УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Катарина Ђокић

ФАРКАС - РИТОВА ТЕОРЕМА О ФИКСНОЈ ТАЧКИ

• МАСТЕР РАД •

Београд, 2023.

МЕНТОР

- др Бобан Карапетровић, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

ОСТАЛИ ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

- др Миљан Кнежевић, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

- др Владимир Божин, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

Садржај

Увод

Једна од основних теорема фиксне тачке за холоморфне функције у комлексној равни, јесте Фаркас - Ритова теорема, која тврди да свака холоморфна функција f у јединичном диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ која испуњава услов $\overline{f(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$, има јединствену фиксну тачку у $\mathbb{D}$. Поред тога, низ итерација $f, f \circ f, f \circ f \circ f, ...$ функције f равномерно конвергира на компактним подскуповима диска $\mathbb{D}$ ка константној функцији индукованој том фиксном тачком. Постоји више доказа претходне теореме, који комбинују варијанте неких од основних тврђења комплексне анализе и геометријске теорије функција, као што су Шварц - Пикова лема и Рушеова теорема. Циљ рада је излагање основа теорије фиксне тачке за холоморфне функције једне променљиве укључујући и више доказа Фаркас - Ритове теореме, од којих неки користе основна тврђења теорије фиксне тачке, као што су Банахова теорема о фиксној тачки и Брауерова теорема о фиксној тачки.

У првом поглављу рада дата је дефиниција метричких простора, њихових основних особина као и примери истих. Посебну пажњу смо посветили комплетним метричким просторима. После уводне приче о метрици и комплетности, формулисали смо и доказали Банахову теорему о фиксној тачки, која гарантује постојање и јединственост фиксне тачке одређених пресликавања из неког метричког простора у самог себе и даје конструктивни метод за проналажење фиксне тачке. Ова теорема представља класичан резултат теорије непокретне тачке, која заузима значајно место у математици. У другом поглављу смо навели Рушеову теорему, која тврди да мале промене функције која је холоморфна у неком отвореном скупу који садржи затворење неке ограничене области у комплексној равни, неће утицати на број нула дате функције у тој области. У трећем поглављу обрадили смо Шварцову лему, затим смо дефинисали аутоморфизме у комплексној равни и истакли њихове основне особине. У овој глави је представљена и Шварц - Пикова лема, која представља уопштење Шварцове леме. Централно место у овом поглављу представља дефиниција Поенкареове метрике као и особине исте. Показали смо да је јединични диск $\mathbb{D}$ снабдевен Поенкареовом метриком, комплетан метрички простор. Последица тога, јесте доказ Фаркас - Ритове теореме о фиксној тачки, који је разрађен у четвртом поглављу користећи Банахову теорему о фиксној тачки. Поред тога, навели смо и још један доказ Фаркас - Ритове теореме који се заснива на примени већ поменуте Рушеове теореме.

Искористила бих прилику да се захвалим свом ментору на одабиру интересантне теме као и на помоћи приликом обраде исте. Захвалност дугујем и члановима комисије.

Катарина Ђокић

Глава 1

Банахова теорема о фиксној тачки

Метрички простор је скуп на коме је дефинисан појам растојања две тачке (метрике). Појам границе је дуго био везан за појам растојања две тачке, па су зато готово сви класични простори снабдевени дефиницијом растојања два елемента. Такав је случај са скупом реалних и комплексних бројева, скупом уређених n-торки, скупом ограничених реалних функција итд.

На скупу реалних бројева, растојање d две тачке a и b мерили смо апсолутном вредношћу разлике, то јест $d(a,b) = |a-b|$. У n-димензионом Еуклидском простору, растојање d између тачака $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ дефинишемо на следећи начин

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$$

У скупу ограничених функција, дефинисаних на интервалу (p,q), дефинишемо растојање између два елемента f и g на следећи начин

$$d(f,g) = \sup|f(a) - g(a)|, \quad a \in (p,q).$$

Дефиниција 1.1 *Нека је X непразан скуп. Функција $d : X \times X \to [0,+\infty)$ јесте метрика, или растојање, у скупу X, ако за свако $x,y,z \in X$ важи:*
(а) $d(x,y) \geq 0$ (ненегативност);
(б) $d(x,y) = 0$ ако и само ако је $x = y$;
(в) $d(x,y) = d(y,x)$ (симетричност);
(г) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (неједнакост троугла).
Тада кажемо да је пресликавање d метрика на скупу X. Уређени пар (X,d) је метрички простор,а број $d(x,y)$ растојање елемената x и y. ♠

Пример 1.1 $(\mathbb{R}^n, d_p)$ *је метрички простор где за $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ дефинишемо растојање $d_p(a,b), p \geq 1$, на следећи начин*

$$d_p(a,b) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|a_i - b_i|^p}.$$

За $p = 1$ и $n = 1$ добијамо метрички простор $(\mathbb{R}, d_1)$,

$$d_1(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i - b_i|}.$$

Пример 1.2 *Нека је $C[a,b]$ скуп непрекидних реалних функција дефинисаних на интервалу $[a,b] \subset \mathbb{R}$. За $f, g \in C[a,b]$ дефинише се $d(f,g)$ на следећи начин*

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x), g(x)|.$$

Тада је $(C[a,b], d)$ метрички простор.

Напомена 1.1 *$C[a,b]$ са метриком $d_p, r \geq 1$, дефинисаном на следећи начин*

$$d_r(f,g) = \Big(\int_a^b |f(x) - g(x)|^r \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{r}}, \quad \textit{за све} \;\; f, g \in C[a,b],$$

је такође метрички простор.

Пример 1.3 *Нека је ℓ^∞ простор ограничених низова у $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Ако $a, b \in \ell^\infty$*

$$d(a,b) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i - b_i|,$$

где је $a = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} = (a_i)$, $b = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}} = (b_i)$. Тада је (ℓ^∞, d) метрички простор.

Дефиниција 1.2 *Низ $(a_n)_n$ је Кошијев низ у метричком простору X, ако за свако $\epsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, тако да за свако $n, m \in \mathbb{N}$ важи импликација*

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

♠

Теорема 1.1 *Сваки конвергентан низ је Кошијев.*

Доказ. Претпоставимо да је $(a_n)_n$ конвергентан низ. Тада постоји $a \in X$ тако да је $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Нека је $\epsilon > 0$. Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за свако $n \geq n_0$ важи $d(a_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Претпоставимо да је $n, m \geq n_0$. Тада је

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Тиме је доказано да је низ $(a_n)_n$ Кошијев. ■

Напомена 1.2 *Обрнуто не мора да важи, то јест Кошијев низ не мора да конвергира.*

Теорема 1.2 *Ако је $(x_n)_n$ Кошијев низ, и ако постоји његов подниз $(x_{n_k})_k$ који конвергира ка тачки $a \in X$, тада и низ $(x_n)_n$ конвергира ка тачки a.*

Доказ. Нека је $\epsilon > 0$. Низ $(x_n)_n$ је Кошијев, и зато постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за свако $n, m \geq n_0$ важи $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Са друге стране, $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$, те постоји $k_0 \in \mathbb{N}$, тако да за свако $k \geq k_0$ важи $d(x_{n_k}, a) < \epsilon$. Нека је $n_1 = \max\{n_0, n_{k_0}\}, n \geq n_1, k \geq k_0$ тако да је $n_k \geq n_1$. Tada је

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < 2\epsilon.$$

Тиме смо доказали да је $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. ■

Дефиниција 1.3 *Метрички простор је комплетан, ако у њему сваки Кошијев низ конвергира.*

Нека је (X, d) метрички простор. $C_b(X)$ је скуп непрекидних ограничених функција на X. Јасно је да са уобичајеним множењем скаларом из $\mathbb{C}$ је то векторски простор. Са $D(f,g) = \sup_{t\in X} |f(t) - g(t)|$ дефинишемо метрику на $C_b(X)$.

Пример 1.4 $(C_b(X), D)$ *је комплетан.*

Решење. Нека је $(f_n)_n$ Кошијев и нека је $\epsilon > 0$. Знамо

$$D(f_n, f_m) \leq \epsilon;\ n, m \geq n_0 \Leftrightarrow (\forall t \in X)(\forall n, m \geq n_0)(|f_n(t) - f_m(t)| \leq \epsilon \tag{1}$$

Фиксирајмо $t \in X$. Низ комплексних бројева $(f_n(t))_n$ је Кошијев у $\mathbb{C}$ па је и конвергентан. Дефинишимо $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t),\ \ , t \in X$. Треба показати да је $f \in C_b(X)$ и да важи $D(f_n, f) \to 0, n \to \infty$. Из (1), пуштајући $m \to \infty$, следи да за свако $t \in X$ важи

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon \tag{2}$$

Из (2) и узимајући $n = n_0$ добијамо $|f(t)| \leq |f_{n_0}(t)| + \epsilon,\ t \in X$. Дакле f је ограничена. Нека је $n \geq n_0$ и нека је t_1 фиксирана тачка у X. Важи

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq |f(t_1) - f_n(t_1)| + |f_n(t_1) - f_n(t_2)| + |f_n(t_2) - f(t_2)|,\ \ t_2 \in X$$

Без обзира на избор t_1 и t_2, на основу (2), следи да су први и трећи сабирак $\leq \epsilon$. Како је f_n непрекидна, знамо да постоји $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ тако да је $d(t_1, t_2) \leq \delta$ одакле следи да је $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leq \epsilon$. Све заједно даје

$$d(t_1, t_2) \leq \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq 3\epsilon.$$

То значи да је f непрекидна. Ако пажљивије погледамо (2), закључујемо да је (2) еквивалентно са $(n \geq n_0) \Rightarrow \sup_{t\in X} |f_n(t) - f(t)| = f(f_n, f) \leq \epsilon$. Тиме је овај пример завршен. ■

У класи метричких простора 1922. године, Стефан Банах формулисао је и доказао теорему о фиксној тачки за контрактивна пресликавања. Она има велики значај у математици и представља класичан резултат теорије непокретне тачке.

