psi(z)).$$

Из хипотезе (i), следи да $f(\alpha) \neq 0$. По Тврђењу 4.1.2, нуле полинома g леже у кружном домену $\mathcal{D} := \psi^{-1}(\mathcal{K})$, који не садржи тачку у ∞ , јер $\alpha \notin \mathcal{K}$. Стога, по горе наведеној еквивалентној формулацији (I) Гаус-Лукасове теореме, све критичне тачке полинома g такође леже у $\mathcal{D}$. Тада, поново по Тврђењу 4.1.2, нуле полинома $F(\alpha, z)$ леже у $\psi(\mathcal{D})$, што је скуп $\mathcal{K}$, па тврђење (i) важи.

Тврђење (ii) је тривијално ако је α нула полинома f реда n .

Зато претпоставимо да полином f има нулу β , $\beta \neq \alpha$ и да је ζ нула полинома $F(\alpha, \cdot)$, таква да $\zeta \neq \alpha$ и $f(\zeta) \neq 0$. Тада по Тврђењу 4.1.2, $\psi^{-1}(\zeta)$ је критична тачка полинома g , али не и нула полинома g . Са друге стране, полином g не може бити не-нула константан јер нестаје за $\psi^{-1}(\beta)$. Стога, g је најмање степена 2. Како је $\psi^{-1}(\alpha) = \infty$, круг $\mathcal{C}$, који пролази кроз α и ζ , се са ψ^{-1} пресликава на праву $\mathcal{L}$ која пролази кроз $\psi^{-1}(\zeta)$. Сада применимо тврђење изнад (II) на полином g . Тада жељени резултат за полином f следи уз помоћ Тврђења 4.1.2. ■

За дати кружни домен $\mathcal{K}$ и полином f степена $n \geq 2$, случај (i) из Теореме 4.2.1 каже да, ако $\mathcal{K}^c$ (комплемент $\mathcal{K}$ у односу на $\widehat{\mathbb{C}}$) не садржи нуле полинома f , онда не садржи ни нуле полинома $F(\alpha, z)$ за све $\alpha \in \mathcal{K}^c$. Како је $\mathcal{K}^c$ такође кружни домен, можемо да поновимо први део Лагерове теореме у следећем еквивалентном облику.

Теорема 4.2.1 а *Нека је f полином степена $n \geq 2$ и нека је $\mathcal{K}$ произвољан кружни домен који не садржи ниједну нулу полинома f . Тада*

$$nf(z) - (z - \alpha)f'(z) \neq 0 \quad (z \in \mathcal{K}, \alpha \in \mathcal{K}).$$

Следећи доказ не користи Гаус-Лукасову теорему.

Доказ. Како f има само коначан број нула, можемо наћи један отворен кружни домен $\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}$ такав да $f(z) \neq 0$ за $z \in \mathcal{K}_1$. У нотацији (4.1.4) очигледно је довољно доказати да $F(\alpha, z) \neq 0$ за $z \in \mathcal{K}_1$ и $\alpha \in \mathcal{K}_1$. Сада нека је ζ произвољна, али фиксна тачка у $\mathcal{K}_1$ и означимо са $z_1, \dots, z_n$ нуле полинома f . Очигледно, за $\nu = 1, \dots, n$, тачке $\frac{1}{\zeta - z_\nu}$ припадају скупу $\mathcal{E}$ који је слика $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_1$ за пресликавање $w \rightarrow \frac{1}{\zeta - w}$. Лако се уочава да је $\mathcal{E}$ затворен диск, зато је и конвексан скуп. Као таква, аритметичка средина

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\zeta - z_\nu}$$

свих n бројева $\frac{1}{\zeta - z_\nu}$ такође припада $\mathcal{E}$. Стога, постоји тачка $w \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_1$ таква да

$$\frac{1}{n} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\zeta - z_\nu} = \frac{1}{\zeta - w}.$$

Јасно је да, ако $\alpha \in \mathcal{K}_1$ и $\alpha \neq \zeta$, онда $\frac{1}{\zeta - w} \neq \frac{1}{\zeta - \alpha}$, такође и

$$\frac{1}{n} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \neq \frac{1}{\zeta - \alpha},$$

из чега следи да $F(\alpha, \zeta) \neq 0$. Али ако је $\alpha = \zeta$ онда $F(\alpha, \zeta) = nf(\zeta)$, што је различито од 0 по претпоставци. ■

Уместо да бирамо α и тражимо нулу ζ полинома $F(\alpha, z)$ у (4.1.4), можемо одабрати ζ и одредити α тако да полином $F(\alpha, \zeta) = 0$. Ова једначина је очигледно задовољена за

$$\alpha := \zeta - n \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}. \quad (4.2.1)$$

Дакле, део (ii) Теореме 4.2.1 је еквивалентан следећем тврђењу.

Теорема 4.2.1 б *Нека је f полином степена $n \geq 2$. Ако тачка ζ , која припада комплексној равни, није ни нула нити критична тачка полинома f , онда сваки круг $\mathcal{C}$ који пролази кроз ζ и $\zeta - n \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}$ раздваја најмање две нуле полинома f , осим ако све нуле леже на $\mathcal{C}$.*

За следећи доказ, такође, не користимо Гаус-Лукасову теорему.