Теорема 1.3 (Банахова теорема о фиксној тачки) *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и нека је пресликавање $f : X \to X$ контракција, то јест постоји $c \in (0, 1)$ тако да важи да је $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ за све $x, y \in X$. Тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку.*

Доказ. За почетак ћемо индуктивно дефинисати пресликавања $f_1 = f$ и $f_{n+1} = f \circ f_n$ за $n \geq 1$. Тада добијамо да за произвољно одабрану тачку $x \in X$ и произвољно $n \in \mathbb{N}$ важи

$$d(f_n(x), f_{n+1}(x)) \leq cd(f_{n-1}(x), f_n(x)) \leq ... \leq c^n d(x, f(x))$$

Сада за све $m, n \in \mathbb{N}$ имамо

$$d(f_n(x), f_{n+m}(x)) \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} d(f_k(x), f_{k+1}(x)) \leq \Big(\sum_{k=n}^{n+m-1} c^k\Big) d(x, f(x)) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x, f(x))$$

Како $\frac{c^n}{1-c}d(x,f(x)) \to 0$, када $n \to \infty$, то је $(f_n(x))$ Кошијев низ у комплетном метричком простору (X,d) и самим тим конвергира ка некој тачки $x_0 \in X$, то јест $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x_0$. Свака контракција је непрекидна функција и следи

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} f(f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = x_0$$

односно x_0 је фиксна тачка пресликавања f. Уколико су x_0 и y_0 две фиксне тачке пресликавања f, важи

$$f(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \leq cd(x_0, y_0).$$

Одатле је $d(x_0, y_0) = 0$, јер $c \in (0,1)$, то јест $x_0 = y_0$. Према томе, f има јединствену фиксну тачку. ■

Банахову теорему о фиксној тачки можемо применити у доказима теорема о егзистенцији и јединствености решења једначина различитог типа. Уочимо да доказивање егзистенције и јединствености решења једначине $f(x) = x$ применом Банахове теореме о фиксној тачки даје и поступак приближног налажења тог решења који је познат као метод сукцесивних апроксимација. За почетак посматрајмо најједноставнији случај реалне функције једне промењиве.
Ако за реалну функцију $f : [a,b] \to [a,b]$ постоји реалан број $c \in [0,1)$ тако да важи

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq c|x_1 - x_2|,$$

тада постоји јединствено решење једначине $f(x) = x$ које се добија методом сукцесивних апроксимација. Специјално, ако је функција f диференцијабилна на интервалу $[a,b]$ и при томе важи $|f'(x)| \in [0,1), x \in (a,b)$, тада на основу Лагранжове теореме важи

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2|, \text{ за неко } \xi \in (x_1, x_2) \subset [a,b],$$

па постоји јединствено решење једначине $f(x) = x$ чију приближну вредност можемо одредити методом сукцесивних апроксимација.

Пример 1.5 *Показати да је функција* $f(x) = \sqrt{(1-\sin x)}$ *контракција која пресликава интервал* $[0.4, 0.8]$ *у самог себе и има јединствену фиксну тачку.*

Решење. За почетак пронађимо први извод функције f

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}} < 0$$

Дакле, за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функција f је опадајућа на овом интервалу.
Како је $f(0.8) = 0.5532.. \geq 0.4$ и $f(0.4) = 0.782.. \leq 0.8$ функција f пресликава интервал $[0.4, 0.8]$ у самог себе. Пошто је $\mathbb{R}$ комплетан простор, такође је и затворени интервал $[0.4, 0.8]$ комплетан.
Први извод функције f над интевалом $[0.4, 0.8]$ је

$$|f'(x)| \leq \frac{\cos 0.4}{2\sqrt{(1-\sin 0.8)}} = 0.86624 < 0.87.$$

На основу Лагранжове теореме о средњој вредности важи да је

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\cos 0.4}{2\sqrt{(1-\sin 0.8)}}|x-y| \leq 0.87|x-y|.$$

То значи да је функција f контракција са коефицијентом контракције $c = 0.87$ па на основу Банахове теореме о фиксној тачки постоји јединствена фиксна тачка пресликавања f на датом интервалу. За полазну тачку можемо узети било коју тачку датог интервала. Ако је $x_0 = 0.6$ тада је $x_1 = f(x_0) = 0.6598$, $x_2 = f(x_1) = 0.6221$.. Апроксимације и оцене грешака апроксимација дате су у следећој табели:

k	x_k	A_k	B_k
0	0.6	$-$	$-$
1	0.65981	0.40027	0.40027
2	0.62211	0.2523	0.34823
3	0.64595	0.15955	0.30296
4	0.63091	0.10065	0.26358
5	0.64041	0.06358	0.22931
6	0.63441	0.04015	0.1995

Где је

$$A_k = \frac{c}{1-c}|x_k - x_{k-10}|, \;\; B_k = \frac{c^k}{1-c}|x_1 - x_0|.$$

Вредност A_k назива се апостериорна оцена грешке, а вредност B_k априорна оцена грешке. ■

Глава 2

Рушеова теорема

Лема 2.1 *Сваки полином f степена $n > 0$ има укупно n комплексних нула и може се представити као*

$$f(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{m_j},$$

где је $a_n \neq 0, z_1, z_2, \ldots, z_k$ различите нуле и $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ такви да је $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

Теорема 2.1 (Принцип аргумената) *Нека је γ позитивно орјентисана Жорданова крива у комплексној равни и нека је f рационална функција дефинисана у домену који садржи γ и њену унутрашњост. Претпоставимо да γ не садржи нуле нити полове функције f. Нека се z креће по γ у позитивном смеру. Онда*

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = 2\pi(m - \ell),$$

где је m број нула, а ℓ број полова који леже у унутрашњости криве γ узимајући у обзир и њихове вишеструкости, а $\Delta_\gamma \arg f(z)$ је прираштај аргумента функције f дуж криве γ.

Доказ. Нека је a почетна тачка на кривој γ. Затим изаберимо $\arg(z - \zeta)$ у довољно малој околини тачке a. Тада, како се z креће по γ у позитивном смеру, прираштај $\arg(z - \zeta)$ тежи 2π ако ζ лежи унутар γ, али је нула ако лежи изван γ.
Рационалну функцију можемо записати као $f = \dfrac{P}{Q}$, где су P и Q полиноми без заједничке нуле. Тада је

$$\arg f(z) = \arg P(z) - \arg Q(z).$$

Ако изоставимо тривијалан случај где је P константно, на основу претходне леме добијамо

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{m_j}$$

из чега следи

$$\arg P(z) = \arg a_n + \sum_{j=1}^{k} m_j \arg(z - z_j).$$

Слично, добијамо и за $\arg Q(z)$. Из претходног лако долазимо до жељеног резултата. ■

Теорема 2.2 (Рушеова теорема) *Нека су функције f и g холоморфне у неком отвореном скупу који садржи затворење ограничене области Ω у комплексној равни, при чему важи*

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ за све } z \in \partial\Omega.$$

Тада функције f и $f+g$ имају исти број нула у области Ω.

Доказ. На почетку прво уведимо следеће ознаке:
$H(\overline{\Omega})$ - све холоморфне функције у области $\overline{\Omega}$;
N_f - број нула функције f;
P_f - број полова функције f;
N_{f+g} - број нула функције $f+g$;
P_{f+g} - број полова функције $f+g$.
Пошто $f, g \in H(\overline{\Omega})$, то значи да ће и $f+g \in H(\overline{\Omega})$, одакле даље следи да је $P_f = 0$ и $P_{f+g} = 0$. Даље можемо закључити да f нема нула на $\partial\Omega$, јер је

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0, \; z \in \partial\Omega.$$

Слично $f+g$ нема нула на $\partial\Omega$, јер важи да је

$$|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0, \; z \in \partial\Omega.$$

Како су $P_f = 0$ и $P_{f+g} = 0$, то на основу принципа агумената имамо да је

$$N_f = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\Omega} \arg f(z) \text{ и } N_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\Omega} \arg(f(z) + g(z))$$

Користећи ове једнакости и особину аргумента $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 \cdot \arg z_2$ добијамо следеће

$$\begin{aligned} N_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\Omega} \arg(f(z)+g(z)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\Omega} \arg\left(f(z) \cdot \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right) &= \\ \frac{1}{2\pi}\left[\Delta_{\partial\Omega} \arg f(z) + \Delta_{\partial\Omega} \arg(1 + \frac{g(z)}{f(z)})\right] &= \\ \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\Omega} \arg f(z) &= N_f \end{aligned}$$

У датој једнакости искористили смо претпоставку да је $|f(z)| > |g(z)|$ одакле важи да је $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ то јест $\left|(1 + \frac{g(z)}{f(z)}) - 1\right| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$. Означимо сада $\xi = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$. То значи да је $|\xi - 1| = 1$. При пресликавању $\partial\Omega$ добијамо затворену криву унутар круга $|\xi - 1| = 1$, а пошто крива не обилази око нуле, то се arg не мења за 2π, одакле следи да је $\Delta_{\partial\Omega} \arg(1 + \frac{g(z)}{f(z)}) = 0$, што заменом у горњу једнакост даје тражени резултат. ■

Пример 2.1 *Нека је $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, при чему важи да је $g(\mathbb{T}) \subset \mathbb{D}$. Доказати да функција g има јединствену фиксну тачку у диску $\mathbb{D}$.*

Решење. Тачка $z \in \mathbb{D}$ је фиксна тачка функције g ако важи $g(z) = z$, односно ако је $-z + g(z) = 0$. Уочимо функцију

$$f(z) = -z, z \in \mathbb{C},$$

која је холоморфна у комплексној равни. За све $z \in \partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$ важи

$$|g(z)| < 1 = |-z| = |f(z)|,$$

при чему смо искористили чињеницу да је $g(z) \in \mathbb{D}$, будући да према почетној претпоставци важи да је $g(\mathbb{T}) \subset \mathbb{D}$. Самим тим, Рушеова теорема повлачи да функције f и $f+g$ имају исти број нула у диску $\mathbb{D}$. Будући да функција f има тачно једну нулу у $\mathbb{D}$, то функција $f+g$ има тачно једну нулу у $\mathbb{D}$. Дакле постоји јединствена тачка $z_0 \in \mathbb{D}$, таква да је $f(z_0)+g(z_0) = -z_0 + g(z_0) = 0$, односно да важи $g(z_0) = z_0$. Следи да функција g има јединствену фиксну тачку у јединичном диску $\mathbb{D}$. ■

Пример 2.2 *Доказати да једначина $e^z = az^n$, где је $a > e$ и $n \in \mathbb{N}$, има n решења у јединичном диску $\mathbb{D}$.*

Решење. Нека је

$$f(z) = az^n \text{ и } g(z) = -e^z \text{ где је } z \in \mathbb{C}.$$

Функције f и g су холоморфне у комплексној равни за све $z \in \partial\mathbb{D}$, важи

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e^{|z|} = e < a = |f(z)|.$$

Користећи Рушеову теорему и чињеницу да функција $f(z) = az^n$ има n нула у јединичном диску $\mathbb{D}$, закључујемо да функција $f(z)+g(z) = az^n - e^z$ има такође n нула у диску $\mathbb{D}$. Дакле једначина

$$e^z = az^n,$$

има n решења у јединичном диску $\mathbb{D}$, што смо и требали да докажемо. ■

Пример 2.3 *Одредити број нула полинома $p(z) = z^5 + 6z^3 + 2z + 10$ у прстену $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.*