Доказ. Дефинишимо

$$-n \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)} =: R e^{i\beta} \quad (R > 0, \quad 0 \leq \beta < 2\pi).$$

Како круг $\mathcal{C}$ пролази кроз ζ и $\zeta + R e^{i\beta}$, онда постоји $\gamma \in \left(\beta - \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}\right)$ тако да је $\frac{R}{\cos(\beta - \gamma)}$ дужина дијаметра круга $\mathcal{C}$. Ово нам дозвољава приказ круга

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \zeta + R \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\cos(\beta - \gamma)} e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} + \gamma \leq \theta < \frac{\pi}{2} + \gamma \right\}.$$

Тачка $z^* = \zeta + r e^{i\alpha}$, где је $r \geq 0$, лежи

$$\begin{cases} \text{унутар } \mathcal{C} & \text{ако и само ако} & 0 < r < R \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos(\beta - \gamma)}, \\ \text{на } \mathcal{C} & \text{ако и само ако} & r \in \left\{ 0, R \frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos(\beta - \gamma)} \right\}. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Ако означимо са $z_1, \dots, z_n$ нуле полинома f , онда можемо записати $z_\nu - \zeta =: r_\nu e^{i\alpha_\nu}$, где је $r_\nu = |z_\nu - \zeta|$ и $\alpha_\nu \in [0, 2\pi)$ за $\nu = 1, \dots, n$. Како $f(\zeta) \neq 0$ по хипотезама, сви бројеви r_ν су позитивни и важи

$$\frac{e^{-i\beta}}{R} = -\frac{1}{n} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{z_\nu - \zeta} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{e^{-i\alpha_\nu}}{r_\nu}.$$

Множећи обе стране са $e^{i\gamma}$ и изједначавајући реалне делове, закључујемо

$$\frac{\cos(\beta - \gamma)}{R} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{\cos(\alpha_\nu - \gamma)}{r_\nu}. \quad (4.2.3)$$

Десна страна је аритметичка средина величина

$$q_\nu := \frac{\cos(\alpha_\nu - \gamma)}{r_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Ако нису сви једнаки, онда постоје $m, l \in \{1, \dots, n\}$ тако да

$$q_m = \max_{1 \leq \nu \leq n} q_\nu, \quad q_l = \min_{1 \leq \nu \leq n} q_\nu,$$

и

$$q_l = \frac{\cos(\alpha_l - \gamma)}{r_l} < \frac{\cos(\beta - \gamma)}{R} < \frac{\cos(\alpha_m - \gamma)}{r_m} = q_m.$$

Ово значи, по (4.2.2), да z_m лежи унутар, а z_l изван $\mathcal{C}$.

Ако су сви q_ν једнаки, онда њихова заједничка вредност мора бити $\frac{\cos(\beta - \gamma)}{R}$ по (4.2.3). Стога, по (4.2.2), све нуле полинома f леже на кругу $\mathcal{C}$. ■

Примедба 4.2.2 Теорема 4.2.1 б има интересантну примену у нумеричкој анализи. Нека је f полином степена $n \geq 2$. Да израчунамо нулу полинома f са грешком од највише $\varepsilon > 0$, Њутновом итерацијом

$$z_{k+1} := z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

можемо користити следеће правило о прекиду итерације:

Зауоставимо итерацију чим

$$\left| \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{n}$$

и прихватимо

$$\tilde{z} := z_k - \frac{n}{2} \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$$

као нулу полинома f .

Тада $\tilde{z}$ има жељену тачност. Заиста, $\tilde{z}$ је центар круга $\mathcal{C}$, чији дијаметар $n \left| \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \right|$, пролази кроз z_k и $z_k - n \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$. Стога, по Теорему 4.2.1 б, постоји нула z^* полинома f унутар или на кругу $\mathcal{C}$ и такође

$$|z^* - \tilde{z}| \leq \frac{n}{2} \left| \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \right| \leq \varepsilon$$

Лагерова теорема имплицира корисну репрезентацију за логаритамски извод полинома.

Теорема 4.2.3 (Волш) Нека је f полином степена n са свим својим нулама у кружном домену $\mathcal{K}$. Тада, за свако $\zeta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}$, постоји $\alpha \in \mathcal{K}$, такво да

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{n}{\zeta - \alpha}. \quad (4.2.4)$$

Доказ. За дато $\zeta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}$, α дефинисано у (4.2.1) задовољава (4.2.4) и ζ је нула полинома $F(\alpha, z)$ из (4.1.4). Ако α лежи ван $\mathcal{K}$, онда ће, према Теорему 4.2.1 све нуле полинома $F(\alpha, z)$ лежати у $\mathcal{K}$, тако да ζ не може бити једна од њих. Ово је контрадикција. ■

Теорема 4.2.3 каже да, у свакој тачки ζ изван кружног домена $\mathcal{K}$ који садржи све нуле n -тог степена полинома f , вредност логаритамског извода полинома f једнак је вредности логаритамског извода полинома чијих се n нула поклапају у одговарајућој тачки $\alpha \in \mathcal{K}$, где, наравно, α зависи од ζ .

Ако кружни домен $\mathcal{K}$, који садржи све нуле полинома f , није спољашњост диска, онда $f'(\zeta) \neq 0$ за $\zeta \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}$ и тада је функција

$$\zeta \rightarrow \alpha = \zeta - n \frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)},$$

дата у (4.2.4), аналитичка у комплементу од $\mathcal{K}$. Приметимо да α тежи коначној граничној вредности, кад $\zeta \rightarrow \infty$.

Ако је $\mathcal{K}$ спољашњост диска, онда одговарајућа модификација ових рефлексја такође доводи до репрезентације логаритамских извода у терминима аналитичке функције. Следећа теорема даје корисне информације о функцији $\phi : \zeta \rightarrow \frac{1}{\alpha}$, у случају где је $\mathcal{K}$ спољашњост отвореног јединичног диска.

Теорема 4.2.4 (Дјудоне) *Нека је f полином степена n без нула у отвореном јединичном диску $\mathbb{D}$. Тада*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - (\phi(z))^{-1}} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

где је ϕ аналитичка функција и $|(\phi(z))| \leq 1$.

Доказ. Нека је $\zeta \in \mathbb{D}$. Онда Теорема 4.2.3 повлачи да (4.2.4) важи за $|\alpha| \geq 1$. У наставку закључујемо

$$\phi(\zeta) := \frac{1}{\alpha} = \frac{f'(\zeta)}{\zeta f'(\zeta) - n f(\zeta)},$$

и такође, ϕ је рационална функција и ограничена са 1 у $\mathbb{D}$. Конкретно, ϕ је аналитичка функција у $\mathbb{D}$. ■

4.3 Аполарност полинома

Овај одељак је посвећен детаљном проучавању појма који ће се користити у следећем одељку да би се приказао резултат, добијен као последица Лагерове теореме, чији обим сеже далеко изнад критичних тачака.

Дефиниција 4.3.1 *Два полинома f и g , оба степена n , су аполарна ако*

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu f^{(\nu)}(0) g^{(n-\nu)}(0) = 0. \quad (4.3.1)$$

Ако су два полинома дата као $f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$ и $g(z) = \sum_{\nu=0}^n b_\nu z^\nu$, онда $f^{(\nu)}(0) = \nu! a_\nu$ и $g^{(n-\nu)}(0) = (n-\nu)! b_{n-\nu}$. У наставку, услов аполарности (4.3.1) је еквивалентан

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{a_\nu b_{n-\nu}}{\binom{n}{\nu}} = 0. \quad (4.3.1 \text{ а})$$

Наведимо прво следећа својства која су очигледне последице дефиниције.

- (i) Аполарност је симетрична релација; односно, у (4.3.1) улоге полинома f и g могу бити замењене.
- (ii) Аполарност је (у суштини) линеарна релација; односно, ако су оба полинома f_1 и f_2 аполарна полиному g и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, онда је полином $f := \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ такође аполаран полиному g под условом да су f и g истог степена.
- (iii) Сваки полином непарног степена је аполаран самом себи.

Ако је дат полином g степена n , онда постоји много полинома који су аполарни полиному g . Увођењем линеарне функције

$$\Lambda_g : f \rightarrow \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu f^{(\nu)}(0) g^{(n-\nu)}(0) = 0, \quad (4.3.2)$$

дефинисане на линеарном простору $\mathcal{P}_n$ који садржи све полиноме f степена највише n , видимо да је f аполаран полиному g ако и само ако

$$\Lambda_g[f] = 0 \quad \text{и} \quad f \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}.$$

Значајно и корисно својство функције Λ_g је описано у следећој лема.

Лема 4.3.2 *Нека су f и g полиноми степена највише n и дефинишимо*

$$F(z) := f(\alpha z + \beta), \quad G(z) := g(\alpha z + \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0)$$

Тада функција (4.3.2) може бити изражена као $\Lambda_g[f] = \alpha^{-n} \Lambda_G[F]$. Конкретно, аполарност је очувана под афиним трансформацијом комплексне равни.

Доказ. Како је $F^{(\nu)}(0) = \alpha^\nu f^{(\nu)}(\beta)$ и $G^{(n-\nu)}(0) = \alpha^{n-\nu} g^{(n-\nu)}(\beta)$, видимо да

$$\Lambda_G[F] = \alpha^n \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu f^{(\nu)}(\beta) g^{(n-\nu)}(\beta)$$

Сада је довољно показати да десна страна не зависи од β . Уствари, диференцијација у односу на β даје да

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_G[F]}{\partial \beta} &= \alpha^n \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \left(f^{(\nu+1)}(\beta) g^{(n-\nu)}(\beta) + f^{(\nu)}(\beta) g^{(n-\nu+1)}(\beta) \right) \\ &= \alpha^n \left(f(\beta) g^{(n+1)}(\beta) + (-1)^n f^{(n+1)}(\beta) g(\beta) \right), \end{aligned}$$

што нестаје, пошто су f и g степена највише n . ■

Примедба 4.3.3 *Лема 4.3.2 подразумева да је*

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu f^{(\nu)}(z) g^{(n-\nu)}(z),$$

посматрана као функција од z на $\mathbb{C}$, константа. Дакле, у (4.3.1), изводи се могу узети у произвољној тачки $s \in \mathbb{C}$, уместо у 0.