Решење. Најпре, уочимо полиноме $f_1(z) \equiv 10$ и $g_1(z) = p(z) - f_1(z) = z^5 + 6z^3 + 2z$, где је $z \in \mathbb{C}$. За све $z \in \partial\mathbb{D}$, важи

$$|g_1(z)| \leq |z|^5 + 6|z|^3 + 2|z| = 9 < 10 = |f_1(z)|.$$

Самим тим, важи $|p(z)| \geq |f_1(z)| - |g_1(z)| \geq 1 > 0$ за све $z \in \partial\mathbb{D}$, одакле следи да полином p нема нула на граници $\partial\mathbb{D}$. Са друге стране, на основу Рушеове теореме, можемо закључити да полиноми f_1 и $p = f_1 + g_1$ имају исти број нула у јединичном диску $\mathbb{D}$. Како је $f_1 \equiv 10 \neq 0$, то полином p нема нула у диску $\mathbb{D}$. На основу претходног, полином p нема нула у затвореном диску $\overline{\mathbb{D}}$. Даље, нека је $f_2(z) = z^5$ и $g_2(z) = p(z) - f_2(z) = 6z^3 + 2z + 10$ за све $z \in \mathbb{C}$. Тада за све $z \in \partial D(0,3)$, добијамо да важи $|g_2(z)| \leq 6|z|^5 + 2|z| + 10 = 178 < 243 = |f_2(z)|$. Применом Рушеове теореме, закључујемо да полином $p = f_2 + g_2$ има 5 нула у диску $D(0,3)$, јер је то број нула полинома f_2 у том диску. Коначно, приметимо да

$$A = D(0,3) \setminus \overline{\mathbb{D}},$$

одакле следи да број нула полинома p у прстену A добијамо када од броја нула полинома p у диску $D(0,3)$, одузмемо његов број нула у затвореном диску $\overline{\mathbb{D}}$. Према томе, на основу претходног, полином p има 5 нула у прстену A. ■

Пример 2.4 *Одредити број нула полинома* $p(z) = 3z^9 + 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$ *у диску* $D\big(0, \frac{1}{3}\big)$ *и прстену* $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Решење. Уочимо полиноме $f_1(z) \equiv 1$ i $g_1(z) = p(z) - f_1(z) = 3z^9 + 8z^6 + z^5 + 2z^3$ у комплексној равни. За $z \in \partial D\big(0, \frac{1}{3}\big)$ важи

$$|g_1(z)| \leq \frac{3}{3^9} + \frac{8}{3^6} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^3} < \frac{3+8+1+2}{3^3} = \frac{14}{27} < 1 = |f_1(z)|,$$

одакле на основу Рушеове теореме следи да полиноми $f_1(z)$ и p имају исти број нула у диску $D\big(0, \frac{1}{3}\big)$. Закључујемо да полином p нема нула у диску $D\big(0, \frac{1}{3}\big)$. Са друге стране, нека је $f_2(z) = 8z^6$ и $g_2(z) = p(z) - f_2(z) = 3z^9 + z^5 + 2z^3 + 1$. Уколико $z \in \partial\mathbb{D}$, добијамо

$$|g_2(z)| \leq 3 + 1 + 2 + 1 = 7 < 8 = |f_2(z)|,$$

односно, следи $|p(z)| = |f_2(z) + g_2(z)| \geq |f_2(z)| - |g_2(z)| > 0$, што значи да полином p нема нула на $\partial\mathbb{D}$. Такође, применом Рушеове теореме, добијамо да полиноми f_2 и p имају исти број нула у диску $\mathbb{D}$, што значи да полином p има 6 нула у диску $\mathbb{D}$. Дакле, полином p има 6 нула у затвореном диску $\overline{\mathbb{D}}$. Даље, означимо $f_3(z) = 3z^9$ и $g_3(z) = p(z) - f_3(z) = 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$. Ако $z \in \partial D(0, 2)$, налазимо

$$|g_3(z)| \leq 8 \cdot 2^6 + 2^5 + 2 \cdot 2^3 + 1 = 2^9 + 2^5 + 2^4 + 1 < 3 \cdot 2^9 = |f_3(z)|,$$

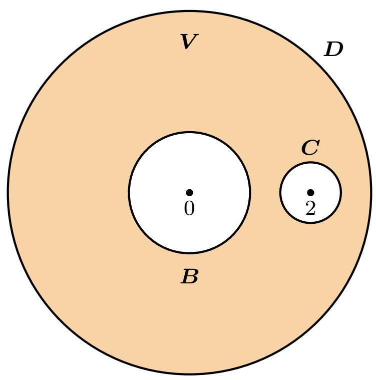
тако да на основу Рушеове теореме добијамо да полиноми f_3 и p имају исти број нула у диску $D(0, 2)$. Према томе, полином p има 9 нула у диску $D(0, 2)$. Коначно, како је

$$A = D(0, 2) \backslash \overline{\mathbb{D}},$$

следи да полином p има $9 - 6 = 3$ нуле у прстену A. ∎

Пример 2.5 *Исецањем два затворена диска* B *и* C *полупречника* 1 *и* $\frac{1}{2}$, *са центрима у тачкама 0 и 2, редом, из отвореног диска* D *полупречника 3 са центром у тачки 0, добијена је област* V. *Одредити број нула полинома* $p(z) = 15z^5 + 2z^3 + z^2 + 20z + 1$ *у области* V.

Решење. Важи $D = D(0, 3), B = \overline{D}(0, 1)$ и $C = \overline{D}(2, \frac{1}{2})$.



Слика уз Пример 2.5.

За почетак, посматрајмо полиноме $f_1(z) = 15z^5$ и $g_1(z) = p(z) - f_1(z) = 2z^3 + z^2 + 20z + 1$. За $z \in \partial D$ важи

$$|g_1(z)| \leq 2 \cdot 3^3 + 3^2 + 20 \cdot 3 + 1 = 124 < 15 \cdot 3^5 = |f_1(z)|,$$

одакле на основу Рушеове теореме можемо донети закључак да полиноми f_1 и p имају исти број нула у D. Дакле, полином p има 5 нула у отвореном диску D. Са друге стране, нека је $z \in \partial D(2, \frac{1}{2})$. Тада важи $|z - 2| = \frac{1}{2}$, одакле добијамо

$$|z| = |z - 2 + 2| \leq |z - 2| + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \text{ и } |z| = |z - 2 + 2| \geq 2 - |z - 2| = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Према претходном, за $z \in \partial D(2, \frac{1}{2})$ важи

$$|g_1(z)| \leq 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 20 \cdot \frac{5}{2} + 1 = \frac{75}{2} + 51 < 15 \cdot 7 < 15 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 \leq |f_1(z)|,$$

односно $|p(z)| = |f_1(z) + g_1(z)| \geq |f_1(z)| - |g_1(z)| > 0$. Самим тим, следи да полином p нема нула на $\partial D(2, \frac{1}{2})$. Поред тога, на основу Рушеове теореме, полиноми f_1 и p имају исти број нула у диску $D(2, \frac{1}{2})$, одакле добијамо да полином p нема нула у том диску (јер полином f_1 нема нула у диску $D(2, \frac{1}{2})$, с обзиром да важи $0 \neq D(2, \frac{1}{2})$). Према томе, на основу претходног, закључујемо да полином p нема нула у затвореном диску $C = \partial D(2, \frac{1}{2}) \cup D(2, \frac{1}{2})$. У наставку, уочимо следеће полиноме $f_2(z) = 20z$ и $g_2(z) = p(z) - f_2(z) = 15z^5 + 2z^3 + z^2 + 1$. Ако $z \in \partial D(0, 1)$ добијамо

$$|g_2(z)| \leq 15 + 2 + 1 + 1 = 19 < 20 = |f_2(z)|,$$

односно, важи $|p(z)| = |f_2(z) + g_2(z)| \geq |f_2(z)| - |g_2(z)| > 0$. Специјално, полином p нема нула на граници $\partial D(0, 1)$ и поред тога, применом Рушеове теореме следи да полиноми f_2 и p имају исти број нула у диску $D(0, 1)$. Дакле, полином p има тачно једну нулу у затвореном диску $= \partial D(0, 1) \cup D(0, 1)$. Коначно, имајући у виду да су дискови B и C дисјунктни и да важи

$$V = D \backslash (B \cup C),$$

добијамо да полином p има $5 - 1 = 4$ нуле у области V. ■

Пример 2.6 *За све $z \in \mathbb{C}$ дата је матрица*

$$A(z) = \begin{bmatrix} 4z^2 & 1 & -1 \\ -1 & 2z^2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Одредити број различитих елемената $z \in \mathbb{D}$ за које матрица $A(z)$ није инвертибилна.

Решење. Матрица $A(z)$ није инвертибилна ако и само ако важи $\det A(z) = 0$. Према томе, потребно је одредити број различитих решења једначине $\det A(z) = 0$ у јединичном диску $\mathbb{D}$. Одмах можемо приметити да важи

$$\det A(z) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2z^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4z^2 & 1 \\ -1 & 2z^2 \end{vmatrix} = 8z^2 + 6z^2 + 1.$$

Са друге стране, означимо $f(z) = 8z^2$ и $g(z) = 6z^2 + 1$. Тада будући да важи једнакост $\det A(z) = f(z) + g(z)$, потребно је одредити број различитих нула полинома $f + g$ у диску $\mathbb{D}$. За све $z \in \partial\mathbb{D}$ важи

$$|g(z)| \leq 6 + 1 < 8 = |f(z)|.$$

Како полином f има 4 нуле у диску $\mathbb{D}$, то на основу Рушеове теореме и полином $f + g$ има 4 нуле у том диску. Покажимо још да су све нуле полинома $f + g$ у диску $\mathbb{D}$ различите. Наиме, довољно је показати да полиноми $f+g$ и $(f+g)'$ немају заједничких нула. Важи

$$(f + g)'(z) = 32z^3 + 12z = 4z(8z^2 + 3).$$

Дакле, све нуле првог извода $(f + g)'$ су 0 и $\pm i\sqrt{\frac{3}{8}}$. Међутим, како је

$$(f + g)(0) = 1 \neq 0 \text{ и } (f + g)(\pm i\sqrt{\frac{3}{8}}) = -\frac{1}{8} \neq 0,$$

то полином $f+g$ нема вишеструких нула. На основу свега претходног, закључујемо да једначина $\det A(z) = 0$ има 4 различита решења у диску $\mathbb{D}$, што заправо представља број различитих елемената $z \in \mathbb{D}$ за које матрица $A(z)$ није инвертибилна. ■

Пример 2.7 *Одредити број решења једначине $ze^\lambda = e^z$ у јединичном диску $\mathbb{D}$, при чему је $\lambda > 1$.*

Решење. Нека је $f(z) = ze^\lambda$ и $g(z) = -e^z$ за све $z \in \mathbb{C}$. Број решења једначине $ze^\lambda = e^z$ у јединичном диску $\mathbb{D}$ једнак је броју нула функције $f + g$ у том диску. Приметимо да за све $z \in \partial\mathbb{D}$ важи

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e^{|z|} = e^1 < e^\lambda = |ze^\lambda| = |f(z)|.$$

На основу Рушеове теореме следи да функције f и $f+g$ имају исти број нула у диску $\mathbb{D}$. Како функција f има једну нулу у диску $\mathbb{D}$, то и функција $f + g$ има једну нулу у том диску. Дакле, једначина $ze^\lambda = e^z$ има тачно једно решење у диску $\mathbb{D}$. ■

Напомена 2.1 *На основу претходног примера једначина $ze^\lambda = e^z$, где је $\lambda > 1$, има једно решење у диску $\mathbb{D}$. Поред тога, то решење је реалан број. Наиме, посматрајмо функцију $q(x) = xe^\lambda - e^x$ на интервалу $I = (-1, 1)$. Функција q је непрекидна и важи*

$$q(-1) = -e^\lambda - e^{-1} < 0 \;\; и \;\; q(1) = e^\lambda - e^1 > 0.$$

Самим тим, функција q има нулу на интервалу $I \subset \mathbb{D}$ који представља решење почетне једначина $ze^\lambda = e^z$.