Примедба 4.3.4 Из (4.3.1 а) је јасно да, ако су два полинома f и g степана n аполарна, онда су аполарни и $z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$ и $z^n g\left(\frac{1}{z}\right)$, под условом да су њихови степени једнаки n . Како се свака трансформација

$$z \rightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

може добити композицијом трансформација облика

$$z \rightarrow \alpha z + \beta \quad \text{и} \quad z \rightarrow \frac{1}{z},$$

јасно се види да аполарност полинома f и g подразумева аполарност полинома F и G , где са

$$F(z) := (\gamma z + \delta)^n f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \quad \text{и} \quad G(z) := (\gamma z + \delta)^n g\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

под условом да су и F и G степена n .

Следећа лема сугерише да аполарност можда има везе са заједничким нулама.

Лема 4.3.5 Нека су f и g полиноми степена највише n , са заједничком нулом у тачки z^* . Претпоставимо да је сума вишеструкости нула полинома f и g , у тачки z^* , већа од n . Тада

$$\Lambda_g[f] := \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu f^{(\nu)}(0) g^{(n-\nu)}(0) = 0,$$

и полиноми f и g су аполарни под условом да су оба полинома степена n .

Доказ. Означимо са k , вишеструкост нуле z^* , као нулу полинома f и са l , вишеструкост нуле z^* , као нулу полинома g , из претпоставке, знамо да $k + l > n$. Користећи Примедбу 4.3.3 можемо записати

$$\Lambda_g[f] = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu f^{(\nu)}(0) g^{(n-\nu)}(0) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu f^{(\nu)}(z^*) g^{(n-\nu)}(z^*). \quad (4.3.3)$$

Сада, ако је $\nu < k$, онда $f^{(\nu)}(z^*) = 0$; али ако је $\nu \geq k$, онда $n - \nu \leq n - k < l$ и $g^{(n-\nu)}(z^*) = 0$. Дакле, сви услови са десне стране једнакости (4.3.3) нестају, што показује да је $\Lambda_g[f] = 0$. ■

Сада можемо описати скуп свих полинома који су аполарни за дати полином g у смислу његових нула.

Теорема 4.3.6 Нека је $g(z) = b_n \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{m_j}$, где су $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ различити, $b_n \neq 0$,

$m_j \in \mathbb{N}$ за $j = 1, \dots, k$ и $\sum_{j=1}^k m_j = n$. Тада полиноми

$$f(z) := \sum_{j=1}^k \sum_{\mu=0}^{m_j-1} c_{j\mu} (z - z_j)^{n-\mu} \quad \left(\sum_{j=1}^k c_{j0} \neq 0 \right), \quad (4.3.4)$$

где $c_{j\mu} \in \mathbb{C}$ за $j = 1, \dots, k$, $\mu = 0, \dots, m_j - 1$, представљају скуп свих аполарних полинома полиному g .

Доказ. Сваки полином облика

$$f_j(z) := \sum_{\mu=0}^{m_j-1} c_{j\mu}(z - z_j)^{n-\mu} \quad (4.3.5)$$

има z_j као нулу вишеструкости најмање $n - m_j + 1$. Дакле, Лема 4.3.5 подразумева да је $\Lambda_g[f_j] = 0$ за $j = 1, \dots, k$. Тако $\Lambda_g[f] = \sum_{j=1}^k \Lambda_g[f_j] = 0$. Пошто, споредни услов $\sum_{j=1}^k c_{j0} \neq 0$ из (4.3.4) гарантује да је f степена n , сваки полином облика (4.3.4) је заиста аполаран полиному g . Остаје да покажемо још да не постоје други полиноми њему аполарни.

Функција Λ_g није идентички једнака нули, јер, за полином

$$h(z) := \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{\overline{g^{(n-\nu)}(0)}}{\nu!} z^\nu,$$

имамо да је $h^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu \overline{g^{(n-\nu)}(0)}$ и такође $\Lambda_g[h] = \sum_{\nu=0}^n \left| g^{(n-\nu)}(0) \right|^2 > 0$. Према стандардном резултату линеарне алгебре, језгро функције Λ_g , које је скуп свих полинома $f \in \mathcal{P}_n$ и задовољава $\Lambda_g[f] = 0$, је линеарни подпростор $\mathcal{V}_n$ димензије n . Полином f , аполаран полиному g , мора припадати $\mathcal{V}_n$. По Лему 4.3.5, полиноми

$$f_{j\mu}(z) := (z - z_j)^{n-\mu} \quad (j = 1, \dots, k, \quad \mu = 0, \dots, m_j - 1)$$

припадају $\mathcal{V}_n$. Пошто постоји укупно n полинома $f_{j\mu}$, довољно је да покажемо да су они линеарно независни.

Претпоставимо супротно, да

$$\sum_{j=1}^k \sum_{\mu=0}^{m_j-1} c_{j\mu} f_{j\mu}(z) \equiv 0,$$

а да сви коефицијенти $c_{j\mu}$ нису једнаки нули. Ако запишемо леву страну као $\sum_{\nu=0}^n L_\nu z^\nu$, онда морамо имати $L_n = L_{n-1} = \dots = L_0 = 0$. Пошто

$$L_\nu = \sum_{j=1}^k \sum_{\mu=0}^{m_j-1} \binom{n-\mu}{\nu} (-z_j)^{n-\mu-\nu} c_{j\mu} \quad (\nu = n, n-1, \dots, 1, 0),$$

где је $\binom{n-\mu}{\nu}$ представљено као нула када $\nu > n - \mu$, следи да систем

$$\sum_{j=1}^k \sum_{\mu=0}^{m_j-1} \binom{n-\mu}{\nu} (-z_j)^{n-\mu-\nu} x_{j\mu} = 0 \quad (\nu = n, n-1, \dots, 1)$$

од n једначина са n непознатих $x_{j\mu}$ има

$$x_{j\mu} = c_{j\mu} \quad (j = 1, \dots, k, \quad \mu = 0, \dots, m_j - 1)$$

нетривијално решење. Дакле, детермината овог система мора нестати. Њене колоне су

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\binom{n}{1}z_j & 1 & \dots & 0 \\ \binom{n}{2}z_j^2 & -\binom{n-1}{1}z_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}z_j^{n-1} & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}z_j^{n-2} & \dots & (-1)^{n-m_j}\binom{n-m_j+1}{n-m_j}z_j^{n-m_j}, \end{array}$$

где $j = 1, \dots, k$. Детермината једнака нули подразумева да, нетривијалном линеарном комбинацијом редова, можемо да генеришемо ред нултих уноса. Еквивалентно, постоји полином

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \lambda_\nu z^\nu$$

који није идентички једнак нули такав да

$$(-1)^\mu n \cdots (n - \mu + 1) p^{(\mu)}(z_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, k, \quad \mu = 0, \dots, m_j - 1).$$

Тако би p имало укупно од најмање $\sum_{j=1}^k m_j = n$ нула, што је немогуће, јер је степен полинома p највише $n - 1$. ■

Релевантност аполарности у вези са Лагеровом теоремом демонстрира се следећим резултатом.

Лема 4.3.7 *Нека су f и g аполарни полиноми степена n . Тада, или полином g има нулу z^* такву да су*

$$F(z^*, z) := nf(z) - (z - z^*)f'(z) \quad \text{и} \quad g_*(z) := \frac{g(z)}{z - z^*} \quad (4.3.6)$$

аполарни полиноми степена $n - 1$ или f и g имају заједничку нулу.

Доказ. Нека је $g(z) = b_n \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{m_j}$, где су $z_1, \dots, z_k$ различити бројеви. Тада по

Теореме 4.3.6, f мора бити облика $f = \sum_{j=1}^k f_j$, где

$$f_j(z) := \sum_{\mu=0}^{m_j-1} c_{j\mu} (z - z_j)^{n-\mu} \quad (j = 1, \dots, k).$$

Сада, нека је z^* било која нула полинома g . Увођењем полинома (4.3.6) и дефинисањем

$$F_j(z^*, z) := nf_j(z) - (z - z^*)f'_j(z),$$

можемо записати

$$\begin{aligned} F(z^*, z) &= nf(z) - (z - z^*)f'(z) \\ &= n \sum_{j=1}^k f_j(z) - (z - z^*) \sum_{j=1}^k f'_j(z) = \sum_{j=1}^k F_j(z^*, z). \end{aligned}$$

Очигледно, $F_j(z^*, z)$ је полином степена највише $n - 1$ у тачки z , са тачком z_j као нулом чија је вишеструкост најмање $n - m_j + 1$ када $z_j = z^*$ и најмање $n - m_j$ када $z_j \neq z^*$. Према томе $F_j(z^*, z)$ је облика

$$F_j(z^*, z) = \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \gamma_{j\nu} (z - z_j)^{n-1-\nu} \quad \left(n_j := \begin{cases} m_j & \text{ако } z_j \neq z^*, \\ m_j - 1 & \text{ако } z_j = z^* \end{cases} \right).$$

Ово значи, по Теорему 4.3.6, да је полином $F(z^*, z) = \sum_{j=1}^k F_j(z^*, z)$ међу полиномима

аполарним полиному $b_n \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{n_j} = g_*(z)$, под условом да је $F(z^*, \cdot)$ степена $n - 1$.

Да одредимо степен полинома $F(z^*, z) =: \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu}^* z^{\nu}$, приметимо да се a_{n-1}^* може изразити као

$$a_{n-1}^* = \frac{f^{(n-1)}(0) + z^* f^{(n)}(0)}{(n-1)!}.$$

Стога, аполарност остаје када нулу z^* полинома g одаберемо тако да $a_{n-1}^* \neq 0$.