Глава 3

Поенкареова метрика

Лема 3.1 *Нека је f холоморфна функција у области* $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z \in \Omega$. *Тада је и функција* g *дата са:*

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{ако је } w \in \Omega \backslash \{z\} \\ f'(z), & \text{ако је } w = z \end{cases}$$

холоморфна у области Ω.

Доказ. Обзиром да је Ω област, постоји $R > 0$ тако да је $D(z, R) \subset \Omega$. Пошто је f холоморфна функција унутар диска $D(z, R)$, можемо је представити Тејлоровим развојем на следећи начин:

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z)^n, \quad w \in D(z, R).$$

при чему је:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \text{ за све } n \in \mathbb{N}_0.$$

Даље, можемо закључити да важи:

$$f(w) - f(z) = f(w) - a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w-z)^n = (w-z) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w-z)^{n-1} = (w-z)h(w)$$

за све $w \in D(z, R)$,при чему смо користили следећу ознаку:

$$h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w-z)^{n-1}$$

Функција h представљена је конвергентним степеним редом у диску $D(z, R)$, па можемо закључити да је h холоморфна функција унутар тог диска. Сада приметимо да за све $w \in D(z, R) \backslash \{z\}$ важи:

$$h(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = g(w)$$

Још важи и да је $h(z) = a_1 = f'(z) = h(z)$. На основу тога, важи $h = g$ у диску $D(z, R)$, па следи да је функција g холоморфна у тачки z. Такође, она је холоморфна у $\Omega \backslash \{z\}$ као композиција холоморфних функција, што директно следи из њене дефиниције. Дакле, g је холоморфна у области Ω. ■

Лема 3.2 (Шварцова лема) *Нека је f холоморфна функција унутар диска $\mathbb{D}$, при чему је $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$ за све $z \in \mathbb{D}$. Тада важи:*

1. $|f(z)| \leq |z|$, *за све* $z \in \mathbb{D}$
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Поред тога, у 1. важи једнакост за неко $z \in \mathbb{D}^{\times}$ или важи једнакост у 2. ако и само ако је f ротација, то јест ако је $f(z) = e^{i\alpha}z$ за све $z \in \mathbb{D}$ и неко $\alpha \in R$.

Доказ. Нека је дата холоморфна функција f унутар диска $\mathbb{D}$, таква да је $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$ за све $z \in \mathbb{D}$. На основу претходне леме закључујемо да функција

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{ако је } z \in \mathbb{D}^{\times} \\ f'(0), & \text{ако је } z = 0 \end{cases}$$

јесте холоморфна унутар јединичног диска $\mathbb{D}$. Нека је $t \in \mathbb{D}$ произвољно одабрана тачка. Тада можемо изабрати полупречник r, такав да је $|t| < r < 1$. Тада је $t \in D(0,r)$ и поред тога, уочимо да за све $z \in \partial D(0,r)$ важи:

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Затим, применом Принципа максимума, долазимо до закључка да важи следећа неједнакост:

$$|g(t)| \leq \max_{\overline{D}(0,r)} |g| = \max_{\partial D(0,r)} |g| \leq \frac{1}{r}$$

Када пређемо на граничну вредност $r \to 1^{-}$ налазимо $|g(t)| \leq 1$. Одатле закључујемо да важи $|g(t)| \leq 1$ за све $t \in \mathbb{D}$. У случају једнакости, функција $|g|$ достиже максимум у диску $\mathbb{D}$, одакле следи да је она константна функција са модулом једнаким 1, то јест $g \equiv e^{i\alpha}$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Из услова $|g(t)| \leq 1$, добијамо да је $|f(t)| \leq |t|$ у случају када $t \in \mathbb{D}^{\times}$ или $|f'(0)| \leq 1$ у случају када је $t = 0$, што је и требало показати. ■

Пример 3.1 *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција таква да је $f(0) = 0$.*
(а) Показати да за све $z \in \mathbb{D}$ важи:

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$$

(б) Показати да је:

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \frac{2}{3}$$

Решење. (а) Уколико искористимо Шварцову лему и применимо је на функцију f добијамо да важи $|f(z)| \leq |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$.Уочимо сада холоморфну функцију

$$g(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2}, \ \ z \in \mathbb{D}.$$

У том случају важи $g(0) = g'(0) = 0$ и

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z) + f(-z)}{2} \right| \leq \frac{|f(z)| + |f(-z)|}{2} \leq |z|, \ \ z \in \mathbb{D}$$

Користећи Лему 3.1 добијамо да функција

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z)}{z}, & \text{ако је } z \in \mathbb{D}^\times \\ 0, & \text{ако је } z = 0 \end{cases}$$

јесте холоморфна унутар диска $\mathbb{D}$. На основу Шварцове леме важи $|h(z)| \leq 1$ за све $z \in \mathbb{D}$. Уколико применимо Шварцову лему на функцију h добијамо да је $|h(z)| \leq |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$. Према томе, закључујемо да је $|g(z)| \leq |z|^2$, за све $z \in \mathbb{D}$, одакле следи да је

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2, \quad z \in \mathbb{D}.$$

(б) Важи

$$\begin{aligned} \left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_{0}^{1} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_{0}^{1} (f(x) + f(-x))\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_{0}^{1} |f(x) + f(-x)|\mathrm{d}x \\ &\overset{(a)}{\leq} \int_{0}^{1} 2x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

што је и требало показати. ■

Пример 3.2 *Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција таква да важи:*

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0. \quad (*)$$

Доказати да је $|f(z)| \leq |z|^n$ за све $z \in \mathbb{D}$.

Решење. Уочимо Тејлоров развој:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \ \ z \in \mathbb{D}$$

где је $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ за све $k \in \mathbb{N}_0$. Услов $(*)$ повлачи $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Даље следи

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots = z^n(a_n + a_{n+1} z + \dots) = z^n g(z),$$

где је $g(z) = a_n + a_{n+1} z + \dots$ холоморфна функција у јединичном диску $\mathbb{D}$, с обзиром да је представљена конвергентним степеним редом. Фиксирајмо сада произвољну тачку $z \in \mathbb{D}$ такву да је $|z| < r < 1$. Примењујући Принцип максимума добијамо:

$$|g(z)| \leq \max_{\overline{D}(0,r)} |g| = \max_{\partial D(0,r)} |g| = \max_{\zeta \in \partial D(0,r)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^n} \leq \frac{1}{r^n}$$

одакле преласком на граничну вредност $r \to 1^-$ следи да је $|g(z)| \leq 1$. Према томе, важи

$$|f(z)| = |z^n g(z)| = |z|^n \cdot |g(z)| \leq |z|^n$$

чиме је овај пример завршен. ∎

Теорема 3.1 *Нека је f холоморфна и инјективна функција у области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Тада важи $f'(z) \neq 0$ за све $z \in \Omega$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да за неко $z_0 \in \Omega$ важи $f'(z_0) = 0$. Приметимо функцију $g = f - f(z_0)$ која је холоморфна у области Ω. С обзиром да је функција f инјективна, она мора бити неконстантна. То значи да су функције g и f' неконстантне. Самим тим, постоји $r > 0$, тако да важи $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, при чему функције f' и g немају нула у $\overline{D}^{\times}(z_0, r)$. Обележимо

$$\epsilon = \min_{\partial D(z_0,r)} |g| > 0.$$

Нека је $w \in D^{\times}(f(z_0), \epsilon)$ произвољно одабрана тачка. Тада важи:

$$|f(z_0) - w| < \epsilon \leq |g(z)|, \quad z \in \partial D(z_0, r)$$

На основу Рушеове теореме закључујемо да функције g и $g + f(z_0) - w = f - w$ имају исти број нула у диску $D(z_0, r)$. Међутим, пошто важи $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, то значи да функција $f - w$ има барем две нуле у том диску, при чему те нуле припадају пробушеном диску $D^{\times}(z_0, r)$, јер је $w \neq f(z_0)$ и морају бити различите, јер је $(f-w)' = f' \neq 0$ у $D^{\times}(z_0, r)$. Следи да функција f није инјективна. Контрадикција! Из добијене контрадикције следи да је $f'(z_0) \neq 0$ што је и требало показати. ∎

Аутоморфизми у комплексној равни. За неку функцију f кажемо да је *аутоморфизам* области $\Omega \subset \mathbb{C}$ ако је $f : \Omega \to \Omega$ холоморфна бијекција. Скуп свих аутоморфизама области Ω означавамо са $Aut(\Omega)$. Лако се показује да је $Aut(\Omega)$ група у односу на композицију пресликавања. Наиме, очигледно је да важи $\mathbf{1}_\Omega \in Aut(\Omega)$, где је $\mathbf{1}_\Omega$ идентичко пресликавање у области Ω. Поред тога, за пресликавања $f \in Aut(\Omega)$ и $g \in Aut(\Omega)$ важи $f \circ g \in Aut(\Omega)$, као и $f \circ \mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega \circ f = f$. Поред тога, на основу претходне теореме знамо да ће важити да је $f'(z) \neq 0$ за све $z \in \Omega$, одакле добијамо да је $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$, односно $f^{-1} \in Aut(\Omega)$. На основу тога, закључујемо да $Aut(\Omega)$ јесте група аутоморфизама у области Ω. На пример, $Aut(\mathbb{C}) = z \to az + b : a \in \mathbb{C}^{\times}, b \in \mathbb{C}$ описује групу аутоморфизама комплексне равни. Даље разматрамо групу аутоморфизама јединичног диска $\mathbb{D}$. За $a \in \mathbb{D}$ означимо

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \ \ z \in \mathbb{D}$$

Даље, за све $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\varphi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ важи

$$e^{\mathrm{i}\alpha}\varphi_a \in Aut(\mathbb{D}). \qquad (**)$$

Поред тога, директно се проверава да аутоморфизми φ_a јединичног диска $\mathbb{D}$ поседују следећа својства:

- $\varphi_a(0) = -a$ и $\varphi_a(a) = 0$;

- Важи
$$\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2},$$
одакле следи
$$\varphi_a'(0) = 1-|a|^2 \text{ и } \varphi_a'(a) = \tfrac{1}{1-|a|^2};$$
- $1-|\varphi_a(z)|^2 = \frac{|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2))}{|1-\overline{a}z|^2}$;
- $|\varphi_a(z)| = |\varphi_z(a)|$ за све $z \in \mathbb{D}$;
- $\varphi_a^{-1} = \varphi - a$.