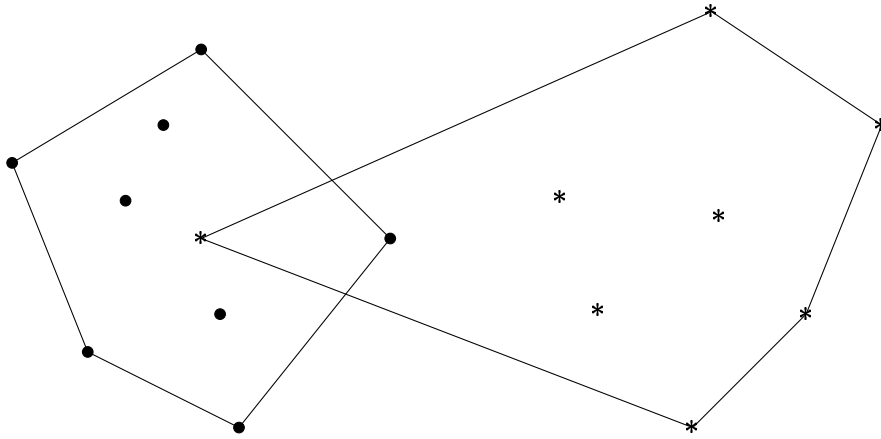
Ако a_{n-1}^* нестаје за сваку нулу z^* полинома g , онда је $z^* = -\frac{f^{(n-1)}(0)}{f^{(n)}(0)}$ једина нула полинома g и $g(z) = b_n(z - z^*)^n$. Сада, Теорема 4.3.6, показује да сваки полином који је аполаран полиному g има нулу z^* . Према томе, z^* је заједничка нула полинома f и g . ■

4.4 Грејсова теорема

Сада смо спремни за један од најважнијих резултата. Као што смо видели у претходном одељку, аполарни полиноми не морају имати заједничку нулу. Међутим, важи следећи однос између њихових нула (за илустрацију, видети слику 4.1).

Теорема 4.4.1 (Грејс) *Нека су f и g аполарни полиноми. Тада, сваки кружни домен који садржи све нуле једног од полинома, садржи најмање једну нулу другог полинома.*

Доказ. Доказаћемо теорему принципом математичке индукције. Прво проверавамо да ли тврђење важи за $n = 1$. Ако су $f(z) = a_1 z + a_0$ и $g(z) = b_1 z + b_0$ аполарни полиноми степена 1, онда је $a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$ и имају заједничку нулу $z^* = -\frac{a_0}{a_1} = -\frac{b_0}{b_1}$.



Слика 4.1: Нуле и скупови конвексних комбинација $\mathcal{K}(f)$ и $\mathcal{K}(g)$ парова аполарних полинома f и g степена 8. Нуле полинома f су означене тачкицама, а нуле полинома g звездицама.

Претпоставимо сада да тврђење важи за полиноме степена $n - 1 \geq 1$, треба да докажемо да важи за n . Нека су f и g аполарни полиноми степена n и нека је $\mathcal{K}$ кружни домен који садржи све нуле полинома g . Ако f и g имају заједничку нулу, онда немамо шта да доказујемо. У супротном, по Лему 4.3.7, постоји нула z^* полинома g таква да су полиноми $F(z^*, \cdot)$ и g_* , дефинисани у (4.3.6), аполарни и оба су степена $n - 1$. Како све нуле полинома g_* леже у $\mathcal{K}$, закључујемо, на основу индуктивне претпоставке, да $F(z^*, \cdot)$ има најмање једну нулу у $\mathcal{K}$. По Теорему 4.2.1 а, ово не би било могуће за $z^* \in \mathcal{K}$ ако f има све своје нуле изван $\mathcal{K}$.

Коначно, примећујемо да у претходним разматрањима улоге полинома f и g могу бити замењене пошто је аполарност симетрична релација. ■

Теорема 4.4.1 каже, еквивалентно, да се нуле два аполарна полинома не могу раздвојити кругом. У ствари, не могу се раздвојити границом кружног домена, која је или круг или права. У овој ситуацији, довољно је рећи круг, јер ако су нуле раздвојене правом, онда, као што је геометријски очигледно, постоји и (довољно велики) круг који их раздваја. Означавајући, као у Глави 2, скуп свих конвексних комбинација елемената скупа који садржи све нуле полинома f са $\mathcal{K}(f)$, можемо навести следећу последицу Грејсове теореме.

Последица 4.4.2 Нека су f и g аполарни полиноми. Тада $\mathcal{K}(f) \cap \mathcal{K}(g) \neq \emptyset$.

Доказ. Ако дато тврђење не важи, онда би постојала права која раздваја $\mathcal{K}(f)$ и $\mathcal{K}(g)$. Дакле, нуле полинома f би лежале у кружном домену, односно, полуравни у којој нема нула полинома g . ■

Грејсова теорема је примењена и преформулисана на разне начине. Међу његовим најзанимљивијим еквивалентним облицима је и следећа теорема.

Теорема 4.4.1 а (Сегова теорема конволуције) Нека је $f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$ полином

степенa n , чији коефицијенти задовољавају линеарну релацију

$$l_n a_0 + l_{n-1} a_1 + \dots + l_0 a_n = 0 \quad (l_n \neq 0).$$

Тада полином f има најмање једну нулу у сваком кружном домену који садржи све нуле полинома

$$\varphi(z) := \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} l_\nu z^\nu.$$

Доказ. Под претпоставком ове теореме, лако се закључи да су полиноми f и φ аполарни. Према томе, ова теорема је последица Теореме 4.4.1. ■