Група аутоморфизама јединичног диска, односно група $Aut(\mathbb{D})$ комплетно је описана у примеру који следи.

Пример 3.3 *Доказати да је*
$$Aut(\mathbb{D}) = \left\{e^{i\alpha}\varphi_a : a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Решење. Према својству (**) важи
$$Aut(\mathbb{D}) \supset \left\{e^{i\alpha}\varphi_a : a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$
Нека је $f \in Aut(\mathbb{D})$. Тада $f^{-1} \in Aut(\mathbb{D})$ и означимо $a = f^{-1}(0)$. Затим, нека је
$$F = \varphi_a \circ f^{-1}.$$
Даље следи да је $F \in Aut(\mathbb{D})$ и $F(0) = \varphi_a(a) = 0$, што повлачи $F^{-1} \in Aut(\mathbb{D})$ и $F^{-1}(0) = 0$. Уколико применимо Шварцову лему на пресликавање F добијамо
$$|F(z)| \leq |z|, \qquad z \in \mathbb{D}$$
док применом Шварцове леме на F^{-1} добијамо
$$|z| = |F^{-1}(F(z))| \leq |F(z)|, \qquad z \in \mathbb{D}.$$
На основу претходног је
$$|F(z)| = |z|, \qquad z \in \mathbb{D}$$
што значи да се у оквиру Шварцове леме достиже једнакост, па F мора бити ротација. То значи да је $F = e^{-i\alpha}\mathbf{1}_{\mathbb{D}}$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$, односно
$$\varphi_a \circ f^{-1} = e^{-i\alpha}\mathbf{1}_{\mathbb{D}}.$$
Коначно је
$$f = e^{i\alpha}e^{-i\alpha}(\mathbf{1}_{\mathbb{D}} \circ f) = e^{i\alpha}(\varphi_a \circ f^{-1}) \circ f = e^{i\alpha}\varphi_a.$$
Овим је пример завршен. ■

Лема 3.3 (Шварц - Пикова лема) *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција. Доказати да важи:*

(а) $\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \leq \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|$ *за све* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$*;*

(б) $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ *за све* $z \in \mathbb{D}$.

Осим тога, под (а) важи једнакост за неке $z_1 \neq z_2$ из диска $\mathbb{D}$ или важи једнакост под (б) за неко $z \in \mathbb{D}$ ако и само ако је $f \in Aut(\mathbb{D})$.

Доказ. Нека је $z \in \mathbb{D}$ произвољно одабрана тачка и обележимо $a = f(z)$. Уз то, нека је

$$F = \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z}.$$

У том случају, функција $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је холоморфна. Уочимо да је:

$$F(0) = \varphi_a(f(\varphi_{-z}(0))) = \varphi_a(f(z)) = \varphi_a(a) = 0.$$

Када применимо Шварцову лему на функцију F добијамо да важи $|F'(0)| \leq 1$ и $|F(\zeta)| \leq |\zeta|$, за све $\zeta \in \mathbb{D}$. Даље следи

$$1 \geq |F'(0)| = |\varphi_a'(f(\varphi_{-z}(0))) \cdot f'(\varphi_{-z}(0)) \cdot \varphi_{-z}'(0)| = \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \cdot (1-|z|^2),$$

одакле следи (б). Поред тога је

$$|\varphi_a(f(\varphi_{-z}(\zeta)))| \leq |\zeta|, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Ако су z_1 и z_2 произвољно одабране тачке из јединичног диска $\mathbb{D}$, тада заменом $\zeta = \varphi_{z_2}(z_1)$ и $z = z_2$ у претходну неједнакост добијамо

$$|\varphi_{f(z_2)}(f(z_1))| \leq |\varphi_{z_2(z_1)}|.$$

Тиме смо показали (а). Важи једнакост под (а) за неке $z_1 \neq z_2$ из диска $\mathbb{D}$ или важи једнакост под (б) за неко $z \in \mathbb{D}$ ако и само ако важи једнакост у оквиру Шварцове леме примењене на функцију F, односно, ако и само ако је

$$F = e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{1}_{\mathbb{D}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

што значи да је

$$\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z} = e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{1}_{\mathbb{D}}.$$

Лако се проверава да је претходна једнакост еквивалентна са чињеницом да је $f \in Aut(\mathbb{D})$. Наиме, ако важи претходна једнакост тада је тривијално

$$f = \varphi_{-a} \circ (e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{1}_{\mathbb{D}}) \circ \varphi_z \in Aut(\mathbb{D}).$$

У другом смеру, ако важи да је $f \in Aut(\mathbb{D})$, тада је $\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z}$ такође аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ који тачку 0 пресликава опет у тачку 0, одакле на основу претходног примера, следи да он мора бити ротација, односно

$$\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-z} = e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{1}_{\mathbb{D}},$$

за неко $\alpha \in \mathbb{R}$, што је и требало доказати. ■

Пример 3.4 *Дато је пресликавање* $\psi : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$,*при чему важи*

$$\psi(z_1, z_2) = |\varphi_{z_2}(z_1)|,$$

за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. *Доказати да је* $(\mathbb{D}, \psi)$ *метрички простор.*

Решење. Нека су $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ произвољно одабране тачке. Тада директно следи

$$\psi(z_1, z_2) = |\varphi_{z_2}(z_1)| \geq 0 \text{ и } \psi(z_1, z_2) = |\varphi_{z_2}(z_1)| = |\varphi_{z_1}(z_2)| = \psi(z_2, z_1).$$

Слично, важи $\psi(z_1, z_2) = 0$ ако и само ако је $|z_1 - z_2| = 0$, односно, ако и само ако је $z_1 = z_2$. Још нам преостаје да покажемо неједнакост

$$\psi(z_1, z_2) \leq \psi(z_1, z_3) + \psi(z_3, z_2).$$

Означимо

$$x = \varphi_{z_3}(z_1) \text{ и } y = \varphi_{z_3}(z_2).$$

Претходна неједнакост постаје

$$\psi(z_1, z_2) \leq |x| + |y|.$$

С обзиром да је пресликавање φ_{z_3} аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, применом Шварц - Пикове леме закључујемо

$$\psi(z_1, z_2) = \psi(\varphi_{z_3}(z_1), \varphi_{z_3}(z_2)) = \psi(x, y).$$

Дакле, довољно је доказати да важи

$$\psi(x, y) \leq |x| + |y|.$$

Међутим, приметимо да је

$$1 - \psi(x, y)^2 = \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|1 - \overline{y}x|^2} \geq \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{(1 + |x||y|)^2} = 1 - \psi(|x| - |y|)^2.$$

Односно, важи

$$\psi(x, y) \leq \psi(|x| - |y|).$$

На самом крају, на основу претходне неједнакости, следи

$$\psi(x, y) \leq \psi(|x| - |y|) = \frac{|x| + |y|}{1 + |x||y|} \leq |x| + |y|.$$

Тиме је пример завршен. ■

Претходно уведено растојање (метрика) ψ на јединичном диску $\mathbb{D}$ се назива *псеудохиперболичко* растојање. На основу Шварц - Пикове леме следи да холоморфне функције из диска $\mathbb{D}$ у диск $\mathbb{D}$ не повећавају псеудохиперболичко растојање. Наиме, уколико је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција, тада за произвољне $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ следи

$$\psi(f(z_1), f(z_2)) \leq \psi(z_1, z_2). \qquad (\star)$$

Поред тога, важи једнакост у $(\star)$ за неке $z_1 \neq z_2$ из јединичног диска $\mathbb{D}$ ако и само ако је $f \in Aut(\mathbb{D})$.

Задатак 3.1 *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција, таква да важи $f \neq \mathbf{1}_{\mathbb{D}}$. Доказати да функција f може имати највише једну фиксну тачку у диску $\mathbb{D}$.*

Решење. Претпоставимо супротно, да су $a \neq b$ две фиксне тачке функције f које припадају јединичном диску $\mathbb{D}$. Тада је

$$F = \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-a} : \mathbb{D} \to \mathbb{D},$$

холоморфна функција и важи $F(0) = \varphi_a(f(\varphi_{-a}(0))) = \varphi_a(f(a)) = \varphi_a(a) = 0$. Када применимо Шварцову лему на функцију F добијамо да је $|F(z)| \leq |z|$ за све $z \in \mathbb{D}$. Приметимо сада да важи

$$F(\varphi_a(b)) = \varphi_a(f(b)) = \varphi_a(b),$$

при чему је $\varphi_a(b) \neq 0$, што значи да се у оквиру Шварцове леме постиже једнакост, односно $F = e^{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{1}_{\mathbb{D}}$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. С обзиром да је $\varphi_a(b) = F(\varphi_a(b)) = e^{\mathrm{i}\alpha}\varphi_a(b)$ следи да је $e^{\mathrm{i}\alpha} = 1$, што повлачи да је

$$\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-a} = \mathbf{1}_{\mathbb{D}},$$

одакле је

$$f = \varphi_{-a} \circ \mathbf{1}_{\mathbb{D}} \circ \varphi_a = \mathbf{1}_{\mathbb{D}},$$

што није могуће. Из добијене контрадикције следи тражени закључак. ■

Дефиниција 3.1 *Функција $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ је метрика или густина на области $\Omega \subset \mathbb{C}$ ако је $\phi(z) > 0$ за све $z \in \Omega$ и $\phi \in \mathbb{C}^2(\Omega)$. У односу на метрику ϕ, дужина вектора $v \in \mathbb{C}$ у тачки $z \in \Omega$, једнака је $|v|_{\phi,z} = \phi(z)|v|$, где је $|v|$ стандардна (еуклидска) дужина вектора v.* ♠

Дужина непрекидно диференцијабилне криве $\gamma : [a,b] \to \Omega$ дата је са $\ell_\phi(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_{\phi,\gamma(t)}\mathrm{d}t$. Дужина део по део непрекидно диференцијабилне криве јесте сума дужина њених непрекидно диференцијабилних делова. Уочимо да је $\ell_\phi(\gamma) = \int_a^b \phi(\gamma(t))|\gamma'(t)|\mathrm{d}t = \int_\gamma \phi(z)|\mathrm{d}z|$. Растојање између тачака $p, q \in \Omega$, у односу на метрику ϕ, дефинишемо на следећи начин

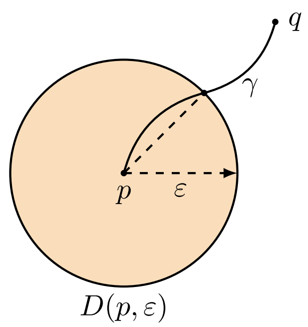
$$d_\phi(p,q) = \inf \ell_\phi(\gamma)$$

при чему се наведени инфимум узима по свим део по део непрекидним кривама $\gamma : [0,1] \to \Omega$ таквим да је $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$.