Глава 5

Комплексни аналог Ролове теореме

Ако је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција и $f(a) = f(b)$, онда постоји $\xi \in (a, b)$ такво да је $f'(\xi) = 0$. Ова класична Ролова теорема више не важи, уколико f има комплексну вредност. Заиста, ако је $f(z) := e^{i\pi z}$, онда $f(-1) = f(1)$, али f нема ниједну критичну тачку. Полином степена $n \geq 2$ не може бити лишен критичних тачака, али за $n \geq 3$ може се десити да ниједна тачка не лежи на $[-1, 1]$, чак и ако је $f(-1) = f(1)$. На пример, полином

$$f(z) := \left(z - i \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}\right)^n$$

степен n има само једну критичну тачку; она лежи у тачки $i \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$, иако је $f(-1) = f(1)$. Али онда, колико далеко од $[-1, 1]$ могу лежати све критичне тачке полинома f степена n , ако је $f(-1) = f(1)$? Одговор је дат у следећој теорему, која каже да затворен диск $\mathcal{D}_n := \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}\right\}$ садржи најмање једну критичну тачку. Може се десити да ниједна од њих не буде у унутрашњости диска $\mathcal{D}_n$, као што смо видели у примеру.

Теорема 5.1 (Грејс-Хивуд) *Нека је f полином степена $n \geq 2$. Ако су $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ било које две различите тачке у којима полином f има исту вредност, онда диск*

$$\mathcal{D}(z_1, z_2, n) := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{2}\right| \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}\right\}$$

садржи најмање једну критичну тачку полинома f .

Додатак. Под условима дате теореме, сваки кружни домен, који садржи све тачке облика

$$\frac{1}{2} \left((z_1 + z_2) + i(z_1 - z_2) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\nu\pi}{n} \right) \quad (\nu = 1, \dots, n-1)$$

садржи најмање једну критичну тачку полинома f . Посебно, ниједна од две затворене полуравни, чија је граница симетрала сегмента $\overline{z_1, z_2}$, није лишена критичних тачака.

Доказ. Користећи афину трансформацију

$$z \rightarrow \frac{z_2 - z_1}{2} \cdot z + \frac{z_1 + z_2}{2},$$

можемо се ограничити на специјалан случај где је $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$. Записујући изводе као

$$f'(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1},$$

имамо

$$0 = f(1) - f(-1) = \int_{-1}^1 f'(t) dt = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \dots$$

Сада, примењујемо Теорему 4.4.1 а на полином f' степена $n - 1$. Његов аполарни полином φ представљамо

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (-1)^{n-1} \left(2z^{n-1} + \binom{n-1}{2} \frac{2}{3} z^{n-3} + \binom{n-1}{4} \frac{2}{5} z^{n-5} + \dots \right) \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n-1} \left(\binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{3} z^{n-3} + \binom{n}{5} z^{n-5} + \dots \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} ((z+1)^n - (z-1)^n). \end{aligned}$$

Његове нуле су $-i \operatorname{ctg} \frac{\nu\pi}{n}$ за $\nu = 1, \dots, n-1$. Према томе, по Теорему 4.4.1 а, сваки кружни домен који садржи све ове тачке, садржи такође и најмање једну критичну тачку полинома f . Најмањи кружни домен ове врсте је очигледно диск $\mathcal{D}(-1, 1, n) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right\}$. Овим смо доказали теорему и додатак. ■

Теорема 5.1 подразумева да, ако полином степена $n \geq 3$ нема критичних тачака у затвореном диску полупречника r , онда тај полином не може имати исту вредност у две дијаметрално супротне тачке концентричног диска полупречника $r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. Од великог је значаја утврдити концентричан диск, такав да f не може имати исту вредност у било које две тачке тог диска. Јасно је да ће то довести до довољно корисног услова да полином буде једновалентан на диску.

Теорема 5.2 (Какеја) *Ако полином степена n нема критичних тачака у затвореном диску полупречника r , онда је он једновалентан у концентричном, затвореном диску полупречника $r \sin \frac{\pi}{n}$.*

Последица 5.1 *Константа $\sin \frac{\pi}{n}$ не може бити замењена већим бројем. Заиста, полином*

$$f(z) := \left(z + r e^{\frac{i\pi}{n}} \right)^n - \left(r \cos \frac{\pi}{n} \right)^n$$

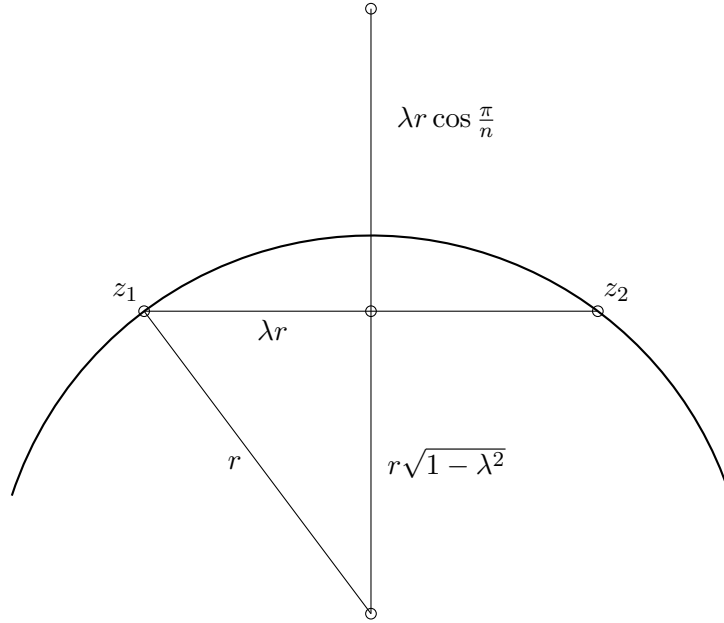
има само једну критичну тачку, која је реда $n-1$ и лежи у $-r e^{\frac{i\pi}{n}}$, али

$$f\left(-ir \sin \frac{\pi}{n}\right) = f\left(ir e^{\frac{2\pi i}{n}} \sin \frac{\pi}{n}\right) = 0,$$