По дефиницији важи

$$d_\phi(p,q) \geq 0 \text{ и } d_\phi(p,p) = 0 \quad p,q \in \Omega.$$

Нека је $d_\phi(p,q) = 0$ за неке $p,q \in \Omega$ и претпоставимо да је $p \neq q$. Тада постоји $\epsilon > 0$ тако да је $D(p,\epsilon) \subset \Omega$ и $q \notin D(p,\epsilon)$.



Затворен диск $D[p,\epsilon]$ је компактан скуп, такав да функција ϕ на њему достиже свој минимум

$$m = \min_{D[p,\epsilon]} \phi > 0.$$

Како је

$$d_\phi = \inf_\gamma \int_\gamma \phi(z)|\mathrm{d}z|,$$

то постоји део по део непрекидно диференцијабилна крива $\gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ таква да је

$$\int_\gamma \phi(z)|\mathrm{d}z| < m\epsilon.$$

Следи

$$m\epsilon > \int_\gamma \phi(z)|\mathrm{d}z| \geq \int_{\gamma\cap D(p,\epsilon)} \phi(z)|\mathrm{d}z| \geq m \int_{\gamma\cap D(p,\epsilon)} |\mathrm{d}z| \geq m\epsilon$$

што је контрадикција јер $\gamma \cap D(p,\epsilon)$ представља део криве γ садржан у затвореном диску $D[p,\epsilon]$. Према томе ако је $d_\phi(p,q) = 0$ мора важити да је $p = q$
За део по део непрекидно диференцијабилну криву $\gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q$, дефинишемо $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$. Тада је $\gamma^- : [0,1] \to \Omega$ део по део непрекидно диференцијабилна крива и $\gamma^-(0) = q, \gamma^-(1) = p$. Поред тога, важи

$$\ell_\phi(\gamma^-) = \int_0^1 \phi(\gamma^-(t))|(\gamma^-)'(t))|\mathrm{d}t = \int_0^1 \phi(\gamma(1-t))|\gamma'(1-t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 \phi(\gamma(s))|\gamma'(s)|\mathrm{d}s = \ell_\phi(\gamma).$$

Добијамо

$$d_\phi(p,q) = \inf_\gamma \ell_\phi(\gamma) = \inf_{\gamma^-} \ell_\phi(\gamma^-) = d_\phi(q,p).$$

Нека су $\gamma : [0,1] \to \Omega$ и $\beta : [0,1] \to \Omega$ део по део непрекидно диференцијабилне криве такве да $\gamma(0) = p, \gamma(1) = u$ и $\beta(0) = u, \beta(1) = q$, где су p, q, u произвољно одабране тачке из Ω. Дефинишемо $\alpha(t) = \beta(2t)$ за $t \in [0, \frac{1}{2}]$ и $\alpha(t) = \gamma(2t-1)$ за $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Тада је $\alpha : [0,1] \to \Omega$ добро дефинисана, део по део непрекидно диференцијабилна крива и важи $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$.
Сада је

$$\begin{aligned} d_\phi(p,q) \leq \ell_\phi(\alpha) = \int_0^1 \phi(\alpha(t))|\alpha'(t)|\mathrm{d}t &= \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(\gamma(2t))|\gamma'(2t)|\mathrm{d}(2t) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \phi(\beta(2t-1))|\beta'(2t-1)|\mathrm{d}(2t-1) &= \\ \int_0^1 \phi(\gamma(s))|\gamma'(s)|\mathrm{d}s + \int_0^1 \phi(\beta(s))|\beta'(s)|\mathrm{d}s &= \\ \ell_\phi(\gamma) + \ell_\phi(\beta) & \end{aligned}$$

то јест важи $d_\phi(p,q) \leq \ell_\phi(\gamma) + \ell_\phi(\beta)$. Преласком на инфимум, најпре по свим кривама γ, а затим и по свим кривама β, добијамо $d_\phi(p,q) \leq d_\phi(p,u) + d_\phi(u,q)$. Коначно, из свега претходног имамо да је (Ω, d_ϕ) метрички простор.

Дефиниција 3.2 *Нека су* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *области и* ϕ_1, ϕ_2 *метрике на њима, тим редом. За холоморфно, бијективно пресликавање* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *кажемо да је изометрија парова* (Ω_1, ϕ_1) *и* (Ω_2, ϕ_2) *ако важи* $(f^*\phi_2)(z) = \phi_1(z)$ *за све* $z \in \Omega_1$, *где је* $(f^*\phi_2)(z) = \phi_2(f(z))|f'(z)|$. ♠

Узмимо да је f изометрија парова (Ω_1, ϕ_1) и (Ω_2, ϕ_2). Уколико је $\gamma : [a, b] \to \Omega_1$ део по део непрекидно диференцијабилна крива, означимо $f_*\gamma = f \circ \gamma$. Тада је $f_*\gamma : [a, b] \to \Omega_2$ такође, део по део непрекидно диференцијабилна крива.

При томе важи

$$\begin{aligned}\ell_{\phi_1}(\gamma) = \int_\gamma \phi_1(z)|\mathrm{d}z| &= \int_\gamma \phi_2(f(z))|f'(z)||\mathrm{d}z| = \\ \int_{f\circ\gamma} \phi_2(\omega)|\mathrm{d}\omega| &= \int_{f_*\gamma} \phi_2(\omega)|\mathrm{d}\omega| = \ell_{\phi_2}(f_*\gamma).\end{aligned}$$

Одатле имамо

$$d_{\phi_1}(p, q) = \inf_\gamma \ell_{\phi_1}(\gamma) = \inf_{f_*\gamma} \ell_{\phi_2}(f_*\gamma) = d_{\phi_2}(f(p), f(q))$$

то јест

$$d_{\phi_1}(p, q) = d_{\phi_2}(f(p), f(q)), \qquad p, q \in \Omega_1.$$

Поред тога, важи

$$\phi_1(z)|(f^{-1})'(f(z))| = \phi_1(z)\frac{1}{|f'(z)|} = \phi_2(f(z)), \qquad z \in \Omega_1$$

Одакле следи

$$\phi_1(f^{-1}(\omega))|(f^{-1})'(\omega)| = \phi_2(\omega), \qquad \omega \in \Omega_2$$

што значи да је преликавање f^{-1} изометрија парова (Ω_2, ϕ_2) и (Ω_1, ϕ_1).

Теорема 3.2 *Ако је* f *изометрија парова* (Ω_1, ϕ_1) *и* (Ω_2, ϕ_2), g *изометрија парова* (Ω_2, ϕ_2) *и* (Ω_3, ϕ_3), *тада је* $g \circ f$ *изометрија парова* (Ω_1, ϕ_1) *и* (Ω_3, ϕ_3).

Доказ. Пресликавање $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ је холоморфно и бијективно као композиција таквих. Такође, за произвољно $z \in \Omega_1$ важи

$$\begin{aligned}((g \circ f)^*\phi_3)(z) = \phi_3((g \circ f)(z))|(g \circ f)'(z)| &= \phi_3(g(f(z)))|g'(f(z))||f'(z)| = \\ \phi_2(f(z))|f'(z)| &= \phi_1(z),\end{aligned}$$

то јест

$$((g \circ f)^*\phi_3) = \phi_1(z).$$

Дакле, $g \circ f$ је изометрија парова (Ω_1, ϕ_1) и (Ω_3, ϕ_3). ■

Дефиниција 3.3 *За метрику* $\phi(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ *на јединичном диску* $\mathbb{D}$ *кажемо да је Поенкареова или хиперболичка метрика.* ♠

Теорема 3.3 *Нека је* ϕ *Поенкареова метрика на јединичном диску* $\mathbb{D}$ *и* $f \in Aut(\mathbb{D})$. *Тада је* f *изометрија парова* $(\mathbb{D}, \phi)$ *и* $(\mathbb{D}, \phi)$.

Доказ. Пошто $f \in Aut(\mathbb{D})$, то постоје $\alpha \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{D}$ такви да је $f(z) = e^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ за све $z \in \mathbb{D}$. Осим тога, f је холоморфно, бијективно пресликавање. Сада је

$$\begin{aligned}(f^*\phi)(z) = \phi(f(z))|f'(z)| &= \frac{2}{1-\left|e^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2}\cdot\left|\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\right| = \frac{2(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2} = \\ \frac{2(1-|a|^2)}{(1-|a|^2)(1-|z|^2)} &= \frac{2}{1-|z|^2} = \phi(z),\end{aligned}$$

то јест

$$(f^*\phi)(z) = \phi(z) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

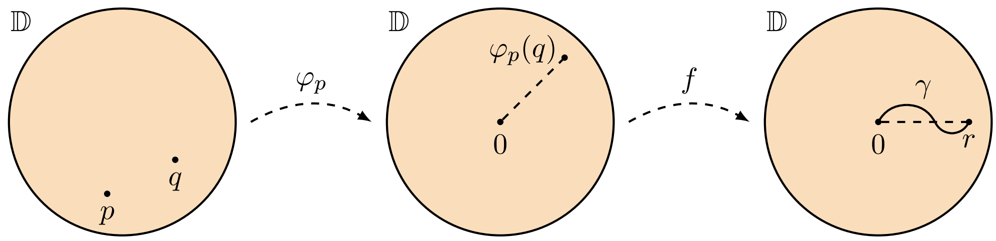
Према томе, f заиста јесте изометрија парова $(\mathbb{D}, \phi)$ и $(\mathbb{D}, \phi)$. ■

Теорема 3.4 *Нека је ϕ Поенкареова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$. Тада, за произвољно одабране тачке $p, q \in \mathbb{D}$ важи $d_\phi(p,q) = \ln\left|\frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|}\right|$.*

Доказ. Ако је $p = q$ тада је $d_\phi(p,p) = 0$ и $|\varphi_p(p)| = 0$ и тривијално следи тражена једнакост. Стога у наставку претпоставимо да је $p \neq q$. Пресликавање φ_p јесте аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ па применом претходне теореме добијамо

$$d_\phi(p,q) = d_\phi(\varphi_p(p), \varphi_p(q)) = d_\phi(0, \varphi(q)).$$

Ротација $f : z \to e^{-\mathrm{i}\arg\varphi_p(q)}z$ јесте такође, један аутоморфизам јединичног диска, тако да је



$$d_\phi(0, \varphi_p(q)) = d_\phi(0, e^{-\mathrm{i}\arg\varphi_p(q)}\varphi_p(q)) = d_\phi(0, |\varphi_p(q)|).$$

Из претходног добијамо

$$d_\phi(p,q) = d_\phi(0, |\varphi_p(q)|) = d_\phi(0, r)$$

где је $r = |\varphi_p(q)|$. Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ произвољно одабрана, део по део непрекидно диференцијабилна крива, таква да је $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = r$. Нека је $\alpha = \operatorname{Re}\gamma$ и $\beta = \operatorname{Im}\gamma$, то јест $\gamma(t) = \alpha(t) + \mathrm{i}\beta(t)$ за све $t \in [0,1]$. Следи, $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(1) = r$. Сада је

$$\ell_\phi(\gamma) = \int_\gamma \phi(z)|\mathrm{d}z| = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|\mathrm{d}z| = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{2|\alpha'(t)|}{1-\alpha(t)^2}\mathrm{d}t = \ell_\phi(\alpha).$$