на полином f има две нуле модула $r \sin \frac{\pi}{n}$.

Доказ Теореме 5.2. Доказаћемо еквивалентно тврђење, да, ако полином f има исту вредност у две различите тачке затвореног диска $\mathcal{K}(r)$ полупречника r , онда полином f има најмање једну критичну тачку у концентричном затвореном диску полупречника $\frac{r}{\sin \frac{\pi}{n}}$.

Заиста, по Теорему 5.1, унија $\mathcal{U}$ свих дискова $\mathcal{D}(z_1, z_2, n)$, са тачкама z_1 и z_2 које леже у $\mathcal{K}(r)$, садржи најмање једну критичну тачку полинома f . Да одредимо $\mathcal{U}$,



Слика 5.1: Доказ Теореме 5.2 (Какеја).

записаћемо га као $\mathcal{U} = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \mathcal{V}(\lambda)$, где

$$\mathcal{V}(\lambda) := \bigcup \left\{ \mathcal{D}(z_1, z_2, n) : z_1, z_2 \in \mathcal{K}(r), \frac{|z_1 - z_2|}{2r} = \lambda \right\}.$$

Скуп $\mathcal{V}(\lambda)$ је диск, концентричан са $\mathcal{K}(r)$; његова граница је омотач свих дискова $\mathcal{D}(z_1, z_2, n)$ таквих да су z_1 и z_2 екстремне тачке тетиве од $\mathcal{K}(r)$, дужине $2\lambda r$. За полупречник $\rho(\lambda)$ од $\mathcal{V}(\lambda)$, налазимо да (видети Сliku 5.1)

$$\rho(\lambda) = r \left(\sqrt{1 - \lambda^2} + \lambda \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Коначно, проста калкулација показује да $\rho(\lambda) \leq \rho \left(\cos \frac{\pi}{n} \right) = \frac{r}{\sin \frac{\pi}{n}}$. ■

Приступ коришћен за Теорему 5.1 даје дискове који садрже бар једну критичну тачку. Остали типови домена такође могу бити интересантни.

Литература

- [1] Б. Карапетровић, *Увод у комплексну анализу - збирка задатака*, Математички факултет, Београд, 2020.
- [2] Б. Карапетровић, *Белешке са курса Увод у комплексну анализу*, Математички факултет, Београд, 2020.
- [3] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials*, Clarendon press, 2002.
- [4] T. Sheil-Small, *Complex Polynomials*, Cambridge University Press, 2002.

Списак симбола

$\arg z$	аргумент комплексног броја z
$\mathbb{C}$	комплексна равна
$\mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ пробушена комплексна равна
$\hat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ проширена комплексна равна
$\mathcal{C}(\Omega)$	непрекидне функције у области Ω
$\cos$	тригонометријска функција косинус у комплексној равни
ctg	тригонометријска функција котангенс у комплексној равни
$\mathcal{C}(S)$	конвексан омотач скупа $S \subset \mathbb{C}$
$\mathbb{D}$	јединични диск са центром у координатном почетку у комплексној равни $\mathbb{C}$
$\mathcal{D}(z_0; R)$	диск са центром у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника R
$\overline{\mathcal{D}}(z_0; R)$	затворен диск са центром у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника R
$\deg f$	степен полинома f
$\operatorname{diam} S$	дијаметар скупа $S \subset \mathbb{C}$
$\Delta_\gamma \arg f(z)$	прираштај аргумента функције f дуж криве γ у комплексној равни $\mathbb{C}$
$\mathcal{H}(\mathcal{D}(z_0; r))$	холоморфне функције на диску $\mathcal{D}(z_0; R)$
i	имагинарна јединица
$\operatorname{Im} z$	имагинаран део комплексног броја z
$\mathcal{K}(S)$	скуп свих конвексних комбинација скупа $S \subset \mathbb{C}$
$\ell(\gamma)$	дужина криве γ у комплексној равни $\mathbb{C}$
$\mathbb{N}$	скуп природних бројева
$\mathbb{N}_0$	скуп $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	скуп реалних бројева
$\operatorname{Re} z$	реалан део комплексног броја z
$\sin$	тригонометријска функција синус у комплексној равни
tg	тригонометријска функција тангенс у комплексној равни
$ z $	модул комплексног броја z
$\bar{z}$	конјугат комплексног броја z
$ z - w $	растојање између тачака $z, w \in \mathbb{C}$
Ω	област у комплексној равни $\mathbb{C}$