Нека је функција $\tilde{\alpha}$ добијена модификацијом функције α, тако што је $\tilde{\alpha}$ на интервалима опадања функције α константно једнака вредности функције α у почетној тачки посматраног интервала опадања. Ван интервала опадања функције α, функције $\tilde{\alpha}$ и α су једнаке. Сада је $\tilde{\alpha}$ растућа функција, $\tilde{\alpha}(0) = 0, \tilde{\alpha}(1) = r$ и $\ell_\phi(\alpha) \geq \ell_\phi(\tilde{\alpha})$. Према томе, важи

$$\ell_\phi(\gamma) \geq \ell_\phi(\alpha) \geq \ell_\phi(\tilde{\alpha}) = \int_0^1 \frac{2\tilde{\alpha}'(t)}{1-\tilde{\alpha}(t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^r \frac{2}{1-s^2}\mathrm{d}s = \ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Преласком на инфимум по свим кривама γ добијамо да важи $d_\phi(0,r) \geq \ln\frac{1+r}{1-r}$. Са друге стране, посматрајмо криву $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ дефинисану са $\Gamma(t) = rt$. Важи $\Gamma(0) = 0$ и $\Gamma(1) = r$, тако да је

$$d_\phi(0,r) \leq \ell_\phi(\Gamma) = \int_0^1 \frac{2\Gamma'(t)}{1-\Gamma(t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^r \frac{2}{1-s^2}\mathrm{d}s = \ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Коначно је $d_\phi(0,r) = \ln\frac{1+r}{1-r}$, односно $d_\phi(p,q) = d_\phi(0,r) = \ln\frac{1+r}{1-r} = \ln\frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|}$. ■

Теорема 3.5 $(\mathbb{D}, d_\phi)$ *је комплетан метрички простор, при чему је ϕ Поенкареова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$.*

Доказ. Нека је (p_n) Кошијев низ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\phi)$. Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $d_\phi(p_m, p_n) < 1$ за све $m, n \geq n_0$. Важи $d_\phi(0,p_n) \leq d_\phi(p_{n_0}, p_n) + d_\phi(0, p_{n_0}) < 1 + d_\phi(0,p_{n_0})$ за све $n \geq n_0$. Означимо $M = \max\{1+d_\phi(0,p_{n_0}), d_\phi(0,p_1), ..., d_\phi(0,p_{n_0-1})\}$. Тада је $d_\phi(0,p_n) \leq M$ за све $n \in \mathbb{N}$, односно $|p_n| \leq \frac{e^M-1}{e^M+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$, јер је $d_\phi(0,p_n) = \ln\frac{1+|p_n|}{1-|p_n|}$. Како је $d_\phi(p_m,p_n) = \ln\frac{1+|\varphi_{p_m}(p_n)|}{1-|\varphi_{p_m}(p_n)|}$, то важи $|\varphi_{p_m}(p_n)| = \frac{e^{d_\phi(p_m,p_n)}-1}{e^{d_\phi(p_m,p_n)}+1} = \frac{\sinh d_\phi(p_m,p_n)/2}{\cosh d_\phi(p_m,p_n)/2}$. Одатле следи

$$|\varphi_{p_m}(p_n)|^2 = \frac{\sinh^2 d_\phi(p_m,p_n)/2}{1+\sinh^2 d_\phi(p_m,p_n)/2}$$

то јест

$$\sinh^2\frac{d_\phi(p_m,p_n)}{2} = \frac{|\varphi_{p_m}(p_n)|^2}{1-|\varphi_{p_m}(p_n)|^2} = \frac{|p_m-p_n|^2}{(1-|p_m|^2)(1-|p_n|^2)} \geq |p_m-p_n|^2.$$

Добили само да је $|p_m - p_n| \leq \sinh\frac{d_\phi(p_m,p_n)}{2}$ за све $m,n \in \mathbb{N}$. Према томе, (p_n) је Кошијев низ у односу на стандардну (еуклидску) метрику и како је (p_n) низ тачака из компакта $D[0, \frac{e^M-1}{e^M+1}] \subset \mathbb{D}$, то он конвергира ка некој тачки $p \in D[0, \frac{e^M-1}{e^M+1}] \subset \mathbb{D}$. Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty}|p_n - p| = 0$. Осим тога, користећи једнакост

$$\sinh^2\frac{d_\phi(p_n,p)}{2} = \frac{|p_n-p|^2}{(1-|p_n|^2(1-|p|^2))}$$

добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\sinh\frac{d_\phi(p_n,p)}{2} = 0.$$

Коначно је $\sinh\frac{\lim\limits_{n\to\infty} d_\phi(p_n,p)}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sinh\frac{d_\phi(p_n,p)}{2} = 0$ то јест $\lim\limits_{n\to\infty} d_\phi(p_n,p) = 0$, тако да низ (p_n) конвергира у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\phi)$. Из претходног имамо да у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\phi)$ сваки Кошијев низ конвергира, па је $(\mathbb{D}, d_\phi)$ комплетан метрички простор. Тиме је доказ ове теореме завршен. ■

За две произвољне тачке $p,q \in \mathbb{D}$ важи $d_\phi(p,q) = d_\phi(0, \varphi_p(q)) = d_\phi(0, |\varphi_p(q)|)$. Крива којом се реализује најкраће растојање између тачака 0 и $|\varphi_p(q)|$ јесте $\Gamma(t) = |\varphi_p(q)|t$, при чему је $t \in [0,1]$. Ротацијом криве Γ за угао $\arg\varphi_p(q)$ добијамо криву $\tau(t) = e^{\mathrm{i}\arg\varphi_p(q)}\Gamma(t) = \varphi_p(q)t, \quad t \in [0,1]$ којом се остварује најкраће растојање између тачака 0 и $\varphi_p(q)$. Коначно крива $\gamma = \varphi_{-p}\circ\tau$ реализује најкраће растојање између тачака p и q у јединичном диску $\mathbb{D}$ са Поенкареовом метриком. Крива γ је геодезијска крива између тачака p и q. Приметимо да је

$$\gamma(t) = \varphi_{-p}(\tau(t)) = \varphi_{-p}(\varphi_p(q)t) = \frac{\varphi_p(q)t + p}{1 + \overline{p}\varphi_p(q)t}$$

то јест

$$\gamma(t) = \frac{\varphi_p(q)t + p}{1 + \overline{p}\varphi_p(q)t} \qquad t \in [0, 1].$$

Како билинеарна пресликавања пресликавају праве или кружнице поново, на праве или кружнице, затим чувају углове између њих и како је крива Γ ортогонална на јединичну кружницу $\partial\mathbb{D}$, то је геодезијска крива γ такође, ортогонална на јединичну кружницу $\partial\mathbb{D}$.

Теорема 3.6 *Ако је $\tilde{\phi}$ метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$ са својством да је сваки аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ изометрија парова $(\mathbb{D}, \tilde{\phi})$ и $(\mathbb{D}, \tilde{\phi})$, тада постоји позитивна константа k таква да је $\tilde{\phi} = k\phi$, где је ϕ Поенкареова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$.*

Доказ. Пресликавање $f = \varphi_{-z}$ је аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, где је $z \in \mathbb{D}$ произвољно одабрана тачка. Тада је $f^*\tilde{\phi} = \tilde{\phi}$ и специјално, $(f^*\tilde{\phi})(0) = \tilde{\phi}(0)$. Даље следи $\tilde{\phi}(0) = \tilde{\phi}(f(0))|f'(0)| = \tilde{\phi}(z)(1 - |z|^2)$, то јест

$$\tilde{\phi}(z) = \tilde{\phi}(0)\frac{1}{1 - |z|^2} = \frac{\tilde{\phi}(0)}{2} \cdot \frac{2}{1 - |z|^2} = \frac{\tilde{\phi}(0)}{2} \cdot \phi(z).$$

Узимајући у обзир да је $k = \frac{\tilde{\phi}(0)}{2}$ добијамо $\tilde{\phi}(z) = k\phi(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$, што је и требало показати. ■

Теорема 3.7 *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање и ϕ Поенкареова метрика. Тада важи:*

- *(а)$(f^*\phi)(z) \le \phi(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$*
- *(б) $\ell_\phi(f^*\gamma) \le \ell_\phi(\gamma)$ за сваку део по део непрекидно диференцијабилну криву $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$.*
- *(в) $d_\phi(f(p), f(q)) \le d_\phi(p, q)$ за све $p, q \in \mathbb{D}$.*

Доказ. (а) $(f^*\phi)(z) = \phi(f(z))|f'(z)| = \frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{2}{1-|z|^2} = \phi(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$, при чему смо искористили Шварц - Пикову лему.
(б) За произвољну део по део непрекидно диференцијабилну криву $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$ важи

$$\ell_\phi(f_*\gamma) = \int_{f_*\gamma} \phi(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \phi(f(\gamma(t)))|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|\mathrm{d}t = \int_\gamma \phi(f(z))|f'(z)||\mathrm{d}z| = \int_\gamma (f^*\phi)(z)|\mathrm{d}z|.$$

Ако искористимо део под (а) добијамо

$$\ell_\phi(f_*\gamma) = \int_\gamma (f^*\phi)(z)|\mathrm{d}z| \le \int_\gamma \phi(z)|\mathrm{d}z| = \ell_\phi(\gamma).$$

(в) Нека су $p, q \in \mathbb{D}$ и нека је $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива таква да важи $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$. Тада је $f_*\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива, при чему је $(f_*\gamma)(0) = f(p)$ и $(f_*\gamma)(1) = q$. Следи

$$d_\phi(f(p), f(q)) \le \ell_\phi(f_*\gamma) \le \ell_\phi(\gamma).$$

Преласком на инфимум по свим таквим кривама γ добијамо $d_\phi(f(p), f(q)) \le d_\phi(p, q)$.
■

Глава 4

Фаркас - Ритова теорема

Теорема 4.1 (Фаркас - Ритова теорема) *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $\overline{f(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$. Тада f има јединствени фиксну тачку.*

Доказ. Скуп $\overline{f(\mathbb{D})}$ је затворен и ограничен, јер је $\overline{f(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$. Дакле, $\overline{f(\mathbb{D})}$ је компактан скуп. Са друге стране, $\mathbb{D}^c$ је затворен и $\overline{f(\mathbb{D})} \cap \mathbb{D}^c = \emptyset$, тако да је $d(\overline{f(\mathbb{D})}, \mathbb{D}^c) > 0$, где подразумевамо да је ово растојање одређено у односу на стандардну (еуклидску) метрику у комплексној равни. Тада постоји $\epsilon > 0$ такво да је

$$d(\overline{f(\mathbb{D})}, \mathbb{D}^c) > 2\epsilon > 0$$

Нека је $z_0 \in \mathbb{D}$ фиксирана тачка и посматрајмо функцију g дефинисану са

$$g(z) = f(z) + \epsilon(f(z) - f(z_0)) \quad \text{за све} \quad z \in \mathbb{D}.$$

Претпоставимо да $g(z) \in \mathbb{D}^c$ за неко $z \in \mathbb{D}$. Тада је

$$\epsilon|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - g(z)| \geq d(\overline{f(\mathbb{D})}, \mathbb{D}^c) > 2\epsilon$$

односно

$$|f(z) - f(z_0)| > 2.$$

Међутим, ово је у контрадикцији са неједнакости

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z)| + |f(z_0)| < 2.$$

Дакле, мора бити да је $g(z) \in \mathbb{D}$ за све $z \in \mathbb{D}$, тако да је $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ једна холоморфна функција као композиција таквих. Применом теореме (3.7) добијамо да је $(g^*\phi)(z) \leq \phi(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$, то јест $\phi(g(z))|g'(z)| \leq \phi(z)$ где је ϕ Поенкареова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$. Специјално је $\phi(g(z_0))|g'(z_0)| \leq \phi(z_0)$ и како важи $g(z_0) = f(z_0)$ и $g'(z_0) = (1 + \epsilon)f'(z_0)$, то добијамо

$$\phi(f(z_0))|f'(z_0)| \leq \frac{1}{1 + \epsilon}\phi(z_0)$$

Ово важи за све $z_0 \in \mathbb{D}$, то јест $\phi(f(z))|f'(z)| \leq \frac{1}{1+\epsilon}\phi(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Следи да је $(f^*\phi)(z) \leq \frac{1}{1+\epsilon}\phi(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$.

Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива таква да је $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$, где су p и q произвољно одабране тачке из диска $\mathbb{D}$. Тада је $f_*\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива, $(f_*\gamma)(0) = p$ и $(f_*\gamma)(1) = q$. Тада важи

$$d_\phi(f(p), f(q)) \leq \ell_\phi(f_*\gamma) = \int_{f_*\gamma} \phi(z)|\mathrm{d}z| = \int_\gamma (f^*\phi)(z)|\mathrm{d}z| \leq \frac{1}{1+\epsilon}\int_\gamma \phi(z)|\mathrm{d}z| = \frac{1}{1+\epsilon}\ell_\phi(\gamma).$$

Према томе, $d_\phi(f(p), f(q)) \leq \frac{1}{1+\epsilon}\ell_\phi(\gamma)$ и преласком на инфимум по свим таквим кривама γ добијамо $d_\phi(f(p), f(q)) \leq \frac{1}{1+\epsilon}d_\phi(p,q)$. Сада је пресликавање $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ контракција, јер је $d_\phi(f(p), f(q)) \leq \frac{1}{1+\epsilon}d_\phi(p,q)$ за све $p, q \in \mathbb{D}$ и $\frac{1}{1+\epsilon} \in (0,1)$. Метрички простор $(\mathbb{D}, d_\phi)$ је комплетан, па применом Банахове теореме о фиксној тачки добијамо да f има јединствену фиксну тачку, чиме је доказ завршен. ■

У наставку ћемо навести и још један доказ Фаркас - Ритове теореме:

Доказ. Како важи $\overline{f(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$ то је $d(\overline{f(\mathbb{D})}, \mathbb{D}^c) > 0$. Стога, можемо одабрати неко δ, за које важи $d(\overline{f(\mathbb{D})}, \mathbb{D}^c) > \delta > 0$. Тада је $\delta < 1$ и означимо $r = 1 - \delta$. Такође, нека је

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$

У наставку, нека је $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$ произвољно одабрана тачка. Како важи $\overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}$, јер је $0 < r < 1$, то закључујемо да је $f(z) \in f(\mathbb{D})$. Следи

$$\delta < d(\overline{f(\mathbb{D})}, \mathbb{D}^c) \leq d(f(z), \mathbb{D}^c) = 1 - |f(z)|,$$

одакле је $r = 1 - \delta > 1 - (1 - |f(z)|) = |f(z)|$, односно, важи $f(z) \in \mathbb{D}_r$. На основу претходног, добијамо $f(\overline{\mathbb{D}_r}) \subset \mathbb{D}_r$. Специјално, важи $f(\partial\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}_r$. Уочимо функцију $F(z) = -z$ (користимо идеју као у примеру 2.1). За $z \in \partial\mathbb{D}_r$ важи

$$|f(z)| < r = |-z| = |F(z)|.$$

Према томе, на основу Рушеове теореме, функције $F(z) = z$ и $F(z) + f(z) = f(z) - z$ имају исти број нула у диску $\mathbb{D}_r$. Како функција $F(z) = z$ има нулу у $\mathbb{D}_r$, то функција $f(z) - z$ има нулу у $\mathbb{D}_r$, што значи да функција f има фиксну тачку у $\mathbb{D}_r$. Самим тим, функција f има фиксну тачку у $\mathbb{D}$. Поред тога, та фиксна тачка мора бити јединствена на основу задатка 3.1. Наиме приметимо да мора бити $f \neq \mathbf{1}_{\mathbb{D}}$, јер у супротном услов $\overline{f(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$ не би био испуњен. Тиме је доказ завршен. ■

Претпоставимо да су испуњени услови претходне теореме, то јест $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је холоморфна функција са својством $\overline{f(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$. Нека је $p \in \mathbb{D}$ јединствено одређена фиксна тачка функције f и нека је $D_\phi(p,r)$ отворени диск са центром у тачки p, полупречника $r > 0$, у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\phi)$. Дакле

$$D_\phi(p,r) = \{q \in \mathbb{D} | d_\phi(p,q) < r\}.$$

Слично

$$D\phi[p,r] = \{q \in \mathbb{D} | d_\phi(p,q) \leq r\}$$

је затворен диск са центром у тачки p полупречника $r > 0$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\phi)$. Приметимо да важи

$$q \in D_\phi(p,r) \Leftrightarrow d_\phi(p,q) < r \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{1+|\varphi_p(q)|}{1-|\varphi_p(q)|} < r \Leftrightarrow |\varphi_p(q)| < \frac{e^r-1}{e^r+1} \Leftrightarrow$$
$$\varphi_p(q) \in D\Big(0, \frac{e^r-1}{e^r+1}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad q \in \varphi_{-p}\Big(D\Big(0, \frac{e^r-1}{e^r+1}\Big)\Big)$$

то јест, добијамо да је
$$D_\phi(p,r) = \varphi_{-p}\Big(D\Big(0, \frac{e^r-1}{e^r+1}\Big)\Big).$$

Пресликавање φ_{-p} је билинеарно пресликавање, али и аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, тако да је $\varphi_{-p}\Big(D\Big(0, \frac{e^r-1}{e^r+1}\Big)\Big)$ такође, један отворен диск, али у односу на страндардну (еуклидску) метрику. Према томе, сваки отворени диск $D_\phi(p,r)$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\phi)$ јесте истовремено и неки отворен диск у односу на еуклидску метрику. Индуктивно дефинишемо пресликавања $f_1 = f$ и $f_{n+1} = f \circ f_n$ за $n \geq 1$. Поред тога, нека је K компакт садржан у $\mathbb{D}$. Сада је

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} D_\phi(p,j) = \mathbb{D} \supset K.$$

Фамилија отворених дискова $\{D\phi(p,j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\phi)$ јесте такође и нека фамилија отворених дискова у односу на еуклидску метрику која покрива компакт K и самим тим, можемо издвојити коначан потпокривач. Према томе, постоји $j \in \mathbb{N}$ тако да је $K \subset D_\phi(p,j)$, а тим пре је $K \subset D_\phi[p,j]$. За произвољно $q \in K \subset D_\phi[p,j]$ важи
$$d_\phi(f(p), f(q)) \leq \frac{1}{1+\epsilon} d_\phi(p,q) \leq \frac{j}{1+\epsilon}$$
где је $\epsilon > 0$ као у доказу Фаркас - Ритове теореме. Даље следи

$$f(q) \in D_\phi\Big[f(p), \frac{j}{1+\epsilon}\Big] = D_\phi\Big[p, \frac{j}{1+\epsilon}\Big], \;\; \text{за све} \;\; q \in K$$

тако да је $f_1(K) = f(K) \subset D_\phi\Big[p, \frac{j}{1+\epsilon}\Big]$. Ако индуктивно наставимо претходни поступак, добијамо да је

$$f_n(K) \subset D_\phi\Big[p, \frac{j}{(1+\epsilon)^n}\Big], \;\; \text{за све} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Одатле је
$$d_\phi(p, f_n(q)) \leq \frac{j}{(1+\epsilon)^n} \to 0, \;\; \text{кад} \;\; n \to \infty \;\; \text{за све} \;\; q \in K.$$

Коначно, из свега претходног имамо да низ функција (f_n) равномерно конвергира ка константној функцији p на свим компактним подскуповима јединичног диска $\mathbb{D}$ у метричком простору $(\mathbb{D}, d_\phi)$.

Литература

[1] T. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[2] Б. Карапетровић, *Увод у комплексну анализу - збирка задатака*, Математички факултет, Београд, 2020.

[3] S.G. Krantz, *Geometric function theory*, Birkhäuser, Bosotn, 2006.

[4] S.G. Krantz, *The Carathéodory and Kobayashi Metrics and Applications in Complex Analysis*, Amer. Math. Monthly 115 (2008), 304–329.

[5] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

Списак симбола

$Aut(\Omega)$	група аутоморфизама области $\Omega \subset \mathbb{C}$
$\arg z$	аргумент комплексног броја z
$\mathbb{C}$	комплексна раван
$\mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ пробушена комплексна раван
$\Omega \subset \mathbb{C}$	област у комплексној равни - непразан, отворен и повезан скуп
$\overline{\Omega}$	затворење области $\Omega \subset \mathbb{C}$
i	имагинарна јединица
$\operatorname{Im} z$	имагинаран део комплексног броја z
$\mathbb{D}$	јединични диск са центром у координатном почетку у комплексној равни $\mathbb{C}$
$\mathbb{D}^\times$	$\mathbb{D}\setminus\{0\}$ пробушен јединични диск
$\overline{\mathbb{D}}$	затворен јединични диск
$D(z_0, r)$	диск са центром у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника r
$\ell(\gamma)$	дужина криве γ у комплексној равни $\mathbb{C}$
$\mathbb{N}$	скуп природних бројева
$\mathbb{N}_0$	скуп $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	скуп целих бројева
$\mathbb{Q}$	скуп рационалних бројева
$\mathbb{R}$	скуп реалних бројева
$\mathbb{R}^2$	скуп свих уређених парова (x, y) са реалним координатама
$\operatorname{Re} z$	реалан део комплексног броја z
$\sinh$	тригонометријска функција синус хиперболички
$H(\Omega)$	холоморфне функције у области Ω
$\mathbf{1}_\Omega$	идентичко пресликавање у области Ω у комплексној равни
$\lvert z\rvert$	модул комплексног броја z
$\overline{z}$	конјугат комплексног броја z